



HAL
open science

Philosophie de l'axiomatique

Paola Cantu

► **To cite this version:**

Paola Cantu. Philosophie de l'axiomatique. Sciences de l'Homme et Société. Ecole Normale Supérieure de Paris - ENS Paris, 2022. tel-04488654

HAL Id: tel-04488654

<https://hal.science/tel-04488654>

Submitted on 4 Mar 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Philosophie de l'axiomatique

rapport de synthèse

Paola Cantù

le 25 mars 2022
École Normale Supérieure, rue d'Ulm, Paris
Correspondant HDR : Mark van Atten
UMR 8547 Pays Germaniques (CNRS / ENS)

Table des matières

1	Pour une philosophie de l'axiomatique	3
1.1	Qu'est-ce que c'est l'axiomatique?	5
1.1.1	Trois conceptions de l'axiomatique en mathématiques	5
1.1.1.1	L'axiomatique en tant que recherche sur les fondements des mathématiques	6
1.1.1.2	L'axiomatique comme style mathématique	6
1.1.1.3	L'axiomatique en tant qu'institution	8
1.1.2	Les objectifs de l'axiomatique	9
1.2	Méthodologie de recherche	16
1.2.1	Philosophie des mathématiques	16
1.2.2	Philosophies de la pratique mathématique	18
1.2.3	Philosophie et histoire	20
1.2.4	Collaborations	23
2	Cheminement intellectuel	27
2.1	Premiers écrits sur les fondements de la géométrie	27
2.2	La philosophie de Bolzano et Frege à Genève (1998-1999)	29
2.3	Le doctorat (1999-2003) : Genova et Erlangen	29
2.4	Postdoc : Milan 2004-2008	32
2.5	Postdoc : Nancy-Paris et Aix-Marseille (2008-2011)	34
2.6	Chargée de recherche au CNRS (2011--)	37
3	Thèmes de recherche	45
3.1	L'influence des mathématiques sur la logique	45
3.1.1	Problèmes mathématiques qui influencent la logique	46
3.1.1.1	Les concepts vides et les éléments idéaux	46
3.1.1.2	Egalité absolue et relative	50
3.1.1.3	La notion de fonction	52
3.1.2	L'opposition entre géométrie et arithmétique et son rap- port à la logique	54

3.1.2.1	Géométrie analytique et synthétique	56
3.1.2.2	Les mathématiques comme science des gran- deurs (<i>Größenlehre</i>) et la <i>mathesis universalis</i>	60
3.2	L'axiomatisation au XIX ^e siècle	68
3.3	Logique et argumentation	75
4	Projets futurs	81
4.1	Projet à 4 ans. Les définitions axiomatiques	81
4.1.1	La poursuite des travaux en cours	81
4.1.2	Les définitions axiomatiques	82
4.2	Projet à 8 ans. Une approche non fondationnaliste de l'axioma- tique	88
4.3	Projet à 12 ans. Philosophie de l'axiomatique	88
5	Résumé des 5 publications les plus significatives	91
5.1	Les arguments sur les éléments idéaux en mathématiques	92
5.2	L'application des mathématiques et sa valeur épistémologique .	95
5.3	La philosophie de Grassmann et le structuralisme contemporain	98
5.4	Logique impure et philosophie de l'axiomatique	101
5.5	Philosophie des mathématiques et pratique axiomatique	103
	Références	109

Le rapport de synthèse est divisé en cinq parties.

La première présente l'objectif général de mes recherches en philosophie et histoire des mathématiques et de la logique, à savoir une philosophie systématique de l'axiomatique émergeant d'études textuelles, épistémologiques et historiques de nombreux mathématiciens fin XIXe et début XXe et de la méthodologie qu'ils ont adoptée.

La deuxième partie décrit mon parcours intellectuel et scientifique, en mentionnant les principales publications et conférences sur invitation, ainsi que les responsabilités collectives et administratives.

La troisième partie présente mes principaux thèmes de recherche actuels, qui portent sur le rapport entre mathématique et logique, sur l'axiomatisation au XIXe siècle et sur la théorie de l'argumentation.

La quatrième partie mentionne mes projets futurs sur l'axiomatique (à 4 ans, 8 ans et 12 ans).

La dernière partie comprend un résumé des cinq publications que j'ai sélectionnées comme étant les plus représentatives du point de vue de l'habilitation à diriger des recherches.

Chapitre 1

Pour une philosophie de l'axiomatique

L'objectif théorique général de mes recherches est de procéder à un étude philosophique comparative de diverses approches axiomatiques aux théories mathématiques. L'axiomatisation de la géométrie et sa relation complexe avec la logique et la philosophie des mathématiques ont d'abord suscité mon intérêt et attiré mon attention, ce depuis les premières recherches que j'avais effectuée en vue de la rédaction d'une thèse de master sur les fondements de la géométrie chez Giuseppe Veronese. À l'époque, je considérais que le rôle principal de l'axiomatique était de contribuer à l'étude des fondements, et donc à une analyse philosophique des principes et des règles mathématiques, à la discussion sur la possibilité de réduire les mathématiques à la logique, ou à des questions de pureté dans la relation entre arithmétique et géométrie. L'analyse ultérieure de nombreux exemples de formulation axiomatique (Peano, Bettazzi, Hölder, Pasch, Hilbert) et d'autres questions de philosophie des mathématiques m'ont amenée à rechercher une vision plus large de ce qu'est l'axiomatique, suggérant de procéder à une véritable étude philosophique de ses formes, objectifs, méthodes. Même si nous limitons notre attention à une période comprise entre la fin du XIXe siècle et la première moitié du XXe siècle, la variété des manifestations de l'axiomatique y est déjà telle qu'elle suggère l'opportunité de cette étude plus large et plus profonde du sujet que j'ai entreprise—une approche dont on notera qu'elle est peu courante dans la littérature.¹ Commençons par une clarification conceptuelle préliminaire pour distinguer la manière dont j'utiliserai les trois termes « axiomatique », « méthode axiomatique » et « théorie axiomatique ».

La *méthode axiomatique* utilisée pour la formulation des théories mathématiques se présente sous de nombreuses formes, qui diffèrent principalement

1. SCHLIMM 2006, p. 2-3.

par le langage utilisé : formel, informel ou semi-formel. Même lorsque le langage est formel, il existe plusieurs possibilités de reconstruction, par exemple en utilisant la logique du premier ou du second ordre, la logique classique ou intuitionniste, etc. Mais la méthode axiomatique varie également avec le temps : la distinction traditionnelle entre la méthode euclidienne classique et la méthode hypothético-déductive moderne souligne la différence entre une approche axée sur le contenu (*inhaltlich*), dans laquelle les axiomes sont considérés comme des vérités évidentes et les concepts fondamentaux font l'objet de définitions explicites connaissables par intuition, et une approche formelle, dans laquelle les axiomes sont des hypothèses définissant les concepts primitifs et leurs relations mutuelles. L'étude historique de divers exemples de méthode axiomatique, et en particulier de la situation complexe liée à l'école de Peano, suggère l'existence de multiples variantes qui sont en quelque sorte intermédiaires entre l'axiomatique classique de type euclidien et l'axiomatique moderne hypothético-déductive. D'autres variantes peuvent apparaître en prêtant attention non seulement au rôle des axiomes et des définitions, mais aussi à la formulation explicite et au rôle des règles logiques.

Une *théorie axiomatique* est composée d'un langage, d'une théorie logique (qui comprend des termes logiques primitifs, des axiomes logiques et des règles logiques d'inférence), d'un ensemble de termes primitifs ou indéfinis, d'un ensemble d'énoncés considérés comme des axiomes, d'un ensemble de termes définis et d'un ensemble de théorèmes qui peuvent être dérivés avec les règles logiques d'inférence à partir des axiomes (souvent, d'autres règles spécifiques de dérivation sont autorisées à côté des règles logiques fondamentales). La méthode axiomatique, sous ses diverses formes et avec les divers outils utilisés, conduit à de multiples formulations de théories mathématiques, par exemple des nombres naturels, rationnels, réels, complexes, des espaces vectoriels, de la géométrie plane et solide, de la géométrie projective, de la théorie des ensembles. Une étude philosophique de l'axiomatique a pour tâche d'analyser les différences entre ses diverses formes, en soulignant leurs différentes appartenances historiques, mais aussi leurs objectifs relatifs, leurs avantages et leurs inconvénients. D'autre part, une même théorie axiomatique peut être analysée de différents points de vue. D'un point de vue syntaxique, une théorie axiomatique est, comme mentionné, un ensemble d'énoncés, mais d'un point de vue sémantique, elle est plus correctement caractérisée par les modèles non linguistiques qui satisfont les énoncés. Enfin, dans une perspective pragmatique, une théorie axiomatique est caractérisée par les exemples, les problèmes, les normes, les compétences et les pratiques qui la distinguent.²

2. SAVAGE 1990; WINTHER 2016.

Pour toutes ces raisons, il est utile d'introduire le terme d'*axiomatique*, par opposition à la méthode axiomatique et à la notion de théorie axiomatique, pour caractériser l'ensemble des éléments et des perspectives que l'une et l'autre ouvrent à l'enquête philosophique. Mais comment faut-il comprendre ce terme ? Sans prétendre à l'exhaustivité, je distinguerai dans ce qui suit trois manières générales de comprendre l'axiomatique auxquelles j'ai été confrontée dans mes recherches. J'espère que cette brève introduction systématique permettra de comprendre les motivations philosophiques qui sous-tendent mes recherches des vingt dernières années, mais aussi la direction que prendront mes futures recherches, visant à recomposer dans un aperçu systématique une multiplicité de formulations axiomatiques historiquement situées, et souvent liées à un domaine mathématique particulier, que j'ai analysées en détail jusqu'à présent.

1.1 Qu'est-ce que c'est l'axiomatique ?

1.1.1 Trois conceptions de l'axiomatique en mathématiques

Les trois approches sur lesquelles je me concentrerai sont l'axiomatique en tant que *recherche sur les fondements des mathématiques*, l'axiomatique en tant que *style mathématique* et l'axiomatique en tant qu'*institution sociale*. La première est l'approche la plus courante dans la littérature philosophique sur l'axiomatique des mathématiques, et je me limiterai à quelques mentions très brèves, notamment parce que le sujet est présent dans la plupart de mes publications discutées dans la troisième partie de ce rapport. Les deux autres approches, sur lesquelles je n'ai commencé à réfléchir que très récemment, grâce à quelques recherches sur l'épistémologie historique et sur la relation entre l'ontologie sociale et la pratique mathématique, constituent deux domaines de recherches futures, que j'esquisse ici plus sous forme de programme que comme résultat d'une recherche achevée.

Chacune de ces visions de l'axiomatique est diversifiée sur le plan interne, et afin de distinguer ces variantes, il est utile de considérer les objectifs que l'axiomatique sert dans chaque cas. Je présenterai donc une brève analyse des buts que l'axiomatique a servis chez divers auteurs clés entre le XIXe et le XXe siècle. Cette classification des finalités, qui découle principalement mais pas exclusivement des recherches menées jusqu'à présent sur l'axiomatique en tant qu'étude des fondements, pourrait être enrichie ou modifiée à l'avenir par les contributions des deux autres approches.

1.1.1.1 L'axiomatique en tant que recherche sur les fondements des mathématiques

L'axiomatique peut viser à résoudre *la question des fondements*, c'est-à-dire à déterminer quels sont les principes des sciences, en distinguant éventuellement *l'ordo essendi* de *l'ordo cognoscendi*, c'est-à-dire ce qui est premier en soi de ce qui est premier pour nous. Dans ce sens classique, inauguré dans les *Premiers Analytiques* d'Aristote, l'axiomatique a une portée ontologique et cognitive. De ce point de vue, les autres questions clés que pose l'axiomatique sont par exemple le réductionnisme (quels sont les principes réellement indépendants les uns des autres et quels sont ceux qui peuvent être réduits aux principes d'autres disciplines ou aux principes logiques ?) et la pureté (est-il possible de formuler une théorie axiomatique sans incorporer des principes provenant d'autres disciplines ou sciences ?). Dans ce cadre général, différentes interprétations de la question des fondements (relatives, par exemple, à la rigueur et à l'élimination des erreurs dans les définitions ou les démonstrations mathématiques ou à la clarification philosophique de la nature des éléments fondamentaux) et différentes approches des systèmes formels en tant que systèmes clos ou ouverts conduisent à une énorme variété de formes possibles.³

1.1.1.2 L'axiomatique comme style mathématique

L'axiomatique, cependant, peut aussi être considérée comme quelque chose d'historique et de culturel et en même temps incarnée dans une théorie mathématique particulière, c'est-à-dire comme un *style mathématique*, un terme dérivé de l'analogie avec les styles artistiques ou littéraires. Paolo Mancosu compare l'usage fait du terme en philosophie, en histoire des mathématiques et en mathématiques et distingue style individuel, méthodologique, épistémique, national, culturel, d'écriture, de pensée ou cognitif, mais n'applique pas cette distinction au cas spécifique de l'axiomatique.⁴ Que peut-on donc comprendre par style axiomatique ? Par exemple l'un des éléments qui caractérisent le style d'écriture d'un certain mathématicien (on parle de l'axiomatique à la Dedekind ou à la Peano). Mais en même temps, un style axiomatique individuel peut devenir un style méthodologique ou une tradition de recherche : Buss distingue,

3. Je reviendrai sur ces différences et d'autres dans la troisième partie de ce rapport, où je donnerai également des indications bibliographiques plus précises sur les sources mathématiques de cette approche et les publications dans lesquelles nous les avons analysées. Voir aussi le chapitre 6 du manuscrit inédit sur l'école de Peano *Peano's Philosophy of Mathematics. The Peano School and the practice of axiomatics*, où cette approche est discutée en détail en référence à l'école de Peano (Annexe C3).

4. MANCOSU 2017.

par exemple, la théorie de la démonstration à la Hilbert, dans laquelle chaque étape d'une dérivation est une formule, de la théorie de la démonstration à la Gentzen, dans laquelle chaque étape d'une dérivation est un séquent.⁵

Dans un autre sens, l'axiomatique peut être considérée comme un élément d'un style de pensée, c'est-à-dire comme une composante d'un paradigme ou comme un concept épistémique.⁶ L'axiomatique peut encore être interprétée comme un style cognitif, qu'il s'agisse de la structure du développement psychologique humain—pour Piaget, le développement mental de l'enfant est associé au démêlage progressif des axiomes logico-mathématiques—ou de l'un des nombreux styles cognitifs pour lesquels l'enseignant ou l'élève peut avoir une préférence dans l'enseignement et l'apprentissage.⁷

Dans le contexte historique, il est possible de considérer le style axiomatique comme une catégorie historiographique ou mathématique—pensez au contraste entre la conception déductive aristotélicienne des mathématiques, dans laquelle les axiomes sont vrais et évidents, et la conception hypothético-déductive hilbertienne⁸—ou comme un style mathématique⁹, illustré par exemple par Zermelo dans le cas de la théorie des ensembles.¹⁰

Le style axiomatique pourrait alors à son tour faire l'objet des distinctions en sous-styles distincts ou opposés. La distinction interne à l'axiomatique entre (a) approche hypothético-déductive, qui voit une théorie comme un système clos, (b) approche sémantique, qui voit une théorie comme un ensemble de modèles, et (c) approche analytique—compatible avec la vision d'une théorie comme un système ouvert¹¹—pourrait être considérée comme une différence de style. Deux formes opposées du style axiomatique seraient l'axiomatique axée sur le contenu, qui comprend la géométrie d'Euclide, la mécanique de Newton et la thermodynamique de Clausius, et l'axiomatique formelle ou existentielle.¹² De même, on pourrait comprendre comme des sous-styles opposés le style des modernistes, pour qui les mathématiques n'ont à voir qu'avec des mots, et le style des anti-modernistes, pour qui les mathématiques ont à voir avec des objets.¹³

5. BUSS 1998.

6. Voir respectivement KUHN 1962 et HACKING 1999.

7. Voir PIAGET 1947, BORROMEO FERRI 2005 et LERMAN 1990.

8. KLINE 1990, vol. 3.

9. De LORENZO 1971.

10. Voir ZERMELO 1908 et GRAY 2008, p. 260.

11. CELLUCCI 2017.

12. Voir HILBERT et BERNAYS 1934, p. 2 et SIEG et RAVAGLIA 2005, p. 987.

13. Voir MEHRTENS 1990 et GRAY 2008, p. 9. Cette analyse de l'axiomatique comme style m'a été suggérée par la lecture de l'article cité de Paolo MANCOSU 2017, par la lecture de MARQUIS 2020, de RABOUIN 2017, et par la lecture de plusieurs auteurs de la tradition épis-

1.1.1.3 L'axiomatique en tant qu'institution

Une troisième façon d'aborder l'axiomatique est de considérer qu'il s'agit d'un élément qui caractérise les mathématiques depuis très longtemps, bien que sous des formes changeantes, et qui les a caractérisées comme une entreprise cognitive réalisée par des agents humains qui les ont utilisées pour gérer des interactions réciproques complexes. La persistance dans le temps, la possibilité de distinguer l'axiomatique en tant que *type* de ses instanciations (*tokens*) basées sur différentes méthodes et différentes formulations de théories, ainsi que la présence de règles, fonctions, agents et rôles, suggèrent de se demander si l'axiomatique peut être considérée comme une institution sociale. En ontologie sociale, la discipline philosophique qui étudie les institutions sociales et leurs composantes, une institution est généralement caractérisée par des règles, des obligations, des problèmes de coordination, des agents et des rôles¹⁴. L'axiomatique formelle pourrait être associée à l'ensemble des *règles* suivantes : 1) déterminer les termes primitifs d'une théorie et les axiomes qui les définissent implicitement ; 2) rendre explicites les règles légitimes de dérivation ; 3) spécifier quelle règle est appliquée à chaque étape d'une preuve. Dans cette approche, certains des problèmes métathéoriques classiques associés à l'axiomatique pourraient être considérés comme des *obligations* spécifiques. Par exemple, la cohérence serait une obligation justifiée par le fait qu'il est indésirable qu'un énoncé et sa négation soient tous deux des axiomes ou des théorèmes du même système. La complétude au sens hilbertien (géométrique) pourrait être considérée comme une obligation dictée par le fait qu'il est souhaitable que le système axiomatique ait un niveau de généralité adéquat. Les agents incluent des êtres humains et éventuellement aussi des ordinateurs et des systèmes multi-agents. Les rôles incluent celui de chercheur, enseignant, étudiant, rapporteur de revue, etc. De nombreux problèmes de coordination pourraient être facilités par l'axiomatique : a) éviter de prouver un théorème qui a déjà été prouvé de manière satisfaisante ; b) fournir un cadre conceptuel commun pour comparer différentes preuves du même théorème et évaluer laquelle est la plus adéquate ; c) faciliter l'interaction et la coordination entre différents chercheurs, groupes de chercheurs et projets de recherche dans la démonstration de nouveaux résultats ou la formulation de nouvelles conjectures ; d) faciliter l'unification de résultats fragmentés en une unité organique.¹⁵

témologique française (Chevalley, Granger, ...) ainsi que par une collaboration sur Bourbaki avec Frédéric Patras et par de nombreuses discussions fructueuses avec Sébastien Maronne et d'autres collègues à l'occasion d'une École Thématique à Toulouse en 2021.

14. GUALA 2016 ; EPSTEIN 2016.

15. Cette interprétation de l'axiomatique en tant qu'institution sociale a fait l'objet d'une présentation au colloque international ENPOSS 2020.

1.1.2 Les objectifs de l'axiomatique

L'un des principaux problèmes d'une philosophie de l'axiomatique est de comprendre la relation entre les différentes méthodes appliquées et les objectifs que se fixent les chercheurs formulant des théories sous forme axiomatique. L'étude de l'école de Peano m'a permis d'observer que des objectifs souvent conceptuellement distincts sont coprésents chez le même auteur et dans la formulation d'une théorie axiomatique donnée. La distinction entre les trois approches décrites ci-dessus permet d'enrichir la liste des objectifs typiques de l'axiomatique en tant qu'étude des fondements en y ajoutant des objectifs qui ont émergé de l'étude de l'axiomatique en tant que style (finalité génétique-historique) et en tant qu'institution (finalité de coordination).

Objectif heuristique

L'axiomatique est utile pour formuler de nouvelles conjectures, pour comprendre pourquoi certaines sont plus centrales que d'autres, pour fournir de nouvelles démonstrations, pour simplifier et accélérer des démonstrations déjà données par d'autres moyens et pour découvrir des erreurs dans une théorie, ou de nouveaux problèmes.¹⁶ Freudenthal en tant que mathématicien considère la finalité heuristique de l'axiomatique comme son aspect principal,¹⁷ et considère donc les *Grundlagen der Geometrie* comme son meilleur exemple, même si la formulation de l'essence de l'axiomatique se trouve également chez Padoa et que l'élimination du lien avec l'intuition, également présente chez Pasch, est déjà évidente chez des auteurs comme Fano (j'ajouterais Bettazzi).¹⁸ L'exemple cité explique très bien pourquoi, selon l'objectif considéré comme primaire en axiomatique, un auteur ou l'autre en devient le père fondateur.

Analyse conceptuelle

L'axiomatique est également un outil d'analyse conceptuelle des mathématiques, c'est-à-dire un outil permettant de comprendre quels concepts présupposent d'autres concepts et lesquels sont indépendants les uns des autres, de

16. Comme le dit Hilbert : « Maintenant mon présent Travail, comme j l'ai déjà dit, est plutôt une recherche critique sur les principes de la Géométrie *euclidienne*. Dans cette recherche nous avons eu pour guide ce principe fondamentale : faire la discussion de chaque question qui se présente de manière à examiner en même temps s'il est possible ou non de répondre à cette question en suivant une voie assignée d'avance et en se servant de certains moyens limités. Ce principe fondamental me semble contenir une règle générale et conforme à la nature des choses. » HILBERT 1900, p. 110.

17. FREUDENTHAL 1957, p. 153.

18. Voir PADOA 1901, PASCH 1884, FANO 1958 et BETTAZZI 1890.

distinguer des notions qui sont souvent exprimées par le même terme dans le langage mais qui ont des fonctions logiques ou mathématiques distinctes.

Dans le cas de l'école de Peano, l'idéographie n'est autre chose qu'une forme d'analyse conceptuelle,¹⁹ qui part généralement de l'analyse textuelle d'un manuel de mathématiques. L'analyse se déroule en deux étapes qui s'influencent mutuellement. D'une part, l'analyse du langage et de la structure des démonstrations permet de mettre en évidence les termes logiques primitifs, par exemple en distinguant la notion d'appartenance et d'inclusion, souvent désignée par le même terme (la copule *est*), et les règles logiques primitives (par exemple le syllogisme et le *modus ponendo ponens*). D'autre part, l'analyse des définitions mathématiques fournies dans les manuels d'analyse et de géométrie constitue le point de départ de la recherche des concepts fondamentaux des mathématiques et de la formulation axiomatique de l'arithmétique, de la géométrie, de la théorie des espaces vectoriels, etc. Comme Peano et ses collaborateurs l'expliquent clairement, à un certain point, la formulation axiomatique des théories mathématiques induit une modification de la formulation axiomatique de la théorie logique, et à son tour la modification de cette dernière nécessite un ajustement de la formulation des théories mathématiques.²⁰

Recherche de la rigueur

L'axiomatique sert à éliminer le risque de contradictions internes à une théorie et à éliminer les erreurs qui pourraient résulter d'un recours excessif aux idées intuitives, de l'hypothèse d'axiomes contradictoires, du choix d'une mauvaise définition, de l'application d'une règle incorrecte dans la dérivation, d'une erreur dans la preuve. La quête de la rigueur peut s'exprimer de diverses manières en mathématiques, et il est important de distinguer les besoins mathématiques et philosophiques. Pour Peano, bien que sa position sur ce point diffère sensiblement de celle de Pieri et Padoa, l'intérêt pour la rigueur s'inscrit dans la tradition du problème de l'analyse conceptuelle des fondements des mathématiques plutôt que dans celle de la fondation philosophique des mathématiques.²¹ Pour Bolzano il s'inscrit dans l'ordre de présentation des concepts et des propositions d'une théorie scientifique.²²

19. SCHLIMM 2021.

20. « L'idéographie logique, en plus d'être l'outil le plus approprié pour une étude non superficielle de la logique, en abolissant toute promiscuité insidieuse de son vocabulaire avec celui d'autres sciences qui ne présupposent que la logique, comme l'arithmétique et la géométrie, a obligé chacune de celles-ci à une révision tout aussi diligente de son propre vocabulaire. » Voir PADOA 1933, p. 76-77, ma trad.

21. Voir CANTÙ 2014e et MANGIONE et BOZZI 1993, p. 262.

22. BOLZANO 1804.

Par problème mathématique des fondements, j'entends ici l'objectif de donner une organisation rigoureuse à l'ensemble des mathématiques, en fournissant une caractérisation précise et non ambiguë de ses concepts clés, par exemple de limite et de continuité dans le cas de l'analyse.²³ Parmi les auteurs qui ont contribué au renouvellement des mathématiques dans ce sens, on peut citer Gauss, Abel, Cauchy, Bolzano, et dans la phase historique de l'arithmétisation de l'analyse, Weierstrass, Cantor et Dedekind (mais aussi Kossak, Meray, Heine, Lipschitz et Tannery), qui ont essayé d'éviter le recours à la notion de continuité géométrique dans la définition des propriétés des nombres réels.

Par fondement logico-philosophique des mathématiques, j'entends plutôt une réflexion sur la nature du symbolisme et de l'abstraction utilisés dans les pratiques mathématiques, sur les conditions qui légitiment leur application et justification.²⁴ La question fondamentale est associée à une vision hypothético-déductive des théories et à la discussion de points de vue philosophiques alternatifs sur les mathématiques : logicisme, intuitionnisme et formalisme.²⁵

Si l'on accepte cette distinction, la recherche de la rigueur ne peut être identifiée ni à l'analyse conceptuelle qui permet d'identifier les éléments primitifs d'une théorie, ni à l'objectif descriptif qui consiste à produire une présentation sans erreur d'une théorie axiomatique. En effet, les méthodes de recherche de la rigueur sont souvent différentes. Dans le cas de Peano, la méthode clé est celle du contre-exemple et s'applique principalement aux définitions mathématiques, dont on montre l'inadéquation en trouvant des exemples qui les satisfont et doivent être exclus, ou des exemples qui ne les satisfont pas et doivent être acceptés. Par exemple, Peano critique la définition de Peano-Schwartz car la généralisation aux surfaces de la définition donnée pour la longueur d'un arc de courbe n'est pas applicable à toutes les surfaces concaves.²⁶

Même si nous nous limitons au domaine logico-philosophique, il convient de noter que la recherche de la rigueur ne présuppose pas nécessairement une conception formelle de l'axiomatique, mais est parfaitement compatible avec une vision orientée vers le contenu, ainsi qu'avec une évaluation positive du rôle de l'intuition en mathématiques, qui pour Gödel reste nécessaire afin de justifier l'applicabilité des mathématiques.²⁷

23. MANGIONE *et* BOZZI 1993, p. 269.

24. MANGIONE *et* BOZZI 1993, p. 262.

25. SHAPIRO 2005.

26. PEANO 1890.

27. Voir GÖDEL 1953/9, p. 348–9 *et infra*, § 4.1.1, p. 82.

Objectif descriptif

L'axiomatique sert à exposer une théorie une fois qu'elle a déjà été développée. Cet objectif est souvent considéré par les philosophes comme purement accessoire, ou du moins tout à fait secondaire par rapport à l'objectif d'analyse conceptuelle ou de recherche de la rigueur, qui constituent les deux piliers de l'approche de l'axiomatique en tant qu'investigation philosophique des fondements. Cela ne tient néanmoins pas compte de l'histoire de la logique, qui a longtemps été considérée comme une théorie générale des concepts ayant l'objectif primaire d'ordonner correctement les concepts dans un traité. Ainsi, la logique était pour Bolzano l'art d'exposer une théorie dans un manuel approprié (*Wissenschaftslehre*), ce qui explique l'accent mis par Bolzano sur l'analyse critique de l'ordre des concepts géométriques dans les *Éléments* d'Euclide.²⁸ Le bon ordre des concepts était souvent lié à la distinction entre un ordre correct des concepts (celui présent dans l'esprit divin) et l'ordre reconstruit par les hommes. La difficulté de fournir une liste exhaustive des concepts fondamentaux d'une discipline (Bolzano ne fournit pas une liste exhaustive des concepts logiques fondamentaux) était précisément liée à la différence entre la finitude humaine et la finitude divine, un thème que l'on retrouve également chez Gödel, par exemple lorsqu'il observe que les paradoxes de la théorie des ensembles sont dus à un mauvais choix d'axiomes et non à un problème d'existence des ensembles.²⁹

Pour les philosophes des sciences, l'objectif descriptif explique la valeur de l'axiomatique dans les contextes de justification mais aussi pourquoi elle ne permet pas de nouvelles découvertes. Hempel observe par exemple que l'axiomatique, étant un « dispositif d'exposition » des théories,³⁰ sert à les comparer et à les justifier, mais pas à découvrir de nouveaux faits. L'objectif descriptif est donc opposé à l'objectif heuristique.

Objectif génético-historique

L'axiomatique est parfois utilisée pour comparer différentes théories, pour expliquer la transformation ou l'évolution d'une théorie en une autre et éventuellement le progrès cognitif qui s'ensuit. Un exemple très connu est celui des *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert, dans lequel la distinction entre les groupes d'axiomes est également utilisée pour comparer différentes théories géométriques.³¹ Mais nous voudrions également mentionner le cas de Giu-

28. Voir BOLZANO 1837, BOLZANO 1804 et BOLZANO 1810.

29. CROCCO, ATTEN, CANTÙ et ROLLINGER 2020a, p. 48, 73, 86.

30. HEMPEL 1970, p. 250.

31. HILBERT 1899.

seppo Veronese, car sa formulation axiomatique de la géométrie infinitésimale a été dès le début liée à la comparaison entre le continu non-Archimédien et le continu de Dedekind et l'a incité à écrire un long appendice à son livre *Fondamenti della geometria* qui constitue l'un des premiers exemples d'histoire des mathématiques profondément influencée par l'axiomatique.³²

D'autres exemples intéressants sont ceux du *Formulaire* de Peano et des *Elements* de Bourbaki, tous deux extrêmement attentifs à la formulation axiomatique et en même temps à la rédaction de notes historiques capables d'expliquer la première occurrence d'une certaine formule ou l'évolution interne des idées mathématiques.³³

Objectif architectural

L'axiomatique peut être utilisée pour restructurer et mieux comprendre l'édifice global d'une science, qui évolue au gré des théories axiomatiques individuelles qui le composent, ou qui se renouvelle grâce à de nouvelles analogies structurelles permises par le développement de l'axiomatique elle-même (pensons par exemple aux structures mères chez Bourbaki³⁴ ou à la réorganisation disciplinaire qui a vu la transformation de la géométrie d'une science mathématique en une science physique au XIXe siècle).³⁵

La réorganisation de l'architecture des mathématiques peut également influencer leur position au sein de la classification des sciences, un problème qui a été très présent à la fin du XIXe et au début du XXe siècle, tant en raison de la multiplication des disciplines mathématiques, qui incluent désormais les probabilités, la combinatoire, les espaces vectoriels et les hypercomplexes, à côté de l'arithmétique, de la géométrie et de l'analyse, qu'en raison de la fragmentation des autres disciplines scientifiques, qui voient se multiplier les applications possibles des mathématiques.

Analyse modulaire

Dans certains cas, l'intérêt pour un problème ou un théorème mathématique n'est pas seulement lié à la compréhension du rôle qu'il joue dans un système axiomatique défini. Ce que l'on veut étudier, c'est la quantité de mathématiques nécessaire pour dériver le théorème ou résoudre le problème. De ce type est l'utilisation de l'axiomatique par Hilbert dans les *Grundlagen der*

32. VERONESE 1891.

33. Voir PEANO 1901a, BOURBAKI 1939-1984 et DIEUDONNÉ 1978.

34. BOURBAKI 1950.

35. TORRETTI 1978.

Geometrie, lorsqu'il demande ce qui peut être prouvé avec chacun des cinq groupes d'axiomes qu'il a isolés (incidence, ordre, congruence, parallélisme et continuité),³⁶ mais surtout le but des *mathématiques au rebours*, qui est de déterminer quels axiomes sont nécessaires pour prouver un certain ensemble de théorèmes ou quels systèmes formels isolent les principes nécessaires pour les prouver.³⁷

Objectif pédagogique

L'axiomatique peut également être un outil pédagogique, non seulement parce qu'elle permet une exposition claire des théories, mais parce que la présentation axiomatique développe les capacités d'abstraction des élèves.³⁸ Demander aux élèves de définir un concept ou prouver un théorème mathématique conduit naturellement à étudier plusieurs définitions et démonstrations possibles, chacune basée sur des notions et des règles distinctes.³⁹

L'effort visant à vérifier que le contenu mathématique que l'on souhaite enseigner est accessible aux étudiants à un certain niveau d'étude nécessite également une distinction entre les parties élémentaires et non élémentaires d'une théorie pour aboutir à des formulations axiomatiques alternatives d'une théorie qui n'utilisent que les axiomes élémentaires. Par exemple, Giuseppe Veronese distingue une méthode intuitive, expérimentale et pratique adaptée aux enfants d'une méthode axiomatique rationnelle et rigoureuse qui peut être introduite à partir de 14 ans : les propositions géométriques enseignées dans les deux cas ne sont pas les mêmes, car la géométrie matérielle ou pratique se limite au champ de l'observable et n'énonce donc jamais de propositions géométriques relatives à la ligne illimitée mais seulement aux segments de ligne, c'est-à-dire qu'elle ne comprend que des propositions vérifiables expérimentalement.⁴⁰

Souvent l'objectif pédagogique est associé à l'objectif descriptif, car dans la rédaction d'un manuel d'enseignement, le problème du bon ordre des concepts est décliné en termes de l'ordre qui facilite le plus l'apprentissage sans exiger des notions étrangères au domaine de connaissance des apprenants. Le problème de la pureté, c'est-à-dire la recherche d'une preuve d'un théorème qui ne fasse pas appel à des notions étrangères à la théorie en question, trouve parfois son origine non pas dans le souci philosophique d'adhérer au principe aristotélien qui interdit de dépasser le genre d'objets dont parle la théorie (par

36. HILBERT 1899.

37. FRIEDMAN 1975, p. 235.

38. PIAGET 1968.

39. PEANO 1921.

40. VERONESE 1909.

exemple, en utilisant des outils arithmétiques dans une démonstration géométrique ou des théorèmes de géométrie sphérique en géométrie plane), mais dans le souci didactique de fournir une démonstration que les élèves soient capables de produire de manière autonome.

Objectif de coordination

Si l'on considère les mathématiques comme une activité sociale menée par des agents humains concrets ou des systèmes multi-agents qui se trouvent dans la nécessité pratique de réguler leurs interactions, il devient plus facile de comprendre dans quelle mesure une théorie axiomatique peut servir à résoudre les problèmes de coordination entre différents agents.

Il ne s'agit pas d'un problème qui n'est apparu qu'avec la tendance récente de la philosophie des mathématiques à traiter des pratiques scientifiques concrètes, ni d'un problème rendu nécessaire par l'introduction des ordinateurs. Curieusement, Peano justifiait déjà l'opportunité de construire un recueil de formules mathématiques en tant qu'outil pratique visant à orienter le mathématicien de manière qu'il voie immédiatement ce qui avait déjà été démontré et ce qui restait à faire.⁴¹

D'autres problèmes de coordination sont résolus grâce à des objectifs spécifiques de l'axiomatique, comme l'objectif génético-historique, qui permet de comparer les théories développées à différentes époques et avec différents outils, et donc aussi de comprendre dans quelle mesure une preuve fournie avec de nouvelles techniques peut être plus ou moins adéquate ou plus ou moins générale qu'une preuve précédente.

Dans une perspective d'histoire externe des mathématiques, qui porte l'attention sur les institutions concrètes dans lesquelles les agents mathématiques opèrent (universités, revues, institutions de recherche, écoles, etc.), l'objectif de la coordination devient essentiel pour comprendre la dynamique des entreprises collectives, de l'évaluation par les pairs et des controverses scientifiques.

Dans la mesure où l'unification des mathématiques ou des sciences fait également partie des instruments qui favorisent la coordination des agents mathématiques, l'objectif de coordination s'articule également avec l'objectif architectural mentionné ci-dessus.

41. PEANO 1896.

1.2 Méthodologie de recherche

Avant de mentionner les thèmes et la portée des résultats scientifiques obtenus, nous voudrions ajouter quelques remarques concernant la méthodologie utilisée dans nos recherches. Le but initial dans ma thèse de doctorat était celui d'examiner comment les mathématiciens conçoivent leur discipline et leur activité, comment ils réfléchissent sur celles-ci afin d'en donner une définition théorique ou d'en préciser les rapports avec les autres sciences. Cette approche accorde une grande importance à la recherche historique sur les mathématiques et à l'étude de la pratique mathématique, y incluses la symbolisation et l'argumentation. Nous partageons l'idée qu'une conception de la philosophie des sciences qui serait indifférente à la pensée des scientifiques eux-mêmes et à l'analyse détaillée de leur œuvre et des méthodes qu'ils déploient dans leur pratique serait incomplète. D'autre part, une philosophie des mathématiques ne peut se résoudre ni à une analyse descriptive des pratiques mathématiques concrètes développées par des mathématiciens individuels ou des groupes de chercheurs, ni à une analyse purement historique. Dans les sections qui suivent, nous donnerons une idée de notre méthode en philosophie des mathématiques en discutant les relations entre philosophie, mathématiques, histoire des mathématiques et philosophie de la pratique mathématique.

1.2.1 Philosophie des mathématiques

La philosophie des mathématiques, et plus généralement la philosophie des sciences, est un champ d'étude aux frontières floues, aux définitions multiples et aux objets d'étude différents. Il s'agit d'une activité philosophique portant sur les concepts mathématiques, mais aussi d'une enquête sur la relation entre deux formes différentes de connaissance (Kant),⁴² d'une métaréflexion des mathématiciens sur leur propre travail (Peano),⁴³ ou encore d'une étude des pratiques mathématiques.⁴⁴ Pour nous, la philosophie des mathématiques est une activité qui est générée au sein des mathématiques, et il importe peu qu'elle soit menée par un mathématicien professionnel ou un philosophe, du moment qu'ils disposent des outils nécessaires.

