



HAL
open science

Effets tunnels magnétiques dans diverses géométries

khaled Abou Alfa

► **To cite this version:**

khaled Abou Alfa. Effets tunnels magnétiques dans diverses géométries. Physique mathématique [math-ph]. Nantes Université, 2023. Français. NNT: . tel-04485662

HAL Id: tel-04485662

<https://hal.science/tel-04485662>

Submitted on 1 Mar 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE

NANTES UNIVERSITÉ

ÉCOLE DOCTORALE N° 641

Mathématiques et Sciences et Technologies

de l'Information et de la Communication

Spécialité : *Mathématiques et leurs Interactions*

Par

Khaled ABOU ALFA

Effets tunnels magnétiques dans diverses géométries

Thèse présentée et soutenue à Nantes Université, le 14 décembre 2023

Unité de recherche : Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (LMJL)

Rapporteurs avant soutenance :

M. Vincent BRUNEAU Professeur des universités, Université de Bordeaux

M. Setsuro FUJIE Professeur des universités, Ritsumeikan University

Composition du Jury :

Président : M. Luc HILLAIRET

Professeur des universités, Université d'Orléans

Examineurs : Mme. Virginie BONNAILLIE-NOËL

Directrice de recherche, CNRS

M. Vincent BRUNEAU

Professeur des universités, Université de Bordeaux

M. Søren FOURNAIS

Professeur des universités, Université de Copenhague

M. Setsuro FUJIE

Professeur des universités, Ritsumeikan University

M. Luc HILLAIRET

Professeur des universités, Université d'Orléans

M. Gabriel RIVIERE

Professeur des universités, Nantes Université

Dir. de thèse : M. Frédéric HÉRAU

Professeur des universités, Nantes Université

« Une personne qui n'a jamais commis d'erreurs n'a jamais tenté d'innover. »

Albert Einstein

À mes parents, à Nana ...

REMERCIEMENTS

Je souhaite débiter mes remerciements en mettant en lumière la personne sans laquelle cette thèse n'aurait pas vu le jour, et sans laquelle je ne me trouverais pas ici aujourd'hui : toi, Frédéric. Il est difficile de trouver les mots appropriés pour exprimer ma gratitude envers toi. Ta grande gentillesse a été évidente dès notre première rencontre, lorsque je suis venu solliciter la possibilité d'un stage suivi d'une thèse dans ton domaine de recherche. Je tiens à te remercier pour cette thèse exceptionnelle, ainsi que pour ta disponibilité et la régularité de nos rencontres au cours de ces trois années. Tes remarques pertinentes et tes conseils précieux dans le domaine des mathématiques ont été d'une valeur inestimable pour moi. Merci pour avoir répondu avec rigueur à toutes mes questions. Je te suis reconnaissant pour tes relectures attentives, tes remarques judicieuses et les précieux conseils que tu m'as prodigués pour la rédaction d'articles de qualité et pour m'avoir initié au monde de la recherche. Je te suis également reconnaissant pour m'avoir fait rencontrer de nombreux chercheurs lors de divers événements scientifiques, élargissant ainsi mon horizon académique. Ton soutien inestimable a été un pilier essentiel de ma réussite, et je t'en suis profondément reconnaissant. Encore une fois, je t'exprime ma profonde gratitude pour tout ce que tu as fait.

Je souhaite également exprimer ma gratitude envers les rapporteurs, Vincent Bruneau et Setsuro Fujiié, qui ont accepté de remplir cette fonction pour ma thèse. Je tiens à les remercier chaleureusement pour avoir consacré de leur précieux temps à la lecture attentive de mon manuscrit. Je souhaite également exprimer ma sincère reconnaissance envers Virginie Bonnaillie-Noël, Søren Fournais, Luc Hillairet et Gabriel Rivière pour avoir accepté de faire partie du jury de ma thèse.

Je tiens également à exprimer ma gratitude envers Virginie Bonnaillie-Noël, Nicolas Raymond et Xue Ping Wang pour avoir accepté de faire partie du comité de suivi de ma thèse. Je vous remercie chaleureusement pour le temps que vous avez consacré et pour vos précieuses remarques tout au long de ces trois années. Je tiens tout particulièrement à exprimer ma gratitude envers Nicolas Raymond, à qui je dois également une grande

part du mérite pour l'achèvement de cette thèse, car il a été ma principale source de motivation depuis notre rencontre en Master 2. Nicolas, je te remercie sincèrement pour les précieuses expériences et les discussions enrichissantes que nous avons partagées. Je suis extrêmement honoré d'avoir eu l'opportunité de collaborer avec toi.

Bien sûr, je tiens à exprimer une reconnaissance toute particulière envers une personne qui a joué un rôle essentiel tout au long de ces trois années, c'est toi Bernard Helffer. Je tiens à te remercier sincèrement pour ta gentillesse, tes précieuses remarques et tes conseils qui ont grandement contribué à l'amélioration de mon travail.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers l'ensemble des membres du Laboratoire de Mathématiques Jean Leray. Je tiens particulièrement à remercier Vincent Colin et Eric Paturel. Mes remerciements s'adressent également aux membres du secrétariat Caroline, Stéphanie, Béatrice, Annick, Alexandra et Brigitte, ainsi qu'aux informaticiens Éric et Saïd, et aux bibliothécaires Anh et Claude, pour leur accueil chaleureux, leur disponibilité et leur soutien inestimable dans toutes les questions et démarches administratives. Merci également à Nicolas Depauw, Benoît Grébert, Christophe Berthon, François Jauberteau, Baptiste Chantraine et Erwan Brugallé. Je tiens également à remercier Mazen Saad pour sa gentillesse et son soutien scientifique.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers l'ensemble des doctorants que j'ai eu le plaisir de rencontrer au cours de ces trois années. Je tiens à les remercier chaleureusement pour leur amitié, leurs encouragements et leur grande gentillesse. Ces trois années n'auraient pas été aussi exceptionnelles sans la présence de Silvère, Clément, Alexandre, Zeinab, Maha, Mohamad, Jean, Lucas D., Lucas M., Anh, Fabien, Azzedine, Antoine, Ludovic, Adrien, Charbella, Sarah, Van hai, Destin, Elric, Gurvan, Damien, Thomas, Klervi, Gaspard, Anthony, Ziyad, Florent, Gaele et Flavien. Je vous remercie pour tous les précieux moments que nous avons partagés ensemble, en particulier lors des séminaires de doctorants, des pauses café et des déjeuners au Resto U. Un immense merci à mes co-bureaux, Silvère, Clément et Alexandre, pour tous les moments formidables que nous avons partagés. Je vous souhaite beaucoup de courage et de réussite dans vos propres thèses. Je tiens à exprimer ma gratitude envers Mahdi et Rayan pour tout le temps que nous avons passé ensemble en Master 2, notamment lors de nos journées passées à Nantes. Mahdi, je te souhaite une excellente continuation dans ta thèse.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance particulière envers Hala, Zeinab et Maha pour leur précieuse assistance dans les démarches administratives au début de ma thèse et en Master 2. Je souhaite également remercier chaleureusement mes amis Fakhrieldinne et Samir pour tous les merveilleux moments que nous avons partagés ensemble à Nantes. Vous êtes des amis qui sont devenus comme des "frères" depuis le début de notre amitié, et cette proximité perdurera toujours. Bien sûr, des remerciements tout particuliers vont à la petite famille de Fakhrieldinne et Hala, et je leur souhaite tout le meilleur, ainsi que de merveilleux moments en compagnie de leurs deux enfants, Adrien et Lorena. Je tiens à remercier mes amis Libanais avec qui j'ai partagé de bons moments à Nantes. Je tiens à exprimer ma gratitude envers mon cousin Khaled Abou Alfa "qui partage le même prénom et nom que moi" et je te souhaite une excellente continuation dans ta thèse. Mes remerciements vont également à Khaled Damaj pour les bons moments que nous avons partagés à Nantes. Je souhaite aussi exprimer ma reconnaissance envers Faten, Khodor, Ahmad, Fayad et Darwish pour tous les moments passés, présents et à venir.

À présent, j'adresse mes remerciements à ma famille au Liban, qui occupe une place immense dans mon cœur. Un grand merci à mes parents pour leur précieux soutien. Ma chère mère, Fatima, tu es le support de ma vie, la source inépuisable d'amour et de force qui m'anime. Tu as fait preuve d'une patience exemplaire et de nombreux sacrifices pour moi, je te suis infiniment reconnaissant pour tout ce que tu m'as offert pour que je sois là où j'en suis aujourd'hui. Tout ce que j'ai accompli, c'est grâce à toi, ma chère maman. Mon cher père, Jamal, je te remercie pour tes premières encouragements envers les mathématiques, pour pourvoir à tous mes besoins, et pour ta confiance en moi. Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers mon frère Ahmad A., qui a été à mes côtés tout au long de cette période, malgré la distance qui nous sépare. Je souhaite également remercier ma sœur Rim pour son soutien indéfectible et sa confiance en moi. À ma deuxième famille, je tiens à exprimer ma sincère gratitude pour les merveilleux moments que nous avons partagés lors de ma visite au Liban, ainsi que pour la communication constante malgré la distance qui nous sépare. Un merci tout particulier s'adresse à mes parents, Omar et Rima, pour leur soutien inébranlable et leur confiance en moi. Je souhaite également exprimer ma reconnaissance envers Adam et Aya, tout en leur souhaitant tout le meilleur, ainsi que de précieux moments en compagnie de leur adorable petite fille, Talia. Mes remerciements vont également à la petite famille de Youssef B. et Baraa, accompagnés de

mes vœux pour de doux moments en compagnie de leur petit prince, Rifaat. Enfin, je remercie chaleureusement Ahmad I. et Alaa T. ainsi que Omran et Alaa J., tout en leur souhaitant une vie heureuse.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers mon ami, qui m'accompagne depuis le début de mes études universitaires, que je considère comme un membre de ma famille, et que je qualifie de "deuxième frère", Youssef Saad. Merci pour tous les moments précieux que nous avons partagés depuis nos années universitaires, et tu es devenu un ami fidèle pour tous les jours à venir. Tu as été une source d'encouragement inestimable pour mon parcours académique. Je souhaite également exprimer ma reconnaissance envers ton frère, Ahmad Saad, pour les merveilleux moments que nous avons partagés, en particulier lors de nos jeux de PlayStation et de ma célèbre phrase "ya mahzouz".

A présent, je finis mes remerciements en m'adressant à une personne qui a enrichi ma vie, une personne qui est devenue une source d'espoir, d'amour, et une priorité inestimable dans ma vie, c'est toi, Nana. Je tiens à t'exprimer ma gratitude pour tout l'amour que tu m'as prodigué et pour avoir été à mes côtés tout au long de cette période, malgré la distance qui nous sépare. Ta confiance en moi et les merveilleux moments que nous avons partagés lors de ma visite au Liban sont des souvenirs précieux. En terminant, je te remercie du fond du cœur pour cet amour, et je souhaite que tous nos jours à venir se déroulent comme le désire ton cœur.

TABLE OF CONTENTS

1	Introduction	13
1.1	Motivation Physique	13
1.2	Laplacien magnétique	16
1.2.1	Contexte	16
1.2.2	Analyse semi-classique en dimension 2	18
1.2.3	Analyse semi-classique en dimension 3	20
1.3	Réductions spectrales	24
1.3.1	Approximation de Born-Oppenheimer électrique	24
1.3.2	Développements BKW magnétiques	26
1.3.3	Estimations d'Agmon	28
1.4	Opérateurs de Montgomery généralisés	31
1.5	Résultats principaux de la thèse	34
1.5.1	Effet tunnel avec annulation du champ magnétique en 2D (Chapitre 2)	34
1.5.2	Asymptotique spectrale du Laplacien de Neumann à champ magnétique variable sur un domaine borné régulier en 3D (Chapitre 3)	44
2	Tunneling effect in 2D with vanishing magnetic fields	53
2.1	Introduction	53
2.1.1	Motivation	53
2.1.2	Semiclassical magnetic Laplacian	54
2.1.3	Main result	57
2.1.4	Organization of the paper	59
2.2	A reduction to a tubular neighborhood of the cancellation curve	60
2.2.1	Truncated operator and rescaled operator	66
2.3	Single well	68
2.3.1	Right well operator	68
2.3.2	Left well operator	70

TABLE OF CONTENTS

2.4	WKB expansions of the right well operator	71
2.4.1	Generalized Montgomery operator	71
2.4.2	Eikonal equation	72
2.4.3	WKB expansions	74
2.5	A Grushin problem	80
2.5.1	Sub-solution of the eikonal equation	81
2.5.2	A pseudo-differential operator with operator-valued symbol.	86
2.5.3	Solving the Grushin problem.	87
2.5.4	Tangential coercivity estimates	91
2.6	Removing the frequency cutoff	93
2.7	Optimal tangential Agmon estimates	99
2.7.1	Agmon estimates	99
2.7.2	WKB approximation in the right well	102
2.8	Interaction matrix and tunneling effect	103
3	Spectral asymptotics of the Neumann Laplacian with variable magnetic field on a smooth bounded domain in three dimensions	109
3.1	Motivation and main result	109
3.1.1	The operator	109
3.1.2	The operator on a half-space with constant magnetic field	110
3.1.3	Context, known results and main theorem	111
3.1.4	Organization and strategy of the proof	113
3.2	Localization near x_0 and consequences	115
3.2.1	Localization estimates	115
3.2.2	Adapted coordinates near x_0	116
3.2.3	First approximation of the magnetic Laplacian in local coordinates	121
3.3	Change of coordinates and metaplectic transform	123
3.4	A pseudodifferential operator with operator symbol	127
3.4.1	The symbol and its properties	127
3.4.2	An approximate parametrix	130
3.5	Spectral consequences	132
3.5.1	A model operator	133
3.5.2	Refined estimates	134
	Perspectives	139

A	Théorie spectrale d'un opérateur auto-adjoint	141
B	Opérateurs Pseudodifférentiels	143
B.1	Opérateurs pseudodifférentiels à symbole scalaire	143
B.2	Opérateurs pseudodifférentiels à symbole opérateur	144
	Conclusion	147
	Bibliography	149

INTRODUCTION

1.1 Motivation Physique

La mécanique quantique est née au début du 20^{ième} siècle. Elle a été développée par des dizaines de physiciens¹ pour étudier le comportement des atomes et des molécules, et pour expliquer des phénomènes qui ne pouvaient pas être décrits de manière satisfaisante par la physique classique. L'équation proposée par Schrödinger [99] en 1926 est fondamentale en mécanique quantique. Elle régit le comportement des fonctions d'onde, qui décrivent l'état quantique d'une particule [71, 72, 70, 23, 31]. Une des manifestations de la description quantique de la matière est ce qu'on appelle "l'effet tunnel", au centre de cette thèse : une particule quantique possède une certaine probabilité de se retrouver de l'autre côté d'une barrière d'énergie, malgré les lois classiques de la physique qui l'interdisent. En utilisant l'équation proposée par Schrödinger, on peut calculer la probabilité de "traversée" de la barrière en fonction de l'énergie de la particule, de la forme de la barrière et d'autres paramètres.

Expliquons maintenant les choses mathématiquement : Soit $d \in \{2, 3\}$. On considère deux fonctions $\mathbf{A} : \mathbb{R}_x^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $V : \mathbb{R}_x^d \rightarrow \mathbb{R}$ correspondant respectivement au potentiel magnétique et au potentiel électrique. Ces deux potentiels fournissent un champ électromagnétique (\mathbf{E}, \mathbf{B}) défini par

$$\mathbf{E} = -\nabla V \text{ et } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Si l'on considère une particule quantique soumise à un champ électromagnétique (\mathbf{E}, \mathbf{B}) , la fonction d'onde associée, notée Ψ , est une solution de "*l'équation de Schrödinger*" dépendant du temps :

$$i\hbar\partial_t\Psi = (-i\hbar\nabla + \mathbf{A})^2\Psi + V\Psi, \tag{1.1}$$

1. Albert Einstein, Max Planck, Niels Bohr, Werner Heisenberg, Erwin Schrödinger et Max Born sont parmi les physiciens clés qui ont jeté les bases de la théorie de la mécanique quantique au début du 20^{ième} siècle.

où $t > 0$, $x \in \Omega$, et Ω est un ouvert de \mathbb{R}^d . La quantité $|\Psi(x, t)|^2$ est alors la densité de probabilité de présence de la particule au point x et au temps t . Ici, $h = \frac{\hbar}{2m}$ où \hbar est la constante de Planck normalisée et m la masse de la particule quantique.

L'opérateur auto-adjoint non borné

$$\mathcal{H} = (-ih\nabla + \mathbf{A})^2 + V,$$

est au coeur de l'analyse quantique mathématique. Certaines solutions de l'équation de Schrödinger (1.1) sont construites à partir des fonctions propres de l'opérateur \mathcal{H} . En effet, si φ est une fonction propre de l'opérateur \mathcal{H} associé à une valeur propre $E \in \mathbb{R}$ (c'est-à-dire $\mathcal{H}\varphi = E\varphi$), alors la fonction

$$\Psi(x, t) = \varphi(x)e^{-\frac{iEt}{\hbar}}, \quad (1.2)$$

est une solution de l'équation (1.1). Par conséquent, le spectre de \mathcal{H} joue un rôle essentiel dans l'étude de (1.1). Le fait que h soit très petit permet d'une étude spectrale très fine, de type asymptotique en $h \rightarrow 0^+$, dans le cadre de ce qu'on appelle la limite semi-classique.

La théorie spectrale de l'opérateur de Schrödinger a fait l'objet d'une recherche intense (voir [33, 27, 91, 98, 81, 96, 24] pour des présentations pédagogiques). Durant les années 80, une analyse spectrale approfondie de l'opérateur \mathcal{H} a en particulier été menée de manière intensive par Helffer et Sjöstrand [56, 57, 58, 40] (voir aussi Simon [100]). Dans le contexte où le potentiel magnétique \mathbf{A} est nul, et sous certaines hypothèses relatives au potentiel électrique V , ils ont en particulier établi des estimations de localisation très précises pour les fonctions propres de l'opérateur électrique

$$-h^2\Delta + V,$$

qui sont concentrées au voisinage du minimum du potentiel V , que l'on désignera sous le terme de "puits", et ont établi des estimations de type effet tunnel que nous présentons succinctement maintenant.

Prenons un exemple d'un Laplacien purement électrique dans le cas unidimensionnel :

Soit

$$\begin{cases} \mathfrak{p}_h = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + V(x), \\ \text{Dom}(\mathfrak{p}_h) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}) : \mathfrak{p}_h\psi \in L^2(\mathbb{R})\}, \end{cases}$$

où $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tel que $V(-x) = V(x)$ et $V(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Cas d'un puits simple : Supposons que V admet un unique minimum non dégénéré en 0 avec $\liminf_{|x| \rightarrow +\infty} V(x) > V(0)$. La n -ième valeur propre de \mathfrak{p}_h existe alors (voir [56]), et son développement asymptotique en terme de h est, pour h suffisamment petit (limite semi-classique), donnée par

$$V(0) + (2n - 1) \sqrt{\frac{V''(0)}{2}} h + \mathcal{O}(h^2). \quad (1.3)$$

Cas d'un puits double : Supposons que V admet exactement deux minima non dégénérés en deux points symétriques a et $-a$ avec $\liminf_{|x| \rightarrow +\infty} V(x) > V(a)$, alors le bas du spectre est discret et la différence entre les deux plus petites valeurs propres de \mathfrak{p}_h , noté par $\delta(h)$, est exponentiellement petite et vérifie

$$\delta(h) \underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} A \sqrt{h} e^{-\frac{S}{h}} + o\left(\sqrt{h} e^{-\frac{S}{h}}\right), \quad \text{avec } S = \int_{-a}^a \sqrt{V(x)} dx, \quad (1.4)$$

et $A > 0$ est une constante explicitement calculable en terme de la fonction V . Cette estimation de la différence entre les deux petites valeurs propres, a été établie rigoureusement par Helffer et Sjöstrand [58] et est par exemple expliquée en détail dans [97]. Physiquement lorsque l'on revient à l'équation (1.1) on remarque alors que pour certains donnés initiales et en vertu de (1.2), la particule oscille entre le puits droite et le puits gauche avec une période

$$T = \frac{2\pi h}{\delta(h)}, \quad (1.5)$$

surmontant ainsi la barrière en 0. On est en présence d'un effet tunnel électrique.

Est-ce-qu'il y a des résultats similaire à (1.3), (1.4) et (1.5) dans le cas de variations du champs magnétique ?

Cette question est la motivation générale de cette thèse : il s'agit d'un opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique variable, et essayons d'obtenir des résultats similaires à ceux de (1.3), (1.4) et (1.5).

1.2 Laplacien magnétique

1.2.1 Contexte

L'objet d'étude principal de cette thèse est le Laplacien purement magnétique

$$(-ih\nabla + \mathbf{A})^2, \tag{1.6}$$

sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ avec $d \in \{2, 3\}$. Ici $\mathbf{A} \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^d)$ est le potentiel magnétique et $h > 0$ est considéré comme un paramètre semi-classique. Le champ magnétique associé est donné par

$$\mathbf{B}(x) := \nabla \times \mathbf{A}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Quand $d = 2$, on peut identifier le champ magnétique par le scalaire défini par

$$\mathbf{B}(x) = \partial_{x_1} A_2 - \partial_{x_2} A_1, \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Quand $d = 3$, le champ magnétique est un vecteur défini par

$$\mathbf{B}(x) = (\partial_{x_2} A_3 - \partial_{x_3} A_2, \partial_{x_3} A_1 - \partial_{x_1} A_3, \partial_{x_1} A_2 - \partial_{x_2} A_1), \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

aussi noté $\text{rot}\mathbf{A}$.

De nombreuses recherches ont été consacrées à l'analyse spectrale du Laplacien magnétique dans la limite semi-classique, $h \rightarrow 0^+$, (voir par exemple [33, 41, 76, 75]). Elle est motivée par la théorie mathématique de la supraconductivité². Plus précisément, l'étude du Hessien de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau³ conduit à l'analyse de l'état fondamental du Laplacien magnétique avec un potentiel. Pour plus des informations sur l'apparition de la supraconductivité dans le matériau, voir [5, 6, 26, 52, 102].

Un des problèmes les plus intéressants est d'identifier l'influence de la géométrie du problème et de la variation du champ sur le spectre du Laplacien magnétique. Nous nous référons tout d'abord aux travaux de Helffer et Morame sur l'asymptotique (en puissance de h) du bas de spectre du Laplacien magnétique (1.6) en dimensions 2 et 3 avec la condition de Neumann au bord (dans le cas d'un domaine régulier borné). En particulier,

2. La supraconductivité est un phénomène physique qui se produit dans certains matériaux à des températures très basses, où ces matériaux perdent totalement leur résistance électrique et présentent d'autres propriétés remarquables.

3. La fonctionnelle de Ginzburg-Landau permet de décrire le principe fondamental du comportement macroscopique des matériaux (voir [37]).

ils étudient l'influence des variations du champ magnétique en dimension 2 [48], l'influence de la géométrie de la frontière et plus précisément de la courbe où le champ magnétique est tangent au bord en dimension 3 [49], et d'autres problématiques [47, 51]. Citons aussi les travaux théoriques et numériques de Bonnaillie-Noël sur le Laplacien magnétique dans le cas où le domaine a des coins [4, 7, 87, 9, 8]. Citons finalement le Laplacien magnétique avec la condition du Robin au bord qui a suscité l'intérêt de nombreux chercheurs (voir [29, 42, 45, 74, 88]).

Cette thèse est précisément consacrée à l'étude spectrale du Laplacien magnétique $(-ih\nabla + \mathbf{A})^2$ dans le cas où le champ magnétique $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ n'est pas uniforme. La première partie de cette thèse concerne l'effet tunnel en dimension 2 avec annulation du champ magnétique. En dimension 2 nous établissons une estimation, exponentiellement petite en terme de h , de la différence entre les deux premières valeurs propres du Laplacien magnétique dans le cas où le champ magnétique s'annule sur une courbe fermée, régulière et symétrique. La deuxième partie de cette thèse concerne l'analyse spectrale semi-classique du Laplacien magnétique avec la condition de Neumann au bord sur un domaine régulier et borné en dimension 3. Sous une hypothèse générique sur le champ magnétique variable, nous établissons une décomposition semi-classique des valeurs propres les plus petites. En corollaire, nous obtenons que les valeurs propres deviennent simples dans la limite semi-classique.

Dans les deux sous-sections suivantes, nous présentons des résultats historiques concernant l'influence de la géométrie et de la variation du champ sur le bas du spectre du Laplacien magnétique (1.6) avec la condition de Neumann au bord (si le domaine est régulier et borné), dans la limite semi-classique (lorsque $h \rightarrow 0^+$). Nous utiliserons les notations suivants :

- Si $\Omega = \mathbb{R}^d$, le Laplacien magnétique est défini comme un opérateur auto-adjoint, noté $P_{h,\mathbf{A}}$, associé à la forme quadratique

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(-ih\nabla + \mathbf{A})\psi|^2 dx, \quad \forall \psi \in H_{\mathbf{A}}^1(\mathbb{R}^d),$$

avec

$$H_{\mathbf{A}}^1(\mathbb{R}^d) := \left\{ \psi \in L^2(\mathbb{R}^d) : (-ih\nabla + \mathbf{A})\psi \in L^2(\mathbb{R}^d) \right\}.$$

La construction de cet opérateur est basée sur le théorème de Lax-Milgram. Le domaine

de $P_{h,\mathbf{A}}$ est caractérisé par

$$\text{Dom}(P_{h,\mathbf{A}}) = \left\{ \psi \in L^2(\mathbb{R}^d) : P_{h,\mathbf{A}}\psi \in L^2(\mathbb{R}^d) \right\}.$$

Sous des bons conditions (voir en fin de section 1.2.2) le bas du spectre de $P_{h,\mathbf{A}}$ est discret et on introduit une suite de valeurs propres.

— Si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert borné régulier, on peut définir le Laplacien magnétique de Neumann, noté

$$P_{h,\mathbf{A},\Omega}^{\text{N}} = (-ih\nabla + \mathbf{A})^2, \quad (1.7)$$

sur $L^2(\Omega)$ avec domaine

$$\text{Dom}(P_{h,\mathbf{A},\Omega}^{\text{N}}) = \left\{ \psi \in L^2(\Omega) : \mathcal{L}_h\psi \in L^2(\Omega) \text{ et } \mathbf{n} \cdot (-ih\nabla + \mathbf{A})\psi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\},$$

où \mathbf{n} est la normale unitaire à la frontière pointant vers l'extérieur. On note $(\lambda_n^{\text{Neu}}(h))_{n \geq 1}$ la suite croissante de ses valeurs propres. Par le principe du mini-max (voir annexe A), nous avons en particulier

$$\lambda_1^{\text{Neu}}(h) = \inf_{\psi \in H_{\mathbf{A}}^1(\Omega)} \frac{\langle P_{h,\mathbf{A},\Omega}^{\text{N}}\psi, \psi \rangle}{\|\psi\|^2}.$$

Remarque 1.2.1. Si \mathbf{A} et $\tilde{\mathbf{A}}$ sont deux potentiels magnétiques tels que $\text{rot}\mathbf{A} = \text{rot}\tilde{\mathbf{A}}$, alors il existe une fonction $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla\phi$ et on a

$$e^{-\frac{i\phi}{h}} (-ih\nabla + \mathbf{A})^2 e^{\frac{i\phi}{h}} = (-ih\nabla + \tilde{\mathbf{A}})^2.$$

Ainsi, les deux opérateurs conjugués $(-ih\nabla + \mathbf{A})^2$ et $(-ih\nabla + \tilde{\mathbf{A}})^2$ ont le même spectre. Par conséquent, le spectre du Laplacien magnétique ne dépend que du champ magnétique associé.

1.2.2 Analyse semi-classique en dimension 2

Le cas du champ magnétique constant :

On suppose ici que Ω est un ouvert, borné et régulier de \mathbb{R}^2 et que le champ magnétique est constant $\mathbf{B}(x) = 1$. On considère ici l'opérateur auto-adjoint $P_{h,\mathbf{A},\Omega}^{\text{N}}$, avec la condition de Neumann au bord. Lorsque Ω est un disque de rayon R , Bauman, Phillips et Tang [5]

ont établi le développement asymptotique à deux termes (en h) de la plus petite valeur propre $\lambda_1^{\text{Neu}}(h)$ sous la forme

$$\lambda_1^{\text{Neu}}(h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \Theta_0 h - \frac{C_1}{R} h^{\frac{3}{2}} + o\left(h^{\frac{3}{2}}\right),$$

où $\Theta_0 \in (0, 1)$ et $C_1 > 0$ sont des constantes universelles. Ce résultat est généralisé par Helffer et Morame [51], qui ont prouvé que dans le cas où Ω est un domaine ouvert, régulier et borné de \mathbb{R}^2 , et pour tout $n \geq 1$, le développement asymptotique à deux termes de $\lambda_n^{\text{Neu}}(h)$ est donné par

$$\lambda_n^{\text{Neu}}(h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \Theta_0 h - C_1 \kappa_{\max} h^{\frac{3}{2}} + o\left(h^{\frac{3}{2}}\right), \quad (1.8)$$

où κ_{\max} est la courbure maximale de la frontière. Ils ont également prouvé que les fonctions propres associées à ces petites valeurs propres sont localisées au voisinage des points de la frontière où la courbure est maximale. Le développement asymptotique en (1.8) montre l'influence de la courbure sur le spectre de $P_{h, \mathbf{A}, \Omega}^{\text{N}}$, mais sans distinguer entre les valeurs propres. Le développement asymptotique complet de toutes les valeurs propres a été établie par Fournais et Helffer [32] sous des hypothèses de non dégénérescence de courbure du bord de Ω . Soit s une paramétrisation d'arc de la frontière $\partial\Omega$ et $\kappa(s)$ la courbure de $\partial\Omega$ au point de coordonné s . L'hypothèse de non dégénérescence est la suivante.

Hypothèse 1.2.2. *Supposons que la courbure $s \mapsto \kappa(s)$ admet un unique minimum non dégénéré en s_0 , qui vérifie que $\kappa''(s_0) < 0$.*

s_0 joue alors le rôle d'un puit de potentiel et on a le résultat suivante.

Théorème 1.2.3 (Fournais-Helffer 2006, [32]). *Sous l'hypothèse 1.2.2, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une suite $(\zeta_j^{(n)})_{j \geq 1} \subset \mathbb{R}$, telle que $\lambda_n^{\text{Neu}}(h)$ a le développement asymptotique suivante*

$$\lambda_n^{\text{Neu}}(h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \Theta_0 h - C_1 \kappa_{\max} h^{\frac{3}{2}} + C_1 \Theta_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{3\kappa_2}{2}} (2n-1) h^{\frac{7}{4}} + h^{\frac{15}{8}} \sum_{j=1}^{+\infty} h^{\frac{j}{8}} \zeta_j^{(n)},$$

où $\kappa_2 = -\kappa''(s_0)$.

Dans le cas de symétries (par exemple une ellipse), Bonnaillie-Hérau-Raymond [14] ont trouvé une expression explicite de la différence entre les deux premières valeurs propres,

conduisant à la première formule explicite d'effet tunnel dans une situation purement magnétique.

Annulation du champ magnétique :

On suppose maintenant que $\Omega = \mathbb{R}^2$ et que le champ magnétique $\mathbf{B}(x)$ s'annule jusqu'à l'ordre $k \geq 1$ sur une courbe fermée régulière Γ de \mathbb{R}^2 . On suppose de plus que le champ magnétique est suffisamment grand à l'infini,

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \mathbf{B}(x) = +\infty.$$

Sous ces hypothèses, l'opérateur auto-adjoint $P_{h,\mathbf{A}}$, qui sera noté par

$$P_{h,\mathbf{A}}^{\text{Vn},[k]} = (-ih\nabla + \mathbf{A})^2 \tag{1.9}$$

pour toute la suite, est à résolvante compacte. Alors, on peut considérer la suite croissante de ses valeurs propres $(\lambda_n^{\text{Vn},[k]}(h))_{n \geq 1}$. Helffer et Kordyukov [46] ont obtenu une décomposition asymptotique à un terme pour la plus petite valeur propre du type

$$\lambda_1^{\text{Vn},[k]}(h) \underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} C_1 h^{\frac{2k+2}{k+2}} + o\left(h^{\frac{2k+2}{k+2}}\right),$$

où C_1 est une constante strictement positive explicitement calculable. Sous une hypothèse générique, Dombrowski et Raymond [28] ont également obtenu des estimations locales et microlocales pour les fonctions propres. Ils ont établi que, pour $k = 1$, et pour tout $n \geq 1$,

$$\lambda_n(h)^{\text{Vn},[1]} \underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} C_0 h^{\frac{4}{3}} + (C_1 + (2n-1)C_2) h^{\frac{5}{3}} + o\left(h^{\frac{5}{3}}\right),$$

où $C_0, C_1, C_2 > 0$ sont des constantes explicitement calculables.

1.2.3 Analyse semi-classique en dimension 3

Soit Ω un domaine ouvert, régulier et borné de \mathbb{R}^3 . Nous considérons ici le Laplacien magnétique $P_{h,\mathbf{A},\Omega}^{\text{N}}$ avec la condition de Neumann au bord donné en (1.7).

Comme mentionné en début de section, la frontière de Ω a une influence importante sur l'asymptotique spectrale. Il est possible d'approcher le spectre grâce à une approximation locale du champ magnétique par le champ constant. Considérons ainsi $x_0 \in \partial\Omega$ et l'angle

$\theta(x_0) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ donné par

$$\mathbf{B}(x_0) \cdot \mathbf{n}(x_0) = \|\mathbf{B}(x_0)\| \sin(\theta(x_0)). \quad (1.10)$$

Au voisinage de x_0 , on peut approcher Ω par le demi-espace $\mathbb{R}_+^3 = \{(r, s, t) \in \mathbb{R}^3 : t > 0\}$ (la variable t jouant le rôle de la distance à la frontière), et le champ magnétique par un champ constant $\mathbf{b} = \mathbf{B}(x_0)$. $\theta(x_0)$ est alors égal à l'angle entre le champ magnétique \mathbf{b} et le plan $t = 0$, et donc, après rotation, on peut supposer que le champ magnétique est donné par

$$\mathbf{b} = (0, \|\mathbf{B}(x_0)\| \cos \theta(x_0), \|\mathbf{B}(x_0)\| \sin \theta(x_0)).$$

On peut également supposer sans perte de généralité que $\|\mathbf{B}(x_0)\| = 1$. Pour la suite on note $\theta = \theta_0$, $D_s = \frac{1}{i} \nabla_s$ et on suppose $h = 1$. Le but de ce qui suit est d'introduire un opérateur modèle dit de Lu-Pan, qui joue un rôle important dans la suite. Grâce à un changement de gauge (voir remarque 1.2.1), on peut choisir un potentiel magnétique de la forme

$$(t \cos \theta - s \sin \theta, 0, 0).$$

Cela conduit à considérer la réalisation de Neumann de

$$\mathfrak{L}_\theta = (D_r - t \cos \theta + s \sin \theta)^2 + D_s^2 + D_t^2$$

dans l'espace ambiant $L^2(\mathbb{R}_+^3)$, qui est déjà apparue dans [77] dans le contexte de la théorie de Ginzburg-Landau. On note par

$$\mathbf{e}(\theta) = \inf \text{sp} (\mathfrak{L}_\theta). \quad (1.11)$$

Par transformée de Fourier partielle en r , on arrive à :

$$H(\theta, \rho) = (\rho - t \cos \theta + s \sin \theta)^2 + D_s^2 + D_t^2,$$

dans \mathbb{R}_+^3 avec la condition de Neumann en $t = 0$, et on a

$$\mathbf{e}(\theta) = \inf_{\rho \in \mathbb{R}} (\inf \text{sp} (H(\theta, \rho))).$$

Le lemme suivant donne des propriétés de la fonction \mathbf{e} (voir [50], [77], et aussi [91, Section 2.5.2]) et introduit l'opérateur de Lu-Pan.

Lemme 1.2.4. *Nous avons les propriétés suivantes :*

1. Pour tout $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\mathbf{e}(\theta)$ est aussi l'énergie de l'état fondamental de la réalisation de Neumann de l'opérateur dit de Lu-Pan, agissant sur $L^2(\mathbb{R}_+^2)$,

$$\mathcal{L}_\theta = (t \cos \theta - s \sin \theta)^2 + D_s^2 + D_t^2.$$

2. La fonction $\theta \mapsto \mathbf{e}(\theta)$ est analytique sur $(0, \frac{\pi}{2})$.
3. La fonction $\theta \mapsto \mathbf{e}(\theta)$ est continue et strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
4. $\mathbf{e}(0) := \Theta_0 \in (0, 1)$ et $\mathbf{e}(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Ces considérations conduisent à introduire la fonction β sur la frontière de Ω pour notre problème associé à (1.7) :

Définition 1.2.5. *On pose, pour tout $x \in \partial\Omega$,*

$$\beta(x) = \|\mathbf{B}(x)\| \mathbf{e}(\theta(x)).$$

Dans ce qui suit, nous examinons l'influence de la fonction β sur le spectre de $\mathbf{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}^N$. L'asymptotique à un terme de $\lambda_1^{\text{Neu}}(h)$ est établie dans [77] (voir aussi [93] et [34]).

Théorème 1.2.6 (Lu-Pan '00). *On a*

$$\lambda_1^{\text{Neu}}(h) = h \min(b_{\min}, \beta_{\min}) + o(h),$$

où $b_{\min} = \min_{x \in \overline{\Omega}} \|\mathbf{B}(x)\|$ et $\beta_{\min} = \min_{x \in \partial\Omega} \beta(x)$.

Quand $b_{\min} < \beta_{\min}$, les fonctions propres associées aux petites valeurs propres sont localisées près des minima de $\|\mathbf{B}\|$. Ensuite, si le minimum est unique et non dégénéré, l'analyse de [60] s'applique et on a

$$\lambda_n^{\text{Neu}}(h) = b_{\min} h + C_0 h^{\frac{3}{2}} + (C_1(2n-1) + C_2) h^2 + o(h^2),$$

où les constantes C_0 , C_1 et C_2 sont des constantes explicitement calculables.

Le cas du champ magnétique constant :

On suppose maintenant que le champ magnétique est constant. Le Lemme 1.2.4 et le Théorème 1.2.6 nous donnent que

$$\lambda_1^{\text{Neu}}(h) = \beta_{\min} h + o(h),$$

où $\beta_{\min} = \Theta_0 \|\mathbf{B}\|$. Ce minimum est atteint lorsque $\theta(x) = 0$, c'est-à-dire quand le champ magnétique est tangent à $\partial\Omega$. Ainsi, les fonctions propres sont localisées au voisinage de

$$\Gamma = \{x \in \partial\Omega : \mathbf{B}(x) \cdot \mathbf{n}(x) = 0\}.$$

En supposant que Γ est une sous-variété régulière de $\partial\Omega$, Helffer et Morame [51] ont obtenu une décomposition asymptotique à deux termes pour la plus petite valeur propre du type

$$\lambda_1^{\text{Neu}}(h) = \beta_{\min} h + C_0 h^{\frac{4}{3}} + \mathcal{O}(h^{\frac{4}{3}+\eta}),$$

où $C_0 > 0$ une constante calculable (dépendant de Γ) et $\eta > 0$. Lorsque la courbe Γ est fermée et sous une hypothèse supplémentaire de non-dégénérescence, alors, la décomposition asymptotique complète pour les plus petites valeurs propres a été établie dans [61], et est donnée par

$$\lambda_n^{\text{Neu}}(h) = \beta_{\min} h + C_0 h^{\frac{4}{3}} + C_1 h^{\frac{3}{2}} + (C_2(2n-1) + C_3) h^{\frac{5}{3}} + o(h^2),$$

où C_0, C_1, C_2 et C_3 sont des constantes explicitement calculables.

La cas du champ magnétique variable :

Lorsque $\beta_{\min} < b_{\min}$ et $\|\mathbf{B}\|$ est variable, il semble que l'on en sache moins. Les premières estimations des plus petites valeurs propres, et pas seulement de la première, sont faites dans [93] (voir aussi [92]), où une borne supérieure est obtenue sous une hypothèse générique :

$$\lambda_n(h) \leq \beta_{\min} h + C_0 h^{\frac{3}{2}} + (C_1(2n-1) + C_2) h^2 + o(h^2), \quad (1.12)$$

pour certaines constantes C_0, C_1, C_2 et où C_1 est explicitement donné par

$$C_1 = \frac{\sqrt{\det \text{Hess}_{x_0} \beta}}{2\|\mathbf{B}(x_0)\| \sin \theta(x_0)}.$$

La borne supérieure (1.12) est obtenue au moyen d'une construction de quasimodes en coordonnées locales près du minimum de β et implique un certain nombre d'annulations algébriques assez subtiles.

1.3 Réductions spectrales

Dans cette thèse, nous allons suivre une méthode de réduction spectrale que nous expliquons maintenant. Sous des hypothèses géométriques sur le domaine, telles que l'annulation du champ magnétique ou sur le bord du domaine, des estimations de type Agmon peuvent être utilisées pour prouver la localisation des fonctions propres associées à des petites valeurs propres. Ces types de localisation conduisent à un développement local de l'opérateur et souvent à une structure à double échelle. Cela nécessite la mise en place d'une stratégie de type Born-Oppenheimer, expliquée succinctement dans la sous-section suivante, et l'utilisation d'une méthode de réduction de type Grushin. Cette dernière méthode est expliquée en détail par exemple par Sjöstrand et Zworski dans [101], ou par Martinez dans [68] (voir aussi [65] et [10] dans le cas purement magnétique). Cette méthode nécessite l'utilisation du calcul pseudo-différentiel pour des symboles à valeur opérateur, et réduit le problème à l'étude d'un opérateur effectif de symbole scalaire (voir l'annexe B pour une introduction rapide aux symboles à valeurs scalaires et opérateurs). Cette démarche globale sera détaillée dans la suite. Nous commençons ci dessous par donner un aperçu de la méthode de Born-Oppenheimer.

1.3.1 Approximation de Born-Oppenheimer électrique

Soit $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive de classe \mathcal{C}^∞ qui vérifie

$$\lim_{|(s,t)| \rightarrow +\infty} V(s,t) = +\infty.$$

On considère l'opérateur électrique

$$\mathcal{H}_h = h^2 D_s^2 + D_t^2 + V(s,t),$$

où on rappelle que $D_s = \frac{1}{i}\nabla_s$, définie sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ comme l'extension auto-adjointe associée à la forme quadratique

$$\mathcal{Q}_h(\psi) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(h^2 |\partial_s \psi|^2 + |\partial_t \psi|^2 + V(s, t) |\psi|^2 \right) ds dt,$$

où $h > 0$ est un paramètre semi-classique essentiellement égal à la racine du ratio entre les masses électronique et nucléaire (on ne détaille pas la modélisation physique).

Mathématiquement, la stratégie de Born-Oppenheimer [20] pour l'analyse spectrale de l'opérateur \mathcal{H}_h dans la limite semi-classique (c'est-à-dire lorsque $h \rightarrow 0^+$) est la suivante. La prise en compte de ce type de problèmes partiellement semi-classiques apparaît, par exemple, dans les articles de Martinez [68, 67, 82, 78], où l'objectif principal est d'approcher les valeurs propres et les fonctions propres de l'opérateur \mathcal{H}_h par des techniques d'opérateurs pseudo-différentiels. La méthode consiste à transformer le problème des valeurs propres

$$\mathcal{H}_h \psi = E \psi,$$

en un problème d'inversion d'un opérateur matriciel 2×2 en utilisant une réduction de type Grushin.

Précisément, on introduit d'abord l'opérateur partiel,

$$\mathcal{K}(s) = D_t^2 + V(s, t),$$

qui est défini pour chaque $s \in \mathbb{R}$ sur $L^2(\mathbb{R}_t)$ comme l'extension auto-adjointe associée à la forme quadratique

$$\varphi \mapsto \int_{\Omega} \left(|\partial_t \varphi|^2 + V(s, t) |\varphi|^2 \right) dt.$$

En supposant que $(\mathcal{K}(s))_{s \in \mathbb{R}}$ est une famille analytique de type (A) au sens de Kato⁴, et en notant par $\nu(s)$ la plus petite valeur propre de $\mathcal{K}(s)$, on peut alors remplacer, pour s fixé, l'opérateur électrique $\mathcal{K}(s)$ par sa plus petite valeur propre $\nu(s)$. L'étude du bas du spectre de \mathcal{H}_h se réduit alors à celui de l'opérateur effectif

$$\mathcal{H}_h^{\text{eff}} = h^2 D_s^2 + \nu(s).$$

Des techniques semi-classiques à la Helffer-Sjöstrand à $\mathcal{H}_h^{\text{eff}}$ permettent d'analyser le bas

4. Il s'agit d'une théorie des perturbations analytiques qui s'intéresse principalement au comportement des valeurs propres et des vecteurs propres isolés d'un opérateur holomorphe dépendant d'un paramètre (Voir [64, Section VII.2]).

du spectre de \mathcal{H}_h , et même, dans certains cas, d'obtenir des estimations précises de type effet tunnel lorsque ν a des symétries.

1.3.2 Développements BKW magnétiques

Après avoir étudié le cas électrique, la question de la description du spectre de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique en utilisant la méthode de réduction de Born-Oppenheimer est légitime. Dans l'article [10], Bonnaillie-Noël *et al* s'inspirent de l'approximation de Born-Oppenheimer pour l'étude spectrale d'opérateurs auto-adjoints sur $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$, de la forme

$$\mathcal{L}_h = (hD_s + A_1(s, t))^2 + (D_t + A_2(s, t))^2,$$

où A_1 et A_2 sont des fonctions analytiques réelles (ici $n, m \in \mathbb{N}^*$). Ils ont obtenu le développement asymptotique en puissance h (quand $h \rightarrow 0^+$) des petites valeurs propres et des fonctions propres associées (sous forme BKW) pour des opérateurs auto-adjoints de type \mathcal{L}_h dans le cas d'un puits de potentiel simple. Expliquons un peu ce que signifie le développement BKW. La méthode BKW, proposée par Brillouin, Kramers, Wentzel [21, 69, 103] en 1926, a été appliquée mathématiquement par exemple en 1980 (voir [39], [22] et [55]). Cette méthode consiste à construire des quasimodes sous forme d'une série formelle en puissance h du type

$$e^{-\frac{\Phi(s,t)}{h^\alpha}} \sum_{j \geq 1} a_j(s, t) h^j,$$

pour un certain $\alpha > 0$. La raison pour laquelle nous aimerions avoir une description BKW des fonctions propres est aussi que cela constitue une première étape pour obtenir une estimation précise de l'effet tunnel magnétique dans le cas de symétries.

Le symbole à valeur opérateur associé à \mathcal{L}_h est un opérateur électromagnétique agissant sur $L^2(\mathbb{R}^n, dt)$ donné par

$$\mathcal{M}_{x,\xi} = (D_t + A_2(x, t))^2 + (\xi + A_1(x, t))^2, \tag{1.13}$$

avec $(x, \xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, et on note par $\mu(x, \xi)$ le bas du spectre de $\mathcal{M}_{x,\xi}$. Nous travaillons sous les hypothèses suivantes.

Hypothèse 1.3.1. 1) La fonction $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \ni (x, \xi) \mapsto \mu(x, \xi)$ est continue et ad-

met un minimum unique et non dégénéré μ_0 en un point noté (x_0, ξ_0) et tel que

$$\liminf_{|x|+|\xi| \rightarrow +\infty} \mu(x, \xi) > \mu_0.$$

- 2) La famille $(\mathcal{M}_{x,\xi})_{(x,\xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m}$ peut être étendue en une famille holomorphe de type (A), au sens de Kato, dans un voisinage complexe \mathcal{V}_0 de (x_0, ξ_0) .
- 3) Pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \cap \mathcal{V}_0$, $\mu(x, \xi)$ est une valeur propre simple.

L'hypothèse 1.3.1 assure que la plus petite valeur propre du symbole de l'opérateur de \mathcal{L}_h est simple et admet un minimum unique et non dégénéré.

Hypothèse 1.3.2. Sous l'hypothèse 1.3.1, on désigne par $\text{Hess}\mu(x_0, \xi_0)$ la matrice hessienne de μ en (x_0, ξ_0) . On suppose que le spectre de l'opérateur $\text{Hess}\mu(x_0, \xi_0)(s, D_s)$ est simple.

Hypothèse 1.3.3. Pour $R \geq 0$, on note par $\Omega_R = \mathbb{R}^{m+n} \setminus \overline{\mathcal{B}(0, R)}$. On désigne par $\mathcal{L}_h^{\text{Dir}, \Omega_R}$ la réalisation de Dirichlet sur Ω_R de

$$(D_t + A_2(s, t))^2 + (hD_s + A_1(s, t))^2.$$

On suppose qu'il existe $R_0 \geq 0$, $h_0 > 0$ et $\mu_0^* > \mu_0$ tels que pour tout $h \in (0, h_0)$, le bas du spectre de $\mathcal{L}_h^{\text{Dir}, \Omega_{R_0}}$ satisfait :

$$\lambda_1^{\text{Dir}, \Omega_{R_0}} \geq \mu_0^*.$$

L'hypothèse 1.3.3 est une hypothèse de confinement spectral. Elle permet d'obtenir une minoration de l'infimum du spectre essentiel de l'opérateur \mathcal{L}_h . On a alors :

Proposition 1.3.4. Sous l'hypothèse 1.3.3, il existe $h_0 > 0$ tel que, pour tout $h \in (0, h_0)$,

$$\inf \text{Sp}_{\text{ess}}(\mathcal{L}_h) \geq \mu_0^*.$$

La remarque suivante montre que le travail peut être réduit au cas où $A_2 = 0$.

Remarque 1.3.5. Lorsque $A_2 \neq 0$, nous pouvons effectuer un changement de gauge et remplacer le potentiel (A_1, A_2) par $(A_1 + h\nabla_s \varphi(s, t), 0)$. Et dans ce cas, le spectre associé au potentiel $(A_1 + h\nabla_s \varphi(s, t), 0)$ est décalé d'un facteur $\mathcal{O}(h)$ par rapport à celui associé à $(A_1, 0)$. Nous pouvons même prouver avec un changement de gauge que la phase Φ dans le développement BKW dépend de (s, t) .

Voici le résultat suivant, qui établit le développement asymptotique en puissance de h des petites valeurs propres et des fonctions propres associées pour l'opérateur \mathcal{L}_h .

