

Systèmes rapides-lents en mécanique vibratoire

Baptiste Bergeot

▶ **To cite this version:**

Baptiste Bergeot. Systèmes rapides-lents en mécanique vibratoire. Mécanique [physics]. Université de Tours, 2024. ⟨tel-04459911v2⟩

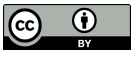
HAL Id: tel-04459911

https://hal.science/tel-04459911v2

Submitted on 29 Apr 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC BY 4.0 - Attribution - International License

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Discipline : **Mécanique**

Année universitaire : 2023/2024

Présentée et soutenue publiquement par :

Baptiste Bergeot

Le 7 février 2024

Systèmes rapides-lents en mécanique vibratoire

Application à l'étude du contrôle passif non linéaire de vibrations et des phénomènes transitoires dans les instruments de musique à anche

---

JURY :

M.	Sébastien Berger	Professeur des Universités	INSA Centre Val de Loire
M.	Nils Berglund	Professeur des Universités	Univ. Orléans
M.	Thomas Hélie	Directeur de Recherche	CNRS, IRCAM
M.	Claude-Henri Lamarque	Professeur ENTPE	ENTPE, Univ. Lyon
M.	Pierre-Oliver Mattei	Chargé de Recherche-HDR	CNRS, Univ. Aix-Marseille
M.	Stéphane Méo	Professeur des Universités	Univ. Tours
Mme	Emeline Sadoulet-Reboul	Maître de Conférences-HDR	Univ. Franche-Comté
M.	Christophe Vergez	Directeur de Recherche	CNRS, Univ. Aix-Marseille

À Anna-Laure,
Suzanne, Madeleine et Colette

À ma famille

Systèmes rapides-lents en mécanique vibratoire

Application à l'étude du contrôle passif non linéaire de vibrations et des phénomènes transitoires dans les instruments de musique à anche

Résumé

Le fil conducteur des travaux de recherche présentés dans ce mémoire est la mise en œuvre de méthodes analytiques et numériques permettant de décrire le comportement dynamique de systèmes mécaniques non linéaires, possédant plusieurs échelles de temps caractéristiques et pouvant être stochastiques. J'ai développé ces activités dans le cadre de deux thématiques en vibrations et en acoustique.

La première thématique concerne l'atténuation passive de vibrations à l'aide d'absorbeurs non linéaires de type NES (*Nonlinear Energy Sink*, traduction anglaise de « puits d'énergie non linéaire »). Dans ce contexte, je m'intéresse en particulier au contrôle d'oscillations auto-entretenues. Ces dernières se produisent en général dans des systèmes dynamiques dont la solution d'équilibre devient instable au profit d'une solution oscillante, en général périodique. L'amplitude de ces oscillations pouvant être très importante, il est souhaitable de pouvoir les atténuer. Les NES sont également des oscillateurs avec la particularité de posséder une raideur essentiellement non linéaire qui leur confère la capacité de résonner à n'importe quelle fréquence. Lorsqu'un NES est couplé à un oscillateur auto-entretenu, le système dynamique résultant possède un certain nombre de solutions dont certaines correspondent à des oscillations de faible amplitude. L'objectif est donc de comprendre comment favoriser ces solutions par rapport à d'autres où le NES est presque inopérant.

La seconde thématique porte sur l'étude des phénomènes transitoires dans les instruments de musique à anche simple de type clarinette ou saxophone. Ce travail se situe dans le contexte général de l'étude des stratégies suivies par les musiciens lors des phases transitoires : attaques de notes, transitions entre deux notes, transitoires d'extinction, etc. En particulier, cela vise à corréler les gestes (ou évolutions temporelles de paramètres de contrôle) aux résultats sonores. Dans ce contexte mon travail se focalise sur l'étude des transitoires d'attaque. Du point de vue des systèmes dynamiques cela nous conduit à étudier l'influence de la variation dans le temps des paramètres de bifurcation sur l'émergence d'une solution périodique mais également sur les bassins d'attraction en cas de multistabilité.

Bien qu'éloignées en termes d'application, il s'avère que les systèmes étudiés dans ces deux thématiques (le système mécanique auto-oscillant couplé à un NES d'une part et l'instrument en régime transitoire d'autre part) possèdent une caractéristique commune. En effet, ils sont tous les deux modélisés par des systèmes d'équations différentielles qui une fois adimensionnés font apparaitre un petit paramètre mettant en évidence leur nature rapide-lente. L'évolution dans le temps des variables d'état de tels systèmes rapides-lents se caractérise par une succession de phases rapides et de phases lentes. Cette nature commune permet également l'étude de ces systèmes dans un cadre mathématique commun. Au sein de la communauté des mécaniciens et des acousticiens, l'originalité de ma démarche réside surtout dans l'appropriation de résultats théoriques connus des mathématiciens sur les équations différentielles ordinaires singulièrement perturbées dans le but de comprendre les comportements complexes des systèmes mécaniques concrets considérés.

Pour chacune des thématiques mentionnées ci-dessus, mes contributions principales par rapport à l'état de l'art sont présentées ainsi que les perspectives que j'envisage à court et moyen terme.

Fast-slow systems in vibration mechanics

Application to the study of nonlinear passive vibration control and transient phenomena in reed musical instruments

Abstract

The common thread of the research work presented in this thesis is the implementation of analytical and numerical methods to describe the dynamic behavior of nonlinear mechanical systems, which have several characteristic time scales and may be stochastic. I have developed these activities within the framework of two research areas in vibration and acoustics.

The first area concerns the passive attenuation of vibrations using nonlinear absorbers known as NESs (Nonlinear Energy Sinks). In this context, I am particularly interested in the control of self-sustained oscillations. The latter generally occur in dynamical systems whose equilibrium solution becomes unstable in favor of an oscillating solution, usually periodic. As the amplitude of these oscillations can be very large, it is desirable to be able to attenuate them. NESs are also oscillators with the particularity of possessing an essentially nonlinear stiffness, which gives them the ability to resonate at any frequency. When an NES is coupled to a self-sustaining oscillator, the resulting dynamic system has a number of solutions, some of which correspond to low-amplitude oscillations. The aim is to understand how to favor these solutions over others where the NES is almost inoperative.

The second area concerns the study of transient phenomena in single-reed musical instruments such as clarinets and saxophones. This work is situated within the general context of the study of strategies followed by musicians during transient phases : note attacks, transitions between two notes, extinction transients, etc. In particular, it aims to correlate gestures (or time evolutions of control parameters) with sound results. In this context, my work focuses on the study of attack transients. From the point of view of dynamical systems, this leads me to study the influence of the time variation of bifurcation parameters on the emergence of a periodic solution, but also on the basins of attraction when multistability occurs.

Although far apart in terms of application, it turns out that the systems studied in these two research areas (the self-oscillating mechanical system coupled to a NES on the one hand, and the instrument during attack transients on the other) have a common feature. Both are modeled by systems of differential equations, which reveal a small parameter highlighting their fast-slow nature. The time evolution of state variables in such fast-slow systems is characterized by a succession of fast and slow epochs. This common nature also enables these systems to be studied within a common mathematical framework. Within the mechanics and acoustics community, the originality of my approach lies above all in the appropriation of theoretical results known to mathematicians on singularly perturbed ordinary differential equations with the aim of understanding the complex behaviors of the concrete mechanical systems under consideration.

For each of the above-mentioned areas of research, my main contributions to the state of the art are presented, together with the prospects I envisage for the short- and medium- terms.

Avant-propos

La rédaction de ce mémoire d'HDR est l'occasion pour moi de dresser un bilan de mes activités de recherche dix ans après ma soutenance de thèse. Il est divisé en trois parties. La Partie I expose justement une synthèse de ces activités de recherche. Elle contient deux chapitres principaux où mes travaux sur les systèmes dynamiques non linéaires rapides-lents sont décrits en fonction de l'application concernée : le Chapitre 1 concerne l'étude du contrôle passif non linéaire de vibrations et le Chapitre 2 celle des phénomènes transitoires dans les instruments de musique à anche. Le Chapitre 3 présente un travail de recherche périphérique sur le chaos polynomial résultant d'en encadrement de thèse. La Partie II fournit une sélection d'articles publiés, soumis pour publication ou en fin d'écriture et dont les résultats principaux sont présentés aux Chapitres 1 et 2. La majorité des travaux présentés correspond donc à des résultats publiés, ce qui peut expliquer les inhomogénéités de notations d'une section à l'autre. Enfin, en Partie III une notice personnelle est présentée.

Concernant les références bibliographiques, celles auxquelles j'ai participé en tant qu'auteur ou encadrant sont notées :

- [a1], [a2], ... pour les articles dans des revues internationales à comité de lecture ;
- [p1], [p2], ... pour les articles en cours de relecture ou en fin d'écriture ;
- [ci1], [ci2], ... pour les communications dans des congrès internationaux à comité de lecture ;
- [cn1], [cn2], ... pour les communications dans des congrès nationaux à comité de lecture ;
- [e1], [e2], ... pour les travaux encadrés (thèses ou stages de Master 2) ;
- [t1] pour ma thèse de doctorat.

Tous ces travaux sont listés dans la section Bibliographie personnelle de ce rapport (page 301). Les références restantes sont listées dans la section Bibliographie générale (page 317) et notées simplement [1], [2], ... dans le corps du texte. Dans chacune des bibliographies, les articles sont rangés par ordre alphabétique des noms des auteurs puis par dates croissantes et enfin si nécessaire par ordre alphabétique des titres.

Remerciements

J'adresse mes premiers remerciements à Thomas Hélie, Claude-Henri Lamarque et Pierre-Oliver Mattei pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant d'en être les rapporteurs. Je remercie également Evelyne Aubry, Sébastien Berger, Nils Berglund, Emeline Sadoulet-Reboul et Christophe Vergez d'avoir accepté de faire partie du jury et Stéphane Méo d'être mon référent d'HDR pour l'Université de Tours. Merci à tous de m'avoir fait l'honneur d'examiner ce travail.

La majorité des travaux présentés dans ce mémoire sont bien évidemment le fruit de collaborations scientifiques (et amicales). Je souhaite donc remercier particulièrement Christophe Vergez qui était déjà présent lors de ma soutenance de stage Master 2 au Mans puis co-directeur de ma thèse. Il a été un référent scientifique et ami pendant toute ma carrière et continue de l'être encore aujourd'hui, merci notamment pour les relectures et conseils pendant la rédaction de ce mémoire. Je remercie aussi Sergio Bellizzi avec qui j'ai énormément appris durant nos quelques années de collaboration. Je suis reconnaissant à Sébastien Berger de m'avoir permis d'encadrer mes premières thèses (notamment celle de Chérif Snoun pour laquelle j'ai pu proposer un sujet personnel). Il m'a aussi assuré une intégration rapide à l'INSA Centre Val de Loire tout en m'encourageant à développer mes propres activités de recherche. Je le remercie également pour les relectures et conseils pendant la rédaction de ce mémoire. Je tiens aussi à remercier Soizic Terrien, avec qui (et Christophe Vergez) nous avons créé un groupe de travail sur le thème : dynamique non linéaire et physique des instruments de musique. Je pense que cette collaboration sera encore longue et fructueuse. Je remercie enfin Nils Berglund de m'avoir donné l'opportunité d'encadrer une thèse sous sa direction durant laquelle, j'en suis sûr, la doctorante ne sera pas la seule à beaucoup apprendre.

Concernant la vie à l'INSA Centre Val de Loire, je remercie en particulier Sébastien Berger, Marie-Laure Gobert et Jean-Mathieu Mencik pour les studieux mais non pas moins chaleureux moments passés dans le bureau.

Table des matières

Résumé/Abstract v

Avant-propos/Remerciements vii

I Synthèse des travaux de recherche 1

Introduction 3

1 Contrôle passif non linéaire de vibrations auto-entretenues 5
- 1.1 Contexte . . . 5
- 1.2 Analyse rapide-lente d'un système auto-entretenu couplé à un ou plusieurs NES . . . 8
  - 1.2.1 Avant-propos et résultats préliminaires . . . 8
  - 1.2.2 Cas d'un système mécanique auto-entretenu connecté à un réseau de NES . . . 17
  - 1.2.3 Cas d'un système mécanique auto-entretenu à deux modes instables connecté à un NES . . . 22
  - 1.2.4 Cas d'un système mécanique auto-entretenu connecté à un NES bistable . . . 29
  - 1.2.5 Prédiction de la limite d'atténuation tenant compte de la valeur du paramètre de perturbation . . . 39
  - 1.2.6 Effet d'un forçage stochastique faible sur le phénomène de pompage énergétique 43
  - 1.2.7 Autres résultats . . . 49
- 1.3 Conception robuste de NES en présence d'incertitudes paramétriques . . . 50
  - 1.3.1 Contexte et problématique . . . 50
  - 1.3.2 Éléments de théorie du chaos polynomial . . . 50
  - 1.3.3 Prédiction de la propension à être dans un régime atténué par des méthodes basées sur le chaos polynomial . . . 51
  - 1.3.4 Optimisation de NES sous incertitudes . . . 52

2 Phénomènes transitoires dans les instruments de musique à anche 57
- 2.1 Contexte . . . 57
- 2.2 Bref état de l'art sur le modèle physique élémentaire d'un instrument à anche . . . 60
  - 2.2.1 L'excitateur . . . 60
  - 2.2.2 Le résonateur . . . 62
  - 2.2.3 Modèles adimensionnés d'un instrument à anche simple . . . 63
  - 2.2.4 Modèles simples utilisés . . . 65
- 2.3 Résultats préliminaires : analyse de stabilité statique du modèle à un mode . . . 67
  - 2.3.1 Analyse de stabilité locale : naissance des oscillations . . . 67
  - 2.3.2 Analyse de stabilité globale : compétition entre régimes . . . 71
- 2.4 Retard à la bifurcation . . . 72
  - 2.4.1 Synthèse des travaux de recherche publiés . . . 72
  - 2.4.2 Note sur la seconde définition du point de bifurcation dynamique . . . 78
- 2.5 Bassins d'attraction dynamiques . . . 80
  - 2.5.1 Introduction . . . 80
  - 2.5.2 Bassin d'attraction dynamique du modèle à un mode . . . 82
  - 2.5.3 Bassin d'attraction dynamique dans de la cas d'un « *rate-induced transitions* » 91

3 Travail de recherche périphérique sur le chaos polynomial **95**

4 Conclusion générale et perspectives **97**
4.1 Bilan des activités de recherche . . . 97
4.2 Perspectives à court et moyen terme . . . 97
4.2.1 Perspectives concernant le contrôle passif non linéaire de vibrations . . . 97
4.2.2 Perspectives concernant les phénomènes transitoires dans les instruments de musique à anche . . . 103

II Selection d'articles **109**

A Mech Syst Sig Process 131 (2019) **111**
A.1 Introduction . . . 111
A.2 The system under study . . . 112
A.2.1 The initial model . . . 112
A.2.2 Model reduction . . . 114
A.3 Asymptotic analysis . . . 115
A.3.1 The slow-flow . . . 116
A.3.2 The Critical Manifold . . . 117
A.3.3 Critical Manifold properties and stability . . . 118
A.3.4 The fixed points of the slow-flow . . . 121
A.3.5 Prediction of the steady-state regimes . . . 122
A.4 Applications . . . 123
A.4.1 Mode coupling instability mitigation in a friction system using two NESs . . . 124
A.4.2 Flutter mitigation in an airfoil system using M NESs . . . 126
A.5 Conclusion . . . 128
A.6 Appendix A. The nonlinear Hultèn's model with two NESs . . . 131
A.7 Appendix B. The airfoil-M-NESs model . . . 133

B Commun Nonlinear Sci Numer Simul 95 (2021) **135**
B.1 Introduction . . . 135
B.2 The system under study . . . 136
B.2.1 The mechanical model . . . 136
B.2.2 The reduced model . . . 138
B.3 Asymptotic analysis . . . 139
B.3.1 The complexification-averaging method and the slow-fast system . . . 139
B.3.2 The critical manifold . . . 141
B.3.3 Stability of critical manifold . . . 142
B.3.4 Fixed points of the slow-flow in C_0 . . . 143
B.3.5 Relaxation oscillations . . . 144
B.4 Numerical results . . . 146
B.4.1 Competition between two stable fixed points of the slow flow . . . 147
B.4.2 Competition between a sustained relaxation oscillation and a stable fixed point of the slow flow . . . 148
B.4.3 Competition between two kinds of sustained relaxation oscillations . . . 149
B.4.4 Bifurcation of a fixed point to a limit cycle of the slow subsystem . . . 151
B.5 Conclusion . . . 154
B.6 Appendix A. Coefficients of the slow-fow system (B.19) . . . 155

C Physica D (2024) 157
C.1 Introduction . . . 157
C.2 Equations and dynamic behavior of the model . . . 159
C.2.1 Equations of motion of a Van der Pol oscillator coupled to a BNES . . . 159
C.2.2 Response regimes of a Van der Pol oscillator coupled to a BNES . . . 160
C.3 Equations of the amplitude-phase modulation dynamics . . . 164
C.4 Fast-slow analysis of the amplitude-phase modulation dynamics . . . 166
C.4.1 The critical manifold . . . 166
C.4.2 Stability analysis of the critical manifold . . . 169
C.4.3 Asymptotic analytical expression of the fixed points of the amplitude-phase modulation dynamics . . . 172
C.5 Asymptotic global stability analysis of the amplitude-phase modulation dynamics . . . 173
C.6 Conclusion . . . 176
C.7 Appendix A. Approximate analytical solution of the Van der Pol oscillator . . . 179
C.8 Appendix B. Analytical expressions of some quantities that appear in Section C.4 . . . 180
C.9 Appendix C. Expression of the regular non normally hyperbolic fixed point of $\mathcal{M}_{02}$ . . . 182

D J Sound Vib 503 (2021) 185
D.1 Introduction . . . 185
D.2 Equations of the model . . . 187
D.2.1 The initial model . . . 187
D.2.2 Reduction of the dynamics . . . 187
D.3 Asymptotic analysis : the zeroth-order approximation of the slow flow . . . 189
D.3.1 Governing equations of the slow flow . . . 189
D.3.2 Critical manifold and fold points of the slow flow . . . 191
D.3.3 Fixed points and fold singularities of the slow flow . . . 192
D.3.4 The possible responses . . . 192
D.3.5 Zeroth-order analytical prediction of the mitigation limit . . . 193
D.4 Scaling law for the slow flow near a fold point . . . 194
D.4.1 Center manifold reduction of the slow flow at the left fold point . . . 194
D.4.2 Analytical solution for the normal form of the dynamic saddle-node bifurcation 196
D.4.3 New theoretical prediction of the mitigation limit . . . 197
D.5 Application to an aeroelastic aircraft wing system coupled to an NES . . . 198
D.5.1 Equations of the aircraft wing model coupled to one NES . . . 198
D.5.2 Comparison between theoretical results and numerical simulations . . . 200
D.6 Conclusion . . . 203

E Int J Non Linear Mech 150 (2023) 207
E.1 Introduction . . . 207
E.2 Equations of the model . . . 209
E.3 The stochastic slow flow dynamics . . . 210
E.4 Problem statement and preliminary results . . . 213
E.4.1 Reminder of the deterministic behavior of the system . . . 213
E.4.2 Influence of noise on the system behavior . . . 215
E.5 Probability of being in a harmless regime . . . 216
E.6 First-Passage Time to reach a harmful regime . . . 218
E.7 Conclusion . . . 220
E.8 Appendix A. Expressions of functions . . . 221
E.9 Appendix B. General formulation of the standard stochastic averaging method . . . 222
E.10 Appendix C. Elements of the classical deterministic analysis of the slow flow dynamics 222

F Eur J Mech A Solids 93 (2022) 225
F.1 Introduction . . . 225
F.2 The friction system under study . . . 226
F.2.1 The primary system . . . 227
F.2.2 Mechanical model with Nonlinear Energy Sinks . . . 227
F.3 Possible steady-state regimes . . . 228
F.4 Multi-Element Polynomial Chaos based algorithm to detect a discontinuity . . . 229
F.4.1 Elements of the Polynomial Chaos theory . . . 229
F.4.2 Detection of a discontinuity in the QoI with the ME-gPC . . . 230
F.5 Optimization strategy under uncertainties . . . 231
F.5.1 Deterministic design variables . . . 232
F.5.2 Stochastic design variables . . . 233
F.6 Results for deterministic design variables . . . 234
F.6.1 Optimization of the NES damping coefficient . . . 234
F.6.2 Optimization of the NES nonlinear stiffness . . . 236
F.7 Results for stochastic design variables . . . 239
F.7.1 Optimization of the NES damping coefficient . . . 239
F.7.2 Optimization of the NES nonlinear stiffness . . . 241
F.8 Conclusion . . . 243

G Nonlinear Dyn 107 (2022) 245
G.1 Introduction . . . 246
G.2 Single reed instrument model with a white noise forcing . . . 247
G.2.1 Deterministic model of single reed instrument and its static bifurcation point . 247
G.2.2 One-mode stochastic single-reed instrument model with a linearly increasing blowing pressure . . . 249
G.3 Equations governing the stochastic slow dynamics . . . 249
G.4 Analytical expression of the dynamic pitchfork bifurcation points of the averaged system 251
G.4.1 Solution of the linearized averaged system . . . 252
G.4.2 Dynamic bifurcation point in the deterministic case . . . 253
G.4.3 Dynamic bifurcation point in the stochastic case . . . 256
G.4.4 Domains of existence of the regimes . . . 258
G.4.5 Probability density function of the stochastic averaged amplitude . . . 259
G.5 Comparison between theoretical results and numerical simulation . . . 260
G.5.1 Comparison in term of the expected value of the squared amplitude . . . 260
G.5.2 Comparison in term of probability density function . . . 263
G.6 Discussion and conclusion . . . 263
G.7 Appendix A. The 1-dimensional Itô's formula . . . 264
G.8 Appendix B. General formulation of the stochastic averaging method . . . 264
G.9 Appendix C. Derivation of the expression of the deterministic dynamic bifurcation point 265
G.10 Appendix D. Derivation of the expression of the stochastic dynamic bifurcation point . 266
G.11 Appendix E. Static bifurcation diagram . . . 267

H Chaos (2023) 269
H.1 Introduction . . . 269
H.2 Background on the physical model of reed instrument . . . 271
H.3 Static bifurcation diagram of the model . . . 272
H.4 Elements of geometric singular perturbation theory . . . 272
H.5 Separatrix between dynamic basins of attraction . . . 275
H.5.1 Definitions and method for computing separatrix between DBAs . . . 275
H.5.2 Illustration of SDBAs in the averaged clarinet model with slowly time varying blowing pressure . . . 276

H.6 Discussion . . . 278
H.6.1 Case of a blowing pressure saturating in the bistability domain . . . 278
H.6.2 DBA and SDBA to more realistic models . . . 279
H.7 Conclusion . . . 281
H.8 Appendix A. Derivation of the model . . . 282
H.8.1 Classical single reed instrument model . . . 282
H.8.2 Averaged dynamics with a slowly time-varying control parameter . . . 283
H.9 Appendix B. Details on the averaging procedure . . . 284

III Notice personnelle 287

5 Curriculum vitæ 289
5.1 Cursus académique . . . 289
5.2 Parcours professionnel . . . 289
5.3 Encadrements doctoraux et scientifiques . . . 290
5.3.1 Doctorats . . . 290
5.3.2 Stages de recherche de Master . . . 290
5.4 Liste des contrats de recherche . . . 291
5.4.1 Contrats de recherche évalués à la suite d'appels à projets . . . 291
5.4.2 Contrats de recherche de gré à gré . . . 292
5.5 Responsabilités . . . 292
5.5.1 Responsabilités scientifiques . . . 292
5.5.2 Responsabilités pédagogiques . . . 293
5.6 Expertise scientifique . . . 293
5.6.1 Relecture d'articles . . . 293
5.6.2 Participation à des jurys de thèse . . . 293
5.7 Rayonnement et diffusion scientifique . . . 293

6 Activités d'enseignement 295
6.1 Introduction . . . 295
6.2 À l'INSA Centre Val de Loire . . . 295
6.3 À l'Université de Tours . . . 297
6.4 À l'Université du Mans . . . 298

Bibliographie personnelle 301
Articles dans des revues internationales à comité de lecture . . . 301
Articles en cours de relecture ou en fin d'écriture . . . 302
Communications dans des congrès internationaux à comité de lecture . . . 302
Communications dans des congrès nationaux à comité de lecture . . . 303
Thèse de doctorat . . . 303
Travaux de recherche encadrés . . . 303

Bibliographie générale 305

Première partie

Synthèse des travaux de recherche

Introduction

Le fil conducteur des travaux de recherche présentés dans ce mémoire est la mise en œuvre de méthodes analytiques et numériques permettant de décrire le comportement dynamique de systèmes mécaniques non linéaires, possédant plusieurs échelles de temps caractéristiques et pouvant éventuellement être stochastiques. J'ai développé ces activités dans le cadre de deux applications en vibrations et en acoustique.

La première application concerne l'atténuation passive de vibrations à l'aide d'absorbeurs non linéaires de type NES (*Nonlinear Energy Sink*, traduction anglaise de « puits d'énergie non linéaire »). Dans ce contexte, je m'intéresse plus particulièrement au contrôle d'oscillations auto-entretenues. Ces dernières se produisent en général dans des systèmes dynamiques dont la solution d'équilibre devient instable au profit d'une solution oscillante. L'amplitude de ces oscillations pouvant être très importante, il est souhaitable de pouvoir les atténuer. Les NES sont également des oscillateurs avec la particularité de posséder une raideur essentiellement non linéaire qui leur confère la capacité de résonner à n'importe quelle fréquence. Lorsqu'un NES est couplé à un oscillateur auto-entretenu, le système dynamique résultant possède un certain nombre de solutions dont certaines correspondent à des oscillations de faible amplitude. L'objectif est donc de comprendre comment favoriser ces solutions par rapport à d'autres où le NES est presque inopérant. J'ai débuté cette thématique pendant mon post-doctorat à l'École Centrale Marseille (ECM) au sein du Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (UMR 7031). Cette mission a été effectuée dans le cadre de la chaire industrielle *Dynamique des systèmes mécaniques complexes* financée par la Fondation Airbus Group ce qui m'a fourni une expérience de recherche partenariale avec le monde industriel. J'ai ensuite développé cette thématique à mon arrivée à l'INSA Centre Val de Loire en tant que Maître de Conférences, tout d'abord au sein du Laboratoire de Mécanique et de Rhéologie (LMR, EA 2640) puis, à sa création, au sein du Laboratoire de Mécanique Gabriel Lamé [1] (LaMé EA 7494) et en collaboration avec le LMA.

La seconde application porte sur l'étude des phénomènes transitoires dans les instruments de musique à anche simple de type clarinette ou saxophone. Cette activité a été initiée pendant mon doctorat préparé au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Mans (LAUM, UMR 6613) dans le cadre du projet ANR Sdns-Aimv (Systèmes Dynamiques Non-Stationnaires – Application aux Instruments de Musique à Vent). Ce dernier avait pour objectif l'étude des stratégies suivies par les musiciens lors des phases transitoires : attaques de notes, transitions entre deux notes, transitoires d'extinction, etc. En particulier, il visait à corréler les gestes (ou évolutions temporelles de paramètres de contrôle) aux résultats sonores. Dans ce contexte mon travail de thèse s'est focalisé sur l'étude des transitoires d'attaque. Du point de vue des systèmes dynamiques cela nous conduit à étudier l'influence de la variation dans le temps des paramètres de bifurcation sur l'émergence d'une solution périodique mais également sur les bassins d'attraction en cas de multistabilité. Ce n'est qu'en 2019 que j'ai repris cette activité de recherche en collaboration avec le LMA et le LAUM.

Aussi éloignées que ces deux thématiques puissent paraître, il s'avère que les systèmes étudiés (le système mécanique auto-oscillant couplé à un NES d'une part et l'instrument en régime transitoire d'autre part) possèdent une caractéristique commune. En effet, ils sont tous les deux modélisés par des systèmes d'équations différentielles qui une fois adimensionnés font apparaitre un petit paramètre (dont la nature sera explicitée par la suite) mettant en évidence leur nature *rapide-lente*. L'évolution dans le temps des variables d'état de tels systèmes rapides-lents se caractérise par une succession de phases rapides et de phases lentes. Cette nature commune permet également l'étude de ces systèmes dans un cadre mathématique commun. Dans ce contexte, l'originalité de ma démarche réside il me

1. Le LaMé a été créé en 2018 dans le but de réunir au sein d'un laboratoire unique les équipes de recherches de la région la Centre Val de Loire travaillant dans le domaine de la mécanique des matériaux, des structures et du génie civil. Ce laboratoire est sous la tutelle des Universités d'Orléans et de Tours, ainsi que de l'INSA Centre Val de Loire.

semble dans l'appropriation de résultats théoriques connus des mathématiciens sur les équations différentielles ordinaires singulièrement perturbées dans le but de comprendre les comportements complexes de systèmes mécaniques concrets.

Ces activités de recherche sont détaillées dans les chapitres qui suivent, au Chapitre 1 pour l'étude de l'atténuation passive de vibrations auto-entretenues à l'aide d'absorbeurs non linéaires de type NES et au Chapitre 2 pour celle des phénomènes transitoires dans les instruments de musique à anche simple. Un travail de recherche périphérique sur le chaos polynomial résultant d'un encadrement doctoral est présenté au Chapitre 3.

Chapitre 1

Contrôle passif non linéaire de vibrations auto-entretenues

Sommaire

1.1 Contexte . . . 5
1.2 Analyse rapide-lente d'un système auto-entretenu couplé à un ou plusieurs NES . . . 8
1.2.1 Avant-propos et résultats préliminaires . . . 8
1.2.2 Cas d'un système mécanique auto-entretenu connecté à un réseau de NES . . . 17
1.2.3 Cas d'un système mécanique auto-entretenu à deux modes instables connecté à un NES . . . 22
1.2.4 Cas d'un système mécanique auto-entretenu connecté à un NES bistable . . . 29
1.2.5 Prédiction de la limite d'atténuation tenant compte de la valeur du paramètre de perturbation . . . 39
1.2.6 Effet d'un forçage stochastique faible sur le phénomène de pompage énergétique 43
1.2.7 Autres résultats . . . 49
1.3 Conception robuste de NES en présence d'incertitudes paramétriques . 50
1.3.1 Contexte et problématique . . . 50
1.3.2 Éléments de théorie du chaos polynomial . . . 50
1.3.3 Prédiction de la propension à être dans un régime atténué par des méthodes basées sur le chaos polynomial . . . 51
1.3.4 Optimisation de NES sous incertitudes . . . 52

1.1 Contexte

Les absorbeurs passifs de vibrations les plus répandus sont des absorbeurs linéaires dits à masse accordée ou TMD (*Tuned Mass Damper*). Cependant, les limitations de ces derniers (fonctionnement sur une seule fréquence de vibrations) conduisent les chercheurs et les industriels à développer des alternatives. L'une d'entre elles se base sur l'utilisation d'absorbeurs essentiellement non linéaires (dans ce manuscrit elle sera purement cubique) appelés NES (*Nonlinear Energy Sink*).

Le concept de NES est relativement récent. Il a été proposé en 2001 [77, 203] : son principe repose sur le couplage entre un système primaire - dont on souhaite limiter les vibrations - et un élément fortement non linéaire (en général comme évoqué ci-dessus c'est un système masse-ressort-amortisseur à raideur purement non linéaire). Parce qu'il n'a pas (ou très peu) de terme de raideur linéaire, la fréquence propre d'un NES dépend de l'amplitude de ses oscillations et peut prendre n'importe quelle valeur. Le NES peut donc générer un nombre infini de conditions de résonance non linéaires, c.-à-d. :

$$m\omega_{\mathrm{SP}}^{(k)} \approx n\omega_{\mathrm{NES}} \tag{1.1}$$

où $\omega_{\mathrm{SP}}^{(k)}$ $(k = 1\ldots, N)$ et ω_{NES} sont respectivement les pulsations propres du système primaire et du NES, n et m sont des entiers. N est le nombre de degrés de liberté (ddl) ou de modes [1] du système

1. Dans ce cas, si nous considérons un système mécanique continu, N peut tendre vers l'infini.

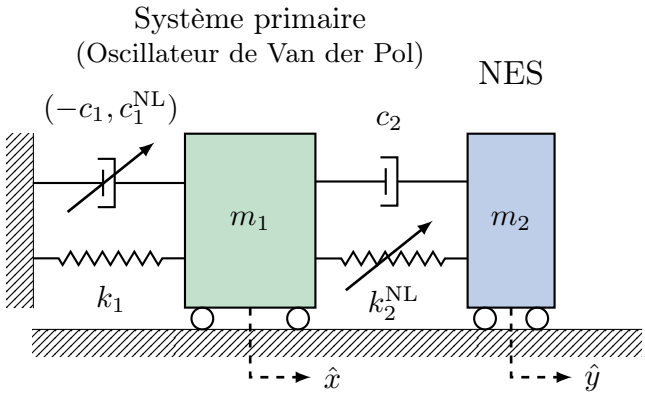


Figure 1.1. Oscillateur de Van de Pol (système primaire) couplé à un NES.

primaire. Lorsque le NES possède une amplitude (ou énergie) suffisante pour que l'une des relations (1.1) soient respectées on parle de *résonance interne* $m:n$. Cette condition de résonance interne est nécéssaire pour que le phénomène de *capture de résonance* $m:n$ [205] puisse apparaître. Une capture de résonance peut être considérée comme une forme de résonance interne transitoire pendant laquelle, grace à la dissipation, un transfert quasi-irréversible de l'énergie vibratoire ou acoustique du système à protéger vers le NES se produit. En effet, le NES dissipant ensuite cette énergie, son amplitude diminue et sa pulsation est modifiée, ce qui rompt l'égalité (1.1) et empêche le retour de l'énergie vers le système primaire. Ce phénomène est appelé *pompage énergétique* (*energy pumping* ou *Targeted Energy Transfer, TET*. Ci-après, nous nous focaliserons sur le phénomène de pompage énergétique dit fondamental impliquant une capture de résonance $1:1$. Les NES ont donc un avantage déterminant pour certaines applications car ils s'adaptent automatiquement à la fréquence du système primaire, fonctionnant ainsi sur une large gamme fréquentielle. Ce type d'absorbeur apparait également comme un moyen alternatif intéressant pour atténuer passivement des oscillations auto-entretenues. On peut citer par exemple une série d'articles précurseurs [123, 124] qui montrent qu'un NES couplé à une aile d'avion peut être en mesure d'atténuer les cycles limites résultant d'une instabilité de flottement.

Afin de comprendre l'effet d'un NES sur un système mécanique auto-oscillant, et ainsi contextualiser d'avantage mon travail de recherche, nous allons détailler le comportement d'un système très simple constitué d'un oscillateur de Van der Pol (VdP, utilisé ici comme un archétype de système auto-entretenu) couplé à un NES dont les équations du mouvement sont :

$$m_1\frac{d^2\hat{x}}{d\hat{t}^2} - c_1\frac{d\hat{x}}{d\hat{t}} + c_1^{\mathrm{NL}}\frac{d\hat{x}}{d\hat{t}}\hat{x}^2 + k_1\hat{x} + c_2\left(\frac{d\hat{x}}{d\hat{t}} - \frac{d\hat{y}}{d\hat{t}}\right) + k_2^{\mathrm{NL}}\left(\hat{x}-\hat{y}\right)^3 = 0, \tag{1.2a}$$

$$m_2\frac{d^2\hat{y}}{dt^2} + c_2\left(\frac{d\hat{y}}{d\hat{t}} - \frac{d\hat{x}}{d\hat{t}}\right) + k_2^{\mathrm{NL}}(\hat{y}-\hat{x})^3 = 0. \tag{1.2b}$$

Le système est schématisé en Fig. 1.1. Les équations du mouvement (1.2) sont ensuite adimensionnées, ce qui donne :

$$\ddot{x} - \epsilon\rho\dot{x} + \epsilon\lambda\dot{x}x^2 + x + \epsilon\mu\left(\dot{x}-\dot{y}\right) + \epsilon\alpha(x-y)^3 = 0, \tag{1.3a}$$

$$\epsilon\ddot{y} + \epsilon\mu\left(\dot{y}-\dot{x}\right) + \epsilon\alpha(y-x)^3 = 0. \tag{1.3b}$$

où $x = \hat{x}/L$, $y = \hat{y}/L$ (avec L, une longueur caractéristique du mouvement), $\omega_1 = \sqrt{k_1/m_1}$, $t = \omega_1\hat{t}$, $\dot{\{\}} = d\{\}/dt'$, $\epsilon = m_2/m_1$ le rapport de masse entre le NES et le VdP, $\rho = c_1/(m_2\omega_1)$, $\lambda = c_1^{\mathrm{NL}}L^2/(m_2\omega_1)$, $\mu = c_2/(m_2\omega_1)$, $\beta = k_2/(m_2\omega_1^2)$ et $\alpha = k_2^{\mathrm{NL}}L^2/(m_2\omega_1^2)$.

Le rapport de masse ϵ est supposé petit (c.-à-d. $0 < \epsilon \ll 1$). Le coefficient d'amortissement de l'oscillateur de VdP, le coefficient d'amortissement et la raideur non linéaire du NES sont également supposés petits et par conséquent notés $\epsilon\rho$, $\epsilon\mu$ et $\epsilon\alpha$ respectivement (avec ρ, μ et $\alpha \sim \mathcal{O}(1)$).

Le diagramme du bifurcation du système, représentant l'amplitude de x en régime établi en fonction du paramètre de bifurcation considéré (ici ρ), est représenté en Fig. 1.2(a) (courbe bleue).

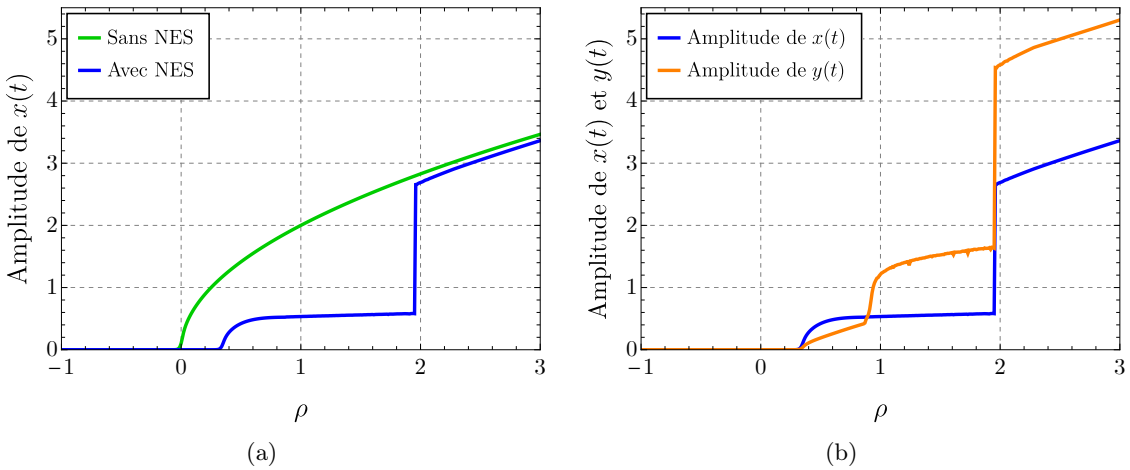


Figure 1.2. Diagramme de bifurcation du système ; représentant (a) l'amplitude de x en régime établi en fonction du paramètre ρ : VdP seul (vert) et VdP couplé au NES (bleu) ; (b) l'amplitude de x (bleu) et y (orange) du VdP couplé au NES. Les paramètres du NES sont : $\alpha = 1$, $\mu = 0.4$ et $\epsilon = 0.01$.

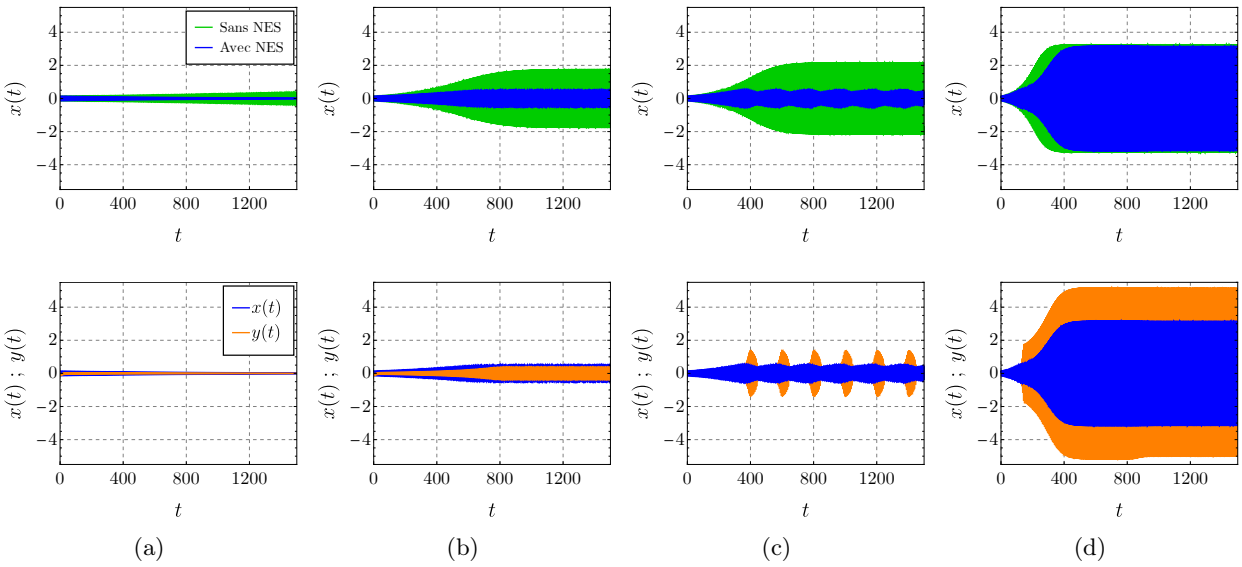


Figure 1.3. Haut : $x(t)$ résultant de l'intégration numérique de (1.3) (bleu) et de l'oscillateur de VdP seul (vert). Bas : $x(t)$ (bleu) et $y(t)$ (orange) résultant de l'intégration numérique de (1.3). (a) $\rho = 0.15$, (b) $\rho = 0.8$, (c) $\rho = 1.2$ et (d) $\rho = 2.7$. Les paramètres du NES sont les mêmes que dans la Fig. 1.2.

Pour rappel, la solution d'équilibre triviale (i.e. $(x, \dot{x}) = (0, 0)$) du VdP seul est stable si $\rho < 0$ et instable si $\rho > 0$. Dans ce cas un cycle limite apparaît. Le diagramme correspondant au VdP seul est également représenté en Fig. 1.2(a) (courbe verte).

La Fig. 1.3 (haut) montre la série temporelle $x(t)$ résultant de l'intégration numérique de (1.3) (bleu) et de l'oscillateur de VdP seul (vert). Les séries temporelles $x(t)$ (bleue) et $y(t)$ (orange) résultant de l'intégration numérique de (1.3) sont représentées en Fig. 1.3 (bas). Les Figs. 1.2 et 1.3 permettent d'illustrer l'effet du NES : alors que l'équilibre trivial du VdP seul devient instable à $\rho = 0$ d'où émerge un cycle limite d'amplitude égal à 2. L'équilibre trivial du système couplé devient instable pour une valeur du paramètre de bifurcation un peu plus grande, $\rho \approx 0.25$ (cf. Fig. 1.3(a). Cet effet est dû à l'amortissement linéaire ajouté par le NES et pourrait donc être obtenu par un simple ajout d'amortissement). Peu après la perte de stabilité de l'équilibre trivial, le système couplé

présente également des régimes oscillantes d'amplitude inférieure à celle de l'oscillateur de VdP seul. Ces régimes oscillants peuvent être de nature périodique (c.-à-d. des cycles limites, cf. Fig. 1.3(b)) ou quasi-périodique (cf. Fig. 1.3(c)). Dans ce dernier cas, on parle dans la littérature de SMR pour *« Strongly Modulated Response »* [188]. Ces trois premières réponses où le NES agit correspondent à des situations que nous qualifierons d'*inoffensives* pour la structure primaire. Après une certaine valeur du paramètre de bifurcation ($\rho \approx 1.8$), appellée *limite d'atténuation*, le NES n'est plus en mesure de protéger le système primaire et un cycle limite dont l'amplitude est proche du cas sans NES est observé. On parlera dans ce cas de situation *dangereuse* pour le système primaire. Dangereux comme pouvant nuire à l'intégrité de la structure primaire (comme par exemple dans le cas de l'instabilité de flottement d'une aile d'avion) ou causant de la nuisance sonore (comme dans le cas du phénomène de crissement par exemple).

Définition 1.1 (Limite d'atténuation). En considérant un ensemble de conditions initiales comme une petite perturbation de la solution triviale, la *limite d'atténuation* est définie comme la valeur du paramètre de bifurcation ρ qui sépare les situations inoffensives des situations dangereuses

Le NES permet donc de protéger le système primaire jusqu'à la limite d'atténuation où une discontinuité est observée dans le diagramme de bifurcation du système couplé. Ceci a pour conséquence qu'une faible variation du paramètre de bifurcation peut entrainer une très forte augmentation de l'amplitude des oscillations. Ce comportement (que ce soit les types de régimes observés dans le domaine temporel ou l'allure du diagramme de bifurcation) représente la « signature » d'un système auto-entretenu couplé à un ou plusieurs NES, même lorsque l'on considère des systèmes primaires plus complexes qu'un oscillateur de VdP.

Dans l'optique de la conception d'un dispositif de réduction passive de vibrations basé sur les concepts de NES et de pompage énergétique pour des applications en ingénierie, la compréhension du comportement dynamique complexe d'un système mécanique impliquant le couplage entre une structure primaire instable et un NES est primordiale. L'objectif final étant la prédiction de ce comportement dynamique complexe et *in fine* de la limite d'atténuation du dispositif.

C'est dans ce contexte que s'effectuent mes travaux de recherche. La partie la plus importante est décrite en Section 1.2 et concerne l'analyse théorique du comportement dynamique d'un système auto-entretenu couplé à un ou plusieurs NES. Les résultats obtenus pendant la thèse de Chérif Snoun sur la conception robuste de NES couplés à un oscillateur auto-entretenu en présence d'incertitudes paramétriques sont résumés en Section 1.3.

1.2 Analyse rapide-lente d'un système auto-entretenu couplé à un ou plusieurs NES

1.2.1 Avant-propos et résultats préliminaires

Afin d'appréhender l'originalité de mes travaux de recherche ainsi que leur apport à l'état de l'art, il semble nécessaire d'expliciter certains résultats de la littérature et en particulier ceux de Gendelman et coll. [58, 75, 78], ce qui est fait dans cette section.

1.2.1.1 Hypothèse d'une capture de résonance 1 : 1

En général, lorsqu'un NES est attaché à une structure primaire (qu'elle soit libre, forcée ou auto-entretenue), le modèle couplé résultant est analysé en introduisant un petit paramètre de perturbation, noté ϵ, lié au rapport de masses entre le NES et la structure primaire (comme cela a été fait en Section 1.1). Dans le cadre de l'hypothèse d'une capture de résonance 1 : 1 entre l'un des modes propres du SP et le NES (c.-à-d. $\exists k / \omega_{\text{SP}}^{(k)} \approx \omega_{\text{NES}}$), en utilisant un temps adimensionné

$t = \omega_{\mathrm{SP}}^{(k)} \hat{t}$ (comme cela a également été fait en Section 1.1), on peut distinguer deux échelles de temps adimensionnées : une *rapide* t et une *lente* $\tau = \epsilon t$.

Remarque 1.1 (Échelles de temps). Dans la littérature trois échelles de temps sont parfois mentionnées. Aux deux échelles adimensionnées précédemment évoquées, on rajoute l'échelle de temps physique (avec dimension) $\hat{t}$ comme échelle de temps intermédiaire entres les échelles lente et rapide. Ces échelles sont décrites ainsi : $t = \omega_{\mathrm{SP}}^{(k)} \hat{t}$ est toujours l'échelle de temps *rapide*, $\hat{t}$ et τ deviennent les échelles de temps *lente* et *super-lente*, respectivement. En réalité il n'est pas possible de hiérarchiser ainsi des échelles dont certaines sont adimensionnées et d'autres pas. Dans le système étudié (1.3), le seul petit paramètre adimensionné permettant de hiérarchiser les échelles de temps est le rapport des masses ϵ. Par conséquent seules les échelles t et τ existent.

1.2.1.2 Flot de modulation : définition

Toujours dans le cadre de l'hypothèse d'une capture de résonance 1 : 1, il est possible de simplifier le système en supposant qu'il oscille, par rapport à l'échelle de temps t, majoritairement à la pulsation 1 (i.e., $\omega_{\mathrm{SP}}^{(k)}$ la pulsation naturelle de la structure primaire à laquelle à lieu la capture de résonance 1 : 1 à l'échelle de temps physique $\hat{t}$). Afin de négliger les composantes fréquentielles d'ordres supérieures, pour ne décrire que les modulations lentes d'amplitude et de phase de la composante fréquentielle fondamentale, des méthodes de perturbation sont utilisées. Les plus courantes sont : (i) la méthode *Complexification-Moyennisation* (*Complexification-Averaging Method* (CAM)) [135, 206] qui est une méthode de moyennisation de type Krylov-Bogolyubov [143] et (ii) la méthode dite *Échelles multiple/Équilibrage Harmonique* (*Multiple Scale/Harmonic Balance Method* (MSHBM)) [130, 228]. La CAM, utilisée dans cette section, est plus facile à mettre en œuvre mais la MSHBM est plus facilement généralisable, comme nous le verrons en Section 1.2.4. Le système obtenu après application de l'une de ces méthodes, appelé ici *flot de modulation*, est ensuite analysé au moyen de techniques de perturbations singulières. La partition de la dynamique du flot de modulation en deux échelles de temps (une rapide t et une lente τ) est le premier point clé de ces traitements analytiques.

Remarque 1.2 (Flot de modulation). Dans la littérature le *flot de modulation* est souvent appelé *flot lent* ou *dynamique lente* car il décrit les modulations lentes d'amplitude et de phase de la composante fréquentielle fondamentale. Cependant pour éviter les confusions (le terme lent étant déjà utilisé pour désigner l'échelle de temps lente τ) le terme de *flot de modulation* est introduit dans ce manuscript.

1.2.1.3 Analyse lente-rapide du flot de modulation

Dans cette représentation à deux échelles de temps, l'évolution temporelle du flot de modulation est ainsi décrite comme une succession de phases lentes et de phases rapides qui sont analysées indépendamment. Le deuxième point clé de cette analyse est la *variété critique*, c.-à-d. le sous-espace de l'espace des phases dont les trajectoires du système se rapprochent pendant les phases lentes.

On se propose maintenant de décrire les grandes étapes de cette analyse en considérant toujours l'oscillateur de VdP couplé à un NES (cf. Éq. (1.3)). Même si ces résultats ne sont pas originaux, leur présentation dans le cadre de l'*approche géométrique des perturbations singulières* [62, 107] (AGPS) est personnelle.

Expression du flot de modulation. En passant en coordonnées barycentriques (c.-à-d. $u = x+\epsilon y$ et $v = x - y$), l'Éq. (1.3) devient

$$\ddot{u} + u + \epsilon\left[-u - \rho\dot{u} + \lambda\dot{u}u^2 + v\right] = 0, \tag{1.4a}$$

$$\ddot{v} + \mu\dot{v} - \beta v + \alpha v^3 + u, + \epsilon\left[-\beta\dot{u} + \lambda u^2\dot{u} - u + \mu\dot{v} + \alpha v^3 + v\right] = 0. \tag{1.4b}$$

Le flot de modulation du système est obtenu ici par la CAM. Pour cela les amplitudes complexes

$$\phi_1 = (\dot{u} + ju)\, e^{-jt} \quad \text{et} \quad \phi_2 = (\dot{v} + jv)\, e^{-jt} \tag{1.5}$$

sont introduites [135]. Après avoir exprimé les équations du mouvement en terme de ϕ_1 et ϕ_2, puis en moyennant sur une période par application de l'approximation de Krylov-Bogolyubov (voir par exemple [143]), les équations du flot de modulation complexe sont obtenues comme suit :

$$\dot{\phi}_1 = \frac{1}{8}\epsilon\left[4\beta\phi_1 - 4j(\phi_1 - \phi_2) - \lambda\phi_1|\phi_1|^2\right], \tag{1.6a}$$

$$\dot{\phi}_2 = \frac{1}{8}j\left(4\phi_1 - 4\phi_2 3\alpha\phi_2|\phi_2|^2\right) - \frac{1}{2}\mu\phi_2 + \frac{1}{8}\epsilon\left[4\beta\phi_1 - 4j\phi_1 - 4\mu\phi_2 + 4j\phi_2 3j\alpha\phi_2|\phi_2|^2 - \lambda\phi_1|\phi_1|^2\right]. \tag{1.6b}$$

> **Remarque 1.3.** Le système (1.6) n'a pas tout à fait la forme requise pour appliquer l'approximation de Krylov-Bogolyubov, il faudrait pour cela que le membre de droite de l'Éq. (1.6b) soit aussi d'ordre $\mathcal{O}(\epsilon)$. L'hypothèse d'une capture de résonance 1 : 1 permet de justifier ici la moyennisation.

Afin d'obtenir une représentation réelle du flot de modulation, les amplitudes complexes ϕ_1 et ϕ_2 sont écrites sous les formes polaires suivantes : $\phi_1 = re^{j\theta_1}$ et $\phi_2 = se^{j\theta_2}$. En introduisant ces dernières dans (1.6), le flot de modulation, exprimé avec les variables réelles r_1, r_2 et $\Delta = \theta_1 - \theta_2$, est obtenue :

$$\dot{r} = \epsilon f(r, s, \Delta) \tag{1.7a}$$

$$\dot{s} = g_1(r, s, \Delta, \epsilon) \tag{1.7b}$$

$$\dot{\Delta} = g_2(r, s, \Delta, \epsilon) \tag{1.7c}$$

où r et s représentent les amplitudes de u et v respectivement et Δ la différence de phase entre u et v. Les fonctions f, g_1 et g_2 sont données par

$$f(r, s, \Delta) = \frac{1}{8}\left(4\rho r - \lambda r^3 + 4s\sin\Delta\right) \tag{1.8a}$$

$$g_1(r, s, \Delta, \epsilon) = -\frac{1}{2}(\mu s + r\sin\Delta) + \frac{1}{8}\epsilon\left[(4\rho r - \lambda r^3)\cos\Delta + 4r\sin\Delta - 4\mu s\right] \tag{1.8b}$$

$$g_2(r, s, \Delta, \epsilon) = \frac{4s - 4r\cos\Delta - 3\alpha s^3}{8s} + \epsilon\frac{\lambda(r^4 - 4\rho r^2)\sin\Delta + (4r^2 + 4s^2)\cos\Delta - 3\alpha r s^3 - 8rs}{8rs} \tag{1.8c}$$

La nature lente-rapide est mise en évidence par le fait que le membre de droite de (1.7a) est d'ordre $\mathcal{O}(\epsilon)$ et ceux de (1.7b) et (1.7c) sont d'ordre $\mathcal{O}(1)$. Ceci implique que les variations temporelles de r (qui est donc la *variable lente*) sont lentes par rapport à celles de s et Δ (qui sont donc les *variables rapides*). On dit dans ce cas que (1.7), qui est tridimensionnel (3D), est un système $(2, 1)$-rapide-lent dont les points fixes (ou positions d'équilibre) non triviaux (c.-à-d. correspondant à une amplitude nulle) caractérisent les solutions périodiques de (1.3). La position d'équilibre triviale est en effet commune au système initial (1.3) et au système moyenné (1.7).

Variété critique du flot de modulation. En écrivant l'Éq. (1.7) à l'échelle de temps lente $\tau = \epsilon t$, on obtient :

$$r' = f(r, s, \Delta) \tag{1.9a}$$
$$\epsilon s' = g_1(r, s, \Delta, \epsilon) \tag{1.9b}$$
$$\epsilon \Delta' = g_2(r, s, \Delta, \epsilon) \tag{1.9c}$$

où $(.)' = \frac{d(.)}{d\tau}$. À ce stade les systèmes (1.7) et (1.9) sont équivalents.

En posant $\epsilon = 0$ dans (1.9) et (1.7) respectivement, on obtient le *sous-système lent* :

$$r' = f(r, s, \Delta) \tag{1.10a}$$
$$0 = g_1(r, s, \Delta, 0) \tag{1.10b}$$
$$0 = g_2(r, s, \Delta, 0) \tag{1.10c}$$

et le *sous-système rapide* :

$$\dot{r} = 0 \tag{1.11a}$$
$$\dot{s} = g_1(r, s, \Delta, 0) \tag{1.11b}$$
$$\dot{\Delta} = g_2(r, s, \Delta, 0) \tag{1.11c}$$

Les sous-systèmes lent et rapide ne sont plus équivalents ce qui met en évidence la nature *singulièrement perturbée*[2] du problème. En effet, ni (1.10) ni (1.11) ne permet d'approcher complètement le comportement de (1.7) (ou (1.9)). Chacune deux équations permet en revanche de décrire une partie du mouvement : le sous sous-système rapide approche le comportement de (1.7) (ou (1.9)) pendant les phases rapides et le sous-système lent l'approche pendant les phases lentes.

La variété critique du flot de modulation est la solution de la partie algébrique de (1.10), soit

$$\mathcal{M}_0 = \left\{ (r, s, \Delta) \in \mathbb{R}^{+^2} \times [-\pi, \pi] \;\middle|\; g_1(r, s, \Delta, 0) = 0 \;\text{ et }\; g_2(r, s, \Delta, 0) = 0 \right\}. \tag{1.12}$$

La résolution de (1.10b) et (1.10c) aboutit à

$$\sin\Delta = \frac{\mu s}{r} \quad \text{et} \quad \cos\Delta = \frac{s\left(4 - 3\alpha s^2\right)}{4r} \tag{1.13}$$

dont on peut déduire les équations suivantes :

$$r = s\sqrt{\mu^2 + \left(1 - \frac{3\alpha s^2}{4}\right)^2} = H(s) \quad \text{et} \quad \tan\Delta = \frac{4\mu}{3\alpha s^2 - 4}. \tag{1.14}$$

À noter que les membres de droite des deux équations dans (1.14) ne dépendent que de s, par conséquent la variété critique est unidimensionnelle. Un exemple typique de la fonction $H(s)$ est représenté en Fig. 1.4.

Des points de la variété critique ont une importance particulière pour la description du flot de modulation. Il s'agit des *points-col* gauche et droit $p^{\mathrm{CG}} = (s^{\mathrm{CG}}, r^{\mathrm{CG}}, \Delta^{\mathrm{CG}})$ et $p^{\mathrm{CD}} = (s^{\mathrm{CD}}, r^{\mathrm{CD}}, \Delta^{\mathrm{CD}})$, respectivement, des points $p^{\mathrm{U}} = (s^{\mathrm{U}}, r^{\mathrm{CG}}, \Delta^{\mathrm{U}})$ et $p^{\mathrm{D}} = (s^{\mathrm{D}}, r^{\mathrm{CD}}, \Delta^{\mathrm{D}})$ (les projections des points p^{CG}, p^{CD}, p^{U} et p^{D} dans le plan (s, r) sont représentés en Fig. 1.4) et des *points fixes du flot de modulation* (1.7) (non représentés en Fig. 1.4). Ces différents points sont calculés dans la suite.

La résolution de $\frac{dH(s)}{ds} = 0$ permet d'obtenir les expressions des points-col gauche et droit (s^{CG} et s^{CD}, respectivement) de $\mathcal{M}_0$, soient :

$$s^{\mathrm{CG}} = \frac{2}{3\sqrt{\alpha}}\sqrt{2 - \sqrt{1 - 3\mu^2}} \quad \text{et} \quad s^{\mathrm{CD}} = \frac{2}{3\sqrt{\alpha}}\sqrt{2 + \sqrt{1 - 3\mu^2}} \tag{1.15}$$

2. En mathématiques et en physique, un problème de *perturbation singulière* est un problème dépendant d'un petit paramètre (en général noté ϵ) qui ne peut être approché en fixant ce paramètre à zéro. Dans ce contexte, les système dynamiques dits *rapides-lents* tel que (1.7) sont parmi les systèmes les plus étudiés.

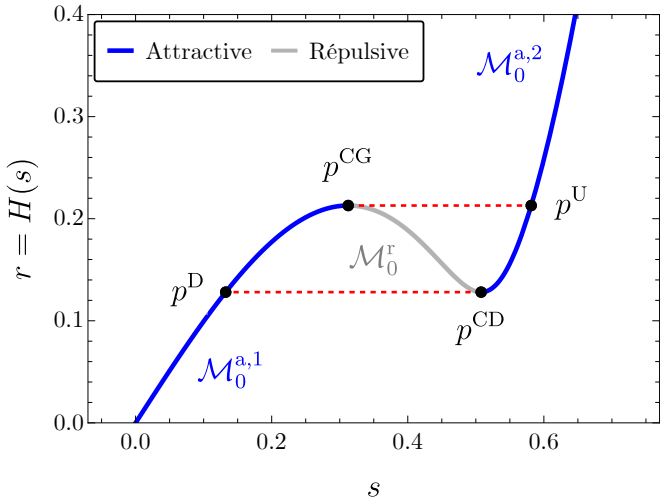


Figure 1.4. Exemple typique de variété critique dans le plan (s, r), c.-à-d. graphe de $r = H(s)$ (voir Éq. (1.14)) pour $\mu = 0.25$ et $\alpha = 5$.

si l'inégalité suivante est respectée

$$\mu < \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{1.16}$$

ce que nous supposerons être la cas dans ce travail.

Les expressions des abscisses s^D et s^U sont obtenues en résolvant $H\left(s^{CD}\right) = H\left(s^D\right)$ et $H\left(s^{CG}\right) = H\left(s^U\right)$, respectivement, ce qui donne :

$$s^D = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{\alpha}}\sqrt{1-\sqrt{1-3\mu^2}} \quad \text{et} \quad s^U = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{\alpha}}\sqrt{1+\sqrt{1-3\mu^2}}. \tag{1.17}$$

Stabilité de la variété critique. Étant donnée l'Éq. (1.11a), la variable r est un paramètre pour le sous-système rapide (1.11) qui est donc bidimensionnel (2D), ses variables d'état étant s et Δ. La détermination de la stabilité de ces positions d'équilibre permet de déterminer les parties attractive et répulsive de $\mathcal{M}_0$, cela est possible analytiquement. Pour ce faire, on pose $g_1(r, s, \Delta, 0) = H_1(s) - \frac{r}{2}\sin\Delta$ et $g_2(r, s, \Delta, 0) = H_2(s) - \frac{r}{2s}\cos\Delta$. On a donc :

$$\sin\Delta = \frac{2H_1(s)}{r}, \quad \cos\Delta = \frac{2sH_2(s)}{r}, \quad H(s) = 2\sqrt{H_1^2(s) + H_2^2(s)}. \tag{1.18}$$

Dans ce cas $\mathbf{J_g}(p)$, la matrice jacobienne de (1.11b)-(1.11c) évaluée en un point p de $\mathcal{M}_0$, s'écrit :

$$\mathbf{J_g}(p) = \begin{pmatrix} \dfrac{dH_1(s)}{ds} & -sH_2(s) \\ \dfrac{H_2(s)}{s} + \dfrac{dH_2(s)}{ds} & \dfrac{H_1(s)}{s} \end{pmatrix}, \tag{1.19}$$

dont le déterminant est :

$$\det\left(\mathbf{J_g}(p)\right) = \frac{H(s)}{4s}\frac{dH(s)}{ds}. \tag{1.20}$$

Par conséquent, $\det\left(\mathbf{J_g}(p)\right)$ s'annulent aux points-col gauche et droit (1.15) où se produit donc des bifurcations nœud-col du sous-système rapide. Il est ensuite possible de montrer que les points p de $\mathcal{M}_0$ sont stables si $s \in [0, s^{CG}[\cup]s^{CD}; +\infty[$ et instable si $s \in]s^{CG}, s^{CD}[$. La variété critique est dite *attractive* et notée $\mathcal{M}_0^a$ pour $s \in [0, s^{CG}[\cup]s^{CD}; +\infty[$; et dite *répulsive* et notée $\mathcal{M}_0^r$ si $s \in]s^{CG}, s^{CD}[$ (cf. Définition 1.2). La variété critique est *normalement hyperbolique* quand les parties réelles des valeurs propres de $\mathbf{J_g}(p)$ sont toutes non nulles. La variété critique n'est donc pas normalement

hyperbolique au niveau des points points-col gauche et droit, elle peut ainsi est décrite de la façon suivante :

$$\mathcal{M}_{01} = \mathcal{M}_0^{\mathrm{a},1} \cup p^{\mathrm{LF}} \cup \mathcal{M}_0^{\mathrm{r}} \cup p^{\mathrm{RF}} \cup \mathcal{M}_0^{\mathrm{a},2} \tag{1.21}$$

comme indiqué en Fig. 1.4.

Définition 1.2 (Variétés attractives, répulsives et saddle-type). Soit le système (m,n)-rapide-lent suivant :

$$\dot{\mathbf{r}} = \epsilon \mathbf{f}(\mathbf{r},\mathbf{s},\epsilon), \tag{1.22a}$$
$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{g}(\mathbf{r},\mathbf{s},\epsilon), \tag{1.22b}$$

avec $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ et $0 < \epsilon \ll 1$. Les fonctions $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{m+n+1} \to \mathbb{R}^m$ et $\mathbf{g} : \mathbb{R}^{m+n+1} \to \mathbb{R}^n$ sont supposées être suffisamment régulières. Les sous-systèmes systèmes rapide et lent associés à (1.22) sont :

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}, \tag{1.23a}$$
$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{g}(\mathbf{r},\mathbf{s},0), \tag{1.23b}$$

et

$$\mathbf{r}' = \mathbf{f}(\mathbf{r},\mathbf{s},0), \tag{1.24a}$$
$$\mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{r},\mathbf{s},0), \tag{1.24b}$$

respectivement.
La variété critique de (1.22) est donc :

$$\mathcal{M}_0 = \left\{ (\mathbf{r},\mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{m+1} \;\middle|\; \mathbf{g}(\mathbf{r},\mathbf{s},0) = \mathbf{0} \right\}. \tag{1.25}$$

Nous notons de nouveau $\mathbf{J}_{\mathbf{g}}(p)$ la matrice jacobienne de (1.23b), évaluée en un point p de $\mathcal{M}_0$. Une branche $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_0$ est dite *normalement hyperbolique* si pour $p \in \mathcal{S}$, aucune des valeurs propres de $\mathbf{J}_{\mathbf{g}}(p)$ n'a sa partie réelle nulle. Le mot « normalement » signifie que la partie réelle d'une valeur propre correspondant à une direction propre tangente à $\mathcal{M}_0$ peut être nulle. La branche $\mathcal{S}$ sera dite *attractive* (resp. *répulsive*) si les parties réelles de toutes la valeurs propres de $\mathbf{J}_{\mathbf{g}}(p)$ sont strictement négatives (resp. positives). Quand $\mathcal{S}$ n'est ni attractive ni répulsive, elle dite *saddle-type* (je me permet un anglicisme en utilisant de ce mémoire *saddle-type* au lieu de sa traduction en français : de type selle).

Remarque 1.4. À noter que la définition usuelle de la stabilité d'une solution d'équilibre [127] stipule qu'un point appartenant à une branche attractive de $\mathcal{M}_0$ est une solution *stable* de (1.23) et qu'un point appartenant à une branche répulsive ou *saddle-type* est une solution *instable* de (1.23).

L'étude de la variété critique (forme et stabilité) permet de prédire partiellement le comportement du flot de modulation. Dans l'espace des phases (r,s,Δ) si la trajectoire du flot de modulation n'est pas dans le voisinage de la variété critique, alors elle évolue rapidement vers un point d'une branche attractive de $\mathcal{M}_0$ (le comportement asymptotique $\epsilon \to 0$ de cette phase rapide est décrit par l'Éq. (1.11)). La trajectoire évolue ensuite lentement dans le voisinage de $\mathcal{M}_0$ (le comportement asymptotique $\epsilon \to 0$ de cette phase lente est décrit par l'Éq. (1.10)).

Remarque 1.5 (Théorème de Fenichel). C'est le Théorème de Fenichel [62] qui permet d'obtenir ce résultat. Il stipule en effet que si la variété critique $\mathcal{M}_0$ est attractive, répulsive ou *saddle-type* alors il existe une variété invariante $\mathcal{M}_\epsilon$ (c.-à-d. une solution du flot de modulation quand $0 < \epsilon \ll 1$) qui se trouve à une distance de l'ordre de $\mathcal{O}(\epsilon)$ de $\mathcal{M}_0$. Cette variété invariante $\mathcal{M}_\epsilon$ est normalement hyperbolique et possède les mêmes propriétés de stabilité par rapport aux variables rapides que $\mathcal{M}_0$ (attractive, répulsive ou *saddle-type*).

Point fixes du flot de modulation. Il s'agit maintenant de calculer les points fixes du flot de modulation (1.7). Puisque $0 < \epsilon \ll 1$, ces points fixes peuvent être approchés par ceux du sous-système lent (1.10). Notez que dans ce cas, celui de l'approximation d'ordre 0, les points fixes sont nécessairement situés sur la variété critique. En considérant l'oscillateur de VdP linéarisé autour de la position d'équilibre triviale (c.-à-d. en linéarisant la fonction $f(r, s, \Delta)$ dans (1.10a) autour de $r = 0$), une expression analytique peut être obtenue. En introduisant l'Éq. (1.14) de l'Éq. (1.10a) on obtient $(H(s))' = f\left(H(s), s, \Delta\right)$ ou encore $\frac{dH(s)}{ds} s' = f_s(s)$ avec :

$$f_s = \frac{s\left(\rho\left(16\mu^2 + \left(4 - 3\alpha s^2\right)^2\right) - 16\mu\right)}{8\sqrt{16\mu^2 + \left(4 - 3\alpha s^2\right)^2}} \tag{1.26}$$

Les points fixes de (1.10) sont donc les racines de $f_s\left(s\right)$ avec $\frac{dH(s)}{ds} \neq 0$. En plus de la solution triviale, les solutions de $f_s\left(s\right) = 0$ sont :

$$s_1^e = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\rho - \sqrt{\mu\rho(1-\mu\rho)}}{\alpha\rho}} \quad \text{et} \quad s_2^e = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\rho + \sqrt{\mu\rho(1-\mu\rho)}}{\alpha\rho}}, \tag{1.27}$$

avec $s_1^e < s_2^e$. La stabilité des points fixes est ensuite déterminée en examinant le signe de $\frac{d}{ds}\left(\frac{f_s(s)}{H'(s)}\right)$. Notez que les points fixes s_1^e et s_2^e n'existent plus (physiquement) lorsqu'ils deviennent complexes. Cela se produit pour

$$\rho^{\mathrm{S}} = \frac{1}{\mu}. \tag{1.28}$$

Dans l'exemple étudié ici, le flot de modulation possède au maximum quatre points fixes réels. Il y a le point fixe trivial (s'il est atteint on se trouve dans la situation de la Fig. 1.3(a)) et trois points fixes non triviaux. D'abord, un point dit de grande amplitude, s'il est atteint on se trouve dans la situation non atténuée de la Fig. 1.3(d). Il faut noter que ce point n'existe pas pour le système linéarisé évoqué ci-dessus, car il correspond justement à la solution périodique du VdP seul et que l'on souhaite éviter. Par consequent, en situation non atténuée, le modèle linéarisé diverge. Il y a enfin deux autres points fixes non triviaux que l'on note $M_1^e = (s_1^e, r_1^e)$ et $M_2^e = (s_2^e, r_2^e)$.

Prédictions des régimes de fonctionnement. C'est la stabilité de ces points fixes ainsi que la position de M_1^e et M_2^e par rapport aux points d'arrivée qui permet de prédire le comportement asymptotique du flot de modulations et ainsi de connaitre le régime qui sera effectivement atteint parmi les quatre décrits en Fig 1.3. Ceci est illustré en Fig. 1.5 qui reprend les exemples de la Fig. 1.3 : les deux premières lignes correspondent au résultat de la simulation temporelle du système initial (1.3) et du système moyenné (1.7) et la troisième ligne montre la comparaison entre la variété critique - sur laquelle sont indiqués les points-col (en magenta), les points d'arrivée (en orange) et les points fixes du flot de modulation (verts quand ils sont stables et gris quand ils sont instables) - et la trajectoire du flot de modulation dans le plan (s, r). Dans chaque situation une condition initiale proche de zéro est considérée et en dehors de la variété critique (cf. points bleus dans la ligne du bas de la Fig 1.5). Par conséquent, une phase rapide horizontale (en accord avec le fait que $\dot{r} = 0$ dans (1.11)) se produit pendant laquelle la trajectoire du flot de modulation rejoint la branche attractive gauche $\mathcal{M}_0^{\mathrm{a},1}$ de la variété critique. On observe sur la Fig 1.5 les quatre scénarios suivants en fonction de la valeur de ρ :

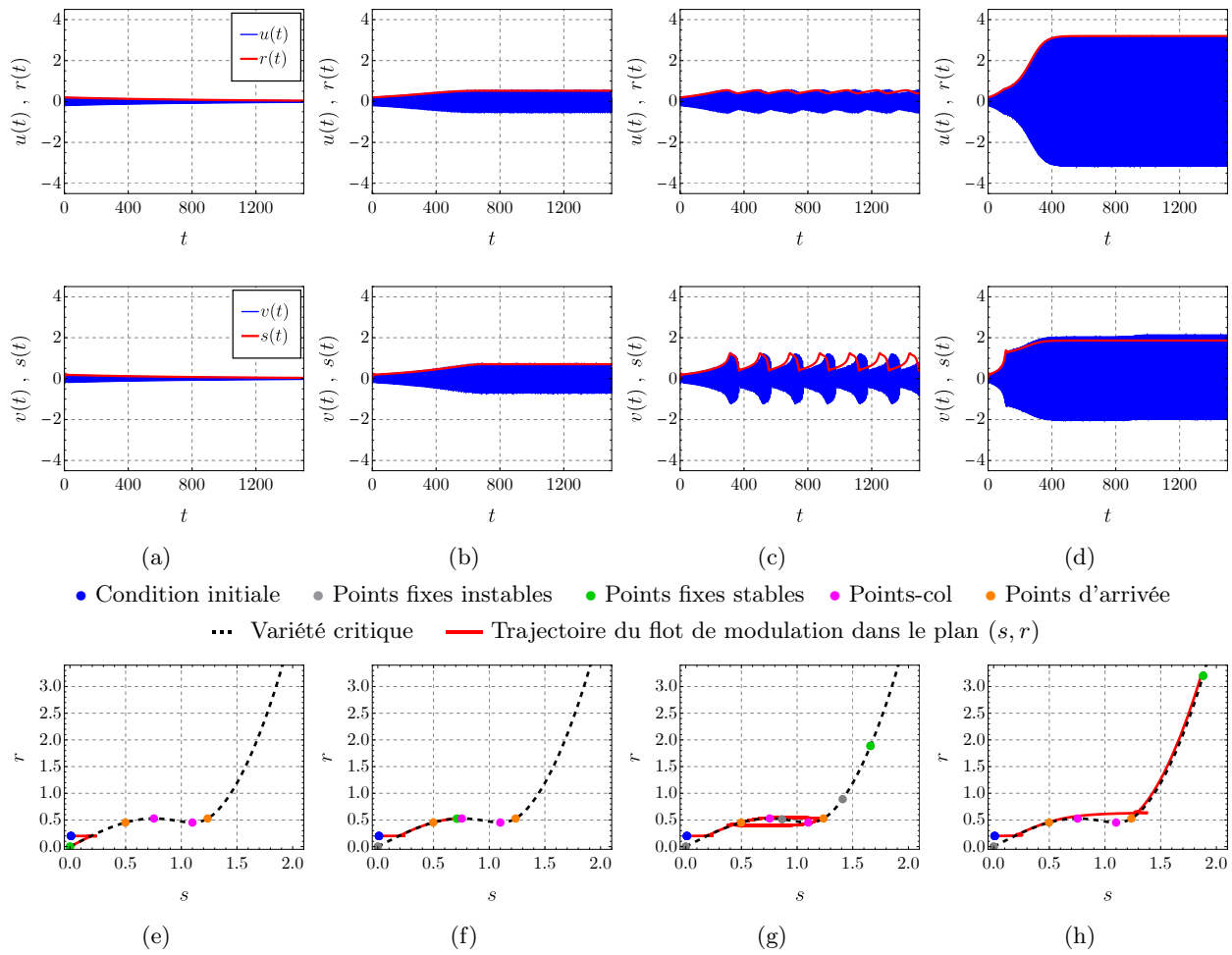


Figure 1.5. Première ligne : $u_1(t) = x(t) + \epsilon y(t)$ (en bleu) et $r(t)$ (en rouge) issus de l'intégration temporelle numérique du système initial (1.3) et du système moyenné (1.7) respectivement. Deuxième ligne : $u_2(t) = x(t) - y(t)$ (en bleu) et $s(t)$ (en rouge) issus de l'intégration temporelle numérique du système initial (1.3) et du système moyenné (1.7) respectivement. Troisième ligne : comparaison entre la variété critique (c.-à-d. $r = H(s)$ donnée par (1.14) et représentée en pointillés noirs) - sur laquelle sont indiqués les points-col (en magenta), les points d'arrivée (en orange) et les points fixes du flot de modulation (verts quand ils sont stables et gris quand ils sont instables) - et la trajectoire du flot de modulation (en rouge) dans le plan (s, r). Les quatre colonnes correspondent aux situations décrites en Fig. 1.3, c.-à-d. de droite à gauche : $\rho = 0.15$, $\rho = 0.8$, $\rho = 1.2$ et $\rho = 2.7$.

- La première colonne correspond à la stabilisation de l'équilibre trivial du SP par le NES décrite en Fig. 1.3(a). On observe en Fig. 1.5(e) que le point fixe trivial est l'unique point fixe du système et il est stable, il est donc obligatoirement atteint après une phase lente où la trajectoire longe $\mathcal{M}_0^{\mathrm{a},1}$.

- La deuxième colonne correspond au régime périodique de faible amplitude décrit en Fig. 1.3(b). On observe en Fig. 1.5(f) que le point fixe trivial est maintenant instable et la présence d'un point fixe non trivial stable qui est donc atteint également après une phase lente où la trajectoire longe $\mathcal{M}_0^{\mathrm{a},1}$. Ce scenario pour le flot de modulation explique la présence d'un régime périodique stable pour le système initial.

- La troisième colonne correspond au SMR décrit en Fig. 1.3(c). On observe en Fig. 1.5(g) qu'il n'y a plus de point fixe stable sur la partie attractive gauche de la variété critique. Par conséquent, après une phase lente où de nouveau la trajectoire longe $\mathcal{M}_0^{\mathrm{a},1}$, le point-col gauche p^{CG} est

atteint et la variété critique devient répuslive. Le flot de modulation effectue donc un saut horizontal rapide vers p^{U}. Une deuxième phase lente sur $\mathcal{M}_0^{\mathrm{a},2}$ se produit jusqu'au point-col droit p^{CD} où un second saut se produit. Une troisième phase lente se produit sur $\mathcal{M}_0^{\mathrm{a},1}$ jusqu'à p^{G} et ainsi de suite. Ce scénario d'*oscillations de relaxations* du flot de modulation est rendu possible par la présence d'un point fixe instable sur la partie attractive droite $\mathcal{M}_0^{\mathrm{a},1}$ de la variété critique et situé au delà du point p^{U} (cf. Fig. 1.5(g)) ce qui empêche la trajectoire d'atteindre le point fixe stable de grande amplitude.

- La quatrième colonne correspond au régime périodique de grande amplitude décrit en Fig. 1.3(d). Contrairement au scénario précédent, le point fixe instable le plus à droite est maintenant situé avant le point d'arrivée (p^{U} sur la variété critique et la trajectoire atteint le point fixe stable de grande amplitude. Ce scénario se produit également si les point fixes M_1^e et M_2^e n'existent plus, ce qui se produit quand on augmente encore la valeur de ρ.

Remarque 1.6 (Régimes inoffensifs et dangereux). Nous qualifierons parfois les situations présentées dans les trois premières colonnes de la Fig. 1.5 de *situations (ou régimes) inoffensives* (*harmless situations*) et celle de la quatrième colonne de *situation (ou régime) dangereuse* (*harmful situation*).

L'analyse précédemment décrite peut être qualifiée d'analyse de stabilité globale. Il y a en effet présence, pour certaines valeurs du paramètre de bifurcation, de deux solutions stables pour le flot de modulation : une solution périodique (les oscillations de relaxation) et un point fixe (c'est le cas montré en Fig. 1.5(g)). Dans un tel cas de stabilité multiple, l'analyse locale (qui détermine la stabilité locale des positions d'équilibre) n'est pas suffisante pour savoir quel régime sera effectivement atteint. Il est nécessaire pour cela de connaître les trajectoires du système dans l'espace des phases, ce qui est rendu possible ici d'une part par la partition du flot de modulation en deux échelles de temps et d'autre part par le fait que la variété critique soit unidimensionnelle. Ceci permet en effet de déduire aisément la trajectoire du système car sur un objet unidimensionnel il n'y a que deux sens possibles, à droite ou à gauche, ce qui n'est plus le cas pour un objet au moins bidimensionnel où il y a une infinité de trajectoires possibles (ce cas sera étudié en Section 1.2.3 ci-dessous).

Prédiction théorique de la limite de fonctionnement. À partir de la description des deux derniers scénarios précédents (cf. Figs 1.5, troisième et quatrième colonnes) nous pouvons définir la limite d'atténuation (notée ρ_0^*) comme la valeur du paramètre de bifurcation ρ pour laquelle l'ordonnée r_2^e du point fixe M_2^e devient plus petit que r^{CG} ou celle où les points fixes M_1^e et M_2^e n'existent plus (voir Éq. (1.28)).

À partir des Éqs. (1.17) et (1.27) la solution de $r_2^e = r^{\mathrm{CG}}$, ou de façon équivalente $s_2^e = s^{\mathrm{U}}$, est obtenue et s'écrit :

$$\rho_0^{\mathrm{U}} = \frac{\mu\left(5 - 3\mu^2 + 4\sqrt{1-3\mu^2}\right)}{\left(\mu^2+1\right)^2}. \tag{1.29}$$

L'expression (conditionnelle) de ρ_0^* est donc finalement :

$$\rho_0^* = \begin{cases} \rho_0^{\mathrm{U}} \text{ (Éq. (1.29))}, & \text{si} \quad \mu < \frac{1}{2} & \text{(1.30a)} \\ \rho^{\mathrm{S}} \text{ (Éq. (1.28))}, & \text{si} \quad \mu > \frac{1}{2}, & \text{(1.30b)} \end{cases}$$

avec $\mu = \frac{1}{2}$ la valeur de μ solution de $\rho_0^{\mathrm{U}} = \rho^{\mathrm{S}}$.

L'expression précédente de la limite d'atténuation ne dépend pas de la raideur non linéaire α du NES mais seulement de son coefficient d'amortissement μ. Ceci peut paraître contre-intuitif mais il faut noter que la méthode présentée ci-dessus ne se base que sur la nature des régimes et non sur l'amplitude de ces derniers. Il se peut donc par exemple qu'un SMR ait une amplitude (reliée elle à la raideur cubique du NES) proche du cycle limite que l'on souhaite atténuer et que le NES perde son

intérêt. Il est important d'avoir ceci en tête si l'on souhaite utiliser ce genre de méthode analytique pour la conception d'un NES.

Nous disons ici que l'expression est obtenue en faisant appel à une approximation d'ordre 0 car elle est déduite du comportement asymptotique du flot de modulation quand $\epsilon \to 0$. Nous verrons en Section 1.2.5 que cette prédiction peut être améliorée en sortant du cadre de l'approximation d'ordre 0.

1.2.2 Cas d'un système mécanique auto-entretenu connecté à un réseau de NES

Cette section décrit les résultats principaux publiés dans deux articles co-écrits avec Sergio Bellizzi (ancien Directeur de Recherche CNRS au LMA et aujourd'hui retraité). Dans le premier [a7] nous étendons l'analyse précédente au cas d'un oscillateur de VdP couplé à un réseau de NES en parallèle. Le second [a8] (reproduit an Annexe A) généralise l'approche proposée dans [a7] à l'analyse du comportement d'un système mécanique auto-entretenu à plusieurs N ddl (le système primaire ou SP) et connecté à un ensemble de M NES. Les équations du modèle sont détaillées en Section D.2.1.

1.2.2.1 Réduction de la dynamique du système primaire

Dans [a8], nous faisons l'hypothèse que le système primaire (SP) ne possède qu'un mode instable, c.-à-d. que l'analyse modale de ce dernier ne met en évidence qu'un seul mode dont la valeur propre a une partie réelle qui peut devenir positive. Dans ce cas il est possible de réduire la dynamique du SP en ne conservant que le mode instable. Cette étape, détaillée en Annexe A.2.2, est brièvement rappelée ici. Elle consiste à écrire le SP dans l'espace des phases. Dans ce cas les équations du mouvement du système couplé (SP + réseau de NEs) s'écrivent de la manière suivante :

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \epsilon \mathbf{F}\left(\mathbf{y}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}\right) \tag{1.31a}$$

$$\mathbf{G}\left(\mathbf{y}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}}\right) = 0 \tag{1.31b}$$

où $\mathbf{y} = (v_1, \ldots, v_N, \dot{v}_1, \ldots, \dot{v}_N)^T$ est le vecteur d'état du SP (cf. Éq. (A.10a)) et $\mathbf{F}$ est une fonction vectorielle prenant en compte les non-linéarités du SP et le couplage avec le réseau de NES, ici représenté par le vecteur des déplacements relatifs $\mathbf{w}$ (cf. Éq. (A.10b)). La fonction $\mathbf{F}$ est explicitée par l'Éq. (D.6). La fonction vectorielle $\mathbf{G}$ représente la dynamique du réseau de NES couplé au SP. Le paramètre ϵ est encore reli au rapport de masse entre le SP et le réseau de NES et est supposé petit, c.-à-d. $0 < \epsilon \ll 1$. La matrice $\mathbf{A}$ n'étant pas symétrique, sa diagonalisation doit nécessairement être effectuée en utilisant la propriété de biorthogonalité des vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_i$ $(i = 1, \ldots, 2N)$ et à gauche $\mathbf{l}_j$ $(j = 1, \ldots, 2N)$ de $\mathbf{A}$ correspondant respectivement aux problèmes aux valeurs propres suivants :

$$\mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}^T\mathbf{L} = \mathbf{L}\mathbf{\Lambda}. \tag{1.32}$$

avec

$$\mathbf{R} = [\mathbf{r_1}\ \mathbf{r_1^*}\ \ldots\ \mathbf{r_N}\ \mathbf{r_N^*}] \quad \text{et} \quad \mathbf{L} = [\mathbf{l_1}\ \mathbf{l_1^*}\ \ldots\ \mathbf{l_N}\ \mathbf{l_N^*}] \tag{1.33}$$

les matrices de vecteurs propres à droite et à gauche et $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_1^*, \cdots, \lambda_N, \lambda_N^*)$ où les (λ_i, λ_i^*) $(i = 1, \ldots, N)$ sont les paires de valeurs propres complexes conjuguées correspondantes.

Les vecteurs propres à droite et à gauche, normalisés judicieusement, satisfont aux propriétés de biorthogonalité suivantes :

$$\mathbf{L}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}_N, \tag{1.34}$$

et

$$\mathbf{L}^T\mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{\Lambda}. \tag{1.35}$$

La transformation biorthogonale consiste à introduire les variables complexes q_n et q_n^* $(n = 1, \ldots, N)$ comme suit :

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{q} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{q} = \mathbf{L}^T\mathbf{y}, \tag{1.36}$$

où

$$\mathbf{q} = (q_1, q_1^*, \ldots, q_N, q_N^*)^T. \tag{1.37}$$

L'Éq. (1.36) est introduite dans l'Éq. (1.31a), ce qui donne :

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{\Lambda q} + \epsilon \mathbf{L}^T \mathbf{F}\left(\mathbf{Rq}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}\right) \tag{1.38a}$$

$$\mathbf{G}\left(\mathbf{Rq}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}}\right) = 0 \tag{1.38b}$$

En supposant que les termes du vecteurs $\mathbf{L}^T\mathbf{F}\left(\mathbf{Rq}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}\right)$ restent d'ordre $\mathcal{O}(1)$, nous tirons de (1.38a) que $q_i(t) = q_i(0)e^{\lambda_i t} + \mathcal{O}(\epsilon)$ $(i = 1\ldots, N)$. Nous supposons de plus que seule la première paire de valeurs propres (λ_1, λ_1^*) peut avoir une partie réelle positive. Par conséquent, après un certain temps les composantes q_n et q_n^* $(n = 2, \ldots, N)$ deviennent d'ordre $\mathcal{O}(\epsilon)$ et sont ignorées. Nous avons donc $\mathbf{y} \approx \mathbf{Rq} = \mathbf{r}_1 q_1 + \mathbf{r}_1^* q_1^*$ et nous obtenons :

$$\dot{q}_1 = \lambda_1 q_1 + \epsilon F\left(q_1, q_1^*, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}\right) \tag{1.39a}$$

$$\mathbf{G}\left(\mathbf{r}_1 q_1 + \mathbf{r}_1^* q_1^*, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}}\right) = 0 \tag{1.39b}$$

où $F\left(q_1, q_1^*, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}\right)$ est la première composante du vecteur $\mathbf{L}^T\mathbf{F}\left(\mathbf{r}_1 q_1 + \mathbf{r}_1^* q_1^*, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}\right)$.

1.2.2.2 Flot de modulation et sa variété critique

Dans l'hypothèse d'une résonance interne 1 : 1 entre le mode instable du système primaire et le NES, le flot de modulation (appelé slow flow dans l'Annexe A) est calculé par la CAM. Pour cela nous notons $\lambda_1 = \epsilon\rho + j\omega$ (dans l'hypothèse d'une instabilité faible) et nous introduisons le vecteur complexe $\boldsymbol{\zeta}$ tel que $\boldsymbol{\zeta} = \dot{\mathbf{w}} + j\omega\mathbf{w}$. Nous posons ensuite $q_1 = \phi e^{j\omega t}$ et $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\xi} e^{j\omega t}$, et enfin $\phi = se^{j\delta}$ et $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{diag}\left(e^{j\theta_m}\right)\mathbf{r}$. Après quelques étapes de calcul détaillées en Annexe A.3.1, nous obtenons :

$$\dot{s} = \epsilon f\left(s, \mathbf{r}, \mathbf{\Delta}\right) \tag{1.40a}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{g_1}\left(s, \mathbf{r}, \mathbf{\Delta}, \epsilon\right) \tag{1.40b}$$

$$\dot{\mathbf{\Delta}} = \mathbf{g_2}\left(s, \mathbf{r}, \mathbf{\Delta}, \epsilon\right) \tag{1.40c}$$

où s est la variable lente reliée au mode instable du système primaire, $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_m)^T$ avec r_m $(n = 1\ldots, M)$ des variables rapides reliées à l'amplitude des oscillations de chacun des M NES et $\mathbf{\Delta} = (\Delta_1, \ldots, \Delta_M)^T$ avec $\Delta_m = \theta_m - \delta$ $(m = 1\ldots, M)$ des variables rapides reliées à la différence de phase entre le système primaire et chacun des M NES. Le flot de modulation décrite par l'Éq. (1.40) est donc un système $(2M, 1)$-rapide-lent.

Les sous-systèmes rapide et lent associés à (1.40) s'écrivent respectivement :

$$\dot{s} = 0 \tag{1.41a}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{g_1}\left(s, \mathbf{r}, \mathbf{\Delta}, 0\right) \tag{1.41b}$$

$$\dot{\mathbf{\Delta}} = \mathbf{g_2}\left(s, \mathbf{r}, \mathbf{\Delta}, 0\right) \tag{1.41c}$$

et

$$s' = f\left(s, \mathbf{r}, \mathbf{\Delta}\right) \tag{1.42a}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \tag{1.42b}$$

$$\dot{\mathbf{\Delta}} = \mathbf{0} \tag{1.42c}$$

où comme précédemment $(.)' = \frac{d(.)}{d\tau}$ avec $\tau = \epsilon t$.

Attention :

- pour rester fidèle aux notations utilisées dans [a8], dans cette section les notations r et s sont inversées par rapport à l'exemple décrit en Section. 1.2.1 ;
- f, $\mathbf{g_1}$, $\mathbf{g_2}$ et $\mathbf{\Delta}$ sont respectivement notés $\mathcal{F}$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ et $\boldsymbol{\vartheta}$ en Annexe A (cf. Éq. (A.35)).

Le fait de ne considérer qu'un seul mode instable pour le système primaire implique que la variété critique $\mathcal{M}_0$ de (1.40), définie comme suit

$$\mathcal{M}_0 = \left\{ (s, \mathbf{r}, \mathbf{\Delta}) \in \mathbb{R}^{+^{1+M}} \times [-\pi, \pi]^M \;\middle|\; \mathbf{g_1}(s, \mathbf{r}, \mathbf{\Delta}, 0) = \mathbf{0},\ \mathbf{g_2}(s, \mathbf{r}, \mathbf{\Delta}, 0) = \mathbf{0} \right\}, \tag{1.43}$$

reste unidimensionnelle. La résolution de $\mathbf{g_1}(s, \mathbf{r}, \mathbf{\Delta}, 0) = \mathbf{0}$ et $\mathbf{g_2}(s, \mathbf{r}, \mathbf{\Delta}, 0) = \mathbf{0}$ conduit en effet aux relations suivantes :

$$s^2 = H_m(r_m) \tag{1.44a}$$
$$\Delta_m = G_m(r_m) \quad (m = 1, \dots, M) \tag{1.44b}$$

où chaque fonction $\sqrt{H_m}$ a une forme similaire à la fonction H évoquée en Section 1.2.1.3 (voir Fig. 1.4).

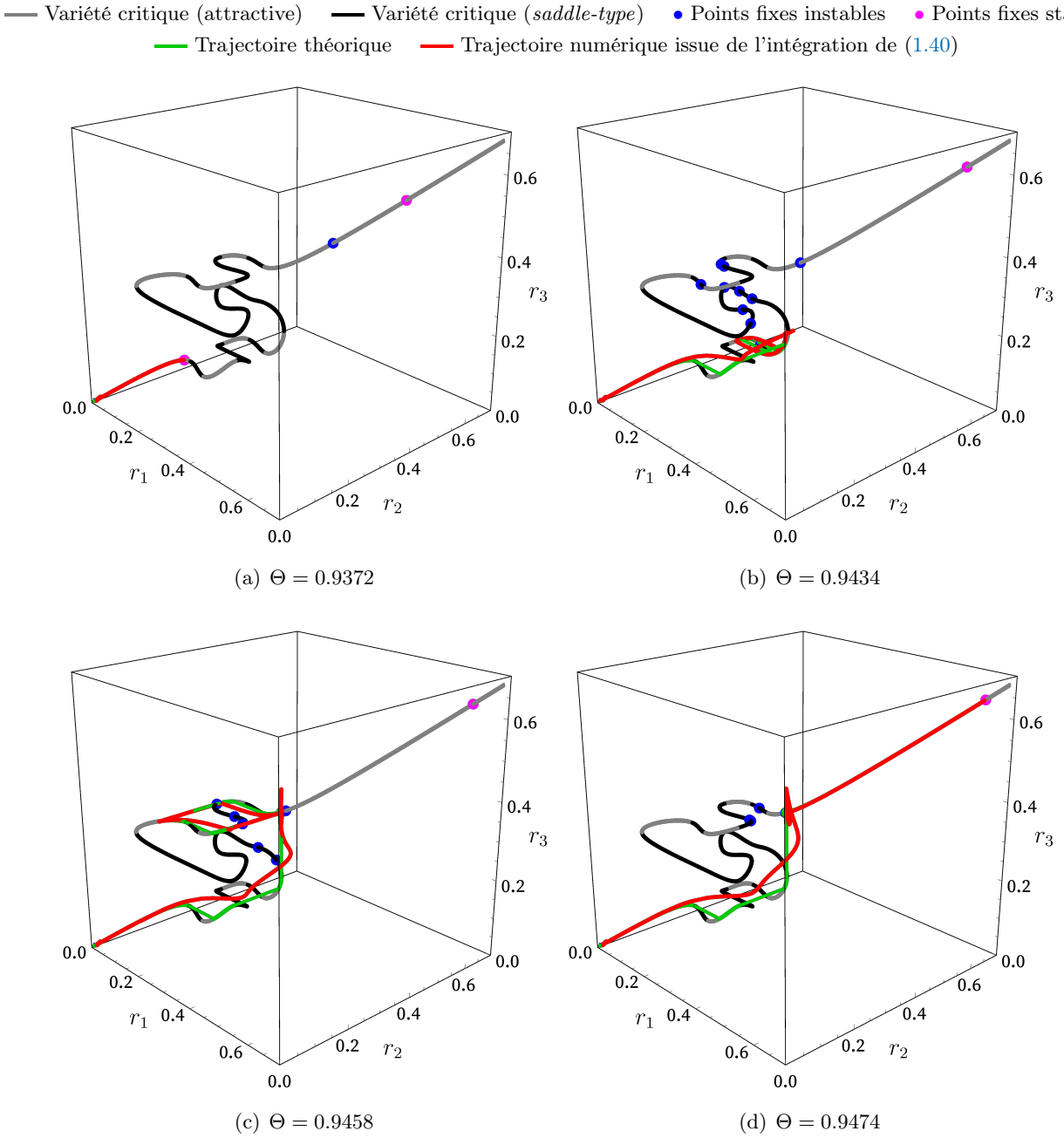
1.2.2.3 Comportement asymptotique du flot de modulation

La variété critique restant unidimensionnelle, une analyse globale de stabilité du flot de modulation (1.40) peut être effectuée en se basant sur les propriétés de la variété critique (cf. Annexe A.3.3) et sur l'étude du sous-système lent (1.42) (cf. Annexe B.3.4). Cela montre que la variété critique unidimensionnelle est composée de branches successivement attractives $\mathcal{M}_0^{\mathrm{a},k}$ $(k = 1, \dots, 2^M)$ et *saddle-type*. $\mathcal{M}_0^{\mathrm{st},l}$ $(l = 1, \dots, 3^M - 2^M)$. En Annexe A, ces branches sont qualifiées de *stable* and *instable* par rapport à la stabilité du point de la variété critique pour le sous-système rapide. Ce vocabulaire est également utilisé dans le cadre de l'AGPS mais je lui préfère maintenant les qualifications attractive, répulsive et *saddle-type* (cf. Définition 1.2). Sur la variété critique, la dynamique lente est décrite par le sous-système lent (1.42) (notamment par ses points fixes qui approchent ceux du flot de modulation global (1.40)). Cette analyse conduit à la prédiction de la limite d'atténuation du réseau de NES (cf. Annexe A.3.5) et plus généralement du comportement asymptotique du flot de modulation. Le mouvement de ce dernier est composé de phases lentes où le flot de modulation évolue dans le voisinage des branches $\mathcal{M}_0^{\mathrm{a},k}$. À la fin de chaque phase lente, la trajectoire arrive sur un point non hyperbolique et effectue un saut (c.-à-d. une phase rapide) vers une autre branche $\mathcal{M}_0^{\mathrm{a},k}$ où débute une nouvelle phase lente.

La méthode est appliquée dans [a8] respectivement à un système frottant à deux ddl reproduisant le phénomène de couplage de mode qui explique le crissement de frein (cf. Annexe A.4.1) couplé à deux NES et à un modèle d'aile d'avion à deux ddl subissant une instabilité de flottement et connecté à un réseau de un à quatre NES (cf. Annexe A.4.2).

Pour illustration, nous reprenons le second exemple dans le cas où trois NES sont utilisés. Le schéma et les équations du modèle sont donnés en Fig. D.3 et par l'Éq. (A.72), respectivement. Le paramètre de bifurcation est Θ la vitesse adimensionnée de l'écoulement d'air dans lequel se situe l'aile et qui crée l'instabilité de flottement. Le modèle sans NES subit une bifurcation de Hopf à $\Theta = 0.933$ après laquelle un cycle limite (que l'on souhaite atténué) est observé. Comme il y a trois NES, le flot de modulation (1.40) est un système $(6, 1)$-rapide-lent. Pour la variété critique une représentation dans l'espace (r_1, r_2, r_3) est choisie (ce qui reviendrait à une représentation unidimensionnelle pour un cas à un NES comme celui décrit en Section. 1.2.1). La Fig. 1.6 montre la trajectoire du flot de modulation dans l'espace (r_1, r_2, r_3) obtenue par l'intégration numérique de (1.40) (en rouge), la variété critique (partie attractive en gris et *saddle-type* en noir), les points fixes de (1.42) (stables en magenta et instables en bleu), qui approchent ceux de (1.40), et ce pour quatre valeurs du paramètre Θ. Comme dans le cas d'un seul NES, la dynamique de (1.40) est décomposée en phases rapides et en phases lentes. Le comportement asymptotique quand $\epsilon \to 0$ du flot de modulation pendant les phases rapides et lentes est décrit respectivement par les sous-système rapide (1.41) et lent (1.42). Ceci permet de déduire la trajectoire théorique du flot de modulation (en vert en Fig. 1.6).

Toujours en considérant une condition initiale proche de zéro les quatre régimes suivants sont observés :



(a) $\Theta = 0.9372$ (b) $\Theta = 0.9434$

(c) $\Theta = 0.9458$ (d) $\Theta = 0.9474$

Figure 1.6. Trajectoire du flot de modulation dans l'espace (r_1, r_2, r_3) obtenue par l'intégration numérique de (1.40) (en rouge), variété critique (partie attractive en gris et répulsive en noir), les point fixes de (1.40) (stables en magenta et instables en bleu) et trajectoire théorique issue de l'analyse de bifurcation globale de (1.40) pour quatre valeurs du paramètre de bifurcation Θ.

Scénario 1, Fig. 1.6(a) : un point fixe stable est présent sur la première partie attractive de la variété critique. Ce point fixe est atteint après une phase lente, ce qui conduit à un régime périodique de faible amplitude pour le système initial.

Scénario 2, Fig. 1.6(b) : un premier cycle d'oscillations de relaxation est observé pour la trajectoire simulée de (1.40) qui est en accord avec le cycle prédit. Ceci correspond à un premier type de SMR pour le système initial.

Scénario 3, Fig. 1.6(c) : un second cycle d'oscillations de relaxation est observé pour la trajectoire du système moyenné (également en accord avec la trajectoire théorique) qui correspond donc à

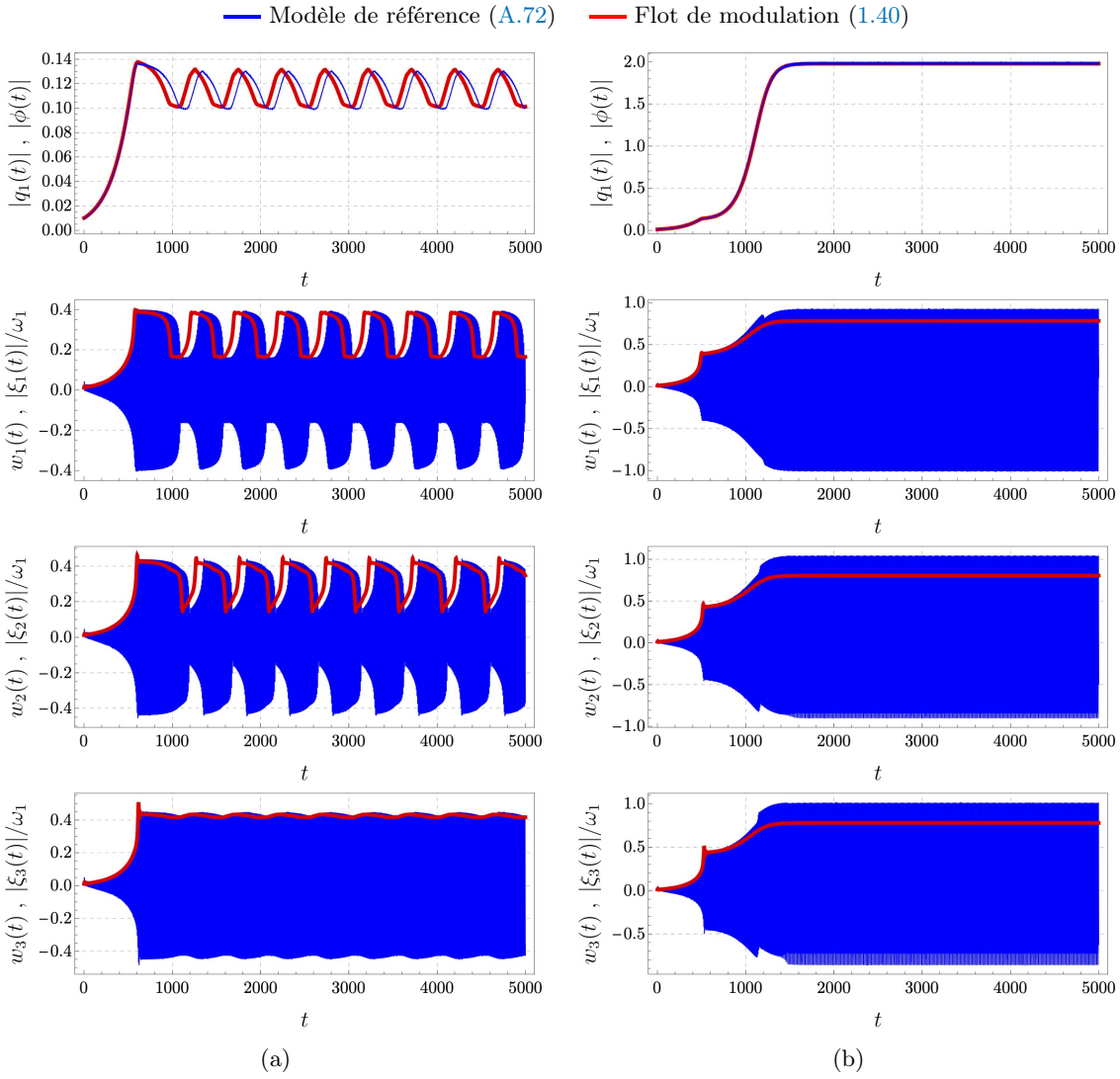


Figure 1.7. Intégration numérique du modèle de référence (A.72) (ligne bleue continue) et du flot de modulation (1.40) (ligne rouge). Paramètres : (a) (resp. (b)) les mêmes que ceux utilisés en Fig. 1.6(c) (resp. Fig. 1.6(d)).

un second type de SMR pour le système initial. Le résultat de l'intégration numérique du modèle d'aile d'avion couplé à trois NES Éq. (A.72) et du flot de modulation (1.40) correspondant à ce scénario est montré en Fig. 1.7(a).

Scénario 4, Fig. 1.6(d) : le point fixe de grande amplitude situé sur la dernière branche attractive de la variété critique est finalement atteint par les trajectoires simulée et théorique. Comme dans le cas à un NES, ce scénario se produit car il n'y a pas de point fixe instable sur la dernière branche attractive de la variété critique pour empêcher le point fixe de grande amplitude d'être atteint. Cependant, cette non présence n'est pas toujours synonyme de non action du réseau de NES car la trajectoire peut avoir été bloquée plus en amont de la variété critique. Ce dernier scénario correspond à un régime périodique pour le système initial d'amplitude comparable à celui du cas sans NES.

Pour des valeurs plus faible de Θ une stabilisation peut également être observée (comme dans le cas de la Fig. 1.3(d)).

1.2.2.4 Discussion

En général, il n'est pas possible ici d'obtenir une expression littérale de la limite d'atténuation. La valeur théorique de cette dernière est définie dans ce cas comme la première valeur du paramètre de bifurcation pour laquelle le scénario 4 précédent est observé pour la trajectoire théorique. Une expression littérale est par contre obtenue dans le cas particulier, étudié dans [a7], d'un oscillateur de VdP (où tout autre oscillateur auto-entretenu à un ddl) couplé un réseau de NES en parallèle. Il est montré (ce qui confirme l'intuition) qu'en terme de limite d'atténuation l'utilisation de M NES identiques est équivalent à un NES dont les paramètres de masse, et d'amortissement sont M fois plus grand.

Les résultats théoriques obtenus dans ces travaux ont permis d'avancer dans la compréhension du comportement dynamique d'un système auto-entretenu couplé à un réseau de NES. Le caractère général de la méthode proposée dans [a8] fait qu'elle pourrait s'inclure dans le cadre plus général de la conception d'un réseau de NES en vue d'application industrielle, où le système primaire pourrait par exemple être un modèle en éléments finis. Il faudrait dans ce cas lever les limitations suivantes de la méthode :

(i) Les systèmes auto-entretenus complexes comme les systèmes tournants (turbomachines, éoliennes...) ou frottants (modèles de frein ou d'embrayage automobile par exemple) peuvent posséder plusieurs modes instables. Il faudrait donc étendre l'analyse précédente à cette situation.

(ii) Les résultats qui découlent de l'analyse asymptotique précédente se déprécient pour les plus « grandes » valeurs du paramètre de perturbation ce qui diminue leur pouvoir prédictif (voir le Tab. A.2 et la Fig. A.9). Ceci s'observe pour une valeur donnée de ϵ lorsque le nombre de NES augmente (voir le Tab. A.3). Il conviendrait donc de proposer une méthode d'analyse basée sur une hypothèse moins restrictive et prenant en compte la valeur du paramètre de perturbation.

C'est deux points sont abordés dans les Sections 1.2.3 et 1.2.5 qui suivent.

En plus des deux articles précédemment cités, ces travaux ont fait l'objet de communications dans des congrès internationaux [ci6, ci7].

1.2.3 Cas d'un système mécanique auto-entretenu à deux modes instables connecté à un NES

1.2.3.1 Contexte et équations du modèle

Dans cette section, sont repris les résultats majeurs de [a9] (reproduit en Annexe B), écrit en collaboration avec Sergio Bellizzi et Sébastien Berger (Professeur des Universités à l'INSA Centre Val de Loire). L'originalité de ce travail est d'une part de montrer la capacité d'un unique NES à limiter les vibrations auto-entretenues causées par deux modes instables simultanément et d'autre part de proposer une analyse permettant la compréhension des régimes de fonctionnement complexes du système causés par le couplage entre les deux modes instables et le NES.

Le modèle d'étude, présenté en Fig. B.1, est un modèle phénoménologique de système de frein à quatre ddl [53] (c.-à-d. le nombre minimal de ddl qui peut être utilisé pour étudier le phénomène de multi-instabilités dans de tels systèmes frottants) couplé à un NES. La dynamique du système primaire est réduite à ses deux modes instables par une transformation biorthogonale similaire à celle présentée en Section 1.2.2. La différence est qu'ici les deux premières paires de valeurs propres (λ_1, λ_1^*) et (λ_2, λ_2^*) peuvent avoir leurs parties réelles positives. Par conséquent, après un certain temps les composantes q_n et q_n^* $(n = 3, \ldots, N)$ deviennent d'ordre $\mathcal{O}(\epsilon)$ et sont ignorées. Nous avons donc $\mathbf{y} \approx \mathbf{Rq} = \mathbf{r}_1 q_1 + \mathbf{r}_1^* q_1^* + \mathbf{r}_2 q_2 + \mathbf{r}_2^* q_2^*$. En reprenant les notations utilisées en Section 1.2.2 les équations

du modèle de réduisent à

$$\dot{q}_1 = \lambda_1 q_1 + \epsilon F_1\left(q_1, q_1^*, q_2, q_2^*, w, \dot{w}\right) \tag{1.45a}$$
$$\dot{q}_2 = \lambda_2 q_2 + \epsilon F_2\left(q_1, q_1^*, q_2, q_2^*, w, \dot{w}\right) \tag{1.45b}$$
$$\mathbf{G}\left(\mathbf{r}_1 q_1 + \mathbf{r}_1^* q_1^* + + \mathbf{r}_2 q_2 + \mathbf{r}_2^* q_2^*, w, \dot{w}, \ddot{w}\right) = 0 \tag{1.45c}$$

où $F_1\left(q_1, q_1^*, q_2, q_2^*, w, \dot{w}\right)$ et $F_2\left(q_1, q_1^*, q_2, q_2^*, w, \dot{w}\right)$ sont les deux premières composantes du vecteur $\mathbf{L}^T\mathbf{F}\left(\mathbf{r}_1 q_1 + \mathbf{r}_1^* q_1^* + \mathbf{r}_2 q_2 + \mathbf{r}_2^* q_2^*, w, \dot{w}\right)$. Comme il n'y a qu'un NES, la variable correspondant au mouvement relatif de ce dernier est maintenant scalaire et notée w. Les détails de cette étape de réduction de la dynamique du système primaire à ses deux modes instables sont détailles en Section B.2.2 (attention, encore un fois les notations diffèrent par rapport à celles utilisées dans cette section, notamment w y est noté v).

Nous arrangeons ensuite les valeurs propres de manière à ce que $\lambda_1^R > 0$ et $\lambda_2^R > 0$ où $\lambda_i = \lambda_i^R + j\lambda_i^I$ pour $i = 1, 2$ et nous supposons que

$$\lambda_1^R = \epsilon\rho_1 \quad \text{et} \quad \lambda_2^R = \epsilon\rho_2 \tag{1.46}$$

et dont les pulsations λ_1^I et λ_2^I sont incommensurables.

Nous supposons maintenant que chaque mode instable oscille à sa pulsation propre λ_1^I $(i = 1, 2)$, c.-à-d. :

$$q_1 = \phi_1 e^{j\lambda_1^I t} \tag{1.47a}$$
$$q_2 = \phi_2 e^{j\lambda_2^I t}. \tag{1.47b}$$

1.2.3.2 Le flot de modulation et sa variété critique

Le flot de modulation est ensuite calculé à partir d'une hypothèse de résonance interne de type $1:1-1:1$. Cela signifie que le mouvement du NES, par accordage à l'une ou l'autre des pulsations λ_1^I et λ_2^I, ne contient que deux composantes fréquentielles. La variable w est donc écrite de la façon suivante :

$$w = w_1 + w_2 \tag{1.48}$$

et les amplitudes complexe ξ_1 and ξ_2 sont introduites telles que :

$$\xi_1 e^{j\lambda_1^I t} = \dot{v}_1 + j\lambda_1^I v_1 \tag{1.49a}$$
$$\xi_2 e^{j\lambda_2^I t} = \dot{v}_2 + j\lambda_2^I v_2. \tag{1.49b}$$

En introduisant les Éqs. (B.14), (1.48) et (1.49) dans l'Éq. 1.45 puis en équilibrant les termes en puissance de $e^{j\lambda_1^I t}$ et $e^{j\lambda_2^I t}$ pour n'en conserver que ceux d'ordre zéro et un, cela aboutit au flot de modulation sous sa forme complexe. Finalement nous introduisons :

$$\phi_1 = s_1 e^{j\delta_1} \tag{1.50a}$$
$$\phi_2 = s_2 e^{j\delta_2} \tag{1.50b}$$
$$\xi_1 = r_1 e^{j\theta_1} \tag{1.50c}$$
$$\xi_2 = r_2 e^{j\theta_2}, \tag{1.50d}$$

ce qui conduit à un flot de modulation réel à six ddl qui est un système $(4, 2)$-rapide-lent et qui s'écrit de la façon suivante :

$$\dot{\mathbf{s}} = \epsilon\mathbf{f}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \tag{1.51a}$$
$$\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{g}(\mathbf{s}, \mathbf{t}, \epsilon) = \mathbf{g}_0(\mathbf{s}, \mathbf{t}) + \epsilon\mathbf{g}_1(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \tag{1.51b}$$

avec $\mathbf{s} = (s_1, s_2)^T$ où s_1 et s_2 sont les variables lentes correspondant aux modes instables du système primaires et $\mathbf{t} = (r_1, r_2, \Delta_1, \Delta_2)^T$ où r_1 et r_2 sont des variables rapides correspondant à l'amplitudes

des oscillations de chacune des composantes fréquentielles du mouvement du NES. Enfin, $\Delta_1 = \delta_1 - \theta_1$ et $\Delta_2 = \delta_2 - \theta_2$ sont les différences de phase entre chaque mode instable du système primaire et les composantes fréquentielles du mouvement du NES correspondantes.

Les sous-systèmes rapide et lent associés à (1.49) s'écrivent respectivement :

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{0} \tag{1.52a}$$

$$\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{g}_0(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \tag{1.52b}$$

er

$$\mathbf{s}' = \mathbf{f}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \tag{1.53a}$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}_0(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \tag{1.53b}$$

où comme précédemment $(.)' = \frac{d(.)}{d\tau}$ avec $\tau = \epsilon t$.

> Attention, comme en Section 1.2.2, les notations r et s sont inversées par rapport à l'exemple décrit en Section. 1.2.1. Par ailleurs, la variété critique n'est plus notée $\mathcal{M}_0$ mais C_0.

La variété critique est définie comme suit

$$C_0 := \left\{ (\mathbf{s}, \mathbf{t}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \mathbf{g}_0(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = 0 \right\}. \tag{1.54}$$

La résolution de $\mathbf{g}_0(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = 0$ conduit aux relations suivantes (voir les détails en Annexes C.4.1) :

$$\cos\Delta_1 = -\frac{a_8 H_{03}(r_1, r_2) + a_7 H_{01}(r_1)}{s_1\left(a_7^2 + a_8^2\right)} \quad \text{et} \quad \sin\Delta_1 = -\frac{a_8 H_{01}(r_1) - a_7 H_{03}(r_1, r_2)}{s_1\left(a_7^2 + a_8^2\right)}, \tag{1.55}$$

$$\cos\Delta_2 = -\frac{a_{10} H_{04}(r_1, r_2) + a_9 H_{02}(r_1)}{s_2\left(a_9^2 + a_{10}^2\right)} \quad \text{et} \quad \sin\Delta_2 = -\frac{a_{10} H_{02}(r_1) - a_9 H_{04}(r_1, r_2)}{s_2\left(a_9^2 + a_{10}^2\right)}). \tag{1.56}$$

et

$$s_1^2 = \frac{H_1(r_1, r_2)}{a_7^2 + a_8^2} \tag{1.57a}$$

$$s_2^2 = \frac{H_2(r_1, r_2)}{a_9^2 + a_{10}^2} \tag{1.57b}$$

1.2.3.3 Informations tirées de l'analyse du sous-système rapide

La variété critique C_0 relie donc les variables s_1, s_2, Δ_1 et Δ_2 à r_1 et r_2 (voir les Éqs. (1.55) à (1.57)) et apparaît comme une variété de dimension 2 (c.-à-d. une surface) paramétrée par les deux variables rapides r_1 et r_2 et évoluant dans un espace des phases de dimension 6. Ici encore, chaque point constituant C_0 est un point fixe du sous-système rapide (1.52) dont les propriétés de stabilité peuvent être déduites de l'analyse de la matrice jacobienne de $\mathbf{g}_0(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ par rapport à $\mathbf{t}$, notée $D_{\mathbf{t}}\mathbf{g}_0(\mathbf{s}, \mathbf{t})$, et évaluée en chaque point de C_0. L'expression de $\mathbf{g}_0(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ est :

$$D_{\mathbf{t}}\mathbf{g}_0(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \begin{pmatrix} \frac{dH_{01}}{dr_1}(r_1) & -H_{03}(r_1, r_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{dH_{02}}{dr_2}(r_2) & -H_{04}(r_1, r_2) \\ \frac{1}{r_1}\frac{\partial H_{03}}{\partial r_1}(r_1, r_2) & \frac{H_{01}(r_1)}{r_1} & \frac{1}{r_1}\frac{\partial H_{03}}{\partial r_2}(r_1, r_2) & 0 \\ \frac{1}{r_2}\frac{\partial H_{04}}{\partial r_1}(r_1, r_2) & 0 & \frac{1}{r_2}\frac{\partial H_{04}}{\partial r_2}(r_1, r_2) & \frac{H_{02}}{r_2}(r_2) \end{pmatrix}. \tag{1.58}$$

L'analyse des valeurs propres de $D_{\mathbf{t}}\mathbf{g}_0(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ met en évidence la structure suivante de C_0 :

$$C_0 = C_{0,r}^a \cup (F^1 \cup C_{0,r}^{st,1}) \cup (F^2 \cup C_{0,r}^{st,2}) \cup (F^3 \cup C_{0,r}^{st,3}) \cup (N_r \cup C_{0,r}^{st,4}) \tag{1.59}$$

illustrée dans le plan (r_1, r_2) en Fig. 1.8. Il y a donc :

- la région attractive $C^a_{0,r}$ (fond blanc en Fig. 1.8) correspondant aux points de C_0 pour lesquels les valeurs propres de $D_{\mathbf{t}}\mathbf{g}_0(\mathbf{s},\mathbf{t})$ sont toutes à partie réelle negatives ;
- les régions *saddle-type* $C^{st,i}_{0,r}$ $(i=1,2,3)$ (fond saumon en Fig. 1.8) correspondant aux points de C_0 pour lesquels certaines valeurs propres de $D_{\mathbf{t}}\mathbf{g}_0(\mathbf{s},\mathbf{t})$ sont à parties réelles négatives et d'autres à parties réelles positives. Ces régions sont entourées de *fold curves* F^i $(i=1,2,3)$ (lignes pleines et pointillées rouges en Fig. 1.8) correspondant à des points de C_0 non hyperbolique dits *singuliers* car impliquant $\det\left(D_{\mathbf{t}}\mathbf{g}_0(\mathbf{s},\mathbf{t})\right) = 0$;
- la région *saddle-type* $C^{st,4}_{0,r}$ (fond vert en Fig. 1.8). Cette région est entourée d'une courbe notée N_r (ligne pleine verte en Fig. 1.8) correspondant à des points de C_0 non hyperbolique dits *réguliers* car impliquant $\det\left(D_{\mathbf{t}}\mathbf{g}_0(\mathbf{s},\mathbf{t})\right) \neq 0$.