Prenons l'exemple classique de la question des fondements des mathématiques, qui a longtemps été considérée comme emblématique de l'approche de la philosophie analytique, une approche critiquée pour ses prétentions à régler de manière normative ce que les mathématiques devraient être sans

42. KANT 1781.

43. CANTÙ *s. d.*

44. CARTER 2019.

enquêter sur leur évolution. Même dans l'étude purement philosophique des fondements des mathématiques, la philosophie s'inspire d'un problème propre aux mathématiques, la recherche d'un fondement rigoureux de ses concepts fondamentaux, pour le transformer en un problème plus strictement logique, qui concerne soit une partie très restreinte des mathématiques (la logique mathématique et éventuellement certaines parties élémentaires de l'arithmétique et de la géométrie), soit une partie de la philosophie elle-même, étant donné que pour de nombreux auteurs la logique mathématique est une discipline philosophique écrite en notation symbolique.⁴⁵

Et pourtant, l'équilibre entre normativité et description est très difficile à maintenir. Stewart Shapiro a distingué deux manières différentes d'aborder la philosophie des mathématiques, décrites respectivement par les principes méthodologiques « philosophy first » et « philosophy last-if-at-all ». Dans le premier cas, les raisons philosophiques en faveur d'une certaine ontologie mathématique déterminent de manière normative la manière dont les mathématiques doivent être faites ; dans le second cas, la philosophie est un simple épiphénomène qui n'exerce aucune influence sur le développement des mathématiques.⁴⁶ La philosophie analytique a souvent eu tendance à privilégier exclusivement le premier mode, alors que la philosophie de la pratique mathématique, que nous aborderons dans la section suivante, tend à privilégier le second, même au risque de devenir parfois une discipline simplement descriptive, dépourvue d'agenda philosophique identifiable.⁴⁷

L'approche « philosophy first » sur laquelle Shapiro s'aligne, tout en insistant sur la nécessité d'abattre les murs inutiles entre la philosophie et les mathématiques et sur l'opportunité de considérer la normativité philosophique comme quelque chose qui n'est pas immuable, suppose que la philosophie est une activité menée exclusivement par des philosophes professionnels (qui peuvent également être compétents en mathématiques) et qu'elle influence les mathématiques sans être significativement influencée par elles. Nous attribuons à cette approche les recherches liées au développement des ismes du XX^e siècle (néo-logicisme, nominalisme, structuralisme, etc.), les recherches liées au dilemme bien connu de Benacerraf sur le caractère indispensable des mathématiques, et plus généralement toutes les contributions de la philosophie analytique au problème de l'existence des objets abstraits, de leur accès cognitif, et du choix d'une logique du premier ou du second ordre.

L'approche « philosophy last-if-at-all » ou, comme nous préférons le dire,

45. CANTÙ 2014c.

46. SHAPIRO 1997, p. 25 et suivantes.

47. GANDON 2013, p. 213.

l'approche qui considère l'enquête philosophique comme une exigence émergeant de l'activité mathématique elle-même, exige un travail d'investigation philosophique de concepts, méthodes, problèmes et paradoxes mathématiques. D'une façon similaire, la philosophie de la pratique mathématique porte sur la façon dont les mathématiques sont faites, évaluées, appliquées ; elle analyse leur histoire, leurs traditions, ainsi que les problèmes éducatifs auxquelles elles donnent lieu et les questions cognitives qui les concernent. Notre approche à la philosophie des sciences, et plus spécialement à la philosophie des mathématiques et de la logique, est une approche multidisciplinaire qui s'ancre dans une analyse textuelle, historique, dialectique et socio-culturelle des concepts et des méthodologies utilisés dans les sciences. Cette analyse multidisciplinaire s'applique réflexivement aux analyses philosophiques des concepts scientifiques, tout comme l'analyse argumentative peut s'appliquer à des méta-arguments, c'est-à-dire à des arguments qui analysent des arguments. Les instruments de la logique, des mathématiques, de la théorie de l'argumentation, de la linguistique et de la rhétorique sont mobilisés dans le cadre d'une reconstruction philologique des documents, qui ne peut être séparée de l'analyse historique des sources et d'une comparaison du contexte socio-culturel. Nous proposons d'intégrer aux recherches les plus courantes en philosophie de la pratique mathématique une analyse de l'opposition entre savoir disciplinaire et interdisciplinaire ainsi qu'un examen de l'opposition entre argumentation logique formelle et informelle, ce qui permet de garder un équilibre entre normativité et description. L'approche interdisciplinaire exige une confrontation précise non seulement avec les mathématiques contemporaines élémentaires et avancées, mais aussi avec des domaines abordés en histoire des mathématiques, en théorie de l'argumentation, en sociologie, en intelligence artificielle, en physique, etc., en fonction du type particulier de pratique mathématique à étudier. À travers une constitution aussi transversale que possible, une ouverture à d'autres disciplines et méthodes, et surtout la mise en place de groupes de recherche collaboratifs et interdisciplinaires, l'étude philosophique des mathématiques peut aboutir à des résultats réellement innovants.

1.2.2 Philosophies de la pratique mathématique

La philosophie de la pratique mathématique est un mouvement ou une tradition de recherche qui s'est constituée initialement en opposition à une certaine partie de la philosophie analytique, comme Paolo Mancosu l'a montré en discutant les rapports avec la tradition qu'il appelle *maverick*.⁴⁸

48. MANCOSU 2008.

La philosophie de la pratique mathématique est une constellation de recherches ayant des objectifs et des intérêts divers. La plupart des auteurs partagent une forme d’anti-fondationalisme, une attention à l’histoire et un intérêt pour les questions ontologiques et épistémologiques qui se posent à partir d’études de cas mathématiques, en partie en opposition aux tendances classiques de la philosophie analytique.

Des enquêtes récentes ont détaillé les origines et l’histoire de l’étude de la pratique mathématique, en rappelant qu’elle n’est pas l’apanage de la seule philosophie, mais est également étudiée par la sociologie, la théorie de l’éducation, l’ethnologie, la biologie évolutive et la psychologie cognitive.⁴⁹ Une approche basée sur les agents, une approche épistémologique et une approche historique ont été distinguées,⁵⁰ et plusieurs questions clés de recherche sur la connaissance mathématique ont été mises en évidence, notamment les composantes, le rôle des agents, les valeurs mathématiques, la pratique mathématique, l’histoire et les relations avec d’autres disciplines,⁵¹ ainsi que les aspects dynamiques, génétiques et heuristiques.⁵²

À l’approche orientée vers la pratique appartiennent les recherches qui montrent l’intersection de la philosophie et de l’histoire des mathématiques, les recherches épistémologiques concernant la visualisation et l’explication en mathématiques, les recherches sur les démonstrations faites avec l’aide d’un ordinateur, ainsi que l’analyse de certaines propriétés des arguments mathématiques, comme la pureté, l’évidence, la fécondité. L’approche axée sur la pratique comme nous l’entendons, comprend par exemple Lakatos,⁵³ Corfield,⁵⁴ mais aussi la nouvelle épistémologie,⁵⁵ les interactions entre la philosophie et l’histoire,⁵⁶ les recherches récentes sur l’argumentation en logique et en mathématiques,⁵⁷ les recherches sur la théorie des ensembles, sur la théorie des catégories, sur la probabilité, sur la calculabilité, sur les mathématiques inconsistantes ou sur les applications et les problèmes ouverts en mathématiques.⁵⁸ La philosophie de la pratique mathématique comme nous l’avons mise en œuvre dans les recherches sur l’axiomatique dans l’école de Peano est une philosophie dynamique plutôt que statique, c’est-à-dire, selon la définition de Carlo

49. BENDEGEM 2014.

50. CARTER 2019.

51. HAMAMI et MORRIS 2020.

52. GIARDINO 2017.

53. LAKATOS 1976.

54. CORFIELD 2003.

55. MANCOSU 2008.

56. Voir FERREIRÓS et GRAY 2006; KERKOVE, DE VUYST et van BENDEGEM 2010.

57. Voir D. GABBAY, JOHNSON, OHLBACH et WOODS 2002; ABERDEIN et DOVE 2013.

58. COLYVAN 2009; COLYVAN 2012.

Cellucci, une philosophie axée sur la croissance de la connaissance mathématique plutôt que sur la justification d'un corpus de connaissances établies.⁵⁹ En particulier, il vise à distinguer et à comparer, selon une approche chère à la philosophie constructiviste, le niveau ontologique et le niveau épistémologique dans les théories logiques et mathématiques⁶⁰ et à souligner le rôle de la logique dans le développement des pratiques scientifiques.⁶¹

1.2.3 Philosophie et histoire

L'accent mis sur l'histoire de la philosophie, de la logique et des mathématiques est un élément important de la conception de la philosophie des mathématiques axée sur la pratique. L'histoire intervient cependant de plusieurs manières dans nos recherches en philosophie des mathématiques.

Il y a tout d'abord l'histoire des textes mathématiques, comprise dans une tradition qui permet de déchiffrer les références aux auteurs contemporains et antérieurs. C'est dans cette perspective que nous avons édité une lettre manuscrite de Giuseppe Veronese,⁶² traduit un texte d'Otto Hölder,⁶³ publié la bibliographie complète des œuvres d'Alessandro Padoa⁶⁴ et l'édition anglaise d'une sélection d'écrits de Vailati,⁶⁵ et participé au groupe dirigé par Gabriella Crocco pour éditer les cahiers philosophiques de Kurt Gödel.⁶⁶

Il y a ensuite les interactions entre histoire des mathématiques et histoire de la philosophie, en particulier autour du nombre et de la mesure, mais qui contribuent aussi à comprendre le rôle joué par la logique et la *mathesis universalis* à la fin du XIX^e siècle. Nous en donnons ci-après quelques exemples tirés de nos recherches.⁶⁷

L'attention portée à l'histoire nous a fait comprendre que les recherches sur la définition des nombres (réels mais aussi naturels, rationnels et complexes) et sur les transformations de l'axiomatic ne peuvent être séparée de la réflexion sur la notion de grandeur géométrique en géométrie projective, dans les théories du continuum, dans les premières formulations axiomatiques de ce que

59. CELLUCCI 2013, p. 93-96.

60. SUNDHOLM 2019; CANTÙ 2020b.

61. RAHMAN, SYMONS, D. M. GABBAY et van BENDEGEM 2004.

62. CANTÙ 2000.

63. CANTÙ et SCHLAUDT 2013.

64. CANTÙ 2007.

65. ARRIGHI, CANTU, de ZAN et SUPPES 2010.

66. CROCCO, ATTEN, CANTÙ et ENGELEN 2017; CROCCO, ATTEN, CANTÙ et ROLLINGER 2020a; CROCCO, ATTEN, CANTÙ et ROLLINGER 2020b; CROCCO, ATTEN, CANTÙ et ROLLINGER 2021.

67. CANTÙ 2014c.

sont les grandeurs mesurables et non mesurables. En d'autres termes, il n'est pas possible de comprendre la dynamique de l'axiomatisation des nombres réels et des nombres naturels sans tenir compte d'un panorama plus général, qui comprend le développement au XIX^e siècle de la géométrie projective qui amène à s'interroger sur la possibilité de définir le concept de grandeur indépendamment de la coordination numérique⁶⁸ et de la mesure⁶⁹ et plus généralement à étudier la géométrie avec une méthode synthétique plutôt qu'analytique, c'est-à-dire sans traduire les problèmes géométriques en équations. La procédure analytique, basée sur la représentation sur des axes de coordonnées cartésiennes, permet de trouver la solution de nombreux problèmes géométriques, mais 1) elle n'est pas pure car elle utilise des méthodes non géométriques (dans le processus de résolution des équations) et 2) elle présuppose qu'un système numérique privilégié (les nombres réels) est capable de représenter adéquatement toutes les propriétés géométriques de la ligne.⁷⁰ La recherche sur la nature des nombres est indissociable de l'étude des notions de grandeur et de mesure, dont une première caractérisation axiomatique a été fournie au début du XX^e siècle. Une distinction apparaît entre le concept de grandeur extensive et celui de quantité extensive : le premier, déterminé par la somme, est indépendant de la mesure,⁷¹ tandis que le second, déterminé par l'ordre, est nécessairement mesurable.⁷² Le rôle prédominant de la relation d'ordre par rapport à l'opération de somme dans la définition de la grandeur explique le caractère privilégié des nombres réels par rapport à d'autres systèmes de nombres possibles (par exemple les nombres non-archimédiens, qui n'ont pas le même type d'ordre, ou d'autres systèmes de nombres hypercomplexes). La relation d'ordre garantit, en effet, la mesurabilité et, donc, l'applicabilité des nombres aux quantités physiques—exigence formulée par Frege dans les termes de ce qu'on appelle aujourd'hui la contrainte d'application : l'applicabilité des nombres doit être interne à la définition même du nombre réel et non un résultat externe et indépendant de la définition.⁷³

Une vision historique de l'émergence de la distinction disciplinaire entre les mathématiques et la philosophie dans les classifications des sciences du XIX^e siècle et dans les réflexions philosophiques de l'époque⁷⁴ est également utile pour comprendre le rôle joué par la logique comme terme commun entre

68. GRASSMANN 1844 ; CANTÙ 2003b.

69. PONCELET 1822 ; CHASLES 1837.

70. DEDEKIND 1872 ; CANTÙ 1999.

71. VERONESE 1891 ; BETTAZZI 1890 ; CANTÙ 2010g.

72. HÖLDER 1901 ; CANTÙ 2013b.

73. CANTÙ 2018b.

74. CANTÙ 2003b, spéc. chapitres 3 et 4.

mathématiques et philosophie au XX^e siècle. Les critères utilisés pour classer les sciences au XIX^e siècle se fondaient sur différents aspects des théories scientifiques—la nature des objets, la méthodologie d'investigation, le type de connaissance atteint—mais ils s'accordaient pour assigner à la philosophie et aux mathématiques deux positions distinctes, voire opposées, mettant fin à l'idée de transférer la certitude de la méthode axiomatique à la philosophie.⁷⁵ Même dans les réflexions philosophiques sur la nature de ces deux sciences—pensons, par exemple, à Kant, Hegel, Bolzano, Husserl—on insiste sur une opposition méthodologique qui implique des champs d'application et des objectifs distincts. L'un des aspects centraux du tournant du vingtième siècle consiste précisément dans le rôle ambigu que la logique vient jouer, se calant entre les mathématiques et la philosophie au point de faire exploser ces définitions philosophiques par contraste. D'une part, dans la tradition de l'algèbre de la logique,⁷⁶ l'investigation philosophique des lois de la pensée fait appel à une notation symbolique qui détecte certaines symétries entre les relations entre les concepts et les opérations mathématiques habituelles. En revanche, dans la philosophie analytique, héritière de la perspective logiciste, les mathématiques sont réductibles à la logique, et lorsque cette dernière est considérée comme faisant partie de la philosophie, l'opposition entre mathématiques et philosophie disparaît.⁷⁷ Même ceux qui considèrent la logique mathématique comme quelque chose d'essentiellement distinct de la logique philosophique ne semblent pas vouloir opposer les deux disciplines : Peano et les membres de son école, par exemple, se sont présentés aux conférences mathématiques et philosophiques de Paris en 1900 en discutant le thème de la définition d'un point de vue logique,⁷⁸ mathématique,⁷⁹ mais aussi philosophique et scientifique.⁸⁰ Vailati en particulier insiste sur la relation entre le pragmatisme philosophique et le pragmatisme logico-mathématique, tandis que les projets de langue universelle manifestent un nouvel intérêt pour la relation entre le langage ordinaire et le langage symbolique.⁸¹

Enfin, il y a l'épistémologie historique, qui combine l'attention portée à l'histoire des mathématiques avec une analyse philosophique de la connaissance mathématique. La tradition française, visant à reconstruire la dynamique des concepts, interroge spécifiquement les connaissances mathématiques, tan-

75. BASSO 2004.

76. SCHRÖDER 1890.

77. FREGE 1884; RUSSELL 1903.

78. PADOA 1901.

79. PEANO 1901b; PIERI 1901; BURALI-FORTI 1901.

80. VAILATI 1901.

81. PEANO 1904; COUTURAT et LEAU 1903.

dis que la tradition analytique (notamment Ian Hacking) analyse les concepts épistémiques en mathématiques (probabilité) mais aussi dans les sciences humaines comme le résultat de pratiques scientifiques concrètes pas toujours explicites.⁸² Notre attention récente pour l'épistémologie française est dicté par un intérêt pour Bourbaki, qui passe par un étude des travaux de Cavaillès et Lautman,⁸³ mais aussi par l'analyse historique de la figure de Louis Rougier dans la scène française,⁸⁴ et par un projet d'étude comparative sur trois traditions de recherche collaboratives et interdisciplinaires : l'école de Peano, le comité de rédaction de la *Revue de Métaphysique et de Morale* et le Cercle de Vienne (voir le projet « Interepisteme » mentionné dans la section qui suit).

1.2.4 Collaborations

L'ampleur du domaine visé, surtout en relation avec les recherches sur l'axiomatique, ont rendu opportun de coopérer avec d'autres chercheurs en philosophie des mathématiques, appartenant à des traditions assez diverses. La participation à plusieurs projets collectifs a favorisé la collaboration avec des philosophes, des historiens de mathématiques et des mathématiciens. Avant même mon recrutement au CNRS, j'ai pu participer à deux projets internationaux : le projet ANR « Gödel » dirigé par Gabriella Crocco (2009-2010), et la Chaire d'Excellence « Idéaux de preuve » (2008-2009) dirigée par Mic Detlefsen (Notre Dame University) en collaboration avec Gerhard Heinzmann (Université de Nancy), Marco Panza (Université Paris 1) et Jean-Jacques Szczepaniarz (Université Paris 7).

La participation au comité scientifique du colloque FPMW du GDR Philmath à partir du 2013 ainsi qu'à son organisation en 2016 et en 2021 m'a permis de développer des collaborations très fructueuses avec d'autres chercheurs français en philosophie des mathématiques. La création en 2017 du réseau de recherche « PhilMathMed », ayant l'objectif de favoriser échanges et contacts entre plusieurs universités françaises du Sud de la France, a permis l'organisation d'un séminaire annuel et des échanges très riches.

Une collaboration très étroite a été développée avec Georg Schiemer (ERC Starting Grant 2016), chercheur à l'Université de Vienne. Il m'a invitée à participer à un workshop sur le proto-structuralisme qui a eu lieu à Vienne en 2015 et à écrire un article pour un volume sur le structuralisme qu'il a codirigé avec Erich Reck pour Oxford University Press.⁸⁵ Georg Schiemer a ensuite

82. HACKING 1975; HACKING 1995.

83. CAVAILLÈS 1994; LAUTMAN 2011.

84. CANTÙ 2016a.

85. E. H. RECK et SCHIEMER 2020; CANTÙ 2020a.

accepté de devenir partenaire du Projet International de Cooperation Scientifique « Interepisteme », dont j'étais porteuse et qui a été soutenu par le CNRS à hauteur de 18000 euros sur trois ans. Ce même projet a renforcé des collaborations précédentes avec les Archives Poincaré (UMR 7117) de l'Université de Lorraine (Jules-Henri Greber, Gerhard Heinzmann, Philippe Nabonnand, Oliver Schlaudt, Andy Arana), le Laboratoire Panlevé (UMR 8524) de l'Université de Lille (Rossana Tazzioli), l'Institut d'Histoire et Philosophie des Sciences et des Techniques (UMR 8590) de Paris 1 (Pierre Wagner), le Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires (UMR 7599) de Paris 4 (Laurent Mazliak), le Centre d'Archives de Philosophie, d'Histoire et d'Édition des Sciences (CAPHÉS UMS 2267) de l'École Normale Supérieure de Paris (Charles Alunni) et le Département de Philosophie et Centre de Recherches Interdisciplinaires en Sciences Humaines et Sociales (EA 4424) de l'Université Paul-Valéry Montpellier 3 (Anastasios Brenner).

Une autre collaboration avec Vincenzo Risi (SPHERE, Paris 7) et Andy Arana (IHPST, Paris 1, puis Archives Poincaré, Université de Lorraine) nous a permis d'organiser trois séances d'un séminaire en collaboration entre le Centre Gilles Gaston Granger, l'IHPST et SPHERE en 2018 et 2019. Georg Schiemer et Andy Arana sont aussi partenaires du projet international ANR FWF, que nous avons soumis en 2021 avec la participation de plusieurs centres de recherches nationaux et internationaux : aux côtés du Département de Philosophie de Vienne, il y a le CGGG à Aix-Marseille Université, les Archives Poincaré à Nancy, le CAPHI à Nantes, l'IHPST à Paris et le IrPhil à Lyon. Entre-temps, j'ai obtenu de mon université le financement d'un atelier international sur le sujet, qui se tiendra en 2022, afin de lancer les recherches.

D'autres collaborations nationales et internationales relèvent de projets éditoriaux communs. Une collaboration a eu lieu avec des experts du néo-kantisme de l'Université de Turin : Massimo Ferrari a participé au projet PICS « Interepisteme » et y a contribué avec un article sur Leibniz qui paraîtra dans l'ouvrage collectif en préparation chez Springer ; Francesca Biagioli a publié un article sur la relation entre l'épistémologie de Otto Hölder et le kantisme dans le numéro spécial de la revue *Philosophia Scientiae* que j'ai coédité avec Oliver Schlaudt en 2013,⁸⁶ et a ensuite participé aux PICS « Interepisteme ».

L'approche interdisciplinaire et l'attention à la pratique mathématique que nous avons suivies dans nos recherches ont rendu nécessaire une collaboration plus étroite avec les mathématiciens. Nous avons donc institué des collaborations avec des mathématiciens experts en philosophie et histoire des mathématiques. Avec Frédéric Patras (Université Côte d'Azur) nous avons écrit deux

86. BIAGIOLI 2013.

articles l'un à paraître dans un ouvrage collectif, l'autre soumis à une revue, et avons deux autres articles en préparation. Avec Sébastien Maronne (Université de Toulouse) et Patras nous avons rédigé le projet d'un livre pendant un séjour d'une semaine à la Fondation des Treilles en mars 2021. J'ai développé une collaboration importante avec des chercheurs italiens qui travaillent sur l'école de Peano : Clara Silvia Roero, Erika Luciano, Livia Giacardi et Gabriele Lolli au Département des Mathématiques de l'Université de Turin. La collaboration remonte à la Conférence Internationale « Peano et son École entre Mathématiques, Logique et Interlingua » organisée à Turin en 2010, qui a donné lieu à la publication de l'ouvrage *Peano et son École*, paru sous la direction de Clara Silvia Roero.⁸⁷ La collaboration a ensuite été renforcée par le colloque que nous avons co-organisé à Turin en mai 2019 dans le cadre du PICS « Interepisteme ». La collaboration avec Erika Luciano a amené à la direction commune d'un numéro spécial de *Philosophia Scientiae* autour de l'école de Peano.⁸⁸ Finalement, la collaboration avec Laurent Mazliak et Rossana Tazzioli, qui avait débuté en 2011 pendant ma résidence à l'Institut Méditerranéen de Recherches Avancées de Marseille, a abouti à la publication d'un article dans l'ouvrage *Images of Italian Mathematics in France* paru en 2016 aux éditions Springer⁸⁹ et a constitué la base de leur collaboration au Projet « Interepisteme ».

87. ROERO 2010; CANTÙ 2010f.

88. « *Special Issue The Peano School : Epistemology : Logic, Epistemology and Didactics* » 2021.

89. BRECHENMACHER, JOUVE, MAZLIAK et TAZZIOLI 2016; CANTÙ 2016a.

Chapitre 2

Cheminement intellectuel

Dans cette section, je décris mon parcours scientifique de la thèse à aujourd’hui, mais je mentionnerai aussi les années de formation en Italie, Suisse et Allemagne, ce qui permettra de mieux comprendre l’origine de plusieurs travaux qui datent d’avant la thèse et de mentionner la première invitation en France qui date de 2001.

Dans ce parcours, j’évoquerai la genèse de certains travaux scientifiques, mais surtout les responsabilités collectives, les conférences auxquelles j’ai été invitée et les rencontres professionnelles qui ont particulièrement influencé le développement de ma recherche.

Dans la section 3. *Thèmes de recherche*, j’offrirai une description plus détaillée des motivations et du contexte dans lequel mon travail scientifique a pris naissance, en insistant moins sur l’aspect chronologique et biographique que sur la spécificité thématique.

2.1 Premiers écrits sur les fondements de la géométrie

En 1992, je me suis inscrite à un cours de licence en philosophie à l’Université Statale di Milano, où enseignait Ludovico Geymonat, élève de Giuseppe Peano et fondateur de la première chaire universitaire italienne de philosophie des sciences. À l’époque, le diplôme durait quatre ans et donnait un certificat de maîtrise, qui s’obtenait avec une dissertation presque aussi exigeante qu’une thèse de doctorat. J’ai été fascinée par l’histoire de la philosophie et par la relation entre la géométrie et la logique : sous la direction de Corrado Mangione et Silvio Bozzi (deux élèves de Geymonat), j’ai rédigé un mémoire sur les fondements de la géométrie non-archimédienne. Le mémoire portait sur la figure de Giuseppe Veronese, qui m’a fasciné grâce aux rencontres avec

Santuzza Baldassarri Ghezzi, professeur de géométrie au département de mathématiques de Padoue et auteur d'une biographie de Veronese. Les après-midi où elle m'invitait à Padoue, j'apprenais l'histoire des mathématiciens de l'Université, puis j'allais consulter les œuvres de Giuseppe Veronese conservées dans les différentes bibliothèques, dont un exemplaire des *Fondamenti di Geometria* appartenant à l'*Accademia di Scienze Lettere ed Arti* que Veronese avait présidée de 1906 à 1908 (et pourtant l'exemplaire de son œuvre qui y était conservé n'avait jamais été consulté : les pages étaient encore à couper!).

Le mémoire a obtenu un soutien financier du Département de Philosophie de l'Université de Milan pour la publication.¹ Sur invitation de Gerhard Heinzmann je suis venue en France pour la première fois en 2011 présenter mes travaux sur la géométrie non Archimédienne. Le texte de la conférence a été ensuite publié en français dans *Philosophia Scientiae*.² Le volume sur Veronese, reviewé par Victor Pambuccian dans *Zentralblatt*,³ a fait l'objet de nombreuses présentations en France et en Allemagne : en 2005 j'ai été invitée à un atelier sur Henri Poincaré et la topologie organisé par Jean Mawhin, Philippe Nabonnand, et Klaus Volkert à Oberwolfach (où j'ai rencontré entre autres Jeremy Gray, Ralph Krömer et Heinrich Scholz), au Séminaire d'Épistémologie du CEPERC à Aix-en-Provence le 29 novembre 2005 (à l'invitation d'Alain Michel), au Séminaire *Histoires de Géométrie* à la Maison des Sciences de l'Homme, Paris, le 13 mars 2006 (invitée par Dominique Flament) et à l'Institut für Mathematik de l'Universität Köln le 8 décembre 2005 (invitée par Klaus Volkert). En 2003, j'ai également co-organisé un atelier sur Giuseppe Veronese en collaboration avec l'Université de Padoue et le Liceo « Veronese » de Chioggia.⁴ J'ai invité à cet atelier Umberto Bottazzini et Aldo Brigaglia, que j'ai eu l'occasion de rencontrer à Rende, à l'occasion de la Dixième Conférence sur l'Histoire des Mathématiques. À cette occasion, j'avais également rencontré plusieurs spécialistes d'histoire des mathématiques, qui ont influencé mes recherches ultérieures : Marco Panza, Luigi Maierù, Rossana Tazzioli, Christian Houzel, Massimo Galuzzi et Paolo Freguglia.⁵

1. CANTÙ 1999.

2. CANTÙ 2009a.

3. See <https://zbmath.org/?q=an%3A1158.51300>.

4. CANTÙ 2004.

5. CANTÙ 1998.

2.2 La philosophie de Bolzano et Frege à Genève (1998-1999)

Après la maîtrise, je me suis inscrite à un Diplôme d'Études Supérieures en Philosophie et Histoire de la Logique à l'Université de Genève et j'ai obtenu une bourse de la Société Académique Suisse pour couvrir mes frais de séjour en Suisse (septembre 2008–janvier 2009). J'ai suivi un cours sur Bolzano et Frege (Kevin Mulligan), un cours sur Aristote (Jonathan Barnes), un séminaire sur la logique de Galène (J. Barnes), un cours sur la philosophie médiévale (Alain De Libera). À Genève, j'ai lu la *Begriffsschrift* de Frege, les deux premières parties de la *Wissenschaftslehre* de Bolzano, sa correspondance avec Exner et de nombreux textes sur la logique médiévale. J'ai présenté une thèse concernant les représentations sans objets dans la *Wissenschaftslehre* de Bernard Bolzano. La thèse a ensuite été révisée sous forme d'article et publiée dans un ouvrage collectif dirigé par Paolo Valore sur la rationalité et l'ontologie.⁶

Grâce à l'expérience suisse j'ai rencontré Peter Simons, Barry Smith, Jocelyn Benoist, Jan Wolenski, Jan Sebestik, Sandra Lapointe, Mark Textor. J'ai participé à un workshop international sur Bolzano en 2001 et j'ai été invité à faire une présentation au *Séminaire de recherche : Propositions et états de choses* dirigé par Jocelyn Benoist aux *Archives Husserl* à l'École Normale Supérieure en 2003. Le texte de cette présentation a été publié dans un recueil dirigé par Jocelyn Benoist chez Vrin.⁷

2.3 Le doctorat (1999-2003) : Genova et Erlangen

Pendant mon séjour en Suisse, j'ai passé les examens d'État pour entrer dans le programme italien de doctorat et obtenir une bourse. Avec un article sur la notion de vérité en géométrie, j'étais classée première au concours pour l'obtention d'une bourse du ministère italien de la recherche pour financer un doctorat de quatre ans (2008-2012) au Centre d'épistémologie du Département de philosophie de Gênes. J'y discutais régulièrement avec mon directeur de thèse Franco Palladino, mathématicien, responsable des cours de logique et auteur de plusieurs publications sur la géométrie non-euclidienne, l'école de Peano, la logique et l'algèbre, ainsi qu'avec Carlo Penco, professeur de philosophie du langage et expert de la philosophie de Frege, Evandro Agazzi, chercheur en philosophie des mathématiques et philosophie des sciences, Michele Marsonet, qui a travaillé sur les questions de logique philosophique et

6. CANTÙ 2003a.

7. CANTÙ 2006.

sur le pragmatisme, l'idéalisme et le réalisme en philosophie des sciences, Marcello Frixione, qui a travaillé sur la compatibilité, l'intelligence artificielle et le raisonnement. J'ai également continué à discuter avec Silvio Bozzi et Corrado Mangione de l'Université de Milan, qui ont lu et commenté mes recherches, orientées autour de la théorie de l'extension de Hermann Grassmann et de la transformation des mathématiques d'une science des quantités à une théorie des formes.

C'est sur leur suggestion que j'ai décidé de demander une bourse de recherche supplémentaire au ministère pour passer une année de mon doctorat à l'étranger (mars 2000-février 2001) et aller étudier avec Christian Thiel et Volker Peckhaus à l'université d'Erlangen-Nürnberg, qui disposait d'une très riche bibliothèque de philosophie. J'ai participé régulièrement au séminaire de l'institut de Philosophie (le *Colloquium Logico-Philosophicum*) et aux séminaires de l'Institut Interdisciplinaire pour la Théorie et l'Histoire de la Science (*Interdisziplinäres Institut für Wissenschaftstheorie und Wissenschaftsgeschichte*, IIWW), fondé par Lorenzen et fréquenté à l'époque par Rudiger Ineethven, qui avait travaillé sur la géométrie constructive, la logique dialogique et avait développé la protophysique dans le cadre du constructivisme méthodologique typique de l'école d'Erlangen. Durant ces années, j'ai eu l'occasion d'entrer en contact avec la logique dialogique, le constructivisme d'Erlangen et, plus généralement, avec de nombreuses approches dialogiques de la théorie de l'argumentation, sur lesquelles j'ai écrit un article qui s'est ensuite transformé en la première partie d'un volume en collaboration avec Italo Testa.⁸ Toujours pendant mon séjour à Erlangen, j'ai eu l'occasion d'assister au colloque international « Die Philosophie und die Wissenschaften. Zum Werk Oskar Beckers » à la Fern-Universität-Gesamthochschule Hagen, où j'ai rencontré Paolo Mancosu. Pendant mon séjour en Allemagne, j'ai rendu visite à Heinrich Scholz et Gert Schubring à Bielefeld pour approfondir mes recherches sur Hermann Grassmann.

Entre décembre 2000 et janvier 2001, j'ai également passé l'Agrégation de l'enseignement secondaire supérieur, un concours d'état (par examen écrit et oral) du Ministère de la Recherche, de l'Université et de l'Enseignement d'Italie. J'étais lauréate pour la section 36 : Philosophie, Psychologie, Sociologie et Sciences de l'Éducation et pour la section 37 : Philosophie et Histoire, ce qui m'a permis d'être engagée comme Professeur de Lycée (CDI) au Lycée des Sciences Humaines « Racchetti » de Crema, où j'ai enseigné la philosophie, la sociologie, la psychologie et la pédagogie de 2002 à 2004, et ensuite au Lycée Scientifique « Novello » de Codogno, où j'ai enseigné la philosophie et l'histoire

8. CANTÙ *et* TESTA 2001; CANTÙ *et* TESTA 2006.

de 2010 à 2011. Pendant toutes les autres périodes, j'étais en congé grâce à des bourses de recherche obtenues en Italie et en France, et j'ai démissionné en 2012, lorsque mon recrutement au CNRS a été confirmé. L'enseignement m'a permis d'élargir mes connaissances en sciences humaines, en étudiant notamment les fondements de la psychologie et de la sociologie et la méthodologie historique, compétences qui m'ont récemment permis de développer des projets interdisciplinaires sur la relation entre les mathématiques et les sciences sociales.

Le 13 février 2003 j'ai soutenu une thèse en histoire et philosophie des mathématiques, consacrée à la transformation des mathématiques de Science des Grandeurs à Théorie des Formes. La première partie analyse le concept de grandeur chez Euclide et le compare avec le concept des algébristes du XVI^e siècle et avec les premières définitions relationnelles des grandeurs, en analysant des passages des œuvres de Wolff, d'Alembert, Euler, Gauss, Kant et Bolzano.⁹ La deuxième partie analyse la contribution de Hermann Grassmann à la définition des mathématiques et à la compréhension du concept de grandeur extensive. En analysant l'œuvre de Hermann Grassmann, la thèse se concentre sur le concept de grandeur, ou forme extensive, en comparant systématiquement les deux éditions de l'*Ausdehnungslehre*.¹⁰ La question est alors discutée de savoir pourquoi seule la première édition est tout à fait cohérente avec le projet philosophique de Grassmann de fonder l'étude des propriétés de l'extension spatiale indépendamment de celle des propriétés des nombres. La comparaison entre le concept algébrique de base et l'origine génétique des objets géométriques, ainsi que l'analyse de la dimension dans ses rapports avec la théorie de la mesure, révèlent, d'une part, qu'il y a un rapport très étroit entre les travaux mathématiques de Grassmann et sa conception philosophique, d'autre part, que le projet de Grassmann est plus général et plus riche que le simple établissement du calcul vectoriel. En effet, ce projet aboutit à une fondation de la conception d'espace abstrait à plusieurs dimensions qui est essentiellement génétique et dynamique.

Grâce à ma thèse sur Grassmann, j'ai été invité en France par Philippe Nabonnand à une conférence organisée au CIRM de Luminy par les Archives Poincaré en collaboration avec le *Centre d'Épistémologie et d'Ergologie Comparatives* (CEPERC) d'Aix-en-Provence en septembre 2005. C'est là que j'ai rencontré Alain Michel et Dominique Flament pour la première fois. Un autre moment clé qui m'a permis d'élargir mes connaissances sur Grassmann a été

9. WOLFF 1716; WOLFF 1730; DIDEROT et D'ALEMBERT 1751; EULER 1768; EULER 1771; KANT 1781; GAUSS 1800; BOLZANO 1804; BOLZANO 1810; PONCELET 1822; BOLZANO 1837; GAUSS 1862.

10. GRASSMANN 1844; GRASSMANN 1862.

l'invitation de Hans-Joachim Petsche à la conférence du bicentenaire de Grassmann (1809–1877) qui s'est tenue en septembre 2009 à l'Université de Potsdam et à l'Université de Szczecin : j'y ai rencontré Ivor Grattan-Guinness, Albert C. Lewis, Michael Otte, Mircea Radu, Mirja Hartimo et Steve Russ.¹¹ De ma thèse de doctorat, j'ai tiré quelques articles sur la définition des mathématiques comme science des quantités¹² et sur l'épistémologie de Grassmann.¹³

2.4 Postdoc : Milan 2004-2008

En novembre 2004 j'ai obtenu, à l'issue d'un concours public sur titres, un contrat de travail à temps déterminé (deux ans, renouvelé pour deux ans jusqu'en 2008) en qualité de chercheur à l'Université de Milan, Département de Philosophie, sous la direction de Silvio Bozzi, Corrado Mangione et Renato Pettoello. Le projet de recherche portait sur « Forme, grandeur et nombres. Philosophie et mathématiques chez Bolzano, Grassmann et Husserl ». Il s'agissait de : 1) reconstruire historiquement le développement du concept de grandeur de Euclide à Gauss ; 2) déterminer le rapport entre la définition des mathématiques donnée par Bolzano en tant que théorie des formes et le concept de *mathesis universalis* ; 3) étudier le concept de grandeur extensive de Hermann Grassmann pour montrer l'origine philosophique de la caractérisation dynamique et relationnelle des formes et pour évaluer sa contribution à l'algèbre linéaire ; 4) analyser les analogies et les différences entre le concept de Husserl d'une ontologie formelle et les définitions des mathématiques données par Grassmann et par Bolzano, en recherchant la possibilité d'une caractérisation génétique, mais non pas psychologique, des grandeurs mathématiques ; 5) analyser l'intérêt philosophique de l'étude des grandeurs extensives sans l'introduction des coordonnées numériques pour comprendre les aspects essentiels du rapport entre géométrie et algèbre. Pendant cette période, j'ai étudié aussi à Berlin (Humboldt Universität) et à Francfort (Goethe-Universität), où j'ai participé au séminaire de Philosophie et Histoire des Sciences de Moritz Epple et au Séminaire de Théorie critique d'Axel Honneth.