Théorème 1.3.6 (Bonnaillie-Hérau- Raymond 2016, [10]). *On suppose que $A_2 = 0$ et que A_1 est analytique et réel. Sous les hypothèses 1.3.1, 1.3.2 et 1.3.3, et pour tout $n \geq 1$, il existe une suite de nombres réels $(\lambda_{n,j})_{j \geq 0}$ et $h_0 > 0$ telle que pour tout $h \in (0, h_0)$, la n -ième valeur propre de \mathcal{L}_h existe et satisfait*

$$\lambda_n(h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \sum_{j \geq 0} \lambda_{n,j} h^j,$$

au sens des séries formelles, avec $\lambda_{n,0} = \mu_0$, $\lambda_{n,1} = 0$ et $\lambda_{n,2}$ est la n -ième valeur propre de $\frac{1}{2} \text{Hess}_{(x_0, \xi_0)} \mu(s, D_s)$. De plus, il existe une fonction $\Phi = \Phi(s)$ définie dans un voisinage \mathcal{V} de x_0 avec $\text{Re Hess } \Phi(x_0) > 0$, et une série formelle de fonctions régulières sur $\mathcal{V} \times \mathbb{R}_t^n$

$$a_n(\cdot; h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \sum_{j \geq 0} a_{n,j} h^j,$$

avec $a_{n,0} \neq 0$ tel que

$$(\mathcal{L}_h - \lambda_n(h)) \left(a_n(\cdot; h) e^{-\frac{\Phi}{h}} \right) = \mathcal{O}(h^\infty) e^{-\frac{\Phi}{h}},$$

sur $\mathcal{V} \times \mathbb{R}_t^n$.

1.3.3 Estimations d'Agmon

Les estimations d'Agmon sont essentielles pour l'étude de l'effet tunnel : l'existence d'une décroissance exponentielle pour les fonctions propres associées aux petites valeurs propres suggère que, dans certains cas, une séparation entre les deux valeurs propres les plus petites, de type

$$e^{-\frac{S}{h^\alpha}}, \quad (S \text{ et } \alpha > 0)$$

pourrait apparaître dans la situation d'un double puits. Dans [1], Agmon a démontré la décroissance exponentielle des fonctions propres du Laplacien électrique $-h^2 \Delta + V$, associées à de petites valeurs propres, à l'extérieur de l'ensemble

$$\left\{ x : V(x) = \min_y V(y) \right\}.$$

Cette décroissance exponentielle est basée sur l'inégalité $-h^2\Delta + V \geq V$. Dans le cas du Laplacien magnétique, la minoration de l'opérateur est plus délicate, mais permet d'obtenir le même type de résultats.

Expliquons maintenant les estimations d'Agmon pour les fonctions propres du Laplacien magnétique dans le cadre de cette thèse. Dans ce qui suit, on note par P_h l'un des deux opérateurs $P_{h,\mathbf{A}}$ (si $\Omega = \mathbb{R}^d$) et $P_{h,\mathbf{A},\Omega}^N$ (si Ω est borné de \mathbb{R}^d) qui sont définis dans la section 1.2.1. Les deux lemmes suivants sont essentiels pour démontrer la décroissance exponentielle des fonctions propres de P_h .

Lemme 1.3.7 (Formule de localisation). *Soit $(\chi_j)_{j \geq 1}$ une partition de l'unité sur Ω , telle que*

$$\sum_{j \geq 1} \chi_j^2 = 1.$$

Alors, pour toute $\psi \in \text{Dom}(P_h)$, on a

$$\langle P_h \psi, \psi \rangle = \sum_{j \geq 1} \langle P_h \chi_j \psi, \chi_j \psi \rangle - h^2 \sum_{j \geq 1} \|\nabla \chi_j \psi\|^2.$$

Lemme 1.3.8 (Formule d'Agmon). *Soit Φ une fonction Lipschitzienne à valeurs réelles et bornée sur $\overline{\Omega}$. Alors, pour toute fonction propre $\psi \in \text{Dom}(P_h)$ associée à une valeur propre λ de P_h , on a*

$$\langle P_h e^\Phi \psi, e^\Phi \psi \rangle = \lambda \|e^\Phi \psi\|^2 + h^2 \|\nabla \Phi \psi\|^2.$$

Annulation du champ magnétique dans \mathbb{R}^2

On considère l'opérateur $P_{h,\mathbf{A}}^{V_n,[k]}$ qui a été défini en (1.9). On rappelle ici que le champ magnétique $\mathbf{B}(x)$ s'annule jusqu'à un ordre $k \geq 1$ sur une courbe fermée régulière de \mathbb{R}^2 et que

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \mathbf{B}(x) = +\infty.$$

Dans [48], Helffer et Mohamed ont établi les estimations d'Agmon pour les fonctions propres de l'opérateur $P_{h,\mathbf{A}}^{V_n,[k]}$. Le théorème suivant montre une minoration très fine de la forme quadratique associée à $P_{h,\mathbf{A}}^{V_n,[k]}$.

Théorème 1.3.9 (Théorème 4.5 dans [48]). *Il existe $C_0, h_0 > 0$, et pour tout $\epsilon \in (0, 1)$, il existe une constante $C_\epsilon > 0$ telle que*

$$h \int_{\mathbb{R}^2} (|B(x)| - C_\epsilon h^{1-\epsilon}) |\psi(x)|^2 dx \leq C_0 \int_{\mathbb{R}^2} |(-ih\nabla + \mathbf{A}) \psi|^2 dx,$$

pour tout $\psi \in \text{Dom} \left(P_{h, \mathbf{A}}^{\text{Vn}, [k]} \right)$ et pour tout $h \in (0, h_0)$.

Les deux Lemmes 1.3.7, 1.3.8 et le Théorème 1.3.9 nous donnent le résultat suivant. Ce résultat montre la localisation exponentielle des fonctions propres, associées aux petites valeurs propres de $P_{h, \mathbf{A}}^{\text{Vn}, [k]}$ au voisinage de la courbe d'annulation Γ à l'échelle $h^{\frac{1}{k+2}}$.

Théorème 1.3.10 (Proposition 5.1 dans [48]). *Soit $E > 0$. Il existe $C, h_0, \alpha > 0$ telles que, pour tout $h \in (0, h_0)$, et tout couple propre (λ, ψ) de $P_{h, \mathbf{A}}^{\text{Vn}, [k]}$ avec $\lambda \leq Eh^{\frac{2k+1}{k+2}}$,*

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{2\frac{\alpha \text{dist}(x, \Gamma)}{\sqrt{h}} \frac{k+2}{2}} |\psi|^2 dx \leq C \|\psi\|^2,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{2\frac{\alpha \text{dist}(x, \Gamma)}{\sqrt{h}} \frac{k+2}{2}} |(-ih\nabla + \mathbf{A}) \psi|^2 dx \leq Ch^{\frac{2k+1}{k+2}} \|\psi\|^2.$$

Champ magnétique variable dans \mathbb{R}^3

On suppose ici que Ω est un ouvert, borné et régulier de \mathbb{R}^3 et que le champ magnétique $\mathbf{B}(x) = \nabla \times \mathbf{A}(x)$ ne s'annule pas sur $\bar{\Omega}$. Le théorème suivant a été établi par Helffer et Morame dans [50].

Théorème 1.3.11 (Théorème 4.3 dans [50]). *Il existe $C_0, h_0 > 0$, tel que pour tout $h \in (0, h_0)$, et pour tout $\psi \in \text{Dom} \left(P_{h, \mathbf{A}, \Omega}^{\text{N}} \right)$, on a*

$$h \int_{\Omega} \mathcal{W}_h(x) |\psi(x)|^2 dx \leq \int_{\Omega} |(-ih\nabla + \mathbf{A}) \psi|^2 dx,$$

où

$$\mathcal{W}_h(x) = \begin{cases} \|\mathbf{B}(x)\| - Ch^{\frac{1}{4}}, & \text{si } \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq 2h^{\frac{3}{8}}, \\ \|\mathbf{B}(s(x))\| \mathbf{e}(\theta(x)) - Ch^{\frac{1}{4}}, & \text{si } \text{dist}(x, \partial\Omega) \leq 2h^{\frac{3}{8}}. \end{cases}$$

Nous rappelons ici que $\theta(x)$ satisfait

$$\mathbf{B}(s(x)) \cdot \mathbf{n}(s(x)) = \|\mathbf{B}(s(x))\| \mathbf{e}(\theta(x)),$$

où $s(x)$ est, pour x proche de $\partial\Omega$, le point dans $\partial\Omega$ tel que

$$\text{dist}(x, \partial\Omega) = \text{dist}(x, s(x)),$$

et la fonction $\theta \mapsto \mathbf{e}(\theta)$ a été définie en (1.11).

On suppose que

$$0 < \beta_{\min} := \min_{x \in \partial\Omega} \|\mathbf{B}(x)\| \mathbf{e}(\theta(x)) < b_{\min} := \min_{x \in \overline{\Omega}} \|\mathbf{B}(x)\|.$$

Le théorème suivant est une conséquence du Théorème 1.3.11 (voir [92]). Il montre la localisation exponentielle des fonctions propres, associées aux petites valeurs propres, de $P_{h,\mathbf{A},\Omega}^N$ au voisinage du bord $\partial\Omega$ à l'échelle $h^{\frac{1}{2}}$.

Théorème 1.3.12. *Pour tout $\epsilon > 0$ tel que $\beta_{\min} + \epsilon < b_{\min}$, il existe $C, h_0 > 0$ tel que, pour tout $h \in (0, h_0)$, et tout couple propre (λ, ψ) de $P_{h,\mathbf{A},\Omega}^N$ avec $\lambda \leq (\beta_{\min} + \epsilon)h$,*

$$\int_{\Omega} e^{\frac{2\alpha \text{dist}(x, \partial\Omega)}{\sqrt{h}}} |\psi|^2 dx \leq C \|\psi\|^2.$$

1.4 Opérateurs de Montgomery généralisés

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $\xi \in \mathbb{R}$, on considère l'opérateur $\mathfrak{h}_{\xi}^{[k]}$, la réalisation auto-adjointe à résolvante compacte sur $L^2(\mathbb{R}, d\tau)$ de

$$D_{\tau}^2 + \left(\xi - \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \right)^2.$$

On note par $\nu^{[k]}(\xi)$ la plus petite valeur propre de $\mathfrak{h}_{\xi}^{[k]}$. La famille $(\mathfrak{h}_{\xi}^{[k]})_{\xi \in \mathbb{R}}$ est analytique de type (A) au sens de Kato, $\nu^{[k]}$ est une valeur propre simple, et pour tout $\xi_0 \in \mathbb{R}$ donné, $\nu^{[k]}$ a une extension holomorphe locale dans un voisinage complexe de ξ_0 (voir par exemple [13]).

Quand $\xi \in \mathbb{R}$, l'analyse spectrale de cette famille d'opérateurs a été effectuée par Helffer et Persson dans [53], où ils ont prouvé que la fonction $\mathbb{R} \ni \xi \rightarrow \nu^{[k]}(\xi)$ admet un minimum

unique non dégénéré en $\xi_0^{[k]}$ et que $\nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}) > 0$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'opérateur de Montgomery généralisé est un opérateur auto-adjoint défini sur $L^2(\mathbb{R}^2; dsdt)$ par

$$\mathcal{L}_h^{[k],\text{gM}} = h^2 D_t^2 + \left(h D_s - \gamma(s) \frac{t^{k+1}}{k+1} \right)^2,$$

de domaine

$$\text{Dom}(\mathcal{L}_h^{[k],\text{gM}}) = \left\{ u \in H^2(\mathbb{R}^2) : \gamma(s)^2 t^{2k+2} u \in L^2(\mathbb{R}^2) \right\},$$

où γ est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} ayant un unique minimum non dégénéré strictement positif $\gamma_0 > 0$ atteint en $\sigma = 0$. On suppose de plus que

$$\liminf_{|\sigma| \rightarrow +\infty} \gamma = \gamma_\infty \in (\gamma_0, +\infty).$$

Cette famille d'opérateurs est un cas particulier du Laplacien magnétique, dont le champ magnétique s'annule jusqu'à l'ordre $k \geq 1$ sur la ligne droite $t = 0$ du plan \mathbb{R}^2 . Le champ magnétique correspondant est

$$B^{[k],\text{gM}}(s, t) = \gamma(s) t^k.$$

En effectuant le changement d'échelle

$$(\sigma, \tau) = (s, h^{\frac{1}{k+2}} t),$$

l'opérateur $\mathcal{L}_h^{[k],\text{gM}}$ devient

$$\mathcal{L}_h^{[k],\text{gM}} = h^{\frac{2k+2}{k+2}} \mathcal{L}_h^{[k]},$$

avec

$$\mathcal{L}_h^{[k]} = D_\tau^2 + \left(\hbar D_\sigma - \gamma(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \right)^2,$$

où $\hbar = h^{\frac{1}{k+2}}$ est le nouveau paramètre semi-classique. Formellement, $\mathcal{L}_h^{[k]}$ peut être écrit comme un opérateur pseudo-différentiel par rapport à la variable σ ,

$$\mathcal{L}_h^{[k]} = \text{Op}_\hbar^W(p^{[k]}),$$

où le symbole $p^{[k]}$ est donné par

$$p^{[k]}(\sigma, \xi) = D_\tau^2 + \left(\xi - \gamma(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \right)^2,$$

où $(\sigma, \xi) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $(\sigma, \xi) \in \mathbb{R}^2$, l'opérateur $p^{[k]}(\sigma, \xi)$ est auto-adjoint, positif et à résolvante compacte. Sa plus petite valeur propre, noté $\mu^{[k]}(\sigma, \xi)$, est donné par

$$\mu^{[k]}(\sigma, \xi) = \gamma(\sigma)^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]} \left(\gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \xi \right).$$

Le minimum de la fonction $\mathbb{R}^2 \ni (\sigma, \xi) \mapsto \mu^{[k]}(\sigma, \xi)$, atteint en $(0, \gamma_0^{\frac{1}{k+2}} \xi_0^{[k]})$, est noté $\mu_0^{[k]}$.

Sous les hypothèses génériques sur γ , l'opérateur $\mathcal{L}_\hbar^{[k]}$ satisfait les hypothèses 1.3.1, 1.3.2 et 1.3.3 (voir [10, Section 4.1]). Par conséquent, nous pouvons appliquer directement le théorème 1.3.6 à l'opérateur magnétique $\mathcal{L}_\hbar^{[k]}$, et nous avons le résultat suivant.

Théorème 1.4.1. *Pour tout $n \geq 1$, il existe une suite de nombre réels $(\lambda_{n,j})_{j \geq 0}$ telle que*

$$\lambda_n(\hbar) \underset{\hbar \rightarrow 0}{\sim} \sum_{j \geq 0} \lambda_{n,j} \hbar^j,$$

au sens des séries formelles, avec $\lambda_{n,0} = \mu_0^{[k]}$ et $\lambda_{n,1}$ est la n -ième valeur propre de

$$\frac{1}{2} \text{Hess} \mu^{[k]} \left(0, \gamma_0^{\frac{1}{k+2}} \xi_0^{[k]} \right) (\sigma, D_\sigma). \quad (1.14)$$

De plus, il existe une fonction $\Phi = \Phi(\sigma)$ définie dans un voisinage complexe \mathcal{V} de $\sigma = 0$ avec $\text{Re Hess} \Phi(0) > 0$, et une série formelle de fonctions régulières sur $\mathcal{V} \times \mathbb{R}$

$$a_n(\cdot; \hbar) \underset{\hbar \rightarrow 0}{\sim} \sum_{j \geq 0} a_{n,j} \hbar^j,$$

où $a_{n,0} \neq 0$ tel que

$$(\mathcal{L}_\hbar - \lambda_n(\hbar)) \left(a_n(\cdot; \hbar) e^{-\frac{\Phi}{\hbar}} \right) = \mathcal{O}(\hbar^\infty) e^{-\frac{\Phi}{\hbar}}.$$

Le terme principal de $a_n(\cdot; \hbar)$ est

$$a_{n,0}(\sigma, \tau) = f_{n,0}^{[k]}(\sigma) u_{w(\sigma)}^{[k]}, \quad \text{avec } w(\sigma) = \xi_0^{[k]} + \gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \Phi'(\sigma),$$

où $f_{n,0}^{[k]}$ est la n -ième fonction propre normalisée de (1.14).

La preuve de ce résultat a été démontrée par Bonnaillie-Noël *et al* dans [10, Section 4.2]. Elle donne une décomposition asymptotique complète pour les petites valeurs propres de l'opérateur de Montgomery généralisé, ainsi que la décomposition asymptotique sous forme BKW des fonctions propres associées. La fonction Φ du Théorème 1.4.1 est donnée par

$$\Phi(\sigma) = \int_0^\sigma \gamma(\tilde{\sigma})^{\frac{1}{k+2}} \varphi(\tilde{\sigma}) d\tilde{\sigma},$$

où φ est une solution a priori locale de l'équation eikonale

$$\gamma(\sigma)^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]} \left(\xi_0^{[k]} + i\varphi(\sigma) \right) = \mu_0^{[k]}. \quad (1.15)$$

Remarque 1.4.2. *En supposant que*

$$\left\| 1 - \frac{\gamma_0}{\gamma} \right\|_\infty$$

est suffisamment petit, le terme de gauche de l'équation (1.15) est bien défini pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$, en utilisant l'extension holomorphe de la fonction $\nu^{[k]}$ dans un voisinage complexe de $\xi_0^{[k]}$, et dans ce cas nous pouvons prendre $\mathcal{V} = \mathbb{R}$.

1.5 Résultats principaux de la thèse

Dans cette section, nous présentons en détail les problèmes étudiés, les principaux résultats de cette thèse qui font l'objet des articles [2, 3], ainsi que des éléments sur les stratégies de preuve.

1.5.1 Effet tunnel avec annulation du champ magnétique en 2D (Chapitre 2)

Considérons le Laplacien magnétique dans \mathbb{R}^2 défini par

$$\mathcal{L}_h = (-ih\nabla + \mathbf{A})^2, \quad \text{Dom}(\mathcal{L}_h) = \left\{ \psi \in L^2(\mathbb{R}^2) : \mathcal{L}_h \psi \in L^2(\mathbb{R}^2) \right\},$$

avec $\mathbf{A} = (A_1, A_2) \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$. Le spectre de \mathcal{L}_h ne dépend que du champ magnétique $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, donné par

$$\mathbf{B}(x) = \partial_{x_1} A_2(x) - \partial_{x_2} A_1(x), \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Nous supposons que $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \mathbf{B}(x) = +\infty$, pour assurer que la résolvante de \mathcal{L}_h est compacte. Dans ce cas, nous pouvons considérer la suite non décroissante de ses valeurs propres $(\lambda_n(h))_{n \geq 1}$.

Dans ce travail, nous nous concentrerons sur un champ magnétique variable qui s'annule jusqu'à l'ordre $k \geq 1$ sur une courbe régulière fermée Γ de \mathbb{R}^2 symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et sans points doubles. Avant d'énoncer le résultat principal de ce travail, nous introduisons quelques notations relatives à la géométrie du lieu d'annulation du champ magnétique. Au voisinage de la courbe d'annulation Γ , nous utiliserons les coordonnées tubulaires (s, t) , où $t(x)$ est la distance algébrique entre x et Γ et $s(x)$ est la coordonnée curviligne sur Γ , avec $|\Gamma| = 2L$. Soit

$$M : \mathbb{R}/(|\Gamma|\mathbb{Z}) \ni s \mapsto M(s) \in \Gamma$$

la paramétrisation de la longueur d'arc de Γ , orientée dans le sens positif, de sorte que

$$\Gamma \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\} = \{M(0) := (0, x_{21}), M(L) := (0, x_{22})\} \quad \text{avec} \quad x_{22} < x_{21},$$

et $\nu(s)$ la normale unitaire à Γ au point $M(s)$ (voir figure 1.5.1). La courbure $\kappa(s)$ de Γ au point $M(s)$ est donnée par la paramétrisation

$$M''(s) = \kappa(s)\nu(s).$$

Pour δ_0 suffisamment petit, la fonction

$$\Phi : \mathbb{R}/(|\Gamma|\mathbb{Z}) \times (-\delta_0, \delta_0) \ni (s, t) \mapsto \Phi(s, t) = M(s) + t\nu(s),$$

est un difféomorphisme d'image

$$\Omega_{\delta_0} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(x, \Gamma) < \delta_0\}.$$

Localement (au voisinage de Γ), le potentiel magnétique en coordonnées (s, t) est donné par

$$\tilde{\mathbf{A}}(s, t) = (\tilde{A}_1(s, t), \tilde{A}_2(s, t)),$$

avec

$$\tilde{A}_1(s, t) = (1 - t\kappa(s)) \mathbf{A}(\Phi(s)) \cdot M'(s) \quad \text{et} \quad \tilde{A}_2(s, t) = \mathbf{A}(\Phi(s)) \cdot \nu(s).$$

Le champ magnétique correspondant est donné par

$$\beta(s, t) := \nabla_{(s,t)} \times \tilde{\mathbf{A}}(s, t) = (1 - t\kappa(s))\mathbf{B} \circ \Phi(s, t).$$

On définit les fonctions γ et δ sur Γ par

$$\gamma(s) := \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial^k}{\partial t^k} (B \circ \Phi)(s, 0) \right), \quad \delta(s) := \frac{1}{(k+1)!} \left(\frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}} (B \circ \Phi)(s, 0) \right),$$

et la fonction $\tilde{\delta}$ par

$$\tilde{\delta}(s) := \delta(s) - \kappa(s)\gamma(s). \tag{1.16}$$

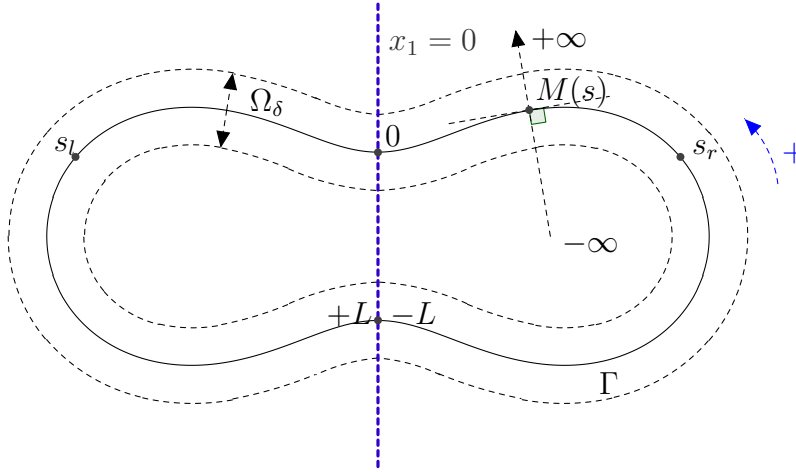


FIGURE 1.1 – Coordonnées tubulaires au voisinage de Γ

L'objectif est alors de trouver une approximation explicite de la différence entre les deux premières valeurs propres $\lambda_2(h) - \lambda_1(h)$ de \mathcal{L}_h , en termes de γ et d'autres quantités géométriques. Nous travaillons avec les hypothèses suivantes sur la géométrie et le champ magnétique, qui justifient la description paramétrique précédente.

Hypothèse 1.5.1. *On suppose que le champ magnétique \mathbf{B} s'annule exactement à l'ordre $k \geq 1$ sur une courbe fermée, régulière, non vide, compacte et connexe $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$. On suppose également que*

1. \mathbf{B} est symétrique par rapport à l'axe x_2 et donc Γ aussi ;
2. la fonction γ sur Γ admet un unique minimum non dégénéré $\gamma_0 > 0$ qui n'est atteint qu'en deux points symétriques distincts $a_1, a_2 \in \Gamma$. Nous supposons que s_r et s_l sont les longueurs d'arc respectives pour a_1 et a_2 ;
3. $\left\|1 - \frac{\gamma_0}{\gamma}\right\|_\infty$ est suffisamment petit.

Nous définissons la distance d'Agmon attachée aux deux puits comme suit

$$S = \min \{S_u, S_d\}, \quad (1.17)$$

avec les constantes S_u et S_d définies par

$$S_u = \int_{[s_r, s_l]} \gamma(s)^{\frac{1}{k+2}} \mathfrak{D}(s) ds \text{ et } S_d = \int_{[s_l, s_r]} \gamma(s)^{\frac{1}{k+2}} \mathfrak{D}(s) ds, \quad (1.18)$$

où, \mathfrak{D} est une fonction positive définie sur Γ qui sera définie plus loin dans (2.33).

Rappelons que $L = \frac{|\Gamma|}{2}$. Nous définissons les deux constantes A_u et A_d par

$$A_u := \exp \left(- \int_{s_r}^0 \operatorname{Re} \left(\frac{\mathfrak{Y}'_r(s) + 2\mathfrak{R}_r(s) - 2\delta_{1,1}^{[k]}}{2\mathfrak{Y}_r(s)} \right) ds \right), \quad (1.19)$$

et

$$A_d := \exp \left(- \int_{s_l}^L \operatorname{Re} \left(\frac{\mathfrak{Y}'_l(s) + 2\mathfrak{R}_l(s) - 2\delta_{1,1}^{[k]}}{2\mathfrak{Y}_l(s)} \right) ds \right), \quad (1.20)$$

où $\delta_{1,1}^{[k]}$ est le deuxième terme de la décomposition asymptotique de l'énergie de l'état fondamental (voir Théorème 1.5.6), et les fonctions \mathfrak{Y}_r , \mathfrak{Y}_l , \mathfrak{R}_r et \mathfrak{R}_l sont définies dans les remarques 2.4.5 et 2.4.6.

Énonçons le théorème principal de ce travail, qui donne une estimation optimale de l'effet tunnel lorsque le champ magnétique s'annule le long d'une courbe Γ .

Théorème 1.5.2. *Sous l'hypothèse 1.5.1, il existe $\varepsilon > 0$ tel que si*

$$\sup_{s \in [-L, L]} \left| 1 - \frac{\gamma_0}{\gamma} \right| < \varepsilon,$$

alors la différence entre les deux premières valeurs propres de \mathcal{L}_h est donnée par

$$\lambda_2(h) - \lambda_1(h) = 2|\tilde{w}_{l,r}| + e^{-\frac{S}{h^{1/(k+2)}}} \mathcal{O}(h^2),$$

avec

$$\tilde{w}_{l,r} = \zeta^{1/2} \pi^{-1/2} h^{\frac{2k+3}{k+2}} \left(\overline{\mathfrak{Y}_r(0)} A_u e^{-\frac{S_u}{h^{1/(k+2)}}} e^{iLf(h)} + \overline{\mathfrak{Y}_r(-L)} A_d e^{-\frac{S_d}{h^{1/(k+2)}}} e^{-iLf(h)} \right), \quad (1.21)$$

où $S = \min \{S_u, S_d\}$, ζ est une constante définie dans (2.47), et

1. la fonction \mathfrak{Y}_r est introduite dans la remarque 2.4.2 ;
2. A_u, A_d sont définis dans (1.19), (1.20) et S_u, S_d sont définis dans (1.18) ;
3. $f(h) = \beta_0/h - h^{\frac{-1}{k+2}} \int_{-L}^0 \gamma(s)^{\frac{1}{k+2}} \left(\xi_0^{[k]} - \text{Im } \varphi_r(s) \right) ds - \alpha_0$, avec
 - la constante α_0 définie dans (2.52) ;
 - φ_r une solution exacte de l'équation eikonale pour le puits droit introduit dans le Lemme 2.4.1 ;
 - la constante β_0 est proportionnelle au flux magnétique à travers Ω et est définie comme suit

$$\beta_0 := \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Omega} \mathbf{B}(x) dx, \quad (1.22)$$

où Ω est le domaine ouvert circonscrit par Γ .

Remarque 1.5.3. Deux situations se présentent dans ce théorème :

1. Si $S_u \neq S_d$, un seul terme dans la somme (1.21) définissant $\tilde{w}_{l,r}$ est dominant et $\tilde{w}_{l,r}$ ne disparaît jamais pour h suffisamment petit.
2. Si $S_u = S_d$, la situation est différente : en raison de la circulation, le terme d'interaction $\tilde{w}_{l,r}$ peut être nul pour certains paramètres h et, dans ce cas, l'écart spectral est d'ordre $\mathcal{O} \left(h^2 e^{-\frac{S}{h^{1/(k+2)}}} \right)$.

Le deuxième cas de la remarque 1.5.3 se produit lorsque le champ magnétique est symétrique par rapport à l'axe x_1 , c'est-à-dire

$$\mathbf{B}(x_1, x_2) = \mathbf{B}(x_1, -x_2) \quad \text{pour tout } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (1.23)$$

Dans ce cas, on a

$$A_u = A_d := A, \quad \mathfrak{Y}_r(0) = \mathfrak{Y}_r(-L) := \mathfrak{Y}_0 \quad \text{et} \quad S_u = S_d := S,$$

et nous obtenons le corollaire suivant.

Corollaire 1.5.4. *Si \mathbf{B} vérifie (1.23) et sous l'hypothèse (1.5.1), il existe $\varepsilon > 0$ tel que si*

$$\sup_{s \in [-L, L]} \left| 1 - \frac{\gamma_0}{\gamma} \right| < \varepsilon,$$

alors la différence entre les deux premières valeurs propres de \mathcal{L}_h est donnée par

$$\lambda_2(h) - \lambda_1(h) = 4\zeta^{1/2}\pi^{-1/2}h^{\frac{2k+3}{k+2}} |\mathfrak{Y}_0| \text{Ae}^{-\frac{S}{h^{1/(k+2)}}} |\cos(f(h))| + h^2 \mathcal{O}\left(e^{-\frac{S}{h^{1/(k+2)}}}\right).$$

Passons maintenant à l'explication de la stratégie utilisée pour démontrer le Théorème 1.5.2. Dans ce travail, nous suivons la même méthode que Bonnaille *et al* [14] (dans le cas où le champ magnétique est constant), mais avec une difficulté qui apparaît ici due à la variation du champ magnétique. Voici les étapes nécessaires pour prouver le Théorème 1.5.2.

Première étape :

Nous commençons par une réduction spectrale au voisinage de la courbe d'annulation Γ . D'après le Théorème 1.3.10, les fonctions propres, associées aux petites valeurs propres de \mathcal{L}_h sont localisées au voisinage de la courbe Γ à l'échelle $h^{\frac{1}{k+2}}$. Cette localisation permet de se ramener à un modèle droit et effectuer le changement de variable suivant

$$(s, t) = (\sigma, \hbar\tau),$$

où $\hbar = h^{\frac{1}{k+2}}$ le nouveau paramètre semi-classique. Plus précisément, elle permet de remplacer l'opérateur \mathcal{L}_h par l'opérateur redimensionné, noté $\mathcal{N}_h^{[k]}$, définie comme une réalisation auto-adjointe sur l'espace $L^2(\Gamma \times \mathbb{R}, \mathbf{a}_h d\sigma d\tau)$ de

$$\mathbf{a}_h^{-1} D_\tau \mathbf{a}_h D_\tau + \mathbf{a}_h^{-1} \left(\hbar D_\sigma - \mathcal{A}_h^{[k]}(\sigma, \tau) \right) \mathbf{a}_h^{-1} \left(\hbar D_\sigma - \mathcal{A}_h^{[k]}(\sigma, \tau) \right),$$

avec

$$\mathbf{a}_h(\sigma, \tau) = 1 - \hbar\tau c_\mu(\tau) \kappa(\sigma),$$

et

$$\mathcal{A}_h^{[k]}(\sigma, \tau) = -\hbar^{-k-1} \beta_0 + \gamma(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} + \hbar \tilde{\delta}(\sigma) c_\mu(\tau) \frac{\tau^{k+2}}{k+2} + \hbar^2 c_\mu \mathcal{O}\left(\tau^{k+3}\right),$$

où $\mu > 0$, $c_\mu(\tau) = c(\mu\tau)$ et c est une fonction de troncature régulière égale à 1 sur $[-1, 1]$ et 0 pour $|t| \geq 2$. Rappelons que β_0 est défini en (1.22) et la fonction $\tilde{\delta}$ en (1.16). Nous

désignons par $(\nu_n(\hbar))_{n \geq 1}$ la suite des valeurs propres de $\mathcal{N}_\hbar^{[k]}$. On a la proposition suivante.

Proposition 1.5.5. *Soit $n \geq 1$. Il existe $D > S, C, h_0 > 0$ tels que, pour tout $h \in (0, h_0)$, on a*

$$\lambda_n(h) - Ce^{-\frac{D}{\hbar^{1/(k+2)}}} \leq \hbar^{2k+2} \nu_n(\hbar) \leq \lambda_n(h) + Ce^{-\frac{D}{\hbar^{1/(k+2)}}}.$$

Cela signifie que, pour estimer la différence entre les valeurs propres, $\lambda_2(h) - \lambda_1(h)$, de l'opérateur initial \mathcal{L}_h , il suffit d'estimer la différence $\nu_2(\hbar) - \nu_1(\hbar)$ correspondante à l'opérateur redimensionné $\mathcal{N}_\hbar^{[k]}$. Dans ce qui suit, nous nous concentrerons sur l'opérateur redimensionné $\mathcal{N}_\hbar^{[k]}$.

Deuxième étape :

Dans cette étape, on essaie de comprendre ce qui se passe avec un seul puits pour ce modèle. Pour cela, nous commençons par considérer l'opérateur du puits droit, en enlevant un petit voisinage de s_l , et en collant une bande infinie, comme le montre la figure 1.2. Nous commençons par identifier Γ avec $(s_l - 2L, s_l]$, et on fixe $\hat{\eta}$ de telle sorte que

$$0 < \hat{\eta} < \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{L}{4} \right\}.$$

Nous considérons l'opérateur différentiel droit suivant, sur l'espace $L^2(\Gamma \times \mathbb{R}, \mathbf{a}_\hbar d\sigma d\tau)$,

$$\mathcal{N}_{\hbar,r,\beta_0}^{[k]} = \mathbf{a}_{\hbar,r}^{-1} D_\tau \mathbf{a}_{\hbar,r} D_\tau + \mathbf{a}_{\hbar,r}^{-1} (\hbar D_\sigma - \mathcal{A}_{\hbar,r,\beta_0}^{[k]}(\sigma, \tau)) \mathbf{a}_{\hbar,r}^{-1} (\hbar D_\sigma - \mathcal{A}_{\hbar,r,\beta_0}^{[k]}(\sigma, \tau)),$$

avec

$$\mathbf{a}_{\hbar,r}(\sigma, \tau) = 1 - \hbar \tau c_\mu(\tau) \kappa_r(\sigma),$$

et

$$\mathcal{A}_{\hbar,r,\beta_0}^{[k]}(\sigma, \tau) = -\hbar^{-k-1} \beta_0 + \gamma_r(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} + \hbar \tilde{\delta}_r(\sigma) \frac{\tau^{k+2}}{k+2} c_\mu(\tau) + c_\mu \hbar^2 \mathcal{O}(\tau^{k+3}),$$

où les fonctions γ_r , δ_r et κ_r sont des extensions respectives de γ , δ et κ (voir 2.3.1 pour les détails). En particulier, l'extension γ_r de γ est choisie de telle sorte que γ_r admette un minimum unique non dégénéré $\gamma_0 > 0$ en $s_r < 0$ et $\left\| 1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_r} \right\|_\infty$ reste suffisamment petit.

Puisque le domaine est maintenant simplement connexe, nous réduisons le travail à l'opérateur $\mathcal{N}_{\hbar,r}^{[k]} := \mathcal{N}_{\hbar,r,0}^{[k]}$ au lieu de $\mathcal{N}_{\hbar,r,\beta_0}^{[k]}$. Le but de cette étape est de trouver une approximation BKW pour l'état fondamental $u_{\hbar,r}^{[k]}$ de l'opérateur à puits droit $\mathcal{N}_{\hbar,r}^{[k]}$.

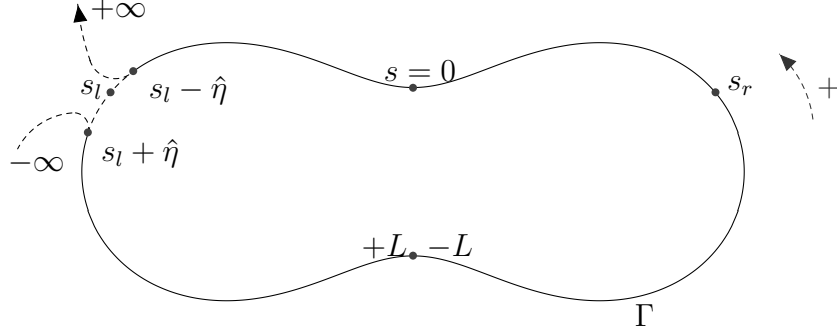


FIGURE 1.2 – Un domaine de puits attaché au puits droit

Introduisons la distance d'Agmon attachée au puits droit

$$\Phi_r(\sigma) = \int_{s_r}^{\sigma} \gamma_r(\tilde{\sigma})^{1/(k+2)} \operatorname{Re}(\varphi_r(\tilde{\sigma})) d\tilde{\sigma},$$

avec φ_r la solution d'une équation implicite (appelé équation eikonale),

$$\gamma_r(\sigma)^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]} + i\varphi_r(\sigma)) = \gamma_0^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}),$$

où $\nu^{[k]}(\xi)$ est la plus petite valeur propre de l'opérateur de Montgomery généralisé $\mathfrak{h}_{\xi}^{[k]}$ qui a été défini dans la section 1.4.

Voici le théorème explicitant les développements BKW des fonctions propres de l'opérateur $\mathcal{N}_{\hbar,r}^{[k]}$. Ce théorème est inspiré de [10, Théorème 5.2].

Théorème 1.5.6. *Il existe une suite de fonctions régulières $(a_{n,j}^{[k]})_{j \geq 0} \subset \operatorname{Dom}(\mathcal{N}_{\hbar,r}^{[k]})$, une suite de nombres réels $(\delta_{n,j}^{[k]})_{j \geq 0} \subset \mathbb{R}$, une famille de fonctions $(\Psi_{\hbar,r}^{[k]})_{\hbar \in (0, \hbar_0]} \subset L^2(\mathbb{R}^2)$ et une famille de nombres réels $(\delta_n^{[k]}(\hbar))_{\hbar \in (0, \hbar_0]}$ telle que*

$$\Psi_{\hbar,r}^{[k]}(\sigma, \tau) \sim \hbar^{-1/4} e^{-\frac{\Phi_r(\sigma)}{\hbar}} e^{i\frac{\mathfrak{g}_r(\sigma)}{\hbar}} \sum_{j \geq 0} a_{n,j}^{[k]}(\sigma, \tau) \hbar^j, \quad \delta_n^{[k]}(\hbar) \sim \sum_{j \geq 0} \delta_{n,j}^{[k]} \hbar^j,$$

et

$$\left(\mathcal{N}_{\hbar,r}^{[k]} - \delta_n^{[k]}(\hbar) \right) \Psi_{\hbar,r}^{[k]} = \mathcal{O}(\hbar^\infty) e^{-\Phi_r/\hbar},$$

avec

$$\mathfrak{g}_r(\sigma) = \int_0^\sigma \gamma_r(\tilde{\sigma})^{\frac{1}{k+2}} \left(\xi_0^{[k]} - \text{Im}(\varphi_r(\tilde{\sigma})) \right) d\tilde{\sigma}. \quad (1.24)$$

De plus,

$$1) \delta_{n,0}^{[k]} = \gamma_0^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}) \text{ et } \delta_{n,1}^{[k]} = \frac{(\nu^{[k]})''(\xi_0^{[k]})}{2} (2n-1)\zeta + \mathfrak{R}_r(s_r),$$

$$2) a_{n,0}^{[k]}(\sigma, \tau) = f_{n,0}(\sigma) u_{\sigma, \mathfrak{w}_r(\sigma)}^{[k]}(\tau), \text{ où } f_{n,0} \text{ résout l'équation de transport effective}$$

$$\frac{1}{2} (\partial_\sigma \mathfrak{V}_r(\sigma) + \mathfrak{V}_r(\sigma) \partial_\sigma) f_{n,0} + \mathfrak{R}_r(\sigma) f_{n,0} = \delta_{n,1} f_{n,0}, \quad (1.25)$$

avec

$$\mathfrak{V}_r(\sigma) = -i \partial_\xi \mu^{[k]}(\sigma, \mathfrak{w}_r(\sigma)), \quad \mathfrak{R}_r(\sigma) = \langle \mathcal{R}_r(\sigma, \tau) u_{\sigma, \mathfrak{w}_r(\sigma)}^{[k]}, u_{\sigma, \mathfrak{w}_r(\sigma)}^{[k]} \rangle,$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_r(\sigma, \tau) &= 2\tau c_\mu \kappa_r(\sigma) \left(\mathfrak{w}_r(\sigma) - \gamma_r(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \right)^2 - 2\tilde{\delta}_r(\sigma) c_\mu \frac{\tau^{k+2}}{k+2} \left(\mathfrak{w}_r(\sigma) - \gamma_r(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \right) \\ &+ c_\mu \kappa_r(\sigma) \partial_\tau + c'_\mu \kappa_r(\sigma) \tau \partial_\tau, \end{aligned}$$

et

$$\zeta = \sqrt{\frac{2}{k+2} \frac{\gamma''(0) \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]})}{\gamma_0^{\frac{k}{k+2}} (\nu^{[k]})''(\xi_0^{[k]})}}, \quad \mathfrak{w}_r(\sigma) := i\Phi'_r(\sigma) + \mathfrak{g}'_r(\sigma).$$

Troisième étape :

Dans cette étape, nous continuons avec l'opérateur $\mathcal{N}_{\hbar,r}^{[k]}$ à puits droit pour la même raison que précédemment, c'est-à-dire pour trouver une approximation optimale pour les fonctions propres de l'opérateur $\mathcal{N}_{\hbar,r}^{[k]}$, qui nous aident à trouver une estimation explicite (exponentiellement petite) de la différence entre les deux premières valeurs propres. Alors on conjugue par une exponentielle et on réduit la dimension (au moins formellement) par Grushin. On choisit alors le poids exponentiel comme une perturbation de la solution de l'équation eikonale et, pour garder de l'ellipticité globale, on utilise l'hypothèse de variation "douce" de la fonction γ_r . Pour cela, nous considérons une fonction lipchitzienne

non négative, $\mathbb{R} \ni \sigma \mapsto \Phi(\sigma)$, satisfaisant l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1.5.7. *Pour tout $M > 0$, il existe $\hbar_0, C, R > 0$ tel que, pour tout $\hbar \in (0, \hbar_0)$, la fonction Φ satisfait,*

(i) *pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$, on a*

$$\operatorname{Re} \left(\gamma_r(\sigma)^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]} \left(\xi_0^{[k]} - \operatorname{Im} (\varphi_r(\sigma)) + i\gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \Phi'(\sigma) \right) - \gamma_0^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}) \right) \geq 0,$$

(ii) *pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$ tel que $|\sigma - s_r| \geq R\hbar^{1/2}$, on a*

$$\operatorname{Re} \left(\gamma_r(\sigma)^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]} \left(\xi_0^{[k]} - \operatorname{Im} (\varphi_r(\sigma)) + i\gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \Phi'(\sigma) \right) - \gamma_0^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}) \right) \geq M\hbar,$$

(iii) *pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$ tel que $|\sigma - s_r| \leq R\hbar^{1/2}$, on a*

$$|\Phi(\sigma)| \leq M\hbar.$$

Nous conjugons alors l'opérateur $\mathcal{N}_{\hbar,r}^{[k]}$ par l'exponentielle $e^{\frac{\Phi}{\hbar}}$, et considérons l'opérateur conjugué

$$\mathcal{N}_{\hbar,r}^{[k],\Phi} = e^{\frac{\Phi}{\hbar}} \mathcal{N}_{\hbar,r}^{[k]} e^{-\frac{\Phi}{\hbar}}.$$

$\mathcal{N}_{\hbar,r}^{[k],\Phi}$ peut être écrit comme un opérateur \hbar -pseudo-différentiel avec un symbole à valeur opérateur dont le symbole principal est l'opérateur de Montgomery généralisé. Sous l'hypothèse 1.5.7, la méthode de réduction de Grushin peut être appliquée pour réduire la dimension afin de prouver les estimations tangentielles optimales d'Agmon. Le théorème suivant montre ces estimations.

Théorème 1.5.8. *Soit $c_0 > 0$. Sous l'hypothèse 1.5.7, il existe $c, \hbar_0, R_0 > 0$ tel que pour tout $\hbar \in (0, \hbar_0)$, $R \geq R_0$ et tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - \mu_0^{[k]}| \leq c_0\hbar$, et tout $\psi \in \operatorname{Dom} \left(\mathcal{N}_{\hbar,r}^{[k],\Phi} \right)$,*

$$c\hbar \|\psi\| \leq \left\| \langle \tau \rangle^{2k+3} \left(\mathcal{N}_{\hbar,r}^{[k],\Phi} - z \right) \psi \right\| + \hbar \left\| \chi_0 \left(\frac{\sigma - s_r}{R\hbar^{1/2}} \right) \psi \right\|,$$

où $\chi_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ est une fonction qui vaut 1 au voisinage de 0.

Par un choix particulier de poids qui vérifie l'hypothèse 1.5.1, les théorèmes 1.5.6 et 1.5.8 conduisent à la proposition suivante. Cette proposition montre des approximations des fonctions propres de l'opérateur $\mathcal{N}_{\hbar,r}^{[k]}$ avec une erreur exponentiellement petite.

Proposition 1.5.9. *On a*

$$e^{\frac{\Phi_r}{\hbar}} \left(\Psi_{\hbar,r}^{[k]} - u_{\hbar,r}^{[k]} \right) = \mathcal{O}(\hbar^\infty),$$

et

$$\langle \tau \rangle^{k+1} e^{\frac{\Phi_r}{\hbar}} \left(\Psi_{\hbar,r}^{[k]} - u_{\hbar,r}^{[k]} \right) = \mathcal{O}(\hbar^\infty),$$

dans $\mathcal{C}^1(K; L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}))$, où $K \subset (s_l - 2L + 2\hat{\eta}, s_l - 2\hat{\eta})$ est un ensemble compact.

Quatrième étape :

Revenons à l'opérateur $\mathcal{N}_\hbar^{[k]}$ avec deux puits symétriques. On considère l'espace

$$\mathcal{E}_\hbar = \bigoplus_{i=1}^2 \text{Ker} \left(\mathcal{N}_\hbar^{[k]} - \nu_i(\hbar) \right).$$

Soit $u_{\hbar,l}^{[k]}$ la fonction propre associée à la plus petite valeur propre de $\mathcal{N}_{\hbar,l}^{[k]}$ (opérateur du puits gauche). A partir de $u_{\hbar,r}^{[k]}$ et $u_{\hbar,l}^{[k]}$, on peut construire une base orthonormée \mathcal{B}_\hbar de \mathcal{E}_\hbar . Ainsi, $\nu_1(\hbar)$ et $\nu_2(\hbar)$ sont exactement les deux valeurs propres de la matrice d'interaction \mathcal{M}_\hbar , matrice de $\mathcal{N}_\hbar^{[k]}$ relative à la base \mathcal{B}_\hbar . En utilisant l'approximation de la Proposition 1.5.9, on peut trouver une expression explicite de l'écart spectral de \mathcal{M}_\hbar avec un erreur d'ordre $e^{-\frac{S}{\hbar}}$. Finalement, pour démontrer le Théorème 1.5.2, il suffit d'utiliser la proposition 1.5.5.

1.5.2 Asymptotique spectrale du Laplacien de Neumann à champ magnétique variable sur un domaine borné régulier en 3D (Chapitre 3)

Soit Ω un ouvert, borné et régulier de \mathbb{R}^3 . On considère un vecteur potentiel magnétique régulier $\mathbf{A} : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Le champ magnétique associé est donné par

$$\mathbf{B}(x) = \nabla \times \mathbf{A}(x),$$

et on suppose qu'il ne s'annule pas sur $\overline{\Omega}$. Pour $h > 0$, nous considérons l'opérateur

$$\begin{cases} \mathcal{L}_h = (-ih\nabla + \mathbf{A})^2, \\ \text{Dom}(\mathcal{L}_h) = \{\psi \in L^2(\Omega) : \mathcal{L}_h\psi \in L^2(\Omega) \text{ et } \mathbf{n} \cdot (-ih\nabla + \mathbf{A})\psi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}, \end{cases}$$

où \mathbf{n} est la normale à la frontière orientée vers l'extérieur.

La forme quadratique associée est définie, pour tout $\psi \in H^1(\Omega)$, par

$$\mathcal{Q}(\psi) = \int_{\Omega} |(-i\nabla - \mathbf{A})\psi|^2 dx, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega).$$

Puisque Ω est régulier et borné, l'opérateur \mathcal{L}_h est auto-adjoint et à résolvante compacte. Alors, on peut considérer la suite croissante de ces valeurs propres $(\lambda_n(h))_{n \geq 1}$. Le but de ce travail est de décrire le comportement asymptotique des valeurs propres $\lambda_n(h)$ dans la limite semi-classique $h \rightarrow 0^+$.

Rappelons que pour un point $x \in \partial\Omega$, on a défini l'angle $\theta(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ en (1.10) par

$$\mathbf{B}(x) \cdot \mathbf{n}(x) = \|\mathbf{B}(x)\| \sin \theta(x), \quad (1.26)$$

et la fonction β sur la frontière par :

$$\beta(x) = \|\mathbf{B}(x)\| \mathbf{e}(\theta(x)), \quad (1.27)$$

où $\mathbf{e}(\theta)$ est définie dans (1.11). Nous travaillons sous des hypothèses de non dégénérescence concernant la fonction β .

Hypothèse 1.5.10. *La fonction β possède un unique minimum, qui est non dégénéré. Il est atteint en $x_0 \in \partial\Omega$ et on a*

$$\theta(x_0) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

De plus, on a

$$\beta_{\min} = \beta(x_0) = \min_{x \in \partial\Omega} \beta(x) < \min_{x \in \bar{\Omega}} \|\mathbf{B}(x)\| = b_{\min}.$$

Le théorème suivant établit la décomposition asymptotique complète de la n -ième valeur propre du Laplacien magnétique \mathcal{L}_h , et est le résultat principal de ce travail.

Théorème 1.5.11. *Sous l'hypothèse 1.5.10, il existe $C_0, C_1 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geq 1$, on a*

$$\lambda_n(h) \underset{h \rightarrow 0^+}{=} \beta_{\min} h + C_0 h^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{\sqrt{\det \text{Hess}_{x_0} \beta}}{\|\mathbf{B}(x_0)\| \sin \theta(x_0)} \left(n - \frac{1}{2} \right) + C_1 \right) h^2 + o(h^2).$$

En particulier, pour tout $n \geq 1$, $\lambda_n(h)$ devient une valeur propre simple dès que h est

suffisamment petit.

Expliquons maintenant la stratégie de la preuve du Théorème 1.5.11.

Première étape : Opérateur approximé

On prouve que les fonctions propres associées aux valeurs propres $\lambda = \beta_{\min}h + \mathcal{O}(h^{\frac{3}{2}})$, sont exponentiellement localisées au voisinage de x_0 à l'échelle $h^{\frac{1}{2}}$ près de la frontière $\partial\Omega$ (optimal) et grossièrement à l'ordre $h^{\frac{1}{8}}$ au voisinage de x_0 (non optimal).