Dans la logique de ce qui a été présentée dans les sections précédentes, à partir de la présente analyse du sous-système rapide, il est possible d'obtenir les éléments suivants sur le comportement du flot de modulation : si l'orbite de ce denier n'est pas sur C_0, l'évolution dans le temps est rapide jusqu'à un point de $C^a_{0,r}$ où débute un phase lente décrite par le sous-système lent (cf. section suivante). Nous supposons qu'à la fin de cette phase lente l'orbite arrive en un point d'une des *fold curves* F^i $(i=1,2,3)$ appelé point de saut et noté $\mathbf{r}^J = (r_1^J, r_2^J)^T$. En $\mathbf{r}^J$, C_0 devenant singulière, l'orbite quitte C_0 et saute rapidement sur un autre point $C^a_{0,r}$, dit point d'arrivé et noté $\mathbf{r}^D = (r_1^D, r_2^D)$. De façon similaire à ce qui est effectué dans le cas à un mode instable pour obtenir (1.17), les points de saut et d'arrivée sont les points fixes de l'Éq. (1.52) correspondant aux mêmes valeurs de Δ_1, Δ_2, s_1 et s_2 obtenus par les Éqs. (1.55) à (1.57), respectivement. Par conséquent, les points d'arrivée sont calculés en résolvant l'équation suivante :

$$H_1\left(r_1^D, r_2^D\right) = H_1\left(r_1^J, r_2^J\right) \tag{1.60a}$$
$$H_2\left(r_1^D, r_2^D\right) = H_2\left(r_1^J, r_2^J\right), \tag{1.60b}$$

Résoudre (1.60) pour chaque point de chaque *fold curve* F^i $(i=1,2,3)$ permet d'obtenir les courbes d'arrivée notée A^i_j (lignes pleines et pointillées bleues en Fig. 1.8).

1.2.3.4 Informations tirées de l'analyse du sous-système lent

En suivant la méthodologie déjà décrite plusieurs fois, comme $0 < \epsilon \ll 1$, les points fixes du flot de modulation (1.51) peuvent être approchés par ceux du sous-système lent (1.53).

Le variété critique C_0 relie les variables s_1, s_2, Δ_1 et Δ_2 aux variables r_1 et r_2. Par conséquent, en substituant l'Éq. (B.36) dans l'Éq.(E.30), le sous-système lent peut être écrit uniquement en fonction des variables r_1 et r_2 comme suit :

$$D_{\mathbf{r}}\mathbf{H}(\mathbf{r})\,\mathbf{r}' = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{r}) \tag{1.61}$$

où $\mathbf{r} = (r_1, r_2)^T$,

$$D_{\mathbf{r}}\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H_1}{\partial r_1}(r_1,r_2) & \dfrac{\partial H_1}{\partial r_2}(r_1,r_2) \\ \dfrac{\partial H_2}{\partial r_1}(r_1,r_2) & \dfrac{\partial H_2}{\partial r_2}(r_1,r_2) \end{pmatrix} \tag{1.62}$$

est la matrice jacobienne de $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = (H_1(\mathbf{r}), H_2(\mathbf{r}))^T$ et

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{H_1(r_1,r_2)\left(a_7^2 + a_8^2\right)} \\ 2\sqrt{H_2(r_1,r_2)\left(a_9^2 + a_{10}^2\right)} \end{pmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{r}). \tag{1.63}$$

Dans l'équation ci-dessus, la fonction vectorielle $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ est obtenue en remplaçant dans $\mathbf{f}(\mathbf{s},\mathbf{r})$ les variables s_1, s_2, $\cos\Delta_1$, $\sin\Delta_1$, $\cos\Delta_2$ et $\sin\Delta_2$ par leurs expressions en fonction de r_1 et r_2 (cf. Éqs. (1.55)-(1.57)).

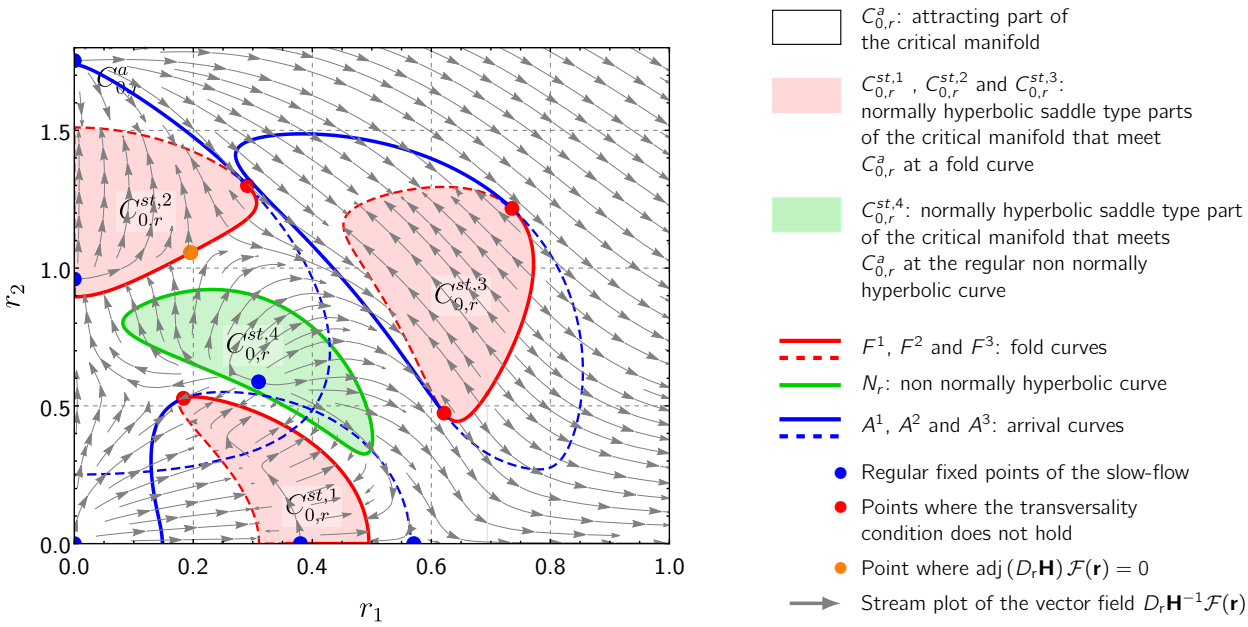


Figure 1.8. Les différentes régions de la variété critique C_0 représentées dans le plan (r_1, r_2). Les points rouges où la *condition de transversalité* (transversality condition) n'est pas respectée sont des points où le champ de vecteur $D_{\mathbf{r}}\mathbf{H}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{r})$ est colinéaire à une *fold curve*. Ceci est discuté en Annexe B.3.5.1. La nature du point orange correspondant à adj $(D_{\mathbf{r}}\mathbf{H})\,\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{r}) = 0$ est également expliquée en Annexe B.3.5.1. *La légende (à droite) de la figure originale en anglais est ici conservée.* Une trajectoire arrivant en un point d'une *fold curve* en trait continu (resp. discontinu) effectue un saut rapide avant d'arriver en un point de l'*arrival curve* opposée également en trait continu (resp. discontinu).

Les point fixes dit régulier de l'Éq. (1.61) sont solutions de :

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \tag{1.64a}$$

$$\det\left(D_{\mathbf{r}}\mathbf{H}(\mathbf{r})\right) \neq 0. \tag{1.64b}$$

Le cas où $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ et $\det\left(D_{\mathbf{r}}\mathbf{H}(\mathbf{r})\right) = 0$ est discuté en Annexe B.3.4.

Les ligne de champ de $D_{\mathbf{r}}\mathbf{H}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{r})$ sont représentées en Fig. 1.8 par des flèches grises et les points fixes réguliers instables sont représentés par des points bleus. Dans l'exemple de la Fig. 1.8 il n'y a que des points fixes instables. Dans la suite, les potentiels points fixes stables seront représentés par des points magentas.

1.2.3.5 Exemples de régimes observés

La correspondance entre les régimes du flot de modulation (1.51) et ceux de la dynamique originale (1.45) est présentée au Tab. 1.1. Pour comparaison, le cas d'un système primaire ne possédant qu'en seul mode instable est aussi présenté. Avant tout analyse, le système primaire est ici linéarisé, c'est la raison pour laquelle une divergence exponentielle est indiquée lorsqu'il n'y a pas d'atténuation.

Comme les pulsations λ_1^I et λ_2^I sont incommensurables, contrairement au cas à un seul mode instable étudié précédemment, les points fixes du flot de modulation (1.51) caractérisent des solutions périodiques (si l'une de ses composante est nulle) mais aussi quasi-périodiques de la dynamique originale de (1.45). Il est aussi possible d'avoir des oscillations de relaxation du flot de modulation qui correspondent à des SMR pour la dynamique originale. Contrairement au cas d'un seul mode instable pour lequel un seul scénario est possible, dans le cas de deux modes instables il y a plusieurs scénarios possibles et davantage complexes. Dans le cas d'un seul mode instable, parce que le sous-système lent se réduit à un système unidimensionnel, seules des solutions d'équilibre peuvent exister à l'échelle de temps lente. Dans le cas de deux modes instables, le sous-système lent se réduit à un

système de dimension 2 et des cycles limites peuvent donc être observés à l'échelle de temps lente. Si c'est le cas, cela produit un régime atténué quasi-périodique pour le système la dynamique originale

Tableau 1.1. Correspondance entre les régimes du flot de modulation et ceux de la dynamique originale dans le cas d'un et de deux modes instables.

Flot de modulation	Dynamique originale si **un mode instable**	Dynamique originale si **deux modes instables**
Le point fixe trivial est atteint	**Stabilisation**	**Stabilisation**
Un point fixe non trivial est atteint	**Régime périodique**	**Régime (quasi-)periodique**
Oscillations de relaxation	**SMR** (un seul scénario possible)	**SMR** (plusieurs scénarios possibles et plus complexes)
Divergence exponentielle	**Pas d'attenuation**	**Pas d'attenuation**
Solutions périodiques à l'échelle de temps lente	Pas possible	Régime quasi-périodique

Un autre élément important dans le cas de deux modes instables, est qu'en général de la multistabilité est observée, c.-à-d. la coexistence de plusieurs solutions stables pour un même jeu de paramètre. Ceci est illustré par les Figs. 1.9 et 1.10 où l'on voit des trajectoires du flot de modulation obtenues par l'intégration numérique de l'Éq. (1.51). Ces deux figures montrent respectivement deux régimes d'oscillations de relaxations différents obtenus pour un même jeu de paramètre du modèle avec des conditions initiales différentes. En Fig. 1.9 la condition initiale est sur la variété critique avec $(r_1(0), r_2(0)) = (0.05, 0.05)$. Dans ce cas, un premier scénario d'oscillations de relaxation est observé conduisant à l'extinction de la deuxième composante fréquentielle, c.-à-d. à $r_2 = 0$ (voir Fig. 1.9(a)). Dans le plan (r_1, r_2), nous observons à nouveau les oscillations de relaxation. En effet, à partir de la condition (point bleu), après un phase lente, la trajectoire atteint une première fois la *fold curve* puis effectue un saut (phase rapide) vers la courbe d'arrivée. Une autre phase lente est observée jusqu'à la *fold curve* opposée ; et ainsi de suite jusqu'à la suppression complète de la deuxième composante fréquentielle.

En Fig. 1.10 la condition initiale est également sur la variété critique mais avec $(r_1(0), r_2(0)) = (0.05, 0.15)$. Nous observons un deuxième scénario d'oscillations dans lequel deux composantes fréquentielles persistent. En Fig. 1.10(a), nous voyons que les trajectoires de chaque composante alternent des phases de grandes et petites amplitudes (quand une composante a une grande amplitude celle de l'autre est petite). Nous observons sur le plan (r_1, r_2) qu'en régime établi (en noir), le cycle d'oscillations de relaxation s'effectue par rapport à deux régions *saddle-type* de la variété critique. De plus, des oscillations à l'échelle de temps rapide sont observées. Ce phénomène, appelé *bursting oscillations* [40], se produit lorsque le point d'arrivée se trouve dans $C^{st,4}_{0,r}$ et donc correspond à un point fixe instable du sous-système rapide qui possède par contre une solution périodique stable.

Davantage de scénarios, ainsi que la comparaison entre comportement du flot de modulation et celui de la dynamique originale est effectuée en Annexe B.4.

1.2.3.6 Discussion

Le fait que la variété critique soit de dimension 2 (i) entraine une explosion du nombre de comportements possibles du flot de modulation (et donc du système mécanique initial) et (ii) empêche d'obtenir simplement la prédiction théorique de ces derniers. En effet, beaucoup de cas de stabilité multiples sont observés ce qui nécessite une analyse de stabilité globale pour connaitre les régimes effectivement atteints par le système à partir d'une condition initiale. L'infinité de trajectoires possibles sur une variété à deux dimensions ne permet pas de connaitre ces trajectoires (comme c'était le cas dans les exemples précédents) sans passer par des intégrations temporelles numérique où une analyse plus poussée du flot de modulations. Sur ce dernier point, on observe par exemple dans les

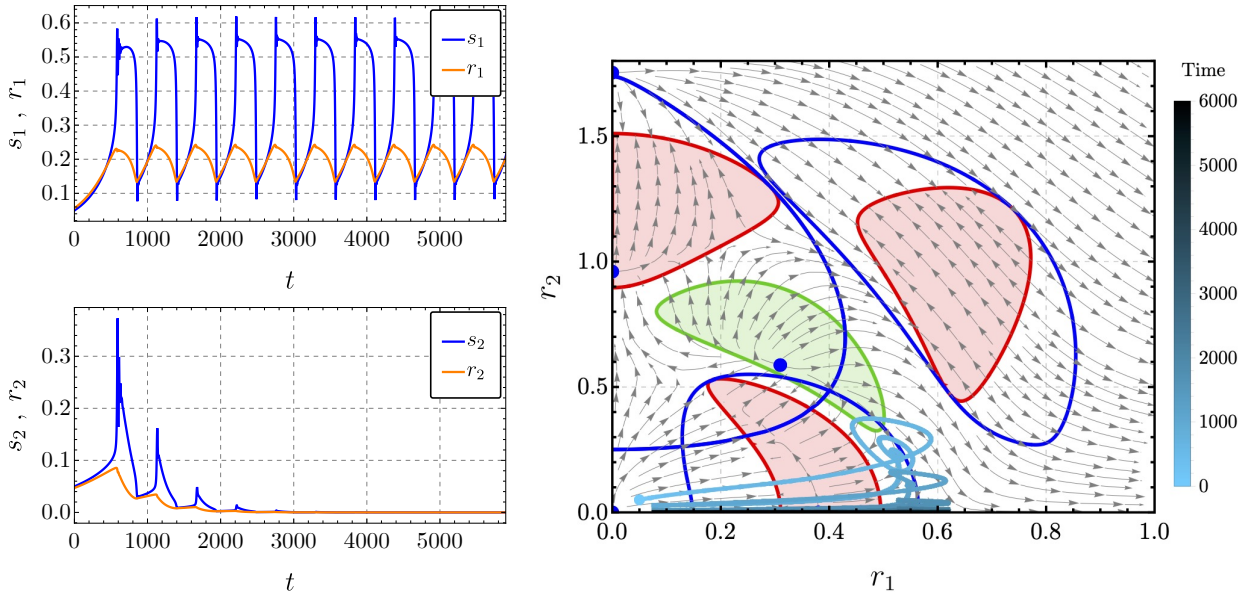


Figure 1.9. (a) Trajectoires temporelles du flot de modulation obtenues par l'intégration numérique de l'Éq. (1.51) avec une condition sur la variété critique et $(r_1(0), r_2(0)) = (0.05, 0.05)$. En haut : $s_1(t)$ et $r_1(t)$ correspondant à la première composante fréquentielle. En bas : $s_2(t)$ et $r_2(t)$ correspondant à la seconde composante fréquentielle. (b) Même simulation représentée dans le plan (r_1, r_2) et superposée à la représentation de la variété critique similaire à celle de la Fig. 1.8. Le point bleu clair correspond à la condition initiale.

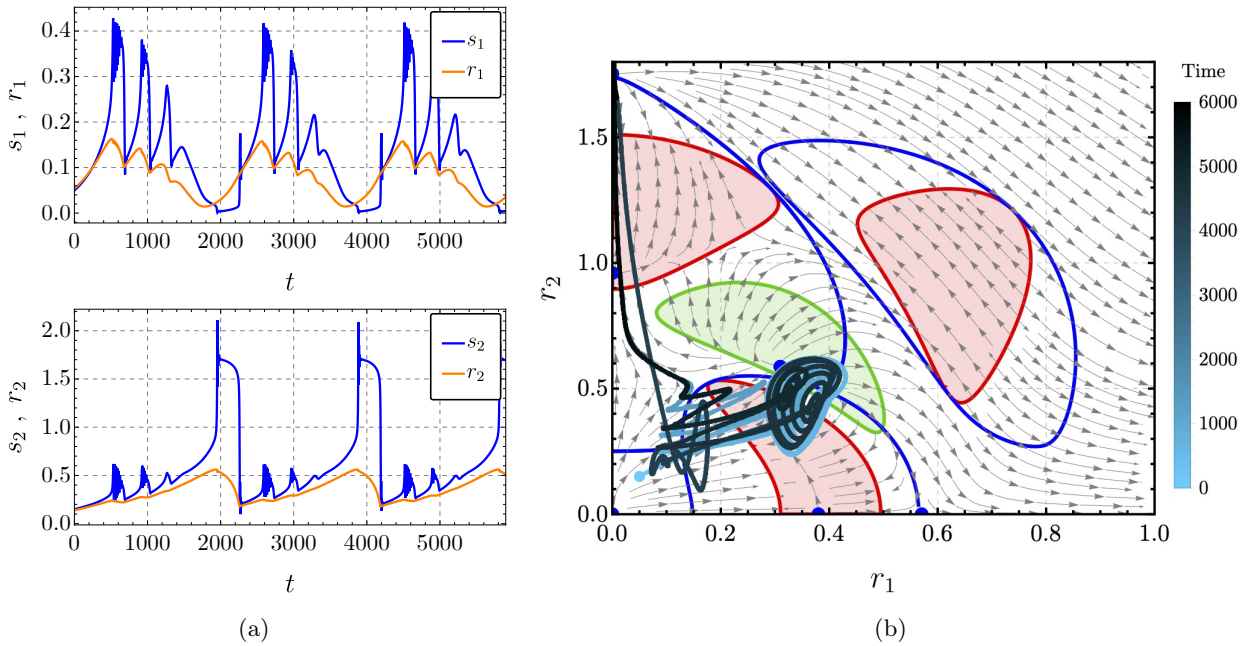


Figure 1.10. Comme en Fig. 1.9 mais avec $(r_1(0), r_2(0)) = (0.05, 0.15)$. Le phénomène de *bursting oscillations* (c.-à-d. solution oscillante de la dynamique rapide (1.52)) est observable.

situations illustrées en Sections B.4.1 et B.4.2 que la variété stable du point fixe instable[3] en bas à gauche des Fig. B.4 et B.5. Ce genre de raisonnement semble plus compliqué à tenir quand il s'agit

3. Dans un système dynamique de dimension 2, une variété stable d'un point fixe instable correspond à une trajectoire arrivant sur le point fixe de façon tangente à une direction propre correspondant à une valeur propre à partie réelle négative, dite direction stable du point fixe instable.

de multistabilité impliquant deux cycles stables d'oscillations de relaxation.

L'analyse du flot de modulation dans le cadre de l'approche géométrique des perturbations singulières (qui peut s'avérer assez technique) proposée dans cette section permet la compréhension et la description fine des nombreux régimes observés à l'aide de simulations numériques du modèle.

En plus de l'article précédemment cité, ces travaux ont fait l'objet de communications dans des congrès internationaux [ci6, ci8].

1.2.4 Cas d'un système mécanique auto-entretenu connecté à un NES bistable

Cette section résume les résultats principaux de [a13] reproduis en Annexe C. Le comportement d'un système auto-oscillant couplé à un NES bistable y est étudié.

1.2.4.1 Équations du modèle

Un NES bistable (ou BNES) est un NES avec une raideur cubique tel que considéré dans les sections précédentes auquel un élément de raideur linéaire négative est ajouté. Encore une fois le système primaire considéré est l'oscillateur de VdP (1.3). En notant le paramètre de bifurcation σ à la place de ρ et $-\beta$ (avec $\beta > 0$) la raideur linéaire négative, les équations du mouvement adimensionnées du système s'écrivent :

$$\ddot{x} - \epsilon\sigma\dot{x} + \epsilon\lambda\dot{x}x^2 + x + \epsilon\mu\left(\dot{x} - \dot{y}\right) - \epsilon\beta(x - y) + \epsilon\alpha(x - y)^3 = 0 \tag{1.65a}$$

$$\epsilon\ddot{y} + \epsilon\mu\left(\dot{y} - \dot{x}\right) - \epsilon\beta(y - x) + \epsilon\alpha(y - x)^3 = 0 \tag{1.65b}$$

Les solutions d'équilibre de l'Éq. (E.3) sont la solution triviale :

$$p_0^{\mathrm{st}} = (x_0^{\mathrm{st}}, y_0^{\mathrm{st}}) = (0, 0) \tag{1.66}$$

qui est instable et les deux solutions non triviales suivantes

$$p_1^{\mathrm{st}} = (x_1^{\mathrm{st}}, y_1^{\mathrm{st}}) = \left(0, \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right) \quad \text{and} \quad p_2^{\mathrm{st}} = (x_2^{\mathrm{st}}, y_2^{\mathrm{st}}) = \left(0, -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right). \tag{1.67}$$

qui sont stables s'il n'y a pas d'oscillations auto-entretenues. Pour un NES cubique classique, c.-à-d. $\beta = 0$, la seule position d'équilibre est p_0^{st} est stable s'il n'y a pas d'oscillations auto-entretenues.

1.2.4.2 Comparaison entre NES et BNES en terme de limite d'atténuation

Les spécificités du BNES par rapport au NES sont d'abord présentées en Fig. 1.11 dans laquelle, en fonction de σ, les amplitudes maximales en régime permanent de l'oscillateur VdP seul A_x^{wo}, couplé à un NES A_x^{wNES} et à un BNES A_x^{wBNES} sont comparées. Ces amplitudes sont obtenues à partir de simulations numériques (voir les détails en Annexe C.2.2). L'amplitude théorique du VdP seul (voir l'Éq. (C.6)) est également représentée. Nous pouvons tout d'abord constater que la limite d'atténuation du BNES ($\sigma_{\mathrm{ml}} \approx 6.35$) est plus grande que celle du NES ($\sigma_{\mathrm{ml}}\sigma_{\mathrm{ml}} \approx 2$). De plus, dans les cas inoffensifs - solution périodique (PR pour *periodic regime*) ou SMR (la différence entre ces deux régimes n'est pas visible sur la figure) : de $\sigma \approx 0.4$ à $\sigma \approx 3$ pour le NES et de $\sigma \approx 1.75$ à $\sigma \approx 7.86$ pour le BNES - l'amplitude maximale A_x^{wBNES} est presque 10 fois plus petite que A_x^{wNES}. Cette dernière observation est bien sûr intéressante du point de vue de l'atténuation des vibrations, mais nous verrons dans ce qui suit que cela peut avoir un impact négatif sur la robustesse du BNES.

La Fig. 1.12 représente la limite d'atténuation σ_{ml} en fonction de β et μ dans le cas d'un NES et d'un BNES pour différentes conditions initiales. Ces dernières sont respectivement $(x_0, y_0) = p_0^{\mathrm{st}} + (per, per)$ pour le NES et $(x_0, y_0) = p_1^{\mathrm{st}} + (per, per)$ pour le BNES. La valeur du paramètre de perturbation est respectivement $per = 0.001$, 0.01 et 01 dans les figures C.3(a) à C.3(c). La limite

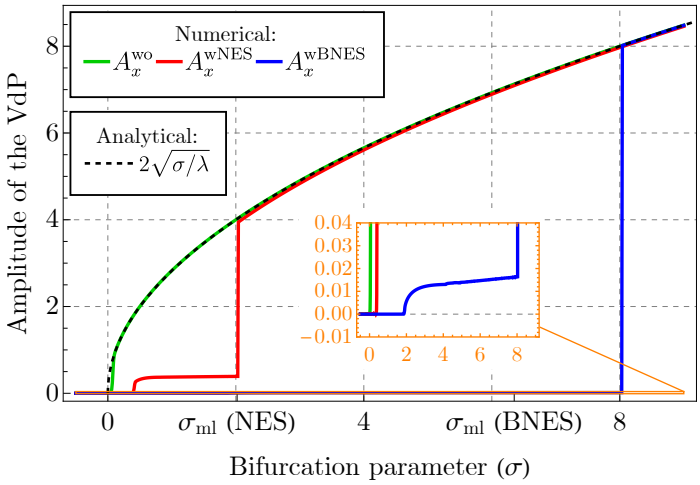


Figure 1.11. Amplitudes maximales en régime permanent de l'oscillateur VdP seul A_x^{wo} (en vert), couplé à un NES A_x^{wNES} (en rouge) et à un BNES A_x^{wBNES} (en bleu) en fonction du paramètre de bifurcation σ. L'amplitude théorique du VdP seul (voir l'Éq. (C.6)) est également représentée.

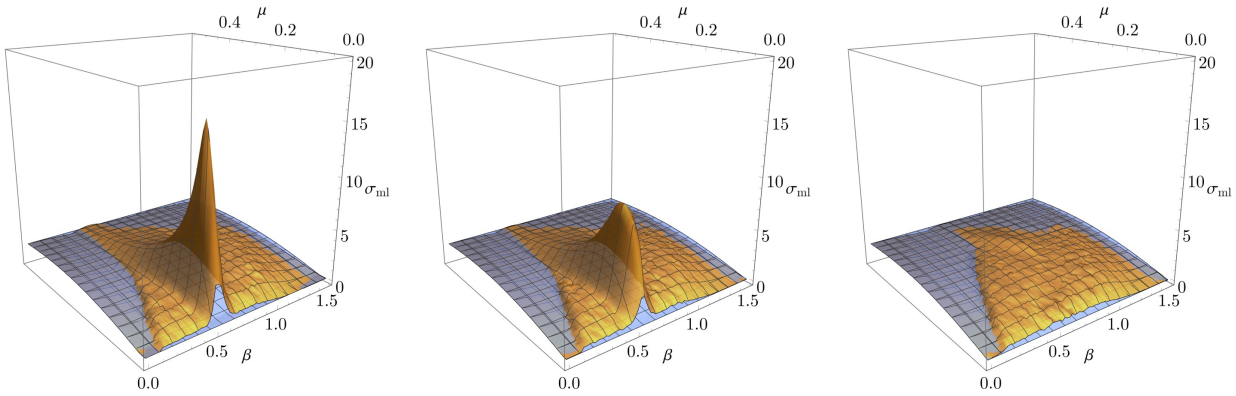


Figure 1.12. Limite d'atténuation σ_{ml}, en fonction de β et μ, d'un NES (surface bleue) et d'un BNES (surface orange). Les conditions initiales sont $(x_0, y_0) = p_0^{st} + (per, per)$ pour le NES et $(x_0, y_0) = p_1^{st} + (per, per)$ pour le BNES, respectivement. Le paramètre de perturbation est $per = 0.001$, 0.01 et 0.1 dans (a) à (c), respectivement.

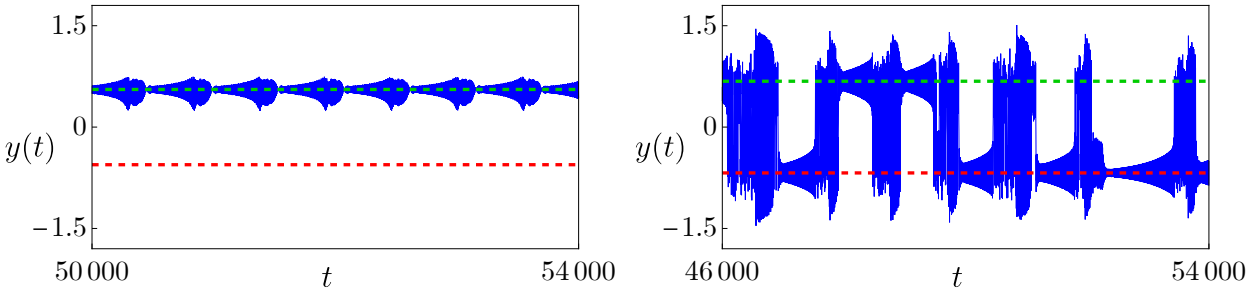
d'atténuation σ_{ml} est calculée en localisant les sauts sur les profils d'amplitude tels que ceux montrés dans la Fig. 1.11 dans laquelle les résultats ont été obtenus de la même manière avec $per = 0.001$. La limite d'atténuation du NES (en bleu en Fig. C.3) n'est pas affectée par le changement des conditions initiales et, bien sûr, ne dépend pas de β. Au contraire, la limite d'atténuation du BNES (en orange en Fig. C.3) est fortement affectée par le changement des conditions initiales. En effet, un maximum très élevé est présent lorsque per est petit. Ce maximum diminue jusqu'à disparaître lorsque per augmente. Cela montre que le BNES peut être très efficace mais que que cela n'est pas robuste puisqu'une petite perturbation peut faire basculer le système d'une situation inoffensive à une situation dangereuse. Cependant, même dans le cas de $per = 0.1$ (voir la Fig. C.3(c)), il est possible de trouver un jeu de paramètres pour lequel le BNES est plus performant que le NES.

1.2.4.3 Identification des régimes de fonctionnement

Les résultats globaux de la Fig 1.12, en terme de limite d'atténuation, ne mettent pas en évidence le comportement dynamique complexe du VdP couplé au BNES. Comme dans le cas d'un NES classique,

lorsque $\sigma > \sigma_{\mathrm{ml}}$ le système (E.3) subit un régime dans le lequel le VdP oscille périodiquement avec une amplitude proche de celle qu'il aurait s'il était seul. Cependant, lorsque $\sigma < \sigma_{\mathrm{ml}}$ une multitude de régimes inoffensifs peut être observée, alors qu'il n'existe que trois réponses dans le cas d'un NES. La figure C.4 (non reproduite dans le corps du texte dans un souci de synthèse) présente sept de ces régimes. La figure montre la série temporelle $y(t)$ obtenue à partir de l'intégration numérique de l'Éq. (1.88), seuls les régimes permanents éant représentés. Les positions d'équilibre y_1^{st} et y_2^{st} (voir Eq. (1.67)) sont également représentés. Les conditions initiales sont les mêmes que celles utilisées en Fig. 1.12(a), c.-à-d. avec $per = 0.001$. De la Fig. C.4(a) à la Fig. C.4(g) les régimes suivants sont identifiés :

- **Fig. C.4(a).** La stabilisation de p_2^{st}.
- **Fig. C.4(b)**. Un PR centré en $y = 0$ (PR1).
- **Fig. C.4(c).** Un SMR centré $y = 0$ (SMR1).
- **Fig. C.4(d).** Un PR centré en $y = y_1^{\mathrm{st}}$ (PR2).
- **Fig. C.4(e).** Un SMR centré en $y = y_1^{\mathrm{st}}$) (SMR2), représentée en Fig. 1.13(a) ;
- **Fig. C.4(f).** Un régime chaotique intermittent de type 1 (CR1) représentée en Fig. 1.13(b) et correspondant à une succession d'oscillations non chaotiques centrées sur $y = 0$, d'oscillations chaotiques puis d'oscillations non chaotique centrées sur $y = y_1^{\mathrm{st}}$ ou $y = y_2^{\mathrm{st}}$. Un zoom de la Fig. C.4(f) est présenté en Fig. 1.14(a). On y voit d'abord des oscillations non chaotiques autour de $y = y_2^{\mathrm{st}}$, puis un mouvement chaotique suivi d'oscillations non chaotiques autour de zéro et à nouveau des oscillations non chaotiques autour de $y = y_2^{\mathrm{st}}$. Concernant ces oscillations autour de $y = y_2^{\mathrm{st}}$, on observe d'abord des oscillations modulées en amplitude qui diminuent brusquement jusqu'à devenir presque nulles ; on voit ensuite des oscillations qui croissent exponentiellement puis le mouvement redevient chaotique. La phase dans laquelle les oscillations autour de $y = y_2^{\mathrm{st}}$ (ou $y = y_1^{\mathrm{st}}$) sont modulées en amplitude n'apparaît que rarement.
- **Fig. C.4(g).** Un régime chaotique intermittent de type 2 (CR2) correspondant à une succession de phases d'oscillations non chaotiques centrées sur $y = 0$ et d'oscillations chaotiques. Ce scénario apparait plus clairement en Fig. C.5(b) qui montre un zoom de la Fig. C.4(g).



(a) (b)

Figure 1.13. Série temporelle $y(t)$ (ligne bleue) obtenues à partir de la simulation numérique de l'Éq. (E.3), seuls les régimes permanents sont représentés. Positions d'équilibre y_1^{st} (ligne pointillée verte) et y_2^{st} (ligne pointillée rouge). Nous avons : (a) un SMR centré sur $y = y_2^{\mathrm{st}}$ (SMR2) et (b) un régime chaotique intermittent de type 1 (CR1), c.-à-d. une succession d'oscillations non chaotiques centrées sur $y = 0$, d'oscillations chaotiques puis d'oscillations non chaotique centrées sur $y = y_1^{\mathrm{st}}$ ou $y = y_2^{\mathrm{st}}$. Les paramètres utilisés sont $\lambda = 0.5$, $\alpha = 2$ et ceux donnés dans le Tab. C.1. Les conditions initiales sont les mêmes qu'en Fig. C.3(a), c.-à-d. $per = 0.001$.

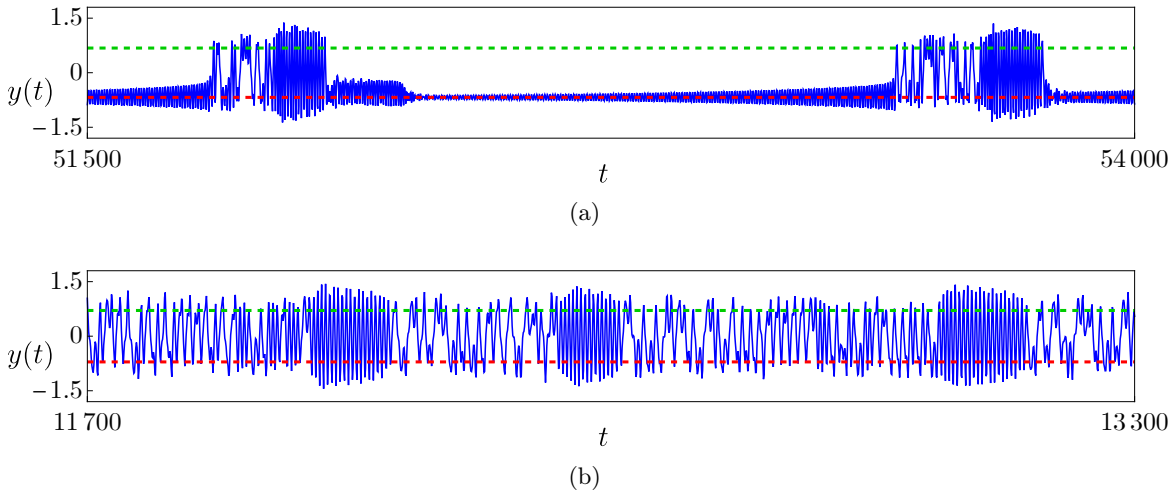


Figure 1.14. Zooms de : (a) Figs. C.4(f) and (b) C.4(g).

Concernant les régimes des Fig. C.4(d) et (e), les oscillations non chaotiques observées sont centrés sur y_1^{st} mais des régimes similaires centrés sur y_2^{st} peuvent également être observés, cela des dépend des conditions initiales choisies. Enfin, les régimes (a) à (c) sont également observés avec un NES cubique classique (bien sûr dans ce cas la stabilisation concerne la solution triviale y_0^{st}) alors que les régimes (d) à (g) sont spécifiques au BNES.

Le maximum de σ_{ml} observé en Fig. C.3(a) correspond à une stabilisation de l'équilibre $y = y_1^{\mathrm{st}}$ (ou $y = y_2^{\mathrm{st}}$). Les régimes observés juste avant de grandes valeurs de σ_{ml} sont les SMR2 ou plus rarement les PR2 (pour des valeurs encore plus faibles du paramètre de perturbation *per*, ces deux peuvent correspondre aux valeurs les plus élevées de σ_{ml}). Les SMR2 correspondent aux situations les plus efficaces dans les cas des Figs. C.3(b) et C.3(c).

1.2.4.4 Calcul du flot de modulation et de sa variété critique

Dans la littérature, la CAM (ou MSHBM) est utilisée pour calculer le flot de modulation d'un système impliquant un BNES dans le cadre l'atténuation d'oscillations libres, forcées et plus récemment d'oscillation auto-entretenues [70] (davantage de références sont fournies en Annexe C.1). Cependant, dans ces études, la CAM (ou MSHBM) est utilisée de la même manière que si un NES classique était considéré, c.-à-d. en supposant que le mouvement du BNES est centré sur $y = 0$. Cela oublie donc une caractéristique essentielle du mouvement d'un système dynamique bistable, à savoir qu'il peut être de moyenne non nulle. L'analyse qui en résulte ne peut donc expliquer que partiellement le comportement dynamique du système. Dans [a13] et dans l'Annexe C le flot de modulation est désigné par l'acronyme AMPD pour *amplitude-phase modulation dynamics*.

Nous proposons ici une méthodologie, basée sur la MSHB que nous avons adaptée pour prendre en compte un mouvement de moyenne non nulle. Pour résumer, la MSHBM se base elle même sur la méthode des échelles de temps multiples (MS pour *multiple scales*) introduite par Nayfeh (voir par exemple [143]). Cette méthode permet de trouver des solutions analytiques approchées d'oscillateurs faiblement non linéaires en supposant que les variables du modèle, notées u_n ($n = 1, \ldots, N$ avec N le nombre de ddl du modèle) ici pour l'exemple, dépendent de plusieurs variables de temps $T_n = \epsilon^n t$ (avec t le temps physique et ϵ un paramètre sans dimension du modèle tel que $0 < \epsilon \ll 1$). Comme $0 < \epsilon \ll 1$ les variables T_n représentent différentes échelles de temps : T_0 l'échelle de temps rapide, T_1 l'échelle de temps lente, T_2 une échelle de temps encore plus lente, etc. Les variables sont ensuite développées en séries entières de ϵ telles que $u_i = \sum_k \epsilon^k u_{i,k}$. Ces séries sont introduites dans les équations du mouvement puis les termes en puissance de ϵ sont équilibrés. Il faut ensuite résoudre à chaque ordre des équations différentielles permettant de calculer successivement les termes $u_{i,k}$ ($k = 0, \ldots, K$ où K est l'ordre maximal considéré). En supposant justement des systèmes faiblement

non linéaires, la méthode est en général mise en œuvre pour qu'à chaque ordre les équations à résoudre soient linéaires. Dans le cas d'un NES (ou d'un BNES), cela n'est pas possible car ce dernier est fortement non linéaire. Lorsqu'une équation est non linéaire, la MSHBM approche sa solution par la méthode de l'équilibrage harmonique (HBM pour *harmonic balance method*). Cela consiste à développer les termes $u_{i,k}$ en séries de Fourier dans lesquelles les coefficients ne sont pas constants (contrairement à la HBM classique) mais lentement variables. Classiquement dans la littérature, ces séries de Fourier sont tronquées à l'ordre 1 sans termes d'ordre 0 (c.-à-d. la moyenne). La méthode proposée ici consiste donc à rajouter ces termes d'ordre 0.

Cette approche est utilisée en Annexe C.3 pour calculer le flot de modulation de l'Éq. (1.88), écrite au préalable avec les variables $u = x + \epsilon y$ et $v = x - y$. Seule la variable v est supposée pouvoir être de moyenne non nulle. Dans sa forme réelle, le flot de modulation prend la forme suivante :

$$\dot{a} = \epsilon f(a, c, \delta) \tag{1.68a}$$
$$\dot{b} = g_1(b, c, \epsilon) \tag{1.68b}$$
$$\dot{c} = g_2(a, b, c, \delta) \tag{1.68c}$$
$$\dot{\delta} = g_3(a, b, c, \delta, \epsilon) \tag{1.68d}$$

où a est l'amplitude des oscillations de la variable u (similaire à la variable r de l'Éq. (1.7)), b représente la partie non oscillante de v et c l'amplitudes de ses oscillations (similaire à la variable s de l'Éq. (1.7)) et δ est la différence de phase entre u et la partie oscillante de v (similaire à la variable Δ de l'Éq. (1.7)). La variable a est la variable lente et b, d et δ étant les variables rapides du flot de modulation. Par rapport aux cas du NES où le flot de modulation (1.7) est (2,1)-rapide-lent, l'Éq. (1.68) est ici (3,1)-rapide-lent du fait de la prise en compte du possible déplacement de la moyenne de la variable v et donc de l'ajout de la variable b.

Les sous-systèmes rapide et lent associés à (1.68) s'écrivent respectivement :

$$\dot{a} = 0 \tag{1.69a}$$
$$\dot{b} = g_1(a, b, c, \delta, 0) \tag{1.69b}$$
$$\dot{c} = g_2(a, b, c, \delta) \tag{1.69c}$$
$$\dot{\delta} = g_3(a, b, c, \delta, 0). \tag{1.69d}$$

et

$$a' = f(a, c, \delta) \tag{1.70a}$$
$$0 = g_1(a, b, c, \delta, 0) \tag{1.70b}$$
$$0 = g_2(a, b, c, \delta) \tag{1.70c}$$
$$0 = g_3(a, b, c, \delta, 0) \tag{1.70d}$$

où comme précédemment $(.)' = \frac{d(.)}{d\tau}$ avec $\tau = \epsilon t$.

En Annexe C.4 nous montrons que la variété critique $\mathcal{M}_0$ de (1.68) s'écrit sous la forme $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_{01} \cup \mathcal{M}_{02}$ avec :

$$\mathcal{M}_{01} = \Big\{ (a, b, c, \delta) \in \mathbb{R}^{+3} \times [-\pi, \pi] \; a = H_1(c) \; , \; b = 0 \; , \; \sin\delta = G_1^{\mathrm{s}}(c) \; , \; \cos\delta = G_1^{\mathrm{c}}(c) \Big\}, \tag{1.71a}$$

$$\mathcal{M}_{02} = \Big\{ (a, b, c, \delta) \in \mathbb{R}^{+2} \times [0, \sqrt{\tfrac{2\beta}{3\alpha}}] \times [-\pi, \pi] \; \Big| \; a = H_2(c) \; , \; b = H_{01}(c) \; , \; \sin\delta = G_2^{\mathrm{s}}(c) \; , \; \cos\delta = G_2^{\mathrm{c}}(c) \Big\}. \tag{1.71b}$$

Les fonctions intervenant dans (1.71) sont données aux Éqs. (C.38) à (C.42). De plus, notons que les deux branches se croisent lorsque $H_{01}(c) = 0$, c.-à-d. pour $c = c^{\mathrm{I}}$ (voir l'Éq. (C.39)).

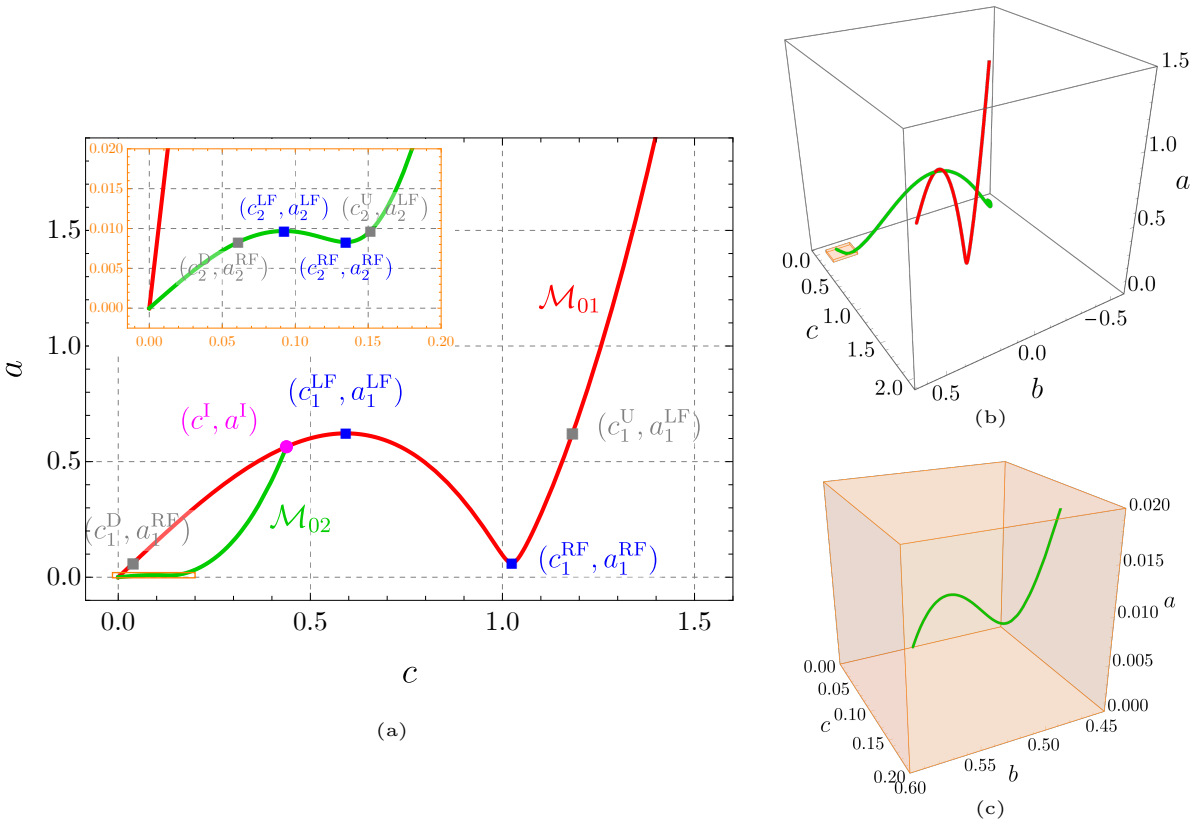


Figure 1.15. Exemple typique de variété critique. (a) Dans le plan (c, a). Les branches $a = H_1(c)$ ($\mathcal{M}_{01}$) et $a = H_2(c)$ ($\mathcal{M}_{02}$) sont tracées en rouge et en vert, respectivement. Les points-col $(c_i^{\mathrm{LF}}, a_i^{\mathrm{LF}})$ et $(c_i^{\mathrm{RF}}, a_i^{\mathrm{RF}})$ $(i = 1, 2)$ (points bleus), les points $(c_i^{\mathrm{U}}, a_i^{\mathrm{LF}})$ et $(c_i^{\mathrm{D}}, a_i^{\mathrm{RF}})$ (points gris) et le point $(c^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{I}})$ (avec $a^{\mathrm{I}} = H_1(c^{\mathrm{I}}) = H_2(c^{\mathrm{I}})$, voir Eq. (C.39)) (point magenta) sont également représentés. Un zoom est effectué pour mieux voir la forme de $\mathcal{M}_{02}$. (b) Dans l'espace (b, c, a). (c) Zoom de (b) correspondant à la zone parallélépipédique orange. Les paramètres suivants sont utilisés : $\mu = 0.1$, $\beta = 0.65$ et $\alpha = 2$.

Un exemple typique de variété critique dans le plan (c, a) est montré en Fig. C.6(a). Les points-col $(c_i\mathrm{LF}, a_i\mathrm{LF})$ et $(c_i^{\mathrm{RF}}, a_i^{\mathrm{RF}})$ $(i = 1, 2)$, les points $(c_i^{\mathrm{U}}, a_i^{\mathrm{LF}})$ et $(c_i^{\mathrm{D}}, a_i^{\mathrm{RF}})$ et le point $(c^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{I}})$ sont représentés. De plus, un zoom a été effectué pour mieux voir la forme de $\mathcal{M}_{02}$. Le même exemple de variété critique dans l'espace (b, c, a) est représenté en Fig. C.6(b).

L'analyse de stabilité de la variété critique est effectuée en Annexe C.4.2. Elle permet de déterminer les partie attractives et *saddle-type* des $\mathcal{M}_{01}$ et $\mathcal{M}_{02}$. Les résultats obtenus sont résumés en Fig. 1.16 dans laquelle la $\mathcal{M}_{01}$ se décompose comme suit :

$$\mathcal{M}_{01} = \mathcal{M}_{01}^{\mathrm{st},1} \cup p^{\mathrm{I}} \cup \mathcal{M}_{01}^{\mathrm{a},1} \cup p_1^{\mathrm{LF}} \cup \mathcal{M}_{01}^{\mathrm{st},2} \cup p_1^{\mathrm{RF}} \cup \mathcal{M}_{01}^{\mathrm{a},2} \tag{1.72}$$

avec $p^{\mathrm{I}} = (a^{\mathrm{I}}, 0, c^{\mathrm{I}}, \delta^{\mathrm{I}})$ (où a^{I} and δ^{I} sont obtenus à partir de c^{I} en utilisant les Éqs. (C.41a) et (C.42a). De plus, b est nul par l'Éq. (C.38a)). La branche $\mathcal{M}_{02}$ est décomposée de la façon suivante :

$$\mathcal{M}_{02} = \mathcal{M}_{02}^{\mathrm{a},1} \cup p_2^{\mathrm{LF}} \cup \mathcal{M}_{02}^{\mathrm{st},1} \cup p_1^{\mathrm{RF}} \cup \mathcal{M}_{01}^{\mathrm{a},2} \cup p^{\mathrm{FP}} \cup \mathcal{M}_{02}^{\mathrm{st},2} \cup p^{\mathrm{I}} \tag{1.73}$$

avec $p^{\mathrm{FP}} = (a^{\mathrm{FP}}, b^{\mathrm{FP}}, c^{\mathrm{FP}}, \delta^{\mathrm{FP}})$ (où a^{FP}, b^{FP} et δ^{FP} sont obtenus à partir de a^{I} par les Éqs. (C.38b), (C.41b) and (C.42b)). Dans les deux expressions précédentes, les exposants « st » et « a » indiquent respectivement les nature *saddle-type* et attractive de la variété critique.

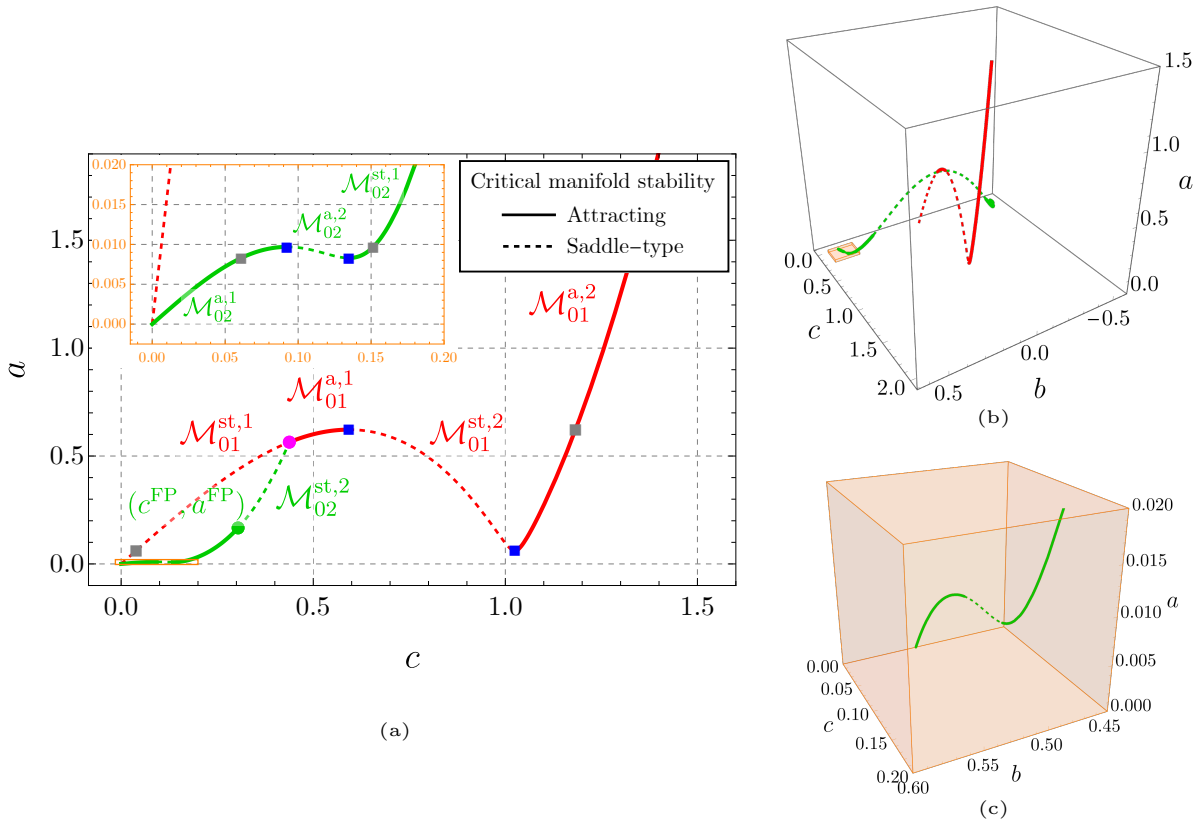


Figure 1.16. Les différentes parties de la variété critique $\mathcal{M}_0$. (a) Dans le plan (c, a). Pour la branche $\mathcal{M}_{01}$ (en rouge) on a (voir Éq. (C.52)) de gauche à droite : la première branche *saddle-type* $\mathcal{M}_{01}^{\mathrm{st},1}$, la première branche attractive $\mathcal{M}_{01}^{\mathrm{a},1}$, la seconde branche *saddle-type* $\mathcal{M}_{01}^{\mathrm{st},2}$ et la seconde branche attractive $\mathcal{M}_{01}^{\mathrm{a},2}$. Ces branches sont respectivement reliées entre elles par le point p^{I} (point magenta) et les points-col gauche et droit p_1^{LF} et $p_1\mathrm{RF}$ (points bleus). Concernant la branche $\mathcal{M}_{02}$ (en vert), on a (voir Éq. (C.53)) de gauche à droite : la première branche attractive $\mathcal{M}_{02}^{\mathrm{a},1}$, la première branche *saddle-type* $\mathcal{M}_{02}^{\mathrm{st},1}$, la deuxième branche attractive $\mathcal{M}_{02}^{\mathrm{a},2}$ et la deuxième branche *saddle-type* $\mathcal{M}_{02}^{\mathrm{a},2}$ qui se termine au point p^{I}. Ces branches sont respectivement reliées entre elles par les points-col gauche et droit p_2^{LF} et p_2^{RF} (points bleus) et le point p^{FP} (point vert). (b) Dans l'espace (b, c, a). (c) Zoom de (b) correspondant à la zone parallélépipédique orange.

Remarque 1.7. La branche $\mathcal{M}_{01}$ (avec $b = 0$) va décrire des situations où le mouvement du BNES est centré en $y = 0$. La branche $\mathcal{M}_{02}$ correspond à des régimes où les BNES oscille autour de l'une de ses positions d'équilibre stables y_1^{st} ou y_2^{st}, ce qui correspond à des valeurs non nulles de b.

Cette analyse de stabilité de $\mathcal{M}_0$ nous permet déjà de donner une description partielle du comportement du flot de modulation. Dans l'espace des phases, si sa trajectoire n'est pas dans le voisinage de $\mathcal{M}_0$, elle évolue rapidement vers une partie attractive de $\mathcal{M}_0$. Ces phases rapides sont approximativement décrites par le sous-système rapide (1.69). De la bistabilité est observée car plusieurs points de $\mathcal{M}_0$ peuvent être stables pour un jeu donné de paramètres et une valeur donnée de la variable lente a (qui, en raison de (C.31a), est un paramètre du sous-système rapide). Dans ce travail, les bassins d'attraction de chaque branche attractive du collecteur critique ne sont pas rigoureusement étudiés. Les autres types de solutions possibles du sous-système rapide (tels que des solutions périodiques, quasi-périodiques ou même chaotiques) ne sont pas non plus explorés.

Dans le voisinage de $\mathcal{M}_0$, la trajectoire du flot de modulation évolue lentement. Ces phases lentes sont approximativement décrites par le sous-système lent (1.70), dont l'analyse est effectuée en

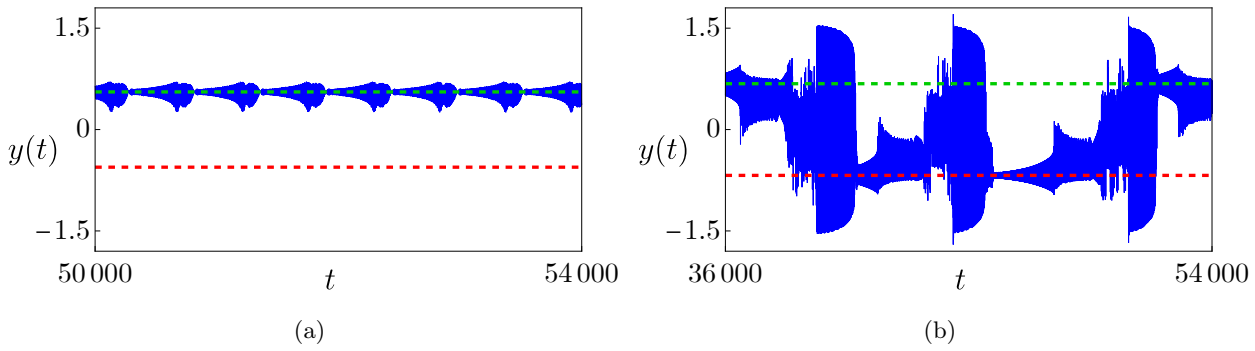


Figure 1.17. Série temporelle $y(t)$ reconstruite à partir de la simulation numérique du flot de modulation (pour cela l'Eq. (C.57) est utilisée). Positions d'équilibre y_1^{st} (ligne pointillé verte) et y_2^{st} (ligne pointillée rouge). En (a) les paramètres utilisés sont les mêmes qu'en Figs. 1.13(a). En (b) la valeur de σ a due être diminuée pour retrouver un comportement similaire à celui de la Fig. 1.13(b).

Annexe C.4.3. En linéarisant le VdP autour de la solution d'équilibre triviale, c.-à-d. en linéarisant $f(a, c, \delta)$ dans (1.70a) autour de $a = 0$, cette analyse permet d'obtenir les expressions analytiques approchées des point fixes non triviaux de flot de modulation (cf. Éqs. (C.71) et (C.72)). Comme évoqué après l'Éq. (1.28), la linéarisation du VdP implique que le point fixe de grande amplitude (correspondant à la solution périodique du VdP seul et que l'on souhaite éviter) n'est pas prédit par cette analyse.

1.2.4.5 Analyse de la stabilité asymptotique globale du flot de modulation

La connaissance des points fixes du flot de modulation et de leur stabilité, ainsi que la structure (forme et stabilité) de la variété critique permet d'effectuer l'analyse stabilité globale du flot de modulation, toujours de façon asymptotique dans le cas de $\epsilon \to 0$. Cela va nous permettre d'interpréter les observations faites sur la Fig. C.4 et décrites en Section 1.2.4.3. Encore une fois, cette analyse est possible car la variété critique est de dimension 1.

L'interprétation des sept régimes observés en Fig C.4 à partir de l'analyse résumée en Section 1.2.4.4 et détaillée en Annexe C.4 est effectuée en Annexe C.5. Nous ne reprenons ici que les deux exemples de la Fig. 1.13.

D'abord, en Fig. 1.17 la série temporelle $y(t)$ est reconstruite à partir de la simulation numérique du flot de modulation (1.68). Pour cela l'Éq. (C.57) qui exprime $y(t)$ en fonctions des variables du flot de modulation est utilisée. Les Figs. 1.17(a) et 1.17(b) montrent respectivement un SMR2 et un CR1. La comparaison avec la Fig. 1.13 montre que le flot de modulation permet de reproduite le comportement du système original (1.88). À noter qu'en Fig. 1.17(b), pour le CR1, la valeur du paramètre de bifurcation σ a due être diminuée pour retrouver un comportement similaire à celui de la Fig. 1.13(b).

Ensuite, en Fig. 1.18, la trajectoire du flot de modulation dans le plans (c, a) est superposé à la variété critique. La structure de la variété critique y est représentée de la même manière qu'aux Figs. 1.15 et 1.16.

- **Fig. 1.18(a).** Un scénario d'oscillations de relaxation par rapport à $\mathcal{M}_{02}$ est observé (similaire à celui observé sur $\mathcal{M}_0$ dans le cas d'un NES classique en Fig. 1.5(g)) en accord avec le SMR2 observé en Fig. 1.13(a). Tant que la condition initiale fait que la trajectoire du flot de modulation arrive sur $\mathcal{M}_{02}^{\text{a},2}$ en dessous du point fixe instable non trivial (point orange le plus à droite dans le zoom de la Fig. 1.18(a)), ces oscillations de relaxation se produiront.

- **Fig. 1.18(b).** Pour des raisons de lisibilité de la figure, seul le régime permanent est représenté. Ce scénario est également illustré en Fig. 1.19 où la trajectoire du flot de modulation est

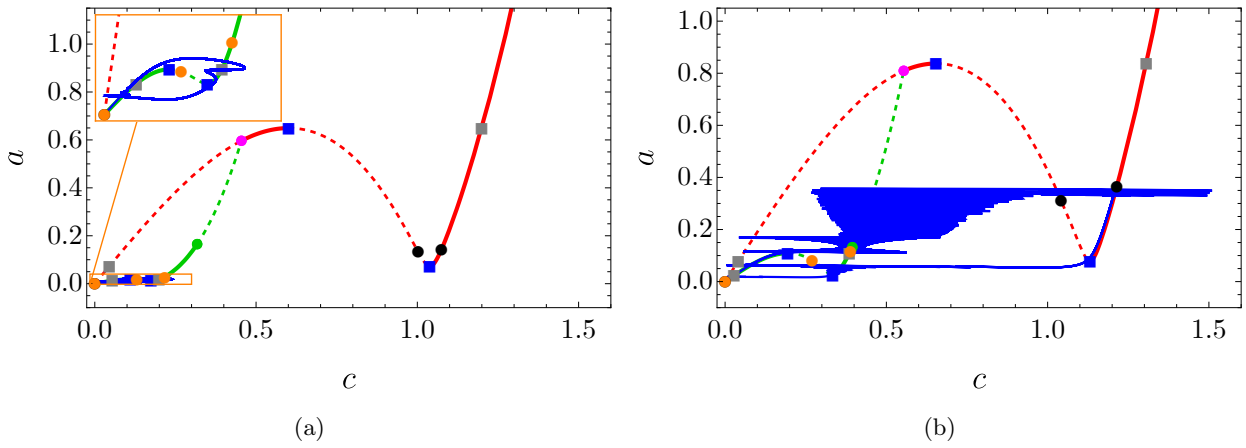


Figure 1.18. Trajectoires du flot de modulation dans le plan (c, a) (obtenues à partir des mêmes simulations qu'en Fig. 1.17) superposées à la variété critique définie par l'Éq. (C.41). La structure de la variété critique est représentée de la même manière que dans les Figs. 1.15 et 1.16. Les points fixes du flot de modulation obtenus en Section C.4.3, c.-à-d. les points fixes triviaux $(0, 0)$ et non triviaux $(c^*_{1,i}, H_1(c^*_{1,i}))$ (en noir) et $(c^*_{2,i}, H_2(c^*_{2,i}))$ (en orange) avec $i = 1, 2$ et $c^*_{1,i}$ et $c^*_{2,i}$ donnés par les Éqs. (C.71) et (C.72), respectivement. Ces points fixes sont représentés par $\star$ lorsqu'ils sont stables et par $\bullet$ lorsqu'ils sont instables.

représentée dans l'espace (b, c, a). Pour ce scénario, lorsque nous parlons d'un régime d'équilibre (resp. périodique) pendant une phase lente du flot de modulation, cela signifie que pour l'ensemble des paramètres et la valeur de a considérés, le sous-système rapide a une solution d'équilibre (resp. périodique) stable. La trajectoire du flot de modulation longe donc une variété invariante qui suit une famille de solutions d'équilibre (resp. périodiques) et qui est paramétrée par la variable lente a. Pour la dynamique « complète » (notée FOD dans la suite pour *full order dynamics*), c.-à-d. qui inclut les oscillations à la fréquence naturelle du VdP, cela correspond à des variétés invariantes qui suivent des familles de solutions périodiques (resp. quasi-périodiques). Les phases successives du mouvement sont décrites en Fig. 1.20 où FE signifie *fast epoch* (phase rapide) et SR *slow epoch* (phase lente). Pendant un cycle complet, la trajectoire du flot de modulation (certain mots en anglais sont conservé pour être en accord avec la figure) :

- (SE1) longe $\mathcal{M}^{\mathrm{a},1}_{02}$ (flot de modulation, equilibrium 1 ; FOD, periodic 1) ;
- (FE2) effectue un saut rapide partant de $(c_2^{\mathrm{LF}}, a_2^{\mathrm{LF}})$ et la branche attractive gauche de $\mathcal{M}_{02}$ est *saddle-type* (i.e., $\mathcal{M}^{\mathrm{st},2}_{02}$) ;
- (SE2) est périodique (quasi-périodique pour la FOD), justement parce que $\mathcal{M}_{02}$ est *saddle-type*, puis chaotique ;
- (FE3) effectue un saut rapide jusqu'à $\mathcal{M}^{\mathrm{a},2}_{01}$;
- (SE3) longe $\mathcal{M}^{\mathrm{a},2}_{01}$ (flot de modulation, equilibrium 2 ; FOD, periodic 2) ;
- (FE1') effectue finalement un saut rapide de $(c_1^{\mathrm{RF}}, a_1^{\mathrm{RF}})$ à $\mathcal{M}^{\mathrm{a},1}_{02}$ et ainsi de suite.

À chaque cycle, il est possible d'atteindre l'une ou l'autre des branches opposées de $\mathcal{M}_{02}$. En ce qui concerne le début des phases chaotiques, nous ne savons pas s'il s'agit réellement d'un mouvement chaotique du sous-système rapide ou d'une solution quasi-périodique. Ce scénario pour le flot de modulation est en accord avec ce que nous avons observé en Fig. 1.14(a) à la différence que les phases Periodic 1 et Quasiperiodic 1 semblent être inversées.

Dans chacune des situations précédentes, on constate que s'il y a un passage de l'orbite du flot de modulation sur $\mathcal{M}_{01}$, c'est le plus grand point fixe instable ($\bullet$ sur $\mathcal{M}^{\mathrm{a},2}_{01}$) qui empêche le système de

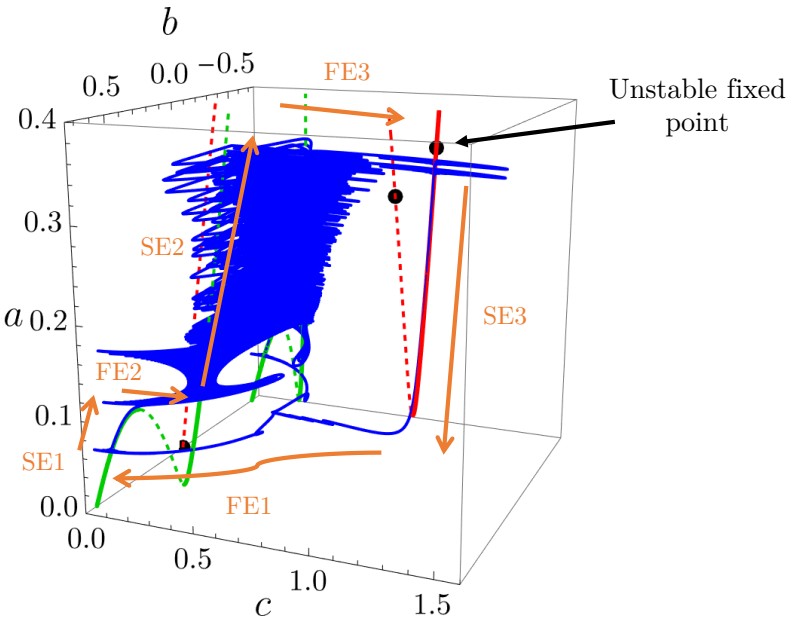


Figure 1.19. Même simulation numérique qu'en Fig. 1.18(b) mais représentée ici dans l'espace (b, c, a) et également superposée à la variété critique $\mathcal{M}_{01}$ (attractive : ligne continue rouge ; *saddle-type* : ligne pointillée rouge) et $\mathcal{M}_{02}$ (attractive : ligne continue verte ; *saddle-type* : ligne pointillée verte). Seuls les points fixes instables du flot de modulation sur $\mathcal{M}_{01}$ sont représentés (• noirs). Les acronymes suivants sont utilisés : FOD pour *full order dynamics*, FE pour *fast epoch* et SE pour *slow epoch* (voir aussi la Fig. 1.20).

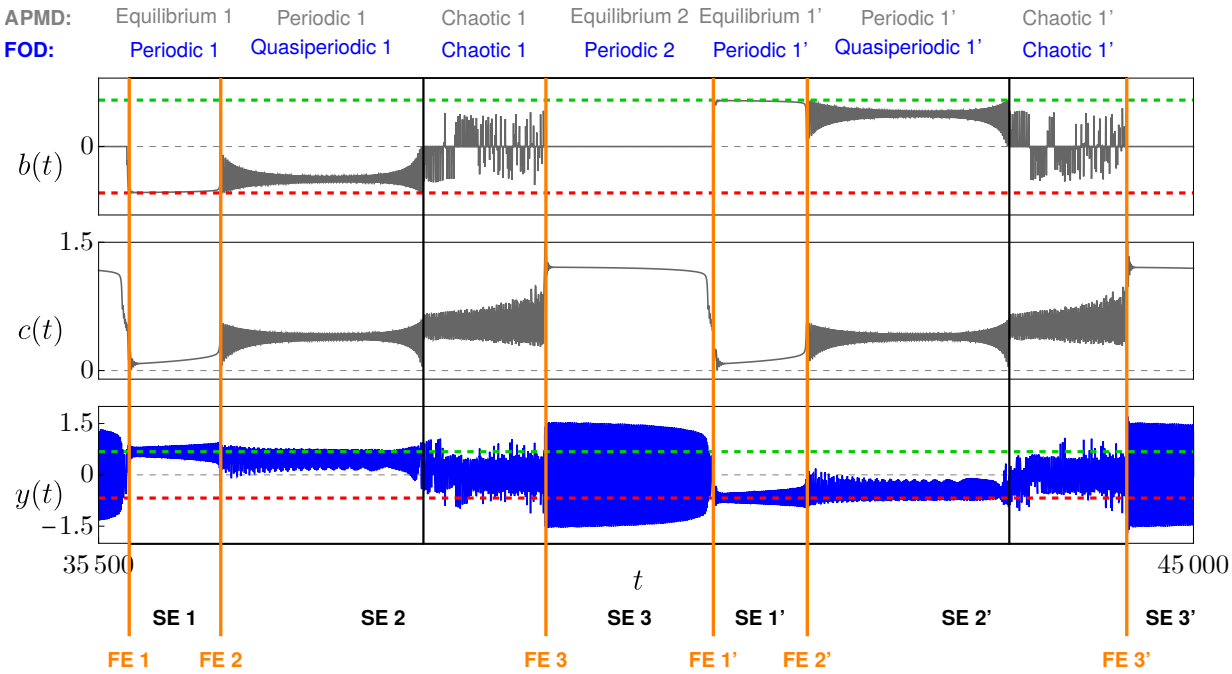


Figure 1.20. Même simulation numérique qu'en Fig. 1.17(b). De haut en bas : séries temporelles $b(t)$ (gris), (c) (gris) et $y(t)$ (bleu). Les positions d'équilibre y_1^{st} (ligne pointillée verte) et y_2^{st} (ligne pointillée rouge) sont représentées en haut et en bas. Les acronymes suivants sont utilisés : FOD pour *full order dynamics*, FE pour *fast epoch* et SE pour *slow epoch*.

basculer dans une situation dangereuse. En effet, si l'orbite se retrouve sur $\mathcal{M}_{01}^{a,2}$ au-dessus de ce point fixe, elle va longer $\mathcal{M}_{01}^{a,2}$ jusqu'à l'infini lorsque le VdP linéarisé est considérée (voir Section C.4.3). Si l'on considère le VdP non linéarisé, la trajectoire atteint alors un point fixe stable correspondant à une grande amplitude d'oscillation pour le VdP, similaire à celle qu'il aurait s'il n'était pas connecté au BNES (cela correspond donc à une situation dangereuse).

Bien entendu, l'analyse de stabilité globale présentée ici n'est que partielle. Dans le futur, il sera nécessaire de rechercher rigoureusement les solutions du sous-système rapide, ainsi que leur stabilité. Il sera alors nécessaire de calculer les variétés invariantes qui suivent ces solutions. Cette présente étude permet cependant d'interpréter un certain nombre de régimes observés sur les simulations numériques originale.

1.2.5 Prédiction de la limite d'atténuation tenant compte de la valeur du paramètre de perturbation

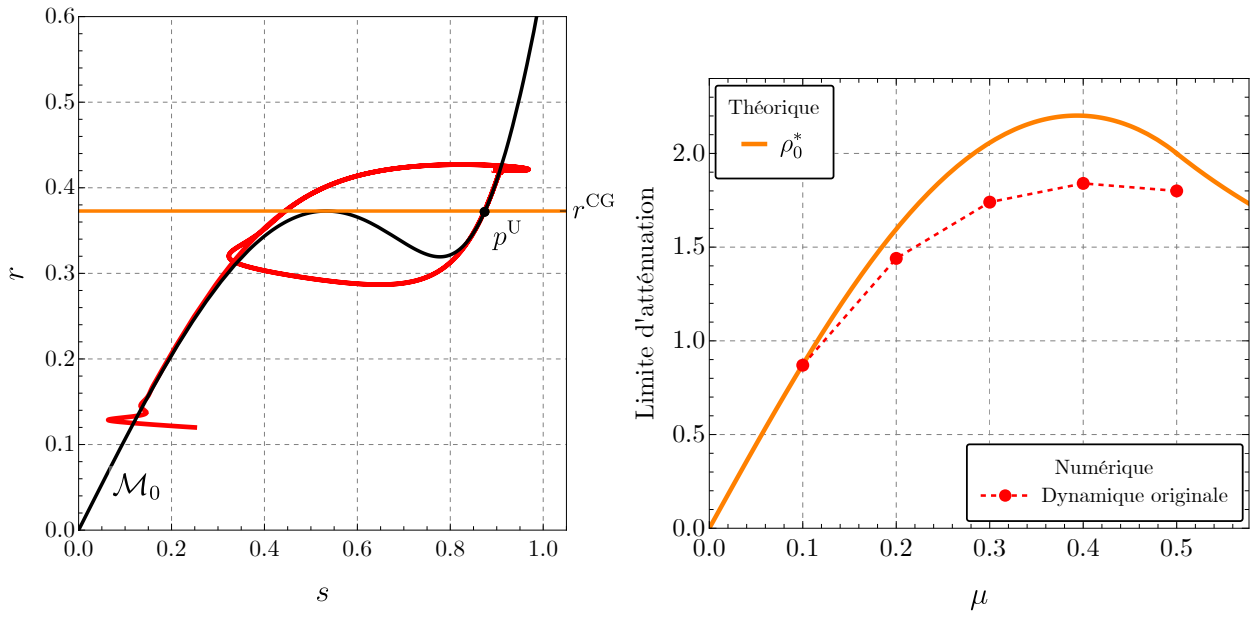
Cette section synthétise les résultats de [a2] (reproduit en Annexe D) et de [cn1]. Dans le premier la structure primaire est un système mécanique ne possédant qu'un seul mode instable identique à celui présenté en Section 1.2.2. Dans le second, et comme dans cette présente section, le système primaire est l'oscillateur de VdP (1.3).

1.2.5.1 Contexte et problématique

L'analyse asymptotique décrite notamment en Section 1.2.1.3 peut être qualifiée d'analyse à l'ordre zéro. Le comportement du flot de modulation y est en effet approché par ceux des sous-systèmes lent et rapide obtenus en posant $\epsilon = 0$. Par conséquent, les résultats qui en découlent sont indépendants de la valeur de ϵ et se déprécient pour les plus « grandes » valeurs de ce dernier ce qui diminue leur pouvoir prédictif. Ceci est illustré en Fig. 1.21. En Fig. 1.21(a) la trajectoire du flot de modulation dans le plan (s, r) obtenue par la simulation numérique de l'Éq. (1.9) pour des paramètres identiques à ceux utilisés en Section 1.2 et $\epsilon = 0.15$. Dans le cadre de l'analyse à l'ordre zéro, le point d'arrivée sur la partie attractive droite de la variété critique est supposé être $p^{\mathrm{U}} = (s^{\mathrm{CG}}, r^{\mathrm{U}} = r^{\mathrm{CG}})$. On observe en Fig. 1.21(a) que l'ordonnée de point d'arrivée est fortement sous-estimée par l'analyse à l'ordre 0. Ceci à pour conséquence la sur-estimation de la limite d'atténuation telle que prédite par l'Éq. (1.2.1.3) et tracée en orange en Fig. 1.21(b) et comparée à la limite d'atténuation calculée à partir de simulations numériques temporelles de la dynamique originale (1.3) (points rouges).

1.2.5.2 Loi d'échelle de la dynamique moyennée au voisinage du point-col gauche de la variété critique

La théorie de Fenichel [62] garantit la persistance des oscillations de relaxation, décrites à la fin de la Section D.3.2, pour $0 < \epsilon \ll 1$ en prouvant que l'Éq. (1.94) a une variété invariante $\mathcal{M}_\epsilon$ au voisinage $O(\epsilon)$ de $\mathcal{M}_0$ et possédant les mêmes propriétés de stabilité que $\mathcal{M}_0$ vis-à-vis des variables rapides. Dans ce cas, concernant le premier saut décrit précédemment, le point de saut à partir duquel la trajectoire quitte la branche attractive de $\mathcal{M}_\epsilon$ n'est plus le point-col $(s^{\mathrm{CG}}, r^{\mathrm{CG}})$. Le point d'arrivée sur lequel la trajectoire de la dynamique arrive après le saut n'est plus $(s^{\mathrm{U}}, r^{\mathrm{CG}})$. L'objectif de ce travail est de déterminer ces points de saut et d'arrivée afin d'obtenir une prédiction analytique de la limite d'atténuation qui, contrairement à (D.36), prenne en compte la valeur de ϵ. Pour cela, il faut tout d'abord déterminer la loi d'échelle de la dynamique lente au voisinage du point-col $(s^{\mathrm{CG}}, r^{\mathrm{CG}})$, c.-à-d. une loi qui décrit la dépendance ϵ de la distance entre $\mathcal{M}_0$ et la trajectoire réelle. Les points de saut et d'arrivée sont alors déduits de cette loi d'échelle. La littérature sur les systèmes dynamiques montre que dans le cas d'une bifurcation col-nœud dynamique cette loi d'échelle est non triviale impliquant des exposants fractionnaires $1/3$ et $2/3$ de ϵ (voir par exemple [22]). Les paramètres utilisés pour obtenir les illustrations de cette section sont : $\lambda = 1$, $\rho = 1.8$, $\mu = 0.4$ et $\alpha = 2$



(a) (b)

Figure 1.21. (a) Trajectoire du flot de modulation dans le plan (s, r) obtenue par la simulation numérique l'Éq. (1.9) pour des paramètres identiques à ceux utilisés en Section 1.2 et $\epsilon = 0.15$ et superposée à la variété critique $\mathcal{M}_0$ (en noir). (b) Limite d'atténuation telle que prédite par l'Éq. (1.2.1.3) (linge orange) et comparée à la limite d'atténuation calculée à partir de simulations numériques temporelles de la dynamique originale (1.3) (points rouges).

Réduction à la variété centrale. Dans cette section, le théorème de la variété centrale (voir par exemple [22, 88]) est utilisé pour réduire la dynamique lente (1.9), au voisinage du point-col $(r^{CG}, s^{CG}, \Delta^{CG})$, à la forme normale d'une bifurcation col-nœud dynamique.

Dans un premier temps on pose $\epsilon = 0$ dans les membres de droite des Éqs. (1.9b) et (1.9c), ce qui donne :

$$r' = f(r, s, \Delta) \tag{1.74a}$$
$$\epsilon s' = g_1(r, s, \Delta, 0) = g_1(r, s, \Delta), \tag{1.74b}$$
$$\epsilon \Delta' = g_2(r, s, \Delta, 0) = g_2(r, s, \Delta). \tag{1.74c}$$

Le but est de réduire la dimension de la dynamique lente par rapport aux variables rapides s et Δ, c'est-à-dire d'obtenir un système équivalent qui ne dépend que d'une seule variable. Pour y parvenir, la matrice jacobienne $\mathbf{J_g}$ de (1.74b-1.74c), évaluée au point-col $(r^{CG}, s^{CG}, \Delta^{CG})$, est donnée par (C.47). Cette dernière a deux valeurs propres réelles $\lambda_a = 0$ et $\lambda_b = -\mu$.

Pour continuer il faut obtenir des non-linéarités polynomiales. En effet, la réduction à la variété centrale nécessite d'isoler les termes linéaires. Un développement limité des fonctions g_1 et g_2 est donc effectué, jusqu'à l'ordre 2 pour les variables s et Δ et jusqu'à l'ordre 1 pour la variable r. En notant $\mathbf{t} = (s, \Delta)^T$ et $\mathbf{t}^{CG} = (s^{CG}, \Delta^{CG})^T$, les Éqs. (1.74b) et (1.74c) peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\epsilon \mathbf{t}' = \left(\mathbf{t} - \mathbf{t}^{CG}\right) \mathbf{J_g}(r^{CG}, \mathbf{t}^{CG}) + \tilde{\mathbf{G}}\left(r - r^{CG}, \mathbf{t} - \mathbf{t}^{CG}\right) \tag{1.75}$$

avec $\tilde{\mathbf{G}} = (\tilde{G}_1, \tilde{G}_2)^T$ où les fonctions $\tilde{G}_1$ et $\tilde{G}_2$ contiennent des termes quadratiques en $(s - s^{CG})$ et $(\Delta - \Delta^{CG})$ et linéaires en $(r - r^{CG})$.

La partie linéaire de l'Éq. (1.75) est diagonalisée par une transformation bi-orthogonale. Pour cela les matrices $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_a\ \mathbf{r}_b]$ et $\mathbf{L} = [\mathbf{l}_a\ \mathbf{l}_b]$ des vecteurs propres droite et gauche de $\mathbf{J_g}(r^{CG}, \mathbf{t}^{CG})$ respectivement sont calculées. La transformation bi-orthogonale consiste à définir les variables q_a et

q_b telles que : $\mathbf{t} - \mathbf{t}^{\mathrm{CG}} = \mathbf{R}\mathbf{q}$ avec $\mathbf{q} = \mathbf{L}^T\left(\mathbf{t} - \mathbf{t}^{\mathrm{CG}}\right)$ et $\mathbf{q} = (q_a, q_b)^T$. Les variables q_a et q_b sont associées aux valeurs propres $\lambda_a = 0$ et $\lambda_b = -\mu$ respectivement. De plus les vecteurs propres sont normalisés tels que $\mathbf{L}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$ et $\mathbf{L}^T\mathbf{J}_{\mathbf{g}}(r^{\mathrm{CG}}, \mathbf{t}^{\mathrm{CG}})\mathbf{R} = \mathbf{\Lambda}$ avec $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_a, \lambda_b) = \mathrm{diag}(0, -\mu)$.

Exprimée en fonction de q_a et q_b, l'Éq. (1.75) devient :

$$\epsilon\mathbf{q}' = \mathbf{\Lambda}\mathbf{q} + \mathbf{G}\left(u, \mathbf{q}\right) \tag{1.76}$$

avec $\mathbf{G}\left(u, \mathbf{q}\right) = \mathbf{L}^T\tilde{\mathbf{G}}\left(r - r^{\mathrm{CG}}, \mathbf{R}\mathbf{q}\right)$ et $u = r - r^{\mathrm{CG}}$. Ce dernier changement de variable implique l'annulation des termes linéaires en q_a et q_b dans $\mathbf{G}$.

La matrice jacobienne $\mathbf{J}_{\mathbf{g}}(r^{\mathrm{CG}}, \mathbf{t}^{\mathrm{CG}})$ possédant une valeur propre nulle et une valeur propre négative, le théorème de la variété centrale stipule qu'au voisinage du point-col $(r^{\mathrm{CG}}, s^{\mathrm{CG}}, \Delta^{\mathrm{CG}})$ le système (1.76) est topologiquement équivalent à $\epsilon q_a' = G_1\left(q_a, \ell(q_a), u\right)$. La fonction ℓ ne peut pas être obtenue explicitement et doit donc être approchée. Par souci de simplicité on choisit $q_b = \ell(q_a) = 0$.

Nous supposons finalement que $f(r, s, \Delta) = f(r^{\mathrm{CG}}, s^{\mathrm{CG}}, \Delta^{\mathrm{CG}}) = f^{\mathrm{CG}}$. De plus, seuls les termes d'ordre 2 en q_a et d'ordre 1 en u sont conservés dans G_1 conduisant à $G_1 \approx a_1 q_a^2 + a_2 u$ où a_1 et a_2 sont donnés par des expressions simples qui dépendent des coefficients μ et α du NES. On obtient ainsi la forme normale de la bifurcation col-nœud dynamique :

$$\hat{\epsilon} q_a' = h(q_a, v) = q_a^2 + v, \tag{1.77a}$$
$$v' = 1 \tag{1.77b}$$

avec $v = \frac{a_2}{a_1}u$, $\hat{\epsilon} = \epsilon f^{\mathrm{CG}}\frac{a_2}{a_1^2}$ et où le changement d'échelle de temps $\tau \to \frac{a_2 f^{\mathrm{CG}}}{a_1}\tau$ a été effectué.

Remarque 1.8 (Bifurcation dynamique). Le système obtenu s'écrit sous la forme normale d'une bifurcation col-nœud pour la variable rapide du système (celle liée au mouvement du NES) dont le paramètre de bifurcation est la variable lente (liée au mode instable du système primaire). La bifurcation est dite *dynamique* par opposition au cas *statique* où le paramètre de bifurcation serait constant. Nous retrouverons ces notions liées à la *théorie de la bifurcation dynamique* au Chapitre 2.

La variété critique de (1.77) consiste en une branche attractive $\mathcal{M}_{0,\mathrm{a}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^- \mid x = -\sqrt{-y}\}$ et une branche répulsive $\mathcal{M}_{0,\mathrm{r}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- \mid x = \sqrt{-y}\}$. La variété critique est hyperbolique excepté en $(0, 0)$.

Pour résoudre analytiquement l'Éq. (1.77) (voir par exemple [22]) on commence par diviser (1.77a) par (1.77b) :

$$\hat{\epsilon}\frac{dq_a}{dv} = q_a^2 + v. \tag{1.78}$$

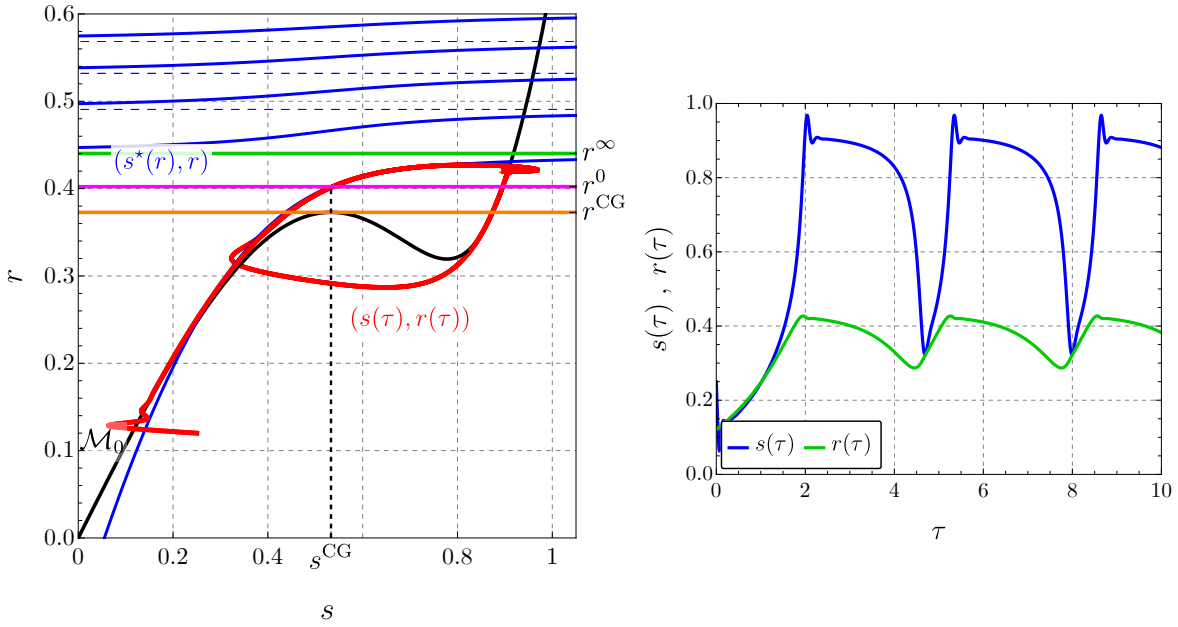
On définit ensuite les variables z et s telles que $q_a = \hat{\epsilon}^{1/3}z$ et $v = -\hat{\epsilon}^{2/3}s$, ce qui conduit à $\frac{dz}{ds} = -z^2 + s$. En posant $z(s) = \varphi'(s)/\varphi(s)$ dans l'équation précédente on obtient $\varphi''(s) = s\varphi(s)$, dont la solution s'exprime à l'aide des fonctions d'Airy. Par conséquent, la solution par rapport à la variable originale q_a, notée $q_a^\star(v)$, est donnée par

$$q_a^\star(v) = \hat{\epsilon}^{1/3}\frac{\mathrm{Ai}'\left(-\hat{\epsilon}^{-2/3}v\right)}{\mathrm{Ai}\left(-\hat{\epsilon}^{-2/3}v\right)}. \tag{1.79}$$

Finalement l'expression analytique approchée de la solution de (1.74) au voisinage de $(r^{\mathrm{CG}}, s^{\mathrm{CG}}, \Delta^{\mathrm{CG}})$ est

$$s^\star(r) = s^{\mathrm{CG}} + \mathbf{r}_{a,1}\hat{\epsilon}^{1/3}\frac{\mathrm{Ai}'\left(-\hat{\epsilon}^{-2/3}\frac{a_2}{a_1}\left(r - r^{\mathrm{CG}}\right)\right)}{\mathrm{Ai}\left(-\hat{\epsilon}^{-2/3}\frac{a_2}{a_1}\left(r - r^{\mathrm{CG}}\right)\right)} \tag{1.80}$$

où $\mathbf{r}_{a,1}$ est la première coordonnée du vecteur $\mathbf{r}_a$.



(a) (b)

Figure 1.22. (a) Variété critique $\mathcal{M}_0$ (1.14) (ligne noire), intégration numérique de la dynamique lente (1.74) (ligne pointillée rouge) et Éq. (1.80) (ligne bleue) et ses asymptotes horizontales (ligne bleue pointillée). Les valeurs de r^{CG}, r^0 et r^∞ sont représentées par des lignes horizontales orange, magenta et verte, respectivement. (b) Séries temporelles de $s(\tau)$ (ligne bleue) et $r(\tau)$ (ligne verte) issues de l'intégration numérique de (1.74).

Deux valeurs particulières de r peuvent être déduites de Éq. (1.80) : la valeur pour laquelle $s^\star(r) = s^{\mathrm{LF}}$, notée r^0, et celle où $s^\star(r)$ tend vers l'infini, notée r^∞. Ces valeurs de r correspondent aux premiers zéros de Ai' et Ai, respectivement, et qui sont des valeurs tabulées [1]. Nous avons donc :

$$s^\star(r) = s^{\mathrm{LF}} \quad \text{pour} \quad r = r^0 = r^{\mathrm{LF}} + K^0\epsilon^{2/3} \tag{1.81}$$

où $K^0 = 1.01879 \times \frac{a_1}{a_2}\left(f^{\mathrm{LF}}\frac{a_2}{a_1^2}\right)^{2/3}$ et

$$s^\star(r) \to \infty \quad \text{pour} \quad r = r^\infty = r^{\mathrm{LF}} + K^\infty\epsilon^{2/3} \tag{1.82}$$

où $K^\infty = 2.33810 \times \frac{a_1}{a_2}\left(f^{\mathrm{LF}}\frac{a_2}{a_1^2}\right)^{2/3}$.

La variété critique $\mathcal{M}_0$ (1.14) (ligne noire), l'intégration numérique de la dynamique lente (1.74) (ligne rouge) et la loi d'échelle (1.80) sont comparées en Fig. 1.22.

Nouvelle prédiction de la limite d'atténuation. Comme nous l'avons vu précédemment, la limite d'atténuation est la valeur de ρ pour laquelle le point fixe s_2^e devient inférieur à s^{A} (l'abscisse du point d'arrivée de la trajectoire sur la variété critique) ou pour lequel s_2^e n'existe plus (voir Éq. (1.28)). Dans l'approximation d'ordre 0, le point d'arrivée est $s^{\mathrm{A}} = s^{\mathrm{U}}$ défini par (1.17). Il n'est pas facile d'obtenir une nouvelle expression de s^{A} à partir de (1.80). Cependant, on peut supposer que le point d'arrivée branche attractive droite de $\mathcal{M}_0$ a une ordonnées située entre r^0 et r^∞. En bornant ainsi l'ordonnée du point d'arrivée, nous allons aussi borner la limite d'atténuation.

Alors que dans le cadre de l'analyse d'ordre 0 la limite d'atténuation était la solution de $r_2^e = r^{\mathrm{CG}}$ (voir Éq. (1.29)), ici la borne supérieure $\rho^*_{\epsilon,\mathrm{sup}}$ est obtenue en résolvant $r_2^e = r^0$, soit :

$$H\left(s_2^e(\rho^*_{\epsilon,\mathrm{sup}})\right) = r^0 = r^{\mathrm{CG}} + K^0(\rho^*_{\epsilon,\mathrm{sup}})\epsilon^{2/3} = H(s^{\mathrm{CG}}) + K^0(\rho^*_{\epsilon,\mathrm{sup}})\epsilon^{2/3}, \tag{1.83}$$

et la borne inférieure $\rho^*_{\epsilon,\text{inf}}$ en résolvant $r_2^e = r^\infty$, soit

$$H\left(s_2^e(\rho^*_{\epsilon,\text{inf}})\right) = r^\infty = r^{\text{CG}} + K^\infty(\rho^*_{\epsilon,\text{inf}})\epsilon^{2/3} = H(s^{\text{CG}}) + K^\infty(\rho^*_{\epsilon,\text{inf}})\epsilon^{2/3}. \tag{1.84}$$

À l'exception des très petites valeurs de ϵ pour lesquelles l'approximation d'ordre zéro est suffisante, la valeur particulière de μ, solution de $\rho_\epsilon^{\text{U}} = \rho^{\text{S}}$, est en général supérieure à $1/\sqrt{3}$ (voir Éq. (1.16)).

Remarque 1.9. Dans [a2] et de [cn1] seule la limite inférieure $\rho^*_{\epsilon,\text{inf}}$ est utilisée et supposée être directement la limite d'atténuation.

La Fig. 1.23 montre la comparaison entre les résultats théoriques proposés ici et des résultats issus de l'intégration temporelle du flot de modulation (1.74) et du système initial (1.3) en terme de limite d'atténuation en fonction de μ (Fig. 1.22(a)) et de ϵ (Fig. 1.22(b)).

On observe que les limites d'atténuation obtenues à partir de simulations temporelles de la dynamique originale sont effectivement bornées par $\rho^*_{\epsilon,\text{inf}}$ et $\rho^*_{\epsilon,\text{sup}}$ et que chacune de ces bornes est plus proche de la valeur numérique que ne l'est la prédiction obtenue à l'ordre zéro ρ^*_0.

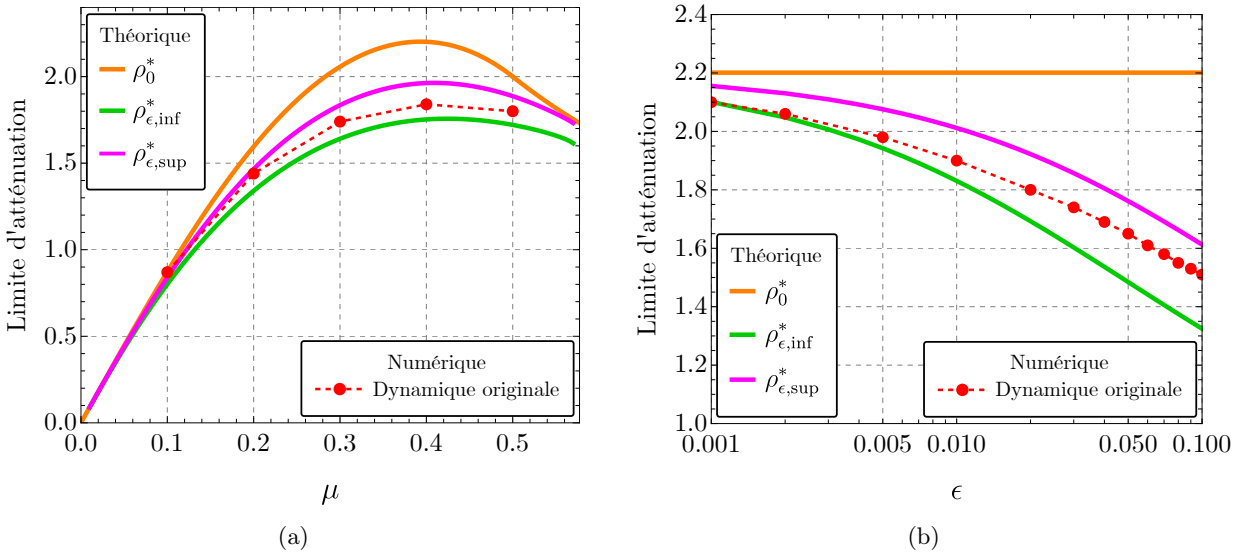


Figure 1.23. Comparaison entre les résultats théoriques et ceux issus de l'intégration temporelle du flot de modulation (1.74) et du système initial (1.3) en terme de limite d'atténuation (a) en fonction de μ et (b) en fonction de ϵ.

1.2.6 Effet d'un forçage stochastique faible sur le phénomène de pompage énergétique

1.2.6.1 Contexte et équations du modèle

Dans cette section qui résume les résultats de [a3] (reproduit en Annexe E), l'influence d'un forçage stochastique de type bruit blanc gaussien sur le comportement dynamique d'un oscillateur de Van der Pol (dont l'équation diffère un peu de celle utilisée dans les sections précédentes). Les

équations du modèle ont la forme suivante :

$$m_1\frac{\mathrm{d}^2y_1}{\mathrm{d}t^2}+c_1^{\mathrm{NL}}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}\left(ry_1^2-R^2\right)+k_1y_1+ c_2\left(\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}\right)+k_2^{\mathrm{NL}}\left(y_1-y_2\right)^3=\hat{\nu}\xi(t) \tag{1.85a}$$

$$m_2\frac{\mathrm{d}^2y_2}{dt^2}+c_2\left(\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}\right)+k_2^{\mathrm{NL}}(y_2-y_1)^3=0 \tag{1.85b}$$

où m_1 and m_2 sont les masses de l'oscillateur de VdP et du NES, respectivement. Le paramètre k_1 est la raideur linéaire de l'oscillateur de VdP et c_1^{NL} et rc_1^{NL} caractérisant respectivement ses amortissements négatifs et non linéaires. Le NES est un oscillateur purement cubique caractérisé par son coefficient d'amortissement linéaire c_2 et sa raideur non linéaire k_2^{NL}. Le terme $\xi(t)$ est un bruit blanc unitaire de moyenne nulle, c.-à-d.

$$\mathbb{E}\left[\xi(t)\right]=0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left[\xi(t)\xi(t+\tau)\right]=\delta(\tau) \tag{1.86}$$

avec $\hat{\nu}$ le niveau de bruit. $\mathbb{E}\left[X\right]$ est l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et δ la distribution de Dirac.

$$\ddot{x}_1+\epsilon\rho\dot{x}\left(rx_1^2-1\right)+x_1+\epsilon\mu\left(\dot{x}_1-\dot{x}_2\right)+\epsilon\alpha(x_1-x_2)^3=\epsilon\nu\xi(t') \tag{1.87a}$$

$$\epsilon\ddot{x}_2+\epsilon\mu\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right)+\epsilon\alpha(x_2-x_1)^3=0. \tag{1.87b}$$

L'Éq. (G.8) est réécrite sous la forme sans dimension suivante :

$$\ddot{x}_1+\epsilon\rho\dot{x}\left(rx_1^2-1\right)+x_1+\epsilon\mu\left(\dot{x}_1-\dot{x}_2\right)+\epsilon\alpha(x_1-x_2)^3=\epsilon\nu\xi(t') \tag{1.88a}$$

$$\epsilon\ddot{x}_2+\epsilon\mu\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right)+\epsilon\alpha(x_2-x_1)^3=0 \tag{1.88b}$$

où $x_i=y_i/R$ $(i=1,2)$, $\omega_1=\sqrt{k_1/m_1}$, $t'=\omega_1 t$, $\dot{\{\}}=d\{\}/dt'$, $\epsilon=m_2/m_1$ qui est ici encore le rapport de masse entre l'oscillateur NES et l'oscillateur VdP, $\rho=c_1^{\mathrm{NL}}R^2/(m_2\omega_1)$, $\mu=c_2/(m_2\omega_1)$, $\alpha=k_2^{\mathrm{NL}}R^2/(m_2\omega_1^2)$ et $\nu=\hat{\nu}/(m_2R\omega_1^{3/2})$. Dans ce dernier cas, l'exposant $3/2$ est obtenu en rappelant qu'un bruit blanc normalisé $\xi(t)$ est défini comme la dérivée temporelle du processus de Wiener normalisé $W(t')$ (aussi appelé *mouvement brownien*). En utilisant la *propriété d'échelle* du processus de Wiener (voir [153], Chap. 7) qui stipule que $W(t'/\omega_1)$ et $1/\sqrt{\omega_1}W(t')$ correspondent aux mêmes processus stochastiques, nous avons donc :

$$\begin{aligned}\xi(t)=\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t}&\sim\omega_1\frac{\mathrm{d}W(\frac{t'}{\omega_1})}{\mathrm{d}t'}\sim\sqrt{\omega_1}\frac{\mathrm{d}W(t')}{\mathrm{d}t'}\\&=\sqrt{\omega_1}\xi(t')\end{aligned} \tag{1.89}$$

qui explique l'expression du paramètre ν ci-dessus.

Enfin, en utilisant le changement de variable $u_1=x_1+\epsilon x_2$ et $u_2=x_1-x_2$ les équations du mouvement (E.3) deviennent :

$$\ddot{u}_1+u_1-\epsilon\left[\rho\dot{u}_1(ru_1^2-1)+u_1-u_2\right]=\epsilon\nu\xi(t') \tag{1.90a}$$

$$\ddot{u}_2+\mu\dot{u}_2+\alpha u_2^3- \epsilon\left[\rho\dot{u}_1(ru_1^2-1)+u_1-\mu\dot{u}_2-u_2-\alpha u_2^3\right]=\epsilon\nu\xi(t') \tag{1.90b}$$

dans laquelle un développement limite du premier ordre autour de $\epsilon=0$ a été réalisé en supposant encore un faible rapport de masse entre le NES et l'oscillateur primaire (c'est-à-dire $0<\epsilon\ll 1$).

Dans les sections suivantes, le temps t' est désigné par t par souci de concision.

1.2.6.2 Équation du flot de modulation stochastique

La méthode de moyennisation stochastique standard (*standard stochastic averaging method*) [169, 191], dont la formulation générale est rappelée en Annexe G.8, est utilisée pour obtenir les équations régissant la flot de modulations stochastique (appelé *stochastic slow flow* en Annexe E) associé à l'Éq. (1.90). Contrairement à la CAM (mais de façon totalement équivalente), la moyennisation est effectuée ici sans l'introduction de variables complexes (voir Section 1.2.1.3) en utilisant le représentation amplitude-phase suivante :

$$u_1 = a_1 \cos(t + \varphi_1) \tag{1.91a}$$
$$\dot{u}_1 = -a_1 \sin(t + \varphi_1) \tag{1.91b}$$

et

$$u_2 = a_2 \cos(t + \varphi_2) \tag{1.92a}$$
$$\dot{u}_2 = -a_2 \sin(t + \varphi_2)\,. \tag{1.92b}$$

Après les étapes de calcul décrites en Annexe G.3, le flot de modulation stochastique, qui décrit l'évolution dans le temps des variables a_1, a_2 et $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, s'écrit sous la forme suivante :

$$\dot{a}_1 = \epsilon f(a_1, a_2, \varphi) + \epsilon\sigma\xi(t) \tag{1.93a}$$
$$\dot{a}_2 = g_1(a_1, a_2, \varphi) \tag{1.93b}$$
$$\dot{\varphi} = g_2(a_1, a_2, \varphi) \tag{1.93c}$$

avec $\sigma = \frac{\nu}{\sqrt{2}}$ (voir le texte après l'Éq. (E.28)).

Eq. (1.93) est donc un système $(2,1)$-rapide-lent dont a_2 et φ sont les variables rapides et a_1 la variable lente sur laquelle le bruit agit. La partie déterministe de (1.93) est équivalente à celle de l'Éq. (1.7). Notons qu'en raison des hypothèses formulées (c.-à-d. un bruit qui n'agit que sur la structure primaire avec un niveau de l'ordre de $\mathcal{O}(\epsilon)$), l'effet du bruit sur les variables rapides a_2 et φ a été négligé.

À l'échelle de temps lente $\tau = \epsilon t$, l'Éq. (1.93) s'écrit

$$a_1' = f(a_1, a_2, \varphi) + \sqrt{\epsilon}\sigma\xi(\tau) \tag{1.94a}$$
$$\epsilon a_2' = g_1(a_1, a_2, \varphi) \tag{1.94b}$$
$$\epsilon\varphi' = g_2(a_1, a_2, \varphi) \tag{1.94c}$$

où $(.)'$ représente aussi ici la dérivée par rapport au temps lent τ. De plus, la propriété d'échelle du processus de Wiener a de nouveau été utilisée, c'est-à-dire que $\xi(t) = \sqrt{\epsilon}\xi(\tau)$.

Poser $\epsilon = 0$ respectivement dans les Éqs. (1.93) et (1.94) donne le sous-système lent :

$$a_1' = f(a_1, a_2, \varphi) \tag{1.95a}$$
$$0 = g_1(a_1, a_2, \varphi) \tag{1.95b}$$
$$0 = g_2(a_1, a_2, \varphi), \tag{1.95c}$$

et le sous-système rapide :

$$\dot{a}_1 = 0 \tag{1.96a}$$
$$\dot{a}_2 = g_1(a_1, a_2, \varphi) \tag{1.96b}$$
$$\dot{\varphi} = g_2(a_1, a_2, \varphi). \tag{1.96c}$$

Remarque 1.10. Les sous-systèmes lents et rapides sont déterministes. Cela a deux conséquences majeures. Tout d'abord, la variété critique est également déterministe et peut donc être obtenue avec l'approche habituelle décrite en Section 1.2. Ensuite, cela signifie que le rôle du bruit ne peut pas être étudié dans le cadre de l'approximation d'ordre zéro.

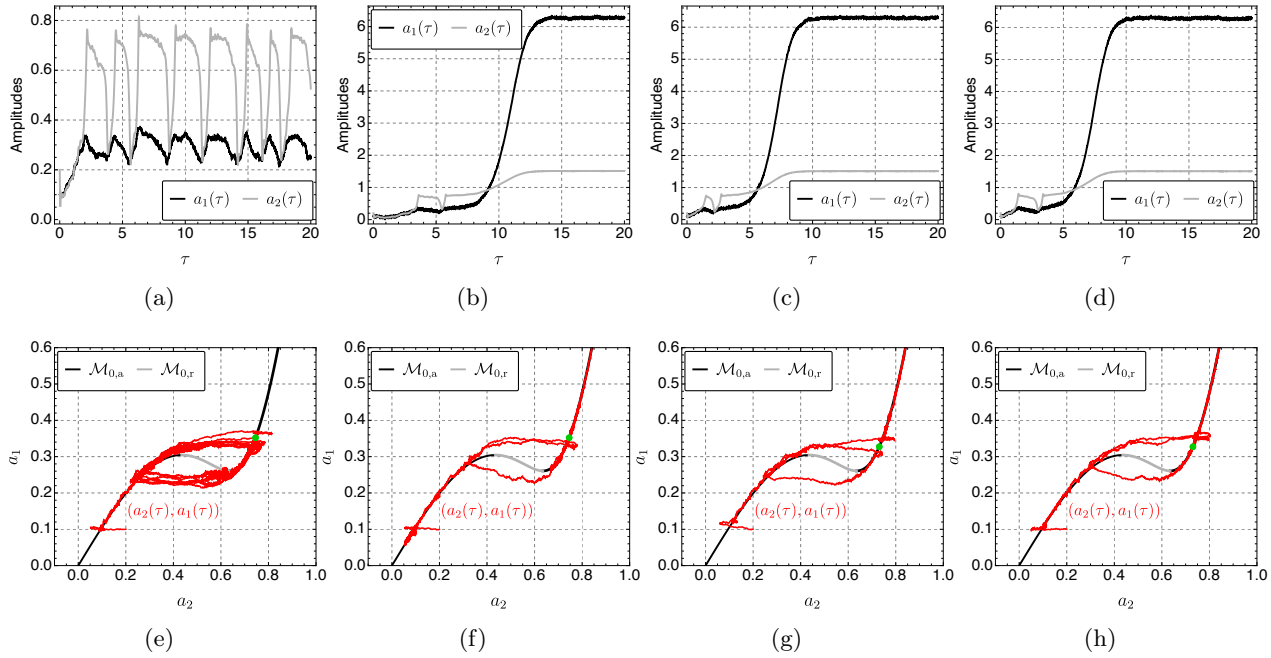


Figure 1.24. Simulations numériques du flot de modulation stochastique (1.94) utilisant les mêmes paramètres que dans la Section E.4.1 avec, en plus, $\sigma = 0.5$. Dans les Figs. 1.24(a), 1.24(b), 1.24(e) et 1.24(f) (resp. Figs. 1.24(c), 1.24(d), 1.24(g) et 1.24(h)) deux échantillons sont montrés pour $\rho = 1.8$ (resp. $\rho = 2$). Les Figs. 1.24(a), 1.24(b), 1.24(c) and 1.24(d) montrent les séries temporelles $a_1(\tau)$ (lignes noires) et $a_2(\tau)$ (lignes grises) et les Figs. 1.24(e), 1.24(f), 1.24(g) et 1.24(h) montrent la trajectoire (ligne rouge) du flot de modulation et la variété critique $\mathcal{M}_0$ (lignes grise et noire) dans le plan (a_1, a_2).

1.2.6.3 Influence du bruit sur la limite de fonctionnement du NES

Nous mettons en évidence ici la façon dont le bruit affecte le comportement du système et plus précisément la façon dont il influence la limite d'atténuation. Pour cela, nous montrons en Fig 1.24 le résultat des simulations numériques du flux lent stochastique (1.94) réalisées avec la fonction `ItoProcess` du logiciel Mathematica [216].

Dans les Figs. 1.24(a), 1.24(b), 1.24(e) et 1.24(f), deux réalisations sont montrées pour $\rho = 1.8$, une valeur du paramètre de bifurcation plus petite que la limite d'atténuation du système déterministe correspondant valant $\rho_{\text{ml}} = 1.9$. Par conséquent, dans le cas déterministe, nous observerions des oscillations de relaxation persistantes, où tous les cycles d'oscillations de relaxation sont équivalents. Dans le cas stochastique, la trajectoire du flot de modulation, en raison de la présence de bruit, est légèrement différente à chaque cycle. Les deux réalisations montrent que des oscillations de relaxation persistantes peuvent encore se produire. Nous pouvons voir sur la Fig. 1.24(e) que sur les huit cycles observés (voir Fig. 1.24(a)), sept correspondent à un scénario similaire au cas déterministe (c.-à-d. que le point d'arrivée sur la partie attractive droite de $\mathcal{M}_0$ est en dessous du plus grand point fixe du flot de modulation). Il y a cependant un cycle où le point d'arrivée est au-dessus mais où la trajectoire descend quand même vers le point-col droit au lieu de monter vers le point fixe stable de grande amplitude (qui n'apparait pas sur la figure). Pour le second échantillon (voir les Figs. 1.24(b) et 1.24(f)) c'est le contraire. En effet, nous observons un cycle et demi, et au milieu du second, nous constatons que même si le point d'arrivée est inférieur au point fixe instable, la trajectoire remonte et il n'y a finalement pas d'atténuation.

Dans les Figs. 1.24(c), 1.24(d), 1.24(g) et 1.24(h), deux échantillons sont représentés pour $\rho = 2$, une valeur du paramètre de bifurcation cette fois plus grande que la limite d'atténuation déterministe $\rho_{\text{ml}} = 1.9$. Dans le cas déterministe, il n'y a donc pas d'atténuation. Le premier échantillon (voir les Figs. 1.24(c) et 1.24(g)) montre qu'au cours du premier cycle, le bruit empêche la trajectoire de

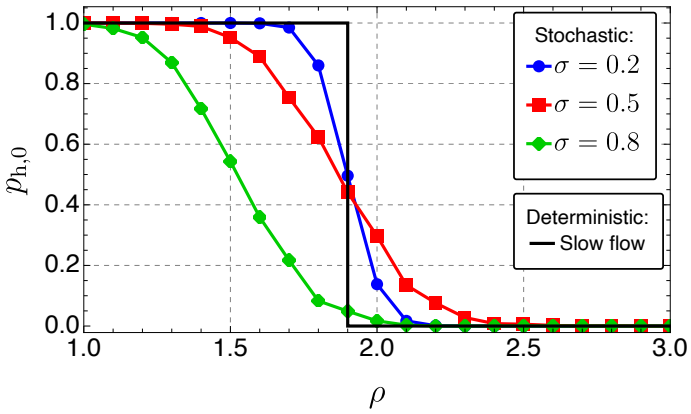


Figure 1.25. Probabilité $p_{h,0}$ en fonction de ρ pour trois valeurs du niveau de bruit σ.

monter vers le point fixe stable de grande amplitude, il est finalement atteint au cours du deuxième cycle. Dans cet exemple, à chaque cycle, le régime effectivement atteint peut être déduit de la même manière que dans le cas déterministe en comparant la position relative du point d'arrivée par rapport à celle du plus grand point fixe instable. Cependant, comme dans l'exemple précédent où $\rho = 1.8$, ce raisonnement peut être contredit de manière positive (favorisant les oscillations de relaxation) ou de manière négative (favorisant les régimes sans atténuation). Par exemple, dans le deuxième échantillon (voir les Figs. 1.24(d) et 1.24(h)) nous pouvons voir que pendant le premier cycle, le point d'arrivée est au-dessus du plus grand point fixe mais que la trajectoire descend quand même vers le point-col droit.

Pour résumer, ces simulations mettent en évidence que le raisonnement qui permet de prédire le comportement du système dans le cas déterministe peut être contredit en présence de bruit.

Dans les sections suivantes, la méthode de Monte Carlo est utilisée pour étudier l'effet du bruit de manière plus systématique. Pour ce faire, deux quantités sont introduites : (i) la *la probabilité d'être dans un régime inoffensif* (*probability of being in a harmless regime*) et (ii) le *temps de premier passage pour atteindre un régime dangereux* (*First-Passage Time to reach a harmful regimes*).

1.2.6.4 Probabilité d'être dans un régime inoffensif

Définition 1.3 (Probabilité d'être dans un régime inoffensif). La probabilité d'être dans un régime inoffensif (PBHR pour *probability of being in a harmless regime*), notée $p_{h,n}$, est la probabilité que le système se trouve dans un régime inoffensif (voir la Remarque 1.6) après un nombre donné n de cycles complets d'oscillations de relaxation.

Par exemple, dans le cas illustré par les figures 1.24(b) et 1.24(f), la trajectoire du flot de modulation remonte vers le point fixe stable à la moitié du deuxième cycle d'oscillations de relaxation, donc après un cycle complet. En fonction du paramètre de bifurcation ρ, dans le cas déterministe nous avons $p_{h,n} = 1$ si $\rho < \rho_{ml}$ et $p_{h,n} = 0$ si $\rho > \rho_{ml}$. Pour plus de détails se référer à l'Annexe E.5.

La Fig. 1.25 montre $p_{h,0}$ en fonction de ρ pour trois valeurs du niveau de bruit σ. Nous pouvons constater que la forme de type fonction de Heaviside du cas déterministe (pour rappel la limite d'atténuation déterministe vaut ici $\rho_{ml} = 1.9$) s'arrondit dans le cas stochastique avec une forme de type fonction erreur. Pour les deux plus petites valeurs du niveau de bruit l'allure de $p_{h,0}$ reste symétrique par rapport à la limite d'atténuation déterministe ρ_{ml}. Cela signifie qu'en moyenne les régimes dangereux dûs à la présence de bruit quand $\rho < \rho_{ml}$ sont compensés par les régimes inoffensifs dûs également à la présence de bruit quand $\rho > \rho_{ml}$. Pour la plus grande valeur de σ, la courbe subit une translation vers la gauche, dans ce cas la présence de bruit favorise donc le régime dit dangereux.

L'évolution de $p_{h,n}$ en fonction de n est également discutée en Section E.5.

1.2.6.5 Temps de premier passage pour atteindre un régime dangereux

Le temps passé dans un régime inoffensif, c.-à-d. le temps pendant lequel la sureté du système est assurée, est également intéressant à connaître du point de vue de l'ingénieur. Nous le quantifions dans cette section en introduisant la notion de *temps de premier passage pour atteindre un régime dangereux*.

Notons $(a_1^e, a_2^e, \varphi^e)$ les coordonnées du plus grand point fixe stable du flot de modulation déterministe. Rappelons aussi que si la trajectoire de ce dernier atteint $(a_1^e, a_2^e, \varphi^e)$, le système est dans un régime dangereux. Nous choisissons que la sureté du système est assurée tant que $a_1 < a_1^{\text{th}} = 0,5a_1^e$. Ce choix est arbitraire et peut être ajusté en fonction de la structure primaire instable étudiée.

Définition 1.4 (Temps de premier passage pour atteindre un régime dangereux). Si le processus (1.94) débute en $a_1(0) = a_{1,0}$, la première fois qu'il atteint la valeur du seuil a_1^{th} est appelé *temps de premier passage pour atteindre un régime dangereux* (FPTHR pour *First-Passage Time to reach a harmful regimes*) et est noté T.

À l'échelle de temps lente τ et d'après la définition précédente, la probabilité $\Pr(\tau < T)$ que $\tau < T$ est la probabilité $\Pr\left(a_1 < a_1^{\text{th}}\right)$ que $a_1 < a_1^{\text{th}}$, nous avons donc :

$$\Pr(T < \tau) = \Pr\left(a_1 > a_1^{\text{th}}\right) := P(\tau). \tag{1.97}$$

Par conséquent, la probabilité que le FPTHR T soit compris entre le temps τ et $\tau + d\tau$ est $R(\tau)d\tau$ telle que :

$$R(\tau) = \frac{dP(\tau)}{d\tau} \tag{1.98}$$

est la densité de probabilité associée au FPTHR (FPTHRD pour *First-Passage Time to reach a Harmful Regime Density*. La moyenne du FPTHR (MFPTHR pour *Mean First-Passage Time to reach a Harmful Regime*) et notée $\mathbb{E}[T]$ est donc définie par :

$$\mathbb{E}[T] = \int_0^\infty \tau R(\tau) d\tau. \tag{1.99}$$

La valeur déterministe du FPTHR, notée T_{det}, est définie comme le moment où $a_1(\tau)$, obtenu à partir de l'intégration numérique de l'Éq. (1.94) pour $\sigma = 0$ et $a_1(0) = a_{1,0}$, atteint le seuil a_1^{th}. Pour des conditions initiales données, T_{det} a une valeur finie unique si $\rho > \rho_{\text{ml}}$ et tend vers l'infini si $\rho < \rho_{\text{ml}}$ (c'est-à-dire que le système déterministe n'atteint jamais le seuil a_1^{th}).

Des exemples d'histogrammes représentant $R(\tau)$ et $P(\tau)$ sont présentés et discutés en Annexe E.6. Ce qu'il faut retenir de ces résultats est le fait que même si le système est supposé être dans un régime inoffensif d'un point de vue déterministe, l'amplitude de l'oscillateur auto-entretenu peut atteindre une valeur néfaste en un temps relativement court avec une probabilité non négligeable.

Par ailleurs, la Fig. 1.26 compare T_{det}, $\mathbb{E}[T]$ et $\mathbb{E}[T] \pm \sqrt{\mathbb{V}[T]}$ où $\sqrt{\mathbb{V}[T]}$ est l'écart-type du FPTHR défini tel que

$$\mathbb{V}[T] = \mathbb{E}\left[T^2\right] - \mathbb{E}[T]^2 \tag{1.100}$$

est la variance.

Nous observons une discontinuité sur le graphe de T_{det} à $\rho = \rho_{\text{ml}}$ qui n'apparaît pas dans les graphes de $\mathbb{E}[T]$ et $\mathbb{E}[T] \pm \sqrt{\mathbb{V}[T]}$. Notons encore que la valeur constante du DPTHR, c'est-à-dire $T_{\text{det}} = 140$ pour $\rho < \rho_{\text{ml}}$, est un artefact numérique. En effet, lorsque le système déterministe est dans un régime inoffensif, nous avons $T_{\text{det}} \to +\infty$ en théorie. En pratique, T_{det} est détecté comme le temps final de l'intégration numérique qui est ici $\tau = 140$. La moyenne et l'écart-type augmentent lorsque ρ diminue, s'éloignant ainsi de la limite d'atténuation déterministe ρ_{ml}. Enfin, nous constatons que lorsque $\rho > \rho_{\text{ml}}$, on a $\mathbb{E}[T] \approx T_{\text{det}}$. Ici encore, contrairement au cas déterministe, dans le cas stochastique nous n'observons aucune différence qualitative entre les résultats obtenus avant et après la limite d'atténuation ρ_{ml}.

Les suites données à ce travail seront évoquées en Section 4.2.1.