D'abord j'ai étudié la notion de représentation vide dans l'œuvre de Bernard Bolzano pour examiner les rapports entre logique et mathématiques à partir d'une question mathématique concrète. Bolzano se propose de donner une signification aux termes vides et d'introduire des relations extensionnelles non banales entre les représentations vides, parce qu'il est convaincu que les

11. PETSCHÉ, A. LEWIS, LIESEN *et* RUSS 2010.

12. CANTÙ 2010a ; CANTÙ 2008.

13. CANTÙ 2010b.

mathématiques ont besoin de concepts vides (par exemple le concept de $\sqrt{-1}$, ou de polygone régulier ayant 7 cotés). La théorie logique est modifiée pour rendre compte des exigences des mathématiques. Une comparaison de Bolzano et Frege a également montré que le rôle de la philosophie ne se limite pas à la discussion sur le type d'existence des entités logiques et mathématiques, comme si le seul problème philosophique concernait l'ontologie. Au contraire, on voit que le rôle de la philosophie peut être mieux compris si l'on examine la démarcation entre logique et mathématiques, et la façon de concevoir la logique comme théorie générale des concepts ou comme langage universel.

Pour examiner cette distinction j'ai d'abord étudié la notion de *mathesis universalis* au XIX^e siècle, ce qui a aussi fourni une liaison nouvelle entre les recherches sur la géométrie de Veronese et les recherches sur les mathématiques de Bolzano. La notion de grandeur est en effet la clé pour mieux comprendre la différence entre la *mathesis universalis* comme théorie généralisée des opérations,¹⁴ et la *mathesis universalis* comme théorie des possibilités des choses.¹⁵ Une partie des résultats sur ces thématiques ont été publiés dans des articles sur le bon ordre des concepts et sur le rapport entre formel et général en mathématiques.¹⁶

J'ai poursuivi cette recherche en développant une comparaison entre les idées philosophiques de Bolzano, Grassmann et Husserl, pour éclaircir la façon dans laquelle l'idée d'une théorie abstraite préalable aux mathématiques et liée à l'idée de grandeur et à une notion de logique en tant que théorie générale des concepts. J'ai comparé cette conception générale de la logique avec une autre conception de la logique en tant qu'outil qu'on trouve dans les œuvres de Peano et Padoa.¹⁷ Une analyse des différences internes à l'école de Peano montre l'influence de Grassmann sur le développement de la logique mathématique italienne, mais aussi une proximité avec Hilbert.¹⁸ À une conception symbolique et linguistique de la logique s'oppose, dans l'école de Peano, la conception de Vailati, qui est plus large, plus proche d'une conception de la logique comme théorie de l'argumentation et du discours scientifique et liée à une conception pragmatiste et historiciste de la science,¹⁹ ce qui donne une preuve ultérieure de l'intérêt de la démarcation entre logique et mathématiques

14. VERONESE 1909; VERONESE 1906; VERONESE 1897; VERONESE 1891; GRASSMANN 1877; GRASSMANN 1844; GRASSMANN 1845; GRASSMANN 1855; BETTAZZI 1890.

15. BOLZANO 1975; BOLZANO 1810; HUSSERL 1929; HUSSERL 1975.

16. CANTÙ 2014e; CANTÙ 2020a.

17. PEANO 1913, p. 48; PADOA 1933, p. 76-77.

18. Voir la lettre de Padoa à Vailati du 23 Mars 1905 publié dans CANTÙ 2007.

19. Voir spécialement les chapitres 1, 2, 3, 12 et 15 de ARRIGHI, CANTU, de ZAN et SUPPES 2010.

pour comprendre le rôle de la philosophie dans les sciences.

Pendant cette période, j'ai diversifié mes sujets de recherche, en essayant d'aborder les problèmes qui me tenaient le plus à cœur, comme la relation entre le nombre et la grandeur et l'argumentation scientifique, en participant aux conférences des associations italiennes de philosophie du langage (SIFA) en 2008 et de la philosophie de la logique et des sciences (SILFS) en 2009, aux conférences internationales sur la théorie de l'argumentation en 2008 et 2010 (XII^e conférence biennale sur l'argumentation de l'université de Wake Forest, ISSA 7th International Conference on Argumentation of the International Society for the Study of Argumentation), à deux conférences internationales sur l'histoire de la philosophie moderne en 2004 et 2007 (The Classical Model of Science et Internationaler Cristian-Wolff-Kongress), et à une conférence sur Giuseppe Peano, où j'ai rencontré entre autres Angelo Guerraggio, Enrico Pasini, Livia Giacardi, Erika Luciano, Silvia Roero, Elena A. Marchisotto, Sébastien Gandon, James Smith, avec lesquels j'ai eu des échanges fructueux ensuite.

L'étude de la théorie de l'argumentation, et en particulier l'analyse de textes de débat public, m'a permis d'enseigner dans plusieurs séminaires à l'Université Bicocca, à l'École Polytechnique de Milan (2007-2008, 2008-2009) et au Centre de recherche Giovanni Vailati de Crema et d'entamer une collaboration avec la revue mensuelle de divulgation philosophique *Diogene* (Giunti editore) dans laquelle je tenais une rubrique sur la logique appliquée. Les articles ont ensuite été révisés et publiés avec un appendice qui analyse les formes d'arguments dans le volume *Qui casca l'asino* paru chez Bollati Boringhieri.²⁰ Au cours de cette période, j'ai également fondé, avec Adelino Cattani, Paolo Vidali et Italo Testa, *l'Association of Argumentation Practice and Theory* (<https://sites.google.com/site/argomentazione/home>) qui a rassemblé de nombreux spécialistes italiens et étrangers de la théorie de l'argumentation (entre autres Sara Rubinelli, Fabio Paglieri, Giovanni Tuzet, Richard Davies, Franca d'Agostini, Sharon Bailin) et a donné lieu à deux ateliers sur le sujet en 2008 et en 2011 et à une publication.²¹

2.5 Postdoc : Nancy-Paris et Aix-Marseille (2008-2011)

Pendant l'année académique 2008-2009, j'ai participé à la Chaire d'Excellence ANR « Idéaux de preuve » dirigée par Michael Detlefsen (Notre-Dame

20. CANTÙ 2011.

21. CATTANI, CANTÙ, TESTA et VIDALI 2009.

University, Indiana) en collaboration avec les Archives Poincaré, SPHERE (ancien REHSEIS), le Collège de France, l'ENS et l'IHPST. Le thème de la recherche était l'étude de la méthode des éléments idéaux en mathématiques, particulièrement en rapport avec les grandeurs infiniment petites et la théorie de la mesure. J'ai développé une conception d'idéalité relative à une théorie donnée et qui est basée sur l'étude des différentes façons de changer le domaine des éléments de la théorie primitive. Au cours de cette année, j'ai eu la chance de rencontrer des chercheurs français et étrangers en philosophie des mathématiques, avec lesquels j'ai eu des échanges particulièrement fructueux : en plus de Michael Detlefsen, Marco Panza, Gerhard Heinzmann, Paolo Mancosu, Philippe Nabonnand et Sébastien Maronne que je connaissais déjà, j'ai rencontré Andy Arana, Karine Chemla, Renaud Chorlay, Walter Dean, Jean-Pierre Marquis, John Mumma, Victor Pambuccian, Mattia Petrolo, David Rabouin, Andrei Rodin, Oliver Schlaudt, Dirk Schlimm, Hourya Sinaceur, Ivan Smadja, Goran Sundholm, Jean-Jacques Szczepaniak, James Tappenden et Sean Walsh.

L'année suivante j'ai obtenu un CDD de chercheur CNRS à l'Université Aix-Marseille pour participer au Projet ANR « Gödel » dirigé par Gabriella Crocco au CEPERC (2009-2010). La recherche portait sur l'analyse de la théorie générale des concepts de Kurt Gödel en rapport avec la théorie logique de Bolzano, Leibniz et Peano. J'ai analysé les textes de Gödel pour montrer le rapport avec la tradition philosophique de Leibniz²² et j'ai analysé particulièrement plusieurs passages où Gödel discute en détail le *Formulaire* de Peano en le comparant avec le *Principia Mathematica* de Russell pour montrer que la lecture de Gödel souligne des problèmes de philosophie de la logique : le rôle de l'identité dans les systèmes logiques et mathématiques, la définition de la notion de fonction, la possibilité de donner une solution alternative au problème des descriptions vides.²³ C'est à ce moment-là que j'ai rencontré Mark van Atten et Robin Rollinger, avec qui j'ai entamé une longue collaboration sur l'édition des manuscrits philosophiques MaxPhil de Gödel, qui est toujours en cours sous la direction de Gabriella Crocco.²⁴ Pendant ma participation au projet ANR, j'ai participé au comité scientifique et à l'organisation d'un colloque international et d'un atelier sur Gödel en 2012 et 2013 à Aix-en-Provence et d'un workshop international sur Otto Hölder, qui a donné lieu à un numéro spécial de *Philosophia Scientiae* codirigé avec Oliver Schlaudt et

22. CANTÙ 2014e.

23. CANTÙ 2016b.

24. CROCCO, ATTEN, CANTÙ et ENGELÉN 2017; CROCCO, ATTEN, CANTÙ et ROLLINGER 2020b; CROCCO, ATTEN, CANTÙ et ROLLINGER 2020a; CROCCO, ATTEN, CANTÙ et ROLLINGER 2021.

avec la participation de Francesca Biagioli et Mircea Radu.²⁵

En 2010 j'ai obtenu la qualification aux fonctions de maître de conférences en France pour la section 72 (Épistémologie, histoire des sciences et des techniques) et pour la section 17 (Philosophie). En 2013 j'ai obtenu la Qualification aux fonctions de maître de conférences en Italie pour la section « Histoire et Philosophie des Sciences » et pour la section « Philosophie du Langage ».

En 2011 j'ai obtenu une bourse de recherche de l'Institut d'Études Avancées d'Aix-Marseille pour une résidence qui s'est déroulée du 14 Octobre 2011 jusqu'au 14 Juillet 2012. Le projet de recherche était intitulé « L'épistémologie italienne à la fin du XIX^e siècle : une contamination féconde ? ». ²⁶ Le projet de recherche portait sur les fondements des mathématiques – au carrefour entre sciences humaines et sciences dures – dans le XIX^e siècle en Italie et en particulier dans l'école de Peano, qui constitue un exemple de contamination féconde entre plusieurs influences (par exemple allemandes et françaises : Grassmann, Leibniz, Hilbert, Poincaré) et, surtout dans le cas de Giovanni Vailati, un croisement entre plusieurs disciplines (philosophie, histoire des mathématiques, logique, mathématique, linguistique, économie, sociologie et psychologie). Le projet consistait en trois parties : (a) une partie dédiée aux projets de recherche transdisciplinaires de l'IMéRA et aux perspectives éducatives interdisciplinaires actives à l'Université Aix-Marseille, (b) une partie dédiée à une étude des spécificités de la situation italienne au début du XX^e siècle et en particulier à la figure de Giovanni Vailati, (c) une partie dédiée à la comparaison entre France, Allemagne et Italie, que ce soit par rapport aux fondements des mathématiques ou par rapport aux institutions éducatives.

Mon principal contact au sein du comité scientifique était Pierre Livet, avec qui j'ai eu de nombreux échanges fructueux. Sur le thème de l'interdisciplinarité, j'ai pu profiter de rencontres avec plusieurs enseignants-chercheurs qui préparaient la licence interdisciplinaire « Sciences et Humanités », notamment Gabriella Crocco, Eric Audureau, Julien Bernard, Philippe Abgrall et Marie Anglade. J'ai participé à des nombreux projets, séminaires de recherches et groupes de travail : 1) le projet « L'espace scientifique européen dans l'entre-deux-guerres. L'exemple des échanges entre les communautés mathématiques françaises et italiennes » dirigé par l'équipe EuroMath « Mathématiciens français et italiens : 1920-1940 », un séminaire sur l'interdisciplinarité que j'ai organisé, un groupe de travail « Les preuves mathématiques vues par les mathématiciens » dirigé par Marouane Ben Miled (Université de Tunis), le projet ATRI sur la mesure financé par le LABEXMED et co-dirigé avec Igor Ly

25. CANTÙ 2013b ; « *Special Issue Otto Hölder* » 2013.

26. CANTÙ 2012a.

(CGGG).

J'ai résumé les objectifs et les résultats de ma résidence à l'occasion du workshop « Giovanni Vailati. Pragmatisme, logique et transdisciplinarité », que j'ai organisé à l'IMéRA le 10 décembre 2012 avec la participation de Pierre Livet (Université Aix-Marseille), Amirouche Moktefi (Université de Strasbourg) et Paolo Parrini (Université de Florence, Italie). Le séjour à l'IMéRa a été particulièrement utile pour prendre contact avec de nombreux collègues et laboratoires de l'Université Aix-Marseille, notamment en étant nommée membre du comité scientifique à la fin de la résidence (2012-2014).

Pendant mes années françaises de recherche post-doctorale, j'ai participé à plusieurs conférences internationales sur invitation et contribution, en publiant en plus des publications mentionnées auparavant des compte rendus sur Gödel²⁷ et sur la *mathesis universalis*,²⁸ et sur la justification en mathématiques,²⁹ ainsi que des contributions nouvelles sur Bolzano et Wolff³⁰. De cette période française datent également quelques traductions de l'anglais vers l'italien,³¹ de l'allemand vers l'anglais,³² et du français vers l'italien.³³

2.6 Chargée de recherche au CNRS (2011--)

Sur la suggestion de Gabriella Crocco, j'ai participé au concours CNRS CR1 au printemps 2011 avec un projet intitulé « L'algèbre des concepts : un héritage leibnizien de Bolzano à Grassmann, de Peano à Gödel » (admise : classé 2^{ème}). J'ai été nommée chargée de recherche 1^{ère} classe au Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS CR 1) en Philosophie et Histoire des Sciences (section 35 : Sciences philosophiques et philologiques, Sciences de l'art) en 2011 et affectée au centre CGGG (UMR 7304) à l'Université Aix-Marseille.

Dans les années suivantes, j'ai développé les thématiques du projet, notamment la signification des concepts mathématiques, y inclus les représentations vides, la distinction entre une notion relative et une notion absolue d'égalité, la différence entre une notion d'opération ou de fonction définie sur un domaine préalablement déterminé et une notion d'opération ou fonction définie sur un domaine variable, les difficultés et les avantages liées à l'introduction

27. CANTÙ 2014a.

28. CANTÙ 2010c; CANTÙ 2010e.

29. CANTÙ 2014d.

30. CANTÙ 2014b; CANTÙ 2018a.

31. CANTÙ 2009b.

32. CANTÙ et SCHLAUDT 2013.

33. CANTÙ 2010d; CANTÙ 2012b.

des différents symbolismes et à de nouvelles procédures de démonstration. En dirigeant l'attention vers des pratiques mathématiques très différentes par rapport à l'utilisation du symbolisme, il s'agissait d'évaluer si on peut découvrir des traits communs aux projets de Bolzano, qui suggère une solution originale au problème des représentations vides,³⁴ de Grassmann, qui introduit l'idée d'une définition constructive des opérations fondamentales sur un domaine variable,³⁵ de Peano, qui reprend l'idéal leibnizien de *characteristica universalis*³⁶ et de Gödel, qui compare dans les cahiers inédits *Max Phil* les suggestions de Peano avec les solutions de Frege et Russell.³⁷

En travaillant sur les thèmes du projet de recherche, j'ai identifié trois domaines qui ont acquis un rôle plus central que celui qui leur était initialement réservé : 1) le rôle de l'argumentation en mathématiques, soit en rapport avec la question des éléments idéaux soit en rapport avec la notion d'algorithme et de computabilité ; 2) les notions de grandeur, quantité, mesure, qui sont liées à la question des représentations vides en mathématiques et à la conception des notions de fonction, opération et égalité ; 3) l'analyse des approches interdisciplinaires par rapport à la recherche sur les fondements des mathématiques et de la logique, sur la base de plusieurs exemples que j'ai trouvés dans l'œuvre de Hermann Grassmann, dans les travaux des membres de l'école de Peano (en particulier de Giovanni Vailati), mais aussi chez certains auteurs français comme Louis Rougier. Enfin, j'ai abordé deux autres questions liées au rapport entre mathématiques, logique, philosophie et sciences : 1) la question de l'applicabilité des mathématiques, que j'ai examinée surtout dans l'histoire de la philosophie du XVIII^e au XX^e siècle (Wolff, Kant, le néo-Kantisme, Frege et le néo-logicisme, Gödel) et 2) la question du rapport entre philosophie et mathématiques non seulement au XIX^e et au XX^e siècle (Kant, Bolzano, Hegel, Schröder, Frege, Russell, Husserl, Peano, Couturat, Dedekind, Cantor, Enriques) mais aussi dans les théorisations contemporaines (Shapiro, Irvine, Horsten, Corfield, Mancosu, Colyvan, Cellucci).

J'ai montré que les questions des concepts vides et plus généralement des éléments idéaux, la distinction entre égalité relative et absolue, l'analyse de la notion de fonction, le développement du symbolisme et des nouvelles procédures de démonstration et d'argumentation en mathématiques, relèvent souvent d'une problématique interne aux mathématiques, mais sont aux mêmes temps strictement liés à la logique et liés entre eux. D'une part, on a vu que la possibilité de déterminer l'égalité entre deux fonctions dépend de la notion

34. BOLZANO 1837.

35. GRASSMANN 1862; GRASSMANN 1844.

36. PEANO 1901a.

37. CROCCO, ATTEN, CANTÙ et ENGELEN 2017.

de fonction qu'on accepte (fonction au sens large ou au sens étroit). D'autre part on a vu que l'introduction des nouveaux symbolismes engendre la genèse de nouveaux éléments, ainsi que la nécessité de justifier leur occurrence, et de rendre explicite les inférences qui en font usage.

Les résultats obtenus ont montré que les rapports entre logique et mathématiques doivent être nécessairement analysés à la lumière de la question des relations complexes entre mathématiques et philosophie d'une part et entre mathématiques et autres disciplines scientifiques d'autre part.

Au cours des cinq dernières années, j'ai développé l'idée clé de mon projet de recherche, à savoir que l'analyse des rapports entre logique et mathématiques devrait conduire à la construction d'une philosophie systématique de l'axiomatique.

Premièrement, j'ai développé la thèse qu'il y a eu entre le XVIII^e et le XX^e siècles un grand nombre de conceptions philosophiques différentes, qu'on pourrait appeler des « épistémologies mineures », qui ne doivent pas être comprises comme des variantes mineures des « ismes » dominants dans la littérature (logicisme, formalisme, intuitionnisme, structuralisme), mais plutôt comme des conceptions épistémologiques complexes, qui ne se laissent pas réduire à cette classification brute.

Ces épistémologies mineures sont caractérisées 1) par une discussion interdisciplinaire des questions mathématiques, 2) par un intérêt profond pour la pratique mathématique qui résulte d'une interaction quotidienne entre les philosophes, les mathématiciens et les physiciens, 3) par l'accent mis sur les questions philosophiques qui découlent des mathématiques, et pas seulement de la discussion d'un petit nombre d'exemples tirés des mathématiques élémentaires, mais de l'analyse de divers sujets mathématiques avancés, y compris l'analyse réelle et la théorie des espaces vectoriels; 4) par un rapport de continuité partielle avec la conception classique de l'axiomatique. Par exemple, la réflexion théorique sur les différentes acceptions possibles de la question de l'application des mathématiques et une étude des différentes façons contemporaines d'entendre le rapport entre philosophie et mathématiques en « philosophie des mathématiques » ont permis de réviser certaines interprétations standard de l'histoire des fondements des mathématiques, comme le rôle du néo-kantisme et de l'idéalisme dans le développement du logicisme et du structuralisme, ainsi que l'opposition trop nette entre les études de l'âge classique sur le bon ordre des concepts et la création de l'axiomatique moderne.

En particulier, j'ai monté avec Georg Schiemer un Projet de Collaboration International PICS France-Autriche qui a été retenu (2018-2021) : le projet a permis la création d'un réseau de chercheurs français et étrangers spécialisés en philosophie, mathématiques et histoire des sciences, favorisant des

échanges interdisciplinaires fructueux. Le PICS (dont j'ai créé un site web sur hypotheses.org/) a permis la réalisation de deux workshops internationaux organisés à Vienne et Turin en décembre 2018 et Mai 2019 et l'organisation de deux autres workshops internationaux qui ont eu lieu en Octobre 2019 et en Mai 2020 à Aix-en-Provence.

De plus, l'approche comparative entre philosophie et mathématique a amené au développement d'une conception corrélative de l'opposition réel et idéal en mathématiques, qui permet une analyse de la question de l'objectivité mathématique indépendamment de la question de l'objectivité philosophique. D'une part on découvre que l'objectivité ne concerne pas que l'aspect sémantique et métaphysique, mais surtout des aspects plus proprement historiques, gnoséologiques, méthodologiques et persuasifs (concernant par exemple les techniques de généralisation en mathématiques ainsi que les stratégies de justification des ruptures méthodologiques et théoriques). D'autre part on voit que les arguments qui visent à justifier l'introduction des éléments idéaux en mathématiques, insistant plutôt sur des métaphores comme l'extension ou l'élargissement, ont souvent le but de renforcer une certaine idée du développement historique des mathématiques, c'est-à-dire leur croissance cumulative.

Les premiers résultats concernant le rapport entre logicisme, structuralisme, applications des mathématiques et histoire de la philosophie ont été publiés dans un article paru dans le *Journal for the History of Analytical Philosophy*³⁸ (Cantù 2018b) et dans un article paru dans un ouvrage collectif dirigé par Erich Reck et Georg Schiemer chez Oxford University Press.³⁹ Une partie des résultats obtenus par les membres du projet fera l'objet d'une publication qui a été acceptée dans la série Vienna Circle Institute de Springer.⁴⁰

Le projet PICS étant centré sur l'étude comparative des trois épistémologies collaboratives et interdisciplinaires développées par l'école de Peano, la *Revue de Métaphysique et de Morale* et le Cercle de Vienne, j'ai donc eu l'occasion de poursuivre dans un contexte élargi le volet de mon projet dédié à l'école de Peano. Les résultats visant une reconstruction de l'épistémologie de l'école de Peano ainsi que le développement d'une conception dynamique et non fondationnelle de l'axiomatique sont mentionnés dans l'introduction à un numéro spécial de la revue *Philosophia Scientiae* codirigé avec Erika Luciano⁴¹

38. CANTÙ 2018b.

39. CANTÙ 2020a.

40. Paola Cantù and Georg Schiemer (éds.), *Logic, Epistemology, and Scientific Theories. From Peano to the Vienna Circle*, Vienna : Springer, « Institute Vienna Circle » Series, à paraître en 2022.

41. « *Special Issue* The Peano School : Epistemology : Logic, Epistemology and Didactics » 2021.

et développés dans un manuscrit inédit sur l'école de Peano.⁴² Les résultats centrés sur le rapport entre Peano et le logicisme de Frege viennent de paraître dans un ouvrage collectif chez Routledge.⁴³

Finalement, j'ai interrogé le rapport entre mathématiques et sciences sociales, et en particulier entre pratique mathématique et ontologie sociale. J'ai donné des cours en Logique et Épistémologie à l'Université de Milan et j'ai mis en œuvre des collaborations avec des experts en philosophie des sciences sociales. J'ai organisé avec Italo Testa un symposium dans le cadre de la Conférence internationale ENPOSS 2020 et j'ai soumis avec succès à la revue TOPOI une proposition de numéro spécial (à éditer toujours en collaboration avec Italo Testa) « *Mathematical Practice and Social Ontology* » : parmi les conférenciers invités il y a Julian Cole (SUNY Buffalo), José Ferreiros (Universidad de Valencia), Valeria Giardino (Institut Jean Nicod, Paris), Yacin Hamami (Université de Liège), Mirja Hartimo (Helsinki and Tampere University), Pierre Livet (Université Aix-Marseille), Sébastien Gandon (Université Clermont Auvergne) et Jessica Carter (University of Southern Denmark). Deux workshops préparatoires ont été dédiés à cette thématique en octobre 2019 à Aix-en-Provence et en décembre 2021 à Parme. Un article est en cours de rédaction pour un *Handbook of the History and Philosophy of Mathematical Practice* (Springer) dirigé par Bharath Sriraman dans la section *New Perspectives* éditée par Valeria Giardino. Une partie des résultats obtenus ou envisagés sera ultérieurement mise à l'épreuve dans le développement de mes recherches dans les prochaines années, grâce à des collaborations en cours avec des mathématiciens, des historiens des mathématiques, des épistémologues et des historiens de la philosophie.

L'environnement de travail stimulant offert par le Centre Gilles Gaston Granger, qui accueille de nombreux chercheurs ouverts à la recherche interdisciplinaire en philosophie et en histoire de la philosophie, en mathématiques et en histoire des mathématiques, avec un accent non seulement sur les sciences dures mais aussi sur les sciences humaines, notamment en raison de l'héritage des études en ergologie, m'a permis de mener à bien mes recherches. Seule interruption, un congé de grossesse gémellaire de six mois en 2013. La participation au GDR Philosophie des Mathématiques et au GDR Histoire des mathématiques m'a permis d'entrer en contact avec de nombreux autres collègues français et chercheurs étrangers avec lesquels j'ai développé de riches échanges et collaborations : Francesca Biagioli, Frédéric Patras et Georg Schiemer.

Entre 2011 et 2021, j'ai été invitée à une vingtaine de conférences inter-

42. Voir le manuscrit CANTÙ *s. d.* inclus dans l'annexe C3.

43. CANTÙ 2021.

nationales à Tubingen, Toulouse, Vienne, Prague, Lyon, Amsterdam, Venise, Konstanz, Pavie, Milan, Paris ; j'ai contribué à une quinzaine de conférences internationales et donné une quinzaine de conférences sur invitation en France et en Italie. Ces voyages m'ont permis de renforcer des collaborations existantes, d'en créer de nouvelles et de soumettre plusieurs nouveaux projets en cours à un examen par les pairs.

Les responsabilités administratives qu'on m'a confiées, telles que la participation au comité d'animation scientifique de l'IméRa (2012-2014) et en tant que membre nommée au Comité National de la Recherche Scientifique dans la section 35 (2018-2021) m'ont permis de développer de nouvelles interactions, notamment avec mes collègues Paul Egré (Nicod, ENS), Baptiste Melés (Archives Poincaré, Université de Lorraine) et Barbara Carnevali (EHESS), qui m'a invitée à intervenir lors d'une discussion sur la trilogie de l'auteur féministe britannique Rachel Cusk à l'École Normale Supérieure en octobre 2021.

Les premières expériences d'encadrement de la recherche (la co-direction avec Gabriella Crocco d'un doctorant, la participation au jury de thèse de Dewi Trebaul en 2015 et au comité de suivi de Bertrand Granier en 2020) m'ont permis de mieux comprendre le fonctionnement du doctorat français.

Les activités éditoriales—je suis membre du comité scientifique des revues *Topoi* (2011–), *History and Philosophy of Logic* (2020–) et *MéPhi ou Annals of Mathematics and Philosophy*, en création (2021–)—et l'expertise scientifique acquise en tant que rapporteur pour des nombreux colloques FPMW, pour un projet international ECOS et pour plusieurs revues (*History and Philosophy of Logic*, *Logica universalis*, *Revue d'Histoire des Mathématiques*, *Journal of Symbolic Logic*, *Perspectives*, *Rivista di Storia della Filosofia*, *Iride*, *Epistemologia*, *Logica universalis*, *APHEX*) me guideront dans l'évaluation des produits de la recherche des jeunes chercheurs.

L'expérience de la direction du projet de recherche international PICS « Interepisteme » (pour lequel j'ai coordonné avec Georg Schiemer un groupe d'environ 30 chercheurs)⁴⁴ et la soumission d'un nouveau projet international France-Autriche en collaboration avec Georg Schiemer m'ont permis d'améliorer mes compétences en matière de coordination et de promotion de la recherche scientifique en France et à l'international.

Finalement, la participation au comité scientifique des Rencontres Français en Philosophie des mathématiques (FPMW), des rencontres PHILMATH-MED, des ateliers organisés avec le groupe de travail Axiomes et Définitions, de plusieurs ateliers internationaux liés au projet « Interepisteme », d'un workshop international sur Bolzano à Prague et d'un workshop sur la pratique ma-

44. Voir la section §1.2.4 à la page 24.

thématique, m'ont permis d'étendre mes compétences en matière d'évaluation, d'organisation et de diffusion de la recherche scientifique.

Chapitre 3

Thèmes de recherche

Le sujet principal de mes recherches concerne la philosophie des mathématiques et en particulier plusieurs aspects liés aux rapports complexes entre logique et mathématiques. Cette partie du rapport traite de mon intérêt et de mes contributions à ces domaines de recherche et mentionne également des développements futurs, dont la partie couvrant les quatre prochaines années est incluse dans la section §4.1.

Je me suis fixé trois problèmes centraux pour analyser la relation entre la logique et les mathématiques aux XIX^e et XX^e siècles :

- Est-ce que le développement des mathématiques a influencé la logique du XIX^e siècle, bien avant que l'émergence de la logique symbolique n'influence à son tour les mathématiques ?
- Existe-t-il, dans la seconde moitié du XIX^e siècle, des approches axiomatiques distinctes de l'axiomatique euclidienne et de l'approche hypothético-déductive du XX^e siècle ?
- La théorie de l'argumentation est-elle vraiment née dans les années 1950 ou peut-on en trouver de nombreuses traces dans la logique des XIX^e et XX^e siècles ?

3.1 L'influence des mathématiques sur la logique

On a coutume de considérer la fin du XIX^e siècle comme un moment crucial où la logique a profondément influencé les mathématiques, au point d'en transformer le langage. Mais, est-ce que le développement des mathématiques a influencé à son tour la logique du XIX^e siècle ?

L'importance de la logique pour le développement des mathématiques dans la première moitié du XX^e siècle a été considérable, non seulement parce que la logique constitue le langage utilisé dans la formulation axiomatique des théories

mathématiques, mais aussi parce que la formulation axiomatique des théories logiques a favorisé le développement de la théorie de la démonstration et plus généralement des métamathématiques et des discussions philosophiques sur les fondements des mathématiques. S'il est vrai que la clarification des concepts logiques primitifs, des axiomes et des règles logiques a favorisé la formulation axiomatique de l'arithmétique et d'autres théories mathématiques au début du XX^e siècle, il est néanmoins intéressant d'étudier le sens inverse, à savoir la mesure selon laquelle des problèmes ouverts ou des innovations conceptuelles ou symboliques en mathématiques ont contribué à un renouveau de la logique du XIX^e siècle, même lorsque l'intérêt pour la logique était, dans l'ensemble, limité à son application aux mathématiques (comme dans le cas de Peano).

Dans mes recherches, j'ai essayé d'étudier ce problème sous des angles différents, en posant deux questions distinctes.

1. Existe-t-il des concepts ou des problèmes mathématiques qui ont nécessité une modification de la théorie logique dominante ?
2. Dans quelle mesure le besoin de définir des concepts géométriques indépendamment des concepts arithmétiques a-t-elle pu influencer le développement de la logique ?

3.1.1 Problèmes mathématiques qui influencent la logique

Les connaissances mathématiques ont influencé la logique de nombreuses manières au XIX^e siècle, avant que la symbolisation de la logique ne transforme profondément le langage et la formulation des mathématiques. Tout d'abord, il est possible d'identifier des concepts mathématiques qui ont stimulé une transformation ou une modification de la logique. Trois exemples clés sont :

1. la nécessité de fournir une justification logique pour l'utilisation de concepts vides largement utilisés par les mathématiciens, tels que $\sqrt{-1}$, ou d'autres éléments idéaux ;
2. la distinction entre égalité absolue et relative en géométrie, et
3. la détermination d'une notion logique de fonction distincte de la notion utilisée par les mathématiciens.

3.1.1.1 Les concepts vides et les éléments idéaux

La discussion sur l'interprétation des termes vides a souvent été développée à partir d'un problème de la théorie du langage : expliquer la signification des termes vides à l'intérieur d'une théorie de la référence directe. Mon étude de la logique des représentations sans objet de Bernard Bolzano de même que

l'analyse de la méthode des éléments idéaux dans les textes de Peano et Gödel montre au contraire que la question a une origine strictement interne aux mathématiques. Premièrement, les concepts vides ont une signification même s'ils sont dépourvus de référence, car ils expriment une opération ou fonction qui n'est pas définie sur un domaine fixé. Deuxièmement, l'analyse des stratégies argumentatives utilisées pour justifier l'introduction des éléments idéaux (Cantor, Dedekind, Veronese, Hilbert, Weyl) en mathématiques montre qu'à la fin du XIX^e siècle l'intérêt de la question ne concerne pas principalement le problème de l'existence des éléments idéaux, mais surtout leur rôle heuristique. Finalement, une comparaison entre la signification des notions de « réel » et d'« idéal » en philosophie et en mathématiques montre que dans les dernier cas on a affaire à une définition corrélatrice des termes, qui explique les transformations d'une théorie donnée en une autre théorie, nouvelle. L'analyse des éléments idéaux n'est pas seulement liée à la question de la signification des concepts vides mais aussi à la question de l'introduction de nouveaux symbolismes en mathématiques et de nouvelles procédures de raisonnement. Ces recherches ont permis de montrer que l'intérêt philosophique de la méthode des éléments idéaux touche à la fécondité et la généralité de la méthode de démonstration employée, et en particulier à l'étude des types de discours justificatifs que les mathématiciens introduisent en leur pratique.

Sur les concepts vides et les éléments idéaux en mathématiques j'ai rédigé trois articles, auxquels je renvoie pour les références des auteurs cités :

2003a « *Bernard Bolzano e le rappresentazioni anoggettuali* », in P. Valore (éd.), *Forma dat esse rei*. Milano : Led, 2003, pp. 125–166.

2006a « *Bolzano et les propositions en soi : une théorie objective des vérités* », in J. Benoist (dir.), *Propositions et états de choses. Entre être et sens*. Paris : Vrin, 2006, pp. 51–66.

2013a « *An argumentative approach to ideal elements in mathematics* », in A. Aberdein et I. J. Dove (dir.), *The Argument of Mathematics*. Dordrecht /Heidelberg /New York/London : Springer. « Logic, Epistemology & the Unity of Science » Series. 2013, pp. 79–99. ISBN 9789400765337. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6534-4__6.

2003a. Dans l'article « *Bernard Bolzano e le rappresentazioni anoggettuali* », j'ai décrit le rapport entre les résultats logiques et les intérêts mathématiques de Bernard Bolzano dans le cas de représentations vides. Dans la *Wissenschaftslehre* Bernard Bolzano développe une théorie logique de la signification à trois niveaux, en admettant et justifiant l'usage d'expressions dépourvues de référence et néanmoins signifiantes. Je maintiens que la motivation de Bolzano, comme on peut également le voir dans ses premiers écrits

mathématiques, était de rendre compte de la pratique mathématique consistant à utiliser des représentations contradictoires, comme par exemple $\sqrt{-1}$. L'article commence par une brève introduction des concepts fondamentaux de la théorie logique et analyse ensuite les représentations sans objet à partir d'une classification des nombreux exemples qu'on trouve chez Bolzano. Je maintiens qu'on peut distinguer quatre types de représentation sans objet : négative, contradictoire, simplement vide et non référentielle. La fonction logique des représentations sans objet est analysée par rapport aux raisons mathématiques qui en justifient l'introduction. Dans la dernière partie de l'article, on donne une évaluation des implications ontologiques de la théorie des représentations sans objet. En analysant la distinction entre deux niveaux ontologiques – il y a et exister – on interprète la théorie comme objectivisme sémantique plutôt que comme platonisme logique. Au moyen d'une comparaison avec Frege, Russell, Meinong et Quine, on analyse la question de la portée existentielle des propositions pour montrer le rapport entre l'aspect sémantique et l'aspect métaphysique du problème ontologique.

2006a. Dans l'article « *Bolzano et les propositions en soi : une théorie objective des vérités* », j'ai d'abord esquissé quatre traits fondamentaux de la logique bolzanienne : la définition et la fonction des propositions en soi et des représentations en soi, le *propositionalisme*, qui, dans la théorie de la signification, attribue le rôle le plus important aux propositions, la nature des relations entre représentations subjectives, objectives et objets, la conception sémantique de la vérité. En exposant les différences entre propositions en soi et états des choses, j'ai expliqué les raisons et les conséquences de cette opposition, en mentionnant aussi quatre conceptions que Bolzano critique vigoureusement : le psychologisme, l'interprétation intentionnelle des représentations en soi, la notion traditionnelle de *adequatio* entendue comme ressemblance entre concepts et objets, l'idée que tous les concepts doués de sens ont un objet, soit réel soit irréel. À partir de l'analyse des fondements de la théorie logique de Bolzano, on conclut que la théorie de la vérité n'est pas une théorie de la correspondance en tant que *adequatio* entre idées et objets, que les propositions en soi sont ce qui porte la valeur de vérité (*truth-bearers*) et donc ne jouent pas le rôle d'état de choses, de quelque façon qu'on les entende, que la logique bolzanienne peut être définie comme un platonisme logique seulement dans la mesure où elle refuse une conception épistémique de la vérité, et qu'il est de toute façon préférable de la voir comme un objectivisme sémantique, car elle ne distingue pas deux niveaux différents de l'être.