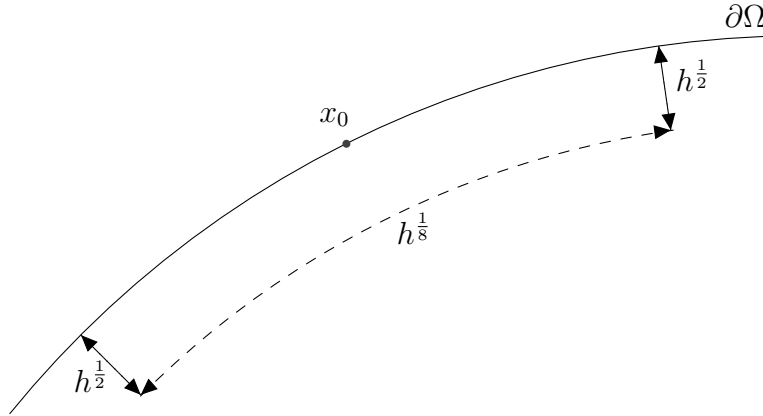


FIGURE 1.3 – Localisation au voisinage de x_0

Cela nous suggère d'introduire des coordonnées locales au voisinage de x_0 . Soit

$$\mathbf{b}(x) = \frac{\mathbf{B}(x)}{\|\mathbf{B}(x)\|},$$

et considérons sa projection sur le plan tangent à $x \in \partial\Omega$:

$$\mathbf{b}^{\parallel}(x) = \mathbf{b}(x) - \langle \mathbf{b}(x), \mathbf{n}(x) \rangle \mathbf{n}(x).$$

En raison de l'hypothèse 1.5.10, au voisinage x_0 , le champ de vecteur \mathbf{b}^{\parallel} ne s'annule pas. Cela permet de considérer le champ de vecteurs unitaire

$$\mathbf{f}(x) = \frac{\mathbf{b}^{\parallel}(x)}{\|\mathbf{b}^{\parallel}(x)\|}$$

et la courbe intégrale associée γ donné par

$$\gamma'(s) = \mathbf{f}(\gamma(s)), \quad \gamma(0) = x_0,$$

qui est bien définie sur $(-s_0, s_0)$ pour certain $s_0 > 0$. Ainsi, γ est régulière et a des valeurs dans $\partial\Omega$.

On désigne par K la deuxième forme fondamentale de $\partial\Omega$ associée à la carte de Weingarten définie par

$$\forall U, V \in T_x \partial\Omega, \quad K_x(U, V) = \langle d\mathbf{n}_x(U), V \rangle.$$

Nous pouvons considérer l'EDO avec le paramètre s d'inconnue $r \mapsto \gamma(r, s)$

$$\partial_r^2 \gamma(r, s) = -K(\partial_r \gamma(r, s), \partial_r \gamma(r, s)) \mathbf{n}(\gamma(r, s)),$$

avec les conditions initiales

$$\gamma(0, s) = \gamma(s), \quad \partial_r \gamma(0, s) = -\gamma'(s)^\perp,$$

où \perp est entendu dans l'espace tangent. Cette EDO a une solution unique et régulière $(-r_0, r_0) \times (-s_0, s_0) \ni (r, s) \mapsto \gamma(r, s)$ où $r_0 > 0$ est choisi suffisamment petit. Nous

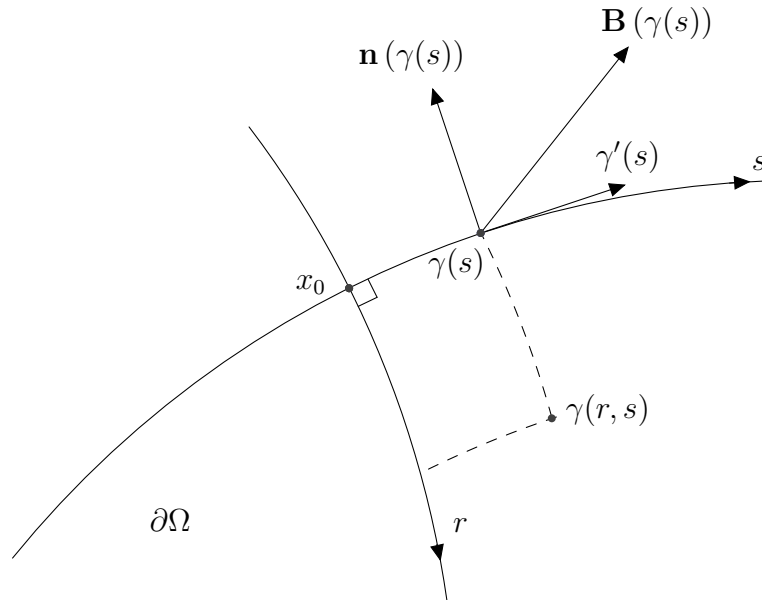


FIGURE 1.4 – Coordonnées locales au voisinage de x_0 sur le bord $\partial\Omega$

considérons alors les coordonnées tubulaires associées à la carte γ :

$$y = (r, s, t) \mapsto \Gamma(r, s, t) = \gamma(r, s) - t\mathbf{n}(\gamma(r, s)) = x.$$

Dans ces coordonnées, la métrique Euclidienne est donnée par

$$\mathbf{G} = (d\Gamma)^T d\Gamma = \begin{pmatrix} \mathbf{g} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

avec

$$\mathbf{g}(r, s, t) = \begin{pmatrix} \|(\text{Id} - t\mathbf{dn})(\partial_r\gamma)\|^2 & \langle (\text{Id} - t\mathbf{dn})(\partial_r\gamma), (\text{Id} - t\mathbf{dn})(\partial_s\gamma) \rangle \\ \langle (\text{Id} - t\mathbf{dn})(\partial_r\gamma), (\text{Id} - t\mathbf{dn})(\partial_s\gamma) \rangle & \|(\text{Id} - t\mathbf{dn})(\partial_s\gamma)\|^2 \end{pmatrix}.$$

Après changement de gauge et de variables adéquats, l'opérateur \mathcal{L}_h agit localement comme

$$|\mathbf{g}|^{-\frac{1}{2}}(-ih\nabla_y - \tilde{\mathbf{A}}(y)) \cdot |\mathbf{g}|^{\frac{1}{2}}\mathbf{G}^{-1}(-ih\nabla_y - \tilde{\mathbf{A}}(y)),$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1(r, s, t) &= \int_0^t [|\mathbf{g}|^{\frac{1}{2}}\mathcal{B}_2](r, s, \tau)d\tau, \\ \tilde{A}_2(r, s, t) &= -\int_0^t [|\mathbf{g}|^{\frac{1}{2}}\mathcal{B}_1](r, s, \tau)d\tau + \int_0^r [|\mathbf{g}|^{\frac{1}{2}}\mathcal{B}_3](u, s, 0)du, \\ \tilde{A}_3(r, s, t) &= 0. \end{aligned}$$

Ici, \mathcal{B}_1 , \mathcal{B}_2 et \mathcal{B}_3 sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ qui vérifient, en $t = 0$,

$$\mathcal{B}_1(r, s, 0) = \langle \mathbf{B}, \partial_r\gamma \rangle, \quad \alpha(r, s)^{\frac{1}{2}}\mathcal{B}_2(r, s, 0) = \langle \mathbf{B}, \partial_s\gamma \rangle \text{ et } \mathcal{B}_3(r, s, 0) = \langle \mathbf{B}, \mathbf{n} \rangle,$$

avec $\alpha(r, s) = |\partial_s\gamma(r, s)|^2$.

La localisation en t suggère que nous pouvons remplacer $\tilde{\mathbf{A}}$ par son développement de Taylor en t (seulement). On considère

$$\mathcal{L}_h^{\text{app}} := \left(-ih\partial_r - \hat{A}_1\right)^2 + \alpha^{-1} \left(-ih\partial_s - \hat{A}_2\right)^2 - h^2\partial_t^2,$$

avec

$$\begin{aligned}\hat{A}_1(r, s, t) &= t\overset{\circ}{C}_1 + \overset{\circ}{C}_2\hat{t}^2 + \overset{\circ}{C}_3\hat{t}^3, \\ \hat{A}_2(r, s, t) &= -t\overset{\circ}{E}_1 + \mathcal{J}_1(r, s) + \overset{\circ}{E}_2\hat{t}^2 + \overset{\circ}{E}_3\hat{t}^3, \\ \hat{A}_3(r, s, t) &= 0,\end{aligned}$$

où $\mathcal{J}(r, s) = \left(\int_0^r |g|^{\frac{1}{2}} \overset{\circ}{\mathcal{B}}_3(u, s, 0) du, s \right)$, $C_1 = \alpha^{\frac{1}{2}} \mathcal{B}_2$ et $E_1 = \alpha^{\frac{1}{2}} \mathcal{B}_1$. Ici, la notation $\overset{\circ}{C}$ définit une extension de la fonction C à \mathbb{R}^2 , et dépendant de la nouvelle variable $\hat{t} = t\chi\left(\frac{t}{h^{\frac{1}{2}-\eta}}\right)$, pour $\eta > 0$. On montre alors :

Proposition 1.5.12. *Pour tout $n \geq 1$, on a*

$$\lambda_n(h) \underset{h \rightarrow 0^+}{=} \lambda_n(\mathcal{L}_h^{\text{app}}) + o(h^2).$$

Essayons maintenant de décrire le spectre de $\mathcal{L}_h^{\text{app}}$.

Deuxième étape : Transformation canonique

On considère le changement de variable $(u_1, u_2) = \mathcal{J}(r, s)$ et nous obtenons un nouvel opérateur noté

$$\mathcal{N}_h = \mathcal{D}_h \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \check{\alpha}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{D}_h,$$

où

$$\mathcal{D}_h = \begin{pmatrix} -ih\check{C}_0\partial_{u_1} - t\check{C}_1 - \hat{t}^2\check{C}_2 - \hat{t}^3\check{C}_3 \\ -ih\partial_{u_2} - u_1 - ih\check{E}_0\partial_{u_1} + t\check{E}_1 - \hat{t}^2\check{E}_2 - \hat{t}^3\check{E}_3 \\ -ih\partial_t \end{pmatrix},$$

et

$$C_0 = \alpha^{\frac{1}{2}} \mathcal{B}_3, \quad E_0 = \partial_s \mathcal{J}_1,$$

et les notations \check{C} signifie que l'on regarde les fonctions comme des fonctions en (u_1, u_2) . On prouve alors que les fonctions propres associées aux valeurs propres $\lambda \leq Kh$ sont microlocalisées au voisinage de $v_2 - u_1 = 0$ (v_2 est le symbole de $-ih\partial_{u_2}$) dans le sens où

$$\left[\Xi \left(\frac{u_1 - v_2}{h^{\frac{1}{2}-\eta}} \right) \right]^W \psi = \mathcal{O}(h^\infty).$$

Considérons la transformée de Fourier semi-classique partielle \mathcal{F}_2 ⁵ par rapport à u_2 et à la translation/dilatation $T : u_1 \mapsto (u_1 - v_2)h^{-\frac{1}{2}} = z$. Nous obtenons un nouvel opérateur

$$\mathcal{N}_h^\# = \mathcal{D}_h^\# \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \check{\alpha}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\# \mathcal{D}_h^\#,$$

avec

$$\mathcal{D}_h^\# = \begin{pmatrix} -iC_0^\# \partial_z - tC_1^\# - \hbar t^2 \chi(h^\eta t)^2 C_2^\# - \hbar^2 t^3 \chi(h^\eta t)^3 C_3^\# \\ -z - iE_0^\# \partial_z + tE_1^\# - \hbar t^2 \chi(h^\eta t)^2 E_2^\# - \hbar^2 t^3 \chi(h^\eta t)^3 E_3^\# \\ -i\partial_t \end{pmatrix}^W,$$

où $P^\# = \check{P}(v_2 + \hbar z, u_2)$ et $\hbar = h^{\frac{1}{2}}$. Après cette transformation, \mathcal{N}_h devient $h\mathcal{N}_h^\#$. La localisation en z permet d'étendre $\mathcal{N}_h^\#$ en puissances de \hbar de symbole principal donné par

$$n_0(u_2, v_2) = (-i\check{C}_0(v_2, -u_2)\partial_z - t\check{C}_1(v_2, -u_2))^2 + \alpha^{-1}(v_2, -u_2)(-z - i\check{E}_0(v_2, -u_2)\partial_z + t\check{E}_1(v_2, -u_2))^2 - \partial_t^2,$$

Grâce à la transformée de Fourier en z et à un changement de gauge, n_0 est unitairement équivalent au même opérateur avec $\check{E}_0 = 0$. Enfin, quelques considérations élémentaires montrent que l'énergie de l'état fondamental de n_0 est $\check{\beta}(v_2, u_2)$, c'est-à-dire la fonction β définie en (1.27) dans les nouvelles variables, ce qui justifie sa rôle crucial dans le résultat complet.

Troisième étape : Réduction de Grushin

La matrice

$$\mathcal{P}_0(\Lambda) = \begin{pmatrix} n_0(u, v) - \Lambda & \cdot \mathfrak{f}_{u,v} \\ \langle \cdot, \mathfrak{f}_{u,v} \rangle & 0 \end{pmatrix},$$

est bijective dès que $\Lambda \leq \beta_{\min} + \epsilon$, où $\mathfrak{f}_{u,v}$ est la fonction propre de $n_0(u, v)$ associée à $\check{\beta}(v, u)$. Son inverse est

$$\mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q}_0(\Lambda) = \begin{pmatrix} (n_0(u, v) - \Lambda)_\perp^{-1} & \cdot \mathfrak{f}_{u,v} \\ \langle \cdot, \mathfrak{f}_{u,v} \rangle & \Lambda - \check{\beta}(v, u) \end{pmatrix},$$

5. qui est la transformée méta-plectique associée à l'application symplectique linéaire $(u_2, v_2) \mapsto (v_2, -u_2)$, voir, par exemple, [80, Section 3.4].

où $(n_0(u, v) - \Lambda)_\perp^{-1}$ est le résolvant régularisé sur $(\text{vect } \mathbf{f}_{u,v})^\perp$. Le symbole complet est alors

$$\mathcal{P}_\hbar(\Lambda) = \begin{pmatrix} n_\hbar - \Lambda & \cdot \mathbf{f}_{u,v} \\ \langle \cdot, \mathbf{f}_{u,v} \rangle & 0 \end{pmatrix},$$

et on a

$$\mathcal{P}_\hbar^{\text{W}}(\Lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_\hbar^\# - \Lambda & \text{P}^* \\ \text{P} & 0 \end{pmatrix},$$

où $\text{P} = \langle \cdot, \mathbf{f}_{u,v} \rangle^{\text{W}}$. Il existe alors \mathcal{Q}_1 et \mathcal{Q}_2 tels que, si on note

$$\mathcal{Q}_\hbar = \mathcal{Q}_0 + \hbar \mathcal{Q}_1 + \hbar^2 \mathcal{Q}_2,$$

on a

$$\mathcal{Q}_\hbar^{\text{W}} \mathcal{P}_\hbar^{\text{W}} = \text{Id} + \mathcal{O}(\hbar^3), \tag{1.28}$$

$$\mathcal{P}_\hbar^{\text{W}} \mathcal{Q}_\hbar^{\text{W}} = \text{Id} + \mathcal{O}(\hbar^3), \tag{1.29}$$

avec les restes estimés dans une topologie convenable. On note par

$$\mathcal{Q}_\hbar^{\text{W}} = \begin{pmatrix} \mathfrak{q}_\hbar & \mathfrak{q}_\hbar^+ \\ \mathfrak{q}_\hbar^- & \mathfrak{q}_\hbar^\pm \end{pmatrix}.$$

Le terme \mathfrak{q}_\hbar^\pm est de la forme

$$\mathfrak{q}_\hbar^\pm = \Lambda - \left(\text{p}_0 + \hbar \text{p}_1 + \hbar^2 \text{p}_{2,\Lambda} \right),$$

avec $\text{p}_0 = \check{\beta}(v, u)$. Les équations 1.28 et 1.29 nous donne

$$\begin{cases} (\mathfrak{q}_\hbar)^{\text{W}} (\mathcal{N}_\hbar^\# - \Lambda) \psi + (\mathfrak{q}_\hbar^+)^{\text{W}} \text{P} \psi = \psi + \mathcal{O}(\hbar^3) \|\psi\|, \\ (\mathfrak{q}_\hbar^-)^{\text{W}} (\mathcal{N}_\hbar^\# - \Lambda) \psi + (\mathfrak{q}_\hbar^\pm)^{\text{W}} \text{P} \psi = \mathcal{O}(\hbar^3) \|\psi\|, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} (\mathcal{N}_\hbar^\# - \Lambda) (\mathfrak{q}_\hbar^+)^{\text{W}} \varphi + \text{P}^* (\mathfrak{p}_\hbar^\pm)^{\text{W}} \varphi = \mathcal{O}(\hbar^3) \|\varphi\|, \\ \text{P} (\mathfrak{p}_\hbar^+)^{\text{W}} \varphi = \varphi + \mathcal{O}(\hbar^3) \|\varphi\|. \end{cases}$$

Ainsi, $\mathcal{N}_\hbar^\# - \Lambda$ est inversible si et seulement si $\mathfrak{q}_\hbar^\pm^{\text{W}}$ est inversible et on a

$$(\mathcal{N}_\hbar^\# - \Lambda)^{-1} = \mathfrak{q}_\hbar^{\text{W}} - \mathfrak{q}_\hbar^{+\text{W}} (\mathfrak{q}_\hbar^{\pm\text{W}})^{-1} \mathfrak{q}_\hbar^{-\text{W}}.$$

Si on note par $p_h^{\text{eff}} = p_0^{\text{W}} + \hbar p_1^{\text{W}} + \hbar^2 p_{2,\Lambda}^{\text{W}}$, alors

$$\Lambda \in \text{Sp}(\mathcal{N}_h^\sharp) \text{ si et seulement si } \Lambda \in \text{Sp}(p_h^{\text{eff}}).$$

C'est pourquoi il suffit maintenant de décrire le spectre et la résolvante de p_h^{eff} .

Quatrième étape : À propos de p_h^{eff}

Si l'on développe le symbole au voisinage du minimum de son symbole principal, on est amené à considérer

$$p_h^{\text{mod}}(U) = p_h^{\text{eff}}(U) + \frac{1}{2} \text{Hess}_{(0,0)} p_0(U) + \hbar p_1^{\text{lin}}(U),$$

avec $U = (u, v)$.

Après rotation et utilisation de l'hypothèse 1.5.10, nous pouvons supposer que

$$p_h^{\text{mod}} = p_h^{\text{eff}}(0) + \frac{d_0}{2} (u^2 + v^2) + \hbar (\alpha u + \beta v),$$

avec $d_0 > 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. En complétant le carré et en utilisant la théorie analytique des perturbations, on obtient que le spectre de p_h^{mod} est donné par

$$\left\{ \frac{d_0}{2} (2n - 1) + p_h^{\text{eff}}(0) - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{d_0} \hbar^2 \right\}.$$

Les fonctions propres correspondantes sont de bons quasimodes pour $(p_h^{\text{eff}})^{\text{W}}$ et, par suite, pour \mathcal{N}_h^\sharp . Cela montre que le spectre de $(p_h^{\text{mod}})^{\text{W}}$ est réel lorsque \hbar est suffisamment petit. Cela donne la borne supérieure

$$\lambda_n(\mathcal{N}_h^\sharp) \leq \lambda_n^{\text{mod}}(\hbar) + C\hbar^3.$$

La borne inférieure est établie en utilisant en particulier que les valeurs propres de l'opérateur non auto-adjoint $(p_h^{\text{mod}})^{\text{W}}$ ont une multiplicité algébrique égale à 1.

TUNNELING EFFECT IN 2D WITH VANISHING MAGNETIC FIELDS

2.1 Introduction

2.1.1 Motivation

We consider two functions $\mathbf{A} : \mathbb{R}_x^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ and $V : \mathbb{R}_x^d \longrightarrow \mathbb{R}$ corresponding to the magnetic potential and the electric potential respectively. These two potentials provide an electromagnetic field (E, B) defined by

$$E = \nabla V \text{ and } B = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Considering the Schrödinger equation

$$ih\partial_t\Psi = \left((-ih\nabla + \mathbf{A})^2 + V\right)\Psi, \quad (2.1)$$

for $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ and Ψ a normalized solution of (2.1), $|\Psi(x, t)|^2$ is then the probability density of presence of the particle at point x and at time t . Here, h is considered as a strictly positive semi-classical parameter close to 0^+ , in the spirit of the so called semi-classical analysis.

A particular solution of equation (2.1) is then

$$\Psi(x, t) = \varphi(x)e^{-\frac{i\lambda t}{h}},$$

where λ and φ verify

$$\left((-ih\nabla + \mathbf{A})^2 + V\right)\varphi = \lambda\varphi.$$

We are interested here in the determination of such a so-called eigenpair (λ, φ) in the semiclassical limit ($h \rightarrow 0$).

In some cases (where there are symmetries), the difference between the first two lowest eigenvalues can be exponentially small with respect to h , leading to what is called tunneling effect. The tunneling effect is an important physical phenomenon. Mathematically, this phenomenon was studied in particular in the 80's by Helffer and Sjöstrand in the case where the magnetic potential $\mathbf{A} = 0$ and the electric potential has non-degenerate minima [56, 57, 58, 40]. They proved that the ground states are concentrated near the minima of the potential V .

This article deals with the same tunneling question, but when $V = 0$ and in a particular geometric situation. A first answer to this type of question was found by Bonnaillie-Hérau-Raymond [14] in the case where the magnetic field is constant in a open, bounded and regular domain of \mathbb{R}^2 with the Neumann condition on the boundary. In that work, the authors found an explicit expression of the difference between the first two eigenvalues, leading to the first explicit tunneling formula in a pure magnetic situation. A second case was studied by Fournais-Helffer-Kachmar [35] in the case where the magnetic field is a piecewise constant function with a jump discontinuity along a symmetric curve.

In this paper, we work with a variable magnetic field in \mathbb{R}^2 . We prove that, under some symmetry and small variability conditions on the magnetic field, the tunneling effect also occurs. Note this work is the first one providing tunneling effect results in the case where the magnetic field is variable.

2.1.2 Semiclassical magnetic Laplacian

The purely magnetic Laplacian in \mathbb{R}^2 is defined by

$$\mathcal{L}_h = (-ih\nabla + \mathbf{A})^2, \quad \text{Dom}(\mathcal{L}_h) = \left\{ \psi \in L^2(\mathbb{R}^2) : \mathcal{L}_h\psi \in L^2(\mathbb{R}^2) \right\},$$

with $\mathbf{A} = (A_1, A_2) \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Note that by gauge invariance, this self adjoint operator is unitarily equivalent to

$$(-ih\nabla + \mathbf{A} + \nabla\phi)^2,$$

for any suitable real valued function ϕ . This gauge transformation ensures that the spectrum of \mathcal{L}_h depends only on the magnetic field $B = \nabla \times \mathbf{A}$. We assume that $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} B(x) = +\infty$, to ensure that the resolvent of \mathcal{L}_h is compact. In this case, we can consider the non-decreasing sequence of eigenvalues $(\lambda_n(h))_{n \geq 1}$.

In this paper, we will focus on a variable magnetic field that vanishes to order $k \geq 1$

on a smooth compact connected curve Γ of \mathbb{R}^2 . In Section 2.2, the tubular coordinates (s, t) in the neighborhood of the zero curve Γ are defined in detail, where s is the arc length of Γ and t is the normal distance to Γ . With these tubular coordinates and the diffeomorphism Φ defined in (2.14), we define the function γ on Γ by

$$\gamma(s) := \frac{1}{k!} \left(\partial_t^k (B \circ \Phi)(s, 0) \right). \quad (2.2)$$

The objective is then to find an explicit approximation of the difference between the first two eigenvalues $\lambda_2(h) - \lambda_1(h)$ of \mathcal{L}_h , in terms of γ and other geometric quantities.

An important toy model in our context is the so-called generalized Montgomery operator, which is the self-adjoint realization, on $L^2(\mathbb{R}, dt)$, of the following operator

$$\mathfrak{h}_\xi^{[k]} = D_t^2 + \left(\xi - \frac{t^{k+1}}{k+1} \right)^2, \quad k \geq 1.$$

The spectrum of this operator can be found in [53], in which it is proven that the function $\mathbb{R} \ni \xi \mapsto \nu^{[k]}(\xi)$ admits a unique non-degenerate minimum at $\xi_0^{[k]}$ and that $\nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}) > 0$, where $\nu^{[k]}(\xi)$ is the eigenvalue of $\mathfrak{h}_\xi^{[k]}$. This function will be crucial in the monic result.

The spectrum of the magnetic Laplacian \mathcal{L}_h has been the subject of many works [6, 7, 33, 51, 52, 75], particularly in the context of superconductivity, in which the asymptotic description of the third critical field associated with the Ginzburg-Landau functional is related to the ground state energy of the magnetic Laplacian.

In this paper we will follow the strategy of Helffer and Sjöstrand which has been recently applied to understand the tunneling effect for the Neumann realization in a bounded domain. This strategy has been already used in the paper [14] by Bonnaillie-Hérau-Raymond and in paper [35] by Fournais-Helffer-Kachmar.

Earlier rigorous spectral results were obtained in the case of the magnetic Laplacian with vanishing magnetic field [84, 46, 48, 28]. Helffer and Morame exhibited normal Agmon estimates which allow to show the localization of the eigenfunctions in the neighborhood of the zero curve Γ [48]. Helffer and Kordyukov found the first term of the asymptotic expansion of the groundstate energy of \mathcal{L}_h in [46], and the following asymptotic formula was established

$$\lambda_1(h) = \gamma_0^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}) h^{\frac{2k+2}{k+2}} + o\left(h^{\frac{2k+2}{k+2}}\right), \quad (2.3)$$

where $\gamma_0 > 0$ is the minimum of the function γ on Γ . In [28], Dombrowski and Raymond also found local and microlocal estimates for the eigenfunctions when the function γ has

a unique and non-degenerate minimum $\gamma_0 > 0$ at $s = 0$ on Γ . They established that, for $k = 1$ and for all $n \geq 1$,

$$\lambda_n(h) = \theta_0^n h^{\frac{4}{3}} + \theta_1^n h^{\frac{5}{3}} + o\left(h^{\frac{5}{3}}\right), \quad (2.4)$$

with $\theta_0^n := \gamma_0^{\frac{2}{3}} \nu^{[1]}(\xi_0^{[1]})$ and $\theta_1^n := \gamma_0^{\frac{2}{3}} C_0 + \gamma_0^{\frac{2}{3}} (2n - 1) \left(\frac{2\nu^{[1]}(\xi_0^{[1]}) (\nu^{[1]})''(\xi_0^{[1]}) \gamma_0}{3\gamma''(0)} \right)$, where C_0 is a constant.

An open question for the magnetic Laplacian was whether the eigenfunctions have a similar approximation as the eigenvalues in (2.4), i.e. whether we can approximate the eigenfunctions by asymptotics of the form

$$e^{-\frac{\Phi(s)}{h^\alpha}} \sum_{j \geq 1} a_j(s, t) h^j, \quad (2.5)$$

for some $\alpha > 0$. A positive answer to this question was found by Bonnaillie-Hérau-Raymond in [10], in which they give a formal WKB expansions for the eigenfunctions of the magnetic Laplacian. The function Φ that appears in (2.5) is a solution of an equation called “eikonal equation”. In papers [14] and [35], the eikonal equation has explicit solutions and thus the function Φ can be found explicitly as a function of the curvature of the boundary. This shows that the tunneling effect is linked to the curvature. However, in this paper, the situation is different.

In this work, the eikonal equation is given by (see section 2.4.2) :

$$\gamma(\sigma)^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]} + i\Phi'(\sigma)) = \gamma_0^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}), \quad (2.6)$$

where $\gamma_0 := \min_{s \in \Gamma} \gamma(s) > 0$. We note that in this equation, we implicitly use a holomorphic extension, in a complex neighborhood of $\xi_0^{[k]}$, of the function $\mathbb{R} \ni \xi \mapsto \nu^{[k]}(\xi)$ associated to the Montgomery operator $\mathfrak{h}_\xi^{[k]}$. For the solution of this eikonal equation to be a priori well defined, we shall assume that

$$\left\| 1 - \frac{\gamma_0}{\gamma} \right\|_\infty$$

is sufficiently small.

The eikonal equation (2.6) is an implicit complex equation, and a priori its solution is an unknown complex valued function. This induces difficulties not appearing in [14] and [35].

2.1.3 Main result

We work under the following assumptions on the geometry and the potential.

Assumption 2.1.1. *It is assumed that the magnetic field B vanishes exactly to order $k \geq 1$ on a closed, smooth, non empty compact and connected curve $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$. It is further assumed that*

- (i) B is symmetric with respect to the x_2 -axis and therefore Γ also;
- (ii) the function γ on Γ admits a unique non-degenerate minimum $\gamma_0 > 0$ which is reached only at two distinct symmetric points $a_1, a_2 \in \Gamma$. We suppose that s_r and s_l are the respective arc lengths for a_1 and a_2 ;
- (iii) $\left\|1 - \frac{\gamma_0}{\gamma}\right\|_\infty$ is sufficiently small.

We define the so-called Agmon distance attached to the two wells as

$$S = \min \{S_u, S_d\}, \quad (2.7)$$

with “up” and “down” constants S_u and S_d defined by

$$S_u = \int_{[s_r, s_l]} \gamma(s)^{\frac{1}{k+2}} \mathfrak{D}(s) ds \text{ and } S_d = \int_{[s_l, s_r]} \gamma(s)^{\frac{1}{k+2}} \mathfrak{D}(s) ds, \quad (2.8)$$

where, \mathfrak{D} is a positive function defined on Γ which will be defined later in (2.33).

Let $L = \frac{|\Gamma|}{2}$. We define the two constants A_u and A_d by

$$A_u := \exp \left(- \int_{s_r}^0 \operatorname{Re} \left(\frac{\mathfrak{Y}'_r(s) + 2\mathfrak{R}_r(s) - 2\delta_{1,1}^{[k]}}{2\mathfrak{Y}_r(s)} \right) ds \right), \quad (2.9)$$

and

$$A_d := \exp \left(- \int_{s_l}^L \operatorname{Re} \left(\frac{\mathfrak{Y}'_l(s) + 2\mathfrak{R}_l(s) - 2\delta_{1,1}^{[k]}}{2\mathfrak{Y}_l(s)} \right) ds \right), \quad (2.10)$$

where $\delta_{1,1}^{[k]}$ is the second term of the asymptotic decomposition of the ground state energy (see Theorem 2.4.3), and the functions \mathfrak{Y}_r , \mathfrak{Y}_l , \mathfrak{R}_r and \mathfrak{R}_l are defined in remarks 2.4.5 and 2.4.6.

Let us state the main theorem of this paper, which gives an optimal estimate of the tunneling effect when the magnetic field vanishes along a curve Γ .

Theorem 2.1.2. *Under Assumption 2.1.1, there exists $\varepsilon > 0$ such that if*

$$\sup_{s \in [-L, L]} \left| 1 - \frac{\gamma_0}{\gamma} \right| < \varepsilon,$$

then the difference between the first two eigenvalues of \mathcal{L}_h is given by

$$\lambda_2(h) - \lambda_1(h) = 2 |\tilde{w}_{l,r}| + e^{-\frac{S}{h^{1/(k+2)}}} \mathcal{O}(h^2),$$

with

$$\tilde{w}_{l,r} = \zeta^{1/2} \pi^{-1/2} h^{\frac{2k+3}{k+2}} \left(\overline{\mathfrak{V}_r(0)} A_u e^{-\frac{S_u}{h^{1/(k+2)}}} e^{iL f(h)} + \overline{\mathfrak{V}_r(-L)} A_d e^{-\frac{S_d}{h^{1/(k+2)}}} e^{-L i f(h)} \right), \quad (2.11)$$

where $S = \min \{S_u, S_d\}$, ζ is a constant defined in (2.47), and

- 1) *the function \mathfrak{V}_r is introduced in remark 2.4.2;*
- 2) *A_u, A_d are defined in (2.9), (2.10) and S_u, S_d are defined in (2.8);*
- 3) *$f(h) = \beta_0/h - h^{-\frac{1}{k+2}} \int_{-L}^0 \gamma(s)^{\frac{1}{k+2}} \left(\xi_0^{[k]} - \text{Im } \varphi_r(s) \right) ds - \alpha_0$, with*

- (i) *the constant α_0 defined in (2.52);*
- (ii) *φ_r an exact solution of the eikonal equation for the right well introduced in Lemma 2.4.1;*
- (ii) *the constant β_0 , is proportional to the magnetic flux through Ω , defined as*

$$\beta_0 := \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Omega} B(x) dx, \quad (2.12)$$

where Ω is the open domain formed by the interior of Γ .

Remark 2.1.3. *We have two situations in this theorem :*

1. *If $S_u \neq S_d$, only one term in the sum (2.11) defining $\tilde{w}_{l,r}$ is dominant and $\tilde{w}_{l,r}$ never vanishes for h small enough.*
2. *If $S_u = S_d$, the situation is different : due to the circulation, the interaction term $\tilde{w}_{l,r}$ can vanish for some parameters h and in this case the spectral gap is of order $\mathcal{O}\left(h^2 e^{-\frac{S}{h^{1/(k+2)}}}\right)$.*

The second case in remark 2.1.3 occurs when the magnetic field is symmetric with respect to the x_1 -axis, i.e

$$B(x_1, x_2) = B(x_1, -x_2) \quad \text{for all } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.13)$$

In this case, we have

$$A_u = A_d := A, \quad \mathfrak{V}_r(0) = \mathfrak{V}_r(-L) := \mathfrak{V}_0 \quad \text{and} \quad S_u = S_d := S,$$

and we get the following corollary.

Corollary 2.1.4. *If B verifies (2.13) and under Assumption 2.1.1, there exists $\varepsilon > 0$ such that if*

$$\sup_{s \in [-L, L]} \left| 1 - \frac{\gamma_0}{\gamma} \right| < \varepsilon,$$

then the difference between the first two eigenvalues of \mathcal{L}_h is given by

$$\lambda_2(h) - \lambda_1(h) = 4\zeta^{1/2}\pi^{-1/2}h^{\frac{2k+3}{k+2}} |\mathfrak{V}_0| A e^{-\frac{S}{h^{1/(k+2)}}} |\cos(f(h))| + h^2 \mathcal{O}\left(e^{-\frac{S}{h^{1/(k+2)}}}\right).$$

2.1.4 Organization of the paper

In Section 2.2, we explain the spectral reduction scheme, using normal Agmon estimates and tubular coordinates in the neighborhood of the zero curve Γ , which allows us to replace the operator \mathcal{L}_h by the rescaled operator $\mathcal{N}_h^{[k]}$ with a new semi-classical parameter $\hbar = h^{\frac{1}{k+2}}$. The localization near Γ allows us to reduce to the study of a straight model, and we introduce reduced left and right “one well” models (see Section 2.3). In Section 2.4, we construct the WKB expansions for the ground state of the “right well” operator $\mathcal{N}_{h,r}^{[k]}$. In Section 2.5, we conjugate by an exponential and reduce the dimension (at least formally) using a Grushin method. We then choose the exponential weight as a perturbation of the solution of the eikonal equation and, to keep ellipticity, we have to use the hypothesis of “soft” variation of the function γ . With these assumptions, the Agmon weight is uniformly controlled and we are reduced to a perturbation problem near the minimum of the Montgomery operator. To ensure that the frequency variable ξ is bounded, we truncate this variable in a neighborhood of $\gamma_0^{1/(k+2)} \xi_0^{[k]}$ and consider the operator with truncated symbol $\text{Op}_h^w p_h$. Using the Grushin reduction method, we show tangential coercivity (see Theorem 2.5.7) following [65]. In Section 2.6, we prove Theorem 2.6.1. It consists in particular in

removing the cutoff function which was introduced in Section 2.5. In Section 2.7, we show optimal tangential estimates using Theorem 2.6.1 (see Corollary 2.7.1). We also establish tangential estimates for the double-well operator $\mathcal{N}_h^{[k]}$ (see Proposition 2.7.2), and establish WKB approximations of the first eigenfunctions of operator $\mathcal{N}_h^{[k]}$ (see Proposition 2.7.5). In Section 2.8, we prove Theorem 2.1.2. WKB approximations allow the analysis of an interaction matrix whose eigenvalues measure the tunneling effect.

2.2 A reduction to a tubular neighborhood of the cancellation curve

The following Agmon estimates can be found in [48, Proposition 5.1]. These estimates show the exponential localization of the eigenfunctions of \mathcal{L}_h near the zero curve.

Proposition 2.2.1. *Let $E > 0$. There exist $C, h_0, \alpha > 0$ such that, for all $h \in (0, h_0)$, and all eigenpairs (λ, ψ) of \mathcal{L}_h with $\lambda \leq Eh^{2\frac{k+1}{k+2}}$,*

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{2\frac{\alpha \operatorname{dist}(x, \Gamma)}{\sqrt{h}} \frac{k+2}{2}} |\psi|^2 dx \leq C \|\psi\|^2,$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{2\frac{\alpha \operatorname{dist}(x, \Gamma)}{\sqrt{h}} \frac{k+2}{2}} |(-ih\nabla + \mathbf{A})\psi|^2 dx \leq Ch^{2\frac{k+1}{k+2}} \|\psi\|^2.$$

Since the first eigenfunctions are concentrated in the neighborhood of Γ then we can deduce that we can work in a small neighborhood of Γ of size δ small enough. For this reason, we consider the δ -neighborhood of the curve Γ

$$\Omega_\delta := \{x \in \mathbb{R}^2 : \operatorname{dist}(x, \Gamma) < \delta\}.$$

Here δ normally depends on h which we will specify later. We consider the quadratic form $Q_{h,\delta}$ defined for all $\psi \in \mathcal{V}_\delta = H_0^1(\Omega_\delta)$,

$$Q_{h,\delta} = \int_{\Omega_\delta} |(-ih\nabla + \mathbf{A})\psi|^2 dx.$$

The associated self-adjoint operator is

$$\mathcal{L}_{h,\delta} = (-ih\nabla + \mathbf{A})^2,$$

with domain

$$\text{Dom}(\mathcal{L}_{h,\delta}) = \left\{ \psi \in H^2(\Omega_\delta) : \psi(x) = 0, \text{ on } \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(x, \Gamma) = \delta\} \right\}.$$

This operator is self-adjoint with compact resolvent, and we can consider the non-decreasing sequence of eigenvalues $(\lambda_n(h, \delta))_{n \geq 1}$. We will follow the same reduction strategy as [14].

Proposition 2.2.2. *Let $n \geq 1$. There exist $C, h_0, \beta > 0$ such that, for all $h \in (0, h_0)$ and $\delta \in (0, \delta_0)$,*

$$\lambda_n(h) \leq \lambda_n(h, \delta) \leq \lambda_n(h) + Ce^{-\frac{\beta\delta^{\frac{k+2}{2}}}{\sqrt{h}}}.$$

Démonstration. The proof is similar to that of [14], except the power of h . We first then prove first inequality. Let $\psi_n \in \mathcal{V}_\delta$ the eigenfunction associated with $\lambda_n(h, \delta)$. Since $\psi_n = 0$ on $\{x \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(x, \Gamma) = \delta\}$, we can extend it by 0 on \mathbb{R}^2 to obtain a function $\tilde{\psi}_n$ defined on \mathbb{R}^2 which satisfies

$$Q_h(\tilde{\psi}_n) = Q_{h,\delta}(\psi_n) = \lambda_n(h, \delta).$$

Then by min-max principle $\lambda_n(h) \leq \lambda_n(h, \delta)$.

We now show the second inequality in proposition 2.2.2. Let $(\psi_j)_{1 \leq j \leq n}$ be an orthonormal family of eigenfunctions associated with $(\lambda_j(h))_{1 \leq j \leq n}$ and let

$$\chi_\delta(x) := \chi\left(\frac{\text{dist}(x, \Gamma)}{\delta}\right),$$

where χ is a smooth cut off function, which is equal to 0 on $[1, +\infty[$, and is equal to 1 on $[0, 1/2[$. We define

$$\mathcal{E}(h, \delta) := \text{Span}_{1 \leq j \leq n} \chi_\delta \psi_j \subset \mathcal{V}_\delta.$$

Let $\tilde{\psi}$ be a function of $\mathcal{E}(h, \delta)$. This function is written in the forme

$$\tilde{\psi} = \chi_\delta \sum_{j=1}^n \beta_j \psi_j = \chi_\delta \psi.$$

We have

$$\begin{aligned} Q_{h,\delta}(\chi_\delta \psi) &= \int_{\Omega_{h,\delta}} |(-ih\nabla + \mathbf{A})(\chi_\delta \psi)|^2 dx \\ &\leq \|(-ih\nabla + \mathbf{A})\psi\|^2 + 2h \|(-ih\nabla + \mathbf{A})\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{\delta/2})} \|\nabla \chi_\delta\| \|\psi\| + h^2 \|\nabla \chi_\delta\| \|\psi\|^2. \end{aligned}$$

Since the family $(\psi_j)_{1 \leq j \leq n}$ is orthogonal, then

$$\langle (-ih\nabla + \mathbf{A})\psi_j, (-ih\nabla + \mathbf{A})\psi_k \rangle = 0, \quad \forall j \neq k,$$

which implies

$$\|(-ih\nabla + \mathbf{A})\psi\|^2 \leq \lambda_n(h) \|\psi\|^2.$$

Using Proposition 2.2.1, we have

$$\|\nabla \chi_\delta\| \|\psi\| \leq C\delta^{-1} e^{-\frac{\alpha(\frac{\delta}{2})^{(k+2)/2}}{\sqrt{h}}} \|\psi\|,$$

and

$$\|(-ih\nabla + \mathbf{A})\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{\delta/2})} \leq Ch^{\frac{k+1}{k+2}} e^{-\frac{\alpha(\frac{\delta}{2})^{(k+2)/2}}{\sqrt{h}}} \|\psi\|.$$

Therefore,

$$Q_{h,\delta}(\tilde{\psi}) \leq \left(\lambda_n(h) + C \left(h^{\frac{2k+3}{k+2}} \delta^{-1} + h^2 \delta^{-2} \right) e^{-\frac{\beta\delta^{\frac{k+2}{2}}}{\sqrt{h}}} \right) \|\tilde{\psi}\|^2, \quad \forall \tilde{\psi} \in \mathcal{E}_n(h, \delta),$$

with $\beta = \frac{\alpha}{2^{k/2}}$. Then we get

$$\lambda_n(h, \delta) \leq \lambda_n(h) + Ce^{-\frac{\beta\delta^{\frac{k+2}{2}}}{\sqrt{h}}}.$$

□

Proposition 2.2.2 allows to replace the initial operator \mathcal{L}_h by the operator $\mathcal{L}_{h,\delta}$ with Dirichlet conditions in a δ -neighborhood of the curve Γ . We will make a change of coordinates in the neighborhood of the zero curve Γ . This change of coordinates can be found in detail in [33]. Let

$$M : \mathbb{R}/(|\Gamma|\mathbb{Z}) \ni s \mapsto M(s) \in \Gamma$$

be the arc-length parametrization of Γ (see figure 2.1) so that

$$\Gamma \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} = \{M(0) := (0, y_0), M(L) := (0, y_1)\} \quad \text{with } y_1 < y_0.$$

Let $\nu(s)$ the unit normal to Γ at the point $M(s)$. We choose the orientation of the parametrization M so that

$$\det(M'(s), \nu(s)) = 1.$$

The curvature $\kappa(s)$ of Γ at point $M(s)$ is given by the parametrization

$$M''(s) = \kappa(s)\nu(s).$$

Since we are working with $2L$ -periodic functions, then we can consider the restriction of these functions on the interval $] -L, +L[$.

We consider the function $\Phi : \mathbb{R}/(|\Gamma|\mathbb{Z}) \times (-\delta_0, \delta_0) \longrightarrow \Omega_{\delta_0}$ defined by

$$\Phi(s, t) = M(s) + t\nu(s), \quad \forall (s, t) \in \mathbb{R}/(|\Gamma|\mathbb{Z}) \times (-\delta_0, \delta_0), \quad (2.14)$$

where $\delta_0 > 0$ small enough, so that Φ is a diffeomorphism with image

$$\Omega_{\delta_0} := \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(x, \Gamma) < \delta_0\}.$$

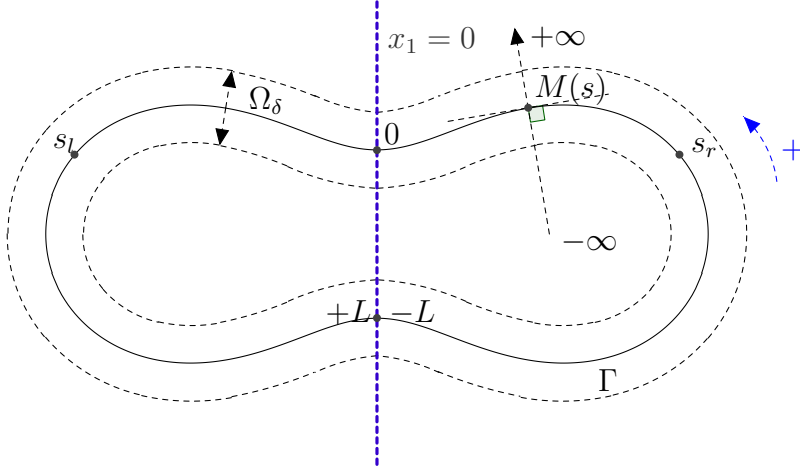
The inverse of Φ is given by

$$\Phi^{-1}(x) = (M(x), t(x)), \quad \forall x \in \Omega_{\delta_0}, \quad (2.15)$$

where $t(x) = \text{dist}(x, \Gamma)$ and $M(x)$ is the parameterization of the normal projection of x on the curve Γ .

With the change of coordinates Φ^{-1} defined in (2.15), the determinant of the Jacobian matrix of this transformation is given by

$$m(s, t) = 1 - t\kappa(s),$$


 FIGURE 2.1 – Tubular coordinates in the neighborhood of Γ

and the quadratic form $Q_{h,\delta}$ can be rewritten as follows

$$\begin{aligned} Q_{h,\delta}(u) &= \int_{\Omega_\delta} |(-ih\nabla + \mathbf{A}) u|^2 dx \\ &= \int_{\Phi^{-1}(\Omega_\delta)} \left\{ (1 - t\kappa(s))^{-2} |(-ih\partial_s + \bar{A}_1) v|^2 + |(-ih\partial_t + \bar{A}_2) v|^2 \right\} (1 - t\kappa(s)) ds dt, \end{aligned}$$

and

$$\int_{\Omega_\delta} |u(x)|^2 dx = \int_{\Phi^{-1}(\Omega_\delta)} |v(s, t)|^2 (1 - t\kappa(s)) ds dt,$$

for all $u \in \mathcal{V}_\delta$, with $v = u \circ \Phi$ and

$$\bar{A}_1(s, t) = (1 - t\kappa(s)) (\mathbf{A} \circ \Phi) \cdot M'(s), \quad \bar{A}_2(s, t) = (\mathbf{A} \circ \Phi) \cdot \nu(s).$$

The magnetic field associated with the new magnetic potential $\bar{\mathbf{A}}$ is given by

$$\begin{aligned} \beta(s, t) &:= \nabla_{(s,t)} \times \bar{\mathbf{A}}(s, t) \\ &= m(s, t) (\nabla \times \mathbf{A}) \circ \Phi(s, t) \\ &= m(s, t) B \circ \Phi(s, t). \end{aligned}$$

To eliminate the normal component of $\bar{\mathbf{A}}$, we now use the gauge transformation which corresponds to the conjugation of the operator by $e^{i\frac{\phi}{\hbar}}$, with ϕ is given by

$$\phi(s, t) = -\beta_0 s + \int_0^t \bar{A}_2(s, t') dt' + \int_0^s \bar{A}_1(s', 0) ds',$$

where β_0 is defined in (2.12).

The new magnetic potential is given by $\tilde{\mathbf{A}}(s, t) = \bar{\mathbf{A}}(s, t) - \nabla_{(s,t)}\phi$. Then for all $u \in \mathcal{V}_\delta$, we have

$$\begin{aligned} Q_{h,\delta}(u) &= \int_{\Omega_\delta} |(-i\hbar\nabla + \mathbf{A})u|^2 dx \\ &= \int_{\Phi^{-1}(\Omega_\delta)} \left\{ (1 - t\kappa(s))^{-2} \left| (-i\hbar\partial_s + \tilde{A}_1)w \right|^2 + |(-i\hbar\partial_t)w|^2 \right\} (1 - t\kappa(s)) ds dt, \end{aligned}$$

where $w = e^{i\frac{\phi}{\hbar}}v$ and $v = u \circ \Phi$.

After this change of gauge, the operator $\mathcal{L}_{h,\delta}$ is unitarily equivalent to $\tilde{\mathcal{L}}_{h,\delta}$ the self-adjoint realization on $L^2(\Gamma \times (-\delta, \delta); m(s, t) ds dt)$, of the differential operator

$$(1-t\kappa(s))^{-1} hD_t (1-t\kappa(s)) hD_t + (1-t\kappa(s))^{-1} (hD_s + \tilde{A}_1(s, t)) (1-t\kappa(s))^{-1} (hD_s + \tilde{A}_1(s, t)),$$

where $D = \frac{1}{i}\partial$ and

$$\tilde{A}_1(s, t) = \beta_0 - \int_0^t m(s, t') B \circ \Phi(s, t') dt' = \beta_0 - \int_0^t (1 - t'\kappa(s)) B \circ \Phi(s, t') dt', \quad (2.16)$$

with boundary dirichlet conditions.

Using Assumption 2.1.1, magnetic field B vanishes exactly at order $k \geq 1$ on Γ , with B and the $(k-1)$ first normal derivatives of B vanish on Γ . So

$$B \circ \Phi, \partial_t(B \circ \Phi), \partial_{t^2}^2(B \circ \Phi), \dots, \partial_{t^{k-1}}^{k-1}(B \circ \Phi)$$

vanish at $t = 0$.

Since we work for t small enough ($-\delta < t < \delta$), writing the asymptotic expansion of $B \circ \Phi$ near $t = 0$ (for s fixed) gives

$$B \circ \Phi(s, t) = \frac{t^k}{k!} \left(\partial_{t^k}^k (B \circ \Phi)(s, 0) \right) + \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \left(\partial_{t^{k+1}}^{k+1} (B \circ \Phi)(s, 0) \right) + \mathcal{O}(t^{k+2}).$$

We recall and define

$$\gamma(s) := \frac{1}{k!} \left(\partial_{t^k}^k (B \circ \Phi)(s, 0) \right) \quad \text{and} \quad \delta(s) := \frac{1}{(k+1)!} \left(\partial_{t^{k+1}}^{k+1} (B \circ \Phi)(s, 0) \right). \quad (2.17)$$

Using Assumption 2.1.1, the function $s \mapsto \gamma(s)$ has a non-degenerate minimum $\gamma_0 > 0$ at $s = s_r < 0$ and $s = s_l = -s_r > 0$, with

$$M(s_r) = a_1, \quad M(s_l) = a_2, \quad -L < s_r < 0, \quad 0 < s_l < +L,$$

and

$$\gamma(s_l) = \gamma(s_r) = \gamma_0, \quad \gamma'(s_l) = \gamma'(s_r) = 0, \quad \gamma''(s_l), \gamma''(s_r) > 0.$$

By computing the integral in (2.16), expression of the magnetic potential \tilde{A}_1 is given by

$$\tilde{A}_1(s, t) = \beta_0 - \gamma(s) \frac{t^{k+1}}{k+1} - \tilde{\delta}(s) \frac{t^{k+2}}{k+2} + \mathcal{O}(t^{k+3}),$$

where $\tilde{\delta}(s) = \delta(s) - \gamma(s)\kappa(s)$.