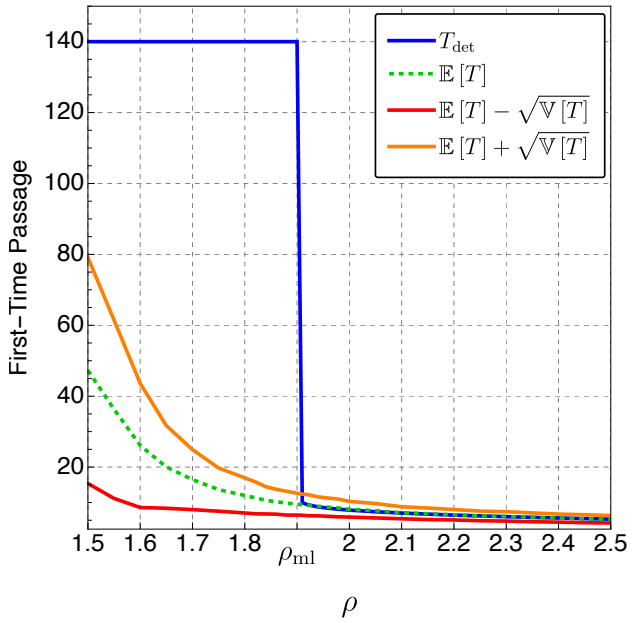


Figure 1.26. Comparaison entre T_{det} (ligne bleue), $\mathbb{E}[T]$ (ligne pointillée verte), $\mathbb{E}[T] - \sqrt{\mathbb{V}[T]}$ (ligne rouge) et $\mathbb{E}[T] + \sqrt{\mathbb{V}[T]}$ (ligne orange) en fonction du paramètre de bifurcation ρ.

1.2.7 Autres résultats

En plus des résultats précédents, je présente ici des travaux où l'atténuation passive de vibrations auto-entretenues à l'aide de NES a été étudiée dans le cadre d'applications particulières.

Tout d'abord, pendant mon post-doctorat, nous avons montré que le pompage énergétique pouvait permettre d'atténuer passivement la résonance sol d'hélicoptère (qui est en fait une instabilité dynamique causée par un couplage de modes entre le fuselage et le rotor de l'hélicoptère lorsque ce dernier est posé au sol). Deux configurations ont été étudiée. Dans la première, le NES est attaché au fuselage de l'aéronef, les résultats obtenus ont fait l'objet de deux publications [a10, a11] et de deux communications dans des congrès internationaux [ci9, ci10]. La deuxième configuration consiste à mettre un NES sur chaque pale de l'hélicoptère et a donné lieu à une publication [a12]. Dans ces travaux le flot de modulation du modèle est obtenu puis décomposé en deux échelles de temps. Il est analysé dans le cadre de l'approche géométrique des perturbations singulières afin de caractériser les régimes permanents du modèle. Les régimes que l'on observe lorsqu'un ou plusieurs NES sont couplés à un système mécanique auto-entretenu (voir Section 1.1) sont obtenus. Il est donc montré que dans des conditions appropriées, les auto-oscillations crées par la résonance sol d'hélicoptère peuvent être complètement ou partiellement supprimées.

Une seconde application, déjà évoquée plus haut, est celle de l'atténuation du bruit de crissement causé par le frottement dans les systèmes de frein. Pour cela un modèle phénoménologique de système de frein à deux ddl et connecté à deux NES est étudié. Ce travail montre dans un premier temps, à l'aide de simulations numériques, que les NES peuvent être utilisés pour contrôler efficacement le bruit de crissement. Une étude théorique est ensuite présentée permettant la compréhension des réponses observées sur les simulations numériques [cn2, a14]. Dans un second temps, dans le cadre de la méthode générale proposée dans [a8] et décrite à la Section 1.2.2, la limite d'atténuation du même système frottant connecté à un et deux NES a été prédite dans [ci7] et [a8] respectivement.

1.3 Conception robuste de NES couplés à un système mécanique auto-oscillant soumis à des incertitudes paramétriques

Ce travail de recherche s'est effectué dans le cadre de la thèse de Chérif Snoun, encadrée par Sébastien Berger (directeur de thèse) et moi même, intitulée : *« Contrôle passif des vibrations des systèmes mécaniques à l'aide d'absorbeurs dynamiques non linéaires avec prise en compte des incertitudes »* [e9] et soutenue le 16 juillet 2020.

Le manuscrit de thèse est disponible au lien suivant : https://theses.fr/2020TOUR4001

Ce travail de thèse a donné lieu à deux publications [a17, a18] dont la seconde est reproduite en Annexe F.

1.3.1 Contexte et problématique

Nous avons vu précédemment qu'au voisinage de la discontinuité d'amplitude observée en Fig. 1.2, une faible variation du paramètre de bifurcation peut entrainer une très forte augmentation de l'amplitude des oscillations. Par conséquent, le comportement dynamique du système couplé constitué d'un NES et d'un système primaire auto-entretenu peut s'avérer très sensible aux paramètres qui admettent une dispersion importante. Il est donc important d'être en mesure, en prenant en compte les incertitudes paramétriques auxquelles le système primaire et le NES peuvent être confrontés, de concevoir un ensemble système primaire-NES qui soit robuste. Ce qui veut dire qu'il fonctionne au maximum dans la région de l'espace des paramètres de bifurcation correspondant à des régimes atténués avec prise en compte des paramètres incertains. La notion de limite d'atténuation évoquée précédemment est ici étendue au cas où plusieurs paramètres de bifurcation sont pris en compte. Dans ce cas elle n'est plus ponctuelle mais définie comme la frontière, dans l'espace des paramètres de bifurcation, entre la région correspondant aux régimes atténués et celle correspondant aux régimes non atténués.

1.3.2 Éléments de théorie du chaos polynomial

Le formalisme du chaos polynomial a été développé par Wiener dans le cadre de sa théorie sur le chaos homogène [213] pour des processus gaussiens. Ce chaos a ensuite été généralisé par Xiu et Karniadakis [220] à des processus stochastiques quelconques, ce qui conduit au chaos polynomial généralisé (gPC pour *generalized polynomial chaos*). Ce dernier permet d'estimer l'expression de tout processus stochastique $X(\xi)$ à variance finie et de variables stochastiques ξ en le décomposant sur une base de polynômes orthogonaux comme suit :

$$X(\xi) = \sum_{j=0}^{N_p} \bar{x}_j \phi_j(\xi). \tag{1.101}$$

où $\phi_j(\xi)$ représente une famille de polynômes orthogonaux construits en fonction du type de loi de probabilité des variables aléatoires ξ selon le schéma dit d'Askey et $\bar{x}_j$ sont les coefficients de la série, appelés *coefficients du chaos* et correspondant à la partie déterministe du processus aléatoire $X(\xi)$. Le nombre $N_p + 1$ de termes dans (1.101) est donné par :

$$N_p + 1 = \frac{(p+r)!}{p!r!} \tag{1.102}$$

où r est le nombre de paramètres incertains et p est l'ordre du chaos.

La méthode du Chaos polynomial généralisé multi-éléments (ME-gPC pour *multi-element polynomial chaos*) a été développée par Wan et Karniadakis afin d'améliorer la précision et de réduire

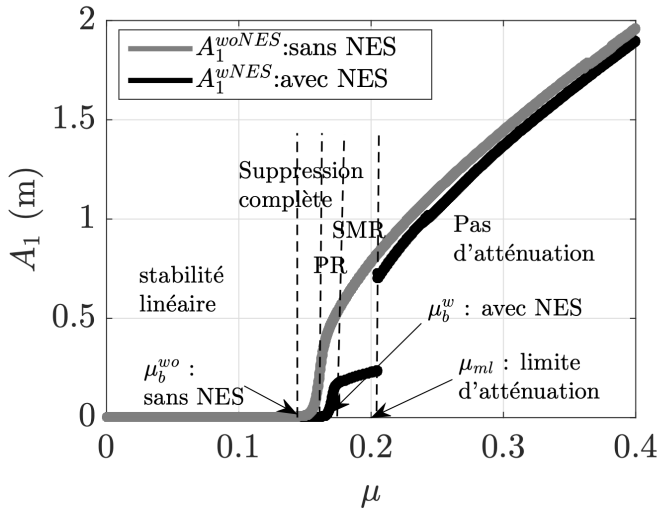


Figure 1.27. Amplitudes A_1^{wNES} et A_1^{woNES} en fonction du coefficient de frottement μ. L'ensemble des paramètres Eq. (F.4) est utilisé.

le coût de calcul dans le cas où il y a beaucoup de paramètres incertains dans un système non linéaire [209]. La méthode consiste à décomposer l'espace aléatoire en plusieurs éléments et ensuite à construire les coefficients de chaos dans chaque élément. La valeur du processus stochastique globale peut être estimée à partir de celle calculée dans chaque élément :

$$X_k(\bar{\xi}^k) \approx \sum_{j=0}^{N_p} \bar{x}_{k,j}\phi_j(\bar{\xi}^k), \tag{1.103}$$

où $X_k(\bar{\xi}^k)$ est le processus aléatoire correspondant au k-ième élément. Davantage de détails mathématiques sur le méthodes chaos polynomial sont fournis en Annexe F.4.1.

L'utilisation de développements en chaos polynomial pour modéliser un processus stochastique associé à un modèle incertain nécessite la détermination des coefficients du chaos $\bar{x}_j$. Dans la littérature, il existe deux approches pour les calculer : intrusive et non intrusive. Les méthodes intrusives consistent à projeter le modèle incertain dans la base du chaos polynomial et ainsi obtenir un système d'équations couplées et déterministes dont les inconnues comportent les coefficients du chaos [9]. Ainsi cette méthode nécessite d'utiliser des techniques de projection de Galerkin et peut être délicate à mettre en oeuvre. Les méthodes non-intrusives (retenue dans la thèse de Chérif Snoun) permettent de calculer les coefficients du chaos sans aucune manipulation du modèle mais uniquement à partir de certaines mesures du processus en des points particuliers.

1.3.3 Prédiction de la propension à être dans un régime atténué par des méthodes basées sur le chaos polynomial

Tout d'abord, des méthodes basées sur le formalisme du chaos polynomial sont proposées pour la prédiction de la limite d'atténuation. Cela permet ainsi le calcul de la *propension du système couplé à être dans un régime atténué*, c.-à-d. la probabilité d'obtenir un régime atténué étant donné les lois de probabilité régissant la dispersion des paramètres du système primaire et des NES. Dans la suite l'acronyme PHSSR, pour *Propensity to be in a Harmless Steady-State Regime*, sera aussi utilisé pour désigner cette propension. Les méthodes développées sont ensuite appliquées aux cas d'un système primaire frottant à deux degrés de liberté couplé à deux NES identiques (c'est le même que celui utilisé dans [a14] et évoqué en Section 1.2.7). Le modèle de système frottant en question est le modèle dit de Hultèn, un modèle très simple qui explique l'apparition de vibrations induites par le frottement (*friction-induced vibrations*) par un phénomène d'instabilité dû à un couplage de mode.

Les amplitudes A_1^{wNES} et A_1^{woNES} (calculées selon l'Éq. (F.3)) correspondant à ce modèle avec et sans NES, respectivement, sont tracées en fonction du coefficient de frottement μ en Fig. 1.27 (attention μ ne représente plus le le coefficient d'amortissement du NES, cf. Fig. F.1). μ_b^{wo} et μ_b^{w} représentent les valeurs des points de bifurcation de Hopf des système sans et avec NES, respectivement. La figure montre clairement les quatre régimes permanents illustrés aux Figs. 1.2 et 1.3 et met à nouveau en évidence un saut (ou une discontinuité) dans le profil d'amplitude A_1^{wNES}. Ici encore, cette discontinuité correspond à la transition d'un régime atténué (ou inoffensif) à un régime régime non atténué (ou dangereux). Comme précédemment, la valeur de μ pour laquelle le saut se produit est appelée *limite d'atténuation* (*mitigation limit*) et notée μ_{ml}. Cette limite d'atténuation sépare l'espace des paramètres incertains (ici un espace unidirectionnel selon le paramètre μ) en deux régions, l'une où l'instabilité est atténuée et l'autre où elle ne l'est pas.

Les résultats montrent d'une part que les méthodes basées sur le chaos polynomial permettent de réduire significativement le coût de calcul par rapport à la méthode de référence en conservant une bonne précision et d'autre part que la méthode basée sur le chaos polynomial multi-éléments décrite dans [a17] est la plus appropriée.

Cette méthode utilise un métamodèle de l'amplitude A_1 des oscillations construit par la théorie du chaos polynomial généralisé multi-éléments avec un ordre 1 utilisé sur chaque élément, c.-à-d. que les polynômes $\phi_j(\bar{\xi}^k)$ dans (1.101) sont d'ordre 1. Le but n'est pas de représenter finement l'amplitude mais de localiser la limite d'atténuation. L'algorithme de la méthode est présenté en Fig. F.4, il consiste à chaque itération à calculer la variance (donnée directement de façon théorique par les coefficients du chaos, cf. Éq. (F.11)) et la taille de chaque élément. Nous supposons que si la variance d'un élément est élevée, cet élément contient la discontinuité. Par conséquent, la variance de chaque élément est comparée à un seuil θ_1. Si elle est inférieure au seuil, l'élément ne contient pas de discontinuité et est donc retiré de l'algorithme ; si elle est supérieure, l'élément est conservé. Nous regardons ensuite si la taille de l'élément est supérieure à un second seuil $\theta_2 J_0$ (avec θ_2 un pourcentage de la taille J_0 de l'élément initial) : si oui, l'élément est conservé pour l'itération suivante, sinon cela signifie que l'élément contenant la discontinuité est suffisamment petit pour donner une estimation de la frontière correspondant à la discontinuité. Les éléments conservés sont ensuite divisés par deux dans chaque dimension de l'espace des paramètres incertain et une nouvelle itération commence. L'algorithme s'arrête quand il n'y plus d'éléments à diviser par deux. La méthode, dont davantage de détails sont donnés en Annexe F.4.2, est illustrée en Fig. 1.28 sur le même exemple que celui montré en Fig. 1.27. Nous voyons les itérations successives de l'algorithme dans lequel les seuils suivants sont utilisés : $\theta_1 = 0,7 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_2 = 1\%$. L'algorithme s'arrête à la huitième itération, ce qui signifie que la variance du dernier élément est supérieure à θ_1 mais que sa taille est inférieure à $\theta_2 = 1\%$ de la taille de l'élément initial. Par conséquent, nous concluons que la limite d'atténuation μ_{ml} se situe dans cet élément.

1.3.4 Optimisation de NES sous incertitudes

Ensuite, en s'inspirant du travail de Missoum et coll. [30, 162], une méthodologie d'optimisation des NES sous incertitudes est développée. Deux approches sont proposées, à chaque fois basées sur la maximisation, sous incertitudes des paramètres du système primaire, de la propension du système couplé à être dans un régime atténué. La première approche considère que les paramètres des NES sont déterministes et sont donc les variables de conception à optimiser. La seconde méthode considère que les paramètres des NES sont également incertains mais avec une loi de probabilité connue. Ainsi, les variables de conception à optimiser ne sont plus directement les paramètres des NES mais l'une de leurs statistiques (la moyenne est retenue dans ce travail) appelées *hyperparamètres*. Les résultats obtenus sont comparés à une optimisation déterministe de référence. L'efficacité des méthodes proposée, basées sur le chaos polynomial, à réduire significativement le cout de calcul en gardant une bonne précision est mise en évidence. Ce travail est détaillé en Annexe F et résumé ici en considérant le coefficient de frottement μ comme paramètre de bifurcation incertain.

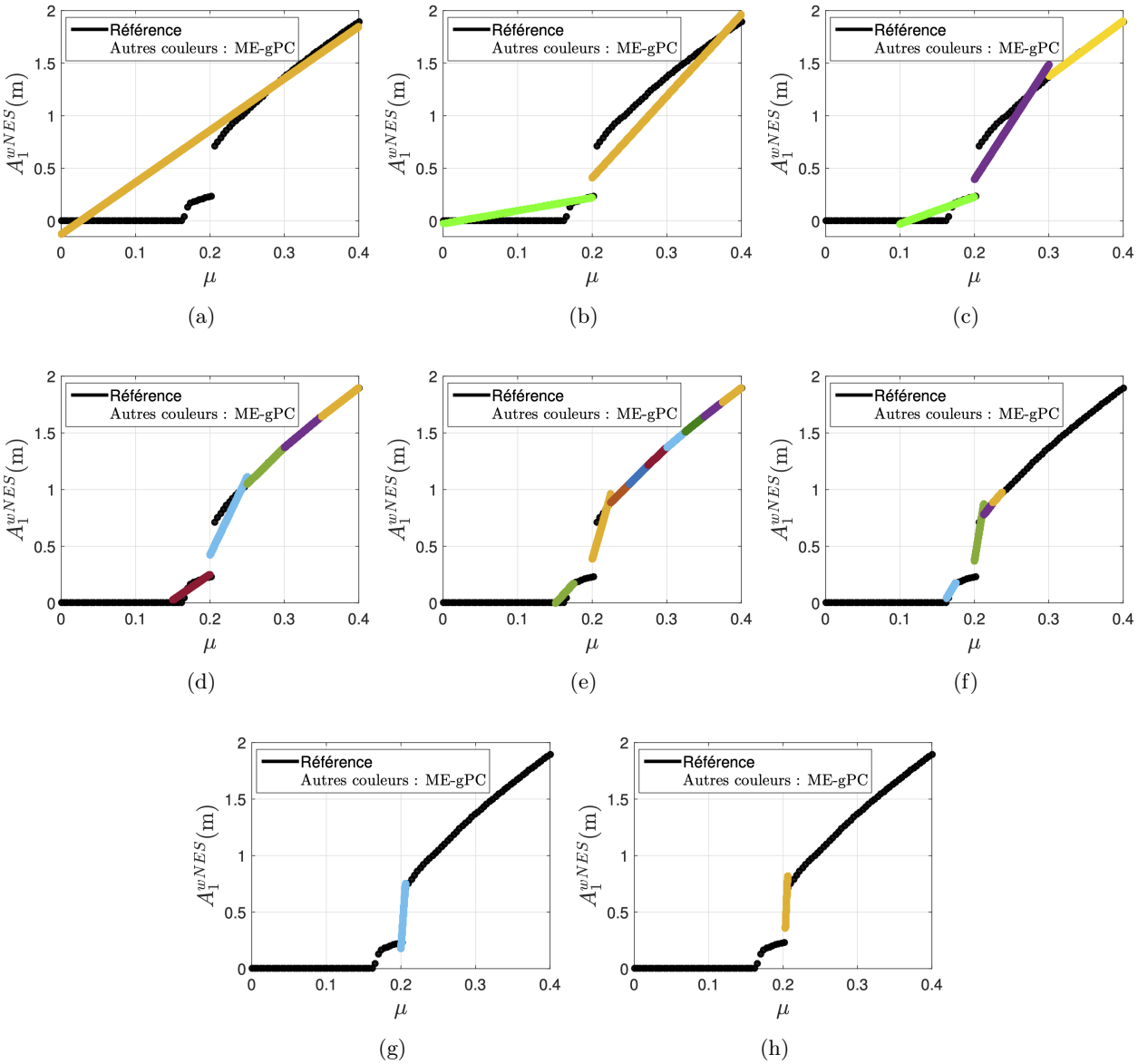


Figure 1.28. Huit itérations jusqu'à l'arrêt de l'algorithme de la Fig. F.4 pour la détection de la limite d'atténuation.

1.3.4.1 Cas de variables de conceptions déterministes

Dans ce cas, les variables de conception du problème d'optimisation sont directement les paramètres physiques de conception du NES dont on suppose qu'ils peuvent être connus de façon certaine. L'objectif de la méthode est de trouver les valeurs optimales des paramètres des NES en maximisant la valeur de la PHSSR. Pour cela, pour chaque valeur de $x_d \in [x_d^{(min)}\ x_d^{(max)}]$ la PHSSR est déterminée dans l'espace des paramètres incertains x_u. On détecte ensuite le maximum de la PHSSR qui correspond à la valeur optimale de x_d. Il est possible de résumer la méthode de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{Maximiser} \quad & \text{PHSSR}\ (A(x_d, x_u)) \\ \text{Sujet à} \quad & x_d^{(min)} \leqslant x_d \leqslant x_d^{(max)} \\ \text{où} \quad & x_d = \{\eta_h, \varphi_h\}, \\ & x_u = \{\mu\} \end{aligned} \tag{1.104}$$

où :

- les variables de conception η_h et φ_h sont respectivement le coefficient d'amortissement et la raideur cubique des NES (voir l'Éq. (F.2),
- PHSSR est la propension du système à être dans un régime atténué, c'est le critère utilisé pour optimiser le système,
- $A(x_d, x_u)$ est l'amplitude de déplacement du système primaire couplé (F.2) définie par l'équation (F.3) (on écrit maintenant A et non A_1^{wNES} pour alléger les notations). Cette amplitude dépend à la fois des paramètres incertains x_u (ici μ uniquement) et des variables de conception x_d,
- $x_d^{(min)}$ et $x_d^{(max)}$ sont respectivement les valeurs minimales et maximales des variables de conceptions x_d. Ce sont dans les intervalles $[x_d^{(min)}\ x_d^{(max)}]$, appelé *intervalles de conception*, que les valeurs optimales de paramètres de conceptions sont recherchées.

En Annexe F.6, cette méthode d'optimisations où la PHSSR est calculée par la méthode basée sur le ME-gPC (décrite en Section 1.3.3) sont comparés à une optimisation de référence où la PHSSR est obtenue à partir de l'intégration numérique du modèle. Nous montrons ici une partie de ces résultats dans le Tab. 1.2 où η_h est considérer comme paramètre de conception. Dans ce tableau nous avons la valeur maximale $\text{PHSSR}^{\max}$ (et donc optimale) de la PHSSR à laquelle correspond la valeur optimale η_h^{opt} du paramètre de conception (cf. Éq. (F.21)) et l'erreur relative sur la PHSSR maximale notée $E_{\text{PHSSR}^{\max}}$ (cf. Éq. (F.20)). L'utilisation du ME-gPC permet de réduire considérablement le coût de calcul en conservant une bonne précision sur la valeur optimale du paramètre de conception.

Le profils de la PHSSR en fonctions de η_h correspondant à cette optimisation sont tracés en Fig. F.8. Les plateaux observés sont dus au fait que pour deux valeurs proches de η_h la limite d'atténuation est observé dans le même élément. Ceci est donc lié à la valeur du seuil θ_2, plus il est faible plus nous pouvons localiser finement la limite d'attenuation, avec en contrepartie une augmentation du coût de calcul.

Tableau 1.2. Comparaison entre l'optimisation de référence et celle obtenue avec la méthode ME-gPC. Le paramètre de conception est η_h.

	Nb de simulations	Temps de calcul	$\text{PHSSR}^{\max}$	$E_{\text{PHSSR}^{\max}}$	η_h^{opt}
Reference	150 000	2.15 jours	$50.10\% \pm 0.02\%$	–	$0.0240 \pm 3.33\%$
ME-gPC ($\theta_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ and $\theta_2 = 1\%$)	4324	1.70 heures	$50.78\% \pm 1.97\%$	1.35%	$0.0241 \pm 15.14\%$
ME-gPC ($\theta_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ and $\theta_2 = 0.1\%$)	5165	2.06 heures	$50.09\% \pm 0.2\%$	0.02%	$0.0241 \pm 15.14\%$
ME-gPC ($\theta_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ and $\theta_2 = 0.001\%$)	7026	3.23 heures	$50.09\% \pm 0.02\%$	0.02%	$0.0237 \pm 3.33\%$

1.3.4.2 Cas de variables de conceptions stochastiques

On considère dans cette section que les paramètres physiques de conception sont aléatoires de loi de probabilité connue, ce qui se rapproche d'avantage d'une situation réelle. Nous savons notamment qu'il est presque impossible d'obtenir une valeur exacte d'un coefficient d'amortissement. Les paramètres à optimiser sont alors l'une des caractéristiques statistiques de ces paramètres (moyenne, variance...) et sont appelés *hyperparamètres*.

Tableau 1.3. Comparaison entre l'optimisation référence et celle obtenue avec la méthode ME-gPC. L'hyperparamètre de conception est $\hat{\eta}_h$.

	Nb de simulations	Temps de calcul	Gain en coût de calcul (%)	$\mathbb{E}[\text{PHSSR}]^{\max}$	$E_{\mathbb{E}[\text{PHSSR}]^{\max}}$	$\hat{\eta}_h^{\text{opt}}$
Reference	500 000	7.86 jours	-	$50.07\% \pm 0.02\%$	–	0.0237
ME-gPC ($\theta_1 = 1 \cdot 10^{-3}$ and $\theta_2 = 1\%$)	4 613	1.92 heures	98.98	$50.78\% \pm 2\%$	1.41%	0.0237
ME-gPC ($\theta_1 = 1 \cdot 10^{-3}$ and $\theta_2 = 0.001\%$)	8 006	3.29 heures	98.38	$50.07\% \pm 0.02\%$	0%	0.0237

Le processus d'optimisation consiste à diviser l'espace de conception en sous-espaces. Dans chaque sous-espace un tirage de N valeurs des paramètres de conception est effectué selon leurs lois de probabilité (dans ce travail nous utilisons des lois uniformes). Pour chacune de ses valeurs la PHSSR est calculée et la valeur optimale de x_d correspond au sous-espace où la moyenne des N valeurs de la PHSSR est maximale. Cela peut se résumer ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Maximiser} \quad & \mathbb{E}[\text{PHSSR}\ (A(x_d, x_u))] \\ \text{Sujet à} \quad & x_d^{(min)} \leqslant x_d \leqslant x_d^{(max)} \\ \text{où} \quad & x_d = \{\hat{\eta}_h, \hat{\varphi}_h\}, \\ & x_u = \{\mu\} \end{aligned} \tag{1.105}$$

où :

- $\mathbb{E}$ est la valeur de l'espérance mathématique (la moyenne) de l'ensemble des évaluations de la PHSSR.
- $\hat{\eta}_h$ est la moyenne de l'ensemble des valeurs du coefficient d'amortissement du NES.
- $\hat{\varphi}_h$ est la moyenne de l'ensemble des valeurs de la raideur non linéaire du NES.

Cette méthode d'optimisations utilisant le ME-gPC est comparée à une optimisation de référence en Annexe F.7. Le Tab. 1.3 résume les résultats quand l'hyperparamètres considéré est la moyenne $\hat{\eta}_h$ du coefficient d'amortissement des NES. Dans ce tableau sont présentées les grandeurs suivantes : la valeur maximale $\mathbb{E}[\text{PHSSR}]^{\max}$ (et donc optimale) de l'espérance de la PHSSR à la quelle correspond la valeur optimale $\hat{\eta}_h^{\text{opt}}$ du l'hyperparamètre de conception, l'erreur relative sur l'espérance de la PHSSR maximale notée $E_{\mathbb{E}[\text{PHSSR}]^{\max}}$.

Ici encore l'optimisation utilisant le ME-gPC permet un gain important en coût de calcul en permettant d'obtenir précisément la valeur optimale de l'hyperparamètre $\hat{\eta}_h$.

Pour être applicable à des systèmes industriels il faudra étendre la méthode à une optimisation multi-paramètres (et multi-hyperparamètres). Ce travail a été commencé durant la thèse de Chérif Snoun mais non finalisé. Les chaos polynomial *creux* (comme utilisé dans la thèse de Duc Thinh Kieu [e6] décrite au Chapitre 3) pourrait aussi être associé à la méthode pour gagner encore en terme de coût de calcul.

En plus des articles précédents, cette recherche doctorale a fait l'objet de deux communications, l'une dans un congrès international [ci11] et l'autre dans un congrès national [cn5].

Chapitre 2

Phénomènes transitoires dans les instruments de musique à anche

Sommaire

2.1 Contexte 57
2.2 Bref état de l'art sur le modèle physique élémentaire d'un instrument à anche 60
2.2.1 L'excitateur 60
2.2.2 Le résonateur 62
2.2.3 Modèles adimensionnés d'un instrument à anche simple 63
2.2.4 Modèles simples utilisés 65
2.3 Résultats préliminaires : analyse de stabilité statique du modèle à un mode 67
2.3.1 Analyse de stabilité locale : naissance des oscillations 67
2.3.2 Analyse de stabilité globale : compétition entre régimes 71
2.4 Retard à la bifurcation 72
2.4.1 Synthèse des travaux de recherche publiés 72
2.4.2 Note sur la seconde définition du point de bifurcation dynamique 78
2.5 Bassins d'attraction dynamiques 80
2.5.1 Introduction 80
2.5.2 Bassin d'attraction dynamique du modèle à un mode 82
2.5.3 Bassin d'attraction dynamique dans de la cas d'un « *rate-induced transitions* » 91

2.1 Contexte

Une question récurrente qui se pose quand on étudie un système oscillant est de savoir sous quelles conditions le système va se mettre à osciller. Par exemple, pour un instrument à vent, que doit faire le musicien en termes de contrôle pour faire jouer l'instrument ? Si on se focalise sur un paramètre comme la pression dans la bouche (c'est le paramètre de contrôle considéré dans ce travail), il est intuitif de penser qu'en dessous d'une valeur précise, l'instrument ne joue pas, et qu'à cette valeur précisément, le son émerge.

D'un point de vue mathématique un instrument de musique à anche simple (comme les clarinettes ou saxophones) peut être décrit comme un système dynamique auto-oscillant, c.-à-d. un jeu d'équations différentielles non linéaires reliant des paramètres de contrôle (ou de bifurcation, comme la pression dans la bouche du musicien) à des variables de sortie (ou variables d'état comme la pression dans le bec [1]). Dans la littérature, les études théoriques d'analyse de la production du son s'effectuent en général en considérant que les paramètres de contrôle sont constants dans le temps, une situation que nous qualifions de *statique*. Ainsi, le jeu d'équations différentielles décrivant le modèle

1. C'est elle qui après avoir interagi avec le résonateur et une fois rayonnée en dehors de l'instrument correspond à l'onde sonore que nous percevons.

est autonome (c.-à-d. ne faisant pas apparaître une dépendance explicite au temps) et peut s'écrire formellement comme suit :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \gamma), \tag{2.1}$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (avec n la dimension du système) est le vecteur des variables d'état du système dynamique (dans le cas d'instruments à anche où la dynamique de l'anche est ignorée), il s'agit en général des coordonnées modales de la pression dans le bec et de leur dérivées premières dans le temps) ; $\mathbf{f}$ est une fonction vectorielle non linéaire représentant la physique du problème (sa forme sera explicitée dans le cas du modèle dit « à un mode » en Section 2.2.4.2) ; enfin le paramètre de bifurcation $\gamma \in \mathbb{R}$ représente la pression dans la bouche du musicien. Ce paramètre est le paramètre de bifurcation considéré dans l'ensemble de ce chapitre.

L'apparition d'un son musical (c.-à-d., ici un régime périodique) dans un instrument à anche simple s'explique par la perte de stabilité de la solution d'équilibre triviale de l'Éq. (2.1) (c.-à-d. solution de $\dot{\mathbf{x}} = 0$, en général $\mathbf{x} = \mathbf{0}$) correspondant au silence au profit d'une solution périodique (c.-à-d. la note jouée par l'instrument). Le perte de stabilité de la solution d'équilibre s'effectue via une *bifurcation de Hopf*[2]. La valeur précise du paramètre de contrôle γ qui correspond à la bifurcation peut être déterminée en calculant le changement de stabilité locale de cette position d'équilibre triviale.

Les *diagrammes de bifurcation* sont aussi très utilisés en acoustique musicale car ils représentent de façon synthétique les différentes solutions d'un modèle donné (de la forme de (2.1)) en fonction du paramètre γ. Un diagramme de bifurcation permet donc de connaître pour chaque valeur constante de la pression dans la bouche les sons (c.-à-d. les solutions stables non triviales du modèle) potentiellement jouable par l'instrument. Le chapitre 9 de l'ouvrage de Chaigne et Kergomard [37] fournit les éléments de bases de l'analyse des bifurcations des modèles communs d'instruments à anche. Pour compléter cet état de l'art, les travaux suivants de la communauté peuvent être cités : [91] pour le calcul de stabilité de solutions périodiques associant la méthode de l'équilibrage harmonique et la théorie de Floquet et [90] qui propose une méthode de continuation de solutions quasi-périodiques basée également sur la méthode de l'équilibrage harmonique. Par ailleurs, ces diagrammes de bifurcations montrent en général des situations de *multistabilité*, c.-à-d. que plusieurs solutions stables du modèle d'instrument (2.1) coexistent pour un même jeu de paramètres. Dans ce cas, en plus de la stabilité locale de chaque solution, qui renseigne si une solution donnée va attirer ou repousser dans l'espace des phases les trajectoires du système qui sont dans son voisinage, il est nécessaire d'étudier les *bassins d'attraction* des solutions stables. Le bassin d'attraction d'une solution stable donnée correspond à l'ensemble des conditions initiales conduisant la trajectoire du système dans l'espace des phases (ou orbite) vers cette solution. Les bassins d'attraction, qui renseignent sur la « jouabilité » d'un régime stable donné, sont relativement peu explorés en acoustique musicale. Quelques références seront données dans la suite.

Cette vision *statique*, majoritaire en acoustique musicale avant mes travaux de thèse, n'est pas complètement représentative de ce qui se passe en réalité en situation de jeu. Pendant un transitoire d'attaque par exemple, le musicien va en effet plutôt augmenter la pression dans sa bouche jusqu'à une valeur nécessaire pour que l'instrument joue. On a donc une augmentation dans le temps du paramètre « pression dans la bouche ». Il s'agit donc d'un cas dit *dynamique*. En considérant le même modèle d'instrument que celui décrit par l'Éq. (2.1), le cas dynamique peut être modélisé par l'équation non-autonome suivante :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, y(\epsilon t)) \tag{2.2}$$

où le paramètre γ, noté y, varie lentement dans le temps. Cette variation lente étant ici mise en évidence par la présence du petit paramètre ϵ (avec $0 < \epsilon \ll 1$) dont la nature sera précisée dans la suite. Il est également possible d'écrire le cas dynamique sous la forme du système autonome suivant :

2. Quand des modèles à temps continu comme (2.1) sont considérés. Pour des modèles à temps discret, il s'agit d'une bifurcation à doublement de période (cf. Section 2.2.4.1).

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, y), \tag{2.3a}$$
$$\dot{y} = \epsilon g(y), \tag{2.3b}$$

où y est maintenant une nouvelle variable d'état dont l'évolution dans le temps est régie par une équation différentielle que l'on suppose du premier ordre (c.f. Éq. (2.3b)). Cette équation fait ici intervenir la fonction g qui définit la forme du profil temporel de y.

Comme évoqué en Section 1.2, la présence du paramètre ϵ dans le membre de droite de l'Éq. (2.3b) fait de l'Éq. (2.3) un système $(n, 1)$-rapide-lent dont les variables rapides sont les coordonnées du vecteur $\mathbf{x}$ qui correspondent aux variables d'états de l'Éq. (2.1) et la variable lente est y le paramètre de bifurcation variant dans le temps.

Remarque 2.1 (Cas statique et dynamique). L'Éq. (2.1) représente une situation dite *statique* car le paramètre de bifurcation γ est constant dans le temps et l'Éq. (2.3) (ou (2.2)) représente une situation dite *dynamique* car le paramètre de bifurcation γ varie (lentement) dans le temps.
Ce vocabulaire provient de *théorie de la bifurcation dynamique* [15] dont les objets d'étude sont des systèmes de type (2.3) lorsque la variable lente franchit un point de bifurcation de l'Éq. (2.1). Ce dernier est donc parfois appelé *point de bifurcation statique* pour le différencier de la valeur de y à laquelle émergent les oscillations de l'Éq. (2.3), appelée *point de bifurcation dynamique*.
De même, le diagramme de bifurcation de l'Éq. (2.1) peut être appelé *diagramme de bifurcation statique* et la représentation des variable rapides $x_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ de (2.3) en fonction de la variable lente $y(t)$ est parfois appelée *diagramme de bifurcation dynamique*.
Dans cette logique, les bassins d'attractions de (2.1) sont appelés *bassins d'attraction statiques* (SBA pour *static basin of attraction*).

Les travaux de recherche résumés dans ce chapitre se placent dans le cadre de la théorie de la bifurcation dynamique et plus généralement dans celui de l'analyse des système dynamiques lents-rapides en étudiant le comportement de l'Éq. (2.3) quand la variable lente y :

(i) croise la valeur du point de bifurcation de Hopf de l'Éq. (2.1). Dans ce cas, les oscillations apparaissent en général pour une valeur de pression dans la bouche (c.-à-d. le point de bifurcation dynamique) plus grande que la valeur statique. Ce phénomème, appelé *retard à la bifurcation* [15], est décrit en Section 2.4.

(ii) traverse une zone de multistabilité du diagramme de bifurcation de l'Éq. (2.1). Dans ce contexte, le travail précurseur de Schumacher et Woodhouse [178] sur les instrument à cordes frottées et plus récemment celui de Colinot et coll. [43] sur un modèle de saxophone montrent, à l'aide de simulations temporelles, que des profil temporels de paramètres de contrôle ayant la même valeur cible peuvent produire des sons différents ; ce qui est difficilement interprétable en termes de bassins d'attraction statique. C'est la raison pour laquelle les concepts de *bassin d'attraction dynamique* (DBA pour *dynamic basin of attraction*) et de séparatrice entre deux DBA sont introduits. Ceci est présenté en Section 2.5.

Pour aider à contextualiser et à comprendre les résultats de recherche présentés en Sections 2.4 et 2.5, un bref état de l'art sur le modèle physique élémentaire d'un instrument à anche est présenté en Section 2.2. Ensuite, l'étude de stabilité statique (locale et globale) du modèle dit « à un mode » (cf. Section 2.2.4.2) est effectuée en Section 2.3.

2.2 Bref état de l'art sur le modèle physique élémentaire d'un instrument à anche

La Fig 2.1 présente le schéma simplifié d'un bec de type clarinette ou saxophone indiquant les variables et les orientations d'axes choisies utilisées.

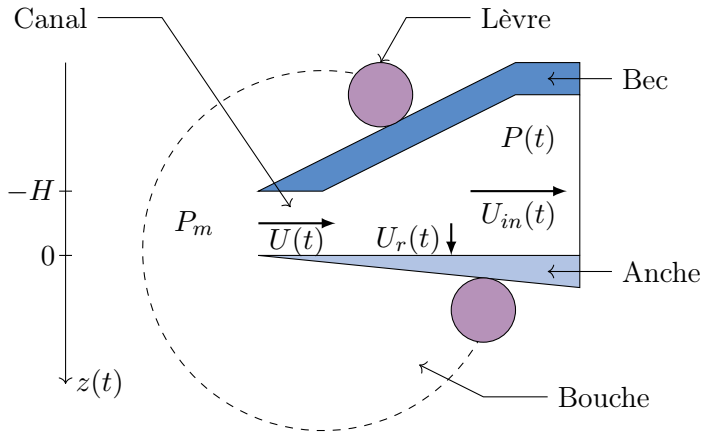


Figure 2.1. Schéma de principe d'un bec à anche simple de type bec de clarinette ou de saxophone. Notations et orientations choisies.

2.2.1 L'excitateur

2.2.1.1 La dynamique de l'anche

Dans la littérature il est commun d'assimiler l'anche d'une clarinette (ou d'un saxophone) à un oscillateur harmonique amorti à un degré de liberté [10, 215] ou bien à un simple ressort sans masse ni amortissement [111].

Le premier cas, souvent appelé « modèle à une masse », considère donc que l'anche est un système masse-ressort dont les paramètres sont obtenus à partir de ceux de l'anche lorsque l'on se limite à son premier mode de flexion : la raideur statique (par unité de surface) de l'anche, K_s, plus ou moins élevée selon la « force » de l'anche ; la première fréquence de résonance f_r de l'anche et enfin la masse modale du premier mode $m_s = K_s/\omega_r^2$, elle aussi exprimée par unité de surface. La dynamique simplifiée de l'anche peut donc être décrite par l'équation suivante :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + q_r\omega_r\frac{dz}{dt} + \omega_r^2 z = -\frac{\Delta P}{m_s}, \tag{2.4}$$

où $z(t)$ est le déplacement vertical du bout de l'anche, $\omega_r = 2\pi f_r$ la première pulsation de résonance de l'anche et $q_r\omega_r$ le coefficient d'amortissement. Le terme ΔP représente la différence de pression s'exerçant sur les deux faces de l'anche et s'exprime comme suit :

$$\Delta P = P_m - P. \tag{2.5}$$

Enfin le signe « - » apparaissant dans le membre de droite de l'Éq. (2.4) signifie que l'anche de clarinette est une anche en-dedans [66], c.-à-d. qu'une différence ΔP positive entre les deux faces de l'anche tend à refermer le canal d'anche.

À part dans le registre suraigu, la fréquence de jeu est en général beaucoup plus basse que la fréquence de résonance f_r de l'anche. Ceci motive l'utilisation du second modèle usuel d'anche qui ignore la dynamique de l'anche ce qui, à partir de (2.4), conduit à :

$$K_s z = -\Delta P. \tag{2.6}$$

2.2.1.2 Hydrodynamique de l'écoulement à l'entrée du bec

Le comportement de l'air entrant dans le bec de l'instrument est ce qui détermine la non-linéarité de l'instrument essentielle à la création d'auto-oscillations. La modélisation de cet élément consiste à trouver une relation entre le débit U entrant dans l'instrument et la différence de pression ΔP. Cette relation, non linéaire, est appelée caractéristique non linéaire de l'instrument. C'est Backus [10] qui, en 1963, fait les premières mesures de la caractéristique non linéaire. Suite à ses mesures, il propose une expression empirique de la caractéristique dans laquelle le débit est proportionnel à $(\Delta p)^{4/3}$ et à $(z+H)^{2/3}$, où $(z+H)$ représente l'évolution au cours du temps de la hauteur du canal d'anche. Cette expression est ensuite réfutée par Hirschberg et coll. [98, 99], qui proposent l'expression de la caractéristique aujourd'hui la plus couramment utilisée. Elle repose sur l'équation de Bernoulli pour l'écoulement dans le canal entre anche et bec, et la création d'un jet à sa sortie avec dissipation de son énergie cinétique par turbulence sans récupération de la pression. La vitesse v_j du jet à la sortie du canal d'anche s'écrit dans ce cas :

$$v_j = \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}, \tag{2.7}$$

où ρ est la masse volumique de l'air.

Pour déterminer le débit U entrant dans l'instrument à partir de l'expression (2.7) il nous faut connaître la section du jet S_j à la sortie du canal d'anche. Si la séparation de l'écoulement est supposée localisée à la sortie du canal d'anche (en réalité la position du point de séparation dépend de la géométrie de la sortie du canal d'anche [98]), la section du jet est proportionnelle à la hauteur $(z+H)$ du canal. Le plus simple est de considérer que la section du jet est directement égale à la section transverse du canal d'anche, dans ce cas S_j s'écrit :

$$S_j = (z+H)w, \tag{2.8}$$

où w est la largeur du canal d'anche. Cette proportionnalité entre la section du jet S_j et l'ouverture du canal d'anche $(z+H)$ est mesurée par Dalmont et coll. [50]. Cependant, dans le cas d'un canal court ou pour de grandes ouvertures, un phénomène de *vena-cantracta* peut apparaître (voir [4] section 5.10 et annexes C.3 et C.5). Dans ce cas, la section S_j du jet est inférieure à la section transverse du canal (cf. [73], Fig.I-5). Ceci a été observé sur la clarinette par mesure Doppler de vitesse et visualisation de l'écoulement [227]. Si nous considérons un bec suffisamment fermé et disposant d'un canal d'anche long, le débit à la sortie du canal peut finalement s'écrire :

$$U = (z+H)w\sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}. \tag{2.9}$$

L'Éq. (2.9) donne l'expression du débit lorsqu'il entre dans le bec. Pour la compléter il faut considérer le cas inverse d'un débit entrant dans la bouche de l'instrumentiste. Ce phénomène est rare numériquement et n'a encore jamais été observé expérimentalement. Il convient cependant de le prendre en compte de façon à avoir une expression la plus générale possible (dans le cadre des hypothèses énoncées précédemment). En admettant que les hypothèses précédentes restent valables dans le cas où la différence de pression est inversée, l'expression du débit U en fonction de la différence de pression ΔP s'écrit finalement :

$$U = U_a\left(1+\frac{z}{H}\right)\sqrt{\frac{|\Delta p|}{P_M}}\,\mathrm{sgn}(\Delta P), \tag{2.10}$$

où sgn représente la fonction signe et la grandeur U_a est proportionnelle à un débit et vaut :

$$U_a = wH\sqrt{\frac{2}{\rho}P_M}, \tag{2.11}$$

P_M est la valeur de la pression dans la bouche pour laquelle l'anche plaque ($z=-H$, voir la Fig. 2.1) et reste plaquée (la pression dans le bec devenant alors nulle). À partir de l'Éq. (2.6) on a donc

$P_M = K_s/H$; appelée *pression de plaquage*. Au delà de cette valeur le canal d'anche est fermé (ceci n'a en fait jamais été observé dans [50]) et le débit U devient par conséquent égal à zéro, il vient donc l'expression finale du débit, fonction de la différence de pression ΔP et du déplacement du bout de l'anche z :

$$U = U_A \left(1 + \frac{z}{H}\right) \sqrt{\frac{|\Delta P|}{P_M}} \operatorname{sgn}(\Delta P)\Theta(z + H), \tag{2.12}$$

où Θ est la fonction de Heaviside. Un exemple de caractéristique non linéaire théorique calculée d'après l'Éq. (2.12) est montré en Fig. 2.2.

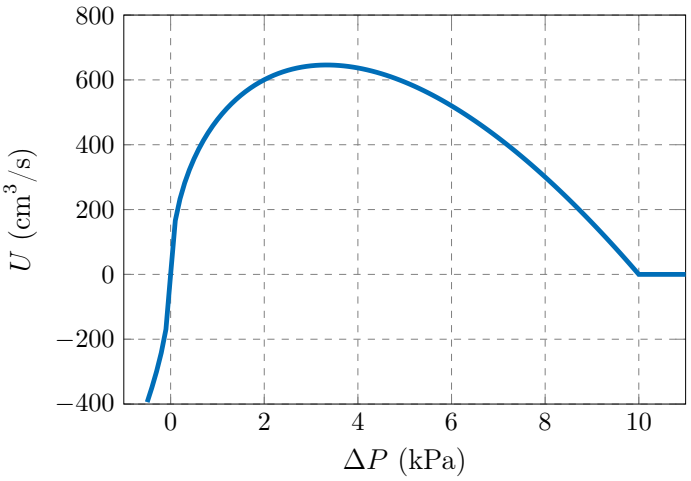


Figure 2.2. Caractéristique non linéaire calculée d'après (2.12). $H = 1$mm, $w = 1.3$cm, $\rho = 1.2$kg/m^3 et $P_M = 10$kPa.

Nous devons maintenant connaître le débit total U_{in} entrant dans le résonateur. Le débit total n'est pas directement le débit U calculé précédemment, il faut lui ajouter le débit U_r créé par l'anche qui agit comme un piston aspirant et repoussant de l'air à sa vitesse. En prenant en compte l'orientation choisie (cf. Fig. 2.1), le débit U_r s'écrit alors :

$$U_r = -S_r \frac{dz}{dt}, \tag{2.13}$$

où S_r est la surface effective de l'anche. Finalement le débit total entrant dans le résonateur de l'instrument a pour expression :

$$U_{in} = U - S_r \frac{dz}{dt}. \tag{2.14}$$

2.2.2 Le résonateur

Le corps d'un instrument à vent est un résonateur acoustique. Dans l'hypothèse d'une propagation linéaire et en ondes planes, son comportement en régime forcé peut être décrit dans le domaine fréquentiel par son impédance d'entrée Z :

$$Z(\omega) = \frac{\hat{P}(\omega)}{\hat{U}_{in}(\omega)}, \tag{2.15}$$

où $\hat{P}(\omega)$ et $\hat{U}_{in}(\omega)$ sont respectivement les transformées de Fourier de $P(t)$ et $U_{in}(t)$.

Le module $|Z|$ de l'impédance d'entrée mesurée sur un saxophone alto (doigté de Si grave) est représenté en Fig. 2.3.

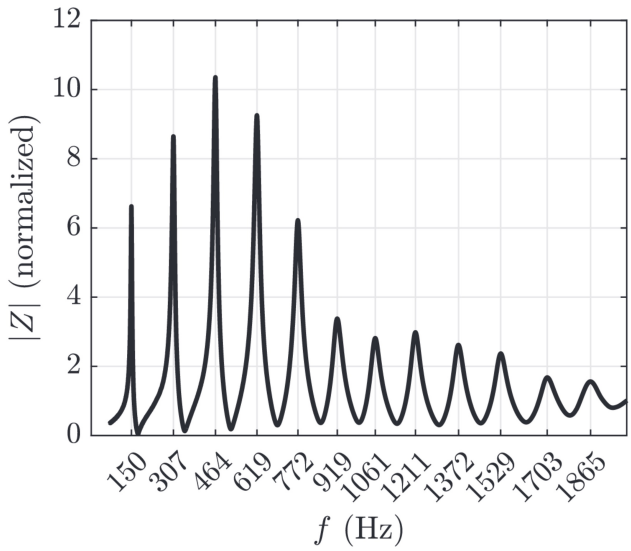


Figure 2.3. *Figure extraite de [42] (Fig. 2).* Module de l'impédance d'entrée mesurée sur un saxophone alto (doigté de si grave). Le module de l'impédance est normalisé par l'impédance caractéristique à l'entrée de l'instrument.

Définition 2.1 (Registre). Dans un contexte musical, si la fréquence de la note jouée par l'instrument à anche pour un doigté donné est proche du premier pic de $|Z|$, on parle du *premier registre* de l'instrument. Si pour le même doigté la fréquence de la note jouée est proche d'un des pics suivants, on parle de *registres d'ordre supérieurs* : deuxième registre pour le deuxième pic, troisième registre pour le troisième pic, etc.

Dans le domaine temporel l'expression (2.15) s'écrit :

$$U_{in}(t) = [h * P](t), \tag{2.16}$$

où $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du résonateur, transformée de Fourier inverse de l'admittance d'entrée $Y(\omega)$ (inverse de l'impédance d'entrée) [37] (Chapitre 9). Il est souvent plus commode de travailler avec la variable U qui, à partir des Éqs. (2.14) et (2.16), s'écrit :

$$U(t) = [h * P](t) + S_r \frac{dz}{dt}. \tag{2.17}$$

2.2.3 Modèles adimensionnés d'un instrument à anche simple

2.2.3.1 Modèle à trois équations.

Les Éqs. (2.4), (2.12) et (2.17) forment un système de trois équations à trois inconnues (z, P et U) modélisant le comportement d'un instrument de musique à anche simple. Les paramètres de contrôle (ou de bifurcation) sont la pression dans la bouche P_m et la force d'appui de la lèvre du musicien sur l'anche, reliée au débit U_a. Pour étudier ce modèle il est judicieux de le réécrire en variables adimensionnées [36, 111]. Les déplacements sont adimensionnés par l'ouverture au repos du bec H, les pressions par la pression de plaquage de l'anche P_M et les débits par P_M/Z_c, où $Z_c = \rho c/S$ est l'impédance caractéristique des ondes planes dans ce résonateur. Les variables et paramètres adimensionnés s'écrivent donc :

$$\begin{array}{lll} \Delta p = \Delta P/P_M & ; & p = P/P_M \\ u = Z_c U/P_M & ; & \gamma = P_m/P_M \\ x = z/H + \gamma & ; & \zeta = Z_c U_A/P_M. \end{array} \tag{2.18}$$

En utilisant les variables adimensionnées définies par (2.18), le système formé des Éqs. (2.4), (2.12) et (2.17) s'écrit maintenant :

$$\begin{cases} u = [h * p] + \dfrac{Z_c H S_r}{p_M} \dfrac{dz}{dt} & \text{(2.19a)} \\ \dfrac{1}{\omega_r^2} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{q_r}{\omega_r} \dfrac{dx}{dt} + x = p & \text{(2.19b)} \\ u = \zeta(1 + x - \gamma)\sqrt{|\gamma - p|}\,\mathrm{sgn}(\gamma - p)\Theta(1 + x - \gamma). & \text{(2.19c)} \end{cases}$$

Le modèle précédent est appelé communément « modèle à 3 équations ». Les variables de sortie sont p, u et z et les paramètres de contrôle sont γ et ζ.

2.2.3.2 Modèle à deux équations

Comme mentionné en Section 2.2.1, la fréquence du registre fondamental des notes jouées par un instrument à anche simple comme la clarinette ou le saxophone est toujours inférieure à la fréquence de résonance f_r de l'anche. Ceci permet de s'affranchir de la dynamique de l'anche. Dans ce cas, en notant que $p_M = K_s H$, les Éqs. (2.6) et (2.12) s'écrivent respectivement :

$$z = -H \frac{\Delta p}{P_M}, \tag{2.20}$$

et

$$U = U_A \left(1 + \frac{\Delta P}{P_M}\right) \sqrt{\frac{|\Delta P|}{P_M}}\,\mathrm{sgn}(\Delta p)\Theta(P_M - \Delta P). \tag{2.21}$$

L'Éq. (2.21) indique que la caractéristique non linéaire est à dérivée discontinue en $\Delta P = P_M$ ce qui d'un point de vue physique n'est pas tout à fait satisfaisant. Cependant, les résultats expérimentaux [48, 50] confirment la partie de la courbe correspondant à l'anche non battante ($\Delta P < P_M$).

Pour le cas d'un tuyau cylindrique, le débit U_r créé par l'anche est supposé avoir pour effet une simple correction de longueur du résonateur qui est ajoutée à la longueur totale [36]. L'Éq. (2.19a) du résonateur s'écrit dans ce cas :

$$U(t) = [h * P](t). \tag{2.22}$$

Les Éqs. (2.21) et (2.22) constituent le « modèle à 2 équations ». En variables adimensionnées il s'écrit :

$$\begin{cases} u = [h * p] & \text{(2.23a)} \\ u = F(p) = \zeta(1 + p - \gamma)\sqrt{|\gamma - p|}\,\mathrm{sgn}(\gamma - p)\Theta(1 + p - \gamma) & \text{(2.23b)} \end{cases}$$

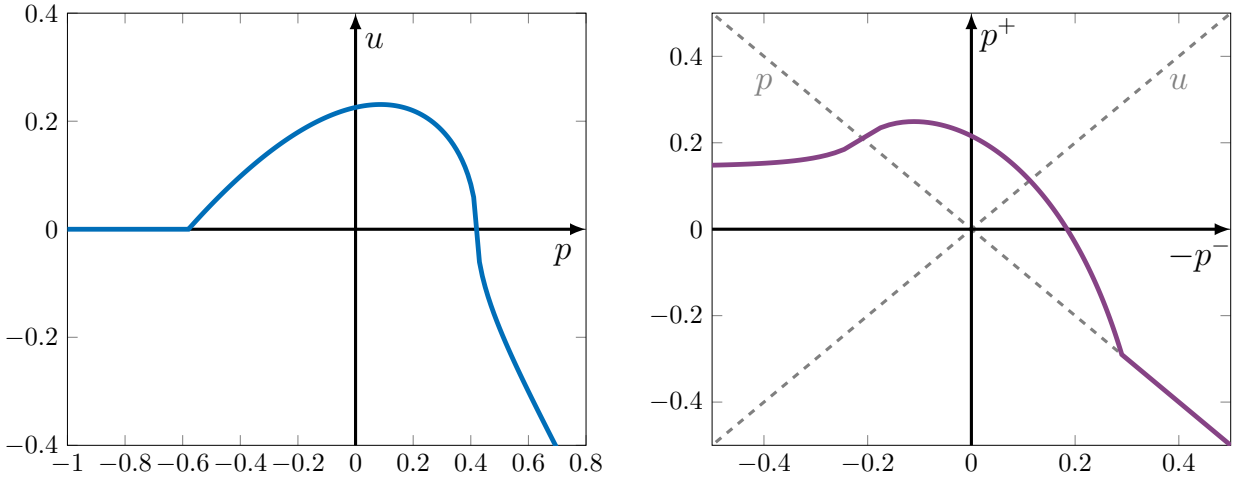
La Fig. 2.4(a) représente la fonction F pour les paramètres de contrôle $\gamma = 0.42$ et $\zeta = 0.6$.

2.2.3.3 Représentation en onde aller et onde retour

La solution générale de l'équation d'onde, qui régit la propagation des ondes acoustiques (pression et débit) dans le résonateur de l'instrument, s'exprime (en supposant une propagation à une dimension) sous la forme d'une onde se propageant vers la droite, l'onde aller, et d'une onde se propageant vers la gauche, l'onde retour. La pression acoustique est la somme de ces deux ondes progressives.

Le support temporel de la réponse impulsionnelle $h(t)$ est long, ce qui peut poser des problèmes si l'on veut résoudre numériquement le système. Pour remédier à ce problème il est judicieux de considérer une représentation en onde de pression aller p^+ et onde de pression retour p^- [137, 177] plutôt que celle en pression p et débit u. Comme nous travaillons avec des variables adimensionnées, les ondes aller et retour sont définies ainsi :

$$p = p^+ + p^- \quad ; \quad u = p^+ - p^-, \tag{2.24}$$



(a) Fonction F (b) Fonction G

Figure 2.4. Représentation de la caractéristique non linéaire en variables $[p, u]$ (a) et $[p^+, p^-]$ (b) avec comme paramètres de contrôle $\gamma = 0.42$ et $\zeta = 0.6$.

soit,

$$p^+ = \frac{1}{2}(p+u) \quad ; \quad p^- = \frac{1}{2}(p-u). \tag{2.25}$$

Dans cette représentation l'équation du résonateur (2.23a) devient :

$$p^-(t) = \left[r * p^+\right](t), \tag{2.26}$$

où $r(t)$ est la fonction de réflexion du résonateur qui n'est autre que la transformée de Fourier inverse du coefficient de réflexion $R(\omega)$, défini par :

$$\hat{P}^-(\omega) = R(\omega)\hat{P}^+(\omega). \tag{2.27}$$

Quant à la relation non linéaire (2.23b), elle devient :

$$p^+ = G(-p^-). \tag{2.28}$$

La fonction G est obtenue par rotation de 45° de la caractéristique non linéaire F [133]. Il est aussi possible d'obtenir une expression analytique de la fonction G. L'obtention de cette expression analytique repose sur le changement de variable $X = \gamma - p^+ - p^-$ et $Y = \gamma - 2p^-$, et sur la résolution d'une équation du troisième degré (cf. Annexe A de [195]). En utilisant les variables p^+ et p^- le modèle à deux équations devient :

$$\begin{cases} p^- = [r * p^+] & \text{(2.29a)} \\ p^+ = G(-p^-) & \text{(2.29b)} \end{cases}$$

La Fig. 2.4(b) représente la fonction G pour les paramètres de contrôle $\gamma = 0.42$ et $\zeta = 0.6$.

2.2.4 Modèles simples utilisés

Les travaux présentés dans ce manuscrit s'appuient essentiellement sur deux modèles simplifiés d'instruments à anche simple décrits dans cette section.

2.2.4.1 Modèle de « Raman »

Le modèle dit « de Raman » (pour la clarinette [49]) est l'un des modèles les plus simples d'instrument à anche. Il tient son nom de l'analogie avec le modèle de corde frottée proposé par le physicien indien C. V. Raman [166].

Dans un instrument de type clarinette, deux types de pertes sont à considérer [3] : les pertes visco-

3. Les pertes volumiques dans l'air sont en effet négligeables par rapport à ces deux types de pertes.

thermiques à l'intérieur du résonateur et les pertes par rayonnement à l'extrémité de ce dernier. Aux basses fréquences les pertes visco-thermiques sont prépondérantes et elles sont, dans le modèle, prises en compte dans la fonction de réflexion ; dans [164] Polack et coll. proposent une expression analytique réaliste de la fonction de réflexion d'un tube cylindrique.

Le modèle de Raman fait l'hypothèse d'un résonateur cylindrique dont l'impédance est nulle à l'extrémité aval (réflexion totale avec changement de signe pour la pression, ce qui est à peu près valable aux basses fréquences) et considère que les pertes visco-thermiques à l'intérieur du résonateur sont indépendantes de la fréquence. Dans ce cas la fonction de réflexion $r(t)$ correspond à un retard τ, dû à un aller-retour dans le résonateur, multiplié par un coefficient réel positif λ qui traduit la diminution d'amplitude due aux pertes :

$$r(t) = -\lambda\delta(t-\tau), \tag{2.30}$$

où δ est la distribution de Dirac et $\tau = 2l/c$ est le temps que met une onde de célérité c à faire un aller-retour dans le cylindre de longueur l. Le paramètre de perte λ, dont une valeur typique est 0.9, a pour expression :

$$\lambda = e^{-2\alpha l}, \tag{2.31}$$

où α est le coefficient d'amortissement [110] :

$$\alpha \approx 3\cdot 10^{-5}\sqrt{f}/R. \qquad \text{(SI)} \tag{2.32}$$

R est le rayon du résonateur et f est la fréquence considérée. Dans le cas du modèle de Raman le coefficient d'amortissement α est constant et communément calculé à la fréquence de jeu [48].

Dans ce cas l'Éq. (2.26) s'écrit simplement :

$$p^-(t) = -\lambda p^+(t-\tau), \tag{2.33}$$

En remplaçant dans (2.28), on obtient :

$$p^+(t) = G\left(\lambda p^+(t-\tau)\right) = f\left(p^+(t-\tau)\right), \tag{2.34}$$

qui, en discrétisant à tous les intervalles τ et en notant $p^+(n\tau) = p_n^+$, s'écrit :

$$p_n^+ = f\left(p_{n-1}^+\right). \tag{2.35}$$

L'expression de la fonction f est obtenue dans [195]. Le modèle de clarinette de Raman se simplifie donc en l'équation aux différences (2.35) (à temps discret) qui décrit l'évolution au cours du temps de la variable p^+ et qui peut être résolue par un simple processus itératif. Connaissant p^+, il est ensuite possible d'obtenir p^- par (2.33) puis p et u par (2.24).

Le modèle communément appelé « modèle sans pertes » peut être obtenu simplement en posant $\lambda = 1$ ce qui signifie que les pertes dans le résonateur sont elles aussi ignorées.

En supposant des paramètres de contrôle ζ et γ constants, le modèle de Raman (ou sans pertes) permet d'expliquer la naissance des oscillations dans un instrument à anche simple. Il s'agit de la *bifurcation à doublement de période* (cf. [119] et la Définition 2.2 ci-dessous) de la solution d'équilibre de l'Éq. (2.35) (obtenue en résolvant $x = f(x)$ et correspondant au silence) vers une solution périodique à deux états (obtenus en résolvant $x = f\circ f(x)$ et correspondant à un son musical).

Définition 2.2 (Bifurcation à doublement de période). Soit l'équation au différence :

$$x_n = f\left(x_{n-1}\right), \tag{2.36}$$

Si x^* et f' sont respectivement le point fixe (solution de $x^* = f(x^*)$) et la dérivée de la fonction d'itération f, alors la bifurcation associée à $f'(x^*) = -1$, est appelée bifurcation à *doublement de période*. En anglais, on parle de *period-doubling bifurcation* ou de *flip bifurcation*.

Une analyse de bifurcation statique (c.-à-d. à paramètre de bifurcation ζ et γ constants) relativement détaillée du modèle de Raman est présentée en Section 1.3 du manuscrit de ma thèse de doctorat [t1].

2.2.4.2 Modèle à un mode

Nous considérons ici la décomposition modale de l'impédance d'entrée (2.15) du résonateur de l'instrument. Cette décomposition modale infinie s'écrit sous la forme suivante

$$Z(\omega) = Z_c \sum_n Z_n \frac{j\epsilon_n \omega_n \omega}{\omega_n^2 + j\epsilon_n \omega_n \omega - \omega^2}, \tag{2.37}$$

où Z_n, ω_n and ϵ_n sont des paramètres modaux, respectivement le facteur modal, la pulsation de résonance et l'inverse du facteur de qualité du n-ième pic de l'impédance (correspondant au n-ième mode de la colonne d'air du résonateur).

En utilisant la transformée de Fourier de l'Éq. (2.22) et les variables adimensionnées (2.18), nous avons aussi $Z(\omega)/Z_c = \hat{u}(\omega)/\hat{p}(\omega)$, où $\hat{u}(\omega)$ et $\hat{p}(\omega)$ sont les transformées de Fourier de $u(t)$ et $p(t)$, respectivement. Par conséquent en effectuant la transformée de Fourier inverse de (H.22) nous obtenons les équations suivantes, écrites dans le domaine temporel :

$$\frac{d^2 p_n}{dt^2} + \epsilon_n \omega_n \frac{dp_n}{dt} + \omega_n^2 p_n = Z_n \epsilon_n \omega_n \frac{du}{dt}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.38}$$

Le modèle dit « à un mode » est obtenu en ne considérant que le premier mode du résonateur, c.-à-d. en prenant uniquement $n = 1$ dans l'Éq. (2.38). En notant $p_1 = p$, en utilisant l'Éq. (2.23b) et en passant au temps adimensionné $t' = \omega_1 t$, nous obtenons l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{p} + \epsilon_1 \left(1 - Z_1 F'(p)\right) \dot{p} + p = 0 \tag{2.39}$$

où $F'(p) = dF(p)/dp$ et où le temps adimensionné t' est noté t et $d()/dt = \dot{()}$ pour alléger les notations.

2.3 Résultats préliminaires : analyse de stabilité statique (locale et globale) du modèle à un mode

Après avoir utilisé le modèle de Raman (à temps discret) pendant ma thèse, mes recherches actuelles se focalisent surtout sur des modèles à temps continu et notamment sur le modèle à un mode. Pour aider à contextualiser et à comprendre les résultats récents présentés en Sections 2.4 et 2.5, l'étude de stabilité statique (locale et globale) du modèle à un mode est effectuée dans cette section. Nous rappelons que le paramètre de bifurcation considéré ici, comme dans l'ensemble de ce document, est la pression dans la bouche adimensionnée γ. Sauf mention contraire, les paramètres du modèles de clarinette à un mode (2.39) utilisés dans les sections qui suivent sont donnés dans le Tab. H.1.

2.3.1 Analyse de stabilité locale : naissance des oscillations

Dans le cadre du modèle à un mode, l'apparition d'un son musical (c.-à-d. ici un régime périodique) dans un instrument à anche simple s'explique par la perte de stabilité de la solution d'équilibre triviale de l'Éq. (2.39) (c.-à-d. $p = 0$ et $\dot{p} = 0$) au profit d'une solution périodique.

Pour déterminer la stabilité de la position d'équilibre il est judicieux d'écrire l'Éq. (2.39) dans l'espace des phase ($p = x_1, \dot{p} = x_2$), ce qui donne :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \gamma), \tag{2.40}$$

avec $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ et $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \gamma) = \left(x_2, -\epsilon_1 \left(1 - Z_1 F'(x_1)\right) x_2 + x_1\right)^T$ (avec $()^T$ le vecteur transposé du vecteur ()). À noter que l'Éq. (2.40) est de la même forme que l'Éq. (2.1) avec $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

Le perte de stabilité de la solution d'équilibre s'effectue via une *bifurcation de Hopf* (voir [179] et la Définition 2.3 ci-dessous).

Définition 2.3 (Bifurcation de Hopf). Une *bifurcation de Hopf* est une bifurcation locale dans laquelle un point fixe d'un système dynamique perd sa stabilité tandis qu'une paire de valeurs propres complexes conjuguées de la linéarisation autour de ce point fixe franchissent l'axe imaginaire du plan complexe (c.-à-d. les parties réelles deviennent positives).
Si nous considérons un système dynamique du plan de la forme suivante :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) \tag{2.41}$$

avec $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ le paramètre de bifurcation considéré et $\mathbf{f}$ une fonction vectorielle non linéaire suffisamment dérivable. Alors les conditions d'une bifurcation de Hopf sont :

1. $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \lambda) = 0$, c.-à-d. $\mathbf{x}_0$ est une solution d'équilibre (ou point fixe) de (2.41) ;
2. $D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \lambda)$ (la matrice jacobienne de $\mathbf{f}$ évaluée en $\mathbf{x}_0$) à une paire de valeurs propres complexes conjuguées $\mu(\lambda) = \alpha(\lambda) \pm j\beta(\lambda)$ dont la partie réelle s'annule pour $\lambda = \lambda_0$, c.-à-d. $\alpha(\lambda_0) = 0$;
3. $\frac{d\alpha(\lambda_0)}{d\lambda} \neq 0$.

Si les conditions précédentes sont respectées, il y a alors naissance d'une solution périodique en $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ dont la pulsation initiale est $\beta(\lambda_0)$. λ_0 est appelé *point de bifurcation de Hopf statique*

Lorsque l'amplitude de la pression p dans le bec de l'instrument est proche de zéro, l'Éq. (2.23b) s'écrit s'implement :

$$u = F(p) = \zeta(1 + p - \gamma)\sqrt{\gamma - p}. \tag{2.42}$$

Pour expliquer l'apparition d'une solution périodique de l'Éq. (2.39) par déstabilisation de la solution d'équilibre triviale, il est courant d'utiliser le développement limité de (2.42) à l'ordre trois [4] autour de $p = 0$. Dans ce cas la relation débit pression devient :

$$u = F(p) \approx c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + c_3 p^3, \tag{2.43}$$

avec $c_0 = \zeta(1 - \gamma)\sqrt{\gamma}$, $c_1 = \zeta\frac{3\gamma - 1}{2\gamma^{\frac{1}{2}}}$, $c_2 = -\zeta\frac{3\gamma + 1}{8\gamma^{\frac{3}{2}}}$ et $c_3 = -\zeta\frac{\gamma + 1}{16\gamma^{\frac{5}{2}}}$. L'approximation (2.43) est pertinente si l'on considère des solutions périodiques d'amplitude modérée.

En utilisant l'Éq. (2.43), la matrice jacobienne $\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \gamma)$ de (2.40) estimée au point fixe trivial $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ s'écrit :

$$D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{0}, \gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & B(\gamma) \end{pmatrix} \tag{2.44}$$

avec

$$B(\gamma) = -\epsilon_1 \left(1 - \frac{(3\gamma - 1)\zeta Z_1}{2\sqrt{\gamma}}\right). \tag{2.45}$$

Le calcul des valeurs propres $\mu(\gamma)$ de (2.44) donne :

$$\mu(\gamma) = \frac{1}{2}\left(B(\gamma) \pm j\sqrt{4 - B(\gamma)^2}\right), \tag{2.46}$$

si $-2 < B(\gamma) < 2$, ce qui se vérifie dans le cas d'un amortissement faible. Selon la Définition 2.3, nous avons une bifurcation de Hopf quand $\gamma = \hat{\gamma}^{\text{st}}$, le point de bifurcation statique, solution de $B(\hat{\gamma}^{\text{st}}) = 0$. On montre facilement en résolvant $B(\hat{\gamma}^{\text{st}}) = 0$ que :

$$\hat{\gamma}^{\text{st}} = \frac{1}{3} + \frac{2 + 2\sqrt{1 + 3\zeta^2 Z_1^2}}{9\zeta^2 Z_1^2}. \tag{2.47}$$

4. L'ordre trois est nécessaire pour que le modèle possède une solution périodique en plus de la solution d'équilibre.

À noter que si le pertes dans le résonateur sont ignorées (ce qui revient dans notre modèle à $Z_1 \to +\infty$) alors $\hat{\gamma}^{\text{st}} = 1/3$.

Toujours en utilisant l'approximation polynomiale (2.43) de la caractéristique non linéaire du débit, il est possible d'obtenir analytiquement (de façon approchée) le diagramme de bifurcation statique du modèle à un mode. Pour cela une méthode de moyennisation est employée. Il existe dans la littérature plusieurs manières d'aborder la moyennisation. La plus courante en mécanique est d'utiliser l'approximation de Krylov-Bogolyubov, telle qu'évoquée en Section 1.2.1.3. L'autre (voir Chapitre 7 de [172]) est d'utiliser la nature également lente-rapide de la représentation amplitude-phase du mouvement. Cette seconde méthode, appliquée au modèle à un mode (2.39), est détaillée en Section H.9 de ce manuscrit [5] et résumée très brièvement ici. D'abord, l'Éq. (2.39) est écrite comme suit :

$$\ddot{p} + \epsilon_1 h(p, \dot{p}, \gamma) + p = 0. \tag{2.48}$$

Ensuite, nous utilisons une représentation complexe similaire à celle proposée en Section 1.2.1.3, c.-à-d. en posant $\xi e^{jt} = \dot{p} + jp$ puis $\xi = xe^{j\varphi}$ où x et φ représentent respectivement l'amplitude et la phase de p. En combinant $\xi e^{jt} = \dot{p} + jp$ et son complexe conjugué, p et $\dot{p}$ s'écrivent en effet :

$$p = \frac{\xi e^{jt} - \xi^* e^{-jt}}{2j} = x \sin(t + \varphi) \tag{2.49a}$$

$$\dot{p} = \frac{\xi e^{jt} + \xi^* e^{-jt}}{2} = x \cos(t + \varphi) \tag{2.49b}$$

On montre alors, en supposant un faible amortissement (c.-à-d. $0 < \epsilon_1 \ll 1$), que x et φ sont découplés, que l'équation différentielle de l'amplitude x peut être approchée par :

$$\dot{x} = \epsilon_1 F(x, \gamma) = \epsilon_1 x \left(-\frac{1}{2} - \frac{\zeta Z_1 \left(32\gamma^2(1 - 3\gamma) + 3(\gamma + 1)x^2 \right)}{128\gamma^{5/2}} \right). \tag{2.50}$$

et que la phase φ est constante. Nous montrons que $\partial_x F(0, \gamma) = \frac{2B(\gamma)}{\epsilon_1}$ (avec $B(\gamma)$ donné par l'Éq. (2.45)). La solution triviale de (2.50) subit donc une bifurcation *fourche* (voir par exemple [119]) correspondant à la bifurcation de Hopf de la solution triviale de (2.48) (cf. Éq. (2.46)), c.-à-d. pour $\gamma = \hat{\gamma}^{\text{st}}$. Les solutions d'équilibre non triviales de (2.50) correspondent aux solutions périodiques de (2.48). Les deux solutions non nulles de $F(x, \gamma) = 0$, notée x^e_- et x^e_+ sont :

$$x^e_\pm = \pm \frac{4\sqrt{\frac{2}{3}}\gamma \sqrt{(3\gamma - 1)\zeta Z_1 - 2\sqrt{\gamma}}}{\sqrt{(\gamma + 1)\zeta Z_1}} \tag{2.51}$$

qui sont réelles quand $\gamma > \hat{\gamma}^{\text{st}}$ et qui correspondent donc à deux solutions périodiques de (2.48) de même amplitude mais de phase opposée. Ces deux solutions sont associées à la même énergie représentée par x^2. De plus, d'un point de vue musical il s'agit d'une même note car ces deux solutions oscillent à la même pulsation, avec donc la même énergie.

La stabilité des solutions (2.51) est obtenue en regardant le signe de $\partial_x F(x^e_\pm, \gamma)$: $x^e_\pm$ sont stables si $\partial_x F(x^e_\pm, \gamma) < 0$ et instables si $\partial_x F(x^e_\pm, \gamma) > 0$. On montre que :

$$\partial_x F(x^e_\pm, \gamma) = -\frac{B(y)}{\epsilon_1} \tag{2.52}$$

qui est donc négatif quand $\gamma > \hat{\gamma}^{\text{st}}$.

Les solutions (2.51) sont donc stables quand elles existent (c.-à-d. quand elles sont réelles). Il s'agit donc d'un cas de bistabilité. Pour un tel système à une dimension les bassin d'attraction statiques (SBA encore pour *static basin of attraction*) des solutions stables sont triviaux. En effet, si $x_0 = x(0) < 0$ (resp. $x_0 > 0$), alors c'est x^e_- (resp. x^e_+) qui sera atteinte. Le phénomène de bistabilité

5. Attention en Section H.9 le tempts t est noté t'.

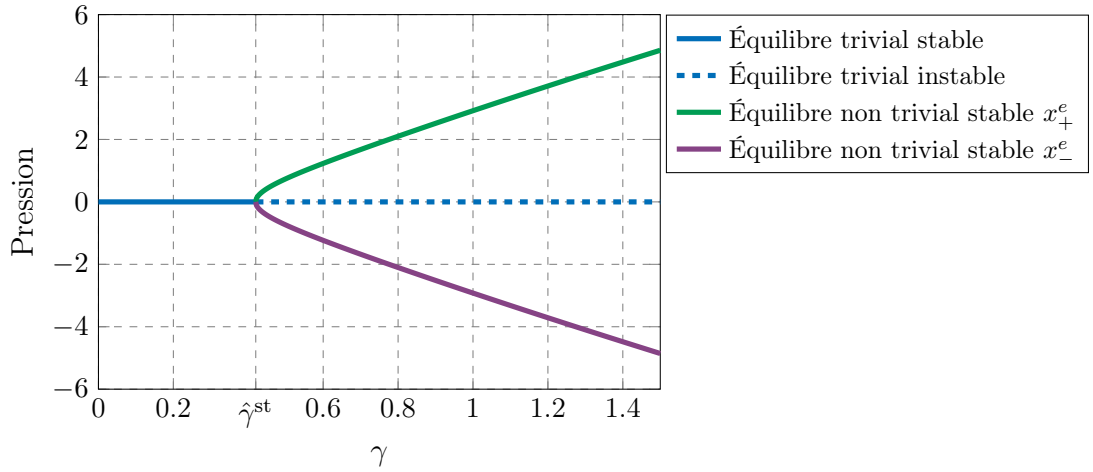
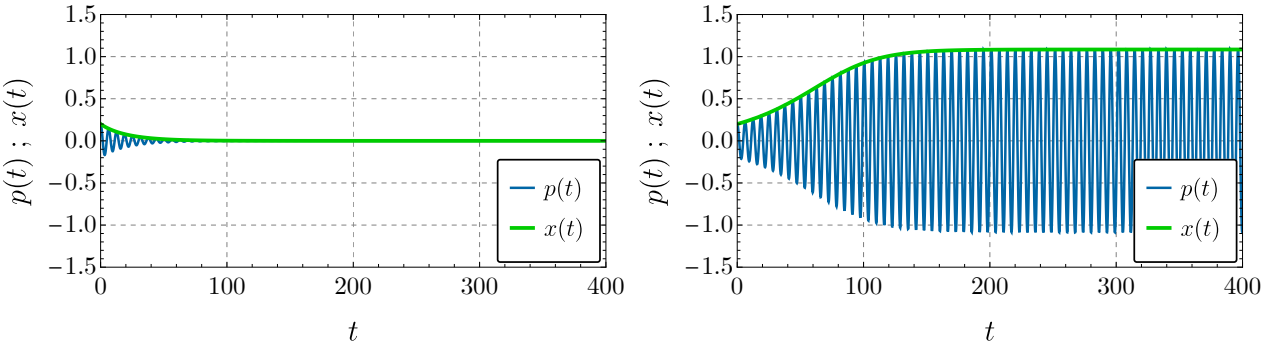


Figure 2.5. Diagramme de bifurcation de (2.50). La solution d'équilibre non triviale $x = 0$ correspond également à la solution triviale de (2.48), et les solutions d'équilibre non triviales x^e_+ et x^e_- (voir (2.51)) représentent l'amplitude des solutions périodiques de (2.48).



(a) (b)

Figure 2.6. Exemples d'intégration numérique des Éqs. (2.48) et (2.50) : series temporelle de $x(t)$ (vert) et $p(t)$ (en bleu). Mêmes paramètres qu'en Fig. 2.5 avec (a) $\gamma = 0.2 < \hat{\gamma}^{st}$ (c.-à-d. la solution triviale est stable) et (b) $\gamma = 0.6 > \hat{\gamma}^{st}$ (c.-à-d. la solution triviale est instable et la solution périodique est stable).

sera abordé plus en détail sur un exemple plus interessant en Section 2.3.2. En effet, comme évoqué plus haut, il s'agit ici d'un cas de bistabilité entre deux solutions musicalement équivalentes. De plus, nous pourrions montrer que même les bassins d'attraction dynamiques, qui seront introduits en Section 2.5, sont également triviaux.

Le diagramme de bifurcation de (2.50) est représenté en Fig. 2.5. Nous y voyons la solution d'équilibre triviale $x = 0$, qui correspond également à la solution triviale de (2.48), et les solutions d'équilibre non triviales (2.51), qui représentent l'amplitude des solutions périodiques de (2.48). De plus, des exemples d'intégration numérique des Éqs. (2.48) et (2.50) sont montrés en Fig. (2.6) : pour $\gamma = 0.2 < \hat{\gamma}^{st}$ en Fig. 2.6(a) et $\gamma = 0.6 > \hat{\gamma}^{st}$ en Fig. 2.6(b). Nous pouvons remarquer un bon accord entre la simulation de (2.48) et celle de (2.50).

Le diagramme représenté en Fig. 2.5, obtenu avec l'approximation polynomiale (2.43) de la caractéristique non linéaire, est représentatif de celui obtenu avec (2.23b) pour de faibles amplitudes d'oscillations, c.-à-d. quand γ ne dépasse pas trop $\hat{\gamma}^{st}$. Quand γ s'éloigne de $\hat{\gamma}^{st}$ il faut donc utiliser (2.23b). Dans ce cas, les hypothèses de la moyennisation restent valables (c.-à-d. supposer que le terme $\epsilon_1 h(p, \dot{p}, \gamma)$ dans (2.48) est petit devant $\ddot{p} + p$) mais il n'est plus possible d'obtenir une expression analytique de $f(x, \gamma)$ dans l'Éq. (2.50). Par conséquent, il faut déterminer directement les solutions périodiques de (2.39) (par équilibrage harmonique ou continuation par exemple) puis en calculer la

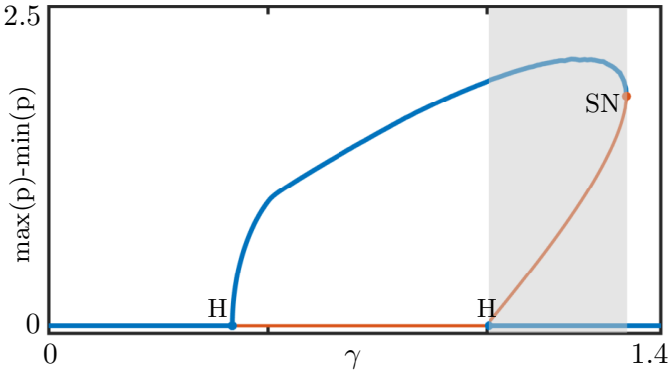


Figure 2.7. Diagramme de bifurcation de l'Éq. (2.39) avec $F(p)$ donné par (2.23b) obtenu par continuation numérique des solutions périodiques et application de la théorie de Floquet à l'aide du logiciel AUTO [57]. Les solutions stables sont représentées en bleu et les solutions instables en rouge. Les points H de la bifurcation de Hopf et le point SN de la bifurcation nœud-col (saddle-node) des solutions périodiques sont représentés par des points bleus et point rouge, respectivement. La zone grisée représente la zone de bistabilité. Les paramètres du modèle sont les mêmes que ceux utilisés en Fig. 2.5. *Figure produite et fournie par Soizic Terrien*[6].

stabilité par la théorie de Floquet (voir par exemple [145, 179] pour les fondements théoriques de ces méthodes). Ceci est présenté dans la section suivante.

2.3.2 Analyse de stabilité globale : compétition entre régimes

Le diagramme de bifurcation de l'Éq. (2.39) avec $F(p)$ donné par (2.23b) obtenu par continuation numérique des solutions périodiques et application de la théorie de Floquet à l'aide du logiciel AUTO [57] est représenté en Fig 2.7. Pour cela la fonction $F(p)$ est régularisée en utilisant les égalités suivantes :

$$\Theta(1-\gamma+p) = \frac{1}{2}\frac{1-\gamma+p+|1-\gamma+p|}{1-\gamma+p} \tag{2.53a}$$

$$\mathrm{sgn}(\gamma-p) = \frac{\gamma-p}{|\gamma-p|} \tag{2.53b}$$

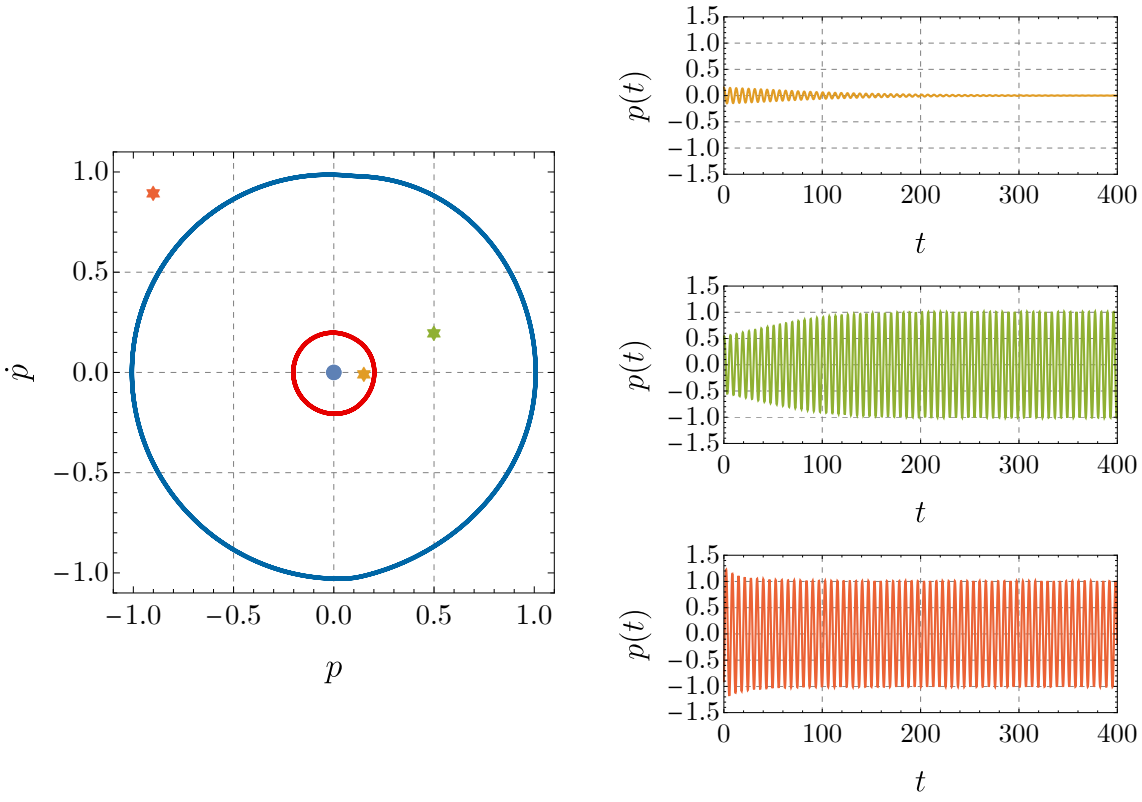
et l'approximation de la fonction racine carrée :

$$|x| \approx \sqrt{x^2+\eta} \tag{2.54}$$

avec η un paramètre de régularisation, pris ici tel que $\eta = 10^{-3}$.

Le diagramme de la Fig 2.7 montre un domaine de bistabilité avec présence d'une solution périodique et de la solution d'équilibre (voir zone grisée entre $\gamma = 1$ et $\gamma \approx 1.3$ en Fig 2.7). Comme précédemment, il s'agit d'un cas où les SBA des solutions stables sont triviaux. En effet, la séparatrice entre les deux SBA est la solution périodique instable. Ceci est illustré en Fig. 2.8. La Fig. 2.8(a) montre, dans l'espace des phases $(p, \dot{p})$ pour les mêmes paramètres qu'en Fig. 2.7 avec $\gamma = 1.1$, les solutions périodiques (cercle bleu pour la solution stable et cercle rouge pour la solution instable) et la position d'équilibre (stable et représentée par un point bleu). Les étoiles jaune, verte et rouges représentent les conditions initiales (CI) de la simulation numérique de l'Éq. (2.39) dont les séries temporelles sont reportées en Fig. 2.8(b), haut, milieu et bas, respectivement. La simulation dont la CI est à l'intérieur du cercle rouge (Fig. 2.8(b) en haut) converge bien vers la position d'équilibre. Pour les CI à l'extérieur du cercle rouge les simulations convergent vers la solution périodique, que la CI soit à l'intérieur du cercle bleu (Fig. 2.8(b) au milieu) ou à l'extérieur (Fig. 2.8(b) en bas).

6. Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Mans (LAUM), UMR 6612, Institut d'Acoustique - Graduate School (IA-GS), CNRS, Le Mans Université



(a) (b)

Figure 2.8. *Illustration de la bistabilité de l'Éq.* (2.39). (a) Représentation, dans l'espace des phases $(p, \dot{p})$ et pour les mêmes paramètres qu'en Fig. 2.7 avec $\gamma = 1.1$, des solutions de l'Éq. (2.39) : solutions périodiques (cercle blue bleu pour la solution stable et cercle rouge la solution instable), position d'équilibre stable (un point bleu). Les étoiles jaune, verte et rouges représentent les conditions initiales (CI) de simulation numérique de l'Éq. (2.39) dont les séries temporelles sont reportées en (b). La simulation dont la CI est à l'intérieur du cercle rouge (étoile jaune et (b) en haut) converge vers la position d'équilibre. Pour les CI à l'extérieur du cercle rouge les simulations convergent vers la solution périodique que la CI soit à l'intérieur du cercle bleu (étoile verte et (b) au milieu) ou à l'extérieur (étoile rouge et (b) en bas).

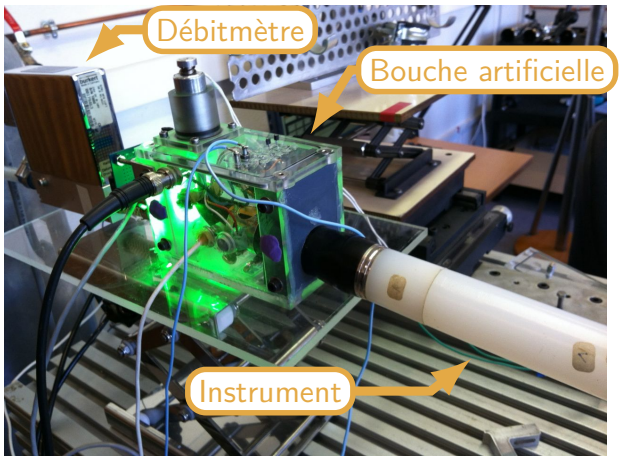
Qu'advient-il de la notion de bassin d'attraction lorsque le paramètre de contrôle varie lentement dans le temps, c.-à-d. lorsque le modèle passe de la forme (2.1) à la forme (2.3) ? Nous tenterons de donner quelques éléments de réponse à cette question en Section 2.5 en introduisant la notion de *bassin d'attraction dynamique*. D'abord, le phénomène de retard à la bifurcation (qui s'avère être aussi une forme de réponse à la question posée ci-dessous) est abordé dans la Section (2.4) qui suit.

2.4 Retard à la bifurcation

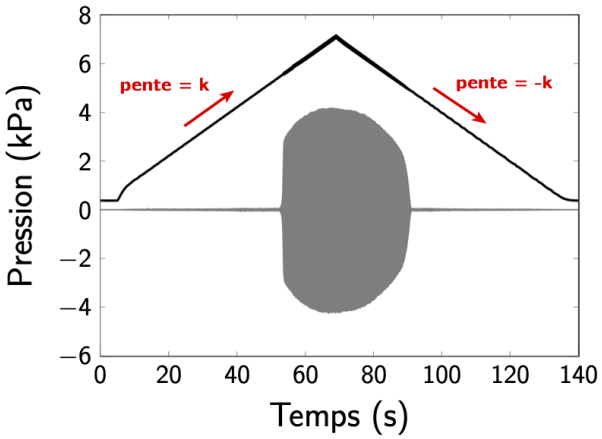
2.4.1 Synthèse des travaux de recherche publiés

Une vision naïve qui consiste à penser que pendant un transitoire d'attaque l'apparition des oscillations se produit au point de bifurcation statique est souvent erronée. En effet, on observe en général l'apparition des oscillations pour une valeur plus grande que le point de bifurcation statique, appelée *point de bifurcation dynamique*. C'est ce que l'on appelle le *retard à la bifurcation* [15]. Un état de l'art relativement complet sur le sujet, qui n'est pas propre aux instrument de musique, est fourni dans l'introduction de [54].

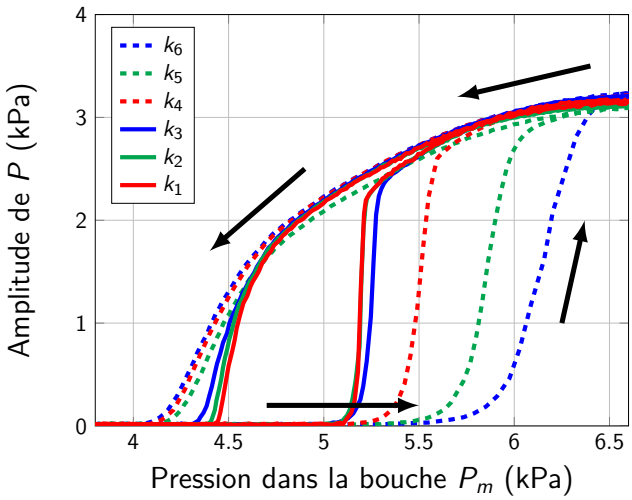
Dans le cadre de ma recherche doctorale, le retard à la bifurcation a été mis en évidence expérimentalement sur une clarinette de laboratoire à l'aide de mesures *in vitro* : l'instrument joue, inséré



(a)



(b)



(c)

Figure 2.9. (a) Bouche artificielle du LMA dans laquelle est insérée une clarinette de laboratoire. (b) et (c) Résultats de mesure sur bouche artificielle. L'expérience consiste à augmenter linéairement, avec un coefficient directeur k, la pression dans la bouche jusqu'à apparition des oscillations puis à la diminuer jusqu'à observer le silence. La figure (c) représente l'amplitude de la pression dans le bec P en fonction de la pression dans la bouche P_m pour différentes valeurs de k avec $k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < k_5 < k_6$.

dans une bouche artificielle. Cette dernière est un dispositif expérimental permettant de mettre l'instrument en auto-oscillation sans avoir recours au musicien (voir Fig. 2.9(a) [7]). L'expérience consistait à augmenter linéairement, avec un coefficient directeur k, la pression dans la bouche jusqu'à apparition des oscillations puis à la diminuer jusqu'à observer le silence. Un exemple est présenté en Fig. 2.9(b), où l'on voit en noir la pression dans la bouche et en gris la pression dans le bec. Les résultats, publiés dans [a4], sont résumés en Fig. 2.9(c) qui représente l'amplitude de la pression dans le bec en fonction de la pression dans la bouche artificielle pour différentes valeurs de k (avec $k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < k_5 < k_6$). Pour une valeur de k donnée, on observe en effet que l'apparition des oscillations en montée se produit pour une valeur de pression dans la bouche (qui correspond au point de bifurcation dynamique) plus grande que la valeur où le son s'éteint en descente. Cette dernière étant proche du point de bifurcation statique. Une deuxième observation est que ce retard à la bifurcation observé expérimentalement augmente avec la valeur de k : plus on fait varier rapidement la pression dans la bouche, plus le retard est important.

7. La bouche artificielle utilisée est celle développée au LMA dans le cadre du projet ANR Consonnes.

Ce travail expérimental a été complété par une étude théorique basée sur des modèles d'instrument extrêmement simples. Tout d'abord, pendant ma thèse, le modèle de Raman (cf. Section (2.2.4.1)), qui suppose une propagation acoustique avec pertes non dispersives dans le résonateur de l'instrument, a été utilisé. Dans ce cas, les équations du modèle se réduisent à une simple équation aux différences ou suite récurrente (système à temps discret) non linéaire (cf. Éq. (2.35)) qui peut être résolue simplement par un processus itératif. Les phénomène de retard à la bifurcation dans le modèle de Raman est étudié en détail dans mon manuscrit de thèse [t1] dont les chapitres concernés sont les retranscriptions entre autres de trois articles [a1, a5, a6]. Le second modèle utilisé est le modèle « à un mode », décrit en Section (2.2.4.2) qui prend la forme d'une équation différentielle à temps continu proche de celle de l'oscillateur de Van der Pol (cf. l'Éq. (2.39)).

Nous présentons dans cette section quelques éléments d'analyse du retard à la bifurcation dans le modèle à un mode, l'analyse détaillée est présentée dans [a15], reproduit dans l'Annexe G de ce manuscrit. Il est à noter que dans [a15], par rapport aux notations introduites en Section 2.2.4.2, Z_1 est noté $F_1/(\epsilon_1\omega_1)$ et ϵ_1 est noté α_1.

Pour des raisons de commodité de calcul, on pose

$$\gamma = \tilde{\gamma} + \hat{\gamma}^{\mathrm{st}}. \tag{2.55}$$

Par conséquent, le modèle à un mode, écrit dans l'espace des phases (cf. Éq. (2.40)), prend la forme suivante :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \tilde{\gamma}), \tag{2.56}$$

où, pour alléger les notation, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \tilde{\gamma} + \hat{\gamma}^{\mathrm{st}})$ est noté $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \tilde{\gamma})$. À noter que par le biais de (2.55) ; le point de bifurcation de Hopf de (2.56) est $\hat{\tilde{\gamma}}^{\mathrm{st}} = 0$.

Dans le cas dynamique avec un croissance linéaire de γ et donc également de $\tilde{\gamma}$, le modèle à un mode, prend la forme de l'Éq. (2.3) avec $\mathbf{x} = (x_1 = p, x_2 = \dot{p}) \in \mathbb{R}^2$ et $g(y) = 1$, soit

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, y), \tag{2.57a}$$
$$\dot{y} = \epsilon \tag{2.57b}$$

où γ' est notée y et considérée comme une autre variable d'état.

Avant d'aborder les aspects théoriques, le phénomène de retard à la bifurcation est illustré à nouveau en Fig. (2.10), cette fois à l'aide de simulations numériques du modèle à un mode (2.57). Le diagramme de bifurcation de Éq. (2.56) (c.-à-d. le diagramme statique), identique à celui de la Fig. 2.5, est représenté en Fig. 2.10(a). Les séries temporelles $p(t)$ et $y(t)$ obtenues par intégration numérique de l'Éq. (2.57) sont tracées en Fig. 2.10(b). La représentation paramétrique, $p(t)$ en fonction de $y(t)$ de cette même intégration numérique superposés au diagramme de bifurcation statique est montrée en Fig. 2.10(c) et met en évidence le phénomène de retard à la bifurcation. On observe en effet que les oscillations de (2.57) apparaissent pour une valeur de y bien supérieure au point de bifurcation statique de (2.56).

Il est connu [22] que pour décrire correctement le retard à la bifurcation il faut sortir du cadre déterministe. Pour cela un forçage stochastique est ajouté à l'Éq. (2.48). Avec en plus le changement de paramètre (2.55), cela donne :

$$\ddot{p} + \epsilon_1 h(p, \dot{p}, \tilde{\gamma}) + p = \nu\xi(t) \tag{2.58}$$

où $h(p, \dot{p}, \tilde{\gamma} + \hat{\gamma}^{\mathrm{st}})$ est noté simplement $h(p, \dot{p}, \tilde{\gamma})$ et $\xi(t)$ est un bruit blanc unitaire de moyenne nulle, c.-à-d.

$$\mathbb{E}\left[\xi(t)\right] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left[\xi(t)\xi(t+\tau)\right] = \delta(\tau) \tag{2.59}$$

avec ν le niveau de bruit. $\mathbb{E}\left[X\right]$ est l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et δ la distribution de Dirac.

La méthode de *moyennisation stochastique* [114, 191] permet comme en Section 1.2.6 d'obtenir, à partir de (2.58), l'équivalent stochastique de l'Éq. (2.50). Le système obtenu, appelé *stochastic slow*

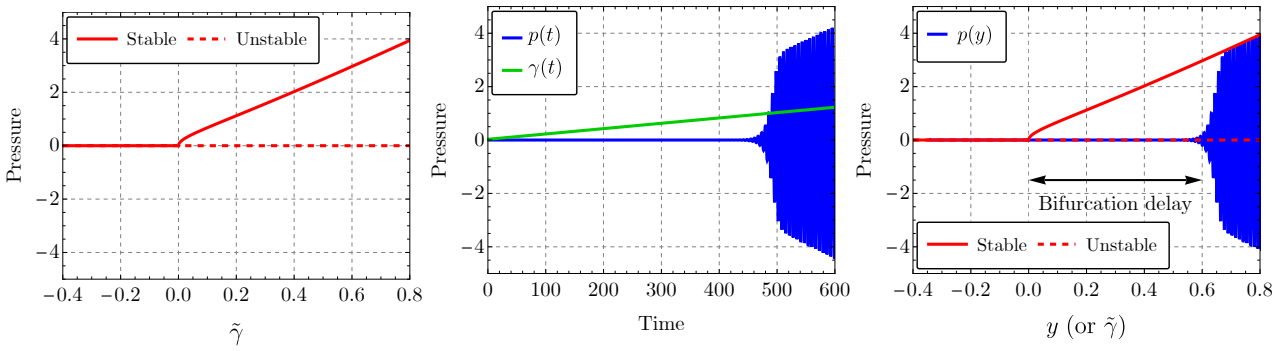


Figure 2.10. (a) Diagramme de bifurcation de Éq. (2.40) (c.-à-d. le diagramme statique). (b) Séries temporelles $p(t)$ (bleu) et $y(t)$ (vert) obtenues par intégration numérique de l'Éq. (2.57). Le phénomème de retard à la bifurcation apparait en Fig.2.10(c) où l'on observe en effet les oscillations de (2.57) apparaître pour une valeur de y bien supérieure au point de bifurcation statique de (2.40).

dynamics dans [a15], est décrit par le système $(1,1)$-lent-rapide stochastique suivant [8] :

$$dx_t = F(x_t, y_t)dt + \sigma dW_t \tag{2.60a}$$
$$dy_t = \epsilon \tag{2.60b}$$

avec W_t le processus de Wiener, relié au bruit blanc par $\xi_t = dW_t/dt$ et $\sigma = \nu/\sqrt{2}$. À noter que le problème initial, décrit par (2.57), d'une bifurcation de Hopf dynamique devient, après moyennisation, celui d'une bifurcation fourche dynamique.

En divisant (2.60a) par (2.60b) et en utilisant les propriétés de *décalage temporel* et d'*échelle* du processus de Wiener (voir la Section 3.1 de [163] et/ou le Chapitre 2 de [153]) il est possible d'utiliser y comme variable temporelle. Dans ce cas l'Éq. (2.60) devient :

$$dx_y = \frac{1}{\epsilon}F(x_y, y)dy + \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}}dW_y. \tag{2.61}$$

Les détails sur l'obtention des Éqs. (2.60) et (2.61) sont donnés en Section G.3.

Dans l'Éq. (2.61), x_y représente un processus stochastique qui décrit en fonction de y (devenue la variable temporelle du problème), l'évolution de la variable aléatoire « amplitude » x. Jusqu'à maintenant nous avons parlé du point de bifurcation dynamique comme de la valeur de y où émergent les oscillations. Nous allons maintenant en donner la définition mathématique. De façon générale cette définition sera (i) une statistique obtenue sur un ensemble de réalisations du processus x_y et (ii) aura un caractère arbitraire, contrairement au point de bifurcation statique. En effet, la définition de « l'émergence des oscillations » a elle-même un caractère arbitraire. Il existe deux définitions principales du point de bifurcation dynamique (ou, de façon équivalente, du retard à la bifurcation). La première définition (voir par exemple [11] ou [198]) consiste à raisonner sur x_y^2 (c.-à-d. l'énergie du signal) en définissant le point de bifurcation dynamique comme la valeur y pour laquelle $\mathbb{E}\left[x_y^2\right]$ atteint un certain seuil, par exemple la valeur initiale $x_{y_0}^2$ avec y_0 la valeur initiale de y. Cette définition est illustrée en Fig. 2.11(a) qui représente x_y^2 (en bleu) pour six réalisations de (2.61) [9] et la moyenne $\mathbb{E}\left[x_y^2\right]$ calculée sur ces six réalisations. Une échelle logarithmique est utilisée pour l'axe des ordonnées. Le point de bifurcation dynamique (repéré par une ligne verticale pointillée rouge)

8. Il est de coutume en calcul stochastique d'indiquer la dépendance temporelle des variables en indice, cette convention est utilisée dans [a15] et dans la fin de cette section.

9. L'intégration numérique de l'Éq. (2.61) est réalisée avec la fonction `ItoProcess` du logiciel Mathematica [216]. En pratique c'est l'Éq.. (2.60) qui est simulée, on utilise ensuite une représentation dans le plan (y, x) ou (y, x^2) selon le besoin.

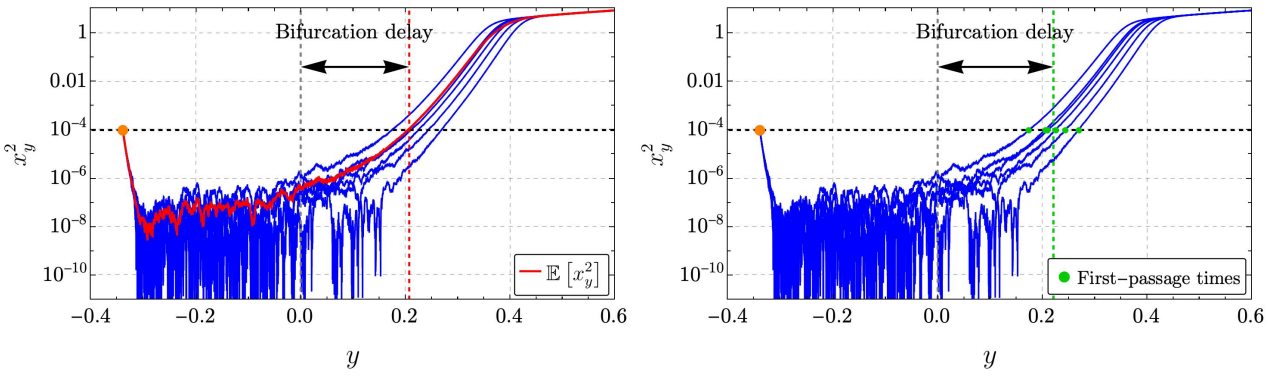


Figure 2.11. *Illustration des définitions du point de bifurcation dynamique.* Six réalisations du processus x_y décrit par (2.61). Une échelle logarithmique est utilisée pour l'axe des ordonnées. (a) Première définition : le point de bifurcation dynamique (repéré par une ligne verticale pointillée rouge) correspond à l'abscisse du point d'intersection entre la courbe de $\mathbb{E}\left[x_y^2\right]$ et la droite horizontale d'équation $x_y^2 = x_{y_0}^2$. (b) Seconde définition : le point de bifurcation dynamique est la valeur moyenne $\mathbb{E}\left[Y\right]$ (repérée par une ligne verticale pointillée verte) des six valeurs de Y obtenues (points verts).

correspond à l'abscisse du point d'intersection entre la courbe de $\mathbb{E}\left[x_y^2\right]$ et la droite horizontale d'équation $x_y^2 = x_{y_0}^2$. Le retard à la bifurcation (ou *bifurcation delay*) est défini comme la différence entre le point de bifurcation dynamique et le point de bifurcation statique, ici $\hat{y}^{\mathrm{st}} = 0$ (repéré par une ligne verticale pointillée grise). La deuxième définition (voir par exemple [106, 132] ou [190]) utilise la notion de *temps de premier passage* [168], c.-à-d. le temps T (ici le temps est représenté par la variable y, donc le « temps » de premier passage est noté Y) pour que le processus x_y^2 atteigne pour la première fois un certain seuil (ici $x_{y_0}^2$ comme pour la première définition). Le point de bifurcation dynamique est ici défini comme la valeur moyenne $\mathbb{E}\left[Y\right]$ de ces temps de premier passage obtenus sur un ensemble de réalisations de (2.61). Cette seconde définition est illustrée en Fig. 2.11(b), qui montre les six mêmes réalisations de (2.61) que la Fig. 2.11(a). Dans ce cas, le point de bifurcation dynamique est la valeur moyenne (repérée par une ligne verticale pointillée verte) des six valeurs de Y obtenues (points verts) et la définition du retard à la bifurcation est la même que pour la première définition. En général, ces deux définitions aboutissent à deux résultats légèrement différents mais proches.

Pour ces deux définitions, c'est la valeur moyenne qui est considérée, c.-à-d. $\mathbb{E}\left[x_y^2\right]$ et $\mathbb{E}\left[Y\right]$ pour la première et la deuxième définition, respectivement. Ce choix est également arbitraire, d'autres statistiques pourraient être choisies, les valeurs les plus probables par exemple seraient aussi pertinentes physiquement.

Remarque 2.2 (Choix de la définition du point de bifurcation dynamique). Dans ce manuscrit, c'est la première définition mentionnée plus haut qui est adoptée. Le point de bifurcation dynamique est donc la valeur de $y > y_0$, notée y^{dyn}, telle que :

$$\sqrt{\mathbb{E}\left[x_y^2\right]} = x_{y_0}. \tag{2.62}$$

Dans le cas déterministe l'Éq. (2.62) devient simplement $\sqrt{x_y^2} = x_{y_0}$.

Le point de bifurcation dynamique correspond à des petites valeurs de l'amplitude. Par conséquent, il est pertinent d'étudier la forme linéairisée de l'Éq. (2.61) autour de $x_y = 0$. En notant $a(y) =$

$\partial_x F(0,y)$, cette dernière s'écrit :

$$dx_y = \frac{1}{\epsilon}a(y)x_y dy + \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}}dW_y \tag{2.63}$$

dont la solution est (voir Annexe G.4.1) :

$$x_y = x^{\text{det}}(y) + \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}}e^{\frac{1}{\epsilon}A(y)}\int_{y_0}^{y} e^{-\frac{1}{\epsilon}A(y')}dW_{y'}. \tag{2.64}$$

où $x^{\text{det}}(y) = x_{y_0}e^{\frac{1}{\epsilon}(A(y)-A(y_0))}$ est la solution du problème déterministe (c.-à-d. (2.63) avec $\sigma = 0$) et $A(y)$ la primitive de $a(y)$. À partir de (2.64) l'espérance de x_y^2 est obtenue comme suit :

$$\mathbb{E}\left[x_y^2\right] = \mathcal{D}(y) + \mathcal{S}(y) \tag{2.65}$$

où

$$\mathcal{D}(y) = (x^{\text{det}}(y))^2 = x_{y_0}^2 e^{\frac{2}{\epsilon}(A(y)-A(y_0))} \tag{2.66a}$$

$$\mathcal{S}(y) = \frac{\sigma^2}{\epsilon}e^{\frac{2}{\epsilon}A(y)}\int_{y_0}^{y} e^{-\frac{2}{\epsilon}A(y)}dy. \tag{2.66b}$$

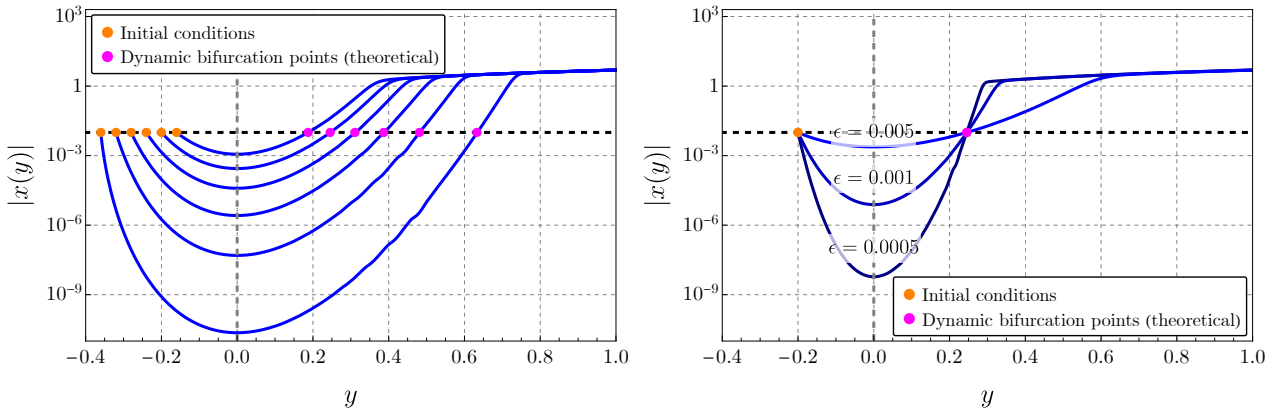
D'après (G.39) et selon [19], pour une équation différentielle de la forme de (2.61), on peut distinguer trois comportements ou régimes :

- *Regime I :* $\mathcal{S}(y) \ll \mathcal{D}(y)$. Dans ce cas, le niveau de bruit est si faible qu'il peut être ignoré et le problème est identique au cas déterministe (G.32) qui subit le plus grand retard à la bifurcation possible.
- *Regime II :* $\mathcal{S}(y) \gg \mathcal{D}(y)$ avec un niveau de bruit pas trop élevé. Le bruit ne peut plus être ignoré mais il reste suffisamment faible pour que le modèle linéarisé (G.30) reste valide. Le retard à la bifurcation existe toujours mais il est réduit par rapport au régime I.
- *Régime III :* $\mathcal{S}(y) \gg \mathcal{D}(y)$ avec un niveau de bruit élevé. Dans cette situation, le comportement du système est dominé par le bruit et la trajectoire de x_y quitte le voisinage de zéro avant que le point de bifurcation statique $y = 0$ ne soit atteint. Dans un tel cas, l'approximation linéaire n'est plus valable et, comme le soulignent Berglung et Gentz [19], la notion de retard à la bifurcation n'a plus de sens.

Seuls les régimes I et II sont étudiés dans ce présent travail.
À partir de l'expression analytique de $\mathbb{E}\left[x_y^2\right]$ donnée en (2.65), il est possible d'obtenir :

(i) les domaines d'existence des régimes (cf. Section. G.4.4, notamment la Fig. G.7). Ceci montre que la frontière entre les régimes II et III dépend surtout du niveau de bruit σ. En revanche, la frontière entre régimes I et II dépend du triplet (ϵ, σ, y_0).

(ii) en traitant les régimes I et II séparément, une expression théorique du point de bifurcation dynamique dans chacun de ces régimes est obtenue. Les détails sont donnés en Sections G.4.2 et G.4.3 pour les cas déterministe et stochastique, respectivement. Le point de bifurcation dynamique est noté $x^{\text{det}}(y)$ dans le cas déterministe et $x^{\text{stoch}}(y)$ dans le cas stochastique (il y a en fait deux expressions $x^{\text{stoch,a}}(y)$ et $x^{\text{stoch,b}}(y)$ correspondant à deux niveaux d'approximation différents). Les résultats obtenus permettent de retrouver les caractéristiques bien connues du retard à la bifurcation. Dans le cas déterministe (Régime I) le retard à la bifurcation dépend de y_0 mais est indépendant de ϵ. Ce comportement déterministe est illustré en Fig. 2.12 où l'Éq. (2.61) est simulée avec $\sigma = 0$ pour différentes valeurs de y_0 en fixant ϵ (cf. Fig 2.12(a)) et pour différentes valeurs de ϵ en fixant y_0 (cf. Fig 2.12(a)). Dans le cas stochastique (Régime II), le retard à la bifurcation dépend du niveau de bruit σ et de la pente ϵ et ne dépend pas de



(a) (b)

Figure 2.12. *Caractéristiques du retard à la bifurcation dans le cas déterministe.* Intégration numérique de l'Éq. (2.61) avec $\sigma = 0$ (a) pour différentes valeurs de y_0 en fixant ϵ et (b) pour différentes valeurs de ϵ en fixant y_0.

la valeur initiale y_0. Ceci est montré en Fig. 2.13 qui montre $\sqrt{\mathbb{E}\left[x_y^2\right]}$ (calculée à chaque fois sur vingt réalisations de l'Éq. (2.61)) en fonction de y pour différentes valeurs de σ avec ϵ et y_0 fixés (cf. Fig. 2.13(a)) ; pour différentes valeurs de ϵ avec σ et y_0 fixés (cf. Fig. 2.13(b)) ; et pour différentes valeurs de y_0 avec σ et ϵ fixés (cf. Fig. 2.13(c)). Il interessant de remarquer que le comportement observé pour le Régime II en Fig 2.13(b) est qualitativement le même sur celui observé expérimentalement dans [a4] (cf. Fig. 2.9(c)).

(iii) la densité de probabilité $\rho(x, y)$:

$$\rho(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mathcal{S}(y)}} e^{-\frac{(x-x^{\det}(y))^2}{2\mathcal{S}(y)}}. \tag{2.67}$$

telle que, pour une valeur donnée de y, la probabilité de trouver x_y dans l'intervalle $[x, x+dx]$ est $\rho(x,y)dx$. La comparaison entre l'expression théorique (2.67) de $\rho(x,y)$ et la densité obtenue numériquement est présentée en Fig. G.11.

Ces travaux ont également fait l'objet de communications dans des congrès internationaux [ci1-ci5] et un congrès national [cn3].

2.4.2 Note sur la seconde définition du point de bifurcation dynamique

La probabilité $Q(y)$ que $x_y^2 \leq x_{y_0}^2$ est égale à la probabilité que $-x_{y_0} \leq x_y \leq x_{y_0}$, notée $\Pr\left(-x_{y_0} \leq x_y \leq x_{y_0}\right)$. Or, à partir de (2.67) on a par définition :

$$\begin{aligned}\Pr\left(-x_{y_0} \leq x_y \leq x_{y_0}\right) &= Q(y) \\ &= \int_{-x_{y_0}}^{x_{y_0}} \rho(x,y)dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x_{y_0} - x^{\det}(y)}{2\sqrt{\mathcal{S}(y)}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{x_{y_0} + x^{\det}(y)}{2\sqrt{\mathcal{S}(y)}}\right)\right]\end{aligned} \tag{2.68}$$

où erf est la fonction erreur.

Si comme précédemment le temps de premier passage Y est la valeur de y quand x_y^2 atteint $x_{y_0}^2$ pour la première fois, alors la probabilité que $y \leq Y$, notée $\Pr\left(y \leq Y\right)$, vaut également $1 - P(y)$. La

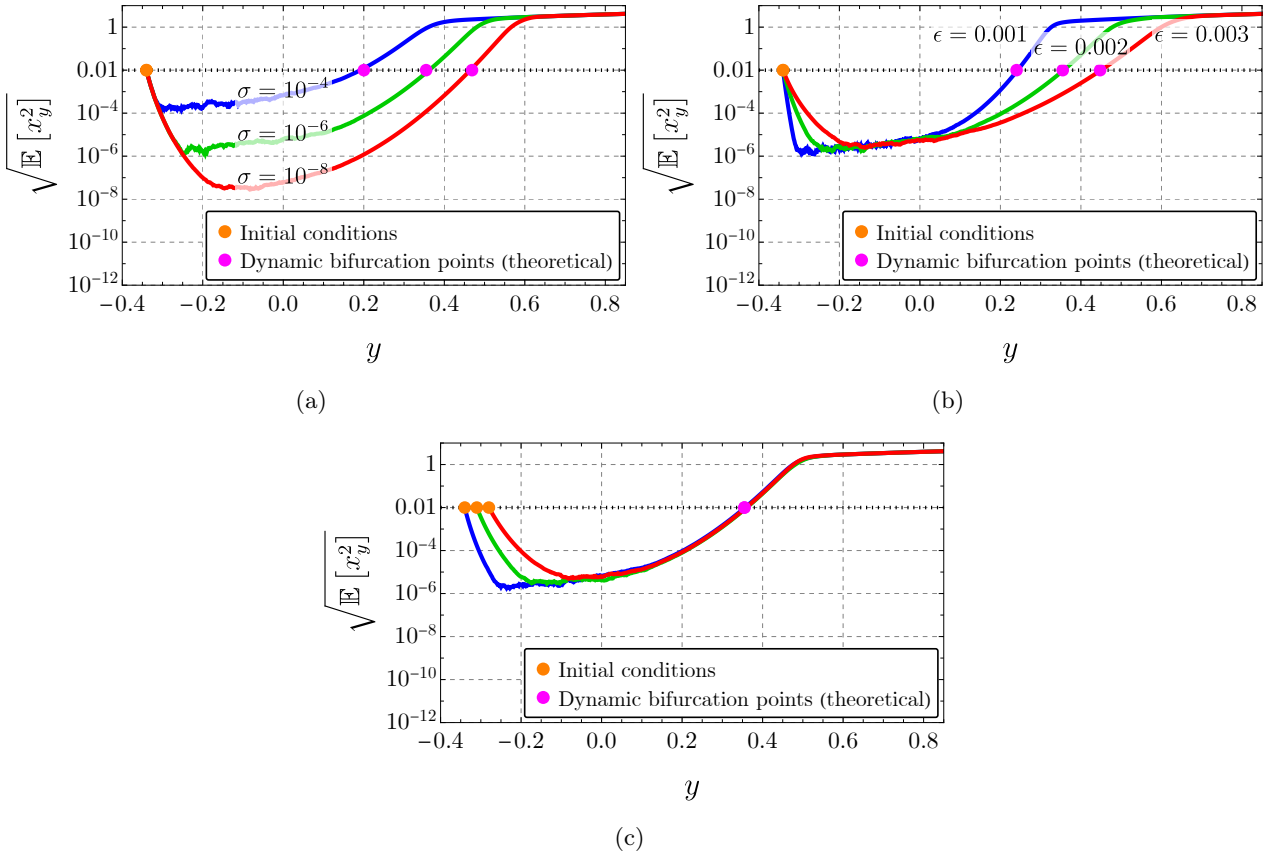


Figure 2.13. *Caractéristiques du retard à la bifurcation dans le cas stochastique.* $\sqrt{\mathbb{E}\left[x_y^2\right]}$ (calculée à chaque fois sur vingt réalisations de l'Éq. (2.61)) en fonction de y pour (a) différentes valeurs de σ avec ϵ et y_0 fixés ; (b) pour différentes valeurs de ϵ avec σ et y_0 fixés ; et (c) pour différentes valeurs de y_0 avec σ et ϵ fixés.

probabilité que le temps de premier passage Y soit le temps d'observation y est donc $\Pr(Y \leq y) = 1 - \Pr(y \leq Y) = 1 - Q(y)$ noté $P(y)$. Par conséquent, la probabilité que Y se situe entre y et $y + dy$ est $\tilde{R}(y)dy = P(y + dy) - P(y)$. Si l'on utilise un développement limité au premier ordre, on obtient :

$$\tilde{R}(y) = \frac{dP(y)}{dy} \tag{2.69}$$

qui est la densité de probabilité du temps de premier passage.