2013a. Dans l'article « *An argumentative approach to ideal elements in mathematics* » (voir résumé détaillé dans la section §5.1 à la page 92), j'ai mis en relation la recherche sur les éléments idéaux avec l'application de la théorie de

l'argumentation aux sciences mathématiques. Je maintiens qu'il y a deux types distincts de raisonnements. D'une part, il y a des arguments pratiques qui sont basés sur certaines valeurs perçues comme fondamentales en mathématiques : ces arguments sont avancés pour convaincre la communauté des mathématiciens de l'opportunité d'adopter une certaine stratégie heuristique dans des circonstances données. J'ai utilisé le modèle de Douglas Walton des arguments pragmatiques orientés vers un but pour reconstruire les raisonnements trouvés dans les sources mathématiques. D'autre part, il y a des méta-arguments, c'est-à-dire des arguments qui concernent la légitimité des arguments précédemment considérés. Ces méta-arguments sont particulièrement intéressants pour mettre en évidence les conceptions épistémologiques implicites des auteurs considérés.

Dans un article soumis à *Philosophia Mathematica* (maintenant en cours de réécriture en vue d'une nouvelle soumission), la comparaison entre la question logique des représentations vides et le problème de l'existence géométrique des grandeurs infiniment petites m'ont conduit à une interrogation plus générale sur la nature des éléments idéaux. Est-ce que la distinction mathématique entre éléments idéaux et éléments réels peut être expliquée comme distinction relative à une théorie que l'on considère comme point de départ ? Si cela est possible, alors les éléments idéaux constituent un aspect essentiel du rapport entre mathématiques et logique, car ils expriment une démarche méthodologique propre aux mathématiques plutôt qu'une question ontologique : l'intérêt philosophique de la méthode des éléments idéaux ne concerne donc pas tant ou seulement l'existence réelle ou idéale des éléments, mais plutôt la fécondité et la généralité d'une méthode démonstrative.

En analysant des passages des manuscrits inédits de Gödel sur la théorie des descriptions définies,¹ j'ai abordé la question des éléments idéaux à partir d'une autre perspective. En discutant les solutions proposées par Frege, Russell et Peano, Gödel associe explicitement la question de la signification d'une description vide à l'idée du résultat d'une opération qui ne soit pas défini sur un domaine. En analysant plusieurs passages de Peano, il discute la possibilité de concevoir l'identité comme un moyen d'exprimer l'existence, car elle peut être introduite seulement entre fonctions qui sont définies sur un domaine fixé.² L'analyse de ces textes inédits de Gödel permet de bien comprendre le fil rouge qui guide mes recherches entre logique et mathématiques : en analysant les textes de Bolzano, Grassmann, Peano, Gödel, on voit très clairement que plusieurs questions que la logique et la philosophie du langage ont traitées séparément peuvent recevoir des réponses nouvelles si on les considère liées :

1. Voir aussi CANTÙ 2016b, dont je parlerai dans la section §3.1.1.3.
2. Voir *infra*, section §3.1.1.3, page 52.

l'analyse des représentations vides ne peut pas être séparée de l'analyse des symbolismes nouveaux introduit dans la *Begriffsschrift*, le *Formulaire* ou les *Principia Mathematica*.

3.1.1.2 Egalité absolue et relative

La distinction entre une notion relative et une notion absolue d'égalité est généralement considérée comme pertinente en philosophie du langage (notamment avec la question des contextes opaques) ou dans les discussions philosophiques sur l'identité d'un individu dans le temps. De plus, on remarque souvent que la question n'a pas d'importance en mathématiques, parce que l'on peut toujours transformer une notion relative d'égalité en une notion absolue grâce à l'introduction d'une relation d'équivalence.³ L'analyse historique des rapports entre logique et mathématique au XIX^e siècle a montré que la question est importante pour les mathématiques, car elle est née justement dans le cadre de la géométrie, de l'analyse des fonctions, des définitions par abstraction, des relations d'équivalence (par exemple dans les œuvres de Peano, Frege, Grassmann, Husserl, Poincaré). Par ailleurs, l'analyse historique montre également que la question était étroitement liée à l'interprétation des relations entre logique et mathématiques et surtout au problème de savoir si l'identité est un concept logique ou mathématique.

Sur la distinction entre égalité absolue et relative j'ai écrit un article, auquel je renvoie pour les références des auteurs cités :

2010c « *Sul concetto di eguaglianza : Peano e la sua scuola* ». In C. S. Roero (dir.), *Peano e la sua scuola fra matematica, logica e interlingua. Atti del Congresso Internazionale di Studi (Torino, 6-7 Ottobre 2008)*. Torino : Università di Torino, pp. 545–561. ISBN 9788890476358.

2010c. Dans l'article « *Sul concetto di eguaglianza : Peano e la sua scuola* », je maintiens que la notion d'égalité est comprise de deux manières différentes par Peano et Padoa, et que la racine de cette différence est étroitement liée à la façon dont les deux auteurs comprennent la relation entre la logique et les mathématiques. Pour Padoa, l'axiomatisation des nombres rationnels doit se fonder sur l'identité absolue développée dans les nouvelles théories logiques, tandis que pour Peano la notion euclidienne d'équivalence (l'égalité des longueurs, des aires, du volume d'une entité) reste centrale. L'analyse comparative du concept d'égalité chez Padoa et chez Peano nous permet d'abord d'apprécier la diversification des points de vue au sein de l'école, car une manière différente de comprendre la relation d'égalité et d'identité reflète des

3. GRIFFIN 1977.

différences méthodologiques et épistémologiques significatives, telles que la relation entre la logique et les mathématiques, la conception du domaine d'une théorie logique, du fondement des mathématiques. En particulier, je maintiens que la conception de Peano doit être comprise à la lumière d'une approche qui remonte à Grassmann, alors que la conception de Padoa est basée sur une conception de la logique plus proche de celle de Frege et Russell, bien qu'avec de nombreuses distinctions.

En m'appuyant sur une analyse détaillée des textes de Peano et de Padoa publiés entre 1888 et 1933, j'avance les thèses suivantes :

- La position de Peano n'est pas univoque mais évolue dans le temps. Ce n'est qu'à partir de la deuxième édition du *Formulaire* qu'apparaît l'idée de fournir une définition générale de l'égalité, bien que Peano ne semble jamais penser qu'elle puisse réellement épuiser le sens de l'égalité entre deux objets.
- Peano semble pencher pour une conception relative de l'égalité.
- Le choix de Peano de garder un seul symbole pour dénoter les différentes relations d'égalité, choix critiqué par Frege et partiellement par Padoa, est un symptôme d'une certaine influence de l'approche de Grassmann, basée sur une approche algébrique abstraite.
- La distinction de Padoa entre égalité et équivalence, ou, dans sa terminologie, entre égalité et relations « égaliformes », émerge en relation avec la critique de la caractérisation, dans les premiers projets du *Formulaire*, du symbole $=$ au moyen des trois propriétés réflexive, symétrique et transitive.
- La recherche d'une définition syntactico-linguistique de l'égalité basée sur la réflexivité et la substitutivité découle de l'insatisfaction de la définition en termes de classes qui apparaît dans le *Formulaire* dès la deuxième édition : ce qui est en cause ici, cependant, ce n'est pas le recours au concept de classe, mais plutôt l'utilité de la définition pour les applications pratiques.
- Au lieu d'introduire une définition générale et d'autres propositions spécifiques comme définitions particulières de l'égalité entre paires, fonctions, nombres de diverses sortes, il est nécessaire de donner une seule définition logique et de la distinguer des autres propositions arithmétiques, qui ne servent pas à définir l'égalité mais contribuent à la définition des termes qui y figurent, dont certains seulement—paires, fonctions et relations—sont des concepts strictement logiques.
- La seule tentative d'éliminer l'ambiguïté, due à la présence simultanée de plus d'une définition du symbole $=$, conduit Padoa à s'opposer, avant et indépendamment de Russell, aux définitions par abstraction et aux

définitions par opérateur proposées par Burali-Forti.

Dans l'article, j'aborde l'exemple des fractions pour montrer la différence entre Peano et Padoa. Cet exemple montre également comment l'intention de défendre une certaine pratique mathématique répandue constitue dans le cas de Peano une raison supplémentaire de défendre une conception relative de l'identité. Déjà en 1894 et à nouveau dans un article de 1917, Peano avait signalé un problème dans l'écriture de l'égalité entre fractions.⁴ Les mathématiciens écrivent « $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ » même si ces deux fractions n'ont pas toutes leurs propriétés en commun, car la première est une fraction irréductible (le numérateur et le dénominateur sont premiers), alors que la seconde ne l'est pas. Peano propose deux solutions : soit on considère qu'être irréductible n'est pas une propriété d'une fraction, soit on considère que c'est tout au plus une propriété non réelle mais formelle d'une fraction, une propriété due au symbolisme, comme être à gauche du signe de l'égalité.⁵ Ces solutions confirment la tendance de Peano à considérer l'égalité comme une identité relative, qui ne concerne que certains aspects des fractions—par exemple, uniquement les propriétés réelles. La solution proposée par Padoa est d'un autre type : le concept de fraction $\frac{a}{b}$ est défini comme l'ensemble de toutes les couples d'entiers qui sont proportionnelles à la couple (a, b) , c'est-à-dire comme la classe d'équivalence de la couple (a, b) par rapport à une relation de proportionnalité. Grâce à cette définition, entre deux fractions il sera possible de définir non seulement une équivalence (l'identité relative de Peano) mais aussi une véritable identité logique : $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{6}$ représenteraient en effet la même fraction comme membres de la même classe d'équivalence.⁶ Cet exemple montre clairement le fossé entre Padoa et Peano : ce dernier défend une conception relative de l'identité, tandis que Padoa suppose que le symbole de l'égalité doit avoir une interprétation fixe dans tous les domaines et est prêt à changer les définitions des nombres afin de garantir la définissabilité d'une seule relation d'égalité parmi toutes les entités possibles.

3.1.1.3 La notion de fonction

Un troisième exemple où nous voyons comment la logique a changé à la suite de la discussion d'un concept mathématique est la notion de fonction. Les exemples de Peano et de Grassmann révèlent que la notion logique de fonction était initialement plus large que celle utilisée aujourd'hui, et que la pratique mathématique a finalement conduit à l'adoption d'une notion dans laquelle

4. PEANO 1917–1918; PEANO 1894.

5. PEANO 1917–1918, p. 421.

6. PADOA 1909, p. 68–72.

domaine et codomaine sont définis. Sur la notion de fonction, j'ai écrit deux articles, auxquels je renvoie pour les références des auteurs cités :

2009b « *Grassmann's epistemology : multiplication and constructivism* ». In A. Petsche et al. (éd.), *From Past to Future : Grassmann's Work in Context. The Grassmann Bicentennial Conference Septembre 2009*. Basel : Birkhäuser, 2010, pp. 91–100. ISBN 9783034601542.

2016a « *Peano and Gödel* », in G. Crocco et E-M. Engelen (éd.), *Kurt Gödel : Philosopher-Scientist*. Aix en Provence : Presses Universitaires de Provence, 2016, pp. 107–126. ISBN 9782853999762. <https://doi.org/10.4000/books.pup.53585>.

2009b. La différence entre une notion d'opération ou de fonction définie sur un domaine préalablement déterminé et la notion d'opération ou fonction définie sur un domaine variable a été introduite par Hermann Grassmann dans sa théorie de l'extension. Dans l'article « *Grassmann's epistemology : multiplication and constructivism* » j'ai analysé les influences réciproques des idées mathématiques et philosophiques de Grassmann, en abordant son épistémologie à partir de son travail mathématique. Le point de départ est une analyse de la notion de produit entre les grandeurs extensives tels qu'il a été décrit dans la première et la deuxième édition de la *Ausdehnungslehre* (qui seront désignées ci-dessous comme A1 et A2 respectivement).⁷ Grâce à une comparaison avec trois systèmes vectoriels (l'analyse vectorielle, l'algèbre extérieure et l'algèbre géométrique) sur des questions mathématiques particulières comme l'homogénéité des éléments, la considération du domaine comme ayant un nombre fixe ou variable de dimensions, et les propriétés générales du domaine, j'ai mis en évidence une distinction entre une notion « générale » ou logique de produit définie en A1 pour deux grandeurs par rapport à un domaine indéfini (produit régressif dans sa formulation générale), et le produit « particulier », régressif, appliqué, défini à la fois en A1 et en A2 par rapport à un système de n dimensions. Grassmann considérait comme plus « général » le produit relatif à un domaine variable—un domaine qui n'est pas fermé dans le cadre de l'opération mais plutôt un résultat de notre exécution de l'opération elle-même—et comme appliqué le produit sur un domaine fixe, comme dans les sciences réelles, par exemple la géométrie, où certaines contraintes sont acceptées d'emblée, et les formes sont « incarnées » dans un domaine fixe. L'article donne des arguments pour défendre les trois thèses suivantes : le produit entre des magnitudes extensives est lié à la distinction introduite par Grassmann entre nombres et grandeurs, à une nouvelle façon d'introduire la distinction entre les mathéma-

7. GRASSMANN 1844 ; GRASSMANN 1862.

tiques abstraites et les mathématiques appliquées, et au développement d'une approche constructiviste en mathématiques.

2016a. Grâce à la participation au projet ANR Gödel (2009-2013) dirigé par Gabriella Crocco, j'ai eu la possibilité d'analyser plusieurs extraits de manuscrits philosophiques inédits de Gödel, les *Max Phil*, et en particulier le volume X, où on trouve une distinction entre une fonction en sens général et une fonction en sens strict. En comparant les textes de Gödel avec plusieurs passages du *Formulaire* de Peano et des *Principia Mathematica* de Russell et Whitehead cités dans les *Max Phil*, j'ai montré dans l'article « *Peano and Gödel* » que Peano a clairement distingué entre fonctions définies et fonctions indéfinies et que Gödel connaissait bien cette distinction. L'article confirme que Gödel avait une connaissance très détaillée du *Formulaire*, également attestée par les annotations contenues dans le cahier *Logik und Grundlagen*.⁸ Un premier but de l'article est de contester ou limiter la continuité conceptuelle entre Russell et Peano qui est souvent mise en évidence dans la littérature récente. Un deuxième but est de montrer que pour Peano les fonctions au sens strict sont les définitions utilisées par les mathématiciens, tandis que la notion plus large de fonction est de nature logique. L'article applique la distinction à la question des descriptions définies et explique pourquoi une description définie qui ne satisfait pas aux conditions d'existence et d'unicité est quand même douée de sens selon Peano, bien qu'elle ne puisse pas jouer le rôle d'une définition des termes y énoncés. L'article donne des arguments en faveur des trois thèses suivantes : 1) la fonction qui caractérise les descriptions définies est introduite comme l'inverse de la fonction *iota* ; 2) les fonctions peuvent être entendues dans un sens général, sans domaine déterminé, ou dans un sens strict, et 3) ce n'est que dans le second cas que les conditions d'existence et d'unicité sont nécessaires. C'est seulement lorsqu'en mathématiques on veut utiliser une description définie comme une définition qu'il devient nécessaire d'utiliser la notion de fonction au sens strict du terme.

3.1.2 L'opposition entre géométrie et arithmétique et son rapport à la logique

La distinction traditionnelle entre arithmétique et géométrie est un thème qui traverse toute l'histoire de la philosophie et qui n'a reçu qu'une attention unilatérale dans l'histoire des mathématiques. Dans mes recherches, je me suis interrogée sur la relation de ce thème avec la transformation des mathématiques d'une science des quantités à une théorie des formes, avec l'opposition

8. Voir CANTÙ 2016b, p. 109, note 6.

entre la géométrie analytique et la géométrie synthétique, avec la nécessité de distinguer les nombres et les quantités dans les axiomatisations de la fin du XIX^e siècle, ou encore avec la *mathesis universalis*. La question directrice ici est de savoir si cette distinction (ou éventuellement sa négation) a influencé le développement de la logique.

J'ai abordé le problème en posant trois questions différentes :

1. La distinction entre la géométrie analytique et la géométrie synthétique a-t-elle encouragé le développement de modèles non standard du continuum ou d'approches algébriques plus abstraites des quantités géométriques ?
2. Dans quelle mesure cette opposition a-t-elle stimulé la formulation axiomatique de théories numériques et géométriques ?
3. Quel a été le rôle de la notion de *mathesis universalis* dans la transformation des mathématiques d'une science des quantités à une étude des structures ?

J'ai abordé ces questions dans les ouvrages suivants, auxquels je renvoie pour les références des auteurs cités :

- 1999** *Giuseppe Veronese e i fondamenti della geometria*. Milano : Unicopli, 1999, 180 pp. ISBN 9788840005898.
- 2003b** « *La matematica da scienza delle grandezze a teoria delle forme. L'Ausdehnungslehre di H. Grassmann* ». Thèse de Doctorat en Philosophie des Sciences. Genova : Università degli Studi di Genova, 2003, xx+465pp.
- 2008b** « *Mathematik als Größenlehre* », in J. Stolzenberg et O.-P. Rudolph (dir.), *Wolffiana II : Christian Wolff und die europäische Aufklärung. Akten des 1. Internationalen Christian-Wolff-Kongresses, Halle (Saale), 4.-8. April 2004*, Teil IV. Mathematik und Naturwissenschaften. Ästhetik und Poetik. Hildesheim : Olms, 2008, pp. 13--24. ISBN 9783487133911.
- 2010b** « *The role of epistemological models in Veronese's and Bettazzi's theory of magnitudes* », in M. D'Agostino, G. Giorello, F. Laudisa, T. Pievani et C. Sinigaglia (éd.), *New Essays in Logic and Philosophy of Science*, London : College Publications, 2010, pp. 229--241. ISBN 9781848900035.
- 2010d** « *Aristotle's prohibition rule on kind-crossing and the definition of mathematics as a science of quantities* », *Synthese*, 174/2 (2010) : 225--235. <https://doi.org/10.1007/s11229.008-9419-2>.
- 2013b** « *Geometry and measurement in Otto Hölder's epistemology* », *Philosophia Scientiae - Studies in History and Philosophy of Science*, 17-1 (2013) : 131--164. <https://doi.org/10.4000/philosophiascientiae.832>.

- 2014a** « *Bolzano versus Kant : Mathematics as a Scientia Universalis* », in A. Reboul (éd.), *Mind, Values and Metaphysics, Philosophical Papers Dedicated to Kevin Mulligan*, Vol. I, Cham / Heidelberg / New York / Dordrecht / London : Springer, 2014, pp. 295--316, ISBN 9783319041988, https://doi.org/10.1007/978-3-319-04199-5_22.
- 2018a** « *Mathematics. Systematical Concepts* », in R. Theis et A. Aichele (éd.), *Handbuch Christian Wolff*, Wiesbaden : Springer, pp. 357--379, 2018. ISBN : 978-3-658-14737-2 / 978-3-658-14736-5.

3.1.2.1 Géométrie analytique et synthétique

L'opposition entre géométrie analytique et géométrie synthétique est étroitement liée à la naissance de la géométrie projective, qui conduit à la remise en cause du caractère empirique de la géométrie (si Pasch s'efforce de le défendre, c'est parce qu'il estime qu'il est désormais d'usage de l'associer à des spéculations) et exige en même temps une formulation claire des propositions primitives et des étapes par lesquelles on prouve des théorèmes à partir de celles-ci.⁹ De ce point de vue, le développement d'une géométrie qui s'oppose à la géométrie analytique basée sur les coordonnées numériques est un pas important vers la transformation de l'axiomatique euclidienne en axiomatique hypothético-déductive. L'opposition entre la géométrie analytique et la géométrie synthétique a également encouragé le traitement abstrait de la géométrie en favorisant la distinction entre la science de l'espace physique, dont l'objectif principal est la mesure et qui fait donc un usage essentiel des nombres, et l'étude de la théorie abstraite des extensions, qui peut également être analysée indépendamment des coordonnées numériques. Cette distinction a été approfondie par de nombreuses discussions sur la relation entre espace intuitif et espace géométrique (Véronèse, Poincaré, Helmholtz, Klein).

La logique a été profondément modifiée par les géométries non euclidiennes et non archimédiennes. Habituellement, on se concentre sur les géométries non euclidiennes en soulignant comment la co-possibilité de plusieurs descriptions différentes de l'espace a sapé l'idée qu'il n'y a qu'une seule vraie description de l'espace et la confiance dans l'évidence des axiomes. Je me suis concentrée sur le cas des géométries non archimédiennes, qui posent un problème non pas tant dans la description de l'espace physique (puisque les infinitésimaux sont de toute façon imperceptibles et donc hors de portée de l'observation humaine) que dans la construction de systèmes numériques alternatifs pour décrire le continuum (le continuum de Dedekind opposé au continuum de Vé-

9. PASCH 1884.

ronèse, mais aussi les ensembles de nombres infinis et infinitésimaux de Véronèse, qui n'ayant pas de premier élément s'opposent aux nombres transfinis de Cantor). Les efforts pour définir le continuum numérique sans recourir au continuum géométrique ont conduit Dedekind à concevoir une nouvelle définition du nombre réel, qui place l'ordre au centre de l'étude et modifie profondément la logique, qui devient progressivement une logique des relations. C'est également en opposition avec la conception de Dedekind que s'est développé un courant de recherche sur l'axiomatisation correcte des quantités, comprises comme des entités géométriques étendues à caractériser indépendamment des nombres. Différentes idées du rôle de la logique et de l'axiomatique émergent dans l'œuvre de Grassmann, Veronese, Hölder, Bettazzi.

1999. L'objectif principal du livre *Giuseppe Veronese e i fondamenti della geometria* est de présenter la formulation axiomatique de Veronese du continuum non-archimédien, formulation qu'il présente dans l'introduction à son traité de géométrie projective.¹⁰ Le livre montre à la fois le rôle joué par l'opposition entre la géométrie analytique et la géométrie synthétique dans la démarcation conceptuelle qui a conduit à la construction de la géométrie non-archimédienne, et comment la nécessité de fournir une justification de la légitimité de cette nouvelle théorie mathématique a suggéré une nouvelle façon de distinguer la possibilité logique et la possibilité géométrique et a développé une approche plus abstraite de l'étude axiomatique des quantités géométriques. Comme la publication est antérieure à la thèse, je ne donne pas plus de détails ici.

2003b. J'ai analysé le lien entre la notion de grandeur et la notion logique de forme dans la thèse de doctorat « *La matematica da scienza delle grandezze a teoria delle forme. L'Ausdehnungslehre di H. Grassmann* », en particulier dans la deuxième partie, dédiée à Hermann Günther Grassmann et à sa définition des mathématiques comme théorie des formes. Dans le chapitre 6 (j'analyserai les autres chapitres dans la section §3.1.2.2 sur les mathématiques comme science des grandeurs), j'ai montré les liens avec la construction dynamique propre à la *Naturphilosophie*, et le rapport entre géométrie et algèbre qui émerge dans le calcul vectoriel. En particulier, ce qui m'intéresse le plus dans le cas de Grassmann est la relation entre une question mathématique spécifique (comment représenter géométriquement l'étude de courbes décrites par des équations algébriques de degré supérieur à trois) et la solution adoptée : étudier des quantités étendues sans introduire un ensemble arbitraire de coordonnées, mais en introduisant un concept général de forme qui peut être appliqué aux nombres et aux grandeurs et qui permet, grâce à l'introduction

10. VERONESE 1891.

de la notion nouvelle de vecteur (*Strecke*), de comprendre de manière plus générale les relations entre la géométrie affine, projective et métrique.

L'étude de la géométrie sans l'introduction de coordonnées est importante pour Grassmann car il pense que les grandeurs étendues ont une nature intrinsèquement différente de celle des nombres et servent à décrire soit des quantités sans dimension soit des quantités ayant une dimension. La base philosophique de la nouvelle conception mathématique de Grassmann et de sa nouvelle théorie des grandeurs étendues est centrée sur la formulation du concept mathématique de « forme » en tant qu'objet de pensée déterminé par sa propre loi générative. Les nombres discrets et les grandeurs continues relèvent alors du même concept : les différences intrinsèques entre ce que nous appelons nombre et ce que nous appelons grandeur sont le résultat d'une manière différente selon laquelle ces formes sont générées : par la répétition d'une opération commutative d'addition dans un cas, par une multiplication anticommutative dans le second cas.

2010b. L'article « *The role of epistemological models in Veronese's and Bettazzi's theory of magnitudes* » prend deux exemples historiques comme point de départ pour l'étude du rôle des modèles numériques dans la construction d'un système non-Archimédien. Contrairement à Dedekind, Veronese pensait que le continuum géométrique ne devait pas être décrit comme un système de points, mais comme un système de segments qui ne devaient pas et ne pouvaient pas être réduits à des nombres. Si Veronese avait admis le système des nombres réels comme modèle privilégié pour la description des magnitudes géométriques, il n'aurait pas pu nier le principe d'Archimède et découvrir une description alternative de la continuité spatiale. Les nombres sont considérés comme essentiellement ordinaux (les nombres cardinaux étant, dans la perspective de Cantor, le résultat d'une opération d'abstraction à partir d'ensembles ordonnés) et ont été introduits de deux manières indépendantes. Les nombres naturels ont été introduits comme le résultat d'un acte de pensée—le comptage des éléments d'un ensemble ordonné. Les nombres continus réels et non-archimédiens ont été introduits par association à un système donné de grandeurs géométriques. Les propriétés des nombres dérivent des propriétés des magnitudes et non l'inverse. Bettazzi, comme Veronese, considère la méthode synthétique comme plus simple, intuitive et compréhensible, mais il reconnaît le risque de limiter les extensions possibles de la notion de nombre, si cette dernière est ancrée dans certaines classes concrètes de grandeurs. Le risque pourrait être évité si on étudiait également de classes de grandeurs qui ne peuvent pas être concrètement imaginées : c'est exactement ce que fait Bettazzi quand il considère des classes à plusieurs dimensions ou des classes unidimensionnelles de 2^{ème} espèce. L'approche synthétique de Bettazzi est une

approche abstraite de l'étude des structures algébriques ordonnées. Les grandeurs mesurables sont définies par les propriétés qu'on attribue aujourd'hui aux monoïdes ordonnés abéliens. Bien que le contexte épistémologique soit similaire à celui de Véronèse, l'objectif de Bettazzi est tout à fait différent : une étude générale des magnitudes plutôt qu'une description géométrique du continuum intuitif. Bettazzi est plus influencé par le conceptualisme de Grassmann que par l'empirisme de Pasch. Bettazzi étend la notion de mesure à des classes non-archimédiennes, mais suppose qu'une classe continue de magnitudes est archimédienne. La notion de mesure n'implique pas la continuité de Dedekind ni la monotonie, mais elle ne peut pas être définie dans les classes à n dimensions, car elles ne sont pas ordonnées. C'est une raison pour laquelle l'approche abstraite de Bettazzi marque une étape importante vers l'axiomatisation de la théorie des magnitudes, qui est habituellement attribuée à Otto Hölder.

2013b. Dans l'article « *Geometry and measurement in Otto Hölder's epistemology* », je présente la formulation axiomatique de la théorie des quantités dans l'article de Hölder « *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass* » et la compare aux formulations proposées par Bettazzi et Veronese.¹¹ Dans le reste de l'article, j'aborde trois questions plus larges, me référant à d'autres ouvrages de Hölder, et notamment à *Die mathematische Methode* :¹² comment et pourquoi Hölder introduit une distinction entre la géométrie et l'arithmétique ? Quelle est la relation entre sa conception philosophique et l'épistémologie kantienne ? Quel est le rôle accordé à l'axiomatique et le rapport avec l'empirisme ? La démarcation entre la géométrie et l'arithmétique est associée à une distinction philosophique entre les objets et relations donnés et les concepts construits à partir des premiers. En géométrie, il existe des concepts donnés (point, ligne, plan, la relation « être entre » [*betweenness*]) et des concepts construits (le segment en tant que paire de points), alors qu'en arithmétique, il n'existe que des concepts construits, dont certains peuvent néanmoins jouer le rôle de concepts primitifs et être utilisés pour générer des concepts d'ordre supérieur. L'article étudie la relation avec Grassmann et Meinong, auxquels Hölder fait explicitement référence, et les différences avec le cadre conceptuel de Veronese qui ont conduit Hölder à considérer la continuité de Dedekind comme une propriété des quantités mesurables. L'article montre également comment la démarcation entre l'arithmétique et la géométrie a influencé les résultats mathématiques de Hölder, puisqu'elle l'a amené à prouver que les nombres réels et les quantités mesurables ont réellement la même structure (théorème de représentation) : ce n'est qu'ainsi qu'il est possible d'utiliser les premiers comme une représentation

11. HÖLDER 1901.

12. HÖLDER 1924.

symbolique des secondes.

Un aspect important de l'approche de Hölder concerne la conception de la logique comme la science qui étudie les chaînes déductives, et qui ne peut donc pas elle-même être construite de manière déductive. Pour Hölder, la formulation axiomatique concerne les mathématiques, mais pas la logique, qui ne peut s'appliquer à elle-même. Van der Waerden voit dans cet aspect une anticipation de Gödel.¹³ Cette idée d'une logique générale qui naît d'une étude jamais définitivement achevée des activités mathématiques déductives explique la distance par rapport à l'effort de Hilbert de prouver des résultats métamathématiques à l'intérieur d'un système donné, mais aussi la différence radicale par rapport à Peano, qui voulait exprimer toutes les mathématiques au moyen d'un langage symbolique unique et adopter une langue universelle standardisée comme le *latino sine flexione* pour la communication scientifique. Hölder, au contraire, pensait que la spécificité des mathématiques n'avait rien à voir avec les symboles utilisés pour les représenter, mais plutôt avec le type d'activité, c'est-à-dire la déduction, déployée dans sa pratique.

3.1.2.2 Les mathématiques comme science des grandeurs (*Größenlehre*) et la *mathesis universalis*

L'analyse de la notion de magnitude dans sa relation complexe avec l'arithmétique et la géométrie permet également de mieux comprendre plusieurs interprétations possibles de la *mathesis universalis* au XIX^e siècle comme logique externe ou interne aux mathématiques. En comparant les idées philosophiques de Bolzano, Grassmann et Husserl, on peut éclaircir la façon selon laquelle l'idée d'une théorie abstraite préalable aux mathématiques est liée à l'idée de grandeur et à une notion de logique en tant que théorie générale des concepts.

2003b. Je complète ici les informations sur la thèse de doctorat « *La matematica da scienza delle grandezze a teoria delle forme. L'Ausdehnungslehre di H. Grassmann* », que j'avais mentionnée en relation à l'opposition entre géométrie analytique et synthétique dans la section précédente. En discutant de la *mathesis universalis* d'un point de vue historique, on part souvent de Descartes et Leibniz pour remonter jusqu'au commentaire de Proclus sur Euclide et distinguer la *mathesis universalis* de l'analytique cartésienne, la méthode géométrique, l'*ars combinatoria* et la *characteristica* leibnizienne et voir son origine soit dans Proclus¹⁴ ou dans les algébristes du XVI^e siècle,¹⁵ ce qui

13. Van der WAERDEN 1938.

14. RABOUIN 2015.

15. CRAPULLI 1969.

marquerait une rupture avec l'âge classique.¹⁶ Dans ma recherche doctorale, j'ai abordé la question sous un angle différent, car mon objectif principal était d'évaluer l'origine et la transformation de la définition des mathématiques comme science des quantités.

Le chapitre 2 de la thèse fournit une reconstruction historique des différentes significations du terme magnitude chez Aristote, Euclide, Proclus, les algébristes du XVI^e siècle, Viète, Descartes et Leibniz. Je maintiens qu'une rupture épistémologique a effectivement eu lieu au XVI^e siècle, car pour la première fois une définition unique des mathématiques comme science des quantités (ou des quantités en général) est proposée, alors que chez Aristote il n'y avait que des définitions séparées de l'arithmétique et de la géométrie. Le concept de grandeur dans les mathématiques comme *Grössenlehre* est plus général que le concept géométrique : les quantités sont des choses qui peuvent être considérées comme égales ou inégales. Cette définition des mathématiques est restée pratiquement inchangée au cours des siècles suivants et, par conséquent, au XVIII^e siècle, elle apparaît déjà comme une définition « traditionnelle », même si elle ne remonte pas du tout aux mathématiques antiques : néanmoins, le concept de grandeur mentionné varie continuellement de sens d'un auteur à l'autre, d'une époque à l'autre. Avec le développement de l'algèbre (notamment avec la logistique spéculaire de Viète) la quantité ou la grandeur en général est conçue, par exemple, comme un nouveau concept symbolique dont les propriétés sont empruntées aux propriétés des opérations arithmétiques sur les nombres : les concepts de grandeur et de quantité sont ainsi au centre des relations complexes entre l'arithmétique, la géométrie et l'algèbre. Ces dernières ne sont en aucun cas fusionnées en une seule science des quantités, car les nombres et les quantités géométriques ont des propriétés différentes : outre la continuité (différence supprimée par la définition newtonienne du nombre comme rapport entre quantités), il y a l'homogénéité des nombres par opposition à la dimensionnalité des quantités. Si les mathématiques, grâce aux développements de l'algèbre, sont de plus en plus définies comme la science des quantités ou des grandeurs, cela ne signifie pas que cette définition repose sur une catégorie ontologique d'objets : les quantités en général. Au contraire, puisque les quantités en général sont définies dans le cadre de la théorie des proportions et des équations, qui établit des relations et des rapports entre les choses, la définition des mathématiques renvoie essentiellement à l'idée de relation et d'opération, comme en témoigne la définition cartésienne de la quantité comme « ce qui reçoit le plus et le moins, comme ce qui peut être comparé, mesuré et ordonné ». Cette définition de la grandeur

16. CANTÙ 2010c; CANTÙ 2010e.

englobe les caractéristiques attribuées par Aristote à la qualité et à la quantité respectivement, et va donc au-delà du concept de quantité des algébristes du XVI^e siècle pour inclure le concept de qualité. C'est dans cette direction que vont les recherches de Leibniz, dont la *mathesis universalis* n'est plus seulement l'étude de la relation d'égalité et de l'opération de somme (toutes deux identifiées comme caractéristiques de la quantité) mais elle est aussi l'étude d'autres types de relations, parmi lesquelles en particulier celle de similitude, propre aux qualités : la mathématique universelle est une science générale des relations.

Dans le troisième chapitre, l'étude du concept de mathématiques comme science des grandeurs se poursuit à travers le commentaire de quelques textes, également rapportés en traduction italienne en annexe à la thèse, de Wolff, d'Alembert, Euler et Gauss. Si les termes « magnitude » et « quantité », distingués par Aristote comme espèce et genre, sont finalement devenus synonymes à la suite du développement de l'algèbre, Wolff a officiellement introduit cette synonymie dans la langue allemande en traduisant le terme latin « quantitas » par l'expression « Grösse ». D'Alembert, qui est attentif à l'histoire des concepts mathématiques, distingue clairement un sens spécifique de la grandeur propre à la géométrie d'un sens général propre à l'algèbre : ce n'est que dans ce dernier sens que le terme « quantité » peut être considéré comme synonyme de « grandeur ». La définition cartésienne de la quantité comme « ce qui est susceptible d'être augmenté et défini » se retrouve chez Euler, qui en révèle le sens mathématique : ce qui caractérise une quantité, c'est essentiellement le fait qu'elle puisse être obtenue et exprimée comme la somme de quantités données. Gauss revient à cette même caractéristique des quantités pour caractériser les quantités extensionnelles, c'est-à-dire les quantités déterminées par un certain type de relation entre les parties et le tout, relation qui s'exprime mathématiquement par une opération d'addition.

Dans la deuxième partie de la thèse consacrée à Grassmann (chapitres 4-6), j'ai montré pourquoi l'analyse de ses travaux est centrale si l'on veut comprendre le passage des mathématiques d'une science des quantités à une théorie des formes et la relation avec la *mathesis universalis*. D'une part, parce que Grassmann critique une définition devenue traditionnelle mais ressentie par beaucoup comme inadéquate parce qu'elle ne rend pas compte de nouvelles disciplines comme l'analyse combinatoire ; d'autre part, parce qu'il propose une nouvelle définition des mathématiques comme théorie des formes en se référant à l'idée romantique de la conception dynamique de la nature : les caractéristiques de chaque chose coïncident avec les propriétés de sa loi générative. Selon cette nouvelle définition, les mathématiques ne sont plus ni la théorie des nombres ni la théorie des figures géométriques, comme elles l'ont

été jusqu'au XIX^e siècle, malgré l'insistance sur le concept d'ordre et de relation déjà présent chez Descartes et Leibniz. Il s'agit plutôt de la science de ce qui peut être obtenu par une procédure constructive (selon une certaine loi ou régularité) à partir d'un élément initial. De ce point de vue, la différence entre Grassmann et ses contemporains ne pourrait être plus radicale.

Dans la perspective de Grassmann, le problème de la détermination des mathématiques sur la base des critères généraux de classification utilisés dans les traités encyclopédiques pour établir la place des mathématiques dans le corps des disciplines scientifiques perd son importance. En analysant dans le premier chapitre de la thèse les encyclopédies du XVIII^e siècle (la *Cyclopaedia* de Chambers et l'*Encyclopédie* de d'Alembert et Diderot) ainsi que les classifications du XIX^e siècle (Ampère, Comte, Spencer et Wundt), j'avais identifié plusieurs critères classificatoires : les fins de la connaissance (sur la base desquelles Aristote distingue les sciences en théorique, pratique et poïétique, et qui sous-tendent la distinction des mathématiques en pures et appliquées), les facultés cognitives (critère souvent extrinsèque au développement effectif des sciences et qui caractérise les mathématiques comme une activité essentiellement rationnelle), les objets (qui peuvent être une classe d'entités, mais aussi un ensemble de notes, de propriétés, de points de vue), la nature des propositions (nécessité, possibilité, *a priori*, *a posteriori*), la forme axiomatique (ce dernier critère n'étant toutefois applicable qu'aux sciences démonstratives axiomatisables). Pour Grassmann la définition des mathématiques n'utilise ni le critère des fins, ni le critère des facultés, ni la méthode axiomatique : Grassmann maintient que les mathématiques ne partent pas d'axiomes mais de définitions, non pas de propositions sur la manière dont le monde est fait mais de propositions dont la vérité repose sur l'accord entre différents actes de pensée. Le critère principal adopté par Grassmann pour sa caractérisation des mathématiques est, à côté de celui de la nature des propositions qui les composent, celui des objets. Mais par objets, il n'entend pas une catégorie ontologique de choses, qu'il s'agisse de choses concrètes comme dans l'empirisme de Mill, ou de choses idéales comme dans le platonisme mathématique, mais plutôt des modes de génération des choses. La caractéristique la plus pertinente des mathématiques est que leurs objets sont des formes, c'est-à-dire des lois génératives, qui ne sont pas des systèmes de relations entre objets ou des structures avec des modèles particuliers, mais des objets caractérisés par une régularité constructive et générative. L'approche « philosophique » de Grassmann, que l'on retrouve dans la première édition de l'*Ausdehnungslehre*, remplit une fonction essentielle de conceptualisation de la connaissance mathématique. L'approche philosophique ne sert pas seulement à définir ce que sont les mathématiques ou à expliquer la nature des objets mathématiques,

mais constitue en même temps une solution à des problèmes mathématiques et philosophiques donnés.