2.2.1 Truncated operator and rescaled operator

In this section we follow the same spectral reduction method as in [14]. First, we truncate the variable t to work on the domain $] -L, +L[\times \mathbb{R}$ instead of $] -L, +L[\times (-\delta, \delta)$. After the truncation, we use the fact that the first eigenfunctions of operator $\tilde{\mathcal{L}}_{h,\delta}$ decay exponentially away from the cancellation curve Γ at the length scale $\hbar = h^{\frac{1}{k+2}}$. This localization allows us to consider the partial rescaling $(s, t) = (\sigma, \hbar\tau)$ with $\hbar = h^{\frac{1}{k+2}}$.

We start by truncating in the variable t . Let c be a smooth truncation function equal to 1 on $[-1, 1]$ and 0 for $|t| \geq 2$.

We define

$$\underline{m}(s, t) = 1 - tc \left(\frac{t}{\delta} \right) \kappa,$$

and

$$\underline{A}(s, t) = \beta_0 - \gamma(s) \frac{t^{k+1}}{k+1} - \tilde{\delta}(s) c \left(\frac{t}{\delta} \right) \frac{t^{k+2}}{k+2} + c \left(\frac{t}{\delta} \right) \mathcal{O}(t^{k+3}).$$

We introduced here the truncation function c to ensure that the terms are bounded when t is large. This truncation function is found only in front of t^{k+2} and t^{k+3} in $\underline{A}(s, t)$. Then, we define $\underline{\mathcal{M}}_{h,\delta}$ as self-adjoint realization on the space $L^2(\Gamma \times \mathbb{R}, \underline{m}(s, t) ds dt)$ of

the differential operator

$$\underline{m}^{-1}hD_t\underline{m}hD_t + \underline{m}^{-1}(hD_s + \underline{A}(s, t))\underline{m}^{-1}(hD_s + \underline{A}(s, t)).$$

We denote by $(\underline{\lambda}_n(h, \delta))_{n \geq 1}$ the increasing sequence of eigenvalues of operator $\underline{\mathcal{M}}_{h, \delta}$.

Using the same method of the proof of Proposition 2.2.2, Agmon estimates of $\underline{\mathcal{M}}_{h, \delta}$ in coordinates (s, t) and the min-max principle we can obtain the following proposition.

Proposition 2.2.3. *Let $n \geq 1$. There exist $C, h_0, \beta > 0$ such that, for all $h \in (0, h_0)$ and $\delta \in (0, \delta_0)$,*

$$\underline{\lambda}_n(h, \delta) \leq \lambda_n(h, \delta) \leq \underline{\lambda}_n(h, \delta) + Ce^{-\frac{\beta\delta^{\frac{k+2}{2}}}{\sqrt{h}}}.$$

From now on we fix

$$\delta = h^{\frac{k}{(k+2)^2} - \frac{2\eta}{k+2}}, \quad (2.18)$$

for some fixed $0 < \eta < \frac{k}{2(k+2)}$, which verifies that

$$\delta^{\frac{k+2}{2}} = h^{\frac{k}{2(k+2)} - \eta} \gg h^{\frac{k}{2(k+2)}}.$$

Now the $h^{\frac{1}{k+2}}$ -scale normal localization invites us to make the following change of variable

$$(s, t) = (\sigma, \hbar\tau),$$

where $\hbar = h^{\frac{1}{k+2}}$ is the new semi-classical parameter. With this change of variable, the metric and the new magnetic potential are given by

$$\mathfrak{a}_\hbar(\sigma, \tau) = 1 - \hbar\tau c_\mu(\tau)\kappa(\sigma), \quad (2.19)$$

and

$$\mathcal{A}_\hbar^{[k]}(\sigma, \tau) = -\hbar^{-k-1}\beta_0 + \gamma(\sigma)\frac{\tau^{k+1}}{k+1} + \hbar\tilde{\delta}(\sigma)c_\mu(\tau)\frac{\tau^{k+2}}{k+2} + \hbar^2c_\mu\mathcal{O}(\tau^{k+3}),$$

with $c_\mu(\tau) = c(\mu\tau)$ where $\mu > 0$. In the following, the estimates are uniform with respect to the parameter μ and then we will fix after $\mu = \hbar^{\frac{2}{k+2} + 2\eta}$. Dividing $\underline{\mathcal{M}}_{h, \delta}$ by \hbar^{2k+2} , we get the rescaled operator

$$\mathcal{N}_\hbar^{[k]} = \mathfrak{a}_\hbar^{-1}D_\tau\mathfrak{a}_\hbar D_\tau + \mathfrak{a}_\hbar^{-1}(\hbar D_\sigma - \mathcal{A}_\hbar^{[k]}(\sigma, \tau))\mathfrak{a}_\hbar^{-1}(\hbar D_\sigma - \mathcal{A}_\hbar^{[k]}(\sigma, \tau)). \quad (2.20)$$

We denote by $(\nu_n(\hbar))_{n \geq 1}$ the sequence of eigenvalues of $\mathcal{N}_\hbar^{[k]}$. Then for all $n \geq 1$ we have

$$\lambda_n(\mathcal{M}_{h,\delta}) = \hbar^{2k+2} \nu_n(\hbar) = h^{2\frac{k+1}{k+2}} \nu_n(\hbar).$$

Proposition 2.2.4. *Let $n \geq 1$. There exist $D > S, C, h_0 > 0$ such that, for all $h \in (0, h_0)$*

$$\lambda_n(h) - Ce^{-\frac{D}{h^{1/(k+2)}}} \leq \hbar^{2k+2} \nu_n(\hbar) \leq \lambda_n(h) + Ce^{-\frac{D}{h^{1/(k+2)}}}.$$

Démonstration. Using Propositions 2.2.2 and 2.2.3, we can deduce that

$$\lambda_n(h) - Ce^{-\frac{\beta\delta\frac{k+2}{2}}{\sqrt{h}}} \leq \hbar^{2k+2} \nu_n(\hbar) \leq \lambda_n(h) + Ce^{-\frac{\beta\delta\frac{k+2}{2}}{\sqrt{h}}}.$$

With the choice of δ , we have

$$e^{-\frac{\beta\delta\frac{k+2}{2}}{\sqrt{h}}} = e^{-\frac{\beta h^{-\eta}}{h^{1/(k+2)}}}.$$

Therefore, there exist $D > S$ such that

$$\lambda_n(h) - Ce^{-\frac{D}{h^{1/(k+2)}}} \leq \hbar^{2k+2} \nu_n(\hbar) \leq \lambda_n(h) + Ce^{-\frac{D}{h^{1/(k+2)}}}.$$

□

2.3 Single well

The function γ admits two non-degenerate minima in s_l and s_r on Γ . We will now consider two operators $\mathcal{N}_{\hbar,l,\beta_0}^{[k]}$ and $\mathcal{N}_{\hbar,r,\beta_0}^{[k]}$ which represent the left well operator and the right well operator respectively.

2.3.1 Right well operator

This operator is attached to the right well s_r . We will work on $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ instead of $\Gamma \times \mathbb{R}$ and with only one well. For this we will remove the left well by removing a small neighborhood of s_l , and gluing an infinite strip : precisely we start by identifying Γ with

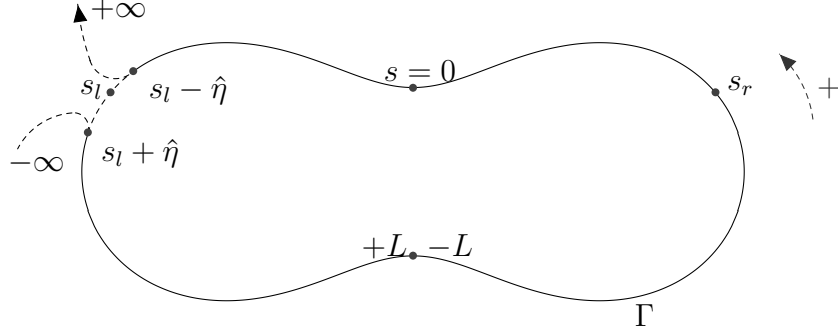


FIGURE 2.2 – One well domain attached to the right well

$(s_l - 2L, s_l]$. We fix $\hat{\eta}$ so that

$$0 < \hat{\eta} < \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{L}{4} \right\}. \quad (2.21)$$

We consider the following right well differential operator in $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbf{a}_{\hbar,r} d\sigma d\tau)$,

$$\mathcal{N}_{\hbar,r,\beta_0}^{[k]} = \mathbf{a}_{\hbar,r}^{-1} D_\tau \mathbf{a}_{\hbar,r} D_\tau + \mathbf{a}_{\hbar,r}^{-1} \left(\hbar D_\sigma - \mathcal{A}_{\hbar,r,\beta_0}^{[k]}(\sigma, \tau) \right) \mathbf{a}_{\hbar,r}^{-1} \left(\hbar D_\sigma - \mathcal{A}_{\hbar,r,\beta_0}^{[k]}(\sigma, \tau) \right), \quad (2.22)$$

with

$$\mathbf{a}_{\hbar,r}(\sigma, \tau) = 1 - \hbar \tau c_\mu(\tau) \kappa_r(\sigma),$$

and

$$\mathcal{A}_{\hbar,r,\beta_0}^{[k]}(\sigma, \tau) = -\hbar^{-k-1} \beta_0 + \gamma_r(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} + \hbar \tilde{\delta}_r(\sigma) \frac{\tau^{k+2}}{k+2} c_\mu(\tau) + c_\mu \hbar^2 \mathcal{O}(\tau^{k+3}),$$

where the functions δ_r and κ_r are respective extensions of δ and κ such that

$$\delta_r(\sigma) = \delta(\sigma) \quad \text{and} \quad \kappa_r(\sigma) = \kappa(\sigma) \quad \text{on} \quad I_{r,\hat{\eta}} := (s_l - 2L + \hat{\eta}, s_l - \hat{\eta}),$$

and are zero functions on $(-\infty, s_l - 2L) \cup (s_l, +\infty)$. On the other hand, the extension γ_r of γ is chosen so that $\gamma_r = \gamma$ on $I_{r,\hat{\eta}}$ and $\gamma_r = \gamma_\infty$ on $(-\infty, s_l - 2L) \cup (s_l, +\infty)$, with

$\gamma_\infty \in \mathbb{R}_+^*$ such that $\gamma_\infty > \max_{\sigma \in \Gamma} \gamma(\sigma)$. This extension can be chosen so that γ_r admits a unique non-degenerate minimum $\gamma_0 > 0$ at $s_r < 0$ and that $\left\| 1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_r} \right\|_\infty$ is small enough.

Since we are now working with a simply connected operator, then the two operators $\mathcal{N}_{\hbar,r,\beta_0}^{[k]}$ and $\mathcal{N}_{\hbar,r,0}^{[k]}$ are equivalent. We denote by $u_{\hbar,r}^{[k]}$ a normalized ground state of the operator $\mathcal{N}_{\hbar,r}^{[k]} := \mathcal{N}_{\hbar,r,0}^{[k]}$ in $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbf{a}_{\hbar,r} d\sigma d\tau)$, and the normalized ground state of $\mathcal{N}_{\hbar,r,\beta_0}^{[k]}$ is given by :

$$\check{\phi}_{\hbar,r}^k(\sigma, \tau) = e^{-i\beta_0\sigma/\hbar^{k+2}} u_{\hbar,r}^{[k]}(\sigma, \tau). \quad (2.23)$$

2.3.2 Left well operator

To define the left well operator, we consider the symmetry operator

$$Uf(\sigma, \tau) := \overline{f(-\sigma, \tau)}, \quad (2.24)$$

and define the left well operator on $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbf{a}_{\hbar,l} d\sigma d\tau)$ by

$$\mathcal{N}_{\hbar,l,\beta_0}^{[k]} = U^{-1} \mathcal{N}_{\hbar,r,\beta_0}^{[k]} U,$$

where

$$\mathbf{a}_{\hbar,l}(\sigma, \tau) = \mathbf{a}_{\hbar,r}(-\sigma, \tau).$$

Note that this operator corresponds to the following construction. We identify Γ with $[s_r, s_r + 2L)$, we can define on \mathbb{R} the functions γ_l , δ_l and κ_l by $\gamma_l(\sigma) = \gamma_r(-\sigma)$, $\delta_l(\sigma) = \delta_r(-\sigma)$ and $\kappa_l(\sigma) = \kappa_r(-\sigma)$.

Then the functions δ_l and κ_l verify that

$$\delta_l(\sigma) = \delta(\sigma) \text{ and } \kappa_l(\sigma) = \kappa(\sigma) \quad \text{on } I_{l,\hat{\eta}} := (s_r + \hat{\eta}, s_r + 2L - \hat{\eta}),$$

and are zero functions on $(-\infty, s_r) \cup (s_r + 2L, +\infty)$. On the other hand, the extension γ_l of γ is chosen so that $\gamma_l = \gamma$ on $I_{l,\hat{\eta}}$ and $\gamma_l = \gamma_\infty$ on $(-\infty, s_r) \cup (s_r + 2L, +\infty)$. In this way, γ_l admits a unique non-degenerate minimum $\gamma_0 > 0$ at $s_l > 0$, and verify that $\left\| 1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_l} \right\|_\infty$ is small enough.

The normalized ground state of the operator $\mathcal{N}_{\hbar,l,\beta_0}^{[k]}$ on $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbf{a}_{\hbar,l} d\sigma d\tau)$ is given by

$$\check{\phi}_{\hbar,l}^{[k]}(\sigma, \tau) := U \check{\phi}_{\hbar,r}^{[k]}(\sigma, \tau) = e^{-i\beta_0\sigma/\hbar^{k+2}} u_{\hbar,l}^{[k]}(\sigma, \tau), \quad (2.25)$$

where $u_{\hbar,l}^{[k]} = U u_{\hbar,r}^{[k]}$.

2.4 WKB expansions of the right well operator

In this section, we will construct an approximation of the eigenvalues and the associated eigenfunctions for the right well operator $\mathcal{N}_{\hbar,r}^{[k]} := \mathcal{N}_{\hbar,r,0}^{[k]}$ by WKB expansions, and the construction for the left well operator $\mathcal{N}_{\hbar,l}^{[k]} := \mathcal{N}_{\hbar,l,0}^{[k]}$ is obtained by symmetry. These WKB constructions are inspired by [10].

2.4.1 Generalized Montgomery operator

For $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2$, we consider the symbol operator

$$\mathcal{M}_{x,\xi}^{[k]} = D_t^2 + \left(\xi - \gamma_r(x) \frac{t^{k+1}}{k+1} \right)^2.$$

In the sense of Kato's perturbation theory (see [63]), the family of self-adjoint operators $(\mathcal{M}_{x,\xi}^{[k]})_{(x,\xi) \in \mathbb{R}^2}$ is analytic of type (A). Then, for $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^2$, the family $(\mathcal{M}_{x,\xi}^{[k]})_{(x,\xi) \in \mathbb{R}^2}$ can be extended into a family of closed operators $(\mathcal{M}_{x,\xi}^{[k]})_{(x,\xi) \in \mathcal{V}}$ where \mathcal{V} is a \mathbb{C} -neighborhood of (x_0, ξ_0) . The lowest eigenvalue of $\mathcal{M}_{x,\xi}^{[k]}$, denoted by $\mu^{[k]}(x, \xi)$, satisfies

$$\mu^{[k]}(x, \xi) = \gamma_r(x)^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]} \left(\gamma_r(x)^{-\frac{1}{k+2}} \xi \right). \quad (2.26)$$

Since the function $\mathbb{R} \ni \sigma \mapsto \gamma_r(\sigma)$ admits a unique non-degenerate minimum $\gamma_0 > 0$ at s_r , then the function $\mathbb{R}^2 \ni (x, \xi) \mapsto \mu^{[k]}(x, \xi)$ admits a unique non-degenerate minimum at $(s_r, \gamma_0^{\frac{1}{k+2}} \xi_0^{[k]})$ give by

$$\mu_0^{[k]} := \gamma_0^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}) > 0. \quad (2.27)$$

We denote by $u_{x,\xi}^{[k]}$ the eigenfunction of $\mathcal{M}_{x,\xi}^{[k]}$ associated with the eigenvalue $\mu^{[k]}(x, \xi)$. By differentiating with respect to ξ equation $(\mathcal{M}_{x,\xi}^{[k]} - \mu^{[k]}(x, \xi)) u_{x,\xi}^{[k]} = 0$ and taking the inner product with $u_{x,\xi}^{[k]}$ in $L^2(\mathbb{R})$, we get

$$\partial_\xi \mu^{[k]}(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}} \left((\partial_\xi \mathcal{M}_{x,\xi}^{[k]}) u_{x,\xi}^{[k]}(\tau) \right) u_{x,\xi}^{[k]}(\tau) d\tau. \quad (2.28)$$

By differentiating the function $\mu^{[k]}$ with respect to x and ξ , the Hessian matrix of $\mu^{[k]}$ at

$(s_r, \gamma_0^{\frac{1}{k+2}} \xi_0^{[k]})$ is given by

$$\text{Hess } \mu^{[k]}(s_r, \gamma_0^{\frac{1}{k+2}} \xi_0^{[k]}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{k+2} \gamma''(s_r) \gamma_0^{-\frac{k}{k+2}} \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}) & 0 \\ 0 & (\nu^{[k]})''(\xi_0^{[k]}) \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

2.4.2 Eikonal equation

We consider the following equation

$$\nu(i\varphi_r(\sigma)) = F_r(\sigma), \quad (2.30)$$

where $\nu(\xi) = \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]} + \xi) - \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]})$ and $F_r(\sigma) = \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}) \left(\left(\frac{\gamma_0}{\gamma_r(\sigma)} \right)^{2/(k+2)} - 1 \right)$.

This eikonal equation can be found in [10, Section 4]. The following lemma is the same as the one of [10, Lemma 4.4]. Since $\|1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_r}\|_\infty$ is small enough, the solution of this equation is defined for all $\sigma \in (s_l + \hat{\eta} - 2L, s_l - \hat{\eta})$ where $\hat{\eta} > 0$ is introduced in (2.21).

Lemma 2.4.1. *Equation (2.30) admits a smooth solution φ_r defined on $(s_l + \hat{\eta} - 2L, s_l - \hat{\eta})$*

such that $\varphi_r(s_r) = 0$ and $\varphi_r'(s_r) = \sqrt{\frac{2}{k+2} \frac{\gamma''(s_r) \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]})}{\gamma_0 (\nu^{[k]})''(\xi_0^{[k]})}} > 0$.

Using the proof of Lemma 4.4 in [10, Section 4], the function φ is given by

$$\varphi_r(\sigma) = -i\tilde{\nu}^{-1}(i\mathfrak{f}_r(\sigma)),$$

where $\tilde{\nu}$ is a holomorphic function in a neighborhood of 0 such that $\tilde{\nu}^2 = \nu$ and $\tilde{\nu}'(0) = \sqrt{\frac{\nu''(0)}{2}}$ and the function \mathfrak{f}_r is defined by

$$\mathfrak{f}_r(\sigma) = \begin{cases} \sqrt{\nu^{[k]}(\xi_0^{[k]})} \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_r(\sigma)} \right)^{2/(k+2)}} & \text{if } \sigma \geq s_r, \\ -\sqrt{\nu^{[k]}(\xi_0^{[k]})} \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_r(\sigma)} \right)^{2/(k+2)}} & \text{if } \sigma \leq s_r. \end{cases}$$

The function \mathfrak{f}_r is derivable at s_r and $\mathfrak{f}_r'(0) = \sqrt{-\frac{F_r''(0)}{2}} > 0$. The Taylor series of $\tilde{\nu}^{-1}$ at 0 gives

$$\varphi_r(\sigma) = \text{Re}(\varphi_r(\sigma)) + i\text{Im}(\varphi_r(\sigma)),$$

with

$$\text{Re}(\varphi_r(\sigma)) = \sqrt{\frac{2}{(\nu^{[k]})''(\xi_0^{[k]})}} |\mathfrak{f}_r(\sigma)| + \mathcal{O}(|\mathfrak{f}_r(\sigma)|^3), \quad (2.31)$$

and

$$\operatorname{Im} (\varphi_r(\sigma)) = \frac{(\tilde{\nu}^{-1})''(0)}{2} \mathfrak{f}_r(\sigma)^2 + \mathcal{O}(\mathfrak{f}_r(\sigma)^4). \quad (2.32)$$

Remark 2.4.2. Concerning the left well operator $\mathcal{N}_{h,l}^{[k]}$ defined in (2.3.2), equation

$$\nu(\mathfrak{i}\varphi_l(\sigma)) = F_l(\sigma)$$

admits also a smooth solution φ_l defined on $(s_r + \hat{\eta}, s_r + 2L - \hat{\eta})$ such that $\varphi_l(s_l) = 0$ and

$$\varphi_l'(s_l) = \sqrt{\frac{2}{k+2} \frac{\gamma''(s_r) \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]})}{\gamma_0 (\nu^{[k]})''(\xi_0^{[k]})}} > 0,$$

where

$$F_l(\sigma) = \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}) \left(\left(\frac{\gamma_0}{\gamma_l(\sigma)} \right)^{2/(k+2)} - 1 \right).$$

As the construction of φ_r , the function φ_l is defined by

$$\varphi_l(\sigma) = -\mathfrak{i}\tilde{\nu}^{-1}(\mathfrak{i}\mathfrak{f}_l(\sigma)),$$

where

$$\mathfrak{f}_l(\sigma) = \begin{cases} \sqrt{\nu^{[k]}(\xi_0^{[k]})} \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_l(\sigma)} \right)^{2/(k+2)}} & \text{if } \sigma \geq s_l, \\ -\sqrt{\nu^{[k]}(\xi_0^{[k]})} \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_l(\sigma)} \right)^{2/(k+2)}} & \text{if } \sigma \leq s_l. \end{cases}$$

By construction of φ_r and φ_l , we can define the two even smooth functions \mathfrak{D} and \mathfrak{J} on $\Gamma \equiv [-L, +L]$ by

$$\mathfrak{D}(\sigma) := \begin{cases} -\operatorname{Re} \varphi_r(\sigma) & \text{if } \sigma \in [-L, s_r], \\ \operatorname{Re} \varphi_r(\sigma) & \text{if } \sigma \in [s_r, 0], \\ -\operatorname{Re} \varphi_l(\sigma) & \text{if } \sigma \in [0, s_l], \\ \operatorname{Re} \varphi_l(\sigma) & \text{if } \sigma \in [s_l, +L]. \end{cases} \quad (2.33)$$

and

$$\mathfrak{J}(\sigma) := \begin{cases} \operatorname{Im} \varphi_r(\sigma) & \text{if } \sigma \in [-L, 0], \\ \operatorname{Im} \varphi_l(\sigma) & \text{if } \sigma \in [0, +L]. \end{cases} \quad (2.34)$$

2.4.3 WKB expansions

The WKB expansions of operator $\mathcal{N}_{\hbar,r}^{[k]}$ are inspired from [10, Section 5, Theorem 5.2]. In the following theorem, we will construct these approximations and specify the Agmon distance adapted to our case which will be a positive real function.

Let us introduce the Agmon distance related to the “right well”

$$\Phi_r(\sigma) = \int_{s_r}^{\sigma} \gamma_r(\tilde{\sigma})^{1/(k+2)} \operatorname{Re}(\varphi_r(\tilde{\sigma})) d\tilde{\sigma},$$

which verifies that $\Phi_r''(s_r) > 0$ where φ_r is the function defined in Lemma 2.4.1.

Theorem 2.4.3. *There exist a sequence of smooth functions $(a_{n,j}^{[k]})_{j \geq 0} \subset \operatorname{Dom}(\mathcal{N}_{\hbar,r}^{[k]})$, a sequence of real numbers $(\delta_{n,j}^{[k]})_{j \geq 0} \subset \mathbb{R}$, a family of functions $(\Psi_{\hbar,r}^{[k]})_{\hbar \in (0, \hbar_0]} \subset L^2(\mathbb{R}^2)$ and a family of real numbers $(\delta_n^{[k]}(\hbar))_{\hbar \in (0, \hbar_0]}$ such that*

$$\Psi_{\hbar,r}^{[k]}(\sigma, \tau) \sim \hbar^{-1/4} e^{-\frac{\Phi_r(\sigma)}{\hbar}} e^{i \frac{\mathfrak{g}_r(\sigma)}{\hbar}} \sum_{j \geq 0} a_{n,j}^{[k]}(\sigma, \tau) \hbar^j,$$

$$\delta_n^{[k]}(\hbar) \sim \sum_{j \geq 0} \delta_{n,j}^{[k]} \hbar^j,$$

and

$$(\mathcal{N}_{\hbar,r}^{[k]} - \delta_n^{[k]}(\hbar)) \Psi_{\hbar,r}^{[k]} = \mathcal{O}(\hbar^\infty) e^{-\Phi_r/\hbar},$$

with

$$\mathfrak{g}_r(\sigma) = \int_0^{\sigma} \gamma_r(\tilde{\sigma})^{\frac{1}{k+2}} (\xi_0^{[k]} - \operatorname{Im}(\varphi_r(\tilde{\sigma}))) d\tilde{\sigma}. \quad (2.35)$$

Furthermore

$$1) \delta_{n,0}^{[k]} = \gamma_0^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}) \text{ and } \delta_{n,1}^{[k]} = \frac{(\nu^{[k]})''(\xi_0^{[k]})}{2} (2n-1)\zeta + \mathfrak{R}_r(s_r),$$

$$2) a_{n,0}^{[k]}(\sigma, \tau) = f_{n,0}(\sigma) u_{\sigma, \mathbf{w}_r(\sigma)}^{[k]}(\tau), \text{ where } f_{n,0} \text{ solves the effective transport equation}$$

$$\frac{1}{2} (D_\sigma \partial_\xi \mu^{[k]}(\sigma, \mathbf{w}_r(\sigma)) + \partial_\xi \mu^{[k]}(\sigma, \mathbf{w}_r(\sigma)) D_\sigma) f_{n,0} + R_r^{[k]}(\sigma) f_{n,0} = \delta_{n,1} f_{n,0}, \quad (2.36)$$

with

$$\zeta = \sqrt{\frac{2}{k+2} \frac{\gamma''(0) \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]})}{\gamma_0^{\frac{k}{k+2}} (\nu^{[k]})''(\xi_0^{[k]})}},$$

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{R}_r(\sigma) &= 2\gamma_r(\sigma) \left(\delta_r(\sigma) + \frac{\kappa_r(\sigma)\gamma_r(\sigma)}{k+1} \right) \int c_\mu \frac{\tau^{2k+3}}{(k+1)(k+2)} \left(u_{\sigma, \mathfrak{w}_r(\sigma)}^{[k]}(\tau) \right)^2 d\tau \\
 &+ \kappa_r(\sigma) \int \left(c_\mu + c'_\mu \tau \right) \partial_\tau u_{\sigma, \mathfrak{w}(\sigma)}^{[k]}(\tau) u_{\sigma, \mathfrak{w}_r(\sigma)}^{[k]}(\tau) d\tau \\
 &- 2\mathfrak{w}_r(\sigma) \left(\delta_r(\sigma) + \frac{(k+3)\kappa_r(\sigma)\gamma_r(\sigma)}{k+1} \right) \int c_\mu \frac{\tau^{k+2}}{k+2} \left(u_{\sigma, \mathfrak{w}_r(\sigma)}^{[k]}(\tau) \right)^2 d\tau \\
 &+ 2\mathfrak{w}_r(\sigma)^2 \kappa_r(\sigma) \int c_\mu \tau u_{\sigma, \mathfrak{w}_r(\sigma)}^{[k]}(\tau) d\tau,
 \end{aligned}$$

where

$$\mathfrak{w}_r(\sigma) := i\Phi'_r(\sigma) + \mathfrak{g}'_r(\sigma) \quad \text{and} \quad \mathfrak{w}_r(s_r) = \gamma_0^{\frac{1}{k+2}} \xi_0^{[k]}. \quad (2.37)$$

Démonstration. For some real function $\Phi_r = \Phi_r(\sigma)$ to be determined, we introduce the conjugate operator

$$\tilde{\mathcal{N}}_{\hbar, r}^{[k]} = e^{\frac{\Phi_r(\sigma) - i\mathfrak{g}_r(\sigma)}{\hbar}} \mathcal{N}_{\hbar, r}^{[k]} e^{-\frac{\Phi_r(\sigma) - i\mathfrak{g}_r(\sigma)}{\hbar}},$$

and expand it formally as follows

$$\tilde{\mathcal{N}}_{\hbar, r}^{[k]} \sim \sum_{j \geq 0} \mathcal{N}_j \hbar^j,$$

with

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}_0 &= D_\tau^2 + \left(\mathfrak{w}_r(\sigma) - \gamma_r(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \right)^2, \\
 \mathcal{N}_1 &= D_\sigma \left(\mathfrak{w}_r(\sigma) - \gamma_r(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \right) + \left(\mathfrak{w}_r(\sigma) - \gamma_r(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \right) D_\sigma + \mathcal{R}_r(\sigma, \tau),
 \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_r(\sigma, \tau) &= 2\tau c_\mu \kappa_r(\sigma) \left(\mathfrak{w}_r(\sigma) - \gamma_r(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \right)^2 - 2\tilde{\delta}_r(\sigma) c_\mu \frac{\tau^{k+2}}{k+2} \left(\mathfrak{w}_r(\sigma) - \gamma_r(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \right) \\
 &+ c_\mu \kappa_r(\sigma) \partial_\tau + c'_\mu \kappa_r(\sigma) \tau \partial_\tau,
 \end{aligned}$$

$\mathfrak{w}_r(\sigma) = i\Phi'_r(\sigma) + \mathfrak{g}'_r(\sigma)$, and the function \mathfrak{g}_r is defined in (2.35).

Let $a^{[k]}(\sigma, \tau; \hbar) = \sum_{j \geq 0} a_{n, j}^{[k]}(\sigma, \tau) \hbar^j$ and let us formally solve equation

$$\left(\tilde{\mathcal{N}}_{\hbar, r}^{[k]} - \delta_n^{[k]}(\hbar) \right) a^{[k]}(\sigma, \tau; \hbar) = \mathcal{O}(\hbar^\infty).$$

Identifying the coefficient of each \hbar^j , $j \geq 0$, gives us first

$$\left(\mathcal{N}_0 - \delta_{n,0}^{[k]}\right) a_{n,0}^{[k]} = 0, \quad (A)$$

$$\left(\mathcal{N}_0 - \delta_{n,0}^{[k]}\right) a_{n,1}^{[k]} = \left(\delta_{n,1}^{[k]} - \mathcal{N}_1\right) a_{n,0}^{[k]}. \quad (B)$$

Noticing that $\mathcal{N}_0 = \mathcal{M}_{\sigma, \mathbf{w}_r(\sigma)}^{[k]}$, we get that the first equation allows us to choose the function Φ_r such that

$$\delta_{n,0}^{[k]} = \mu_0^{[k]} = \mu^{[k]}(\sigma, \mathbf{w}_r(\sigma)), \quad (2.38)$$

and $a_{n,0}^{[k]}(\sigma, \tau) = f_{n,0}(\sigma) u_{\sigma, \mathbf{w}_r(\sigma)}^{[k]}(\tau)$ where $f_{n,0}$ is to be determined at a later stage.

Indeed, using (2.26), and that $\mu_0^{[k]} = \gamma_0^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]})$, the eikonal equation (2.38) is given by

$$\gamma_r(\sigma)^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]} + i(\gamma_r(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \Phi_r'(\sigma) + i \operatorname{Im}(\varphi_r(\sigma)))) = \gamma_0^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}), \quad (2.39)$$

which is equivalent to

$$\nu^{[k]}(\xi_0^{[k]} + i(\gamma_r(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \Phi_r'(\sigma) + i \operatorname{Im}(\varphi_r(\sigma)))) - \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}) = \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}) \left(\left(\frac{\gamma_0}{\gamma_r} \right)^{\frac{2}{k+2}} - 1 \right).$$

Therefore, using Lemma 2.4.1, we choose the function Φ_r such that

$$\gamma_r(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \Phi_r'(\sigma) + i \operatorname{Im}(\varphi_r(\sigma)) = \varphi_r(\sigma),$$

which is equivalent to

$$\gamma_r(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \Phi_r'(\sigma) = \operatorname{Re}(\varphi_r(\sigma)).$$

Then we get

$$\Phi_r(\sigma) = \int_{s_r}^{\sigma} \gamma_r(\tilde{\sigma})^{1/(k+2)} \operatorname{Re}(\varphi_r(\tilde{\sigma})) d\tilde{\sigma}.$$

This function Φ_r verifies that

$$\Phi_r(s_r) = \Phi_r'(s_r) = 0 \quad \text{and} \quad \Phi_r''(s_r) = \gamma_0^{1/(k+2)} \varphi_r'(s_r) = \gamma_0^{\frac{1}{k+2}} \sqrt{\frac{2}{k+2} \frac{\gamma''(s_r) \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]})}{\gamma_0 (\nu^{[k]})''(\xi_0^{[k]})}} > 0.$$

The second equation (B) can be solved if the following Fredholm condition holds

$$\left(\delta_{n,1}^{[k]} - \mathcal{N}_1\right) a_{n,0}^{[k]} \in \left(\text{Ker} \left(\mathcal{N}_0 - \delta_{n,0}^{[k]}\right)^*\right)^\perp = \text{span} \left(u_{\sigma, \mathfrak{w}_r(\sigma)}^{[k]}\right)^\perp.$$

Taking the inner product with $u_{\sigma, \mathfrak{w}_r(\sigma)}^{[k]}$ in $L^2(\mathbb{R})$, the Fredholm condition will be given by

$$\langle \mathcal{N}_1 a_{n,0}^{[k]}, u_{\sigma, \mathfrak{w}_r(\sigma)}^{[k]} \rangle_{L^2(\mathbb{R}, d\tau)} = \delta_{n,1}^{[k]} f_{n,0}(\sigma).$$

Noticing that $\left(\partial_\xi \mathcal{M}_{x,\xi}^{[k]}\right)_{\sigma, \mathfrak{w}_r(\sigma)} = 2 \left(\mathfrak{w}_r(\sigma) - \gamma_r(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1}\right)$, \mathcal{N}_1 can be written as

$$\mathcal{N}_1 = \frac{1}{2} \left(D_\sigma \left(\partial_\xi \mathcal{M}_{x,\xi}^{[k]}\right)_{\sigma, \mathfrak{w}_r(\sigma)} + \left(\partial_\xi \mathcal{M}_{x,\xi}^{[k]}\right)_{\sigma, \mathfrak{w}_r(\sigma)} D_\sigma \right) + \mathcal{R}_r(\sigma, \tau).$$

Using (2.28) with $x = \sigma$ and $\xi = \mathfrak{w}_r(\sigma)$, we have

$$\left(\partial_\xi \mu^{[k]}(x, \xi)\right)_{\sigma, \mathfrak{w}_r(\sigma)} = \int_{\mathbb{R}} \left(\left(\partial_\xi \mathcal{M}_{x,\xi}^{[k]}\right)_{\sigma, \mathfrak{w}_r(\sigma)} u_{\sigma, \mathfrak{w}_r(\sigma)}^{[k]}(\tau) \right) u_{\sigma, \mathfrak{w}_r(\sigma)}^{[k]}(\tau) d\tau. \quad (2.40)$$

Multiplying (2.40) by $f_{n,0}(\sigma)$ and differentiating with respect to σ , we get

$$D_\sigma \left(f_{n,0}(\sigma) \left(\partial_\xi \mu^{[k]}(x, \xi)\right)_{\sigma, \mathfrak{w}_r(\sigma)} \right) \quad (2.41)$$

$$= \left\langle \left(D_\sigma \left(\partial_\xi \mathcal{M}_{x,\xi}^{[k]}\right)_{\sigma, \mathfrak{w}_r(\sigma)} + \left(\partial_\xi \mathcal{M}_{x,\xi}^{[k]}\right)_{\sigma, \mathfrak{w}_r(\sigma)} D_\sigma \right) a_{n,0}^{[k]}, u_{\sigma, \mathfrak{w}_r(\sigma)}^{[k]} \right\rangle \quad (2.42)$$

$$- \left(\partial_\xi \mu^{[k]}(x, \xi)\right)_{\sigma, \mathfrak{w}_r(\sigma)} D_\sigma f_{n,0}(\sigma), \quad (2.43)$$

which implies

$$\langle \mathcal{N}_1 a_{n,0}^{[k]}, u_{\sigma, \mathfrak{w}_r(\sigma)}^{[k]} \rangle_{L^2(\mathbb{R}, d\tau)} = \frac{1}{2} \left(D_\sigma \left(\partial_\xi \mu^{[k]}(x, \xi)\right)_{\sigma, \mathfrak{w}_r(\sigma)} + \right. \quad (2.44)$$

$$\left. \left(\partial_\xi \mu^{[k]}(x, \xi)\right)_{\sigma, \mathfrak{w}_r(\sigma)} D_\sigma \right) f_{n,0} + \mathfrak{R}_r(\sigma) f_{n,0}, \quad (2.45)$$

with

$$\mathfrak{R}_r(\sigma) = \langle \mathcal{R}_r(\sigma, \tau) u_{\sigma, \mathfrak{w}_r(\sigma)}^{[k]}, u_{\sigma, \mathfrak{w}_r(\sigma)}^{[k]} \rangle_{L^2(\mathbb{R}, d\tau)}.$$

Therefore, $f_{n,0}$ verifies the transport equation

$$\frac{1}{2} \left(D_\sigma \left(\partial_\xi \mu^{[k]}(x, \xi) \right)_{\sigma, \mathfrak{w}_r(\sigma)} + \left(\partial_\xi \mu^{[k]}(x, \xi) \right)_{\sigma, \mathfrak{w}_r(\sigma)} D_\sigma \right) f_{n,0} + \mathfrak{R}_r(\sigma) = \delta_{n,1}^{[k]} f_{n,0}. \quad (2.46)$$

Considering the linearized equation near $\sigma = s_r$, we are led to choose $\delta_{n,1}^{[k]}$ in the set

$$\text{sp} \left(\frac{1}{2} \text{Hess} \mu^{[k]}(s_r, \xi_0^{[k]} \gamma_0^{\frac{1}{k+2}})(\sigma, D_\sigma) + \mathfrak{R}_r(s_r) \right).$$

Using (2.29), the Hessian matrix of $\mu^{[k]}$ at $(s_r, \xi_0^{[k]} \gamma_0^{\frac{1}{k+2}})$ is given by

$$\text{Hess} \mu^{[k]}(s_r, \gamma_0^{\frac{1}{k+2}} \xi_0^{[k]}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{k+2} \gamma''(s_r) \gamma_0^{-\frac{k}{k+2}} \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}) & 0 \\ 0 & (\nu^{[k]})''(\xi_0^{[k]}) \end{pmatrix},$$

which gives us

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \text{Hess} \mu^{[k]}(s_r, \xi_0^{[k]} \gamma_0^{\frac{1}{k+2}})(\sigma, D_\sigma) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{2}{k+2} \gamma''(s_r) \gamma_0^{-\frac{k}{k+2}} \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}) & 0 \\ 0 & (\nu^{[k]})''(\xi_0^{[k]}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ D_\sigma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma \\ D_\sigma \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (\nu^{[k]})''(\xi_0^{[k]}) (D_\sigma^2 + (\zeta \sigma)^2), \end{aligned}$$

with ζ is given by

$$\zeta = \sqrt{\frac{2}{k+2} \frac{\gamma''(s_r) \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]})}{\gamma_0^{\frac{k}{k+2}} (\nu^{[k]})''(\xi_0^{[k]})}}. \quad (2.47)$$

Recalling that the spectrum of the harmonic oscillator $D_\sigma^2 + (\zeta \sigma)^2$ is given by

$$\{(2n-1)\zeta, n \in \mathbb{N}^*\},$$

we get

$$\delta_{n,1}^{[k]} = \left(n - \frac{1}{2} \right) (\nu^{[k]})''(\xi_0^{[k]}) \sqrt{\frac{2}{k+2} \frac{\gamma''(s_r) \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]})}{\gamma_0^{\frac{k}{k+2}} (\nu^{[k]})''(\xi_0^{[k]})}} + \mathfrak{R}_r(s_r).$$

Let us come back to

$$\left(\mathcal{N}_0 - \delta_{n,0}^{[k]}\right) a_{n,1}^{[k]} = \left(\delta_{n,1}^{[k]} - \mathcal{N}_1\right) a_{n,0}^{[k]},$$

where $a_{n,0}^{[k]}(\sigma, \tau) = f_{n,0}(\sigma) u_{\sigma, \mathfrak{w}_r(\sigma)}^{[k]}(\tau)$. Then we take $a_{n,1}^{[k]}$ as

$$a_{n,1}^{[k]}(\sigma, \tau) = f_{n,1}(\sigma) u_{\sigma, \mathfrak{w}_r(\sigma)}^{[k]}(\tau) + \tilde{a}_{n,1}^{[k]}(\sigma, \tau),$$

where

$$\tilde{a}_{n,1}^{[k]} \in \left(\text{Ker} \left(\mathcal{N}_0 - \mu_0^{[k]}\right)\right)^\perp.$$

The procedure can be continued by induction. \square

Remark 2.4.4. *By (2.39) and using the fact that $\xi_0^{[k]} - \text{Im}(\varphi(\sigma))$ is bounded below and that $\gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \Phi_r'(\sigma) = \text{Re} \varphi_r(\sigma)$ is sufficiently small, we can apply [12, Theorem 1.2] to the function $\nu^{[k]}$ and we obtain that the exact solution of the eikonal equation verifies that*

$$\Phi_r'(\sigma) \geq \nu^{[k]} \left(\xi_0^{[k]}\right) \left(\gamma(\sigma)^{\frac{2}{k+2}} - \gamma_0^{\frac{2}{k+2}}\right). \quad (2.48)$$

Remark 2.4.5. (Solving (2.46) and normalization of $\Psi_{h,r}^{[k]}$) *In the expression of the tunneling effect that we will write at the end, we need to find the explicit form (a priori in terms of φ_r) of solution $f_{1,0}$ of the transport equation (2.46). This equation can be written as follows*

$$\partial_\sigma f_{1,0} + \frac{\mathfrak{Y}'_r(\sigma) + 2\mathfrak{R}_r(\sigma) - 2\delta_{n,1}^{[k]}}{2\mathfrak{Y}_r(\sigma)} f_{1,0} = 0. \quad (2.49)$$

where

$$\mathfrak{Y}_r(\sigma) := -i\partial_\xi \mu^{[k]}(\sigma, \mathfrak{w}_r(\sigma)). \quad (2.50)$$

We may write $f_{1,0}$ in the form $f_{1,0}(\sigma) = e^{i\alpha_{1,0}(\sigma)} \tilde{f}_{1,0}(\sigma)$ with $\tilde{f}_{1,0}$ and $\alpha_{1,0}$ are real-valued functions such that $\tilde{f}_{1,0}(0) > 0$. From (2.49), $\tilde{f}_{1,0}$ solves the real classical transport equation

$$\partial_\sigma \tilde{f}_{1,0} + \text{Re} \left(\frac{\mathfrak{Y}'_r(\sigma) + 2\mathfrak{R}_r(\sigma) - 2\delta_{n,1}^{[k]}}{2\mathfrak{Y}_r(\sigma)} \right) \tilde{f}_{1,0} = 0.$$

Then, we get

$$\tilde{f}_{1,0}(\sigma) = K_0 \exp \left(- \int_{s_r}^\sigma \text{Re} \left(\frac{\mathfrak{Y}'_r(s) + 2\mathfrak{R}_r(s) - 2\delta_{n,1}^{[k]}}{2\mathfrak{Y}_r(s)} \right) ds \right),$$

and the constant K_0 is chosen so that the WKB solution $\Psi_{h,r}^{[k]}$ in Theorem 2.4.3 is almost normalized. Following e.g.[16, Lemma 2.1], we choose K_0 so that $1 = K_0^2 \sqrt{\frac{\pi}{\Phi''(s_r)}}$, which allows us to choose K_0 as

$$K_0 = \left(\frac{\Phi_r''(s_r)}{\pi} \right)^{1/4} = \left(\frac{\zeta}{\pi} \right)^{1/4},$$

with ζ is defined in (2.47). Therefore,

$$\tilde{f}_{1,0}^2(0) = \sqrt{\frac{\zeta}{\pi}} A_u \quad \text{and} \quad A_u := \exp \left(- \int_{s_r}^0 \operatorname{Re} \left(\frac{\mathfrak{Y}'_r(s) + 2\mathfrak{R}_r(s) - 2\delta_{n,1}^{[k]}}{2\mathfrak{Y}_r(s)} \right) ds \right). \quad (2.51)$$

From (2.49), the phase shifts $\alpha_{1,0}$ are chosen so that

$$\alpha'_{1,0}(s) = -\operatorname{Im} \left(\frac{\mathfrak{Y}'_r(\sigma) + 2\mathfrak{R}_r(\sigma) - 2\delta_{n,1}^{[k]}}{2\mathfrak{Y}_r(\sigma)} \right).$$

Noticing that $\mathfrak{Y}'_r(s_r) + 2\mathfrak{R}_r(s_r) - 2\delta_{n,1}^{[k]} = 0$ and \mathfrak{Y}_r vanishes linearly at s_r , the function $\alpha'_{1,0}(s)$ can be considered as a smooth function at s_r . This shows that we have determined the phase shift $\alpha_{1,0}$ up to an additive constant. Then, we define

$$\alpha_0 := \frac{\alpha_{1,0}(0) - \alpha_{1,0}(-L)}{L}. \quad (2.52)$$

Remark 2.4.6. By the symmetry defined in (2.24), we define the functions attached to the left well by

$$\mathfrak{w}_l(\sigma) := \overline{\mathfrak{w}_r(-\sigma)} \quad \text{and} \quad \mathfrak{R}_l(\sigma) := \overline{\mathfrak{R}_r(-\sigma)},$$

and the function \mathfrak{Y}_l by

$$\mathfrak{Y}_l(\sigma) = -i\partial_\xi \mu^{[k]}(\sigma, \mathfrak{w}_l(\sigma)).$$

2.5 A Grushin problem

In this section, we introduce pseudo-differential calculus with operator-valued symbols and perform a pseudo-differential dimensional reduction using Grushin's method. This

method is already used in [65, Chapter 3], [14], and the importance of this method is that it gives optimal decay estimates consistent with the WKB expansions.

In this section, we consider again the right-well operator $\mathcal{N}_{\hbar,r}^{[k]}$, introduced in (2.22). To simplify the notations, we will omit the reference to “right well” in the notation and write $\mathcal{N}_{\hbar}^{[k]}$, γ , δ , $\tilde{\delta}$, κ instead of $\mathcal{N}_{\hbar,r}^{[k]}$, γ_r , δ_r , $\tilde{\delta}_r$, κ_r . We also denote φ instead of φ_r , which has been defined in Lemma 2.4.1.

2.5.1 Sub-solution of the eikonal equation

To obtain the optimal estimates for the ground states of $\mathcal{N}_{\hbar}^{[k]}$, we will consider an exponential weight defined as a sub-solution of the eikonal equation (2.39). For this we consider a non-negative Lipschitzian function, $\sigma \mapsto \Phi(\sigma)$, satisfying the following hypothesis :

Assumption 2.5.1. *For all $M > 0$ there exist $\hbar_0, C, R > 0$ such that, for all $\hbar \in (0, \hbar_0)$, the function Φ satisfies*

(i) *For all $\sigma \in \mathbb{R}$, we have*

$$\operatorname{Re} \left(\gamma(\sigma)^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]} \left(\xi_0^{[k]} - \operatorname{Im} (\varphi(\sigma)) + i\gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \Phi'(\sigma) \right) - \gamma_0^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}) \right) \geq 0,$$

(ii) *For all $\sigma \in \mathbb{R}$ such that $|\sigma - s_r| \geq R\hbar^{1/2}$, we have*

$$\operatorname{Re} \left(\gamma(\sigma)^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]} \left(\xi_0^{[k]} - \operatorname{Im} (\varphi(\sigma)) + i\gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \Phi'(\sigma) \right) - \gamma_0^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}) \right) \geq M\hbar,$$

(iii) *For all $\sigma \in \mathbb{R}$ such that $|\sigma - s_r| \leq R\hbar^{1/2}$, we have*

$$|\Phi(\sigma)| \leq M\hbar.$$

Remark 2.5.2. *The function*

$$\Phi(\sigma) = \sqrt{\frac{\nu^{[k]}(\xi_0^{[k]})}{2}} \int_{s_r}^{\sigma} \sqrt{\gamma_r(\tilde{\sigma})^{\frac{2}{k+2}} - \gamma_0^{\frac{2}{k+2}}} d\tilde{\sigma}$$

verifies Hypothesis 2.5.1. Indeed, using the fact that $\xi_0^{[k]} - \operatorname{Im} (\varphi(\sigma))$ is bounded below and that $\gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \Phi'(\sigma)$ is sufficiently small, we can apply [12, Theorem 1.2] to the function

$\nu^{[k]}$ and we obtain

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left(\gamma(\sigma)^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]} \left(\xi_0^{[k]} - \operatorname{Im}(\varphi(\sigma)) + i\gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \Phi'(\sigma) \right) - \gamma_0^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}) \right) \\ & \geq \frac{1}{2} \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}) \left(\gamma_r(\sigma)^{\frac{2}{k+2}} - \gamma_0^{\frac{2}{k+2}} \right), \end{aligned}$$

and Hypothesis 2.5.1 is well verified using the fact that the function γ_r has a unique non-degenerate minimum at s_r . But it should be noted that this does not give us the optimal Agmon estimates (and after the optimal approximations of the eigenfunctions), it is necessary to construct weight functions that are related to the exact solution of the eikonal equation. Much more useful solutions will be presented in the following proposition.

The following proposition shows the weight functions which satisfy Assumption 2.5.1.

Proposition 2.5.3. *We consider the function \mathbf{v}_r defined on \mathbb{R} by*

$$\mathbf{v}_r(\sigma) = \frac{1}{2} \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}) \left(\gamma_r(\sigma)^{\frac{2}{k+2}} - \gamma_0^{\frac{2}{k+2}} \right).$$

By the hypothesis on γ_r , we can choose $c_0 > 0$ such that

$$\mathbf{v}_r(\sigma) \geq c_0(\sigma - s_r)^2 \text{ and } \Phi_r(\sigma) \geq c_0(\sigma - s_r)^2 \text{ for all } \sigma \in B_i(L - \eta).$$

The following functions verify Assumption 2.5.1 :

(a) For $\epsilon \in (0, 1)$,

$$\Phi_{r,\epsilon} = \sqrt{1 - \epsilon} \Phi_r \text{ with } R > 0 \text{ and } M = c_0 \epsilon R^2.$$

(b) For $N \in \mathbb{N}^*$ and $\hbar \in (0, 1)$,

$$\tilde{\Phi}_{r,N,\hbar} = \Phi_{r,R} - N\hbar \ln \left(\max \left(\frac{\Phi_r}{\hbar}, N \right) \right) \text{ with } R = \sqrt{\frac{N}{c_0}} \text{ and } M = N \inf \frac{\mathbf{v}_r}{\Phi_r}.$$

(c) For $\epsilon \in (0, 1)$, $N \in \mathbb{N}$ and $\hbar \in (0, 1)$,

$$\hat{\Phi}_{r,N,\hbar}(s) = \min \left\{ \tilde{\Phi}_{r,N,\hbar}(s), \sqrt{1 - \epsilon} \inf_{t \in \operatorname{supp} \chi'_r} \left(\Phi_r(t) + \int_{[s_r,t]} \gamma(\tilde{\sigma})^{\frac{1}{k+2}} \operatorname{Re} \varphi_r(\tilde{\sigma}) d\tilde{\sigma} \right) \right\},$$

with $R = \sqrt{\frac{N}{c_0}}$ and $M = N \min \left(\epsilon, \inf \frac{\mathbf{v}_r}{\Phi_r} \right)$, where $\operatorname{supp} \chi'_r \subset I_{\eta,r} \setminus I_{2\eta,r}$.