Comme précédemment, les Régimes I et II sont étudiés séparément. Pour le Régime I, comme $\mathcal{D}(y) = x^{\text{det}}(y)^2 \gg \mathcal{S}(y)$, on a $\tilde{R}(y) \approx \delta(x_{y_0} - x^{\text{det}}(y))$. En introduisant $\ell(y) = x_{y_0} - x^{\text{det}}(y)$ dont les racines sont y_0 and $\hat{y}_{\text{det}}^{\text{dyn}}$ (cf. Eq. (G.41)) et en utilisant la propriété de composition de la distribution de Dirac [10], il vient :

$$\tilde{R}(y) \approx \tilde{R}_I(y) = \frac{\delta(y - y_0)}{|\ell'(y_0)|} + \frac{\delta(y - \hat{y}_{\text{det}}^{\text{dyn}})}{|\ell'(\hat{y}_{\text{det}}^{\text{dyn}})|}. \tag{2.70}$$

Dans le cas du Régime II, on a $\mathcal{D}(y) \ll \mathcal{S}(y)$ et donc l'Éq. (2.68) devient

$$\Pr(-x_{y_0} \leq x_y \leq x_{y_0}) = 1 - P(y) = \text{erf}\left(\frac{x_{y_0}}{2\sqrt{\mathcal{S}(y)}}\right) \tag{2.71}$$

10. La propriété de composition de la distribution de Dirac correspond à l'identité suivante :

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|}$$

où les x_i sont les racines (supposées simples) de la fonction g.

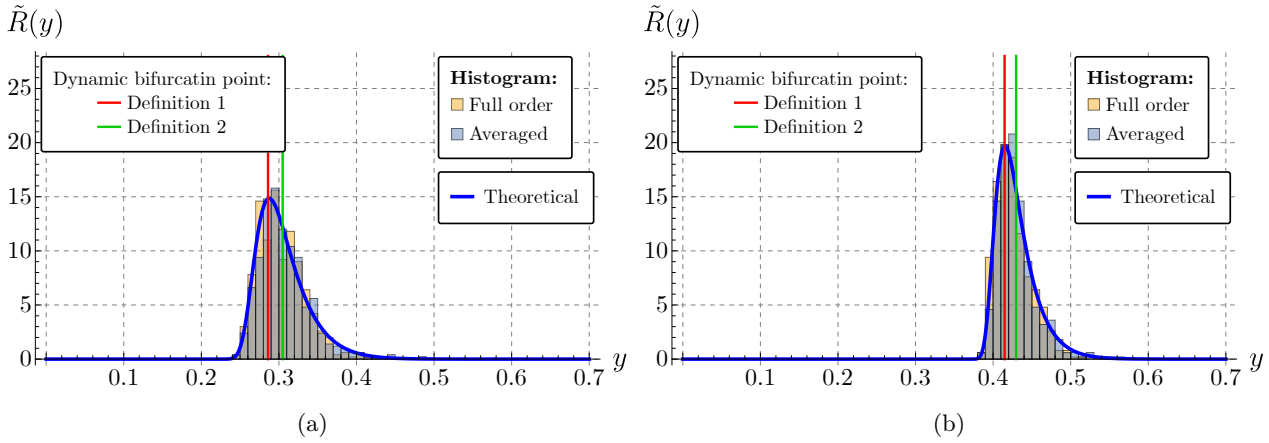


Figure 2.14. Comparaison, dans un cas stochastique (c.-à-d. en Régime II) entre l'expression analytique (2.72) de la densité de probabilité du temps de premier passage (courbe bleue) et son estimation numérique obtenue à partir de 500 réalisations des processus (2.58) (Full order, histogramme orange) (2.63) (Averaged, histogramme bleu). Les valeurs du point de bifurcation dynamique obtenues avec la première définition (cf. Remarque (2.2)) et la seconde définition (cf. Éq. (2.73)) sont également représentées par des lignes verticales rouge et verte, respectivement. Les valeurs du niveau de bruit σ sont (a) $\sigma = 10^{-5}$ et (b) $\sigma = 10^{-7}$.

et

$$\tilde{R}(y) \approx \tilde{R}_{II}(y) = \frac{dP(y)}{dy} = x_{y_0} \frac{\mathcal{S}'(y)}{\sqrt{2\pi}\mathcal{S}(y)^{3/2}} e^{-\frac{x_{y_0}^2}{2\mathcal{S}(y)}}. \tag{2.72}$$

Selon la seconde définition évoquée plus haut, le point de bifurcation dynamique vaut :

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y\tilde{R}(y)dy. \tag{2.73}$$

Dans le cas déterministe (2.73) redonne bien la valeur $\hat{y}_{\text{det}}^{\text{dyn}}$ et dans le cas stochastique il n'y a pas d'expression analytique simple de (2.73) qui est donc calculée numériquement.

Ces derniers résultats sont illustrés en Fig. 2.14 qui compare, dans un cas stochastique (c.-à-d. en Régime II), l'expression analytique (2.72) de la densité de probabilité du temps de premier passage à son estimation numérique obtenue à partir de 500 réalisations des processus (2.58) (appelé Full order) (2.63) (appelé Averaged). Les valeurs du point de bifurcation dynamique obtenues avec la première définition (cf. Remarque (2.2)) et la seconde définition (cf. Éq. (2.73)) sont également représentées par des lignes verticales rouge et verte, respectivement. Nous pouvons ainsi observer que ces deux définitions ne fournissent pas des valeurs égales mais proches. Le niveau de bruit σ est plus important en Fig. 2.14(a) qu'en Fig. 2.14(b) où le retard est donc plus important comme cela a déjà été observé en Fig. 2.13(a).

2.5 Bassins d'attraction dynamiques

Cette section reprend les résultats principaux de [p1] (reproduit en Annexe H) qui introduit la notion de *bassin d'attraction dynamique*.

2.5.1 Introduction

Les instruments de musique à anche sont connus pour produire une multitude de régimes sonores. Dans les modèles physiques, cette complexité se manifeste par la coexistence de régimes d'équilibre, périodiques ou quasi-périodiques et même chaotiques. Nous avons vu par exemple en Fig. 2.7 que le diagramme de bifurcation statique du modèle à un mode présentait un domaine de bistabilité entre

la solution d'équilibre et une solution périodique. Les diagrammes de bifurcation de modèles plus raffinés montrent en général aussi la présence de zones de multistabilité où coexistent des solutions périodiques stables (voir par la Fig. 3 de Colinot et coll. [43]). En pratique, du point de vue du jeu instrumental, la multistabilité peut être reliée à la facilité avec laquelle une note donnée peut être jouée. Par exemple, dans le cas d'un instrument à anche comme le saxophone, les musiciens savent que pour un doigté donné correspondant à une note grave, les registres d'ordre supérieurs (deuxième et troisième, cf. Définition 2.1) sont parfois plus faciles à produire que le premier registre. C'est également sur ce principe de multistabilité que fonctionnent les cuivres, comme les trompettes et les trombones.

En plus de repérer l'apparition du son, pendant un transitoire d'attaque il est important de savoir quel régime sera effectivement atteint lorsque différents régimes stables coexistent pour les mêmes paramètres. Pour investiguer cela, le modèle à un mode est à nouveau utilisé avec ici la « vraie » caractéristique non linéaire de l'instrument, c.-à-d. $u = F(p)$ donnée par l'Éq. (2.23b). Le diagramme de bifurcation statique de ce modèle est donc représenté en Fig. 2.7.

En général, la multistabilité peut être reliée au phénomène de *transition critique* (*critical transition*), c'est-à-dire un changement soudain et de grande amplitude de la sortie d'un système dynamique causé par un faible changement de l'entrée. L'article de revue [63] examine les résultats récents sur le lien entre multistabilité et transition critique et présente quelques applications en physique, neurosciences, sciences du climat, biologie et écologie. Également appelées *points de basculement* (*tipping points*) en sciences du climat, les transitions critiques peuvent se produire de différentes manières. Ashwin et coll [7] proposent une classification en trois catégories basée sur la description mathématique des mécanismes conduisant à leur apparition. Les premières sont les *transitions induites par le bruit*[11] (TIBr). En effet, les systèmes multistables sont connus pour être potentiellement très sensibles au bruit qui peut les faire basculer d'un état stable à un autre. Les TIBr n'impliquent pas forcément de variations dans le temps d'un paramètre de bifurcation du système étudié et ne sont pas spécifiquement étudiées dans ce manuscrit. Il existe ensuite les *transitions induites par une bifurcation*[12] (TIBi) qui ne sont autres que les bifurcations dynamiques évoquées en Section 2.4. Enfin, il y a les *transitions induites pas la variation dans le temps d'un paramètre de bifurcation du système*[13] (TIV). Les TIBi et les TIV considèrent spécifiquement des systèmes dynamiques de la forme de (2.3).

De façon générale, les solutions d'un système de la forme de l'Éq. (2.3) (à la fois transitoires et permanentes) ne sont plus solutions de l'Éq. (2.1) puisque y n'est plus constant dans le temps. Cependant, les solutions permanentes (solutions d'équilibre, périodiques ou quasi-périodiques) stables de l'Éq. (2.1) sont associées à des *variétés*[14] *invariantes localement attractives* de l'Éq. (2.3) qui évoluent dans l'espace des phases de dimension $(n + 1)$ de ce dernier et attirent les orbites (ou trajectoires) qui se trouvent dans leur voisinage. Dans le cas des TIBi, on étudie le comportement de (2.3) quand la variable lente y croise un point de bifurcation $\hat{y}^{\mathrm{st}}$ de l'Éq. (H.1). En général, la transition vers une autre variété attractive ne se produit pas à $\hat{y}^{\mathrm{st}}$ mais à une valeur plus grande, c'est le phénomène de *retard à la bifurcation* décrit en Section 2.4. Les TIV, identifiées par Wieczorek et coll. [212], sont des transitions entre variétés attractives de l'Éq. (2.3) qui se produisent sans la présence de bruit ou de la traversée de point de bifurcation.

Les travaux cités dans le paragraphe précédent (voir l'introduction de [p1] en Annexe H.1 pour davantage de références) se focalisent sur les conditions provoquant la sortie d'une orbite de (2.3) du voisinage d'une variété qu'elle longeait. Ces travaux portent donc sur le début de la transition critique. Cependant, la question de la fin de la transition, lorsque plusieurs autres variétés attractives peuvent être potentiellement atteintes par l'orbite, est peu abordée dans la littérature. Dans ce contexte, la question que nous nous posions en fin de Sect. 2.3.2 peut être reformulée ainsi : que se passe-t-il pour une orbite de l'Éq. (2.3) lorsqu'elle quitte le voisinage d'une certaine variété attractive (ou une variété

11. Traduction de *noise-induced transitions*.
12. Traduction de *bifurcation-induced transitions* .
13. Traduction de *rate-induced transitions*.
14. Intuitivement, une variété peut être vue comme la généralisation de la classification qui établit qu'une courbe est une variété de dimension 1 et une surface est une variété de dimension 2 (voir par exemple [69] et [40]).

qui a été localement attractive) et que plusieurs variétés attractive sont présentes ?

Nous fournissons des éléments de réponse à ces questions en introduisant la notion de *bassin d'attraction dynamique* que nous illustrons d'abord à l'aide du modèle à un mode (cas d'une TIBi) en Section 2.5.2.1, qui synthétise les résultats de [p1]. Ensuite afin de souligner le caractère général de la méthodologie, son application à un cas d'une TIV est présenté en Section 2.5.3.

2.5.2 Bassin d'attraction dynamique du modèle à un mode

Pour investiguer cette thématique complexe sur un modèle académique d'instrument sujet à la multistabilité, le modèle à un mode (2.39) est à nouveau utilisé avec ici la « vraie » caractéristique non linéaire de l'instrument, c.-à-d. $u = F(p)$ (cf. Éq. (2.23b)). Le diagramme de bifurcation statique de ce modèle est donc représenté en Fig. 2.7. Dans les faits, nous utilisons une approximation polynomiale de la fonction $F(p)$ afin de pouvoir utiliser la méthode de moyennisation évoquée en Section 2.3.1. Par conséquent, le modèle obtenu a une forme similaire à (2.1) avec $x \in \mathbb{R}$, c.-à-d. :

$$\dot{x} = \epsilon_1 f(x, \gamma) \tag{2.74}$$

où x est à nouveau l'amplitude des oscillations de la pression acoustique p dans le bec de l'instrument. La dynamique de la pression de souffle (maintenant notée y) est ajoutée comme suit : $\dot{y} = \hat{\epsilon} g(y)$. Cela mène à :

$$\dot{x} = \epsilon_1 f(x, y) \tag{2.75a}$$
$$\dot{y} = \hat{\epsilon} g(y). \tag{2.75b}$$

Le changement de temps $t \to \epsilon_1 t$ conduit finalement à l'équation suivante :

$$\dot{x} = f(x, y) \tag{2.76a}$$
$$\dot{y} = \epsilon g(y). \tag{2.76b}$$

avec

$$\epsilon = \frac{\hat{\epsilon}}{\epsilon_1} \tag{2.77}$$

qui est le petit paramètre pertinent à utiliser ici.

L'Éq. (2.76) peut aussi être écrit par rapport au temps lent $\tau = \epsilon t$ comme suit

$$\epsilon x' = f(x, y) \tag{2.78a}$$
$$y' = g(y), \tag{2.78b}$$

où, comme au Chapitre 1, $(.)' = \frac{d(.)}{d\tau}$.

Les étapes permettant d'obtenir (2.76) sont détaillées en Annexe H.8.2 (attention encore aux quelques inhomogénéités de notations entre le corps du texte et cette annexe).

Le diagramme de bifurcation statique du problème (c.-à-d. celui de l'Éq. (2.74)) est représenté en Fig. 2.15. On observe une allure proche de celle du diagramme de la Fig. 2.7, avec un domaine de bistabilité entre l'équilibre trivial et un équilibre non trivial.

2.5.2.1 Cas d'une d'une pression de souffle qui croît dans le domaine de bistabilité

Nous considérons ici une augmentation linéaire de la pression de souffle, c.-à-d. $g(y) = 1$, et y croît dans le domaine de bistabilité. La problématique est illustrée en Fig. 2.16 à l'aide de simulations numériques de (2.78) pour deux conditions initiales légèrement différentes (notées N_1 et N_2). Les séries temporelles obtenues sont représentées en Figs. 2.16(a) et 2.16(b) avec en bleu $y(t)$ et en vert $x(t)$. Dans le premier cas, on observe $x(t)$ partir de la condition initiale puis atteindre rapidement le voisinage de l'axe des abscisses et y rester jusqu'à la fin de la simulation. Dans le second cas, le début de la simulation est identique, mais une première transition rapide de $x(t)$ du voisinage de zéro vers

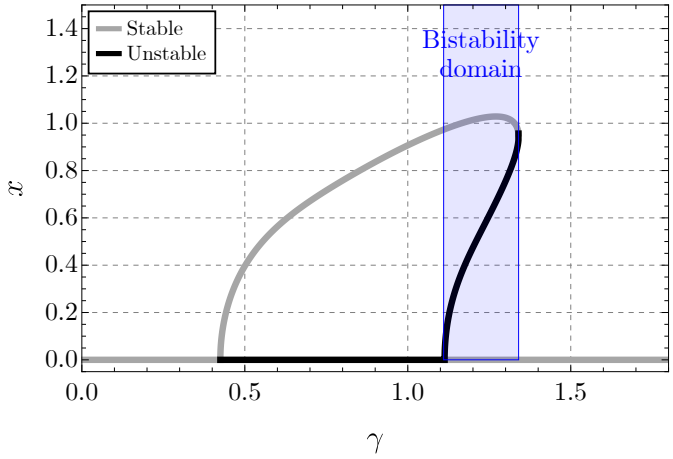
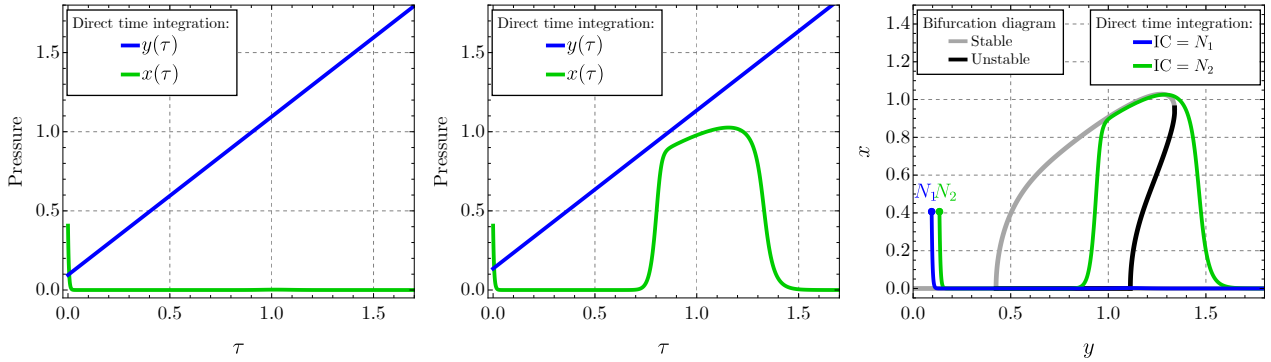


Figure 2.15. Diagramme de bifurcation de l'Éq. (2.74). Une zone de bistabilité entre l'équilibre trivial et un équilibre non trivial est présente entre $\gamma = 1.11$ and $\gamma = 1.34$ (zone bleutée).



(a) Conditions initiales N_1 (b) Conditions initiales N_2 (c)

Figure 2.16. Simulations numériques de l'Éq. (2.78) pour deux conditions initiales légèrement différentes (notées N_1 et N_2). Les séries temporelles obtenues sont représentées en (a) et (b) avec $y(t)$ en bleu et $x(t)$ en vert. (c) Superposition de ces mêmes trajectoires (en bleu pour celle initialisée en N_1 et en vert celle initialisée en N_2), représentées dans le plan (y, x), et du diagramme de bifurcation de l'Éq. (2.74).

une valeur non nulle se produit ; $x(t)$ évolue ensuite lentement puis une seconde transition rapide se produit où $x(t)$ redescend proche de zéro et y reste jusqu'à la fin de la simulation. La superposition de ces mêmes trajectoires représentées dans le plan (y, x) avec le diagramme de bifurcation statique (voir Fig. 2.16(c)) permet de mieux comprendre les comportements observés. En effet, au départ des deux simulations, les orbites rejoignent l'unique branche stable du diagramme correspondant à l'équilibre trivial. En effet, cette branche du diagramme de bifurcation de (2.74) est également une variété invariante de (2.78) (de dimension 1) : attractive quand $y < \hat{\gamma}^{\text{st}}$, répulsive quand $y > \hat{\gamma}^{\text{st}}$ et attractive à nouveau pour $\gamma > 1.12$. Un phénomène de retard à la bifurcation est ensuite observé : les deux orbites longent pendant un certain temps la variété devenue répulsive après avoir dépassé le point de bifurcation statique. L'orbite débutant en N_1 reste sur la variété répulsive jusqu'a ce qu'elle redevienne attractive vers $y = 1.11$. Quant à l'orbite débutant en N_2, elle saute de la variété répulsive pour rejoindre l'autre variété attractive de (2.78) également de dimension 1 et « associée » à la branche de l'équilibre stable non trivial du diagramme de bifurcation de (2.74) ; une fois le domaine de bistabilité franchi l'orbite redescend sur la droite $x = 0$, la seule variété invariante disponible.

Les variétés invariantes attractives de (2.78) associées aux branches stables du diagramme de bifurcation de (2.74) mentionnées plus haut peuvent être définies rigoureusement dans le cadre de

l'*approche géométrique des perturbations singulières* [62, 107] déjà évoquée en Section 1.2 et dont les éléments importants sont donnés en Annexe H.4.

Ainsi, l'Éq. (2.74) (cas statique) peut être vue comme le sous-système rapide associé à l'Éq. (2.78), soit,

$$\dot{x} = f(x, y), \tag{2.79a}$$
$$\dot{y} = 0. \tag{2.79b}$$

Le sous-système lent s'écrit :

$$0 = f(x, y) \tag{2.80a}$$
$$y' = 1. \tag{2.80b}$$

La résolution de l'Éq. (2.80a) permet de définir la variété critique $\mathcal{M}_0$ de l'Éq. (2.78) telle que

$$\mathcal{M}_0 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = x^\star(y)\right\} \tag{2.81}$$

avec $x^\star(y)$ les branches de solution de

$$f\left(x^\star(y), y\right) = 0 \tag{2.82}$$

dans chaque intervalle de y où $\partial_x f(x, y)$ ne s'annule pas et donc où l'on peut écrire que $f(x, y) = 0$ est équivalent à $x = x^\star(y)$ par le *théorème des fonctions implicites* (cf. Théorème 2.1).

Théorème 2.1 (des fonctions implicites, version $\mathbb{R}^2$). *Soit f une fonction de classe C^k définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $(a, b) \in \Omega$ tel que $f(a, b) = 0$. On suppose que la dérivée partielle de f par rapport à la seconde variable est non nulle en (a, b) :*

$$\partial_y f(a, b) \neq 0.$$

Alors il existe un voisinage ouvert U de (a, b) dans $\mathbb{R}^2$, un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant a et une fonction $\phi : I \to \mathbb{R}$ de classe C^k telle que, pour tout $(x, y) \in U$ on ait :

$$f(x, y) = 0 \iff y = \phi(x).$$

De plus, pour tout $x \in I$, on a $\phi'(x) = -\frac{\partial_x f(x,\phi(x))}{\partial_y f(x,\phi(x))}$.

Chaque point de $\mathcal{M}_0$ étant une solution d'équilibre du sous-système rapide (2.79), la variété critique n'est autre que ce nous appelions jusqu'à maintenant le diagramme de bifurcation statique du problème. Notons que la variété critique est indépendante de la manière dont y varie dans le temps et donc indépendante de la fonction $g(y)$ du cas général (2.76).

La Définition H.2, réécrite ci-dessous en français, précise la définition d'une variété critique *normalement hyperbolique*.

Définition 2.4. Soit $a^\star(y)$ la linéarisation de (2.79a) (de dimension 1) sur $\mathcal{M}_0$, c.-à-d. en $x = x^\star(y)$, définie comme suit :

$$a^\star(y) = \partial_x f\left(x^\star(y), y\right) \tag{2.83}$$

Une valeur $x^\star(y)$ de la variable rapide x est une solution d'équilibre *hyperbolique* de (2.79) si $a^\star(y) \neq 0$; stable si $a^\star(y) < 0$ et instable si $a^\star(y) > 0$. La variété critique est *attractive* (resp. *répulsive*) si $a^\star(y) < 0$ (resp. $a^\star(y) > 0$) pour $y \in I$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$. Un sous-ensemble $\mathcal{M}_0^{\text{nh}}$ de $\mathcal{M}_0$ est *normalement hyperbolique* si pour chaque point $P = (x^\star(y), y) \in \mathcal{M}_0^{\text{nh}}$ on a $a^\star(y) \neq 0$, c.-à-d. $\mathcal{M}_0^{\text{nh}}$ est soit attractive, soit répulsive [a].

a. *Normalement* signifie ici que chaque point de $\mathcal{M}_0$ doit être hyperbolique uniquement dans la direction normale (c'est-à-dire non tangente) à elle-même (voir par exemple la définition 2.3.4 et le texte en dessous de [40]).

Le Théorème de Fenichel (cf. Theorem H.1) stipule que si la variété critique $\mathcal{M}_0$ est attractive (resp. répulsive), alors il existe une variété invariante $\mathcal{M}_\epsilon$ qui se trouve à une distance de l'ordre de $\mathcal{O}(\epsilon)$ de $\mathcal{M}_0$. Cette variété invariante $\mathcal{M}_\epsilon$ attire (resp. repousse) les orbites de (2.76) (ou (2.78)) qui sont dans son voisinage, c.-à-d. que $\mathcal{M}_\epsilon$ est également attractive (resp. répulsive).

Sur la base des éléments de l'approche géométrique des perturbations singulières fournis en Annexe H.4 et pour certains rappelés ici, la définition de ce que nous appelons un *bassin d'attraction dynamique* va pouvoir être formalisée. Avant cela, la définition du *domaine de bistabilité* est donnée ci-dessous.

Définition 2.5 (Domaine de bistabilité de $\mathcal{M}_0$). Un intervalle

$$D =]y_\mathrm{l}, y_\mathrm{u}[\tag{2.84}$$

de $\mathbb{R}$ est appelé *domaine de bistabilité* de la variété critique, si pour $y \in D$, l'Éq. (2.82) possède deux branches attractives $x_1^\star(y)$ et $x_2^\star(y)$, c.-à-d. $a_1^\star(y) = \partial_x f\left(x_1^\star(y), y\right) < 0$ et $a_2^\star(y) = \partial_x f\left(x_2^\star(y), y\right) < 0$. Nécessairement, l'Éq. (2.82) possède aussi une branche répulsive $x_3^\star(y)$ pour laquelle $a_3^\star(y) = \partial_x f\left(x_3^\star(y), y\right) > 0$. La variété critique n'est pas normalement hyperbolique en $y = y_\mathrm{l}$ et $y = y_\mathrm{u}$.

Comme énoncé plus haut, la variété critique $\mathcal{M}_0$ représente le diagramme de bifurcation statique du sous-système rapide. Par conséquent, le domaine de bistabilité de $\mathcal{M}_0$ est identique au domaine de bistabilité du problème statique montré en Fig. 2.15.

Il est maintenant possible de donner la définition d'un bassin d'attraction dynamique. Notez que les définitions qui suivent sont valables pour les systèmes $(1,1)$-rapides-lents de la forme de l'équation (2.78) et dont la variété critique $\mathcal{M}_0$ possède un domaine de bistabilité.

Définition 2.6 (Bassin d'attraction dynamique.). Dans le domaine de bistabilité D (cf. Définition 2.5) la variété critique $\mathcal{M}_0$ de (H.4) possède deux branches attractives $\mathcal{M}_{0,\mathrm{a}_1}$ et $\mathcal{M}_{0,\mathrm{a}_2}$ telles que

$$\mathcal{M}_{0,\mathrm{a}_i} = \left\{x \in \mathbb{R}, y \in D \mid x = x_i^\star(y)\right\}, \quad i = 1,2 \tag{2.85}$$

et séparée par une branche répulsive $\mathcal{M}_{0,\mathrm{r}}$

$$\mathcal{M}_{0,\mathrm{r}} = \left\{x \in \mathbb{R}, y \in D \mid x = x_3^\star(y)\right\} \tag{2.86}$$

Par le théorème de Fenichel Fenichel H.1, l'Éq.(2.78) possède deux variétés invariantes localement attractives $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{a}_i}$ dans un voisinage $\mathcal{O}(\epsilon)$ de $\mathcal{M}_{0,\mathrm{a}_i}$ $(i = 1,2)$ et une variété invariante localement répulsive $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{r}}$ dans un voisinage $\mathcal{O}(\epsilon)$ de $\mathcal{M}_{0,\mathrm{r}}$.
Le *bassin d'attraction dynamique* (DBA pour *dynamic basin of attraction*) d'une branche attractive donnée $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{a}_i}$ $(i = 1,2)$ est le sous-ensemble de l'espace des phases pour lequel les orbites provenant de conditions initiales dans le DBA finissent par longer $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{a}_i}$ $(i = 1,2)$ lorsque le domaine de bistabilité D est traversé.

Nous écrivons dans la Définition 2.6 « ... finissent par longer ... » car des phénomènes transitoires peuvent exister avant que les branches $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{a}_i}$ $(i = 1,2)$ ne soient atteintes.

La *séparatrice entre deux DBA*, ainsi que sa sa nature, sont enfin définies.

Définition 2.7 (Séparatrice entre deux DBA). La *séparatrice entre deux DBA* (SDBA pour *separatrix between DBA*) est la frontière dans l'espace des phases qui sépare deux DBA.

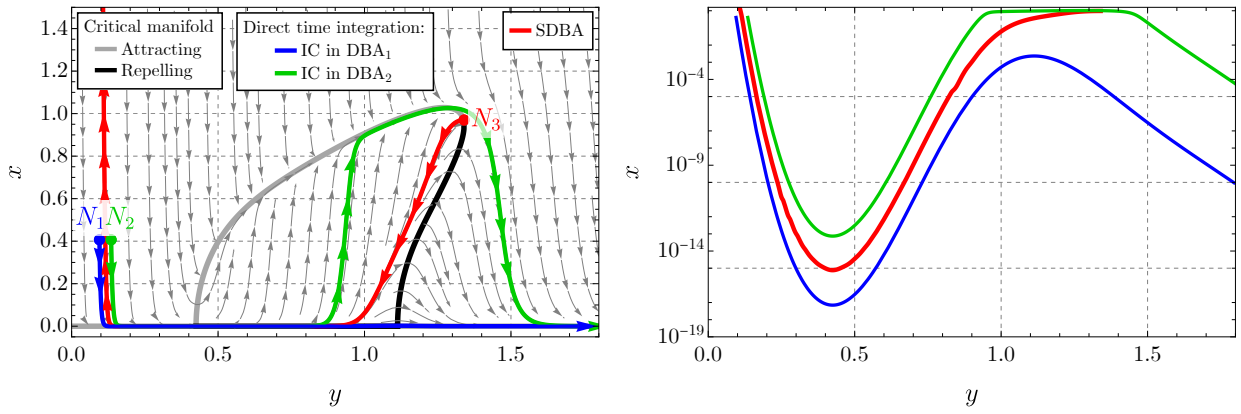


Figure 2.17. Simulations numériques de l'Éq. (2.78) pour deux jeux de conditions initiales légèrement différents (notées N_1 et N_2) et de l'Éq. (2.87) initialisé en N_3 défini par (2.88). (a) Superposition des séries temporelles de l'Éq. (2.78) (en bleue pour celle initialisée en N_1, en vert pour celle initialisée N_2) et de l'Éq. (2.87) (c.-à-d. la SDBA, en rouge), représentées dans le plan (y, x), et de la variété critique $\mathcal{M}_0$ (2.81) (qui n'est autre que la diagramme de bifurcation de l'Éq. (2.74)). (b) Mêmes séries temporelles qu'en (a) avec une échelle logarithmique pour l'axe des ordonnées. $\epsilon = 0.0183$.

Définition 2.8 (Nature de la SDBA). La SDBA est la variété invariante répulsive $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{r}}$ considérée au-delà de la limite inférieure y_l du domaine de bistabilité D jusqu'à un point de l'espace des phases ayant la plus petite valeur possible de la variable lente y.

De façon pratique, $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{r}}$ n'est autre qu'une orbite particulière de l'Éq. (2.76) (ou (2.78)). À la manière de Berglund et Landon [26], cette solution particulière est ici approchée numériquement au moyen d'une procédure de renversement temporel, c.-à-d. par une intégration temporelle numérique de

$$\epsilon x' = -f(x, y) \tag{2.87a}$$
$$y' = -1 \tag{2.87b}$$

en choisissant une condition initiale (x_0, y_0) appropriée, c.-à-d. sur la borne supérieure du domaine de bistabilité D et sur $\mathcal{M}_{0,\mathrm{r}}$, c.-à-d. sur le point N_3 tel que :

$$N_3 = (x_3^\star(y_\mathrm{u}), y_\mathrm{u}). \tag{2.88}$$

Nous utilisons le fait que, selon le Théorème de Fenichel H.1, $\mathcal{M}_{0,\mathrm{r}}$ se trouve dans un voisinage de l'ordre de $\mathcal{O}(\epsilon)$ de $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{r}}$ et que cette dernière est attractive pour les orbite de (2.87). L'intégration numérique est ensuite arrêtée à la valeur requise de la variable lente y. Cette méthode de renversement temporel a l'avantage de pouvoir être facilement généralisée à un espace des phases de dimension supérieure, même si dans ce cas des précautions sont à prendre (voir Section 2.5.2.3).

La méthodologie décrite ci-dessus est illustrée en Fig. 2.17. La Fig. 2.17(a) montre le même résultat de simulation numérique de l'Éq. (2.78) que celui montré en Fig. 2.16(c). Nous y voyons en plus l'orbite du système en temps inversé (2.87) initialisé en N_3 selon (2.88) et des flèches ont été rajoutées sur les courbes pour montrer le sens du temps. Cette orbite représente la SDBA entre les DBA des variétés invariantes $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{a}_1}$ et $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{a}_2}$, notés DBA_1 et DBA_2, respectivement. Au vu de ces résultats, la Fig. 2.16(c) peut maintenant s'interpréter en observant que, même si N_1 et N_2 sont très proches dans le plan (y, x), on a $N_1 \in \mathrm{DBA}_1$ et $N_2 \in \mathrm{DBA}_2$. C'est la raison pour laquelle l'orbite initialisée en N_2 finit par longer $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{a}_2}$ lorsque le domaine de bistabilité D est traversé alors que celle initialisée en N_1 longe $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{a}_1}$ (qui correspond à $x = 0$) pendant toute la simulation. Les lignes de courant de (2.78)

sont également représentées (lignes grises fléchées). Ces dernières illustrent effectivement que, pour $y < y_{\mathrm{u}}$, les orbites commençant avec une condition initiale dans DBA_1 (resp. DBA_2), c'est-à-dire en-dessous (resp. au-dessus) de la SDBA, finissent par longer $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{a}_1}$ (resp. $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{a}_2}$). Quand y dépasse le domaine de bistabilité, toutes ces orbites rejoignent $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{a}_1}$, la seule variété attractive restante.

Pour mieux comprendre ce qui se passe au voisinage de $x = 0$, une échelle logarithmique pour les ordonnées est utilisée en Fig. 2.17(b). Nous pouvons voir que de très petites amplitudes sont rencontrées. Il est difficile d'envisager cette situation dans un problème réel où un bruit résiduel empêcherait d'atteindre des amplitudes aussi faibles. Ceci sera évoqué dans les perspectives en Section 4.2.2.

2.5.2.2 Cas d'une d'une pression de souffle qui converge dans le domaine de bistabilité

En situation de jeux lors de l'attaque d'une note, le musicien ne va pas faire croître indéfiniment la pression dans sa bouche mais plutôt l'augmenter jusqu'à une valeur cible (ceci n'est qu'une stratégie de contrôle parmi d'autres). Si cette valeur cible est supérieure à la borne supérieure du domaine de bistabilité, l'étude présentée dans les sections précédentes reste pertinente. Dans cette section nous étudions le cas où la valeur cible se trouve dans le domaine de bistabilité. Pour cela, un exemple impliquant un profil exponentiel de la variables lente y convergeant vers une valeur y_{targ} située dans le domaine de bistabilité D, c.-à-d. $g(y) = y_{\mathrm{targ}} - y$ (avec $y_{\mathrm{targ}} \in D$) est considéré. À l'échelle de temps lente τ l'équation du modèle à un mode devient donc :

$$\epsilon x' = f(x, y) \tag{2.89a}$$
$$y' = y_{\mathrm{targ}} - y. \tag{2.89b}$$

Cette situation diffère du cas étudié jusqu'à présent, dans lequel la pression de souffle ne sature pas dans le domaine de bistabilité. En effet, la recherche des points fixes de l'Éq. (2.89), c.-à-d. la résolution de $f(x, y) = 0$ et $y_{\mathrm{targ}} - y = 0$ conduit à $f(x, y_{\mathrm{targ}}) = 0$ et donc $x = x_i^\star(y_{\mathrm{targ}})$ $(i = 1, 2, 3)$. Par conséquent, les points $P_i^\star = (x_i^\star(y_{\mathrm{targ}}), y_{\mathrm{targ}})$ $(i = 1, 2, 3)$ sont les points fixes de l'Éq. (2.89). La matrice jacobienne $\mathbf{J}(P_i^\star)$ de (2.89) évaluée en chaque point fixe $P_i^\star$ s'écrit :

$$\mathbf{J}(P_i^\star) = \begin{pmatrix} \dfrac{a_i^\star(y_{\mathrm{targ}})}{\epsilon} & \dfrac{\partial_y f(x_i^\star(y_{\mathrm{targ}}), y_{\mathrm{targ}})}{\epsilon} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.90}$$

dont les valeurs propres sont $\mu_1 = \frac{a_i^\star(y_{\mathrm{targ}})}{\epsilon}$ et $\mu_2 = -1$. Par conséquent, comme $a_1^\star(y_{\mathrm{targ}}) < 0$, $a_2^\star(y_{\mathrm{targ}}) < 0$ et $a_3^\star(y_{\mathrm{targ}}) > 0$ (voir Définition 2.5), $P_1^\star$ et $P_2^\star$ sont des *noeuds* (*nodes*) - c.-à-d. $\mu_1\mu_2 > 0$ - et $P_3^\star$ est un *point-selle* (*saddle*) - c.-à-d. $\mu_1\mu_2 < 0$ -. Ces définitions classiques des nœuds et des points-selles sont tirées de [179].

Le problème devient donc un problème classique de recherche des SBA des points fixes stables d'un système de dimension 2. Dans ce cas, les DBA des branches attractives $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{a}_i}$ $(i = 1, 2)$ et les BAS des points fixes $P_1^\star$ et $P_2^\star$ sont identiques. Cependant, nous choisissons de conserver le vocabulaire DBA et SDBA car le problème (2.89) reste un problème dynamique tel que défini en Section 2.1. La séparatrice entre DBA est la variété stable du point fixe instable $P_3^\star$ [38] qui est aussi une variété invariante localement répulsive $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{r}}$ de (2.89). Cette dernière est à nouveau calculée à l'aide d'une simulation en temps inversé. L'équation

$$\epsilon x' = -f(x, y) \tag{2.91a}$$
$$y' = -(y_{\mathrm{targ}} - y) \tag{2.91b}$$

est donc intégrée numériquement avec une condition initiale choisie ici comme une petite perturbation de $P_3^\star$.

Un exemple est donné en Fig. 2.18 dont le mode de représentation est similaire à celui de la Fig. 2.17(a). La valeur cible y_{targ} de la pression dans la bouche est mise en évidence par une ligne verticale orange d'équation $y = y_{\mathrm{targ}}$. Les points fixes de l'Éq. (2.89) apparaissent donc comme les

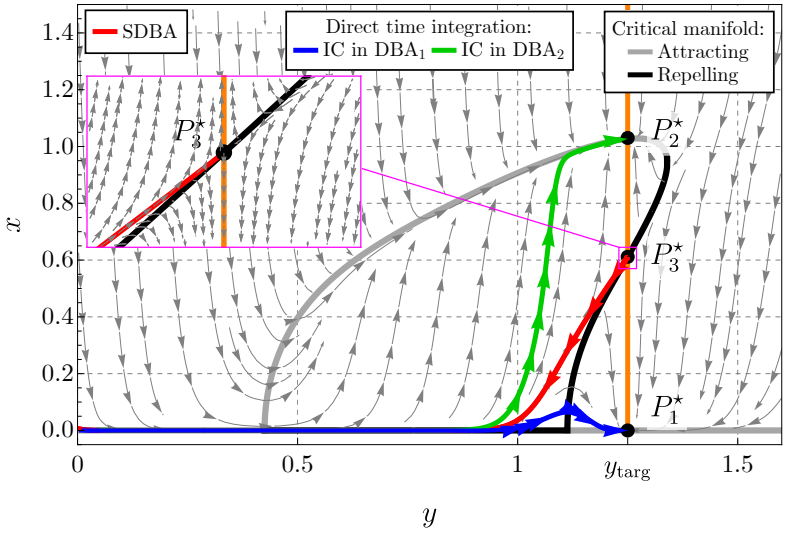


Figure 2.18. Figure similaire à la Fig. 2.17(a). En rouge, une orbite obtenue par l'intégration numérique du système a temps inversé (2.87) avec $g(y) = y_{\text{targ}} - y$ et une condition initiale (CI) choisie comme une petite perturbation du point fixe non trivial $P_3^\star$. En bleu et vert, deux orbites obtenues par l'intégration de lÉq. (2.89) : avec une CI d'abord dans le DBA$_1$ (en bleu) et dans le DBA$_2$ (en vert). Les lignes de courant de l'Éq. (2.89) (lignes fléchées grises) sont également représentées.

points d'intersection entre cette dernière et la variété critique $\mathcal{M}_0$ qui pour rappel est indépendante de la fonction $g(y)$ et donc identique à celle obtenue précédemment en Section 2.5.2.1. Un zoom au niveau du point fixe instable $P_3^\star$ est effectué, on peut observer la forme typique des lignes de courant d'un système dynamique au niveau d'un de ses points-selles. Ici, c'est donc la variété stable de $P_3^\star$ qui représente la SDBA.

2.5.2.3 Quid de l'extension de la méthode à des modèles de dimension supérieure ?

Les concepts de DBA et de SDBA ont été introduits pour des systèmes $(1,1)$-rapides-lents. Cependant, les modèles plus réalistes d'instruments à anche sont de dimension supérieure. Travailler dans le plan a permis d'illustrer facilement ces concepts et donc de les comprendre plus aisément. Les concepts de DBA et de SDBA restent cependant valables pour les systèmes (m,n)-rapides-lents. Cependant, il y a deux choses auxquelles il faut faire attention lorsque le sous-système rapide est de dimension supérieure à 1. La première est que la variété critique peut être *saddle-type*, c.-à-d. ni attractive ni répulsive (dans ce cas, la matrice jacobienne du sous-système rapide évaluée sur la variété critique a des valeurs propres dont certaines ont des parties réelles positives et d'autres négatives, cf. Définition 1.2). Si la SDBA doit être calculée à partir d'une variété invariante *saddle-type* (au lieu d'une variété répulsive, comme c'était le cas dans les sections précédentes), la procédure de renversement temporel ne peut plus être utilisée. En effet, une variété *saddle-type* en temps direct reste *saddle-type* en temps inversé. La deuxième chose à considérer est que le sous-système rapide peut avoir d'autres types de solutions permanentes que les solutions d'équilibre, comme des solutions périodiques ou même quasi-périodiques. Ainsi, le diagramme de bifurcation complet du sous-système rapide (incluant les solutions périodiques et si possible les solutions quasi-périodiques) n'est plus la variété critique du système (m,n)-rapide-lent étudié qui n'inclut que les solutions d'équilibre. Les variétés invariantes d'un système (m,n)-rapide-lent associées à des solutions quasi-périodiques du sous-système rapide correspondant semblent très compliquées à étudier. En revanche, les solutions périodiques peuvent elles être traitées de la même manière que les solutions d'équilibre. Tout d'abord, parce que Berglund [22] propose un analogue du théorème de Fenichel quant à l'existence de variétés invariantes qui longent des familles d'orbites périodiques [15] et aussi parce que les solutions pério-

15. La démonstration repose sur une procédure de moyennisation.

diques sont faciles à calculer numériquement. Comme dans le cas des solutions d'équilibre, pour que la méthode du retournement temporel puisse être utilisée, la variété invariante considérée pour le calcul de la SDBA doit être répulsive. Pour les solutions périodiques, cela signifie que $m-1$ [16] des *multiplicateurs de Floquet* associés à la solution périodique considérée ont un module strictement supérieur à un (voir par exemple [179], Chap. 7, concernant les détails sur la stabilité locale des solutions périodiques).

En passant en variables amplitude-phase x et φ (cf. Section 2.3.1) et en prenant en compte la variation dans le temps de la pression de souffle y, le modèle à un mode non moyenné (2.39) devient d'un système $(2,1)$-rapides-lent de la forme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, y), \tag{2.92a}$$
$$\dot{y} = \epsilon g(y), \tag{2.92b}$$

avec $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Les sous-systèmes rapide et lent associés à (2.92) sont :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, y), \tag{2.93a}$$
$$\dot{y} = 0, \tag{2.93b}$$

et

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, y), \tag{2.94a}$$
$$y' = g(y), \tag{2.94b}$$

respectivement.

Dans cette situation où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, le sous-système rapide (qui pour rappel représente le cas statique) possède deux solutions périodiques (une stable et une instable) en plus de la solution d'équilibre triviale. La variété critique de (2.92), solution de l'Éq. (2.94a), ne représente donc plus toutes les solutions permanentes de (2.93). Le domaine de bistabilité du diagramme de bifurcation de (2.93) incluant les solutions périodiques (qui n'est donc plus la variété critique) est en revanche encore D avec toujours une branche attractive correspondant à l'équilibre trivial (2.93). Les équilibres non triviaux, stable et instable, du système moyenné (2.76) correspondent à des solutions périodiques (2.93) de même stabilité. On peut donc en déduire qu'il existe des variétés invariantes (de dimension 2) associées aux solutions périodiques stable et instable de (2.93), l'une attractive et l'autre répulsive, respectivement. En effet, pour un système de dimension 2, une solution périodique stable (resp. instable) est associée à deux multiplicateurs de Floquet, l'un est égal à 1 [16] et l'autre de module inférieur (resp. supérieur) à un. Par conséquent, la variété invariante associée à la solution périodique instable de l'Éq. (2.93) est effectivement répulsive et la procédure de renversement temporal peut être utilisée.

L'Annexe H.6.2 illustre les éléments évoqués dans le paragraphe précédent. Dans ce cas, comme énoncé dans le paragraphe précédent, la méthode de renversement temporelle reste pertinente.

2.5.2.4 Calcul de séparatrice par apprentissage supervisé

Nous abordons aussi cette thématique relativement récente sur la notion de bassin d'attraction dynamique appliquée à des modèles d'instruments de musique à l'aide d'une méthode d'apprentissage supervisé appelée *machine à vecteurs de support* (ou *support vector machine*) [46, 92]. Toujours en utilisant le modèle à un mode (2.39) avec cette fois un profil de type rampe pour la pression dans la bouche, c.-à-d. une croissance linéaire stoppée à un temps T après lequel la pression de souffle reste constante, égale γ_t :

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \gamma_0 + \hat{\epsilon} \quad \text{if} \quad t < t_c \\ \gamma(t) &= \gamma_t \quad \text{if} \quad t \geq t_c. \end{aligned} \tag{2.95}$$

16. Une solution périodique d'un sous-système rapide de dimension m est associée à m multiplicateurs de Floquet, mais l'un d'eux est toujours égal à 1 (voir le lemme 7.3 de [179]).

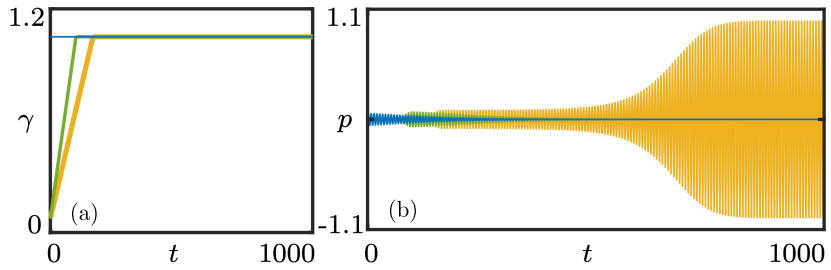


Figure 2.19. Simulations numérique de (2.39) avec (2.95) pour deux profils de $\gamma(t)$ variant dans le temps (selon (2.95)) et un constant $\gamma(t) = \gamma_t$. La valeur initale γ_0, la valeur cible $\gamma_t = 1.05$ sont les mêmes pour les deux simulations se faisant à γ variant dans le temps. Seule la valeur de $\hat{\epsilon}$ change : $\hat{\epsilon} = 0.006$ (courbes jaunes) et 0.01 (courbes vertes). La simulation effectuée à $\gamma = \gamma_t$ est représentées en bleu. (a) Profils temporels de γ et (b) de la pression acoustique simulée $p(t)$. *Figure produite et fournie par Soizic Terrien*[6].

Noter ici que même si la pression de souffle varie dans le temps la notation $\gamma(t)$ est utilisée (et pas $y(t)$ comme précédemment). La valeur cible est choisie pour être dans la zone de bistabilité (zone grisée en Fig. 2.7).

L'effet d'un tel profil temporel de γ sur les régimes observés est illustré en Fig. 2.19 qui montre montre la simulation numérique de (2.39) avec (2.95) pour deux profils de $\gamma(t)$ variant dans le temps (selon (2.95)) et un constant $\gamma(t) = \gamma_t$. Les trois profils de $\gamma(t)$ en fonction du temps sont représentés en Fig. 2.19(a) et les séries temporelles simulées de la pression acoustique $p(t)$ sont représentées en Fig. 2.19(b). Les conditions initiales $p(0)$ et $w(0)$ (avec $w(t) = \dot{p}(t)$) sont identiques pour chaque simulation. La valeur initiale $\gamma(0) = \gamma_0$, la valeur cible $\gamma_t = 1.05$ sont les mêmes pour les deux simulations se faisant à γ variant dans le temps. La seule différence est la valeur de la pente $\hat{\epsilon}$: $\hat{\epsilon} = 0.006$ et 0.01, ce qui correspond respectivement à des valeurs de ϵ de 0.22 et 0.37 (cf. Éq. (2.77)). Lorsque γ et égal à γ_t, les conditions initiales choisies se trouve dans le bassin d'attraction de la solution d'équilibre, le régime permanent observé est donc non oscillant. Pour le $\hat{\epsilon}$ le plus grand (en vert en Fig. 2.19), on obtient la solution d'équilibre, comme dans le cas où γ est constant (en bleu Fig. 2.19). Inversement, pour le plus petit $\hat{\epsilon}$ (en jaune en Fig. 2.19), la solution périodique est finalement observée. Ceci démontre que, pour des conditions initiales identiques sur p, w et γ et une même valeur cible γ_t, la valeur de $\hat{\epsilon}$ peut modifier la nature du régime permanent.

Les DBA sont déterminés directement à partir de simulations temporelles du système (en temps direct). Le principe est simplement de juger *a posteriori* si un jeu de conditions initiales $(p_0, \dot{p}_0, \gamma_0)$ est situé dans le DBA de la solution d'équilibre ou dans celui de la solution périodique. Au lieu de calculer directement les DBA en « force brute » en explorant tout l'espace des conditions initiales, une classification par *machine à vecteurs de support* (ou *support vector machine*) [46, 92] est utilisée pour déterminer directement et à moindre coup de calcul (la frontière dans l'espace des phases du modèle) entre les simulations qui finissent pas osciller et celles qui s'éteignent, c.-à-d. ce que nous avons défini précédemment comme la SDBA.

La Fig. 2.20 montre un example de SDBA (surface bleue) obtenue par machine à vecteurs de support. Pour des conditions initiales choisies à l'intérieur de la surface bleue, le système converge vers la solution d'équilibre. Au contraire, pour des conditions initiales choisies à l'extérieur de la surface bleue, le système converge vers le régime périodique stable. La SDBA est comparée à l'extension suivant $\gamma(0)$ de la séparatrice entre SBA calculé pour $\gamma = \gamma_t$ (cette séparatrice est similaire à celle montrée en Fig. 2.8, c.-à-d. la solution périodique instable du cas statique à $\gamma = \gamma_t$). Si la dynamique de γ n'avait aucun effet, les surfaces bleue et jaune seraient confondues.

Ces résultats mettent en évidence que la dynamique de la pression de souffle γ affecte considérablement la nature du régime permanent observé pour une valeur cible donnée. En pratique, pour certaines valeurs de γ_0 un régime peut devenir très difficile à jouer. En effet, comme le montre la Fig. 6, il devient très difficile en pratique d'accéder au régime périodique quand γ_0 s'approche de 0, car presque toute condition initiale sur p et w conduit à la solution d'équilibre. En revanche, pour

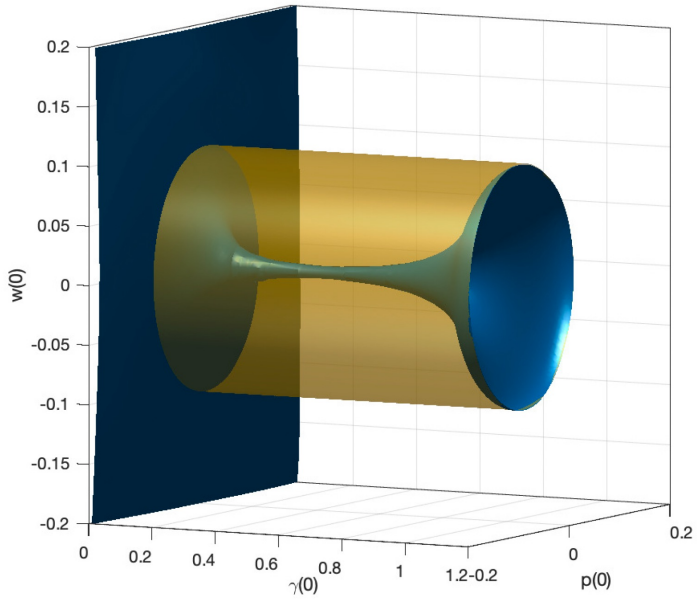


Figure 2.20. SDBA obtenue par machine à vecteurs de support (surface bleue) comparé à l'extension suivant $\gamma(0)$ de la séparatrice entre SBA calculé pour $\gamma = \gamma_t$ (surface jeune). $\hat{\epsilon} = 0.006$ et $\gamma_t = 1.05$. *Figure produite et fournie par Soizic Terrien*[6].

$\gamma_0 \in [0.1, 1]$ il est plus facile d'accéder au régime périodique dans le cas dynamique que dans le cas statique.

Cette approche, type « boite noire », permet d'aborder la question des bassins d'attraction dynamiques avec moins d'apriori sur le modèle que l'approche analytique détaillée dans ce manuscript. Un effort de comparaison entre les résultats obtenus avec ces deux approches complémentaires devra être réalisé à l'avenir.

Ce travail a fait l'objet d'un article [p2] (en fin d'écriture) et d'une communication dans un congrès international [ci12].

2.5.3 Bassin d'attraction dynamique dans de la cas d'un « *rate-induced transitions* »

La méthodologie présentée dans les sections précédentes est appliquée au cas d'une TIV ou *rate-induced transition* dans cette section. Pour cela, un exemple tiré de Ashwin et coll. [6] est traité. Nous n'allons pas analyser les résultats théoriques de cet article, mais uniquement d'appliquer la méthodologie présentée en Section 2.5.2 pour montrer qu'elle permet d'interpréter des résultats de simulations d'un modèle académique de la littérature subissant une TIV.

Le modèle étudié est un système $(1,1)$-rapide-lent de la forme de (2.76). Ashwin et coll. utilisent r (pour *rate*) à la place de ϵ utilisé dans ce manuscrit, inversent les noms des fonctions f et g et notent λ la variable lente à la place du y utilisé ici. Par conséquent les équations du modèle prennent la forme suivante :

$$\dot{x} = g(x, \lambda) \tag{2.96a}$$
$$\dot{\lambda} = r f(\lambda). \tag{2.96b}$$

avec

$$g(x, \lambda) = -\left((x + a + b\lambda)^2 + c\tanh(\lambda - d)\right)(x - K/\cosh(e\lambda)) \tag{2.97}$$

où a, b, c, d, e et K sont des constantes, et

$$f(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda + 1). \tag{2.98}$$

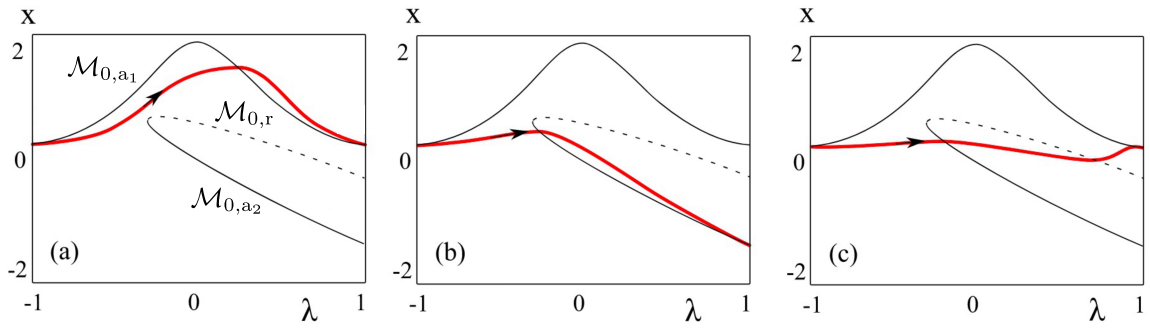


Figure 2.21. Fig. 4 de Ashwin et coll. [6] modifiée pour en faciliter la lecture. Variété critique attractive (lignes noires) et répulsive (ligne pointillée noire) et *pullback attractors*[18] (ligne rouge avec une flèche noire pour montrer le sens du temps). (a) $r = r_a$, (b) $r = r_b$ et (c) $r = r_c$ avec $r_a < r_b < r_c$.

La solution de (2.96b) est

$$\lambda(t) = \frac{\lambda_0 \cosh(rt) + \sinh(rt)}{\lambda_0 \sinh(rt) + \cosh(rt)}. \tag{2.99}$$

Le profil temporel de λ est donc un profil exponentiel.

Nous notons $x = x_i^\star(\lambda)$ $(i = 1, 2, 3)$ les solutions de :

$$g\left(x^\star(\lambda), \lambda\right) = 0. \tag{2.100}$$

Dans ce cas, la variété critique $\mathcal{M}_0$ de (2.96) possède deux branches attractives $\mathcal{M}_{0,a_1}$ et $\mathcal{M}_{0,a_2}$ telles que

$$\mathcal{M}_{0,a_1} = \{x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R} \mid x = x_1^\star(\lambda)\}, \tag{2.101a}$$
$$\mathcal{M}_{0,a_2} = \{x \in \mathbb{R}, \lambda \in D =]\lambda_l, +\infty[\mid x = x_2^\star(\lambda)\}, \tag{2.101b}$$

et une branche répulsive $\mathcal{M}_0$ définie comme suit :

$$\mathcal{M}_{0,r} = \{x \in \mathbb{R}, \lambda \in D \mid x = x_3^\star(\lambda)\}. \tag{2.102}$$

L'intervalle D représente donc le domaine de bistabilité de $\mathcal{M}_0$.

Pour ce système académique, les branches $x = x_i^\star(\lambda)$ $(i = 1, 2, 3)$ ont les expressions analytiques suivantes :

$$x_1^\star(\lambda) = K\,\mathrm{sech}(e\lambda), \tag{2.103a}$$
$$x_2^\star(\lambda) = -a - b\lambda + \sqrt{c\tanh(d - \lambda)}, \tag{2.103b}$$
$$x_3^\star(\lambda) = a - b\lambda - \sqrt{c\tanh(d - \lambda)}. \tag{2.103c}$$

Ces branches sont représentées en Fig. 2.21, tirée de Ashwin et coll. [6] puis modifiée pour en faciliter la lecture. Les paramètres utilisés sont :

$$a = -0.25,\ b = 1.2,\ c = -0.4,\ d = -0.3,\ e = 3,\ K = 2. \tag{2.104}$$

La Fig. 2.21 montre aussi (en rouge avec une flèche noire pour montrer le sens du temps) des orbites particulières de l'Éq. (2.96) initialisées sur $\mathcal{M}_{0,a_1}$, c.-à-d. sur un point N_1 tel que :

$$N_1 = (\lambda_0, x_1^\star(\lambda_0)) \tag{2.105}$$

avec $\lambda_0 \to -1$ [17]. Ces orbites particulières sont appelées *pullback attractors* [18] par les auteurs. De gauche à droite, la Fig. 2.21 montre des résultats obtenus pour trois valeurs croissantes du paramètre

17. La valeur $\lambda_0 = -1$ rend λ constant et donc égal -1 (cf. Éq. (2.99)).

18. La notion de *pullback attractor* (voir par exemple [117]) n'est pas étudiée dans ce manuscrit. Ashwin et coll., dans le contexte de leur étude, définissent un *pullback attractor* par rapport à une branche stable donnée, ici $x_1^\star(\lambda)$, comme une orbite $(\lambda(t), x(t))$ de l'Éq. (2.96) telle que $x(t) \to x_1^\star(\lambda)$ quand $t \to -\infty$. Le pullback attractor est donc pour $\mathcal{M}_{0,a_1}$ ce que notre SDBA est pour $\mathcal{M}_{0,r}$.

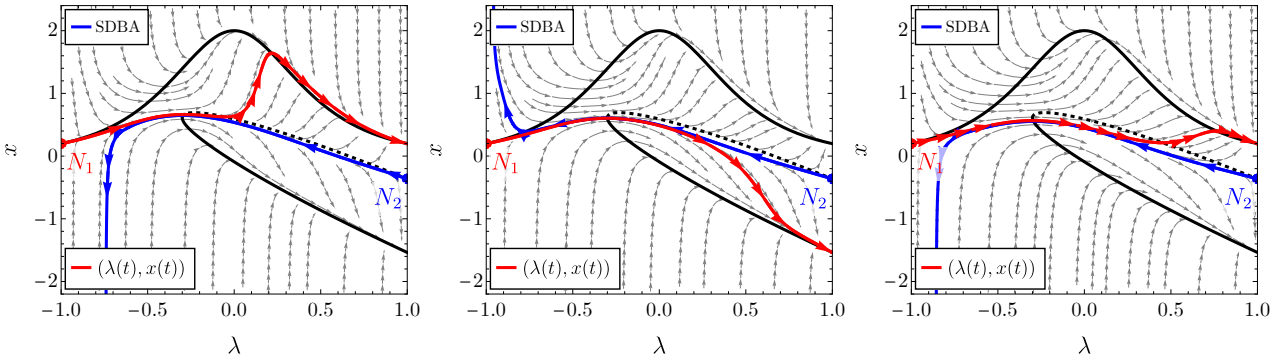


Figure 2.22. Reproduction (qualitative) de la Fig. 2.21 avec ajout de la SDBA et des lignes de courant de l'Éq. (2.96). Orbites de l'Éq. (2.96) (en rouge) et SDBA (en bleu), (c.-à-d. orbites de (2.96), dont on a inversé le temps, initialisées sur $\mathcal{M}_{0,\mathrm{r}}$ avec $\lambda_0 \to 1$). (a) $r = r_a$, (b) $r = r_b$ et (a) $r = r_c$ avec $r_a < r_b < r_c$.

r. Pour la première valeur de r (voir Fig. 2.21(a)) l'orbite commence donc sur $\mathcal{M}_{0,\mathrm{a}_1}$, s'en éloigne, puis la rejoint. Ensuite, pour la seconde valeur (voir Fig. 2.21(b)), l'orbite commence également sur $\mathcal{M}_{0,\mathrm{a}_1}$, s'en éloigne de nouveau, puis rejoint $\mathcal{M}_{0,\mathrm{a}_2}$. Enfin, quand on augmente encore r (voir Fig. 2.21(c)), l'orbite commence toujours sur $\mathcal{M}_{0,\mathrm{a}_1}$, s'en éloigne davantage encore qu'en Fig. 2.21(a), puis finit par la rejoindre à nouveau.

Les résultats montrés en Fig. 2.21 peuvent s'interpréter en termes de bassin d'attraction dynamique comme montré en Fig. 2.22 qui reproduit des situations qualitativement similaire à celle montrée en Fig. 2.21 [19]. Nous y voyons des orbites de l'Éq. (2.96) (en rouge) équivalentes à celles montrées en Fig. 2.21. En initialisant le système (2.96), dont on a inversé le temps, sur $\mathcal{M}_{0,\mathrm{r}}$, c.-à-d. sur un point N_2 tel que :

$$N_2 = (\lambda_0, x_3^\star(\lambda_0)) \tag{2.106}$$

avec $\lambda_0 \to 1$ [20] on obtient la SDBA (représentée ici en bleu) entre les DBA des variétés $\mathcal{M}_{0,\mathrm{a}_1}$ et $\mathcal{M}_{0,\mathrm{a}_2}$. Nous observons que, selon la valeur du paramètre r, une même condition initiale N_1 ne se situe pas dans le même DBA. Ainsi, en Fig. 2.22(a), pour $r = r_a$, N_1 se trouve d'abord dans le DBA de $\mathcal{M}_{0,\mathrm{a}_1}$ puis dans celui de $\mathcal{M}_{0,\mathrm{a}_2}$ pour $r = r_b$ en Fig. 2.22(b) et à nouveau dans le DBA de $\mathcal{M}_{0,\mathrm{a}_1}$ pour $r = r_c$ en Fig. 2.22(c).

Nous illustrons avec cet exemple que la SDBA peut varier fortement avec la vitesse de variation du paramètre, avec des implications importantes sur le comportement du système (à conditions initiales fixées).

19. En effet, Ashwin et coll. 2.21 ne fournissent pas les valeurs numériques des paramètres utilisés pour leurs simulations numériques.

20. La valeur $\lambda_0 = 1$ rend λ constant et égal 1 (cf. Éq. (2.99), en remplaçant t par $-t$).

Chapitre 3

Travail de recherche périphérique sur le chaos polynomial

Ce travail de recherche s'est réalisé au cours de la thèse de Duc Thinh Kieu intitulée « Méthodes de réduction de modèles pour l'analyse du comportement dynamique des structures à paramètres incertains » [e6] dirigée par Sébastien Berger (co-directeur de thèse), Jean-Mathieu Mencik (co-directeur de thèse), Marie-Laure Gobert (co-encadrante de thèse) et moi-même (co-encadrant de thèse) et soutenue et soutenue le 10 février 2020.

Le manuscrit de thèse est disponible au lien suivant : https://www.theses.fr/2020ISAB0002

La conception mécanique dispose d'outils de calcul puissants capables de prédire le comportement dynamique de systèmes mécaniques. Cependant, afin d'assurer les niveaux vibratoires imposés par les cahiers des charges tout au long du cycle de vie de ces systèmes, il est impératif de prendre en compte les incertitudes dans leur cycle de conception. L'objectif est de concevoir des systèmes mécaniques optimaux et robustes, c.-à-d. des structures qui gardent leurs performances tout le long de leur cycle de vie malgré le caractère incertain de leurs paramètres. La première approche pour décrire le comportement dynamique de structures à paramètres incertains consiste à modéliser ces structures par éléments finis (EF) et à réaliser des simulations de ces modèles en effectuant un ensemble de tirages des valeurs des paramètres suivant leur loi de probabilité. Cette approche est connue sous le nom de méthode de Monte Carlo (MC). Elle s'avère néanmoins prohibitive en termes de temps de calcul dès lors que le nombre de ddl et de variables aléatoires est élevé. L'objectif de ce travail de thèse a été de développer des approches numériques s'appuyant d'une part sur des méthodes de prise en compte d'incertitudes basées sur des développements en chaos polynomiaux non intrusifs, et d'autre part, sur des modèles numériques « réduits » basées sous une sous-structuration de type Craig-Bampton, c'est-à-dire impliquant un nombre réduit de ddl. Dans une première partie, plusieurs méthodes de prise en compte d'incertitudes basées sur le chaos polynomial creux non intrusif sont développées afin de tenir compte d'un nombre significatif de paramètres incertains. Ces méthodes sont appliquées à l'étude du comportement dynamique d'un modèle d'embrayage et plus particulièrement à l'étude de la stabilité à partir de la méthode indirecte de Lyapunov. Une partie de ces travaux a fait l'objet d'une publication [a16] et d'une communication dans un congrès national [cn4]. Dans la deuxième partie (à laquelle ma participation a été moindre), la méthode basée sur le chaos polynomial creux dit anisotropique est associée à la méthode de sous-structuration dynamique de Craig-Bampton afin d'étudier les fonctions de réponse en fréquence d'une structure avec paramètres incertains. Cette approche est appliquée à une structure académique composée de trois plaques reliées par des interfaces de raideurs incertaines. Dans un premier temps, seule la méthode de réduction de Craig-Bampton est utilisée. L'impact de la troncature de la base modale est alors évalué. Dans un deuxième temps, le chaos polynomial creux anisotropique est utilisé seul puis associé à différents modèles réduits de type Craig-Bampton. Il est montré que les coûts en temps de calcul obtenus sont très largement inférieurs à ceux requis par la technique de Monte Carlo, pour des niveaux de précision et de confiance similaires.

En plus de ce travail de thèse, cette thématique a aussi été abordée dans le cadre de partenariats industriels, notamment par le biais de trois stages de Master 2 : [e1, e8] financés par l'entreprise Air Liquide dans le cadre des projets [Caline 1] et [Caline 2] (cf. Section 5.4.2) et [e3] financé par le CEA dans le cadre du projet [Sure-Methonum] (cf. Section 5.4.1).

Chapitre 4

Conclusion générale et perspectives

Sommaire

4.1 Bilan des activités de recherche 97
4.2 Perspectives à court et moyen terme 97
4.2.1 Perspectives concernant le contrôle passif non linéaire de vibrations 97
4.2.2 Perspectives concernant les phénomènes transitoires dans les instruments de musique à anche 103

4.1 Bilan des activités de recherche

Ce manuscrit a présenté mes travaux de recherche, obtenus depuis ma thèse au LAUM (2010-2013), en passant par le LMA (2013-2015) et aujourd'hui en 2023 au LaMé. J'ai eu la chance, dans le cadre de deux application différentes, de pouvoir développer une recherche avec un fil conducteur bien identifiable : celui de la dynamique non linéaire de systèmes rapides-lents. Je pense que dans ce manuscrit a pu transparaître mon goût pour la recherche fondamentale, avec un ancrage académique fort. Les perspectives énoncées dans la suite s'inscrivent encore dans cette logique même si le lecteur remarquera également mon souhait de donner plus de place à l'expérimentation dans mon travail, tout en l'orientant davantage vers le monde socio-économique.

4.2 Perspectives à court et moyen terme

4.2.1 Perspectives concernant le contrôle passif non linéaire de vibrations

4.2.1.1 Contrôle et récupération d'énergie vibratoire nuisible dans les éoliennes

Coll. : S. Berger, M. Bavencoffe et G. Poulin-Vittrant

Cette recherche future s'effectuera dans le cadre du projet CoREVE.

Projet académique régional CoREVE (2024-2026)

Il s'agit d'un appel à « projets de recherche d'initiative académique » (APR IA) de la région Centre-Val de Loire remporté en juillet 2023 et qui débutera début 2024.

Titre du projet : Dispositifs passifs pour le contrôle et la récupération de l'énergie vibratoire nuisible dans les systèmes mécaniques tournants : application aux éoliennes

Acronyme : CoREVE (**Co**ntrôle et **R**écupération d'**É**nergie **V**ibratoire dans les **É**oliennes)

Descriptif du projet. Dans le contexte de la transition écologique, les sources d'énergie renouvelables comme les éoliennes sont devenues incontournables. Cependant, ces dernières peuvent subir des vibrations structurelles nuisibles. En effet, l'industrie éolienne utilise des rotors de plus en plus grands pour capter davantage d'énergie et réduire les coûts. L'agrandissement de la structure rend les pales beaucoup plus flexibles et donc plus susceptibles de subir des vibrations de grande amplitude

causées notamment par des chargements aérodynamiques importants. Cela nuit aux performances de l'éolienne [2] et cause des dommages par fatigue [192]. Certaines vibrations, dites auto-entretenues, peuvent même endommager la structure [100, 157]. Un enjeu économique et industriel consiste donc à concevoir des dispositifs permettant d'éliminer ou du moins réduire ces vibrations.

Dans le passé des absorbeurs dynamiques linéaires passifs appelés TMD (Tuned Mass Damper) ont été utilisés pour tenter de réduire ces vibrations [44, 120, 141]. Les TMD sont efficaces lorsque les vibrations à réduire sont stationnaires et ne présentent qu'une composante fréquentielle principale. Ils deviennent cependant inefficaces dans la plupart des situations réelles où l'éolienne subit des variations temporelles de ses paramètres modaux et de son chargement aérodynamique (vibrations instationnaires et multi-fréquentielles).

Ces limitations conduisent les chercheurs et les industriels à développer des alternatives. Dans cette optique, les dispositifs actifs ont été largement étudiés. Fitzgerald et coll. [65] ont proposé un TMD actif. Une variante de ce dernier a été proposée par Fitzgerald et Basu [187]. Le contrôle des vibrations de rotors à vitesse variable a également été proposé dans [186]. Des systèmes de contrôle semi-actifs ont également été investigués par Arrigan et coll. [5]. Des TMD multiples [55] ou ayant plusieurs degrés de liberté [105] ont aussi été étudiés numériquement.

Les absorbeurs non linéaires bistable de type BNES sont choisis dans ce projet comme solution alternative aux TMD et aux NES monostables pour leur capacité à atténuer les vibrations de faibles amplitudes de façon passive et sur de larges gammes de fréquence. De plus, les réseaux d'absorbeurs sont également des dispositifs permettant de remédier à certaines limitations des TMD. Dans le cas de la réponse forcée harmonique d'une structure élastique, l'existence d'un réseau périodique de TMD peut notamment donner lieu à un phénomène de bandes de fréquences interdites [218] ou permettre une atténuation multimodale [167]. Il existe relativement peu de travaux dans la littérature sur les réseaux d'absorbeurs non linéaires. Un réseau de NLTVA peut permettre l'atténuation multimodales de structures primaires non linéaires [128]. Les réseaux de NES sont encore moins étudiés. L'existence du projet européen (Horizon 2020) MATASINK (https://doi.org/10.3030/896942) montre cependant qu'il s'agit d'une problématique académique et industrielle d'actualité. Il est intéressant de noter que dans [128, 167] l'utilisation de patchs piézoélectriques peut jouer le même rôle qu'un absorbeur purement mécanique.

Ainsi, l'objectif principal du projet CoREVE est d'étudier la capacité d'absorbeurs non linéaires de type BNES et/ou d'un réseau d'absorbeurs non linéaires à atténuer significativement les vibrations de systèmes mécaniques tournants avec une application aux éoliennes. La réduction des vibrations nuisibles dans les éoliennes permettra in fine d'en améliorer les performances. Il s'agira ensuite d'associer ce dispositif à des transducteurs piézoélectriques afin de récupérer l'énergie vibratoire (pour par exemple alimenter en énergie des capteurs positionnés sur les pales et utiles pour le contrôle de la santé de ces structures) et d'améliorer si possible l'efficacité du dispositif d'atténuation vibratoire.

Par le biais d'une collaboration avec Maxime Bavencoffe (Maître de conférences, INSA Centre Val de Loire) et Guylaine Poulin-Vittrant (Directrice de recherche, CNRS), pour les parties du projet CoREVE traitant de la récupération d'énergie vibratoire, je m'appuierai sur l'expertise du GREMAN (UMR 7347) dans le domaine des matériaux piézoélectriques et de leurs applications

Résultats préliminaires. Dans ce contexte, trois stages Master 2 on permis d'obtenir des résultats préliminaires. Dans les deux premiers, nous avons étudions les vibrations causées entre autre par le couplage de modes entre le rotor et le mât d'une éolienne. Durant le stage de Riccardo Gega [e2], un modèle analytique linéaire d'éolienne reproduisant ce phénomène de couplage de modes et couplé à un NES a été proposé. L'étude a permis de montrer que le NES permet d'atténuer les vibrations causées par le couplage de modes. En effet, le modèle sans NES étant linéaire, l'amplitude des oscillations ne sature pas vers un cycle limite mais diverge vers l'infini et on observe que l'ajout du NES permet l'existence de régimes d'oscillations d'amplitude finie, dits atténués. Cependant, bien que finies, les

amplitudes observées restent trop importantes. Pendant le stage de Joris Nguyen [e7], un autre modèle analytique d'éolienne incluant dans pales non linéaires a été proposé permettant d'obtenir, lorsqu'une instabilité est observée, non plus des régimes divergents mais des solutions périodiques ou quasi-périodiques. Ceci permet d'évaluer l'amplitude des régimes oscillants que le NES devra atténuer. Ce travail de modélisation focaliser sur le phénomène de couplage de mode a permis de nous familiariser avec les modèles d'éoliennes. Il s'avère que bien qu'extrêmement dangereux, ce phénomène d'instabilité vibratoire se produit en général à des vitesse de rotation du rotor plus élevées que les vitesses nominales d'une éolienne. Par conséquent, dans le projet CoREVE un plus large éventail de problèmes vibratoires dans les éoliennes sera considéré. Nous nous orienterons vers des modèles plus réalistes (obtenu par la méthodes des éléments finis par exemple). Concernant le comportement du BNES, nous étudierons d'abords des modèles de petites tailles dont l'analyse nous permettra l'acquérir de l'intuition sur leur comportement très riche et complexe. C'est dans cette optique qu'une première étude a été réalisée pendant le stage d'Helmi Chaabene [e4]. Cette étude numérique a traité d'un système académique comportant un système primaire linéaire (masse-ressort-amortisseur) forcé harmoniquement et connecté à un BNES. À l'aide d'intégration temporelle numérique de ce système, six régimes de fonctionnement ont été recensés. Ces régimes sont de même nature que ceux observé dans [a13] lorsque que le système primaire est un oscillateur de Van der Pol (cf. Annexe C). Ce travail a également permis de localiser les régions de forte efficacité dans l'espace des paramètres du BNES.

Principales étapes du projet. Les principales étapes du projet CoREVE seront :

- **Phase (1).** Compléter l'étude numérique/analytique préliminaire [e4]. Dans cette étape il s'agira d'associer des études paramétriques obtenues par l'intégration temporelle numérique de modèle académiques de petite taille à des études analytiques basées sur la méthodologie générale proposée dans [a13]. Ces modèles académiques auront pour but de représenter un phénomène vibratoire donné rencontré dans les éoliennes : forçage (harmonique, large bande et/ou aléatoire et/ou pouvant être d'amplitude relativement faible) et instabilités dynamiques. Le cas d'un d'un système primaire linéaire forcé harmoniquement et connecté à un BNES sera traité en premier, la démarche sera ensuite étendue au cas :

  (a) des autres phénomènes vibratoires énoncés plus haut ;

  (b) d'un modèle académique mécano-électrique incluant un patch piézoélectrique pour la récupération d'énergie vibratoire. Il s'agira de trouver un compromis entre atténuation de vibration et récupération d'énergie ;

  (c) au cas d'un réseau de BNES seuls puis associés à des patchs piézoélectriques.

- **Phase (2).** À partir de l'expertise acquise dans la phase précédente cette Phase (2) consistera à établir un modèle réaliste mécanique d'éolienne pouvant reproduire plusieurs des phénomènes vibratoires étudiés dans le Phase (1). Il s'agira ensuite de développer un modèle mécano-électrique d'une éolienne couplée à un dispositif d'atténuation non linéaire passif de vibrations (à base d'un ou plusieurs BNES) incluant un système récupération d'énergie vibratoire à base de patchs piézoélectriques. Cette phase de modélisation se déroulera en trois étapes :

  (a) Étape I (éolienne seule) : (i) Établissement, à partir de l'étude bibliographique, d'un modèle d'éolienne incluant le couplage mât-pale et les principales sources de chargement aérodynamique. (ii) Simulation numériques temporelle du modèle pour la caractérisation de son comportement vibratoire. Il s'agira ici d'être en mesure de reproduire des résultats choisis de la littérature.

  (b) Étape II (éolienne + dispositif BNES) : (i) Couplage du modèle précédemment établi à un dispositif constitué d'un ou plusieurs BNES. (ii) Simulation numériques temporelle du modèle couplé. Il s'agira aussi de comparer les résultats obtenus à ceux de la littérature afin de mettre en évidence l'apport des méthodes proposées dans CoREVE.

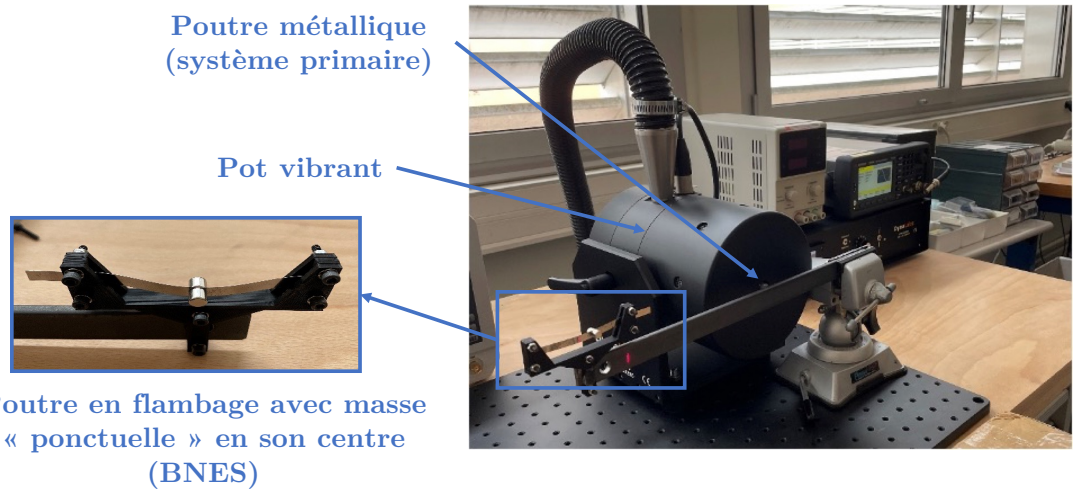


Figure 4.1. Photo du banc d'essai de l'INSA Centre Val de Loire. Le système primaire est une poutre sollicitée harmoniquement en flexion à l'aide d'un pot vibrant. Le BNES y est constitué d'une poutre en flambage sur laquelle est attachée une masse supposée ponctuelle en son milieu.

(c) Étape III (éolienne + dispositif BNES + dispositif de récupération d'énergie) : (i) L'expertise du GREMAN sur les matériaux piézoélectriques et leur modélisation va être sollicitée afin de proposer un modèle mécano-électrique réaliste et d'en caractériser son rendement électrique. (ii) Dans cette dernière étape de l'établissement du modèle complet, un bilan sera effectué afin d'envisager une application des résultats obtenus dans le cadre d'une collaboration future avec un partenaire industriel.

- **Phase (3).** Effectuer une campagne de mesure afin de corréler des résultats expérimentaux avec les résultats théoriques/numériques obtenus dans les phases précédentes. La validation expérimentale ne se fera dans un premier temps que sur le modèle poutre-BNES en forçage harmonique. Pour cela, le dispositif expérimental utilisé s'appuiera sur celui développé en 2023 lors du projet DPT2MA (cf. Section 5.4 et Fig. 4.1). Il s'agit d'un banc d'essai, inspiré de la littérature [103], incluant une poutre sollicitée harmoniquement en flexion à l'aide d'un pot vibrant. Le BNES y est constitué d'une poutre en flambage sur laquelle est attachée une masse supposée ponctuelle en son milieu. Les mesures sont effectuée à l'aide de vibromètres laser (non présents sur la Fig. 4.1). Il faudra dans un premier temps retrouver expérimentalement le comportement typique d'un BNES pour ensuite y associer un patch piézoélectrique.

4.2.1.2 Analyse lente-rapide approfondie et collaboration avec la communauté des mathématiques appliquées
Coll. : N. Berglund

Analyse des solutions de la dynamique rapide d'un oscillateur auto-entretenu couplé à un BNES. L'étude effectuée dans [a13] (cf. Section 1.2.4 et Annexe C montre que les solutions de la dynamique rapide du flot de modulation ne sont pas toujours des solutions d'équilibre. La fig. 1.20 montre en effet que l'on peut observer des régimes régimes périodiques, quasi-périodiques et chaotique. La connaissance de la stabilité de la variété critique du flot de modulation (dont pour rappel chaque point correspond aux solutions d'équilibre) n'est plus suffisante pour effectuer l'analyse de stabilité globale complète des systèmes étudiés. Par exemple, en Fig. 1.19 nous observons que même si la structure de la variété critique nous permet de comprendre l'évolution de l'orbite du flot de

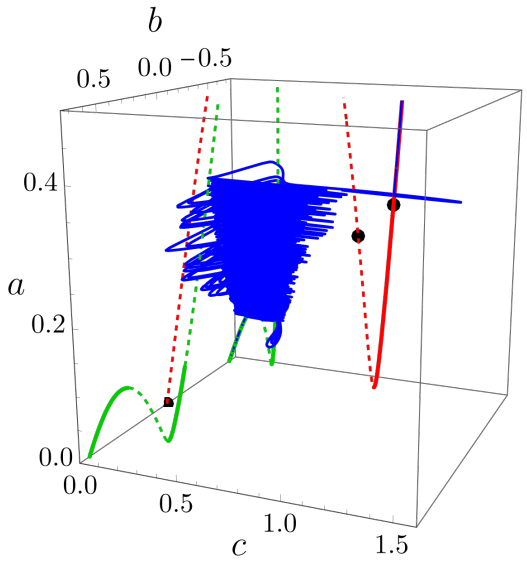


Figure 4.2. Similaire à la Fig. 1.19 sauf que l'intégration numérique du flot de modulation (1.68) est effectuée pour une valeur de σ dépassant la limite d'atténuation σ_{ml}.

modulation (en bleu), elle ne fournit pas de critère permettant de prédire l'apparition de chaque phase rapide où l'orbite saute d'une branche de variété attractive à une autre. La Fig. 1.19 montre que c'est la phase lente 3 (FE3) qui détermine si la situation va rester inoffensive où si elle va devenir dangereuse. En effet lorsque l'on augmente le paramètre de bifurcation σ (cf. Fig. 4.2), on observe que l'orbite du flot de modulation saute sur la branche attractive droite de $\mathcal{M}_{01}$ (correspondant à la ligne rouge la plus à droite et notée $\mathcal{M}_{01}^{\mathrm{a},2}$ en Annexe C) et arrive au dessus du point fixe instable (point noir), l'orbite longe $\mathcal{M}_{01}$ vers le haut ce qui produit une situation dangereuse. Plus rarement, il arrive aussi que le saut rapide vers $\mathcal{M}_{01}^{\mathrm{a},2}$ ne soit pas précédé d'une phase lente chaotique mais d'une phase lente périodique ou quasi-périodique

Dans ce contexte je projette les perspectives de recherche suivantes :

À court terme. Une étude systématique des solutions du sous-système rapide et des bassins d'attraction des solutions stables. En traçant ces solutions (avec leur stabilité et les bassins d'attraction des solutions stable) dans l'espace des phases pour un jeu de paramètres du système primaire et du BNES donné on obtiendrait l'équivalent de ce qu'est la variété critique pour les solutions d'équilibre. Même s'il parait peu probable d'obtenir ce type d'informations analytiquement (à part éventuellement s'il s'agit de solutions périodiques), même obtenues numériquement elles permettront d'avancer encore davantage sur la compréhension du système. Notamment en mettant en évidence les conditions d'apparition des phases rapides et leurs liens avec la dynamique lente. Il s'agirait par exemple dans le cas de la Fig. 1.19 de connaître la valeur de la variable lente a (qui est un paramètre pour le sous-système rapide) à partir de laquelle les oscillations chaotiques de la dynamique rapide emmènent l'orbite du flot de modulation dans le bassin d'attraction de la branche attractive $\mathcal{M}_{01}^{\mathrm{a},2}$. Puis d'observer la position relative de cette valeur par rapport au point fixe instable situé sur $\mathcal{M}_{01}^{\mathrm{a},2}$.

À moyen (et long) terme. L'étude du sous-système rapide mentionnée ci-dessus permet d'obtenir beaucoup d'informations sur le comportement du système. Cependant, le comportement asymptotique quand $\epsilon \to 0$ ainsi décrit n'est pas toujours totalement représentatif du comportement du flot de modulation. Nous avons par exemple vu en Section 1.2.5 (cf. Fig. 1.21) qu'au passage des points-col de la variété critique une loi d'échelle était nécessaire pour décrire correctement la trajectoire du flot de modulation. Dans ce cas la loi d'échelle permet en effet d'approcher localement la variété invariante $\mathcal{M}_\epsilon$ du flot de modulation.

Cette étude asymptotique ne prévoit pas non plus le phénomène de retard à la bifurcation

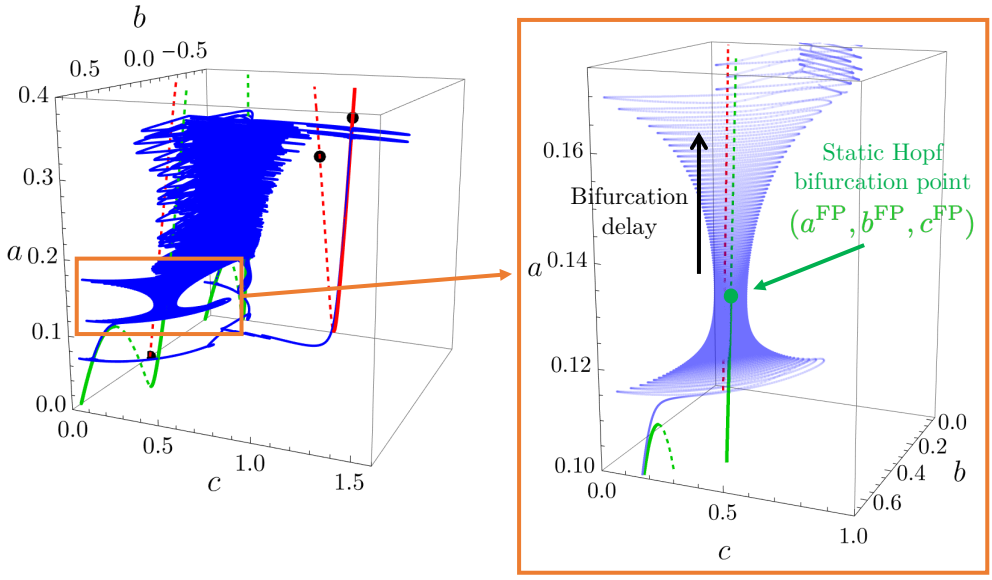


Figure 4.3. Zoom de Fig. 1.19 effectué au niveau du point de bifurcation de Hopf (a^{FP}, b^{FP}, c^{FP}) du sous-système rapide (1.69) (cf. (C.51)).

évoquée en Section 2.4. La Fig. 4.3 montre que ce phénomène se produit également pendant le régime CR1 au niveau du point de bifurcation de Hopf (a^{FP}, b^{FP}, c^{FP}) du sous-système rapide (1.69) (cf. (C.51)).

Dans ces situations il est donc nécessaire de connaître les variétés invariantes associées aux solutions du sous-système rapide. Cela lorsqu'il s'agit de solutions d'équilibre (comme en Section 1.2.5) mais également de solutions périodiques, quasi-périodiques et chaotiques. Dans le cas de solutions périodiques les résultats généraux proposés par Berglund et coll. [21, 22], avec qui j'entame une collaboration (cf. paragraphe suivant), pourraient être mis au œuvre.

Effet d'un forçage stochastique faible sur le phénomène de pompage énergétique. Le travail de recherche décrit dans ce paragraphe s'effectuera en partie dans le cadre de la thèse d'Israa Zogheib que je co-encadrerai avec Nils Berglund (directeur de thèse) de l'Institut Denis Poisson (UMR CNRS 7013, Orléans) et spécialiste des systèmes dynamiques rapides-lents stochastiques [20, 22]. Le fil conducteur de ces travaux de thèse sera d'appliquer des résultats théoriques connus sur les équations différentielles ordinaires lentes-rapides perturbées par un bruit à des systèmes mécaniques concrets. Ces applications permettront également de mettre en évidence des extensions nécessaires de la théorie afin de décrire correctement les phénomènes physiques mis en jeu, conduisant à une meilleure compréhension de ces derniers et à des résultats mathématiques originaux.

L'objectif initial sera d'obtenir des résultats théoriques permettant d'expliquer les résultats numériques obtenus dans [a3] (cf. Section E). Dans ce cadre, l'idée de départ (cf. Fig. 1.24) sera d'estimer la probabilité Pr qu'après chaque passage au niveau du point-col gauche de la variété critique une réalisation du processus stochastique (1.94) (en rouge en Fig. 1.24) arrive sur la partie attractive droite de $\mathcal{M}_0$ au dessus du plus grand point fixe du flot de modulation (point vert en Fig. 1.24).

L'étude se focalisera d'abord sur la forme normale d'une bifurcation col-nœud dynamique (cf. Éq. (1.77)) avec un forçage stochastique faible sur la variable lente. En effet, en appliquant la méthode de réduction à la variété centrale décrite en Section 1.2.5.2, nous pouvons montrer qu'au voisinage du point-col de la variété critique le flot de modulation stochastique (1.94) peut s'écrire sous la forme

suivante :

$$\hat{\epsilon} q' = h(q, v) = -q^2 - v \tag{4.1a}$$

$$v' = 1 + \sqrt{\hat{\epsilon}}\hat{\sigma}\xi(\hat{\tau}). \tag{4.1b}$$

La différence de signe entre les membres de droite de (1.77a) et (4.1a) s'explique des hypothèses de départ différentes des méthodes de moyennisation utilisées, c.-à-d. (1.5) et (E.6)-(E.7), respectivement. Le bruit n'agissant que sur la variable lente (1.94) et la réduction à la variété centrale ne portant que sur les variables rapides, l'obtention de (4.1) ne pose pas de difficultés supplémentaires par rapport au cas déterministe.

Dans le plan de phase (q, v), si le processus (4.1) commence à (q_0, v_0) près d'un point de la partie attractive $\mathcal{M}_{0,\mathrm{a}}$ de la variété critique, lorsque la trajectoire atteint une valeur donnée Q de la variable rapide q, nous détectons la valeur obtenue pour la variable lente v, notée V. Nous définissons ensuite la densité de probabilité (PDF pour *probability density function*) $R_Q(v)$ comme suit : pour une valeur donnée Q de q, la probabilité que V se situe entre v et $v + dv$ est $R_Q(v)dv$. La fonction de répartition (CDF pour *cumulative distribution function*) correspondante est notée $P_Q(v)$. Ceci est illustré en Fig. 4.4 pour $\hat{\epsilon} = 0.012$, $\hat{\sigma} = 0.75$ et $Q = -5$. On notera que $R_Q(v)$ est ici représenté schématiquement sur la Fig. 4.4 par une fonction gaussienne (ce qui n'est pas forcément le cas en réalité).

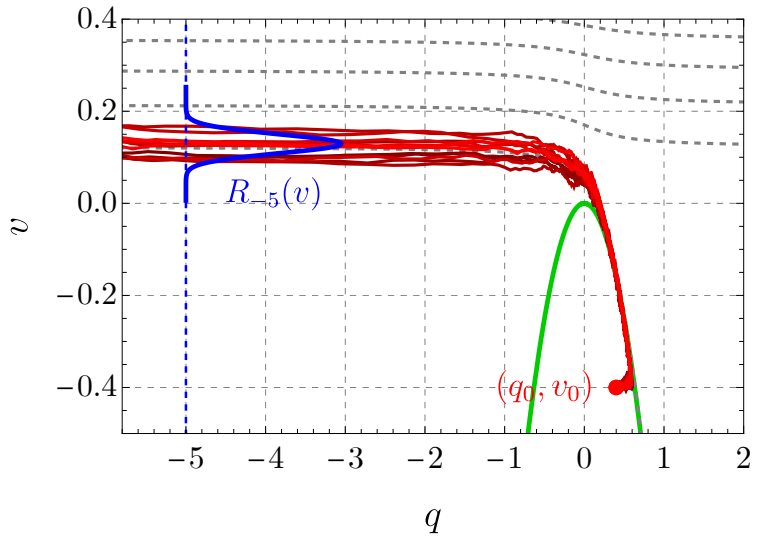


Figure 4.4. Position du problème. Dans le plan de phase (q, v) : la variété critique $\mathcal{M}_0$,c.-à-d. $q = \pm\sqrt{-v}$ (ligne continue verte) ; la solution déterministe similaire (D.52) au signe près (ligne pointillée grise) ; 11 réalisations du processus stochastique (4.1) (lignes continues avec différentes teintes de rouge). La PDF $R_{-5}(v)$ est également représentée de manière schématique (ligne bleue continue).

En revenant au flot de modulations initiale (1.94), nous pensons que la connaissance de $R_Q(v)$ et $P_Q(v)$ permettra de caractériser (du moins en partie) la probabilité Pr évoquée plus haut.

4.2.2 Perspectives concernant les phénomènes transitoires dans les instruments de musique à anche

4.2.2.1 Bassins d'attraction dynamiques de modèles d'instruments complexes *Coll. : S. Terrien et C. Vergez*

Par rapport au modèle simpliste à un mode utilisé dans les sections précédentes, la complexification par étape du modèle passerait par :

(i) **Le raffinement du modèle physique de l'instrument (c.-à-d. de l'Éq. (2.3a)).** Une première étape serait d'utiliser un modèle à deux modes tel que proposé par Doc et coll. [56]. Le diagramme de bifurcation de ce dernier pouvant posséder des domaines de bistabilité entre régimes périodiques, ce modèle serait un outil pertinent, c.-à-d. simple mais suffisant, pour étudier les séparatrices entre les DBA de deux solutions périodiques. Dans ce cas, une analyse de stabilité locale et globale statique sera nécessaire au préalable afin de déterminer le diagramme de bifurcation statique complet et les bassins d'attraction statiques du modèle.

Nous observons en Annexe H.6.2 (voir aussi la Section 2.5.2.3) la limite de la méthode de renversement temporel pour le calcul de le SDBA associée à des variétés invariantes *saddle-type*. Dans ce cas, des méthodes de continuation d'orbites, déjà initiées dans [cn6] à l'aide du logiciel AUTO [57], pourraient être utilisées. L'intérêt des méthodes de continuation, par rapport à l'intégration temporelle, est qu'elles peuvent suivre des solutions instables et sont donc pertinentes pour le calcul de variétés *saddle-type* le cas échéant. Dans ce contexte, des travaux issus de la communautés des mathématiques appliquées [61, 89], proposent des algorithmes de calcul de telles variétés avec des applications dans le domaine des neurosciences.

Par ailleurs, nous avons observé en Fig. 2.17(b) que la séparatrice entre deux DBA pouvait impliquer de très petites amplitudes. Il est difficile d'envisager cette situation dans un problème réel (ou même dans un calcul numérique réalisé avec une précision finie) où un bruit résiduel empêcherait la séparatrice d'atteindre des amplitudes aussi faibles (comme dans le cas de la retard à la bifurcation décrit en Section 2.4). D'un point vue numérique la problématique du bruit peut être abordée naïvement par une approche de type Monte-Carlo [64] qui consiste obtenir des données statistiques (moyenne, écart-type, ...) et/ou à reconstruire des fonctions de densité de probabilité de grandeurs d'intérêt à partir d'un ensemble de réalisations d'un processus stochastique. Avec le même modèle que celui étudié en Section 2.5.2 mais perturbé par un bruit blanc (tel que présenté en Section 2.4), le plus simple serait par exemple une approche en temps direct [1] de type « force brute » qui consisterait à calculer pour chaque point de l'espace des conditions initiales $(p_0, \dot{p}_0, \gamma_0)$ la probabilité d'observer des oscillations quand le domaine de bistabilité est traversé. L'approche de Monte-Carlo est cependant très couteuse en temps de calcul car il faut un nombre important de réalisations pour obtenir des résultats précis en termes de grandeurs statistique et encore plus lorsque l'on souhaite reconstruire des fonctions de densité de probabilité. De plus c'est une approche de type « boite noire » et donc qui ne permet pas l'explication des mécanisme sous-jacents aux comportements observés. Par conséquent, de façon complémentaire, un approche analytique doit aussi être envisagée (voir Section 4.2.2.2).

(ii) **La prise en compte de la dynamique temporelle d'autres paramètres de contrôle.** Dans un premier temps, il s'agirait de prendre en compte la dynamique temporelle du paramètre ζ en remplaçant $g(y)$ dans l'Éq. (2.3a) par $\mathbf{g}(\mathbf{y})$ avec $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$. Les profils temporels utilisés seraient déterminés par l'intuition ou préférablement à partir de mesures *in vivo* réalisées à l'aide de becs instrumentés.

4.2.2.2 Bassins d'attraction dynamiques et analyse lente-rapide approfondie : études déterministe et stochastique

Coll. : N. Berglund

Le travail de recherche décrit dans cette section s'amorcera également dans le cadre de la thèse d'Israa Zogheib (c.f. § *Effet d'un forçage stochastique faible sur le phénomène de pompage énergétique* en Section 4.2.1.2). L'objectif initial de la thèse sera dans ce contexte d'écrire le modèle d'instrument

1. En effet, dans le cas stochastique le renversement temporel n'est pas trivial comme dans le cas déterministe (c.-à-d. uniquement remplacer t pat $-t$) et même s'il existe des travaux sur les équations différentielles *rétrogrades* [158], c'est un domaine de recherche à part entière en mathématique.

dont la pression de souffle varie dans le temps, c.-à-d. l'Éq. (2.76)), réécrite ici comme suit :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\epsilon}\frac{f(x,y)}{g(y)} = \frac{1}{\epsilon}F(x,y) \tag{4.2}$$

sous la forme d'un système dynamique ayant la forme générale suivante (similaire à l'Éq. (G.32)) :

$$\frac{du}{ds} = \frac{1}{\epsilon}\hat{F}(u,s) \tag{4.3}$$

où s pourrait être vu comme une abscisse curviligne paramétrant la SDBA et $u(s)$ la projection orthogonale en s du point (y,x) d'une orbite quelconque de (4.2) (voir Fig. 4.5). Sans perte de généralité, l'orientation est choisie telle que $u(s) > 0$ si $(y,x) \in \mathrm{DBA}_2$. La difficulté réside dans le fait que nous ne possédons pas de solution analytique pour la SBDA (et nous n'en aurons probablement pas) et dans la définition même de u. Dans ce contexte la méthodologie proposée par Berglund et Gentz [21, 25] sur la paramétrisation d'orbites périodiques (qui peut être vue comme une généralisation de la méthode de moyennisation) semble pouvoir être applicable.

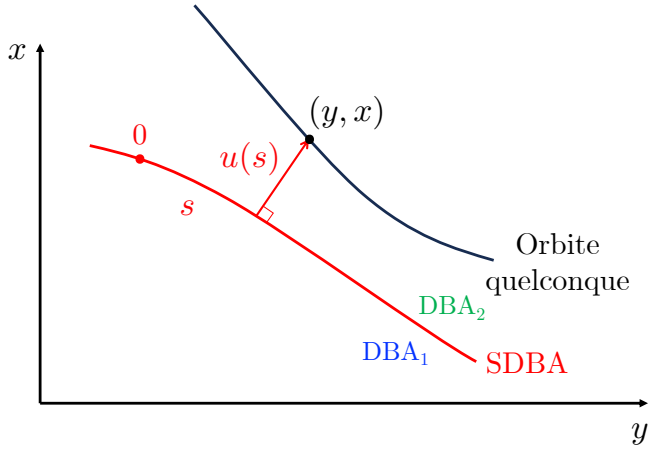


Figure 4.5. Schéma du changement de variables $(y,x) \to (s,u)$. s est l'abscisse curviligne paramétrant la SDBA (en rouge) et $u(s)$ est la projection orthogonale en s du point (y,x) d'une orbite quelconque de (4.2) (en noir). Sans perte de généralité, l'orientation est choisie telle que $u(s) > 0$ si $(y,x) \in \mathrm{DBA}_2$.

Le problème mis sous la forme (4.3) devient trivial d'un point de vue déterministe. En effet, si $u(0) < 0$ (resp. $u(0) > 0$) alors $u(0) \in \mathrm{DBA}_1$ (resp. $u(0) \in \mathrm{DBA}_2$) et la branche $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{a}_1}$ (resp. $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{a}_2}$) sera nécessairement atteinte. D'un point de vue stochastique par contre, même si la condition initiale est dans l'un des DBA, le bruit peut très bien faire basculer la trajectoire dans l'autre et faire que le comportement attendu d'un point vue déterministe n'est pas observé. En s'inspirant des résultats décrits en Section 2.4, le problème stochastique peut s'écrire sous la forme suivante :

$$dx_y = \frac{1}{\epsilon}F(x_y,y)dy + \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}}dW_y. \tag{4.4}$$

en fonction des variables y et x, et

$$du_s = \frac{1}{\epsilon}\hat{F}(u_s,s)ds + \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}}dW_s. \tag{4.5}$$

en fonction des variables s et u.

Dans un premier temps, dans une approche locale, nous souhaitons étudier le comportment du système dans le voisinage de la SDBA. Le problème devient donc similaire à celui traité en Section 2.4 dans le cadre de l'étude du retard à la bifurcation. À la différence qu'ici nous ne nous intéressons pas

à déterminer un point de bifurcation dynamique mais à savoir si une trajectoire commençant à une certaine position initiale (s_0, u_0) (avec par exemple $u_0 < 0$) atteindra la branche attractive $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{a}_2}$ (comme attendu dans le cas déterministe) ou l'autre branche attractive $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{a}_1}$. L'intérêt de la forme (4.5) est que dans le voisinage de la SDBA nous pouvons justifier la linéarisation $\hat{F}(u_s, s)$ autour de $u_s = 0$ (voisinage de la SDBA). Ceci n'est pas possible avec (4.4) car le voisinage de la SDBA ne correspond pas forcément à x ou y petit. En notant $\hat{a}(s) = \partial_u \hat{F}(0, s)$, la linéarisation de (4.5) s'écrit :

$$du_s = \frac{1}{\epsilon}\hat{a}(s)u_s ds + \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}}dW_s. \tag{4.6}$$

Les résultats existants sur un système de la forme de (4.6) dans le cas d'une bifurcation fourche dynamique en présence de bruit ([22], Section 3.4) pourront dans un premier temps être adaptés à la structure plus complexe du modèle de clarinette. La question est de savoir si cela pourra être généralisé à des des systèmes de dimension supérieure, par exemple si l'on souhaite étudier un cas de bistabilité entre deux solutions périodiques.

4.2.2.3 Sourdine pour instruments à anche basée sur le pompage énergétique *Coll. : C. Vergez et P.-O. Mattei*

Les applications déjà existantes du pompage énergétique en vibroacoustique laissent en effet penser que les NES pourraient être utilisés pour concevoir des sourdines efficaces pour instruments à anche et à cordes frottées. En effet, les solutions existantes ne sont à l'heure actuelle pas satisfaisantes alors que les produits efficaces pour les autres instruments (piano, cuivres, ...) suscitent un grand intérêt parmi les musiciens amateurs et professionnels. On peut illustrer ceci par le succès de la gamme *« Silent Instruments »* de Yamaha. D'autre part, la nécessité qu'ont certains instrumentistes citadins de s'exercer quotidiennement les rendent prêts à acquérir des dispositifs très couteux, comme les cabines acoustiques par exemple.

Cette thématique fait le lien entre mes deux activités de recherche principales. Elle envisage une application des NES en acoustique musicale qui me tient particulièrement à coeur. Initiée il y a un moment lors du Stage de Master 2 de Barthélémy Jeandel [e5] qui avait montré qu'un NES purement acoustique (tel que proposé par Gourdon et coll. [85]) était difficilement envisageable, cette recherche a été continuée de façon épisodique en considérant une membrane pour la conception du NES. Des verrous scientifiques ont été mis en évidence, notamment liés aux dimensions des membranes qui devraient être utilisées mais également à la nature des modèles d'instrument à anche.

En effet, comme nous l'avons évoqué plus haut, dans les modèles d'instruments à anche l'apparition d'un son musical correspond à la perte de stabilité de la solution d'équilibre au profit d'une solution oscillante (en général périodique). Dans les modèles plus complexes que le modèle à un mode, comme le modèle à deux modes mentionné en Section 4.2.2.1, cette perte de stabilité s'effectue par les bifurcations de Hopf successives des modes du modèle. C'est donc un cas d'instabilités multiples (c.-à-d. que plus d'une paire de valeurs propres complexes conjuguées de la matrice jacobienne du modèle évalué en la solution d'équilibre ont des parties réelles positives). Les travaux présentés en Section 1.2.3 qui synthétisent les résultats de [a9] peuvent être vus comme une preuve de concept quant à l'utilisation d'un NES pour atténuer des régimes oscillants résultant d'instabilité double (c.-à-d. deux modes instables). Qu'en est-il lorsqu'il y a plus que deux modes instables ? Comment ces résultats théoriques peuvent-ils aider pour la conception d'un NES ? Cette conception mènera-t-elle à un NES réalisable pratiquement ? Les regimes du système couplé instrument-NES sont-ils pertinents musicalement ? Des questions auxquelles il faudra répondre si l'on veut espérer une application industrielle.

Afin d'aborder cette thématique également d'un point de vue expérimental, une collaboration avec le LMA semble opportune étant donnée l'expertise de ce dernier dans la conception de NES à base membrane de petite taille.

4.2.2.4 Recherche de profil optimaux et prise en compte de l'interaction instrumentiste-instrument

La notion d'optimisation me paraît importante dans le domaine de la pratique musicale. En effet, on peut supposer que l'instrumentiste, quel que soit son niveau, essaye de jouer au mieux selon ses capacités et son instrument. Il s'agit ici d'optimisation objective, puisque sont recherchés des profils temporels des paramètres de contrôle (ou la forme de la fonction $g(y)$ dans l'Éq. (2.3)) permettant d'accomplir une tâche donnée de façon optimale (une attaque de note la plus rapide possible par exemple) et ce, sans aucune contrainte liée au niveau d'apprentissage de l'instrumentiste ou à la qualité de l'instrument.

à plus long terme, il s'agirait d'être en mesure de modéliser des situations de *contrôle avec contre-réaction*, c.-à-d. quand le modèle d'instrument (2.3) prend la forme suivante :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, y), \tag{4.7a}$$

$$\dot{y} = \epsilon g(\mathbf{x}, y), \tag{4.7b}$$

et devient un modèle *instrument-instrumentiste*.

La contre-réaction du musicien serait définie comme les corrections apportées par ce dernier « en temps réel » aux paramètres de contrôle pour arriver au résultat souhaité de manière optimale pour lui. En effet, comme énoncé précédemment, on part du principe que l'instrumentiste essaye de jouer au mieux selon ses capacités à un instant donné de son apprentissage mais aussi de son instrument. Dans cette partie on supposera que les caractéristiques de l'instrument sont connues et on se concentrera sur le contrôle du musicien.

La question de la modélisation de la contre-réaction du musicien sur l'instrument, c.-à-d. la forme de la fonction $g(x, y)$ sera abordée dans le cadre général de la théorie du contrôle et de l'automatique (En particulier leurs applications à la description des mouvements humains [29, 104, 139]) et/ou en s'inspirant de mesure *in vivo*. Une première approche consistera, comme précédemment, à résoudre un problème d'optimisation sans contrainte. Cette démarche ne prend cependant en compte ni les limites physiologiques de l'être humain - et donc peut mener à des résultats irréalisables même pour un musicien expert - ni le niveau d'apprentissage de l'instrumentiste et par conséquent ne permet pas de faire la différence entre un instrumentiste débutant et un musicien expert. Une seconde étape serait encore de résoudre un problème d'optimisation mais en y ajoutant des contraintes liées à la physiologie et au niveau du musicien. Tout le problème réside alors dans la définition de ces contraintes.

Cette recherche nécessiterait un rapprochement avec la communauté des sciences du mouvement.

Deuxième partie

Selection d'articles

Annexe A

Mechanical Systems and Signal Processing 131 (2019) : 728-50 [a8]

Steady-state regimes prediction of a multi-degree-of-freedom unstable dynamical system coupled to a set of nonlinear energy sinks

Baptiste Bergeot and Sergio Bellizzi

Abstract

A general method to predict the steady-state regimes of a multi-degree-of-freedom unstable vibrating system (the primary system) coupled to several nonlinear energy sinks (NESs) is proposed. The method has three main steps. The first step consists in the diagonalization of the primary underline linear system using the so-called biorthogonal transformation. Within the assumption of a primary system with only one unstable mode the dynamics of the diagonalized system is reduced ignoring the stable modes and keeping only the unstable mode. The complexification method is applied in the second step with the aim of obtaining the slow-flow of the reduced system. Then, the third step is an asymptotic analysis of the slow-flow based geometric singular perturbation theory. The analysis shows that the critical manifold of the system can be reduced to a one dimensional parametric curve evolving in a multidimensional space. The shape and the stability properties of the critical manifold and the stability properties of the fixed points of the slow-flow provide an analytical tool to predict the nature of the possible steady-state regimes of the system. Finally, two examples are considered to evaluate the effectiveness and advancement of the proposed method. The method is first applied to the prediction of the mitigation limit of a breaking system subject to friction-induced vibrations coupled to two NESs, and next an airfoil model undergoing an aeroelastic instability coupled to a NESs setup (from one to four) is discussed. Theoretical results are compared, for validation purposes, to direct numerical integration of the system. The comparisons show good agreement.

Keywords : Multi-degree-of-freedom unstable system, set of nonlinear energy sinks, passive mitigation, relaxation oscillations, mitigation limit, asymptotic analysis

A.1 Introduction

In the framework of passive vibration control, it is now recognized that the nonlinear absorbers based on the concept of Targeted Energy Transfer (TET) also known as Nonliner Energy Sink (NES) are good candidate to consider especially when low frequency and high level are concerned. A basic NES generally consists of a light mass, an essentially nonlinear spring and a viscous linear damper. Due to the essentially nonlinear stiffness (with no linear part), a NES can tune to any frequency content displayed by the primary vibrating structure even if its mass is small. The TET concept results from nonlinear mode bifurcations and it can be described as a 1 :1 resonance capture [76, 203]. A first review of the state-of-the-art can be found in [205] and more recently in [129] as a part of the state-of-the-art about technologies for nonlinear dissipative devices including for example (without being exhaustive) polynomial, non-polynomial, piecewise linear and non-smooth stiffness NES, and also vibro-impact NES, track NES, bistable NES and magnetic NES. The generation of new technologies is always in progress. Recent studies include for example a novel archetype of NES enhanced by an inerter for vibration reduction [223, 225], a acoustic NES [85] and a virbo-acoustic NES with a controlled acoustic load [33] for noise attenuation and a grounded NES for rotor system vibration suppression [221].

NESs are also used to control dynamic instabilities. The possible suppression of the limit cycles of a Van der Pol oscillator utilizing a NES was first demonstrated numerically in [122] and next considered theoretically in [75]. A series of papers was also dedicated to aeroelastic mitigation [78, 123, 131, 208], helicopter groud resonance instability mitigation [a10, a12] and mode coupling instability mitigation in a friction system [a14]. As a recent works, aeroelastic suppression of an airfoil with control surface using a nonlinear energy sink is

considered in [93]. Panel flutter suppression with NES is discussed in [156]. Note that in these two recent works only complete Limit Cycle Oscillations (LCO) suppression or make the LCOs less intense are considered.

A single NES (coupled to the primary system) was the NES configuration the most often studied. Multi-Degree-Of-Freedom (multi-DOF) NES in series [83, 87, 193, 200] or in parallel [a7, 30, 126, 208, 224] were also considered. The use of several NESs allow to increase the range of excitations (level and frequency) within which the NES can absorb energy efficiently and/or to extract vibration energy simultaneously from multiple linear modes of the primary system.

To capture the complexity of the dynamic of the coupled system (primary system + NES) due to the nonlinear behaviour of the NES, various analysis have been developed including direct time integration method [221, 224], harmonic balance method [222, 225] or complex-averaging method [223]. The complex-averaging method [135] gives also access to the slow-flow model of the nonlinear system. This slow-flow is governed by different time scales and analytical methods such as multiple scale analysis [144], or Geometric Singular Perturbation Theory (GSPT) [107] can be used to extract the complex dynamics. In [188], for example harmonic forcing was considered where response regimes are characterized in terms of periodic and relaxation oscillations of the slow-flow also named Strongly Modulated Responses (SMR). An alternative method known as mixed multiple scale/harmonic balance method has been proposed by Luongo and Zulli [130] leading to an equivalent result without the complexification-averaging being necessary. This approach was used by the same authors [131] in case of NES control of aeroelastic instability.

To go further, a discussion on the relationship between the dimensionality of the critical manifold, the nature and the distribution of the fixed points of the slow dynamics and the observed response regimes is explored in [74] where it is apparent that the analysis is difficult for systems with large dimension. Hence, it seems interesting to investigate the possibility of implementing a procedure able to deal with a multi-DOF system coupled to a large number of NESs.

In this work, auto-oscillating systems are considered and without loss of generality we focus on multi-degree-of-freedom unstable vibrating systems undergoing cubic nonlinearities and having only one mode which can become unstable through Hopf bifurcation. Our objective is to predict the steady-state regimes (i.e complete suppression of instability, mitigation through periodic response or mitigation through SMR) when the (primary) system is coupled to a family of single NESs. The proposed procedure starts with the diagonalization of the primary underlying linear system written in the state-space form using the so-called biorthogonal transformation. Then, the dynamics of the diagonalized system is reduced ignoring the stable modes and keeping only the unstable mode of the primary system. The complexification-averaging method is next applied to the resulting coupled system, leading to slow-flow of the system. Based on the GSPT, it is shown that the critical manifold of the system can be reduced to a one dimensional parametric curve evolving in a multidimensional space. This form of critical manifold is similar to that obtained considering a network of parallel single NESs [a7]. Knowing the stability properties of the critical manifold and the fixed point of the slow-flow (position and stability), the response regimes can be predicted. Finally as in [a7] we introduce and predict the mitigation limit of the set of NESs, defined as the value of a chosen bifurcation parameter which separates harmless situations (corresponding to responses in which the set of NESs acts) from harmful situations (corresponding to responses in which the set of NESs does not act).

The system under study is introduced in the next section starting from the physical model, applying successively a rescaling step, a diagonalization step and a reduction step. In Sect. A.3, the slow-flow dynamics is first obtained applying the complexification-averaging method and then analyzed using the geometric singular perturbation theory. Sects. A.3.1 to B.3.4 describe in detail the mathematical developments which allow to obtain the critical manifold and the fixed points (position and stability) of the slow-flow. From the knowledge of that, the Sect. A.3.5 provides the procedure to predict the steady-state response regimes and consequently the mitigation limit. Finally, in Sect. D.5, two examples are considered. In Sect. A.4.1, the method is first applied to the prediction of the mitigation limit of a breaking system subject to friction-induced vibrations coupled to two NESs. A airfoil model undergoing an aeroelastic instability coupled to a set of NESs is next considered in Sect. A.4.2.

A.2 The system under study

A.2.1 The initial model

One considers in this work the following primary nonlinear system

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\tilde{\mathbf{x}}} + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{g}}^{\mathbf{NL}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}, \tag{A.1}$$

where $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_N)^T$ with $(.)^T$ denotes the transpose operator, the dot represents the differentiation with respect to the time t (already assumed dimensionless) and

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \tilde{m}_{1,1} & \ldots & \tilde{m}_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{m}_{N,1} & \ldots & \tilde{m}_{N,N} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{1,1} & \ldots & \tilde{c}_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{c}_{N,1} & \ldots & \tilde{c}_{N,N} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{1,1} & \ldots & \tilde{k}_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{k}_{N,1} & \ldots & \tilde{k}_{N,N} \end{bmatrix} \tag{A.2a}$$

are constant matrices. The nonlinear vector-valued function $\tilde{\mathbf{g}}^{\mathbf{NL}}$ is called nonlinearity of the primary system. We assume that each component of $\tilde{\mathbf{g}}^{\mathbf{NL}}$ is a linear combination of monomial terms of order 3.

We also assume that Eq. (D.1) can undergo a single dynamic instability of the trivial solution and that the nonlinear function $\tilde{\mathbf{g}}^{\mathbf{NL}}$ allows the existence of Limit Cycle Oscillations (LCOs) on which the system can saturate.

System (D.1) can undergo a single dynamic instability of the trivial solution. In order to protect the primary system from this instability, M purely cubic ungrounded NESs with masses $\tilde{m}_{h_m}$, damping coefficients $\tilde{c}_{h_m}$ and cubic stiffness $\tilde{\lambda}_{h_m}$ $(m = 1, \ldots, M)$ are used. Taking into account the NESs displacements $\tilde{h}_m(t)$ $(m = 1, \ldots, M)$, the equations of the whole coupled system result on the following form

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\tilde{\mathbf{x}}} + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{g}}^{\mathbf{NL}}(\tilde{\mathbf{x}}) + \tilde{\mathbf{B}}\Big(\mathbf{diag}(\tilde{c}_{h_m})\Big(\mathbf{T}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} - \dot{\tilde{\mathbf{h}}}\Big) + \mathbf{diag}(\tilde{\lambda}_{h_m})\mathbf{f}^{\mathbf{NL}}\Big(\mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{h}}\Big)\Big) = \mathbf{0} \tag{A.3a}$$

$$\mathbf{diag}(\tilde{m}_{h_m})\ddot{\tilde{\mathbf{h}}} - \Big(\mathbf{diag}(\tilde{c}_{h_m})\Big(\mathbf{T}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} - \dot{\tilde{\mathbf{h}}}\Big) + \mathbf{diag}(\tilde{\lambda}_{h_m})\mathbf{f}^{\mathbf{NL}}\Big(\mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{h}}\Big)\Big) = \mathbf{0}, \tag{A.3b}$$

where $\tilde{\mathbf{h}} = (\tilde{h}_1, \ldots, \tilde{h}_M)^T$, and the constant matrices

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{1,1} & \ldots & \tilde{b}_{1,M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{b}_{N,1} & \ldots & \tilde{b}_{N,M} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & \ldots & t_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{M,1} & \ldots & t_{M,N} \end{bmatrix} \tag{A.4}$$

are the influence coefficient matrices (depending on the position of the NESs). The nonlinear vector function $\mathbf{f}^{\mathbf{NL}}$, due to the NESs attachments, is given by

$$\mathbf{f}^{\mathbf{NL}}(\mathbf{y}) = \left(y_1^3, \ldots, y_M^3\right)^T. \tag{A.5}$$

Finally $\mathbf{diag}(d_m)$ denotes the diagonal matrix with the main diagonal $(d_1, d_2, \cdots, d_M)$.

System (D.2) is the system under study (a N multi-DOFs the primary system coupled with M one-DOF NESs).

We now assume that the masses, $\tilde{m}_{h_m}$, and the damping coefficients, $\tilde{c}_{h_m}$, of the M NESs are small and we introduce a small, dimensionless parameter ϵ $(0 < \epsilon \ll 1)$ and the associated rescaled coefficients, m_{h_m} and c_{h_m}, as

$$\tilde{m}_{h_m} = \epsilon m_{h_m} \quad \text{and} \quad \tilde{c}_{h_m} = \epsilon c_{h_m}, \quad \text{for } m = 1, \ldots, M. \tag{A.6}$$

Then, rescaling the variables $\tilde{\mathbf{x}}$ and $\tilde{\mathbf{h}}$ through ϵ as

$$\mathbf{x} = \frac{\tilde{\mathbf{x}}}{\sqrt{\epsilon}} \quad \text{and} \quad \mathbf{h} = \frac{\tilde{\mathbf{h}}}{\sqrt{\epsilon}} \tag{A.7}$$

and inserting the rescaled parameters m_{h_m} and c_{h_m} and the rescaled variables $\mathbf{x}$ and $\mathbf{h}$ into (D.2) lead to

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{x} + \epsilon\tilde{\mathbf{g}}^{\mathbf{NL}}(\mathbf{x}) + \epsilon\tilde{\mathbf{B}}\,\mathbf{diag}(m_n)\ddot{\mathbf{h}} = \mathbf{0} \tag{A.8a}$$

$$\epsilon\,\mathbf{diag}(m_{h_m})\ddot{\mathbf{h}} - \Big(\epsilon\,\mathbf{diag}(c_{h_m})(\mathbf{T}\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{h}}) + \epsilon\mathbf{diag}(\tilde{\lambda}_{h_m})\mathbf{f}^{\mathbf{NL}}(\mathbf{T}\mathbf{x} - \mathbf{h})\Big) = \mathbf{0}. \tag{A.8b}$$

Finally multiplying (A.8a) by $\tilde{\mathbf{M}}^{-\mathbf{1}}$ and (A.8b) by $\mathbf{diag}(1/m_{h_m})$ we obtain

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \epsilon\mathbf{g}^{\mathbf{NL}}(\mathbf{x}) + \epsilon\mathbf{B}\ddot{\mathbf{h}} = \mathbf{0} \tag{A.9a}$$

$$\epsilon\ddot{\mathbf{h}} - \Big(\epsilon\,\mathbf{diag}(\gamma_{h_m})(\mathbf{T}\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{h}}) + \epsilon\mathbf{diag}(\alpha_{h_m})\mathbf{f}^{\mathbf{NL}}(\mathbf{T}\mathbf{x} - \mathbf{h})\Big) = \mathbf{0}, \tag{A.9b}$$

with

$$\mathbf{C} = \tilde{\mathbf{M}}^{-\mathbf{1}}\tilde{\mathbf{C}}, \quad \mathbf{K} = \tilde{\mathbf{M}}^{-\mathbf{1}}\tilde{\mathbf{K}}, \quad \mathbf{B} = \tilde{\mathbf{M}}^{-\mathbf{1}}\tilde{\mathbf{B}}\,\mathbf{diag}(\mathbf{m_n})$$

and $\gamma_{h_m} = c_{h_m}/m_{h_m}$, $\alpha_{h_m} = \tilde{\lambda}_{h_m}/m_{h_m}$ and $\mathbf{g}^{\mathbf{NL}}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{M}}^{-\mathbf{1}}\tilde{\mathbf{g}}^{\mathbf{NL}}(x)$.