2008b. Dans l'article « *Mathematik als Größenlehre* » paru en allemand dans les actes d'une conférence sur Christian Wolff, j'ai étudié le rôle de ce dernier dans la diffusion de la définition des mathématiques comme *Größenlehre* et les conséquences de son choix de traduire les deux termes latins « *quantitas* » et « *magnitudo* » par le même terme allemand « *Grösse* ». D'un point de vue mathématique, cette identification a permis l'application des procédures algébriques à la géométrie et la détermination de figures géométriques continues au moyen de leurs mesures numériques. La dispute entre la méthode analytique et la méthode synthétique initiée par Monge, Poncelet et Chasles au XIX^e siècle montre à quel point la relation entre le calcul algébrique et la géométrie était problématique, notamment parce que toutes les étapes du calcul ne pouvaient pas correspondre à une signification géométrique. La réfutation par Grassmann de la définition des mathématiques comme une théorie des quantités est donc à rechercher dans la réfutation de toute tentative de fonder la géométrie sur l'arithmétique. Selon Grassmann, chaque branche des mathématiques doit être fondée sur elle-même : il a donc développé une nouvelle théorie indépendante de l'arithmétique, qui a favorisé l'émergence de la théorie vectorielle et de l'algèbre linéaire. En particulier, cette nouvelle théorie, appelée théorie de l'extension, devait dépasser l'opposition entre les méthodes analytiques et synthétiques et réaliser le projet de Leibniz d'un calcul géométrique.

D'un point de vue épistémologique, l'identification de « *quantitas* » et de « *magnitudo* » conduit par elle-même à la détermination des propriétés des figures géométriques au moyen des propriétés des nombres réels, comme c'est le cas pour la continuité. Au contraire, l'édification d'une géométrie non-archimédienne par Giuseppe Veronese a prouvé que les propriétés de continuité des nombres réels pouvaient être partiellement différentes de celles des figures géométriques. Enfin, la traduction des mots « *quantitas* » et « *magnitudo* » par le seul mot « *Grösse* » a empêché une conceptualisation adéquate et complète des objets des mathématiques. Déjà au XVII^e siècle, Descartes et Leibniz avaient envisagé les mathématiques comme une science des relations, mais la définition diffusée ensuite par Wolff privilégiait une conception ontologique des mathématiques, puisque les « *grandeurs* » se référaient à des quantités au sens strict plutôt qu'à des quantités en général. La vitalité du débat germanophone sur la définition appropriée des mathématiques est donc en partie due à la vision unilatérale des mathématiques de Wolff, sinon à son choix terminologique.

2010d. L'article « *Aristotle's prohibition rule on kind-crossing and the de-*

definition of mathematics as a science of quantities » analyse le modèle de la science classique pour en évaluer la fécondité du point de vue de l'histoire de la philosophie des sciences, surtout en rapport avec le développement de la conception des mathématiques en tant que science des grandeurs. Kant, Bolzano, Hegel et Grassmann ont tous critiqué la définition des mathématiques en tant que *Grössenlehre* et la confusion entre les quantités numériques et les magnitudes extensives. Pour comprendre une telle critique, il faut savoir à quel moment cette définition est devenue populaire et quel était son objectif.

C'est une tâche très difficile, car les termes « *quantitas* », « *quantity* », « *quantité* », « *quantità* », d'une part et « *magnitudo* », « *magnitude* », « *grandezza* », « *grandeur* » d'autre part, étaient souvent utilisés de manière ambiguë et parce que la même définition a été adoptée par différents auteurs pour exprimer des conceptions distinctes des mathématiques. De plus, l'émergence de cette définition était étroitement liée au développement du concept de *mathesis universalis* et à la préférence pour l'un ou l'autre des mots « *quantitas* » et « *magnitudo* » pour traduire le terme euclidien « *μέγεθος* ». L'article illustre brièvement, en reprenant certaines parties de la thèse, quelques éléments pertinents pour comprendre l'émergence de la définition dite « traditionnelle » des mathématiques comme « science des quantités » ou « science des grandeurs en général ». Ensuite il compare trois conceptions différentes des mathématiques en tant que science des quantités avec la règle d'interdiction du croisement des genres d'Aristote, selon laquelle on ne peut pas prouver une vérité d'une théorie en utilisant des concepts appartenant à un autre genre—par exemple quelque chose de géométrie par l'arithmétique (*Post. Anal.* 7, 75a35-75b10).¹⁷

Le but principal de l'article est de montrer que la recherche d'une définition unique des mathématiques en tant que science comprenant à la fois l'arithmétique et la géométrie était liée aux développements de la théorie des proportions, dont les théorèmes pouvaient être démontrés—comme Aristote lui-même l'a observé—non seulement séparément pour les nombres et pour les grandeurs géométriques, mais aussi de manière plus générale. J'ai également fait valoir que la définition traditionnelle des mathématiques comme science des quantités est liée à la théorie de la démonstration d'Aristote et à l'interprétation qu'en fait Proclus. J'ai enfin présenté quelques exemples, de la fin du seizième siècle à la première moitié du dix-septième siècle, qui attestent de différentes conceptions des mathématiques désignées par la même définition. Si Viète et Descartes concevaient les « grandeurs en général » comme un caractère commun à différentes espèces d'objets, Stevin et Wallis partageaient une conception différente des mathématiques. Ils concevaient les quantités comme

17. ARISTOTLE : 1993, p. 12.

les objets de l'arithmétique, à condition que les nombres soient étendus à ce que nous appelons aujourd'hui les « nombres réels ». Acceptant les nombres irrationnels en même temps que les nombres rationnels, Stevin et Wallis pouvaient exprimer tout rapport de deux quantités par un nombre et pouvaient donc réduire la géométrie à l'arithmétique. Ensuite j'ai comparé trois stratégies différentes pour expliquer l'unité interne des mathématiques : (1) la recherche d'un genre plus large incluant tous les objets mathématiques ; (2) la recherche d'un caractère commun à différentes espèces d'objets mathématiques ; et (3) l'effort pour traiter les magnitudes comme des nombres.

Après avoir donné quelques exemples historiques de chaque stratégie, j'ai examiné si et comment elles peuvent faire face à la prescription d'Aristote. Enfin, j'ai utilisé la règle aristotélicienne qui interdit d'aller au-delà du genre propre à chaque théorie scientifique comme un outil d'investigation historique qui réussit à mettre en évidence des différences conceptuelles que le premier axiome du modèle classique proposé par de Jong et Betti—« Toutes les propositions et tous les concepts (ou termes) de S [science aristotélicienne] concernent un ensemble spécifique d'objets ou portent sur un certain domaine d'être(s) »¹⁸—ne parvient pas à mettre en évidence, comme la différence entre les auteurs qui ont réfuté l'idée de réduire la géométrie à l'arithmétique et ceux qui ont eu tendance à identifier l'algèbre à l'arithmétique.

2014a L'article « *Bolzano versus Kant : Mathematics as a Scientia Universalis* » analyse les changements dans la définition des mathématiques dans plusieurs textes de Bolzano, notamment les *Beyträge*, la *Wissenschaftslehre* et la *Grössenlehre* : les mathématiques sont-elles une théorie des formes ou une théorie des quantités ? Les changements sont interprétés comme une conséquence de la nouvelle théorie logique de la vérité introduite dans la *Wissenschaftslehre*, mais aussi comme une conséquence du dépassement de la terminologie de Kant, de la radicalisation de l'anti-kantianisme de Bolzano et de l'intérêt de Bolzano pour la notion leibnizienne de *mathesis universalis*. Le changement de définition est présenté comme une évolution cohérente, si l'on considère que la notion de quantité introduite dans le *Beyträge*¹⁹ est assez différente de la notion plus large développée par Bolzano dès 1816. Bolzano mentionne deux textes anonymes dont les auteurs sont inconnus. L'article donne les raisons d'identifier von Spaun et Vieth comme les auteurs des deux passages cités et compare leurs théories avec la perspective de Bolzano. En conclusion, j'affirme que Bolzano n'a jamais abandonné son idée originale de considérer les mathématiques comme une *scientia universalis*, c'est-à-dire comme la science

18. De JONG et BETTI 2010, p. 186.

19. BOLZANO 1810.

des quantités en général. Je maintiens aussi que la question des éléments idéaux en mathématiques n'est pas seulement une raison pour le développement d'une nouvelle théorie logique, mais peut également être considérée comme une raison pour développer une définition différente de la quantité.

2018a. L'article « *Mathematics. Systematical Concepts* » étudie les notions de nombre, de quantité extensive, de quantité algébrique, de similarité et de probabilité telles qu'elles sont introduites dans les écrits mathématiques de Wolff, et évalue la cohérence de ces définitions avec sa présentation de la méthode mathématique. Les mathématiques de Wolff sont surtout connues comme la cible des critiques de Gauss, Schumacher, Leibniz, Bernoulli, Kästner, Cantor et d'autres mathématiciens, qui n'appréciaient pas que ses livres soient conçus comme des manuels plutôt que comme des écrits de recherche, et qui critiquaient certaines de ses définitions. Ces critiques, ainsi que d'autres remarques sur les erreurs commises dans les procédures inférentielles de Wolff, prouvent à quel point la philosophie et la théorie de la connaissance de Wolff ont influencé son orientation mathématique. Mais il est important de montrer qu'il existe au moins une cohérence interne entre les exigences normatives suggérées par la philosophie de Wolff, et en particulier par sa conception de la méthode mathématique, et les notions qu'il a effectivement définies dans ses manuels. L'impureté des définitions et des preuves dont Wolff a été accusé par Kant et Lambert est un trait que Wolff partage avec d'autres auteurs de son temps comme Leibniz. En effet, elle appartient aux *desiderata* de son épistémologie, car il croit en l'intégration de la connaissance mathématique dans le corps plus large de la connaissance humaine, et partage l'idée qu'un ordre correct de concepts doit être introduit non seulement séparément dans chaque discipline, mais aussi dans la totalité des concepts. Cette vision holistique explique pourquoi plusieurs sujets que Wolff n'a pas complètement développés dans ses livres de mathématiques (comme les probabilités, et en partie la théorie des quantités extensives) sont plutôt discutés dans les textes sur la logique et la métaphysique. Ceci confirme la thèse selon laquelle les œuvres de Wolff (comme celles de Leibniz, Newton ou Descartes) ne peuvent pas être lues séparément, et qu'une vision complète des mathématiques de Wolff ne peut être atteinte sans une étude plus profonde des relations entre les mathématiques, l'ontologie, la métaphysique et la logique.

L'analyse des définitions de nombre et de quantité de Wolff à la lumière de sa théorie de ce que devraient être les définitions mathématiques, révèle d'une part que la dette de Wolff envers Descartes est peut-être aussi évidente que l'influence qu'il a reçue de Leibniz, nonobstant sa défense de Leibniz dans la controverse de priorité sur la découverte du calcul infinitésimal, et sa reconnaissance des grandes contributions de Leibniz à l'algèbre, à la *mathesis*

universalis et au *calculus situs*. En outre, elle révèle que les définitions géométriques de Wolff étaient fortement influencées par Euclide—en particulier par l'édition anglaise des *Éléments* de Barrow—ainsi que par la notion de contiguïté d'Aristote, plutôt que par la conception fluxionnelle des quantités géométriques de Newton.

3.2 L'axiomatisation au XIX^e siècle

L'une des principales questions que je me suis posée dans le cadre de mes recherches est la suivante :

- Existe-t-il au XIX^e siècle des approches axiomatiques distinctes de l'axiomatique euclidienne, mais qui ne sont pas encore identifiables à l'approche hypothético-déductive typique du XX^e siècle ?

Un premier exemple est fourni par l'axiomatique de Veronese : une partie des axiomes de la géométrie sont hypothétiques, mais la partie décrivant les entités géométriques finies ne peut être modifiée arbitrairement, car elle doit décrire les propriétés de l'espace empirique fini. Un deuxième exemple se trouve dans l'école de Peano. Mes recherches visent à montrer que l'axiomatique au sens de Peano n'est pas hypothético-déductive, et que l'axiomatique au sens de Padoa ne l'est que dans un sens impropre.

Les autres questions clés que je me suis posées pour mieux comprendre le rôle de l'axiomatique et sa transformation de la fin du XVIII^e siècle au début du XX^e siècle sont les suivantes :

1. Quel est le rapport entre la *mathesis universalis* leibnizienne et les projets d'axiomatisation des mathématiques et de la logique au XIX^e siècle ?
2. Que signifie la symbolisation et la formalisation de la logique et des mathématiques à cette époque ?
3. Quelle est la relation entre idéographie, langage universel et logique mathématique ?
4. Quelle est la relation entre l'applicabilité des mathématiques et la formulation axiomatique des théories ?

J'ai partiellement répondu à la première question dans les articles analysés dans la section précédente, en relation avec la discussion du rôle de la *mathesis universalis* dans la transformation des mathématiques d'une science des quantités à une science des formes de Wolff à Grassmann. Dans cette section, je répondrai en me référant principalement aux recherches sur l'école de Peano. La seule exception est l'article dans lequel je discute de la dernière question—l'applicabilité—et qui fait également référence à divers auteurs néo-kantiens et

au néo-logicisme.²⁰ En étudiant la relation entre formalisation, symbolisation et axiomatisation, avec une attention particulière à la différence entre idéographie (Frege et Peano), langage caractéristique (Leibniz) et langage universel (Peano, Couturat), j'ai montré que Peano a été influencé par la *mathesis universalis* leibnizienne, que sa notion d'interprétation est radicalement différente de la notion tarskienne, que l'idéographie n'est pas un langage formel non interprété mais un instrument d'analyse conceptuelle du langage mathématique à vocation universelle, tout comme le *latino sine flexione*. L'importance accordée au bon ordre des concepts, qui reste une tâche idéale même dans l'axiomatique de Gödel, et à la syllogistique, permet également de comprendre que l'histoire de l'axiomatique est très complexe et que la transformation de l'axiomatique classique en axiomatique hypothético-déductive est un processus lent et non linéaire. Les principaux ouvrages dans lesquels j'ai abordé ces questions sont les suivants, auxquels je renvoie pour les références des auteurs cités :

Cantù et De Zan 2010 . « *Life and Works of Giovanni Vailati* », in C. Arrighi, P. Cantù, M. De Zan et P. Suppes (éd.), *Logic and Pragmatism. Selected Writings of Giovanni Vailati*, Stanford : CSLI Publications, 2010, pp. xxi–lxvii. ISBN 9781575865911.

2014d « *The Right Order of Concepts : Grassmann, Peano, Gödel and the Inheritance of Leibniz's Universal Characteristic* », *Philosophia Scientiae - Studies in History and Philosophy of Science*, 18-1 (2014) : 157–182. ISSN 1281-2463. <https://doi.org/10.4000/philosophiascientiae.921>.

2016b « *Louis Rougier's reception of the Peano School* », in F. Brechenmacher, G. Jouve, L. Mazliak, R. Tazzioli (éd.). *Images of Italian Mathematics in France. The Latin Sisters, from Risorgimento to Fascism*. Switzerland : Springer International Publishing. « *New Trends in History of Science* » Series. Springer, 2016, pp. 213–254. ISBN 978-3-319-40080-8. https://doi.org/10.1007/978-3-319-40082-2_8.

2018b « *The Epistemological Question of the Applicability of Mathematics* », *Journal for the History of Analytical Philosophy*, Special Issue « *Method, Science, and Mathematics : Neo-Kantianism and Analytic Philosophy* » Sous la direction de L. Patton et S. Edgar), 6-3 (2018) : 95–114. <https://doi.org/10.15173/jhap.v6i3.3435>.

2020a « *Grassmann's Conceptual Structuralism* », in E. Reck and G. Schiemer (éd.), *The Prehistory of Mathematical Structuralism*, New York : Oxford

20. CANTÙ 2018b.

University Press, pp. 21—58. ISBN 978-0-19-064122-1. <https://doi.org/10.1093/oso/9780190641221.003.0002>.

2020b « *Logica impura* », in E. Montuschi and P. D. Omodeo (éd.), *Ordinare il mondo. Prospettive logiche ed epistemologiche su scienza, natura e società*. Roma : Armando Editore, 2020, pp. 71–95.

2021a « *Peano’s philosophical views between structuralism and logicism* », in F. Boccuni et A. Sereni (éd.), *Origins and Varieties of Logicism. A Foundational Journey in the Philosophy of Mathematics*. London : Routledge, 2021. « Studies in the Philosophy of Mathematics and Physics » Series.

2021c « *Syllogism and beyond in the Peano School* », in Lukas M. Verburgt et M. Cosci (éd.), *Aristotle’s Syllogism and the Creation of Modern Logic : Between Tradition and Innovation, 1820-1930*, Bloomsbury. Texte accepté pour la publication.

Cantù et Luciano 2021 « *Giuseppe Peano and his School : Axiomatics, Symbolism and Rigor* », *Philosophia Scientiae - Studies in History and Philosophy of Science*, 25/1 : 3–14. Special Issue « The Peano School : Logic, Epistemology and Didactics » Sous la direction de P. CANTÙ et E. LUCIANO.

Cantù en préparation *Peano’s Philosophy of Mathematics. The Peano School and the practice of axiomatics*, Manuscrit inédit.

Dans ce qui suit, je vais résumer brièvement les travaux mentionnés.

Cantù et De Zan 2010. L’article « *Life and Works of Giovanni Vailati* » paru dans une édition anglaise des écrits de Vailati, que j’ai co-éditée avec C. Arrighi, M. De Zan et P. Suppes,²¹ présente une introduction générale à la vie et à l’œuvre de Vailati. Dans la partie de l’article que j’ai rédigée, j’ai mis en évidence quelques nœuds essentiels pour comprendre la conception de l’axiomatique de Vailati :

- l’interprétation originale de la méthode déductive comme un moteur d’investigation heuristique plutôt que moyen de transmission de la certitude des prémisses à la conclusion ;
- l’importance accordée à l’analyse du langage et au raisonnement argumentatif, y compris l’étude des métaphores et des fausses analogies ;
- l’étude des définitions, que Vailati fait correspondre aux représentations psychologiques mentionnées par Brentano, mais aussi à des postulats ou définitions indirectes (un exemple en est la continuité de Dedekind) et qu’il décrit comme des énoncés dont le sens réside dans les conséquences

21. ARRIGHI, CANTU, de ZAN et SUPPES 2010.

que l'on peut en tirer (pragmatisme) ou comme des outils d'analyse conceptuelle ;

- la relation étroite entre la théorie des relations et la grammaire linguistique, fondée sur la similitude entre la grammaire du langage ordinaire et la syntaxe de l'algèbre.

2014d. L'article « *The Right Order of Concepts : Grassmann, Peano, Gödel and the Inheritance of Leibniz's Universal Characteristic* » aborde la question suivante : est-ce que le bon ordre des concepts peut être considéré un élément essentiel de rigueur scientifique dans la logique et les mathématiques du XIX^e et XX^e siècle, en particulier quand il s'agit d'auteurs qui ont été influencés profondément par le projet leibnizien de la caractéristique ? L'article prend en considération trois exemples : Hermann Grassmann, Giuseppe Peano et Kurt Gödel. Je maintiens que le choix des concepts primitifs dans les théories hypothético-déductives n'était pas seulement une question d'opportunité, mais parfois aussi le résultat d'une investigation philosophique sur les fondements des disciplines scientifiques. La question du bon ordre des concepts n'est plus considérée comme une tâche réalisable, mais elle est devenue un idéal à suivre ; néanmoins elle reste une partie essentielle du travail axiomatique. L'article vise donc à critiquer l'opposition trop nette qu'on trouve dans la littérature entre l'investigation de l'âge classique sur le bon ordre des concepts et la création de l'axiomatique moderne. La rupture scientifique déterminée par la création des systèmes axiomatico-déductifs en mathématiques et logique doit donc être associée à certains éléments de continuité qui regardent l'idéal de la connaissance en tant que recherche d'une théorie générale des concepts à obtenir par composition de certains éléments fondamentaux.

2016b. Parmi les nombreuses influences et interactions réciproques entre la France et l'Italie au début du XX^e siècle, il est intéressant de se pencher sur le cas, complexe, de la réception de la logique symbolique italienne par Louis Rougier. L'influence de l'école de Peano sur les travaux de Couturat et la réaction négative de Poincaré à la « logistique » de Peano sont bien connues et étudiées dans la littérature. Insuffisamment abordée est cependant la relation entre l'école de Peano et Louis Rougier, qui s'est sérieusement impliqué dans la logique symbolique, tout en ayant en même temps des intérêts philosophiques plus larges. Dès le début de sa carrière, Louis Rougier étudie les relations entre la philosophie, la logique, la géométrie et la physique, mais avec par ailleurs de nombreux autres intérêts, allant de l'histoire à la linguistique, de la religion à la philosophie politique. L'article « *Louis Rougier's reception of the Peano School* » étudie le rôle joué par Peano et son école comme source de la pensée de Rougier et discute des similitudes et des différences entre les deux conceptions, avec une référence particulière à l'importance accordée au langage et

au pragmatisme et à la façon dont Rougier interprète la notion de définition déguisée de Poincaré.²² Je donne des arguments pour défendre la thèse suivante : si Rougier s'est servi de Peano et pas de Hilbert pour soutenir son projet de rénovation de la logique et de la philosophie scientifique françaises, c'est à cause de l'intérêt commun pour la linguistique et l'épistémologie.

2018b. L'article « *The Epistemological Question of the Applicability of Mathematics* », que je décris en détail dans la section §5.2, étudie le rôle attribué à l'applicabilité dans la définition des nombres réels. Après avoir distingué des différentes manières d'interpréter l'applicabilité en mathématiques et en avoir donné des exemples historiques précis, je montre l'origine kantienne du problème, ainsi que les liens entre le débat de la fin du XIX^e siècle et le débat néo-logiciste sur l'applicabilité comme condition indispensable (*application constraint*) dans la définition fregienne des nombres réels.

2020a. L'article « *Grassmann's Conceptual Structuralism* », que je décris en détail dans la section §5.3, analyse la relation entre axiomatisation et « formel » chez Hermann Grassmann, en analysant la relation entre la notion de forme particulière qu'il prend comme objet en mathématiques et ses résultats en algèbre abstraite, algèbre linéaire et théorie des nombres. En particulier, l'article étudie la relation entre les structures générales et particulières et ce que l'on peut comprendre par formalisme dans une structure qui n'est pas définie axiomatiquement.

2020b. L'article « *Logica impura* », que je présenterai en détail dans le chapitre 5, analyse la relation entre la logique et l'épistémologie au vingtième siècle, qui est marquée par une sorte d'interdépendance, mais aussi d'autonomie mutuelle, et suggère que pour rendre compte de cette duplicité, on a besoin d'une « logique impure », ou, comme je le dirai maintenant, une philosophie de l'axiomatique.

2021a. L'article « *Peano's philosophical views between structuralism and logicism* » étudie l'épistémologie de Peano à travers une analyse détaillée de plusieurs pratiques mathématiques qui peuvent être considérées comme des marqueurs du logicisme : le lien entre fonctions et relations, le rôle des investigations métathéoriques, le type de sémantique, l'utilisation de définitions par abstraction, et la valeur fondatrice ou non de l'axiomatique. L'épistémologie de Peano est caractérisée comme une forme d'algébrisme structuraliste, qui diffère à la fois de la tradition de l'algèbre de la logique qui utilise des symboles mathématiques pour exprimer les calculs logiques, et de l'investigation logique de Frege centrée sur l'effort de comprendre la nature fonctionnelle de la prédication. L'influence de Leibniz est présente à la fois dans le développement

22. HEINZMANN 2010.

d'un type de sémantique qui n'est ni représentationnelle ni conceptualiste (les symboles désignent les éléments linguistiques du langage ordinaire), et dans la considération des signes symboliques comme reflétant ce qu'ils représentent. La logique symbolique développée dans le *Formulaire* de Peano est une racine mais pas un fondement des mathématiques : comme les racines linguistiques des langues anciennes, les symboles logiques sont un outil pour saisir les caractéristiques invariantes des fonctions et opérations mathématiques. L'article a donné lieu à un travail plus important sur l'école de Peano, un manuscrit non publié dont l'article constitue les chapitres centraux. Je discuterai de ces deux œuvres de manière plus détaillée dans la section §5.

2021c. L'article « *Syllogism and beyond in the Peano School* » vise à déterminer le rôle de la théorie classique du syllogisme dans l'école de Peano, soit comme cible de la critique, soit comme source de nouvelles idées. L'article analyse les références au syllogisme et à la logique d'Aristote dans les écrits des membres de l'école de Peano, en se concentrant sur différents auteurs et sur différentes étapes du développement du système logique de Giuseppe Peano. L'utilisation de la syllogistique comme cible critique pour montrer l'extension et l'amélioration apportées par la logique mathématique (ou logistique, comme l'appelait Couturat) était courante dans l'école de Peano. L'article examine tout d'abord les diverses évaluations de la syllogistique, puis considère leur influence sur la compréhension du syllogisme et sur la formulation explicite des règles de raisonnement. Il est affirmé que le syllogisme a été présenté et utilisé comme une règle dans la transformation de certaines équations logiques dès les premiers écrits, alors que le *modus ponens* a longtemps été considéré comme un axiome du calcul des propositions qui manquait d'une interprétation dans le calcul des classes. Le *modus ponens* n'est devenu une règle de raisonnement que lorsqu'une distinction a été tracée entre implication et appartenance, influencée par l'interprétation scolastique du sens divisé et composite de la copule. L'article montre que Peano, Cesare Burali-Forti, Alessandro Padoa, Giovanni Vailati et Mario Pieri ont eux-mêmes reconnu cette influence, et ont approfondi les effets de cette distinction sur la séparation entre les règles d'inférence et les axiomes logiques. La syllogistique a joué un rôle important en suscitant des nouvelles questions épistémologiques et la transformation progressive de l'axiomatique qui a eu lieu dans l'école de Peano.

Cantù et Luciano 2021. Le numéro thématique de la revue *Philosophia Scientiae* « *Special Issue The Peano School : Epistemology : Logic, Epistemology and Didactics* » que j'ai édité avec Erika Luciano a réuni différents types de contributions, allant de l'étude de la logique, des mathématiques et du langage universel de Peano à l'intérêt de son école pour la didactique, en essayant d'évaluer l'originalité de l'épistémologie du groupe par comparaison

avec les perspectives développées par des contemporains, tels que Cantor, Dedekind, Frege, Russell, Hilbert et Bernays. Une attention particulière a été accordée aux relations entre les intérêts de Peano pour l'analyse mathématique, la linguistique, le langage universel, les fondements de l'arithmétique et de la logique. En particulier, le numéro étudie l'impact de l'école sur les développements ultérieurs en logique, en didactique et en épistémologie des mathématiques. Le volume comprend des contributions par Joan Bertran-San-Millán, Jan von Plato, Gabriele Lolli, Reinhard Kahle, Dirk Schlimm, Basak Aray, Paolo Freguglia, Elena Anne Corie Marchisotto, Ana Millán Gasca et un extrait—édité par Jan von Plato—des carnets mathématiques de Gödel contenant un résumé des *Arithmetices Principia* de Peano, attestant d'une lecture détaillée de l'œuvre de Peano au moment où il préparait l'article sur la logique de Russell (début 1943). Dans l'introduction « Giuseppe Peano and his School : Axiomatics, Symbolism and Rigor, *Philosophia Scientiae* », nous soulignons quelques nouvelles perspectives sur le rapport entre la logique et l'épistémologie, l'axiomatique, le symbolisme, la rigueur et la didactique.

Cantù en préparation. Le projet du manuscrit inédit *Peano's Philosophy of Mathematics. The Peano School and the practice of axiomatics*, que je soumettrai pour évaluation à Cambridge University Press dans un mois, a commencé avec l'article « *Peano's philosophical views between structuralism and logicism* », qui constitue le troisième chapitre du livre. Le manuscrit, dont je donne une description détaillée dans la section §5.5, est une réponse à cinq questions principales, à chacune desquelles je consacre un chapitre.

- Le groupe qui s'est réuni autour de Peano et qui a donné lieu à de nombreux projets de collaboration constitue-t-il une école ou une tradition de recherche ? Comment les connaissances circulaient-elles entre les membres et quel était le rôle de Peano dans l'orientation du groupe ?

- Quelle est la relation entre symbolisation et idéographie dans l'œuvre de Peano ? Quelle notion d'interprétation et de signification est utilisée par Peano et Padoa ?

- Quel rôle jouent les définitions, les axiomes et les règles d'inférence dans le système logique de Peano ?

- Quel rôle jouent la formalisation, la recherche de la rigueur et les preuves d'indépendance des axiomes dans la construction de l'axiomatique de Peano ? Quel est l'objectif principal de cette approche ?

- Peut-on parler d'une philosophie des mathématiques à la Peano ? Comment se distingue-t-elle du logicisme et du structuralisme ?

3.3 Logique et argumentation

Un autre axe de recherche dans lequel je me suis engagée, souvent en collaboration avec d'autres auteurs, concerne la théorie de l'argumentation, c'est-à-dire l'étude de l'activité sociale consistant à produire des arguments pour soutenir une thèse. Plusieurs questions ont guidé mes recherches historiques, théoriques et appliquées dans ce domaine :

- La théorie de l'argumentation est-elle vraiment née dans les années 1950 ou peut-on en trouver de nombreuses traces dans la logique des XIX^e et XX^e siècles ?
- Quelle est la relation entre la théorie de l'argumentation et la logique formelle ?
- Qu'ont en commun les arguments et les algorithmes ?
- Quelle est la relation entre la recherche de la rigueur en mathématiques et l'utilisation de contre-arguments ?

D'un point de vue historique, j'ai étudié la dynamique de la reconstruction des textes argumentatifs et de leur évaluation, et j'ai comparé différentes théories de l'argumentation sur la base de leur degré de normativité, de leur efficacité descriptive et de leur capacité à expliquer l'interaction dialogique, dialectique et pragmatique propre à la communication argumentative. D'un point de vue théorique, quatre thèmes ont particulièrement retenu mon attention, car ils sont liés au rapport entre logique et mathématiques et à l'axiomatique : 1) l'opposition entre logique formelle et logique informelle, 2) la comparaison entre démonstrations, arguments et algorithmes, 3) le rapport entre rigueur, erreur et sophismes argumentatifs, 4) l'analyse du type de rationalité associé aux arguments et du degré de consensus ou de dissensus légitime. D'un point de vue applicatif, j'ai reconstruit les arguments produits dans différents types de contexte : mathématique, politique, journalistique, juridique.

Les principaux ouvrages dans lesquels j'ai abordé ces sujets sont les suivants, auxquels je renvoie pour les références des auteurs cités :

2011b *Qui casca l'asino. Gli errori di ragionamento nel dibattito pubblico*. Torino : Bollati Boringhieri, 2011, 177 pp. ISBN 9788833922102.

Cantù et al. 2017b S. Francescon, I. Truccolo, C. Bianchini, P. Cantù, E. Ferrarin, C. Cipolat Mis, N. Michilin, L. Ciolfi et M. Mazzocut, « The librarian as an antidote : recognizing the misinformation online to improve the educational reference for patients », Poster. *International Congress of Medical Librarianship (ICML) and European Association for Health Information and Libraries (EAHIL)* « Diversity in Practice : Integrating, Inspiring & Innovative », Dublin Castle, Ireland, 12-16 Juin, 2017.

Cantù et Testa 2006 *Teorie dell'argomentazione. Un'introduzione storico-filosofica alle logiche del dialogo*. Milano : Bruno Mondadori, 2006, 188 pp., ISBN 9788842493167.

Cantù et Testa 2009 «Consensus et dissensus», in A. Cattani, P. Cantù, I. Testa et P. Vidali (dir.), *La svolta argomentativa. 50 anni dopo Perelman e Toulmin : 1958-2008*. Napoli : Loffredo, 2009, pp. 87-96, ISBN 9788875643355.

Cantù et Testa 2012 « Algoritmi e argomenti » *Sistemi Intelligenti*, 24/3 (2012) : 427--445. ISSN 11209550.

Dans ce qui suit, je résumerai brièvement les principaux sujets abordés dans ces publications.

2011b. Dans le débat public italien, il existe une tendance à diaboliser l'omniprésence de la communication de masse (télévision, journaux, rassemblements et affiches électorales, essais populaires, spectacles) en pensant que le spectateur est toujours et de toute façon un récepteur qui répond passivement aux *stimuli* de la propagande. Si ce concept promu par Harold Lasswell à la fin des années 1920 n'est plus scientifiquement accrédité, il n'en reste pas moins qu'en Italie, jusqu'à il y a quelques années, il n'y avait pas d'espace dans l'enseignement scolaire spécifiquement dédié à l'analyse critique des messages communicatifs, contrairement à l'Angleterre, aux Etats-Unis ou au Canada, par exemple, où la « pensée critique » est depuis longtemps le pain quotidien des élèves du secondaire. C'est peut-être la raison pour laquelle le téléspectateur/auditeur/lecteur italien dans sa vie publique n'a pas toujours « l'instinct » de poser des questions ou de demander des preuves supplémentaires.

L'objectif du volume *Qui casca l'asino. Gli errori di ragionamento nel dibattito pubblico* est d'entreprendre une analyse critique d'une sélection de discours de journalistes, de politiciens, de philosophes, de scientifiques, de juges, de comédiens, de faiseurs d'opinion, et en particulier des raisonnements persuasifs qui invitent l'auditoire à choisir entre deux alternatives, à prendre une décision dans une situation problématique, à émettre un jugement de valeur : des raisonnements auxquels nous sommes confrontés tous les jours. Une analyse attentive de ces textes montre que certains d'entre eux contiennent des sophismes évidents, c'est-à-dire des raisonnements qui ne fonctionnent pas d'un point de vue logico-argumentatif, parce qu'ils enfreignent les règles de la logique ou les règles d'un échange dialogique correct entre les parties. L'étude et la reconnaissance des sophismes sont présentées comme un exercice de critique, essentiel non seulement pour le philosophe qui se consacre socraquement à l'art de demander des raisons, mais pour tout citoyen qui souhaite participer activement au débat public, en entrant dans le dialogue et la discussion avec les

autres. La sanction des raisonnements incorrects est utile pour garantir le respect des règles qui permettent d'atteindre un accord dialectique rationnel entre les interlocuteurs : reconnaître les sophismes est le premier pas pour favoriser la falsification d'une thèse et donc la croissance de la connaissance. En outre, l'identification des erreurs dans les discours des autres sert à éliminer les ambiguïtés, à lancer une discussion sur des contenus partagés et à apprendre l'art le plus difficile : reconnaître les erreurs dans ses propres discours et admettre sa propre faillibilité.

Les auteurs évoqués ne sont pas stigmatisés comme des exemples de mauvaise argumentation, mais ont été choisis parce qu'ils sont emblématiques d'un certain style ou contexte de raisonnement. À travers un commentaire opportun de quelques textes significatifs du paysage politique et culturel des premières années du XXI^e siècle (Fallaci, Crozza, Pera, Grillo, Habermas, Sokal entre autres), le livre invite à une analyse critique du discours public et offre en même temps une introduction informelle à la théorie de l'argumentation. En tant qu'exercice de logique appliquée, le livre définit et discute de nombreux types de raisonnement, développant une analyse logico-pragmatique des sophismes que nous lisons, entendons et produisons quotidiennement.

Cantù et al. 2017b. Au CRO, l'Institut National Italien pour le Cancer du Sein, la bibliothèque scientifique et le bureau clinique de la pharmacie sont impliqués dans les services d'information sur le cancer et la médecine. L'un des sujets émergents demandés par les patients et les proches à ces services est la curcumine. Ce composé phénolique extrait du curcuma est de plus en plus utilisé par les patients atteints de cancer pour soulager les effets secondaires des traitements ou combattre le cancer. Mais il n'existe aucune preuve de son efficacité à ces fins. J'ai été contactée pour collaborer avec une équipe de bibliothécaires et de pharmaciens pour analyser des arguments sur l'efficacité de la curcumine. Nous avons présenté les résultats préliminaires de la recherche dans le poster « The librarian as an antidote : recognizing the misinformation online to improve the educational reference for patients » au Congrès international de bibliothéconomie médicale (ICML) et à l'Association européenne pour l'information et les bibliothèques de santé (EAHIL). L'objectif principal de la recherche était de développer des stratégies pour reconnaître les informations trompeuses en ligne adressées aux patients sur la médecine complémentaire et alternative (CAM) en analysant l'étude de cas de la curcumine dans le cancer du pancréas. Des techniques d'Open Source Intelligence (OSINT) et des outils gratuits en ligne ont été exploités pour analyser les documents web collectés dans l'échantillon. La validité des déclarations scientifiques sur les propriétés et l'efficacité de la curcumine dans le traitement du cancer du pancréas ont été évaluées par une équipe de pharmaciens, tandis que j'ai analysé

les arguments utilisés dans les documents Web recueillis. L'argument d'autorité s'est avéré être le schéma le plus fréquent dans notre échantillon, mais n'a été suffisamment soutenu par des preuves que dans 1 des 93 arguments analysés. Cela signifie qu'aucune connaissance médicale n'est nécessaire pour identifier une grande majorité de cas où les informations sur la santé ne sont pas étayées par des preuves suffisantes et devraient donc être considérés non fiables. L'utilisation de techniques et d'outils OSINT ainsi que la connaissance de la théorie de l'argumentation peuvent aider les professionnels de l'information sur la santé (bibliothécaires, pharmaciens, etc.) à mieux comprendre et évaluer la désinformation en ligne sur des sujets controversés tels que les médecines complémentaires et alternatives (CAM).