Démonstration. Since Φ_r verifies (2.48) and the function γ_r admits a unique non-degenerate minimum at s_r , the existence of $c_0 > 0$ is well guaranteed.

We recall that the function Φ_r verifies the eikonal equation (2.39), and by Lemma 2.4.1, the function Φ_r is defined by

$$\Phi_r(\sigma) = \int_{s_r}^{\sigma} \gamma(\tilde{\sigma})^{\frac{1}{k+2}} \operatorname{Re} \varphi_r(\tilde{\sigma}) d\tilde{\sigma}, \quad (2.53)$$

where φ_r verify (2.31) and (2.32), with

$$|\mathfrak{f}_r(\sigma)| = \sqrt{\nu^{[k]}(\xi_0^{[k]})} \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_r}\right)^{\frac{2}{k+2}}}.$$

According to the chosen hypothesis on γ_r , $|\mathfrak{f}_r(\sigma)|$ is small enough for all $\sigma \in \mathbb{R}$ and so, by (2.31) and (2.32), $|\varphi_r(\sigma)|$ is small enough for all $\sigma \in \mathbb{R}$.

(a) By (2.39) and (2.53), φ_r verify that

$$\gamma_r(\sigma)^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]} + i\varphi_r(\sigma)) = \gamma_0^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}).$$

Then, by the expression of $\Phi_{r,\epsilon}$, we get

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left(\gamma_r(\sigma)^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]} - \operatorname{Im}(\varphi_r(\sigma)) + i\gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \Phi'_{r,\epsilon}(\sigma)) - \gamma_0^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}) \right) \\ &= \gamma(\sigma)^{\frac{2}{k+2}} \operatorname{Re} \left\{ \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]} - \operatorname{Im}(\varphi_r(\sigma)) + i\sqrt{1-\epsilon} \operatorname{Re} \varphi_r(\sigma)) - \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]} + i\varphi_r(\sigma)) \right\}. \end{aligned}$$

Using the Taylor expansion for the function $\nu^{[k]}$ in a neighborhood of $\xi_0^{[k]}$, we get

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left(\nu^{[k]}(\xi_0^{[k]} - \operatorname{Im}(\varphi_r(\sigma)) + i\sqrt{1-\epsilon} \operatorname{Re} \varphi_r(\sigma)) - \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]} + i\varphi_r(\sigma)) \right) \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n \geq 2} \frac{(\nu^{[k]})^{(n)}(\xi_0^{[k]})}{n!} \left((-\operatorname{Im}(\varphi_r(\sigma)) + i\sqrt{1-\epsilon} \operatorname{Re} \varphi_r(\sigma))^n - (i\varphi_r(\sigma))^n \right) \right\} \\ &= \sum_{n \geq 2} \frac{(\nu^{[k]})^{(n)}(\xi_0^{[k]})}{n!} \operatorname{Re} \left\{ \left((-\operatorname{Im}(\varphi_r(\sigma)) + i\sqrt{1-\epsilon} \operatorname{Re} \varphi_r(\sigma))^n - (-\operatorname{Im}(\varphi_r(\sigma)) + i \operatorname{Re} \varphi_r(\sigma))^n \right) \right\}. \end{aligned}$$

Recall that, for all $a, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ and for all $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, we have

$$\operatorname{Re} \{(a + ib_1)^n - (a + ib_2)^n\} = (b_2^2 - b_1^2) \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^{j+1} C_n^{2j} a^{n-2j} \left(\sum_{l=0}^{j-1} b_1^{2l} b_2^{2j-2l-2} \right). \quad (2.54)$$

Using (2.54), (2.31), (2.32) and the fact that $|\mathfrak{f}_r(\sigma)|$ is small enough, we get

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\{ \left(-\operatorname{Im}(\varphi_r(\sigma)) + i\sqrt{1 - \epsilon} \operatorname{Re} \varphi_r(\sigma) \right)^n - \left(-\operatorname{Im}(\varphi_r(\sigma)) + i \operatorname{Re} \varphi_r(\sigma) \right)^n \right\} \\ &= \begin{cases} \epsilon \operatorname{Re} \varphi_r^2(\sigma) & \text{if } n = 2, \\ \epsilon \operatorname{Re} \varphi_r^2(\sigma) \mathcal{O}(\mathfrak{f}_r(\sigma)^2) & \text{if } n \geq 2, \end{cases} \end{aligned}$$

which implies that

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left(\nu^{[k]} \left(\xi_0^{[k]} - \operatorname{Im}(\varphi_r(\sigma)) + i\sqrt{1 - \epsilon} \operatorname{Re} \varphi_r(\sigma) \right) - \nu^{[k]} \left(\xi_0^{[k]} + i\varphi_r(\sigma) \right) \right) \\ &= \epsilon \mathfrak{f}_r(\sigma)^2 + \epsilon \mathfrak{f}_r(\sigma)^2 \mathcal{O}(\mathfrak{f}_r(\sigma)^2). \end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned} & \gamma(\sigma)^{\frac{2}{k+2}} \operatorname{Re} \left\{ \nu^{[k]} \left(\xi_0^{[k]} - \operatorname{Im}(\varphi_r(\sigma)) + i\sqrt{1 - \epsilon} \operatorname{Re} \varphi_r(\sigma) \right) - \nu^{[k]} \left(\xi_0^{[k]} + i\varphi_r(\sigma) \right) \right\} \\ &= \epsilon \gamma(\sigma)^{\frac{2}{k+2}} \mathfrak{f}_r(\sigma)^2 \left(1 + \mathcal{O}(\mathfrak{f}_r(\sigma)^2) \right) \\ &\geq \epsilon \mathbf{v}_r(\sigma), \end{aligned}$$

and, for all $\sigma \in \mathbb{R}$ such that $|\sigma - s_r| \geq R\hbar^{1/2}$, we have

$$\operatorname{Re} \left(\gamma(\sigma)^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]} \left(\xi_0^{[k]} - \operatorname{Im}(\varphi_r(\sigma)) + i\gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \Phi'_{r,\epsilon}(\sigma) \right) - \gamma_0^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}) \right) \geq \epsilon c_0 R^2 \hbar.$$

(b) For all $N \in \mathbb{N}$ and $\hbar \in (0, \hbar_0)$, we have

$$\tilde{\Phi}'_{r,N,\hbar} = \begin{cases} \Phi'_r \left(1 - \frac{N\hbar}{\Phi_r} \right) & \text{if } \frac{\Phi_r}{\hbar} \geq N, \\ \Phi'_r & \text{if } \frac{\Phi_r}{\hbar} < N. \end{cases}$$

Then, on $\{\Phi_r \geq N\hbar\}$, we have

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left(\gamma(\sigma)^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]} \left(\xi_0^{[k]} - \operatorname{Im} (\varphi_r(\sigma)) + i\gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \tilde{\Phi}'_{r,N,\hbar}(\sigma) \right) - \gamma_0^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}) \right) \\ &= \gamma(\sigma)^{\frac{2}{k+2}} \operatorname{Re} \left\{ \nu^{[k]} \left(\xi_0^{[k]} - \operatorname{Im} (\varphi_r(\sigma)) + i \left(1 - \frac{N\hbar}{\Phi_r} \right) \operatorname{Re} \varphi_r(\sigma) \right) - \nu^{[k]} \left(\xi_0^{[k]} + i\varphi_r(\sigma) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Similarly as part (a), on $\{\Phi_r \geq N\hbar\}$, we get

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left(\gamma(\sigma)^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]} \left(\xi_0^{[k]} - \operatorname{Im} (\varphi_r(\sigma)) + i\gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \tilde{\Phi}'_{r,N,\hbar}(\sigma) \right) - \gamma_0^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}) \right) \\ & \geq \frac{N\hbar}{\Phi_r} \left(2 - \frac{N\hbar}{\Phi_r} \right) \mathbf{v}_r(\sigma) \\ & \geq \frac{N\hbar}{\Phi_r} \mathbf{v}_r(\sigma) \geq c_1 N\hbar, \end{aligned}$$

with $c_1 = \inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \frac{\mathbf{v}_r}{\Phi_r} > 0$.

Let $R \geq R_0 = \sqrt{\frac{N}{c_0}}$. we have

$$|\sigma - s_r| \geq R\hbar^{1/2} \Rightarrow \Phi_{r,R} \geq c_0 R^2 \hbar \geq N\hbar,$$

which implies that for all $\sigma \in \mathbb{R}$ such that $|\sigma - s_r| \geq R\hbar^{1/2}$, we have

$$\operatorname{Re} \left(\gamma(\sigma)^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]} \left(\xi_0^{[k]} - \operatorname{Im} (\varphi_r(\sigma)) + i\gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \tilde{\Phi}'_{r,N,\hbar}(\sigma) \right) - \gamma_0^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}) \right) \geq M\hbar.$$

(c) It exists $t_0 \in \operatorname{supp}(\chi'_r)$ such that

$$\inf_{t \in \operatorname{supp} \chi'_r} \left(\Phi_r(t) + \int_{s_r}^t \gamma(\tilde{\sigma})^{\frac{1}{k+2}} \operatorname{Re} \varphi_r(\tilde{\sigma}) d\tilde{\sigma} \right) = \Phi_r(t_0) + \int_{s_r}^{t_0} \gamma(\tilde{\sigma})^{\frac{1}{k+2}} \operatorname{Re} \varphi_r(\tilde{\sigma}) d\tilde{\sigma}.$$

Then,

$$\left| \hat{\Phi}'_{r,N,\hbar} \right| = \left| \tilde{\Phi}'_{r,N,\hbar} \right| \quad \text{or} \quad \left| \hat{\Phi}'_{r,N,\hbar} \right| = \sqrt{1 - \epsilon} |\Phi'_r| = \Phi'_{r,\epsilon}.$$

Therefore, $\hat{\Phi}_{r,N,\hbar}$ verifies Assumption 2.5.1.

□

2.5.2 A pseudo-differential operator with operator-valued symbol.

We consider the conjugate operator

$$\mathcal{N}_\hbar^{[k],\phi} = e^{\frac{\phi}{\hbar}} \mathcal{N}_\hbar^{[k]} e^{-\frac{\phi}{\hbar}},$$

with the same domain as $\mathcal{N}_\hbar^{[k]}$. It needs

$$\mathcal{N}_\hbar^{[k],\Phi} = \mathfrak{a}_\hbar^{-1} D_\tau a_\hbar D_\tau + \mathfrak{a}_\hbar^{-1} \left(\hbar D_\sigma - \mathcal{A}_\hbar^{[k],\Phi}(\sigma, \tau) \right) \mathfrak{a}_\hbar^{-1} \left(\hbar D_\sigma - \mathcal{A}_\hbar^{[k],\Phi}(\sigma, \tau) \right),$$

with

$$\mathcal{A}_\hbar^{[k],\Phi}(\sigma, \tau) = -i\Phi'(\sigma) + \gamma(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} + \hbar \tilde{\delta}(\sigma) \frac{\tau^{k+2}}{k+2} c_\mu + \hbar^2 c_\mu \mathcal{O}(\tau^{k+3}).$$

We recall that for a symbol $a(\sigma, \xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, the Weyl quantization of a is the operator $\text{Op}_\hbar^{\text{W}}(a)$ defined, for all $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_\sigma; \mathcal{S}(\mathbb{R}_\tau))$, by

$$\text{Op}_\hbar^{\text{W}}(a)u(\sigma) := \frac{1}{2\pi\hbar} \int \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{i}{\hbar}(\sigma-\tilde{\sigma})\cdot\xi} a\left(\frac{\sigma+\tilde{\sigma}}{2}, \xi\right) u(\tilde{\sigma}) d\tilde{\sigma} d\xi.$$

Classical results of pseudo-differential calculus, for symbols with operator values, are already detailed in [65, Chapter 2]. We consider the real valued function \mathfrak{g} defined by

$$\mathfrak{g}(\sigma) = \int_0^\sigma \gamma(\tilde{\sigma})^{\frac{1}{k+2}} \left(\left(1 - \left(\frac{\gamma_0}{\gamma} \right)^{\frac{1}{k+2}} \right) \xi_0^{[k]} - \text{Im}(\varphi(\tilde{\sigma})) \right) d\tilde{\sigma}.$$

Remark 2.5.4. *Note that, only in this section, this is not the same function as the one in (2.35). There is an addition of the term $-\gamma_0^{\frac{1}{k+2}} \xi_0^{[k]}$. This new function is more convening for the computations than (2.35).*

After the gauge transformation $e^{-i\frac{\mathfrak{g}(\sigma)}{\hbar}}$, we are led to work with the conjugate operator

$$\tilde{\mathcal{N}}_\hbar^{[k],\Phi} = e^{-i\frac{\mathfrak{g}(\sigma)}{\hbar}} \mathcal{N}_\hbar^{[k],\Phi} e^{i\frac{\mathfrak{g}(\sigma)}{\hbar}} \quad (2.55)$$

instead of $\mathcal{N}_\hbar^{[k],\Phi}$. We notice that $\tilde{\mathcal{N}}_\hbar^{[k],\Phi}$ can be written as an \hbar -pseudo-differential operator with an operator valued symbol $n_\hbar^{[k]}(\sigma, \xi)$ having an expansion in powers of \hbar :

$$n_\hbar^{[k]} = n_0 + \hbar n_1 + \hbar^2 n_2 + \dots,$$

with

$$n_0 = D_\tau^2 + \left(\xi + \mathfrak{w}(\sigma) - \gamma(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \right)^2,$$

$$n_1 = -2\tilde{\delta}(\sigma) \frac{\tau^{k+2}}{k+2} c_\mu \left(\xi + \mathfrak{w}(\sigma) - \gamma(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \right) + 2\tau c_\mu k \left(\xi + \mathfrak{w}(\sigma) - \gamma(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \right)^2,$$

where $\mathfrak{w}(\sigma) = \mathfrak{g}'(\sigma) + i\Phi'(\sigma)$ and the notation \mathcal{O} is defined in [14, Notation 3.1].

The frequency variable ξ is a priori unbounded. Then, as in [14], n_h can be replaced by a bounded symbol as long as nothing is changed near the minimum. For this, we consider the function defined on \mathbb{R} by

$$\chi_1(\xi) = \gamma_0^{\frac{1}{k+2}} \xi_0^{[k]} + \chi(\xi - \gamma_0^{\frac{1}{k+2}} \xi_0^{[k]}),$$

where $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ is a function that verifies the following assertions :

- (i) the function χ is a smooth, bounded, increasing and odd function on \mathbb{R} .
- (ii) $\chi(\xi) = \xi$ on $[-1, 1]$ and $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \chi(\xi) = 2$.

We will consider

$$\text{Op}_h^{\text{W}}(p_h) \quad , \quad \text{where} \quad p_h(\sigma, \xi) = n_h(\sigma, \chi_1(\xi)).$$

The symbol p_h has the same expansion in powers of \hbar , except ξ to replace with the truncation function $\chi_1(\xi)$.

2.5.3 Solving the Grushin problem.

For $z \in \mathbb{C}$, we define

$$\mathcal{P}_z(\sigma, \xi) = \begin{pmatrix} p_h - z & \cdot v_{\sigma, \xi} \\ \langle \cdot, v_{\sigma, \xi} \rangle & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{S} \left(\mathbb{R}_{\sigma, \xi}^2, \mathcal{L} \left(\text{Dom}(p_0) \times \mathbb{C}, L^2(\mathbb{R}) \times \mathbb{C} \right) \right),$$

see [14, Notation 3.2], where

$$p_0 := \mathcal{M}_{\sigma, \chi_1(\xi) + \mathfrak{w}(\sigma)}^{[k]} = D_\tau^2 + \left(\chi_1(\xi) + \mathfrak{w}(\sigma) - \gamma(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \right)^2, \quad (2.56)$$

is the principal symbol of p_h and $v_{\sigma,\xi} := u_{\sigma,\chi_1(\xi)+\mathfrak{w}(\sigma)}^{[k]}$ is the eigenfunction associated with the smallest eigenvalue $\mu^{[k]}(\sigma, \chi_1(\xi) + \mathfrak{w}(\sigma))$ of p_0 .

\mathcal{P}_z decomposes in the form :

$$\mathcal{P}_z = \mathcal{P}_{0,z} + \hbar \mathcal{P}_1 + \hbar^2 \mathcal{P}_2 + \dots,$$

with

$$\mathcal{P}_{0,z}(\sigma, \xi) = \begin{pmatrix} p_0 - z & \cdot v_{\sigma,\xi} \\ \langle \cdot, v_{\sigma,\xi} \rangle & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

where

$$p_1 = -2\tilde{\delta}(\sigma) \frac{\tau^{k+2}}{k+2} c_\mu \left(\chi_1(\xi) + \mathfrak{w}(\sigma) - \gamma(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \right) + 2\tau c_\mu k \left(\chi_1(\xi) + \mathfrak{w}(\sigma) - \gamma(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \right)^2. \quad (2.57)$$

Let $z \in \mathbb{C}$ such that $\operatorname{Re}(z) \in (\mu_0^{[k]} - \varepsilon, \mu_0^{[k]} + \varepsilon)$, with $\varepsilon > 0$ such that

$$\varepsilon < \frac{1}{2} \left(\inf_{\xi \in \mathbb{R}} \nu_2^{[k]}(\xi) - \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}) \right), \quad (2.58)$$

where $\nu_2^{[k]}(\xi)$ is the second eigenvalue of the Montgomery operator $\mathfrak{h}_\xi^{[k]}$ for $\xi \in \mathbb{R}$.

Lemma 2.5.5. *For all $(\sigma, \xi) \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{P}_{0,z}(\sigma, \xi)$ is bijective and*

$$\mathcal{Q}_{0,z}(\sigma, \xi) := \mathcal{P}_{0,z}^{-1}(\sigma, \xi) = \begin{pmatrix} (p_0 - z)^{-1} \Pi^\perp & \cdot v_{\sigma,\xi} \\ \langle \cdot, v_{\sigma,\xi} \rangle & z - \mu^{[k]}(\sigma, \chi_1(\xi) + \mathfrak{w}(\sigma)) \end{pmatrix},$$

and

$$\mathcal{Q}_{0,z}(\sigma, \xi) \in S \left(\mathbb{R}_{\sigma,\xi}^2; \mathcal{L} \left(\operatorname{Dom}(p_0) \times \mathbb{C}, L^2(\mathbb{R}) \times \mathbb{C} \right) \right).$$

Here $\Pi = \Pi_{\sigma,\xi}$ is the orthogonal projection on $v_{\sigma,\xi}$ and $\Pi^\perp = Id - \Pi$.

Démonstration. Let $(v, \beta) \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{C})$ and find $(u, \alpha) \in \operatorname{Dom}(p_0) \times \mathbb{C}$ such that

$$\mathcal{P}_{0,z}(\sigma, \xi) \begin{pmatrix} u \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \beta \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

This equation is equivalent to

$$(p_0 - z)u = v - \alpha v_{\sigma,\xi} \quad \text{and} \quad \langle u, v_{\sigma,\xi} \rangle = \beta.$$

We have

$$\begin{aligned} (p_0 - z)u^\perp &= (p_0 - z)(u - \langle u, v_{\sigma, \xi} \rangle v_{\sigma, \xi}) \\ &= v - \alpha v_{\sigma, \xi} - \beta \left(\mu^{[k]}(\sigma, \chi_1(\xi) + \mathfrak{w}(\sigma)) - z \right) v_{\sigma, \xi}. \end{aligned}$$

The space $(\mathbb{C}v_{\sigma, \xi})^\perp$ is stable by $p_0 - z$, then $p_0 - z$ induces an operator

$$p_0 - z : (\mathbb{C}v_{\sigma, \xi})^\perp \longrightarrow (\mathbb{C}v_{\sigma, \xi})^\perp.$$

On this space,

$$\langle (p_0 - \operatorname{Re}(z))u, u \rangle \geq \left(\operatorname{Re} \left(\mu_2^{[k]}(\sigma, \chi_1(\xi) + \mathfrak{w}(\sigma)) \right) - \operatorname{Re}(z) \right) \|u\|^2 \geq c_0 \|u\|^2,$$

by the choice of z . Indeed, applying [12, Theorem 1.2] to the function $\nu_2^{[k]}$ (see also Remark 1.3 and 1.4 in [12]), using (2.58) and the fact that $|\Phi'(\sigma)|$ is small enough for all $\sigma \in \mathbb{R}$ (according to Assumption 2.1.1 and the choice of Φ in Proposition 2.5.3), we get

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \left(\mu_2^{[k]}(\sigma, \chi_1(\xi) + \mathfrak{w}(\sigma)) \right) - \operatorname{Re}(z) \\ &= \operatorname{Re} \left(\gamma(\sigma)^{\frac{2}{k+2}} \nu_2^{[k]} \left(\gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \chi_1(\xi) + \gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \mathfrak{g}'(\sigma) + i\gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \Phi'(\sigma) \right) - \mu_0^{[k]} - \varepsilon \right) \\ &\geq \operatorname{Re} \left(\gamma(\sigma)^{\frac{2}{k+2}} \nu_2^{[k]} \left(\gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \chi_1(\xi) + \gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \mathfrak{g}'(\sigma) \right) - \Phi'(\sigma)^2 - \mu_0^{[k]} - \varepsilon \right) \\ &\geq \gamma_0^{\frac{2}{k+2}} \left(\inf_{\xi \in \mathbb{R}} \nu_2^{[k]}(\xi) - \inf_{\xi \in \mathbb{R}} \nu_1^{[k]}(\xi) \right) - \Phi'(\sigma)^2 - \varepsilon \\ &\geq \frac{\gamma_0^{\frac{2}{k+2}}}{2} \left(\inf_{\xi \in \mathbb{R}} \nu_2^{[k]}(\xi) - \inf_{\xi \in \mathbb{R}} \nu_1^{[k]}(\xi) \right) - \Phi'(\sigma)^2 \geq c_0, \end{aligned}$$

where $c_0 > 0$. Thus, this operator is injective with closed range and, by considering the adjoint, it is bijective. We have :

$$\begin{aligned} (p_0 - z)u^\perp &= v - \alpha v_{\sigma, \xi} - \beta \left(\mu^{[k]}(\sigma, \chi_1(\xi) + \mathfrak{w}(\sigma)) - z \right) v_{\sigma, \xi} \in (\mathbb{C}v_{\sigma, \xi})^\perp \\ \implies \langle v, v_{\sigma, \xi} \rangle - \alpha - \beta \left(\mu^{[k]}(\sigma, \chi_1(\xi) + \mathfrak{w}(\sigma)) - z \right) &= 0 \\ \implies \alpha &= \langle v, v_{\sigma, \xi} \rangle - \beta \left(\mu^{[k]}(\sigma, \chi_1(\xi) + \mathfrak{w}(\sigma)) - z \right). \end{aligned}$$

By the bijectivity of $p_0 - z$ on $(\mathbb{C}v_{\sigma,\xi})^\perp$, we take

$$\begin{aligned} u^\perp &= (p_0 - z)^{-1} \left(v - \alpha v_{\sigma,\xi} - \beta \left(\mu^{[k]}(\sigma, \chi_1(\xi) + \mathfrak{m}(\sigma)) - z \right) v_{\sigma,\xi} \right) \\ &= (p_0 - z)^{-1} (v - \langle v, v_{\sigma,\xi} \rangle v_{\sigma,\xi}) \\ &= (p_0 - z)^{-1} \Pi^\perp v. \end{aligned}$$

Therefore, $u = \langle u, v_{\sigma,\xi} \rangle v_{\sigma,\xi} + u^\perp = \beta v_{\sigma,\xi} + (p_0 - z)^{-1} \Pi^\perp v$. \square

The following proposition gives an expression of an approximative inverse of operator $\text{Op}_\hbar^W(\mathcal{P}_z)$ with a remainder of order \hbar .

Proposition 2.5.6. *We have*

$$\text{Op}_\hbar^W(\mathcal{Q}_{0,z}) \text{Op}_\hbar^W(\mathcal{P}_z) = \text{Id} + \hbar \mathcal{O}(\langle \tau \rangle^{2k+3}). \quad (2.60)$$

Moreover, if we denote by

$$\mathcal{Q}_{0,z} := \begin{pmatrix} q_{0,z} & q_{0,z}^+ \\ q_{0,z}^- & q_{0,z}^\pm \end{pmatrix},$$

then modulo some remainders of order \hbar , we have

$$\left(\text{Op}_\hbar^W(p_\hbar) - z \right)^{-1} = \text{Op}_\hbar^W q_{0,z} - \text{Op}_\hbar^W q_{0,z}^- \left(\text{Op}_\hbar^W q_{0,z}^\pm \right)^{-1} \text{Op}_\hbar^W q_{0,z}^+. \quad (2.61)$$

Démonstration. Using Lemma 2.5.5, and composition of pseudo-differential operators, we have

$$\text{Op}_\hbar^W(\mathcal{Q}_{0,z}) \circ \text{Op}_\hbar^W(\mathcal{P}_{0,z}) = \text{Op}_\hbar^W(\mathcal{D}_{0,z}),$$

with $\mathcal{D}_{0,z} = \text{Id} + \hbar \tilde{\mathcal{R}}$. By the Calderon-Vaillancourt theorem, $\tilde{\mathcal{R}}$ is a bounded operator, but the bounds depends on the parameter μ . In the terms of $\tilde{\mathcal{R}}$, τ^{k+1} appears and so we can consider $\text{Op}_\hbar^W(\tilde{\mathcal{R}})$ as a bounded operator for the topology $L^2(\langle \tau \rangle^{k+1} d\tau d\sigma)$.

On the other hand, we see that

$$\text{Op}_\hbar^W(\mathcal{Q}_{0,z}) \circ \left(\text{Op}_\hbar^W(\mathcal{P}_z) - \text{Op}_\hbar^W(\mathcal{P}_{0,z}) \right)$$

is of order \hbar for the topology of $L^2(\langle \tau \rangle^{2k+3} d\tau d\sigma)$. This power of τ^{2k+3} comes from the terms of \mathcal{P}_1 in (2.57). Therefore, (2.60) is proved.

The proof of (2.61) was already established in [65, Proposition 3.1.7]. \square

2.5.4 Tangential coercivity estimates

The goal of this subsection is to prove the following Theorem which gives tangential elliptic estimate for the truncated operator $\text{Op}_h^W(p_h)$. We recall that Φ is a non-negative Lipchitzian function, verifying Assumption 2.5.1

Theorem 2.5.7. *Let $c_0 > 0$ and $\chi_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ which equals 1 in the neighborhood of 0. There exist $c, \hbar_0, R_0 > 0$ such that, for all $R > R_0$, there exists $C_R > 0$ such that for all $\hbar \in (0, \hbar_0)$ and all $z \in \mathbb{C}$ such that $|z - \mu_0^{[k]}| \leq c_0 \hbar$, and for all $\psi \in \text{Dom}(\text{Op}_h^W(p_h))$,*

$$cR^2 \hbar \|\psi\| \leq \left\| \left(\text{Op}_h^W(p_h) - z \right) \psi \right\| + C_R \hbar \left\| \chi_0 \left(\frac{\sigma - s_r}{R\hbar^{1/2}} \right) \psi \right\| + \hbar \left\| \tau^{2k+3} \psi \right\|.$$

The procedure for proving this Theorem is the same as the one followed in [14, Theorem 4.2], but what differs here is the eikonal equation. We first prove the following proposition which will be the main ingredient in the proof of Theorem 2.5.7.

Proposition 2.5.8. *Let $c_0 > 0$. There exist $C, \hbar_0 > 0$ such that, for all $z \in \mathbb{C}$ with $|z - \mu_0^{[k]}| \leq c_0 \hbar$, and for all $\psi \in \text{Dom}(\text{Op}_h^W(p_h))$,*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathfrak{E}_\Phi(\sigma) |\psi|^2 d\sigma d\tau - C\hbar \|\psi\|^2 \leq -\text{Re} \langle \text{Op}_h^W q_{0,z}^\pm \psi, \psi \rangle, \quad (2.62)$$

where

$$\mathfrak{E}_\Phi(\sigma) := \text{Re} \left(\gamma(\sigma)^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]} \left(\xi_0^{[k]} - \text{Im}(\varphi(\sigma)) + i\gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \Phi'(\sigma) \right) - \gamma_0^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}) \right). \quad (2.63)$$

Moreover, for some $c > 0$ and all $R > 0$, there exists $C_R > 0$ such that

$$cR^2 \hbar \|\psi\| \leq \left\| \text{Op}_h^W q_{0,z}^\pm \psi \right\| + C_R \hbar \left\| \chi_0 \left(\frac{\sigma - s_r}{R\hbar^{1/2}} \right) \psi \right\|. \quad (2.64)$$

Démonstration. By Lemma 2.5.5, we have

$$\begin{aligned}
 -q_{0,z}^{\pm} &= \mu^{[k]}(\sigma, \chi_1(\xi) + \mathbf{w}(\sigma)) - z \\
 &= \gamma(\sigma)^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]} \left(\gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \chi_1(\xi) + \gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \mathbf{w}(\sigma) \right) - \gamma_0^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}) + \mathcal{O}(\hbar) \\
 &= \gamma(\sigma)^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]} \left(\xi_0^{[k]} + \gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \chi(\xi - \gamma_0^{\frac{1}{k+2}} \xi_0^{[k]}) - \text{Im } \varphi(\sigma) + i\gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \Phi'(\sigma) \right) \\
 &\quad - \gamma_0^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}) + \mathcal{O}(\hbar).
 \end{aligned}$$

Then, $-\text{Re}(q_{0,z}^{\pm})$ is written in the form

$$-\text{Re}(q_{0,z}^{\pm}) = \mathfrak{E}_{\Phi}(\sigma) + \gamma(\sigma)^{\frac{2}{k+2}} r_{\Phi}(\sigma, \xi) + \mathcal{O}(\hbar), \quad (2.65)$$

with

$$\begin{aligned}
 r_{\Phi}(\sigma, \xi) &= \nu^{[k]} \left(\xi_0^{[k]} + \gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \chi(\xi - \gamma_0^{\frac{1}{k+2}} \xi_0^{[k]}) - \text{Im } \varphi(\sigma) + i\gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \Phi'(\sigma) \right) \\
 &\quad - \nu^{[k]} \left(\xi_0^{[k]} - \text{Im } (\varphi(\sigma)) + i\gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \Phi'(\sigma) \right),
 \end{aligned}$$

and the expression of $\mathfrak{E}_{\Phi}(\sigma)$ is given in (2.63). Using the Taylor expansion for the two terms of r_{Φ} at $\xi_0^{[k]}$ (for fixed σ) and the fact that the functions $\varphi(\sigma)$ and $\gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \Phi'(\sigma)$ are controlled by $\left\| 1 - \left(\frac{\gamma_0}{\gamma} \right)^{\frac{1}{k+2}} \right\|_{\infty}^{1/2}$, we obtain

$$\begin{aligned}
 r_{\Phi}(\sigma, \xi) &= \nu^{[k]} \left(\xi_0^{[k]} + \gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \chi(\xi - \gamma_0^{\frac{1}{k+2}} \xi_0^{[k]}) \right) - \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}) \\
 &\quad + \mathcal{O} \left(\left\| 1 - \left(\frac{\gamma_0}{\gamma} \right)^{\frac{1}{k+2}} \right\|_{\infty}^{1/2} \right) \min \left(1, \left| \xi - \gamma_0^{\frac{1}{k+2}} \xi_0^{[k]} \right| \right).
 \end{aligned}$$

Furthermore, since $(\nu^{[k]})'(\xi_0^{[k]}) = 0$ and $(\nu^{[k]})''(\xi_0^{[k]}) > 0$, there exists a constant $c_1 > 0$ (independent of σ) such that

$$\gamma(\sigma)^{\frac{2}{k+2}} \left(\nu^{[k]} \left(\xi_0^{[k]} + \gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \chi(\xi - \gamma_0^{\frac{1}{k+2}} \xi_0^{[k]}) \right) - \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}) \right) \geq c_1 \min \left(1, \left| \xi - \gamma_0^{\frac{1}{k+2}} \xi_0^{[k]} \right|^2 \right).$$

Using the fact that $\left\| 1 - \left(\frac{\gamma_0}{\gamma} \right)^{\frac{1}{k+2}} \right\|_{\infty}$ is small enough and from the Young inequality, we get

$$\gamma(\sigma)^{\frac{2}{k+2}} r_{\Phi} + \mathcal{O}(h) \geq -Ch,$$

and (2.65) becomes

$$-\operatorname{Re} \left(q_{0,z}^\pm \right) \geq \mathfrak{E}_\Phi(\sigma) - C\hbar.$$

We apply the Fefferman-Phong inequality (see [18, Theorem 3.2]) to get

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathfrak{E}_\Phi(\sigma) |\psi|^2 d\sigma d\tau - C\hbar \|\psi\|^2 \leq -\operatorname{Re} \langle \operatorname{Op}_\hbar^W q_{0,z}^\pm \psi, \psi \rangle.$$

Using Assumption 2.5.1, the fonction Φ verifies

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \mathfrak{E}_\Phi(\sigma) |\psi|^2 d\sigma d\tau &\geq \int_{|\sigma-s_r| \geq R\hbar^{1/2}} \mathfrak{E}_\Phi(\sigma) |\psi|^2 d\sigma d\tau \\ &\geq cR^2\hbar \int_{|\sigma-s_r| \geq R\hbar^{1/2}} |\psi|^2 d\sigma d\tau \\ &= cR^2\hbar \|\psi\|^2 - cR^2\hbar \int_{|\sigma-s_r| \leq R\hbar^{1/2}} |\psi|^2 d\sigma d\tau. \end{aligned}$$

So using (2.62), we get

$$(cR^2 - C)\hbar \|\psi\|^2 \leq \left\| \operatorname{Op}_\hbar^W q_{0,z}^\pm \right\| \|\psi\| + cR^2\hbar \int_{|\sigma-s_r| \leq R\hbar^{1/2}} |\psi|^2 d\sigma d\tau,$$

and for R large enough, (2.62) is well established. \square

The proof of Theorem 2.5.7 is then the same as the one of Theorem 4.2 in [14], but here with the use of the two Propositions 2.5.6 and 2.5.8.

2.6 Removing the frequency cutoff

The goal of this section is to prove that Theorem 2.5.7 remains true when we replace the truncate operator $\operatorname{Op}_\hbar^W p_\hbar$ by the operator without frequency cutoff $\mathcal{N}_\hbar^{[k],\Phi}$ defined in (2.55). For this purpose, we want to prove the following Theorem.

Theorem 2.6.1. *Let $c_0 > 0$. Under Assumption 2.5.1, there exist $c, \hbar_0 > 0$ such that for all $\hbar \in (0, \hbar_0)$ and all $z \in \mathbb{C}$ such that $|z - \mu_0^{[k]}| \leq c_0\hbar$, and all $\psi \in \operatorname{Dom} \left(\mathcal{N}_\hbar^{[k],\Phi} \right)$,*

$$c\hbar \|\psi\| \leq \left\| \langle \tau \rangle^{2k+3} \left(\mathcal{N}_\hbar^{[k],\Phi} - z \right) \psi \right\| + \hbar \left\| \chi_0 \left(\frac{\sigma - s_r}{R\hbar^{1/2}} \right) \psi \right\|.$$

In all what follows, we shall consider the smooth function $\mathbb{R} \ni \xi \mapsto \chi_2(\xi)$, such that

$$\chi_2 \left(2\gamma_0^{\frac{1}{k+2}} \xi_0^{[k]} - \xi \right) = \chi_2(\xi) \quad \text{for all } \xi \in \mathbb{R}, \quad (2.66)$$

and $\chi_2(\xi) = 0$ in a neighborhood of $\gamma_0^{\frac{1}{k+2}} \xi_0^{[k]}$, $\chi_2(\xi) = 1$ on $\{\xi \in \mathbb{R} : \chi_1(\xi) = \xi\}^c$ so that the support of χ_2 avoids $\gamma_0^{\frac{1}{k+2}} \xi_0^{[k]}$. We will now deal with some lemmas that help us to prove Theorem 2.6.1.

Lemma 2.6.2. *Let $c_0 > 0$. Under Assumption 2.5.1, there exist $C, \hbar_0 > 0$ such that for all $\hbar \in (0, \hbar_0)$ and all $z \in \mathbb{C}$ such that $|z - \mu_0^{[k]}| \leq c_0 \hbar$, and all $\psi \in \text{Dom}(\tilde{\mathcal{N}}_{\hbar}^{[k], \Phi})$,*

$$\|D_{\tau}\psi\| + \left\| \left(\hbar D_{\sigma} - \gamma(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \right) \psi \right\| \leq C \left\| (\tilde{\mathcal{N}}_{\hbar}^{[k], \Phi} - z) \psi \right\| + C \|\psi\|. \quad (2.67)$$

Démonstration. For all $\psi \in \text{Dom}(\tilde{\mathcal{N}}_{\hbar}^{[k], \Phi})$, we have

$$\langle \tilde{\mathcal{N}}_{\hbar}^{[k], \Phi} \psi, \psi \rangle \geq c \|D_{\tau}\psi\|^2 + c \left\| \left(\hbar D_{\sigma} + \mathfrak{w}(\sigma) - \gamma(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \right) \psi \right\|^2,$$

which implies that

$$\|D_{\tau}\psi\| + \left\| \left(\hbar D_{\sigma} + \mathfrak{w}(\sigma) - \gamma(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \right) \psi \right\| \leq C \left\| \tilde{\mathcal{N}}_{\hbar}^{[k], \Phi} \psi \right\| + C \|\psi\|.$$

Using the fact that $|\mathfrak{w}(\sigma)|$ is bounded, (2.67) is well established. \square

Lemma 2.6.3. *Let $c_0 > 0$. Under Assumption 2.5.1, there exist $C, \hbar_0 > 0$ such that for all $\hbar \in (0, \hbar_0)$ and all $z \in \mathbb{C}$ such that $|z - \mu_0^{[k]}| \leq c_0 \hbar$, and all $\psi \in \text{Dom}(\tilde{\mathcal{N}}_{\hbar}^{[k], \Phi})$,*

$$\left\| \text{Op}_{\hbar}^{\text{W}} \chi_2 \psi \right\| + \left\| \left(\hbar D_{\sigma} - \gamma(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \right) \text{Op}_{\hbar}^{\text{W}} \chi_2 \psi \right\| + \left\| D_{\tau} \text{Op}_{\hbar}^{\text{W}} \chi_2 \psi \right\| \leq C \left\| (\tilde{\mathcal{N}}_{\hbar}^{[k], \Phi} - z) \text{Op}_{\hbar}^{\text{W}} \chi_2 \psi \right\|.$$

Démonstration. We have :

$$\operatorname{Re} \langle (\tilde{\mathcal{N}}_h^{[k], \Phi} - z) \operatorname{Op}_h^W \chi_2 \psi, \operatorname{Op}_h^W \chi_2 \psi \rangle \quad (2.68)$$

$$= \operatorname{Re} \left\langle \left(D_\tau^2 + \left(\hbar D_\sigma + \mathbf{w}(\sigma) - \gamma(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \right)^2 + o(1) - z \right) \operatorname{Op}_h^W \chi_2 \psi, \operatorname{Op}_h^W \chi_2 \psi \right\rangle \quad (2.69)$$

$$\geq (1 + o(1)) \left\langle \left(D_\tau^2 + \left(\hbar D_\sigma + \mathbf{w}(\sigma) - \gamma(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \right)^2 \right) \operatorname{Op}_h^W \chi_2 \psi, \operatorname{Op}_h^W \chi_2 \psi \right\rangle \quad (2.70)$$

$$- \operatorname{Re}(z) \left\| \operatorname{Op}_h^W \chi_2 \psi \right\|^2 \quad (2.71)$$

$$\geq \left(\mu^{[k]}(\sigma, \xi + \mathbf{w}(\sigma)) - \mu_0^{[k]} + o(1) \right) \left\| \operatorname{Op}_h^W \chi_2 \psi \right\|^2. \quad (2.72)$$

We can assume without loss of generality that $\xi \geq \gamma_0^{\frac{1}{k+2}} \xi_0^{[k]}$, and by the symmetry of χ_2 in (2.66), the results are true when $\xi \leq \gamma_0^{\frac{1}{k+2}} \xi_0^{[k]}$. By the choice of Φ (see (2.5.3)), $|\gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \Phi'(\sigma)|$ is small enough for all $\sigma \in \mathbb{R}$, and using [12, Theorem 1.2], we get

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \nu^{[k]} \left(\xi_0^{[k]} + \gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \left(\xi - \gamma_0^{\frac{1}{k+2}} \xi_0^{[k]} \right) - \operatorname{Im}(\varphi(\sigma)) + i \gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \Phi'(\sigma) \right) \\ & \geq \nu^{[k]} \left(\xi_0^{[k]} + \gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \left(\xi - \gamma_0^{\frac{1}{k+2}} \xi_0^{[k]} \right) - \operatorname{Im}(\varphi(\sigma)) \right) - \gamma(\sigma)^{-\frac{2}{k+2}} \Phi'(\sigma)^2, \end{aligned}$$

and

$$\mu^{[k]}(\sigma, \xi + \mathbf{w}(\sigma)) \geq \gamma(\sigma)^{\frac{2}{k+2}} \nu^{[k]} \left(\xi_0^{[k]} + \gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \left(\xi - \gamma_0^{\frac{1}{k+2}} \xi_0^{[k]} \right) - \operatorname{Im}(\varphi(\sigma)) \right) - \Phi'(\sigma)^2.$$

When $\xi \in \operatorname{Supp}(\chi_2)$, ξ is far from $\gamma_0^{\frac{1}{k+2}} \xi_0^{[k]}$ and for a certain $c > 0$ we have

$$\left| \xi - \gamma_0^{\frac{1}{k+2}} \xi_0^{[k]} \right| \geq c.$$

Using the fact that $|\varphi(\sigma)|$ is small enough, we get in this case

$$\left| \gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \left(\xi - \gamma_0^{\frac{1}{k+2}} \xi_0^{[k]} \right) - \operatorname{Im}(\varphi(\sigma)) \right| \geq \frac{\gamma_\infty^{-\frac{1}{k+2}} c}{2}, \quad \text{for all } \sigma \in \mathbb{R}.$$

Then, there exists a constant $r > 0$ such that for all $\sigma \in \mathbb{R}$, we have

$$\xi_0^{[k]} + \gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \left(\xi - \gamma_0^{\frac{1}{k+2}} \xi_0^{[k]} \right) - \operatorname{Im}(\varphi(\sigma)) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{B}(\xi_0^{[k]}, r).$$

Since the function $\mathbb{R} \ni \xi \mapsto \nu^{[k]}(\xi)$ admits a unique non-degenerate minimum at $\xi_0^{[k]}$, then there exists $c_1 > 0$ such that for all $\sigma \in \mathbb{R}$, we have

$$\nu^{[k]} \left(\xi_0^{[k]} + \gamma(\sigma)^{-\frac{1}{k+2}} \left(\xi - \gamma_0^{\frac{1}{k+2}} \xi_0^{[k]} \right) - \text{Im} (\varphi(\sigma)) \right) \geq c_1.$$

Therefore,

$$\begin{aligned} \mu^{[k]}(\sigma, \xi + \mathbf{w}(\sigma)) - \mu_0^{[k]} &\geq \gamma(\sigma)^{\frac{2}{k+2}} c_1 - \mu_0^{[k]} - \Phi'(\sigma)^2 \\ &\geq \gamma_0^{\frac{2}{k+2}} (c_1 - \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]})) - \Phi'(\sigma)^2 \\ &\geq \frac{\gamma_0^{\frac{2}{k+2}} (c_1 - \nu^{[k]}(\xi_0^{[k]}))}{2} = C_1 > 0. \end{aligned}$$

Going back to (2.72), and we get

$$\left\| \text{Op}_h^W \chi_2 \psi \right\|^2 \leq C \times \text{Re} \langle (\tilde{\mathcal{N}}_h^{[k], \Phi} - z) \text{Op}_h^W \chi_2 \psi, \text{Op}_h^W \chi_2 \psi \rangle.$$

Combining this inequality with (2.67), we get

$$\left\| \text{Op}_h^W \chi_2 \psi \right\| + \left\| \left(\hbar D_\sigma - \gamma(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \right) \text{Op}_h^W \chi_2 \psi \right\| + \left\| D_\tau \text{Op}_h^W \chi_2 \psi \right\| \leq C \left\| (\tilde{\mathcal{N}}_h^{[k], \Phi} - z) \text{Op}_h^W \chi_2 \psi \right\|.$$

□

Lemma 2.6.4. *Let $N \in \mathbb{N}$, $c_0 > 0$. Under Assumption 2.5.1, there exist $C, \hbar_0 > 0$ such that for all $\hbar \in (0, \hbar_0)$ and all $z \in \mathbb{C}$ such that $|z - \mu_0^{[k]}| \leq c_0 \hbar$, and all $\psi \in \text{Dom}(\tilde{\mathcal{N}}_h^{[k], \Phi})$,*

$$\begin{aligned} &\left\| \text{Op}_h^W \chi_2 \psi \right\| + \left\| \left(\hbar D_\sigma - \gamma(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \right) \text{Op}_h^W \chi_2 \psi \right\| + \left\| D_\tau \text{Op}_h^W \chi_2 \psi \right\| \\ &+ \left\| \left(\hbar D_\sigma - \gamma(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \right)^2 \text{Op}_h^W \chi_2 \psi \right\| + \left\| D_\tau^2 \text{Op}_h^W \chi_2 \psi \right\| \leq C \left\| (\tilde{\mathcal{N}}_h^{[k], \Phi} - z) \psi \right\| + O(\hbar^N) \|\psi\|. \end{aligned}$$

Démonstration. Using Lemma 2.6.3, the proof of this lemma is exactly as the one of [14, Lemma 5.4]. □

We will control now $\hbar D_\sigma$ instead of $\hbar D_\sigma - \gamma(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1}$. Since γ is bounded, then it suffices to control τ^{k+1} with the normal Agmon estimates.

Lemma 2.6.5. *Let $c_0 > 0$. Under Assumption 2.5.1, for all $k \geq 1$, there exist $C, \hbar_0 > 0$ such that for all $\hbar \in (0, \hbar_0)$ and all $z \in \mathbb{C}$ such that $|z - \mu_0^{[k]}| \leq c_0 \hbar$, and all $\psi \in \text{Dom}(\tilde{\mathcal{N}}_{\hbar}^{[k], \Phi})$,*

$$\|[\tilde{\mathcal{N}}_{\hbar}^{[k], \Phi}, \tau^k] \psi\| \leq C \|\langle \tau \rangle^{k-1} (\tilde{\mathcal{N}}_{\hbar}^{[k], \Phi} - z) \psi\| + C \sum_{j=0}^{k-1} \|\tau^j \psi\|. \quad (2.73)$$

Démonstration. By calculating the commutator $[\tilde{\mathcal{N}}_{\hbar}^{[k], \Phi}, \tau^k] = [\mathbf{a}_{\hbar}^{-1} D_{\tau} \mathbf{a}_{\hbar} D_{\tau}, \tau^k]$, and using the fact that $[D_{\tau}, \tau^k] = \frac{k}{i} \tau^{k-1}$ for $k \geq 1$, we have :

$$[\tilde{\mathcal{N}}_{\hbar}^{[k], \Phi}, \tau^k] = \begin{cases} \frac{2}{i} D_{\tau} - \mathbf{a}_{\hbar}^{-1} (\partial_{\tau} \mathbf{a}_{\hbar}) & \text{if } k = 1, \\ \frac{2k}{i} \tau^{k-1} D_{\tau} - k \tau^{k-1} \mathbf{a}_{\hbar}^{-1} (\partial_{\tau} \mathbf{a}_{\hbar}) - k(k-1) \tau^{k-2} & \text{if } k \geq 2. \end{cases}$$

For $k = 1$, using (2.67), we have

$$\begin{aligned} \|[\tilde{\mathcal{N}}_{\hbar}^{[k], \Phi}, \tau] \psi\| &\leq C \|D_{\tau} \psi\| + C \|\psi\| \\ &\leq C \|(\tilde{\mathcal{N}}_{\hbar}^{[k], \Phi} - z) \psi\| + \|\psi\|, \end{aligned}$$

for all $\psi \in \text{Dom}(\tilde{\mathcal{N}}_{\hbar}^{[k], \Phi})$. Then, (2.73) is true for $k = 1$.