A.2.2 Model reduction

In this section, the system (D.3) is reduced taking into account that the primary system (D.1) can undergo only a single instability of the trivial solution.

First, to simplify asymptotic analysis in next section, it is convenient to introduce new coordinates as

$$\mathbf{v} = \mathbf{x} + \epsilon \mathbf{B}\mathbf{h} \tag{A.10a}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{h} - \mathbf{T}\mathbf{x}, \tag{A.10b}$$

giving reciprocally,

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I}_N + \epsilon \mathbf{B}\mathbf{T})^{-1}(\mathbf{v} - \epsilon \mathbf{B}\mathbf{w}) \tag{A.11a}$$

$$\mathbf{h} = (\mathbf{I}_M + \epsilon \mathbf{T}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{w} + \epsilon \mathbf{T}\mathbf{v}), \tag{A.11b}$$

where $\mathbf{I}_n$ is the identity matrix of size n.

Using Eqs. (D.4) with the inverse matrices $(\mathbf{I}_N + \epsilon \mathbf{B}\mathbf{T})^{-1}$ and $(\mathbf{I}_M + \epsilon \mathbf{T}\mathbf{B})^{-1}$, approximated respectively by $(\mathbf{I}_N - \epsilon \mathbf{B}\mathbf{T})$ and $(\mathbf{I}_M - \epsilon \mathbf{T}\mathbf{B})$, Eq. (D.3) is transformed into the following form

$$\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} - \epsilon\Big[\mathbf{C}\mathbf{B}\left(\mathbf{T}\dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{w}}\right) + \mathbf{K}\mathbf{B}\left(\mathbf{T}\mathbf{v} + \mathbf{w}\right)\Big] + \epsilon \mathbf{g}^{\mathbf{NL}}(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \tag{A.12a}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{diag}(\gamma_{h_m})\dot{\mathbf{w}} - \mathbf{T}\mathbf{C}\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{T}\mathbf{K}\mathbf{v} + \mathbf{diag}(\alpha_{h_m})\mathbf{f}^{\mathbf{NL}}(\mathbf{w}) + \\ \epsilon\Big[\mathbf{T}\mathbf{B}\,\mathbf{diag}(\gamma_{h_m})\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{T}\mathbf{C}\mathbf{B}\left(\mathbf{T}\dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{w}}\right) + \mathbf{T}\mathbf{K}\mathbf{B}\left(\mathbf{T}\mathbf{v} + \mathbf{w}\right) + \mathbf{T}\mathbf{B}\,\mathbf{diag}(\alpha_{h_m})\mathbf{f}^{\mathbf{NL}}(\mathbf{w})\Big] = \mathbf{0},\end{aligned} \tag{A.12b}$$

where only the first order term in ϵ has been retained in the nonlinearity of the primary underline linear system.

To capture the essential features of the single instability, model reduction is only performed on Eq. (D.5a), keeping the whole second equation. To achieve this, Eq. (D.5a), is written in state-space form as follows

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \epsilon\left[\mathbf{D}_1\mathbf{y} + \mathbf{D}_2\mathbf{w} + \mathbf{D}_3\dot{\mathbf{w}}\right] + \epsilon\mathbf{D}_4\mathbf{g}^{\mathbf{NL}}(\mathbf{y}) \tag{A.13}$$

where $\mathbf{y} = (v_1, \ldots, v_N, \dot{v}_1, \ldots, \dot{v}_N)^T$, $\mathbf{g}^{\mathbf{NL}}$ trivially redefined as $\mathbf{g}^{\mathbf{NL}}(\mathbf{y}) = \mathbf{g}^{\mathbf{NL}}(\mathbf{v})$,

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{I}_N \\ \hline -\mathbf{K} & -\mathbf{C} \end{array}\right], \tag{A.14}$$

$$\mathbf{D}_1 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{T} & \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{T} \end{array}\right], \quad \mathbf{D}_2 = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{K}\mathbf{B} \end{array}\right], \quad \mathbf{D}_3 = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{C}\mathbf{B} \end{array}\right] \quad \text{and} \quad \mathbf{D}_4 = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \hline -\mathbf{I}_N \end{array}\right]. \tag{A.15}$$

The matrix $\mathbf{A}$ characterizes the linear dynamics of the primary system.

Because the matrix $\mathbf{A}$ is not a symmetric matrix, its diagonalization must necessarily be carried out using biorthogonality property of the right eigenvectors $\mathbf{r}_i$ $(i = 1, \ldots, 2N)$ and the left eigenvectors $\mathbf{l}_j$ $(j = 1, \ldots, 2N)$ of $\mathbf{A}$ hereafter defined. The method is briefly recalled in this section. The general procedure is provided for example in [140].

Let us consider the right and left eigenvector matrices

$$\mathbf{R} = [\mathbf{r_1}\ \mathbf{r}_1^*\ \ldots\ \mathbf{r_N}\ \mathbf{r}_N^*] \quad \text{and} \quad \mathbf{L} = [\mathbf{l_1}\ \mathbf{l}_1^*\ \ldots\ \mathbf{l_N}\ \mathbf{l}_N^*] \tag{A.16}$$

and the associated eigenvalue diagonal matrix $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_1^*, \cdots, \lambda_N, \lambda_N^*)$ corresponding to the following right and left eigenvalue problems

$$\mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda} \quad \text{and} \quad \mathbf{A}^T\mathbf{L} = \mathbf{L}\mathbf{\Lambda}. \tag{A.17}$$

The right and left eigenvectors satisfy the biorthogonality properties stating that $\mathbf{L}^T\mathbf{R}$ and $\mathbf{L}^T\mathbf{A}\mathbf{R}$ are diagonal matrices. It is convenient to normalize the two sets of eigenvectors in order to obtain

$$\mathbf{L}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}_N, \tag{A.18}$$

that results in

$$\mathbf{L}^T\mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{\Lambda}. \tag{A.19}$$

The biorthogonal transformation consists in introducing the biorthogonal coordinates which are constituted of N pairs of complex conjugates, q_n and q_n^* $(n = 1, \ldots, N)$, and defined by the following relations

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{q} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{q} = \mathbf{L}^T\mathbf{y}, \tag{A.20}$$

where

$$\mathbf{q} = (q_1, q_1^*, \ldots, q_N, q_N^*)^T. \tag{A.21}$$

Introducing Eq. (D.8) in Eq. (D.6), the equations of motion take the form of the following system

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{\Lambda q} + \epsilon \mathbf{L}^T \left[\mathbf{D}_1 \mathbf{R q} + \mathbf{D}_2 \mathbf{w} + \mathbf{D}_3 \dot{\mathbf{w}}\right] + \epsilon \mathbf{L}^T \mathbf{D}_4 \mathbf{g^{NL}}\left(\mathbf{R q}\right), \tag{A.22}$$

and therefore Eqs. (D.5) are equivalent to

$$\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{\Lambda q} - \epsilon \mathbf{L}^T \left[\mathbf{D}_1 \mathbf{R q} + \mathbf{D}_2 \mathbf{w} + \mathbf{D}_3 \dot{\mathbf{w}}\right] - \epsilon \mathbf{L}^T \mathbf{D}_4 \mathbf{g^{NL}}\left(\mathbf{R q}\right) = 0 \tag{A.23a}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{diag}(\gamma_{h_m})\dot{\mathbf{w}} - \mathbf{TC}(\mathbf{R_{dl}} \mathbf{q_u} + \mathbf{R_{dr}} \mathbf{q_d}) - \mathbf{TK}(\mathbf{R_{ul}} \mathbf{q_u} + \mathbf{R_{ur}} \mathbf{q_d}) + \\ \mathbf{diag}(\alpha_{h_m})\mathbf{f^{NL}}\left(\mathbf{w}\right) + \epsilon \Big[\mathbf{TB}\, \mathbf{diag}(\gamma_{h_m})\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{TCB}\left(\mathbf{T}(\mathbf{R_{dl}} \mathbf{q_u} + \mathbf{R_{dr}} \mathbf{q_d}) + \dot{\mathbf{w}}\right) + \\ \mathbf{TKB}\left(\mathbf{T}(\mathbf{R_{ul}} \mathbf{q_u} + \mathbf{R_{ur}} \mathbf{q_d}) + \mathbf{w}\right) + \mathbf{TB}\, \mathbf{diag}(\alpha_{h_m})\mathbf{f^{NL}}\left(\mathbf{w}\right)\Big] = \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{A.23b}$$

where the matrix $\mathbf{R}$ (respectively the vector $\mathbf{q}$) has been split into a $N \times N$-block matrix (respectively $N \times 1$-block vector) as

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R_{ul}} & \mathbf{R_{ur}} \\ \mathbf{R_{dl}} & \mathbf{R_{dr}} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{q} = (\mathbf{q_u}^T, \mathbf{q_d}^T)^T \tag{A.24}$$

respectively.

From now we assume that one (and only one) mode (without loss of generality the first mode) of the primary system become unstable through Hopf bifurcation, when the chosen bifurcation parameter, denoted σ, crosses a particular parameter value σ_0 called *bifurcation point*, i.e

- if $\sigma < \sigma_0$, $\mathrm{Re}\{\lambda_n\} < 0\ \forall i \in [1, N]$ and the trivial solution of the primary system is stable,
- if $\sigma > \sigma_0$, $\mathrm{Re}\{\lambda_1\} > 0$, $\mathrm{Re}\{\lambda_n\} < 0\ \forall i \in [2, N]$ and the trivial solution of the primary system is unstable.

Because we assume that only the first pair of eigenvalues (λ_1, λ_1^*) may have positive real part, after some exponentially decaying transients the components q_n and q_n^* $(n = 2, \ldots, N)$ become small. Therefore, all terms related to q_n and q_n^* $(n = 2, \ldots, N)$ are omitted from further consideration and Eq. (D.9) is reduced to

$$\dot{q}_1 = \lambda_1 q_1 + \epsilon \mathbf{l}_1^T \Big(\mathbf{D}_1(\mathbf{r}_1 q_1 + \mathbf{r}_1^* q_1^*) + \mathbf{D}_2 \mathbf{w} + \mathbf{D}_3 \dot{\mathbf{w}}\Big) + \epsilon \mathbf{l}_1^T \mathbf{D}_4 \mathbf{g^{NL}}\left(\mathbf{r}_1 q_1 + \mathbf{r}_1^* q_1^*\right), \tag{A.25}$$

in which we stated that $q_n = q_n^* = 0$ $(n = 2, \ldots, N)$.

Finally, grouping Eqs. (D.12) and (D.5b), we obtain the reduced system

$$\dot{q}_1 - (\epsilon\rho + j\omega) q_1 - \epsilon \mathbf{l}_1^T \left(\mathbf{D}_1(\mathbf{r}_1 q_1 + \mathbf{r}_1^* q_1^*) + \mathbf{D}_2 \mathbf{w} + \mathbf{D}_3 \dot{\mathbf{w}}\right) - \epsilon \mathbf{l}_1^T \mathbf{D}_4 \mathbf{g^{NL}}\left(\mathbf{r}_1 q_1 + \mathbf{r}_1^* q_1^*\right) = 0 \tag{A.26a}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{diag}(\gamma_{h_m})\dot{\mathbf{w}} - \mathbf{TC}(\mathbf{r}_1^d q_1 + \mathbf{r}_1^{d^*} q_1^*) - \mathbf{TK}(\mathbf{r}_1^u q_1 + \mathbf{r}_1^{u^*} q_1^*) + \mathbf{diag}(\alpha_{h_m})\mathbf{f^{NL}}\left(\mathbf{w}\right) + \\ \epsilon\Big(\mathbf{TB}\, \mathbf{diag}(\gamma_{h_m})\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{TCB}\left(\mathbf{T}(\mathbf{r}_1^d q_1 + \mathbf{r}_1^{d^*} q_1^*) + \dot{\mathbf{w}}\right) + \mathbf{TKB}\left(\mathbf{T}(\mathbf{r}_1^u q_1 + \mathbf{r}_1^{u^*} q_1^*) + \mathbf{w}\right) + \\ \mathbf{TB}\, \mathbf{diag}(\alpha_{h_m})\mathbf{f^{NL}}\left(\mathbf{w}\right)\Big) = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{A.26b}$$

where the vector $\mathbf{r}_1$ has been split as $\mathbf{r}_1 = (\mathbf{r}_1^{u^T}, \mathbf{r}_1^{d^T})^T$.

Note that λ_1 has also been replaced by

$$\lambda_1 = \epsilon\rho + j\omega, \tag{A.27}$$

with $j^2 = -1$ assuming a weak instability i.e. that $\mathrm{Re}\{\lambda_1\}$ is in the order of $\mathcal{O}(\epsilon)$ ($\mathrm{Re}\{\lambda_1\} = \epsilon\rho$ with ρ is in the order of $\mathcal{O}(1)$).

A.3 Asymptotic analysis

We focus on the motion of the system in the vicinity of a $1:1$ resonance associated with a frequency close to the natural frequency (ω see Eq. (A.27)) of the primary system.

A.3.1 The slow-flow

The slow-flow describes the evolution of the amplitude and phase of the system which evolve slowly compare to the oscillations at the frequency ω. To obtain it, we use the *Complexification-Averaging method* introduced by [135] and discussed in detail in [205].

The first step is the complexification [1] which consists in introducing the following complex vector

$$\boldsymbol{\zeta} = \dot{\mathbf{w}} + j\omega\mathbf{w} \tag{A.28}$$

or equivalently

$$\mathbf{w} = \frac{\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta}^*}{2j\omega}, \qquad \dot{\mathbf{w}} = \frac{\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\zeta}^*}{2} \qquad \text{and} \qquad \ddot{\mathbf{w}} = \dot{\boldsymbol{\zeta}} - \frac{j\omega}{2}\left(\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\zeta}^*\right) \tag{A.29}$$

and expressing the complex variables q_1 and $\boldsymbol{\zeta}$ as

$$q_1 = \phi e^{j\omega t} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\xi} e^{j\omega t} \tag{A.30}$$

where the scalar ϕ and the vector $\boldsymbol{\xi}$ are the complex (assumed slow modulated) amplitude of the fast component $e^{j\omega t}$.

The second step is the averaging which consists in, first, substituting Eqs. (D.16) and (D.17) into Eqs. (A.26), and next, averaging the resulting equations over one period $T = 2\pi/\omega$. We obtain the slow-flow described by the following differential equations

$$\dot{\phi} = \epsilon f\left(\phi, \boldsymbol{\xi}\right), \tag{A.31a}$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{g}\left(\phi, \boldsymbol{\xi}, \epsilon\right) \tag{A.31b}$$

where the functions f and $\mathbf{g}$ are defined by

$$f\left(\phi, \boldsymbol{\xi}\right) = \left(\rho + \mathbf{l}_1^T\mathbf{D}_1\mathbf{r}_1 + \mathbf{l}_1^T\mathbf{D}_4\mathbf{c}^{NL}(\mathbf{r_1})|\phi|^2\right)\phi + \left(\frac{1}{2\omega j}\mathbf{l}_1^T\mathbf{D}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{l}_1^T\mathbf{D}_3\right)\boldsymbol{\xi} \tag{A.32a}$$

$$= \left(A_0 + A_1|\phi|^2\right)\phi + \mathbf{A}_1^T\boldsymbol{\xi}, \tag{A.32b}$$

where the vector $\mathbf{c}^{NL}(\mathbf{r_1})$ is obtained from the nonlinear function $\mathbf{g}^{\mathbf{NL}}(\mathbf{r_1})$ replacing each monomial $r_{1i}r_{1j}r_{1k}$ by $r_{1i}^*r_{1j}r_{1k} + r_{1i}r_{1j}^*r_{1k} + r_{1i}r_{1j}r_{1k}^*$ (where r_{1i} is the i-th component of $\mathbf{r_1}$) and

$$\begin{aligned}\mathbf{g}\left(\phi, \boldsymbol{\xi}, \epsilon\right) = {} & (\mathbf{TKr}_1^u + \mathbf{TCr}_1^d)\phi - \frac{1}{2}\,\mathbf{diag}\left(j\omega + \gamma_{h_m} - j\frac{3\alpha_{h_m}}{4\omega^3}|\xi_m|^2\right)\boldsymbol{\xi} \\ & - \epsilon\Bigg[\left(\mathbf{TKBTr}_1^u + \frac{1}{2}\mathbf{TCBTr}_1^d\right)\phi \\ & + \frac{1}{2}\left(\mathbf{TCB} + \frac{1}{j\omega}\mathbf{TKB} + \mathbf{TB}\,\mathbf{diag}\left(\gamma_{h_m} + j\frac{3\alpha_{h_m}}{4\omega^3}|\xi_m|^2\right)\right)\boldsymbol{\xi}\Bigg], \qquad \text{(A.33a)} \\ = {} & \mathbf{g}_0\left(\phi, \boldsymbol{\xi}\right) + \epsilon\,\mathbf{g}_1\left(\phi, \boldsymbol{\xi}\right). \qquad \text{(A.33b)}\end{aligned}$$

The scalars A_0 and A_1, the vector $\mathbf{A}_1$ and the vector functions $\mathbf{g}_0$ and $\mathbf{g}_1$ have been introduced to simplify the analysis in next Section.

Finally, it is convenient to rewrite Eqs. (A.31) considering real variables. To achieve this, polar coordinates are introduced as

$$\phi = se^{j\delta}, \tag{A.34a}$$

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{diag}\left(e^{j\theta_m}\right)\mathbf{r}, \tag{A.34b}$$

where $\mathbf{r} = \left(r_1, \ldots, r_M\right)^T$ and s and δ (respectively r_m and θ_m) characterized the modulus and the argument of ϕ (respectively ξ_m). Substituting Eqs. (A.34) into Eqs. (A.31) and separating in real and imaginary parts, Eqs. (A.31) reduce to

$$\dot{s} = \epsilon\mathcal{F}\left(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}\right) \tag{A.35a}$$

1. This step is not necessary for the variable q_1 because it is already a complex variable.

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\mathcal{G}}\left(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, \epsilon\right) \tag{A.35b}$$
$$\dot{\boldsymbol{\vartheta}} = \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, \epsilon\right), \tag{A.35c}$$

where the argument differences $\vartheta_m = \theta_m - \delta$ have been considered and written in vector form as $\boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_M)^T$. The functions $\mathcal{F}$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ and $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ are deduced from functions f and $\mathbf{g}$ in Eqs. (A.31) as

$$\mathcal{F} = \mathrm{Re}\left\{f e^{-j\delta}\right\}, \tag{A.36a}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{G}} = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{diag}\left(e^{-j\theta_m}\right)\mathbf{g}\right\}, \tag{A.36b}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \mathrm{Im}\left\{\mathbf{diag}\left(\frac{e^{-j\theta_m}}{r_m}\right)\mathbf{g}\right\} - \epsilon \mathrm{Im}\left\{\mathbf{U}\frac{f e^{-j\delta}}{s}\right\} \tag{A.36c}$$

where $\mathbf{U} = (1, \ldots, 1)^T$ is a vector of size M.

A.3.2 The Critical Manifold

The slow-flow described by Eqs. (A.35) has a slow-fast nature. Indeed, Eq. (A.35a) contains only $\mathcal{O}(\epsilon)$ terms and Eqs. (A.35b) and (A.35c) contain both $\mathcal{O}(1)$ and $\mathcal{O}(\epsilon)$ terms. Consequently s is the slow variable whereas the vectors $\mathbf{r}$ and $\boldsymbol{\vartheta}$ contain the fast variables r_m and ϑ_m $(m = 1, \ldots, M)$.

Equations (A.35) can be reformulated by switching from the *fast* time scale t to the *slow* time scale $\tau = \epsilon t$ as

$$s' = \mathcal{F}\left(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}\right) \tag{A.37a}$$
$$\epsilon \mathbf{r}' = \boldsymbol{\mathcal{G}}\left(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, \epsilon\right) \tag{A.37b}$$
$$\epsilon \boldsymbol{\vartheta}' = \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, \epsilon\right), \tag{A.37c}$$

where $' = \frac{d}{d\tau}$. Solutions of the slow-fast system (A.35) (or (A.37)) can exhibit slow and fast epochs characterized by the speed at which the solution advances.

Stating $\epsilon = 0$, the following subsystems are derived from (A.35) and (A.37) respectively

$$\dot{s} = 0 \tag{A.38a}$$
$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\mathcal{G}}\left(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, 0\right), \tag{A.38b}$$
$$\dot{\boldsymbol{\vartheta}} = \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, 0\right), \tag{A.38c}$$

which is the *fast subsystem*, and

$$s' = \mathcal{F}\left(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}\right) \tag{A.39a}$$
$$0 = \boldsymbol{\mathcal{G}}\left(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, 0\right), \tag{A.39b}$$
$$0 = \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, 0\right), \tag{A.39c}$$

which is the *slow subsystem*.

The algebraic equations (A.39b) and (A.39c) of the slow subsystem define the so-called *Critical Manifold* S [107] as

$$S := \left\{ \left(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}\right) \in \mathbb{R}^{2M+1} \;\middle|\; \boldsymbol{\mathcal{G}}\left(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, 0\right) = 0 \text{ and } \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, 0\right) = 0 \right\} \tag{A.40}$$

corresponding to the subspace where the slow motions take place and also to the fixed points of the fast subsystem (A.38).

Looking at Eqs. (A.33b) and (A.36), one can deduce that

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}\left(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, 0\right) = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{diag}(e^{-j\theta_m})\mathbf{g}_0\right\} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, 0\right) = \mathrm{Im}\left\{\mathbf{diag}(\frac{e^{-j\theta_m}}{r_m})\mathbf{g}_0\right\}, \tag{A.41}$$

and after some algebraic manipulation, Eqs (A.39b) and (A.39c) can be written in the reduced complex form as

$$\mathbf{diag}\left(e^{-j\vartheta_m}\right)\left(\mathbf{TKr}_1^u + \mathbf{TCr}_1^d\right)s - \frac{1}{2}\,\mathbf{diag}\left(j\omega + \gamma_{h_m} - j\frac{3\alpha_{h_m}}{4\omega^3}r_m^2\right)\mathbf{r} = 0. \tag{A.42}$$

Introducing the complex functions F_m $(m = 1, \ldots, M)$ of a real variable as

$$F_m(x) = \frac{\omega}{B_m}\left(1 - j\frac{\gamma_{h_m}}{\omega} - \frac{3\alpha_{h_m}}{4\omega^4}x^2\right) = R_m(x) + jI_m(x), \tag{A.43}$$

where

$$B_m = -2j\left(\mathbf{TKr}_1^u + \mathbf{TCr}_1^d\right)_m \tag{A.44}$$

with $(.)_m$ stands for the $m-$th coordinate of the vector $(.)$, the Critical Manifold S is characterized by

$$s^2 = H_m(r_m), \quad (m = 1, \ldots, M), \tag{A.45a}$$
$$\vartheta_m = -\arg\left(F_m(r_m)\right), \quad (m = 1, \ldots, M) \tag{A.45b}$$

where the real functions H_m $(m = 1, \ldots, M)$ of a real variable are defined as

$$H_m(x) = x^2\left[R_m(x)^2 + I_m(x)^2\right]. \tag{A.46}$$

It is interesting to note that the general form (E.48) of the Critical Manifold S is the same as found in [a7] in the case of a one-DOF unstable primary system coupled to several parallel NESs. Indeed, in the latter case, the equivalent functions F_m can be obtained from (A.43) stating $B_m = 1$. From this form, as suggested in [a7], specific properties of the Critical Manifold can be deduced which can be advantageously used to characterize the response regimes of the system under study.

A.3.3 Critical Manifold properties and stability

Due to Eqs. (E.48), the critical manifold S appears as a one dimensional parametric curve evolving in $\mathbb{R}^{+^{M+1}}$ as a solution of the M nonlinear equations (E.48a) with respect to the $M+1$ unknown $(r_1, \ldots, r_M, s)$. A classical continuation method can be used to obtain S. Equivalently S can be obtained solving the following differential-algebraic equations

$$\sum_{m=1}^{M}\left(\frac{dr_m}{du}(u)\right)^2 + \left(\frac{ds}{du}(u)\right)^2 = 1, \quad \text{for } u_1 < u < u_2 \tag{A.47a}$$
$$s(u)^2 - H_m(r_m(u)) = 0, \quad (m = 1, \ldots, M) \tag{A.47b}$$
$$\frac{ds}{du}(0) = 1, \ \frac{dr_m}{du}(0) = 0, \quad (m = 1, \ldots, M) \tag{A.47c}$$
$$s(0) = s^0, \ r_m(0) = r_m^0, \quad (m = 1, \ldots, M) \tag{A.47d}$$

where u is arclength variable in the range $u_1(< 0)$ to $u_2(> 0)$ and $(r_1^0, \ldots, r_M^0, s^0) \in \mathbb{R}^{+^{M+1}}$ is a root of the algebraic equations (A.47b), chosen to be close to trial solution $\mathbf{0}$. An example of typical critical manifold for a system containing two NESs are plotted Fig. A.1. S starts at the origin by a straight line followed by a finite number of successive simple curved lines curving in opposite directions (with respect to s) and ended by an unbounded straight line. Each simple curve is characterized by a curving point defined by a horizontal tangency in at least one (r_m, s)-plane (i.e $ds/dr_m = 0$).

The critical manifold S can also be viewed as the intersection of the M manifolds

$$M_m = \{(\mathbf{r}, s) \in \mathbb{R}^{+^{M+1}} \mid s^2 = H_m(r_m)\}, \quad (m = 1, \cdots, M) \tag{A.48}$$

in the $(r_1, \ldots, r_M, s)$-space.

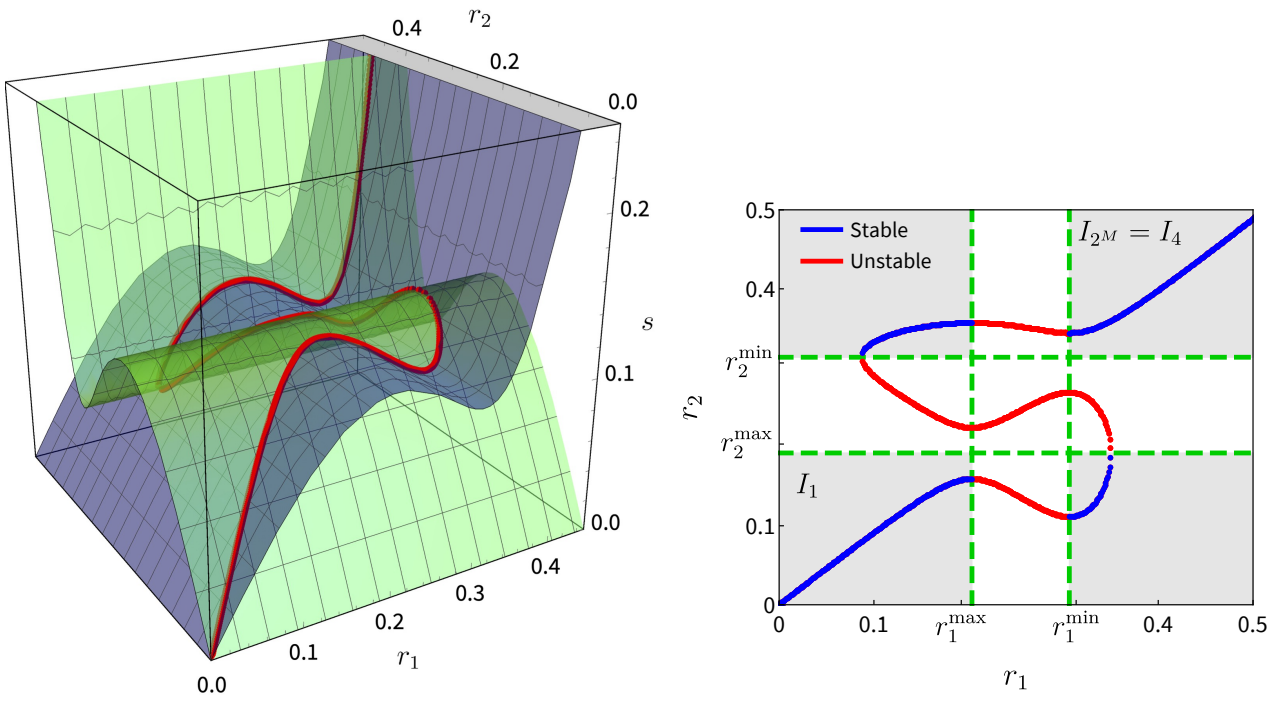
A typical projection of M_m onto the subspace $\mathbb{R}^{+^2}$ corresponding to the variables (r_m, s) is depicted in Fig. A.2. Its geometrical form is characterized by the properties of the function H_m. From Eq. (A.46), it can be shown that, for each m, if the following relation holds

$$\gamma_{h_m} < \frac{\omega}{\sqrt{3}}, \tag{A.49}$$

then H_m admits a local maxima $r_m^{\max}$ and a local minima $r_m^{\min}$ given as the positive roots of its derivative dH_m/dx. An easy calculus shows that

$$r_m^{\max} = \frac{2}{3}\omega^2\sqrt{\frac{2 - \sqrt{1 - 3\left(\frac{\gamma_{h_m}}{\omega}\right)^2}}{\alpha_{h_m}}} \quad \text{and} \quad r_m^{\min} = \frac{2}{3}\omega^2\sqrt{\frac{2 + \sqrt{1 - 3\left(\frac{\gamma_{h_m}}{\omega}\right)^2}}{\alpha_{h_m}}} \tag{A.50}$$

with $r_m^{\max} < r_m^{\min}$. Each extrema, defined by $(r_m^{\mathrm{p}}, s_m^{\mathrm{p}})$ with $s_m^{\mathrm{p}} = \sqrt{H_m(r_m^{\mathrm{p}})}$ where the upper-script p stands for min or max (see Fig. A.2 where condition (E.50) is satisfied) is associated to a curving point of S.



(a) (b)

Figure A.1. (a) Example of typical critical manifold S of a system containing two parallel NESs ($N = 2$) in the (r_1, r_2, s)-space (i.e. $\mathbb{R}^{+3}$). S (in red) is the intersection between the blue surface $s = \sqrt{H_1(r_1)}$ and the green surface $s = \sqrt{H_2(r_2)}$. The parameters of the primary system are those used in Sect. A.4.2 resulting in $\omega = 0.82$. The NESs parameters are : $\gamma_{h_1} = 0.3$, $\gamma_{h_2} = 0.2$, $\alpha_{h_1} = \alpha_{h_2} = 6$, $B_1 = 0.028 - j0.923$ and $B_2 = 0.030 - j0.819$ (corresponding to the second and the third NESs in the example of Sect. D.5). (b) Projection of the CM in the (r_1, r_2)-plane.

As already mentioned, each point of S is also a fixed point for the fast subsystem (A.38) and the stability can be determined by examining the sign of the eigenvalue real parts of the Jacobian matrix of the differential system (A.38b)(A.38c). Hence the stability range of S is defined by the points $(r_1, \ldots, r_N, s)$ on S that satisfy

$$\forall m \in [1, M], \quad \frac{dH_m}{dx}(r_m) > 0. \tag{A.51}$$

Stability condition can be also written equivalently in terms of arclength variable u at the point

$$(r_1(u), \ldots, r_N(u), s(u))$$

of S as

$$\forall m \in [1, M], \quad \frac{ds}{du}(u) \left(\frac{dr_m}{du}(u) \right)^{-1} > 0. \tag{A.52}$$

We assume from now that Eq. (E.50) is satisfied for the M NESs.

For each m ($1 \leq m \leq M$), the extrema points $(r_m^{\max}, s_m^{\max})$ and $(r_m^{\min}, s_m^{\min})$ characterize two bounds on S where S ceases to be hyperbolic [2] connecting stable or attractive (continuous line) and unstable or repulsive (dashed line) parts of S (see Fig. A.2). It follows that $(r_m^{\max}, s_m^{\max})$ (respectively $(r_m^{\min}, s_m^{\min})$) defines a point $\mathbf{f}^{\mathrm{ma},m}$ (respectively $\mathbf{f}^{\mathrm{mi},m}$) on S called *fold point* by

$$\mathbf{f}^{\mathrm{ma,m}} = (r_1^{\mathrm{ma},m}, \ldots, r_{m-1}^{\mathrm{ma},m}, r_m^{\max}, r_{m+1}^{\mathrm{ma},m}, \ldots, r_M^{\mathrm{ma},m}, s_m^{\max}) \tag{A.53a}$$

$$\text{(respectively } \mathbf{f}^{\mathrm{mi},m} = (r_1^{\mathrm{mi},m}, \ldots, r_{m-1}^{\mathrm{mi},m}, r_m^{\min}, r_{m+1}^{\mathrm{min},m}, \ldots, r_M^{\mathrm{min},m}, s_m^{\min})) \tag{A.53b}$$

with $r_n^{\mathrm{ma},m}$ (respectively $r_n^{\mathrm{mi},m}$) satisfied for $n = 1, \ldots, M, n \neq m$, $H(r_n^{\mathrm{ma},m}) = H(r_m^{\max})$ (respectively $H(r_n^{\mathrm{mi},m}) = H(r_m^{\min})$). The number of fold points is equal to $2M$ (2 by NES).

2. S is hyperbolic if all eigenvalues of the Jacobian matrix of the differential systems (A.38b)(A.38c) have nonzero real part.

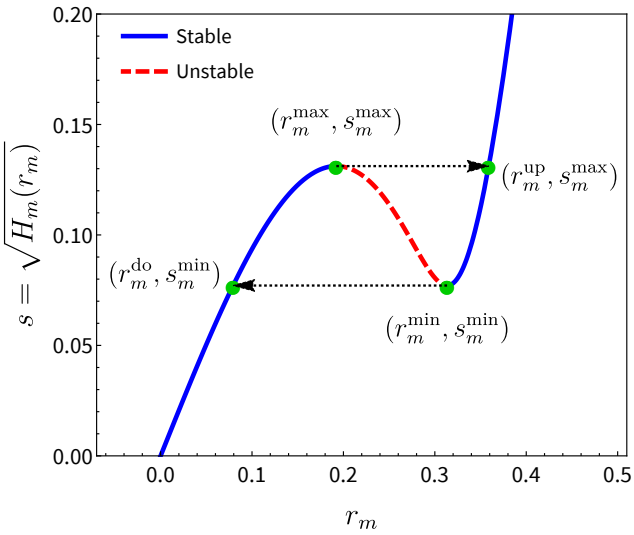


Figure A.2. Part of the *Critical Manifold* (CM) corresponding to the m-th NES, Eq (A.46). The parameters of the primary system are those used in Sect. A.4.2 resulting in $\omega = 0.82$. The NESs parameters are : $\gamma_{h_m} = 0.2$, $\alpha_{h_m} = 6$, $B_m = 0.030 - j0.819$ (corresponding to the third NES in the example of Sect. D.5).

Moreover in each (r_m, s)-plane, the dynamics of any point not on S is entirely defined by the direction of the fast variable r_m as given by Eq. (A.38a) (i.e. $s = \text{Cte}$) and which is indicated by the horizontal arrows in Fig. A.2. Hence at a fold point $\mathbf{f}^{\mathrm{ma},m}$ (respectively $\mathbf{f}^{\mathrm{mi},m}$) on S, a jump occurs (fast dynamic) to a point on S named arrival point and denoted $\mathbf{j}^{\mathrm{ma},m}$ (respectively $\mathbf{j}^{\mathrm{mi},m}$). During the jump, $s = s_m^{\max}$ and for $n = 1, \ldots, M,\ n \neq m$ the trajectory lies in the manifold M_n leading to

$$\mathbf{j}^{\mathrm{ma},m} = (r_1^{\mathrm{ma},m}, \ldots, r_{m-1}^{\mathrm{ma},m}, r_m^{\mathrm{up}}, r_{m+1}^{\mathrm{ma},m}, \ldots, r_M^{\mathrm{ma},m}, s_m^{\max}) \tag{A.54a}$$

$$(\text{respectively } \mathbf{j}^{\mathrm{mi},m} = (r_1^{\mathrm{mi},m}, \ldots, r_{m-1}^{\mathrm{mi},m}, r_m^{\mathrm{do}}, r_{m+1}^{\mathrm{mi},m}, \ldots, r_M^{\mathrm{mi},m}, s_m^{\min})) \tag{A.54b}$$

with the ordinate r_m^{up} (respectively r_m^{do}) is obtained solving $H_m\left(r_m^{\mathrm{up}}\right) = H_m\left(r_m^{max}\right)$ (respectively $H_m\left(r_m^{\mathrm{do}}\right) = H_m\left(r_m^{min}\right)$) that leads to

$$r_m^{\mathrm{up}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\omega^2\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+3\left(\frac{\gamma_{h_m}}{\omega}\right)^2}}{\alpha_{h_m}}} \quad (\text{respectively } r_m^{\mathrm{do}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\omega^2\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-3\left(\frac{\gamma_{h_m}}{\omega}\right)^2}}{\alpha_{h_m}}}). \tag{A.55}$$

It follows that the stability domain of S is only characterized in the $(r_1, r_2, \ldots, r_M)$-space ($\mathbb{R}^{+M}$) by the subspace D given in terms of Cartesian product as

$$D = \prod_{m=1}^{M} D_m, \tag{A.56}$$

where

$$D_m = [0\ r_m^{\max}] \cup \left[r_m^{\min}\ +\infty\right) \tag{A.57}$$

denotes the stability range associated to the m-th NES (see Fig. A.2).

Eq. (A.56) may be expanded as the union of 2^M disjunct Cartesian products I_k (with $k = 1, \ldots, 2^M$) as

$$D = \bigcup_{k=1}^{2^M} I_k, \tag{A.58}$$

where I_k appears as the product of close or left-close intervals resulting in an isolated stable or attractive part of the the critical manifold S as

$$I_k = \prod_{m \in C_k} [0, r_m^{\max}] \prod_{m \in C_k^c} [r_m^{\min}, +\infty), \tag{A.59}$$

with C_k is a part of the finite set $\{1, 2, \ldots, M\}$ and C_k^c its complementary. The first and the last Cartesian products are chosen as $I_1 = \prod_{m=1}^{M}[0, r_m^{\max}]$ and $I_{2^M} = \prod_{m=1}^{M}[r_m^{\min}, +\infty)]$ respectively. With this choice, the first branch of S is defined on I_1 whereas the last branch of S is defined on I_{2^M} (see Fig. A.1(b)).

Finally a more compact representation of the CM can be used obtained projecting S in the $(r_1, r_2, \ldots, r_M)$-space resulting in a one dimensional parametric curve in $\mathbb{R}^{+M}$. The intersection of this curve with D defines the stable zone of the CM which can be decomposed as successive branches, one branch by subset I_k named hereafter S_k. The first branch S_1 starts at origin of $\mathbb{R}^{+M}$ denotes $\mathbf{b}_1^1 = \mathbf{0}$ and ends at the fold point $\mathbf{b}_1^2 = \mathbf{f}^{\mathrm{ma},\bar{m}}$ where $\bar{m} = \mathrm{argmin}_{1\leq m\leq M} r_m^{\max}$ (i.e $\bar{m}$ is the subscript value at which $r_m^{\max}$ is minimal). The last branch S_{2^M} starts at the fold point $\mathbf{b}_{2^M}^1 = \mathbf{f}^{\mathrm{mi},\bar{m}}$ where $\bar{m} = \mathrm{argmax}_{1\leq m\leq M} r_m^{\min}$ (i.e $\bar{m}$ is the subscript value at which $r_m^{\min}$ is maximal) and it is unbounded (i.e $\mathbf{b}_{2^M}^2 = \infty$). The other branches S_k are ended by two fold points defined by $\mathbf{b}_k^1 = \mathbf{f}^{\mathrm{mi},\bar{m}}$ where $\bar{m} = \mathrm{argmax}_{m\in C_k^c} r_m^{\min}$ and $\mathbf{b}_k^2 = \mathbf{f}^{\mathrm{ma},\bar{m}}$ where $\bar{m} = \mathrm{argmin}_{m\in C_k} r_m^{\max}$. Note that for each of the points $\mathbf{b}_k^1$ and $\mathbf{b}_k^2$ (except for $\mathbf{b}_1^1$ and $\mathbf{b}_{2^M}^2$) we can also associated the arrival points (following the jump) named $\mathbf{a}_k^1$ and $\mathbf{a}_k^2$ defined by $\mathbf{a}_k^1 = \mathbf{j}^{\mathrm{ma},\bar{m}}$ and $\mathbf{a}_k^2 = \mathbf{j}^{\mathrm{mi},\bar{m}}$ with the corresponding value of $\bar{m}$.

Such a multi-S-shape of the critical manifold S provides a possibility for relaxation oscillations [86] of the slow-flow characterized by fast transitions (jumps) of the dynamics during each cycle (the possible fast transitions between the two stable branches of S are denoted by arrows in Fig. A.2). Because several NESs are considered, complex relaxation oscillations scenarios may be contemplated. Such relaxation oscillations of the slow-flow explain the existence of *Strongly Modulated Responses* [75, 78, 188] (SMRs) of the non-averaged system (A.26).

We proceed to a more detailed analysis of the possible steady-state regimes in next section computing fixed points of the slow-flow and their stability.

A.3.4 The fixed points of the slow-flow

Following the Geometric Singular Perturbation Theory (GSPT) [54, 62, 107], the nontrivial fixed points of the slow-flow (A.31) can be approximated computing the fixed points of Eq. (A.39).

Substituting first Eq. (E.48a) with $n = 1$ (any $n \in [1,\ M]$ can be chosen) into Eq. (A.39a) , we obtain

$$\frac{1}{2\sqrt{H_1(r_1)}}\frac{dH_1}{dx}(r_1)\ r_1' = \mathcal{F}\left(\sqrt{H_1(r_1)}, r_1, \ldots, r_M, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_M\right) \tag{A.60}$$

which can be rewritten, substituting Eq. (A.45b) into the resulting equation, as

$$\frac{dH_1}{dx}(r_1)\ r_1' = f_{r_1}(r_1, \ldots, r_M), \tag{A.61}$$

where

$$f_{r_1}(r_1, \ldots, r_M) = 2\sqrt{H_1(r_1)}\mathcal{F}\left(\sqrt{H_1(r_1)}, r_1, \ldots, r_M, -\arg(F_1(r_1)), \ldots, -\arg(F_M(r_M))\right). \tag{A.62}$$

The function f_{r_1} will be explicitly given here after. Note that f_{r_1} is a function of a real variable (here r_1) because all variables r_n (with $n \in [2, M]$) are linked to r_1 ($H_n(r_n) = H_1(r_1)$, see Eq. (E.48a)).

From Eq. (B.40), it is possible to detect *fixed points* as

$$f_{r_1}(r_1, \ldots, r_M) = 0,\ H_m(r_m) = H_1(r_1) \quad (m = 2, \ldots, M) \tag{A.63a}$$

$$\frac{dH_1}{dx}(r_1) \neq 0 \tag{A.63b}$$

and *folded singularities* as

$$f_{r_1}(r_1, \ldots, r_M) = 0,\ H_m(r_m) = H_1(r_1) \quad (m = 2, \ldots, M) \tag{A.64a}$$

$$\frac{dH_1}{dx}(r_1) = 0. \tag{A.64b}$$

Folded singularities correspond to situations for which fixed points and fold points coincide, they are hints of possible *canard explosions* [16].

The remaining of the section is dedicated to the analysis of the fixed points which, for $0 < \epsilon \ll 1$, are assumed to be the fixed points of (A.35).

Combining Eq. (A.62) with Eqs. (E.48), Eqs. (A.43) and Eq. (A.46), and using the notations introduced Eq. (A.32b), the function f_{r_1} reduces to

$$f_{r_1}(r_1, \ldots, r_M) = 2\left(A_0^R + A_1^R H_1(r_1)^2\right)H_1(r_1) + 2\sum_m^M r_m^2\left(A_{1_m}^R R_m(r_m) + A_{1_m}^I I_m(r_m)\right), \tag{A.65}$$

with $A_0 = A_0^R + jA_0^I$, $A_1 = A_1^R + jA_1^I$ and $A_{1_m} = A_{1_m}^R + jA_{1_m}^I$ where A_{1_m} is the m-component of the vector $\mathbf{A}_1$.

Hence, finding the fixed points of Eq. (A.35) goes back to find the roots of

$$(A_0^R + A_1^R H_1(r_1)^2)H_1(r_1) + \sum_m^M r_m^2 \left(A_{1_m}^R R_m(r_m) + A_{1_m}^I I_m(r_m)\right) = 0 \tag{A.66a}$$

$$H_m(r_m) - H_1(r_1) = 0, \quad (m = 2, \ldots, M), \tag{A.66b}$$

which can be easily solved with a regular computer (at least until $N \approx 5$ or 6).

To check the stability of a fixed point (denoted $\mathbf{r}^* = (r_1^*, \ldots, r_N^*)$), Eq. (B.40) is written as

$$\frac{\partial r_1}{\partial \tau} = f(r_1, \ldots, r_N), \tag{A.67}$$

where

$$f(r_1, \ldots, r_N) = \frac{2\left(A_0^R + A_1^R H_1(r_1)^2\right) H_1(r_1) + 2\sum_m^M r_m^2 \left(A_{1_m}^R R_m(r_m) + A_{1_m}^I I_m(r_m)\right)}{\frac{dH_1}{dx}(r_1)}, \tag{A.68}$$

and the stability is deduced from the sign of $\frac{df}{dr_1}\Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}^*}$ where, using Eq. (A.66b), $\frac{df}{dr_1}\Big|_{\mathbf{r}}$ takes the form

$$\frac{df}{dr_1}\Big|_{\mathbf{r}} = \frac{\partial f}{\partial r_1}(\mathbf{r}) + \sum_{m=2}^M \frac{\partial f}{\partial r_m}(\mathbf{r}) \frac{dr_m}{dr_1} \tag{A.69a}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial r_1}(\mathbf{r}) + \sum_{n=2}^M \frac{\partial f}{\partial r_m}(\mathbf{r}) \frac{\frac{dH_1}{dx}(r_1)}{\frac{dH_m}{dx}(r_m)}. \tag{A.69b}$$

Moreover, to be stable a fixed point must be on a stable branch of the critical manifold S.

Finally, a fixed point $\mathbf{r}^* = (r_1^*, \ldots, r_M^*)$ of Eq. (B.40) is **stable** if the two following conditions are satisfied

1. $\left.\frac{df}{dr_1}\right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}^*} < 0$,
2. $\forall m,\ 1 \leq m \leq M,\ r_m^* \in [0\ r_m^{max}] \cup [r_m^{min}\ +\infty)$.

A stable (respectively unstable) fixed point is denoted $\mathbf{r}_\mathbf{s}^* = (r_{s,1}^*, \ldots, r_{s,M}^*)$ (respectively $\mathbf{r}_\mathbf{u}^* = (r_{u,1}^*, \ldots, r_{u,M}^*)$).

Finally, each fixed point (stable or unstable) as a point of S is a part of one of branches S_k.

A.3.5 Prediction of the steady-state regimes

As discussed for example in [a7, a14, 75, 78, 123] when a NES is coupled to an unstable system, four types of steady-state regimes can be generated corresponding to a complete suppression of the instability, mitigation through Periodic Response (PR), mitigation through Strongly Modulated Response (SMR) or no mitigation. Complete suppression means that the trivial fixed point, common to both the non-averaged system and the slow-flow, is stable. Mitigation through PR means that a stable (nontrivial) fixed point of the slow-flow is reached leading, for non-averaged system, to a LCO with an amplitude smaller than the amplitude of the corresponding LCO undergone by the primary system without absorbers. Mitigation through SMR means that the slow-flow undergoes relaxation oscillations corresponding to a phase-amplitude modulated regime for the non-averaged system, the so-called "Strongly modulated response". Finally no mitigation means that the NESs are not able to mitigate the instability and the non-averaged system saturates on a LCO which has an amplitude close to that of the case without NES. Regarding the slow-flow, it reaches a stable fixed point with large amplitude with respect to the variable s. This stable fixed point denoted $\mathbf{r}_\mathbf{s}^{*\mathbf{m}}$ corresponds to the stable fixed point at which the amplitude with respect to the variable s is maximized. This stable fixed point is positioned in the branch S_{2^M}.

As proposed in [a7], these regimes can also be classified into two groups named harmless situation and harmful situation reflecting the situations in which the NESs act or not. Harmless situation includes complete suppression, mitigation through PR and mitigation through SMR regimes. Harmful situation corresponds to no mitigation regime. The main objective of NESs is to put the system in harmless situations.

The nature of the steady-state regime depends on some features of the slow-flow. Firstly, the initial conditions from which one can know where the fast dynamics leads the system trajectory on the critical

manifold. Secondly, the slow subsystem (A.39), in particular its fixed points (position and stability), which guides the dynamics on S at the slow time scale. In accordance with real word situations, the following prediction is limited to a set of initial conditions $[s(0), r_1(0), \ldots, r_N(0)]$ as a small perturbation of the trivial solution.

To predict the steady-state regimes, we have the CM S, the stable domain D of S in terms of the Cartesian products I_k and the associated branches S_k in the $(r_1, \ldots, r_M)$-space with the corresponding bounds $\mathbf{b}_k^1$ and $\mathbf{b}_k^2$ (which are fold points) and the associated arrival points $\mathbf{a}_k^1$ and $\mathbf{a}_k^2$. We have also the stable fixed points $\mathbf{r}_s^*$ and unstable fixed points $\mathbf{r}_u^*$ which are positioned in the corresponding branches S_k. Note that the bound point $\mathbf{b}_1^1$ is the trivial equilibrium of the system.

Recalling the two subsystems (A.38) and (A.39), the trajectory of the system is a succession of slow (given by (A.38)) and fast (given by (A.39)) parts. The slow parts lead in S whereas the fast parts are jump occurring out of S between two points of S.

From a given initial condition, after a first fast transient response (a jump), the trajectory reaches the critical manifold S on the branch $b_1 = S_1$ at the point $\mathbf{p}_1$.

We assume that we are at the end of the step l of the procedure i.e on the branch $b_l = S_{k_l}$ at the (arrival) point $\mathbf{p}_l$.

The step $l+1$ (from l to $l+1$) reads as follows.

The trajectory follows $b_l = S_{k_l}$ slowly starting form $\mathbf{p}_l$ and the following cases are possibles :

Case 1. There are no fixed points in S_{k_l}, then, depending of the sign of the function $f(r_1, \ldots, r_N)|_{\mathbf{r}=\mathbf{p}_l}$ (see Eq. (A.67)), $\mathbf{b}_{k_l}^1$ or $\mathbf{b}_{k_l}^2$ are reached, the trajectory leaves S_{k_l} jumping to the arrival point $\mathbf{p}_{l+1} = \mathbf{a}_{k_l}^1$ (or $\mathbf{a}_{k_l}^2$) on an other branch $S_{\bar{k}}$ given $k_{l+1} = \bar{k}$ and $b_{l+1} = S_{\bar{k}}$.

Case 2. The arrival point $\mathbf{p}_l$ is between an unstable fixed point and $\mathbf{b}_{k_l}^1$ (resp. $\mathbf{b}_{k_l}^2$), then $\mathbf{b}_{k_l}^1$ (resp. $\mathbf{b}_{k_l}^2$) is reached, the trajectory leaves S_{k_l} jumping to the arrival point $\mathbf{p}_{l+1} = \mathbf{a}_{k_l}^1$ (resp. $\mathbf{a}_{k_l}^2$) on an other branch $S_{\bar{k}}$ given $k_{l+1} = \bar{k}$ and $b_{l+1} = S_{\bar{k}}$.

Case 3. The arrival point $\mathbf{p}_l$ is between an stable fixed point and $\mathbf{b}_{k_l}^1$ (resp. $\mathbf{b}_{k_l}^2$), then the stable fixed point is reached and the procedure stops.

Case 4. The arrival point $\mathbf{p}_l$ is between an stable fixed point and unstable fixed point, then the stable fixed point is reached and the procedure stops.

At the end of step $l+1$, if the trajectory reaches a new branch b_{l+1} at the point $\mathbf{p}_{l+1}$ a new step can be performed.

The procedure stops when one of the following conditions are meet resulting in harmless or harmful situations :

- The system is in a **harmless situation** if
  - During a step, the trajectory stops on a stable fixed point which differs from $\mathbf{r}_\mathbf{s}^{*\mathbf{m}}$ ($\in S_{2^M}$) resulting to a Mitigation through Periodic Response (Cases 3 or 4).
  - At each step, the trajectory reaches a new branch. Due to the finite number of branch S_k, the trajectory will reach the same branch in the same condition resulting to a Mitigation through Strongly Modulated Response (SMR) (Cases 1 or 2).
- The system is in a **harmful situation** if the trajectory stops on the stable fixed point $\mathbf{r}_\mathbf{s}^{*\mathbf{m}}$ ($\in S_{2^M}$). Indeed, in this case, the reached fixed point has a large amplitude close to that of the case without NES.

Using the notion of harmless and harmful situation, the concept of **mitigation limit** of the system can be introduced. For a given parameter of the system named "bifurcation parameter", the mitigation limit is defined as the value of a chosen bifurcation parameter which separates harmful situation from harmless situation.

From a given set of parameters, the procedure described hereinbefore gives a theoretical prediction of the resulting steady-state regime and therefore allows to know if the system is a harmless or harmful situation. Consequently, the mitigation limit can be predicted theoretically as the first value of the chosen bifurcation parameter for which harmfull situation holds.

A.4 Applications

Two self-excited mechanical systems are used in this section to check the relevance of the analytical procedure proposed in Sect. A.3.5. The first one is the well-known Hultén's model [102] which reproduces the typical dynamic behavior of friction systems. The second one is a 2-DOF nonlinear airfoil model. It has been already used by Lee et al in [123].

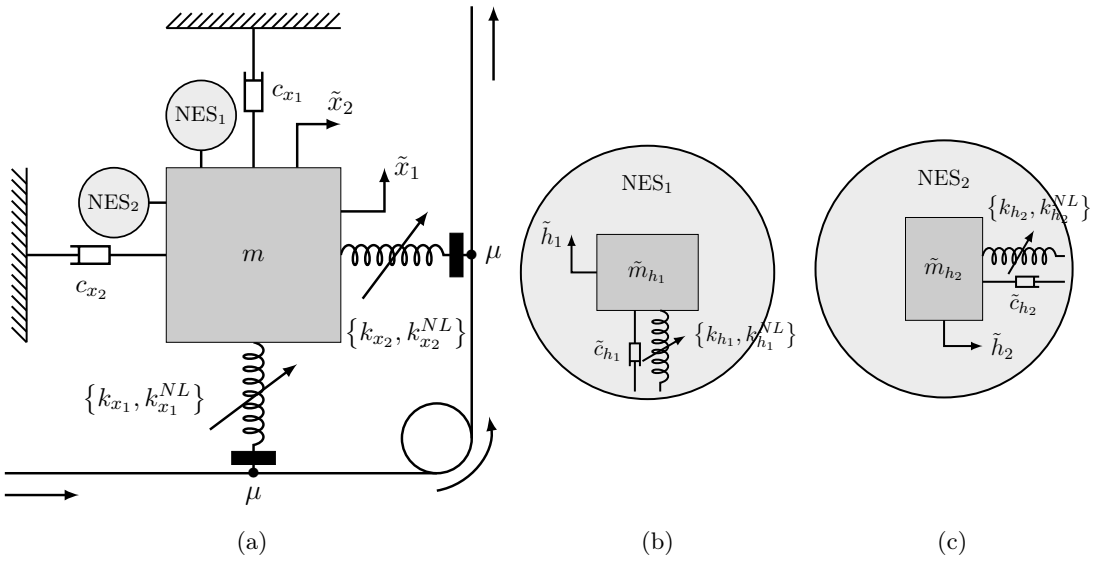


Figure A.3. (a) Hultèn's model with two NES. (b) Zoom on the NES_1. (c) Zoom on the NES_2.

A.4.1 Mode coupling instability mitigation in a friction system using two NESs

The system is shown in Fig. F.1. It is composed of a 2-DOFs Hultèn's model (the primary system) coupled to two NESs in ungrounded configuration. This model has already been considered in [a14] where it was shown that the use of NES appears to be an interesting way to control mode-coupling instability in braking systems. The objective here is to verify that the method presented here allows us to distinguish between strongly modulated responses and no mitigation responses, the method in [a14] being not able to make this distinction in all the cases.

Following Sect. D.2.1, the equations of motion of the system take the form (see B.6)

$$x_1'' + \zeta_{x_1} x_1' + x_1 - \mu\Omega^2 x_2 + \epsilon\left(\xi_{x_1} x_1^3 - \mu\xi_{x_2} x_2^3\right) + \epsilon m_{h_1} h_1'' = 0 \tag{A.70a}$$

$$x_2'' + \zeta_{x_2} x_1' + \Omega^2 x_2 + \mu x_1 + \epsilon\left(\mu\xi_{x_1} x_1^3 + \xi_{x_2} x_2^3\right) + \epsilon m_{h_2} h_2'' = 0 \tag{A.70b}$$

$$h_m'' - \gamma_{h_m}\left(x_m' - h_m'\right) - \alpha_{h_m}\left(x_m - h_m\right)^3 = 0 \quad (m = 1, 2) \tag{A.70c}$$

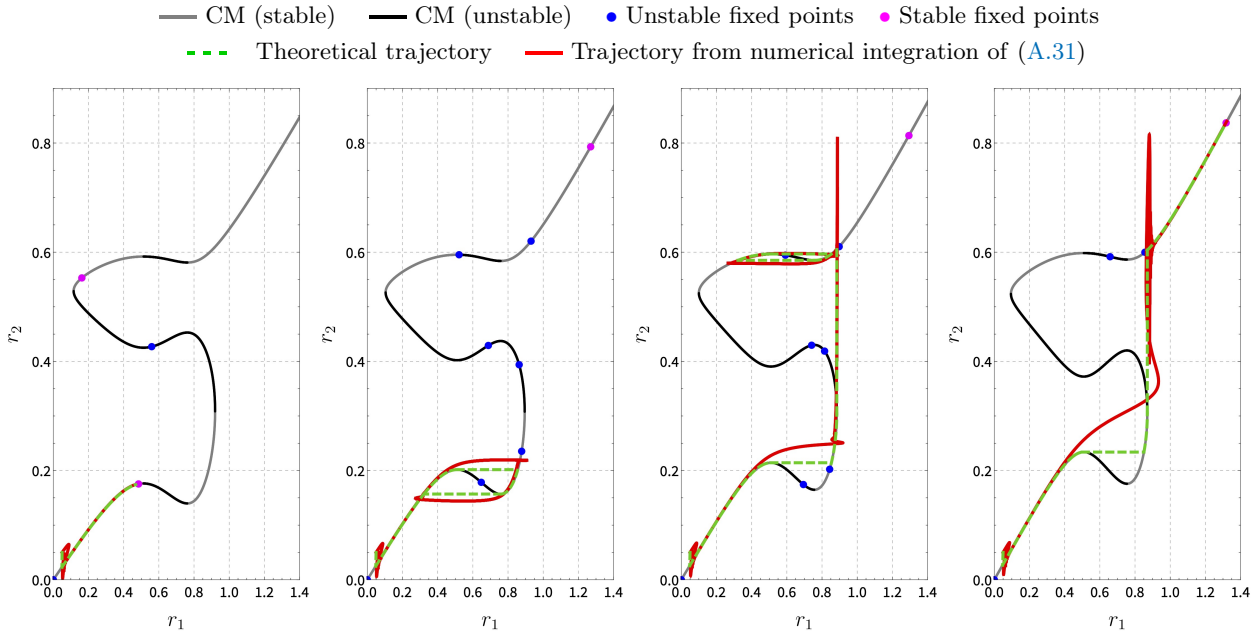
where Eqs. (A.70) correspond to Eqs. (D.3). The corresponding Eqs. (D.5) and Eqs. (D.10) hereafter referred indistinctly as the Reference Model can be easily deduced as well as the slow-flow model corresponding to Eqs. (A.31).

The bifurcation parameter under consideration throughout this section is the friction coefficient μ. The following set of numerical values are used, for the other parameters : $\xi_{x_1} = 5$, $\xi_{x_2} = 0$, $\zeta_{x_1} = 0.01$, $\zeta_{x_2} = 0.08$ and $\Omega = 0.9$ for the primary system, and $\gamma_{h_1} = 0.75$, $\gamma_{h_2} = 0.2$, $\alpha_{h_1} = 4$ and $\alpha_{h_2} = 9$ for the NESs. Moreover, $m_{h_1} = m_{h_2} = 2$ and several values for ϵ will be considered.

This set of numerical values leads to a Hopf bifurcation for the Hultèn's model without NESs at $\mu_{\text{Hopf}}^{\text{wo}} = 0.073$. If $\mu < \mu_{\text{Hopf}}^{\text{wo}}$ the system is stable and if $\mu > \mu_{\text{Hopf}}^{\text{wo}}$ the system is unstable. In the latter case, the model variables increase and reach a LCO due to the nonlinear terms. The LCOs are what we call "harmful situations", i.e. the large amplitude vibrations we want to mitigate using the two NESs. Here we focus on the possible mitigation regimes which can appear when the primary system is unstable.

First of all, the procedure described in Sect. A.3.5 for the prediction of the trajectory of the slow-flow in the (r_1, r_2)-space is illustrated in Fig. A.4 for $\epsilon = 2 \cdot 10^{-3}$ and four values of the bifurcation parameter μ (friction coefficient). The CM S, computed from (A.47) and (A.52), is depicted with their stable parts (in gray), , i.e. the S_k (with $k = 1, \ldots, 2^M = 4$), and unstable parts (in black). The stable and unstable fixed points, computed from (B.43) and (A.69), are represented by magenta and blue points respectively. We can see in Figs. A.4(b) to A.4(d) a stable fixed point with a large value on the unbounded straight line (i.e. $S_{2^M} = S_4$). The latter corresponds to a large amplitude LCO mentioned above, if it is reached, we are in a harmful situations.

Following the procedure (as described in Sect. A.3.5) the theoretical trajectory of the slow-flow is determined and plotted with a dashed green line. This theoretical trajectory is compared to the trajectory obtained from the direct numerical integration of the slow-flow (plotted in red). The Fig. A.4(a) shows an harmless situation through a periodic regime, i.e. a stable fixed point of the slow-flow (in magenta) which is not in S_4



(a) $\mu = 0.81$ (b) $\mu = 0.88$ (c) $\mu = 0.91$ (d) $\mu = 0.95$

Figure A.4. Critical manifold in the (r_1, r_2)-space defined through Eq. (E.32) together with theoretical and numerical trajectories of the slow-flow (A.31). Selected parameter values with $\epsilon = 2 \cdot 10^{-3}$.

(here it is in S_1) is reached. In this case, the theoretical and numerical trajectories of the slow are almost superimposed. In Figs. A.4(b) and A.4(c) again harmless situations are depicted but through SMRs. Indeed, two different scenarios of relaxation oscillations of the slow-flow in r_1-direction are observed. Finally, because a stable fixed point is reached in S_4, the Fig. A.4(d) corresponds to an harmful situation. One can see that for the last three situations (i.e Figs. A.4(b), A.4(c) and A.4(d)), during the slow epochs on S the theoretical and numerical trajectories of the slow-flow are again almost superimposed. However, during fast epochs (i.e. the jumps between each slow epoch) a difference is observed. In particular, unlike the theoretical trajectory, the numerical trajectory is not at each jump parallel to only one direction of the (r_1, r_2)-space. This difference is due to the 0-order approximation of the proposed asymptotic approach. Indeed, figures similar to Fig. A.4 using $\epsilon = 10^{-4}$ would show a perfect agreement between theoretical and numerical trajectories.

In addition, Fig. A.5 shows the direct numerical integration of the Reference Model (solid blue line) and of the slow-flow (red line) for situations corresponding to Figs. A.4(c) and A.4(d). In Fig. A.5(a), we can see that only $w_1(t)$ is a strongly amplitude modulated signal (i.e. SMR) which corresponds effectively to relaxation oscillations of the slow-flow in the r_1-direction. A large amplitude periodic regime (which is a harmful situation) corresponding to a large stable fixed point of the slow-flow is observed for the reference model signals in Fig. A.5(b).

Now, the relevance of the theoretical estimation of the trajectory with respect to the parameter ϵ is investigated. The comparison is first performed in term of the mitigation limit. For this purpose, the following quantities are defined :

- $\mu_{\text{ml}}^{\text{th}}$: the theoretical value of the mitigation limit,
- $\mu_{\text{ml,SF}}^{\text{num}}$: the numerical estimation of the mitigation limit "measured" on the graphs of the maximum steady-state amplitude obtained from numerical simulations of the slow-flow,
- $\mu_{\text{ml,RM}}^{\text{num}}$: the numerical estimation of the mitigation limit "measured" on the graphs of the maximum steady-state amplitude obtained from numerical simulations of the Reference Model.

Then the comparison is completed checking the differences in term of NES efficiency rate, denoted Λ (in %) and defined as the relative difference between the mitigation limit and the Hopf bifurcation point of the airfoil model without NES

$$\Lambda_{\text{ml}}^{\text{th}} = 100 \times \frac{\mu_{\text{ml}}^{\text{th}} - \mu_{\text{Hopf}}^{\text{wo}}}{\mu_{\text{Hopf}}^{\text{wo}}}, \tag{A.71a}$$

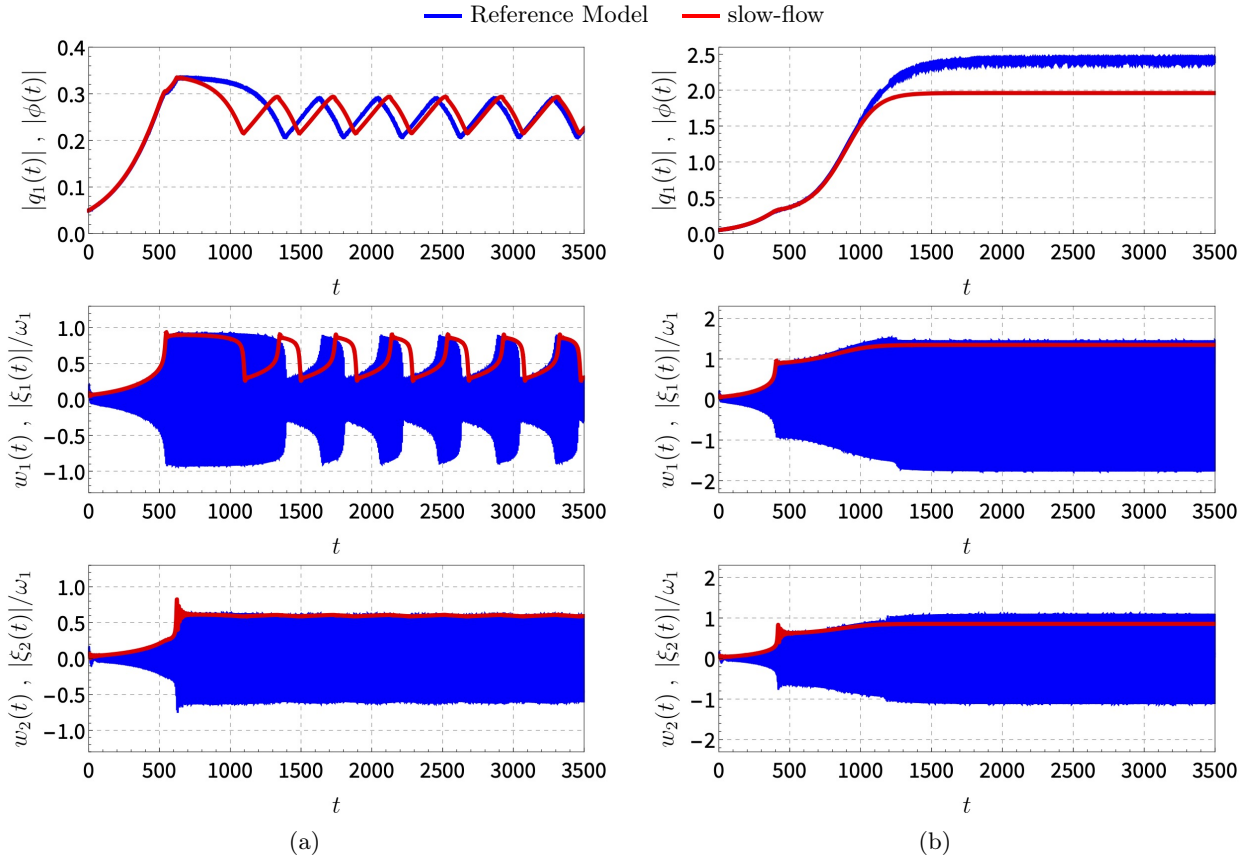


Figure A.5. Direct numerical integration of the Reference Model (solid blue line) and of the slow-flow (red dashed line). Parameters : the same as those used for (a) Fig. A.4(c) and (b) Fig. A.4(d).

$$\Lambda^{\text{num}}_{\text{ml,SF}} = 100 \times \frac{\mu^{\text{num}}_{\text{ml,SF}} - \mu^{\text{wo}}_{\text{Hopf}}}{\mu^{\text{wo}}_{\text{Hopf}}} \tag{A.71b}$$

$$\Lambda^{\text{num}}_{\text{ml,RM}} = 100 \times \frac{\mu^{\text{num}}_{\text{ml,SRM}} - \mu^{\text{wo}}_{\text{Hopf}}}{\mu^{\text{wo}}_{\text{Hopf}}}. \tag{A.71c}$$

This quantity gives indeed a direct estimation of the efficiency of the NESs : the larger it is, the more efficient the NESs network is.

The results of the comparison are reported Tab. A.1. One can observe that the mitigation limits obtained from numerical simulations of the slow-flow and of the reference model are very close. Moreover, the comparison between theoretical and numerical values shows a good agreement. Indeed, a difference of the order of magnitude of ϵ is observed. However, in term of NES efficiency rate, we can see that in efficient situations (i.e. $\epsilon = 2 \cdot 10^{-2}$) the theoretical prediction can lead to a relatively large overestimation (a relative error of 16.28 %). As previously, these overestimations are due to the 0-order approximation of the asymptotic approach presented in Sect. A.3. This could be reduced by considering larger orders of approximation.

A.4.2 Flutter mitigation in an airfoil system using M NESs

The system is shown in Fig. D.3. It is composed by a 2-DOF nonlinear airfoil model coupled to M NESs. Following Sect. D.2.1, the equations of motion of the system take the form (see A.7)

$$x'' + s_\varphi \varphi'' + \Omega^2 x + \epsilon \xi_x x^3 + \zeta_x x' + \mu \Lambda \Theta \left(\Theta \varphi + x'\right) + \epsilon \sum_{m=1}^{M} m_{h_m} h''_m = 0 \tag{A.72a}$$

$$r_\varphi^2 \varphi'' + s_\varphi x'' + r_\varphi^2 \varphi + \epsilon \xi_\varphi \varphi^3 + \zeta_\varphi \varphi' - \eta \mu \Lambda \Theta \left(\Theta \varphi + x'\right) + \epsilon \sum_{m=1}^{M} \delta_m m_{h_m} h''_m = 0 \tag{A.72b}$$

$$h''_m + \gamma_{h_m} \left(\delta_m \varphi' + h'_m - x'\right) + \alpha_{h_m} \left(\delta_m \varphi + h_m - x\right)^3 = 0 \quad (m = 1, \ldots, M) \tag{A.72c}$$

Tableau A.1. Comparison between numerical and theoretical estimations of the mitigation limit and the NES efficiency rate for several values of the little parameter ϵ.

		ϵ		
		$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-2}$
Mitigation limit	$\mu_{\text{ml}}^{\text{th}}$ $\mu_{\text{ml,SF}}^{\text{num}}$ $\mu_{\text{ml,RM}}^{\text{num}}$	0.07553 0.07546 0.07543	0.0929 0.0918 0.0917	0.173 0.162 0.159
NES efficiency rate	$\Lambda_{\text{ml}}^{\text{th}}$ $\Lambda_{\text{ml,SF}}^{\text{num}}$ $\Lambda_{\text{ml,RM}}^{\text{num}}$	3.47 3.47 3.47	27,26 25,75 25,62	136.99 121.92 117.81
Relative error	$100 \times \dfrac{\Lambda_{\text{ml}}^{\text{th}} - \Lambda_{\text{ml,RM}}^{\text{num}}}{\Lambda_{\text{ml,RM}}^{\text{num}}}$	4.2 %	6.4 %	16.28 %

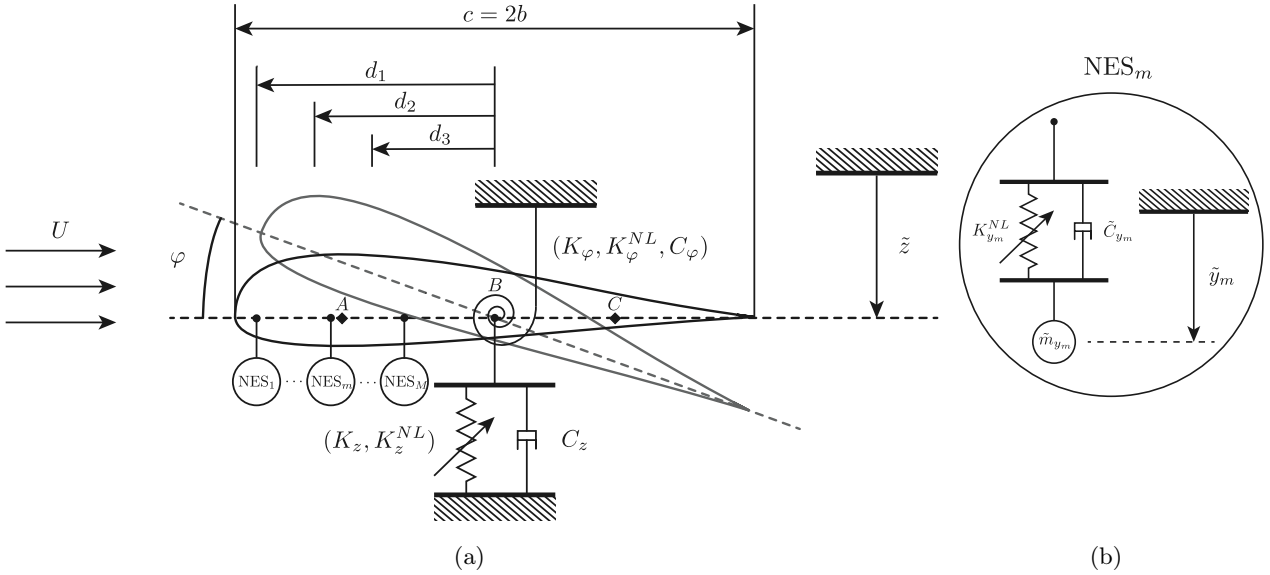


Figure A.6. (a) Sketch of the two DOFs airfoil (primary system) coupled to three one-DOF NESs. (b) Zoom on the $m-$th NES (with $m = 1, \ldots, M$).

where, similarly as in Sect. A.4.1, Eqs. (A.72) correspond to Eqs. (D.3) and the corresponding Eqs. (D.5) and Eqs. (D.10) hereafter referred indistinctly as the Reference Model can be easily deduced as well as the slow-flow model corresponding to Eqs. (A.31).

The bifurcation parameter under consideration is now the reduced speed of the flow Θ.

In the first instance, a model with three NESs ($M = 3$) is considered and we use the following parameters of the primary system : $\xi_x = 1$, $\xi_\varphi = 1$, $\zeta_x = 0.01$, $\zeta_\varphi = 0.01$, $s_\varphi = 0.2$, $r_\varphi = 0.5$, $\Omega = 0.5$, $\eta = 0$, $\Lambda = 2\pi$ and $\mu = 1/(10\pi)$. Two sets of NESs parameters are used, hereafter referred as configuration 1 and configuration 2. The configuration 1 is defined with $\gamma_{h_1} = 0.4$, $\gamma_{h_2} = 0.3$, $\gamma_{h_3} = 0.2$, $\alpha_{h_1} = 7$, $\alpha_{h_2} = 6$, $\alpha_{h_3} = 6$, $\delta_1 = -0.9$, $\delta_2 = -0.8$ and $\delta_3 = -0.7$ which considers almost identical NESs. The configuration 2 is defined with $\gamma_{h_1} = 0.35$, $\gamma_{h_2} = 0.3$, $\gamma_{h_3} = 0.25$, $\alpha_{h_1} = 7$, $\alpha_{h_2} = 6$, $\alpha_{h_3} = 1$, $\delta_1 = -0.9$, $\delta_2 = -0.85$ and $\delta_3 = -0.8$ where the third NES has a small cubic stiffness compared to those of other NESs. Moreover, for both configurations $m_{h_1} = m_{h_2} = m_{h_3} = 1$ and several values for ϵ will be considered.

With this set of numerical values, the airfoil model (i.e. the primary system) undergoes an Hopf bifurcation at $\Theta_{\text{Hopf}}^{\text{wo}} = 0.933$ due to a mode coalescence phenomenon. If $\Theta < \Theta_{\text{Hopf}}^{\text{wo}}$ the system is stable and if $\Theta > \Theta_{\text{Hopf}}^{\text{wo}}$ the system is unstable. As previously, in unstable situations, the system reaches an harmful LCO we want to mitigate using the three NESs. We focus again on the possible mitigation regimes which can occur when the primary system is unstable.

First, in the Fig. A.7 the CM S, computed from (A.47) and (A.52), is depicted in the (r_1, r_2, r_3)-space with their stable parts (in gray), i.e. the S_k (with $k = 1, \ldots, 2^M = 8$), and unstable parts (in black). The

stable and unstable fixed points, computed from (B.43) and (A.69), are again represented by magenta ans blue points respectively. We can see in each of the four figures a stable fixed point with a large value on the unbounded straight line (i.e. $S_{2^M} = S_8$). As in Fig. A.4, this fixed point corresponds to a large amplitude LCO and if it is reached, we are in a harmful situations.

The theoretical trajectory of the slow-flow is determined for the four values of the bifurcation parameters Θ (in green) and compared to the trajectory obtained from the numerical simulation of the slow-flow (in red). The Fig. A.7(a) shows an harmless situation through a periodic regime, i.e. a stable fixed point of the slow-flow (in magenta) which is not in S_8 (here it is in S_1) is reached. In Figs. A.7(b) and A.7(c) harmless situations through SMRs are shown. Indeed, relaxation oscillations of the slow-flow are observed with respect to r_1 in Fig. A.7(b) and to r_1 and r_2 in Fig. A.7(c). Finally, because a stable fixed point is reached in S_8, the Fig. A.7(d) corresponds to an harmful situation.

Similar observations as in Fig. A.4 can be expressed : (1) during the slow epochs on S the theoretical and numerical trajectories of the slow-flow are again almost superimposed and (2) due to the $0-$order approximation of the asymptotic approach, differences are observed during fast epochs. Indeed, in the latter case, unlike the theoretical trajectory, the numerical trajectory is not at each jump parallel to only one direction of the (r_1, r_2, r_3)-space. Again, figures similar to Fig. A.7 using $\epsilon = 10^{-4}$ would show a perfect agreement between theoretical and numerical trajectories.

The Fig. A.8 shows the direct numerical integration of the Reference Model (blue lines) and of the slow-flow (red lines) for situations corresponding to Figs. A.7(c) and A.7(d). In Fig. A.8(a), $w_1(t)$ and $w_2(t)$ are strongly amplitude modulated signals (i.e. SMRs) which corresponds to relaxation oscillations of the slow-flow in both r_1 and r_2 directions. A large (harmful) amplitude periodic regime corresponding to a large stable fixed point of the slow-flow is observed in Fig. A.8(b).

Now the theoretical value of the mitigation limit $\Theta^{\text{th}}_{\text{ml}}$ is compared to the numerical estimation of the mitigation limit "measured" on the graphs of the maximum steady-state amplitude obtained from numerical simulations of the slow-flow $\Theta^{\text{num}}_{\text{ml,SF}}$ and from numerical simulations of the Reference model $\Theta^{\text{num}}_{\text{ml,RM}}$.

Again, the comparison is also performed in term of NES efficiency rate Λ (in %), now defined with respect to the parameter Θ

$$\Lambda^{\text{th}}_{\text{ml}} = 100 \times \frac{\Theta^{\text{th}}_{\text{ml}} - \Theta^{\text{wo}}_{\text{Hopf}}}{\Theta^{\text{wo}}_{\text{Hopf}}}, \tag{A.73a}$$

$$\Lambda^{\text{num}}_{\text{ml,SF}} = 100 \times \frac{\Theta^{\text{num}}_{\text{ml,SF}} - \Theta^{\text{wo}}_{\text{Hopf}}}{\Theta^{\text{wo}}_{\text{Hopf}}} \tag{A.73b}$$

$$\Lambda^{\text{num}}_{\text{ml,RM}} = 100 \times \frac{\Theta^{\text{num}}_{\text{ml,SRM}} - \Theta^{\text{wo}}_{\text{Hopf}}}{\Theta^{\text{wo}}_{\text{Hopf}}}. \tag{A.73c}$$

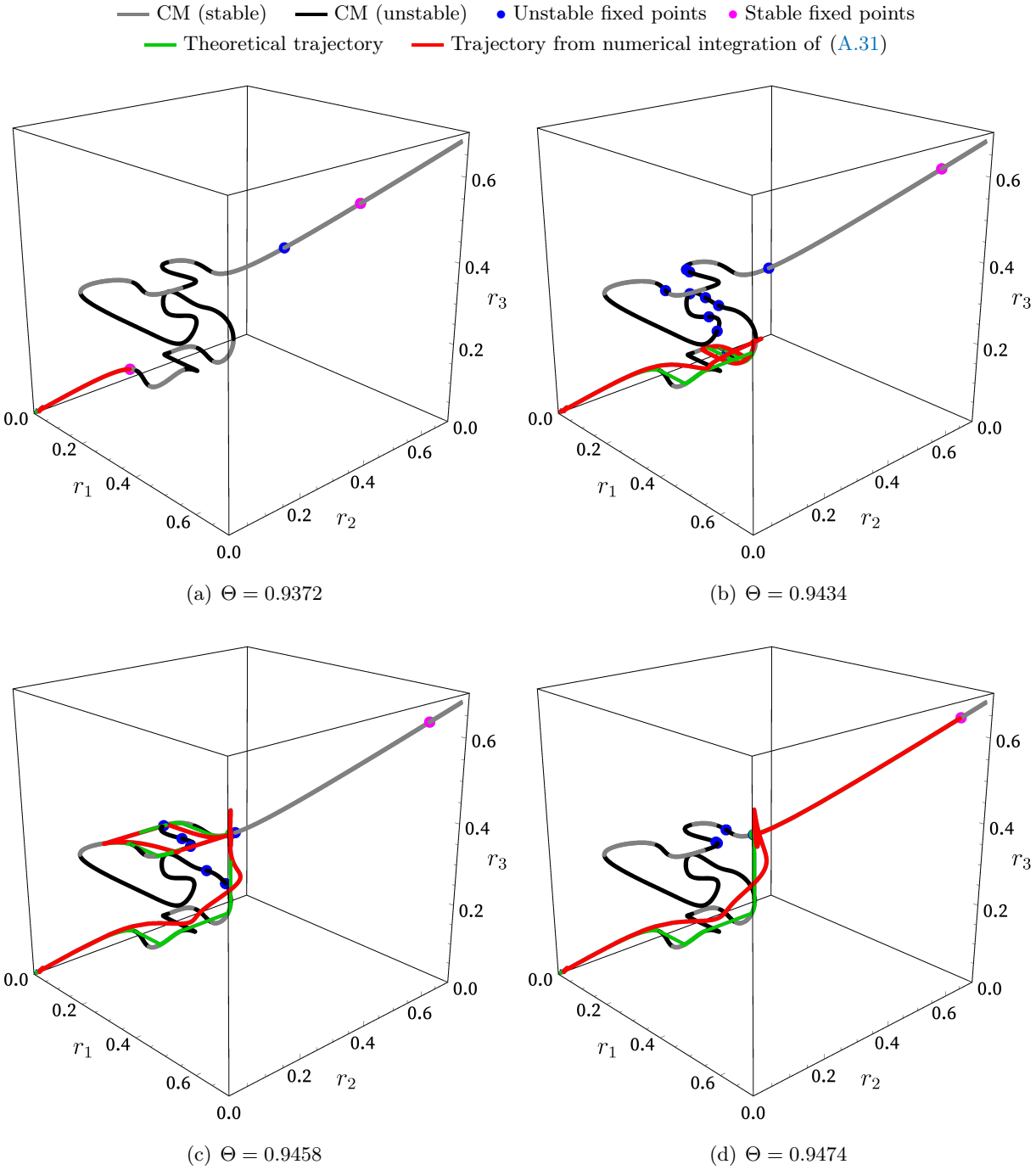
The comparison is presented in the Tab. A.2 for both configurations 1 and 2. Moreover, numerical bifurcation diagrams for the variables v_1 and v_2 (calculated from (A.10)) of the reference model are shown in Fig. A.9 (in red). The diagrams are compared to diagrams obtained for the primary system alone (in blue). Each of them is obtained from direct numerical integration of the corresponding system of equations and plotting the maximum steady-state amplitude, denoted A_{v_n} $(n = 1, 2)$, of each variable as functions of Θ.

Once more, similar conclusions as in Sect. A.4.1 can be made from Tab. A.2. Indeed, Tab. A.2(a) shows that the mitigation limits obtained from numerical simulations of the slow-flow and of the reference model are very close and a difference of the order of magnitude of ϵ is observed between theoretical and numerical values. In term of NES efficiency rate (see Tab. A.2(b)), we can see that in efficient situations (i.e. $\epsilon = 10^{-2}$) the theoretical prediction can lead to a relatively large overestimation of the NES efficiency rate, for the same reasons as above.

As a final step, the influence of the number of NESs is examined. The results are shown in Tab. A.3 in which the configuration 1 is considered for a number of NESs from $M = 1$ to $M = 4$. In the case of $M = 4$ a fourth NES is added with the following parameters : $\gamma_{h_4} = 0.1$, $\alpha_{h_4} = 6$ and $\delta_4 = 0.6$. We can see that the prediction is relatively robust with respect to number of NESs even if a global slight increase of the relative error between theoretical and numerical efficiency rates is observed when M increases.

A.5 Conclusion

In this paper, dynamic instability mitigation of a multi-DOF system using Nonlinear Energy Sinks (NESs) is considered. The steady-state regimes of the coupled system is classified into two categories depending on whether the dynamic instability is mitigated or not and therefore separating harmless situations from harmful



(a) $\Theta = 0.9372$

(b) $\Theta = 0.9434$

(c) $\Theta = 0.9458$

(d) $\Theta = 0.9474$

Figure A.7. Critical manifold in the (r_1, r_2, r_3)-space defined through Eq. (E.32) together with theoretical and numerical trajectories of the slow-flow (A.31). Configuration 1 is considered with $\epsilon = 10^{-3}$.

situations. The value of a chosen bifurcation parameter which separates harmless situations from harmful situations is called mitigation limit.

The prediction method of steady-state regimes has three main steps. The first step is the diagonalization of the primary system using the so-called biorthogonal transformation. Assuming a primary system with only one unstable mode the diagonalized system is reduced ignoring the stable modes and keeping only the unstable mode. The second step consists in applying the complexification-averaging method for the purposes of obtaining the slow-flow of the reduced system. It appears that the slow-flow is a slow-fast system. In light of that fact, in the third step, performing an asymptotic analysis using geometric singular perturbation theory of slow-fast systems, the critical manifold and the fixed points of the slow-flow are computed. The analysis shows that the critical manifold of the system can be reduced to a one dimensional parametric curve evolving

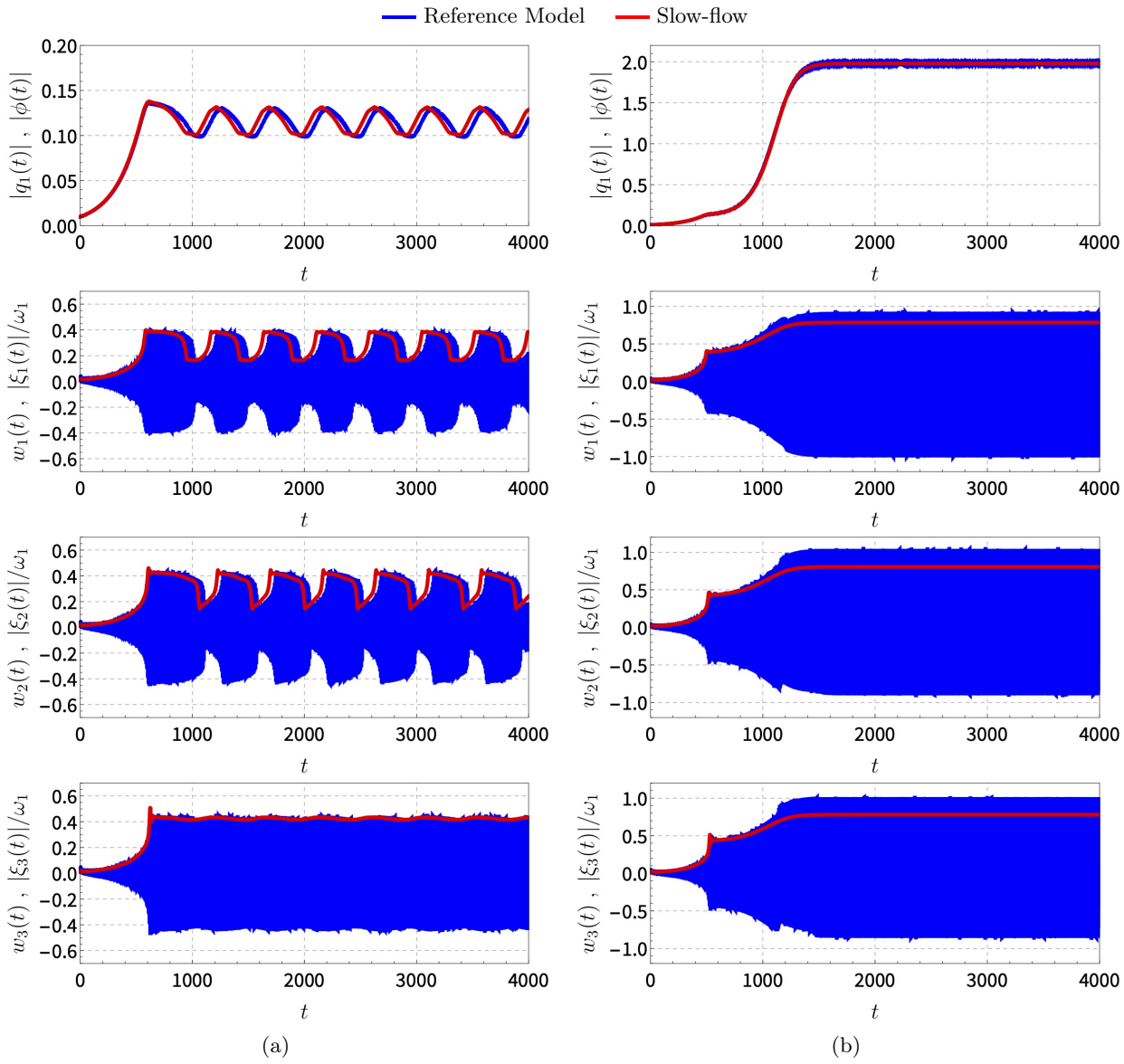


Figure A.8. Direct numerical integration of the Reference Model (solid blue line) and of the slow-flow (red line). Parameters : the same as those used for (a) Fig. A.7(c) and (b) Fig. A.7(d).

in a multidimensional space. The response regimes of the system (and therefore the mitigation limit of the NES setup) is predicted by locating attracting parts, repelling parts and fold points of the critical manifold together with position and stability properties of the fixed points of the slow-flow. It is worth noting that the number of NESs does not appear as a theoretical restriction of the prediction method.

Finally, the method is applied to the prediction of the mitigation limit of two self-excited mechanical systems coupled to a NES setup. The first one is the well-known Hultén's model which reproduces the typical dynamic behavior of friction systems (it can undergo mode coupling instabilities) and coupled to two ungrounded NESs. The second one is an airfoil model undergoing an aeroelastic instability and coupled to a multi-NES setup (up to four). Theoretical results are compared, for validation purposes, to direct numerical integration of the system. The comparison shows a good agreement and highlights the limits of the asymptotic approach.

As a perspective, a generalization of this analysis could be suitable in the case of a primary system undergoing a multi-instability, as can be seen in some finite element models of braking systems. Indeed, during the first step of the method, not only one but several unstable modes would be kept. However, as a result of the increase of the critical manifold dimension, the prediction of the steady-state regimes would require a more advanced mathematical procedure.

Tableau A.2. Comparison between numerical and theoretical estimations of (a) the mitigation limit and (b) the NES efficiency rate for several values of the little parameter ϵ.

(a)

		ϵ		
	Mitigation limit	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}
Configuration 1	$\Theta_{\text{ml}}^{\text{th}}$	0.93448	0.9471	1.057
	$\Theta_{\text{ml,SF}}^{\text{num}}$	0.93446	0.9460	1.021
	$\Theta_{\text{ml,RM}}^{\text{num}}$	0.93444	0.9459	1.020
Configuration 2	$\Theta_{\text{ml}}^{\text{th}}$	0.93430	0.9453	1.038
	$\Theta_{\text{ml,SF}}^{\text{num}}$	0.93428	0.9444	1.013
	$\Theta_{\text{ml,RM}}^{\text{num}}$	0.93426	0.9442	1.013

(b)

		ϵ		
	NES efficiency rate	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}
Configuration 1	$\Lambda_{\text{ml}}^{\text{th}}$	0.16	1.51	13.29
	$\Lambda_{\text{ml,SF}}^{\text{num}}$	0.16	1.39	9.43
	$\Lambda_{\text{ml,RM}}^{\text{num}}$	0.16	1.38	9.32
Configuration 2	$\Lambda_{\text{ml}}^{\text{th}}$	0.14	1.32	11.25
	$\Lambda_{\text{ml,SF}}^{\text{num}}$	0.14	1.22	8.57
	$\Lambda_{\text{ml,RM}}^{\text{num}}$	0.14	1.2	8.57

Tableau A.3. Comparison between numerical and theoretical estimations of the mitigation limit and the NES efficiency rate for several number of NESs attached on the airfoil for $\epsilon = 10^{-3}$. Configuration 1 is considered for a number of NESs from $M = 1$ to $M = 3$. In the case of $M = 4$, a fourth NES is added with the following parameters : $\gamma_{h_4} = 0.1$, $\alpha_{h_1} = 6$ and $\delta_3 = 0.7$.

		Number of NESs attached (M)			
		1	2	3	4
Mitigation limit	$\Theta_{\text{ml}}^{\text{th}}$	0.9392	0.9440	0.9471	0.9486
	$\Theta_{\text{ml,SF}}^{\text{num}}$	0.9389	0.9432	0.9460	0.9469
	$\Theta_{\text{ml,RM}}^{\text{num}}$	0.9388	0.9430	0.9459	0.9467
NES efficiency rate	$\Lambda_{\text{ml}}^{\text{th}}$	0.66	1.17	1.51	1.64
	$\Lambda_{\text{ml,SF}}^{\text{num}}$	0.63	1.08	1.39	1.47
	$\Lambda_{\text{ml,RM}}^{\text{num}}$	0.62	1.06	1.38	1.45
Relative error	$100 \times \dfrac{\Lambda_{\text{ml}}^{\text{th}} - \Lambda_{\text{ml,RM}}^{\text{num}}}{\Lambda_{\text{ml,RM}}^{\text{num}}}$	6.45 %	10.38 %	9.42 %	13.1 %

A.6 Appendix A. The nonlinear Hultèn's model with two NESs

The system is similar to the one used in [a14], it is composed of the nonlinear Hultèn's model [184] coupled to two ungrounded NESs with masses $\bar{m}_{h_m}$, linear stiffnesses k_{h_m}, damping coefficients $\tilde{c}_{h_m}$ and cubic stiffnesses $k_{h_m}^{NL}$ ($m = 1, 2$, see Fig. F.1). The motion equations of the system are

$$\begin{aligned} &\ddot{\tilde{x}}_1 + c_{x_1}\dot{\tilde{x}}_1 + k_{x_1}\tilde{x}_1 - \mu k_{x_2}\tilde{x}_2 + \epsilon\left(k_{x_1}^{NL}\tilde{x}_1^3 - \mu k_{x_2}^{NL}\tilde{x}_2^3\right) + \\ &\qquad \tilde{c}_{h_1}(\dot{\tilde{x}}_1 - \dot{\tilde{h}}_1) + k_{h_1}^{NL}(\tilde{x}_1 - \tilde{h}_1)^3 = 0 \qquad \text{(A.74a)} \\ &\ddot{\tilde{x}}_2 + c_{x_2}\dot{\tilde{x}}_2 + k_{x_2}\tilde{x}_2 + \mu k_{x_1}\tilde{x}_1 + \epsilon\left(\mu k_{x_1}^{NL}\tilde{x}_1^3 + k_{x_2}^{NL}\tilde{x}_2^3\right) + \end{aligned}$$

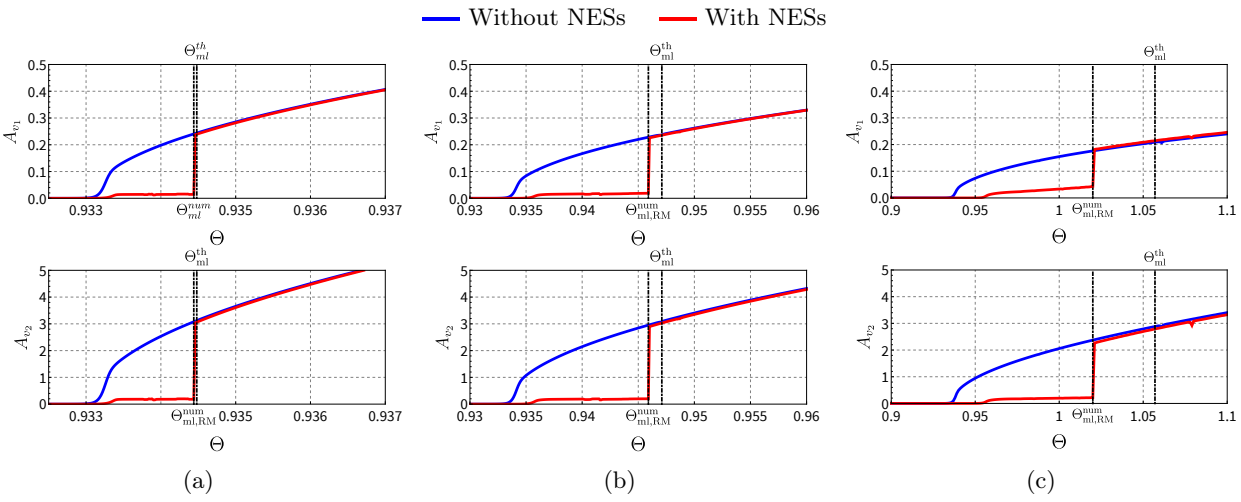


Figure A.9. Comparison between numerical bifurcation diagrams of the airfoil model with and without NESs with respect to the reduced speed of the flow Θ. Configuration 1 is considered with (a) $\epsilon = 10^{-4}$, (b) $\epsilon = 10^{-3}$ and (c) $\epsilon = 10^{-2}$.

$$\tilde{c}_{h_2}(\dot{\tilde{x}}_2 - \dot{\tilde{h}}_2) + k_{h_2}^{NL}(\tilde{x}_2 - \tilde{h}_2)^3 = 0 \tag{A.74b}$$

$$\bar{m}_{h_m}\ddot{\tilde{h}}_m - \tilde{c}_{h_m}(\dot{\tilde{x}}_m - \dot{\tilde{h}}_m) + k_{h_m}^{NL}(\tilde{x}_m - \tilde{h}_m)^3 = 0 \quad (m = 1, 2) \tag{A.74c}$$

where the time derivative is denoted " $\dot{}$ ". In this model the tangential force F_T due to friction contact is assumed to be proportional to the normal force F_N as given by Coulomb's law : $F_T = \mu F_N$, where μ is the friction coefficient.

Introducing the following notation : $\omega_n = \sqrt{k_{x_n}/m}$, $\Omega = \omega_2/\omega_1$, $\zeta_{x_n} = c_{x_n}/(m\omega_1)$, $\xi_{x_n} = k_{x_n}^{NL}/(m\omega_1^2)$ (with $n = 1, 2$) for the primary system parameters and and $\tilde{m}_{h_m} = \bar{m}_{h_m}/(m\omega_1^2)$, $\tilde{\zeta}_{h_m} = \tilde{c}_{h_m}/(m\omega_1)$ and $\xi_{x_m} = k_{x_m}^{NL}/(m\omega_1^2)$ (with $m = 1, 2$) for the NESs parameters, Eqs. (A.74) become

$$x_1'' + \zeta_{x_1}x_1' + x_1 - \mu\Omega^2 x_2 + \epsilon\left(\xi_{x_1}x_1^3 - \mu\xi_{x_2}x_2^3\right) + \tilde{m}_{h_1}h_1'' = 0 \tag{A.75a}$$

$$x_2'' + \zeta_{x_2}x_1' + \Omega^2 x_2 + \mu x_1 + \epsilon\left(\mu\xi_{x_1}x_1^3 + \xi_{x_2}x_2^3\right) + \tilde{m}_{h_2}h_2'' = 0 \tag{A.75b}$$

$$h_m'' - \gamma_{h_m}\left(x_m' - h_m'\right) - \alpha_{h_m}\left(x_m - h_m\right)^3 = 0 \quad (m = 1, 2) \tag{A.75c}$$

The system of equations (A.75) has the general form of Eq. (D.2) with

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix}\tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2\end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{h}} = \begin{pmatrix}\tilde{h}_1 \\ \tilde{h}_2\end{pmatrix}, \tag{A.76}$$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix}\zeta_{x_1} & 0 \\ 0 & \zeta_{x_1}\end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix}1 & -\mu\Omega^2 \\ \mu & \Omega^2\end{bmatrix}, \tag{A.77a}$$

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix}\xi_x & 0 \\ 0 & \xi_\varphi\end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} \text{ and } \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{A.77b}$$

The nonlinear vector function contains cubic nonlinearities

$$\mathbf{g^{NL}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix}\xi_{x_1}x_1^3 - \mu\xi_{x_2}x_2^3 \\ \mu\xi_{x_1}x_1^3 + \xi_{x_2}x_2^3\end{pmatrix}, \tag{A.78}$$

and the nonlinearities of the NESs have the required form, i.e. $\mathbf{f^{NL}}\left(\mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{h}}\right)$, with $\mathbf{f^{NL}}$ given by (A.5).

According to the method proposed in Sect. D.2.1, the small parameter ϵ is introduced to take into account small inertia and damping terms of the NESs

$$\tilde{m}_{h_m} = \epsilon m_{h_m}, \quad \tilde{\zeta}_{h_m} = \epsilon\zeta_{h_m} \quad (m = 1, 2), \tag{A.79}$$

and the variables $\tilde{x}_n$ $(n = 1, 2)$ and $\tilde{h}_m$ $(m = 1, 2)$ are rescaled through ϵ as

$$x_n = \frac{\tilde{x}_m}{\sqrt{\epsilon}} \quad (n = 1, 2) \qquad h_m = \frac{\tilde{h}_m}{\sqrt{\epsilon}} \quad (m = 1, 2). \tag{A.80}$$

Consequently, the equations of motion have the following final form

$$x_1'' + \zeta_{x_1} x_1' + x_1 - \mu\Omega^2 x_2 + \epsilon\left(\xi_{x_1} x_1^3 - \mu\xi_{x_2} x_2^3\right) + \epsilon m_{h_1} h_1'' = 0 \tag{A.81a}$$

$$x_2'' + \zeta_{x_2} x_1' + \Omega^2 x_2 + \mu x_1 + \epsilon\left(\mu\xi_{x_1} x_1^3 + \xi_{x_2} x_2^3\right) + \epsilon m_{h_2} h_2'' = 0 \tag{A.81b}$$

$$h_m'' - \gamma_{h_m}\left(x_m' - h_m'\right) - \alpha_{h_m}\left(x_m - h_m\right)^3 = 0 \quad (m = 1, 2) \tag{A.81c}$$

with $\gamma_{h_m} = \zeta_{h_m}/m_{h_m}$ and $\alpha_{h_m} = \xi_{h_m}/m_{h_m}$ $(m = 1, 2)$.

A.7 Appendix B. The airfoil-M-NESs model

The two degrees of freedom airfoil model coupled to several NESs (see Fig. D.3) and used in Sect. D.5 is described in this appendix.

Assuming small angle, we derive the equations of motion of the airfoil-M-NESs model as

$$\begin{aligned} &m\ddot{\tilde{z}} + S_\varphi\ddot{\tilde{\varphi}} + K_z\tilde{z} + K_z^{NL}\tilde{z}^3 + C_z\dot{\tilde{z}} + qP_a\Lambda\left(\tilde{\varphi} + \dot{\tilde{z}}/U\right) + \\ &\quad\sum_{m=1}^{M}\tilde{C}_{y_m}\left(\dot{\tilde{z}} - d_m\dot{\tilde{\varphi}} - \dot{\tilde{y}}_m\right) + K_{y_m}^{NL}\left(\tilde{z} - d_m\tilde{\varphi} - \tilde{y}_m\right)^3 = 0 \end{aligned} \tag{A.82a}$$

$$\begin{aligned} &I_\varphi\ddot{\tilde{\varphi}} + S_\varphi\ddot{\tilde{z}} + K_\varphi\tilde{\varphi} + K_\varphi^{NL}\tilde{\varphi}^3 + C_\varphi\dot{\tilde{\varphi}} - qeP_a\Lambda\left(\tilde{\varphi} + \dot{\tilde{z}}/U\right) - \\ &\sum_{m=1}^{M} d_m\tilde{C}_{y_m}\left(\dot{\tilde{z}} - d_m\dot{\tilde{\varphi}} - \dot{\tilde{y}}_m\right) + d_m K_{y_m}^{NL}\left(\tilde{z} - d_m\tilde{\varphi} - \tilde{y}_m\right)^3 = 0 \end{aligned} \tag{A.82b}$$

$$\tilde{m}_{y_m}\ddot{\tilde{y}}_m + \tilde{C}_{y_m}\left(d_m\dot{\tilde{\varphi}} + \dot{\tilde{y}}_m - \dot{\tilde{z}}\right) + K_{y_m}^{NL}\left(d_m\tilde{\varphi} + \tilde{y}_m - z\right)^3 = 0 \quad (m = 1, \ldots, M) \tag{A.82c}$$

where again the time derivative is denoted " $\dot{\cdot}$ ". $b = c/2$ is the semichord length. A is the aerodynamic center, B the elastic axis, C the center of gravity of the airfoil. e is the location aerodynamic center A measured from B (positive ahead of B). m and I_φ are the mass of the airfoil and its mass moment of inertia with respect to B. $S_\varphi = mBC$ is the mass unbalance in the airfoil. K_z and K_φ are the linear heave and pitch stiffnesses respectively whereas K_z^{NL} and K_φ^{NL} are the cubic heave and pitch stiffnesses. C_z and C_φ are the heave and pitch damping coefficients. U is the constant and uniform flow speed around the airfoil and $q = \frac{1}{2}\rho_\infty U^2$ is the dynamic pressure where ρ_∞ is the density of the flow. P_a is the planform of the airfoil, Λ is the lift curve slope and d_m $(m = 1, \ldots, M)$ are the offset attachments of the NESs to the airfoil. Finally, $\tilde{m}_{y_m}$, $\tilde{C}_{y_m}$ and $K_{y_m}^{NL}$ $(m = 1, \ldots, M)$ are the masses, the damping coefficients and the cubic stiffnesses of the NESs respectively.

For convenience, Eq. (D.66) is written in dimensionless form

$$\tilde{x}'' + s_\varphi\tilde{\varphi}'' + \Omega^2\tilde{x} + \xi_x\tilde{x}^3 + \zeta_x\tilde{x}' + \mu\Lambda\Theta\left(\Theta\tilde{\varphi} + \tilde{x}'\right) + \sum_{m=1}^{M}\tilde{m}_{h_m}\tilde{h}_m'' = 0 \tag{A.83a}$$

$$r_\varphi^2\tilde{\varphi}'' + s_\varphi\tilde{x}'' + r_\varphi^2\tilde{\varphi} + \xi_\varphi\tilde{\varphi}^3 + \zeta_\varphi\tilde{\varphi}' - \eta\mu\Lambda\Theta\left(\Theta\varphi + \tilde{x}'\right) - \sum_{m=1}^{M}\delta_m\tilde{m}_{h_m}\tilde{h}_m'' = 0 \tag{A.83b}$$

$$\tilde{m}_{h_m}\tilde{h}_m'' + \tilde{\zeta}_{h_m}\left(\delta_m\tilde{\varphi}' + \tilde{h}_m' - \tilde{x}'\right) + \xi_{h_m}\left(\delta_m\tilde{\varphi} + \tilde{h}_m - \tilde{x}\right)^3 = 0 \quad (m = 1, \ldots, M) \tag{A.83c}$$

where the time t has been replaced by the dimensionless time $\tau = \omega_\varphi t$ (with $\omega_\varphi = \sqrt{K_\varphi/I_\varphi}$) and time derivative $\partial/\partial\tau$ is denoted " $'$ ". The dimensionless displacements are defined by $x = z/b$, $h = y/b$. Moreover, $\delta_m = d_m/b$ $(m = 1, \ldots, M)$, $s_\varphi = S_\varphi/(mb)$, $\Omega = \omega_z/\omega_\varphi$ (with $\omega_z = \sqrt{K_z/m}$) and $\eta = e/b$. $r_\varphi = \sqrt{I_\varphi/(mb^2)}$ is the radius of gyration of the cross section of the wing. The dimensionless nonlinear stiffnesses and damping coefficients are $\xi_x = K_z^{NL}b^2/(m\omega_\varphi^2)$, $\zeta_x = C_z/(m\omega_\varphi)$, $\xi_\varphi = K_\varphi^{NL}/(mb^2\omega_\varphi^2)$, $\zeta_\varphi = C_\varphi/(mb^2\omega_\varphi)$, $\xi_{h_m} = K_{y_m}^{NL}b^2/(m\omega_\varphi^2)$, $\tilde{\zeta}_{h_m} = \tilde{C}_{y_m}/(m\omega_\varphi)$. The mass and density ratios are defined by $\tilde{m}_{h_m} = \tilde{m}_{y_m}/(m\omega_\varphi^2)$ and $\mu = bP_a\rho_\infty/(2m)$ respectively. Finally, the bifurcation parameter under consideration is the reduced speed of the flow $\Theta = U/(b\omega_\varphi)$.

The system of equations (D.67) has the general form of Eq. (D.2) with

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{\varphi}\end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{h}} = \begin{pmatrix}\tilde{h}_1\\ \tilde{h}_2\\ \tilde{h}_3\end{pmatrix}, \tag{A.84}$$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 1 & s_\varphi \\ s_\varphi & r_\varphi^2 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \zeta_x + \mu\Theta & 0 \\ -\eta\mu\Theta & \zeta_\varphi \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \Omega^2 & \mu\Theta^2 \\ 0 & r_\varphi^2 - \eta\mu\Theta^2 \end{bmatrix}, \tag{A.85a}$$

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \xi_x & 0 \\ 0 & \xi_\varphi \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ -\delta_1 & \cdots & -\delta_M \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -\delta_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -\delta_M \end{bmatrix}. \tag{A.85b}$$

The expression of the nonlinear vector function $\mathbf{g^{NL}}$ is given by

$$\mathbf{g^{NL}}\left(\tilde{\mathbf{x}}\right) = \begin{pmatrix} \xi_x \tilde{x}^3 \\ \xi_\varphi \tilde{\varphi}^3 \end{pmatrix}, \tag{A.86}$$

and again $\mathbf{f^{NL}}\left(\mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{h}}\right)$, with $\mathbf{f^{NL}}$ given by (A.5).

Following Eqs. (A.6) and (A.7), we define

$$\tilde{m}_{h_m} = \epsilon m_{h_m}, \quad \tilde{\zeta}_{h_m} = \epsilon \zeta_{h_m} \quad (m = 1, \ldots, M) \tag{A.87}$$

and

$$x = \frac{\tilde{x}}{\sqrt{\epsilon}}, \quad \varphi = \frac{\tilde{\varphi}}{\sqrt{\epsilon}}, \quad h_m, = \frac{\tilde{h}_m}{\sqrt{\epsilon}} \quad (m = 1, \ldots, M) \tag{A.88}$$

to obtain the final form of the equations of motion

$$x'' + s_\varphi \varphi'' + \Omega^2 x + \epsilon \xi_x x^3 + \zeta_x x' + \mu\Lambda\Theta\left(\Theta\varphi + x'\right) + \epsilon \sum_{m=1}^{M} m_{h_m} h_m'' = 0 \tag{A.89a}$$

$$r_\varphi^2 \varphi'' + s_\varphi x'' + r_\varphi^2 \varphi + \epsilon \xi_\varphi \varphi^3 + \zeta_\varphi \varphi' - \eta\mu\Lambda\Theta\left(\Theta\varphi + x'\right) - \epsilon \sum_{m=1}^{M} \delta_m m_{h_m} h_m'' = 0 \tag{A.89b}$$

$$h_m'' + \gamma_{h_m}\left(\delta_m \varphi' + h_m' - x'\right) + \alpha_{h_m}\left(\delta_m \varphi + h_m - x\right)^3 = 0 \quad (m = 1, \ldots, M) \tag{A.89c}$$

with $\gamma_{h_m} = \zeta_{h_m}/m_{h_m}$ and $\alpha_{h_m} = \xi_{h_m}/m_{h_m}$ $(m = 1, \ldots, M)$.

Annexe B

Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 95 (2021) : 105623 [a9]

Dynamic behavior analysis of a mechanical system with two unstable modes coupled to a single nonlinear energy sink

Baptiste Bergeot, Sergio Bellizzi and Sébastien Berger

Abstract

This paper investigates a problem of passive mitigation of vibratory instabilities caused by two unstable modes by means of a single nonlinear energy sink (NES). For this purpose, a linear four-degree-of-freedom (DOF) primary structure having two unstable modes (reproducing the typical dynamic behavior of a friction system) and undergoing, as it is linear, unbounded motions when it is unstable, is coupled to a NES. In this work, the NES involves an essentially cubic restoring force and a linear damping force. We are interested in characterizing analytically the response regimes resulting from the coupling of the two unstable linear modes of the primary structure and the nonlinear mode of the NES. To this end, from a suitable rescaling of the governing equations of the coupled system in which the dynamics of the primary structure is reduced to its unstable modal coordinates, the complexification-averaging method is applied. The resulting averaged system appears to be a fast-slow system with four fast variables and two slow ones related to the two unstable modes of the primary structure. The critical manifold of the averaged dynamics is obtained through the geometric singular perturbation theory and appears as a two-dimensional parametric surface (with respect to two of the four fast variables) which evolves in the whole six-dimensional variable space. The asymptotic analysis reveals that the NES attachment can produce some bounded responses and suggests that the system may have simultaneous stable attractors. Numerical simulations complement the study, highlighting a possible competition between stable attractors and allowing us to investigate their basins of attraction. In each considered situation, a good agreement has been observed between theoretical results and numerical simulations, which validates the proposed asymptotic analysis.

Keywords : Nonlinear energy sink, Multi-instabilities, Relaxation oscillations, Multiple-scale analysis

B.1 Introduction

A nonlinear energy sink (NES) is a vibration absorber used for passive shock and vibration mitigation of undesirable oscillations of a primary structure induced by external, parametric or self-excitations. A NES is classically defined as a nonlinear dynamical attachment consisting of a light mass (compared to the total mass of the primary structure), an essentially nonlinear spring and a viscous linear damper. Properly designed, a NES can be tuned to any frequency to perform an energy transfer from the primary structure towards itself. This phenomenon, called targeted energy transfer (TET), is realized through nonlinear mode bifurcations and it can be described as resonance captures. Reviews of these concepts can be found in [206] and in a part of [129].

The use of NES to control or suppress dynamic instabilities has been widely studied. The first work reported in this field concerns the suppression of limit cycle oscillations of the Van der Pol oscillator [122]. Bifurcations of self-excitation regimes in a Van der Pol (respectively Van der Pol-Duffing) oscillator coupled with a NES have been considered in [75] (respectively [59]). Numerous papers [78, 94, 121, 123, 124, 131, 156, 207] have been dedicated to the suppression of aeroelastic instabilities. The mitigation, by means of a NES, of vortex-induced vibrations resulting from the nonlinear interaction of a laminar flow and a rigid circular cylinder has been described in [47, 201]. The passive suppression of helicopter ground resonance instabilities has been considered in [a10, a12]. Chatter control in machine tool vibrations has been studied in [82, 142]. Mitigation of friction-induced vibrations due to mode coupling instabilities in a friction system has been investigated in [a14]. A network of parallel NES coupled to a Van der Pol oscillator has been considered in [a7]. The prediction of the steady-state regimes of a multi-degree-of-freedom dynamical system having one unstable mode coupled to a set of NES has been performed in [a8].

The presence of a NES modifies the position of the bifurcation point and the amplitude of the bifurcated branches. It has been shown that NES can mitigate limit cycle oscillations (LCO). Several possible scenarios have been identified including complete suppression, mitigation through periodic response and mitigation through strongly modulated response (SMR). The results have been obtained under the main assumption that the primary system has only one unstable mode. This assumption is the common thread in all previously referenced works.

Mitigations involving two simultaneous resonances have been considered in the cases of external excitations or transient regimes. TET by means of a multi-resonance capture in a 2-DOF system under two different harmonic excitations has been investigated numerically [13, 159, 160] and experimentally [45]. It has been shown that two resonances of the system are possible simultaneously resulting in vibration reduction around the two resonance frequencies. Regarding transient responses, multi-frequency TET cascades have been studied in [113, 202, 204]. Moreover, it has been shown in [68, 95] that a bistable NES is able to efficiently mitigate oscillations of the primary system for more than one vibration mode.

In this paper, we consider the case of a primary system having two unstable modes and we investigate the mitigation of the two instabilities by means of a single NES. To the knowledge of the authors, this case has never been considered in the past. As for the primary system, the retained model, a simple 4-DOF friction system involving two unstable modes, has been introduced in [53] and used in [52] to illustrate different stability behaviors characterized by mode coupling having coalescence patterns. Based on the procedure presented in [a8], we provide an analytic framework for characterizing the response regimes.

The paper is organized as follows. In Sect. B.2, the system under study is presented. It consists in two 2-DOF Hulten systems connected by one spring and one damper resulting in a 4-DOF system on which one ungrounded NES is fixed along one of the DOF. In Sect. B.3, applying a complexification-averaging method, the analyses of the critical manifold, fixed points and relaxation oscillations regimes are addressed. Some numerical examples are given and discussed in order to compare and to complete the asymptotic analysis in Sect. B.4. Finally, the paper is concluded in Sect. F.8.

B.2 The system under study

B.2.1 The mechanical model

The system considered here is shown in Fig. B.1. It is composed of a primary system coupled to a NES in an ungrounded configuration. The primary system is defined by two 2-DOF Hulten systems with respective masses m_1 and m_2 which are linearly coupled by a spring of stiffness k_a, and a viscous damper of damping coefficient c_a. The two masses are arranged against three moving belts. It is assumed that the belts run at a constant speed, that the masses and the belts are always in contact and that the relative velocities between the masses and the belts are always positive so that the directions of the tangential fiction forces do not change. Hence, the tangential forces F_T due to friction contacts are proportional to the normal forces F_N as given by the Coulomb's law : $F_T = \gamma F_N$, where γ is the friction coefficient. This 4-DOF linear model was introduced in [53] and used in [52] to illustrate different stability behaviors characterized by mode coupling having coalescence patterns. The number of DOF of the primary system corresponds to the minimal number of DOF which can be used to investigate the case of multi-instabilities.

The NES is simply modeled as a 1-DOF nonlinear oscillator characterized by a mass m_h, no linear stiffness, a cubic stiffness k_h^{NL} and a damping coefficient c_h.