Cantù et Testa 2006. Que signifie « argumenter » ? Pourquoi certaines raisons sont-elles meilleures que d'autres pour défendre ou réfuter une thèse ? Quelles règles peut-on suivre pour éviter les erreurs ou pour construire une bonne argumentation ? Suivre les règles est-il un comportement rationnel ? La théorie de l'argumentation cherche une réponse à ces questions, en cherchant un équilibre entre différents besoins : un intérêt descriptif visant à comprendre la structure et le fonctionnement des arguments qui sont effectivement acceptés, un besoin normatif visant à identifier un ensemble de règles pour reconstruire, évaluer et produire de bons arguments, un besoin fondationnel qui identifie une rationalité de la pratique argumentative ou cherche une justification du système de règles normatives.

Le livre *Teorie dell'argomentazione. Un'introduzione storico-filosofica alle logiche del dialogo*, écrit avec Italo Testa, étudie la relation entre la logique et la théorie de l'argumentation, en particulier dans une phase où le tournant pragmatique semble éloigner l'attention de la forme déductive-formelle en faveur de formes pragmatiques et linguistico-communicatives d'analyse des arguments. Le fil rouge qui guide le choix des auteurs traités et la prééminence accordée à certains d'entre eux est la notion de dialogue, qui est proposée à la fois comme fondement dialectique et intersubjectif, comme contexte normatif du raisonnement et comme outil descriptif de l'argumentation.

Reconstruisant le lien entre les approches descriptives et normatives, entre la logique formelle et informelle, entre la rationalité et l'intersubjectivité dialogique et dialectique, le texte vise à la fois à fournir un aperçu des traditions théoriques des quarante dernières années et à mettre les théories en dialogue afin d'énucléer certains problèmes communs et de montrer des réponses différentes. L'attention est portée, entre autres, sur les origines du débat (Perelman et Toulmin), la logique informelle, la dialectique dialogique de Lorenzen (Hamblin, Barth, Hintikka), la pragma-dialectique de van Eemeren, la nouvelle dialectique de Walton, les théories fondatrices de la pragmatique communicative

et d'une forme de rationalité argumentative (Habermas, Apel, Brandom).

Cantù et Testa 2009. L'article « Consenso e dissenso », écrit avec Italo Testa, examine la relation entre l'argumentation et la rationalité, en étudiant les problèmes et les limites d'une notion statique, universaliste et intellectualiste de la rationalité. Quelles sont les conditions nécessaires au démarrage d'une pratique argumentative ? Schopenhauer et Perelman ont fait valoir la nécessité d'un accord préalable de base, d'une « communauté spirituelle » entre les locuteurs, mais cela semble empêcher la possibilité d'une résolution argumentative du conflit en cas de désaccord profond. De plus, insister sur la nécessité d'un terrain d'entente préalable, fondé sur des valeurs, des normes, des croyances partagées ou sur une certaine notion de rationalité basée sur le contenu, finit par transformer le désaccord en une violation des règles qui interrompt et empêche la pratique argumentative elle-même. Afin d'expliquer pourquoi certaines formes de désaccord profond qui impliquent des violations des règles procédurales ne bloquent pas le processus argumentatif, mais peuvent en induire une transformation, nous avons introduit une notion de consensus dynamique de second ordre, définie comme une disposition commune à coopérer en vue d'atteindre un objectif général qui dépend du contexte et ne peut être déterminé indépendamment de la pratique argumentative elle-même. Le consensus de second ordre est considéré comme une forme d'intentionnalité collective qui implique un certain degré d'acceptation d'un objectif partagé, mais cette acceptation peut être rétractée, à condition qu'une certaine forme de reconnaissance mutuelle soit maintenue entre les participants. Affirmer que sans dialogue constructif il n'est pas possible d'argumenter est donc fallacieux : l'erreur consiste à croire que la condition préalable au processus argumentatif est un consensus de contenu de premier ordre, alors qu'un consensus dynamique de second ordre suffirait.

Cantù et Testa 2012 Dans l'article « Algoritmi e argomenti » que j'ai écrit en collaboration avec Italo Testa nous avons analysé le rapport entre preuves, arguments et algorithmes. La théorie de l'argumentation a connu un développement énorme dans les années cinquante et soixante du XX^e siècle : la renaissance de ce domaine de recherche a été souvent expliquée comme une conséquence de la critique de Perelman de la logique formelle et comme un résultat du développement de la logique informelle. On doit néanmoins remarquer qu'il y a eu, à la même époque, le développement de l'intelligence artificielle et la diffusion de la thèse selon laquelle le raisonnement humain peut être émulé par des machines. L'article met en question la relation entre ces deux courants théoriques : on interprète l'opposition entre logique formelle et logique informelle comme une réaction à la thèse selon laquelle le raisonnement humain peut être émulé par des machines, ou plus précisément comme une attaque à

la prémisse d'un argument qui vise à soutenir cette thèse.

J'ai ultérieurement développée cette question dans une intervention tenue au Séminaire « Réflexions sur le processus de calcul, d'information et de programmation » organisé à l'SND à Paris en 2016, où j'ai souligné d'autres éléments qui ont rapproché les deux perspectives. Premièrement il y a eu des modifications importantes dans l'approche cognitive à l'intelligence artificielle, qui s'occupe non plus seulement de *high-level tasks* (*perception, motor tasks*) mais aussi de *low-level tasks* (intelligence située). Deuxièmement, j'ai souligné des similarités entre des développements plus récents de l'intelligence artificielle et la théorie de l'argumentation : par exemple, 1) entre la logique informelle et les critiques des limites de la logique formelle proposé par Minsky, 2) entre les objections au formalisme symbolique de Winograd et la perspective de Perelman, 3) entre l'attention pour le problème de la relevance dans l'œuvre de Dreyfus et Searle et les conceptions de Johnson, Blair, Hamblin et Grice, ou encore 4) entre la critique du mentalisme avancée par Dreyfus et Searle et la règle d'externalisation développée par van Eemeren et les représentants de l'approche pragma-dialectique.

Chapitre 4

Projets futurs

Comme mentionné dans l'introduction, l'objectif de mes recherches est de développer plusieurs analyses historiquement détaillées d'auteurs clés dans le développement de la logique et des mathématiques du début du XIX^e siècle au milieu du XX^e siècle, afin de pouvoir ensuite compiler tous les éléments collectés dans un traité systématique sur la philosophie de l'axiomatique. Il s'agit d'un projet assez ambitieux, mais il se compose de plusieurs étapes que je voudrais franchir au cours des prochaines années. Je vais donc analyser les projets que j'aimerais développer à 4, 8 et 12 ans.

Je voudrais consacrer les quatre prochaines années à l'achèvement des recherches en cours et à une analyse des définitions axiomatiques, un sujet qui s'est avéré très important dans l'analyse des écrits de Peano et que je voudrais étendre à d'autres auteurs (§4.1).

Au cours des quatre années suivantes, j'aimerais développer une approche non fondationnaliste de l'axiomatique, en cherchant à savoir si et comment elle peut être considérée comme une institution sociale ou comme un style mathématique (§4.2).

Dans les années ultérieures, j'aimerais approfondir l'analyse de l'axiomatique chez plusieurs autres auteurs clés du début du XIX^e siècle au milieu du XX^e siècle et préparer un ouvrage de synthèse sur la philosophie et l'histoire de l'axiomatique (§4.3).

4.1 Projet à 4 ans. Les définitions axiomatiques

4.1.1 La poursuite des travaux en cours

Dans les quatre prochaines années je voudrais avant tout poursuivre les recherches en cours. Premièrement je voudrais publier des articles sur Peano et son école qui n'ont pas pu trouver de place dans le livre sur Peano : notamment

un article sur la théorie des grandeurs de Bettazzi, qui présente le contenu de son texte *Teoria delle grandezze*,¹ un article sur le pragmatisme de Vailati, un article sur le calcul géométrique et un article sur les inférences logiques utilisés dans le *Formulaire*.

Deuxièmement, je voudrais poursuivre la recherche sur Gödel, en continuant la collaboration à l'édition du *Max Phil* qui prévoit la transcription des Cahiers XIV et XV et complétant la rédaction d'un article en collaboration avec Gabriella Crocco sur l'applicabilité des mathématiques, auquel je contribuerai un argument pour défendre la thèse selon laquelle l'intuition mathématique est justifiée chez Gödel par un argument d'indispensabilité.²

Troisièmement, je voudrais terminer un article en cours de rédaction sur le rapport entre philosophie des mathématiques et ontologie sociale, où je présenterai un aperçu général d'un croisement disciplinaire entre pratique mathématique et constructions sociales.

Par ailleurs, je terminerai deux articles en collaboration avec Frédéric Patras sur Bourbaki, dédiés respectivement à l'analyse de la notion de structure et à Bourbaki comme groupe institutionnel, et je travaillerai à un livre en collaboration avec Sebastien Maronne et Frédéric Patras.

4.1.2 Les définitions axiomatiques

La relation entre axiomes et définitions a été un élément clé dans la transformation de la logique, des mathématiques et des sciences, suite à la naissance de l'axiomatique moderne et à des changements radicaux dans les définitions des notions fondamentales des mathématiques : nombre, grandeur, ensemble. On dit souvent que les définitions ne jouent aucun rôle dans les systèmes axiomatiques, sauf en tant qu'abréviations. Les axiomes sont souvent considérés comme des définitions implicites ou des caractérisations des termes primitifs qui apparaissent dans les axiomes. L'objectif du projet est de procéder à une étude historique et théorique qui détaillera et remettra en question cette perspective standard, en développant une analyse de la forme logique, des critères d'adéquation et des fonctions épistémiques des définitions, ainsi que leur analyse sémantique. L'enquête historique est basée sur l'hypothèse qu'un large éventail de facteurs a contribué à la transformation de l'axiomatique en une étude des systèmes hypothético-déductifs. Le changement a été graduel et ne peut être compris par une simple enquête sur les écrits de la fin du XIX^e siècle et du début du XX^e siècle. L'enquête théorique est basée sur l'hypothèse qu'une

1. BETTAZZI 1890.

2. GÖDEL 1953/9, p. 348–9.

compréhension plus rigoureuse des définitions axiomatiques contribuerait fortement à une meilleure compréhension de plusieurs débats contemporains en philosophie de la logique, des mathématiques et en philosophie des sciences : les débats fondateurs sur le logicisme et le structuralisme, la distinction entre la prouvabilité formelle et informelle, l'analyse des termes théoriques.

La méthode de définition axiomatique ou implicite joue un rôle fondamental dans les mathématiques modernes, en particulier dans les contributions à l'axiomatique formelle de Hilbert et d'autres. Il est intéressant de noter que la notion est également d'une importance centrale dans les débats contemporains en philosophie de la logique, en mathématiques et en philosophie des sciences, par exemple dans les travaux sur les termes théoriques,³ dans le néo-logicisme, ou dans le structuralisme mathématique.⁴ Compte tenu de cela, il est surprenant que la notion soit généralement utilisée de manière informelle dans ces débats.⁵ Une clarification de la notion nécessite une analyse historique et théorique. Des études ont été menées sur la première apparition des critères d'adéquation, où on demande par exemple que les définitions soient éliminables et non-créatives, deux conditions qui sont souvent désignées comme la théorie standard des définitions,⁶ et contestées par des auteurs qui incluent des conditions plus faibles et les utilisent comme critères d'adéquation des définitions), incluant ainsi les définitions circulaires comme légitimes.⁷ Plusieurs enquêtes historiques montrent que les critères sus-mentionnés ne sont pas apparus pour la première fois dans l'école polonaise, comme on le dit souvent, mais qu'il faut les faire remonter à Frege, Pascal ou même Porphyre.⁸ L'originalité du projet est de transmettre une histoire détaillée de leur développement dans le temps qui ne se limite pas à la mention d'un ou deux célèbres précurseurs de l'idée, mais étudie en profondeur toutes les conditions proposées pour une théorie des définitions depuis la logique de Port Royal jusqu'à aujourd'hui.

En ce qui concerne l'analyse théorique de la logique des définitions, l'originalité du projet est de réunir des recherches individuelles qui sont souvent développées comme des sous-produits de recherches qui ont des objectifs principaux différents, tels que les mathématiques inverses, la théorie de la preuve, la théorie des types, la sémantique, le contenu empirique vs théorique des axiomes d'une théorie scientifique. La nouveauté du projet réside également dans l'accent mis sur des exemples mathématiques spécifiques, qui permet-

3. ANDREAS 2010.

4. EBERT 2016; SHAPIRO 1997.

5. GIOVANNINI et SCHIEMER 2019.

6. SUPPES 1957; BELNAP 1993.

7. CHAPUIS et GUPTA 2000.

8. DUDMAN 1973; HODGES 1993.

tront de clarifier à la fois l'origine, les applications et la fonction épistémique des définitions axiomatiques. Une difficulté dans les recherches sur le thème des définitions est à la fois leur omniprésence et leur manque de traitement systématique. La collaboration d'un groupe élargi de chercheurs permettra de surmonter cet obstacle. À cette fin, un tel groupe a été rassemblé dans un projet de recherche que j'ai soumis avec Georg Schiemer et Andy Arana en réponse à l'« Appel à projet générique » (APPG 2021) dans la section « Projets de Recherche collaborative – internationale » (PRCI 2021) avec l'Autriche. Le projet prévoit la participation de plusieurs centres de recherches français et autrichiens : à côté du Département de Philosophie de Vienne, il y aura le CGGG à Aix-Marseille, les Archives Poincaré à Nancy, le CAPHI à Nantes, l'IHPST à Paris et le IrPhil à Lyon ; d'autres chercheurs italiens et français seront aussi impliqués sur une base individuelle. Dans ce qui suit, je détaillerai la partie historique du projet, dont je suis la créatrice et la responsable.

L'axiomatique moderne s'est construite sur une séparation radicale entre définitions, axiomes et théorèmes, et sur l'opposition entre définitions réelles et nominales. Pascal et Mill sont deux clés de voûte reconnues de cette tradition, mais l'histoire de cette opposition et des conséquences qu'elle a eues sur le rôle déductif des définitions est beaucoup plus complexe et doit être évaluée sur la base d'une analyse plus fine d'autres figures philosophiques. Il se pourrait que l'influence de la tradition aristotélicienne et de la scolastique soit plus forte que prévu. La critique de l'idée que les théorèmes peuvent être dérivés des définitions a été avancée par plusieurs auteurs et s'est accompagnée de nouvelles propositions visant à distinguer les définitions, les axiomes et les postulats. Pourtant, un changement radical s'est produit à la fin du 19e siècle, lorsque les axiomes ont été considérés comme définissant implicitement la signification d'un terme ou d'un groupe de termes. L'histoire exacte de l'émergence et du développement des définitions implicites reste à écrire et permettra d'élucider non seulement le débat bien connu entre Frege et Hilbert, mais aussi les liens complexes entre la tradition allemande, française, italienne et anglaise.

L'effort visant à établir des systèmes axiomatiques rigoureux pour les théories mathématiques s'est accompagné d'une analyse détaillée du contenu intuitif des définitions, afin de garantir qu'aucun élément parasite n'entre dans la déduction des théorèmes à partir des axiomes. Ce processus a abouti à une révision de la théorie normative des définitions, analysant les critères qu'une définition adéquate devrait satisfaire. Outre le refus des définitions réelles, différents critères ont été discutés, dont par exemple l'homogénéité, l'éliminabilité et la non-créativité. La question de savoir où ces critères sont apparus pour la première fois et comment leur émergence a été liée aux changements mentionnés précédemment dans l'axiomatique reste un sujet de débat. Les ré-

sultats attendus de cette enquête historique sur le rôle des définitions dans les systèmes axiomatiques depuis la logique de Port Royal jusqu'au milieu du XX^e siècle comprennent une compréhension différente du rôle de la déduction dans la naissance de la science moderne, une clarification de la distinction entre définitions implicites et conventionnelles, une étude des contributions des définitions à plusieurs projets philosophiques fondamentaux, tels que le logicisme,⁹ le structuralisme,¹⁰ le formalisme et l'intuitionnisme, mais surtout une nouvelle perspective sur l'histoire de l'axiomatique, qui n'est pas le résultat d'un changement abrupt de paradigme, mais plutôt l'effet d'une multiplicité de facteurs.

Le projet de recherche comprendra trois volets principaux : l'étude de l'opposition entre définitions réelles et nominales, l'histoire des définitions implicites et l'histoire d'une théorie logique des définitions.

L'étude de l'opposition entre définitions réelles et nominales

Aristote (mais surtout les scolastiques ultérieurs) distinguait entre les définitions des choses (*definitio quid rei*) et les définitions des termes (*definitio quid nominis*), la première étant la recherche de l'essence substantielle,¹¹ et la seconde l'investigation du sens d'un nom ou d'une expression nominale.¹² À partir de la logique de Port Royal et de Pascal jusqu'à l'empirisme britannique (voir par exemple Hobbes, Locke et J.S. Mill), l'attention logique et philosophique s'est déplacée vers les définitions des mots et vers l'analyse d'un concept complexe en ses composantes, conformément à l'idée que la science moderne ne devait pas étudier les essences des choses mais seulement leurs relations réciproques. Cette étape, ainsi que la naissance de l'axiomatique moderne, obligent à repenser la relation entre axiomes, définitions et preuves. Si les définitions réelles sont omniprésentes en philosophie et en mathématiques prémodernes, elles semblent avoir été entièrement remplacées par des définitions nominales ou par des définitions implicites de concepts de second ordre dans l'axiomatique contemporaine. L'objectif de ce volet est d'enquêter et de remettre en question cette vision standard, en déterminant si les définitions ont été reléguées au rôle subsidiaire d'abréviations nominales ou transformées en explications. Ma recherche portera sur l'héritage de la tradition leibnizienne, qui sera approfondi par une étude de plusieurs remarques méthodologiques et

9. CANTÙ 2021.

10. E. H. RECK *et* SCHIEMER 2020; SCHIEMER *et* KORBMACHER 2018; SCHIEMER *et* WIGGLESWORTH 2019.

11. *Post. An.* 90b, ARISTOTLE : 1993, p. 49.

12. *Post. An.* 93b29-30, ARISTOTLE : 1993, p. 58.

épistémologiques faites par Wolff sur la distinction entre axiomes et définitions et par Bolzano sur l'ordre des définitions dans un traité scientifique, et notamment en géométrie. Un autre objectif de cette partie du projet est de déterminer le rôle exact joué par d'autres auteurs de la tradition germanophone tels que Fries, Herbart, Lotze et Drobisch, qui seront analysés non seulement comme chaînes de transmission de la tradition antérieure aux auteurs postérieurs, mais aussi pour leurs contributions spécifiques.

L'histoire des définitions implicites

Les *Grundlagen* de Hilbert sont généralement cités comme un exemple de l'utilisation des définitions implicites, mais l'expression « définition implicite » n'a jamais été utilisée pour caractériser les axiomes ni par Hilbert ni par Frege.¹³ L'utilisation du terme est documentée dans Gergonne, Pasch, Poincaré, les membres de l'école de Peano, Enriques, Schlick et Carnap, en des sens très différents. L'un des principaux objectifs du projet est de reconstruire les différents sens attribués au terme « implicite » et de montrer la *Wirkungsgeschichte* complexe de ce terme. Ma recherche se concentrera sur l'utilisation du terme dans les écrits de Pasch, dans l'école de Peano et dans les travaux de Weyl. Chez Pasch, l'expression « définition implicite » correspond à un acte créatif déterminant le sens des phrases contenant un substantif non référentiel qui est traité comme s'il s'agissait du nom propre d'une chose : un exemple typique est l'extension du concept de nombre.¹⁴ Dans Peano, qui n'utilise pas le terme « implicite » mais l'expression « définition par postulats », ainsi que dans Schlick et Carnap, les définitions implicites introduisent un concept d'ordre supérieur, tandis que dans Vailati et Burali-Forti elles définissent des termes primitifs. Elles diffèrent à la fois de l'idée de Gentzen de définir implicitement la signification des constantes logiques,¹⁵ et de l'utilisation par Boghossian de définitions implicites pour expliquer le concept d'analyticité.¹⁶ Les définitions par abstraction sont un exemple typique de définition implicite dans les écrits de l'école de Peano et de Russell, qui ont examiné les moyens possibles de transformer, par exemple, la définition de Frege du nombre naturel en une définition nominale (explicite). L'analyse de Hermann Weyl des définitions créatives, et des définitions par abstraction en tant que cas particulier de celles-ci, peut être comparée de manière fructueuse aux approches mentionnées précédemment. En philosophie des mathématiques et des sciences naturelles,

13. GABRIEL 1978.

14. PASCH 1921.

15. GENTZEN 1935.

16. GIOVANNINI et SCHIEMER 2019.

les éléments idéaux sont introduits au moyen de définitions créatives, c'est-à-dire des définitions basées sur l'introduction d'un opérateur et d'une relation, qui est souvent prise comme une relation d'équivalence. Des exemples d'entités mathématiques introduites de cette manière sont les cercles, les fonctions, les points à l'infini, la forme. La procédure des définitions créatives revient à une méthode de formation d'ensembles, où les ensembles ne sont pas pris comme des collections d'individus, mais comme des extensions de propriétés que les mathématiciens veulent généraliser, par exemple quand ils introduisent des points à l'infini pour généraliser les propriétés d'incidence des lignes. Grâce à une collaboration avec Frédéric Patras et Sébastien Maronne, j'aborderai aussi l'analyse du projet bourbakiste, qui se base sur une évolution des traditions précédentes et dont le point de vue central est la notion de structure. Il sera analysé en considérant des exemples spécifiques pour comprendre son rôle mathématique et épistémologique avec les définitions de structure et de morphismes.

L'histoire d'une théorie logique des définitions : classification et critères d'adéquation

En axiomatique moderne, les définitions explicites sont généralement considérées comme des phrases n'appartenant pas aux systèmes. Énoncées dans le métalangage, elles permettent simplement des abréviations et doivent toujours rester éliminables. Considérant que cela ne correspond pas au vrai rôle des définitions en mathématiques, les logiciens de l'école de Varsovie ont développé des méthodes de formalisation qui incluent pleinement les définitions dans les systèmes axiomatiques. Comme les théorèmes et les preuves, les définitions devaient alors être soumises à une régulation logique explicite. L'enquête sur les origines d'une théorie normative logique des définitions, déterminant les types, les rôles et les critères d'adéquation des définitions axiomatiques, sera accomplie grâce aux matériaux historiques recueillis dans les deux premiers volets. Ma contribution portera essentiellement sur les contraintes imposées dans l'école de Peano qui seront comparées avec les contraintes développées par Frege et Russell. Une classification de tous les types de définitions apparaissant en logique et en mathématiques sera également esquissée. Une multiplicité d'objectifs (stipulatif, descriptif, explicatif, ostensif, lexicographique), et différentes formes (nominale, conditionnelle, par abstraction, implicite) de définitions seront considérées.

Les résultats attendus comprennent la direction d'un ouvrage sur l'histoire des définitions axiomatiques qui offrira une première vue d'ensemble sur les définitions, ainsi que de nouvelles perspectives sur les rôles et les pers-

pectives de l'axiomatique, et des articles scientifiques publiés dans des revues internationales à comité de lecture qui clarifieront la logique des définitions axiomatiques dans l'école de Peano et comment les axiomes pourraient avoir d'autres fonctions épistémiques à côté de leur rôle inférentiel.

4.2 Projet à 8 ans. Une approche non fondationnaliste de l'axiomatique

Au cours des quatre années suivantes, j'aimerais développer une approche non fondationnaliste de l'axiomatique. La recherche portera sur deux volets.

Le premier analysera si l'axiomatique peut être considérée comme une institution sociale. D'une part, je développerai l'étude de la pratique scientifique en tant qu'activité sociale et j'appliquerai ces résultats à l'analyse de travaux de l'école de Peano, du cercle de Vienne et du comité éditorial de la *Revue de métaphysique et de morale*, reprenant certains résultats obtenus avec le projet de collaboration international « Interepisteme ». D'autre part, je poursuivrai l'étude de la relation entre l'ontologie sociale et les mathématiques, pour analyser les composantes de l'axiomatique en tant qu'institution sociale.

Le deuxième volet analysera l'axiomatique en tant que style mathématique, en s'appuyant sur les aspects linguistiques et rhétoriques de la pratique mathématique et sur l'analyse de l'axiomatique menée à travers le filtre de l'épistémologie historique. Le cas d'étude principal sera l'activité du groupe Bourbaki.

4.3 Projet à 12 ans. Philosophie de l'axiomatique

Outre développer certaines problématiques déjà appréhendées chez Bolzano, Grassmann, Cantor, Hölder, Husserl, Gödel, j'aimerais approfondir Drobisch et Lotze, Frege, Hilbert, Bernays, Zermelo, Couturat et Bourbaki afin d'avoir une vision plus large des différentes fonctions fondatrices possibles de l'axiomatique dans sa période de transformation de l'axiomatique classique en axiomatique hypothético-déductive. En développant et en intégrant les idées suggérées dans le chapitre d'introduction, je voudrais montrer les similitudes et les différences entre une variété d'axiomatiques, comprises non pas comme des théories individuelles, mais comme des institutions, des styles et des approches fondamentales des mathématiques et de la logique. L'aboutissement de ce projet à long terme consistera en la rédaction d'un ouvrage théorique qui s'appuiera sur l'analyse d'un cas mathématique concret : les descriptions axiomatiques du continu et de l'infini. A cette fin, je développerai, d'une part, une

analyse comparative de différentes formulations axiomatiques anciennes et récentes du continuum et, d'autre part, une analyse argumentative des raisonnements utilisés par les mathématiciens pour défendre ou critiquer les différentes formulations et représentations de l'infini.

Chapitre 5

Résumé des 5 publications les plus significatives

Aux fins de l'évaluation de la qualification pour la direction de recherches, j'ai choisi de présenter cinq travaux individuels dans lesquels l'étendue de ma contribution est claire, mais j'aurais pu en inclure d'autres collectifs auxquelles j'ai consacré beaucoup de temps et de travail et qui ont joué un rôle central dans mon développement scientifique. Je me réfère en particulier au travail d'édition des transcriptions des manuscrits philosophiques inédits de Gödel. J'ai inclus quatre publications déjà parues, mais aussi le manuscrit inédit sur l'école de Peano (voir annexe C3), que je considère extrêmement représentatif de la phase actuelle de mes recherches.

Les publications sélectionnées sont représentatives de différents moments de mon cheminement intellectuel le plus récent et de plusieurs thèmes clés de mon parcours de recherche (Grassmann, les éléments idéaux, l'applicabilité des mathématiques, la philosophie de l'axiomatique et l'école de Peano). Le seul auteur qui manque est Bolzano, auquel j'ai consacré un mémoire, une partie de la thèse et trois articles, et sur lequel je suis en train d'écrire un article tiré d'une communication présentée au Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science and Technology (CLPMST) de Prague en 2019. La théorie de l'argumentation aussi est sous-représentée, mais j'en parle dans le texte sur l'analyse des éléments idéaux en mathématiques. Comme on peut le voir dans la section Projets futurs (§4), ce thème acquerra plus d'importance dans le projet d'une philosophie de l'axiomatique, dans lequel je prendrai systématiquement en compte les arguments produits par les mathématiciens et analyserai les pratiques argumentatives en tant qu'éléments clés de l'axiomatique comme style et comme institution sociale.

Les publications témoignent également de la variété des langues utilisées dans la rédaction des textes scientifiques. Si l'italien a été la langue dans laquelle j'ai commencé à rédiger mes articles scientifiques, l'anglais est devenu la principale langue d'écriture après mon doctorat. Cependant, j'ai fait plusieurs

présentations et publié des articles en allemand et en français. Récemment, pour des raisons administratives, des responsabilités scientifiques, mais aussi grâce à de nombreuses collaborations avec des collègues français, j'utilise de plus en plus le français. Si le passage d'une langue à l'autre demande souvent plus d'efforts et de temps lors de la rédaction d'un texte scientifique, la transformation linguistique s'accompagne toujours d'une analyse conceptuelle plus approfondie, capable de mettre en évidence des questions théoriques jusqu'alors sous-estimées qui, loin de se réduire à de simples nuances linguistiques, révèlent des composantes stylistiques et argumentatives essentielles au discours scientifique.

Comme le rappelait Imre Toth lors d'une présentation sur les géométries non-euclidiennes à laquelle j'ai eu le plaisir d'assister grâce à une bourse de l'Institut philosophique de Naples en 1999, et comme l'atteste tout le projet Péanien d'une langue universelle sans inflexions, ce qui compte d'un point de vue scientifique n'est pas la forme ou le style littéraire mais la richesse du lexique. Néanmoins, l'expérience de la traduction de poèmes, les dialogues avec Patrick Suppes, qui voulait implémenter une option stylistique dans les logiciels de traduction automatique, ou l'analyse de Vailati sur les métaphores en science me font douter que la forme ou le style soit entièrement séparable de la communication du contenu lexical, même dans le domaine scientifique. Il s'agit peut-être d'une question d'impureté de la langue, similaire à l'impureté de la logique que je mentionne dans *CANTÙ 2020b*.

5.1 Les arguments sur les éléments idéaux en mathématiques

P. CANTÙ 2013a. « An Argumentative Approach to Ideal Elements in Mathematics », in A. ABERDEIN et I. J. DOVE (dir.), *The Argument of Mathematics*. Dordrecht /Heidelberg /New York/London : Springer. « Logic, Epistemology & the Unity of Science » Series. 2013, pp. 79–99. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6534-4__6.

L'article propose une classification des différentes manières de considérer la question des éléments idéaux en mathématiques et aborde la question sous un angle nouveau, basé sur l'analyse des arguments produits par les mathématiciens. Parmi les avantages de cette perspective figure la possibilité d'étudier l'épistémologie implicite des pratiques mathématiques. L'article montre que Gauss, Dedekind et Hilbert ont tous utilisé le raisonnement qui, dans la théorie de l'argumentation, est identifié comme schéma pragmatique fondé sur des valeurs : « Tout mathématicien qui agit comme un agent rationnel, ayant pour

objectif d'éliminer les exceptions des théories mathématiques et partageant certaines valeurs telles que la généralité et la simplicité et une certaine méthode d'introduction des éléments idéaux qui permettent d'atteindre cet objectif, est pratiquement engagé à introduire des éléments idéaux ». L'article montre ensuite comment d'autres arguments de Hilbert, Dedekind, Cantor et Veronese peuvent être identifiés comme des méta-arguments de réduction pragmatique-inductive, hiérarchique et de direction respectivement.

Dans l'introduction, l'article considère plusieurs points d'attaque possibles, en en suggérant une classification. Il est assez courant en mathématiques de parler d'éléments idéaux, imaginaires ou même impossibles. On pourrait considérer ces pratiques linguistiques comme une simple question de mots, en arguant que les nombres complexes ne sont pas moins réels (ou idéaux) que les nombres réels, et que ces noms ne sont que des façons conventionnelles de désigner des entités mathématiques. On peut aussi considérer ces pratiques d'un point de vue historique, et soutenant que l'idéal, l'imaginaire et l'impossible ne sont que des noms utilisés pour des entités ou des théories nouvellement introduites, révélant leur impact révolutionnaire en mathématiques. On peut aussi prendre la distinction au sérieux et expliquer la partition au moyen d'une différence d'ordre métaphysique, épistémologique, psychologique, pragmatique ou génétique.

D'un point de vue métaphysique, on peut distinguer deux types d'existence, ou deux caractéristiques de l'existence. En introduisant la distinction entre les choses réelles et les idées en soi, Bernard Bolzano a considéré toutes les entités mathématiques comme étant en soi, c'est-à-dire inexistantes.¹ La tradition analytique frégéenne et platonicienne partageait une conception similaire des entités arithmétiques. La géométrie, au contraire, a été considérée au XIX^e siècle principalement comme une partie de la physique, suivant une tradition qui avait commencé avec Friedrich Gauss et qui a été théorisée par Hermann Grassmann, lorsqu'il a distingué les sciences formelles et réelles.² Giuseppe Veronese considérait la géométrie comme une science mixte, en partie formelle et en partie réelle : par exemple, il faisait la distinction entre un segment de ligne, qui est une représentation de quelque chose de réel, et une ligne droite infinie, qui n'a pas de contrepartie dans le monde physique.³ Dans *Formal and factual science*,⁴ Rudolf Carnap réfute l'interprétation ontologique de la distinction entre idéal et réel, affirmant qu'elle ne légitime pas encore l'opinion de certains philosophes qui pensent que les objets « réels » des sciences fac-

1. BOLZANO 1837.

2. GRASSMANN 1844.

3. VERONESE 1891.

4. CARNAP 1935.

tuelles doivent être opposés aux objets « formels », « geistig » ou « idéaux » des sciences formelles.

D'un point de vue épistémologique, on peut distinguer deux niveaux de connaissance différents : une certitude plus ou moins grande, une perspicacité plus ou moins grande, une difficulté plus ou moins grande dans le calcul, une efficacité plus ou moins grande des preuves. Par exemple, on pourrait distinguer entre les théories dont on peut prouver la cohérence et les théories dont on ne le peut pas, ou entre les théories finitaires et infinitaires.

D'un point de vue psychologique, il existe une distinction entre les éléments qui peuvent être conçus intuitivement, et les éléments qui ne peuvent être objets ni d'intuition ni de représentation. Par exemple, plusieurs mathématiciens, dont Hermann von Helmholtz⁵ et Giuseppe Veronese,⁶ et philosophes, comme Bertrand Russell,⁷ ont cherché un noyau axiomatique commun aux géométries euclidienne et non-euclidienne qui pourrait exprimer les principales caractéristiques de l'intuition a priori kantienne de l'espace.⁸

Enfin, on peut tracer une distinction pragmatique entre deux types d'éléments qui ont des fonctions différentes en mathématiques : par exemple, en supposant, comme Otto Hölder,⁹ que la fonction des nombres réels est la mesure, ou, comme Hans Hahn,¹⁰ que l'introduction des nombres imaginaires a la fonction instrumentale de permettre une meilleure compréhension des propriétés des nombres réels.

Les lacunes descriptives de certaines des approches susmentionnées, surtout lorsqu'elles sont prises isolément, m'ont poussé à développer un autre type d'approche du thème des éléments idéaux. La méthode choisie consiste à appliquer des outils techniques de la théorie de l'argumentation et de la logique informelle à l'étude des discours mathématiques sur les éléments idéaux.

À partir de l'analyse de plusieurs passages de mathématiciens tels que Hilbert, Gauss, Véronèse, Cantor et Dedekind, je maintiens que l'utilisation des termes « idéal », « imaginaire » et « impossible » se produit soit dans le contexte d'un argument pratique visant à justifier un type particulier de modification d'une théorie dans des circonstances données, soit dans le contexte d'autres types d'arguments visant à légitimer cet argument pratique. La distinction réel-idéal est donc considérée à la lumière d'une pratique argumentative dialectique concernant la méthodologie mathématique.

5. HELMHOLTZ 1968.

6. VERONESE 1891.

7. RUSSELL 1897.

8. TORRETTI 1978; CANTÙ 2009a.

9. HÖLDER 1901.

10. HAHN 1907.

L'analyse des méta-arguments est philosophiquement intéressante car elle révèle des différences significatives dans les approches épistémologiques de Dedekind, Hilbert, Cantor et Veronese à la méthode d'introduction des éléments idéaux. Dedekind avait tendance à concevoir la généralité comme l'accomplissement d'une théorie qui pourrait inclure la théorie originale comme un cas particulier, partageant une conception cumulative de la connaissance mathématique et une préférence pour les théories hiérarchiquement ordonnées. Hilbert visait à justifier les arguments pratiques par un raisonnement mathématique heuristique. Cantor considérait sa généralisation des nombres comme « la seule naturelle », et donc unique, tandis que Veronese considérait que différentes généralisations alternatives étaient non seulement possibles mais également légitimes par rapport aux objectifs.

En outre, l'analyse a montré que la méthode d'introduction des éléments idéaux peut être étudiée de manière intéressante non seulement en ce qui concerne le statut ontologique des objets mathématiques, mais aussi en ce qui concerne la valeur normative de certaines stratégies heuristiques. Les arguments discutés dans le § 2 ont été reconstruits comme instances d'un schéma d'argumentation pratique : si j'ai un objectif soutenu par des valeurs partagées (par exemple, la nécessité de supprimer les exceptions parce que cela augmente la généralité et la simplicité de la théorie), alors une action qui permet d'atteindre le but (en introduisant des éléments idéaux) est légitime, sauf s'il y a des conflits avec d'autres objectifs et valeurs partagés. Les arguments discutés dans le § 3 ont au contraire pour fonction de répondre à certaines objections critiques aux arguments précédents, et jouent donc le rôle de méta-arguments, c'est-à-dire d'arguments concernant la légitimité d'un argument. Alors que l'argument pragmatique a une conclusion normative recommandant l'introduction d'éléments idéaux pour éliminer certaines exceptions d'une théorie, les méta-arguments ont pour but d'évaluer la légitimité de cette stratégie heuristique, et offrent ainsi un aperçu intéressant de la conception épistémologique de leurs partisans.

5.2 L'application des mathématiques et sa valeur épistémologique

P. CANTÙ 2018b. « The epistemological question of the applicability of mathematics », *Journal for the History of Analytical Philosophy*, Special Issue « Method, Science, and Mathematics : Neo-Kantianism and Analytic Philosophy » Sous la direction de L. PATTON et S. EDGAR, 6-3 (2018) : 95–114. <https://doi.org/10.15173/jhap.v6i3.3435>.

La question de l'applicabilité des mathématiques est une question épistémologique qui a été explicitement soulevée par Kant, et qui a joué différents rôles dans les travaux des philosophes néo-kantiens, avant de devenir une question essentielle dans la première philosophie analytique. Dans l'article je distingue trois questions principales qui sont liées à l'application des mathématiques et je les précise avec une enquête historique sur les différences entre la position de Kant, les perspectives néo-kantiennes (Helmholtz et Cassirer en particulier, mais aussi Otto Hölder), la philosophie de Frege et les vues de plusieurs mathématiciens de la fin du XIX^e siècle (Grassmann, Dedekind, Hankel et Bettazzi).