By induction on $k \geq 1$, we assume that (2.73) is true up to order $k-1$ and show that it is true for order k . In effect, for all $\psi \in \text{Dom}(\tilde{\mathcal{N}}_{\hbar}^{[k], \Phi})$, we get

$$\begin{aligned} \|[\tilde{\mathcal{N}}_{\hbar}^{[k], \Phi}, \tau^k] \psi\| &\leq C \|\tau^{k-1} D_{\tau} \psi\| + C \|\tau^{k-2} \psi\| + C \|\psi\| \\ &\leq C \|D_{\tau} (\tau^{k-1} \psi)\| + C \|\tau^{k-2} \psi\| + C \|\psi\|, \end{aligned}$$

and by (2.67), we get

$$\begin{aligned} \|[\tilde{\mathcal{N}}_{\hbar}^{[k], \Phi}, \tau^k] \psi\| &\leq C \left\| \left(\tilde{\mathcal{N}}_{\hbar}^{[k], \Phi} - z \right) \tau^{k-1} \psi \right\| + C \|\tau^{k-1} \psi\| + C \|\tau^{k-2} \psi\| + C \|\psi\| \\ &\leq C \|\langle \tau \rangle^{k-1} (\tilde{\mathcal{N}}_{\hbar}^{[k], \Phi} - z) \psi\| + C \|[\tilde{\mathcal{N}}_{\hbar}^{[k], \Phi}, \tau^{k-1}] \psi\| + C \|\tau^{k-1} \psi\| \\ &\quad + C \|\tau^{k-2} \psi\| + C \|\psi\|. \end{aligned}$$

Using the induction hypothesis for order $k-1$, (2.73) is true for order k . \square

Lemma 2.6.6. *Let $c_0 > 0$. Under Assumption 2.5.1, for all $k \geq 1$, there exist $C, \hbar_0 > 0$ such that for all $\hbar \in (0, \hbar_0)$ and all $z \in \mathbb{C}$ such that $|z - \mu_0^{[k]}| \leq c_0 \hbar$, and all $\psi \in$*

Dom $(\tilde{\mathcal{N}}_h^{[k],\Phi})$,

$$\|\tau^k \psi\| \leq C \|\langle \tau \rangle^k (\tilde{\mathcal{N}}_h^{[k],\Phi} - z) \psi\| + C \|\psi\|. \quad (2.74)$$

Démonstration. The proof is quite simple by noting that

$$\|\tau^k \psi\| \leq C \|(\tilde{\mathcal{N}}_h^{[k],\Phi} - z) (\tau^k \psi)\| \leq C \|\langle \tau \rangle^k (\tilde{\mathcal{N}}_h^{[k],\Phi} - z) \psi\| + C \|[\tilde{\mathcal{N}}_h^{[k],\Phi}, \tau^k] \psi\|,$$

and using (2.73), we get

$$\|\tau^k \psi\| \leq C \|\langle \tau \rangle^k (\tilde{\mathcal{N}}_h^{[k],\Phi} - z) \psi\| + C \sum_{j=0}^{k-1} \|\tau^j \psi\|.$$

By induction on $k \geq 1$, (2.74) is well established. \square

Proposition 2.6.7. *Let $N \in \mathbb{N}$, $c_0 > 0$. Under Assumption 2.5.1, there exist $C, \hbar_0 > 0$ such that for all $\hbar \in (0, \hbar_0)$ and all $z \in \mathbb{C}$ such that $|z - \mu_0^{[k]}| \leq c_0 \hbar$, and all $\psi \in \text{Dom}(\tilde{\mathcal{N}}_h^{[k],\Phi})$,*

$$\begin{aligned} & \|\text{Op}_h^W \chi_2 \psi\| + \|D_\tau \text{Op}_h^W \chi_2 \psi\| + \|\hbar D_\sigma \text{Op}_h^W \chi_2 \psi\| + \|D_\tau^2 \text{Op}_h^W \chi_2 \psi\| + \|(\hbar D_\sigma)^2 \text{Op}_h^W \chi_2 \psi\| \\ & + \|\tau^{k+1} \hbar D_\sigma \text{Op}_h^W \chi_2 \psi\| \leq C \|\langle \tau \rangle^{2k+2} (\tilde{\mathcal{N}}_h^{[k],\Phi} - z) \psi\| + \mathcal{O}(\hbar^N) \|\psi\|. \end{aligned}$$

Démonstration. By applying (2.74) to $\text{Op}_h^W \chi_2 \psi$, we have

$$\|\tau^{k+1} \text{Op}_h^W \chi_2 \psi\| \leq C \|\langle \tau \rangle^{k+1} (\tilde{\mathcal{N}}_h^{[k],\Phi} - z) \text{Op}_h^W \chi_2 \psi\| + C \|\text{Op}_h^W \chi_2 \psi\|,$$

and by calculating the commutator $[\tilde{\mathcal{N}}_h^{[k],\Phi}, \text{Op}_h^W \chi_2]$ and using Lemma 2.6.4, we get

$$\|\tau^{k+1} \text{Op}_h^W \chi_2 \psi\| \leq C \|\langle \tau \rangle^{k+1} (\tilde{\mathcal{N}}_h^{[k],\Phi} - z) \psi\| + \mathcal{O}(\hbar^N) \|\psi\|. \quad (2.75)$$

Likewise, we get

$$\|\tau^{2k+2} \text{Op}_h^W \chi_2 \psi\| \leq C \|\langle \tau \rangle^{2k+2} (\tilde{\mathcal{N}}_h^{[k],\Phi} - z) \psi\| + \mathcal{O}(\hbar^N) \|\psi\|. \quad (2.76)$$

Since γ is bounded, then using (2.75) and Lemma 2.6.4, we get

$$\begin{aligned} \left\| \hbar D_\sigma \text{Op}_\hbar^W \chi_2 \psi \right\| &\leq \left\| \left(\hbar D_\sigma - \gamma(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \right) \text{Op}_\hbar^W \chi_2 \psi \right\| + \left\| \gamma(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \text{Op}_\hbar^W \chi_2 \psi \right\| \\ &\leq C \left\| \langle \tau \rangle^{k+1} \left(\tilde{\mathcal{N}}_\hbar^{[k], \Phi} - z \right) \psi \right\| + \mathcal{O}(\hbar^N) \|\psi\|. \end{aligned}$$

Likewise as the proof of [14, Proposition 5.6], we have

$$\left\| (\hbar D_\sigma)^2 \text{Op}_\hbar^W \chi_2 \psi \right\| \leq C \left\| \langle \tau \rangle^{2k+2} \left(\mathcal{N}_\hbar^{[k], \Phi} - z \right) \psi \right\| + \mathcal{O}(\hbar^N) \|\psi\|,$$

and

$$\left\| \tau^{k+1} \hbar D_\sigma \text{Op}_\hbar^W \chi_2 \psi \right\| \leq C \left\| \langle \tau \rangle^{2k+2} \left(\mathcal{N}_\hbar^{[k], \Phi} - z \right) \psi \right\| + \mathcal{O}(\hbar^N) \|\psi\|.$$

□

We now have all the elements to prove Theorem 2.5.7. Using the result of Proposition 2.6.7 and like the same strategy from the proof of [14, Theorem 5.1], we get

$$c\hbar \|\psi\| \leq \left\| \langle \tau \rangle^{2k+3} \left(\tilde{\mathcal{N}}_\hbar^{[k], \Phi} - z \right) \psi \right\| + \hbar \left\| \chi_0 \left(\frac{\sigma - s_r}{R\hbar^{1/2}} \right) \psi \right\|,$$

for all $\psi \in \text{Dom} \left(\tilde{\mathcal{N}}_\hbar^{[k], \Phi} \right)$. But we use the fact that $\tilde{\mathcal{N}}_\hbar^{[k], \Phi} = e^{-\frac{i\mathfrak{g}(\sigma)}{\hbar}} \mathcal{N}_\hbar^{[k], \Phi} e^{\frac{i\mathfrak{g}(\sigma)}{\hbar}}$, then Theorem 2.5.7 is well established.

2.7 Optimal tangential Agmon estimates

2.7.1 Agmon estimates

Let us give the optimal Agmon estimates for the eigenfunctions of the two operators $\mathcal{N}_{\hbar, r}^{[k]}$ and $\mathcal{N}_\hbar^{[k]}$. The following corollary is a consequence of Theorem 2.6.1.

Corollary 2.7.1. (*Single well*) *Let $c_0 > 0$. Under Assumption 2.5.1, there exist $C, \hbar_0 > 0$ such that for all $\hbar \in (0, \hbar_0)$ and all λ eigenvalue of $\mathcal{N}_{\hbar, r}^{[k]}$ such that $|\lambda - \mu_0^{[k]}| \leq c_0 \hbar$, and all associated eigenfunction $\Psi \in \text{Dom} \left(\mathcal{N}_{\hbar, r}^{[k]} \right)$,*

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} e^{\frac{2\Phi}{\hbar}} |\Psi|^2 ds dt \leq C \|\Psi\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})}^2.$$

Démonstration. By applying Theorem 2.6.1 with $\psi = e^{\frac{\Phi}{\hbar}}\Psi$ and $z = \lambda$, we get

$$c \left\| e^{\frac{\Phi}{\hbar}} \Psi \right\| \leq \left\| \chi_0 \left(\frac{\sigma - s_r}{R\hbar^{1/2}} \right) e^{\frac{\Phi}{\hbar}} \Psi \right\|.$$

Since the function $\frac{\Phi}{\hbar}$ is bounded on $\text{Supp}(\sigma \mapsto \chi_0(\frac{\sigma - s_r}{R\hbar^{1/2}}))$, then

$$\left\| e^{\frac{\Phi}{\hbar}} \Psi \right\| \leq C \|\Psi\|.$$

□

We recall that the two Agmon distances for the two single-well operators $\mathcal{N}_{\hbar,r}^{[k]}$ and $\mathcal{N}_{\hbar,l}^{[k]}$, are respectively given by

$$\Phi_r(\sigma) = \int_{s_r}^{\sigma} \gamma_r(\tilde{\sigma})^{\frac{1}{k+2}} \text{Re } \varphi_r(\tilde{\sigma}) d\tilde{\sigma} \quad \text{and} \quad \Phi_l(\sigma) = \int_{s_l}^{\sigma} \gamma_l(\tilde{\sigma})^{\frac{1}{k+2}} \text{Re } \varphi_l(\tilde{\sigma}) d\tilde{\sigma}.$$

We will consider the operator $\mathcal{N}_{\hbar}^{[k]}$ with two wells defined on $L^2(\Gamma \times \mathbb{R}) \sim L^2([-L, L] \times \mathbb{R})$. For $\hat{\eta} > 0$ small enough, we denote by

$$B_r(\hat{\eta}) := B(s_r, \hat{\eta}) = (s_r - \hat{\eta}, s_r + \hat{\eta}), \quad \text{and} \quad B_l(\hat{\eta}) := B(s_l, \hat{\eta}) = (s_l - \hat{\eta}, s_l + \hat{\eta}).$$

We define the two $2L$ -periodic functions on $[-L, +L]$ so that

$$\tilde{\Phi}_r(\sigma) = \begin{cases} \Phi_r(\sigma) & \text{if } -L \leq \sigma \leq s_l - \hat{\eta}, \\ \Phi_r(\sigma - 2L) & \text{if } s_l + \hat{\eta} \leq \sigma \leq L, \end{cases}$$

and

$$\tilde{\Phi}_l(\sigma) = \begin{cases} \Phi_l(\sigma + 2L) & \text{if } -L \leq \sigma \leq s_r - \hat{\eta}, \\ \Phi_l(\sigma) & \text{if } s_r + \hat{\eta} \leq \sigma \leq L, \end{cases}$$

and that $\tilde{\Phi}_r > \tilde{\Phi}_l$ on $B_l(\eta)$ and $\tilde{\Phi}_l > \tilde{\Phi}_r$ on $B_r(\eta)$.

For $\theta \in (0, 1)$, we define the function ϕ on Γ by

$$\phi = \sqrt{1 - \theta} \min(\tilde{\Phi}_r, \tilde{\Phi}_l).$$

Proposition 2.7.2. (Double well) *Let $\epsilon > 0$ and $\hat{\eta} > 0$ small enough. There exist $C, \hbar_0 > 0$ such that for all $\hbar \in (0, \hbar_0)$ and all λ eigenvalue of $\mathcal{N}_{\hbar}^{[k]}$ such that $|\lambda - \mu_0^{[k]}| \leq$*

$c_0\hbar$, and all associated eigenfunction $u \in \text{Dom}(\mathcal{N}_\hbar^{[k]})$,

$$\int_{[-L,L] \times \mathbb{R}} e^{\frac{2\phi}{\hbar}} |u|^2 d\sigma d\tau \leq C e^{\frac{\epsilon}{\hbar}} \|u\|_{L^2([-L,L] \times \mathbb{R})}.$$

Démonstration. Let λ be an eigenvalue of $\mathcal{N}_\hbar^{[k]}$ such that $|\lambda - \mu_0^{[k]}| \leq c_0\hbar$ and u the associated eigenfunction. We denote by χ_r the smooth cutoff function which is equal to 0 for $\sigma \in B_l(\hat{\eta})$ and 1 for $\sigma \in \Gamma \setminus B_l(2\hat{\eta})$. The function ϕ is defined on $[-L, +L]$, so we will extend ϕ so that it is defined on \mathbb{R} and verifies Assumption 2.5.1. Therefore, we consider the function $\psi = \chi_r e^{\frac{\phi}{\hbar}} u$ as a function on \mathbb{R} and we apply the Theorem 2.6.1 with $z = \lambda$ to obtain that

$$c\hbar \|\chi_r e^{\frac{\phi}{\hbar}} u\| \leq \|\langle \tau \rangle^{2k+3} (\mathcal{N}_\hbar^{[k],\phi} - z) \chi_r e^{\frac{\phi}{\hbar}} u\| + \hbar \left\| \chi_0 \left(\frac{\sigma - sr}{R\hbar^{1/2}} \right) e^{\frac{\phi}{\hbar}} u \right\|.$$

By using that u is an eigenfunction of $\mathcal{N}_\hbar^{[k]}$ associated with λ , we get

$$\|\langle \tau \rangle^{2k+3} (\mathcal{N}_\hbar^{[k],\phi} - z) \chi_r e^{\frac{\phi}{\hbar}} u\| = \|\langle \tau \rangle^{2k+3} [\mathcal{N}_\hbar^{[k]}, \chi_r] u\|.$$

But $\text{Supp}(\chi_r') \subset (s_l - 2\hat{\eta}, s_l - \hat{\eta}) \cup (s_l + \hat{\eta}, s_l + 2\hat{\eta})$, and so for $\hat{\eta}$ small enough, we can assume that $\phi \leq \frac{\epsilon}{2}$ in $\text{Supp}([\mathcal{N}_\hbar^{[k]}, \chi_r])$. Therefore,

$$c\hbar \|\chi_r e^{\frac{\phi}{\hbar}} u\| \leq e^{\frac{\epsilon}{2\hbar}} \|\langle \tau \rangle^{2k+3} [\mathcal{N}_\hbar^{[k]}, \chi_r] u\|_{L^2([-L,L] \times \mathbb{R})} + C\hbar \|u\|_{L^2([-L,L] \times \mathbb{R})}.$$

By the normal Agmon estimates,

$$\|\chi_r e^{\frac{\phi}{\hbar}} u\| \leq C e^{\frac{\epsilon}{\hbar}} \|u\|_{L^2([-L,L] \times \mathbb{R})},$$

and by symmetry, we get

$$\|\chi_l e^{\frac{\phi}{\hbar}} u\| \leq C e^{\frac{\epsilon}{\hbar}} \|u\|_{L^2([-L,L] \times \mathbb{R})}.$$

Since $\hat{\eta}$ is small enough, then

$$\begin{aligned} \left\| e^{\frac{\phi}{\hbar}} u \right\|_{L^2((-L,+L) \times \mathbb{R})} &\leq \left\| e^{\frac{\phi}{\hbar}} u \right\|_{L^2((-L,0) \times \mathbb{R})} + \left\| e^{\frac{\phi}{\hbar}} u \right\|_{L^2((0,+L) \times \mathbb{R})} \\ &\leq \left\| \chi_r e^{\frac{\phi}{\hbar}} u \right\| + \left\| \chi_l e^{\frac{\phi}{\hbar}} u \right\| \\ &\leq C e^{\frac{\epsilon}{\hbar}} \|u\|_{L^2([-L,L] \times \mathbb{R})}. \end{aligned}$$

□

2.7.2 WKB approximation in the right well

In order to perform the tunneling analysis, an explicit approximation of the ground state energy of the single well operators must be found. This approximation is a direct consequence of the Theorem 2.6.1.

For $\hat{\eta} > 0$, we denote by $I_{\hat{\eta},r} := (s_l - 2L + \hat{\eta}, s_l - \hat{\eta})$. Let $\psi_{\hbar,r}^{[k]} = \chi_{\hat{\eta},r} \Psi_{\hbar,r}^{[k]}$, with

- $\chi_{\hat{\eta},r}$ a smooth cutoff function such that $\chi_{\hat{\eta},r} \equiv 1$ on $I_{2\hat{\eta},r}$ and $\chi_{\hat{\eta},r} \equiv 0$ on $\mathbb{R} \setminus I_{\hat{\eta},r}$, that is to say $\text{supp}(\chi_{\hat{\eta},r}) \subset I_{\hat{\eta},r}$.
- $\Psi_{\hbar,r}^{[k]}$ is the WKB expansions (already defined in Theorem 2.4.3), such that $\|\Psi_{\hbar,r}^{[k]}\| = 1$.
- Let Π_r the orthogonal projection on the first eigenspace $\text{span}\{u_{\hbar,r}^{[k]}\}$ for $\mathcal{N}_{\hbar,r}^{[k]}$.

Proposition 2.7.3. *We have*

$$\left\| \psi_{\hbar,r}^{[k]} - \Pi_r \psi_{\hbar,r}^{[k]} \right\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} = \mathcal{O}(\hbar^\infty).$$

Démonstration. Using the fact that the spectral gap between the lowest eigenvalues of $\mathcal{N}_{\hbar,r}^{[k]}$ is of order \hbar (see Theorem 2.4.3) and that

$$\psi_{\hbar,r}^{[k]} - \Pi_r \psi_{\hbar,r}^{[k]} \in \left(\text{vect} \{u_{\hbar,r}^{[k]}\} \right)^\perp,$$

the Min-Max principle proves that there exists $c > 0$ such that

$$c\hbar \left\| \psi_{\hbar,r}^{[k]} - \Pi_r \psi_{\hbar,r}^{[k]} \right\| \leq \left\| \left(\mathcal{N}_{\hbar,r}^{[k]} - \mu_1^{sw}(\hbar) \right) \psi_{\hbar,r}^{[k]} \right\|,$$

where $\mu_1^{sw}(\hbar)$ is the smallest eigenvalue of $\mathcal{N}_{\hbar,r}^{[k]}$ associated with $u_{\hbar,r}^{[k]}$. Therefore, by applying Theorem 2.4.3, we get

$$\left\| \psi_{\hbar,r}^{[k]} - \Pi_r \psi_{\hbar,r}^{[k]} \right\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} = \mathcal{O}(\hbar^\infty).$$

□

The following Lemma gives some properties on the weight $\hat{\Phi}_{r,N,\hbar}$ introduced in Proposition 2.5.3, and the proof of this Lemma is exactly like that of [16, Lemma 2.6].

Lemma 2.7.4. *Let $K \subset I_{2\hat{\eta}}$ be a compact set. For all $N \in \mathbb{N}^*$ there exists $\epsilon_0 > 0$ such that for all $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, there exist $\hbar_0 > 0$ and $R > 0$ such that, for all $\hbar \in (0, \hbar_0)$, we have*

- (1) $\hat{\Phi}_{r,N,\hbar} \leq \Phi_r$ on $I_{\hat{\eta},r}$.
- (2) $\hat{\Phi}_{r,N,\hbar} = \tilde{\Phi}_{r,N,\hbar}$ on K .
- (3) $\hat{\Phi}_{r,N,\hbar} = \sqrt{1 - \epsilon} \Phi_r = \Phi_{r,\epsilon}$ on $\text{supp } \chi'_{\hat{\eta},r}$.

Using Theorem 2.6.1, Lemma 2.7.4, we follow the same proof as [14, Proposition 6.3] (that of [16, Proposition 2.7] as well) and we obtain the following Proposition.

Proposition 2.7.5. *We have*

$$e^{\frac{\Phi_r}{\hbar}} \left(\Psi_{\hbar,r}^{[k]} - u_{\hbar,r}^{[k]} \right) = \mathcal{O}(\hbar^\infty),$$

and

$$\langle \tau \rangle^{k+1} e^{\frac{\Phi_r}{\hbar}} \left(\Psi_{\hbar,r}^{[k]} - u_{\hbar,r}^{[k]} \right) = \mathcal{O}(\hbar^\infty),$$

in $\mathcal{C}^1(K; L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}))$, where $K \subset I_{2\hat{\eta},r}$ is a compact set.

2.8 Interaction matrix and tunneling effect

The goal of this section is to estimate the difference between the first two eigenvalues, $\nu_2(\hbar) - \nu_1(\hbar)$, of the operator $\mathcal{N}_{\hbar}^{[k]}$ which is defined in (2.20). For this, we will follow the same strategy as in [16] and [14]. We denote by $\mu_1^{sw}(\hbar)$ the common “single well” groundstate energy of operators $\mathcal{N}_{\hbar,r,0}^{[k]}$ and $\mathcal{N}_{\hbar,l,0}^{[k]}$. By Corollary 2.7.1, Proposition 2.7.2 and the Min-Max principle, we get

$$\mu_1^{sw}(\hbar) - \tilde{\mathcal{O}} \left(e^{-\frac{\mathfrak{s}}{\hbar}} \right) \leq \nu_1(\hbar) \leq \nu_2(\hbar) \leq \mu_1^{sw}(\hbar) + \tilde{\mathcal{O}} \left(e^{-\frac{\mathfrak{s}}{\hbar}} \right),$$

where we recall S is defined in (2.7) and $\tilde{\mathcal{O}}$ is defined in [16, Notation 3.3].

First, we will construct an orthonormal basis of

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{i=1}^2 \text{Ker} \left(\mathcal{N}_{\hbar}^{[k]} - \nu_i(\hbar) \right),$$

and we will write the matrix of the operator $\mathcal{N}_{\hbar}^{[k]}$ in this basis. For that, we will start with two functions $u_{\hbar,r}^{[k]}$ and $u_{\hbar,l}^{[k]}$ (the two eigenfunctions of $\mathcal{N}_{\hbar,r,0}^{[k]}$ and $\mathcal{N}_{\hbar,l,0}^{[k]}$ respectively associated with the same first eigenvalue $\mu_1^{sw}(\hbar)$). Inspired from (2.23) and (2.25), we define the two functions $\phi_{\hbar,r}^{[k]}$ and $\phi_{\hbar,l}^{[k]}$ by

$$\phi_{\hbar,r}^{[k]}(\sigma, \tau) = \begin{cases} e^{-i\beta_0\sigma/\hbar^{k+2}} u_{\hbar,r}^{[k]}(\sigma, \tau) & \text{if } -L \leq \sigma \leq s_l - \hat{\eta}/2, \\ e^{-i\beta_0(\sigma-2L)/\hbar^{k+2}} u_{\hbar,r}^{[k]}(\sigma - 2L, \tau) & \text{if } s_l + \hat{\eta}/2 \leq \sigma \leq L, \end{cases}$$

and

$$\phi_{\hbar,l}^{[k]}(\sigma, \tau) = \begin{cases} e^{-i\beta_0(\sigma+2L)/\hbar^{k+2}} u_{\hbar,l}^{[k]}(\sigma + 2L, \tau) & \text{if } -L \leq \sigma \leq s_r - \hat{\eta}/2, \\ e^{-i\beta_0\sigma/\hbar^{k+2}} u_{\hbar,l}^{[k]}(\sigma, \tau) & \text{if } s_r + \hat{\eta}/2 \leq \sigma \leq L. \end{cases}$$

We will truncate these two functions so that they are defined on $\Gamma \times \mathbb{R}$, and then we will build from these two functions a basis of \mathcal{E} .

For $\alpha \in \{l, r\}$, we introduce the quasimodes $f_{\hbar,\alpha}^{[k]}$ defined on $\Gamma \times \mathbb{R}$ by

$$f_{\hbar,\alpha}^{[k]} = \chi_{\eta,\alpha} \phi_{\hbar,\alpha}^{[k]}$$

where $\chi_{\eta,r}$ is the cut-off function introduced in the beginning of Section 2.7.2, $\chi_{\eta,l} = U\chi_{\eta,r}$ is defined by the symmetry operator (see Section 2.3.2).

Let Π be the orthogonal projection on \mathcal{E} , and consider the new quasimodes, for $\alpha \in \{l, r\}$,

$$g_{\hbar,\alpha}^{[k]} = \Pi f_{\hbar,\alpha}^{[k]}.$$

By Proposition 2.7.2, we have (see Section 3 of [16])

$$\langle f_{\hbar,\alpha}^{[k]}, f_{\hbar,\beta}^{[k]} \rangle = 1 + \tilde{\mathcal{O}} \left(e^{-\frac{2S}{\hbar}} \right) \quad \text{if } \alpha = \beta,$$

$$\langle f_{\hbar,\alpha}^{[k]}, f_{\hbar,\beta}^{[k]} \rangle = \tilde{\mathcal{O}} \left(e^{-\frac{S}{\hbar}} \right) \quad \text{if } \alpha \neq \beta,$$

and

$$\|g_{\hbar,\alpha}^{[k]} - f_{\hbar,\alpha}^{[k]}\| + \|\partial_s (g_{\hbar,\alpha}^{[k]} - f_{\hbar,\alpha}^{[k]})\| = \tilde{\mathcal{O}}\left(e^{-\frac{s}{\hbar}}\right).$$

The base $\{g_{\hbar,l}^{[k]}, g_{\hbar,r}^{[k]}\}$ is a priori not orthonormal, and by the Gram-Schmidt process, we can transform it to an orthonormal basis $\mathcal{B}_\hbar = \{\tilde{g}_{\hbar,l}^{[k]}, \tilde{g}_{\hbar,r}^{[k]}\}$ defined by

$$\tilde{g}_{\hbar,\alpha}^{[k]} = g_{\hbar,\alpha}^{[k]} G^{-\frac{1}{2}},$$

where G is the Gram-Schmidt matrix $(\langle g_{\hbar,\alpha}^{[k]}, g_{\hbar,\beta}^{[k]} \rangle)_{\alpha,\beta \in \{l,r\}}$. With this construction, \mathcal{B}_\hbar is an orthonormal basis of \mathcal{E} . Let \mathcal{M} be the matrix of $\mathcal{N}_\hbar^{[k]}$ relative to the basis \mathcal{B}_\hbar given by

$$\mathcal{M} = (\langle \mathcal{N}_\hbar^{[k]} \tilde{g}_{\hbar,\alpha}^{[k]}, \tilde{g}_{\hbar,\beta}^{[k]} \rangle)_{\alpha,\beta \in \{l,r\}}.$$

We have

$$\text{Spec}(\mathcal{M}) = \{\nu_1(\hbar), \nu_2(\hbar)\}.$$

Then, using [16, Proposition 3.11], we get

$$\nu_2(\hbar) - \nu_1(\hbar) = 2|w_{l,r}| + \tilde{\mathcal{O}}\left(e^{-\frac{2s}{\hbar}}\right), \quad w_{l,r} = \langle r_{\hbar,l}^{[k]}, f_{\hbar,r}^{[k]} \rangle, \quad (2.77)$$

where $r_{\hbar,\alpha}^{[k]} = (\mathcal{N}_\hbar^{[k]} - \mu_1^{sw}(\hbar)) f_{\hbar,\alpha}^{[k]}$ for $\alpha \in \{l, r\}$.

The goal is now to estimate the interaction term $w_{l,r}$. By integration by parts (see [14, Lemma 7.1]), we have

$$w_{l,r} = i\hbar(w_{l,r}^u + w_{l,r}^d), \quad (2.78)$$

with

$$w_{l,r}^u = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{a}_\hbar^{-1} \left(\phi_{\hbar,l}^{[k]} \overline{\mathcal{D}_\hbar \phi_{\hbar,r}^{[k]}} + \mathcal{D}_\hbar \phi_{\hbar,l}^{[k]} \overline{\phi_{\hbar,r}^{[k]}} \right) (0, \tau) d\tau,$$

and

$$w_{l,r}^d = - \int_{\mathbb{R}} \mathbf{a}_\hbar^{-1} \left(\phi_{\hbar,l}^{[k]} \overline{\mathcal{D}_\hbar \phi_{\hbar,r}^{[k]}} + \mathcal{D}_\hbar \phi_{\hbar,l}^{[k]} \overline{\phi_{\hbar,r}^{[k]}} \right) (-L, \tau) d\tau,$$

where

$$\mathcal{D}_\hbar = \hbar D_\sigma + \hbar^{-k-1} \beta_0 - \gamma(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} - \hbar \tilde{\delta}(\sigma) c_\mu \frac{\tau^{k+2}}{k+2} + \hbar^2 c_\mu \mathcal{O}(\tau^{k+3}),$$

and \mathbf{a}_\hbar is defined in (2.19).

By the explicit form of $\phi_{\hbar,\alpha}^{[k]}$, we can write

$$\begin{aligned} w_{l,r}^u &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{a}_{\hbar}^{-1} u_{\hbar,l}^{[k]} \left(\overline{\hbar D_{\sigma} - \gamma(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} - \hbar \tilde{\delta}(\sigma) c_{\mu} \frac{\tau^{k+2}}{k+2} + \hbar^2 c_{\mu} \mathcal{O}(\tau^{k+3})} \right) u_{\hbar,r}^{[k]}(0, \tau) d\tau \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \mathbf{a}_{\hbar}^{-1} \left(\hbar D_{\sigma} - \gamma(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} - \hbar \tilde{\delta}(\sigma) c_{\mu} \frac{\tau^{k+2}}{k+2} + \hbar^2 c_{\mu} \mathcal{O}(\tau^{k+3}) \right) u_{\hbar,l}^{[k]} \overline{u_{\hbar,r}^{[k]}}(0, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

By Proposition 2.7.5, the explicit expression of the WKB solution in Theorem 2.4.3 and the fact that $\Phi_r(0) + \Phi_l(0) = S_u$, the expression for $w_{l,r}^u$ is given by

$$\begin{aligned} w_{l,r}^u &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{a}_{\hbar}^{-1} \Psi_{\hbar,l}^{[k]} \left(\overline{\hbar D_{\sigma} - \gamma(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} - \hbar \tilde{\delta}(\sigma) c_{\mu} \frac{\tau^{k+2}}{k+2} + \hbar^2 c_{\mu} \mathcal{O}(\tau^{k+3})} \right) \Psi_{\hbar,r}^{[k]}(0, \tau) d\tau \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \mathbf{a}_{\hbar}^{-1} \left(\hbar D_{\sigma} - \gamma(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} - \hbar \tilde{\delta}(\sigma) c_{\mu} \frac{\tau^{k+2}}{k+2} + \hbar^2 c_{\mu} \mathcal{O}(\tau^{k+3}) \right) \Psi_{\hbar,l}^{[k]} \overline{\Psi_{\hbar,r}^{[k]}}(0, \tau) d\tau + \tilde{\mathcal{O}}(\hbar^{\infty}) e^{-\frac{S_u}{\hbar}}. \end{aligned}$$

Since $\Psi_{\hbar,l}^{[k]}(0, \tau) = U \Psi_{\hbar,r}^{[k]}(0, \tau)$ and $\Psi_{\hbar,r}^{[k]}(\sigma, \tau) = a_{1,\hbar}^{[k]}(\sigma, \tau) e^{-\frac{\Phi_r(\sigma)}{\hbar}} e^{\frac{i\mathbf{g}_r(\sigma)}{\hbar}}$ (see Theorem 2.4.3), we get

$$\begin{aligned} e^{\frac{S_u}{\hbar}} w_{l,r}^u &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{a}_{\hbar}^{-1} U a_{1,\hbar}^{[k]} \left(\overline{\hbar D_{\sigma} + i\Phi_r'(\sigma) + \mathbf{g}_r'(\sigma) - \gamma(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1}} \right) a_{1,\hbar}^{[k]}(0, \tau) d\tau \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \mathbf{a}_{\hbar}^{-1} \left(\hbar D_{\sigma} - i\Phi_r'(-\sigma) + \mathbf{g}_r'(-\sigma) - \gamma(\sigma) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \right) U a_{1,\hbar}^{[k]} \overline{a_{1,\hbar}^{[k]}}(0, \tau) d\tau + \tilde{\mathcal{O}}(\hbar), \end{aligned}$$

with

$$\mathbf{g}_r(\sigma) = \int_0^{\sigma} \gamma_r(\tilde{\sigma})^{\frac{1}{k+2}} \left(\xi_0^{[k]} - \text{Im } \varphi_r(\tilde{\sigma}) \right) d\tilde{\sigma},$$

where the function φ_r is defined in Lemma 2.4.1. Therefore,

$$e^{\frac{S_u}{\hbar}} w_{l,r}^u = 2 \int_{\mathbb{R}} \mathbf{a}_{\hbar}^{-1} \left(\overline{i\Phi_r'(0) + \mathbf{g}_r'(0) - \gamma(0) \frac{\tau^{k+1}}{k+1}} \right) U a_{1,\hbar}^{[k]} \overline{a_{1,\hbar}^{[k]}}(0, \tau) d\tau + \mathcal{O}(\hbar).$$

We recall that by Theorem 2.4.3, we have $a_{1,\hbar}^{[k]} = a_{1,0}^{[k]} + \mathcal{O}(\hbar)$, with

$$a_{1,0}^{[k]}(\sigma, \tau) = f_{1,0}(\sigma) u_{\sigma, \mathbf{w}_r(\sigma)}^{[k]} \quad \text{and} \quad \mathbf{w}_r(\sigma) = i\Phi_r'(\sigma) + \mathbf{g}_r(\sigma).$$

Using the expression of $f_{1,0}$ in Remark 2.4.2, we get

$$e^{\frac{S_u}{\hbar}} w_{l,r}^u = \tilde{f}_{1,0}(0)^2 e^{-2i\alpha_{1,0}(0)} \int_{\mathbb{R}} 2 \left(\overline{\mathbf{w}_r(0) - \gamma_r(0) \frac{\tau^{k+1}}{k+1}} \right) \left(u_{0, \mathbf{w}_r(0)}^{[k]} \right)^2 d\tau + \mathcal{O}(\hbar). \quad (2.79)$$

Using (2.28), we have

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} 2 \left(\mathfrak{w}_r(0) - \gamma_r(0) \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \right) \left(u_{0, \mathfrak{w}_r(0)}^{[k]} \right)^2 d\tau &= \int_{\mathbb{R}} \left(\left(\partial_{\xi} \mathcal{M}_{x, \xi}^{[k]} \right)_{0, \mathfrak{w}_r(0)} u_{0, \mathfrak{w}_r(0)}^{[k]}(\tau) \right) u_{0, \mathfrak{w}_r(0)}^{[k]}(\tau) d\tau \\ &= \partial_{\xi} \mu^{[k]}(0, \mathfrak{w}_r(0)). \end{aligned}$$

According to Remark 2.4.2, we can write

$$\tilde{f}_{1,0}(0)^2 = \zeta^{1/2} \pi^{-1/2} A_u \quad \text{and} \quad -i \partial_{\xi} \mu^{[k]}(0, \mathfrak{w}_r(0)) = \mathfrak{Y}_r(0).$$

Therefore, we get

$$i e^{\frac{S_u}{\hbar}} w_{l,r}^u = \zeta^{1/2} \pi^{-1/2} \overline{\mathfrak{Y}_r(0)} A_u e^{-2i\alpha_{1,0}(0)} + \mathcal{O}(\hbar). \quad (2.80)$$

By the same method, we can obtain

$$-i e^{\frac{S_d}{\hbar}} w_{l,r}^d = \zeta^{1/2} \pi^{-1/2} \overline{\mathfrak{Y}_r(-L)} A_d e^{-2i\alpha_{1,0}(-L)} e^{-2i\beta_0 L / \hbar^{k+2} - 2i\mathfrak{g}_r(-L) / \hbar} + \mathcal{O}(\hbar), \quad (2.81)$$

where A_d is defined in (2.10).

By combining (2.78), (2.80) and (2.81), we get

$$\begin{aligned} w_{l,r} &= \hbar \zeta^{1/2} \pi^{-1/2} \left(\overline{\mathfrak{Y}_r(0)} A_u e^{-2i\alpha_{1,0}(0)} e^{-\frac{S_u}{\hbar}} + \overline{\mathfrak{Y}_r(-L)} A_d e^{-2i\alpha_{1,0}(-L)} e^{-2i\beta_0 L / \hbar^{k+2} - 2i\mathfrak{g}_r(-L) / \hbar} e^{-\frac{S_d}{\hbar}} \right) \\ &\quad + e^{-\frac{S}{\hbar}} \mathcal{O}(\hbar^2). \end{aligned}$$

By multiplying $w_{l,r}$ by $\exp\left(i\mathfrak{g}_r(-L) / \hbar + i(\alpha_{1,0}(0) + \alpha_{1,0}(-L)) + i\beta_0 L / \hbar^{k+2}\right)$, and using (2.77) and the fact that $\hbar = h^{\frac{1}{k+2}}$, we get

$$\nu_2(\hbar) - \nu_1(\hbar) = 2 |\hat{w}_{l,r}| + e^{-\frac{S}{\hbar^{1/(k+2)}}} \mathcal{O}(h^{\frac{2}{k+2}}),$$

with

$$\hat{w}_{l,r} = \zeta^{1/2} \pi^{-1/2} h^{\frac{1}{k+2}} \left(\overline{\mathfrak{Y}_r(0)} A_u e^{-\frac{S_u}{\hbar^{1/(k+2)}}} e^{iL f(h)} + \overline{\mathfrak{Y}_r(-L)} A_d e^{-\frac{S_d}{\hbar^{1/(k+2)}}} e^{-iL f(h)} \right),$$

where $f(h) = \frac{\mathfrak{g}_r(-L)}{\hbar^{1/(k+2)} L} - \alpha_0 + \beta_0 / h$ and α_0 is defined in (2.52).

Finally, combining this result with Proposition 2.2.4, we get

$$\lambda_2(h) - \lambda_1(h) = 2 |\tilde{w}_{l,r}| + e^{-\frac{S}{h^{1/(k+2)}}} \mathcal{O}(h^2),$$

with

$$\tilde{w}_{l,r} = \zeta^{1/2} \pi^{-1/2} h^{\frac{2k+3}{k+2}} \left(\overline{\mathfrak{Y}_r(0)} A_u e^{-\frac{S_u}{h^{1/(k+2)}}} e^{iLf(h)} + \overline{\mathfrak{Y}_r(-L)} A_d e^{-\frac{S_d}{h^{1/(k+2)}}} e^{-Lif(h)} \right),$$

which ends the proof of Theorem 2.1.2.

ACKNOWLEDGEMENT

I would like to thank my advisor Frédéric Hérau for his valuable remarks and discussion during the maturation of this paper. I thank also Bernard Helffer and Nicolas Raymond for their active reading and comments which have improved the presentation of this paper.

SPECTRAL ASYMPTOTICS OF THE NEUMANN LAPLACIAN WITH VARIABLE MAGNETIC FIELD ON A SMOOTH BOUNDED DOMAIN IN THREE DIMENSIONS

3.1 Motivation and main result

3.1.1 The operator

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ be a smooth connected open bounded domain. We consider $\mathbf{A} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ a smooth magnetic vector potential. The associated magnetic field is given by

$$\mathbf{B}(x) = \nabla \times \mathbf{A}(x),$$

and assumed to be non vanishing on $\bar{\Omega}$. For $h > 0$, we consider the selfadjoint operator

$$\mathcal{L}_h = (-ih\nabla - \mathbf{A})^2 \tag{3.1}$$

with domain

$$\text{Dom}(\mathcal{L}_h) = \{\psi \in H^2(\Omega) : \mathbf{n} \cdot (-ih\nabla - \mathbf{A})\psi = 0 \text{ on } \partial\Omega\},$$

where \mathbf{n} is the outward pointing normal to the boundary.

The associated quadratic form is defined, for all $\psi \in H^1(\Omega)$, by

$$\forall \psi \in H^1(\Omega), \quad \mathcal{Q}_h(\psi) = \int_{\Omega} |(-ih\nabla - \mathbf{A})\psi|^2 dx.$$

Since Ω is smooth and bounded, the operator \mathcal{L}_h has compact resolvent and we can consider the non-decreasing sequence of its eigenvalues $(\lambda_n(h))_{n \geq 1}$ (repeated according to their multiplicities). The aim of this article is to describe the behavior of the eigenvalues $\lambda_n(h)$ in the semiclassical limit $h \rightarrow 0$.

3.1.2 The operator on a half-space with constant magnetic field

The boundary of Ω has an important influence on the spectral asymptotics. Let us consider $x_0 \in \partial\Omega$ and the angle $\theta(x_0) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ given by

$$\mathbf{B}(x_0) \cdot \mathbf{n}(x_0) = \|\mathbf{B}(x_0)\| \sin(\theta(x_0)).$$

Near x_0 , one will approximate Ω by the half-space $\mathbb{R}_+^3 = \{(r, s, t) \in \mathbb{R}^3 : t > 0\}$ (the variable t playing the role of the distance to the boundary). Then, this will lead to consider the Neumann realization of

$$\mathfrak{L}_{\theta} = (D_r - t \cos \theta + s \sin \theta)^2 + D_s^2 + D_t^2$$

in the ambient space $L^2(\mathbb{R}_+^3)$, which already appeared in [77] in the context of Ginzburg-Landau theory. The corresponding magnetic field is $\mathbf{b}(\theta) = (0, \cos \theta, \sin \theta)$. We let

$$\mathbf{e}(\theta) = \inf \text{sp}(\mathfrak{L}_{\theta}).$$

It is well-known (see [50], [77], and also [91, Section 2.5.2]) that \mathbf{e} is even, continuous and increasing on $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (from $\Theta_0 := \mathbf{e}(0) \in (0, 1)$ to 1) and analytic on $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Moreover, we can prove that, for all $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\mathbf{e}(\theta)$ is also the groundstate energy of the Neumann realization of the "Lu-Pan" operator, acting on $L^2(\mathbb{R}_+^2)$,

$$\mathcal{L}_{\theta} = (t \cos \theta - s \sin \theta)^2 + D_s^2 + D_t^2, \tag{3.2}$$

see [91, Section 0.1.5.4]. In this case, the groundstate energy belongs to the discrete spectrum and it is a simple eigenvalue.

These considerations lead to introduce the function β on the boundary.

Definition 3.1.1. *We let, for all $x \in \partial\Omega$,*

$$\beta(x) = \|\mathbf{B}(x)\|\mathbf{e}(\theta(x)).$$

3.1.3 Context, known results and main theorem

The function β plays a central role in the semiclassical spectral asymptotics. The one-term asymptotics of $\lambda_1(h)$ is established in [77] (see also [93] and [34] where additional details are provided).

Theorem 3.1.2 (Lu-Pan '00). *We have*

$$\lambda_1(h) = h \min(b_{\min}, \beta_{\min}) + o(h),$$

where $b_{\min} = \min_{x \in \bar{\Omega}} \|\mathbf{B}(x)\|$ and $\beta_{\min} = \min_{x \in \partial\Omega} \beta(x)$.

When \mathbf{B} is constant (or with constant norm), more accurate estimates of the ground-state energy have been obtained in [49] and in [95, 43]. When looking at Theorem 3.1.2, natural questions can be asked. Can we describe more than the groundstate energy? Is the groundstate energy a simple eigenvalue? In three dimensions, most of the results in this direction have been obtained rather recently :

- When $b_{\min} < \beta_{\min}$, we can prove that the boundary is essentially not seen by the eigenfunctions with low eigenvalues and that they are localized near the minima of $\|\mathbf{B}\|$. Then, if the minimum is unique and non-degenerate, the analysis of [60] applies and it can be established that

$$\lambda_n(h) = b_{\min}h + C_0h^{\frac{3}{2}} + (C_1(2n - 1) + C_2)h^2 + o(h^2),$$

where the constants $(C_0, C_1, C_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ reflect the classical dynamics in a magnetic field.

- When \mathbf{B} is constant (or with constant norm), we can prove that $\beta_{\min} < b_{\min}$ and that $\beta_{\min} = \Theta_0\|\mathbf{B}\|$. In this case, the eigenfunctions with low eigenvalues are localized near the points of the boundary where the magnetic field is tangent, that is where $\mathbf{e}(\theta(x))$ is minimal. Assuming that the magnetic field becomes generically tangent to the boundary along a nice closed curve and assuming also a non-degeneracy assumption, we

have, from [61],

$$\lambda_n(h) = \beta_{\min} h + C_0 h^{\frac{4}{3}} + C_1 h^{\frac{3}{2}} + (C_2(2n - 1) + C_3) h^{\frac{5}{3}} + o(h^2),$$

for some constants $(C_0, C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

The result in [61] is stated in the case of a constant magnetic field, but only the fact that its norm is constant is actually used in the analysis, see [61, Section 3.2.1]. Note that without the additionnal non-degeneracy assumption and stopping the analysis before [61, Section 5.6], this work provides us with the two-term expansion. This observation is motivated by [43], where the two-term expansion of the groundstate energy has been obtained independently and where examples are also analyzed in detail.

When $\beta_{\min} < b_{\min}$ and when $\|\mathbf{B}\|$ is variable, it seems that less is known. The first estimates of the low-lying eigenvalues, and not only of the first one, are done in [93] (see also [92]), where an upper bound is obtained under a generic assumption (see Assumption 3.1.3 below) :

$$\lambda_n(h) \leq \beta_{\min} h + C_0 h^{\frac{3}{2}} + (C_1(2n - 1) + C_2) h^2 + o(h^2), \quad (3.3)$$

for some constants $(C_0, C_1, C_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ and where C_1 is explicitly given by

$$C_1 = \frac{\sqrt{\det \text{Hess}_{x_0} \beta}}{2\|\mathbf{B}(x_0)\| \sin \theta(x_0)}.$$

The upper bound (3.3) is obtained by means of construction of quasimodes in local coordinates near the minimum of β and involves a number of rather subtle algebraic cancellations. At a conference in Dijon in March 2010, S. Vũ Ngọc suggested to the last author that these algebraic cancellations were the signs of a hidden normal form. At the same conference, J. Sjöstrand also suggested that a dimensional reduction in the Grushin spirit (see the remarkable survey [101]) could provide us with the lower bound. Retrospectively, we will see that both of them were somewhat right, but that some microlocal technics needed to be developed further in order to tackle the problem in an efficient way.

Until now, the matching lower bound to (3.3) has only been obtained for a toy model in the case of a flat boundary with an explicit polynomial magnetic field, see [94]. The aim of this article is to establish a lower bound that matches to (3.3) in the general case. To do so, we will, of course, work under the same assumption as in [93].

Assumption 3.1.3. *The function β has a unique minimum, which is non-degenerate. It is attained at $x_0 \in \partial\Omega$ and we have*

$$\theta(x_0) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \quad (3.4)$$

Moreover, we have

$$\beta_{\min} = \beta(x_0) = \min_{x \in \partial\Omega} \beta(x) < \min_{x \in \bar{\Omega}} \|\mathbf{B}(x)\| = b_{\min}.$$

The main result of this article is a three-term expansion of the n -th eigenvalue of \mathcal{L}_h . Thereby, it completes the picture described above.

Theorem 3.1.4. *Under Assumption 3.1.3, there exist $C_0, C_1 \in \mathbb{R}$ such that for all $n \geq 1$, we have*

$$\lambda_n(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \beta_{\min} h + C_0 h^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{\sqrt{\det \text{Hess}_{x_0} \beta}}{\|\mathbf{B}(x_0)\| \sin \theta(x_0)} \left(n - \frac{1}{2} \right) + C_1 \right) h^2 + o(h^2).$$

In particular, for all $n \geq 1$, $\lambda_n(h)$ becomes a simple eigenvalue as soon as h is small enough.

3.1.4 Organization and strategy of the proof

In Section 3.2, we recall the already known results of localization of the eigenfunctions near x_0 . This formally reduces the spectral analysis to a neighborhood of x_0 . This suggests to introduce local coordinates near x_0 . These coordinates (r, s, t) are adapted to the geometry of the magnetic field : the coordinate s is the curvilinear coordinate along the projection of the magnetic field on the boundary (we use here that $\theta(x_0) < \frac{\pi}{2}$), the coordinate r is the geodesic coordinate transverse to s , and t is the distance to the boundary. A rather similar coordinate system has been used and described in [61] (inspired from [49]). Then, the local action of the operator is described in Section 3.2.3 where we perform a Taylor expansion with respect to the normal variable t only. After a local change of gauge, this makes an approximate magnetic vector potential appear, see (3.14). In Section 3.2.3, we define a new operator on $L^2(\mathbb{R}_+^3)$ by extending the coefficients, seen as functions of (r, s) defined near $(0, 0)$, to functions on \mathbb{R}^2 . Since this extension occurs away from the localization zone of the eigenfunctions, we get a new operator $\mathcal{L}_h^{\text{app}}$ whose spectrum is close to that of \mathcal{L}_h , see Proposition 3.2.11.

In Section 3.3, we perform the analysis of $\mathcal{L}_h^{\text{app}}$ with the help of the change of coordinates $(r, s) \mapsto \mathcal{J}(r, s) = (u_1, u_2)$, whose geometric role is to make the normal component of the magnetic field constant (here, we use $\theta(x_0) > 0$). This idea is reminiscent of the recent work [85] in two dimensions, see [85, Prop. 2.2]. We are reduced to the spectral analysis of the operator \mathcal{N}_h , see (3.17). Then, we conjugate \mathcal{N}_h by means of tangential Fourier transform (in the direction u_1) and a translation/dilation T (after these transforms, the variable u_1 becomes z). After these explicit transforms, we get a new operator \mathcal{N}_h^\sharp , which can be seen as a differential operator of order two in the variables (z, t) with coefficients that are h -pseudodifferential operators (with an expansion in powers of $\hbar = h^{\frac{1}{2}}$) in the variable u_2 only, see (3.25). Its eigenfunctions are localized in (z, t) , see Proposition 3.3.3 and Remark 3.3.4.

In Section 3.4, this localization with respect to z suggests to insert cutoff functions in the coefficients of our operator. By doing this, we get the operator \mathcal{N}_h^{b} , see (3.26). The advantage of \mathcal{N}_h^{b} is that it can be considered as a pseudodifferential operator with operator-valued symbol in a reasonable class $S(\mathbb{R}^2, N)$, see Proposition 3.4.2. The principal operator symbol $n_0(u, v)$ is unitarily equivalent to the Lu-Pan operator $\|\mathbf{B}(v, -u)\| \mathcal{L}_{\theta(v, -u)}$ (where we make here a slight abuse of notation by forgetting the reference to the local coordinates on the boundary), see Proposition 3.4.4. Then, we may construct an inverse for $n_0 - \Lambda$ by means of the so-called Grushin formalism, as soon as Λ is close to β_{\min} , see Lemma 3.4.5. This is the first step in the approximate parametrix construction for $\mathcal{N}_h^{\text{b}} - \Lambda$ given in Proposition 3.4.7, which is the key of the proof of Theorem 3.1.4. Let us emphasize that this parametrix construction is inspired by [66] and based on ideas developed by A. Martinez and J. Sjöstrand. This formalism has recently been used in [61] in three dimensions (see also [15, 36, 30] in the case of two dimensions). At a formal level, this parametrix construction relates the kernel of $\mathcal{N}_h^{\text{b}} - \Lambda$ to that of an effective pseudodifferential operator $Q_h^\pm(\Lambda)$, see (3.31).

Section 3.5 is devoted to relate the spectrum of \mathcal{N}_h^\sharp to that of the effective operator $(p_h^{\text{eff}})^W$, see (3.34). Note that the effective operator is an operator in one dimension. This contrasts with [61] where a double Grushin reduction is used : here, this reduction is done in one step with the help of the Lu-Pan operator. The quasi-parametrix in Proposition 3.4.7 is the bridge between the spectra of \mathcal{N}_h^\sharp and $(p_h^{\text{eff}})^W$.

We emphasize that we have to be very careful when studying this connection since the symbol of the effective operator is not necessarily real-valued (only its principal symbol p_0 is a priori real). This contrasts again with [61] and all the previous works on the

subject. This non-selfadjointness comes from the fact that \mathcal{N}_h is not selfadjoint on the canonical L^2 -space, but on a weighted L^2 -space. That is why a short detour in the world of non-selfadjoint operators is used in Section 3.5. In fact, one will not need the operator $(p_h^{\text{eff}})^W$ more than its approximation $(p_h^{\text{mod}})^W$ near the minimum of p_0 , see Section 3.5.1. This approximation is a complex perturbation of the harmonic oscillator. Its spectrum is well-known as well as the behavior of its resolvent.

In Section 3.5.2, we use rescaled Hermite functions to construct quasimodes for \mathcal{N}_h^\sharp . This shows that the spectrum of the model operator is in fact real and we get an accurate upper bound of $\lambda_n(\mathcal{N}_h^\sharp)$ in (3.37). This reproves in a much shorter way (3.3) (see [93, Theorem 1.5] where the convention $\|\mathbf{B}(x_0)\| = 1$ is used). Section 3.5.2 is devoted to establish the corresponding lower bound (by using in particular that the eigenvalues of the non-selfadjoint operator $(p_h^{\text{mod}})^W$ have algebraic multiplicity 1).