The system is described by the following equations of motion

$$m_1\frac{d^2\tilde{x}_1}{d\tilde{\tau}^2} + c_1\frac{d\tilde{x}_1}{d\tilde{\tau}} + c_a\left(\frac{d\tilde{x}_1}{d\tilde{\tau}} - \frac{d\tilde{x}_3}{d\tilde{\tau}}\right) + k_1\tilde{x}_1 + k_a\left(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_3\right) + \gamma k_2\tilde{x}_2 + m_h\frac{d^2\tilde{h}}{d\tilde{\tau}^2} = 0 \tag{B.1a}$$

$$m_1\frac{d^2\tilde{x}_2}{d\tilde{\tau}^2} + c_2\frac{d\tilde{x}_2}{d\tilde{\tau}} + k_2\tilde{x}_2 - \gamma k_1\tilde{x}_1 = 0 \tag{B.1b}$$

$$m_2\frac{d^2\tilde{x}_3}{d\tilde{\tau}^2} + c_3\frac{d\tilde{x}_3}{d\tilde{\tau}} + c_a\left(\frac{d\tilde{x}_3}{d\tilde{\tau}} - \frac{d\tilde{x}_1}{d\tilde{\tau}}\right) + k_3\tilde{x}_3 + k_a\left(\tilde{x}_3 - \tilde{x}_1\right) + \gamma k_4\tilde{x}_4 = 0 \tag{B.1c}$$

$$m_2\frac{d^2\tilde{x}_4}{d\tilde{\tau}^2} + c_4\frac{d\tilde{x}_4}{d\tilde{\tau}} + k_4\tilde{x}_4 - \gamma k_3\tilde{x}_3 = 0 \tag{B.1d}$$

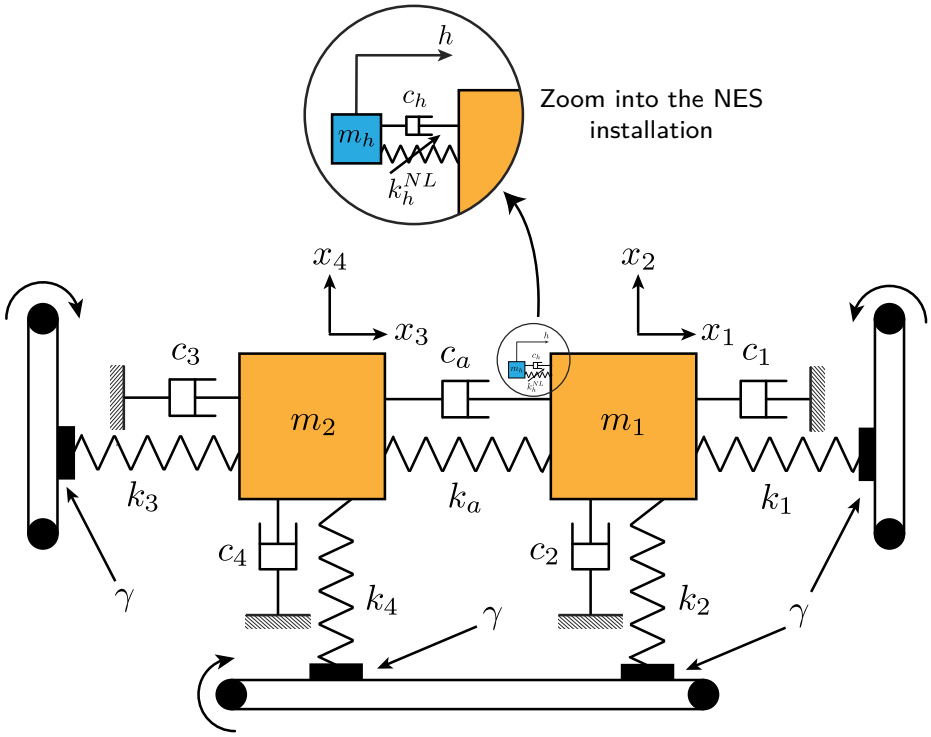


Figure B.1. The phenomenological system under study.

$$m_h \frac{d^2\tilde{h}}{d\tilde{\tau}^2} + c_h \left(\frac{d\tilde{h}}{d\tilde{\tau}} - \frac{d\tilde{x}_1}{d\tilde{\tau}} \right) + k_h^{NL} \left(\tilde{h} - \tilde{x}_1 \right)^3 = 0 \tag{B.1e}$$

where $\tilde{x}_1$ and $\tilde{x}_2$ (respectively $\tilde{x}_3$ and $\tilde{x}_4$) are the displacements of the primary mass m_1 (respectively m_2) and $\tilde{h}$ is the displacement of the NES.

Introducing the following notations

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}},\ \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_1}},\ \omega_3 = \sqrt{\frac{k_3}{m_2}},\ \omega_4 = \sqrt{\frac{k_4}{m_2}},\\
&\eta_i = \frac{c_1}{\omega_1 m_1},\ \eta_2 = \frac{c_2}{\omega_2 m_1},\ \eta_3 = \frac{c_3}{\omega_3 m_2},\ \eta_4 = \frac{c_4}{\omega_4 m_2},\\
&\Omega_i = \frac{\omega_i}{\omega_1} \text{ for } i = 2, \ldots, 4,\\
&\sigma = \frac{m_2}{m_1},\ \Omega_a = \frac{k_a}{\omega_1 m_1},\ \eta_a = \frac{c_a}{\omega_1 m_1},\\
&\tilde{\mu} = \frac{c_h}{\omega_1 m_1},\ \alpha = \frac{k_h^{NL}}{\omega_1^2 m_1},\ \epsilon = \frac{m_h}{m_1},
\end{aligned}$$

we can then rescale the variables $\tilde{x}_i$, for $i = 1$ to 4 and $\tilde{h}$ as

$$x_i = \frac{\tilde{x}_i}{\sqrt{\epsilon}} \text{ for } i = 1, \ldots, 4 \quad \text{and} \quad h = \frac{\tilde{h}}{\sqrt{\epsilon}}, \tag{B.2}$$

and change the time scale from $\tilde{\tau}$ to $t = \omega_1 \tilde{\tau}$. Denoting as "$\cdot$" the derivative with respect to time t, the system of equations (B.1) takes the following final form

$$\ddot{x}_1 + (\eta_1 + \eta_a)\dot{x}_1 - \eta_a \dot{x}_3 + \left(1 + \Omega_a^2\right) x_1 + \gamma \Omega_2^2 x_2 - \Omega_a^2 x_3 + \epsilon \ddot{h} = 0 \tag{B.3a}$$

$$\ddot{x}_2 + \eta_2 \Omega_2 \dot{x}_2 - \gamma x_1 + \Omega_2^2 x_2 = 0 \tag{B.3b}$$

$$\ddot{x}_3 - \frac{\eta_a}{\sigma}\dot{x}_1 + \left(\eta_3 \Omega_3 + \frac{\eta_a}{\sigma}\right)\dot{x}_3 - \frac{\Omega_a^2}{\sigma} x_1 + \left(\Omega_3^2 + \frac{\Omega_a^2}{\sigma}\right) x_3 + \gamma \Omega_4^2 x_4 = 0 \tag{B.3c}$$

$$\ddot{x}_4 + \eta_4 \Omega_4 \dot{x}_4 - \gamma \Omega_3^2 x_3 + \Omega_4^2 x_4 = 0 \tag{B.3d}$$

$$\ddot{h} + \mu \left(\dot{h} - \dot{x}_1\right) + \alpha \left(h - x_1\right)^3 = 0 \tag{B.3e}$$

where $\tilde{\mu}$ has been rescaled as $\tilde{\mu} = \epsilon\mu$.

From now on we assume that ϵ is small. As it also implies that $\tilde{\mu}$ is small, this assumption is satisfied if the mass ratio and the damping coefficient of the NES are small.

B.2.2 The reduced model

To simplify the following calculations, it is convenient to introduce new coordinates in (B.3) as

$$u_1 = x_1 + \epsilon h, \quad u_i = x_i \quad \text{for} \quad i = 2, \dots, 4 \quad \text{and} \quad v = x_1 - h \tag{B.4}$$

leading, after a first-order Taylor expansion around $\epsilon = 0$, to the following equations

$$\begin{aligned}
&\ddot{u}_1 + (\eta_1 + \eta_a)\dot{u}_1 - \eta_a\dot{u}_3 + \left(1 + \Omega_a^2\right) u_1 + \gamma\Omega_2^2 u_2 - \Omega_a^2 u_3 + \\
&\epsilon\Big[- (\eta_1 + \eta_a)\dot{u}_1 + (\eta_1 + \eta_a)\dot{v} - \left(1 + \Omega_a^2\right) u_1 + \left(1 + \Omega_a^2\right) v \Big] = 0 && \text{(B.5a)}\\
&\ddot{u}_2 + \eta_2\Omega_2\dot{u}_2 - \gamma u_1 + \Omega_2^2 u_2 + \epsilon\gamma\,(u_1 - v) = 0 && \text{(B.5b)}\\
&\ddot{u}_3 - \frac{\eta_a}{\sigma}\dot{u}_1 + \left(\eta_3\Omega_3 + \frac{\eta_a}{\sigma}\right)\dot{u}_3 - \frac{\Omega_a^2}{\sigma}u_1 + \gamma\Omega_4^2 u_4 + (\Omega_3^2 + \frac{\Omega_a^2}{\sigma})u_3 + \\
&\frac{\epsilon}{\sigma}\left[\eta_a\dot{u}_1 - \eta_a\dot{v} + \Omega_a^2 u_1 - \Omega_a^2 v\right] = 0 && \text{(B.5c)}\\
&\ddot{u}_4 + \eta_4\Omega_4\dot{u}_4 - \gamma\Omega_3^2 u_3 + \Omega_4^2 u_4 = 0 && \text{(B.5d)}\\
&\ddot{v} + (\eta_1 + \eta_a)\dot{u}_1 - \eta_a\dot{u}_3 + \mu\dot{v} + (1 + \Omega_a^2)u_1 + \gamma\Omega_2^2 u_2 - \Omega_a^2 u_3 + \alpha v^3 + \\
&\epsilon\big[- (\eta_1 + \eta_a)\dot{u}_1 + (\eta_1 + \eta_a)\dot{v} + \mu\dot{v} - (1 + \Omega_a^2)u_1 + (1 + \Omega_a^2)v + \alpha v^3\big] = 0. && \text{(B.5e)}
\end{aligned}$$

Then, to capture the essential features of the double instability of the primary system, a biorthogonal transformation is applied to the variables characterizing the primary system after writing Eqs. (B.5a) to (B.5d) in state-space form :

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \epsilon\left(\mathbf{D}_1\mathbf{y} + \mathbf{D}_2 v + \mathbf{D}_3\dot{v}\right) \tag{B.6}$$

where $\mathbf{y} = (u_1, \cdots, u_4, \dot{u}_1, \cdots, \dot{u}_4)^T$. The matrices $\mathbf{A}$ and $\mathbf{D}_1$ and the vectors $\mathbf{D}_2$ and $\mathbf{D}_3$ are not explicitly given but can be easily obtained from (B.5a-B.5d). The non symmetric matrix $\mathbf{A}$ characterizes the dynamics of the primary system.

Let us consider the right and left eigenvector matrices

$$\mathbf{R} = [\mathbf{r_1}\ \mathbf{r_1^*}\ \cdots\ \mathbf{r_4}\ \mathbf{r_4^*}] \quad \text{and} \quad \mathbf{L} = [\mathbf{l_1}\ \mathbf{l_1^*}\ \cdots\ \mathbf{l_2}\ \mathbf{l_4^*}] \tag{B.7}$$

corresponding to the following right and left eigenvalue problems with respect to the matrix $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda} \quad \text{and} \quad \mathbf{A}^T\mathbf{L} = \mathbf{L}\mathbf{\Lambda}. \tag{B.8}$$

where $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1^*, \cdots, \lambda_4, \lambda_4^*)$ denotes the diagonal matrix of the eigenvalues. The superscript $(.)^*$ denotes the complex conjugate.

From now on we assume that the primary system is unstable with two pairs of conjugate eigenvalues having small positive real parts, we arrange the eigenvalues so that $\lambda_1^R > 0$ and $\lambda_2^R > 0$ where $\lambda_i = \lambda_i^R + j\lambda_i^I$ for $i = 1, 2$ and we assume that

$$\lambda_1^R = \epsilon\rho_1 \quad \text{and} \quad \lambda_2^R = \epsilon\rho_2 \tag{B.9}$$

with ρ_1 and ρ_2 of the order of $O(1)$. The two other pairs of eigenvalues have negative real parts.

We introduce the biorthogonal transformation

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{q} \ \text{ with } \ \mathbf{q} = \mathbf{L}^T\mathbf{y} \tag{B.10}$$

where the vector $\mathbf{q} = (q_1, q_1^*, \cdots, q_4, q_4^*)^T$ is constituted of four pairs of complex conjugates. The matrices $\mathbf{R}$ and $\mathbf{L}$ have been chosen such that

$$\mathbf{L}^T\mathbf{R} = \mathbf{I} \quad \text{and} \quad \mathbf{L}^\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{\Lambda}. \tag{B.11}$$

where $\mathbf{I}$ denotes the identity matrix.

We can deduce that Eqs. (B.5) take the following formal form with respect to the new variables $\mathbf{q}$:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{\Lambda}\mathbf{q} - \epsilon\mathbf{f}(\mathbf{q}, v, \dot{v}) &= 0 && \text{(B.12a)}\\
\ddot{v} + g(v, \dot{v}, \mathbf{q}, \epsilon) &= 0 && \text{(B.12b)}
\end{aligned}$$

where $\mathbf{f} = \mathbf{L}^T (\mathbf{D}_1\mathbf{R}\mathbf{q} + \mathbf{D}_2 v + \mathbf{D}_3\dot{v})$. Again, the function g is not explicitly given but can be easily obtained from (B.5e).

Neglecting the coupling term $\epsilon\mathbf{f}(\mathbf{q}, v, \dot{v})$, Eq. (B.12a) reduces to $\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{\Lambda}\mathbf{q} = 0$ and the variables q_3, q_3^*, q_4 and q_4^*, related to the stable modes, vanish (i.e. tend to zero). When the coupling term $\epsilon\mathbf{f}(\mathbf{q}, v, \dot{v})$, which is of the order of magnitude of ϵ, is taken into account, the variables q_3, q_3^*, q_4 and q_4^* do not vanish but their contributions remain minimal and can be neglected [a8, 78]. Consequently, all the terms related to q_3, q_3^*, q_4 and q_4^* will be omitted in the following developments.

Eq. (B.12) may therefore be simplified, retaining only the components q_1, q_1^*, q_2 and q_2^* associated with the unstable eigenvalues. The resulting equations take the (reduced) form

$$\dot{q}_1 - j\lambda_1^I q_1 - \epsilon\rho_1 q_1 - \epsilon\mathbf{L}_{1.}^T \left[\mathbf{D}_1 \left(\mathbf{R}_{1.} q_1 + \mathbf{R}_{2.} q_1^* + \mathbf{R}_{3.} q_2 + \mathbf{R}_{4.} q_2^*\right) + \mathbf{D}_2 v + \mathbf{D}_3 \dot{v}\right] = 0 \tag{B.13a}$$

$$\dot{q}_2 - j\lambda_2^I q_2 - \epsilon\rho_2 q_2 - \epsilon\mathbf{L}_{3.}^T \left[\mathbf{D}_1 (\mathbf{R}_{1.} q_1 + \mathbf{R}_{2.} q_1^* + \mathbf{R}_{3.} q_2 + \mathbf{R}_{4.} q_2^*) + \mathbf{D}_2 v + \mathbf{D}_3 \dot{v}\right] = 0 \tag{B.13b}$$

$$\begin{aligned} &\ddot{v} + \mu\dot{v} + \alpha v^3 + \\ &(\eta_1 + \eta_a)(R_{51} q_1 + R_{51}^* q_1^* + R_{53} q_2 + R_{53}^* q_2^*) - \\ &\eta_a (R_{71} q_1 + R_{71}^* q_1^* + R_{73} q_2 + R_{73}^* q_2^*) + \\ &(1 + \Omega_a^2)(R_{11} q_1 + R_{11}^* q_1^* + R_{13} q_2 + R_{13}^* q_2^*) + \\ &\gamma\Omega_2^2 (R_{21} q_1 + R_{21}^* q_1^* + R_{23} q_2 + R_{23}^* q_2^*) - \\ &\Omega_a^2 (R_{31} q_1 + R_{31}^* q_1^* + R_{33} q_2 + R_{33}^* q_2^*) + \\ &\epsilon \Big[(\eta_1 + \eta_a + \mu)\dot{v} + (1 + \Omega_a^2) v + \alpha v^3 - \\ &(\eta_1 + \eta_a)(R_{51} q_1 + R_{51}^* q_1^* + R_{53} q_2 + R_{53}^* q_2^*) - \\ &(1 + \Omega_a^2)(R_{11} q_1 + R_{11}^* q_1^* + R_{13} q_2 + R_{13}^* q_2^*) \Big] = 0 \end{aligned} \tag{B.13c}$$

where R_{ij} denotes the (i, j) component of the matrix $\mathbf{R}$ and the vector $\mathbf{R}_{i.}$ (respectively $\mathbf{L}_{i.}$) denotes the i^{th} column of the matrix $\mathbf{R}^T$ (respectively $\mathbf{L}^T$). Eq. (B.13) involves two complex variables q_1 and q_2 and one real variable v.

B.3 Asymptotic analysis

The objective of this section is to characterize analytically the response regimes of the reduced model (B.13) in the simultaneous vicinity of the unstable natural frequencies λ_1^I and λ_2^I. The proposed method which uses ϵ as a small parameter includes two steps. The first step (Sect. B.3.1) combines complexification and averaging methods to reduce the dynamics of the nonlinear system (B.13) by removing the oscillations with respect to the frequencies λ_1^I and λ_2^I. The resulting dynamical system appears as a slow-fast system where the fast dynamics corresponds to the current time t whereas the slow dynamics is related to the time ϵt. Note that the dynamics with respect to the frequencies λ_1^I and λ_2^I defines a third time scale denoted as the super fast dynamics. The reduced system can be analyzed using the geometric singular perturbation theory which is the objective of the second step (Sects. C.4.1 to B.3.5). That step begins with the definition of the critical manifold (Sect. C.4.1), which defines the space where the slow flow takes place. The associated stability properties are then considered in Sect. B.3.3. It continues with the characterization of the periodic or quasi-periodic regimes of the mechanical system (B.5) as stable fixed points of the slow flow (B.19) (Sect. B.3.4). Finally, in Sect. B.3.5, it is shown that the specific shape of the critical manifold enables the existence of more complicate steady-state responses named "relaxations oscillations", which exhibit strong modulated amplitudes on both frequency components.

B.3.1 The complexification-averaging method and the slow-fast system

Our objective is to investigate the solution in the vicinity of two simultaneous natural frequencies λ_1^I and λ_2^I named $1:1-1:1$ resonances. We assume that λ_1^I and λ_2^I are incommensurable.

The complexification-averaging method [135] is used to make the slow dynamics of the system emerge from fast oscillating responses.

The complex modal variable q_1 (respectively q_2) may be written as a fast component with respect to the natural frequency λ_1^I (respectively λ_2^I), and modulated by a slowly varying amplitude ϕ_1 (respectively ϕ_2),

that is

$$q_1 = \phi_1 e^{j\lambda_1^I t} \quad \text{and} \quad \dot{q}_1 = \dot{\phi}_1 e^{j\lambda_1^I t} + j\phi_1 \lambda_1^I e^{j\lambda_1^I t} \tag{B.14a}$$

$$q_2 = \phi_2 e^{j\lambda_2^I t} \quad \text{and} \quad \dot{q}_2 = \dot{\phi}_2 e^{j\lambda_2^I t} + j\phi_2 \lambda_2^I e^{j\lambda_2^I t}. \tag{B.14b}$$

As for the real variable v, new variables v_1 and v_2 are introduced as

$$v = v_1 + v_2 \tag{B.15}$$

to capture frequency components with respect to λ_1^I and λ_2^I (fast components) respectively. The slowly changing complex amplitudes ξ_1 and ξ_2 are then respectively defined as

$$\xi_1 e^{j\lambda_1^I t} = \dot{v}_1 + j\lambda_1^I v_1 \tag{B.16a}$$

$$\xi_2 e^{j\lambda_2^I t} = \dot{v}_2 + j\lambda_2^I v_2. \tag{B.16b}$$

Inserting Eqs. (B.14), (B.15) and (B.16) into Eqs. (B.13) and averaging with respect to the frequencies λ_1^I and λ_2^I separately yields the following system of complex slow modulation with respect to $(\phi_1, \phi_2, \xi_1, \xi_2)$:

$$\dot{\phi}_1 = \epsilon F_1(\phi_1, \xi_1) \tag{B.17a}$$

$$\dot{\phi}_2 = \epsilon F_2(\phi_2, \xi_2) \tag{B.17b}$$

$$\dot{\xi}_1 = G_1(\phi_1, \xi_1, \xi_2, \epsilon) \tag{B.17c}$$

$$\dot{\xi}_2 = G_2(\phi_2, \xi_2, \xi_1, \epsilon) \tag{B.17d}$$

where the complex functions F_1, F_2, G_1 and G_2 are not explicitly given. Eqs. (B.17) characterize the dynamics of the slow complex amplitudes ϕ_1, ϕ_2, ξ_1 and ξ_2 of the physical variables q_1, q_2, v_1 and v_2 respectively.

By expanding Eqs. (B.17) using the following polar coordinates

$$\phi_1 = s_1 e^{j\delta_1} \tag{B.18a}$$

$$\phi_2 = s_2 e^{j\delta_2} \tag{B.18b}$$

$$\xi_1 = r_1 e^{j\theta_1} \tag{B.18c}$$

$$\xi_2 = r_2 e^{j\theta_2}, \tag{B.18d}$$

new equations of motion in terms of amplitudes s_1, s_2, r_1 and r_2 and phase differences $\Delta_1 = \delta_1 - \theta_1$ and $\Delta_2 = \delta_2 - \theta_2$ can be obtained as

$$\dot{\mathbf{s}} = \epsilon \mathbf{f}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \tag{B.19a}$$

$$\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{g}(\mathbf{s}, \mathbf{t}, \epsilon) = \mathbf{g}_0(\mathbf{s}, \mathbf{t}) + \epsilon \mathbf{g}_1(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \tag{B.19b}$$

where $\mathbf{s} = (s_1, s_2)^T$ and $\mathbf{t} = (r_1, r_2, \Delta_1, \Delta_2)^T$. The functions $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$, $\mathbf{g}_0 = (g_{01}, g_{02}, g_{03}, g_{04})^T$ and $\mathbf{g}_1 = (g_{11}, g_{21}, g_{31}, g_{41})^T$ take the following forms

$$f_1(s_1, r_1, \Delta_1) = a_1 s_1 + r_1(a_2 \cos\Delta_1 + a_3 \sin\Delta_1) \tag{B.20}$$

$$f_2(s_2, r_2, \Delta_2) = a_4 s_2 + r_2(a_5 \cos\Delta_2 + a_6 \sin\Delta_2) \tag{B.21}$$

$$g_{01}(s_1, r_1, \Delta_1) = H_{01}(r_1) + s_1(a_7 \cos\Delta_1 + a_8 \sin\Delta_1) \tag{B.22}$$

$$g_{02}(s_2, r_2, \Delta_2) = H_{02}(r_2) + s_2(a_9 \cos\Delta_2 + a_{10} \sin\Delta_2) \tag{B.23}$$

$$g_{03}(s_1, r_1, \Delta_1, r_2) = \frac{1}{r_1}(H_{03}(r_1, r_2) + s_1(a_8 \cos\Delta_1 - a_7 \sin\Delta_1)) \tag{B.24}$$

$$g_{04}(s_2, r_2, \Delta_2, r_1) = \frac{1}{r_2}(H_{04}(r_1, r_2) + s_2(a_{10} \cos\Delta_2 - a_9 \sin\Delta_2)), \tag{B.25}$$

with

$$H_{01}(r_1) = -\frac{\mu}{2} r_1, \tag{B.26}$$

$$H_{02}(r_2) = -\frac{\mu}{2} r_2, \tag{B.27}$$

$$H_{03}(r_1, r_2) = r_1 \left(\frac{\lambda_1^I}{2} - \frac{3\alpha}{8\lambda_1^{I^3}} r_1^2 - \frac{3\alpha}{4\lambda_1^I \lambda_2^{I^2}} r_2^2 \right), \tag{B.28}$$

$$H_{04}(r_1,r_2) = r_2\left(\frac{\lambda_2^I}{2} - \frac{3\alpha}{4\lambda_1^{I^2}\lambda_2^I}r_1^2 - \frac{3\alpha}{8\lambda_2^{I^3}}r_2^2\right). \tag{B.29}$$

The coefficients a_i for $i = 1,\dots,10$, are reported in B.6 and the other functions are not given explicitly because they are not used in the following.

In the framework of the Geometric Singular Perturbation Theory, Eqs. (B.19) define a $(4,2)$-fast-slow system where $\mathbf{t} = (r_1, r_2, \Delta_1, \Delta_2)^T$ denote the fast variables and $\mathbf{s} = (s_1, s_2)^T$ the slow ones. The slow variables are related to the modal components q_1 and q_2 whereas the fast variables are associated with the frequency components v_1 and v_2 of the NES variable v.

The system (B.19) corresponds to the fast time scale whereas for the slow time scale $\tau = \epsilon t$, the system reads

$$\mathbf{s}' = \mathbf{f}(\mathbf{s},\mathbf{t}) \tag{B.30a}$$
$$\epsilon\mathbf{t}' = \mathbf{g}(\mathbf{s},\mathbf{t},\epsilon) = \mathbf{g}_0(\mathbf{s},\mathbf{t}) + \epsilon\mathbf{g}_1(\mathbf{s},\mathbf{t}) \tag{B.30b}$$

where $(.)'$ denotes the derivative with respect to τ. The slow and the fast subsystems are defined by considering $\epsilon = 0$, which yields for the slow subsystem

$$\mathbf{s}' = \mathbf{f}(\mathbf{s},\mathbf{t}) \tag{B.31a}$$
$$\mathbf{0} = \mathbf{g}_0(\mathbf{s},\mathbf{t}), \tag{B.31b}$$

which is a differential-algebraic equation, and for the fast subsystem

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{0} \tag{B.32a}$$
$$\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{g}_0(\mathbf{s},\mathbf{t}). \tag{B.32b}$$

The slow and the fast subsystems will be complementary in the following analysis. Periodic or quasi-periodic steady-state regimes of the mechanical system (B.13) correspond to fixed points of the slow flow which are approximated by those of the slow subsystem. Indeed, if a fixed point of the slow flow with non-zero amplitude coordinates (i.e. s_1, s_2, r_1 and r_2) is reached, the resulting steady-sate regime of the system (B.13) is approximated by a quasi-periodic regime containing the two harmonic components at the frequencies λ_1^I and λ_2^I respectively. If a fixed point with $s_1 = r_1 = 0$ (respectively $s_2 = r_2 = 0$) is reached, the resulting steady-sate regime is approximated by a periodic regime containing only one harmonic component at the frequency λ_2^I (respectively λ_1^I).

More complicate (amplitude and phase modulated) steady-state regimes of the mechanical system (B.13) will be explained, inter alia, by the existence of relaxation oscillations of the slow flow (see Sect. B.3.5), which are described combining slow and fast periods predicted by (E.30) and (E.31) respectively. In the case of only one unstable mode, those regimes are referred to as Strongly Modulated Responses (SMR) [188]. This term is kept in this work but it covers more situations which are described in Sect. B.3.5. Although SMR are also quasi-periodic regimes, we have chosen to reserve the "quasi-periodic" term for the situations evoked above in which a fixed point of the slow flow is reached.

B.3.2 The critical manifold

The critical manifold is given as

$$C_0 := \left\{ (\mathbf{s},\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \mathbf{g}_0(\mathbf{s},\mathbf{t}) = 0 \right\}. \tag{B.33}$$

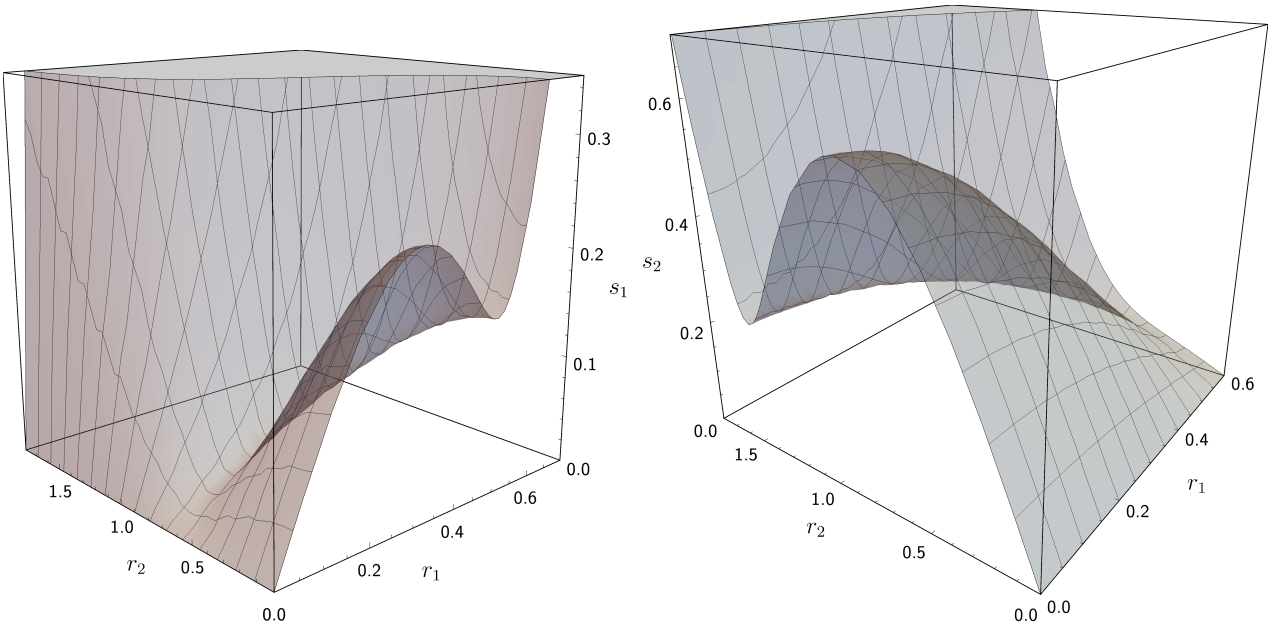
It defines the domain where the slow flow takes place (see (E.30c)) and consists in the equilibrium of the fast flow (see (B.32b)). It plays a crucial role to characterize the response regimes under asymptotic assumptions.

The equations defining the critical manifold (E.32) can be simplified solving $g_{01} = 0$ and $g_{03} = 0$ (respectively $g_{02} = 0$ and $g_{04} = 0$) with respect to $\cos\Delta_1$ and $\sin\Delta_1$ (respectively $\cos\Delta_2$ and $\sin\Delta_2$), which gives

$$\cos\Delta_1 = -\frac{a_8 H_{03}(r_1,r_2) + a_7 H_{01}(r_1)}{s_1\left(a_7^2 + a_8^2\right)} \quad \text{and} \quad \sin\Delta_1 = -\frac{a_8 H_{01}(r_1) - a_7 H_{03}(r_1,r_2)}{s_1\left(a_7^2 + a_8^2\right)} \tag{B.34}$$

(respectively

$$\cos\Delta_2 = -\frac{a_{10} H_{04}(r_1,r_2) + a_9 H_{02}(r_1)}{s_2\left(a_9^2 + a_{10}^2\right)} \quad \text{and} \quad \sin\Delta_2 = -\frac{a_{10} H_{02}(r_1) - a_9 H_{04}(r_1,r_2)}{s_2\left(a_9^2 + a_{10}^2\right)}). \tag{B.35}$$



(a) (b)

Figure B.2. The critical manifold in (a) the (r_1, r_2, s_1)-space (function (B.36a)) and (b) in the (r_1, r_2, s_2)-space (function (B.36b)). The set of parameters used are given in Sect. B.4.3, Eq. (B.58).

Finally, compatibility equations relating s_1 and s_2 with r_1 and r_2 can be deduced from (B.34) and (B.35) as

$$s_1^2 = \frac{H_1(r_1, r_2)}{a_7^2 + a_8^2} \tag{B.36a}$$

$$s_2^2 = \frac{H_2(r_1, r_2)}{a_9^2 + a_{10}^2} \tag{B.36b}$$

where

$$H_1(r_1, r_2) = H_{01}^2(r_1) + H_{03}^2(r_1, r_2) \tag{B.37a}$$

$$H_2(r_1, r_2) = H_{02}^2(r_2) + H_{04}^2(r_1, r_2). \tag{B.37b}$$

The critical manifold C_0 relates the variables s_1, s_2, Δ_1 and Δ_2 to r_1 and r_2 (see Eqs. (B.34) to (B.37)) and appears as a two-dimensional parametric surface with respect to the two fast variables r_1 and r_2 which evolve in the six-dimensional variable space. It is hence possible to plot C_0 as two surfaces by projecting it on the three-dimensional spaces (r_1, r_2, s_1) and (r_1, r_2, s_2) using Eq. (B.37a) and Eq. (B.37b) respectively. Figure B.2 shows the corresponding two surfaces for given nominal parameter values of the considered system. The surface in the three-dimensional space (r_1, r_2, s_1) (see Fig. B.2(a)) depicts C_0 with respect to the unstable mode λ_1. Note that, as observed when only one mode is unstable [a14], C_0 restricted to $r_2 = 0$ is S-shaped. Similar comments can be made considering the surface in the three-dimensional space (r_1, r_2, s_2) related to the unstable mode λ_2. The presence of an S-shaped critical manifold will be used to show that SMR steady-state responses of the mechanical system can exist (as in the case of only one unstable mode, see for example [a14]).

Finally, the slow dynamics described by the slow subsystem can be only written in the (r_1, r_2)-plane, as performed hereafter in Sect. B.3.4.

B.3.3 Stability of critical manifold

The points constituting C_0 are equilibrium point of the fast subsystem (E.31) and the stability properties can be analyzed from the Jacobian matrix of $\mathbf{g}_0(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ with respect to $\mathbf{t}$, denoted as $D_{\mathbf{t}}\mathbf{g}_0(\mathbf{s}, \mathbf{t})$, and evaluated

at each point of C_0 as

$$D_{\mathbf{t}}\mathbf{g}_0(\mathbf{s},\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} \dfrac{dH_{01}}{dr_1}(r_1) & -H_{03}(r_1,r_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{dH_{02}}{dr_2}(r_2) & -H_{04}(r_1,r_2) \\ \dfrac{1}{r_1}\dfrac{\partial H_{03}}{\partial r_1}(r_1,r_2) & \dfrac{H_{01}(r_1)}{r_1} & \dfrac{1}{r_1}\dfrac{\partial H_{03}}{\partial r_2}(r_1,r_2) & 0 \\ \dfrac{1}{r_2}\dfrac{\partial H_{04}}{\partial r_1}(r_1,r_2) & 0 & \dfrac{1}{r_2}\dfrac{\partial H_{04}}{\partial r_2}(r_1,r_2) & \dfrac{H_{02}}{r_2}(r_2) \end{pmatrix}. \tag{B.38}$$

The critical manifold C_0 contains both regular points defined as $\det\left(D_{\mathbf{t}}\mathbf{g}_0(\mathbf{s},\mathbf{t})\right) \neq 0$ and singular points characterized by $\det\left(D_{\mathbf{t}}\mathbf{g}_0(\mathbf{s},\mathbf{t})\right) = 0$. Depending on the eigenvalues of $D_{\mathbf{t}}\mathbf{g}_0(\mathbf{s},\mathbf{t})$, the set of regular points can be split into several parts (see definitions in Chap. 3 of [40]), including normally hyperbolic *attracting* parts (all the eigenvalues have strictly negative real parts), normally hyperbolic *repelling* parts (all the eigenvalues have strictly positive real parts), normally hyperbolic saddle type parts (neither attracting nor repelling) and non normally hyperbolic parts (at least one eigenvalue has a zero real part). Finally, the singular points for which the rank of $D_{\mathbf{t}}\mathbf{g}_0(\mathbf{s},\mathbf{t})$ is equal to 3 $(= 4-1)$, (the simplest possible rank deficiency) are denoted as fold points.

In general normally hyperbolic parts of C_0 constitute surfaces in the (r_1, r_2)-plane whereas points that are not normally hyperbolic (i.e. regular non normally hyperbolic points and singular points) are not isolated but form a one-dimensional curve inside C_0.

Fig. B.3 shows, for the same nominal parameter values of the considered system as above, the different parts of C_0 in the (r_1, r_2)-plane as

$$C_0 = C_{0,r}^a \cup (F^1 \cup C_{0,r}^{st,1}) \cup (F^2 \cup C_{0,r}^{st,2}) \cup (F^3 \cup C_{0,r}^{st,3}) \cup (N_r \cup C_{0,r}^{st,4}) \tag{B.39}$$

where $C_{0,r}^a$ (Fig. B.3 - white background) is a (regular) normally hyperbolic attracting part and $C_{0,r}^{st,1}$ (respectively $C_{0,r}^{st,2}$ and $C_{0,r}^{st,3}$) (Fig. B.3 - salmon background) is a (regular) normally hyperbolic saddle type part that meets $C_{0,r}^a$ at the fold curve F^1 (respectively F^2 and F^3) (Fig. B.3 - dashed and continuous red lines). $C_{0,r}^{st,4}$ (Fig. B.3 - green background) is a normally hyperbolic saddle type part that meets $C_{0,r}^a$ at a (regular) non normally hyperbolic curve N_r (Fig. B.3 - green line).

B.3.4 Fixed points of the slow-flow in C_0

As mentioned previously, the fixed points of the slow flow (B.19) characterize periodic or quasi-periodic regimes of the mechanical system (B.5). Since $0 < \epsilon \ll 1$, these fixed points can be approximated by those of the slow subsystem (E.30) which are computed in this section.

The critical manifold C_0 relates the variables s_1, s_2, Δ_1 and Δ_2 to the variable r_1 and r_2. Hence, substituting Eq. (B.36) into (E.30), the dynamics of the slow subsystem can be considered only with respect to the variables r_1 and r_2 as

$$D_{\mathbf{r}}\mathbf{H}(\mathbf{r})\,\mathbf{r}' = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{r}) \tag{B.40}$$

where $\mathbf{r} = (r_1, r_2)^T$,

$$D_{\mathbf{r}}\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H_1}{\partial r_1}(r_1,r_2) & \dfrac{\partial H_1}{\partial r_2}(r_1,r_2) \\ \dfrac{\partial H_2}{\partial r_1}(r_1,r_2) & \dfrac{\partial H_2}{\partial r_2}(r_1,r_2) \end{pmatrix} \tag{B.41}$$

is the Jacobian matrix of the function vector $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = (H_1(\mathbf{r}), H_2(\mathbf{r}))^T$ and

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{H_1(r_1,r_2)\,(a_7^2 + a_8^2)} \\ 2\sqrt{H_2(r_1,r_2)\,(a_9^2 + a_{10}^2)} \end{pmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{r}). \tag{B.42}$$

In the above equation the vector function $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ is obtained by replacing in $\mathbf{f}(\mathbf{s},\mathbf{r})$ the variables s_1, s_2, Δ_1 and Δ_2 by their expressions as functions of r_1 and r_2.

From Eq. (B.40), it is possible to detect *fixed points* or equivalently *regular fixed points* as

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \tag{B.43a}$$

$$\det\left(D_{\mathbf{r}}\mathbf{H}(\mathbf{r})\right) \neq 0. \tag{B.43b}$$

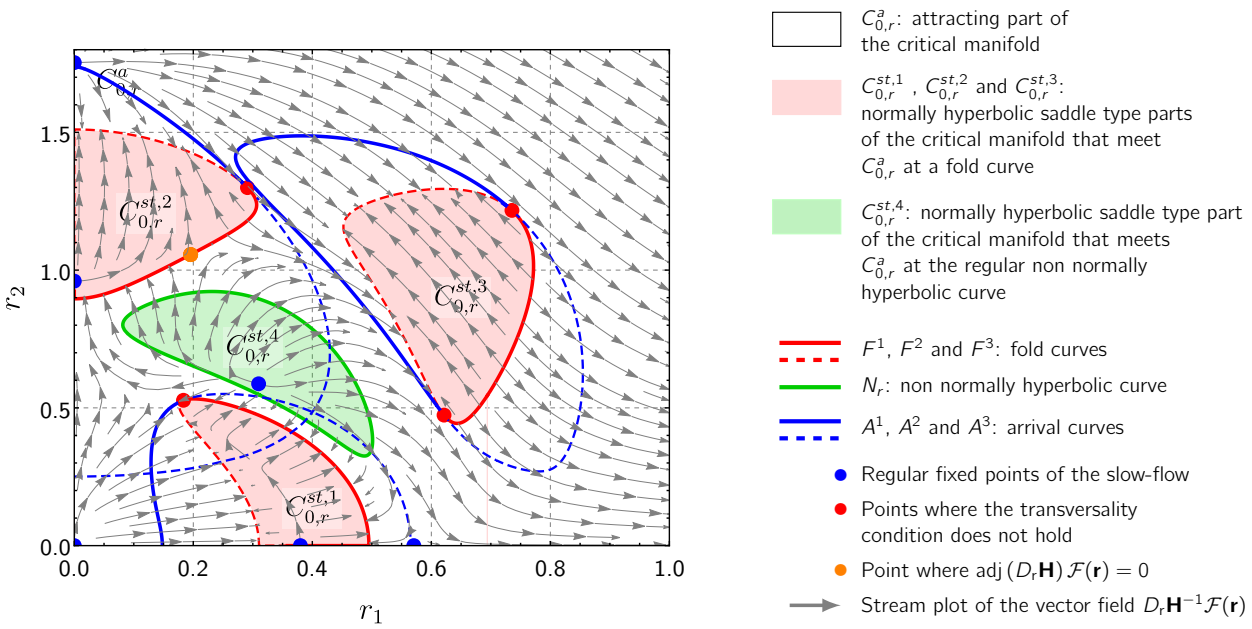


Figure B.3. The different parts of the critical manifold C_0 are represented in the (r_1, r_2)-plane, as defined by (B.39) : $C^a_{0,r}$ (white background) is a (regular) normally hyperbolic attracting part ; $C^{st,1}_{0,r}$ (respectively $C^{st,2}_{0,r}$ and $C^{st,3}_{0,r}$) (salmon background) is a (regular) normally hyperbolic saddle type part that meets $C^a_{0,r}$ at a fold curve F^1 (respectively F^2 and F^3) (dashed and continuous red lines) ; $C^{st,4}_{0,r}$ (green background) is also a normally hyperbolic saddle type part which meets $C^a_{0,r}$ at the (regular) non normally hyperbolic curve N_r (green line). The blue dashed lines A^1_1 (respectively A^2_1 and A^3_1) are the arrival curves associated with the red dashed lines F^1_1 (respectively F^2_1 and F^3_1) and the blue solid lines A^1_2 (respectively A^2_2) are the arrival curves associated with the red solid lines F^1_2 (respectively F^2_2). The stream plot of the vector field $D_{\mathbf{r}}\mathbf{H}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{r})$ is depicted with gray arrows. Blue dots represent the regular fixed points of the slow flow as defined by (B.43) (here unstable). The red dots are the points where the transversality condition (B.48) does not hold and the orange dot is the point where adj $(D_{\mathbf{r}}\mathbf{H})\,\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{r}) = 0$. Same parameters as in Fig. B.2.

For the given nominal parameter values, the stream plot of the vector field $D_{\mathbf{r}}\mathbf{H}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{r})$ associated with the dynamical system (B.40) is depicted in Fig. B.3 by gray arrows and the regular fixed points are reported as blue dots. A stability analysis has been performed given that all the fixed points are unstable. In the following magenta dots will be used to represent stable fixed points. A stable fixed point of the slow flow (B.19) characterizes a periodic regime of the initial system (B.5) if one of the variables r_i $(i = 1, 2)$ is equal to zero ; otherwise the regime is quasi-periodic with two frequency components.

Fixed points no longer exist in situations where

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \tag{B.44a}$$

$$\det\left(D_{\mathbf{r}}\mathbf{H}(\mathbf{r})\right) = 0. \tag{B.44b}$$

The points in which Eqs. (B.44) hold are called *folded singularities* in the literature of slow-fast dynamical systems. Considering the relation

$$\det\left(D_{\mathbf{r}}\mathbf{H}(\mathbf{r})\right) = -4r_1 r_2 \det\left(D_{\mathbf{t}}\mathbf{g}_0(\mathbf{s}, \mathbf{t})\right), \tag{B.45}$$

it follows that fold curves can be defined from $\det\left(D_{\mathbf{r}}\mathbf{H}(\mathbf{r})\right) = 0$ and that folded singularities correspond to situations in which fixed points and fold points coincide. Folded singularities are hints of particular solutions of such slow-fast systems, called *canard cycles* [16]. These solutions are not investigated in this paper.

B.3.5 Relaxation oscillations

As suggested by the particular shape of the critical manifold, we examine in this section if specific solutions of the slow-fast system named relaxation oscillations can occur. These solutions characterize complicate motions named SMR of the mechanical system (B.5). We focus here on the limit case $\epsilon \to 0$. A relaxation oscillation is a solution consisting of successive fast and slow segments forming a closed loop in the (r_1, r_2)-plane

representation of the critical manifold. The fast segments satisfy the fast subsystem (E.31) whereas the slow segments are obtained from the slow subsystem (E.30). Hence the slow segments take place on C_0 and the fast ones are outside of C_0. A switch from a slow segment to a fast one can occur when the trajectory crosses a fold line. In this case the fast segment appears as a jump from a fold point (in C_0) to an (arrival) point in C_0.

B.3.5.1 Transversality condition

The transversality condition is defined as a crossing condition with respect to a fold curve F^i ($i = 1, 2$ or 3) of the slow dynamics. It is obtained writing that the slow flow, projected in the (r_1, r_2)-plane, is not tangent to a fold curve F^i ($i = 1, 2$ or 3) (i.e. a jump can occur).

The slow subsystem (B.40) being by definition singular on the fold curve, it is first desingularized introducing the time rescaling $\tau_1 = \tau / \det(D_{\mathbf{r}}\mathbf{H}(\mathbf{r}))$, which leads to

$$\mathbf{r}' = \mathrm{adj}\,(D_{\mathbf{r}}(\mathbf{r})\mathbf{H})\,\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{r}) \tag{B.46}$$

where adj(.) denotes the adjoint matrix of (.) and $()'$ is now the derivative with respect to the new time τ_1.

Recalling that a fold curve in the (r_1, r_2)-plane is defined as $\det(D_{\mathbf{r}}\mathbf{H}(\mathbf{r})) = 0$ (see Sect. B.3.4), the transversality condition at a point $\mathbf{r}$ on a fold curve F^i ($i = 1, 2$ or 3) is written as follows

$$\mathrm{grad}_{\mathbf{r}}\left(\det\left(D_{\mathbf{r}}\mathbf{H}(\mathbf{r})\right)\right) \cdot \left[\mathrm{adj}\left(D_{\mathbf{r}}\mathbf{H}\right)\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{r})\right] \neq 0 \tag{B.47}$$

where $\mathrm{grad}_{\mathbf{r}}(.)$ denotes the gradient of (.) with respect to $\mathbf{r}$ and $\cdot$ denotes the usual dot product in $\mathbb{R}^2$. The points where the transversality condition does not hold are obtained solving

$$\mathrm{grad}_{\mathbf{r}}\left(\det\left(D_{\mathbf{r}}\mathbf{H}(\mathbf{r})\right)\right) \cdot \left[\mathrm{adj}\left(D_{\mathbf{r}}\mathbf{H}\right)\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{r})\right] = 0 \tag{B.48}$$

for $\mathrm{adj}\,(D_{\mathbf{r}}\mathbf{H})\,\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{r}) \neq 0$. The points defined by (B.48) are depicted in red on Fig. B.3 for the given nominal parameter values. These points are isolated and divide the fold curves into two parts

$$F^i = F^i_1 \quad \cup \quad F^i_2. \tag{B.49}$$

In Fig. B.3 the red dashed (respectively solid) lines are arbitrarily chosen to depict F^1_1, F^2_1 and F^3_1 (respectively F^1_2, F^2_2 and F^3_2). Moreover, we can see that the stream plot of the vector field $D_{\mathbf{r}}\mathbf{H}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{r})$ can head towards or against the fold lines.

If $\mathrm{adj}\,(D_{\mathbf{r}}\mathbf{H})\,\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{r}) = 0$, the considered points are no longer points where the transversality condition does not hold, but fixed points of the desingularized system (B.46), which are also hints of possible *canard cycles*. In Fig. B.3, a point, depicted as an orange dot, corresponds to this situation.

B.3.5.2 Jumps and arrival curves

When the slow dynamics described by (B.40) reaches a point $\mathbf{r}^J = (r_1^J, r_2^J)^T$ of a part F^i_j (with $i = 1, 2, 3$ and $j = 1, 2$) of the fold curve F^i (this can occur if the stream plot of the vector field $D_{\mathbf{r}}\mathbf{H}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{r})$ heads towards F^i_j), the trajectory can leave the critical manifold C_0 (and the slow epoch) and undergoes a jump (a fast episode) before reaching another part of $C^a_{0,r}$. The point $\mathbf{r}^J$ is named *jump point*. The jump is described by the fast subsystem (E.31) with the jump point $\mathbf{r}^J$ as initial condition. Hence the possible drop point, denoted as $\mathbf{r}^D = (r_1^D, r_2^D)^T$, of the fast dynamics on $C^a_{0,r}$ is determined as a fixed point of the fast subsystem (E.31), that is

$$\mathbf{g}_0(\mathbf{s}^J, \mathbf{t}) = 0 \tag{B.50}$$

where $\mathbf{s}^J$ is obtained from Eqs. (B.36) evaluated at $\mathbf{r}^J$.

Manipulating Eq. (B.50), it can be shown that the drop point $\mathbf{r}^D$ is defined as the root of the following set of equations

$$H_1\left(r_1^D, r_2^D\right) = H_1\left(r_1^J, r_2^J\right) \tag{B.51a}$$

$$H_2\left(r_1^D, r_2^D\right) = H_2\left(r_1^J, r_2^J\right), \tag{B.51b}$$

where the functions H_1 and H_2 are defined by Eqs. (B.37). The solutions obtained solving Eqs. (B.51) for each point of F^i_j define the *arrival curve* denoted as A^i_j. The arrival curves are also reported in Fig. B.3. The blue dashed line A^1_1 (respectively A^2_1 and A^3_1) is the arrival curve associated with the red dashed line F^1_1 (respectively F^2_1 and F^3_1) and the blue solid line A^1_2 (respectively A^2_2) is the arrival curve associated with the red solid line F^1_2 (respectively F^2_2).

The arrival curve (or a part of it) is stable, and therefore potentially reached by the trajectory at the end of a fast jump, if it is located on $C^a_{0,r}$, and unstable if it is located on $C^{st,i}_{0,r}$ ($i = 1, 2, 3$ or 4).

B.3.5.3 Description of a possible relaxation oscillation scenario

The previous results, leading to the general form of the critical manifold depicted in Figs. B.2 and B.3, allow us to predict different possible scenarios of relaxation oscillations. The latter can be defined from elementary relaxation oscillations.

An elementary relaxation oscillation is defined as a succession of fast, slow, fast and slow epochs starting from and dropping on the same part F_j^i. This can for example occur in Fig. B.3, considering the case where the slow dynamics in $C_{0,r}^a$ leads the trajectory to a jump point P_1 of F_1^1. Next a fast jump occurs before reaching a drop point P_2 of A_1^1. Then, from P_2, the slow dynamics reaches the fold curve F_2^1 at the jump point P_3, followed by a jump to a drop point P_4 of A_2^1. Finally the slow dynamics reaches the fold curve F_1^1 at a jump point P_5. If $P_1 = P_5$, the elementary relaxation oscillation defines a (sustained) simple relaxation oscillation.

In the case of Fig. B.3, it is easy to verify that elementary relaxation oscillations can occur in the neighborhood of $C_{0,r}^{st,1}$ and $C_{0,r}^{st,2}$, but not in the neighborhood of $C_{0,r}^{st,3}$. Indeed, a necessary condition to observe relaxation oscillations on both sides of a normally hyperbolic saddle type part $C_{0,r}^{st,i}$ $(i = 1, 2, 3)$ of the critical manifold is that both F_1^i and F_2^i contain parts where the vector field $D_{\mathbf{r}}\mathbf{H}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{r})$ is incoming.

Unlike the case where the slow dynamics can be described in a one-dimensional space, here the critical manifold C_0 appears as a two-dimensional parametric surface. Consequently the condition $P_1 = P_5$ is not always satisfied. Moreover a simple relaxation oscillation can appear after a transient phase including successive elementary relaxation oscillations. We have not developed a method to characterize the existence of such simple relaxation oscillations.

More complex (sustained) relaxation oscillation scenarios may be considered, such as a double relaxation oscillation which is defined from two successive elementary relaxation oscillations occurring alternatively in the neighborhoods of two different $C_{0,r}^{st,i}$.

The next section provides an overview of the possible steady-states regimes by means of numerical simulations and aims at understanding them with regard to the theoretical results presented in this section. Note that basins of attraction of the possible steady-states regimes must be considered besides the previous local analysis. Indeed, for a given set of parameters, the system may have several stable attractors (stable fixed points or sustained relaxation oscillations) and the initial conditions determine which one is reached.

B.4 Numerical results

In this part, numerical simulations are performed both to validate and to complete the asymptotic analysis presented in Sect. B.3 by means of direct numerical integration of the slow flow (B.19) and of the initial system (B.12). For the numerical simulations, we fix $\epsilon = 0.01$ and the other parameters are always chosen to ensure that the first two modes of the primary system (B.3a-B.3d) undergo Hopf bifurcations at $\gamma = \gamma_{\text{Hopf},1}$ and $\gamma = \gamma_{\text{Hopf},2}$ respectively (i.e. the real parts ρ_1 and ρ_2 (see Eq. (B.9)) of the eigenvalues become greater than zero at $\gamma_{\text{Hopf},1}$ and $\gamma_{\text{Hopf},2}$ respectively). The numerical values of $\gamma_{\text{Hopf},1}$ and $\gamma_{\text{Hopf},2}$ are given for each situation under study in the following sections.

In all the examples presented below, the friction coefficient γ is chosen such that $\gamma_{\text{Hopf},1} < \gamma_{\text{Hopf},2} < \gamma$. This choice validates the use of the reduced model (B.13) and the slow-flow formulation where s_1 and s_2 represent the two unstable modes of the primary system and r_1 and r_2 represent the frequency components (related to the two unstable modes of the primary system) of the relative displacement between the NES and the primary system.

Note that the primary structure (without NES) is linear, consequently it undergoes, when it is unstable, an exponential growth (i.e. the solution is not bounded). Therefore, all the responses of the coupled system shown in this section, which show bounded amplitudes, correspond to a quench of the "double-instability" by the single NES. These bounded motions can occur through periodic responses, quasi-periodic responses or complex SMR. Another type of response is shown at the end of the section (Sect B.4.4).

Sect. B.4.1 investigates the competition between two stable fixed points of the slow flow corresponding to the competition between two periodic or quasi-periodic regimes for the mechanical system; Sect. B.4.2 analyzes the competition between a sustained relaxation oscillation and a stable fixed point of the slow flow corresponding to the competition between an SMR and a periodic or quasi-periodic regime; in Sect. B.4.3 the competition between two kinds of sustained relaxation oscillations, corresponding to the competition between two SMR, is addressed. Finally, the case of the bifurcation of a fixed point to a limit cycle of the slow subsystem, corresponding to another type of amplitude and phase modulated response of the mechanical system, is presented in Sect. B.4.4.

B.4.1 Competition between two stable fixed points of the slow flow

In this section the following set of parameters is used :

$$\eta_1 = 0.01 \qquad \eta_2 = 0.07 \qquad \eta_3 = 0.01 \qquad \eta_4 = 0.07 \tag{B.52a}$$
$$\Omega_2 = 0.93 \qquad \Omega_3 = 1 \qquad \Omega_4 = 1.7 \tag{B.52b}$$
$$\eta_a = 0.01 \qquad \Omega_a = 0.95 \tag{B.52c}$$
$$\sigma = 1 \qquad \gamma = 0.09075 \tag{B.52d}$$
$$\mu = 0.395 \qquad \alpha = 7. \tag{B.52e}$$

For this set of parameters, $\gamma_{\text{Hopf},1} = 0.081$, $\gamma_{\text{Hopf},2} = 0.088$ and the invariant manifold C_0 admits a decomposition in the form of (B.39). The fixed points of the slow flow are obtained solving Eq. (B.43), which gives four unstable fixed points including the trivial point $(0,0)$, and two stable fixed points, denoted as $\mathbf{r}^*_{s,1}$ and $\mathbf{r}^*_{s,2}$, whose coordinates in the (r_1, r_2)-plane are respectively

$$\mathbf{r}^*_{s,1} = (0.26, 0) \quad \text{and} \quad \mathbf{r}^*_{s,2} = (0, 0.45). \tag{B.53}$$

The two stable fixed points of the slow flow correspond to a mitigation of the two unstable modes of the primary system. Note that if $\mathbf{r}^*_{s,1}$ is reached, the first unstable mode is mitigated through a periodic response of the physical system (B.12) [1] whereas the second unstable mode is completely suppressed. If $\mathbf{r}^*_{s,2}$ is reached, the first unstable mode is completely suppressed whereas the second unstable mode is mitigated through a periodic response. The associated critical manifold C_0 is depicted on Fig. B.4(b) and Fig. B.5(b). The stable fixed points are represented by magenta dots and the unstable fixed points by blue dots. Two stable and one unstable fixed points are in the neighborhood of the trivial point $(0,0)$. These four fixed points are on the (regular) normally hyperbolic attracting part $C^a_{0,r}$. The other two fixed points are far from $(0,0)$. The stream plot of the vector field of Eq. (B.40), also reported in Fig. B.4(b) and Fig. B.5(b), suggests that each stable fixed point admits a basin of attraction in the neighborhood of the trivial point $(0,0)$.

The direct numerical integration of the slow flow (B.19) is performed to localize, on the critical manifold C_0, the basin of attraction of each stable fixed point.

The time series of s_1, s_2, r_1 and r_2 obtained from two different initial conditions $\mathbf{r}_{0,1} = (r_1(0), r_2(0)) = (0.02, 0.1)$ and $\mathbf{r}_{0,2} = (0.02, 0.2)$ are reported respectively on Fig. B.4(a) and Fig. B.5(a), and the corresponding trajectories in the (r_1, r_2)-plane are plotted on Fig. B.4(b) and Fig. B.5(b). In the latter, the initial condition points $\mathbf{r}_{0,1}$ and $\mathbf{r}_{0,2}$ are represented by light blue dots and the trajectories of the slow flow are depicted using a color gradient from light blue at $t = 0$ to black at $t = 30000$. These trajectories give a good idea of the basins of attraction and of the role played by the unstable fixed points. The basin of attraction of $\mathbf{r}^*_{s,1}$ is located between the r_1-axis and the streamline that links the trivial point to the unstable fixed point located at $(0.16, 0.25)$; the basin of attraction of $\mathbf{r}^*_{s,2}$ is located between the same streamline and the r_2-axis.

Finally, the time series obtained solving the complete equations (B.12) are also reported in Fig. B.4(a) and Fig. B.5(a) following the remarks below.

From Eqs. (B.14) to (B.16) and (B.18), the variables of the complete model (B.12) can be expressed as functions of the slow-flow variables as follows

$$q_1 = s_1 e^{j\left(\lambda^I_1 t + \delta_1\right)}, \qquad q_2 = s_2 e^{j\left(\lambda^I_2 t + \delta_1\right)}, \tag{B.54}$$

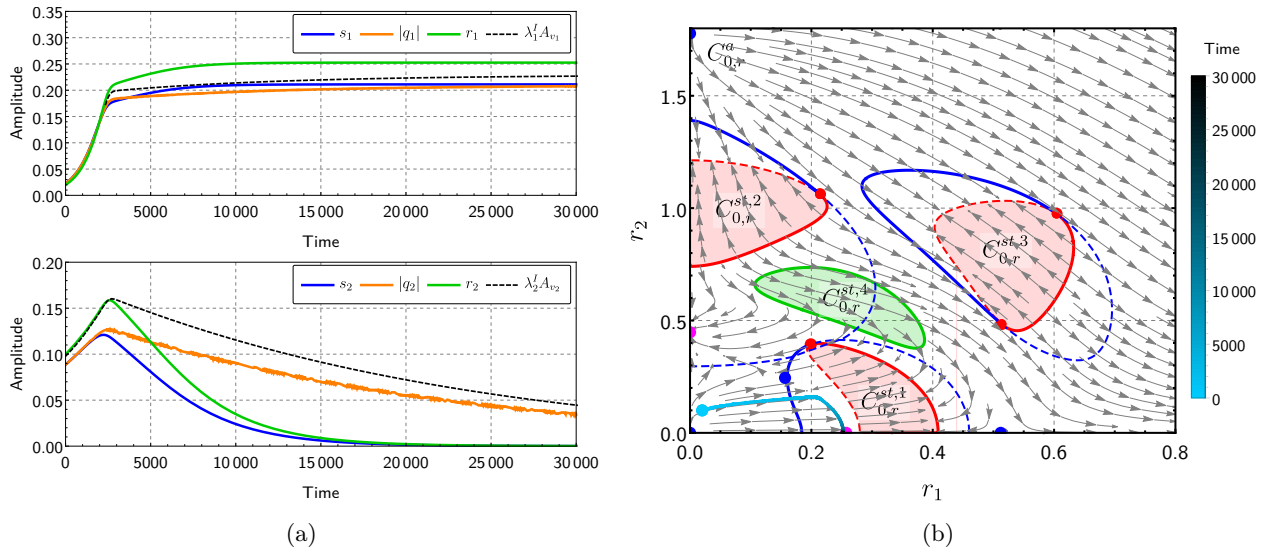
$$v_1 = \frac{r_1}{\lambda^I_1} \sin\left(\lambda^I_1 t + \theta_1\right) = A_{v_1} \sin\left(\lambda^I_1 t + \theta_1\right), \qquad v_2 = \frac{r_2}{\lambda^I_2} \sin\left(\lambda^I_2 t + \theta_2\right) = A_{v_2} \sin\left(\lambda^I_2 t + \theta_2\right). \tag{B.55}$$

To analyze the results, the modulus of the variables q_1 and q_2 (orange lines) of the system (B.12) must be compared to the variables s_1 and s_2 (blue lines) of the slow flow (B.19) respectively. Moreover, the spectrograms of the signal $v(t)$ (resulting from the numerical integration of Eq. (B.12)) are then computed and the amplitudes A_{v_1} and A_{v_2} of the components $v_1(t)$ and $v_2(t)$ related to the frequencies λ^I_1 and λ^I_2 respectively are extracted. The variables $\lambda^I_1 A_{v_1}$ and $\lambda^I_2 A_{v_2}$ (black dashed lines) are to be compared to the variables r_1 and r_2 (green lines) of the slow flow (B.19).

In each case the behavior of s_1 (respectively r_1, s_2 and r_2) is found close to the behavior of q_1 (respectively $\lambda^I_1 A_{v_1}$, q_2 and $\lambda^I_2 A_{v_2}$), which allows us to validate the theoretical development presented in Section B.3.

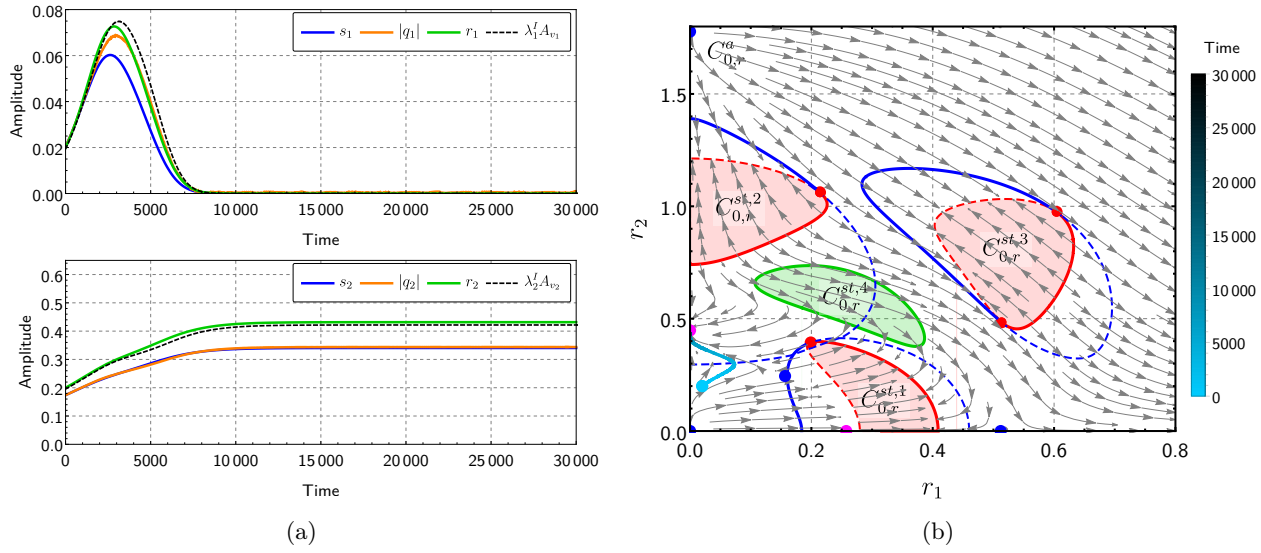
Even if the previous comparisons show a good agreement, quantitative differences are nevertheless observed. We recall that two steps separate the initial mechanical system (B.12) and its approximated slow

1. Indeed, if $r_1 = 0$ or $r_2 = 0$, the non averaged initial system undergoes periodic oscillations.



(a) (b)

Figure B.4. *Competition between two stable fixed points of the slow flow (1^{st} example).* (a) Amplitudes r_1, s_1 (top) and r_2, s_2 (bottom) as functions of time with the initial condition $\mathbf{r}_{0,1} = (0.02, 0.1)$ obtained by solving numerically the slow flow (B.19). The time series of q_1 (top) and q_2 (bottom) obtained solving numerically Eqs. (B.12) are also shown. (b) Similar representation as in Fig. B.3 with the addition of the trajectories (solid lines with a color gradient from light blue at $t = 0$ to black at $t = 30000$) shown in (a) ; the magenta dots are the stable fixed points of the slow flow. The parameters (G.45) are used.



(a) (b)

Figure B.5. *Competition between two stable fixed points of the slow flow (2^{nd} example).* Same caption as in Fig. B.4 with the initial condition $\mathbf{r}_{0,2} = (0.02, 0.2)$.

flow (B.19) : the reduction of the dynamics keeping only the unstable modes and the averaging with respect to the frequencies of these two unstable modes. Additional numerical simulations (not displayed here) show that the quantitative differences observed here (and also in the following sections) are mainly due to the averaging step.

B.4.2 Competition between a sustained relaxation oscillation and a stable fixed point of the slow flow

To illustrate the competition between sustained relaxation oscillations and a stable fixed point we use the following parameters

$$\eta_1 = 0.01 \qquad \eta_2 = 0.07 \qquad \eta_3 = 0.01 \qquad \eta_4 = 0.07 \tag{B.56a}$$

$$\Omega_2 = 0.93 \qquad \Omega_3 = 1 \qquad \Omega_4 = 1.7 \tag{B.56b}$$
$$\eta_a = 0.01 \qquad \Omega_a = 0.95 \tag{B.56c}$$
$$\sigma = 1 \qquad \gamma = 0.09 \tag{B.56d}$$
$$\mu = 0.25 \qquad \alpha = 7. \tag{B.56e}$$

The parameters of the primary system are here unchanged compared to those of Sect. B.4.1 (only the bifurcation parameter γ and the NES parameters μ ans α are modified). Therefore, the values of the Hopf bifurcation points are still $\gamma_{\text{Hopf},1} = 0.081$ and $\gamma_{\text{Hopf},2} = 0.088$. Moreover, the invariant manifold C_0 admits again a decomposition in the form of (B.39) ; the slow flow now admits six fixed points, among which only one is stable. The latter, denoted as $\mathbf{r}^*_{s,3}$, has the following coordinates in the (r_1, r_2)-plane :

$$\mathbf{r}^*_{s,3} = (0, 0.57). \tag{B.57}$$

If $\mathbf{r}^*_{s,3}$ is reached, only the first unstable mode is completely suppressed whereas the second unstable mode is mitigated through a periodic response. The critical manifold C_0 is reported in Fig. B.6(b) and Fig. B.7(b) where the stable fixed point is again represented by a magenta dot and the unstable points by blue dots. The stable fixed point and two unstable fixed points (excluding the trivial point) are in the neighborhood of the trivial point $(0, 0)$, the other unstable points being on the contrary far from $(0, 0)$. The stream plot of the vector field of Eq. (B.40) suggests that, depending of the initial condition point, the system can reach the stable fixed point $\mathbf{r}^*_{s,3}$ or initiate another type of oscillations.

Direct numerical integration of the slow flow (B.19) is performed to localize, on the critical manifold C_0, the basin of attraction of the stable fixed point and to characterize the other type of oscillations. The time series obtained from the slow flow (B.19) considering the initial condition $\mathbf{r}_{0,3} = (0.01, 0.15)$ are plotted in Fig. B.6(a) and, using a color gradient, the corresponding trajectory in the (r_1, r_2)-plane is depicted in Fig. B.6(b). It can be seen that the stable fixed point is reached.

Results related to a second initial condition point $\mathbf{r}_{0,4} = (0.01, 0.03)$ are reported in Fig. B.7. Again, the time series are plotted in Fig. B.7(a) and the trajectory in the (r_1, r_2)-plane in Fig. B.7(b). To better understand the observed behavior, three-dimensional plots are also used (see Figs. B.7(c) and B.7(d)), where the trajectories are plotted in the (r_1, r_2, s_1)-space and the (r_1, r_2, s_2)-space respectively and superimposed to the surfaces, defined by Eqs. (B.36), characterizing the invariant manifold C_0. Moreover, using the same color code as in Fig. B.3, the fold and arrival curves as well as the points where the transversality condition is lost are depicted in Figs. B.7(c) and B.7(d).

Fig. B.7(b) shows that after transient elementary relaxation oscillations (described in Sect. B.3.5.3) with respect to the normally hyperbolic saddle type part $C^{st,1}_{0,r}$ of the critical manifold, a sustained simple relaxation oscillation (described in Sect. B.3.5.3) occurs along the straight line $r_2 = 0$ (s_2 and r_2 tend towards zero as visible in Fig. B.7(a)). Observing Figs. B.7(c) and B.7(d), we can see that this simple relaxation oscillation is due to an S-shape of the critical manifold in the (r_1, r_2, s_1)-space and in the plane $r_2 = 0$. This means that the first unstable mode here is completely suppressed while the second unstable mode is mitigated through a sustained simple relaxation oscillation which corresponds to an SMR for the initial physical system (B.12).

As in the previous case studied in Sect. B.4.1, the boundary between the basins of attractions of the two attractors appears to be the connection between two unstable fixed points, i.e. the trivial fixed point and the fixed point located at $(0.22, 0.18)$.

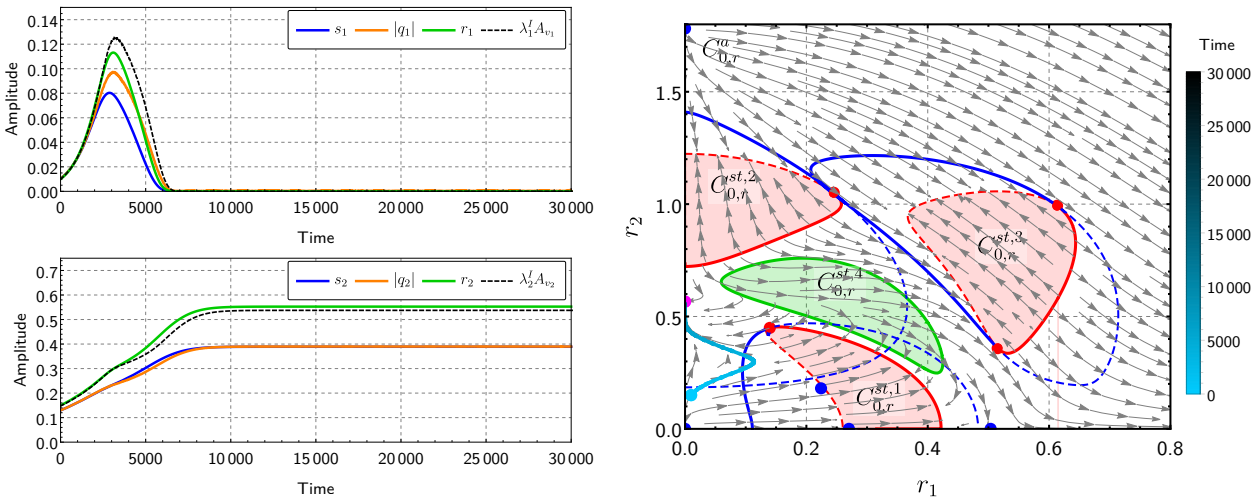
Here again, the predictions obtained with the slow flow (B.19) are in good agreement with the simulations of the complete system (B.12) (see Figs. B.6(a) and B.7(a)).

B.4.3 Competition between two kinds of sustained relaxation oscillations

In this section the following parameters are used

$$\eta_1 = 0.01 \qquad \eta_2 = 0.07 \qquad \eta_3 = 0.01 \qquad \eta_4 = 0.07 \tag{B.58a}$$
$$\Omega_2 = 0.93 \qquad \Omega_3 = 1 \qquad \Omega_4 = 1.7 \tag{B.58b}$$
$$\eta_a = 0.01 \qquad \Omega_a = 0.95 \tag{B.58c}$$
$$\sigma = 0.85 \qquad \gamma = 0.0935 \tag{B.58d}$$
$$\mu = 0.28 \qquad \alpha = 5 \tag{B.58e}$$

for which the slow flow (B.19) has six fixed points, all unstable. The values of the Hopf bifurcation points are $\gamma_{\text{Hopf},1} = 0.078$ and $\gamma_{\text{Hopf},2} = 0.088$. The critical manifold C_0 is reported in Fig. B.8(b) and Fig. B.9(b). Note that there are no unstable fixed points in the neighborhood of the trivial point. Obviously in this case, because



(a) (b)

Figure B.6. *Competition between a sustained relaxation oscillation and a stable fixed point of the slow flow (1st example).* Same caption as in Fig. B.4 with the initial condition $\mathbf{r}_{0,3} = (0.01, 0.15)$. The set of parameters (F.4) is used.

the slow flow has no stable fixed point, the instability mitigation cannot be performed through quasi-periodic or periodic regimes.

In practice, depending on the chosen initial conditions, two kinds of sustained relaxation oscillations can be observed by means of numerical simulations of the slow flow (B.19).

Fig. B.8 illustrates the first scenario. The time series are obtained from the initial condition $\mathbf{r}_{0,5} = (0.05, 0.05)$ and are reported in Fig. B.8(a). This scenario is similar to that observed in Sect. B.4.2 and reported in Fig. B.7 : after transient elementary relaxation oscillations, the second unstable mode is completely suppressed (see Fig. B.8(a)) whereas the first unstable mode is mitigated through a sustained simple relaxation oscillation taking place along the straight line $r_2 = 0$ (see the black curve in Fig. B.8(c)). This simple relaxation oscillation is due to the S-shape of the critical manifold in the (r_1, r_2, s_1)-space and in the plane $r_2 = 0$. It consists of four parts : two fast jumps (from the fold curve F_1^1 to the arrival curve A_1^1 and from the fold curve F_2^1 to the arrival curve A_2^1) and two slow epochs on $C^a_{0,r}$.

Fig. B.9 illustrates the second scenario. The time series are obtained from the initial condition $\mathbf{r}_{0,6} = (0.1, 0.1)$ and are reported in Fig. B.9(a). After a quick transient phase, the two unstable modes are mitigated through complex relaxation oscillations with respect to the normally hyperbolic saddle type parts $C^{st,1}_{0,r}$ and $C^{st,2}_{0,r}$ of the critical manifold successively. The complex relaxation oscillations here consist of three parts : an elementary relaxation oscillation due to the S-shape of the critical manifold in the (r_1, r_2, s_2)-space (see Fig. B.9(d)), an elementary relaxation oscillation due to the S-shape of the critical manifold in the (r_1, r_2, s_1)-space (see Fig. B.9(c)) and transient bursting oscillations (see Figs. B.9(b) and B.9(c)). This sustained complex relaxation oscillation regime is due to successive targeted energy transfers, first from the first unstable mode to the NES (principally when the jumps from F_1^2 to A_1^2 and from F_2^2 to A_2^2 occur) and then from the second mode to the NES (when the jumps from F_1^1 to A_1^1 occur). Note that those energy transfers do not occur simultaneously as shown in Fig. B.9(a).

From [40], bursting oscillations are defined as patterns of time series alternating between near steady-state and rapid oscillatory phases. Here, the steady-state phases are the slow evolution parts on $C^a_{0,r}$ of the relaxation oscillation cycles and the rapid oscillatory phases correspond to the fast jumps which are now oscillating. This phenomenon is related to the normally hyperbolic saddle type part of C^0, $C^{st,4}_{0,r}$, that meets $C^a_{0,r}$ at the (regular) non normally hyperbolic curve N_r (see Fig. B.9(b)). Indeed, when a part of the arrival curve is in this area, it is made up of unstable fixed points of the fast subsystem (E.31). In this case, the attractor of the fast dynamics during a jump, at constant values of s_1 and s_2 (see Eq. (B.32a)), is no longer an equilibrium point but a limit cycle oscillation (LCO). Then, when the jump is finished, because s_1 and s_2 vary again the system leaves $C^{st,4}_{0,r}$ and the LCO undergoes a bifurcation to a new steady-state (slow) phase. Here the bursting oscillations are transient but depending on the parameter values, they can also been sustained. This scenario has not been studied in this paper.

The boundary between the basins of the two attractors does not appear as clearly as in the previous situations where it corresponded to the connection between two unstable points. Indeed, as noticed above,

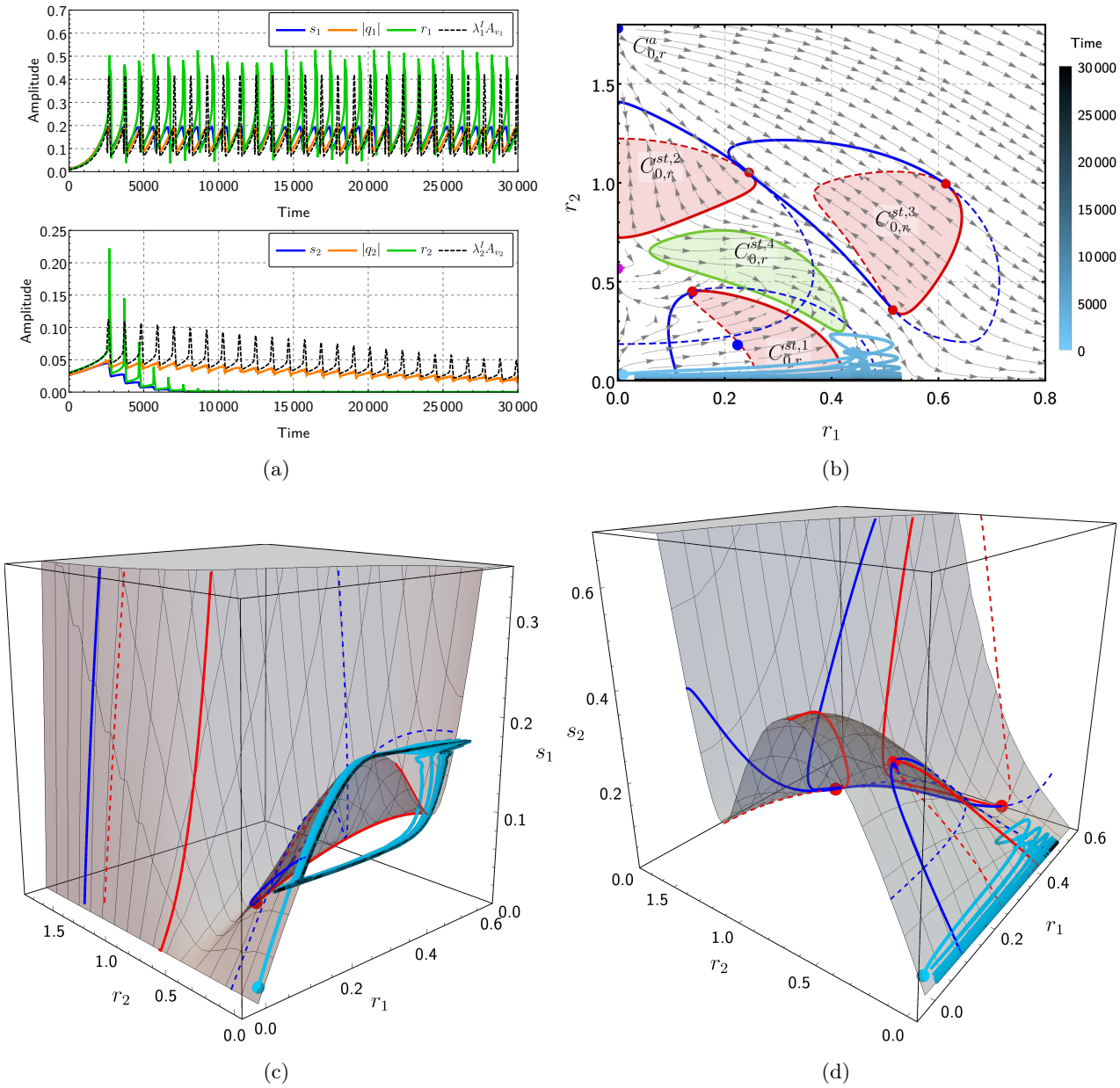


Figure B.7. *Competition between a sustained relaxation oscillation and a stable fixed point of the slow flow (2^{nd} example).* (a) and (b) Same captions as in Fig. B.4 with the initial condition $\mathbf{r}_{0,4} = (0.01, 0.03)$. In (c) and (d) the trajectory of the slow flow obtained from the numerical simulation of Eq. (B.19) is plotted in the (r_1, r_2, s_1)-space and the (r_1, r_2, s_2)-space respectively and superimposed to the surfaces given by Eqs. (B.37a) and (B.37b). The set of parameters (F.4) is used.

there are no unstable fixed points in the neighborhood of the trivial point. Here, the boundary depends on the first reached point on the fold curve F_1 and on the direction of the transient relaxation oscillations along $C_{0,r}^{st,1}$, which can move downward (first scenario) or upward (second scenario).

Finally, here also, the predictions obtained with the slow flow (B.19) are in good agreement with the complete system (B.12) (see Figs. B.8(a) and B.9(a)).

B.4.4 Bifurcation of a fixed point to a limit cycle of the slow subsystem

For this last example, the following parameters are used with two different values of the friction coefficient

$$\eta_1 = 0.01 \qquad \eta_2 = 0.07 \qquad \eta_3 = 0.01 \qquad \eta_4 = 0.07 \tag{B.59a}$$

$$\Omega_2 = 0.93 \qquad \Omega_3 = 1 \qquad \Omega_4 = 1.7 \tag{B.59b}$$

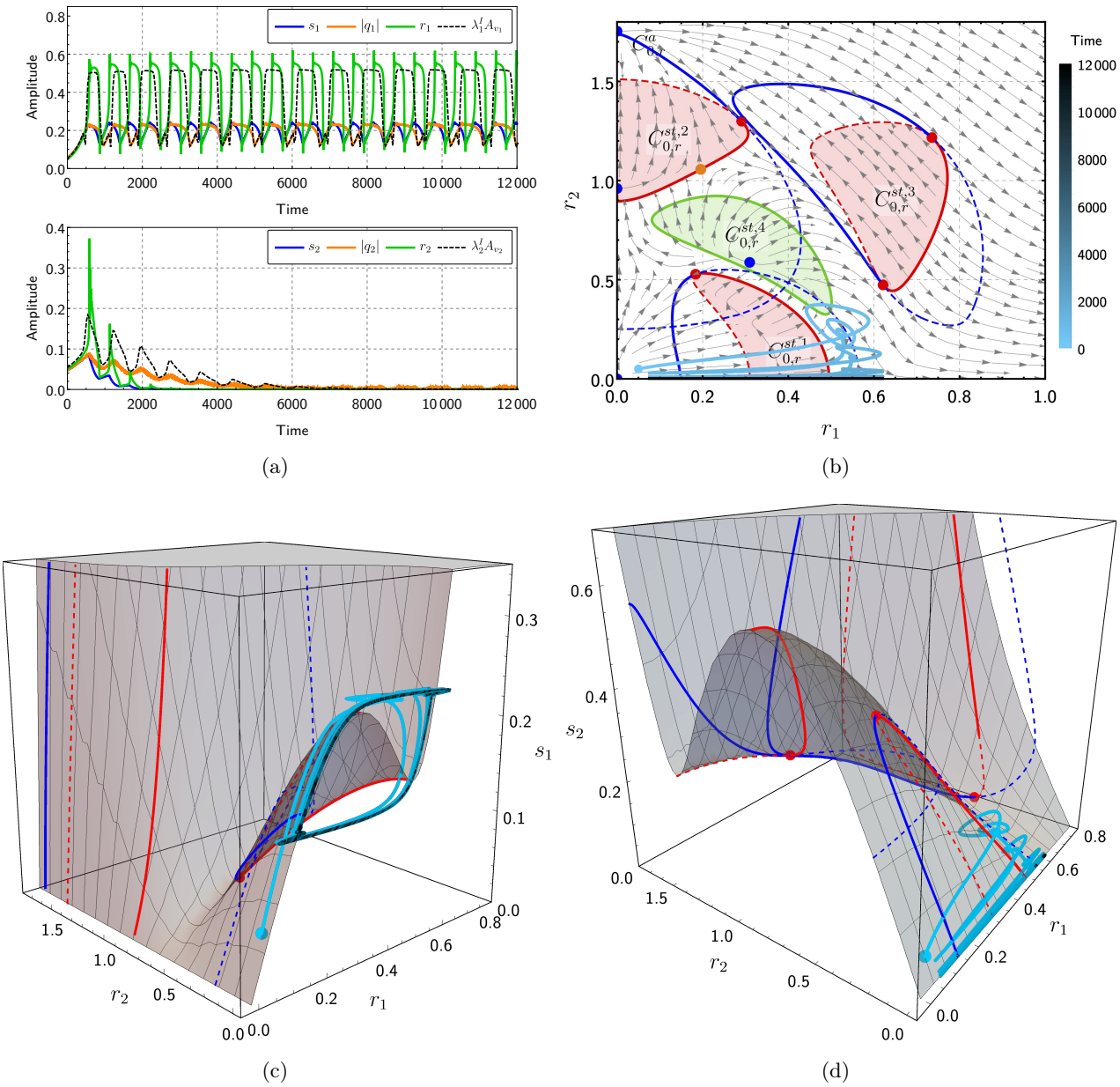


Figure B.8. *Competition between two kinds of sustained relaxation oscillations (1st example).* Same caption as in Fig. B.7 with the initial condition $\mathbf{r}_{0,5} = (0.05, 0.05)$. The set of parameters (B.58) is used.

$$\eta_a = 0.01 \qquad \Omega_a = 0.95 \qquad \sigma = 0.98 \tag{B.59c}$$

$$\gamma_1 = 0.09053 \text{ (1}^{\text{st}}\text{ example)} \qquad \gamma_2 = 0.09075 \text{ (2}^{\text{nd}}\text{ example)} \tag{B.59d}$$

$$\mu = 0.45 \qquad \alpha = 7. \tag{B.59e}$$

With the parameters (B.59), the primary system undergoes Hopf bifurcations at $\gamma_{\text{Hopf},1} = 0.08$ and $\gamma_{\text{Hopf},2} = 0.086$. The associated critical manifolds C_0 are reported in Fig. B.10(b) and Fig. B.10(d) for $\gamma = 0.09053$ and $\gamma_2 = 0.09075$ respectively.

For $\gamma_1 = 0.09053$, the slow flow (B.19) admits a single stable fixed point having the following coordinates in the (r_1, r_2)-plane :

$$\mathbf{r}_{s,4}^* = (0.06, 0.61), \tag{B.60}$$

and five unstable fixed points. Note that if $\mathbf{r}_{s,4}^*$ is reached, both unstable modes are mitigated through a periodic response of the physical system which therefore undergoes a quasi-periodic regime even if the amplitude of the component corresponding to the first unstable mode is much smaller than that of the second unstable mode. Numerical simulations of the slow flow (B.19) corresponding to this situation are shown in Figs. B.10(a) and

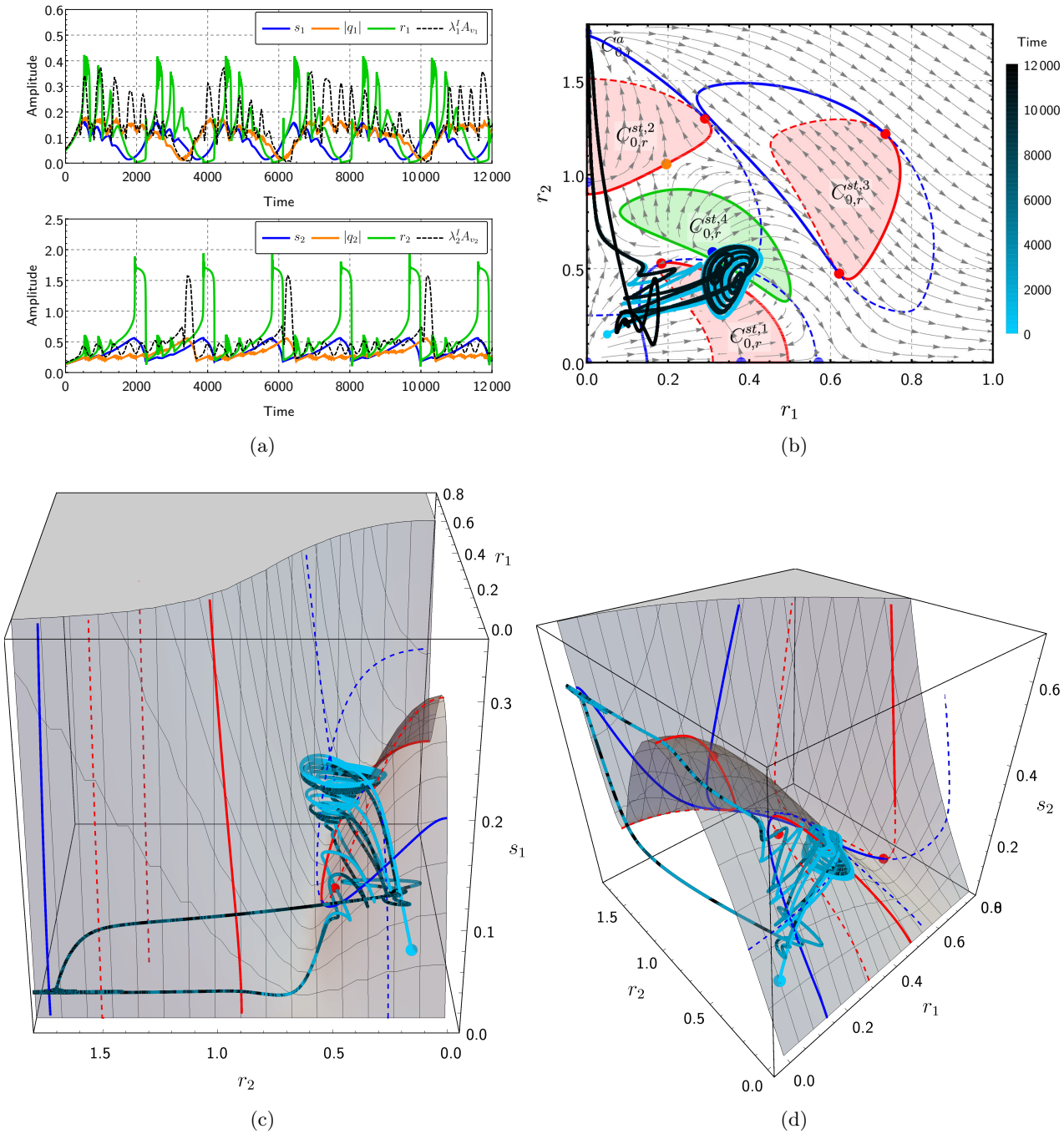


Figure B.9. *Competition between two kinds of sustained relaxation oscillations (2^{nd} example).* Same caption as in Fig. B.7 with the initial condition $\mathbf{r}_{0,6} = (0.05, 0.15)$. The set of parameters (B.58) is used.

B.10(b).

Then, when γ increases, the stable fixed point $\mathbf{r}_{s,4}^*$ of the slow flow undergoes a Hopf bifurcation and becomes unstable. For example, for $\gamma = 0.09075$, the slow flow has only unstable fixed points, four of which are in the neighborhood of $(0, 0)$.

Numerical simulations of the slow flow (B.19) corresponding to this second case have been performed for different values of the initial conditions, showing that only one stable attractor is present whose basin of attraction includes a neighborhood of the trivial point $(0, 0)$ (as it was previously the case for the stable fixed point). The time series obtained from the initial condition $r_{0,7} = (0.05, 0.05)$ are reported in Figs. B.10(c) and Fig. B.10(d). The figures show that after the bifurcation of the stable fixed point (B.60), the slow flow undergoes an LCO (see the black curve in Fig. B.10(d)) which takes place in the attractive part $C_{0,r}^a$ of the critical manifold, and therefore only at the slow-time scale (there are no fast jumps, unlike for relaxation oscillations).

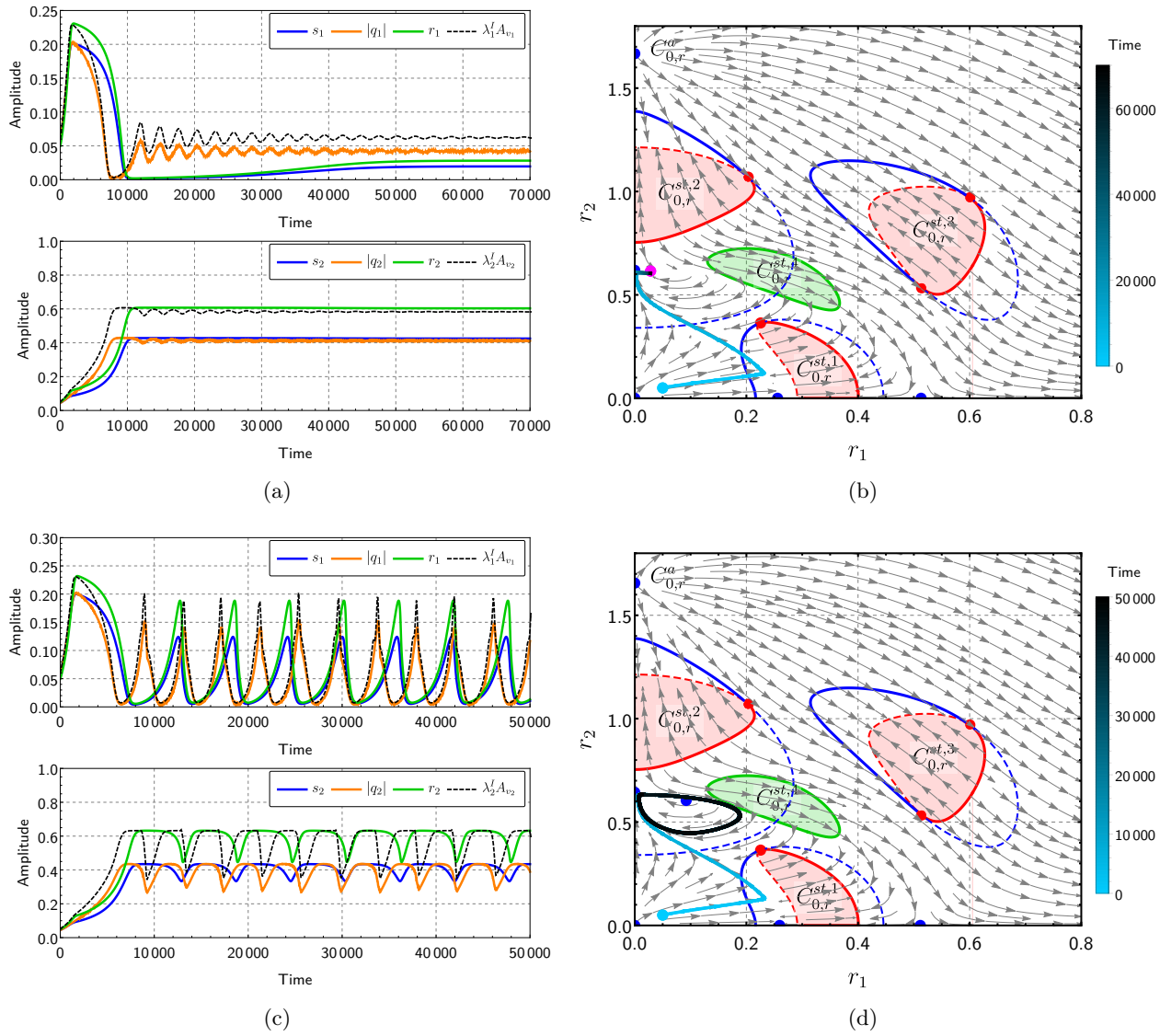


Figure B.10. *Bifurcation of a fixed point to a limit cycle of the slow subsystem.* Same caption as in Fig. B.4 with the initial condition $\mathbf{r}_{0,7} = (0.05, 0.05)$. The parameters (B.59) are used, with (a) and (b) $\gamma = 0.09053$ and (c) and (d) $\gamma = 0.09075$.

Therefore, the LCO can be characterized theoretically only from the two-dimensional slow subsystem (B.40). This situation also corresponds to a modulated response, in terms of amplitude and phase, of the mechanical system (B.13), but here due to a limit cycle of the slow flow instead of relaxation oscillations of the slow flow as in the SMR case.

Finally, once again, the predictions obtained with the slow flow (B.19) are in good agreement with that of the complete system (B.12) (see Figs. B.10(a) and B.10(c)), which allows us to validate the asymptotic analysis presented in Sect. B.3.

B.5 Conclusion

The possibility of mitigating simultaneously two unstable modes of a linear MDOF primary system using a nonlinear energy sink (NES) has been investigated in this paper by means of an asymptotic analysis complemented by numerical simulations. This study focuses on a 4-DOF phenomenological friction system having two unstable modes and coupled to a single NES.

The asymptotic analysis begins with the well-known biorthogonal transformation to diagonalize the primary system for the purpose of reducing its dynamics only to the two unstable modes. A complexification-averaging process is applied at the vicinity of the two 1 :1-1 :1 resonances at the natural frequencies of the unstable modes, leading to the slow flow of the system which takes the form of a $(4, 2)$-fast-slow system. The

slow variables characterize the two unstable modes of the primary system whereas the four fast variables describe the relative motion between the NES and the primary system (amplitudes and phases of the two frequency components relative to the two unstable modes). The slow flow is finally analyzed by means of the geometric singular perturbation theory. The critical manifold C_0 is obtained and, contrary to the case of a single unstable mode, it consists in a 2-dimensional parametric surface with respect to the two fast variables r_1 and r_2 which evolve in the whole 6-dimensional variable space, and which characterize the frequency components of the NES dynamics with respect to the two unstable modes. The critical manifold appears as the union of a normally hyperbolic attracting domain and four normally hyperbolic saddle type domains (with finite dimensions). Two of them meet the attracting part at fold curves and it can be shown by analyzing, inter alia, the transversality condition, that these fold curves can be split into successive incoming and outgoing sections, enabling jumps and complex motions of the slow flow, such as successive slow and fast epochs (i.e. relaxation oscillations). Some relaxation oscillation scenarios have been deduced from the asymptotic analysis, among which simple relaxation oscillations around one of the normally hyperbolic saddle type domains, or multi-relaxation oscillations around two of the normally hyperbolic saddle type domains. These relaxation oscillation scenarios and the stable fixed points of the slow flow define possible sustained mitigated regimes of the physical system such as strongly modulated responses (SMR), complex SMR, periodic or quasi-periodic regimes.

Direct numerical integrations of the system have been performed. First of all, the simulations validated that it was possible to mitigate simultaneously two unstable modes by means of a single NES. The two unstable modes can be completely eliminated, or mitigated through one of the sustained regimes (periodic, quasi-periodic, SMR). Secondly, the simulations allowed us to study the notion of basin of attraction. Indeed, because of the two-dimensional nature of C_0 and the fact that, for a given set of parameters, the system may have several stable attractors (stable fixed points or sustained relaxation oscillations) this notion has to be considered. Three kinds of competitions have been observed, respectively between two stable fixed points of the slow flow, between a sustained relaxation oscillation and a stable fixed point of the slow flow and between two kinds of sustained relaxation oscillations. In each situation considered, a good agreement has been observed between the theoretical results and the numerical simulations, which validates the proposed asymptotic analysis. Moreover, the numerical simulations highlighted that the two unstable modes could also be mitigated through a strongly modulated response defined from a limit cycle of the slow system at the slow time scale.

As a general conclusion, when it is coupled to a linear system which has two unstable modes, a single NES is able to produce bounded motions of various kinds, thoroughly studied in this paper. In real life, unstable mechanical systems are in general nonlinear and therefore they undergo limit cycle oscillations which can be dangerous if they are of significant amplitude. As a perspective, from an engineering point of view, the NES may be designed to produce effective bounded motions, i.e. with a lower amplitude than that of the system without the NES. The present study might constitute a tool to perform this design. The amplitude of the oscillations of the resulting bounded motions may also be compared with those provided by other mitigation methods.

Acknowledgements

We thank the anonymous reviewers for their careful reading of our manuscript and their many relevant comments and suggestions.

B.6 Appendix A. Coefficients of the slow-fow system (B.19)

The coefficients a_i for $i = 1, \ldots, 10$, characterizing the functions $\mathbf{f}$ and $\mathbf{g}$ which define the slow-fow system (B.19), are given by

$$a_1 = \frac{\eta_a L_{71}^{\mathrm{I}} R_{51}^I}{\sigma} - \eta_a L_{51}^I R_{51}^I + \frac{\Omega_a^2 L_{71}^I R_{11}^I}{\sigma} - \Omega_a^2 L_{51}^I R_{11}^I - \frac{R_{51}^R \eta_a L_{71}^R}{\sigma} + R_{51}^R \eta_a L_{51}^R - \frac{R_{11}^R \Omega_a^2 L_{71}^R}{\sigma} + R_{11}^R \Omega_a^2 L_{51}^R + \gamma L_{61}^I R_{11}^I - \eta_1 L_{51}^I R_{51}^I - L_{51}^I R_{11}^I - \gamma R_{11}^R L_{61}^R + \eta_1 R_{51}^R L_{51}^R + R_{11}^R L_{51}^R + \rho_1, \tag{B.61}$$

$$a_2 = \frac{\Omega_a^2 L_{71}^I}{2\sigma\lambda_1^I} - \frac{\Omega_a^2 L_{51}^I}{2\lambda_1^I} + \frac{\eta_a L_{71}^R}{2\sigma} - \frac{1}{2}\eta_a L_{51}^R + \frac{\gamma L_{61}^I}{2\lambda_1^{-I}} - \frac{L_{51}^I}{2\lambda_1^I} - \frac{1}{2}\eta_1 L_{51}^R, \tag{B.62}$$

$$a_3 = \frac{\eta_a L_{71}^I}{2\sigma} - \frac{1}{2}\eta_a L_{51}^I - \frac{\Omega_a^2 L_{71}^R}{2\sigma\lambda_1^I} + \frac{\Omega_a^2 L_{51}^R}{2\lambda_1^I} - \frac{1}{2}\eta_1 L_{51}^I - \frac{\gamma L_{61}^R}{2\lambda_1^I} + \frac{L_{51}^R}{2\lambda_1^I}, \tag{B.63}$$

$$a_4 = \frac{\eta_a L^I_{73} R^I_{53}}{\sigma} - \eta_a L^I_{53} R^I_{53} + \frac{\Omega_a^2 L^I_{73} R^I_{13}}{\sigma} - \Omega_a^2 L^I_{53} R^I_{13} - \frac{R^R_{53} \eta_a L^R_{73}}{\sigma} + R^R_{53} \eta_a L^R_{53} - \frac{R^R_{13} \Omega_a^2 L^R_{73}}{\sigma} + R^R_{13} \Omega_a^2 L^R_{53} + \gamma L^I_{63} R^I_{13} - \eta_1 L^I_{53} R^I_{53} - L^I_{53} R^I_{13} - \gamma R^R_{13} L^R_{63} + \eta_1 R^R_{53} L^R_{53} + R^R_{13} L^R_{53} + \rho_2, \tag{B.64}$$

$$a_5 = \frac{\Omega_a^2 L^I_{73}}{2\sigma \lambda^I_2} - \frac{\Omega_a^2 L^I_{53}}{2\lambda^I_2} + \frac{\eta_a L^R_{73}}{2\sigma} - \frac{1}{2} \eta_a L^R_{53} + \frac{\gamma L^I_{63}}{2\lambda^I_2} - \frac{L^I_{53} - \frac{1}{2}\eta_1 L^R_{53}}{2\lambda^I_2}, \tag{B.65}$$

$$a_6 = \frac{\eta_a L^I_{73}}{2\sigma} - \frac{1}{2} \eta_a L^I_{53} - \frac{\Omega_a^2 L^R_{73}}{2\sigma \lambda^I_2} + \frac{\Omega_a^2 L^R_{53}}{2\lambda^I_2} - \frac{1}{2} \eta_1 L^I_{53} - \frac{\gamma L^R_{63}}{2\lambda^I_2} + \frac{\lambda^I_2 L^R_{53} L^R_{53}}{2\lambda^I_2 L^R_{53}}, \tag{B.66}$$

$$a_7 = -R^R_{51} \eta_a + R^R_{71} \eta_a - R^R_{11} \Omega_a^2 + R^R_{31} \Omega_a^2 - \gamma R^R_{21} \Omega_2^2 - \eta_1 R^R_{51} - R^R_{11} \tag{B.67}$$

$$a_8 = \eta_a R^I_{51} - \eta_a R^I_{71} + \Omega_a^2 R^I_{11} - \Omega_a^2 R^I_{31} + \gamma \Omega_2^2 R^I_{21} + \eta_1 R^I_{51} + R^I_{11}, \tag{B.68}$$

$$a_9 = -R^R_{53} \eta_a + R^R_{73} \eta_a - R^R_{13} \Omega_a^2 + R^R_{33} \Omega_a^2 - \gamma R^R_{23} \Omega_2^2 - \eta_1 R^R_{53} - R^R_{13}$$

and

$$a_{10} = \eta_a R^I_{53} - \eta_a R^I_{73} + \Omega_a^2 R^I_{13} - \Omega_a^2 R^I_{33} + \gamma \Omega_2^2 R^I_{23} + \eta_1 R^I_{53} + R^I_{13}. \tag{B.69}$$

Annexe C

Submitted to Physica D : Nonlinear Phenomena (2024) [a13]

Fast-slow analysis of passive mitigation of self-sustained oscillations by means of a bistable nonlinear energy sink

Baptiste Bergeot and Sébastien Berger

Abstract

This paper investigates the dynamic behavior of a Van der Pol oscillator (used as an archetypal self-sustained oscillator) coupled to a bistable nonlinear energy sink (BNES). We first show using numerical simulations that this system can undergo a multitude of motions including different types of periodic regimes and so-called strongly modulated responses (SMR) as well as chaotic regimes. We also show that a BNES can be much more efficient than a classical cubic NES but this is not robust since a little perturbation can switch the system from harmless to harmful situations. However, even in the most unfavorable cases, it is possible to find a set of parameters for which the BNES performs better than the NES.

A multiple time scales approach is then addressed to analyze the system. In this context, we show that the so-called Multiple Scale/Harmonic Balance Method (MSHBM) must be modified (compared to its usual use) to consider the specific feature of the BNES, i.e., that it can have a nonzero-mean oscillating motion. This allows us to derive a so-called amplitude-phase modulation dynamics (APMD) which can reproduce the complex behavior of the initial system. Because of the presence of a small perturbation parameter (i.e., the mass ratio between the BNES and the VdP oscillator), the APMD is governed by two different time scales. More precisely, it appears as a (3,1)-fast-slow system whose motion is constituted in a succession of slow and fast epochs. Founding a (3,1)-fast-slow APMD is interesting since that implies a more complex dynamics than in the case of a classic NES whose APMD is only (2,1)-fast-slow. A fast-slow analysis is finally conducted within the framework of the geometric singular perturbation theory. From the computation of the so-called critical manifold and the analytical expressions of the APMD fixed points, a global stability analysis is performed. This enables us to interpret a certain number of regimes observed on numerical simulations of the initial system.

Keywords : Passive vibration control, Bistable nonlinear energy sink, Self-sustained oscillations, Fast-slow analysis, Critical manifold

C.1 Introduction

The well-known nonlinear energy sinks (NESs) are nonlinear vibration absorbers used for passive mitigation of unwanted oscillations caused by either free, external, parametric or self-excitations of a mechanical or acoustical system referred to as the primary structure. In most cases, an NES is a light mass (compared to the total mass of the primary structure) nonlinear attachment consisting of an essentially nonlinear spring (most of the time purely cubic) and a viscous linear damper. The dependence between the vibratory amplitude and the oscillating frequency of the NES (because of its strongly nonlinear nature) makes it able to resonate at any frequency. After tuning to the primary structure and absorbing and dissipating its energy, the NES can detune to prevent the energy from returning. This irreversible transfer of vibrational energy from the primary structure to the NES is called targeted energy transfer (TET) or energy pumping. In the seminal papers by Gendelman, Vakakis *et al.* [76, 203] the TET phenomenon is explained by the interaction between two nonlinear normal modes of vibration of the system producing a 1 :1 resonance capture. Reviews of these concepts can be found in [206].

A few years later, the bistable NES (BNES), consisting of a small mass connected to a linear primary oscillator by a spring with both negative linear and nonlinear (cubic) stiffnesses, has been introduced by Gendelman and Lamarque [79]. In this seminar paper, various dynamical regimes were highlighted and conditions for efficient TET from the primary linear oscillator to the BNES (even though the term was not yet used there) were formulated. In particular, possibility of transient chaotic response was investigated. Other studies appeared much later [134, 171]. The negative linear and nonlinear stiffness components can be realized for example

through the geometric nonlinearity of the transverse displacement of pre-compressed linear springs [180] or considering the transverse vibration of a thin viscously damped fixed-fixed beam with a small mass fixed at its centre when buckled under axial constraint [103, 136, 170]. Most studies about BNESs consider either mitigation of free vibrations or vibrations caused by external harmonic forcing. The first papers [79, 134, 171] relate to mitigation of free vibrations. Romeo *et al.* [170] show that BNES can produce TET even at low energies, in contrast to the classic cubic NESs. From an analytical method, Habib and Romeo [95] propose a procedure to tune and optimize a BNES to mitigate free vibration of a two-degree-of-freedom (2-dof) primary structure. Dekemele *et al.* [51] present an analytical study of the tuning and the performance of a BNES again in the context of mitigation of free vibrations. Mattei *et al.* [136] and Iurasov and Mattei [103] study both numerically and experimentally the mitigation of forced vibrations by a beam-based BNES. An adapted semi-analytical method to predict the energy pumping time of a BNES under harmonic forcing is proposed by Wu *et al.* [217]. The vibration reduction performance of a BNES and an NES is compared, by Wand *et al.* [211] and the results show that the BNES performs over the full frequency band.

Using a cubic NES to mitigate limit cycle oscillations (LCOs) resulting from dynamic instabilities has been extensively studied in the literature. Mitigation of LCOs of the Van der Pol oscillator has been studied numerically by Lee *et al.* in their seminal paper [122] and then analytically by Gendelman and Bar [75]. A number of works focus on mitigation of flutter instabilities in aircraft wings. This problem has been first studied both numerically and experimentally, again by Lee. *et al.* [121, 123, 124]. The theoretical prediction of the observed operating regimes has been performed by means of multiple time scales approaches [78, 131] and improved more recently using the center manifold reduction technique [a2]. The possibility of mitigating self-sustained oscillations of a linear friction system having two unstable modes has been studied by Bergeot *et al.* [a9] by means of a sophisticated multiple time scales analysis allowing the understanding of the phenomena underlying the appearance of the many possible regimes of the system. Effect of stochastic forcing on the dynamic behavior of a self-sustained oscillator coupled to a nonlinear energy sink has been investigated in [a3]. On the contrary, the use of a BNES to mitigate self-sustained vibrations is poorly addressed in the literature. To the best of the authors' knowledge, the only paper dealing with this subject is by Franzini et al. [70]. It presents numerical and analytical studies for a BNES-based device used to simultaneously alleviate the unwanted vibrations caused by a galloping phenomenon and perform electro-mechanical energy conversion by the piezoelectric effect.

In general, when an NES is attached to a primary structure, the resulting coupled model is analyzed by introducing a small perturbation parameter related to the mass ratio between the NES and the primary structure. It is customary to study the dynamic behavior of the system in the neighborhood of this 1 :1 resonance capture [76, 203]. In general, the system is simplified by averaging it over a natural period of the primary structure using the so-called Complexification-Averaging Method (CAM) [135, 206] or the Multiple Scale/Harmonic Balance Method (MSHBM) [130, 228]. The resulting system, called here *amplitude-phase modulation dynamics*[1] (APMD), is then analyzed by means of singular perturbation techniques (by multiple scales methods [144] or geometric singular perturbation theory [107]). The first key point of these analytical processes is the partitioning of the APMD into two time scales (one slow and one fast [2]). In this representation the time evolution of the APMD is thus described as a succession of slow and fast epochs which are analyzed independently. The second key point is the definition of the so-called *critical manifold*[3] whose system trajectories converge during slow epochs.

Some works mentioned above on the analytical study of energy pumping by a BNES follows this multiple time scales based methodology (or fast-slow analysis). However, in these studies, the CAM (or MSHBM) is used in the same way as if we were considering a classical NES, i.e., assuming that the BNES motion has the form of a zero-mean oscillating regime. This forgets one essential feature a bistable system motion, it can have a nonzero-mean. The resulting analysis can therefore only partially explain the dynamic behavior of the system, in particular for chaotic and intra-well motions of the BNES.

In the present paper, the MSHBM is used and modified (compared to its usual use) to take into account a nonzero-mean motion. This allows us to obtain an APMD and a critical manifold that can explain numerous regimes observed in numerical simulations of a Van der Pol oscillator (used as an archetypal self-sustained oscillator) coupled to a BNES. Understanding the mechanisms underlying the responses observed in numerical simulations of this simple model could enable us in the future to interpret the results of numerical simulations

1. Most of the time authors name it the *slow flow dynamics*. It is named here in the manner of Luongo and Zulli [130, 228] to avoid vocabulary ambiguities.

2. Sometimes the terms "slow" and "super-slow" [59, 75] are used to leave the term "fast" for the oscillations on which the averaging was carried out and therefore to be coherent with the term slow flow. In the present work the terms "slow" and "fast" are preferred to be in agreement with the vocabulary usually used in the literature on dynamical systems.

3. The critical manifold is also called *slow invariant manifold* in the literature.

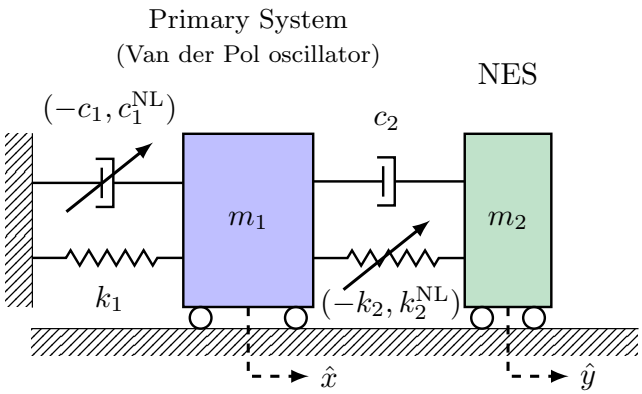


Figure C.1. A Van der Pol oscillator coupled to a BNES.

of more complex models and/or experimental data.

The paper is organized as follows. In Section C.2, the equations of motion of the full-order system under study - i.e. a Van der Pol oscillator coupled to a BNES - are obtained. Then, the dynamic behavior of a Van der Pol oscillator coupled to a BNES is investigated by means of numerical simulations. Using the MSHBM, the equations of the APMD are derived in Section D.3.1. The fast-slow analysis of the APMD is detailed in Section C.4. That allows us to perform a asymptotic global stability analysis in Section C.5, which enables us to understand the observed behavior using numerical simulations. Finally, concluding remarks and perspectives are formulated in Section C.6.

C.2 Equations and dynamic behavior of the model

C.2.1 Equations of motion of a Van der Pol oscillator coupled to a BNES

n this section we derive the equations of motion of the full-order system under study, i.e. a Van der Pol (VdP) oscillator - used as an archetypal self-sustained oscillator - coupled to an ungrounded bistable nonlinear energy sink (BNES). The BNES consists in a mass coupled to a linear damper and to a spring with a negative stiffness and a cubic stiffness. A schematic representation of this system is shown in Fig. E.1. The equations of motion of this system, with respect to the physical time $\hat{t}$, are as follows

$$\begin{aligned} m_1\frac{d^2\hat{x}}{d\hat{t}^2} - c_1\frac{d\hat{x}}{d\hat{t}} + c_1^{\mathrm{NL}}\frac{d\hat{x}}{d\hat{t}}\hat{x}^2 + k_1\hat{x} + \\ c_2\left(\frac{d\hat{x}}{d\hat{t}} - \frac{d\hat{y}}{d\hat{t}}\right) - k_2\left(\hat{x}-\hat{y}\right) + k_2^{\mathrm{NL}}\left(\hat{x}-\hat{y}\right)^3 = 0 \end{aligned} \tag{C.1a}$$

$$m_2\frac{d^2\hat{y}}{dt^2} + c_2\left(\frac{d\hat{y}}{d\hat{t}} - \frac{d\hat{x}}{d\hat{t}}\right) - k_2(\hat{y}-\hat{x}) + k_2^{\mathrm{NL}}(\hat{y}-\hat{x})^3 = 0 \tag{C.1b}$$

where m_1 and m_2 are the masses of the primary VdP oscillator and of the BNES, respectively. The parameter k_1 is the linear stiffness of the VdP oscillator and $-c_1$ (with $c_1 > 0$) and c_1^{NL} characterize its linear negative and nonlinear dampings, respectively. The BNES is characterized by its linear damping coefficient c_2, negative linear stiffness $-k_2$ (with $k_2 > 0$) and nonlinear stiffness k_2^{NL}.

Equation (G.8) is rescaled leading to the following dimensionless system of differential equations

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \epsilon\sigma\dot{x} + \epsilon\lambda\dot{x}x^2 + x + \\ \epsilon\mu\left(\dot{x}-\dot{y}\right) - \epsilon\beta(x-y) + \epsilon\alpha(x-y)^3 = 0 \end{aligned} \tag{C.2a}$$

$$\epsilon\ddot{y} + \epsilon\mu\left(\dot{y}-\dot{x}\right) - \epsilon\beta(y-x) + \epsilon\alpha(y-x)^3 = 0 \tag{C.2b}$$

where $x = \hat{x}/L$, $y = \hat{y}/L$ (with L a characteristic length of the motion), $\omega_1 = \sqrt{k_1/m_1}$, $t = \omega_1\hat{t}$, $\dot{\{\}} = d\{\}/dt$, $\epsilon = m_2/m_1$ is the mass ratio between the NES and the VdP oscillator, $\sigma = c_1/(m_2\omega_1)$, $\lambda = c_1^{\mathrm{NL}}L^2/(m_2\omega_1)$, $\mu = c_2/(m_2\omega_1)$, $\beta = k_2/(m_2\omega_1^2)$ and $\alpha = k_2^{\mathrm{NL}}L^2/(m_2\omega_1^2)$.

The static solutions of Eq. (E.3) are : the trivial solution

$$p_0^{\mathrm{st}} = (x_0^{\mathrm{st}}, y_0^{\mathrm{st}}) = (0,0) \tag{C.3}$$

which is unstable and the two following non trivial solutions

$$p_1^{\text{st}} = (x_1^{\text{st}}, y_1^{\text{st}}) = \left(0, \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right) \quad \text{and} \quad p_2^{\text{st}} = (x_2^{\text{st}}, y_2^{\text{st}}) = \left(0, -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right). \tag{C.4}$$

which are stable if there are no self-sustained oscillations. For a classic cubic NES, i.e., $\beta = 0$, the only equilibrium position is p_0^{st} which is stable (again if there are no self-sustained oscillations).

Finally, for comparison purposes, we give here an approximated solution of the VdP oscillator uncoupled from the NES whose equation of motion is $\ddot{x} - \epsilon\sigma\dot{x} + \epsilon\lambda\dot{x}x^2 + x = 0$. This approximated solution is obtained using the Krylov-Bogoliubov method of averaging (see e.g. [143]) as

$$x(t) = \underbrace{\frac{2\sqrt{\sigma}e^{\frac{\sigma t\epsilon}{2}}}{\sqrt{\frac{4\sigma}{r_0^2} + \lambda\left(e^{\sigma t\epsilon} - 1\right)}}}_{r(t)} \cos(t + \varphi_0) \tag{C.5}$$

where $r(t)$ is the amplitude of $x(t)$, $r_0 = r(t = 0)$ and φ_0 is the phase at the origin of time. Details on obtaining Eq. (C.5) are given in Appendix C.7. For $\lambda > 0$, the amplitude $r(t)$ in Eq. (C.65) tends to zero if $\sigma < 0$ and to $2\sqrt{\frac{\sigma}{\lambda}}$ if $\sigma > 0$. In other words, for the original VdP oscillator (C.58), if $\sigma < 0$ the trivial solution $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ is stable and becomes unstable when $\sigma > 0$. The periodic solution

$$(x, \dot{x}) = \left(2\sqrt{\frac{\sigma}{\lambda}}\cos(t + \varphi_0), -2\sqrt{\frac{\sigma}{\lambda}}\sin(t + \varphi_0)\right) \tag{C.6}$$

exists and it is stable for $\sigma > 0$.

C.2.2 Response regimes of a Van der Pol oscillator coupled to a BNES

In this section, the dynamic behavior of a Van der Pol oscillator coupled to a BNES is presented by means of direct numerical integration of Eq. (E.3).

We first recall briefly the response regimes observed when an NES (i.e., with no linear stiffness) is used instead of a BNES. As it is widely discussed in the literature (see e.g. [75, 78]), in this case, four scenarios are observed. In previous works by the authors [a7, a8] these responses are sorted into two categories. In the first category, the NES acts, resulting in three responses called *harmless situations*. These three harmless regimes are : (i) the *complete suppression* in which the trivial equilibrium is stabilized because of the additional linear part of the NES including mass and damping ; (ii) the *mitigation through periodic responses (PRs)* with an amplitude smaller than the periodic response undergone by the VdP oscillator alone and (iii) the *mitigation through a Strongly Modulated Response (SMR)* corresponding to a quasi-periodic (amplitude and phase modulated) regime again with a maximum amplitude smaller than the periodic response undergone by the VdP oscillator alone. In the second category, the NES does not act, resulting in a *no mitigation response* called *harmful situation*. In this case a periodic regime with an amplitude close to what is observed when the VdP oscillator is not coupled to the NES. The specific value of the bifurcation parameter σ at which the system switches from a harmless regime to a harmful regime is called the *mitigation limit* of the NES, denoted as σ_{ml}. In the case of an NES the mitigation limit is defined considering a set of initial conditions (for the slow flow) as a small perturbation of the trivial equilibrium solution, i.e., $(x_0^{\text{st}}, y_0^{\text{st}}) = (0, 0)$.