A) L'argument de l'indispensabilité est une forme pratique de raisonnement ayant le schéma suivant : si quelque chose est indispensable à nos théories scientifiques, nous devons y souscrire. Les mathématiques sont indispensables. Nous devons y souscrire.

B) Les explications philosophiques de l'application réussie des mathématiques répondent à la question : Pourquoi les mathématiques sont-elles appliquées avec succès à la compréhension du monde physique ?

C) Les discussions fondamentales sur les théories mathématiques axiomatisées cherchent à savoir si la formulation des axiomes inclut déjà leur application possible au monde physique.

A. Une façon courante d'aborder la question de l'applicabilité des mathématiques consiste à produire un argument d'indispensabilité. Un argument d'indispensabilité est une forme pratique de raisonnement suggérant que nous devrions accepter ce qui est indispensable pour nos théories scientifiques. Ainsi, nous pourrions accepter ;

(A1) l'existence d'entités mathématiques abstraites (Quine, Putnam) ;

(A2) une croyance justifiée en l'existence d'entités mathématiques abstraites ;¹¹

(A3) l'utilisation légitime d'éléments abstraits en mathématiques. Cassirer, par exemple, a affirmé que nous sommes attachés aux éléments idéaux des mathématiques, même s'ils ne trouvent aucune application dans une science empirique, parce que les éléments idéaux sont inséparables de la partie réelle des mathématiques qui est appliquée avec succès aux théories scientifiques.

B. Une autre façon d'aborder la question de l'applicabilité est de répondre à la question : Pourquoi les mathématiques devraient-elles être applicables avec succès au monde physique ?¹²

De nombreux types d'explications philosophiques ont été proposés :

11. COLYVAN 2001.

12. STEINER 1995.

(B1) une explication linguistique basée sur l'idée que l'univers est écrit en langage mathématique ;¹³

(B2) une explication transcendantale de la nature mathématique du monde, reposant en définitive sur la constitution du sujet, qui interprète la réalité au moyen des formes a priori de l'intuition : l'espace et le temps (Kant), ou au moyen de processus spécifiques de formation de concepts (Cassirer, Hölder) ;

(B3) une explication structurelle : l'application des mathématiques au monde est basée sur des similitudes (homomorphismes) entre les structures mathématiques et les systèmes de grandeurs ; Bettazzi par exemple a soutenu que nous n'avons accès aux propriétés physiques qu'à travers une représentation mathématique de la structure de la réalité physique, qui est décrite de manière appropriée par des structures mathématiques si un théorème de représentation peut être prouvé (c'est-à-dire, si on peut prouver qu'il existe un isomorphisme entre les deux structures respectant les propriétés des relations et des opérations) ;

(B4) une explication empirique : les mathématiques ne peuvent être appliquées avec succès que lorsqu'elles produisent effectivement un système axiomatique qui peut être mis en corrélation structurelle avec des modèles conceptuels de la réalité physique. Helmholtz doutait que l'on puisse accéder aux propriétés physiques uniquement par le biais de représentations mathématiques, car au moins certaines d'entre elles peuvent être mesurées indépendamment. Certaines propriétés physiques ne peuvent être évaluées que par des représentations arithmétiques, car les axiomes des nombres naturels « contrôlent l'application » dans la mesure où ils sont nécessaires pour déterminer quelles magnitudes physiques sont mesurables. Mais il n'en va pas de même pour la géométrie, où au contraire « l'application décide des axiomes », car la formulation axiomatique correcte de l'espace géométrique dépend de l'application réussie à la physique.

(B5) une explication logiciste : les mathématiques peuvent être appliquées à la description du monde, étant donné qu'elles ne contiennent que des concepts logiques, et que les concepts logiques sont suffisamment généraux pour permettre des applications à tout ce qui existe. Frege défendait ainsi une approche fondationnelle : l'applicabilité des mathématiques est intrinsèque à la nature logique des concepts mathématiques, qui peuvent être appliqués à tout domaine possible d'objets, et doit donc être incluse dans leur définition.

Dans la dernière section de l'article, la pertinence d'une contrainte d'application dans la définition des nombres réels est discuté en relation avec le débat contemporain sur le néo-logicisme (notamment Hale, Wright et les critiques de

13. GALILEI 1623, p. 171.

Batitsky), afin de suggérer une comparaison non seulement avec les positions de Frege, mais aussi avec les idées de plusieurs chercheurs néo-kantiens, notamment Hölder, Cassirer et Helmholtz. Le raisonnement de Batitsky partage plusieurs traits avec l'argumentation de Helmholtz ; les remarques de Wright sur l'acceptabilité de la voie dedekindienne, et sur l'application effective de certaines parties abstraites des mathématiques, nous rappellent l'approche de Cassirer. Ces similitudes montrent l'utilité d'une référence à l'histoire de la philosophie pour l'analyse des débats contemporains en philosophie analytique.

5.3 La philosophie de Grassmann et le structuralisme contemporain

P. CANTÙ 2020a. « Grassmann's concept structuralism », in E. RECK et G. SCHIEMER (éd.), *The Prehistory of Mathematical Structuralism*, Oxford University Press, pp. 21—58. <https://doi.org/10.1093/oso/9780190641221.003.0002>.

L'article vise une présentation et interprétation de la philosophie des mathématiques de Grassmann. Il y a plusieurs difficultés à surmonter : 1) la philosophie des mathématiques de Grassmann varie selon les écrits, 2) il est difficile de distinguer clairement sa conception de celle de son frère Robert, 3) lorsqu'une distinction peut être tracée, Robert semble avoir été celui qui s'est le plus intéressé à la logique et à la philosophie de la logique (voir Peckhaus (2011) et Grattan-Guinness (2011),¹⁴ 4) le style philosophique de Grassmann, typique de la philosophie naturelle du début du XIX^e siècle, n'est pas facilement lisible par les philosophes contemporains, 5) Grassmann a été interprété de différentes manières dès la seconde moitié du XIX^e siècle, et au début du XX^e siècle par Hankel, Cassirer et Klein.¹⁵ Je maintiens que ces interprétations ne soulignaient pas suffisamment le rôle du « particulier » dans les mathématiques de Grassmann (Cassirer), le rôle de l'intuition et les raisons d'une présentation quasi-axiomatique de la théorie de l'extension et de l'arithmétique (Klein), les différences entre la théorie générale des formes et l'arithmétique de Grassmann (Cassirer), ou les différences entre la théorie générale des formes et un traitement symbolique des objets mathématiques en tant que signes dont le référent n'a pas d'importance (Hankel). Pourtant, tous ces aspects sont extrêmement pertinents pour saisir la compréhension de Grassmann de la formation des concepts en mathématiques et sa contribution au structuralisme méthodologique et philosophique.

14. Voir PECKHAUS 2010; GRATTAN-GUINNESS 2010.

15. Voir, par exemple, HANKEL 1867; CASSIRER 1910; KLEIN 1875.

Dans l'article j'analyse la définition que Grassmann donne des mathématiques comme la science du particulier, et étudie sa distinction complexe entre le formel et le réel, en me référant à certaines interprétations philosophiques¹⁶, mais en analysant aussi les contributions mathématiques de Grassmann qui sont pertinentes pour la transformation structuraliste des mathématiques, comme l'algèbre abstraite, l'algèbre linéaire et la théorie des nombres (§ 2). Je montre ainsi que les notions de combinaison linéaire, de série et d'addition sont plus importantes pour Grassmann que les notions de fonction, de cartographie et d'ordre, ce qui entraîne des conséquences intéressantes pour l'analyse de la contribution possible de Grassmann au structuralisme méthodologique et philosophique, qui est l'objectif principal de l'article (§ 4).

Par structuralisme méthodologique, j'entends l'analyse de la méthode appliquée par les mathématiciens lorsqu'ils travaillent dans le domaine des mathématiques et qui a évolué dans le temps. Reck et Price ont défini le structuralisme méthodologique comme une méthodologie qui « motive, explicitement ou implicitement, beaucoup de vues structuralistes dans la littérature philosophique ». ¹⁷ En suivant une suggestion de Reck et Schiemer, ¹⁸ j'associe le structuralisme méthodologique à des questions concernant :

- 1) la critique des mathématiques en tant que science d'un domaine donné d'objets (par exemple, les quantités) considérés isolément plutôt que dans leurs relations mutuelles ;
- 2) le rôle de l'intuition et des déductions formelles ;
- 3) le rôle des axiomes, des invariants et des applications, et
- 4) la relation entre des différentes manières d'encadrer les mathématiques (par exemple, la théorie des ensembles, la théorie des catégories).

Ce structuralisme méthodologique aborde des questions philosophiques profondes, qui se posent souvent dans la pratique mathématique elle-même ou dans l'analyse historique du développement des théories mathématiques.

Le structuralisme philosophique est utilisé ici comme un nom collectif pour un grand nombre de théories philosophiques centrées sur la question fondamentale : « Qu'est-ce qu'une structure ? ». Des questions typiques concernent par exemple

- 1) l'existence d'objets et d'opérations et leurs relations avec les structures ;
- 2) si les structures générales peuvent être distinguées des structures particulières et des exemplaires ;

16. A. C. LEWIS 1977, FLAMENT 1994, BANKS 2013, et SCHLOTE 1996

17. E. RECK et PRICE 2000, p. 345.

18. E. RECK et SCHIEMER 2020.

3) ce que nous appelons « formel » dans une structure et quel rôle joue l'axiomatique dans cette caractérisation.

L'analyse de ces questions est reliée à l'étude des réponses données dans la littérature contemporaine par Shapiro, Parsons, Feferman, Isaacson et Burgess. Je suggère une distinction entre ce que j'appelle « structuralisme conceptuel » et « structuralisme objectuel » respectivement, afin de clarifier les différences entre la perspective de Grassmann et les approches contemporaines.

L'objectif n'est certainement pas de déterminer si Grassmann a été un précurseur d'une position philosophique spécifique dans le débat contemporain, ce qui serait tout à fait anachronique, car tant les mathématiques que la philosophie ont profondément évolué depuis l'époque de Grassmann. D'une part, plusieurs conceptions du structuralisme sont fondées soit sur une théorie des ensembles, soit sur un cadre catégoriel qui n'avait pas encore été développé à l'époque. D'autre part, l'approche de la philosophie analytique au structuralisme est fondée sur une nouvelle compréhension des mathématiques et de la logique introduite par exemple par Dedekind, Frege, Peano, Russell et Hilbert, ce qui rend difficile de séparer notre usage commun de certaines notions (telles que fonction, concept, égalité) de l'utilisation correspondante faite par Grassmann. Pourtant, à condition que les différences historiques soient clairement exposées, il n'est pas anachronique d'évaluer Grassmann du point de vue de la philosophie contemporaine des mathématiques, si cela signifie mettre en évidence des problèmes que le structuralisme contemporain ne considère pas suffisamment. Je donne des arguments à l'appui de la thèse selon laquelle Grassmann a indubitablement contribué au structuralisme mathématique et que, d'un point de vue philosophique, la perspective avec laquelle son approche peut être comparée le plus fructueusement est le structuralisme non-éliminatif associé à une ontologie constructiviste (je pense par exemple à Parsons ou Feferman). Pourtant, les contributions les plus intéressantes de Grassmann au structuralisme contemporain pourraient être vues dans ce qui ne rentre pas dans le cadre des philosophies contemporaines mais soulève des problèmes :

- (a) trouver une alternative constructiviste à l'ontologie *ante rem / in re*,
- (b) vérifier si une forme de conceptualisme pourrait expliquer comment les mathématiciens parlent des structures sans faire abstraction de leurs instanciations,
- (c) considérer le rôle fondamental des séries (et notamment l'importance de l'opération qui permet la construction d'une suite) dans la pensée mathématique et scientifique,
- (d) développer une étude des différences entre ce que nous avons appelé le structuralisme conceptuel et objectuel.

5.4 Logique impure et philosophie de l'axiomatique

P. CANTÙ, 2020b. « *Logica impura* », in E. MONTUSCHI and P. D. OMODEO (éd.), *Ordinare il mondo. Prospettive logiche ed epistemologiche su scienza, natura e società*. Roma : Armando Editore, 2020, pp. 71–95.

Tout comme les voix du contrepoint musical sont harmoniquement dépendantes les unes des autres mais peuvent avoir des rythmes et des timbres différents, la logique et l'épistémologie se sont développées dans une interdépendance mutuelle mais ont conservé une démarche rythmique distincte. C'est pourquoi je parle de logique impure, c'est-à-dire d'une logique qui, comprise comme une activité de recherche plutôt que comme une collection de théories axiomatisées ou de calculs formels, est mêlée à des préoccupations que l'on qualifierait aujourd'hui d'épistémologiques, soit au sens anglais du terme, parce que la recherche logique s'intéresse à des questions concernant la théorie de la connaissance humaine au sens large, soit au sens français du terme, parce que la recherche s'est tournée vers la critique des théories scientifiques. En ce sens, la logique impure ne coïncide pas avec la logique appliquée, qui vise à étudier la structure logique liée à un domaine d'objets donné ou à un ensemble circonscrit de pratiques ou de procédures de raisonnement afin de résoudre un problème concret. Et pourtant, comme la logique appliquée, elle est profondément ancrée dans les pratiques sociales. L'ouverture épistémologique de ce que j'appelle logique impure dans cet article et que je considère aujourd'hui comme exemplifiée par la philosophie de l'axiomatique telle qu'elle a été esquissée dans le premier chapitre de ce rapport, ne se limite pas à une description nomologique ou à une catégorisation normative d'un domaine de la réalité, mais vise une vaste étude philosophique de la nature, de l'origine et des limites de la connaissance, et en particulier de la connaissance scientifique. Cette étude ne s'identifie pas aux résultats du processus d'axiomatisation, mais plutôt à la dynamique de son développement. Si l'objectif fait écho au projet épistémologique de Kant de recherche des conditions de possibilité de la connaissance scientifique, l'accent est également mis sur la dimension sociale et intersubjective de la constitution de l'objectivité. Si l'adjectif « impure » suggère une dévalorisation par rapport à la logique pure ou neutre, le terme est utilisé dans l'article de manière provocatrice pour revendiquer cette minorité comme un point fort, consistant en la capacité de résister à toute tentative de purge (par exemple, la logique impure résiste au réductionnisme syntaxique ou à l'élimination de l'approche intentionnelle, ou encore à la dévalorisation de la composante pragmatique et dialogique). La richesse de ce que j'ai appelé ailleurs « théories épistémologiques mineures » dans le Projet

« Interepisteme »¹⁹ réside précisément dans l'impossibilité d'être purgées de leur spécificités pour entrer en parfaite assonance avec les « ismes » dominants d'une certaine phase historique (logicisme, structuralisme, formalisme, intuitionnisme, platonisme). De même, la logique impure résiste à toute forme de neutralisation dans laquelle la composante normative est déterminée par une conception ontologique ou métaphysique ou téléologique préalable plutôt que par le résultat d'une analyse conceptuelle ouverte.

Dans l'article j'illustre l'impureté par un exemple. Au XX^e siècle, la logique a longtemps été entrelacée, voire parfois identifiée, avec l'axiomatique, ce qui a favorisé une distinction entre différentes approches des théories scientifiques : une approche syntaxique, qui considère une théorie axiomatique comme une collection d'énoncés linguistiques ; une approche sémantique, qui considère les théories comme des collections de modèles ; et une approche pragmatique, qui juge une théorie comme un ensemble d'exemples paradigmatiques, de problèmes, de normes, de compétences et de pratiques. La logique a progressivement été considérée comme le noyau de ces théories scientifiques et analysée séparément dans ses composantes syntaxiques, sémantiques et pragmatiques. Si la philosophie de la logique s'est interrogée sur la relation et la coexistence de ces trois modes d'investigation d'une théorie, la spécialisation disciplinaire a parfois rendu difficile un regard global sur la dynamique de l'aventure axiomatique. Par ce terme, nous entendons quelque chose de distinct à la fois d'une théorie axiomatique et de la méthode axiomatique, comprise comme une méthode de construction ou de reconstruction des théories axiomatiques. L'aventure axiomatique est un va-et-vient entre les niveaux syntaxique, sémantique et pragmatique-linguistique, va-et-vient qui, à l'époque de Peano, était aussi motivé par le fait qu'il n'y avait pas encore de séparation nette entre les différentes approches. La logique axiomatique est née comme une logique impure parce que les objectifs liés à ces trois perspectives sont interdépendants : 1) rendre explicites les hypothèses implicites d'une théorie (par exemple, en énonçant toutes les hypothèses nécessaires pour prouver un théorème donné) ; 2) étudier les hypothèses tacites d'une théorie afin de considérer ce qui se passe si elles ne sont pas implicitement assumées (par exemple, en testant la possibilité de créer des modèles non standard d'une théorie) ; 3) définir la portée et les objectifs d'un programme de recherche ou d'une discipline.

19. Voir plus haut section §1.2.4 à la page 24.

5.5 La philosophie des mathématiques de Peano et la pratique axiomatique de son école

P. CANTÙ. Peano's philosophical views between structuralism and logicism. In F. Boccuni and A. Sereni, editors, *Origins and Varieties of Logicism. A Foundational Journey in the Philosophy of Mathematics*. Routledge, 2021.

P. CANTÙ en préparation. *Peano's Philosophy of Mathematics. The Peano School and the practice of axiomatics*, Manuscrit inédit.

Le manuscrit, dont l'article publié constitue le troisième et une section du sixième chapitre, est consacré à Giuseppe Peano et à plusieurs de ses collaborateurs et se compose de six chapitres :

1. *Introduction*. Le premier chapitre comprend une brève présentation historique de la vie et œuvre de Peano, ainsi qu'une analyse détaillée de la littérature récente qui montre un regain d'intérêt pour les vues philosophiques de son école.
2. *The Peano School*. Le deuxième chapitre présente certains des collaborateurs de Peano et décrit les projets de collaboration, notamment le *Formulaire*, mais aussi le *Dictionnaire de mathématiques* et les travaux liés à l'*Academia pro Interlingua*.
3. *Symbolic Language*. Le troisième chapitre traite de la notation de Peano, du sens qu'il attache à l'idéographie, de sa théorie de la signification, de la manière dont il conçoit la formalisation et de la critique qu'en fait Enriques.
4. *Definitions, Axioms and Rules*. Le quatrième chapitre est consacré à une analyse de la théorie de la définition de Peano, aux formulations axiomatiques de théories logique et mathématiques et à une discussion des règles d'inférence. Il s'agit de comprendre la relation entre les définitions, les axiomes et les règles, tant en logique qu'en mathématiques.
5. *Axiomatics*. Le cinquième chapitre étudie la forme particulière d'axiomatique utilisée et théorisée par Peano et aborde la question de savoir s'il existe une recherche métathéorique chez Peano. Le chapitre suggère qu'une telle enquête ne concerne pas seulement les résultats sur l'indépendance, mais aussi les observations sur la rigueur et le rôle dynamique de l'axiomatique elle-même.
6. *Implicit Philosophy*. Le sixième chapitre reconstruit la philosophie implicite de l'œuvre de Peano à travers une enquête sur ses pratiques logiques et mathématiques. Abordant la relation avec Leibniz et l'analyse de la relation entre la logique et les mathématiques, le chapitre traite de la relation de Peano avec le logicisme, le pragmatisme et le structuralisme.

Malgré les nombreux articles de recherche consacrés aux questions fondamentales, on ne dispose pas encore d'une évaluation philosophique complète des contributions de l'école de Peano. La plupart des études se concentrent sur des aspects spécifiques de la production de l'école, opposant les intérêts de la logique et des mathématiques à ceux de la linguistique. Le présent volume propose une nouvelle lecture, fondée sur une reconstruction des relations avec les contemporains et des interactions entre les objectifs logiques, mathématiques, linguistiques, historiques et éducatifs. Grâce à une lecture minutieuse de la production de divers membres de l'école, une nouvelle interprétation de l'axiomatique de Peano émerge, une interprétation qui déplace l'attention de la justification ultime des propositions primitives d'une théorie vers la recherche de relations entre les axiomes, les définitions et les théorèmes et entre les structures de différentes théories.

Giuseppe Peano était une figure clé de la logique et des mathématiques en Italie et au-delà, mais sa figure et ses œuvres sont difficiles à analyser. Premièrement, il est difficile de séparer clairement les idées de Peano des contributions de ses collaborateurs dans les diverses activités collectives qu'il dirigeait. Ensuite, il est difficile d'évaluer la contribution philosophique de Peano, en la séparant du mythe associé à sa figure dans les études fondationnalistes. Enfin, il est difficile de considérer toutes les dimensions de sa pensée, qui incluent la logique et les mathématiques mais aussi l'histoire, la linguistique et la didactique. Ces raisons, parmi d'autres, expliquent l'absence d'une monographie complète sur Giuseppe Peano et son groupe de collaborateurs.

Conscient de ces difficultés, le volume fait un choix méthodologique clair, en plaçant la figure de Giuseppe Peano au centre de l'enquête, mais en la présentant en contraste avec celles de Giovanni Vailati, Mario Pieri, Cesare Burali-Forti, Alessandro Padoa, Giovanni Vacca et Rodolfo Bettazzi.

Un deuxième choix explicite est celui de ne pas limiter l'analyse des travaux de Peano et de son groupe de collaborateurs aux contributions sur les fondements. Il y a plusieurs raisons intrinsèques à ce choix : premièrement, je prétends que le but principal de Peano était de contribuer à une clarification conceptuelle des mathématiques et non au débat philosophique entre logicisme, intuitionnisme et formalisme ; deuxièmement, je montre qu'aucun des membres de l'école n'est entré dans ce débat, alors qu'au contraire ils ont continué à discuter de la syllogistique jusque dans les années 30 ; enfin, la comparaison avec plusieurs auteurs fondationnalistes (par exemple Frege, Dedekind, Hilbert) montre clairement que l'intérêt de Peano pour la logique avait une origine et des objectifs différents.

Mais il y a aussi des raisons extrinsèques à ce choix : nous sommes maintenant suffisamment éloignés du début du vingtième siècle pour avoir une

distance historique adéquate par rapport aux intérêts qui se sont imposés à l'époque. En particulier, le développement récent d'approches interdisciplinaires de la philosophie et de l'histoire des mathématiques, plus attentives aux pratiques réelles, permet d'adopter une vue d'ensemble plus large, capable de saisir la division de l'attention de Peano entre les études fondamentales, les découvertes logico-mathématiques et les questions de linguistique.²⁰

Le volume aborde néanmoins certaines questions fondamentales classiques : comment les vues philosophiques de Peano se rapportent-elles au logicisme, au structuralisme et à l'algèbre de la logique ? Quel rôle a-t-il assigné à l'axiomatique ? L'objectif est d'évaluer l'axiomatique comme une approche qui peut avoir une valeur fondatrice, mais aussi d'autres rôles : elle peut être un outil architectural et didactique d'organisation et de transmission de la connaissance ; un outil d'analyse conceptuelle qui conduit à la recherche de définitions adéquates des termes du langage ; un outil modulaire qui vise à comprendre les relations inférentielles entre différentes parties de la connaissance (De quoi ai-je besoin pour prouver un théorème donné ?), et enfin un outil heuristique qui conduit à la recherche de nouveaux résultats.

Les questions fondamentales sont reprises dans ce volume, mais pour la première fois en les reliant systématiquement aux intérêts de la linguistique, et aux écrits d'autres collaborateurs, notamment Vailati, Burali-Forti, Padoa, Bettazzi et Vacca, qui soulignent le lien entre la grammaire linguistique et l'algèbre de la logique. Cette approche nécessite l'approfondissement de certains thèmes peu traités dans la littérature, comme la syllogistique, la théorie des définitions, l'étude des relations d'équivalence, la définition axiomatique des systèmes de grandeurs, l'histoire des mathématiques, le rapport complexe avec la tradition leibnizienne et avec l'algèbre de la logique, les problèmes théoriques et pratiques liés à l'introduction du symbolisme. La comparaison avec les contemporains (Cantor, Schröder, Dedekind, Frege, Hilbert, Enriques, Veronese, Segre et Volterra) permet non seulement d'étudier le prétendu logicisme ou structuralisme de Peano et de son école, mais aussi de déterminer les différents objectifs théoriques et pratiques de leurs approches et de comparer les pratiques et les problèmes mathématiques, logiques et linguistiques dans lesquels ils se sont incarnés. La comparaison avec d'autres auteurs, en particulier Russell et Gödel, ne sert pas tant à déterminer si Peano était un logiciste ou s'il doit être mis sur le même plan que Frege et Russell, mais plutôt à comprendre quels problèmes mathématiques spécifiques ont induit la recherche de solutions alternatives. Par exemple, Gödel dans les cahiers inédits *Max Phil* associe les problèmes mathématiques de la limite et du maximum d'une fonction

20. BORGA, FREGUGLIA *et* PALLADINO 1985, p. 8.

à la solution proposée par Peano du problème de descriptions définies. L'objectif de ce volume est donc de fournir une vue d'ensemble plus articulée et plus précise de l'école de Peano, en l'analysant non seulement dans le contexte des recherches du XX^e siècle sur les fondements des mathématiques, mais aussi au travers de la question des principes fondamentaux des mathématiques, et en effectuant une étude comparative des problèmes linguistiques, logiques et mathématiques.

Le volume montre qu'il existe une philosophie de Giuseppe Peano, qu'elle est en partie implicite dans les pratiques mathématiques et logiques qui émergent de ses œuvres et qu'elle peut donc être plus facilement reconstruite par un examen comparatif de ses écrits et de ceux de ses collaborateurs. Le choix entre deux définitions possibles d'un terme logique ou mathématique révèle souvent une préférence théorique ou une position philosophique implicite contre certaines définitions. Par une analyse détaillée de certaines pratiques, je montre qu'il n'est pas correct de dire, comme on le fait habituellement, que Peano ne s'intéressait pas aux questions philosophiques. De même que Kennedy a affirmé que Peano n'était pas politiquement actif mais avait des sympathies socialistes,²¹ je prétends que Peano n'était pas intéressé par la défense d'une position philosophique précise mais avait des sympathies pragmatistes et des intuitions philosophiques liées à des intérêts logiques, linguistiques, historiques et didactiques qui ne peuvent être séparés de son activité et de sa pratique en tant que mathématicien.

Par ailleurs, je maintiens que la philosophie de Peano n'est pas identique à celle de ses collaborateurs, non seulement parce que le groupe n'a jamais publié de manifeste commun, mais surtout parce qu'un aperçu des textes individuels et collectifs permet de distinguer d'importantes tensions et différences entre les membres du groupe. Ces différences ne concernent pas seulement les principaux intérêts de chaque chercheur, mais aussi certaines questions fondamentales. Parmi les traits unificateurs de l'école, je souligne l'attention portée aux théories et pratiques éducatives, qui est le moteur et le point d'arrivée de la plupart des questions fondamentales soulevées au sein du groupe, mais aussi l'un des points de friction les plus forts avec les collègues de l'Université de Turin et l'un des héritages négatifs les plus souvent cités pour expliquer le déclin de l'école. Un premier résultat de cette nouvelle lecture de l'école de Peano associe la reconstruction de la philosophie des mathématiques à la pratique de l'enseignement—une approche qu'Erika Luciano étudie en discutant la valeur épistémologique des remarques de Padoa sur la didactique,²² mais

21. KENNEDY 2006, chapitre 16.

22. LUCIANO 2017.

que j'associe aussi aux vues pragmatistes.

La philosophie de Peano ne peut être reconstruite sans une compréhension plus large du rôle des entreprises interdisciplinaires et collectives qu'il a promues et dirigées, même si leur réalisation n'a pas toujours été à la hauteur des intentions initiales. L'accent est donc mis sur la discussion interdisciplinaire des problèmes mathématiques, sur les changements dans la pratique mathématique qui résulte d'une interaction quotidienne entre philosophes, mathématiciens, logiciens, linguistes et enseignants, et sur les questions philosophiques qui découlent non seulement de l'arithmétique, mais aussi de l'analyse, de la géométrie algébrique, de la théorie des espaces vectoriels, de la mécanique, de la linguistique, de l'économie et de la psychologie.

Un autre résultat de ce manuscrit est l'application systématique des résultats de l'enquête sur les pratiques mathématiques de Peano dans l'évaluation de sa recherche axiomatique sur la logique, l'arithmétique, la géométrie et la théorie des nombres réels. Il en ressort une vision très différente de la pratique axiomatique, qui, loin de viser exclusivement ou principalement la fondation ou la certification d'une discipline mathématique, vise à en faire une analyse conceptuelle rigoureuse. La rigueur dont parle Peano n'est pas seulement, comme dans l'axiomatique moderne à partir de Pasch, le soin apporté à ne pas introduire des éléments intuitifs étrangers dans les inférences qui composent les démonstrations mathématiques, mais c'est aussi la rigueur qu'exige l'analyse conceptuelle des définitions proposées par les mathématiciens précédents lorsqu'il s'agit de donner un cours universitaire d'analyse.

Le *Formulaire*, loin d'être une présentation axiomatique de toutes les connaissances mathématiques selon une ligne directrice théorique ou philosophique unificatrice, est avant tout un recueil de formules, un outil pratique destiné à guider le mathématicien sur ce qui a déjà été démontré et ce qui reste à faire. La relation entre la logique mathématique, la tradition syllogistique et les *Éléments* d'Euclide révèle que pour Peano l'axiomatique est une analyse conceptuelle et un démasquage des erreurs, mais aussi un processus historique, culturel, linguistique et dynamique, qui impose des choix à faire dans un contexte scientifique donné. Dans ces termes, j'analyse, par exemple, l'origine de certains résultats mathématiques importants sur les limites et les dérivées, le rejet par Peano des définitions logicistes des nombres naturels (Frege) et des nombres rationnels (Russell) comme classes d'équivalences, mais aussi la tendance à utiliser les mêmes propositions comme règles d'inférence et aussi comme axiomes logiques dans les traités arithmétiques.

Un autre résultat de ce volume est de montrer que la différence entre l'axiomatique formelle de Peano et celle communément conçue est beaucoup plus forte qu'on ne le croit habituellement : 1) l'adoption du symbolisme et de la

représentation idéographique n'est pas associée à une conception des théories axiomatiques comme des ensembles de signes non interprétés, c'est-à-dire que la symbolisation de Peano n'est pas équivalente à la formalisation au sens hilbertien ; 2) la notion d'interprétation de Peano ne coïncide ni avec la notion en usage dans la théorie des modèles ni avec la notion de traduction d'un langage à un autre ; 3) la philosophie de Peano n'est ni une forme de logicisme ni une forme de structuralisme, mais une version linguistique et structuraliste particulière de ce que j'appelle « algébrisme ».

Références

Chaque référence est suivie par les numéros des pages où elle est citée dans ce rapport.

ABERDEIN, A. et I. J. DOVE, éd. (2013). *The Argument of Mathematics*. Dordrecht : Springer.
cit. : p. 19.

ANDREAS, H. (2010). « A modal view of the semantics of theoretical sentences ». *Synthese* 174, p. 367-383
cit. : p. 83.

ARISTOTLE : (1993). *Posterior Analytics*. Sous la dir. de Jonathan BARNES. 2e. Clarendon Aristotle Series. Oxford : Clarendon Press.
cit. : pp. 65, 85.

ARRIGHI, Claudia, Paola CANTU, Mauro de ZAN et Patrick SUPPES, éd. (2010). *Logic and Pragmatism : Selected Essays by Giovanni Vailati*. Stanford : Center for the Study of Language et Information.
cit. : pp. 20, 33, 70.

BANKS, Erik C. (2013). « Extension and measurement : A constructivist program from Leibniz to Grassmann ». *Studies in History and Philosophy of Science Part A* 44(1), p. 20-31
cit. : p. 99.

BASSO, Paola (2004). *Il secolo geometrico. La questione del metodo matematico in filosofia da Spinoza a Kant*. Firenze : Le Lettere.
cit. : p. 22.

BELNAP, Nuel (1993). « On Rigorous Definitions ». *Philosophical Studies : An International Journal for Philosophy in the Analytic Tradition* 72(2/3), p. 115-146

cit. : p. 83.

BENDEGEM, Jean Paul.van (2014). « The impact of the philosophy of mathematical practice on the philosophy of mathematics ». In : *Science After the Practice Turn in the Philosophy, History, and Social Studies of Science*, London : Routledge, p. 215-226

cit. : p. 19.

BETTAZZI, Rodolfo (1890). *Teoria delle grandezze*. Pisa : Spoerri.

cit. : pp. 9, 21, 33, 82.

BIAGIOLI, Francesca (2013). « Between Kantianism and Empiricism : Otto Hölder's Philosophy of Geometry ». *Philosophia Scientiae* 17, p. 71-92. DOI : 10.4000/philosophiascientiae.828

cit. : p. 24.

BOLZANO, Bernard (1804). *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie*. Prag : Barth. Réimpr. in *Oeuvres*, Praha, 1948, vol. 5, pp. 9-49.

cit. : pp. 10, 12, 31.

BOLZANO, Bernard (1810). *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*. Prag. Réimpr. anast. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1974.

cit. : pp. 12, 31, 33, 66.

BOLZANO, Bernard (1837). *Wissenschaftslehre. Versuch einer ausführlichen und grösstentheils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherigen Bearbeiter*. Sulzbach : Seidel.

cit. : pp. 12, 31, 38, 93.

BOLZANO, Bernard (1975). « Einleitung zur Grössenlehre und Erste Begriffe der allgemeinen Grössenlehre ». In : *Gesamtausgabe*. Sous la dir. d'E. WINTER et al. T. II.A, Nachgelassene Schriften, vol. 7. Stuttgart-Bad Cannstatt : Frommann-Holzboog

cit. : p. 33.

BORGA, M., P. FREGUGLIA et D. PALLADINO (1985). *I contributi fondazionali della scuola di Peano*. Milano : Angeli.
cit. : p. 105.

BORROMEO FERRI, R. (2005). *Mathematische Denkstile. Ergebnisse einer empirische Studie*. Hildesheim : Franzbecker.
cit. : p. 7.

BOURBAKI, Nicolas (1950). « The Architecture of Mathematics ». *The American Mathematical Monthly* 57(4), p. 221-232
cit. : p. 13.

BOURBAKI, Nicolas (1939-1984). *Éléments des mathématiques*. Paris : Hermann puis Masson.
cit. : p. 13.

BRECHENMACHER, Frédéric, Guillaume JOUVE, Laurent MAZLIAK et Rossana TAZZIOLI, éd. (2016). *Images of Italian Mathematics in France : The Latin Sisters, from Risorgimento to Fascism*. Trends in the History of Science. Switzerland : Springer International Publishing.
cit. : p. 25.

BURALI-FORTI, Cesare (1901). « Sur les différentes méthodes logiques pour la définition du nombre réel ». In : *Bibliothèque du congrès international de philosophie*. T. 3. Paris : Colin, p. 289-308
cit. : p. 22.

BUSS, Samuel R. (1998). « An introduction to proof theory ». In : *Handbook of proof theory*. Amsterdam : Elsevier, p. 1-78
cit. : p. 7.

CANTÙ, Paola (1998). « Il sorgere di nuove geometrie nell'Ottocento : alcune riflessioni storico-filosofiche sui fondamenti della matematica ». *Rivista di Storia della Filosofia* 4, p. 745-748
cit. : p. 28.

CANTÙ, Paola (1999). *Giuseppe Veronese e i fondamenti della geometria*. Milano : Unicopli.
cit. : pp. 21, 28, 55, 57.

CANTÙ, Paola (2000). « L'insegnamento della geometria nelle scuole medie inferiori. Una lettera inedita di Giuseppe Veronese a Giovanni Vailati ». *Il Voltaire* 5, p. 109-118
cit. : p. 20.

CANTÙ, Paola (2003a). « Bernard Bolzano e le rappresentazioni anoggettuali ». In : *Forma dat esse rei*. Sous la dir. de Paolo VALORE. Milano : Led, p. 125-166
cit. : pp. 29, 47.

CANTÙ, Paola (2003b). « La matematica da scienza delle grandezze a teoria delle forme. L'Ausdehnungslehre di H. Grassmann ». Thèse de doct. Genova : Università di Genova
cit. : pp. 21, 55, 57, 60.

CANTÙ, Paola (2004). « La concezione epistemologica di Giuseppe Veronese ». In : *50 anni di 'Veronese'. Atti del Convegno Giuseppe Veronese : matematica, filosofia, politica e tutela della laguna*. Sous la dir. d'Italo TESTA. Chioggia : il Leggio, p. 147-162
cit. : p. 28.

CANTÙ, Paola (2006). « Bolzano et les propositions en soi : une théorie objective des vérités ». In : *Propositions et états de choses*. Sous la dir. de Jocelyn BENOIST. Paris : Vrin, p. 51-66
cit. : pp. 29, 47, 48.

CANTÙ, Paola (2007). « Il carteggio Padoa-Vailati. Un'introduzione alle lettere inviate da Chioggia ». *Chioggia. Rivista di Studi e ricerche* 30, p. 45-70
cit. : pp. 20, 33.

CANTÙ, Paola (2008). « Mathematik als Größenlehre ». In : *Christian Wolff und die europäische Aufklärung. Akten des 1. Internationalen Christian-Wolff-Kongresses*. Sous la dir. de J. STOLZENBERG et O.-P. RUDOLPH. T. IV. Mathematik und Naturwissenschaften. Ästhetik und Poetik. Wolffiana II. Hildesheim : Olms, p. 13-24
cit. : pp. 32, 55, 64.

CANTÙ, Paola (2009a). « Le concept de l'espace chez Veronese. Une comparaison avec la conception de Helmholtz et Poincaré ». *Philosophia Scientiae - Studies in History and Philosophy of Science* 13(2), p. 129-149
cit. : pp. 28, 94.

CANTÙ, Paola (2009b). « R. B. Brandom, La struttura del desiderio e del riconoscimento : auto-coscienza e auto-costituzione ». In : *Lo spazio sociale della ragione*. Sous la dir. de Luigi RUGGIU et Italo TESTA. Traduction de l'anglaise. Milano/Udine : Mimesis, p. 261-289
cit. : p. 37.