3.2 Localization near x_0 and consequences

3.2.1 Localization estimates

In this section, we gather some already known localization properties of the eigenfunctions, see [92].

Proposition 3.2.1 (Localization near the boundary). *Under Assumption 3.1.3, for all $\epsilon > 0$ such that $\beta_{\min} + \epsilon < b_{\min}$, there exist $\alpha, C, h_0 > 0$ such that, for all $h \in (0, h_0)$ and all eigenfunctions ψ of \mathcal{L}_h associated with an eigenvalue $\lambda \leq (\beta_{\min} + \epsilon)h$, we have*

$$\int_{\Omega} e^{\frac{2\alpha \text{dist}(x, \partial\Omega)}{\sqrt{h}}} |\psi|^2 dx \leq C \|\psi\|^2. \quad (3.5)$$

For $\delta > 0$, we consider the δ -neighborhood of the boundary given by

$$\Omega_\delta := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\} .$$

Due to Proposition 3.2.1, in the following, we take

$$\delta = h^{\frac{1}{2}-\eta}$$

for $\eta \in (0, \frac{1}{2})$. We consider $\mathcal{L}_{h,\delta} = (-ih\nabla - \mathbf{A})^2$ the operator with magnetic Neumann condition on $\partial\Omega$ and Dirichlet condition on $\partial\Omega_\delta \setminus \partial\Omega$.

Corollary 3.2.2. *Let $n \geq 1$. There exist $C, h_0 > 0$ such that for all $h \in (0, h_0)$,*

$$\lambda_n(\mathcal{L}_{h,\delta}) - Ce^{-Ch^{-n}} \leq \lambda_n(\mathcal{L}_h) \leq \lambda_n(\mathcal{L}_{h,\delta}).$$

Thanks to Corollary 3.2.2, we may focus on the spectral analysis of $\mathcal{L}_{h,\delta}$. The following proposition can be found in [34, Chapter 9] and [50, Theorem 4.3] (see also the proof of [61, Prop. 2.9]).

Proposition 3.2.3 (Localization near x_0). *Let $M > 0$. There exist $C, h_0 > 0$ and $\alpha > 0$ such that, for all $h \in (0, h_0)$, and all eigenfunctions ψ of $\mathcal{L}_{h,\delta}$ associated with an eigenvalue λ such that $\lambda \leq \beta_{\min}h + Mh^{\frac{3}{2}}$, we have*

$$\int_{\Omega_\delta} e^{\frac{2\alpha \text{dist}(x, \partial\Omega)}{\sqrt{h}}} |\psi(x)|^2 dx + \int_{\Omega_\delta} e^{\frac{2\alpha \|x-x_0\|^2}{h^{1/4}}} |\psi(x)|^2 dx \leq C \|\psi\|^2. \quad (3.6)$$

Proposition 3.2.3 invites us to consider a local chart near x_0 and to write the operator in the corresponding coordinates. In order to simplify our analysis, we construct below a system of coordinates compatible with the geometry of the magnetic field.

3.2.2 Adapted coordinates near x_0

This section is devoted to introduce coordinates adapted to the magnetic field. Most of the properties of our coordinates system have been established in [61].

Coordinate in the direction of the magnetic field on the boundary

We set

$$\mathbf{b}(x) = \frac{\mathbf{B}(x)}{\|\mathbf{B}(x)\|},$$

and we consider its projection on the tangent plane at $x \in \partial\Omega$:

$$\mathbf{b}^\parallel(x) = \mathbf{b}(x) - \langle \mathbf{b}(x), \mathbf{n}(x) \rangle \mathbf{n}(x),$$

where \mathbf{n} is the outward pointing normal.

Due to Assumption 3.1.3, near x_0 , the vector field \mathbf{b}^\parallel does not vanish. This allows to consider the unit vector field

$$\mathbf{f}(x) = \frac{\mathbf{b}^\parallel(x)}{\|\mathbf{b}^\parallel(x)\|}$$

and the associated integral curve γ given by

$$\gamma'(s) = \mathbf{f}(\gamma(s)), \quad \gamma(0) = x_0,$$

which is well-defined on $(-s_0, s_0)$ for some $s_0 > 0$. Clearly, γ is smooth and with values in $\partial\Omega$.

Coordinates on the boundary

Denoting by K the second fundamental form of $\partial\Omega$ associated to the Weingarten map defined by

$$\forall U, V \in T_x \partial\Omega, \quad K_x(U, V) = \langle d\mathbf{n}_x(U), V \rangle,$$

we can consider the ODE with parameter s of unknown $r \mapsto \gamma(r, s)$

$$\partial_r^2 \gamma(r, s) = -K(\partial_r \gamma(r, s), \partial_r \gamma(r, s)) \mathbf{n}(\gamma(r, s)),$$

with initial conditions

$$\gamma(0, s) = \gamma(s), \quad \partial_r \gamma(0, s) = -\gamma'(s)^\perp,$$

where \perp is understood in the tangent space. The minus is here so that $(\partial_r \gamma, \partial_s \gamma, \mathbf{n})$ is a *direct* orthonormal basis. This ODE has a unique smooth solution $(-r_0, r_0) \times (-s_0, s_0) \ni (r, s) \mapsto \gamma(r, s)$ where $r_0 > 0$ is chosen small enough. Let us gather the important properties of $(r, s) \mapsto \gamma(r, s)$. Their proofs may be found in [61].

Proposition 3.2.4. *The function $(r, s) \mapsto \gamma(r, s)$ is valued in $\partial\Omega$. Moreover, we have*

$$|\partial_r \gamma(r, s)| = 1, \quad \langle \partial_r \gamma, \partial_s \gamma \rangle = 0.$$

In this chart γ , the first fundamental form on $\partial\Omega$ is given by the matrix

$$g(r, s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha(r, s) \end{pmatrix}, \quad \alpha(r, s) = |\partial_s \gamma(r, s)|^2.$$

For all $s \in (-s_0, s_0)$, we have $\alpha(0, s) = 1$ and $\partial_s \alpha(0, s) = 0$.

Coordinates near the boundary

We consider the tubular coordinates associated with the chart γ :

$$y = (r, s, t) \mapsto \Gamma(r, s, t) = \gamma(r, s) - t\mathbf{n}(\gamma(r, s)) = x. \quad (3.7)$$

The map Γ is a smooth diffeomorphism from $Q_0 := (-r_0, r_0) \times (-s_0, s_0) \times (0, t_0)$ to $\Gamma(Q_0)$, as soon as $t_0 > 0$ is chosen small enough. The differential of Γ can be written as

$$d\Gamma_y = [(\text{Id} - t\mathbf{dn})(\partial_r\gamma), (\text{Id} - t\mathbf{dn})(\partial_s\gamma), -\mathbf{n}], \quad (3.8)$$

and the Euclidean metrics becomes

$$\mathbf{G} = (d\Gamma)^T d\Gamma = \begin{pmatrix} \mathbf{g} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

with

$$\mathbf{g}(r, s, t) = \begin{pmatrix} \|(\text{Id} - t\mathbf{dn})(\partial_r\gamma)\|^2 & \langle (\text{Id} - t\mathbf{dn})(\partial_r\gamma), (\text{Id} - t\mathbf{dn})(\partial_s\gamma) \rangle \\ \langle (\text{Id} - t\mathbf{dn})(\partial_r\gamma), (\text{Id} - t\mathbf{dn})(\partial_s\gamma) \rangle & \|(\text{Id} - t\mathbf{dn})(\partial_s\gamma)\|^2 \end{pmatrix}.$$

We have $g(r, s) = \mathbf{g}(r, s, 0)$, where g is defined in Proposition 3.2.4.

The magnetic form in tubular coordinates

In this section, we discuss the expression of the magnetic field in the coordinates induced by Γ . This discussion can be found in [91, Section 0.1.2.2] and [61, Section 3.2]. We consider the 1-form

$$\sigma = \mathbf{A} \cdot dx = \sum_{\ell=1}^3 A_\ell dx_\ell.$$

Its exterior derivative is the magnetic 2-form

$$\omega = d\sigma = \sum_{1 \leq k < \ell \leq 3} (\partial_k A_\ell - \partial_\ell A_k) dx_k \wedge dx_\ell,$$

which can also be written as

$$\omega = B_3 dx_1 \wedge dx_2 - B_2 dx_1 \wedge dx_3 + B_1 dx_2 \wedge dx_3.$$

Note also that

$$\forall U, V \in \mathbb{R}^3, \quad \omega(U, V) = [U, V, \mathbf{B}] = \langle U \times V, \mathbf{B} \rangle.$$

Let us now consider the effect of the change of variables $\Gamma(y) = x$. We have

$$\Gamma^* \sigma = \sum_{j=1}^3 \tilde{A}_j dy_j, \quad \tilde{\mathbf{A}} = (d\Gamma)^T \circ \mathbf{A} \circ \Gamma, \quad (3.10)$$

and

$$\Gamma^* \omega = \Gamma^* d\sigma = d(\Gamma^* \sigma) = [\cdot, \cdot, \nabla \times \tilde{\mathbf{A}}].$$

This also gives that, for all $U, V \in \mathbb{R}^3$,

$$[d\Gamma(U), d\Gamma(V), \mathbf{B}] = [U, V, \nabla \times \tilde{\mathbf{A}}], \quad \text{or } \det d\Gamma[\cdot, \cdot, d\Gamma^{-1}(\mathbf{B})] = [\cdot, \cdot, \nabla \times \tilde{\mathbf{A}}],$$

so that,

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{A}} = (\det d\Gamma) d\Gamma^{-1}(\mathbf{B}).$$

Note then that using (3.9) we get

$$|\mathbf{g}|^{-\frac{1}{2}} \nabla \times \tilde{\mathbf{A}} = \mathcal{B}, \quad (3.11)$$

where $\mathcal{B}(y) := d\Gamma_y^{-1}(\mathbf{B}(x))$ corresponds to the coordinates of $\mathbf{B}(y)$ in the image of the canonical basis by $d\Gamma_y$. With our specific change of coordinates (3.7), we have

$$\mathbf{B} = d\Gamma(\mathcal{B}) = \mathcal{B}_1 (\text{Id} - t d\mathbf{n}) (\partial_r \gamma) + \mathcal{B}_2 (\text{Id} - t d\mathbf{n}) (\partial_s \gamma) - \mathcal{B}_3 \mathbf{n}.$$

For all $x \in \partial\Omega$, *i.e.* $t = 0$, we have

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x) &= \mathcal{B}_1(r, s, 0) \partial_r \gamma + \mathcal{B}_2(r, s, 0) \partial_s \gamma - \mathcal{B}_3(r, s, 0) \mathbf{n}(\gamma(r, s)), \\ \|\mathbf{B}(x)\|^2 &= \mathcal{B}_1^2(r, s, 0) + \alpha(r, s) \mathcal{B}_2^2(r, s, 0) + \mathcal{B}_3^2(r, s, 0). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Moreover, we have

$$\mathcal{B}_1(r, s, 0) = \langle \mathbf{B}, \partial_r \gamma \rangle, \quad \alpha(r, s) \mathcal{B}_2(r, s, 0) = \langle \mathbf{B}, \partial_s \gamma \rangle, \quad \mathcal{B}_3(r, s, 0) = -\langle \mathbf{B}, \mathbf{n} \rangle.$$

Note that our choice of coordinate s (along the projection of the magnetic field on the tangent plane) and of transverse coordinate r implies that

$$\mathcal{B}_1(0, s, 0) = 0, \quad \mathcal{B}_2(0, s, 0) > 0,$$

thanks to Assumption 3.1.3.

Definition 3.2.5. *In a neighborhood of $(0, 0)$, we can consider the unique smooth function θ such that*

$$\mathbf{B}(\gamma(r, s)) \cdot \mathbf{n}(\gamma(r, s)) = \|\mathbf{B}(\gamma(r, s))\| \sin \theta(r, s)$$

and satisfying $\theta(r, s) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. With a slight abuse of notation, we let

$$\beta(r, s) = \|\mathbf{B}(\gamma(r, s))\| \mathbf{e}(\theta(r, s)).$$

Remark 3.2.6. *We have*

$$\mathcal{B}_3(r, s) = -\|\mathbf{B}(\gamma(r, s))\| \sin(\theta(r, s)).$$

Moreover, since $\mathcal{B}_2 > 0$ and $\alpha(0, s) = 1$,

$$\mathcal{B}_2(0, s, 0) = \|\mathbf{B}(\gamma(0, s))\| \cos \theta(0, s), \quad \mathcal{B}_3(0, s, 0) = -\|\mathbf{B}(\gamma(0, s))\| \sin \theta(0, s).$$

In fact, we can choose a suitable explicit $\tilde{\mathbf{A}}$ such that (3.11) holds in a neighborhood of $(0, 0, 0)$.

Lemma 3.2.7. *Considering*

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1(r, s, t) &= \int_0^t [|\mathbf{g}|^{\frac{1}{2}} \mathcal{B}_2](r, s, \tau) d\tau, \\ \tilde{A}_2(r, s, t) &= -\int_0^t [|\mathbf{g}|^{\frac{1}{2}} \mathcal{B}_1](r, s, \tau) d\tau + \int_0^r [|\mathbf{g}|^{\frac{1}{2}} \mathcal{B}_3](u, s, 0) du, \\ \tilde{A}_3(r, s, t) &= 0, \end{aligned}$$

we have $\nabla \times \tilde{\mathbf{A}}(r, s, t) = |\mathbf{g}|^{\frac{1}{2}} \mathcal{B}(r, s, t)$.

Démonstration. It follows from a straightforward computation and the fact that $|\mathbf{g}|^{\frac{1}{2}} \mathcal{B}$ is divergence-free. \square

Remark 3.2.8. Note that the proof of Lemma 3.2.7 does not involve global geometric quantities on the boundary as in [61, Prop. 3.3] since our analysis is local near x_0 .

3.2.3 First approximation of the magnetic Laplacian in local coordinates

If the support of ψ is close enough to x_0 , we may express $\mathcal{Q}_h(\psi)$ in the local chart given by $\Gamma(y) = x$. Letting $\tilde{\psi}(y) = \psi \circ \Gamma(y)$, we have then

$$\mathcal{Q}_h(\psi) = \int \langle \mathbf{G}^{-1}(-ih\nabla_y - \tilde{\mathbf{A}}(y))\tilde{\psi}, (-ih\nabla_y - \tilde{\mathbf{A}}(y))\tilde{\psi} \rangle |\mathbf{g}|^{\frac{1}{2}} dy.$$

In the Hilbert space $L^2(|\mathbf{g}|^{\frac{1}{2}} dy)$, the operator locally takes the form

$$|\mathbf{g}|^{-\frac{1}{2}}(-ih\nabla_y - \tilde{\mathbf{A}}(y)) \cdot |\mathbf{g}|^{\frac{1}{2}} \mathbf{G}^{-1}(-ih\nabla_y - \tilde{\mathbf{A}}(y)), \quad (3.13)$$

where \mathbf{G} is defined in (3.9). From now on, the analysis deviates from [61].

Expansion with respect to t

Due to the localization near the boundary at the scale $h^{\frac{1}{2}}$, we are led to replace $\tilde{\mathbf{A}}$ by its Taylor expansion $\tilde{\mathbf{A}}^{[3]}$ at order 3 and \mathbf{g} and \mathbf{G} by their Taylor expansions at the order 2. We let

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1^{[3]}(r, s, t) &= t[|\mathbf{g}|^{\frac{1}{2}} \mathcal{B}_2](r, s, 0) + C_2 \hat{t}^2 + C_3 \hat{t}^3, \\ \tilde{A}_2^{[3]}(r, s, t) &= -t[|\mathbf{g}|^{\frac{1}{2}} \mathcal{B}_1](r, s, 0) + F(r, s) + E_2 \hat{t}^2 + E_3 \hat{t}^3, \\ \tilde{A}_3^{[3]}(r, s, t) &= 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

where $\hat{t} = t\chi(h^{-\frac{1}{2}+\eta}t)$ for some smooth cutoff function χ equal to 1 near 0 and where

$$F(r, s) = \int_0^r [|\mathbf{g}|^{\frac{1}{2}} \mathcal{B}_3](\ell, s, 0) d\ell, \quad (3.15)$$

and the functions $C_j(r, s)$ and $E_j(r, s)$ are smooth. We emphasize that we only truncate the terms of order at least 2 in t in the above expression.

Due to Assumption 3.1.3, $(r, s) \mapsto (F(r, s), s)$ is a smooth diffeomorphism on a neighborhood of $(0, 0)$.

We also consider the expansions

$$|\mathbf{g}|^{\frac{1}{2}}(r, s, t) = m(r, s, t) + \mathcal{O}(t^3), \quad \mathbf{G}^{-1} = M(r, s, t)^{-1} + \mathcal{O}(t^3),$$

with

$$m(r, s, t) = a_0(r, s) + \hat{t}a_1(r, s) + \hat{t}^2a_2(r, s), \quad M(r, s, t) = M_0(r, s) + \hat{t}M_1(r, s) + \hat{t}^2M_2(r, s).$$

Recall that $|\mathbf{g}|(r, s, 0) = \alpha(r, s)$.

Extension of the functions of the tangential variables

It will be convenient to work on the half-space \mathbb{R}_+^3 instead of a neighborhood of $(0, 0, 0)$.

Given $\epsilon_0 > 0$, consider a smooth odd function $\zeta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such that $\zeta(x) = x$ on $[0, \epsilon_0]$ and $\zeta(x) = 2\epsilon_0$, for all $x \geq 2\epsilon_0$. In particular, $\|\zeta\|_\infty = 2\epsilon_0$. We let

$$Z(r, s) = (\zeta(r), \zeta(s)).$$

The following lemma is a straightforward consequence of Assumption 3.1.3.

Lemma 3.2.9. *For ϵ_0 small enough, the function $\hat{\beta} = \beta \circ Z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ is smooth and has a unique minimum (at $(0, 0)$), which is non-degenerate and not attained at infinity.*

Let us now replace the function $\mathcal{B} : (r, s) \mapsto \alpha(r, s)^{\frac{1}{2}}\mathcal{B}(r, s, 0)$ by $\mathcal{B} \circ Z$ in (3.14) and (3.15). We replace the other coefficients C_j and E_j by $C_j \circ Z$ and $E_j \circ Z$. Note that we have the following.

Lemma 3.2.10. *For ϵ_0 small enough, the function*

$$\mathcal{J} : \mathbb{R}^2 \ni (r, s) \mapsto \left(\int_0^r [|\mathbf{g}|^{\frac{1}{2}}\mathcal{B}_3](Z(\ell, s), 0)d\ell, s \right) = u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$$

is smooth and it is a global diffeomorphism.

This leads to consider the new vector potential

$$\begin{aligned} \hat{A}_1(r, s, t) &= t\hat{C}_1 + \hat{C}_2\hat{t}^2 + \hat{C}_3\hat{t}^3, \\ \hat{A}_2(r, s, t) &= -t\hat{E}_1 + \mathcal{J}_1(r, s) + \hat{E}_2\hat{t}^2 + \hat{E}_3\hat{t}^3, \\ \hat{A}_3(r, s, t) &= 0, \end{aligned} \tag{3.16}$$

where $C_1 = \alpha^{\frac{1}{2}}\mathcal{B}_2$, $E_1 = \alpha^{\frac{1}{2}}\mathcal{B}_1$ and with the notation $\overset{\circ}{f} = f \circ Z$.

The rest of the article will be devoted to the spectral analysis of the operator associated with the new quadratic form

$$\mathcal{Q}_h^{\text{app}}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}_+^3} \langle (\overset{\circ}{M})^{-1}(-ih\nabla_y - \hat{\mathbf{A}}(y))\varphi, (-ih\nabla_y - \hat{\mathbf{A}}(y))\varphi \rangle \overset{\circ}{m} dy.$$

This selfadjoint operator $\mathcal{L}_h^{\text{app}}$ is acting as

$$\overset{\circ}{m}^{-1}(-ih\nabla_y - \hat{\mathbf{A}}) \cdot \overset{\circ}{m}(\overset{\circ}{M})^{-1}(-ih\nabla_y - \hat{\mathbf{A}}),$$

in the ambient Hilbert space $L^2(\mathbb{R}_+^3, \overset{\circ}{m} dy)$. This spectral analysis is motivated by the fact that the low-lying spectra of \mathcal{L}_h and $\mathcal{L}_h^{\text{app}}$ coincide modulo $o(h^2)$, in the sense of the following proposition.

Proposition 3.2.11. *We have, for all $n \geq 1$,*

$$\lambda_n(h) = \lambda_n(\mathcal{L}_h^{\text{app}}) + o(h^2).$$

We omit the proof. It follows from Corollary 3.2.2 and the localization estimates given in Proposition 3.2.3 (which are also true in the coordinates (r, s, t) for those of $\mathcal{L}_h^{\text{app}}$ by using the same arguments) and the Min-max Theorem. These localisation estimates allow to remove the cutoff functions up to remainders of order $\mathcal{O}(h^\infty)$ and to control the remainders of the expansion in t .

3.3 Change of coordinates and metaplectic transform

In order to perform the spectral analysis of $\mathcal{L}_h^{\text{app}}$, it is convenient to use the change of variable \mathcal{J} given in Lemma 3.2.10. More precisely, we will use the unitary transform induced by \mathcal{J} defined by

$$U : \begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}_+^3, \overset{\circ}{m} dy) & \rightarrow & L^2(\mathbb{R}_+^3, \check{m} |\text{Jac } \mathcal{J}^{-1}| dudt) \\ \varphi & \mapsto & \check{\varphi} \end{array},$$

where we used the notation $\check{f}(u, t) = f(\mathcal{J}^{-1}(u), t)$ and the slight abuse of notation $\check{\check{f}} = \check{f}$. Then, we focus on the operator $\mathcal{N}_h = U\mathcal{L}_h^{\text{app}}U^{-1}$, acting in $L^2(\mathbb{R}_+^3, \check{m} |\text{Jac } \mathcal{J}^{-1}| dudt)$.

The operator \mathcal{N}_h is acting as

$$\mathcal{N}_h = U \mathcal{L}_h^{\text{app}} U^{-1} = \check{m}^{-1} \mathcal{D}_h \cdot \check{m}(\check{M})^{-1} \mathcal{D}_h, \quad (3.17)$$

where

$$\mathcal{D}_h = \begin{pmatrix} -ih\check{C}_0\partial_{u_1} - t\check{C}_1 - \hat{t}^2\check{C}_2 - \hat{t}^3\check{C}_3 \\ -ih\partial_{u_2} - u_1 - ih\check{E}_0\partial_{u_1} + t\check{E}_1 - \hat{t}^2\check{E}_2 - \hat{t}^3\check{E}_3 \\ -ih\partial_t \end{pmatrix},$$

and

$$C_0 = \partial_r \mathcal{J}_1 = \alpha^{\frac{1}{2}} \mathcal{B}_3, \quad E_0 = \partial_s \mathcal{J}_1. \quad (3.18)$$

Notation 3.3.1. We will use the following classical notation for the semiclassical Weyl quantization of a symbol $a = a(u, v)$. We let

$$a^W \psi(u) = \frac{1}{(2\pi h)^2} \int_{\mathbb{R}^4} e^{i(u-x)\cdot v/h} a\left(\frac{u+x}{2}, v\right) \psi(x) dx dv.$$

Proposition 3.3.2. Let $K > 0$ and $\eta \in (0, \frac{1}{2})$. Let Ξ be a smooth function equal to 0 near 0 and 1 away from a compact neighborhood of 0. There exists $h_0 > 0$ such that for all $h \in (0, h_0)$ and for all normalized eigenfunctions ψ of \mathcal{N}_h associated with an eigenvalue λ such that $\lambda \leq Kh$, we have

$$\left[\Xi \left(\frac{u_1 - v_2}{h^{\frac{1}{2}-\eta}} \right) \right]^W \psi = \mathcal{O}(h^\infty).$$

Démonstration. To simplify the notation, we denote by $\Xi_h = \Xi \left(\frac{u_1 - v_2}{h^{\frac{1}{2}-\eta}} \right)$. Let ψ be a normalized eigenfunction of \mathcal{N}_h associated with an eigenvalue λ such that $\lambda \leq Kh$. The eigenvalue equation gives us

$$\langle \mathcal{N}_h \Xi_h^W \psi, \Xi_h^W \psi \rangle = \lambda \|\Xi_h^W \psi\|^2 + \langle [\mathcal{N}_h, \Xi_h^W] \psi, \Xi_h^W \psi \rangle, \quad (3.19)$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is the scalar product in $L^2 \left(\mathbb{R}_+^3, \check{m} |\text{Jac } \mathcal{J}^{-1}| dudt \right)$.

According to the localization at the scale $h^{\frac{1}{2}}$ with respect to t , we can insert a cutoff function supported in $\{t \leq h^{\frac{1-\eta}{2}}\}$ and we obtain, for $j = 2, 3$,

$$\|t^j \Xi_h^W \psi\| \leq Ch^{1-\eta} \|\Xi_h^W \psi\| + \mathcal{O}(h^\infty) \|\psi\|. \quad (3.20)$$

By means of the Young inequality and rough quadratic form estimates, this yields, for

some $c, C > 0$,

$$\langle \mathcal{N}_h \Xi_h^W \psi, \Xi_h^W \psi \rangle \geq c Q_h^0(\Xi_h^W \psi) - Ch^{1-\eta} \|\Xi_h^W \psi\|^2 + \mathcal{O}(h^\infty) \|\psi\|^2, \quad (3.21)$$

where

$$Q_h^0(\varphi) = \|h\partial_t \varphi\|^2 + \|(h\check{C}_0 D_{u_1} - t\check{C}_1)\varphi\|^2 + \|(hD_{u_2} - u_1 + h\check{E}_0 D_{u_1} + t\check{E}_1)\varphi\|^2.$$

Then, using again the Young inequality, we find that

$$Q_h^0(\varphi) \geq \|h\partial_t \varphi\|^2 + \frac{1}{2} \|h\check{C}_0 D_{u_1} \varphi\|^2 + \frac{1}{2} \|(hD_{u_2} - u_1)\varphi\|^2 - 2\|h\check{E}_0 D_{u_1} \varphi\|^2 - C\|t\varphi\|^2.$$

Notice that there exists $c > 0$ such that

$$|\check{C}_0| \geq c, \quad |\check{E}_0| \leq \frac{c}{4},$$

where we recall (3.18) and Lemma 3.2.10. Note also that C_0 is globally positive and that E_0 is as small as we want since it vanishes at $(0, 0, 0)$, after the extension procedure in Section 3.2.3. This shows that, for some $c_0 > 0$,

$$Q_h^0(\varphi) \geq \|h\partial_t \varphi\|^2 + c_0 \|hD_{u_1} \varphi\|^2 + \frac{1}{2} \|(hD_{u_2} - u_1)\varphi\|^2 - C\|t\varphi\|^2. \quad (3.22)$$

On the support of Ξ_h we have $(v_2 - u_1)^2 \geq h^{1-2\eta}$. Thus (3.20), (3.21), (3.22), and again the localization in t , yield

$$\langle \mathcal{N}_h \Xi_h^W \psi, \Xi_h^W \psi \rangle \geq \frac{\tilde{c}}{2} h^{1-2\eta} \|\Xi_h^W \psi\|^2 + \mathcal{O}(h^\infty) \|\psi\|^2. \quad (3.23)$$

By using classical results of composition of pseudo-differential operators, we have

$$\langle [\mathcal{N}_h, \Xi_h^W] \psi, \Xi_h^W \psi \rangle \leq Ch^{1+\eta} \|\Xi_h^W \psi\|^2 + \mathcal{O}(h^\infty) \|\psi\|^2, \quad (3.24)$$

where Ξ has a support slightly larger than that of Ξ_h . Here we used the energy estimate $\|\mathcal{D}_h \Xi_h^W \psi\| = \mathcal{O}(h^{1/2}) \|\Xi_h^W \psi\| + \mathcal{O}(h^\infty) \|\psi\|$, which follows from rough estimates of (3.19).

Thus, by combining (3.19), (3.23), and (3.24) with the fact that $\lambda \leq Kh$, we obtain

$$\|\Xi_h^W \psi\|^2 \leq Mh^\eta \|\Xi_h^W \psi\|^2 + \mathcal{O}(h^\infty) \|\psi\|^2.$$

Finally, by an induction argument on the size of the support of Ξ , we get

$$\|\Xi_h^W \psi\| = \mathcal{O}(h^\infty) \|\psi\|.$$

□

Let us consider the partial semiclassical Fourier transform \mathcal{F}_2^{-1} with respect to u_2 and the translation/dilation $T : u_1 \mapsto (u_1 - v_2)h^{-\frac{1}{2}} = z$. With a slight abuse of notation, we identify T with $\varphi \mapsto \varphi \circ T$. Letting $V = \mathcal{F}_2^{-1}T$, we have

$$V^*(-ih\partial_{u_2} - u_1)V = -h^{\frac{1}{2}}z,$$

and, with the dilation $W : t \mapsto h^{-\frac{1}{2}}t$,

$$W^*V^*\mathcal{D}_h V W = \hbar\mathcal{D}_h^\sharp, \quad \hbar = h^{\frac{1}{2}},$$

with

$$\mathcal{D}_h^\sharp = \begin{pmatrix} -iC_0^\sharp\partial_z - tC_1^\sharp - \hbar t^2\chi(h^\eta t)^2C_2^\sharp - \hbar^2 t^3\chi(h^\eta t)^3C_3^\sharp \\ -z - iE_0^\sharp\partial_z + tE_1^\sharp - \hbar t^2\chi(h^\eta t)^2E_2^\sharp - \hbar^2 t^3\chi(h^\eta t)^3E_3^\sharp \\ -i\partial_t \end{pmatrix}^W$$

where the coefficients of the conjugated operator \mathcal{D}_h^\sharp are now given by $P^\sharp = \check{P}(v_2 + \hbar z, -u_2)$. Here the Weyl quantization can be considered only in the variables (u_2, v_2) since z is now a "space variable". We let

$$\mathcal{N}_h^\sharp = [m_h^{-1}]^\sharp \mathcal{D}_h^\sharp \cdot [m_h(M_h)^{-1}]^\sharp \mathcal{D}_h^\sharp,$$

where $m_h(\cdot, t) = m(\cdot, \hbar t)$ and $M_h(\cdot, t) = M(\cdot, \hbar t)$. Note that \mathcal{N}_h^\sharp and $h\mathcal{N}_h^\sharp$ are unitarily equivalent since

$$W^*V^*\mathcal{N}_h V W = h\mathcal{N}_h^\sharp. \quad (3.25)$$

After all these elementary transforms, Proposition 3.3.2 can be reformulated as follows.

Proposition 3.3.3. *Let $K > 0$ and $\eta \in (0, \frac{1}{2})$. Let Ξ be a smooth function equal to 0 near 0 and 1 away from a compact neighborhood of 0. There exists $h_0 > 0$ such that for all $h \in (0, h_0)$ and for all normalized eigenfunctions ψ of \mathcal{N}_h^\sharp associated with an eigenvalue*

1. which is the metaplectic transform associated with the linear symplectic application $(u_2, v_2) \mapsto (v_2, -u_2)$, see, for instance, [80, Section 3.4].

λ such that $\lambda \leq K$, we have

$$\Xi(h^\eta z)\psi = \mathcal{O}(h^\infty).$$

Remark 3.3.4. As a consequence of the Agmon estimates and working in the coordinates (u_1, u_2, t) , we notice that the eigenfunctions are also roughly localized in "frequency" in the sense that, for all $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{N}^3$, and all $\eta \in (0, \frac{1}{2})$, there exist $C, h_0 > 0$ such that, for all $h \in (0, h_0)$,

$$\|t^\alpha z^\beta D_z^\gamma \psi\| + \|t^\alpha z^\beta D_t^\gamma \psi\| \leq Ch^{-\eta(\alpha+\beta+\gamma)} \|\psi\|.$$

3.4 A pseudodifferential operator with operator symbol

Proposition 3.3.3 invites us to insert cutoff functions in the coefficients of the operator \mathcal{N}_h^\sharp . That is why we consider

$$\mathcal{N}_h^\flat = \left([m_h^{-1}]^\flat\right)^W \mathcal{D}_h^\flat \cdot \left([m_h(M_h)^{-1}]^\flat\right)^W \mathcal{D}_h^\flat, \quad (3.26)$$

where

$$\mathcal{D}_h^\flat = \begin{pmatrix} -iC_0^\flat \partial_z - tC_1^\flat - \hbar t^2 \chi(h^\eta t)^2 C_2^\flat - \hbar^2 t^3 \chi(h^\eta t)^3 C_3^\flat \\ -z - iE_0^\flat \partial_z + tE_1^\flat - \hbar t^2 \chi(h^\eta t)^2 E_2^\flat - \hbar^2 t^3 \chi(h^\eta t)^3 E_3^\flat \\ -i\partial_t \end{pmatrix}^W, \quad (3.27)$$

with $P^\flat = \check{P}(v_2 + \hbar \chi_\eta(z)z, -u_2)$, where $\chi_\eta(z) = \chi_0(h^\eta z)$, the function χ_0 being smooth, with a compact support, and equal to 1 on a neighborhood of the support of $1 - \Xi$.

3.4.1 The symbol and its properties

Expanding the operator \mathcal{N}_h^\flat with respect to \hbar (say first at a formal level) suggests to consider the following selfadjoint operator, depending on (u_2, v_2) , acting as

$$\begin{aligned} & n_0(u_2, v_2) \\ & = (-i\check{C}_0(v_2, -u_2)\partial_z - t\check{C}_1(v_2, -u_2))^2 + \alpha^{-1}(v_2, -u_2)(-z - i\check{E}_0(v_2, -u_2)\partial_z + t\check{E}_1(v_2, -u_2))^2 - \partial_t^2, \end{aligned}$$

with the domain

$$\text{Dom}(n_0) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}_+^2) : n_0(u_2, v_2)\psi \in L^2(\mathbb{R}_+^2), \partial_t \psi(z, 0) = 0\},$$

and where we recall that C_1 and E_1 are given in (3.16). The domain of $n_0(u_2, v_2)$ depends on (u_2, v_2) . However, we can check that it is unitarily equivalent to a selfadjoint operator with domain independent of (u_2, v_2) , see the proof of Proposition 3.4.4 below. In the following, we will use class of operator symbols of the form

$$S(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)) = \{a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)) : \forall \gamma \in \mathbb{N}^2, \exists C_\gamma > 0 : \|\partial^\gamma a\|_{\mathcal{L}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)} \leq C_\gamma\},$$

where \mathcal{A}_1 and \mathcal{A}_2 are (fixed) Hilbert spaces. We also introduce

$$\mathcal{B}_k = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}_+^2) : \forall \alpha \in \mathbb{N}^k, |\alpha| \leq k \Rightarrow (\langle t \rangle^k + \langle z \rangle^k) \partial^\alpha \psi \in L^2(\mathbb{R}_+^2)\},$$

and the class of symbols

$$S(\mathbb{R}^2, N) = \bigcap_{k \geq N} S(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}(\mathcal{B}_k, \mathcal{B}_{k-N})).$$

and we notice that $n_0 \in S(\mathbb{R}^2, 2)$.

Remark 3.4.1. *Note that these classes of symbols are not algebras. However, the classical Moyal product of symbols in $S(\mathbb{R}^2, N)$ and $S(\mathbb{R}^2, M)$ is well-defined and belongs to $S(\mathbb{R}^2, N + M)$, see [66, Theorem 2. 1. 12].*

In fact, for $N \geq 2$, by using a classical trace theorem, we may also define

$$\mathcal{B}_N^{\text{Neu}} = \{\psi \in \mathcal{B}_N : \partial_t \psi(z, 0) = 0\} (\subset \text{Dom } n_0),$$

and the associated class $S^{\text{Neu}}(\mathbb{R}^2, N)$. We can also write $n_0 \in S^{\text{Neu}}(\mathbb{R}^2, 2)$ to remember that the domain of n_0 is equipped with the Neumann condition.

By expanding \mathcal{N}_h^b in powers of \hbar and by using a composition theorem for pseudodifferential operators, we get the following.

Proposition 3.4.2. *The operator \mathcal{N}_h^b is an h -pseudodifferential operator with symbol in the class $S^{\text{Neu}}(\mathbb{R}^2, 2)$. Moreover, we can write the expansion*

$$\mathcal{N}_h^b = n_0^W + \hbar n_1^W + \hbar^2 n_2^W + \hbar^3 r_h^W, \quad (3.28)$$

with n_1, n_2 and r_h in the class $S^{\text{Neu}}(\mathbb{R}^2, 8)$.

Démonstration. Let us recall that \mathcal{N}_h^b is given in (3.26). Let us notice that the operator \mathcal{D}_h^b , defined in (3.27), is indeed a pseudodifferential operator with operator-valued symbol.

With respect to the variables z and t , it is a differential operator of order 1 whose symbol is

$$\begin{pmatrix} -iC_0^b \partial_z - tC_1^b - \hbar t^2 \chi(h^\eta t)^2 C_2^b - \hbar^2 t^3 \chi(h^\eta t)^3 C_3^b \\ -z - iE_0^b \partial_z + tE_1^b - \hbar t^2 \chi(h^\eta t)^2 E_2^b - \hbar^2 t^3 \chi(h^\eta t)^3 E_3^b \\ -i\partial_t \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

and belongs to $S(\mathbb{R}^2, 1)$. The functions/symbols $[m_\hbar^{-1}]^b$ and $[m_\hbar(M_\hbar)^{-1}]^b$ belong to $S(\mathbb{R}^2, 0)$. Combining these considerations with (3.26), it remains to apply the composition theorem for pseudodifferential operators with operator symbols, see Remark 3.4.1.

To get (3.28), it is sufficient to use the Taylor expansions in \hbar of the symbol (3.29), $[m_\hbar^{-1}]^b$, and $[m_\hbar(M_\hbar)^{-1}]^b$, and to apply again the composition theorem (the worst remainders being roughly of order 8 in (z, t)). \square

Remark 3.4.3. *We will see that the accurate description of n_1 and n_2 in (3.28) are not necessary to prove our main theorem. The use of the more restrictive class $S^{\text{Neu}}(\mathbb{R}^2, 8)$ allows to deal with the uniformity in the semiclassical expansions in \hbar .*

Let us describe the groundstate energy of the principal symbol n_0 . From now on, we lighten the notation by setting $(u_2, v_2) = (u, v)$.

Proposition 3.4.4. *For all $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, the bottom of the spectrum of n_0 belongs to the discrete spectrum and it is a simple eigenvalue that equals $\check{\beta}(v, -u)$. The corresponding normalized eigenfunction $\mathfrak{f}_{u,v}$ belongs to the Schwartz class and depends on (u, v) smoothly.*

Moreover, there exists $c > 0$ such that, by possibly choosing ϵ_0 smaller in Lemma 3.2.9, we have, for all $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\inf \text{sp}(n_0(u, v)|_{\mathfrak{f}_{u,v}^\perp}) \geq \beta_{\min} + c \geq \check{\beta}(u, v).$$

Démonstration. By using the Fourier transform in z and then a change of gauge, we are reduced to the case when $E_0 = 0$. With a rescaling in z , n_0 is unitarily equivalent to

$$(-i\partial_z - t\check{C}_1)^2 + \alpha^{-1}(-\check{C}_0 z + t\check{E}_1)^2 - \partial_t^2 = (-i\partial_z - tb_2)^2 + (b_3 z + tb_1)^2 - \partial_t^2,$$

with

$$b_1 = \check{\mathcal{B}}_1, \quad b_2 = \alpha^{\frac{1}{2}} \check{\mathcal{B}}_2, \quad b_3 = -\check{\mathcal{B}}_3,$$

where the functions are evaluated at $(v_2, -u_2)$. Recalling (3.12), we see that the Euclidean norm of $b = (b_1, b_2, b_3)$ is

$$\|b\|_2 = \|\check{\mathbf{B}}\|,$$

with a slight abuse of notation. By homogeneity, we can easily scale out $\|\check{\mathbf{B}}\|$ and consider the operator

$$(-i\partial_z - tb_2)^2 - \partial_t^2 + (tb_1 + b_3z)^2,$$

with $b_1 = \cos\theta \cos\varphi$, $b_2 = \cos\theta \sin\varphi$ and $b_3 = \sin\theta$. Completing a square leads to the identity

$$\begin{aligned} & (-i\partial_z - tb_2)^2 - \partial_t^2 + (tb_1 + b_3z)^2 \\ &= -\partial_t^2 + (t \cos\theta - \sin\varphi D_z - z \sin\theta \cos\varphi)^2 + (\cos\varphi D_z - z \sin\theta \sin\varphi)^2. \end{aligned}$$

This shows, thanks to a change of gauge and a rescaling in z , that the operator is unitarily equivalent to

$$D_t^2 + (t \cos\theta - \tan\varphi D_z - z \sin\theta)^2 + D_z^2$$

and then, by a change of gauge on the Fourier side, to

$$D_t^2 + D_z^2 + (t \cos\theta - z \sin\theta)^2,$$

which is nothing but the Lu-Pan operator defined in (3.2), which is unitarily equivalent to $\cos^2\theta D_t^2 + \sin^2\theta D_z^2 + (t - z)^2$ (whose domain is independent of θ).

The eigenfunction $f_{u,v}$ belongs to the Schwartz class in virtue of [92, Corollaire 5.1.2] and the stability of the Schwartz class by Fourier and gauge transforms. □

3.4.2 An approximate parametrix

Inverting the principal symbol

Lemma 3.4.5. *Consider $\epsilon > 0$ and $\Lambda \leq \beta_{\min} + \epsilon$. We let*

$$\mathcal{P}_0(\Lambda) = \begin{pmatrix} n_0(u, v) - \Lambda & \cdot f_{u,v} \\ \langle \cdot, f_{u,v} \rangle & 0 \end{pmatrix}.$$

For ϵ small enough, $\mathcal{P}_0(\Lambda) : \text{Dom } n_0 \times \mathbb{C} \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+^2) \times \mathbb{C}$ is bijective. Its inverse is denoted by \mathcal{Q}_0 and is given by

$$\mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q}_0(\Lambda) = \begin{pmatrix} (n_0(u, v) - \Lambda)_\perp^{-1} & \cdot f_{u,v} \\ \langle \cdot, f_{u,v} \rangle & \Lambda - \check{\beta}(v, u) \end{pmatrix},$$

where $(n_0(u, v) - \Lambda)_\perp^{-1}$ is the regularized resolvent on $(\text{span } \mathbf{f}_{u,v})^\perp$.

Moreover, we have $\mathcal{Q}_0 \in S(\mathbb{R}^2, 0)$.

Démonstration. By using the same algebraic computations as in [66] and the spectral gap in Proposition 3.4.4, we get the announced inverse. Moreover, it is also clear that \mathcal{Q}_0 is bounded from $L^2(\mathbb{R}_+^2)$ to $L^2(\mathbb{R}_+^2)$ uniformly in (u, v) . The fact that it belongs to the class $S(\mathbb{R}^2, 0)$ follows from weighted resolvent estimates similar to [92, p.100-101], see also [30, Appendix]. \square

We let

$$\mathcal{P}_h(\Lambda) = \begin{pmatrix} n_0 + \hbar n_1 + \hbar^2 n_2 + \hbar^3 r_h - \Lambda & \cdot \mathbf{f}_{u,v} \\ \langle \cdot, \mathbf{f}_{u,v} \rangle & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{P}_0(\Lambda) + \hbar \mathcal{P}_1 + \hbar^2 \mathcal{P}_2 + \hbar^3 \mathcal{P}_h,$$

where n_0, n_1, n_2 , and r_h are given in Proposition 3.4.2.

The approximate parametrix

Let us now construct an approximate (at the order 2) inverse of \mathcal{P}_h^W when it acts on the Schwartz class (with Neumann condition). We consider

$$\mathcal{Q}_h = \mathcal{Q}_0 + \hbar \mathcal{Q}_1 + \hbar^2 \mathcal{Q}_2 = \begin{pmatrix} Q_h^+ & Q_h^+ \\ Q_h^- & Q_h^\pm \end{pmatrix},$$

where

$$\mathcal{Q}_1 = -\mathcal{Q}_0 \mathcal{P}_1 \mathcal{Q}_0, \quad \mathcal{Q}_2 = -\mathcal{Q}_0 \mathcal{P}_2 \mathcal{Q}_0 + \mathcal{Q}_0 \mathcal{P}_1 \mathcal{Q}_0 \mathcal{P}_1 \mathcal{Q}_0 - \frac{1}{i} \{ \mathcal{Q}_0, \mathcal{P}_0 \} \mathcal{Q}_0. \quad (3.30)$$

By Remark 3.4.1, the symbols \mathcal{Q}_1 and \mathcal{Q}_2 belong to $S(\mathbb{R}^2, M)$, for some $M \geq 8$. By computing products of matrices and using the exponential decay of $\mathbf{f}_{u,v}$, we get

$$Q_h^\pm(\Lambda) = \Lambda - (p_0 + \hbar p_1 + \hbar^2 p_{2,\Lambda}), \quad (3.31)$$

with $p_0 = \check{\beta}(v, -u)$ and $p_1, p_{2,\Lambda} \in S_{\mathbb{R}^2}(1)$ where

$$S_{\mathbb{R}^2}(1) = \{a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) : \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, \exists C_\alpha > 0 : |\partial^\alpha a| \leq C_\alpha\}.$$

In addition, $\Lambda \mapsto p_{2,\Lambda} \in S_{\mathbb{R}^2}(1)$ is analytic in a neighborhood of β_{\min} .

Remark 3.4.6. *Let us emphasize here that nothing a priori ensures that the subprincipal symbols p_1 and $p_{2,E}$ are real-valued since our formal operator is not selfadjoint on the canonical L^2 -space.*

The reason to consider the expressions (3.30) simply comes from the semiclassical expansion of the product $\mathcal{Q}_h^W \mathcal{P}_h^W$ by means of the composition theorem [66, Theorem 2.1.12]. These explicit choices, with the Calderón-Vaillancourt Theorem [66, Theorem 2.1.16] to estimate the remainders, imply the following proposition.

Proposition 3.4.7. *There exists $N \geq 2$ such that the following holds. We have*

$$\mathcal{Q}_h^W \mathcal{P}_h^W = \text{Id}_{\mathcal{S}^{\text{Neu}}(\overline{\mathbb{R}}_+^2) \times \mathcal{S}(\mathbb{R})} + \hbar^3 \mathcal{R}_{h,\ell}^W, \quad \mathcal{P}_h^W \mathcal{Q}_h^W = \text{Id}_{\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+^2) \times \mathcal{S}(\mathbb{R})} + \hbar^3 \mathcal{R}_{h,r}^W,$$

where $\mathcal{R}_{h,\ell}$ and $\mathcal{R}_{h,r}$ belong to $S(\mathbb{R}^2, N)$ and where $\mathcal{S}^{\text{Neu}}(\overline{\mathbb{R}}_+^2)$ denotes the Schwartz class on \mathbb{R}_+^2 with Neumann condition at $t = 0$.

In particular, we have, for all $\psi \in \mathcal{S}^{\text{Neu}}(\overline{\mathbb{R}}_+^2)$,

$$\begin{aligned} Q_h^W (\mathcal{N}_h^b - \Lambda) \psi + (Q_h^+)^W \mathfrak{P} \psi &= \psi + \mathcal{O}(\hbar^3) \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}, \mathcal{E}_N)}, \\ (Q_h^-)^W (\mathcal{N}_h^b - \Lambda) \psi + (Q_h^\pm)^W \mathfrak{P} \psi &= \mathcal{O}(\hbar^3) \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}, \mathcal{E}_N)}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

and, for all $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} (\mathcal{N}_h^b - \Lambda) (Q_h^+)^W \varphi + \mathfrak{P}^* (Q_h^\pm)^W \varphi &= \mathcal{O}(\hbar^3) \|\varphi\|, \\ \mathfrak{P} (Q_h^+)^W \varphi &= \varphi + \mathcal{O}(\hbar^3) \|\varphi\|. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Here, $\mathfrak{P} = (\langle \cdot, \mathfrak{f}_{u,v} \rangle)^W$.

3.5 Spectral consequences

This last section is devoted to the proof of Theorem 3.1.4 with the help of Proposition 3.4.7. The spectrum of \mathcal{N}_h^\sharp will be compared to the spectrum of a model operator, derived from an effective operator whose symbol is

$$p_h^{\text{eff}} = p_0 + \hbar p_1 + \hbar^2 p_{2,\beta_{\min}}, \quad (3.34)$$

see (3.31).

3.5.1 A model operator

Let us consider

$$p_h^{\text{mod}}(U) = p_h^{\text{eff}}(0) + \frac{1}{2} \text{Hess}_{(0,0)} p_0(U, U) + \hbar p_1^{\text{lin}}(U), \quad U = (u, v),$$

where p_1^{lin} is the linear approximation of p_1 at $(0, 0)$. The corresponding operator $(p_h^{\text{mod}})^W$ is not selfadjoint due to the linear part. However, this operator has still compact resolvent and we can compute its spectrum and estimate its resolvent. Let us explain this. Thanks to a rotation and Assumption 3.1.3, we may assume that

$$p_h^{\text{mod}} = p_h^{\text{eff}}(0) + \frac{d_0}{2}(u^2 + v^2) + \hbar(\alpha u + \beta v),$$

for some $d_0 > 0$ and $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$.

Remark 3.5.1. *In fact, we have*

$$d_0 = \sqrt{\det \text{Hess}_{(0,0)} p_0} = \sqrt{\det \text{Hess}_{(0,0)} \check{\beta}(v, -u)} = \sqrt{\frac{\det \text{Hess}_{x_0} \beta}{\|\mathbf{B}(x_0)\|^2 \sin^2 \theta(x_0)}},$$

where we used the notation introduced at the beginning of Section 3.3, the change of variable \mathcal{J} in Lemma 3.2.10, and Remark 3.2.6.

By completing square, we get

$$(p_h^{\text{mod}})^W = \tilde{p}_h^{\text{eff}}(0) + \frac{d_0}{2} \left(\left(u + \frac{\hbar \alpha}{d_0} \right)^2 + \left(\hbar D_u + \frac{\hbar \beta}{d_0} \right)^2 \right), \quad \tilde{p}_h^{\text{eff}}(0) = p_h^{\text{eff}}(0) - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{d_0} h.$$

For all $n \geq 1$, we let

$$f_n(u) = [e^{-i\beta \cdot / d_0} H_n(\cdot)] \left(u + \frac{\alpha}{d_0} \right), \quad f_{n,\hbar}(u) = \hbar^{-\frac{1}{2}} f_n(\hbar^{-1} u),$$

where H_n is the n -th normalized Hermite function.