The specific features of a BNES compared with an NES are presented first in Fig. C.2 in which, as a function of σ, the steady-state maximum amplitude of the VdP oscillator alone is compared to the steady-state maximum amplitude of the VdP oscillator coupled to an NES on the one hand and to a BNES on the other. The following set of parameters is used :

$$\text{VdP parameter :} \quad \lambda = 0.5 \tag{C.7a}$$

$$\text{BNES parameters :} \quad \mu = 0.06, \quad \beta = 0.575, \quad \alpha = 2 \tag{C.7b}$$

$$\text{Mass ratio :} \quad \epsilon = 0.0025 \tag{C.7c}$$

The steady-state maximum amplitude of the VdP oscillator alone is defined as follows

$$A_x^{\text{wo}} = \frac{\max[(x(0.9T), x(T))] - \min[(x(0.9T), x(T))]}{2} \tag{C.8}$$

where $x(t)$ is the time series of the variable x computed by means of the numerical integration of Eq. (C.58) from $t = 0$ to $t = T$ and using the parameters (C.7a). In a similar way, the steady-state maximum amplitude

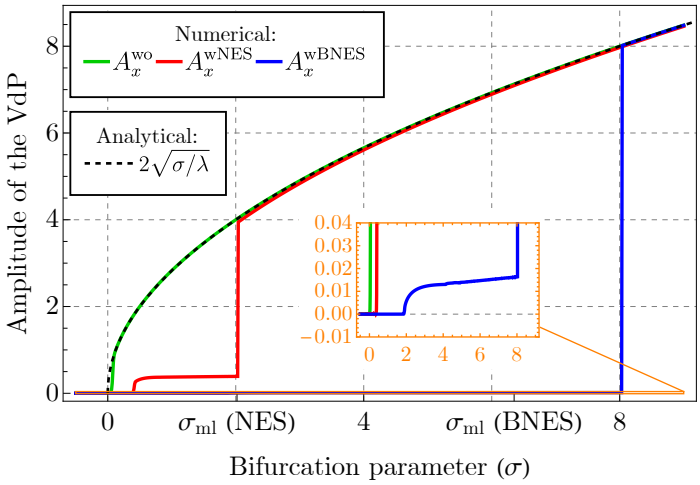


Figure C.2. Steady-state maximum amplitude of the VdP oscillator alone A_x^{wo} (green) compared to the steady-state maximum amplitudes A_x^{wNES} and A_x^{wBNES} of the VdP oscillator coupled to an NES (red) and to a BNES (blue), respectively, as functions of the bifurcation parameter σ. The theoretical amplitude of the VdP alone (see Eq. (C.6)) is also displayed (black dashed). Parameters : (C.7a) are used to compute A_x^{wo} from Eq. (C.58) ; (C.7a) with $\mu = 0.4$, $\beta = 0$ are used to compute A_x^{wNES} from Eq. (E.3) and (C.7) are used to compute A_x^{wBNES} also from Eq. (E.3). The value of ϵ is given by Eq. (C.7c).

of the VdP oscillator coupled to an NES is

$$A_x^{wNES} = \frac{\max[(x(0.9T), x(T))] - \min[(x(0.9T), x(T))]}{2} \tag{C.9}$$

where $x(t)$ is the time series of the variable x computed by means of the numerical integration of Eq. (E.3) with $\mu = 0.4$, $\beta = 0$ and $\alpha = 2$ (case of an NES with good properties of mitigation) and using the VdP parameters (C.7b). Finally, the steady-state maximum amplitude of the VdP oscillator coupled to a BNES is

$$A_x^{wBNES} = \frac{\max[(x(0.9T), x(T))] - \min[(x(0.9T), x(T))]}{2} \tag{C.10}$$

where $x(t)$ is the time series of the variable u computed by means of the numerical integration of Eq. (E.3) using the parameters (C.7) (case of an NES with good properties of mitigation).

The theoretical amplitude of the VdP alone (see Eq. (C.6)) is also displayed in Fig. C.2. We can first see that the mitigation limit of the BNES ($\sigma_{ml} \approx 8.03$) is higher than that of the NES ($\sigma_{ml} \approx 2.03$). Secondly, in cases of attenuation (PRs or SMRs, the difference between these two regimes is not visible in the figure : from $\sigma \approx 0.39$ to $\sigma \approx 2.03$ for the NES and from $\sigma \approx 1.87$ to $\sigma \approx 8.03$ for the BNES) the maximum amplitude A_x^{wBNES} is almost 10 times smaller than A_x^{wNES}. This last observation is of course interesting from the point of view of vibration attenuation, but we shall see that it can have a negative impact on the robustness of the BNES.

How large is the perturbation does not really matter in the case a classic purely cubic NES. This is not the case for a BNES. To show this, Fig. C.3 plots the the mitigation limit σ_{ml} as a function of β and μ in the case of an NES and a BNES for λ given by (C.7a), $\alpha = 2$ and ϵ given by Eq. (C.7c). The initial conditions are $(x_0, y_0) = p_0^{st} + (per, per)$ for the NES and $(x_0, y_0) = p_1^{st} + (per, per)$ for the BNES, respectively. The perturbation value is $per = 0.001$, 0.01 and 0.1 in Figs. C.3(a) to C.3(c), respectively. The mitigation limit σ_{ml} is computed by locating the jumps on amplitude profiles such as those shown in Fig. C.2. In the latter, results have been obtained in the same way with $per = 0.001$.

As mentioned above, the mitigation limit of the NES (in blue color in Fig. C.3) is not affected by the change in initial conditions and of course it does not depend on β. On the contrary, the mitigation limit of the BNES (in orange color in Fig. C.3) it is greatly affected by the change in initial conditions. Indeed, a very high maximum is present when per is small. This maximum decreases until it disappears when per increases. That shows that the BNES can be very efficient but this is not robust since a little perturbation can switch the system from harmless to harmful situations. However, even in the case of $per = 0.1$ (see Fig. C.3(c)) it is possible to find a set of parameters for which the BNES performs better than the NES.

The overall results of Fig C.3, in terms of mitigation limit, do not highlight the complex dynamic behavior of the BNES. As in the case of a classic NES, when $\sigma > \sigma_{ml}$ the system (E.3) undergoes a periodic regime

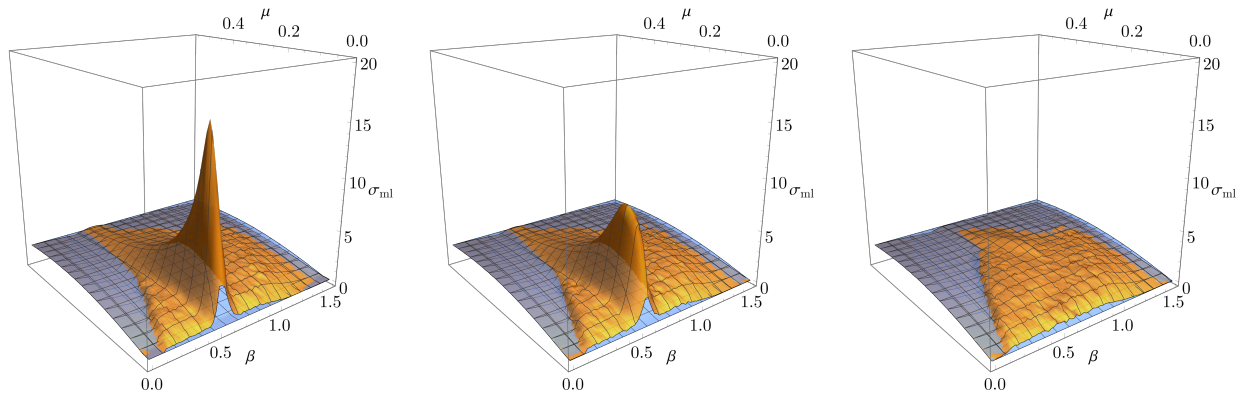


Figure C.3. Mitigation limit σ_{ml} as a function of β and μ in the case of an NES (blue surface) and a BNES (orange surface) for λ given by (C.7a), $\alpha = 2$ and ϵ given by Eq. (C.7c). The initial conditions are $(x_0, y_0) = p_0^{\mathrm{st}} + (per, per)$ for the NES and $(x_0, y_0) = p_1^{\mathrm{st}} + (per, per)$ for the BNES, respectively. The perturbation parameter is 0.001, 0.01 and 0.1 in (a) to (c), respectively.

with an amplitude for the variable x close the that of the VdP oscillator alone. However, when $\sigma < \sigma_{\mathrm{ml}}$ a multitude of harmless regimes can be observed, whereas there are only three responses in the case of an NES. In Fig. C.4, seven of these regimes are presented. The figure shows the time series $y(t)$ obtained from the numerical simulation of Eq. (E.3) and only steady states are shown. The equilibrium positions y_1^{st} and y_2^{st} (see Eq. (C.4)) are also depicted. The parameters used are $\lambda = 0.5$, $\alpha = 2$, $\epsilon = 0.0025$ (as in Fig. C.3) and those given in Tab. C.1. The initial conditions are the same as in Fig. C.3(a), i.e, with $per = 0.001$. From Fig. C.4(a) to Fig. C.4(g) one has :

- Fig. C.4(a). The stabilization of p_2^{st}.
- Fig. C.4(b). A PR centered on $y = 0$ (PR1).
- Fig. C.4(c). An SMR centered on $y = 0$ (SMR1).
- Fig. C.4(d). An intra-well (i.e., centered on $y = y_1^{\mathrm{st}}$) PR (PR2).
- Fig. C.4(e). An intra-well SMR (SMR2).
- Fig. C.4(f). An intermittent chaotic regime of type 1 (CR1), i.e., with a succession of non-chaotic oscillations centered on $y = 0$, chaotic inter-well oscillations and non-chaotic oscillations centered on $y = y_1^{\mathrm{st}}$ or $y = y_2^{\mathrm{st}}$. A zoom of Fig. C.4(f) is shown in Fig. C.5(a). On it, we can see first non-chaotic oscillations around $y = y_2^{\mathrm{st}}$, then a chaotic motion, then non-chaotic oscillations around zero and again non-chaotic oscillations around $y = y_2^{\mathrm{st}}$. Concerning these oscillations around $y = y_2^{\mathrm{st}}$, we first see amplitude-modulated oscillations that abruptly diminish to almost zero ; after that we see oscillations with exponential growth before returning to a chaotic movement. The phase in which the oscillations around $y = y_2^{\mathrm{st}}$ (or also $y = y_1^{\mathrm{st}}$) are amplitude-modulated only rarely appears.
- Fig. C.4(g). An intermittent chaotic regime of type 2 (CR2), i.e., with a succession of non-chaotic oscillations centered on $y = 0$ and chaotic inter-well oscillations. This appears more clearly in Fig. C.5(b) showing a zoom of Fig. C.4(g).

For regimes of Fig. C.4(d) and (e), the motions observed are centered on y_1^{st} but similar regimes centered on y_2^{st} can also be observed depending on the chosen initial conditions. Regimes (a) to (c) are also observed with a classic cubic NES (of course in this case the stabilization concerns the trivial solution $y = y_0^{\mathrm{st}}$) while the regimes (d) to (g) are specific to BNES.

The maximum of σ_{ml} observed in Fig. C.3(a) corresponds to a stabilization of the equilibrium y_1^{st} or y_2^{st} and for the other high efficient situations, the regimes observed just before σ_{ml} are the SMR2s or less often PR2s (for even smaller values of the perturbation parameter per, these two regimes with very small amplitudes can correspond to the highest values of σ_{ml}). Responses of type SMR2s are observed in the most efficient situations in the cases of Figs. C.3(b) and C.3(c). These observations will be interpreted after the fast-slow analysis carried out in Section. C.4. Before that, the equation of the so-called *amplitude-phase modulation dynamics* are derived in the next section.

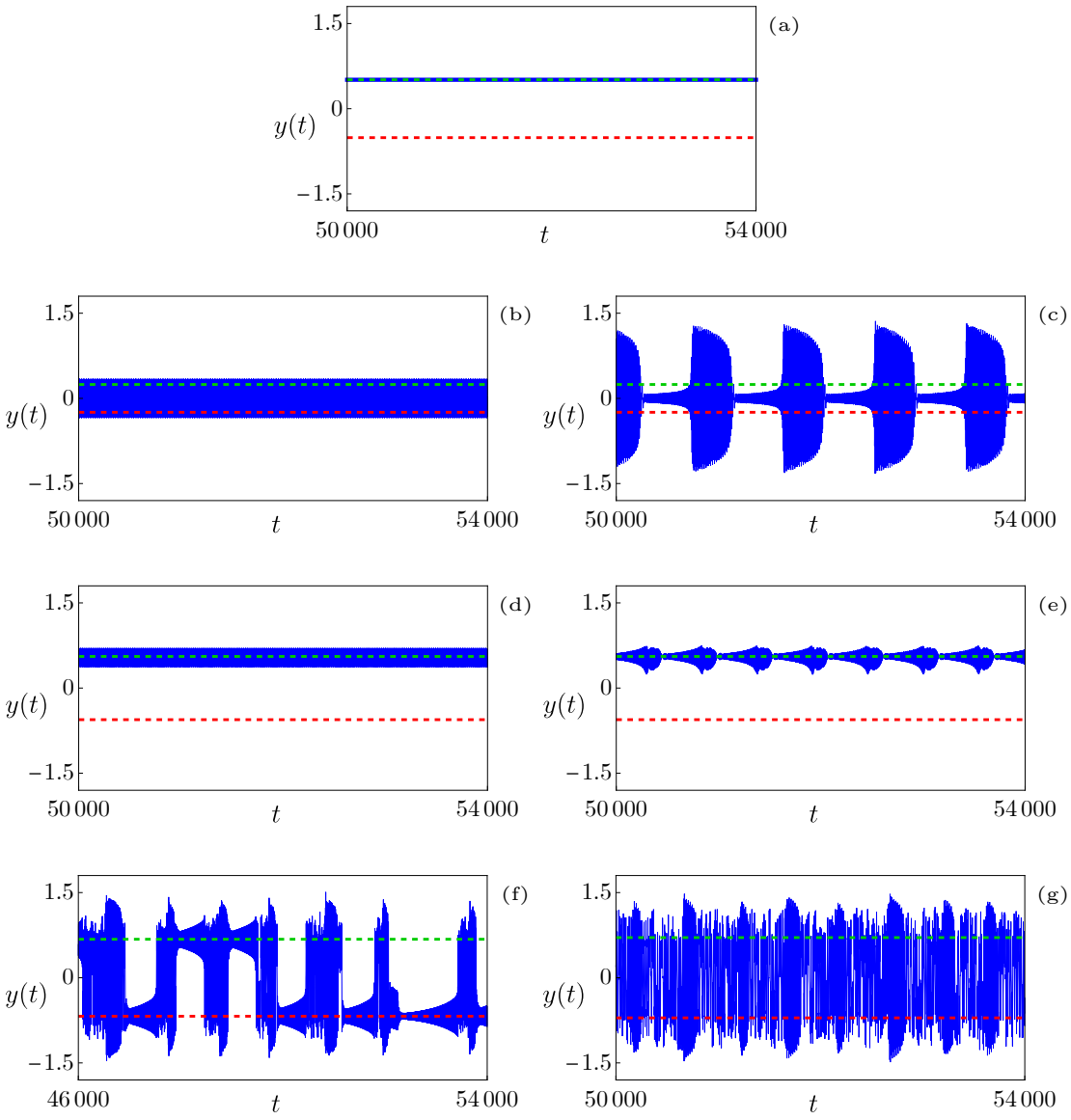


Figure C.4. Time series $y(t)$ (solid blue line) obtained from the numerical simulation of Eq. (E.3), only steady states are shown. Equilibrium positions $y_1^{\rm st}$ (dashed green line) and $y_2^{\rm st}$ (dashed red line). From (a) to (g) one has : (a) the stabilization of $p_2^{\rm st}$; (b) a PR centered on $y = 0$ (PR1) ; (c) an SMR centered on $y = 0$ (SMR1) ; (d) a PR centered on $y = y_2^{\rm st}$ (PR2) ; (e) an SMR centered on $y = y_2^{\rm st}$ (SMR2) ; (f) an intermittent chaotic regime of type 1 (CR1), i.e., with a succession of oscillations centered on $y = 0$ and chaotic motions ; and (g) an intermittent chaotic regime of type 2 (CR2), i.e., with succession of oscillations centered on $y = 0$, chaotic motions and oscillations centered on $y = y_1^{\rm st}$ or $y = y_2^{\rm st}$. The parameters used are $\lambda = 0.5$, $\alpha = 2$, $\epsilon = 0.0025$ and those given in Tab. C.1. The initial conditions are the same as in Fig. C.3(a), i.e, with $per = 0.001$.

Tableau C.1. Parameters used for numerical simulations shown in Fig. C.4. The corresponding values of $\sigma_{\rm ml}$ are also indicated.

	β	μ	σ	$\sigma_{\rm ml}$
(a)	0.52	0.19	3.9	5.2
(b)	0.12	0.55	0.78	1.73
(c)	0.12	0.31	1.22	1.63
(d)	0.62	0.19	3.75	5
(e)	0.62	0.07	3.96	5.28
(f)	0.92	0.07	1.43	1.9
(g)	1	0.19	1.74	2.33

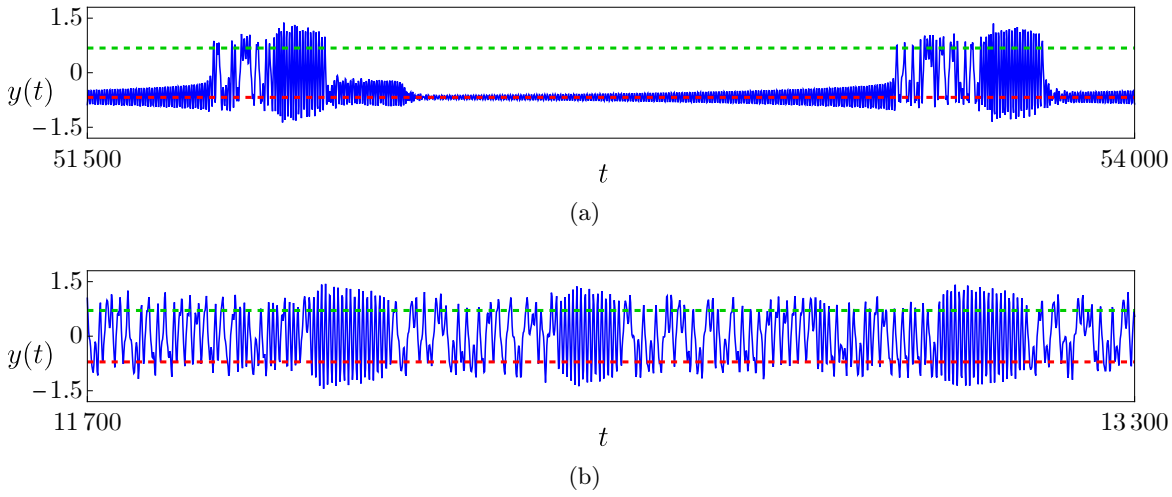


Figure C.5. Zooms of (a) Figs. C.4(f) and (b) C.4(g).

C.3 Equations of the amplitude-phase modulation dynamics

TET is due to the interaction between two nonlinear modes of the coupled structure [76, 203]. This phenomenon, called a 1 :1 resonance capture, occurs at a frequency close to the natural frequency of the primary structure, here the VdP oscillator. It is customary to study the dynamic behavior of the system in the neighborhood of this 1 :1 resonance capture. In general, the system is simplified by averaging it over a natural period of the primary structure using the so-called Complexification-Averaging Method (CAM) [135, 206]. The resulting averaged dynamics is called *amplitude-phase modulation dynamics* (APMD). The CAM is not consistent here due the bistable nature of the BNES, i.e., the fact that its motion can have a nonzero-mean. This is the reason why the Multiple Scale/Harmonic Balance Method (MSHBM) [130, 228] is preferred because it can easily and rigorously be modified (compared to its usual use) to take into account a nonzero-mean motion.

First, using the following change of variable

$$u = x + \epsilon \quad \text{and} \quad v = x - y \tag{C.11}$$

the equations of motion (E.3) become

$$\ddot{u} + u + \epsilon\left[-u - \sigma\dot{u} + \lambda\dot{u}u^2 + v\right] = 0 \tag{C.12a}$$

$$\ddot{v} + \mu\dot{v} - \beta v + \alpha v^3 + u = 0 \tag{C.12b}$$

Assuming a small mass ratio between the NES and the Van der Pol oscillator (i.e., $0 < \epsilon \ll 1$), only terms of order equal to 1 or less in ϵ have been kept in Eq. (C.12a). In Eq. (C.12b) keeping only the terms of order 0 is sufficient to correctly reproduce the essential characteristics of the dynamic behavior of the system.

Following the Multiple Scale Method (MSM) [143] the independent time variables $T_0 = t$, $T_1 = \epsilon t$, $T_2 = \epsilon^2 t$, ... are introduced. The time derivative rules are therefore $\frac{d}{dt} = D_0 + \epsilon D_1 + \epsilon^2 D_2 + \dots$ and $\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + \epsilon^2(D_0 D_2 + D_1^2) + \dots$ where $D_i = \frac{\partial}{\partial T_i}$ $(i = 0, 1, 2, \dots)$. The variables u and v are expanded in power series of ϵ as

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots \tag{C.13a}$$

$$v = v_0 + \epsilon v_1 + \epsilon^2 v_2 + \dots \tag{C.13b}$$

In the sequel, only the first two time scales T_0 and T_1 are retained. Substituting Eq. (C.13) and the time derivative rules into Eq. (E.5) and equating coefficients of same powers of ϵ, we obtain

$$\text{Order } \epsilon^0: \quad D_0^2 u_0 + u_0 = 0 \tag{C.14a}$$

$$D_0^2 v_0 + \mu D_0 v_0 - \beta v_0 + \alpha v_0^3 = 0. \tag{C.14b}$$

$$\text{Order } \epsilon^1: \quad D_0^2 u_1 + u_1 = -\lambda u_0^2 D_0 u_0 + \sigma D_0 u_0 - 2 D_0 D_1 u_0 + u_0 - v_0 \tag{C.15a}$$

$$D_0^2 v_1 + \mu D_0 v_1 - \beta v_1 + \alpha v_1^3 = \\ -\mu D_1 v_0 - 2 D_0 D_1 v_0 + u_0 - u_1 + \alpha v_1^3 - 3\alpha v_0^2 v_1. \tag{C.15b}$$

The harmonic solution of Eq. (C.14a) is written on the following complex form

$$u_0(T_0, T_1) = \frac{A(T_1)e^{iT_0} + A^*(T_1)e^{-iT_0}}{2} \tag{C.16}$$

where A^* is the complex conjugate of the complex amplitude A.

Equation (C.14b) is the equation of motion of the BNES alone and has no analytical solution. Then the Harmonic Balance Method (HBM) is used to find an approximated solution as the following two-terms Fourier series

$$v_0(T_0, T_1) = b_0(T_1) + \frac{C_0(T_1)e^{iT_0} + C_0^*(T_1)e^{-iT_0}}{2} \tag{C.17}$$

where the first term in the right-hand side is real and used to consider the bistable nature of the BNES, i.e., the fact that v_0 can have nonzero-mean. The second term indicates the simplification - due to the assumption of a 1 :1 resonance capture - of the oscillating motion of v_0 as a simple harmonic motion.

Substituting Eq. (C.17) into Eq. (C.14b) and equalizing the coefficients of e^0 (mean terms) and e^{iT_0} (first harmonic terms) the following complex algebraic equations are obtained,

$$-\beta b_0 + \frac{3}{2}\alpha C_0 |b_0|^2 + \alpha b_0^3 = 0 \tag{C.18a}$$

$$4\left(A + C_0\left(-\beta + 3\alpha b_0^2 + i\mu - 1\right)\right) + 3\alpha C_0 |C_0|^2 = 0, \tag{C.18b}$$

respectively.

Let us now deal with Eq. (C.15). The first step is to substitute Eqs. (C.16) and (C.17) into Eq. (C.15a). Secular terms, i.e., terms in factor of e^{iT_0} and e^{-iT_0} in the right-hand side of the resulting equation, create diverging solutions and must be eliminated. These terms in factor of e^{iT_0} and e^{-iT_0} correspond to two equivalent (i.e., complex conjugate) differential equations with respect $D_1 A$ and $D_1 A^*$, respectively, and called solvability conditions. By arbitrarily selecting the first condition, one obtains the following equation

$$D_1 A = \frac{1}{8}\left(4A(\sigma - i) + 4iC_0 - \lambda A|A|^2\right). \tag{C.19}$$

The particular non-diverging solution of Eq. (C.15a) is then obtained, it is

$$u_1(T_0, T_1) = -b_0(T_1) - \frac{1}{64} i\lambda \left(A(T_1)^3 e^{3iT_0} - A^*(T_1)^3 e^{-3iT_0}\right). \tag{C.20}$$

The second step is to find $v_1(T_1, T_2)$ and again the HBM is used assuming the following form

$$v_1(T_0, T_1) = b_1(T_1) + \frac{C_1(T_1)e^{iT_0} + C_1^*(T_1)e^{-iT_0}}{2}. \tag{C.21}$$

Substituting Eqs. (C.16), (C.17), (C.20) and (C.21) into Eq. (C.15b) and again equating the coefficients of e^0 and e^{iT_0} the following differential equations are obtained

$$D_1 b_0 = \frac{1}{2\mu}\Big(b_1\left(2\beta - 3\alpha C_0 \overline{C_0}\right) + b_0\left(2 - 3\alpha\left(C_0\overline{C_1} + C_1\overline{C_0}\right)\right) - 6\alpha b_1 b_0^2\Big), \tag{C.22}$$

and

$$D_1 C_0 = \frac{1}{4(\mu + 2i)}\Big(2C_1\left(-3\alpha C_0\overline{C_0} + 2\beta - 6\alpha b_0^2 - 2i\mu + 2\right) - 3\alpha C_0\left(C_0\overline{C_1} + 8 b_0 b_1\right)\Big), \tag{C.23}$$

respectively.

The MSM procedure is stopped at order ϵ^1. The last step of the MSHBM is then to come back to the physical time t. To achieve that we use the rules $b = b_0 + \epsilon b_1$ and $C = C_0 + \epsilon C_1$ and the fact that the variables A, B and C do not depend on the fast time T_0, therefore for them we have $\frac{d}{dt} = \epsilon D_1$. First, from Eq. (C.19) we obtain

$$\dot{A} = \frac{\epsilon}{8}\left(4A(\sigma - i) + 4iC - \lambda A|A|^2\right). \tag{C.24}$$

Then combining Eq. (C.18a) with Eq. (C.22) and Eq. (C.18b) with Eq. (C.23) and keeping only terms of order equal to 1 or less in ϵ we have

$$\dot{b} = \frac{b\left(2\beta - 2\alpha b^2 - 3\alpha|C|^2\right)}{2\mu} + \epsilon\frac{b}{\mu}, \tag{C.25}$$

and

$$\dot{C} = \frac{C\left(-3\alpha\left(|C|^2 + 4b^2\right) + 4(\beta - i\mu + 1)\right) - 4b}{4(\mu + 2i)}, \tag{C.26}$$

respectively.

Equations (C.24) to (C.26) constitute the complex form of the APMD. Finally, substituting A and C in the complex APMD by their polar coordinates defined as $A = ae^{j\theta}$ and $C = ce^{j\phi}$, new equations of motion for the real amplitudes a, b and c and the phase difference $\delta = \theta - \phi$ is obtained as

$$\dot{a} = \epsilon f(a, c, \delta) \tag{C.27a}$$
$$\dot{b} = g_1(b, c, \epsilon) \tag{C.27b}$$
$$\dot{c} = g_2(a, b, c, \delta) \tag{C.27c}$$
$$\dot{\delta} = g_3(a, b, c, \delta, \epsilon) \tag{C.27d}$$

with

$$f(a, c, \delta) = \frac{1}{8}\left(4a\sigma - a^3\lambda + 4c\sin\delta\right) \tag{C.28a}$$
$$g_1(b, c, \epsilon) = \frac{b\left(2\beta - 2\alpha b^2 - 3\alpha c^2\right)}{2\mu} + \epsilon\frac{b}{\mu} \tag{C.28b}$$
$$g_2(a, b, c, \delta) = -\frac{4a\mu\cos\delta + 8a\sin\delta + c\mu\left(-4\beta + 3\alpha\left(4b^2 + c^2\right) + 4\right)}{4\left(\mu^2 + 4\right)} \tag{C.28c}$$
$$g_3(a, b, c, \delta, \epsilon) = -\frac{4a\cos\delta - 2a\mu\sin\delta + 3\alpha c\left(4b^2 + c^2\right) - 2c\left(2\beta + \mu^2 + 2\right)}{2c\left(\mu^2 + 4\right)} - \epsilon\frac{a - c\cos\delta}{2a}. \tag{C.28d}$$

Equation (C.27) constitutes the real form of the APMD.

Due to the presence of the small parameter ϵ, the APMD is governed by two different time scales : the fast time scale t and the slow time scale $\tau = \epsilon t$ (note that t and τ were denoted above T_0 and T_1, respectively, in the context of the MSM). More precisely, within the framework of the geometric singular perturbation theory [107], Eq. (C.27) appears as a $(3, 1)$-fast-slow system where b, c and δ are the fast variables and a the slow variable. Periodic steady-state regimes of the original mechanical system (E.3) correspond to non trivial fixed points of the APMD whereas periodic responses of the latter characterize amplitude and phase modulated responses of the original dynamics.

C.4 Fast-slow analysis of the amplitude-phase modulation dynamics

C.4.1 The critical manifold

A key mathematical tool for the description of a fast-slow system such as Eq. (C.27) is its critical manifold. The latter is defined in this section. First, the APMD (C.27) is written with respect to the slow time τ as follows

$$a' = f(a, c, \delta) \tag{C.29a}$$
$$\epsilon b' = g_1(b, c, \epsilon) \tag{C.29b}$$
$$\epsilon c' = g_2(a, b, c, \delta) \tag{C.29c}$$
$$\epsilon\delta' = g_3(a, b, c, \delta, \epsilon) \tag{C.29d}$$

where $(.)'$ denotes the derivative with respect to the slow time τ.

Both in the forms of (C.27) and (C.29), the APMD is a $(3, 1)$-fast-slow system whose the time evolution is described by a succession of slow and fast epochs. Because $0 < \epsilon \ll 1$, the behavior of the APMD during each of these epochs can be approximated by that of the slow and fast subsystems defined as follows : considering $\epsilon = 0$ respectively in Eqs. (C.29) and (C.27) yields the *slow subsystem*

$$a' = f(a, c, \delta) \tag{C.30a}$$
$$0 = g_1(a, b, c, \delta, 0) \tag{C.30b}$$
$$0 = g_2(a, b, c, \delta) \tag{C.30c}$$

$$0 = g_3(a, b, c, \delta, 0) \tag{C.30d}$$

which is a differential-algebraic equation, and the *fast subsystem*

$$\dot{a} = 0 \tag{C.31a}$$
$$\dot{b} = g_1(a, b, c, \delta, 0) \tag{C.31b}$$
$$\dot{c} = g_2(a, b, c, \delta) \tag{C.31c}$$
$$\dot{\delta} = g_3(a, b, c, \delta, 0). \tag{C.31d}$$

The critical manifold of the APMD (C.27) is the solution of the algebraic part of the slow sub system (C.30) and it is expressed as follows

$$\mathcal{M}_0 = \Big\{ (a, b, c, \delta) \in \mathbb{R}^{+^3} \times [-\pi, \pi] \;\Big|\; g_1(b, c, 0) = 0 \ , \ g_2(a, b, c, \delta) = 0 \ \text{ and } \ g_3(a, b, c, \delta, 0) = 0 \Big\}. \tag{C.32}$$

The functions $g_1(b, c, 0) = 0$, $g_2(a, b, c, \delta) = 0$ and $g_3(a, b, c, \delta, 0) = 0$ are written as follows

$$g_1(a, b, c, \delta, 0) = b\,(b + H_{01}(c))\,(b - H_{01}(c)) \tag{C.33a}$$
$$g_2(a, b, c, \delta) = H_{02}(b, c) + a\,(k_1 \cos\delta + k_2 \sin\delta) \tag{C.33b}$$
$$g_3(a, b, c, \delta, 0) = H_{03}(b, c) + \frac{a}{c}\,(k_2 \cos\delta + k_1 \sin\delta)\,. \tag{C.33c}$$

where the function H_{01} is given below in Eq. (C.38b) and the functions H_{02} and H_{03} and the parameters k_1 and k_2 can be easily deduced from Eqs. (C.28c) and (C.28d).

The critical manifold can be expressed as a one-dimensional manifold evolving in the four-dimensional phase space of the APMD. Indeed, solving first Eqs. (C.30c) and (C.30d) yield

$$\begin{aligned} \cos\delta &= -\frac{k_1 H_{02}(b, c) + k_2 c H_{03}(b, c)}{a\,(k_1^2 + k_2^2)} \\ &= -\frac{12\alpha b^2 c + 3\alpha c^3 - 4\beta c - 4c}{4a} \end{aligned} \tag{C.34}$$

$$\begin{aligned} \sin\delta &= -\frac{k_2 H_{02}(b, c) - k_1 c H_{03}(b, c)}{a\,(k_1^2 + k_2^2)} \\ &= -\frac{c\mu}{a}. \end{aligned} \tag{C.35}$$

Afterwards, combining Eqs. (C.34) and (C.35) with $a > 0$ leads to the following amplitude and phase equations

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sqrt{c^2 H_{03}(b, c)^2 + H_{02}(b, c)^2}}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \\ &= \frac{1}{4} c \sqrt{\left(3\alpha\,(4b^2 + c^2) - 4(\beta + 1)\right)^2 + 16\mu^2} \end{aligned} \tag{C.36}$$

$$\begin{aligned} \tan\delta &= \frac{k_2 H_{02}(b, c) - k_1 c H_{03}(b, c)}{k_1 H_{02}(b, c) + k_2 c H_{03}(b, c)} \\ &= \frac{4\mu}{3\alpha\,(4b^2 + c^2) - 4(\beta + 1)}. \end{aligned} \tag{C.37}$$

Then solving Eq. (C.30b) we obtain the three possible expressions of b (which reflect the bistability of the BNES) as functions of c

$$b = 0 \tag{C.38a}$$
$$b = \pm H_{01}(c) = \pm\sqrt{\frac{2\beta - 3\alpha c^2}{2\alpha}} \tag{C.38b}$$

Equation (C.38b) shows that we must have $c < c^{\mathrm{I}}$, with

$$c^{\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{2\beta}{3\alpha}}, \tag{C.39}$$

for b to be real. Note that by definition, substituting of Eqs. (C.34) and (C.35) into Eqs. (C.33b) and (C.33c), reduces the fast subsystem (C.31) to the following form

$$\dot{a} = 0 \tag{C.40a}$$

$$\dot{b} = \frac{b\left(2\beta - 2\alpha b^2 - 3\alpha c^2\right)}{2\mu} = G(b,c) \tag{C.40b}$$

$$\dot{c} = 0 \tag{C.40c}$$

$$\dot{\delta} = 0. \tag{C.40d}$$

It is then easy to show that (C.40b) undergoes a pitchfork bifurcation at $(b = 0, c = c^{\mathrm{I}})$, i.e., $G(0,c^{\mathrm{I}}) = 0$, $\frac{\partial}{\partial b}G(0,c^{\mathrm{I}}) = 0$, $\frac{\partial}{\partial c}G(0,c^{\mathrm{I}}) = 0$, $\frac{\partial^2}{\partial b^2}G(0,c^{\mathrm{I}}) = 0$, $\frac{\partial^2}{\partial b \partial c}G(0,c^{\mathrm{I}}) \neq 0$ and $\frac{\partial^3}{\partial b^3}G(0,c^{\mathrm{I}}) \neq 0$ (see e.g. [214] Chap. 20, for the definition of a pitchfork bifurcation).

Finally, combining Eq. (C.36) with each of the equations of (C.38) we obtain the two amplitudes branches of $\mathcal{M}_0$ (only two because b appears squared in Eq. (C.36))

$$a = H_1(c) = \frac{1}{4}c\sqrt{\left(3\alpha c^2 - 4(\beta+1)\right)^2 + 16\mu^2} \tag{C.41a}$$

$$a = H_2(c) = \frac{1}{4}c\sqrt{\left(-8\beta + 15\alpha c^2 + 4\right)^2 + 16\mu^2}. \tag{C.41b}$$

In the same way, combining Eq. (C.37) with each of the equations of (C.38) we obtain

$$\sin\delta = G_1^{\mathrm{s}}(c) = -\mu\frac{c}{a}, \qquad \cos\delta = G_1^{\mathrm{c}}(c) = \frac{c\left(4\beta - 3\alpha c^2 + 4\right)}{4a}, \tag{C.42a}$$

$$\sin\delta = G_2^{\mathrm{s}}(c) = -\mu\frac{c}{a}, \qquad \cos\delta = G_2^{\mathrm{c}}(c) = \frac{c\left(-8\beta + 15\alpha c^2 + 4\right)}{4a}. \tag{C.42b}$$

The critical manifold can be therefore expressed as $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_{01} \cup \mathcal{M}_{02}$ with

$$\mathcal{M}_{01} = \Big\{ (a,b,c,\delta) \in \mathbb{R}^{+^3} \times [-\pi,\pi] \;\Big|\; a = H_1(c)\ ,\ b = 0\ ,\ \sin\delta = G_1^{\mathrm{s}}(c)\ ,\ \cos\delta = G_1^{\mathrm{c}}(c) \Big\}, \tag{C.43a}$$

$$\mathcal{M}_{02} = \Big\{ (a,b,c,\delta) \in \mathbb{R}^{+^2} \times [0,\sqrt{\tfrac{2\beta}{3\alpha}}] \times [-\pi,\pi] \;\Big|\; a = H_2(c)\ ,\ b = \pm H_{01}(c)\ ,\ \sin\delta = G_2^{\mathrm{s}}(c)\ ,\ \cos\delta = G_2^{\mathrm{c}}(c) \Big\}. \tag{C.43b}$$

Note that the two branches intersect when $H_{01}(c) = 0$, i.e., for $c = c^{\mathrm{I}}$ (see Eq. (C.39)).

Exploiting the polynomial properties of $H_1(c)$ and $H_2(c)$, the local extrema of these functions, i.e, the solutions of $\frac{dH_1}{dc} = 0$ and $\frac{dH_2}{dc} = 0$, respectively, can be computed. The local extrema of $H_1(c)$, denoted as c_1^{LF} and c_1^{RF}, are determined (the explicit expressions are given by Eq. (C.66) in Appendix C.8) and exist if the following relation holds

$$\mu < \frac{\beta+1}{\sqrt{3}}. \tag{C.44}$$

If the condition (C.44) is not satisfied, the function $H_1(c)$ no longer has local extrema. In the rest of the paper, one considers that the condition (C.44) always holds. The superscripts $()^{\mathrm{LF}}$ and $()^{\mathrm{RF}}$ refer to *left fold point* and *right fold point*, respectively. Indeed, in the (a,b,c,δ)-space, the two points $p_1^{\mathrm{LF}} = (a_1^{\mathrm{LF}}, 0, c_1^{\mathrm{LF}}, \delta^{\mathrm{LF}})$ and $p_1^{\mathrm{RF}} = (a_1^{\mathrm{RF}}, 0, c_1^{\mathrm{RF}}, \delta_1^{\mathrm{RF}})$ (where a_1^{LF}, a_1^{RF}, δ_1^{LF} and δ_1^{RF} are obtained from c_1^{LF} and c_1^{RF} using Eqs. (C.41a) and (C.42a) and the b coordinate is null by Eq. (C.38a)) are generally called *fold points*.

Similarly, the local extrema of $H_2(c)$, denoted as c_2^{LF} and c_2^{RF}, are obtained (again the explicit expressions are given by Eq. (C.67) in Appendix C.8) and exist if the following relations hold

$$\beta > \frac{1}{2} \tag{C.45}$$

and

$$\mu < \frac{2\beta - 1}{\sqrt{3}}. \tag{C.46}$$

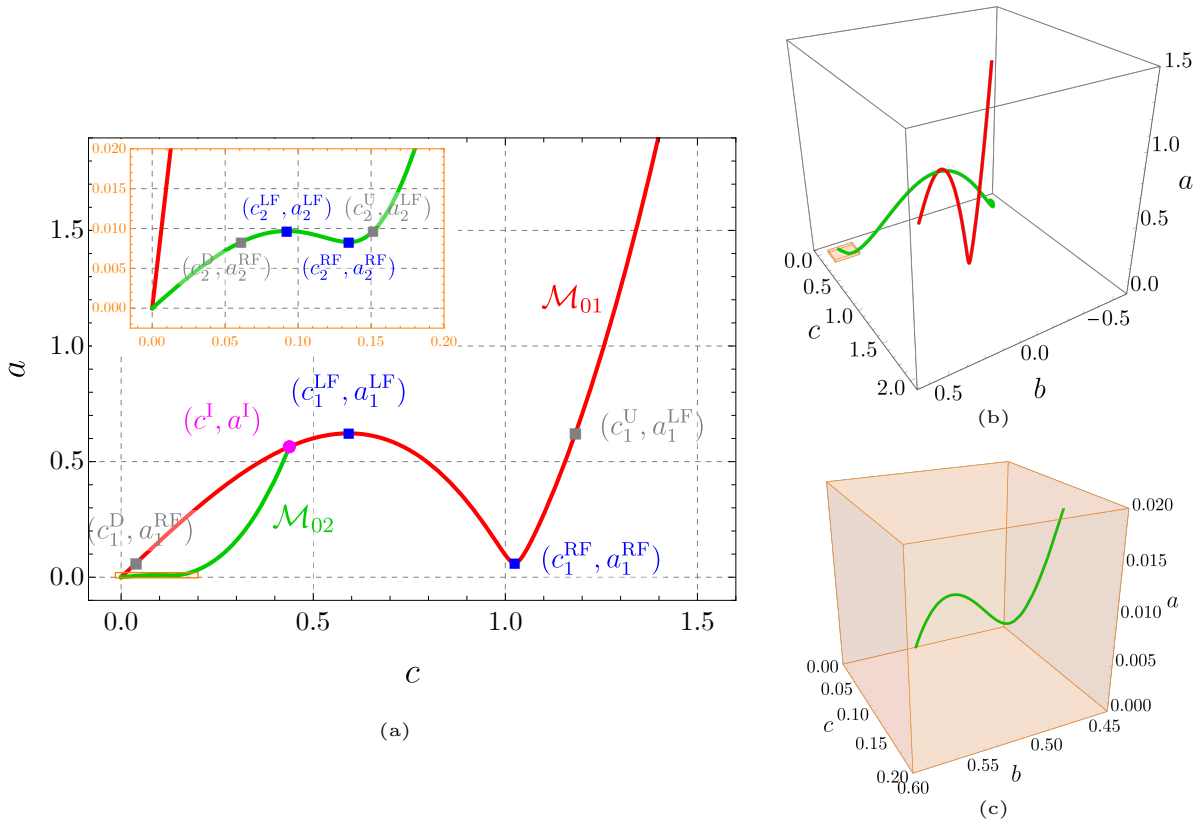


Figure C.6. Typical example of the critical manifold. (a) In the (c, a)-plane. The branches $a = H_1(c)$ ($\mathcal{M}_{01}$) and $a = H_2(c)$ ($\mathcal{M}_{02}$) are plotted in red and green, respectively. The fold points $(c_i^{\mathrm{LF}}, a_i^{\mathrm{LF}})$ and $(c_i^{\mathrm{RF}}, a_i^{\mathrm{RF}})$ $(i = 1, 2)$ (blue points), the points $(c_i^{\mathrm{U}}, a_i^{\mathrm{LF}})$ and $(c_i^{\mathrm{D}}, a_i^{\mathrm{RF}})$ (gray points) and the point $(c^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{I}})$ (with $a^{\mathrm{I}} = H_1(c^{\mathrm{I}}) = H_2(c^{\mathrm{I}})$, see Eq. (C.39)) (magenta point) are also represented. A zoom is made to better see the shape of $\mathcal{M}_{02}$. (b) In the (b, c, a)-space. (c) Zoom of (b) corresponding to the orange colored rectangular cuboid area. The following parameters are used : $\mu = 0.1$, $\beta = 0.65$ and $\alpha = 2$.

If the conditions (C.45) and (C.46) are not satisfied, the function H_2 no longer has local extrema. As above, for the branch $\mathcal{M}_{01}$, one can define left and right fold points for the branch $\mathcal{M}_{02}$ as $p_2^{\mathrm{LF}} = (a_2^{\mathrm{LF}}, b_2^{\mathrm{LF}}, c_2^{\mathrm{LF}}, \delta^{\mathrm{LF}})$ and $p_2^{\mathrm{RF}} = (a_2^{\mathrm{RF}}, b_2^{\mathrm{RF}}, c_2^{\mathrm{RF}}, \delta_2^{\mathrm{RF}})$ (where a_2^{LF}, a_2^{RF}, b_2^{LF}, b_2^{RF}, δ_2^{LF} and δ_2^{RF} are obtained from c_2^{LF} and c_2^{RF} using Eqs. (C.38b), (C.41b) and (C.42b)).

Other important scalars for the present study, denoted as c_1^{D} and c_1^{U}, are obtained solving $H_1\left(c_1^{\mathrm{RF}}\right) = H_1\left(c_1^{\mathrm{D}}\right)$ and $H_1\left(c_1^{\mathrm{LF}}\right) = H_1\left(c_1^{\mathrm{U}}\right)$. Similarly, if c_2^{RF} and c_2^{LF} exist, solving $H_2\left(c_2^{\mathrm{RF}}\right) = H_2\left(c_2^{\mathrm{D}}\right)$ and $H_2\left(c_2^{\mathrm{LF}}\right) = H_2\left(c_2^{\mathrm{U}}\right)$ yields c_2^{D} and c_2^{U}. The expressions of c_1^{D}, c_1^{U}, c_2^{D} and c_2^{U} are given by Eqs. (C.68) and (C.69).

A typical example of the critical manifold in the (c, a)-plane is shown in Fig. C.6(a). The fold points $(c_i^{\mathrm{LF}}, a_i^{\mathrm{LF}})$ and $(c_i^{\mathrm{RF}}, a_i^{\mathrm{RF}})$ $(i = 1, 2)$, the points $(c_i^{\mathrm{U}}, a_i^{\mathrm{LF}})$ and $(c_i^{\mathrm{D}}, a_i^{\mathrm{RF}})$ and the point $(c^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{I}})$ (with $a^{\mathrm{I}} = H_1(c^{\mathrm{I}}) = H_2(c^{\mathrm{I}})$, see Eq. (C.39)) are represented. Moreover, a zoom has been made to better see the shape of $\mathcal{M}_{02}$. The same example of the critical manifold in the (b, c, a)-space is shown in Fig. C.6(b).

Because in Fig. C.6 the conditions (C.44), (C.45) and (C.46) are satisfied, we can see that both $\mathcal{M}_{01}$ and $\mathcal{M}_{02}$ are S-shaped which suggests that several scenarios of relaxation oscillations are possible. To describe them (and other possible regimes), that requires knowing the stability of the critical manifold as well as the fixed points of the APMD. This is done in the next sections.

C.4.2 Stability analysis of the critical manifold

The stability of the critical manifold $\mathcal{M}_0$ is now investigated. For that, the Jacobian matrix $\mathbf{J_g}$ of Eqs. (C.31b) to (C.31d) is computed and evaluated at any point of each branch of the critical manifold.

We obtain

$$\mathbf{J_g}(p_1) = \begin{pmatrix} -H_{01}(c)^2 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial H_{02}}{\partial b}(0,c) & \dfrac{\partial H_{02}}{\partial c}(0,c) & -cH_{03}(0,c) \\ \dfrac{\partial H_{03}}{\partial b}(0,c) & \dfrac{\partial H_{03}}{\partial c}(0,c) + \dfrac{H_{03}(0,c)}{c} & \dfrac{H_{02}(0,c)}{c} \end{pmatrix}, \tag{C.47}$$

for a point $p_1 \in \mathcal{M}_{01}$, and

$$\mathbf{J_g}(p_2) = \begin{pmatrix} 2H_{01}(c)^2 & -2H_{01}(c)^2 H'_{01}(c) & 0 \\ \dfrac{\partial H_{02}}{\partial b}(H_{01}(c),c) & \dfrac{\partial H_{02}}{\partial c}(H_{01}(c),c) & -cH_{03}(H_{01}(c),c) \\ \dfrac{\partial H_{03}}{\partial b}(H_{01}(c),c) & \dfrac{\partial H_{03}}{\partial c}(H_{01}(c),c) + \dfrac{H_{03}(H_{01}(c),c)}{c} & \dfrac{H_{02}(H_{01}(c),c)}{c} \end{pmatrix}, \tag{C.48}$$

for a point $p_2 \in \mathcal{M}_{02}$.

The critical manifold $\mathcal{M}_0$ contains both regular points defined as $\det(\mathbf{J_g}(p_i)) \neq 0$ $(i = 1, 2)$ and singular points characterized by $\det(\mathbf{J_g}(p_i)) = 0$. Depending on the eigenvalues of $\mathbf{J_g}(p_i)$, the set of regular points can be split into several parts (see definitions in Chap. 3 of [40]), including normally hyperbolic *attracting* parts (all the eigenvalues have strictly negative real parts), normally hyperbolic *repelling* parts (all the eigenvalues have strictly positive real parts), normally hyperbolic saddle type parts (neither attracting nor repelling) and non normally hyperbolic parts (at least one eigenvalue has a zero real part). Note that at singular points the critical manifold is also not normally hyperbolic. In previous definitions, *normally* means that each point of $\mathcal{M}_0$ must be hyperbolic only in the the direction normal (i.e., non tangent) to itself (see e.g. Definition 2.3.4 and the explanations below [40]).

It can be shown that

$$\det(\mathbf{J_g}(p_1)) = -H_{01}(c)^2 \frac{dH_1}{dc}(c) \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}\sqrt{c^2 H_{03}(0,c)^2 + H_{02}(0,c)^2}}{c} \tag{C.49}$$

and

$$\det(\mathbf{J_g}(p_2)) = H_{01}(c)^2 \frac{dH_2}{dc}(c) \frac{2\sqrt{k_1^2 + k_2^2}\sqrt{c^2 H_{03}(H_{01}(c),c)^2 + H_{02}(H_{01}(c),c)^2}}{c}. \tag{C.50}$$

From Eqs. (C.49) and (C.50) we can deduce that the singular points of the critical manifold are, if they exist, the left and right fold points $(c_i^{\mathrm{LF}}, a_i^{\mathrm{LF}})$ and $(c_i^{\mathrm{RF}}, a_i^{\mathrm{RF}})$ $(i = 1, 2)$ of each branch $\mathcal{M}_{0i}$ (the blue points in Fig. C.6) and also the point of intersection $(c^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{I}})$ between these two branches (the magenta point in Fig. C.6).

The three eigenvalues of $\mathbf{J_g}(p_1)$ (resp. $\mathbf{J_g}(p_2)$) are numerically computed; real and imaginary parts of these eigenvalues are plotted in Fig. C.7(a) (resp. Fig. C.7(b)). Comparing Figs. C.6 and C.7, we can see that the fold points and the point of intersection between the two branches of the critical manifold are actually points for which the latter is not normally hyperbolic. In addition, we can observe that the branch $\mathcal{M}_{02}$ loses its normal hyperbolicity at a regular point for $c \approx 0.33$ (see Fig. C.7(b) top). This corresponds to a Hopf bifurcation since at this point an equilibrium of the fast subsystem loses stability, as a pair of complex conjugate eigenvalues crosses the complex plane imaginary axis. Using the Routh-Hurwitz stability criterion and the Cardano's method, the analytical expression of this regular non normally hyperbolic fixed point of the branch $\mathcal{M}_{02}$ of the critical manifold can be obtained. The corresponding expression of c, denoted by c^{FP}, is

$$c^{\mathrm{FP}} = \sqrt{x_k} = \sqrt{2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}\right) + \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{b_2}{3b_1}}. \tag{C.51}$$

The definitions of p and q and details on the computation of c^{FP} are given in Appendix C.9. As previously, the other coordinates of the fixed point, i.e., b^{FP}, a^{FP} and δ^{FP}, can be deduced from c^{FP} using Eqs. (C.38b), (C.41b) and (C.42b)), respectively.

The previous stability analysis is summarized in Fig. C.8 in which each branch $\mathcal{M}_{01}$ and $\mathcal{M}_{02}$ of the critical manifold is decomposed as follows

$$\mathcal{M}_{01} = \mathcal{M}_{01}^{\mathrm{st},1} \cup p^{\mathrm{I}} \cup \mathcal{M}_{01}^{\mathrm{a},1} \cup p_1^{\mathrm{LF}} \cup \mathcal{M}_{01}^{\mathrm{st},2} \cup p_1^{\mathrm{RF}} \cup \mathcal{M}_{01}^{\mathrm{a},2} \tag{C.52}$$

with $p^{\mathrm{I}} = (a^{\mathrm{I}}, 0, c^{\mathrm{I}}, \delta^{\mathrm{I}})$ (where a^{I} and δ^{I} are obtained from c^{I} using Eqs. (C.41a) and (C.42a) and the b coordinate is null by Eq. (C.38a)), and

$$\mathcal{M}_{02} = \mathcal{M}_{02}^{\mathrm{a},1} \cup p_2^{\mathrm{LF}} \cup \mathcal{M}_{02}^{\mathrm{st},1} \cup p_1^{\mathrm{RF}} \cup \mathcal{M}_{01}^{\mathrm{a},2} \cup p^{\mathrm{FP}} \cup \mathcal{M}_{02}^{\mathrm{st},2} \cup p^{\mathrm{I}} \tag{C.53}$$

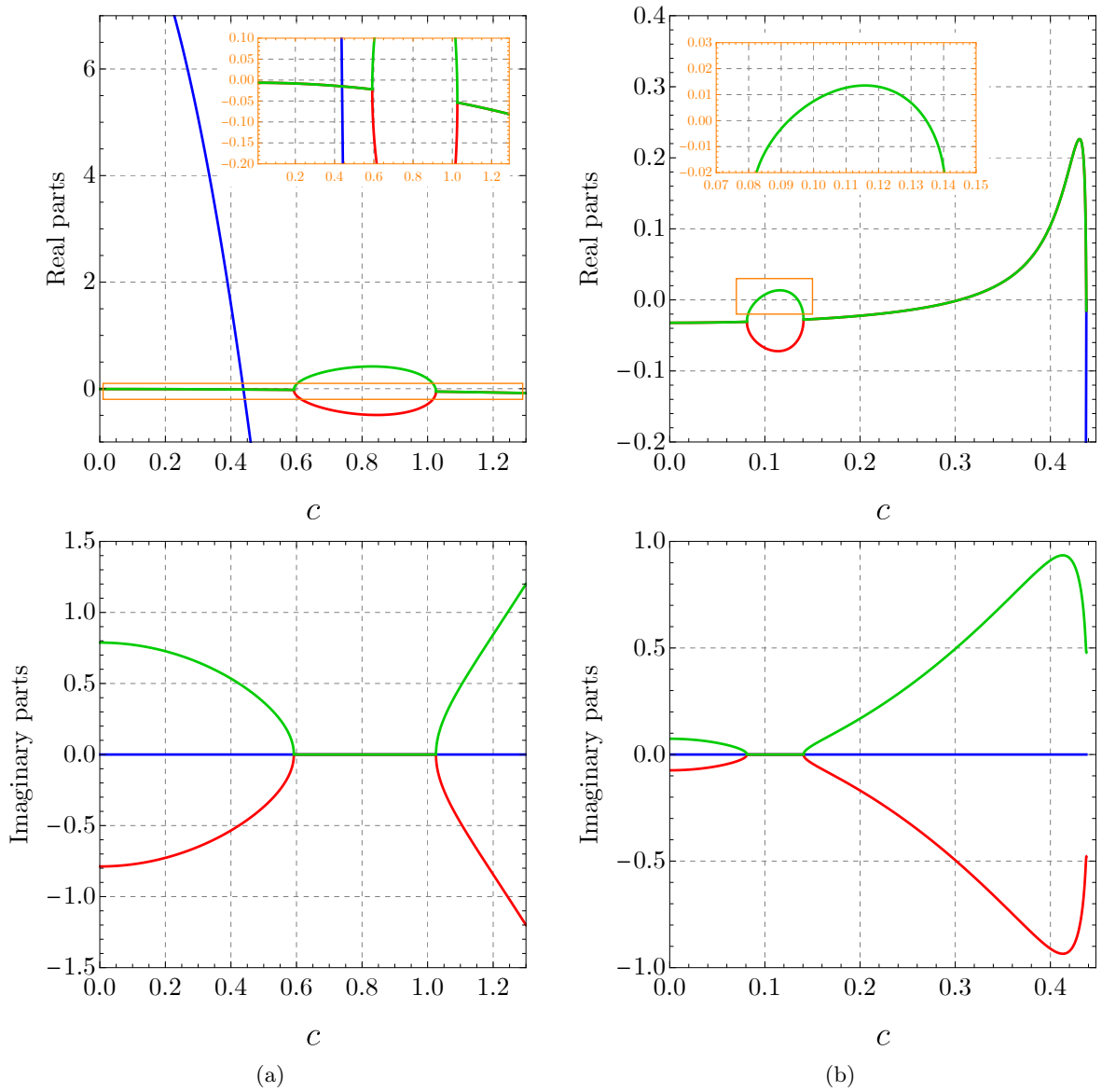


Figure C.7. The three eigenvalues of (a) $\mathbf{J_g}(p_1)$ given by (C.47) and (b) $\mathbf{J_g}(p_2)$ given by (C.48). Top : real parts ; Bottom : imaginary parts. The eigenvalues are numerically computed using the same BNES parameters as in Fig. C.6.

with $p^{\mathrm{FP}} = (a^{\mathrm{FP}}, b^{\mathrm{FP}}, c^{\mathrm{FP}}, \delta^{\mathrm{FP}})$ (where a^{FP}, b^{FP} and δ^{FP} are obtained from c^{FP} using Eqs. (C.38b), (C.41b) and (C.42b)). In both previous expressions the superscripts "st" and "a" indicate the saddle-type and attracting natures of the critical manifold, respectively.

The structure of $\mathcal{M}_{02}$ can be modified if (C.45) or (C.46) does not hold, in this case $\mathcal{M}_{02}$ is not S-shaped anymore and $\mathcal{M}_{02}^{\mathrm{st},1}$ disappears. Moreover, if p^{FP} joins p^{I}, the branch $\mathcal{M}_{02}^{\mathrm{st},2}$ disappears.

From the previous analysis, we can already give a partial description of the APMD behavior. In phase space, if the trajectory is not in the vicinity of the critical manifold, it evolves fast to an attracting part of the critical manifold. These fast epochs are approximately described by the fast subsystem (C.31). Bistability has been observed since several points of the critical manifold can be stable for a given set of parameters and a given value of the slow variable a (which, due to (C.31a), is a parameter for the fast subsystem). In the present paper the basins of attraction of each attracting branch of the critical manifold are not rigorously investigated, together with the possible other kinds of solutions of the fast subsystem (such as periodic, quasiperiodic or even chaotic motions). This can be investigated in the future.

In the vicinity of the critical manifold, the trajectory evolves slowly. These slow epochs are approximately described by the slow subsystem (C.30), its analysis is performed in the next section.

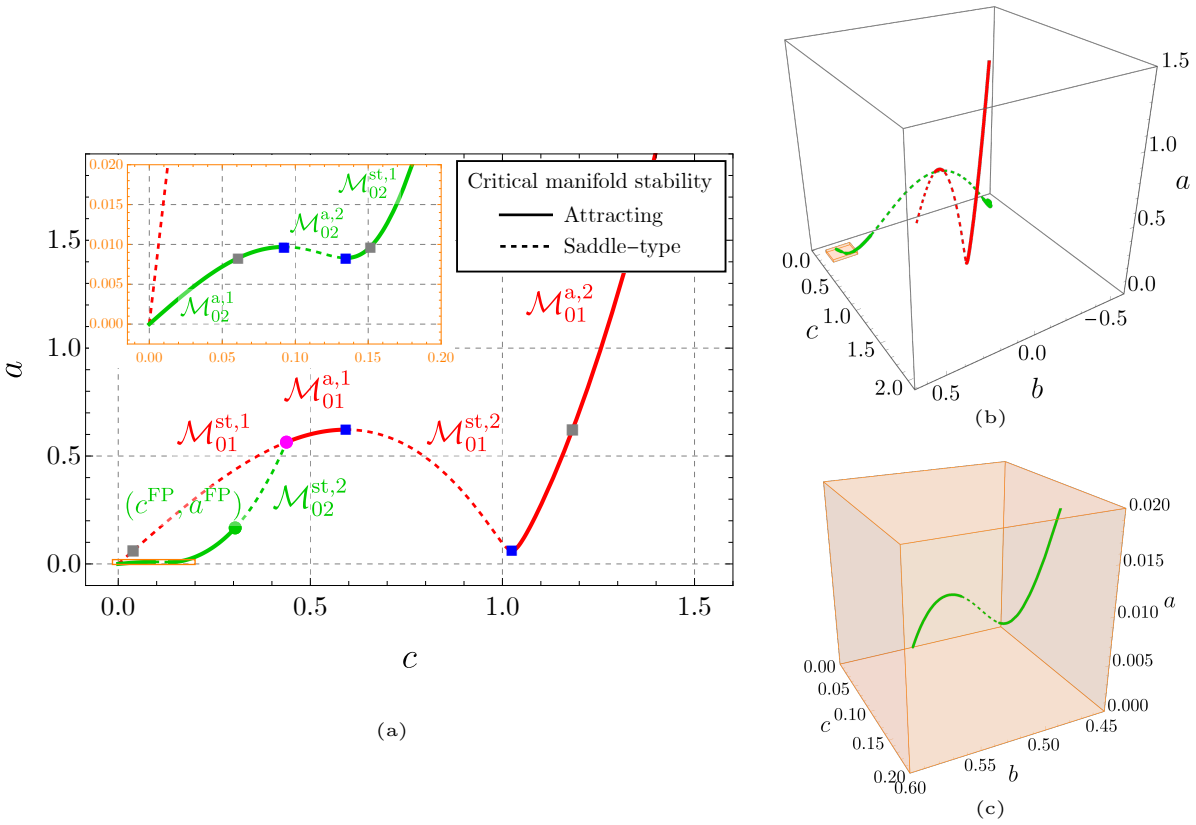


Figure C.8. The different parts of the critical manifold $\mathcal{M}_0$. (a) In the (c, a)-plane. For the branch $\mathcal{M}_{01}$ (in red) one has (see Eq. (C.52)) from left to right : the first saddle-type branch $\mathcal{M}_{01}^{st,1}$, the first attracting branch $\mathcal{M}_{01}^{a,1}$, the second saddle-type branch $\mathcal{M}_{01}^{st,2}$ and the second attracting branch $\mathcal{M}_{01}^{a,2}$. These branches are respectively connected to each other by the point p^{I} (magenta point) and the left and right fold points p_1^{LF} and p_1^{RF} (blue points). For the branch $\mathcal{M}_{02}$ (in green) one has (see Eq. (C.53)) from left to right : the first attracting branch $\mathcal{M}_{02}^{a,1}$, the first saddle-type branch $\mathcal{M}_{02}^{st,1}$, the second attracting branch $\mathcal{M}_{02}^{a,2}$ and the second saddle-type branch $\mathcal{M}_{02}^{a,2}$ which ends at the point p^{I} . These branches are respectively connected to each other by the left and right fold points p_2^{LF} and p_2^{RF} (blue points) and the point p^{FP} (green point). (b) In the (b, c, a)-space. (c) Zoom of (b) corresponding to the orange colored rectangular cuboid area.

C.4.3 Asymptotic analytical expression of the fixed points of the amplitude-phase modulation dynamics

As mentioned previously, the fixed points of the APMD (C.29) (or (C.27)) characterize periodic solutions of the original system (E.3). Since $0 < \epsilon \ll 1$, these fixed points can be asymptotically approximated by those of the slow subsystem (C.30). Moreover, to obtain a simple analytical expression of these fixed points, it is first necessary to linearize the function f (see Eq. (C.28a)) around $a = 0$.

Then, using successively Eqs. (C.38a), (C.41a) and (C.42a) and Eqs.(C.38b), (C.41b) and (C.42b) the slow dynamics (C.30) on the branches $\mathcal{M}_{01}$ and $\mathcal{M}_{02}$ can be considered only with respect to c as

$$\frac{dH_1}{dc}(c)c' = F_1(c) \tag{C.54}$$

and

$$\frac{dH_2}{dc}(c)c' = F_2(c), \tag{C.55}$$

respectively. The expressions of the functions F_1 and F_2 in the previous equations are given in Appendix C.8.

Consequently, the desired fixed points are solutions of $F_1(c) = 0$ and $F_2(c) = 0$ of which $c = 0$ is a trivial solution. In the (b, c, a)-space, on $\mathcal{M}_{01}$ this gives $(0, 0, 0)$ which correspond to p_0^{st} (see Eq. (C.3)). On $\mathcal{M}_{02}$ that yields $(0, \pm\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}, 0)$ (see Eq. (C.38b)) which correspond to p_1^{st} and p_2^{st} (see Eq. (C.4)).

Then the non trivial solutions of $F_1(c) = 0$ and $F_2(c) = 0$ are computed. The terms in parentheses in the numerator of F_1 and F_2 are quadratic polynomials with respect to c^2. The corresponding positive solutions in

terms of the variable c are $c^*_{1,1}$ and $c^*_{1,2}$ obtained solving $F_1(c) = 0$, and $c^*_{2,1}$ and $c^*_{2,2}$ obtained solving $F_2(c) = 0$. The explicit expressions of $c^*_{1,1}$, $c^*_{1,2}$, $c^*_{2,1}$ and $c^*_{2,2}$ are given by Eqs. (C.71) and (C.72) in Appendix C.8. One can easily verify from Eqs. (C.71) and (C.72) that $c^*_{2,1} < c^*_{2,2} < c^*_{1,1} < c^*_{1,2}$ and that these fixed points no longer exist when they become complex for

$$\sigma > \sigma^{\mathrm{S}} = \frac{1}{\mu}. \tag{C.56}$$

Other sets of parameters can make the above expressions complex, except $c^*_{1,2}$ which is always real if Eq. (D.34) holds.

Finally, the stability of the fixed points $c^*_{1,i}$ and $c^*_{2,i}$ $(i = 1, 2)$ is obtained checking the sign of $\frac{d}{dc}\left(\frac{F_1(c)}{\frac{dH_1}{dc}(c)}\right)\Big|_{c=c^*_{1,i}}$ and $\frac{d}{dc}\left(\frac{F_2(c)}{\frac{dH_2}{dc}(c)}\right)\Big|_{c=c^*_{2,i}}$ $(i = 1, 2)$, respectively.

The analysis presented in this section provides an approximate description of the slow dynamics of the APMD in the vicinity of an attracting branch of the critical manifold. However, slow dynamics around families of periodic, quasiperiodic or chaotic solutions of the fast subsystem is not investigated. Studies inspired from the work of Berglund and Gentz [22] on invariant manifold tracking the family of periodic orbits could be again the subject of future works.

C.5 Asymptotic global stability analysis of the amplitude-phase modulation dynamics

Knowing the fixed points of the APMD and their stability, obtained in Section C.4.3, together with the analysis of the critical manifold presented in Section **??**, allow to perform the global stability analysis of the APMD, again asymptotically in the case of $\epsilon \to 0$. This will enable us to interpret the observations made in Fig. C.4. The analysis is possible analytically because the critical manifold is one-dimensional. Therefore the slow dynamics is also one-dimensional and described by Eqs. (C.54) and (C.55).

From Eqs. (C.11), (C.16), (C.17), (C.20), (C.21) and the rules $b = b_0 + \epsilon b_1$ and $C = C_0 + \epsilon C_1$, one has

$$y(t) = -\frac{b(t)\epsilon + b(t) - a(t)\cos(\theta(t) + t) + c(t)\cos(t + \varphi(t)) + \frac{1}{32}a(t)^3\lambda\epsilon\sin(3(\theta(t) + t))}{\epsilon + 1}. \tag{C.57}$$

For comparison purposes, the time series $y(t)$ reconstructed from numerical simulations of the APMD using Eq. (C.57) are shown in Fig. C.9. In Figs. C.9(a) to C.9(e) the parameters used are the same as in Figs. C.4(a) to Figs. C.4(e). We can see that the APMD can reproduce regimes of the same nature as those obtained with the full order system (E.3). In Figs. C.9(f) and C.9(g), even if the APMD can reproduce these two chaotic regimes, they are here obtained for smaller values of the bifurcation parameter of σ, namely $\sigma = 1.22$ and 0.77 for Figs. C.9(f) and C.9(g), respectively. In general when chaotic regimes occur the mitigation limit observed on the numerical simulation of the APMD is smaller than that obtained with the full order system (E.3).

To explain the nature of the different regimes shown in Figs. C.4 and C.9, the trajectories of the APMD in the (c, a)-plane (obtained from the same simulations as in Fig. C.9) are superimposed on the critical manifold given by Eq. (C.41) in Fig. C.10. The structure of the critical manifold (i.e, stability, fold points $(c_i^{\mathrm{LF}}, a_i^{\mathrm{LF}})$ and $(c_i^{\mathrm{RF}}, a_i^{\mathrm{RF}})$ $(i = 1, 2)$, points $(c_i^{\mathrm{U}}, a_i^{\mathrm{LF}})$ and $(c_i^{\mathrm{D}}, a_i^{\mathrm{RF}})$ and the point $(c^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{I}})$) is depicted in the same way as in Figs. C.6 and C.8. Fig. C.10 shows also the fixed points of the APMD obtained in Section C.4.3, i.e. the trivial fixed points [4] and the non trivial fixed points $(c^*_{1,i}, H_1(c^*_{1,i}))$ (in black color) and $(c^*_{2,i}, H_2(c^*_{2,i}))$ (in orange color) with $i = 1, 2$ and $c^*_{1,i}$ and $c^*_{2,i}$ given by Eqs. (C.72) and (C.72), respectively. These fixed points are depicted by a $\star$ when they are stable and a $\bullet$ when they are unstable.

The different regimes can now be explained as follows :

- Fig. C.10(a). The trivial fixed point on $\mathcal{M}^{\mathrm{a},1}_{02}$ is stable (depicted by an orange $\star$). The other fixed points on $\mathcal{M}^{\mathrm{a},1}_{02}$ is unstable (depicted by an orange $\bullet$). As long as the initial condition causes the APMD trajectory to arrive (after a fast epoch) on $\mathcal{M}^{\mathrm{a},1}_{02}$ between the unstable fixed point and the stable fixed point, the latter is reached after a slow epoch along $\mathcal{M}^{\mathrm{a},1}_{02}$, as in Fig. C.10(a). The initial condition in the zoom (orange frame in Fig. C.10(a)) is depicted by a blue $\bullet$.
- Fig. C.10(b). There is only the unstable trivial fixed point on $\mathcal{M}^{\mathrm{a},1}_{02}$ (for this set of parameters one has $\mathcal{M}_{02} = \mathcal{M}^{\mathrm{a},1}_{02}$). The trajectory follows slowly $\mathcal{M}^{\mathrm{a},1}_{02}$ until it disappears at $(c^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{I}})$ and then follows $\mathcal{M}^{\mathrm{a},1}_{01}$,

4. Remember that they correspond to p_0^{st} when they are on $\mathcal{M}_{01}$ and to p_1^{st} (or p_2^{st}) when they are on $\mathcal{M}_{02}$. They are superimposed in the (c, a)-plane but not in the (b, c, a)-space (see Section C.4.3).

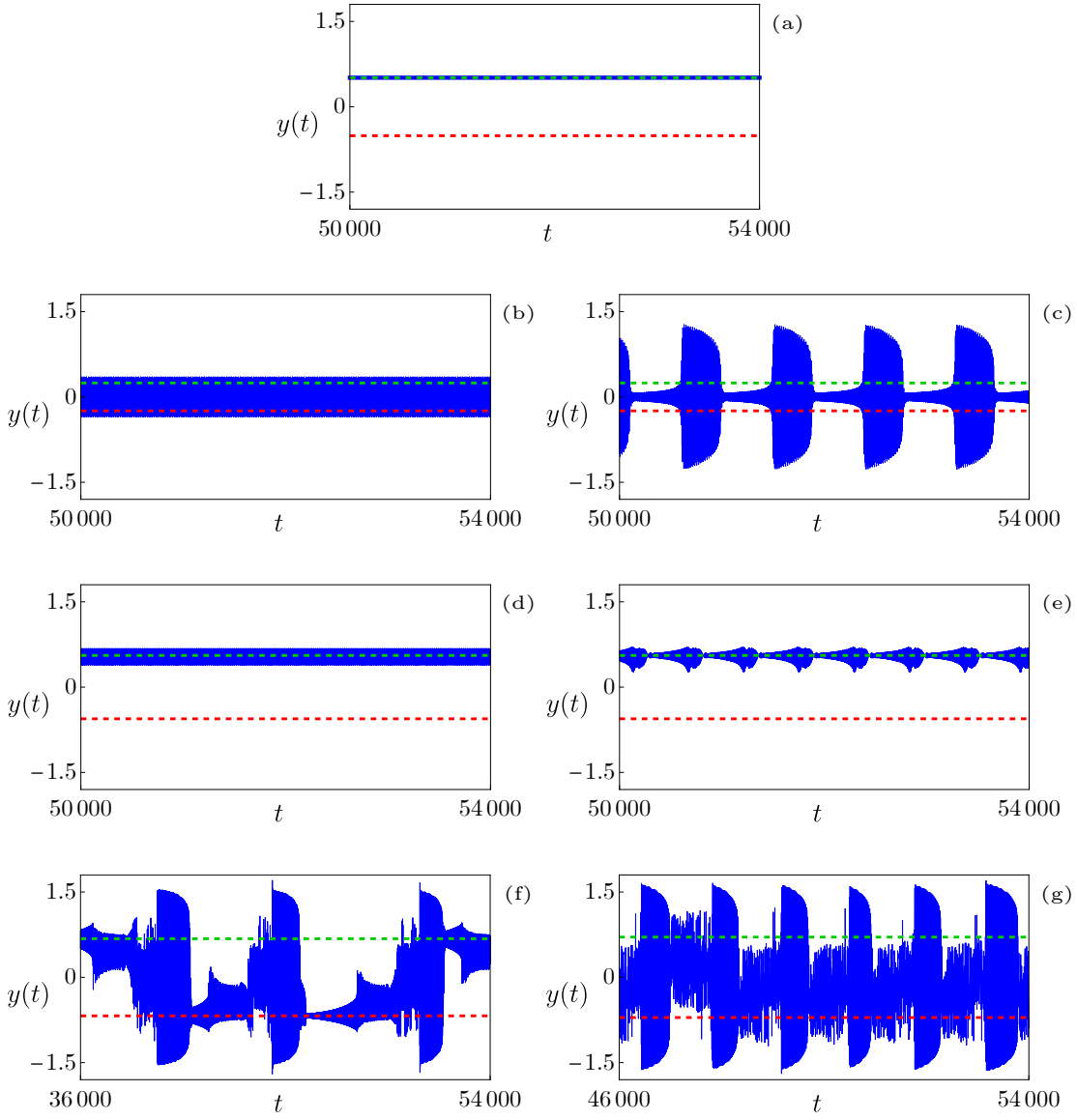


Figure C.9. Time series $y(t)$ reconstructed from numerical simulations of the APMD using Eq. (C.57). Equilibrium positions y_1^{st} (dashed green line) and y_2^{st} (dashed red line). From (a) to (e) the parameters used are the same as in Figs. C.4(a) to Figs. C.4(e). In (f) and (g) the value of σ is changed compared to Figs. C.4(f) and C.4(g), namely $\sigma = 1.22$ and 0.77, respectively.

slowly again. Finally, the trajectory stops on a stable fixed point (depicted by a black $\star$). Because on $\mathcal{M}_{01}$ $b = 0$ (see Fig. C.8(b)), this scenario of the APMD explains the periodic regime PR1 observed in Fig. C.4(b).

- Fig. C.10(c). The fixed point on $\mathcal{M}_{01}^{a,1}$ moves to the saddle-type part $\mathcal{M}_{01}^{st,2}$. Consequently, the trajectory evolves slowly to the left fold point (c_1^{LF}, a_1^{LF}) and undergoes a fast jump to $\mathcal{M}_{01}^{a,2}$. Because the unstable point on $\mathcal{M}_{01}^{a,2}$ (the black $\bullet$) is above (c_i^{U}, a_i^{LF}) (the gray $\blacksquare$) we then observe a succession of slow evolutions near the attracting branch of $\mathcal{M}_{01}$ and fast jumps (from (c_1^{LF}, a_1^{LF}) to (c_i^{U}, a_i^{LF}) and from (c_1^{RF}, a_1^{RF}) to (c_i^{D}, a_i^{RF})). These so-called *relaxation oscillations* on $\mathcal{M}_{01}$ explain the SMR1 observed in Fig. C.4(c).
- Fig. C.10(d). There is a stable non trivial fixed point on $\mathcal{M}_{02}^{a,1}$ (the orange $\star$). The trivial fixed point and the other non trivial fixed point on $\mathcal{M}_{02}^{a,1}$ are unstable (the two orange $\bullet$). As long as the initial condition causes the APMD trajectory to arrive on $\mathcal{M}_{02}^{a,1}$ below the unstable non trivial fixed point, the stable fixed point is reached after a slow epoch along $\mathcal{M}_{02}^{a,1}$, as in Fig. C.10(c). This scenario for the APMD corresponds to the periodic intra-well motion PR1 observed in Fig. C.4(d).
- Fig. C.10(e). A scenario of relaxation oscillations on $\mathcal{M}_{02}$ (similar to that observed on $\mathcal{M}_{01}$ in Fig. C.10(c)) is observed in agreement with the intra-well SMR2 of Fig. C.4(d). Again, as long as the initial condition causes the APMD trajectory to arrive on $\mathcal{M}_{02}^{a,2}$ below the unstable non trivial fixed point, these relaxation oscillations will occur.
- Fig. C.10(f). For the sake of readability of the figure, only steady state motion is shown. This scenario is also illustrated in Fig. C.11(a), showing the time series of the variables $b(t)$, $c(t)$ and $y(t)$ (computed again using Eq. (C.57)), and in Fig. C.12(a) depicting the trajectory of the APMD in the (b, c, a)-space. For this scenario and the next one, when we speak of an equilibrium (resp. a periodic) regime during a slow epoch of the APMD, this means that for the set of parameters and the value of a considered, the fast subsystem has a stable equilibrium (resp. periodic) solution. The APMD therefore follows an invariant manifold tracking these equilibrium (resp. periodic) solutions and parameterized by the slow variable a. For the full order dynamics (referred to as FOD in Fig. C.11(a)), which includes oscillations at the natural frequency of the VdP oscillator, that corresponds to invariant manifold tracking of periodic (resp. quasiperiodic solutions). Chaotic motions are also encountered. The successive phases of the motion are described in Fig. C.11(a). During a complete cycle, the trajectory of the APMD :
  - Follows $\mathcal{M}_{02}^{a,1}$ (SE1 : APMD, Equilibrium 1 ; FOD, Periodic 1). For illustration purposes, results of the numerical simulation of the fast subsystem (C.31) for $a = 0.07$ are shown in Fig. C.13(a). We can see that with suitably chosen initial conditions, the fast subsystem dynamics reaches an equilibrium which corresponds to a point of $\mathcal{M}_{02}^{a,1}$.
  - Undergoes a fast jump (FE2) from (c_2^{LF}, a_2^{LF}) and the corresponding left branch of $\mathcal{M}_{02}$ is saddle-type (i.e., $\mathcal{M}_{02}^{st,2}$).
  - Is periodic (Periodic 1) and quasiperiodic (Quasiperiodic 1) for the FOD precisely because $\mathcal{M}_{02}$ is saddle-type and then chaotic (Chaotic 1). For the APMD (resp. FOD), the phases Periodic 1 (resp. Quasiperiodic 1) and Chaotic 1 constitute the SE2. Numerical solutions of the fast subsystem (C.31) for $a = 0.14$ and 0.25 are shown in Figs. C.13(b) and C.13(c), respectively. Again with suitable initial conditions, the fast subsystem dynamics reaches a periodic solution when $a = 0.14$ and a chaotic attractor when $a = 0.25$, in agreement with what we observe for the APMD during Periodic 1 and Chaotic 1 phases, respectively (see the observed APMD for the same values of a in Fig. C.12(a)).
  - Undergoes a fast jump (FE3) to $\mathcal{M}_{01}^{a,2}$.
  - Follows $\mathcal{M}_{01}^{a,2}$ (SE3 : APMD, Equilibrium 2 ; FOD, Periodic 2). Results of the numerical simulation of the fast subsystem (C.31) are shown in Fig. C.13(a) for $a = 0.4$. We can see here that, after any transient dynamics has died out, the fast subsystem dynamics reaches an equilibrium which corresponds to a point of $\mathcal{M}_{01}^{a,2}$.
  - Finally undergoes a fast jump (FE1') from (c_1^{RF}, a_1^{RF}) to $\mathcal{M}_{02}^{a,1}$, and so on.

  At each cycle there is the possibility of reaching one or other of the opposite $\mathcal{M}_{02}$ branches (see Fig. C.12(a)). Concerning the start of the chaotic phases, we do not know whether this is really a chaotic movement of the fast subsystem or a quasi-periodic solution. Again, this may be subject of future work with a more thorough bifurcation analysis of the fast subsystem, including the determining of basins of attraction in case of multistability. This scenario of the APMD is in agreement with what

we observed in Fig. C.5(a) except that the Periodic 1 and Quasiperiodic 1 phases (for the FOD) appear to be reversed.

- Fig. C.10(g). Again, only steady state motion is shown and the scenario is also illustrated in Fig. C.11(b), showing the time series of the variables $b(t)$, $c(t)$ and $y(t)$ (computed again using Eq. (C.57)), and in Fig. C.12(b) depicting the trajectory of the APMD in the (b, c, a)-space. The successive phases of the motion are described in Fig. C.11(b). When we observe the APMD, we see a periodic and then a chaotic regime during phases 1 and 1'. It is difficult to differentiate between these two phases on the $y(t)$ signal from the FOD. However, the latter is qualitatively equivalent to what we observed in Fig. C.5(b). Numerical solutions of the fast subsystem (C.31) for $a = 0.22$, 0.35 and 0.45 are shown in Figs. C.14(a), C.14(b) and C.14(c), respectively. In agreement with what we observe for the APMD during Periodic 1, Chaotic 1 and Equilibrium phases (see the observed APMD for the same values of a in Fig. C.12(b)), the fast subsystem dynamics reaches a periodic regime, a chaotic motion and an equilibrium for $a = 0.22$, 0.35 and 0.45, respectively.

In each of the previous situations we can see that if there is a passage on $\mathcal{M}_{01}$, it is the largest unstable fixed point (black • on $\mathcal{M}_{01}^{a,2}$) which prevents the system from tipping over into a harmful situation. If the trajectory ends up on $\mathcal{M}_{01}^{a,2}$, above this fixed point, it runs along $\mathcal{M}_{01}^{a,2}$ towards infinity (i.e. harmful situation) when the linearized VdP is considered (see Section C.4.3). If the nonlinear VdP is considered, the trajectory reaches a stable fixed point with large amplitude similar to that of the VdP alone (i.e. also harmful situation).

Of course, the global stability analysis presented here is only partial. In the future, it will be necessary to rigorously research the possible solutions of the fast subsystem, as well as their stability. It will then be necessary to find the invariant manifolds of the APMD tracking these solutions. However, this study enables us to interpret a certain number of regimes observed on numerical simulations.

C.6 Conclusion

In this paper a Van der Pol oscillator coupled to a bistable nonlinear energy sink BNES) has been studied. Numerical simulations have shown that this system can undergo a multitude of motions including different types of periodic regimes and so-called strongly modulated responses (SMR) as well as chaotic regimes. We also show that a BNES can be much more efficient than a classical cubic NES but this is not robust since a little perturbation can switch the system from harmless to harmful situations. However, even in the most unfavorable cases, we were able to find a set of parameters for which the BNES performs better than the NES.

Then, in an original way, the so-called Multiple Scale/Harmonic Balance Method (MSHBM) is used and modified (compared to its usual use) to consider the specific feature of the BNES, i.e., that it can have a nonzero-mean oscillating motion. This allowed us to derive an amplitude-phase modulation dynamics (APMD) which can reproduce the complex behavior of the initial system.

Because of the presence of a small perturbation parameter (i.e., the mass ratio between the BNES and the VdP oscillator), the APMD is governed by two different time scales. More precisely, in its real form it appears as a (3,1)-fast-slow system. The motion of such a fast-slow system consists in a succession of slow and fast epochs. In the case of a classic cubic NES, the APMD is a (2,1)-fast-slow system whose behavior is now well understood. For example, the most complex responses are relaxation oscillations leading to so-called strongly modulated responses (SMR) for the initial system. Here, due to its (3,1)-fast-slow nature, the APMD can undergo a multitude of different motions including periodic and quasiperiodic regimes of different types and even chaotic regimes, in agreement with what has been observed on numerical simulations of the initial system. The fast-slow analysis of the APMD has been conducted within the framework of the geometric singular perturbation theory. By the computation of the so-called critical manifold and the analytical expressions of the APMD fixed points, a global stability analysis has been performed. This enabled us to interpret a certain number of regimes observed on numerical simulations of the initial system.

The methodology proposed here is applied to the study of passive mitigation of self-sustained oscillations using a BNES. In this context, the Van der Pol oscillator is used here as an archetypal self-sustained oscillator. However, in mechanical systems which are more than one-dimensional, self-sustained oscillations appear in general because of mode-coupling instabilities. This is the case, for example, with the flutter instability of an aircraft wing or with friction-induced vibrations in braking systems. Classical cubic NES have demonstrated their ability to mitigate this type of self-sustained oscillations (see e.g. [a8, a14, 78]). The present results suggest that BNES could be even more effective. Moreover, if the primary mechanical structure has only one unstable mode (i.e., the modal analysis reveals that only one mode can have an eigenvalue with a positive real part) the methodology proposed in [a8, 78] shows how to reduce the primary structure dynamics on its unstable mode. This allows to analyze the system as in the case of a one-dimensional primary structure. These

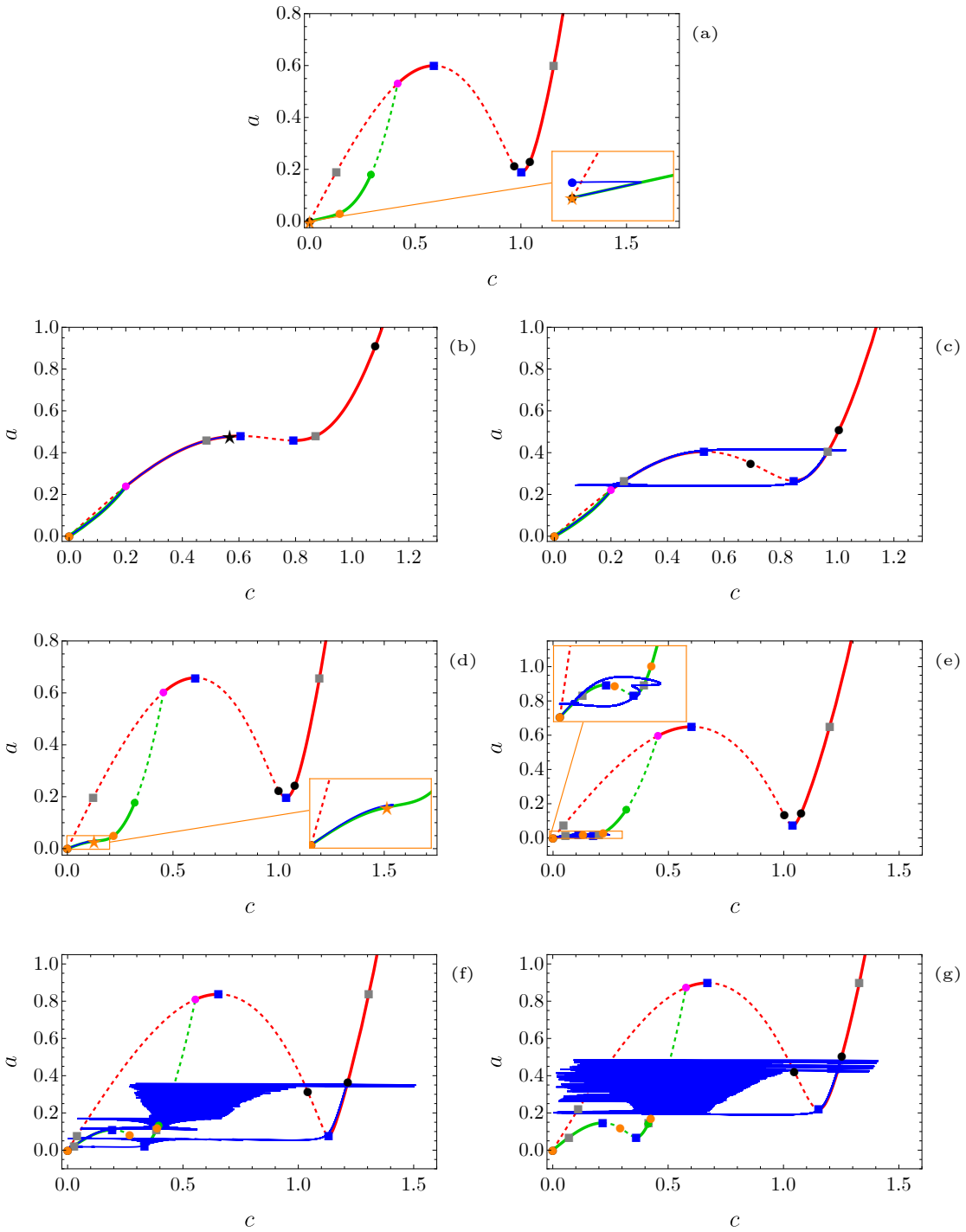
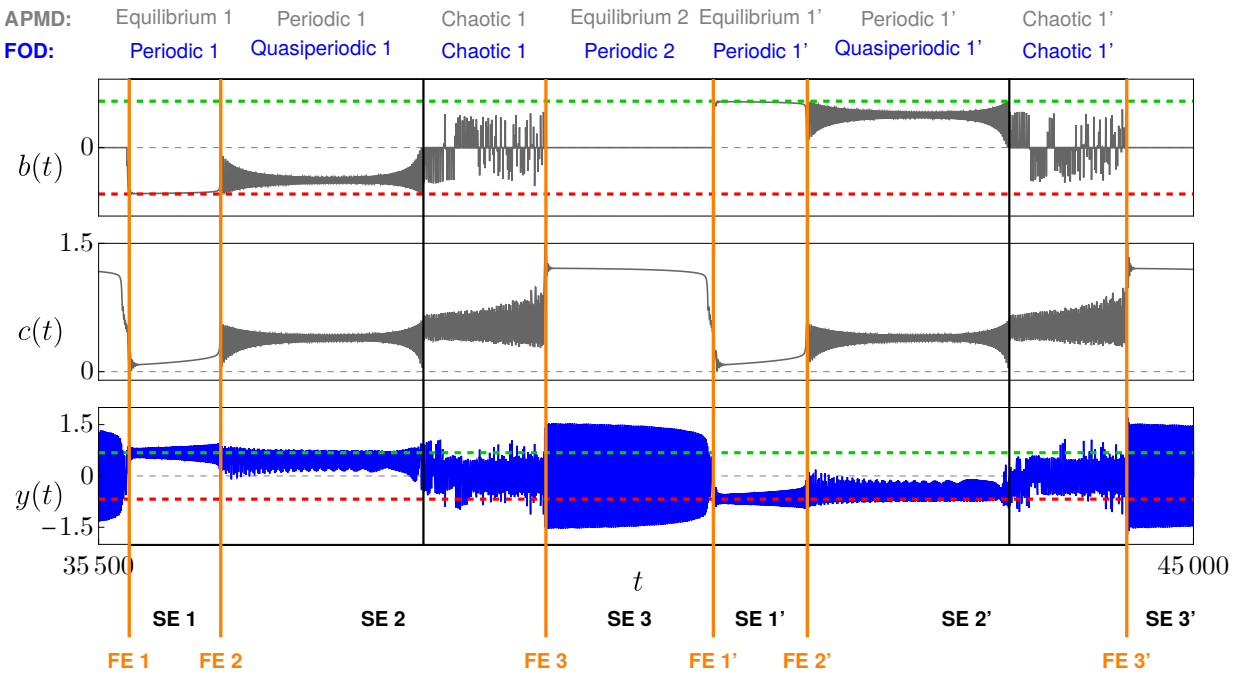
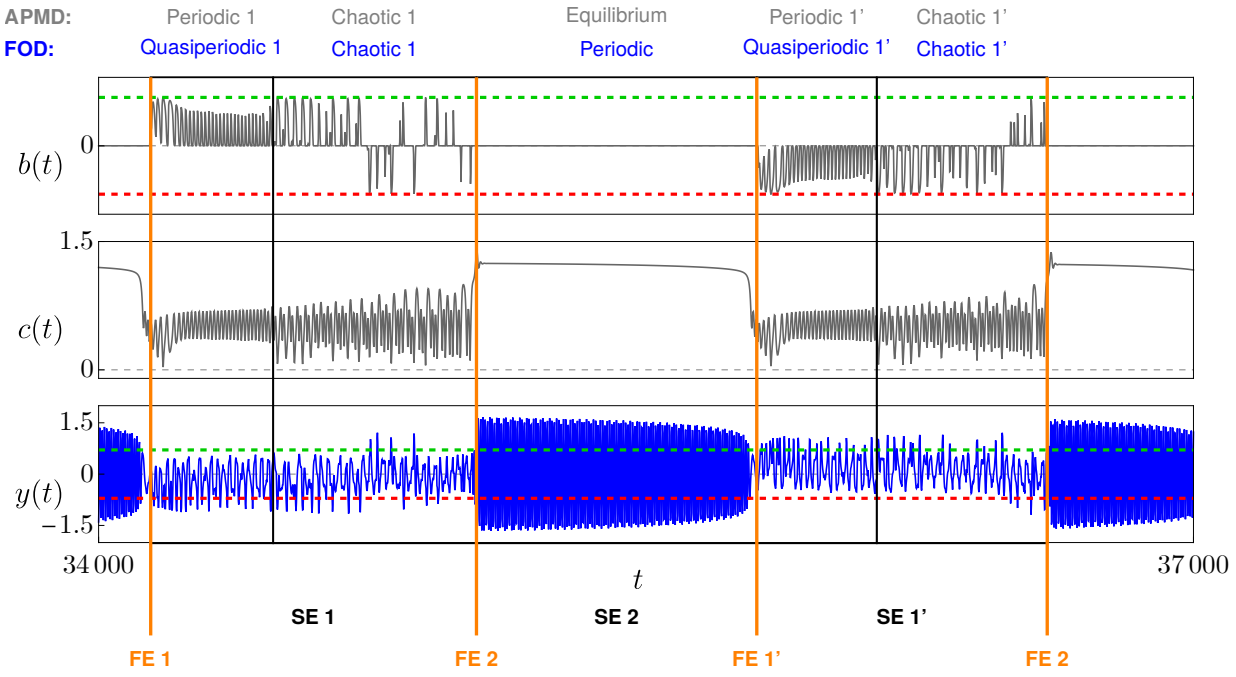


Figure C.10. Trajectories of the APMD in the (c, a)-plane (obtained from the same simulations as in Fig. C.9) are superimposed on the critical manifold given by Eq. (C.41). The structure of the critical manifold (i.e, stability, fold points $(c_i^{\mathrm{LF}}, a_i^{\mathrm{LF}})$ and $(c_i^{\mathrm{RF}}, a_i^{\mathrm{RF}})$ $(i = 1, 2)$, points $(c_i^{\mathrm{U}}, a_i^{\mathrm{LF}})$ and $(c_i^{\mathrm{D}}, a_i^{\mathrm{RF}})$ and the point $(c^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{I}})$) is depicted in the same way as in Figs. C.6 and C.8. Fixed points of the APMD obtained in Section C.4.3, i.e. the trivial fixed points and the non trivial fixed points $(c_{1,i}^*, H_1(c_{1,i}^*))$ (in black color) and $(c_{2,i}^*, H_2(c_{2,i}^*))$ (in orange color) with $i = 1, 2$ and $c_{1,i}^*$ and $c_{2,i}^*$ given by Eqs. (C.71) and (C.72), respectively. These fixed points are depicted by a $\star$ when they are stable and a $\bullet$ when they are unstable.



(a)



(b)

Figure C.11. Same numerical simulations as in (a) Figs. C.10(f) and (b) C.10(g). For both (a) and (b) from top to bottom one has the time series $b(t)$ (gray), (c) (gray) and $y(t)$ (blue). The equilibrium positions y_1^{st} (dashed green line) and y_2^{st} (dashed red line) are depicted in the plot of $b(t)$. One has APMD for amplitude-phase modulation dynamics, FOD for full order dynamics, FE for fast epoch and SE for slow epoch.

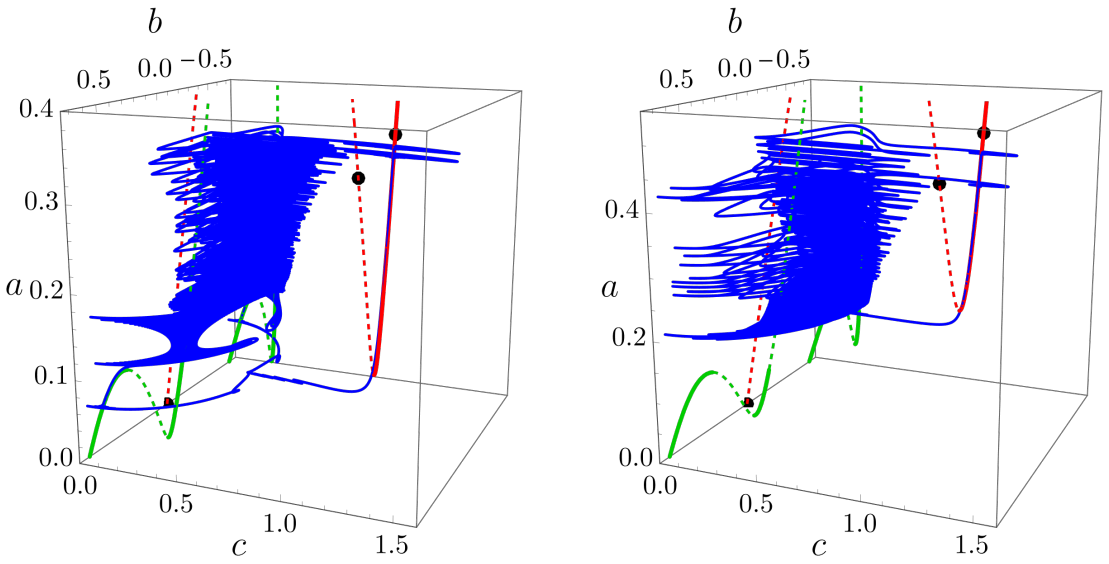


Figure C.12. Same numerical simulations as in (a) Figs. C.10(f) and (b) C.10(g) depicting the trajectory of the AMPD in the (b, c, a)-space (blue) superimposed on the critical manifold $\mathcal{M}_{01}$ (attracting : red solid line ; saddle-type : red dashed line) and $\mathcal{M}_{02}$ (attracting : green solid line ; saddle-type : green dashed line). Unstable fixed points of the AMPD on $\mathcal{M}_{01}$ are also represented by black •.

methodologies could be associated to the present results to analyze the behavior of a mechanical system with one unstable mode and coupled to a BNES.

Finally, because of its general nature, the present study could be also used in the future to investigate passive attenuation of free and forced vibrations. It could also be generalized to the case of a multistable NES or to a primary mechanical system with more than one unstable mode.

C.7 Appendix A. Approximate analytical solution of the Van der Pol oscillator

The equation of motion of the VdP oscillator alone is

$$\ddot{x} + \epsilon h(x, \dot{x}) + x = 0. \tag{C.58}$$

with $h(x, \dot{x}) = -\sigma\dot{x} + \lambda\dot{x}x^2$.

An approximate analytical solution of Eq. (C.58) is found using the Krylov-Bogoliubov method of averaging (see e.g. [143]). For that, an amplitude phase representation of the motion is first introduced as

$$x = r(t)\cos\left(t + \varphi(t)\right) \tag{C.59a}$$

$$\dot{x} = -r(t)\sin\left(t + \varphi(t)\right) \tag{C.59b}$$

The desired form of Eq. (C.59) requires that

$$\dot{r}\cos\gamma - r\dot{\varphi}\sin\gamma = 0, \tag{C.60}$$

with $\gamma = t + \varphi$ which yields

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{r}}{r}\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} \quad \text{and} \quad \dot{r} = r\dot{\varphi}\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}. \tag{C.61}$$

The time derivative of Eq. (C.59) is

$$\ddot{r} = -r\cos\gamma - \dot{r}\sin\gamma - r\dot{\varphi}\cos\gamma. \tag{C.62}$$

The substitution of (C.59) and (C.62) into (C.58) and the use of (C.61) leads to

$$\dot{r} = h\left(r\cos\gamma, -r\sin\gamma\right)\sin\gamma \tag{C.63a}$$

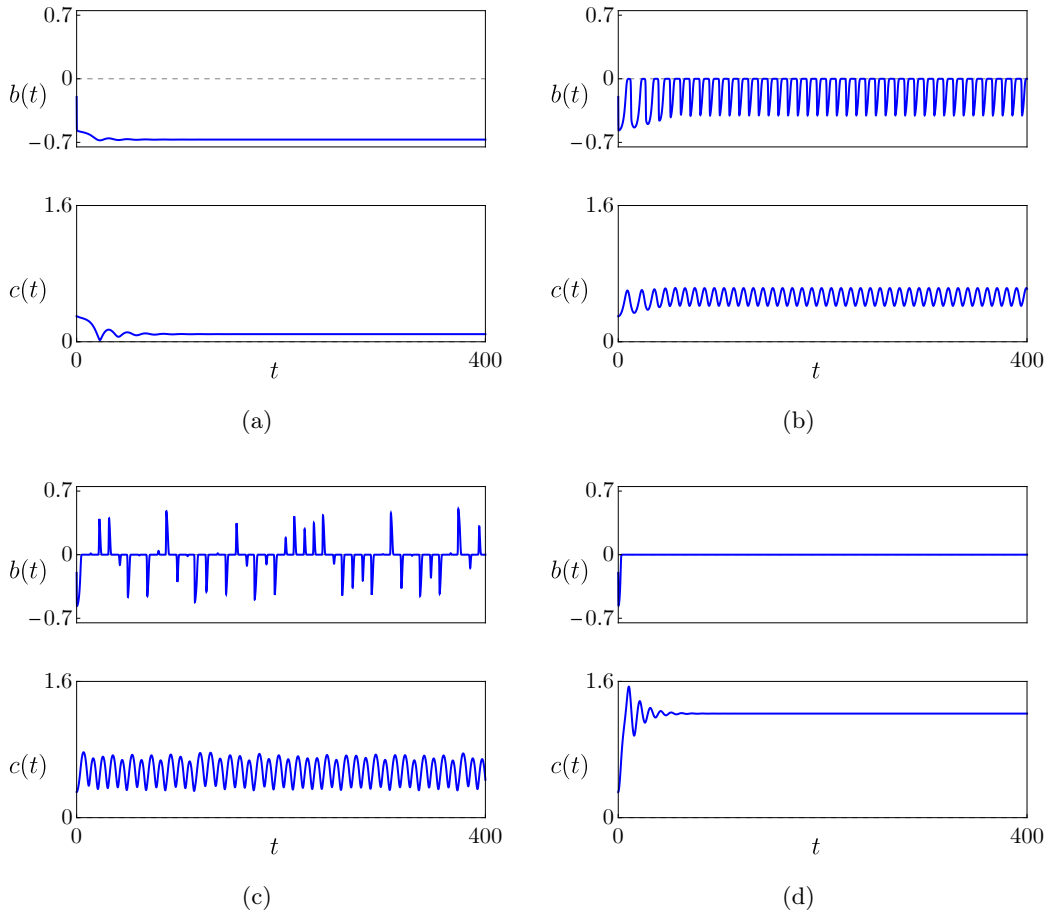


Figure C.13. Numerical solutions of the fast subsystem (C.31) for (a) $a = 0.07$, (b) 0.14, (c) 0.25 and (d) 0.4. Parameters are the same as in Fig. C.10(f) and the following initial conditions are used : $b(0) = -0.2$, $c(0) = 0.3$ and $\delta(0) = \pi$.

$$\dot{\varphi} = h\left(r\cos\gamma, -r\sin\gamma\right)\frac{\cos\gamma}{r}. \tag{C.63b}$$

For $0 < \epsilon \ll 1$, $\dot{r}$ and $\dot{\gamma}$ are small. Therefore, r and φ vary much more slowly with t than $\gamma = t + \varphi$. Consequently, the Krylov-Bogoliubov approximation is used, i.e., Eq. (C.63) is averaged over the period 2π considering r, φ, $\dot{r}$ and $\dot{\varphi}$ are constant. That yields the following system

$$\dot{r} = \epsilon\frac{1}{8}r\left(4\sigma - \lambda r^2\right) \tag{C.64a}$$

$$\dot{\varphi} = 0 \tag{C.64b}$$

that approximates Eq. (C.63).

In this approximation, the phase φ is constant (and equal to the initial phase denoted as φ_0) and uncoupled from the amplitude r. The amplitude equation (C.64a) can be solved analytically as

$$r(t) = \frac{2\sqrt{\sigma}e^{\frac{\sigma t\epsilon}{2}}}{\sqrt{\frac{4\sigma}{r_0^2} + \lambda\left(e^{\sigma t\epsilon} - 1\right)}}, \tag{C.65}$$

where $r_0 = r(t = 0)$.

C.8 Appendix B. Analytical expressions of some quantities that appear in Section C.4

$$c_1^{\mathrm{LF}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2\beta + 2 - \sqrt{(\beta+1)^2 - 3\mu^2}}{\alpha}}, \tag{C.66a}$$

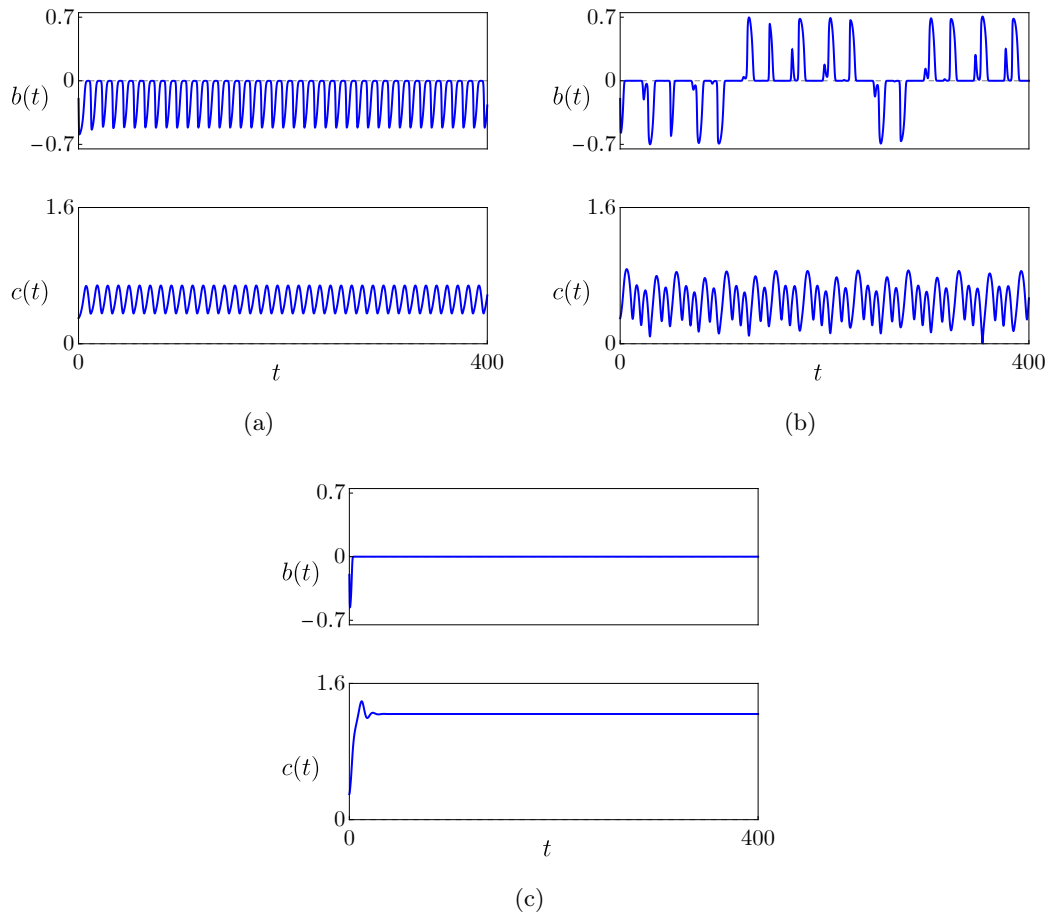


Figure C.14. Numerical solutions of the fast subsystem (C.31) for (a) $a = 0.22$, (b) 0.35 and (c) 0.45. Parameters are the same as in Fig. C.10(g) and the following initial conditions are used : $b(0) = -0.2$, $c(0) = 0.3$ and $\delta(0) = \pi$.

$$c_1^{\mathrm{RF}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2\beta + 2 + \sqrt{(\beta+1)^2 - 3\mu^2}}{\alpha}}. \tag{C.66b}$$

$$c_2^{\mathrm{LF}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{4\beta - 2 - \sqrt{(1-2\beta)^2 - 3\mu^2}}{5\alpha}}, \tag{C.67a}$$

$$c_2^{\mathrm{RF}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{4\beta - 2 + \sqrt{(1-2\beta)^2 - 3\mu^2}}{5\alpha}}. \tag{C.67b}$$

$$c_1^{\mathrm{D}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2\beta + 2 - \sqrt[3]{\left((\beta+1)^2 - 3\mu^2\right)^{3/2}} - \frac{(\beta+1)^2 - 3\mu^2}{\sqrt[3]{\left((\beta+1)^2 - 3\mu^2\right)^{3/2}}}}{\alpha}}, \tag{C.68a}$$

$$c_1^{\mathrm{U}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2\beta + 2 + \sqrt[3]{\left((\beta+1)^2 - 3\mu^2\right)^{3/2}} + \frac{(\beta+1)^2 - 3\mu^2}{\sqrt[3]{\left((\beta+1)^2 - 3\mu^2\right)^{3/2}}}}{\alpha}}. \tag{C.68b}$$

$$c_2^{\mathrm{D}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{4\beta - 2 - \sqrt[3]{\left((1-2\beta)^2 - 3\mu^2\right)^{3/2}} - \frac{(1-2\beta)^2 - 3\mu^2}{\sqrt[3]{\left((1-2\beta)^2 - 3\mu^2\right)^{3/2}}}}{5\alpha}}, \tag{C.69a}$$

$$c_2^{\mathrm{U}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{4\beta - 2 + \sqrt[3]{((1-2\beta)^2 - 3\mu^2)^{3/2}} + \frac{\left(((1-2\beta)^2-3\mu^2)^{3/2}\right)^{2/3}}{\sqrt{(1-2\beta)^2-3\mu^2}}}{5\alpha}}. \tag{C.69b}$$

$$F_1 = \frac{c\left(\sigma\left(3\alpha c^2 - 4(\beta+1)\right)^2 + 16\mu(\mu\sigma - 1)\right)}{8\sqrt{\left(3\alpha c^2 - 4(\beta+1)\right)^2 + 16\mu^2}}, \tag{C.70a}$$

$$F_2 = \frac{c\left(\sigma\left(-8\beta + 15\alpha c^2 + 4\right)^2 + 16\mu(\mu\sigma - 1)\right)}{8\sqrt{\left(-8\beta + 15\alpha c^2 + 4\right)^2 + 16\mu^2}}. \tag{C.70b}$$

$$c_{1,1}^* = \sqrt{\frac{1+\beta - \sqrt{\mu\left(\frac{1}{\sigma} - \mu\right)}}{3\alpha}}, \tag{C.71a}$$

$$c_{1,2}^* = \sqrt{\frac{1+\beta + \sqrt{\mu\left(\frac{1}{\sigma} - \mu\right)}}{3\alpha}}. \tag{C.71b}$$

$$c_{2,1}^* = 2\sqrt{\frac{2\beta - 1 - \sqrt{\mu\left(\frac{1}{\sigma} - \mu\right)}}{15\alpha}}, \tag{C.72a}$$

$$c_{2,2}^* = 2\sqrt{\frac{2\beta - 1 + \sqrt{\mu\left(\frac{1}{\sigma} - \mu\right)}}{15\alpha}}. \tag{C.72b}$$

C.9 Appendix C. Expression of the regular non normally hyperbolic fixed point of the branch $\mathcal{M}_{02}$ of the critical manifold

Substituting the explicit expressions of the functions H_{01}, H_{02} and H_{03} and their derivative into Eq. (C.48) we obtain

$$\mathbf{J_g}(p_2) = \begin{pmatrix} \frac{3\alpha c^2 - 2\beta}{\mu} & \frac{3\sqrt{\alpha}c\sqrt{2\beta - 3\alpha c^2}}{\sqrt{2}\mu} & 0 \\ \frac{3\sqrt{2}\sqrt{\alpha}c\mu\sqrt{2\beta-3\alpha c^2}}{\mu^2+4} & \frac{\mu\left(-8\beta+9\alpha c^2-4\right)}{4(\mu^2+4)} & -\frac{c\left(-8\beta+15\alpha c^2+2\mu^2+4\right)}{2(\mu^2+4)} \\ \frac{6\sqrt{2}\sqrt{\alpha}\sqrt{2\beta-3\alpha c^2}}{\mu^2+4} & \frac{-8\beta+9\alpha c^2+2\mu^2+4}{2c\mu^2+8c} & \frac{\mu\left(-8\beta+15\alpha c^2-4\right)}{4(\mu^2+4)} \end{pmatrix} \tag{C.73}$$

whose third-order characteristic polynomial $p_{\mathbf{J_g}(p_2)}(z)$ has the following form

$$p_{\mathbf{J_g}(p_2)}(z) = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3. \tag{C.74}$$

For such a third-order system, the Routh-Hurwitz stability criterion (see e.g. [32]) states that the roots of (C.74) have negative real parts if and only if the following inequalities

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad d_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \tag{C.75}$$

are satisfied.

The coefficient a_i $(i = 0, \ldots, 3)$ and d_2 are plotted in Fig. C.15 as functions of c for the same parameters as used in Fig. C.6. Comparing Figs. C.7 and C.15 we deduce that the value of c corresponding to the regular non normally hyperbolic fixed point of the branch $\mathcal{M}_{02}$ of the critical manifold is one of the solutions of $d_2 = 0$.

The coefficient d_2 is a third-order polynomial with respect to $x = c^2$ with the following form

$$d_2 = b_1 x^3 + b_2 x^2 + b_3 x + b_4. \tag{C.76}$$

The roots of d_2 are computed by means of the Cardano's method (see e.g. [185]). First, the following parameters are introduced

$$p = -\frac{b_2^2}{3b_1^2} + \frac{c_3}{b_1}, \quad q = \frac{b_2}{27b_1}\left(\frac{2b_2^2}{b_1^2} - \frac{9b_3}{b_1}\right) + \frac{b_4}{b_1}.$$

The discriminant Δ is defined as $\Delta = -\left(4p^3 + 27q^2\right)$. Then :

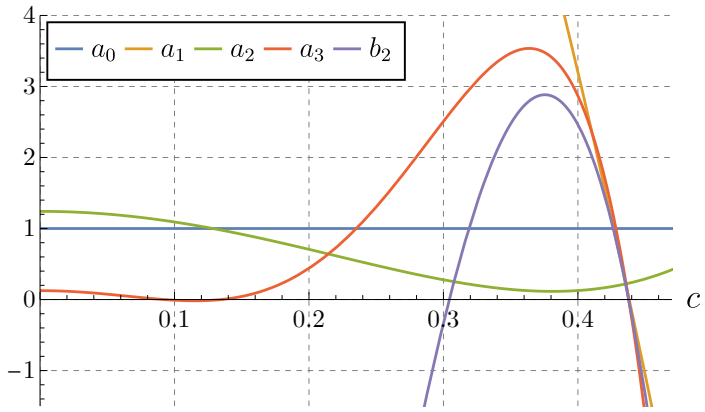


Figure C.15. The coefficients a_i $(i = 0, \ldots, 3)$ and d_2 are plotted in Fig. C.15 as functions of c for the same parameters as used in Fig. C.6.

1. If $\Delta < 0$, one root is real and two are complex conjugate.
2. If $\Delta = 0$, all roots are real and at least two are equal.
3. If $\Delta > 0$, all roots are real and unequal.

For the parameters used in this paper one has $\Delta > 0$. In this case, the three real roots x_k $(k = 0, 1, 2)$ are given by

$$x_k = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}\right) + \frac{2k\pi}{3}\right) - \frac{b_2}{3b_1}, \quad k = 0, 1, 2. \tag{C.77}$$

The wanted root is x_1. Then for the parameters used in Fig. C.6 we obtain $c = \sqrt{x_1} = 0.325914$.

Annexe D

Journal of Sound and Vibration 503 (2021) : 116109 [a2]

Scaling law for the slow flow of an unstable mechanical system coupled to a nonlinear energy sink

Baptiste Bergeot

Abstract

In this paper one first shows that the slow flow of a mechanical system with one unstable mode coupled to a Nonlinear Energy Sink (NES) can be reduced, in the neighborhood of a fold point of its critical manifold, to a normal form of the dynamic saddle-node bifurcation. This allows us to then obtain a scaling law for the slow flow dynamics and to improve the accuracy of the theoretical prediction of the mitigation limit of the NES previously obtained as part of a zeroth-order approximation. For that purpose, the governing equations of the coupled system are first simplified using a reduced-order model for the primary structure by keeping only its unstable modal coordinates. The slow flow is then derived by means of the complexification- averaging method and, by the presence of a small perturbation parameter related to the mass ratio between the NES and the primary structure, it appears as a fast-slow system. The center manifold theorem is finally used to obtain the reduced form of the slow flow which is solved analytically leading to the scaling law. The latter reveals a nontrivial dependence with respect to the small perturbation parameter of the slow flow dynamics near the fold point, involving the fractional exponents 1/3 and 2/3. Finally, a new theoretical prediction of the mitigation limit is deduced from the scaling law. In the end, the proposed methodology is exemplified and validated numerically using an aeroelastic aircraft wing model coupled to one NES.

Keywords : Passive vibration control, Nonlinear energy sink, Center manifold reduction, Scaling law Aeroelastic instability

D.1 Introduction

The nonlinear energy sinks (NESs) are nowadays well-known devices used for passive shock and vibration mitigation of undesired oscillations caused by either external, parametric or self-excitations of a primary structure. An NES is classically defined as a nonlinear dynamical attachment consisting of a light mass (compared to the total mass of the primary structure), an essentially nonlinear spring (most of the time purely cubic) and a viscous linear damper. The operating of the NES is based on the phenomenon of targeted energy transfer (TET) through which a properly designed strongly nonlinear oscillator can be tuned to any frequency in order to perform an irreversible energy transfer from the primary structure towards itself. In their seminal papers [76, 203] Gendelman, Vakakis and co-workers explain the TET phenomenon by the interaction between two nonlinear modes of vibrations of the system producing a 1 :1 resonance capture. Reviews of these concepts can be found in [206] and more recently in a part of [129].

The use of NES to mitigate limit cycle oscillations (LCOs) stemming from dynamic instabilities has been widely studied in the past. The first work reported in this framework concerns the mitigation of LCOs of the Van der Pol oscillator [122]. By means of a perturbation analysis, Gendelman and Bar [75] predicted the response regimes of the same system. This work has been extended to a Van der Pol-Duffing oscillator coupled to one NES by Domany and Gendelman [59]. Numerous papers have been dedicated to the problem of mitigation, by means of one or several NESs, of LCOs due to aeroelastic instabilities. The seminal papers are those of Lee et al. [121, 123, 124] and concerned aeroelastic instabilities in aircraft wing. In these works, the problem has been investigated both numerically and experimentally. The same aircraft wing model coupled to one NES has been studied theoretically using the so-called complexification-averaging method [135] together with a singular perturbation approach [78] or a perturbation algorithm based on a mixed multiple scale-harmonic balance method (MSHBM) [131]. Vaurigaud et al. [207] investigated a problem of passive nonlinear TET between a two degrees of freedom long span bridge model prone to coupled flutter and an NES. The mitigation, using an NES, of vortex-induced vibrations resulting from the nonlinear interaction of a laminar

flow and a rigid circular cylinder has been first studied by Tumkur et al. [201] constructing a two-DOF reduced-order model of the system and validating it by means of a comparison with a full order finite-element model. On the same issue, an improved and experimentally validated reduced model has been proposed by Dai et al. [47]. The passive control of helicopter ground resonance instabilities by a means of NESs has been theoretically and numerically studied by Bergeot et al. considering an NES attached to the helicopter fuselage [a10] and to the blades [a12]. Chatter control in machine tool vibrations has been studied by Gourc et al. [82] considering a vibro-impact NES and by Nankali et al. [142] considering a purely cubic NES. In [a14], mitigation of friction-induced vibrations due to mode coupling instabilities in a friction system has been investigated. The use of several NESs to mitigate LCOs has been analytically investigated by Bergeot et Bellizzi. First, a network of parallel NESs coupled to a Van der Pol oscillator has been analyzed in [a7] and then the prediction of the steady-state regimes of a multi-DOF dynamical system having one unstable mode and coupled to a set of NESs has been performed in [a8]. Finally, in a recent paper, the possibility of mitigating simultaneously two unstable modes of a linear multi-DOF primary system using a single NES has been investigated by Bergeot et al. [a9]. The asymptotic analysis proposed in the latter reference reveals that the NES attachment can produce several and complex mitigated responses which results from the presence of several stable solutions and from the competition between them.