CANTÙ, Paola (2010a). « Aristotle's prohibition rule on kind-crossing and the definition of mathematics as a science of quantities ». *Synthese* 174(2), p. 225-235
cit. : pp. 32, 55, 64.

CANTÙ, Paola (2010b). « Grassmann's epistemology : multiplication and constructivism ». In : *From Past to Future : Graßmann's Work in Context. The Graßmann Bicentennial Conference Septembre 2009*. Sous la dir. de H.-J. PETSCHÉ, A.C. LEWIS, J. LIESEN et S. RUSS. Basel : Birkhäuser, p. 91-100
cit. : pp. 32, 53.

CANTÙ, Paola (2010c). « Mathesis universalis : il problema di una logica interna alla matematica [Compte rendu : D. Rabouin, Mathesis universalis – L'idée de "mathématique universelle" d'Aristote à Descartes, PUF, Paris 2009] ». *Rivista di Storia della Filosofia* 3, p. 605-607
cit. : pp. 37, 61.

CANTÙ, Paola (2010d). « Salah Stétié, Inversione dell'albero e del silenzio (une sélection de poèmes publiés dans Inversion de l'arbre et du silence. *Poèmes*. Gallimard 1980) ». *L'Ulisse* 12, p. 215-216
cit. : p. 37.

CANTÙ, Paola (2010e). « Singularités de la mathesis universalis [Compte rendu : D. Rabouin, *Mathesis universalis – L'idée de "mathématique universelle" d'Aristote à Descartes*, PUF, Paris 2009] ». *La vie des idées*. 28 janvier
cit. : pp. 37, 61.

CANTÙ, Paola (2010f). « Sul concetto di eguaglianza : Peano e la sua scuola ». In : *Peano e la sua scuola fra matematica, logica e interlingua. Atti del Congresso Internazionale di Studi (Torino, 6-7 Ottobre 2008)*. Sous la dir. de C.S. ROERO. Torino : Università degli Studi di Torino, p. 545-561
cit. : pp. 25, 50.

CANTÙ, Paola (2010g). « The role of epistemological models in Veronese's and Bettazzi's theory of magnitudes ». In : *New Essays in Logic and Philosophy of Science*. Sous la dir. de M. D'AGOSTINO et al. London : College Publications, p. 229-241
cit. : pp. 21, 55, 58.

CANTÙ, Paola (2011). *Qui casca l'asino. Gli errori di ragionamento nel dibattito pubblico*. Torino : Bollati Boringhieri.
cit. : p. 34.

CANTÙ, Paola (2012a). « Italian Epistemology at the End of the XIXth Century ». *Perspectives (Réseau français des instituts d'études avancées), RFIEA*, p. 3
cit. : p. 36.

CANTÙ, Paola (2012b). « Sophie Loizeau, La donna legge (une sélection de poèmes publiés dans *La femme lit*, Flammarion, 2009) ». *L'Ulisse* 13, p. 334-338
cit. : p. 37.

CANTÙ, Paola (2013a). « An argumentative approach to ideal elements in mathematics ». In : *The Argument of Mathematics*. Sous la dir. d'A. ABERDEIN et I. J. DOVE. Dordrecht : Springer, p. 79-99
cit. : pp. 47, 48.

CANTÙ, Paola (2013b). « Geometry and measurement in Otto Hölder's epistemology ». *Philosophia Scientiae - Studies in History and Philosophy of Science* 17(1), p. 131-164
cit. : pp. 21, 36, 55, 59.

CANTÙ, Paola (2014a). « After Gödel [Compte Rendu : Richard Tieszen, *After Gödel. Platonism and Rationalism in Mathematics and Logic*. Oxford : Oxford University Press 2011, x + 245 pp.] » *Journal for the History of Analytic Philosophy* 2(8), p. 1-3

cit. : p. 37.

CANTÙ, Paola (2014b). « Bolzano versus Kant : Mathematics as a Scientia Universalis ». In : *Mind, Values and Metaphysics, Philosophical Papers Dedicated to Kevin Mulligan*. Sous la dir. d'Anne REBOUL. T. I. Springer International Publishing, p. 295-316

cit. : pp. 37, 56, 66.

CANTÙ, Paola (2014c). « Filosofia e matematica tra XIX e XX secolo ». *La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana* (1) 7, p. 481-502

cit. : pp. 17, 20.

CANTÙ, Paola (2014d). « Justifier en Mathématiques [Compte Rendu : *Justifier en Mathématiques* by Dominique Flament and Philippe Nabonnand (eds.), Paris : Éditions de la Maison des Sciences de l'Homme, 2011, 372 PP., ISBN 978-2-7351-1414-6] ». *The Mathematical Intelligencer* 36(3), p. 81-83

cit. : p. 37.

CANTÙ, Paola (2014e). « The Right Order of Concepts : Grassmann, Peano, Gödel and the Inheritance of Leibniz's Universal Characteristic ». *Philosophia Scientiae - Studies in History and Philosophy of Science*, 18(1), p. 157-182

cit. : pp. 10, 33, 35, 69, 71.

CANTÙ, Paola (2016a). « Louis Rougier's reception of the Peano School ». In : *Images of Italian Mathematics in France. The Latin Sisters, from Risorgimento to Fascism*. Sous la dir. de Frédéric BRECHENMACHER, Guillaume JOUVE, Laurent MAZLIAK et Rossana TAZZIOLI. New Trends in History of Science. Switzerland : Springer International Publishing, p. 213-254

cit. : pp. 23, 25, 69, 71.

CANTÙ, Paola (2016b). « Peano and Gödel ». In : *Kurt Gödel : Philosopher-Scientist*. Sous la dir. de Gabriella CROCCO et Eva-Maria ENGELEN. Aix-en-Provence : Presses Universitaires de Provence, p. 107-126

cit. : pp. 35, 49, 53, 54.

CANTÙ, Paola (2018a). « Mathematics. Systematical Concepts ». In : *Handbuch Christian Wolff*. Wiesbaden : Springer, p. 139-152
cit. : pp. 37, 56, 67.

CANTÙ, Paola (2018b). « The Epistemological Question of the Applicability of Mathematics ». *Journal for the History of Analytic Philosophy* 6(3), p. 96-114
cit. : pp. 21, 40, 69, 72.

CANTÙ, Paola (2020a). « Grassmann's Conceptual Structuralism ». In : *The Prehistory of Structuralism*. Sous la dir. d'Erich H. RECK et Georg SCHIEMER. Oxford : Oxford University Press, p. 21-58
cit. : pp. 23, 33, 40, 69, 72.

CANTÙ, Paola (2020b). « Logica impura ». In : *Ordinare il mondo. Prospettive logiche ed epistemologiche su scienza, natura e società*. Sous la dir. d'Eleonora MONTUSCHI et Pietro OMODEO. Roma : Armando Editore, p. 71-95
cit. : pp. 20, 70, 72, 92, 101.

CANTÙ, Paola (2021). « Peano's philosophical views between structuralism and logicism ». In : *Origins and Varieties of Logicism. A Foundational Journey in the Philosophy of Mathematics*. Sous la dir. de Francesca BOCCUNI et Andrea SERENI. Routledge
cit. : pp. 41, 70, 72, 74, 85.

CANTÙ, Paola (2022). « Syllogism and beyond in the Peano School ». In : *Aristotle's Syllogism and the Creation of Modern Logic : Between Tradition and Innovation*. Sous la dir. de Lukas M. VERBURGT et M. COSCI. London : Bloomsbury
cit. : pp. 70, 73.

CANTÙ, Paola (s. d.). *Peano's Philosophy of Mathematics. The Peano School and the practice of axiomatics*. Manuscrit d'un ouvrage inédit.
cit. : pp. 6, 16, 41, 70, 74.

CANTÙ, Paola et Mauro DE ZAN (2010). « Life and Works of Giovanni Vailati ». In : *Logic and Pragmatism : Selected Essays by Giovanni Vailati*. Sous la dir. de Claudia ARRIGHI, Paola CANTU, Mauro de ZAN et Patrick SUPPES. Stanford : Center for the Study of Language et Information, p. xxi-lxviii
cit. : pp. 69, 70.

CANTÙ, Paola et Erika LUCIANO (2021). « Giuseppe Peano and his School : Axiomatics, Symbolism and Rigor ». *Philosophia Scientiae - Studies in History and Philosophy of Science* 25(1), p. 3-14
cit. : p. 70.

CANTÙ, Paola et Oliver SCHLAUDT (2013). « Otto Hölder. Intuition and reasoning ». *Philosophia Scientiae - Studies in History and Philosophy of Science* 17(1), p. 15-52. Traduction anglaise de l'allemand
cit. : pp. 20, 37.

CANTÙ, Paola et Italo TESTA (2001). « Dalla nuova retorica alla nuova dialettica : il 'dialogo' tra logica e teoria dell'argomentazione ». *Problemata*, p. 123-173
cit. : p. 30.

CANTÙ, Paola et Italo TESTA (2006). *Teorie dell'argomentazione. Un'introduzione storico-filosofica alle logiche del dialogo*. Testi e Pretesti. Milano : Bruno Mondadori.
cit. : p. 30.

CARNAP, Rudolf (1935). « Formalwissenschaft und Realwissenschaft ». *Erkenntnis* 5, p. 30-37
cit. : p. 93.

CARTER, Jessica (2019). « Philosophy of Mathematical Practice — Motivations, Themes and Prospects ». *Philosophia Mathematica* 27(1), p. 1-32
cit. : pp. 16, 19.

CASSIRER, Ernst (1910). *Substanzbegriff und Funktionbegriff*. Berlin : Cassirer Verlag.
cit. : p. 98.

CATTANI, Adelino, Paola CANTÙ, Italo TESTA et Paolo VIDALI, éd. (2009). *La svolta argomentativa. 50 anni dopo Perelman e Toulmin : 1958-2008*. Napoli : Loffredo.
cit. : p. 34.

CAVAILLÈS, Jean (1994). *œuvres complètes de Jean Cavailles. Philosophie des sciences*. Paris : Hermann.
cit. : p. 23.

CELLUCCI, Carlo (2013). « Top-Down and Bottom-Up Philosophy of Mathematics ». *Foundations of Science* 18(1), p. 93-106
cit. : p. 20.

CELLUCCI, Carlo (2017). *Rethinking Mathematics. The Heuristic View*. Cham : Springer.
cit. : p. 7.

CHAPUIS, A. et A. GUPTA (2000). *Circularity, definition, and truth*. Indian Council of Philosophical Research.
cit. : p. 83.

CHASLES, M. (1837). *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*. Bruxelles : Hayez.
cit. : p. 21.

COLYVAN, Mark (2001). *The Indispensability of Mathematics*. Oxford : Oxford University Press.
cit. : p. 96.

COLYVAN, Mark (2009). « Mathematics and the World ». In : *Philosophy of mathematics. Handbook of the Philosophy of Science*. Sous la dir. d'Andrew D. IRVINE. Amsterdam : Elsevier/North-Holland, p. 651-702
cit. : p. 19.

COLYVAN, Mark (2012). *An Introduction to the Philosophy of Mathematics*. Cambridge : Cambridge University Press.
cit. : p. 19.

CORFIELD, David (2003). *Towards a Philosophy of Real Mathematics*. Cambridge : Cambridge University Press.
cit. : p. 19.

COUTURAT, Louis et Léopold LEAU (1903). *Histoire de la langue universelle*. Paris : Hachette.
cit. : p. 22.

CRAPULLI, Giovanni (1969). *Mathesis Universalis. Genesi di un'idea nel XVI secolo*. Roma : Edizioni dell'Ateneo.
cit. : p. 60.

CROCCO, Gabriella, Mark.van ATTEN, Paola CANTÙ et Eva-Maria ENGELEN (2017). *Kurt Gödel Maxims and Philosophical Remarks. Volume X of the Max Phil Notebooks*. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01459188>.
cit. : pp. 20, 35, 38.

CROCCO, Gabriella, Mark.van ATTEN, Paola CANTÙ et Robin ROLLINGER (2020a). *Kurt Gödel Maxims and Philosophical Remarks, Volume IX of the Max Phil Notebooks*. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02892852>.
cit. : pp. 12, 20, 35.

CROCCO, Gabriella, Mark.van ATTEN, Paola CANTÙ et Robin ROLLINGER (2020b). *Kurt Gödel Maxims and Philosophical Remarks. Volume XI of the Max Phil Notebooks*. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02967948>.
cit. : pp. 20, 35.

CROCCO, Gabriella, Mark.van ATTEN, Paola CANTÙ et Robin ROLLINGER (2021). *Kurt Gödel Maxims and Philosophical Remarks. Volume XII of the Max Phil Notebooks*.
cit. : pp. 20, 35.

DEDEKIND, Richard (1872). *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Braunschweig : Vieweg & Sohn.
cit. : p. 21.

De JONG, Willem R. et Arianna BETTI (2010). « The Classical Model of Science : A Millennia-Old Model of Scientific Rationality ». *Synthese* 174(2), p. 185-203
cit. : p. 66.

De LORENZO, Javier (1971). *Introducción al estilo matematico*. Madrid : Editorial Tecnos.
cit. : p. 7.

DIDEROT, D. et J-B. D'ALEMBERT (1751). *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers*. Paris.
cit. : p. 31.

DIEUDONNÉ, Jean Alexandre (1978). *Abrégé d'histoire des mathématiques, 1700-1900*. Paris : Hermann.
cit. : p. 13.

DUDMAN, V.H. (1973). « Frege on definition ». *Mind* 82(328), p. 609-610
cit. : p. 83.

EBERT, Philip (2016). « A framework for implicit definitions and the a priori ». In : *Abstractionism : Essays in the Philosophy of Mathematics*. Sous la dir. de P.A EBERT et Marcus ROSSBERG. Oxford : Oxford University Press, p. 133-160
cit. : p. 83.

EPSTEIN, Brian (2016). « Social Ontology ». In : *The Routledge Companion to Philosophy of Social Science*. Sous la dir. de Lee MCINTYRE et Alex ROSENBERG. Routledge Philosophy Companions. London : Routledge
cit. : p. 8.

EULER, Leonhard (1768). *Lettre à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de Physique et de Philosophie*. St. Petersburg : Kayserlichen Akademie der Wissenschaften. Répr. in *Opera omnia*, III, vol. 11, Füssli, Zürich, 1960.
cit. : p. 31.

EULER, Leonhard (1771). *Vollständige Anleitung zur Algebra mit den Zusätzen von J.L.Lagrange*. St. Peterburg : Kayserlichen Akademie der Wissenschaften. Répr. in *Leonhardi Euleri Opera omnia*, Teubner, Leipzig-Berlin, I. Opera mathematica, vol. 1, 1911.
cit. : p. 31.

FANO, Gino (1958). « Geometrie non euclidea e non archimedea ». In : *Enciclopedia delle Matematiche Elementari e Complementi*. Sous la dir. de L. BERZOLARI, G. VIVANTI et D. GIGLI. T. 2. Milano : Hoepli, Part 2, 435-51
cit. : p. 9.

FERREIRÓS, José et Jeremy GRAY, éd. (2006). *The Architecture of Modern Mathematics. Essays in History and Philosophy*. Oxford : Oxford University Press.
cit. : p. 19.

FLAMENT, Dominique (1994). « Préface. Hermann Günther Grassmann : L'homme et l'oeuvre ». In : *Hermann Grassmann. La science de la grandeur extensive*. Sous la dir. de Dominique FLAMENT et B. BEKEMEIER. Paris : Blanchard, p. 7-50
cit. : p. 99.

FREGE, Gottlob (1884). *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Breslau : Koebner. Répr. sous la direction de Ch. Thiel, Meiner, Hamburg, 1986.
cit. : p. 22.

FREUDENTHAL, Hans (1957). « Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie ». *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5(3), p. 105-142
cit. : p. 9.

FRIEDMAN, Harvey (1975). « Some systems of second order arithmetic and their use ». In : *Proceedings of the international congress of mathematicians (Vancouver, BC, 1974)*. T. 1. Vancouver : Canadian Mathematical Congress, p. 235-242
cit. : p. 14.

GABBAY, D.M., R.H. JOHNSON, H.J. OHLBACH et J. WOODS, éd. (2002). *Handbook of the Logic of Argument and Inference*. Amsterdam : Elsevier.
cit. : p. 19.

GABRIEL, Gottfried (1978). « Implizite Definitionen. Eine Verwechslungsgeschichte ». *Annals of Science* 35(4), p. 419-423
cit. : p. 86.

GALILEI, Galileo (1623). *Il Saggiatore nel quale con bilancia esquisita e giusta si ponderano le cose contenute nella libra astronomica e filosofica di Lotario Sarsi Sigensano, scritto in forma di lettera all'illustrissimo e reverendissimo Monsignore D. Virginio Cesarini*. Roma : Giacomo Mascardi.
cit. : p. 97.

GANDON, Sébastien (2013). « Quelle philosophie pour quelle mathématique ? » *Archives de Philosophie* 76(2), p. 197-216
cit. : p. 17.

GAUSS, Carl Friedrich (1800). « Zur Metaphysik der Mathematik ». In : *Werke*. T. 12. Göttingen : Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, p. 57-61. Répr. anast. Hildesheim : Olms, 1981.
cit. : p. 31.

GAUSS, Carl Friedrich (1862). *Briefwechsel zwischen C.F. Gauss und H.C. Schumacher*, t. 4. Altona : Esch.
cit. : p. 31.

GENTZEN, G. (1935). « Untersuchungen über das logische Schliessen ». *Mathematische Zeitschrift* 39, p. 176-210, 405-431
cit. : p. 86.

GIARDINO, Valeria (2017). « The Practical Turn in Philosophy of Mathematics : A Portrait of a Young Discipline ». *Philosophy and Mind* 12, p. 18-28
cit. : p. 19.

GIOVANNINI, Eduardo N. et Georg SCHIEMER (2019). « What are Implicit Definitions? » *Erkenntnis*, p. 1-31
cit. : pp. 83, 86.

GÖDEL, Kurt (1953/9). « Is mathematics a syntax of language? » In : *Collected Works. III : Unpublished essays and lecture*. Sous la dir. de S. FEFERMAN et al. Oxford : Oxford University Press, p. 334-356
cit. : pp. 11, 82.

GRASSMANN, Hermann (1844). *Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disciplin dargestellt und durch Anwendungen erläutert. I. Teil. Die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre von Magnetismus und die Krystallonomie erläutert*. Leipzig : Verlag von Otto Wigand. Répr. *Die Ausdehnungslehre von 1844 nach der Ausgabe von 1878* in F. ENGEL (éd.), *Gesammelte mathematische und physikalische Werke*, vol. I.1., 1894.
cit. : pp. 21, 31, 33, 38, 53, 93.

GRASSMANN, Hermann (1862). *Die Ausdehnungslehre von 1862*. Leipzig. Répr. in F. ENGEL (éd.), *Gesammelte mathematische und physikalische Werke*, vol I.2, 1896.
cit. : pp. 31, 38, 53.

GRASSMANN, Hermann (1877). « Der Ort der Hamilton'schen Quaternionen in der Ausdehnungslehre ». *Mathematische Annalen* 12(3), p. 375-86. In F. ENGEL (éd.), *Gesammelte mathematische und physikalische Werke*, vol. II.1, Leipzig : Teubner, 1904, pp. 268-82
cit. : p. 33.

GRASSMANN, Hermann Günther (1845). « Kurze Uebersicht über das Wesen der Ausdehnungslehre ». Répr. *Die Ausdehnungslehre von 1844 nach der Ausgabe von 1878* in F. Engel (éd), *Gesammelte mathematische und physikalische Werke*, vol. I.1., 1894, pp. 297-312.
cit. : p. 33.

GRASSMANN, Hermann Günther (1855). « Sur les différents genres de multiplication ». *Crelle's Journal* 49, p. 123-141
cit. : p. 33.

GRATTAN-GUINNESS, Ivor (2010). « Discovering Robert Grassmann (1815–1901) ». In : *From Past to Future : Graßmann's Work in Context. Graßmann Bicentennial Conference, September 2009*. Sous la dir. de H.-J. PETSCHKE, A.C. LEWIS, J. LIESEN et S. RUSS. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, p. 19-36
cit. : p. 98.

GRAY, Jeremy (2008). *Plato's Ghost : the Modernist Transformation of Mathematics*. Princeton Oxford : Princeton University Press.
cit. : p. 7.

GRIFFIN (1977). *Relative Identity*. New York : Oxford University Press.
cit. : p. 50.

GUALA, Francesco (2016). *Understanding Institutions*. Princeton Oxford : Princeton University Press.
cit. : p. 8.

HACKING, Ian (1975). *The Emergence of Probability : A Philosophical Study of Early Ideas about Probability, Induction and Statistical Inference*. 2^e éd. New York : Cambridge University Press.
cit. : p. 23.

HACKING, Ian (1995). « The looping effects of human kinds ». In : *Causal cognition : A multidisciplinary debate*. Sous la dir. de Dan SPERBER, David PREMACK et Ann James PREMACK. Oxford : Clarendon Press
cit. : p. 23.

HACKING, Ian (1999). « Historical meta-epistemology ». In : *Wahrheit und Geschichte*. Sous la dir. de W. CARL et L. DASTON. Göttingen : Vandenhoeck & Ruprecht, p. 53-77
cit. : p. 7.

HAHN, Hans (1907). « Über die nichtarchimedischen Grössensysteme ». *Sitz. der K. Akad. der Wiss., Math. Nat. Kl.* 116(IIa), p. 601-655
cit. : p. 94.

HAMAMI, Yacin et Rebecca Lea MORRIS (2020). « Philosophy of mathematical practice. A primer for mathematics educators ». *ZDM Mathematics Education* 52, p. 1113-1126
cit. : p. 19.

HANKEL, Hermann (1867). *Theorie der complexen Zahlensysteme insbesondere der gemeinen imaginären Zahlen und der Hamilton'schen Quaternionen nebst ihrer geometrischen Darstellung. I. Vorlesungen über die Complexen Zahlen*. Leipzig : Voss. 2 voll.
cit. : p. 98.

HEINZMANN, Gerhard (2010). « Conventions in geometry and pragmatic reconstruction in Poincaré : a problematic reception in logical empiricism ». URL : <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00529135>. Workshop : Logic and rational Reconstruction of Science from a Pragmatic point of view, 25-26 mars 2010, MSH Lorraine, Nancy Université
cit. : p. 72.

HELMHOLTZ, Hermann von (1968). « Über den Ursprung und die Bedeutung der Raumanschauung und der geometrischen Axiome (1876) ». In : *Über Geometrie*. Darmstadt : Wissenschaftliche Buchgesellschaft, p. 1-31
cit. : p. 94.

HEMPEL, Carl G. (1970). « Formulation and formalization of scientific theories ». In : *The Structure of Scientific Theories*. Sous la dir. de Frederick SUPPE. Urbana : University of Illinois Press, p. 244-265. 1977
cit. : p. 12.

HILBERT, David (1899). *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig : Teubner.
cit. : pp. 12, 14.

HILBERT, David (1900). *Les principes fondamentaux de la géométrie*. Paris : Gauthier-Villars.
cit. : p. 9.

HILBERT, David et Paul BERNAYS (1934). *Grundlagen der Mathematik*, t. 1. Berlin : Springer.
cit. : p. 7.

HODGES, Wilfrid (1993). « Tarski's Theory of Definition ». In : *New Essays on Tarski and Philosophy*. Sous la dir. de D. PATTERSON. Oxford : Oxford University Press, p. 94-132
cit. : p. 83.

HÖLDER, Otto (1901). « Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass ». *Berichte der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig* 53, p. 1-64
cit. : pp. 21, 59, 94.

HÖLDER, Otto (1924). *Die mathematische Methode*. Berlin : Springer.
cit. : p. 59.

HUSSERL, Edmund (1929). *Formale und transzendente Logik*. Halle : Niemeyer. Répr. *Husserliana*, X. Den Haag, Nijhoff, 1974.
cit. : p. 33.

HUSSERL, Edmund (1975). « Logische Untersuchungen : Erster Band Prolegomena zur reinen Logik ». In : *Husserliana : Edmund Husserl — Gesammelte Werke*. Sous la dir. d'Elmar HOLENSTEIN. T. 18. Den Haag : Nijhoff
cit. : p. 33.

KANT, Immanuel (1781). *Kritik der reinen Vernunft*. Riga : Hartknoch.
cit. : pp. 16, 31.

KENNEDY, Hubert C. (2006). *Peano. Life and Works of Giuseppe Peano*. Concord, CA : Peremptory Publications.

cit. : p. 106.

KERKOVE, Bart.van, Jonas DE VUYST et Jean Paul van BENDEGEM (2010). *Philosophical Perspectives on Mathematical Practice*. London : College Publications.

cit. : p. 19.

KLEIN, Felix (1875). « Review of Victor Schlegel, System der Raumlehre, Erster Teil ». *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, p. 231-235

cit. : p. 98.

KLINE, Morris (1990). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, t. 3 voll. Oxford University Press.

cit. : p. 7.

KUHN, Thomas Samuel (1962). *The Structure of Scientific Revolutions*. Chicago : The University of Chicago Press.

cit. : p. 7.

LAKATOS, Imre (1976). *Proofs and Refutations*. Sous la dir. de J. WORRALL et E. ZAHAR. Cambridge : Cambridge University Press.

cit. : p. 19.

LAUTMAN, Albert (2011). *Mathematics, Ideas and the Physical Real*.

cit. : p. 23.

LERMAN, Stephen (1990). « Alternative perspectives of the nature of mathematics and their influence on the teaching of mathematics ». *British Educational Research Journal* 16(1), p. 53-61

cit. : p. 7.

LEWIS, Albert C. (1977). « H. Grassmann's 1844 *Ausdehnungslehre* and Schleiermacher's *Dialektik* ». *Annals of Science* 34(2), p. 103-162

cit. : p. 99.

LUCIANO, Erika (2017). « Characterizing a Mathematical School. Oral Knowledge and Peano's Formulario ». *Revue d'Histoire des Mathématiques* 23, p. 1-49
cit. : p. 106.

MANCOSU, Paolo (2008). *The Philosophy of Mathematical Practice*. Oxford : Oxford University Press.
cit. : pp. 18, 19.

MANCOSU, Paolo (2017). « Mathematical Style ». In : *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Sous la dir. d'Edward N. ZALTA. Stanford University
cit. : pp. 6, 7.

MANGIONE, Corrado et Silvio BOZZI (1993). *Storia della logica. Da Boole ai nostri giorni*. Milano : Garzanti.
cit. : pp. 10, 11.

MARQUIS, Jean-Pierre (2020). « On Mathematical Style ». CSHPM Online Colloquium. Manuscrit.
cit. : p. 7.

MEHRTENS, Herbert (1990). *Moderne Sprache, Mathematik : eine Geschichte des Streits um die Grundlagen der Disziplin und des Subjekts formaler Systeme*. Frankfurt : Suhrkamp.
cit. : p. 7.

PADOA, Alessandro (1901). « Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers précédé d'une introduction logique à une théorie déductive quelconque ». In : *Bibliothèque du congrès international de philosophie. Paris 1900*. T. Volume 3. Paris : Colin, p. 309-365
cit. : pp. 9, 22.

PADOA, Alessandro (1909). « Introduzione alla teoria delle frazioni ». *Bollettino della Mathesis* 1(7-8-9), p. 66-81
cit. : p. 52.

PADOA, Alessandro (1933). « Logica Ideografica ». *Rivista di Filosofia Neo-Scolastica*, p. 75-90
cit. : pp. 10, 33.

PASCH, Moritz (1884). *Vorlesungen über die neuere Geometrie*. Leipzig. Répr. Springer, Berlin, 1976.
cit. : pp. 9, 56.

PASCH, Moritz (1921). « Die Begründung der Mathematik und die implizite Definition. Ein Zusammenhang mit der Lehre vom Als-Ob ». *Annalen der Philosophie* 2(2), p. 145-162
cit. : p. 86.

PEANO, Giuseppe (1890). « Sulla definizione dell'area d'una superficie ». *Atti della Reale Accademia dei Lincei : Rendiconti* (4)6, p. 54-57
cit. : p. 11.

PEANO, Giuseppe (1894). *Notations de Logique Mathématique (Introduction au Formulaire de Mathématiques)*. Turin : Guadagnini.
cit. : p. 52.

PEANO, Giuseppe (1896). « Introduction au Tome II du Formulaire des Mathématiques ». *Rivista di Matematica* 6, p. 1-4
cit. : p. 15.

PEANO, Giuseppe (1901a). *Formulaire des mathématiques*. 3e. Torino : Bocca.
cit. : pp. 13, 38.

PEANO, Giuseppe (1901b). « Les définitions mathématiques ». In : *Bibliothèque du Congrès International de Philosophie. Paris 1900*. T. 3. Paris : Colin, p. 279-288
cit. : p. 22.

PEANO, Giuseppe (1904). « Il latino, quale lingua ausiliare internazionale ». *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino. Adunanza del 3 Gennaio 1904* 39, p. 273-283
cit. : p. 22.

PEANO, Giuseppe (1913). « Alfred North Whitehead, Bertrand Russell, Principia Mathematica ». *Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche* 15, p. 47-53, 75-81
cit. : p. 33.

PEANO, Giuseppe (1921). « Le definizioni in matematica ». *Periodico di Matematiche* 4(1), p. 175-189. Répr. in *Opere scelte*, Cremonese, Roma, 1957, vol. 2, pages 423-435.

cit. : p. 14.

PEANO, Giuseppe (1917–1918). « Eguale ». *Il Bollettino di matematica* 15, p. 195-198

cit. : p. 52.

PECKHAUS, Volker (2010). « Robert and Hermann Grassmann's influence on the history of formal logic ». In : *From Past to Future : Graßmann's Work in Context. Graßmann Bicentennial Conference, September 2009*. Sous la dir. de H.-J. PETSCHÉ, A.C. LEWIS, J. LIESEN et S. RUSS. Berlin / Heidelberg : Springer-Verlag, p. 221-228

cit. : p. 98.

PETSCHÉ, H.-J., A.C. LEWIS, J. LIESEN et S. RUSS, éd. (2010). *From Past to Future : Graßmann's Work in Context. Graßmann Bicentennial Conference, September 2009*. Berlin / Heidelberg : Springer-Verlag.

cit. : p. 32.

PIAGET, Jean (1947). *La psychologie de l'intelligence*. Armand Colin.

cit. : p. 7.

PIAGET, Jean (1968). *Le Structuralisme*. Paris : PUF.

cit. : p. 14.

PIERI, Mario (1901). « Sur la géométrie envisagée comme un système purement logique ». In : *Bibliothèque du Congrès international de philosophie*. T. 3, p. 367-404

cit. : p. 22.

PONCELET, Jean Victor (1822). *Traité des propriétés projectives des figures*. 2e. Paris : Bachelier. Paris : Gauthiers-Villars, 1865.

cit. : pp. 21, 31.

RABOUIN, David (2015). *Mathesis universalis : L'idée de mathématique universelle d'Aristote à Descartes*. Paris : Presses Universitaires de France.

cit. : p. 60.

RABOUIN, David (2017). « Styles in mathematical practice ». In : *Cultures without Culturalism : The Making of Scientific Knowledge*. Sous la dir. de Karine CHEMLA et Evelyn FOX KELLER. Duke University Press. Chap. 8
cit. : p. 7.

RAHMAN, Shahid, John SYMONS, Dov M GABBAY et Jean Paul van BENDEGEM (2004). *Logic, Epistemology, and the Unity of Science*. Dordrecht : Springer.
cit. : p. 20.

RECK, Erich et Michael PRICE (2000). « Structures and structuralism in contemporary philosophy of mathematics ». *Synthese* 125(3), p. 341-383
cit. : p. 99.

RECK, Erich et Georg SCHIEMER (2020). « Introduction and Overview ». In : *The Prehistory of Mathematical Structuralism*. Sous la dir. d'Erich H. RECK et Georg SCHIEMER. New York : Oxford University Press, p. 1-18
cit. : p. 99.

RECK, Erich H. et Georg SCHIEMER, éd. (2020). *The Prehistory of Mathematical Structuralism*. New York : Oxford University Press.
cit. : pp. 23, 85.

ROERO, Clara Silvia, éd. (2010). *Peano e la sua scuola fra matematica, logica e interlingua. Atti del Congresso Internazionale di Studi (Torino, 6-7 Ottobre 2008)*. Torino : Università degli Studi di Torino.
cit. : p. 25.

RUSSELL, Bertrand (1897). *An Essay on the Foundations of Geometry*. Cambridge : Cambridge University Press. Répr. Dover, New York, 1956.
cit. : p. 94.

RUSSELL, Bertrand (1903). *The Principles of Mathematics*, t. 1. Cambridge University Press. Répr. W.W. Norton and Company, 1996.
cit. : p. 22.
Rougier.

SAVAGE, C.W. (1990). « Preface ». In : *Scientific Theories. Minnesota Studies in the Philosophy of Science*. Sous la dir. de C.W. SAVAGE. T. 14. Minneapolis : University of Minnesota Press, p. vii-ix
cit. : p. 4.

SCHIEMER, Georg et J. KORBMACHER (2018). « What are structural properties ? » *Philosophia Mathematica* 26(3), p. 295-323
cit. : p. 85.

SCHIEMER, Georg et J. WIGGLESWORTH (2019). « The structuralist thesis reconsidered ». *The British Journal for the Philosophy of Science* 70(4), p. 1201-1226
cit. : p. 85.

SCHLIMM, Dirk (2006). « Axiomatics and Progress in the Light of 20th Century Philosophy of Science and Mathematics ». In : *Foundations of the Formal Sciences IV*. Sous la dir. de Benedikt LÖWE, Volker PECKHAUS et T. RASCH. London : College Publications, p. 233-253
cit. : p. 3.

SCHLIMM, Dirk (2021). « Peano's dot notation and design principles for notation ». *Philosophia Scientiae - Studies in History and Philosophy of Science* 25(1). Sous la dir. de Paola CANTÙ et Erika LUCIANO, p. 95-126
cit. : p. 10.

SCHLOTE, Karl-Heinz (1996). « Hermann Günther Grassmann and the Theory of Hypercomplex Number Systems ». In : *Hermann Günther Grassmann (1809-1877) : Visionary Mathematician, Scientist and Neohumanist Scholar : Papers from a Sesquicentennial Conference*. Sous la dir. de Gert SCHUBRING. Dordrecht : Kluwer, p. 165-174
cit. : p. 99.

SCHRÖDER, Ernst (1890). *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, t. 1. Leipzig : Teubner.
cit. : p. 22.

SHAPIRO, Stewart (1997). *Philosophy of Mathematics : Structure and Ontology*. New York : Oxford University Press.
cit. : pp. 17, 83.

SHAPIRO, Stewart, éd. (2005). *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. New York : Oxford University Press.
cit. : p. 11.

SIEG, Wilfried et Mark RAVAGLIA (2005). « David Hilbert and Paul Bernays, Grundlagen der Mathematik, (1934, 1939) ». In : *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940*. Amsterdam : Elsevier, p. 981-999
cit. : p. 7.

« Special Issue Otto Hölder » (2013). *Philosophia Scientiae - Studies in History and Philosophy of Science* 17(1). Sous la direction de P. CANTÙ et O. SCHLAUDT
cit. : p. 36.

« Special Issue *The Peano School : Epistemology : Logic, Epistemology and Didactics* » (2021). *Philosophia Scientiae - Studies in History and Philosophy of Science* 25(1). Sous la direction de P. CANTÙ et E. LUCIANO
cit. : pp. 25, 40, 73.

STEINER, Mark (1995). « The applicabilities of mathematics ». *Philosophia Mathematica* 3(2), p. 129-156
cit. : p. 96.

SUNDHOLM, Göran (2019). « The Neglect of Epistemic Considerations in Logic : The Case of Epistemic Assumptions ». *Topoi* 28, p. 551-559
cit. : p. 20.

SUPPES, Patrick (1957). *Introduction to Logic*. New York : Van Nostrand Reinhold Company.
cit. : p. 83.

TORRETTI, Roberto (1978). *Philosophy of Geometry From Riemann to Poincaré*. Dordrecht : Reidel.
cit. : pp. 13, 94.

VAILATI, Giovanni (1901). « Des difficultés qui s'opposent à une classification rationnelle des sciences ». In : *Bibliothèque du Congrès international de Philosophie. Paris 1900*. T. 3. Logique et Histoire des Sciences. Paris : Colin, p. 609-632
cit. : p. 22.

Van der WAERDEN, b. l. (1938). « Otto Hölder. Nachruf, gesprochen in der öffentlichen Sitzung vom 25. Juni 1938. » *Ber. Verh. Sächs. Akad. Leipzig* 90, p. 97-101
cit. : p. 60.

VERONESE, Giuseppe (1891). *I fondamenti della geometria*. Padova : Tipografia del Seminario.
cit. : pp. 13, 21, 33, 57, 93, 94.

VERONESE, Giuseppe (1897). « Sul postulato della continuità ». *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei* (5) 6, p. 161-167
cit. : p. 33.

VERONESE, Giuseppe (1906). *Il vero nella matematica. Discorso inaugurale dell'anno scolastico 1905-1906 letto nell'Aula Magna della R. Università di Padova il giorno 6 novembre 1905*. Roma : Forzani e C.
cit. : p. 33.

VERONESE, Giuseppe (1909). *Elementi di geometria intuitiva ad uso delle scuole tecniche*. Padova : Drücker.
cit. : pp. 14, 33.

WINTHER, Rasmus Grönfeldt (2016). « The Structure of Scientific Theories ». In : *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Sous la dir. d'Edward N. ZALTA. Stanford University
cit. : p. 4.

WOLFF, Christian (1716). *Mathematisches Lexicon*. Leipzig : Gleditsch. Répr. anast. in *Gesammelte Werke*, Olms, Hildesheim, 1977.
cit. : p. 31.

WOLFF, Christian (1730). *Philosophia prima sive Ontologia*. 2e. Francofurti et Lipsiae. 1736. Répr. in *Gesammelte Werke*, II. vol. 4, Olms, Hildesheim, 1977.
cit. : p. 31.

ZERMELO, Ernst (1908). « Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I ». *Mathematische Annalen* 65(2), p. 261-281
cit. : p. 7.