The family $(f_{n,\hbar})_{n \geq 1}$ is a total family in $L^2(\mathbb{R})$ (but not necessarily orthogonal). It satisfies

$$(p_h^{\text{mod}})^W f_{n,\hbar} = \lambda_n^{\text{mod}}(h) f_{n,\hbar}, \quad \lambda_n^{\text{mod}}(h) = \frac{d_0}{2} (2n - 1) h + \tilde{p}_h^{\text{eff}}(0). \quad (3.35)$$

By the analytic perturbation theory, the spectrum of $(p_h^{\text{mod}})^W$ is made of eigenvalues of

algebraic multiplicity 1 and it is given by

$$\text{sp} \left((p_h^{\text{mod}})^W \right) = \left\{ \frac{d_0}{2} (2n - 1)h + \tilde{p}_h^{\text{eff}}(0), \quad n \geq 1 \right\}.$$

Moreover, for all compact $K \subset \mathbb{C}$, there exists $C_K > 0$ such that, for all $\mu \in K$,

$$\|((p_h^{\text{mod}})^W - \tilde{p}_h^{\text{eff}}(0) - h\mu)^{-1}\| \leq \frac{C_K}{\text{dist}(\tilde{p}_h^{\text{eff}}(0) + h\mu, \text{sp}((p_h^{\text{mod}})^W))}. \quad (3.36)$$

3.5.2 Refined estimates

From the model operator to \mathcal{N}_h^\sharp

The functions $(f_{n,h})$ can serve as quasimodes for \mathcal{N}_h^\sharp with the help of (3.33). Indeed, by taking $z = \lambda_n^{\text{mod}}(h)$ and $\varphi = f_{n,h}$, we see that

$$(\mathcal{N}_h^\flat - \lambda_n^{\text{mod}}(h))(Q_h^+)^W f_{n,h} = \mathcal{O}(\hbar^3),$$

Since $(Q_h^+)^W f_{n,h}$ is localized near $(z, t) = (0, 0)$ (due to the exponential decay of $\mathbf{f}_{u,v}$, which is uniform in (u, v)), we get

$$(\mathcal{N}_h^\sharp - \lambda_n^{\text{mod}}(h))(Q_h^+)^W f_{n,h} = \mathcal{O}(\hbar^3).$$

By using the inverse Fourier transform and translation/dilation, $(Q_h^+)^W f_{n,h}$ becomes a quasimode for \mathcal{N}_h , see (3.17) and the end of Section 3.3. But the operator \mathcal{N}_h is unitarily equivalent to selfadjoint for a suitable scalar product on the usual L^2 -space. Therefore, we can apply the spectral theorem and we deduce that

$$\text{dist} \left(\lambda_n^{\text{mod}}(h), \text{sp}(\mathcal{N}_h^\sharp) \right) \leq C\hbar^3.$$

In particular, this implies that, for h small enough, $\lambda_n^{\text{mod}}(h)$ is real. This shows that we necessarily have

$$p_1(0) \in \mathbb{R}, \quad p_2(0) - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{d_0} \in \mathbb{R}.$$

This also implies that

$$\lambda_n(\mathcal{N}_h^\sharp) \leq \lambda_n^{\text{mod}}(h) + C\hbar^3. \quad (3.37)$$

From \mathcal{N}_h^\sharp to the model operator

Let $n \geq 1$. Let us consider an eigenfunction ψ of \mathcal{N}_h^\sharp associated with the eigenvalue $\lambda_n(\mathcal{N}_h^\sharp)$.

We know that $\lambda_n(\mathcal{N}_h^\sharp) = \beta_{\min} + o(1)$ and that the corresponding eigenfunctions are localized in (z, t) (due to the Agmon estimates and Proposition 3.3.3). Thus, in (3.32), we can replace \mathcal{N}_h^\flat by \mathcal{N}_h^\sharp and we deduce that

$$\left((p_h^{\text{eff}})^W - \lambda_n(\mathcal{N}_h^\sharp) \right) \mathfrak{P}\psi = \mathcal{O}(\hbar^3) \|\psi\|, \quad \|\psi\| \leq C \|\mathfrak{P}\psi\|. \quad (3.38)$$

where we used Remark 3.3.4 to control the remainders. By taking the scalar product with $\mathfrak{P}\psi$, taking the real part and using the min-max principle, we get that

$$\lambda_n(\mathcal{N}_h^\sharp) \geq \beta_{\min} + p_1(0)\hbar - Ch.$$

This establishes the two-term asymptotic estimate

$$\lambda_n(\mathcal{N}_h^\sharp) = \beta_{\min} + p_1(0)\hbar + \mathcal{O}(h).$$

Therefore, we can focus on the description of the eigenvalues of the form

$$\lambda_n(\mathcal{N}_h^\sharp) = \beta_{\min} + p_1(0)\hbar + \mu_n(\hbar)h,$$

for $\mu_n(\hbar) \in D(0, R)$ with a given $R > 0$. We have

$$\left((p_h^{\text{eff}})^W - (\beta_{\min} + p_1(0)\hbar + \mu_n(\hbar)h) \right) \mathfrak{P}\psi_n = \mathcal{O}(\hbar^3) \|\mathfrak{P}\psi_n\|, \quad (3.39)$$

where ψ_n denotes a normalized eigenfunction associated to the n -th eigenvalue of \mathcal{N}_h^\sharp . In fact, by considering (3.39) and again Proposition 3.4.7, the function $\mathfrak{P}\psi_n$ is microlocalized near $(0, 0)$, the minimum of the principal symbol p_0 . Since this minimum is non-degenerate, the quadratic approximation of the symbol shows that $\mathfrak{P}\psi_n$ is microlocalized near $(u, v) = (0, 0)$ at the scale $\hbar^{1-\eta}$ for any $\eta \in (0, \frac{1}{2})$. In particular, we deduce that

$$\left((p_h^{\text{mod}})^W - (\beta_{\min} + p_1(0)\hbar + \mu_n(\hbar)h) \right) \mathfrak{P}\psi_n = \mathcal{O}(\hbar^{3-3\eta}) \|\mathfrak{P}\psi_n\|.$$

From the resolvent estimate (3.36), this implies that

$$\mu_n(\hbar) \in \bigcup_{j \geq 1} D\left(\frac{d_0}{2}(2j-1) + d_1, C\hbar^{1-3\eta}\right), \quad d_1 = p_2(0) - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{d_0},$$

where $D(z, r)$ denotes the disc of center $z \in \mathbb{C}$ and radius $r > 0$. In particular, we have

$$\mu_1(\hbar) \geq \frac{d_0}{2} + d_1 - C\hbar^{1-3\eta}.$$

This shows that

$$\lambda_1(\mathcal{N}_\hbar^\sharp) \geq \beta_{\min} + p_1(0)\hbar + \left(\frac{d_0}{2} + d_1\right)\hbar^2 - C\hbar^{3-3\eta},$$

and thus, with (3.37), we get

$$\mu_1(\hbar) = \frac{d_0}{2} + d_1 + \mathcal{O}(\hbar^{1-3\eta}),$$

and

$$\lambda_1(\mathcal{N}_\hbar^\sharp) = \lambda_1^{\text{mod}}(h) + \mathcal{O}(\hbar^{3-3\eta}).$$

Let us now deal with $\lambda_2(\mathcal{N}_\hbar^\sharp)$ and recall (3.37). Assume by contradiction that $\mu_2(\hbar) \in D\left(\frac{d_0}{2} + d_1, C\hbar^{1-3\eta}\right)$. Then, we have

$$|\mu_2(\hbar) - \mu_1(\hbar)| \leq C\hbar^{1-3\eta}.$$

We infer that

$$\left((p_h^{\text{mod}})^W - \lambda_1^{\text{mod}}(h)\right) \mathfrak{P}\psi = \mathcal{O}(\hbar^{3-3\eta}) \|\mathfrak{P}\psi\|,$$

for all $\psi \in \text{span}(\psi_1, \psi_2)$. Moreover, coming back to (3.32) (see also (3.39)), we also get that $\|\psi\| \leq C\|\mathfrak{P}\psi\|$ for all $\psi \in \text{span}(\psi_1, \psi_2)$. In particular, $\mathfrak{P}(\text{span}(\psi_1, \psi_2))$ is of dimension two. Let us consider the Riesz projector (in the characteristic subspace of $(p_h^{\text{mod}})^W$ associated with the smallest eigenvalue)

$$\Pi = \frac{1}{2i\pi} \int_{\lambda_1^{\text{mod}}(h), \hbar^{3-4\eta}} (\zeta - (p_h^{\text{mod}})^W)^{-1} d\zeta,$$

which is of rank one. Then, for all $\varphi \in \mathfrak{P}(\text{span}(\psi_1, \psi_2))$, we write, with the Cauchy

formula,

$$\Pi\varphi = \varphi + \frac{1}{2i\pi} \int_{\lambda_1^{\text{mod}}(h), \hbar^{3-4\eta}} \left((\zeta - (p_h^{\text{mod}})^W)^{-1} - (\zeta - \lambda_1^{\text{mod}}(h))^{-1} \right) d\zeta.$$

But, we have

$$(\zeta - (p_h^{\text{mod}})^W)^{-1} - (\zeta - \lambda_1^{\text{mod}}(h))^{-1} = (\zeta - \lambda_1^{\text{mod}}(h))^{-1} (\zeta - (p_h^{\text{mod}})^W)^{-1} \left((p_h^{\text{mod}})^W - \lambda_1^{\text{mod}}(h) \right),$$

so that, by using the resolvent estimate (3.36), we get

$$\|\Pi\varphi - \varphi\| \leq C \hbar^{3-4\eta} \hbar^{-3+4\eta} \hbar^{-3+4\eta} \hbar^{3-3\eta} \|\varphi\| = C \hbar^\eta \|\varphi\|.$$

This shows that the range of Π is of dimension at least two as soon as \hbar is small enough. This is a contradiction. Therefore, we must have $\mu_2(\hbar) \in D\left(3\frac{d_0}{2} + d_1, C\hbar^{1-3\eta}\right)$. In particular, we have

$$\mu_2(\hbar) = 3\frac{d_0}{2} + d_1 + \mathcal{O}(\hbar^{1-3\eta}), \quad \lambda_2(\mathcal{N}_\hbar^\sharp) = \lambda_2^{\text{mod}}(h) + \mathcal{O}(\hbar^{3-3\eta}).$$

We proceed by induction to get that, for all $n \geq 1$,

$$\mu_n(\hbar) = (2n-1)\frac{d_0}{2} + d_1 + \mathcal{O}(\hbar^{1-3\eta}), \quad \lambda_n(\mathcal{N}_\hbar^\sharp) = \lambda_n^{\text{mod}}(h) + \mathcal{O}(\hbar^{3-3\eta}). \quad (3.40)$$

End of the proof of Theorem 3.1.4

Proposition 3.2.11 shows that the first eigenvalues of \mathcal{L}_\hbar coincide with those of $\mathcal{L}_\hbar^{\text{app}}$ modulo $o(\hbar^2)$. Then, by (3.17), $\mathcal{L}_\hbar^{\text{app}}$ is unitarily equivalent to \mathcal{N}_\hbar . The operator \mathcal{N}_\hbar is unitarily equivalent to $\hbar\mathcal{N}_\hbar^\sharp$, see (3.25). Theorem 3.1.4 follows from (3.40) and (3.35) (see also Remark 3.5.1 for the explicit formula for d_0).

Acknowledgments

This work was conducted within the France 2030 framework programme, Centre Henri Lebesgue ANR-11-LABX-0020-01.

PERSPECTIVES

Les problématiques liées à l'étude de l'effet tunnel magnétique sont nombreuses, et font l'objet d'une attention soutenue de la communauté ces dernières années. Parmi d'autres problèmes, voici deux exemples qu'il serait intéressant d'aborder dans la continuation du travail présenté dans ce manuscrit.

I- Effet tunnel dans le cas d'une symétrie par rapport à l'origine de \mathbb{R}^2

Rappelons qu'au chapitre 2, nous avons obtenu (sous l'hypothèse 1.5.1) une approximation explicite (exponentiellement petite et en terme de h) de la différence entre les deux petites valeurs propres de l'opérateur \mathcal{L}_h . Mais comme nous l'avons dit dans la remarque 1.5.3, le Théorème 1.5.2 a deux situations. Dans le cas où le champ magnétique est symétrique par rapport à l'axe x_1 , c'est-à-dire

$$\mathbf{B}(x_1, x_2) = \mathbf{B}(x_1, -x_2) \quad \text{pour tout} \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

on a

$$S_u = S_d := S.$$

Dans ce cas, pour h suffisamment petit et sous l'hypothèse 1.5.1, la différence entre les deux premières valeurs propres de \mathcal{L}_h est donnée par

$$\lambda_2(h) - \lambda_1(h) = Ch^{\frac{2k+3}{k+2}} e^{-\frac{S}{h^{1/(k+2)}}} |\cos(f(h))| + \mathcal{O}\left(h^2 e^{-\frac{S}{h^{1/(k+2)}}}\right), \quad (3.41)$$

où C est une constante non nulle indépendante de h et $f(h)$ a été défini dans le Théorème 1.5.2. Alors, pour certaines valeurs de h , le terme principal de (3.41) est nul et l'écart spectral est d'ordre $\mathcal{O}\left(h^2 e^{-\frac{S}{h^{1/(k+2)}}}\right)$. Cette situation ouvre un problème concernant la multiplicité de la plus petite valeur propre de \mathcal{L}_h . Lorsque le terme principal de (3.41) est nul, est-ce que $\lambda_1(h) = \lambda_2(h)$? Si ce n'est pas le cas, quelle est l'approximation explicite de leur différence?

II- Effet tunnel avec champ magnétique variable dans un domaine borné de \mathbb{R}^3

Rappelons qu'au chapitre 3, nous avons considéré le Laplacien magnétique

$$\begin{cases} \mathcal{L}_h = (-ih\nabla + \mathbf{A})^2, \\ \text{Dom}(\mathcal{L}_h) = \{\psi \in L^2(\Omega) : \mathcal{L}_h\psi \in L^2(\Omega) \text{ et } \mathbf{n} \cdot (-ih\nabla + \mathbf{A})\psi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}, \end{cases}$$

où $h > 0$, \mathbf{n} est la normale à la frontière orientée vers l'extérieur et Ω un ouvert, borné et régulier de \mathbb{R}^3 . Nous avons supposé que le champ magnétique $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ne s'annule pas sur $\bar{\Omega}$, et nous avons défini la fonction β sur $\partial\Omega$ par

$$\beta(x) = \|\mathbf{B}(x)\| \mathbf{e}(\theta(x)),$$

où $\mathbf{e}(\theta)$ est définie dans (1.11) et $\theta(x)$ dans (1.26).

Sous l'hypothèse 1.5.10, c'est-à-dire que la fonction β a un minimum unique atteint en $x_0 \in \partial\Omega$, la proposition 3.6 établit les estimations d'Agmon non optimales. Ces estimations montrent la localisation des fonctions propres, associés aux petites valeurs propres de \mathcal{L}_h , dans un voisinage de x_0 à l'échelle $h^{\frac{1}{8}}$. Il est possible de se demander quelles sont les estimations d'Agmon optimales au voisinage de x_0 , ce qui nous permet de poser le problème de l'effet tunnel dans le cas où :

— le domaine Ω est symétrique par rapport au plan

$$\mathcal{P} = \{(x_1, 0, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2\};$$

— la fonction β a deux minima non dégénérés symétrique par rapport au plan \mathcal{P} .

THÉORIE SPECTRALE D'UN OPÉRATEUR AUTO-ADJOINT

On désigne par $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert et P un opérateur non-borné et auto-adjoint définie sur son domaine $\text{Dom}(P) \subset H$.

Définition A.0.1. *On appelle $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $(P, \text{Dom}(P))$ s'il existe $u \in \text{Dom}(P)$, non-nul, tel que $Pu = \lambda u$. La multiplicité géométrique de λ est la dimension de $\text{Ker}(P - \lambda)$.*

Définition A.0.2. 1. *La résolvante de $(P, \text{Dom}(P))$, notée par $\rho(P)$, est définie par*

$$\rho(P) = \{\lambda \in \mathbb{C} : P - \lambda \text{ est bijective de } \text{Dom}(P) \text{ sur } H\}.$$

2. *Le spectre de $(P, \text{Dom}(P))$, noté par $\text{sp}(P)$, est définie par*

$$\text{sp}(P) = \mathbb{C} \setminus \rho(P).$$

3. *Le spectre discret de $(P, \text{Dom}(P))$, noté par $\text{sp}_{\text{dis}}(P)$, est définie par*

$$\text{sp}_{\text{dis}}(P) = \{\lambda \in \text{sp}(P) : \lambda \text{ est une valeur propre isolée de multiplicité finie}\}.$$

4. *Le spectre essentiel de $(P, \text{Dom}(P))$, noté par $\text{sp}_{\text{ess}}(P)$, est définie par*

$$\text{sp}_{\text{ess}}(P) = \text{sp}(P) \setminus \text{sp}_{\text{dis}}(P).$$

Théorème A.0.3 (Théorème spectrale). *Pour tout $z \in \rho(P)$, on a*

$$\|(P - z)^{-1}\| \leq \frac{1}{\text{dist}(z, \text{sp}(P))}.$$

En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et pour tout $\psi \in \text{Dom}(P)$, on a

$$\text{dist}(\lambda, \text{sp}(P)) \|\psi\| \leq \| (P - \lambda) \psi \|.$$

Théorème A.0.4 (Principe de min-max). *On suppose que $(P, \text{Dom}(P))$ est borné inférieurement. Les quotients de Rayleigh associés à l'opérateur P sont définis, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par*

$$\lambda_n(P) = \sup_{\psi_1, \dots, \psi_{n-1}} \inf_{\substack{u \in \text{vect}\{\psi_1, \dots, \psi_{n-1}\}^\perp \\ u \in \text{Dom}(P) \setminus \{0\}}} \frac{\langle Pu, u \rangle_{\mathbb{H}}}{\|u\|_{\mathbb{H}}^2}.$$

On a une des deux propriétés suivantes :

1. $\lambda_n(P)$ est la n -ième valeur propre de P (compté avec multiplicité), et P n'a que de spectre discret dans $] -\infty, \lambda_n(P)]$.
2. $\lambda_n(P)$ est le bas du spectre essentiel de P , et $\lambda_j(P) = \lambda_n(P)$ pour tout $j \geq n$.

OPÉRATEURS PSEUDODIFFÉRENTIELS

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et on note par $X = (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2d}$. On rappelle que l'espace de Schwartz, noté $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, est l'espace des fonctions régulières $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ telles que

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial_x^\beta u(x)| < +\infty.$$

B.1 Opérateurs pseudodifférentiels à symbole scalaire

Définition B.1.1. On dit que $m : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction d'ordre si elle vérifie que

$$\exists C, N > 0, \forall X, Y \in \mathbb{R}^{2d}, m(X) \leq C \langle X - Y \rangle^N m(Y),$$

avec la notation $\langle X \rangle = \sqrt{1 + |X|^2}$.

Définition B.1.2. Soit m une fonction d'ordre. On définit la classe de symbole, $S_{\mathbb{R}^{2d}}(m)$, par

$$S_{\mathbb{R}^{2d}}(m) := \left\{ a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2d}; \mathbb{C}) : \forall \alpha \in \mathbb{N}^{2d}, \exists C_\alpha > 0, \forall X \in \mathbb{R}^{2d}, |\partial^\alpha a(X)| \leq C_\alpha m(X) \right\}.$$

Définition B.1.3. Soit m une fonction d'ordre sur \mathbb{R}^{2d} et $a \in S_{\mathbb{R}^{2d}}(m)$. La quantification de Weyl de a est l'opérateur $\text{Op}_h^W a : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ donné par la formule

$$\text{Op}_h^W u(x) := \frac{1}{(2\pi h)^d} \int \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{\frac{i}{h}(x-y) \cdot \xi} p\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi.$$

Les résultats suivants sont classiques et se trouvent par exemple dans le livre [81].

Théorème B.1.4 (Composition). Soient m_1 et m_2 deux fonctions d'ordre sur \mathbb{R}^{2d} , et $a_1 \in S_{\mathbb{R}^{2d}}(m_1)$, $a_2 \in S_{\mathbb{R}^{2d}}(m_2)$. Alors,

$$\text{Op}_h^W(a_1) \circ \text{Op}_h^W(a_2) = \text{Op}_h^W(r),$$

où $r \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}^{2d}}(m_1 m_2)$. De plus, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a le développement suivant :

$$r(x, \xi) = \sum_{k=0}^N \left(\frac{h}{2i} \sum_{j=1}^d (\partial_{\xi_j} \partial_{y_j} - \partial_{x_j} \partial_{\eta_j}) \right)^k a_1(x, \xi) a_2(y, \eta)_{(x, \xi) = (y, \eta)} + \mathcal{O}(h^{N+1}).$$

Théorème B.1.5 (Inégalité de Gårding). Soit $a \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}^{2d}}(1)$ tel que $a \geq 0$. Alors, il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle \text{Op}_h^W(a)u, u \rangle \geq -Ch\|u\|^2.$$

B.2 Opérateurs pseudodifférentiels à symbole opérateur

Définition B.2.1. On dit que $(\mathcal{A}_X)_{X \in \mathbb{R}^{2d}}$ est une famille ordonnée d'espaces de Hilbert si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $(\mathcal{A}_X)_{X \in \mathbb{R}^{2d}}$ est une famille d'espaces de Hilbert séparables,
2. pour tout $X \in \mathbb{R}^{2d}$, $\mathcal{A}_X = \mathcal{A}_0$ ($:= \mathcal{A}$) au sens d'espace vectoriel,
3. il existe $C, N > 0$ tels que, pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^{2d}$, $a \in \mathcal{A}$,

$$\|a\|_{\mathcal{A}_X} \leq C \langle X - Y \rangle^N \|a\|_{\mathcal{A}_Y}.$$

Définition B.2.2. Soit $(\mathcal{A}_X)_{X \in \mathbb{R}^{2d}}$ et $(\mathcal{B}_X)_{X \in \mathbb{R}^{2d}}$ deux familles ordonnées d'espaces de Hilbert. On définit la classe de symbole à valeurs opérateurs, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d}; \mathcal{L}(\mathcal{A}_X, \mathcal{B}_X))$, par

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d}; \mathcal{L}(\mathcal{A}_X, \mathcal{B}_X)) := \left\{ p \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2d}; \mathcal{L}(\mathcal{A}_X, \mathcal{B}_X)) : \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, \exists C_\alpha > 0, \text{ tel que } \|\partial^\alpha p\|_{\mathcal{L}(\mathcal{A}_X, \mathcal{B}_X)} \leq C_\alpha \right\},$$

où $\mathcal{L}(\mathcal{A}_X, \mathcal{B}_X)$ désigne l'ensemble des opérateurs bornés de $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_X})$ vers $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}_X})$. De plus, si les familles de normes sur \mathcal{A} et \mathcal{B} sont constantes, on notera $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d}; \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{B}))$.

Définition B.2.3. La quantification de Weyl de $p \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d}; \mathcal{L}(\mathcal{A}_X, \mathcal{B}_X))$ est l'opérateur, agissant sur $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d; \mathcal{A})$ donné par la formule

$$\text{Op}_h^W(p)u(x) := \frac{1}{(2\pi h)^d} \int \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{\frac{i}{h}(x-y) \cdot \xi} p\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi.$$

De plus, on note parfois

$$\text{Op}_h^W(p) = p^W(x, hD).$$

Les résultats suivants se trouvent dans [65], où les démonstrations sont détaillées.

Théorème B.2.4 (Composition). Soient $p \in S(\mathbb{R}^{2d}; \mathcal{L}(\mathcal{B}_X, \mathcal{C}_X))$ et $q \in S(\mathbb{R}^{2d}; \mathcal{L}(\mathcal{A}_X, \mathcal{B}_X))$.

Alors,

$$\text{Op}_h^W(p) \circ \text{Op}_h^W(q) = \text{Op}_h^W(r),$$

où $r \in S(\mathbb{R}^{2d}; \mathcal{L}(\mathcal{A}_X, \mathcal{C}_X))$. De plus, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a le développement suivant

$$r(X) = \sum_{k=0}^N \left(\frac{h}{2i} \sum_{j=1}^d (\partial_{\xi_j} \partial_{y_j} - \partial_{x_j} \partial_{\eta_j}) \right)^k p(x, \xi) q(y, \eta)_{(x, \xi) = (y, \eta)} + h^{N+1} r_{N+1},$$

où $r_{N+1} \in S(\mathbb{R}^{2d}; \mathcal{L}(\mathcal{A}_X, \mathcal{C}_X))$. En particulier

$$r = p \circ q + \frac{h}{2i} \{p, q\} + \frac{h^2}{8} (\{\partial_x p, \partial_\xi q\} - \{\partial_\xi p, \partial_x q\}) + h^3 r_3.$$

Corollaire B.2.5. Supposons que $\mathcal{C} = \mathcal{A}$ s'injecte de manière continue dans \mathcal{B} . Soient $p \in S(\mathbb{R}^{2d}; \mathcal{L}(\mathcal{B}_X, \mathcal{A}_X))$ et $q \in S(\mathbb{R}^{2d}; \mathcal{L}(\mathcal{A}_X, \mathcal{B}_X))$, alors

$$[\text{Op}_h^W(p), \text{Op}_h^W(q)] = \text{Op}_h^W([p, q]) + \frac{h}{2i} \text{Op}_h^W(\{p, q\} - \{q, p\}) + h^2 \text{Op}_h^W(r),$$

où $r \in S(\mathbb{R}^{2d}; \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{B}))$.

Théorème B.2.6 (Calderón-Vaillancourt). Si $p \in S(\mathbb{R}^{2d}; \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{B}))$ alors

$$\text{Op}_h^W(p) : L^2(\mathbb{R}^d, \mathcal{A}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d, \mathcal{B})$$

est uniformément borné pour $h \in (0, h_0)$. Plus précisément, il existe $C, M > 0$ tels que

$$\|\text{Op}_h^W(p)\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C \sum_{|\alpha| \leq Md} h^{\frac{|\alpha|}{2}} \sup_{X \in \mathbb{R}^{2d}} \|\partial^\alpha p(X)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{B})}.$$

Théorème B.2.7 (Inégalité de Gårding). Supposons que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Soit $p \in S(\mathbb{R}^{2d}; \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{B}))$ tel que

$$\forall X \in \mathbb{R}^{2d}, \forall a \in \mathcal{A}, \langle p(X) a, a \rangle_{\mathcal{B}} \geq 0.$$

Alors il existe $C > 0$ tel que, pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^d; \mathcal{A})$,

$$\langle \text{Op}_h^W(p)u, u \rangle_{L^2(\mathcal{B})} \geq -Ch \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d; \mathcal{A})} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d; \mathcal{B})}.$$

CONCLUSION

Cette thèse concerne l'étude spectrale très fine de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique. Il s'agit d'un opérateur dont l'étude est complexe, car il est intrinsèquement dégénéré. Depuis des travaux fondateurs de Helffer, Morame, Sjöstrand ou Martinez dans les années 90, ceux de Helffer-Kordyukov puis de Bonnaillie-Noël, Helffer, Fourmais, Raymond et Hérau dans les années 2005-2015, de gros progrès sont faits dans la compréhension du bas du spectre dans plusieurs géométries (avec bord, en dimensions 2 et 3, dans un cadre théorique ou numérique). Plus précisément, cette thèse est consacrée à l'étude spectrale de l'opérateur de Schrödinger avec un champ purement magnétique et variable dans la limite semi-classique.

Dans la première partie, nous travaillons en dimension 2 avec annulation du champ magnétique sur une courbe fermée. Sous des hypothèses génériques et symétriques sur la variation du champ, nous établissons une estimation, exponentiellement petite, de la différence entre les deux premières valeurs propres, caractéristique de l'effet tunnel le long de la courbe d'annulation du champ magnétique. La localisation au voisinage de la courbe d'annulation nous ramène à un modèle droit, et nous essayons de comprendre ce qui se passe avec un seul puits pour ce modèle. Nous conjuguons ensuite par une exponentielle et réduisons la dimension par Grushin, ce qui ouvre finalement la voie à l'analyse d'une matrice d'interaction (cas d'un double puits) dont les valeurs propres mesurent l'effet tunnel.

La deuxième partie est consacré à l'analyse spectrale semi-classique du Laplacien magnétique de Neumann sur un domaine régulier et borné en dimension 3. Sous une hypothèse générique sur le champ magnétique variable (impliquant une localisation des fonctions propres près de la frontière), nous établissons un développement semi-classique complet des valeurs propres les plus basses.

Bibliographie

- [1] Shmuel AGMON, *Lectures on Exponential Decay of Solutions of Second-Order Elliptic Equations : Bounds on Eigenfunctions of N-Body Schrodinger Operations.* (MN-29), t. 29, Princeton University Press, 2014.
- [2] Khaled Abou ALFA, « Tunneling effect in two dimensions with vanishing magnetic fields », in : *arXiv preprint arXiv :2212.04289* (2022).
- [3] Khaled Abou ALFA et al., « Spectral asymptotics of the Neumann Laplacian with variable magnetic field on a smooth bounded domain in three dimensions », in : *arXiv preprint arXiv :2306.17446* (2023).
- [4] François ALOUGES et Virginie BONNAILLIE-NOËL, « Numerical computations of fundamental eigenstates for the Schrödinger operator under constant magnetic field », in : *Numerical Methods for Partial Differential Equations : An International Journal* 22.5 (2006), p. 1090-1105.
- [5] Patricia BAUMAN, Daniel PHILLIPS et Q TANG, « Stable nucleation for the Ginzburg-Landau system with an applied magnetic field », in : *Archive for rational mechanics and analysis* 142.1 (1998), p. 1-43.
- [6] Andrew BERNOFF et Peter STERNBERG, « Onset of superconductivity in decreasing fields for general domains », in : *Journal of Mathematical Physics* 39.3 (1998), p. 1272-1284.
- [7] Virginie BONNAILLIE, « On the fundamental state energy for a Schrödinger operator with magnetic field in domains with corners », in : *Asymptotic Analysis* 41.3-4 (2005), p. 215-258.
- [8] Virginie BONNAILLIE, « On the fundamental state for a Schrödinger operator with magnetic field in a domain with corners », in : *Comptes rendus. Mathématique* 336.2 (2003), p. 135-140.
- [9] Virginie BONNAILLIE-NOËL et Monique DAUGE, « Asymptotics for the low-lying eigenstates of the Schrödinger operator with magnetic field near corners », in : *Annales Henri Poincaré*, t. 7, 5, Springer, 2006, p. 899-931.
- [10] Virginie BONNAILLIE-NOËL, F HÉRAU et N RAYMOND, « Magnetic WKB constructions », in : *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 221.2 (2016), p. 817-891.

-
- [11] Virginie BONNAILLIE-NOËL, Frédéric HÉRAU et Nicolas RAYMOND, « Curvature induced magnetic bound states : towards the tunneling effect for the ellipse », in : *Journées équations aux dérivées partielles* (2016), p. 1-14.
- [12] Virginie BONNAILLIE-NOËL, Frédéric HÉRAU et Nicolas RAYMOND, « Holomorphic extension of the de Gennes function », in : *Annales Mathématiques Blaise Pascal*, t. 24, 2017, p. 225-234.
- [13] Virginie BONNAILLIE-NOËL, Frédéric HÉRAU et Nicolas RAYMOND, « Holomorphic extension of the de Gennes function », in : *Annales Mathématiques Blaise Pascal*, t. 24, 2, 2017, p. 225-234.
- [14] Virginie BONNAILLIE-NOËL, Frédéric HÉRAU et Nicolas RAYMOND, « Purely magnetic tunneling effect in two dimensions », in : *Inventiones mathematicae* 227.2 (2022), p. 745-793.
- [15] Virginie BONNAILLIE-NOËL, Frédéric HÉRAU et Nicolas RAYMOND, « Purely magnetic tunneling effect in two dimensions », in : *Invent. Math.* 227.2 (2022), p. 745-793, ISSN : 0020-9910, DOI : 10.1007/s00222-021-01073-x, URL : <https://doi.org/10.1007/s00222-021-01073-x>.
- [16] Virginie BONNAILLIE-NOËL, Frédéric HÉRAU et Nicolas RAYMOND, « Semiclassical tunneling and magnetic flux effects on the circle », in : *Journal of Spectral Theory* 7.3 (2017), p. 771-796.
- [17] VIRGINIE BONNAILLIE-NOËL et FRÉDÉRIC HÉRAU ET NICOLAS RAYMOND, « EFFET TUNNEL MAGNÉTIQUE », in : () .
- [18] Jean-Michel BONY, « Sur l'inégalité de Fefferman-Phong », in : *Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) dit aussi " Séminaire Goulaouic-Schwartz "* (1998), p. 1-14.
- [19] Jean-Michel BONY, « Sur l'inégalité de Fefferman-Phong », in : *Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) dit aussi " Séminaire Goulaouic-Schwartz "* (1998), p. 1-14.
- [20] M. BORN et R. OPPENHEIMER, « Zur Quantentheorie der Molekeln », in : *Annalen der Physik* 389.20 (1927), p. 457-484, DOI : <https://doi.org/10.1002/andp.19273892002>, eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/andp.19273892002>, URL : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.19273892002>.

-
- [21] L BRILLOUIN, « Recommend this article », in : *J. Phys. Radium* 7.12 (1926), p. 353-368.
- [22] Jacques CHAZARAIN, « Spectre d'un hamiltonien quantique et mécanique classique », in : *Communications in Partial Differential Equations* 5.6 (1980), p. 595-644.
- [23] Claude COHEN-TANNOUDJI, Bernard DIU et Franck LALOË, « Mécanique quantique-Tome III », in : *Mécanique quantique-Tome III*, EDP sciences, 2000.
- [24] Hans L CYCON et al., *Schrödinger operators : With application to quantum mechanics and global geometry*, Springer, 2009.
- [25] Monique DAUGE et Bernard HELFFER, « Eigenvalues Variation. I. : Neumann Problem for Sturm-Liouville Operators », in : *Journal of Differential Equations* 104.2 (1993), p. 243-262.
- [26] Manuel DEL PINO, Patricio L FELMER et Peter STERNBERG, « Boundary concentration for eigenvalue problems related to the onset of superconductivity », in : *Communications in Mathematical Physics* 210.2 (2000), p. 413-446.
- [27] Mouez DIMASSI et Johannes SJOSTRAND, *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*, 268, Cambridge university press, 1999.
- [28] Nicolas DOMBROWSKI et Nicolas RAYMOND, « Semiclassical analysis with vanishing magnetic fields », in : *Journal of Spectral Theory* 3.3 (2013), p. 423-464.
- [29] Pavel EXNER, Alexander MINAKOV et Leonid PARNOVSKI, « Asymptotic eigenvalue estimates for a Robin problem with a large parameter », in : *Portugaliae Mathematica* 71.2 (2014), p. 141-156.
- [30] Rayan FAHS et al., « Edge states for the Robin magnetic Laplacian », 2022.
- [31] RP FEYNMAN et AR Hibbs Quantum MECHANICS, « Path integrals », in : *Quantum Mechanics. Addison* (1965).
- [32] Soeren FOURNAIS et Bernard HELFFER, « Accurate eigenvalue asymptotics for the magnetic Neumann Laplacian », in : *Annales de l'institut Fourier*, t. 56, 1, 2006, p. 1-67.
- [33] Soren FOURNAIS et Bernard HELFFER, *Spectral methods in surface superconductivity*, t. 77, Springer Science & Business Media, 2010.

-
- [34] Søren FOURNAIS et Bernard HELFFER, *Spectral methods in surface superconductivity*, t. 77, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2010, p. xx+324, ISBN : 978-0-8176-4796-4.
- [35] Soren FOURNAIS, Bernard HELFFER et Ayman KACHMAR, « Tunneling effect induced by a curved magnetic edge », in : *arXiv preprint arXiv :2201.13423* (2022).
- [37] Vitaly L GINZBURG, Vitaly Lazarevich GINZBURG et LD LANDAU, *On the theory of superconductivity*, Springer, 2009.
- [38] Tiziana GIORGI et Daniel PHILLIPS, « The breakdown of superconductivity due to strong fields for the Ginzburg–Landau model », in : *Siam Review* 44.2 (2002), p. 237-256.
- [39] Evans M HARRELL, « Double wells », in : *Communications in Mathematical Physics* 75 (1980), p. 239-261.
- [40] B HELFFER et J SJÖSTRAND, « Effet tunnel pour l'équation de Schrödinger avec champ magnétique », in : *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze* 14.4 (1987), p. 625-657.
- [41] Bernard HELFFER, *Semi-classical analysis for the Schrödinger operator and applications*, t. 1336, Springer, 2006.
- [42] Bernard HELFFER et Ayman KACHMAR, « Eigenvalues for the Robin Laplacian in domains with variable curvature », in : *Transactions of the American Mathematical Society* 369.5 (2017), p. 3253-3287.
- [43] Bernard HELFFER et Ayman KACHMAR, « Helical magnetic fields and semi-classical asymptotics of the lowest eigenvalue », in : <https://arxiv.org/abs/2204.09880> ().
- [44] Bernard HELFFER, Ayman KACHMAR et Nicolas RAYMOND, « Tunneling for the Robin Laplacian in smooth planar domains », in : *Communications in Contemporary Mathematics* 19.01 (2017), p. 1650030.
- [45] Bernard HELFFER, Ayman KACHMAR et Nicolas RAYMOND, « Tunneling for the Robin Laplacian in smooth planar domains », in : *Communications in Contemporary Mathematics* 19.01 (2017), p. 1650030.
- [46] Bernard HELFFER et Yuri A KORDYUKOV, « Spectral gaps for periodic Schrödinger operators with hypersurface magnetic wells : analysis near the bottom », in : *Journal of Functional Analysis* 257.10 (2009), p. 3043-3081.

-
- [47] Bernard HELFFER et Abderemane MOHAMED, « Caractérisation du spectre essentiel de l'opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique », in : *Annales de l'institut Fourier*, t. 38, 2, 1988, p. 95-112.
- [48] Bernard HELFFER et Abderemane MOHAMED, « Semiclassical analysis for the ground state energy of a Schrödinger operator with magnetic wells », in : *Journal of Functional Analysis* 138.1 (1996), p. 40-81.
- [49] Bernard HELFFER et Abderemane MORAME, « Magnetic bottles for the Neumann problem : curvature effects in the case of dimension 3 (general case) », in : *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 37.1 (2004), p. 105-170, ISSN : 0012-9593, DOI : 10.1016/j.ansens.2003.04.003, URL : <https://doi.org/10.1016/j.ansens.2003.04.003>.
- [50] Bernard HELFFER et Abderemane MORAME, « Magnetic bottles for the Neumann problem : the case of dimension 3 », in : t. 112, 1, Spectral and inverse spectral theory (Goa, 2000), 2002, p. 71-84, DOI : 10.1007/BF02829641, URL : <https://doi.org/10.1007/BF02829641>.
- [51] Bernard HELFFER et Abderemane MORAME, « Magnetic bottles in connection with superconductivity », in : *Journal of Functional Analysis* 185.2 (2001), p. 604-680.
- [52] Bernard HELFFER et Xing-Bin PAN, « Upper critical field and location of surface nucleation of superconductivity », in : *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, t. 20, Elsevier, 2003, p. 145-181.
- [53] Bernard HELFFER et Mikael PERSSON, « Spectral properties of higher order anharmonic oscillators », in : *Journal of Mathematical Sciences* 165.1 (2010), p. 110-126.
- [54] Bernard HELFFER et Mikael PERSSON, « Spectral properties of higher order anharmonic oscillators », in : *Journal of Mathematical Sciences* 165.1 (2010), p. 110-126.
- [55] Bernard HELFFER et Didier ROBERT, « Puits de potentiel généralisés et asymptotique semi-classique », in : *Annales de l'IHP Physique théorique*, t. 41, 3, 1984, p. 291-331.
- [56] Bernard HELFFER et Johannes SJOSTRAND, « Multiple wells in the semi-classical limit I », in : *Communications in Partial Differential Equations* 9.4 (1984), p. 337-408.

-
- [57] Bernard HELFFER et Johannes SJÖSTRAND, « Multiple Wells in the Semi-Classical Limit III-Interaction Through Non-Resonant Wells », in : *Mathematische Nachrichten* 124.1 (1985), p. 263-313.
- [58] Bernard HELFFER et Johannes SJÖSTRAND, « Puits multiples en limite semi-classique. II. Interaction moléculaire. Symétries. Perturbation », in : *Annales de l'IHP Physique théorique*, t. 42, 1985, p. 127-212.
- [59] Bernard HELFFER et Johannes SJÖSTRAND, « Puits multiples en mécanique semi-classique iv etude du complexe de witten », in : *Communications in partial differential equations* 10 (1985), p. 245-340.
- [60] Bernard HELFFER et al., « Magnetic wells in dimension three », in : *Anal. PDE* 9.7 (2016), p. 1575-1608, ISSN : 2157-5045, DOI : 10.2140/apde.2016.9.1575, URL : <https://doi.org/10.2140/apde.2016.9.1575>.
- [61] Frédéric HÉRAU et Nicolas RAYMOND, « Semiclassical spectral gaps for the 3D Neumann Laplacian with constant magnetic field », in : *To appear in Annales de l'Institut Fourier* ().
- [62] Peter D HISLOP et Israel Michael SIGAL, *Introduction to spectral theory : With applications to Schrödinger operators*, t. 113, Springer Science & Business Media, 2012.
- [63] Tosio KATO, *Perturbation theory for linear operators*, t. 132, Springer Science & Business Media, 2013.
- [64] Tosio KATO et Tosio KATO, « Analytic perturbation theory », in : *Perturbation theory for linear operators* (1966), p. 364-426.
- [65] Pierig KERAVAL, « Formules de Weyl par réduction de dimension : application à des Laplaciens électromagnétiques », thèse de doct., Rennes 1, 2018.
- [66] Pierig KERAVAL, « Formules de Weyl par réduction de dimension. Applications à des Laplaciens électro-magnétiques », thèse de doct., Université de Rennes 1, 2018.
- [67] M KLEIN, A MARTINEZ et XP WANG, « On the Born-Oppenheimer approximation of wave operators in molecular scattering theory », in : *Communications in mathematical physics* 152 (1993), p. 73-95.
- [68] Markus KLEIN et al., « On the Born-Oppenheimer expansion for polyatomic molecules », in : *Communications in mathematical physics* 143 (1992), p. 607-639.

-
- [69] Hendrik Anthony KRAMERS, « Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung », in : *Zeitschrift für Physik* 39.10-11 (1926), p. 828-840.
- [70] LD LANDAU et EM LIFSHITZ, « Quantum Mechanics, (Pergamon, Oxford », in : (1977).
- [71] Lev Davidovic LANDAU, Evgenij Mihajlovic LIFSIC et Edouard GLOUKHIAN, *Physique théorique : tome III : mécanique quantique : théorie non relativiste*, Mir, 1967.
- [72] Lev Davidovich LANDAU et Evgenii Mikhailovich LIFSHITZ, *Quantum mechanics : non-relativistic theory*, t. 3, Elsevier, 2013.
- [73] Jérémy LE DEUNFF, « Effet tunnel dans les systèmes complexes », thèse de doct., Université François Rabelais-Tours, 2011.
- [74] Michael LEVITIN et Leonid PARNOVSKI, « On the principal eigenvalue of a Robin problem with a large parameter », in : *Mathematische Nachrichten* 281.2 (2008), p. 272-281.
- [75] Kening LU et Xing-Bin PAN, « Eigenvalue problems of Ginzburg–Landau operator in bounded domains », in : *Journal of mathematical Physics* 40.6 (1999), p. 2647-2670.
- [76] Kening LU et Xing-Bin PAN, « Estimates of the upper critical field for the Ginzburg–Landau equations of superconductivity », in : *Physica D : Nonlinear Phenomena* 127.1-2 (1999), p. 73-104.
- [77] Kening LU et Xing-Bin PAN, « Surface nucleation of superconductivity in 3-dimensions », in : t. 168, 2, Special issue in celebration of Jack K. Hale’s 70th birthday, Part 2 (Atlanta, GA/Lisbon, 1998), 2000, p. 386-452, DOI : 10.1006/jdeq.2000.3892, URL : <https://doi.org/10.1006/jdeq.2000.3892>.
- [78] Andr MARTINEZ et Vania SORDONI, *Twisted pseudodifferential calculus and application to the quantum evolution of molecules*, American Mathematical Soc., 2009.
- [79] André MARTINEZ, « A general effective Hamiltonian method », in : *Rendiconti Lincei* 18.3 (2007), p. 269-277.
- [80] André MARTINEZ, *An introduction to semiclassical and microlocal analysis*, t. 994, Springer, 2002.

-
- [81] André MARTINEZ, *An introduction to semiclassical and microlocal analysis*, t. 994, Springer, 2002.
- [82] André MARTINEZ et Bekkai MESSIRDI, « Resonances of diatomic molecules in the Born-Oppenheimer approximation », in : *Communications in partial differential equations* 19.7-8 (1994), p. 1139-1162.
- [83] Hiroyuki MATSUMOTO, « Semiclassical asymptotics of eigenvalues for Schrödinger operators with magnetic fields », in : *Journal of Functional Analysis* 129.1 (1995), p. 168-190.
- [84] Richard MONTGOMERY, « Hearing the zero locus of a magnetic field », in : *Communications in mathematical physics* 168.3 (1995), p. 651-675.
- [85] Léo MORIN, Nicolas RAYMOND et San VÛ NGC, « Eigenvalue asymptotics for confining magnetic Schrödinger operators with complex potentials », in : *To appear in Int. Math. Res. Not.* ().
- [86] PH MÜLLER, « T. Kato, Perturbation theory for linear operators. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Band 132) XX+ 592 S. m. 3 Fig. Berlin/Heidelberg/New York Springer-Verlag. Preis geb. DM 79, 20 », in : *Zeitschrift Angewandte Mathematik und Mechanik* 47.8 (1967), p. 554-554.
- [87] Virginie Bonnaillie NOËL, « A posteriori error estimator for the eigenvalue problem associated to the Schrödinger operator with magnetic field », in : *Numerische Mathematik* 99 (2004), p. 325-348.
- [88] Konstantin PANKRASHKIN et Nicolas POPOFF, « An effective Hamiltonian for the eigenvalue asymptotics of the Robin Laplacian with a large parameter », in : *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 106.4 (2016), p. 615-650.
- [89] Arne PERSSON, « Bounds for the discrete part of the spectrum of a semi-bounded Schrödinger operator », in : *Mathematica Scandinavica* 8.1 (1960), p. 143-153.
- [90] Nicolas POPOFF et Nicolas RAYMOND, « When the 3D magnetic Laplacian meets a curved edge in the semiclassical limit », in : *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 45.4 (2013), p. 2354-2395.

-
- [91] Nicolas RAYMOND, *Bound states of the magnetic Schrödinger operator*, t. 27, EMS Tracts in Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2017, p. xiv+380, ISBN : 978-3-03719-169-9, DOI : 10.4171/169, URL : <https://doi.org/10.4171/169>.
- [92] Nicolas RAYMOND, « Méthodes spectrales et théorie des cristaux liquides », thèse de doct., Université Paris-Sud 11, 2009.
- [93] Nicolas RAYMOND, « On the semiclassical 3D Neumann Laplacian with variable magnetic field », in : *Asymptot. Anal.* 68.1-2 (2010), p. 1-40, ISSN : 0921-7134.
- [94] Nicolas RAYMOND, « Semiclassical 3D Neumann Laplacian with variable magnetic field : a toy model », in : *Comm. Partial Differential Equations* 37.9 (2012), p. 1528-1552, ISSN : 0360-5302, DOI : 10.1080/03605302.2012.680558, URL : <https://doi.org/10.1080/03605302.2012.680558>.
- [95] Nicolas RAYMOND, « Uniform spectral estimates for families of Schrödinger operators with magnetic field of constant intensity and applications », in : *Cubo* 12.1 (2010), p. 67-81, ISSN : 0716-7776, DOI : 10.4067/s0719-06462010000100007, URL : <https://doi.org/10.4067/s0719-06462010000100007>.
- [96] Michael REED et Barry SIMON, *IV : Analysis of Operators*, t. 4, Elsevier, 1978.
- [97] Didier ROBERT, « Analyse semi-classique de l'effet tunnel », in : *Astérisque* 5 (1987), p. 257-281.
- [98] Didier ROBERT et al., *Autour de l'approximation semi-classique*, t. 68, Birkhäuser, 1987.
- [99] Erwin SCHRÖDINGER, « An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules », in : *Physical review* 28.6 (1926), p. 1049.
- [100] Barry SIMON, « Semiclassical analysis of low lying eigenvalues, II. Tunneling », in : *Annals of Mathematics* (1984), p. 89-118.
- [101] Johannes SJÖSTRAND et Maciej ZWORSKI, « Elementary linear algebra for advanced spectral problems », in : t. 57, 7, Festival Yves Colin de Verdière, 2007, p. 2095-2141, URL : http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2007__57_7_2095_0.
- [102] Michael TINKHAM et Victor EMERY, *Introduction to superconductivity*, 1996.
- [103] Gregor WENTZEL, « Eine verallgemeinerung der quantenbedingungen für die zwecke der wellenmechanik », in : *Zeitschrift für Physik* 38.6-7 (1926), p. 518-529.

Titre : Effets tunnels magnétiques dans diverses géométries

Mot clés : Equation de Schrödinger ; Laplacien magnétique ; estimations d'Agmon ; équation eikonal ; opérateur pseudo-différentiel ; effet tunnel.

Résumé : Cette thèse est consacrée à l'étude spectrale de l'opérateur de Schrödinger avec un champ purement magnétique et variable dans la limite semi-classique. Dans la première partie, nous travaillons en dimension 2 avec annulation du champ magnétique sur une courbe fermée. Sous des hypothèses génériques et symétriques, nous établissons une estimation, exponentiellement petite en terme d'un paramètre semi-classique noté par h , de la différence entre les deux premières valeurs propres du Laplacien magnétique, caractéristique de l'effet tunnel le long de la courbe d'annulation. Dans la deuxième partie, nous travaillons en dimension 3 avec un champ ma-

gnétique variable dans un domaine ouvert, borné et régulier avec la condition de Neumann aux bord. Avec des hypothèses génériques, nous obtenons une asymptotique complète pour les petites valeurs propres du Laplacien magnétique. Dans les deux parties, il s'agit d'une méthode de réduction spectrale inspiré d'une stratégie de type Born-Oppenheimer et l'utilisation d'une méthode de réduction de type Grushin. Cette méthode nécessite l'utilisation du calcul pseudo-différentiel pour des symboles à valeur opérateur, et réduit le problème à l'étude d'un opérateur effectif de symbole scalaire.

Title: Magnetic tunneling effects in various geometries

Keywords: Schrödinger equation; magnetic Laplacian; Agmon estimates; eikonal equation; pseudo-differential operator; tunnel effect.

Abstract: This thesis is devoted to the spectral study of the Schrödinger operator with a purely magnetic and variable field in the semi-classical limit. In the first part, we work in 2 dimension with vanishing of the magnetic field on a closed curve. Under generic and symmetric assumptions, we derive an estimate, exponentially small in terms of a semi-classical parameter denoted by h , of the difference between the first two eigenvalues of the magnetic Laplacian, tunneling characteristic along the vanishing curve. In the second part, we work in dimension 3 with a variable

magnetic field in an open, bounded and regular domain with the Neumann condition at the boundary. Under generic assumptions, we obtain complete asymptotics for small eigenvalues of the magnetic Laplacian. Both parts involve a spectral reduction method inspired by a Born-Oppenheimer strategy and the use of a Grushin-type reduction method. This method requires the use of pseudo-differential calculus for operator-valued symbols, and reduces the problem to the study of an effective scalar symbol operator.