In general, when an NES is attached to a primary structure, the resulting coupled model is analyzed by introducing a small perturbation parameter related to the mass ratio between the NES and the primary structure. Under the assumption of a 1 :1 resonance capture, the system is first averaged over one period corresponding to a natural frequency of the primary structure. The resulting averaged system, called *slow flow*, is then analyzed by means of singular perturbation techniques (multiple scales method [144] or geometric singular perturbation theory [107]). The first key point of these analytical treatments is the partition of the slow flow into two time scales (one slow and one fast [1]). In this representation the time evolution of the slow flow is thus described as a succession of slow and fast epochs which are described independently. The second key point is the definition of the *critical manifold* whose system trajectories approaches during slow epochs. In general, the analysis is carried out within the zeroth-order approximation, i.e. within the limit case in which the perturbation parameter is equal to zero. Consequently, the obtained analytical results depreciate for the largest values of the perturbation parameter by thus limiting their predictive power. Luongo and Zulli [131] used a perturbation technique to express the *invariant manifold* as a power series with respect to the perturbation parameter in which the first term is the critical manifold [2]. As stated by the Fenichel theory [62], this representation is relevant for normally hyperbolic branch of the critical manifold but fails, at fold points (the junction between slow and fast epochs takes place in the vicinity of these points), to approach the actual trajectory of the system. Indeed, the literature on dynamical systems shows that the trajectory passes through the region near these fold points with a nontrivial scaling behavior with respect to the perturbation parameter that it is not possible to obtain with the classical perturbation methods (see e.g. [40] Sect. 5.4).

By means of a sophisticated analysis, the originality of the present work is to provide an analytical description of the system dynamic behavior which reports on this nontrivial dependence on the small perturbation parameter. This analytical result is hereafter referred as the scaling law of the slow flow, this notion is clarified below within the main body of the present manuscript. The main objective is to obtain an analytical description of the system with a high predictive power compared to what has been proposed in the past in the literature and then to hope in the future of including them in a NES design procedure.

The equations of motion of the system under study are presented in Section. E.2. The full order model equations of a mechanical system coupled to one NES are derived in Section. D.2.1. Assuming a primary structure with only one unstable mode, the modal reduction technique, leading to the reduced-order dimensionless model, is presented in Section. D.2.2. Section. D.3 summarizes and extends some previous analytical results of the literature obtained within the zeroth-order approximation. Section. D.4 expounds the main results of the paper. In Section. D.4.1, the center manifold theorem is used to reduce the dynamics of the slow flow of the system. This reduced form is solved analytically in Section. D.4.2 leading to the scaling law from which a new analytical prediction of the mitigation limit is derived in Section. D.4.3. In Section. D.5, the proposed methodology is exemplified and validated numerically using an aeroelastic aircraft wing model coupled to one NES. Finally, concluding remarks are formulated in Section. F.8.

1. Sometimes the terms “slow" and “super-slow" [59, 75] are used to leave the term “fast" for the oscillations on which the average was carried out and therefore to be coherent with term slow flow. In the present work the terms “slow" and “fast" are preferred to be in agreement with the vocabulary usually used in the literature on dynamical systems.

2. The difference between critical and invariant manifolds will be calrified in the manuscript in Section. D.4.

D.2 Equations of the model

The dynamical system under study in this paper is presented in the present section. The following developments are similar to those presented in [a8].

D.2.1 The initial model

The primary structure under consideration in this work is described by the following general set of nonlinear differential equations

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\tilde{\mathbf{x}}} + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{g}}^{\mathbf{NL}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}, \tag{D.1}$$

where $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_N)^T$ with $()^T$ the transpose operator, the dot represents time-differentiation and $\tilde{\mathbf{M}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$ and $\tilde{\mathbf{K}}$ are the mass matrix, the damping matrix and the stiffness matrix respectively. The nonlinear vector-valued function $\tilde{\mathbf{g}}^{\mathbf{NL}}$ represents the nonlinearity of the primary system. Moreover, cubic nonlinearities are assumed, i.e. each component of $\tilde{\mathbf{g}}^{\mathbf{NL}}$ is a linear combination of monomial terms of order 3. In these first equations, the tilde symbol is used before the rescaling which will be carried out below (to obtain variables without tilde after rescaling).

System (D.1) can undergo a dynamic instability of the trivial solution through a Hopf bifurcation, i.e. it has a pair of complex conjugate eigenvalues which cross the complex plane imaginary axis. The loss of stability of the trivial solution comes with the production of a periodic solution and the nonlinear function $\tilde{\mathbf{g}}^{\mathbf{NL}}$ allows the existence of Limit Cycle Oscillations (LCOs) on which the system can saturate. For the purpose of mitigating the LCOs, one purely cubic ungrounded NES with mass $\tilde{m}_h$, damping coefficient $\tilde{c}_h$ and cubic stiffness $\tilde{k}_h^{\mathrm{NL}}$ is used. Taking into account the NES displacement $\tilde{h}(t)$, the equations of the coupled system are

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\tilde{\mathbf{x}}} + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{g}}^{\mathbf{NL}}(\tilde{\mathbf{x}}) + \tilde{\mathbf{B}}\left(\tilde{c}_h\left(\mathbf{A}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} - \dot{\tilde{h}}\right) + \tilde{k}_h^{\mathrm{NL}}\left(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{h}\right)^3\right) = \mathbf{0} \tag{D.2a}$$

$$\tilde{m}_h\ddot{\tilde{h}} - \tilde{c}_h\left(\mathbf{A}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} - \dot{\tilde{h}}\right) - \tilde{k}_h^{\mathrm{NL}}\left(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{h}\right)^3 = 0, \tag{D.2b}$$

where $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_N)$ and $\tilde{\mathbf{B}} = \left(\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_N\right)^T$ are the influence coefficient vectors which depend on the position of the NES.

One assumes now that the mass $\tilde{m}_h$ and the damping coefficient $\tilde{c}_h$ of the NES are small compared to the mass of the primary structure (D.1) and also that the latter is weakly nonlinear. We therefore introduce a small perturbation dimensionless parameter ϵ (with $0 < \epsilon \ll 1$) and the associated rescaled coefficients m_h and c_h and vector function $\mathbf{g}^{\mathbf{NL}}$ as $\tilde{m}_h = \epsilon m_h$, $\tilde{c}_h = \epsilon c_h$ and $\tilde{\mathbf{g}}^{\mathbf{NL}} = \epsilon\mathbf{g}^{\mathbf{NL}}$. Then, the variables $\tilde{\mathbf{x}}$ and $\tilde{h}$ are also rescaled through ϵ as $\mathbf{x} = \frac{\tilde{\mathbf{x}}}{\sqrt{\epsilon}}$ and $h = \frac{\tilde{h}}{\sqrt{\epsilon}}$. Due to the latter rescaling and because cubic nonlinearities are assumed one has $\mathbf{g}^{\mathbf{NL}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \epsilon^{3/2}\mathbf{g}^{\mathbf{NL}}(\mathbf{x})$. Inserting m_h, c_h, $\mathbf{g}^{\mathbf{NL}}$, $\mathbf{x}$ and h into (D.2), multiplying Eq. (D.2a) by $\tilde{\mathbf{M}}^{-1}$ and Eq. (D.2b) by $1/(\epsilon m_h)$ and finally neglecting terms of order strictly higher than 1 in ϵ lead to

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \epsilon\mathbf{B}\ddot{h} = \mathbf{0} \tag{D.3a}$$

$$\ddot{h} - \eta_h(\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} - \dot{h}) - k_h^{\mathrm{NL}}(\mathbf{A}\mathbf{x} - h)^3 = 0. \tag{D.3b}$$

with $\mathbf{C} = \tilde{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\mathbf{C}}$, $\mathbf{K} = \tilde{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\mathbf{K}}$, $\mathbf{B} = m_h\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}$, $\eta_h = c_h/m_h$ and $k_h^{\mathrm{NL}} = \tilde{k}_h^{\mathrm{NL}}/m_h$.

Note that because of the previous assumptions and rescaling, the nonlinearities of the primary structure are neglected from now. Therefore, nonlinear modal interactions in the primary structure such as internal resonances are not taken into account in this work.

D.2.2 Reduction of the dynamics

The system (D.3) is now reduced taking into account that the primary system (D.1) undergoes a single instability of the trivial solution. The objective is to obtain a system with two degrees of freedom (one for the unstable mode of the primary structure and one for the NES) on which one will be able to carry out an analysis which would be impossible on a the original system.

To achieve that, it is first convenient to introduce new coordinates $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \epsilon\mathbf{B}h$ and $w = h - \mathbf{A}\mathbf{x}$ giving reciprocally

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} + \epsilon\mathbf{B}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{v} - \epsilon\mathbf{B}w) \approx (\mathbf{I} - \epsilon\mathbf{B}\mathbf{A})(\mathbf{v} - \epsilon\mathbf{B}w) \tag{D.4a}$$

$$h = (1 + \epsilon\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1}(w + \epsilon\mathbf{A}\mathbf{v}) \approx (1 - \epsilon\mathbf{A}\mathbf{B})(w + \epsilon\mathbf{A}\mathbf{v}) \tag{D.4b}$$

where $\mathbf{I}$ is the identity matrix of size N.

Using Eq. (D.4), Eq. (D.3) is transformed into the following form

$$\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} - \epsilon\Big[\mathbf{CB}\left(\mathbf{A}\dot{\mathbf{v}} + \dot{w}\right) + \mathbf{KB}\left(\mathbf{A}\mathbf{v} + w\right)\Big] = \mathbf{0} \tag{D.5a}$$

$$\ddot{w} + \eta_h\dot{w} + k_h^{\mathrm{NL}}w^3 - \mathbf{AC}\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{AK}\mathbf{v} + \epsilon\Big[\mathbf{AB}\eta_h\dot{w} + \mathbf{ACB}\left(\mathbf{A}\dot{\mathbf{v}} + \dot{w}\right) + \mathbf{AKB}\left(\mathbf{A}\mathbf{v} + w\right) + \mathbf{AB}k_h^{\mathrm{NL}}w^3\Big] = 0. \tag{D.5b}$$

where only terms of order lower or equal to 1 in ϵ were kept.

To retain only the essential features of the single instability, the reduction of the dynamics is performed on Eq. (D.5a). To achieve this, the latter, is written in state-space form as follows

$$\dot{\mathbf{y}} = Dy + \epsilon\left[\mathbf{D_1}\mathbf{y} + \mathbf{D_1}w + \mathbf{D_3}\dot{w}\right] \tag{D.6}$$

where $\mathbf{y} = (v_1, \ldots, v_N, \dot{v}_1, \ldots, \dot{v}_N)^T$,

$$\mathbf{D} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{I}_N \\ \hline -\mathbf{K} & -\mathbf{C} \end{array}\right),\ \mathbf{D_1} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{KBA} & \mathbf{CBA} \end{array}\right),\ \mathbf{D_2} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{KB} \end{array}\right) \text{ and } \mathbf{D_3} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{CB} \end{array}\right). \tag{D.7}$$

Because the matrix $\mathbf{D}$, which characterizes the linear dynamics of the primary system, is not symmetric, its diagonalization must be performed using biorthogonality property of the right eigenvectors $\mathbf{r}_i$ $(i = 1, \ldots, 2N)$ and the left eigenvectors $\mathbf{l}_j$ $(j = 1, \ldots, 2N)$ of $\mathbf{D}$. When the eigenvectors are properly normalized, the biorthogonality properties consist in $\mathbf{L}^T\mathbf{D}\mathbf{R} = \mathbf{\Lambda}$ where $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1\ \bar{\mathbf{r}}_1\ \ldots\ \mathbf{r}_N\ \bar{\mathbf{r}}_N]$, $\mathbf{L} = \left[\mathbf{l}_1\ \bar{\mathbf{l}}_1\ \ldots\ \mathbf{l}_N\ \bar{\mathbf{l}}_N\right]$ and $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{diag}(\lambda_1, \overline{\lambda}_1, \ldots, \lambda_N, \overline{\lambda}_N)$ are the right and left eigenvector matrices and the eigenvalue diagonal matrix respectively.

The so-called biorthogonal coordinates are then introduced. They are constituted of N pairs of complex conjugates, q_n and $\overline{q}_n$ $(n = 1, \ldots, N)$, and defined by the following relations

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{q} \quad \text{and} \quad \mathbf{q} = \mathbf{L}^T\mathbf{y}, \tag{D.8}$$

where $\mathbf{q} = (q_1, \overline{q}_1, \ldots, q_N, \overline{q}_n)^T$.

Substituting Eq. (D.8) into Eq. (D.6), the equations of motion take the form of the following system

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{\Lambda}q + \epsilon\mathbf{L}^T\left[\mathbf{D_1}\mathbf{R}\mathbf{q} + \mathbf{D_2}w + \mathbf{D_3}\dot{w}\right], \tag{D.9}$$

and therefore Eq. (D.5) is equivalent to

$$\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{\Lambda}q - \epsilon\mathbf{L}^T\left[\mathbf{D_1}\mathbf{R}\mathbf{q} + \mathbf{D_2}w + \mathbf{D_3}\dot{w}\right] = 0 \tag{D.10a}$$

$$\ddot{w} + \eta_h\dot{w} + k_h^{\mathrm{NL}}w^3 - \mathbf{AC}(\mathbf{R}^{\mathrm{DL}}\mathbf{q}^{\mathrm{U}} + \mathbf{R}^{\mathrm{DR}}\mathbf{q}^{\mathrm{D}}) - \mathbf{AK}(\mathbf{R}^{\mathrm{UL}}\mathbf{q}^{\mathrm{U}} + \mathbf{R}^{\mathrm{UR}}\mathbf{q}^{\mathrm{D}}) + \epsilon\Big[\mathbf{AB}\eta_h\dot{w} + \mathbf{ACB}\left(\mathbf{A}(\mathbf{R}^{\mathrm{DL}}\mathbf{q}^{\mathrm{U}} + \mathbf{R}^{\mathrm{DR}}\mathbf{q}^{\mathrm{D}}) + \dot{w}\right) + \mathbf{AKB}\left(\mathbf{A}(\mathbf{R}^{\mathrm{UL}}\mathbf{q}^{\mathrm{U}} + \mathbf{R}^{\mathrm{UR}}\mathbf{q}^{\mathrm{D}}) + w\right) + \mathbf{AB}k_h^{\mathrm{NL}}w^3\Big] = 0, \tag{D.10b}$$

where the matrix $\mathbf{R}$ and the vector $\mathbf{q}$ have been split into a $N \times N$-block matrix and a $N \times 1$-block respectively as

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{\mathrm{UL}} & \mathbf{R}^{\mathrm{UR}} \\ \mathbf{R}^{\mathrm{DL}} & \mathbf{R}^{\mathrm{DR}} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{q} = ((\mathbf{q}^{\mathrm{U}})^T, (\mathbf{q}^{\mathrm{D}})^T)^T \tag{D.11}$$

where "U", "D", "L" and "R" in previous superscripts must be understood as the initial letters of up, down, left and right respectively.

As previously mentioned, one mode of the primary system can become unstable through a Hopf bifurcation. Without loss of generality, the first mode is chosen to be the potential unstable mode. That means that when the chosen physical bifurcation parameter, denoted σ, crosses the particular parameter value σ_{Hopf}, called *Hopf bifurcation point*, a pair of complex conjugate eigenvalues crosses the complex plane imaginary axis (without loss of generality this is first pair $(\lambda_1, \overline{\lambda}_1)$) whereas all the other eigenvalues $(\lambda_n, \overline{\lambda}_n)$ (with $n = 2, \ldots, N$) have strictly negative real parts.

Neglecting the coupling term $\epsilon\mathbf{L}^T\left[\mathbf{D_1}\mathbf{R}\mathbf{q} + \mathbf{D_2}w + \mathbf{D_3}\dot{w}\right]$, Eq. (D.10a) reduces to the diagonalized system $\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{\Lambda}\mathbf{q} = \mathbf{0}$. Therefore, in this case, the variables q_n and $\overline{q}_n$ $(n = 2, \ldots, N)$, related to the stable modes, tend to zero. When the coupling term (which is of the order of magnitude of ϵ) is taken into account, the variables

q_n and $\overline{q}_n$ do not vanish but their contributions are very small and can be neglected [a8, a9, 78]. Consequently, all terms related to q_n and $\overline{q}_n$ (with $n = 2, \ldots, N$) are omitted from further consideration and Eq. (D.9) is reduced to

$$\dot{q}_1 = \lambda_1 q_1 + \epsilon \mathbf{l}_1^T \Big(\mathbf{D_1}(\mathbf{r}_1 q_1 + \overline{\mathbf{r}}_1 \overline{q}_1) + \mathbf{D_2} w + \mathbf{D_3} \dot{w} \Big). \tag{D.12}$$

Finally, grouping Eq.s (D.10b) and (D.12), splitting λ_1 into its real and imaginary parts as $\lambda_1 = \lambda_{\mathcal{R}} + j\lambda_{\mathcal{I}}$ (with $j^2 = -1$) and switching the time scale as $t \to \lambda_{\mathcal{I}} t$ yield

$$\dot{q}_1 - \left(\frac{\lambda_{\mathcal{R}}}{\lambda_{\mathcal{I}}} + j \right) q_1 - \frac{\epsilon}{\lambda_{\mathcal{I}}} \mathbf{l}_1^T \Big(\mathbf{D_1}(\mathbf{r}_1 q_1 + \overline{\mathbf{r}}_1 \overline{q}_1) + \mathbf{D_2} w + \mathbf{D_3} \dot{w} \Big) = 0 \tag{D.13a}$$

$$\begin{aligned} \ddot{w} + \frac{\eta_h}{\lambda_{\mathcal{I}}} \dot{w} + \frac{k_h^{NL}}{\lambda_{\mathcal{I}}^2} w^3 - \\ \frac{1}{\lambda_{\mathcal{I}}^2} \left(\mathbf{AC}(\mathbf{r}_1^{\mathrm{DL}} q_1 + \overline{\mathbf{r}}_1^{\mathrm{DL}} \overline{q}_1) + \mathbf{AK}(\mathbf{r}_1^{\mathrm{UL}} q_1 + \overline{\mathbf{r}}_1^{\mathrm{UL}} \overline{q}_1) \right) + \\ \epsilon \Big[\mathbf{AB} \frac{\eta_h}{\lambda_{\mathcal{I}}} \dot{w} + \frac{1}{\lambda_{\mathcal{I}}^2} \mathbf{ACB} \left(\mathbf{A}(\mathbf{r}_1^{\mathrm{DL}} q_1 + \overline{\mathbf{r}}_1^{\mathrm{DL}} \overline{q}_1) + \lambda_{\mathcal{I}} \dot{w} \right) + \\ \frac{1}{\lambda_{\mathcal{I}}^2} \mathbf{AKB} \left(\mathbf{A}(\mathbf{r}_1^{\mathrm{UL}} q_1 + \overline{\mathbf{r}}_1^{\mathrm{UL}} \overline{q}_1) + w \right) + \mathbf{AB} \frac{k_h^{NL}}{\lambda_{\mathcal{I}}^2} w^3 \Big] = 0. \end{aligned} \tag{D.13b}$$

where the vectors $\mathbf{r}_1^{\mathrm{UL}}$ and $\mathbf{r}_1^{\mathrm{DL}}$ correspond to the first columns of the matrices $\mathbf{R}^{\mathrm{DL}}$ and $\mathbf{R}^{\mathrm{UL}}$ respectively (see Eq. (D.11)).

The system of equations (D.13) is the system under study in the following mathematical developments.

D.3 Asymptotic analysis : the zeroth-order approximation of the slow flow

The present section summarizes and extends previous results of the literature [a7, a8, 78]. In particular, an analytical expression of the mitigation limit (hereafter called the zeroth-order approximation of the mitigation limit) is derived at the end of the section under several assumptions. The first is given just below.

In Eq. (D.13), the quantities $\lambda_{\mathcal{R}}$, $\lambda_{\mathcal{I}}$, the vectors $\mathbf{l}_1^T$, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_1^{\mathrm{UL}}$ and $\mathbf{r}_1^{\mathrm{DL}}$ and the matrices $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}$ (and those which depend on them) depend in general on the bifurcation parameter under consideration σ. In this work one assumes that the NES effects are not too far from the Hopf bifurcation point σ_{Hopf} and therefore the latter are evaluated at σ_{Hopf} (using the notation $()_{\mathrm{Hopf}}$) expect $\lambda_{\mathcal{R}}$ which is by definition equal to zero at σ_{Hopf}. $\lambda_{\mathcal{R}}$ is evaluated at the actual value of σ and the dimensionless eigenvalue real part $\lambda_{\mathcal{R}}/\omega$ (where $\omega = \lambda_{\mathcal{I},\mathrm{Hopf}}$, the imaginary part of λ_1 evaluated at σ_{Hopf}) is supposed to be small (i.e. of the order of $\mathcal{O}(\epsilon)$). The parameter ρ is then finally introduced as

$$\rho = \frac{\lambda_{\mathcal{R}}}{\epsilon \omega} \tag{D.14}$$

where ρ is of the order of $\mathcal{O}(1)$.

The rescaled dimensionless eigenvalue real part ρ of the unstable mode is considered as a generalized bifurcation parameter (that results from the physical bifurcation parameter σ of the initial mechanical system) from which one will follow the changes in the system dynamic behavior.

D.3.1 Governing equations of the slow flow

It is know [76, 203] that TET appears in the vicinity of the 1 :1 resonance between two nonlinear modes of the coupled structure, the latter resulting from the interaction between a linear mode of the primary structure (here this is the considered unstable mode) and the nonlinear mode of the NES. This phenomenon is called 1 :1 resonance capture and occurs at a frequency close to the natural frequency of the linear primary structure. To investigate the solution in the neighborhood of this 1 :1 resonance capture the complexification-averaging method [135, 206] is used. The resulting complex averaged dynamics is called slow flow.

The first step consists in introducing the following complex variables

$$\psi = \dot{w} + jw \tag{D.15}$$

or equivalently

$$w = \frac{\psi - \overline{\psi}}{2j}, \quad \dot{w} = \frac{\psi + \overline{\psi}}{2} \quad \text{and} \quad \ddot{w} = \dot{\psi} - \frac{j}{2} \left(\psi + \overline{\psi} \right) \tag{D.16}$$

and expressing the complex variables q_1 and ψ as

$$q_1 = \tilde{\phi}_1 e^{jt} \quad \text{and} \quad \psi = \phi_2 e^{jt}. \tag{D.17}$$

Substituting (D.17) into (D.13) and averaging over the period $T = 2\pi$ leads to the following system of complex slow modulated amplitudes

$$\dot{\tilde{\phi}}_1 = \epsilon \left[\left(\rho + \mathbf{l}_{1,\text{Hopf}}^T \mathbf{D}_{\mathbf{1},\text{Hopf}} \mathbf{r}_{1,\text{Hopf}} \right) \tilde{\phi}_1 + \frac{1}{2} \left(-j \mathbf{l}_{1,\text{Hopf}}^T \mathbf{D}_{\mathbf{2},\text{Hopf}} + \mathbf{l}_{1,\text{Hopf}}^T \mathbf{D}_{\mathbf{3},\text{Hopf}} \right) \phi_2 \right] \tag{D.18a}$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_2 = {} & \frac{\mathbf{AK}_{\text{Hopf}} \mathbf{r}_{1,\text{Hopf}}^{\text{UL}} + \mathbf{AC}_{\text{Hopf}} \mathbf{r}_{1,\text{Hopf}}^{\text{DL}}}{\omega^2} \tilde{\phi}_1 - \frac{1}{2} \left(j + \mu - j \frac{3\alpha}{4} |\phi_2|^2 \right) \phi_2 \\ & - \epsilon \left[\frac{1}{\omega^2} \left(\mathbf{AK}_{\text{Hopf}} \mathbf{B} \mathbf{Tr}_{1,\text{Hopf}}^{\text{UL}} + \frac{1}{2} \mathbf{AC}_{\text{Hopf}} \mathbf{B} \mathbf{Tr}_{1,\text{Hopf}}^{\text{DL}} \right) \tilde{\phi}_1 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{AC}_{\text{Hopf}} \mathbf{B}}{\omega} - j \frac{\mathbf{AK}_{\text{Hopf}} \mathbf{B}}{\omega^2} + \mathbf{AB} \left(\mu - j \frac{3\alpha}{4} |\phi_2|^2 \right) \right) \phi_2 \right] \end{aligned} \tag{D.18b}$$

with

$$\mu = \frac{\eta_h}{\omega} \quad \text{and} \quad \alpha = \frac{k_h^{NL}}{\omega^2} \tag{D.19}$$

and recalling that the notation $()_{\text{Hopf}}$ means that the considered quantity is evaluated at the Hopf bifurcation point σ_{Hopf}.

Introducing the variable $\phi_1 = 2 \left(\mathbf{AK}_{\text{Hopf}} \mathbf{r}_{1,\text{Hopf}}^{\text{UL}} + \mathbf{AC}_{\text{Hopf}} \mathbf{r}_{1,\text{Hopf}}^{\text{DL}} \right) \tilde{\phi}_1 / \omega^2$, and ignoring the terms of the order of magnitude of ϵ in (D.18b) [3], Eq. (D.18) reduces to the following synthetic form

$$\dot{\phi}_1 + \epsilon \left[(a - \rho) \phi_1 + b \phi_2 \right] = 0 \tag{D.20a}$$

$$\dot{\phi}_2 + \frac{1}{2} \phi_1 + \frac{1}{2} (\mu + j) \phi_2 + j \frac{3}{8} \alpha \phi_2 |\phi_2|^2 = 0. \tag{D.20b}$$

with the complex coefficients a and b defined as

$$\begin{aligned} a &= -\mathbf{l}_{1,\text{Hopf}}^T \mathbf{D}_{\mathbf{1},\text{Hopf}} \mathbf{r}_{1,\text{Hopf}} \\ b &= \frac{1}{\omega^2} \left(-j \mathbf{l}_{1,\text{Hopf}}^T \mathbf{D}_{\mathbf{2},\text{Hopf}} + \mathbf{l}_{1,\text{Hopf}}^T \mathbf{D}_{\mathbf{3},\text{Hopf}} \right) \left(\mathbf{AK}_{\text{Hopf}} \mathbf{r}_{1,\text{Hopf}}^{\text{UL}} + \mathbf{AC} \mathbf{r}_{1,\text{Hopf}}^{\text{DL}} \right). \end{aligned} \tag{D.21}$$

Then, substituting ϕ_1 and ϕ_2 in Eq. (D.18) by their polar coordinates defined as $\phi_1 = r e^{j\theta_1}$ and $\phi_2 = s e^{j\theta_2}$, new equations of motion for the real amplitudes r and s and phase difference $\Delta = \theta_2 - \theta_1$ can be obtained as

$$\dot{r} = \epsilon f(r, s, \Delta) \tag{D.22a}$$

$$\dot{s} = \tilde{g}_1(r, s, \Delta, \epsilon) \tag{D.22b}$$

$$\dot{\Delta} = \tilde{g}_2(r, s, \Delta, \epsilon) \tag{D.22c}$$

with

$$f(r, s, \Delta) = (\rho - a_{\mathcal{R}}) r - (b_{\mathcal{R}} \cos \Delta - b_{\mathcal{I}} \sin \Delta) s, \tag{D.23a}$$

$$\tilde{g}_1(r, s, \Delta, \epsilon) = -\frac{1}{2} (\mu s + r \cos \Delta), \tag{D.23b}$$

$$\tilde{g}_2(r, s, \Delta, \epsilon) = \frac{3}{8} \alpha s^2 - \frac{1}{2} + \frac{r}{2s} \sin \Delta \ + \epsilon \left[a_{\mathcal{I}} + b_{\mathcal{I}} \frac{\cos \Delta}{r} + b_{\mathcal{R}} \frac{\sin \Delta}{r} \right] \tag{D.23c}$$

where the complex parameters a and b were split into real and imaginary parts as $a = a_{\mathcal{R}} + j a_{\mathcal{I}}$ and $b = b_{\mathcal{R}} + j b_{\mathcal{I}}$.

Because of the presence of the small parameter ϵ, the slow flow is governed by different time scales. More precisely, within the framework of the geometric singular perturbation theory [107], Eq. (D.22) appears as a $(2,1)$-fast-slow system where s and Δ are the fast variables and r the slow variable. The latter is related to the modal component q_1 whereas the fast variables are associated with the relative displacement w between the NES and the primary structure.

3. These terms do not affect qualitatively the dynamic behavior of the slow flow.

D.3.2 Critical manifold and fold points of the slow flow

The real form of the slow flow, i.e. Eq. (D.22), is written with respect to the dimensionless slow time $\tau = \epsilon t$ as follows

$$r' = f(r, s, \Delta) \tag{D.24a}$$
$$\epsilon s' = \tilde{g}_1(r, s, \Delta, \epsilon) \tag{D.24b}$$
$$\epsilon \Delta' = \tilde{g}_2(r, s, \Delta, \epsilon) \tag{D.24c}$$

where $(.)'$ denotes the derivative with respect to the slow time τ. Considering $\epsilon = 0$ yields the *slow subsystem*

$$r' = f(r, s, \Delta) \tag{D.25a}$$
$$0 = \tilde{g}_1(r, s, \Delta, 0) \tag{D.25b}$$
$$0 = \tilde{g}_2(r, s, \Delta, 0) \tag{D.25c}$$

which is a differential-algebraic equation, and the *fast subsystem*

$$\dot{r} = 0 \tag{D.26a}$$
$$\dot{s} = \tilde{g}_1(r, s, \Delta, 0) \tag{D.26b}$$
$$\dot{\Delta} = \tilde{g}_2(r, s, \Delta, 0) \tag{D.26c}$$

The critical manifold of the slow flow is the solution of the algebraic part of Eq. (E.30) and it is expressed as follows

$$\mathcal{M}_0 = \left\{ (r, s, \Delta) \in \mathbb{R}^{+^2} \times [-\pi, \pi] \;\middle|\; \tilde{g}_1(r, s, \Delta, 0) = 0 \text{ and } \tilde{g}_2(r, s, \Delta, 0) = 0 \right\}. \tag{D.27}$$

Combining Eqs. (E.30b) and (E.30c) leads to the following modulus and argument equations

$$r = s\sqrt{\mu^2 + \left(1 - \frac{3\alpha s^2}{4}\right)^2} = H(s) \tag{D.28a}$$
$$\tan \Delta = \frac{3\alpha s^2 - 4}{4\mu}. \tag{D.28b}$$

Stability analysis of the critical manifold is now carried out considering the fast subsystem (E.31). It can be shown that a fixed point of (E.31) is stable if $d_s H(s) > 0$ and unstable if $d_s H(s) < 0$. Hence, the subset of $\mathcal{M}_0$ satisfying $d_s H(s) < 0$ defines the attracting zone for the fast dynamics whereas the subset of $\mathcal{M}_0$ satisfying $d_s H(s) > 0$ define the repelling zone.

Exploiting the polynomial properties of H, it can be shown that the local extrema of H (i.e $d_s H(s) = 0$) occur at

$$s^{\mathrm{LF}} = \frac{2}{3\sqrt{\alpha}}\sqrt{2 - \sqrt{1 - 3\mu^2}} \quad \text{and} \quad s^{\mathrm{RF}} = \frac{2}{3\sqrt{\alpha}}\sqrt{2 + \sqrt{1 - 3\mu^2}} \tag{D.29}$$

if the following relation holds

$$\mu < \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{D.30}$$

In Eq. (E.49), s^{LF} and s^{RF} are the abscissa values in the (s, r)-plane of the a maximum and the minimum of the function H respectively. The superscripts $()^{\mathrm{LF}}$ and $()^{\mathrm{RF}}$ refer to *left fold point* and *right fold point* respectively. Indeed, in the (s, r, Δ)-space, the two points $(s^{\mathrm{RF}}, r^{\mathrm{RF}}, \Delta^{\mathrm{RF}})$ and $(s^{\mathrm{LF}}, r^{\mathrm{LF}}, \Delta^{\mathrm{LF}})$ (where r^{LF}, r^{RF}, Δ^{LF} and Δ^{RF} can be deduced from s^{LF} and s^{RF} using Eq. (E.48)) are generally called *fold points*.

When the condition (E.50) is not satisfied the function H no longer has local extrema. In the remaining of the paper, one considers situations in which (E.50) holds.

A typical critical manifold (more precisely its real part defined by Eq. (E.48a)) is depicted in Fig. E.9. One can see that the fold points connect attracting parts to repelling part of the critical manifold $\mathcal{M}_0$. The two scalars s^{D} and s^{U}, which are the horizontal projection of the fold points on the critical manifold, are defined by $H\left(s^{\mathrm{RF}}\right) = H\left(s^{\mathrm{D}}\right)$ and $H\left(s^{\mathrm{LF}}\right) = H\left(s^{\mathrm{U}}\right)$ giving

$$s^{\mathrm{D}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{\alpha}}\sqrt{1 - \sqrt{1 - 3\mu^2}} \quad \text{and} \quad s^{\mathrm{U}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{\alpha}}\sqrt{1 + \sqrt{1 - 3\mu^2}}. \tag{D.31}$$

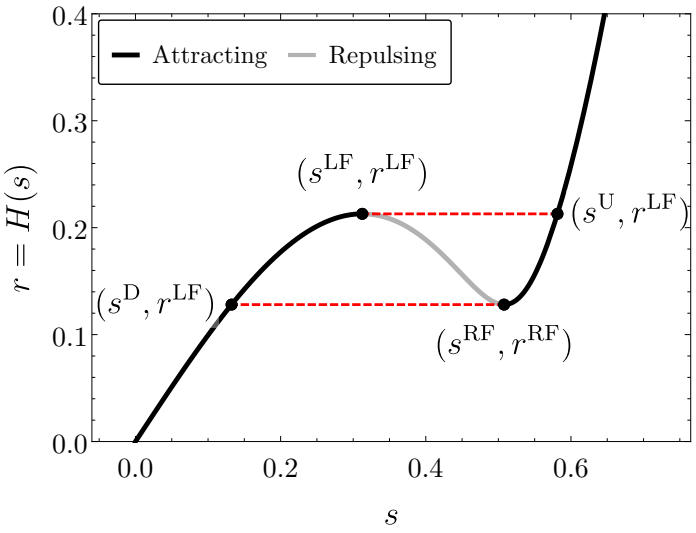


Figure D.1. Typical example of the critical manifold in the (s, r)-plane given by Eq. (E.48a) for $\mu = 0.25$ and $\alpha = 5$.

D.3.3 Fixed points and fold singularities of the slow flow

Because $0 < \epsilon \ll 1$, the fixed points of the slow flow (D.22), which characterize periodic solutions of (D.13), can be approximated by those of the slow subsystem (E.30). From that zeroth-order approximation an analytical expression of these fixed points can be obtained. Note that within this approximation, the fixed points are necessarily located on the critical manifold.

First, substituting Eq. (E.48a) into Eq. (E.30a) results in $(H(s))' = f\left(H(s), s, \Delta\right)$ which reduces to

$$d_s H(s) s' = f_s(s), \tag{D.32}$$

where the explicit expression of the function f_s is not given here.

Then, a (regular) fixed point of Eq. (D.32) is defined as the roots of $f_s\left(s\right) = 0$ with $d_s H(s) \neq 0$. Solving $f_s(s) = 0$ gives two fixed points (in addition to the trivial solution) whose analytical expressions are

$$s_1^e = \left(\frac{2}{3\alpha\left(a_{\mathcal{R}} - \rho\right)} \left(2a_{\mathcal{R}} - b_{\mathcal{I}} - 2\rho + \sqrt{b_{\mathcal{I}}^2 - 4\mu\left(a_{\mathcal{R}} - \rho\right)\left(\mu a_{\mathcal{R}} - b_{\mathcal{R}} - \mu\rho\right)} \right) \right)^{1/2}, \tag{D.33a}$$

$$s_2^e = \left(\frac{2}{3\alpha\left(a_{\mathcal{R}} - \rho\right)} \left(2a_{\mathcal{R}} - b_{\mathcal{I}} - 2\rho - \sqrt{b_{\mathcal{I}}^2 - 4\mu\left(a_{\mathcal{R}} - \rho\right)\left(\mu a_{\mathcal{R}} - b_{\mathcal{R}} - \mu\rho\right)} \right) \right)^{1/2}, \tag{D.33b}$$

with $s_1^e < s_2^e$. As usual, the stability of the fixed points are found looking for the sign of $d_s \left(\frac{f_s(s)}{H'(s)} \right)$.

Both fixed points s_1^e and s_2^e no longer exist when they become complex for

$$\rho^{\mathrm{S}} = \frac{2\mu a_{\mathcal{R}} + \sqrt{b_{\mathcal{I}}^2 + b_{\mathcal{R}}^2} - b_{\mathcal{R}}}{2\mu} \tag{D.34}$$

where the superscript $()^{\mathrm{S}}$ has no particular meaning here, it is just there to give a name to this particular value of ρ.

A singular fixed points of Eq. (D.32), also called folded singularites, are defined as the roots of the following nonlinear equations $f_s\left(s\right) = 0$ and $d_s H(s) = 0$. Folded singularities are hints of particular solutions of such fast-slow systems, called canard cycles [16]. These solutions are not investigated in this paper.

D.3.4 The possible responses

Previous analysis provides a qualitative description of the slow flow dynamics in the limit case where $\epsilon = 0$, i.e. within a zeroth-order approximation. Within this approximation, the slow flow evolves at two time scales : a slow time scale in which the slow flow is on the critical manifold and described by the slow subsystem (E.30) and a fast time scale in which the slow flow is outside the critical manifold and described by

the fast subsystem (E.31). The particular S-shape of the critical manifold together with the stability analysis of the fixed points of the slow flow allows us to explain and predict its different responses and consequently those of the initial full order system (D.13). As has been widely discussed in the literature (see e.g. [75, 78]), four scenarios are possible. In previous works by the authors [a7, a8] these responses are classified into two categories. In the first category, the NES acts, resulting in the three responses called *harmless situations*. First, the *Complete suppression* in which the trivial fixed point of the slow flow (D.22) is stable and then reached. In this case, the system is stabilized because of the additional part of the NES including mass and damping. In general, because a light mass and a small damping are considered for the NES, this stabilization effect is negligible, in term of bifurcation parameter range, compared to the mitigation effects described hereinafter. In other words, the Hopf bifurcation point of the primary structure without NES is usually very slightly smaller than the Hopf bifurcation point of the coupled system. Of course, in a context of nonlinear vibrations absorption, the complete suppression is not the desired effect. Then, one can observe *mitigation through periodic response*. In this case, a nontrivial stable fixed point of the slow flow (D.22) is reached, that corresponds to a periodic regime for the initial system (D.13). The last harmless situations correspond to *mitigation through Strongly Modulated Responses (SMRs)*. SMRs correspond to relaxations oscillations of the slow flow (D.22), that corresponds to a quasi-periodic (amplitude and phase modulated) regime for the initial system (D.13). In the second category, called *harmful situation*, the NES is not able to produce small amplitude responses. For the initial nonlinear system one observes in this case a limit cycle with an amplitude close to that of the system without NES. Note that if the nonlinearity of the primary structure is neglected in the governing equations of the slow flow (this the case in the present work), the harmful situation corresponds for it to an unbounded regime in which its trajectory growths to infinity.

In this paper, we are particularly interested in the transition from SMR to no mitigation which is also, in general, the transition from harmless to harmful situations. Therefore one recalls here briefly what relaxation oscillations of the slow flow are. Note that the following description holds in the limit case for which $\epsilon = 0$. In the (s, r)-plane, from an initial condition near zero and outside the critical manifold, the trajectory of the slow flow evolves rapidly and horizontally to the left attracting branch of $\mathcal{M}_0$ (this fast epoch is described by the fast subsystem (E.31)). Then, the slow flow evolves slowly on this branch (this slow epoch is described by the slow subsystem (E.30)) and, if there is no stable fixed points on it, the trajectory reached the left fold point $(s^{\mathrm{LF}}, r^{\mathrm{LF}})$ at which $\mathcal{M}_0$ becomes repelling. From the fold point, the slow flow undergoes a fast horizontal jump to $(s^{\mathrm{U}}, r^{\mathrm{LF}})$ on the right attracting part of $\mathcal{M}_0$ and then a second slow epoch to the right fold point $(s^{\mathrm{RF}}, r^{\mathrm{RF}})$. A second horizontal jump occurs from $(s^{\mathrm{RF}}, r^{\mathrm{RF}})$ to $(s^{\mathrm{D}}, r^{\mathrm{RF}})$ and the trajectory returns to the left attracting part of the $\mathcal{M}_0$. A third slow epoch occurs on $\mathcal{M}_0$ to $(s^{\mathrm{LF}}, r^{\mathrm{LF}})$ and so on.

D.3.5 Zeroth-order analytical prediction of the mitigation limit

The mitigation limit is defined below.

Definition D.1. Considering a set of initial conditions (for the slow flow) as a small perturbation of the trivial solution, the **mitigation limit** is defined as the value of the generalized bifurcation parameter ρ which separates harmless situations from harmful situation.

As discussed in the literature [a7, 75, 78], the mitigation limit (denoted here ρ_0^*) is defined, within the zeroth-order approximation, as the value of ρ for which the fixed point s_2^e becomes smaller than s^{U} defined by Eq. (E.53) or for which s_2^e no longer exists (see Eq. (D.34)). Indeed, when the largest unstable fixed exists (with, in addition, $s_2^e > s^{\mathrm{U}}$), it prevents the phase trajectory to grow to infinity on the right branch of the critical manifold.

From Eqs. (E.53) and (D.33a) the solution of $s_2^e = s^{\mathrm{U}}$ is derived as

$$\rho_0^{\mathrm{U}} = a_{\mathcal{R}} + \frac{2\sqrt{1-3\mu^2}b_{\mathcal{I}} + b_{\mathcal{I}} - \left(2\sqrt{1-3\mu^2}+7\right)\mu^2 b_{\mathcal{I}}}{\left(\mu^2+1\right)^2} + \frac{\left(3\mu^2 - 4\sqrt{1-3\mu^2}-5\right)\mu b_{\mathcal{R}}}{\left(\mu^2+1\right)^2}. \tag{D.35}$$

Then using (D.34), the following conditional expression for ρ_0^* is obtained :

$$\rho_0^* = \begin{cases} \rho_0^{\mathrm{U}} \text{ (Eq. (D.35))}, & \text{if } \mu < \mu^* \quad \text{(D.36a)} \\ \rho^{\mathrm{S}} \text{ (Eq. (D.34))}, & \text{if } \mu > \mu^*, \quad \text{(D.36b)} \end{cases}$$

with μ^* the special value of μ solution of $\rho_0^{\mathrm{U}} = \rho^{\mathrm{S}}$ which is in general smaller than $1/\sqrt{3}$.

We can notice that within the zeroth-order approximation, the mitigation limit does not depend on the nonlinear parameter α of the NES but only its damping coefficient μ (together with the parameters of the

primary system). Therefore, for given parameters of the primary structure, it exists an optimal value of μ, denoted μ_0^{opt}, which maximizes the mitigation limit. Consequently, assuming that $\mu_0^{\text{opt}} < \mu^*$, μ_0^{opt} is the solution of $\partial_\mu \rho_0^{\text{U}} = 0$. Solving the latter equation yields

$$\mu_0^{\text{opt}} = -\frac{1}{\mathcal{B}}\Bigg[b_{\mathcal{R}} b_{\mathcal{I}} + \sqrt{\mathcal{B}\left(|b|^4 b_{\mathcal{R}}^2\right)^{1/3} - 3b_{\mathcal{R}}^2\left(b_{\mathcal{I}}^2 + b_{\mathcal{R}}^2\right)} - \left(-\mathcal{B}\left(|b|^4 b_{\mathcal{R}}^2\right)^{1/3} - 2\mathcal{B}b_{\mathcal{R}}^2 + 2b_{\mathcal{I}}^2 b_{\mathcal{R}}^2 - \frac{2b_{\mathcal{I}} b_{\mathcal{R}}\left(b_{\mathcal{I}}^2 + b_{\mathcal{R}}^2\right)\left(8b_{\mathcal{I}}^2 + 9b_{\mathcal{R}}^2\right)}{\sqrt{\mathcal{B}\left(|b|^4 b_{\mathcal{R}}^2\right)^{1/3} - 3b_{\mathcal{R}}^2\left(b_{\mathcal{I}}^2 + b_{\mathcal{R}}^2\right)}}\right)^{1/2}\Bigg] \tag{D.37}$$

with $\mathcal{B} = 3b_{\mathcal{R}}^2 + 4b_{\mathcal{I}}^2$ and where the subscript 0 is used to highlight that the expression (D.37) is obtained within the zeroth-order approximation.

D.4 Scaling law for the slow flow near a fold point

The Fenichel theory [62] guarantees the persistence of the relaxation oscillations scenario, described at the end of Section. D.3.4, for $0 < \epsilon \ll 1$ by stating that Eq. (E.29) has an invariant manifold $\mathcal{M}_\epsilon$ in the $O(\epsilon)$-vicinity of $\mathcal{M}_0$ and with the same stability properties with respect to the fast variables as $\mathcal{M}_0$ (attracting or repelling). In this case, concerning the first jump described previously, the jump point at which the trajectory leaves the attracting branch of $\mathcal{M}_\epsilon$ to undergo the jump is no longer the fold point $(s^{\text{LF}}, r^{\text{LF}})$. The same is true for the arrival point at which the trajectory reaches the right attracting part of $\mathcal{M}_\epsilon$ after the jump which is no longer $(s^{\text{U}}, r^{\text{LF}})$. The goal of this section is to determine these jump and arrival points and consequently to obtain an analytical prediction of the mitigation limit which, unlike Eq. (D.36), takes into account ϵ.

To achieve that, one must determine beforehand the scaling law of the slow flow dynamics in the neighborhood of the fold point $(s^{\text{LF}}, r^{\text{LF}})$, i.e. a law which describes the ϵ-dependance of the distance between $\mathcal{M}_0$ and the actual trajectory of the slow flow for $0 < \epsilon \ll 1$. The jump and arrival points are then deduced from this scaling law.

The Fenichel theorem is true for normally hyperbolic branch of $\mathcal{M}_0$ (i.e. outside the fold points) and fails to approach the actual trajectory of the system at fold points. Indeed, the literature on dynamical systems shows that the trajectory still passes through the region near these fold points but with a nontrivial scaling behavior involving the fractional exponents $1/3$ and $2/3$ for the perturbation parameter ϵ (see e.g. [40] Sect. 5.4).

D.4.1 Center manifold reduction of the slow flow at the left fold point

The center manifold reduction technique (as presented for example in [27, 88]) is used in this section to reduce the slow flow (E.29), in the vicinity of the left fold point $(r^{\text{LF}}, s^{\text{LF}}, \Delta^{\text{LF}})$, to the normal form of the dynamic saddle-node bifurcation which is then solve to deduce the nontrivial scaling law previously mentioned.

First, assuming $\epsilon = 0$ in the right-hand sides of Eqs. (E.29b) and (E.29c), one considers the following simplification of the slow flow

$$r' = f(r, s, \Delta) \tag{D.38a}$$
$$\epsilon s' = \tilde{g}_1(r, s, \Delta, 0) = g_1(r, s, \Delta), \tag{D.38b}$$
$$\epsilon \Delta' = \tilde{g}_1(r, s, \Delta, 0) = g_2(r, s, \Delta). \tag{D.38c}$$

The goal in using the center manifold theorem is to reduce the dynamics with respect to the fast variables s and Δ, i.e. obtain an equivalent system which only depends on one variable. To achieve that, the Jacobian matrix $\mathbf{J_g}$ of (D.38b-D.38c) evaluated at the fold point $(r^{\text{LF}}, s^{\text{LF}}, \Delta^{\text{LF}})$ is computed as

$$\mathbf{J_g}(r^{\text{LF}}, s^{\text{LF}}, \Delta^{\text{LF}}) = \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{2} & \frac{1}{9}\left(\sqrt{1-3\mu^2}+1\right)\sqrt{\frac{2-\sqrt{1-3\mu^2}}{\alpha}} \\ -\frac{3\left(\sqrt{1-3\mu^2}-1\right)}{4\sqrt{\frac{2-\sqrt{1-3\mu^2}}{\alpha}}} & -\frac{\mu}{2} \end{pmatrix}. \tag{D.39}$$

which has two real eigenvalues $\lambda_a = 0$ and $\lambda_b = -\mu$.

Then to continue one must obtain polynomial nonlinearities. Indeed, the center manifold reduction requires isolating the linear terms. The functions g_1 and g_2 are therefore Taylor expanded around the fold point

$(r^{\mathrm{LF}}, s^{\mathrm{LF}}, \Delta^{\mathrm{LF}})$, up to order 2 for the variables s and Δ and up to order 1 for the variable r. Remembering that by definition $g_1(r^{\mathrm{LF}}, s^{\mathrm{LF}}, \Delta^{\mathrm{LF}}) = 0$ and $g_2(r^{\mathrm{LF}}, s^{\mathrm{LF}}, \Delta^{\mathrm{LF}}) = 0$ that yields

$$g_1(r,s,\Delta) \approx \left(s - s^{\mathrm{LF}}\right) \partial_s g_1(r^{\mathrm{LF}}, s^{\mathrm{LF}}, \Delta^{\mathrm{LF}}) + \left(\Delta - \Delta^{\mathrm{LF}}\right) \partial_\Delta g_1(r^{\mathrm{LF}}, s^{\mathrm{LF}}, \Delta^{\mathrm{LF}}) + \tilde{G}_1(r,s,\Delta) \tag{D.40a}$$

$$g_2(r,s,\Delta) \approx \left(s - s^{\mathrm{LF}}\right) \partial_s g_2(r^{\mathrm{LF}}, s^{\mathrm{LF}}, \Delta^{\mathrm{LF}}) + \left(\Delta - \Delta^{\mathrm{LF}}\right) \partial_\Delta g_2(r^{\mathrm{LF}}, s^{\mathrm{LF}}, \Delta^{\mathrm{LF}}) + \tilde{G}_2(r,s,\Delta). \tag{D.40b}$$

The polynomial functions $\tilde{G}_1$ and $\tilde{G}_2$ contain nonlinear terms with respect to the $(s - s^{\mathrm{LF}})$ and $(\Delta - \Delta^{\mathrm{LF}})$ (only quadratics terms are taken) and linear terms in $(r - r^{\mathrm{LF}})$.

Denoting $\mathbf{t} = (s, \Delta)^T$ and $\mathbf{t}^{\mathrm{LF}} = (s^{\mathrm{LF}}, \Delta^{\mathrm{LF}})^T$ and using Eq. (D.40), Eqs. (D.38b) and (D.38c) can be written in matrix form as

$$\epsilon \mathbf{t}' = \left(\mathbf{t} - \mathbf{t}^{\mathrm{LF}}\right) \mathbf{J_g}(r^{\mathrm{LF}}, \mathbf{t}^{\mathrm{LF}}) + \tilde{\mathbf{G}}\left(r - r^{\mathrm{LF}}, \mathbf{t} - \mathbf{t}^{\mathrm{LF}}\right) \tag{D.41}$$

where $\tilde{\mathbf{G}} = (\tilde{G}_1, \tilde{G}_2)^T$. Now, to diagonalize the linear part of Eq. (D.41) the biorthogonal transformation is used again [4]. For that, the right and left eigenvector matrices $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_a\ \mathbf{r}_b]$ and $\mathbf{L} = [\mathbf{l}_a\ \mathbf{l}_b]$ are considered corresponding to the following right and left eigenvalue problems with respect to $\mathbf{J_g}(r^{\mathrm{LF}}, \mathbf{t}^{\mathrm{LF}})$

$$\mathbf{J_g}(r^{\mathrm{LF}}, \mathbf{t}^{\mathrm{LF}})\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda} \quad \text{and} \quad \mathbf{J_g}(r^{\mathrm{LF}}, \mathbf{t}^{\mathrm{LF}})^T\mathbf{L} = \mathbf{L}\mathbf{\Lambda}. \tag{D.42}$$

where $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_a, \lambda_b) = \mathrm{diag}(0, -\mu)$ denotes the diagonal matrix of the eigenvalues. Again the biorthogonal transformation consists of stating

$$\mathbf{t} - \mathbf{t}^{\mathrm{LF}} = \mathbf{R}\mathbf{q} \quad \text{with} \quad \mathbf{q} = \mathbf{L}^T\left(\mathbf{t} - \mathbf{t}^{\mathrm{LF}}\right) \tag{D.43}$$

where $\mathbf{q} = (q_a, q_b)^T$. Note that here, on a system undergoing a saddle-node bifurcation, the eigenvalues, the eigenvectors and the modal coordinates are real.

The variable q_a is associated to $\lambda_a = 0$ and the variable q_b is associated to $\lambda_b = -\mu$. Moreover, the matrices $\mathbf{R}$ and $\mathbf{L}$ have been chosen such that $\mathbf{L}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$ and $\mathbf{L}^T\mathbf{J_g}(r^{\mathrm{LF}}, \mathbf{t}^{\mathrm{LF}})\mathbf{R} = \mathbf{\Lambda}$. Eq. (D.41) is then expressed with respect to the variables q_a and q_b as

$$\epsilon \mathbf{q}' = \mathbf{\Lambda}\mathbf{q} + \mathbf{G}\left(u, \mathbf{q}\right) \tag{D.44}$$

where $\mathbf{G}\left(u, \mathbf{q}\right) = \mathbf{L}^T\tilde{\mathbf{G}}\left(r - r^{\mathrm{LF}}, \mathbf{R}\mathbf{q}\right)$ and $u = r - r^{\mathrm{LF}}$. Because of the latter change of variable the linear terms in q_a and q_b vanish in $\mathbf{G}$.

The Jacobian matrix $\mathbf{J_g}(r^{\mathrm{LF}}, \mathbf{t}^{\mathrm{LF}})$ has a null eigenvalue and a negative one. Consequently, the center manifold theorem states that, in the neighborhood of the fold point $(r^{\mathrm{LF}}, s^{\mathrm{LF}}, \Delta^{\mathrm{LF}})$, studying the following reduced system

$$\epsilon q_a' = G_1\left(q_a, \ell(q_a), u\right) \tag{D.45}$$

is equivalent of studying Eq. (D.44). The function ℓ cannot be obtained explicitly and it must therefore be approximated. For sake of simplicity one chooses the *tangent space approximation* (see for example [214], Chap. 18), i.e. $q_b = \ell(q_a) = 0$.

To obtain a normal form of the dynamic saddle-node bifurcation final approximations are needed. First, because, we study the dynamics near the fold point $(r^{\mathrm{LF}}, s^{\mathrm{LF}}, \Delta^{\mathrm{LF}})$ we assume that $f(r,s,\Delta) = f(r^{\mathrm{LF}}, s^{\mathrm{LF}}, \Delta^{\mathrm{LF}}) = f^{\mathrm{LF}}$. Then, only terms of order 2 in q_a and of order 1 in u are kept in G_1 leading to

$$G_1 \approx a_1 q_a^2 + a_2 u \tag{D.46}$$

with

$$a_1 = \frac{3\left(\sqrt{1-3\mu^2} - 1\right)\mu^2 + \sqrt{1-3\mu^2} + 1}{18\mu^2} \quad \text{and} \quad a_2 = \frac{3\alpha\sqrt{\frac{2-\sqrt{1-3\mu^2}}{\alpha}}}{4\sqrt{2}\sqrt{3\mu^2 + \sqrt{1-3\mu^2} + 1}}. \tag{D.47}$$

An approximated formulation of the slow flow (D.38) as the normal form of the dynamic saddle-node bifurcation is then finally obtained as

$$\hat{\epsilon} q_a' = h(q_a, v) = q_a^2 + v, \tag{D.48a}$$

$$v' = 1 \tag{D.48b}$$

with

$$v = \frac{a_2}{a_1}u, \quad \hat{\epsilon} = \epsilon f^{\mathrm{LF}}\frac{a_2}{a_1^2} \tag{D.49}$$

4. To avoid having to introduce new notations, same symbols as in Section. D.2.2 are used in this section to describe the biorthogonal transformation except for the subscripts which are now letters (a, b,...) instead of numbers (1,2,...).

and the following time switching $\tau \to \frac{a_2 f^{\mathrm{LF}}}{a_1}\tau$ and where $h(q_a, v)$ satisfies the bifurcation conditions $h(0,0) = 0$ and $\partial_{q_a} h(0,0) = 0$ and the conditions of the saddle-node bifurcation $\partial_{q_a q_a} h(0,0) \neq 0$ and $\partial_v f(0,0) \neq 0$.

The bifurcation is said to be *dynamic* because unlike the *static* saddle-node bifurcation the bifurcation parameter v is a slowly varying parameter (because of (D.48b)).

The critical manifold $\mathcal{M}_0$ of (D.48) consists of an attracting branch $\mathcal{M}_{0,\mathrm{a}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^- \mid x = -\sqrt{-y}\}$ and a repelling branch $\mathcal{M}_{0,\mathrm{r}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- \mid x = \sqrt{-y}\}$. This critical manifold is hyperbolic except in $(0,0)$. Finally, it may be noted that the center manifold reduction amounts to stating that locally the critical manifold is approximated by a parabolic function.

D.4.2 Analytical solution for the normal form of the dynamic saddle-node bifurcation

The method to solve analytically Eq. (D.48) is presented for exemple in [27]. It begins by dividing Eq. (D.48a) by Eq. (D.48b), that leads to

$$\hat{\epsilon}\frac{dq_a}{dv} = q_a^2 + v. \tag{D.50}$$

The subsequent scaling $q_a = \hat{\epsilon}^{1/3} z$ and $v = -\hat{\epsilon}^{2/3} s$ is then introduced to obtain the following equation

$$\frac{dz}{ds} = -z^2 + s. \tag{D.51}$$

Setting $z(s) = \varphi'(s)/\varphi(s)$ in (D.51) yields the linear second order equation $\varphi''(s) = s\varphi(s)$, whose solution can be expressed in terms of Airy functions as $\varphi(s) = C_1 \mathrm{Ai}(s) + C_2 \mathrm{Bi}(s)$ where C_1 and C_2 are constants. Assuming that $x(-\infty) = -\sqrt{-y}$, only the contribution of $\mathrm{Ai}(s)$ is kept (this is not proved here). Therefore the solution with respect to the original variable q_a, denoted $q_a^\star(v)$, is then given by

$$q_a^\star(v) = \hat{\epsilon}^{1/3} \frac{\mathrm{Ai}'\left(-\hat{\epsilon}^{-2/3} v\right)}{\mathrm{Ai}\left(-\hat{\epsilon}^{-2/3} v\right)}. \tag{D.52}$$

Note that from Eq. (D.48) to Eq. (D.52) no asymptotic approach has been used.

The first zero of $q_a^\star(v)$ is given by the first zero of the Airy function derivative Ai' and the first singularity by the first zero of Ai which are tabulated values (see e.g. [1]). Therefore, one has

$$q_a^\star(v) = 0 \quad \text{for} \quad v = 1.01879 \times \hat{\epsilon}^{2/3} \tag{D.53}$$

and

$$q_a^\star(v) \to \infty \quad \text{for} \quad v = 2.33810 \times \hat{\epsilon}^{2/3}. \tag{D.54}$$

An illustration of the normal form of the dynamic saddle-node bifurcation is shown in Fig. D.2. The direct numerical integration of Eq. (D.48) with initial condition $(q_a(0) = -1, v(0) - 0.5)$ is compared to the analytical solution $q_a^\star(y)$ given by (D.52) for $\epsilon = 0.01$. The first zero, the first singularity of $q_a^\star(v)$ and the corresponding critical manifold $\mathcal{M}_0$ (which consists of an attracting part $\mathcal{M}_{0,\mathrm{a}}$ and a repelling part $\mathcal{M}_{0,\mathrm{r}}$) are also shown.

From Eqq. (D.43) and (D.49), an approximated analytical solution of the slow flow (D.38) in the neighborhood of the fold point $(r^{\mathrm{LF}}, s^{\mathrm{LF}}, \Delta^{\mathrm{LF}})$ is obtained as

$$s^\star(r) = s^{\mathrm{LF}} + \mathbf{r}_{a,1} \hat{\epsilon}^{1/3} \frac{\mathrm{Ai}'\left(-\hat{\epsilon}^{-2/3} \frac{a_2}{a_1}\left(r - r^{\mathrm{LF}}\right)\right)}{\mathrm{Ai}\left(-\hat{\epsilon}^{-2/3} \frac{a_2}{a_1}\left(r - r^{\mathrm{LF}}\right)\right)} \tag{D.55}$$

where a_1, a_2 and $\hat{\epsilon}$ are given by (D.47) and (D.49) respectively and $\mathbf{r}_{a,1}$ is the first coordinate of the vector $\mathbf{r}_a$.

The previous analysis reveals the nontrivial ϵ-dependence of the slow flow near the fold point, involving the fractional exponents $1/3$ and $2/3$. Consequently, near the fold point, the trajectory no longer tracks the attracting branch of $\mathcal{M}_{0,\mathrm{a}}$ of the critical manifold at a distance of order ϵ as it is the case when the trajectory evolves slowly far from the fold point (as predicted by the Fenichel theory in the normally hyperbolic branches of $\mathcal{M}_0$).

Two particular values of r can be deduced from Eq. (D.55) : the value at which $s^\star(r) = s^{\mathrm{LF}}$, denoted r^0, and the value for which $s^\star(r)$ tends toward infinity, denoted r^∞. These values of r correspond to the first zeros of Ai' and Ai respectively (see Eqs. (D.53) and (D.54)). Therefore, one has

$$s^\star(r) = s^{\mathrm{LF}} \quad \text{for} \quad r = r^0 = r^{\mathrm{LF}} + K^0 \epsilon^{2/3} \tag{D.56}$$

where $K^0 = 1.01879 \times \frac{a_1}{a_2}\left(f^{\mathrm{LF}} \frac{a_2}{a_1^2}\right)^{2/3}$ and

$$s^\star(r) \to \infty \quad \text{for} \quad r = r^\infty = r^{\mathrm{LF}} + K^\infty \epsilon^{2/3} \tag{D.57}$$

where $K^\infty = 2.33810 \times \frac{a_1}{a_2}\left(f^{\mathrm{LF}} \frac{a_2}{a_1^2}\right)^{2/3}$.

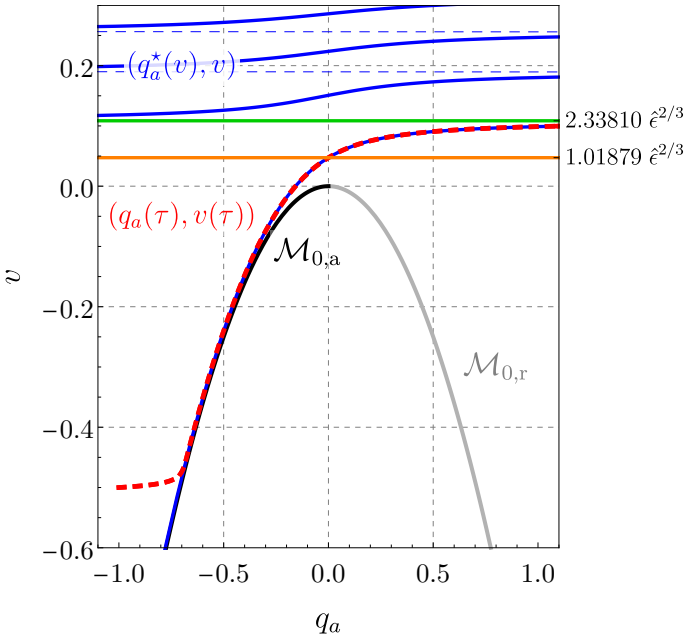


Figure D.2. Illustration of the normal form of the dynamic saddle-node bifurcation. Result of the numerical integration of Eq. (D.48) with initial condition $(q_a(0) = -1, v(0) = -0.5)$ (red dashed line) compared to the analytical scaling law $q_a^\star(y)$ given by (D.52) (blue line, the dashed parts are the horizontal asymptotes of $q_a^\star(y)$ corresponding to the zeros Airy function) for $\hat{\epsilon} = 0.01$. The first zero and the first singularity of $q_a^\star(v)$ (orange and green lines respectively) and the corresponding critical manifold $\mathcal{M}_0$ (attracting part $\mathcal{M}_{0,\mathrm{a}}$ in black and repelling part $\mathcal{M}_{0,\mathrm{r}}$ in gray) are also shown.

D.4.3 New theoretical prediction of the mitigation limit

From the results obtained in the previous section, especially Eq. (D.57), it is possible to obtain a more accurate prediction of the mitigation limit than (D.36) which takes into account the value of the small parameter ϵ.

As seen previously (see Section. D.3.5), the mitigation limit is the value of ρ for which the fixed point s_2^e becomes smaller than s^{A} (the abscissa of the arrival point of the trajectory on the critical manifold) or for which s_2^e no longer exists (see Eq. (D.34)). Within the zeroth-order approximation the arrival point is $s^{\mathrm{A}} = s^{\mathrm{U}}$ defined by (E.53).

It is not easy to derive a new expression of s^{A} from the scaling law (D.55). However, one can assume that when the trajectory reaches the right attracting par of $\mathcal{M}_0$, the limit value r^∞ has already been reached. Therefore, the solution of $s_2^e = s^{\mathrm{A}}$, denoted $\rho_\epsilon^{\mathrm{U}}$, is also the solution of

$$H\left(s_2^e(\rho_\epsilon^{\mathrm{U}})\right) = r^\infty, \tag{D.58a}$$
$$= r^{\mathrm{LF}} + K^\infty(\rho_\epsilon^{\mathrm{U}})\epsilon^{2/3}, \tag{D.58b}$$
$$= H(s^{\mathrm{LF}}) + K^\infty(\rho_\epsilon^{\mathrm{U}})\epsilon^{2/3}. \tag{D.58c}$$

Except for very small values of ϵ for which $\rho_\epsilon^{\mathrm{U}} \approx \rho_0^{\mathrm{U}}$ and the zeroth-order approximation is sufficient, the special value of μ solution of $\rho_\epsilon^{\mathrm{U}} = \rho^{\mathrm{S}}$ is in general larger than $1/\sqrt{3}$, the upper limit of the study interval (see Eq. (E.50)). Therefore, we consider here that the mitigation limit is directly $\rho_\epsilon^{\mathrm{U}}$.

From Eq. (D.58) a new and more accurate value of the optimal value of the NES damping coefficient can be derived. Indeed, denoting $H\left(s_2^e(\rho)\right) = f_1(\rho, \mu)$, $H(s^{\mathrm{LF}}) = f_2(\mu)$ and $K^\infty(\rho)\epsilon^{2/3} = f_3(\rho, \mu)$ one has

$$d\rho_\mu = \frac{d_\mu f_2 + \partial_\mu f_3 - \partial_\mu f_1}{\partial_\mu f_1 - \partial_\mu f_3}. \tag{D.59}$$

Therefore solving $d_\mu \rho = 0$ together with Eq. (D.58c) gives the coordinates of the maxima of $\rho_\epsilon^{\mathrm{U}}(\mu)$ and then optimal value of the NES damping coefficient, denoted $\mu_\epsilon^{\mathrm{opt}}$.

Introducing a new perturbation parameter $\nu = \epsilon^{2/3}$, Eq. (D.58) takes the following form

$$H\left(s_2^e(\rho_\epsilon^{\mathrm{U}})\right) = H(s^{\mathrm{LF}}) + \nu K^\infty(\rho_\epsilon^{\mathrm{U}}). \tag{D.60}$$

Because $0 < \epsilon \ll 1$ one has also $0 < \nu \ll 1$, the latter equation is a perturbation of $H\left(s_2^e\right) = H(s^{\mathrm{LF}})$ which is equivalent to $H\left(s_2^e\right) = H(s^{\mathrm{U}})$ and consequently to $s_2^e = s^{\mathrm{U}}$ whose solution is ρ_0^{U} given by Eq. (D.35).

Therefore, to find an explicit formulae for the solution of (D.58), a regular perturbation approach is used by expressing $\rho_\epsilon^{\mathrm{U}}$ as a power series of ν

$$\rho_\epsilon^{\mathrm{U}} = \rho_{\epsilon,0}^{\mathrm{U}} + \nu\rho_{\epsilon,1}^{\mathrm{U}} + \dots \tag{D.61}$$

Then, substituting (D.61) into (D.60) and equating the coefficients of identical power of ν on both sides of the equation lead to the following set of equations (up to the first order)

$$\boldsymbol{\nu^0}: \qquad H\left(s_2^e(\rho_{\epsilon,0}^{\mathrm{U}})\right) = H(s^{\mathrm{LF}}) \tag{D.62a}$$

$$\boldsymbol{\nu^1}: \qquad \rho_1^* d_s H\left(s_2^e(\rho_{\epsilon,0}^{\mathrm{U}})\right) d_\rho s_2^e(\rho_{\epsilon,0}^{\mathrm{U}}) = K^\infty(\rho_{\epsilon,0}^{\mathrm{U}}) \tag{D.62b}$$

As expected, from (D.62a) one has $\rho_{\epsilon,0}^{\mathrm{U}} = \rho_0^{\mathrm{U}}$ (see Eq. (D.35)) and therefore Eq. (D.62b) yields

$$\rho_{\epsilon,1}^{\mathrm{U}} = \frac{K^\infty(\rho_0^{\mathrm{U}})}{d_s H\left(s_2^e(\rho_0^{\mathrm{U}})\right) d_\rho s_2^e(\rho_0^{\mathrm{U}})}. \tag{D.63}$$

Finally, to a first approximation, one has the following asymptotic expression for $\rho_\epsilon^{\mathrm{U}}$

$$\rho_\epsilon^{\mathrm{U}} = \rho_0^{\mathrm{U}} + \epsilon^{2/3} \frac{K^\infty(\rho_0^{\mathrm{U}})}{d_s H\left(s_2^e(\rho_0^{\mathrm{U}})\right) d_\rho s_2^e(\rho_0^{\mathrm{U}})}. \tag{D.64}$$

The asymptotic series (D.61) converges if the functions of ρ in Eq. (D.60) (i.e. $s_2^e(\rho)$ and $K^\infty(\rho)$) can be expanded as a convergent Taylor series at $\rho = \rho_0^{\mathrm{U}}$. Unfortunately $s_2^e(\rho)$ has an infinite derivative at $\rho = \rho^{\mathrm{S}}$ (see Eq. (D.34)). Because of that, at $\mu = \mu^*$ where $\rho_0^{\mathrm{U}} = \rho^{\mathrm{S}}$ the term $\rho_{\epsilon,1}^{\mathrm{U}}$ in the series Eq. (D.61) is equal to zero but the following terms grow to infinity making the series divergent. However, except at $\mu = \mu^*$ and for sufficiently small values of ϵ, the expression (D.64) shows again a nontrivial ϵ-dependence stating that $\rho_\epsilon^{\mathrm{U}}$ is a $O(\epsilon^{2/3})$-perturbation of ρ_0^{U}.

Equating to zero the derivative, with respect to μ, of the right-hand side of Eq. (D.64) and performing again a perturbative technique with respect to $\nu = \epsilon^{2/3}$, an approximative expression of $\mu_\epsilon^{\mathrm{opt}}$ is obtained as

$$\mu_\epsilon^{\mathrm{opt}} = \mu_0^{\mathrm{opt}} + \epsilon^{2/3} \frac{d_\mu \left(\frac{K^\infty(\rho_0^{\mathrm{U}})}{d_s H\left(s_2^e(\rho_0^{\mathrm{U}})\right) d_\rho s_2^e(\rho_0^{\mathrm{U}})} \right)_{\mu=\mu_0^{\mathrm{opt}}}}{d_{\mu\mu}\left(\rho_0^{\mathrm{U}}\right)_{\mu=\mu_0^{\mathrm{opt}}}} \tag{D.65}$$

where μ_0^{opt} is given by Eq. (D.37). Obviously, the nontrivial ϵ-dependence is found again as, if ϵ is sufficiently small, $\mu_\epsilon^{\mathrm{opt}}$ is a $O(\epsilon^{2/3})$-perturbation of μ_0^{opt}. Of course the limitations previously mentioned for Eq. (D.64) are also valuable for Eq. (D.65).

D.5 Application to an aeroelastic aircraft wing system coupled to an NES

The methodology presented in previous sections is illustrated here on an aeroelastic aircraft wing system coupled to an NES (see Fig. D.3) which has already been used in the past in several works about LCO mitigation by means of one or several NESs [a8, 78, 123, 124]. First, equations of motion the wing-NES system are presented in Section. D.5.1. Then, the comparison between theoretical results and numerical simulations is performed in Section. D.5.2.

D.5.1 Equations of the aircraft wing model coupled to one NES

The equations of motion of the model presented in Fig. D.3 can be derived for example by means of the Lagrange equations. Assuming a small angle between the wing and the horizontal, the Lagrange equations yield the following equations of motion with respect to the heave z and the angle of attack (pitch) $\tilde{\varphi}$ of the wing and to the NES displacement y (see Fig. D.3)

$$\begin{aligned} m\ddot{z} + S_\varphi\ddot{\tilde{\varphi}} + K_z z + C_z\dot{z} + qP_a\Gamma\left(\tilde{\varphi} + \dot{z}/U\right) + K_z^{\mathrm{NL}} z^3 + \\ C_y\left(\dot{z} - d\dot{\tilde{\varphi}} - \dot{y}\right) + K_y^{\mathrm{NL}}\left(z - d\tilde{\varphi} - y\right)^3 = 0 \end{aligned} \tag{D.66a}$$

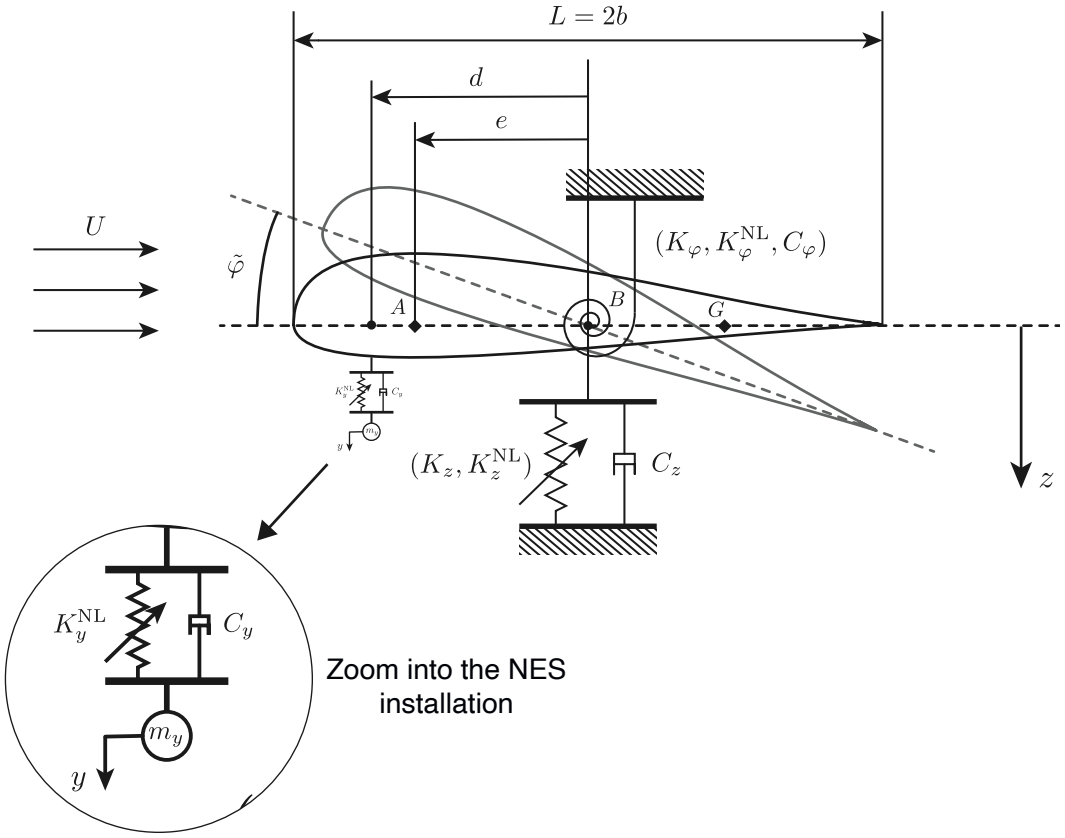


Figure D.3. Sketch of the two DOFs aircraft wing coupled to one NES. z and $\tilde{\varphi}$ are respectively the heave and the angle of attack (pitch) of the wing and y is the displacement of the NES. A is the aerodynamic center, B the elastic axis, G the center of gravity of the aircraft wing. e is the location aerodynamic center A measured from B (positive ahead of B). K_z and K_φ are the linear heave and pitch stiffnesses respectively whereas K_z^{NL} and K_φ^{NL} are the cubic heave and pitch stiffnesses. C_z and C_φ are the heave and pitch damping coefficients. U is the constant and uniform flow speed around the wing and d is the offset attachment of the NES to the wing, also measured from B.

$$I_\varphi\ddot{\tilde{\varphi}} + S_\varphi\ddot{z} + K_\varphi\tilde{\varphi} + C_\varphi\dot{\tilde{\varphi}} - qeP_a\Gamma\left(\tilde{\varphi} + \dot{z}/U\right) + K_\varphi^{\mathrm{NL}}\tilde{\varphi}^3 + dC_y\left(\dot{z} - d\dot{\tilde{\varphi}} - \dot{y}\right) + dK_y^{\mathrm{NL}}\left(z - d\tilde{\varphi} - y\right)^3 = 0 \tag{D.66b}$$

$$m_y\ddot{y} + C_y\left(d\dot{\tilde{\varphi}} + \dot{y} - \dot{z}\right) + K_y^{\mathrm{NL}}\left(d\tilde{\varphi} + y - z\right)^3 = 0 \tag{D.66c}$$

where again the time derivative is denoted " $\dot{\cdot}$ ". $b = L/2$ is the semichord length. A is the aerodynamic center, B the elastic axis, G the center of gravity of the aircraft wing. e is the location aerodynamic center A measured from B (positive ahead of B). The quantities m and I_φ are respectively the mass of the wing and its moment of inertia with respect to B. $S_\varphi = mBG$ is the mass unbalance in the wing. K_z and K_φ are the linear heave and pitch stiffnesses respectively whereas K_z^{NL} and K_φ^{NL} are the cubic heave and pitch stiffnesses. C_z and C_φ are the heave and pitch damping coefficients. U is the constant and uniform flow speed around the wing and $q = \frac{1}{2}\rho_\infty U^2$ is the dynamic pressure where ρ_∞ is the density of the flow. P_a is the planform of the wing, Γ is the lift curve slope and d is the offset attachment of the NES to the wing. Finally, m_y, C_y and K_y^{NL} $(m = 1, \ldots, M)$ are the mass, the damping coefficient and the cubic stiffness of the NES respectively.

For convenience, Eq. (D.66) is written in a dimensionless form as follows

$$\tilde{x}'' + s_\varphi\tilde{\varphi}'' + \Omega^2\tilde{x} + \zeta_x\tilde{x}' + \gamma\Theta\left(\Theta\tilde{\varphi} + \tilde{x}'\right) + \tilde{\xi}_x\tilde{x}^3 + \tilde{m}_h\tilde{h}'' = 0 \tag{D.67a}$$

$$r_\varphi^2\tilde{\varphi}'' + s_\varphi\tilde{x}'' + r_\varphi^2\tilde{\varphi} + \zeta_\varphi\tilde{\varphi}' - \eta\gamma\Theta\left(\Theta\varphi + \tilde{x}'\right) + \tilde{\xi}_\varphi\tilde{\varphi}^3 + \delta\tilde{m}_h\tilde{h}'' = 0 \tag{D.67b}$$

$$\tilde{m}_h\tilde{h}'' + \tilde{\zeta}_h\left(\delta\tilde{\varphi}' + \tilde{h}' - \tilde{x}'\right) + \tilde{\xi}_h(\delta\tilde{\varphi} + \tilde{h} - \tilde{x})^3 = 0 \tag{D.67c}$$

where the time t has been replaced by the dimensionless time $t' = \omega_\varphi t$ (with $\omega_\varphi = \sqrt{K_\varphi/I_\varphi}$) and time derivative $d_{t'}$ is denoted " $'$ ". The dimensionless displacements are defined by $\tilde{x} = z/b$, $\tilde{h} = y/b$. Moreover, $\delta = d/b$, $s_\varphi = S_\varphi/(mb)$, $\Omega = \omega_z/\omega_\varphi$ (with $\omega_z = \sqrt{K_z/m}$) and $\eta = e/b$. $r_\varphi = \sqrt{I_\varphi/(mb^2)}$ is the radius of

gyration of the cross section of the wing. The dimensionless nonlinear stiffnesses and damping coefficients are $\tilde{\xi}_x = K_z^{\mathrm{NL}} b^2/(m\omega_\varphi^2)$, $\zeta_x = C_z/(m\omega_\varphi)$, $\tilde{\xi}_\varphi = K_\varphi^{\mathrm{NL}}/(mb^2\omega_\varphi^2)$, $\zeta_\varphi = C_\varphi/(mb^2\omega_\varphi)$, $\tilde{\xi}_h = K_y^{\mathrm{NL}} b^2/(m\omega_\varphi^2)$, $\tilde{\zeta}_h = C_y/(m\omega_\varphi)$. The mass and density ratios are defined by $\tilde{m}_h = m_y/(m\omega_\varphi^2)$ and $\gamma = bP_a\rho_\infty\Gamma/(2m)$ respectively. Finally, the bifurcation parameter under consideration is the reduced speed of the flow $\Theta = U/(b\omega_\varphi)$.

Eq. (D.67) has the general form given by Eq. (D.2) with $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}, \tilde{\varphi})^T$ and

$$\begin{gathered}\tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 1 & s_\varphi \\ s_\varphi & r_\varphi^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \zeta_x + \gamma\Theta & 0 \\ -\eta\gamma\Theta & \zeta_\varphi \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \Omega^2 & \gamma\Theta^2 \\ 0 & r_\varphi^2 - \eta\gamma\Theta^2 \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{A}} = (1, -\delta), \qquad \tilde{\mathbf{B}} = (1, -\delta)^T, \qquad \tilde{\mathbf{G}}^{\mathbf{NL}} = (\tilde{\xi}_x\tilde{x}^3, \tilde{\xi}_\varphi\tilde{\varphi}^3)^T.\end{gathered} \tag{D.68}$$

The expression of the nonlinear vector function is $\tilde{\mathbf{g}}^{\mathbf{NL}} = \left(\tilde{\xi}_x\tilde{x}^3, \tilde{\xi}_\varphi\tilde{\varphi}^3\right)^T$. Moreover, one defines rescaled parameters and variables as $\tilde{\xi}_x = \epsilon\xi_x$, $\tilde{\xi}_\varphi = \epsilon\xi_\varphi$, $\tilde{m}_h = \epsilon m_h$, $\tilde{\zeta}_h = \epsilon\zeta_h$, $x = \frac{\tilde{x}}{\sqrt{\epsilon}}$, $\varphi = \frac{\tilde{\varphi}}{\sqrt{\epsilon}}$ and $h = \frac{\tilde{h}}{\sqrt{\epsilon}}$ to obtain the final form of the equations of motion

$$x'' + s_\varphi\varphi'' + \Omega^2 x + \zeta_x x' + \gamma\Theta\left(\Theta\varphi + x'\right) + \epsilon m_h h'' = 0 \tag{D.69a}$$

$$r_\varphi^2\varphi'' + s_\varphi x'' + r_\varphi^2\varphi + \zeta_\varphi\varphi' - \eta\gamma\Theta\left(\Theta\varphi + x'\right) + \epsilon\delta m_h h'' = 0 \tag{D.69b}$$

$$h'' + \zeta_h\left(\delta\varphi' + h' - x'\right) + \xi_h\left(\delta\varphi + h - x\right)^3 = 0 \tag{D.69c}$$

with $\zeta_h = \tilde{\zeta}_h/m_h$ and $\xi_h = \tilde{\xi}_h/m_h$.

The physical bifurcation parameter under consideration is the reduced speed of the air flow Θ and the following parameters for the primary system are used

$$\begin{aligned}&\zeta_x = 0.01, \quad \zeta_\varphi = 0.01, \quad s_\varphi = 0.2, \quad r_\varphi = 0.5, \\ &\Omega = 0.5, \quad \eta = 0.4, \quad \text{and} \quad \gamma = 0.2.\end{aligned} \tag{D.70}$$

With the parameters (D.70), the aircraft wing model undergoes an Hopf bifurcation at $\Theta_{\mathrm{Hopf}}^{\mathrm{wo}} = 0.933$ at which the real part of the first eigenvalue of Eq. (D.69) vanishes, i.e. $\mathrm{Re}(\lambda_1) = 0$, and then becomes positive. It is recalled here that the pulsation ω and the generalized bifurcation parameter ρ are defined from the eigenvalue λ_1 of the unstable mode by Eq. (D.14).

The NES setup is defined by

$$m_h = 1, \quad \delta = -0.8, \quad \xi_h = 5 \tag{D.71}$$

and ζ_h and ϵ which are specified below depending of the considered example.

The several response regimes described in Section. D.3.4 are illustrated here by means of numerical simulations of the wing-NES system (D.67) (see Fig. D.4) with, in addition to (D.70) and (D.71), $\epsilon = 0.01$, $\zeta_h = 0.3$, $\xi_x = 4$ and $\xi_\varphi = 8$. Four values of the reduced speed are used, namely : $\Theta = 0.94$ (see Fig. D.4(a)), $\Theta = 0.945$ (see Fig. D.4(b)), $\Theta = 0.97$ (see Fig. D.4(c)) and $\Theta = 0.98$ (see Fig. D.4(d)) corresponding respectively to complete suppression, mitigation through a periodic regime, mitigation through a SMR and finally no mitigation of the harmful LCOs of the primary structure. For comparison purposes, for each situation, a direct numerical integration of the aircraft wing system without NES is also shown.

D.5.2 Comparison between theoretical results and numerical simulations

The slow flow dynamics of Eq. (D.69), its critical manifold $\mathcal{M}_0$ (E.32), the zeroth-order analytical expressions of the mitigation limit (D.36) and of the optimal value of NES damping coefficient (D.37) are derived following the method described in Sections. D.3.1, D.3.2 and D.3.5 respectively. Note that through Eq. (D.19), the parameters μ and α are here defined as $\mu = \zeta_h/\omega$ and $\alpha = \xi_h/\omega^2$. Simultaneously, the scaling law of the trajectory in the neighborhood of the left fold point of $\mathcal{M}_0$, i.e. Eq. (D.55), is computed. Afterwards, solving Eq. (D.58) and finding the root of Eq. (D.59), $\rho_\epsilon^{\mathrm{U}}(\mu)$ and $\mu_\epsilon^{\mathrm{opt}}$ are obtained. Finally, the asymptotic analytical expressions of the latter, given by Eqs. (D.64) and(D.65) respectively, are computed.

To illustrate the proposed analytical procedure, Fig. D.5(a) shows the critical manifold $\mathcal{M}_0$ (E.32), superimposed to the direct numerical integration of the slow flow (D.38) (see also Fig. D.5(b) for the times series of $s(\tau)$ and $r(\tau)$ focused on the first relaxation cycle) and its scaling law given by Eq. (D.55). The values of $r^{\mathrm{LF}} = H(s^{\mathrm{LF}})$ (see Eq. (E.49)) and $r^\infty = r^{\mathrm{LF}} + K^\infty\epsilon^{2/3}$ (see Eq. (D.57)) are depicted by horizontal lines. The numerical integration of the slow flow (see red dashed line in Fig. D.5(a)) shows a relaxation oscillations scenario in (s, r)-plane. Indeed, the trajectory of undergoes a succession of almost horizontal fast parts and slow parts evolving in the $O(\epsilon)$-vicinity of the critical manifold $\mathcal{M}_0$ (here, at the scale of the figure and apart from the fold points, the trajectory and $\mathcal{M}_0$ seem superimposed). The first horizontal fast part is from the initial condition $(s(0) = 0.15, r(0) = 0.04)$ to the left attracting part of $\mathcal{M}_0$ and the other are fast jumps

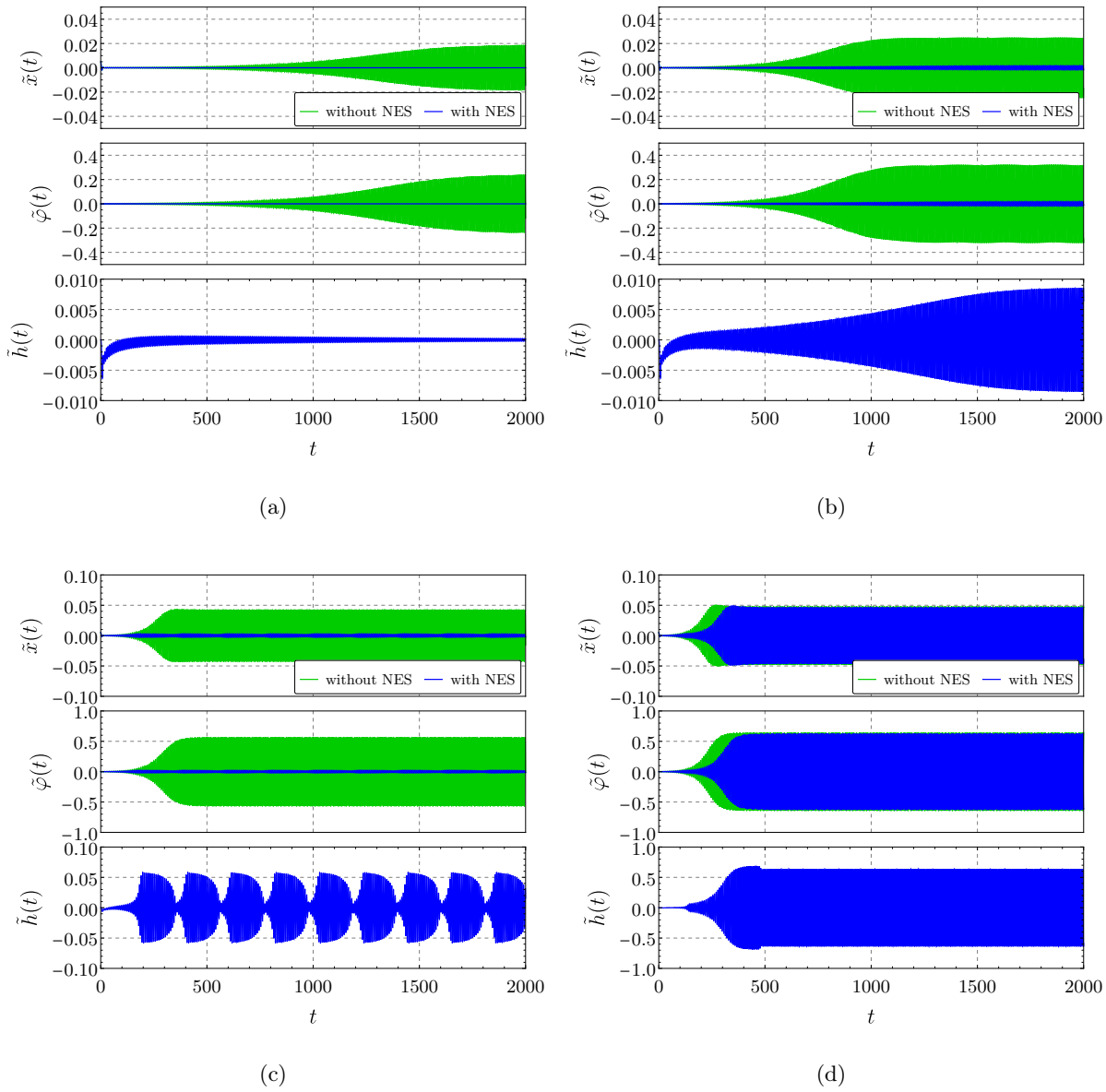
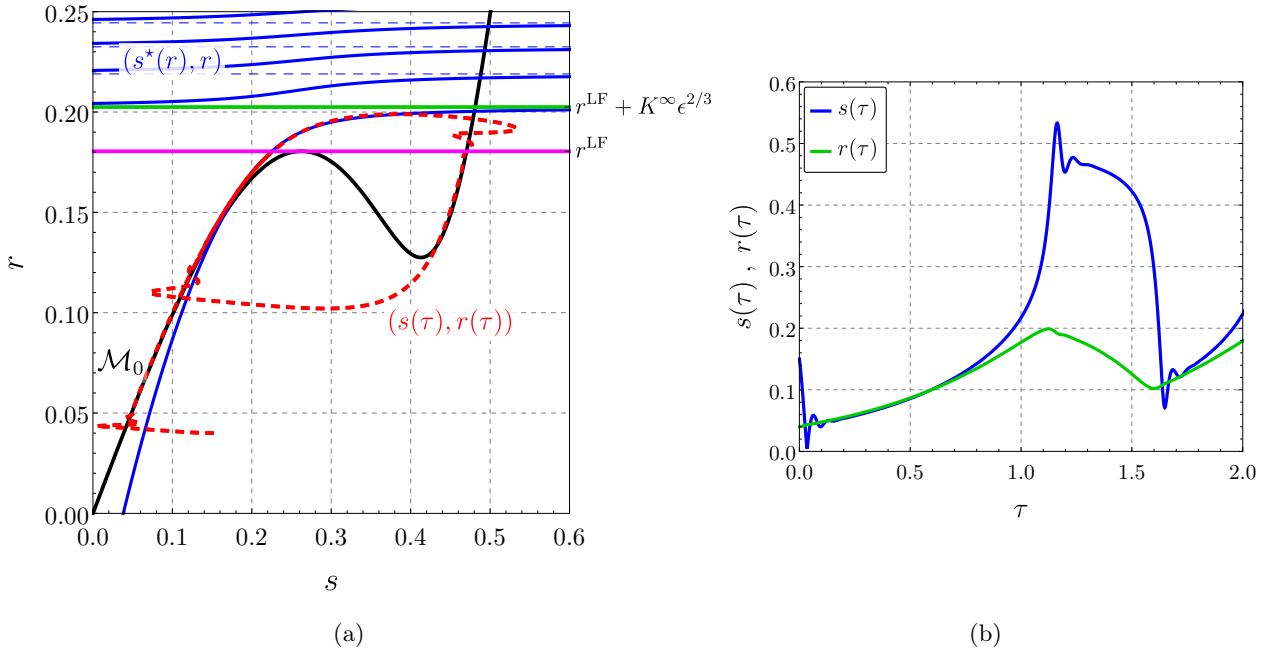


Figure D.4. Direct numerical integration of the wing-NES system (D.67) (in blue) depicting the several response regimes described in Section. D.3.4 with, in addition to (D.70) and (D.71), $\epsilon = 0.01$, $\zeta_h = 0.3$, $\xi_h = 4$, $\xi_x = 4$ and $\xi_\varphi = 8$. Four values of the reduced speed are used, namely : (a) $\Theta = 0.94$, (b) $\Theta = 0.945$, (c) $\Theta = 0.97$ and (d) $\Theta = 0.98$ corresponding respectively to complete suppression, mitigation through a periodic regime, mitigation through a SMR and finally no mitigation of the harmful limit cycle oscillations of the primary structure. For comparison purposes, for each situation, a direct numerical integration of the wing system without NES is also shown (in green).

between the left and right attracting parts of $\mathcal{M}_0$ as described in Section. D.3.4 and in the introduction of Section. D.4.

The figure reveals a good agreement between the numerical simulation of the slow flow and its analytical scaling law in the neighborhood of the left fold point. One can see also that choosing r^∞ as the ordinate of the point of intersection between the trajectory of the slow flow and the right attracting branch of $\mathcal{M}_0$ is a more accurate approximation than choosing r^{LF} as this is the case within the zeroth-order approximation.

In Fig. D.6, the comparison in now performed in terms of mitigation limit. The theoretical predictions, the one obtained within the zeroth-order approximation (D.36) and those derived from the scaling law (solving numerically Eq. (D.58) and the one given by Eq. (D.64)) are compared with mitigation limits measured on direct numerical integration of the approximated slow flow (D.38) and on the full order system (D.67). In these last two cases, direct numerical integrations are performed for increasing values of ρ (by increasing Θ) and



(a) (b)

Figure D.5. Illustration of the proposed analytical procedure. (a) The critical manifold $\mathcal{M}_0$ (E.32) (black line) superimposed to the direct numerical integration of the slow flow (D.38) (red line) and its scaling law near the left fold point given by Eq. (D.55) (blue line, the dashed parts are the horizontal asymptotes of $s^\star(r)$ due to the zeros of the Airy function). The values of $r^{\mathrm{LF}} = H(s^{\mathrm{LF}})$ (see Eq. (E.49)) and $r^\infty = r^{\mathrm{LF}} + K^\infty \epsilon^{2/3}$ (see Eq. (D.57)) are depicted by magenta and green horizontal lines respectively. (b) Times series of $s(\tau)$ (blue line) and $r(\tau)$ (green line) obtained from the numerical integration of the slow flow (D.38). The times series are focused on the first relaxation cycle. Parameters (D.70) and (D.71) are used with $\zeta_h = 0.25$, $\epsilon = 0.005$ and $\Theta = 0.95$.

the mitigation limit corresponds to the last value of ρ allowing a harmless situation. In general one observes at this value the transition from a SMR to a "no mitigation regime" as shown for example in Fig. D.4. All the mitigations limits are plotted with respect to the NES damping coefficient μ (with $\mu \in [0, 1/\sqrt{3}]$ [5]) and for four values of the perturbation parameter ϵ. One takes first a very little value ($\epsilon = 0.001$) to be sure to respect the assumptions of the asymptotic analysis (i.e. $0 < \epsilon \ll 1$) and thus validate the method under these conditions. Then, three larger values are taken ($\epsilon = 0.005$, 0.02 and 0.1) to evaluate the robustness of the method when one deviates from the assumption of a small ϵ. To relate these results to the physical bifurcation parameter Θ, the latter is plotted with respect to the generalized bifurcation parameter ρ in Fig. D.7 for the same values of ϵ as in Fig. D.6.

First, in Fig. D.6, one can see that the zeroth-order approximation gives an inaccurate prediction, even for the smallest value of $\epsilon = 0.001$. Moreover, one observes that, on the contrary, solving Eq. (D.58) provides a very good prediction of the mitigation limits measured on numerical simulations. For the two following values of ϵ (0.005 and 0.02), these theoretical prediction is closer to the mitigation limits obtained from numerical simulations of the full order system (D.67) than to those measured on numerical integrations of the approximated slow flow (D.38). This is surprising because Eq. (D.58) is derived from Eq. (D.38) but, in general, in these kind of unstable systems coupled to NES, the mitigation limits measured on the full order system are slightly smaller than those measured on the slow flow. Here, when ϵ increases the prediction depreciates becoming smaller than mitigation limits obtained from numerical simulations of Eq. (D.38) and getting closer to those measured on full order system (D.67). For the largest value $\epsilon = 0.1$, the theoretical mitigation limit obtained solving Eq. (D.58) (in green on the figure) depreciates again but it is still satisfactory in a qualitative point of view. Moreover one can see that the theoretical prediction (in green) no longer has a local maximum and the optimal value of μ is equal to $1/\sqrt{3}$, its limit value for the existence of the SMR regimes (see Eq. (E.50)).

Finally, the prediction provided by Eq. (D.64) deteriorates enormously for large values of ϵ. This may be due to the non-convergent nature of the series (D.61), as already mentioned above (see comments after Eq. (D.64)).

5. Remembering that in this work only situations in which Eq. (E.50) holds are considered.

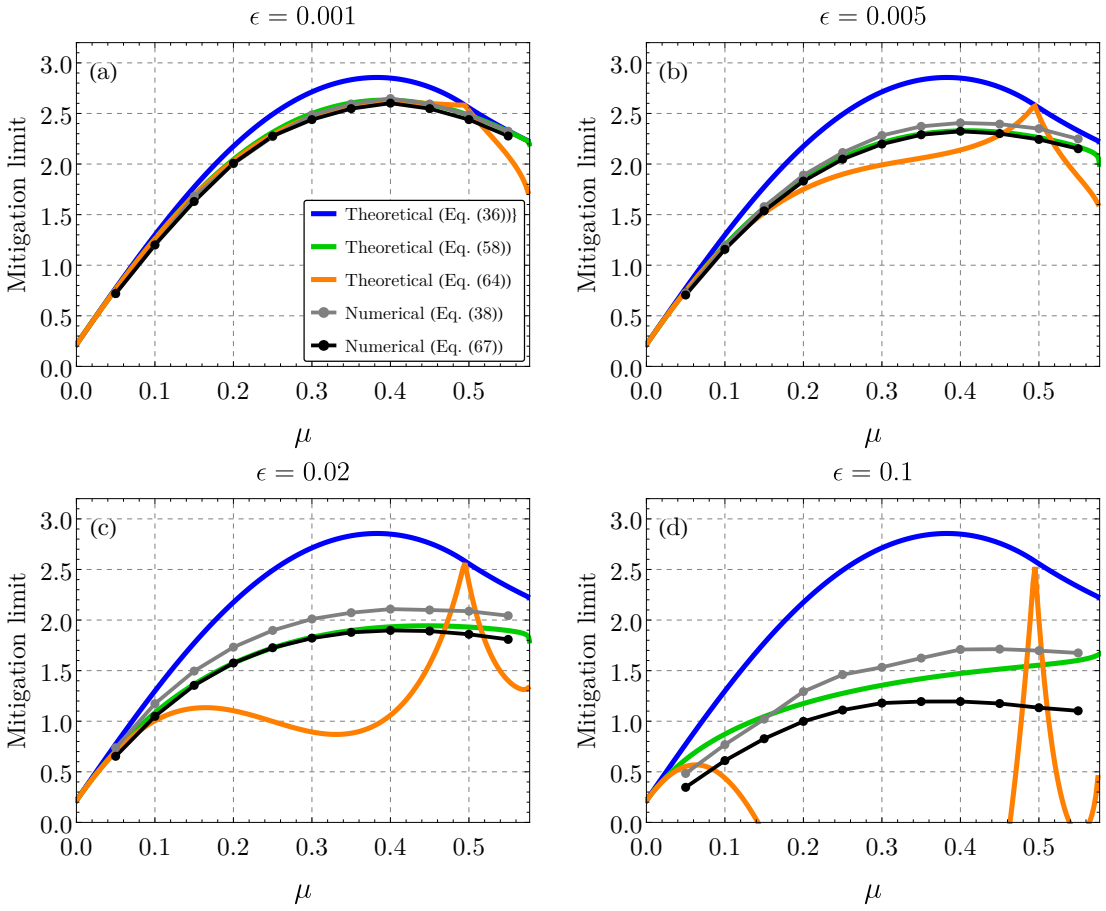


Figure D.6. Theoretical mitigation limits : the one obtained within the zeroth-order approximation (D.36) (blue line) and those derived from the scaling law (solving numerically Eq. (D.58) (green line) and the one given by Eq. (D.64) (orange line)) compared with mitigation limits measured on direct numerical integration of the approximated slow flow (D.38) (gray dots) and on the full order system (D.67) (black dots). Parameters (D.70) and (D.71) are used and ((a) $\epsilon = 0.001$, (b), $\epsilon = 0.005$, $\epsilon = 0.02$ and (d) $\epsilon = 0.1$.

Finally, in Fig. D.8, the theoretical optimal value of the NES damping coefficient obtained from the zeroth-order approximation μ_0^{opt} (see Eq. (D.37)) is compared to those derived from the scaling law (D.55) : the one obtained solving numerically $d_\mu \rho = 0$ (with $d_\mu \rho$ given by Eq. (D.59)) together with Eq. (D.58c) and the asymptotic expression given by Eq. (D.65). All this is plotted with respect to the perturbation parameter ϵ. Assuming a good agreement between the theoretical prediction of the mitigation limit obtained solving Eq. (D.58) and the actual value (as shown by Fig. D.6), only theoretical values are presented in Fig. D.8. The figure highlights the relevance of the proposed results especially for large values of the parameter ϵ. We can also see that the asymptotic expression is here able to describe qualitatively the evolution of μ^{opt} with respect to the perturbation parameter ϵ for $\epsilon \lesssim 0.04$. For $\epsilon \gtrsim 0.04$, the prediction obtained from Eqs. (D.59) and (D.58c) tends to $1/\sqrt{3}$ whereas the prediction given by Eq. (D.65) continues to grow.

D.6 Conclusion

In this work a mechanical system with one unstable mode coupled to a Nonlinear Energy Sink (NES) has been studied. The equations of motion of the system have been first simplified using a reduced-order model for the primary structure by keeping only its unstable modal coordinates. Introducing a small perturbation parameter related to the mass ratio between the NES and the primary structure, the slow flow has been then derived by means of the complexification-averaging method. Because of the presence of the small perturbation parameter, the slow flow is governed by two different time scales. More precisely, within the framework of the geometric singular perturbation, in its real form it appears as a $(2,1)$-fast-slow system. The critical manifold of this slow flow has been computed. Within the zeroth-order approximation, i.e. the analysis within the limit case in which the perturbation parameter is equal to zero, the solution of the slow flow is approximated by a

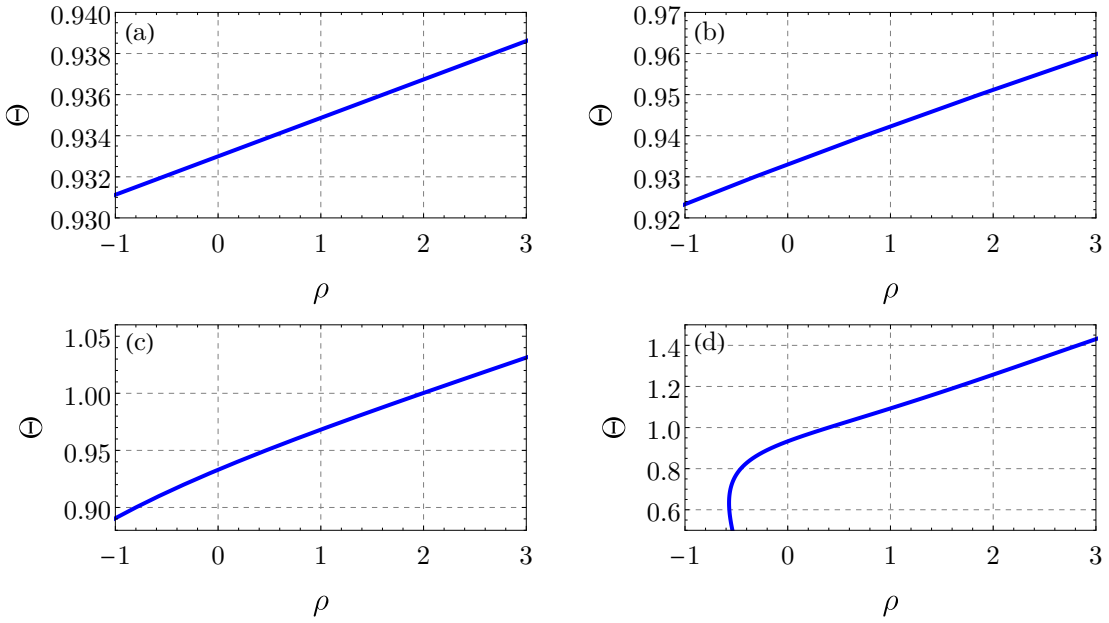


Figure D.7. The physical bifurcation parameter Θ with respect to the generalized bifurcation parameter ρ. As in Fig. D.6, parameters (D.70) are used and (a) $\epsilon = 0.001$, (b), $\epsilon = 0.005$, $\epsilon = 0.02$ and (d) $\epsilon = 0.1$.

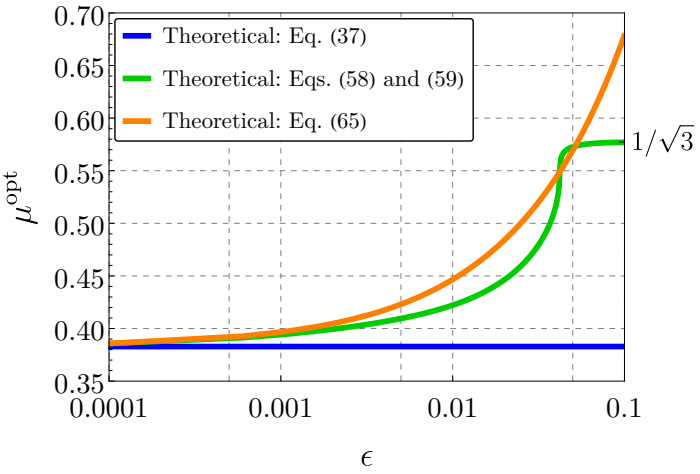


Figure D.8. The theoretical optimal value of the NES damping coefficient with respect to the small perturbation parameter ϵ. The one obtained from the zeroth-order approximation μ_0^{opt} given by Eq. (D.37) (blue line) is compared to those derived from the scaling law (D.55) : the one obtained solving numerically $d_\mu \rho = 0$ (with $d_\mu \rho$ given by Eq. (D.59)) together with Eq. (D.58c) (green line) and the asymptotic expression given by Eq. (D.65) (orange line). As previously, parameters (D.70) and (D.71) are used.

discontinuous phase trajectory in which the fast and slow epochs are described independently of each other. In particular, the slow epoch are supposed to occur on attracting parts of the critical manifold. Moreover, in this context a theoretical prediction of the mitigation has been obtained. The mitigation limit being defined as the value of the generalized bifurcation parameter, which is obtained rescaling the eigenvalue real part of the primary structure corresponding to the unstable mode, which separates harmless situations (in which the NES acts) from the harmful situation (in which the NES does not act). The results obtained within the zeroth-order approximation (both phase trajectory and mitigation limit) depreciate for the largest values of the perturbation parameter (the latter remaining small in the context of this work).

The novelty of the present work is to use the center manifold theorem to reduce the slow flow, in the neighborhood of a fold point of its critical manifold, to a normal form of the dynamic saddle-node bifurcation. This allowed us to obtain a scaling law for the slow flow in this neighborhood, i.e. a law which describes the

dependance, with respect to the small perturbation parameter, of the distance between the critical manifold and the actual trajectory of the slow flow. The law reveals that the slow flow scales in a nontrivial way with respect to the perturbation parameter, involving the fractional exponents 1/3 and 2/3. Finally, a theoretical prediction of the mitigation limit has been deduced from the scaling law. With certain assumptions, it was shown that this prediction is a correction with respect to the prediction obtained within the zeroth-order approximations, involving also a fractional order dependence with respect to the perturbation parameter.

The last section of the paper has been devoted to illustrate and validate the proposed methodology on a an aeroelastic aircraft wing model coupled to one NES. The accuracy of the present theoretical results compared to those obtained on numerical simulations of the full order system together with the general nature of the method suggest that the latter may constitute a tool for the practical design of NES.

Acknowledgments

We thank the anonymous reviewers for their careful reading of our manuscript and their many relevant comments and suggestions.

Annexe E

International Journal of Non-Linear Mechanics 150 (2023) : 104351 [a3]

Effect of stochastic forcing on the dynamic behavior of a self-sustained oscillator coupled to a non-linear energy sink

Baptiste Bergeot

Abstract

In this paper the influence of stochasticity (i.e. a Gaussian white noise forcing) on the dynamic behavior of a self-sustained oscillator coupled to a non-linear energy sink is investigated. To this end, the standard stochastic averaging is used to compute the slow flow dynamics of the system. Preliminary results show that the reasoning which allows to predict the system behavior in the deterministic case can be contradicted in presence of stochasticity. Then, by means of the Monte Carlo method, the stochastic averaging procedure is validated. Finally, two quantities are introduced to highlight more precisely the special features of the stochastic system behavior compared to that of the deterministic system. These are the *probability of being in a harmless regime* and the *First-Passage Time to reach a harmful regime* which are computed and investigated combining again the Monte Carlo approach with numerical integrations of the slow flow dynamics. The results obtained show afresh that the stochastic forcing can modify significantly the dynamic behavior of the corresponding deterministic system. Indeed, when they are computed on the latter, the two quantities aforementioned have a discontinuity at the mitigation limit (i.e. the value of the bifurcation parameter under consideration below which the NES acts and above which it no longer acts) revealing an abrupt change of behavior of the coupled system. The paper shows that this typical characteristic of the deterministic system is lost in the presence of stochasticity, the stochastic system becoming smooth at the mitigation limit.

Keywords : Passive vibration control, Non-linear energy sink, Self-sustained oscillations, Stochastic averaging, Stochastic forcing

E.1 Introduction

The non-linear vibration absorbers known as non-linear energy sinks (NESs) are these days well-known devices used for passive mitigation of unwanted oscillations caused by either external, parametric or self-excitations of a mechanical or acoustical primary structure. In general an NES is defined as a non-linear attachment consisting of a light mass (compared to the total mass of the primary structure), an essentially non-linear spring (most of the time purely cubic) and a viscous linear damper. The dependence between the vibratory amplitude and the oscillating frequency of the NES (because of its strongly non-linear nature) makes it able to resonate at any frequency. After tuning to the primary structure and having absorbed and then dissipated its energy, the NES can detune from the primary structure to avoid the return of energy. This irreversible transfer of vibrational energy from the primary system to the NES is called targeted energy transfert (TET) or energy pumping. In their seminal papers [76, 203] Gendelman, Vakakis and al. explain the TET phenomenon by the interaction between two non-linear modes of vibrations of the system producing a $1:1$ resonance capture. Reviews of these concepts can be found in [206] and more recently in [129].

Using an NES to alleviate or even suppress limit cycle oscillations (LCOs) resulting from dynamic instabilities has been extensively studied in the literature in a deterministic framework. Mitigation of LCOs of the Van der Pol oscillator has been studied numerically by Lee and al. in their seminal paper [122] and then theoretically by Gendelman and Bar [75]. This latter work has been extended to a Van der Pol-Duffing oscillator coupled to one NES by Domany and Gendelman [59]. A number of works focused on the problem of mitigation, using one or several NESs, of LCOs due to flutter instabilities in aircraft wings. This problem has been first studied both numerically and experimentally, again by Lee. and al. [121, 123, 124]. The theoretical prediction of observed operating regimes has been performed by means of multiple time scales approaches [78, 131] and improved more recently using the center manifold reduction technique [a2]. Also in the context of

self-oscillations induced by fluid-structure interactions, the mitigation of vortex-induced vibrations caused by the non-linear interaction of a laminar flow and a rigid circular cylinder has been first investigated by Tumkur and al. [201] constructing a two-DOFs reduced-order model and validating it by means of a comparison with a finite-element model. An improved and experimentally validated reduced-order model has been proposed by Dai and al. [47]. On the same issue, a recent theoretical work [39] (i) explains the global dynamics of the system by means a three-DOFs reduced-order model coupling fluid-structure interaction framework with the NES attachment and (ii) identifies, through a parametric study, the optimal operational parameter ranges for an efficient NES design. Concerning aeronautics, the use of NESs to control helicopter ground resonance instability has been studied in [a10, a12]. The use of several NESs to alleviate self-sustained oscillations has been analytically studied by Bergeot and Bellizzi in two papers. First, the use of several parallel NESs attached to a Van der Pol oscillator has been analyzed in [a7]. Then, the prediction of the dynamic behavior of a multi-DOFs mechanical system with only one unstable mode and coupled to a set of NESs has been proposed in [a8] with an application to flutter instability of an airplane wing model. Finally, the possibility of mitigating self-sustained oscillations of a linear friction system having two unstable modes has been studied by Bergeot and al. [a9] by means of a sophisticated multiple time scales analysis allowing the understanding of the phenomena underlying the appearance of the many possible regimes of the system.

Many engineering applications, especially in the context of fluid-structure interaction and aeronautics, involve stochasticity which can have an important influence on the deterministic dynamics. Although that often leads to a better understanding of the dynamics of a mechanical system under more realistic conditions, there are very few papers that study the TET mechanisms taking into account stochasticity. The polynomial chaos approach has been used by Gourdon and Lamarque [84] to analyze the NESs behavior during instationary regimes in a two-DOFs academic system. The goal was to verify the robustness of the TET mechanism when the model has uncertain parameters. In the same vein, Cataldo and al. [35] used the Monte Carlo method to study the energy pumping robustness considering the uncertainties of the parameters of a linear primary structure coupled to an NES. The design optimization of parallel NESs taking into account uncertainties has been performed in [30]. In the context of limit cycles mitigation, Pidaparthi and Missoum [162] performed optimization under uncertainties of an NES used to alleviate limit cycles created by aeroelastic instability in an aircraft wing. Snoun and al. [a17] used a multi-element generalized polynomial chaos based method to predict the dynamic behavior of an uncertain friction system coupled to two non-linear energy sinks. A robust method was proposed to optimize non-linear energy sinks (NES) in the same model in [a17].

In the previous cited works, the stochasticity comes from parametric uncertainties considering that parameters values cannot be known exactly. This approach, however, assumes that for a given realization of the process the parameters are constant. Each realization is therefore deterministic. Another approach consists in investigating the TET taking into account a stochastic time dependent forcing. Even fewer works consider this approach. Schmidt and Lamarque [176] studied a linear one-DOF primary structure coupled to one NES in presence of a white noise forcing by solving numerically the Fokker-Planck equation associated with the stochastic equations of motion of the system. Starosvetsky and Gendelman [189] showed, using numerical simulations, that an NES can produce complete elimination of undesired response of a linear one-DOF system subject to a randomly modulated and narrow-band excitation. A TET problem from a linear medium to a non-linear attachment is studied in the presence of stochasticity by Sapsis and al. [173]. Using a stochastic averaging method, the authors determine the equation of the stochastic slow flow dynamics of the system. Numerical integration of the associated Fokker-Planck equation reveals that the optimal TET regimes, predicted in the deterministic case, are preserved and even enhanced because of the interaction between non-linearity and stochasticity.

In the present paper we consider the problem of mitigation of self-sustained oscillations by means of an NES in presence of stochasticity (in the form of a Gaussian white noise forcing) which, to the knowledge of the author, has not been treated in the literature. The problem is studied using the standard stochastic averaging method [114, 169, 191] to compute the slow flow dynamics of a Van der Pol oscillator undergoing a Gaussian white noise forcing and coupled to an NES. Then two quantities are introduced to highlight the special features of the stochastic system, in comparison with the behavior of the deterministic system. These are the *probability of being in a harmless regime* and the *First-Passage Time to reach a harmful regime* which are studied using the Monte Carlo method [64] combined with numerical simulations of the stochastic slow flow.

The paper is organized as follows. In Section E.2 the equations of motion of the full-order system under study - i.e. a Van der Pol oscillator forced by a stochastic forcing (Gaussian white noise) and coupled to a purely cubic non-linear energy sink - are derived. The standard stochastic averaging method is used in Section G.3 to compute the slow flow dynamics of the full-order system. Section E.4 recalls the typical behavior of the deterministic system (in Section E.4.1) with the aim of highlighting some special features caused by stochasticity (in Section E.4.2). The probability of being in a harmless regime and the First-Passage Time to

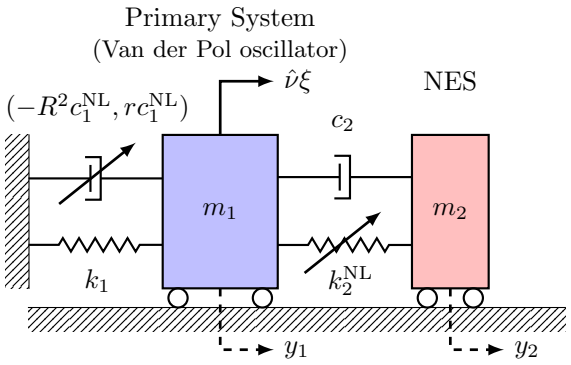


Figure E.1. A Van der Pol oscillator (primary system) with stochastic forcing (Gaussian white noise) $\hat{\nu}\xi$ and coupled to an NES.

reach a harmful regime are defined and then investigated by means of the Monte Carlo method in Sections E.5 and E.6 respectively. Finally, concluding remarks and perspectives are formulated in Section F.8.

E.2 Equations of the model

In this section we derive the equations of motion of the full-order system under study, i.e. a Van der Pol (VdP) oscillator - used as an archetypal self-sustained oscillator - forced by a Gaussian white noise and coupled to an ungrounded purely cubic non-linear energy sink (NES). A schematic representation of this system is depicted in Fig. E.1. The equations of motion of this system are as follows

$$m_1\frac{\mathrm{d}^2y_1}{\mathrm{d}t^2} + c_1^{\mathrm{NL}}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}\left(ry_1^2 - R^2\right) + k_1y_1 + c_2\left(\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}\right) + k_2^{\mathrm{NL}}\left(y_1 - y_2\right)^3 = \hat{\nu}\xi(t) \tag{E.1a}$$

$$m_2\frac{\mathrm{d}^2y_2}{dt^2} + c_2\left(\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}\right) + k_2^{\mathrm{NL}}(y_2 - y_1)^3 = 0 \tag{E.1b}$$

where m_1 and m_2 are the masses of the primary VdP oscillator and of the NES respectively. The parameter k_1 is the linear stiffness of the VdP oscillator and c_1^{NL} and rc_1^{NL} characterize its negative and non-linear dampings respectively. The NES is a purely cubic oscillator characterized by its linear damping coefficient c_2 and non-linear stiffness k_2^{NL}. The term $\xi(t)$ is a unitary idealized white noise process with zero mean, i.e.

$$\mathbb{E}\left[\xi(t)\right] = 0 \quad \text{and} \quad \mathbb{E}\left[\xi(t)\xi(t+\tau)\right] = \delta(\tau) \tag{E.2}$$

where $\hat{\nu}$ is the noise level.

For convenience Eq. (G.8) is rescaled leading to the following dimensionless system of differential equations

$$\ddot{x}_1 + \epsilon\rho\dot{x}\left(rx_1^2 - 1\right) + x_1 + \epsilon\mu\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right) + \epsilon\alpha(x_1 - x_2)^3 = \epsilon\nu\xi(t') \tag{E.3a}$$

$$\epsilon\ddot{x}_2 + \epsilon\mu\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right) + \epsilon\alpha(x_2 - x_1)^3 = 0 \tag{E.3b}$$

where $x_i = y_i/R$ $(i = 1, 2)$, $\omega_1 = \sqrt{k_1/m_1}$, $t' = \omega_1 t$, $\dot{\{\}} = d\{\}/dt'$, $\epsilon = m_2/m_1$ is the mass ratio between the NES and the VdP oscillator, $\rho = c_1^{\mathrm{NL}}R^2/(m_2\omega_1)$, $\mu = c_2/(m_2\omega_1)$, $\alpha = k_2^{\mathrm{NL}}R^2/(m_2\omega_1^2)$ and $\nu = \hat{\nu}/(m_2R\omega_1^{3/2})$. In the latter, the exponent $3/2$ is obtained recalling that a normalized white noise $\xi(t)$ is defined as the time derivative of the normalized Wiener process $W(t')$ and using the *scaling property of Wiener process* (see [153], Chap. 2) which states that $W(t'/\omega_1)$ and $1/\sqrt{\omega_1}W(t')$ are the same stochastic processes. Therefore, we have

$$\begin{aligned}\xi(t) = \frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t} &\sim \omega_1\frac{\mathrm{d}W(\frac{t'}{\omega_1})}{\mathrm{d}t'} \sim \sqrt{\omega_1}\frac{\mathrm{d}W(t')}{\mathrm{d}t'} \\ &= \sqrt{\omega_1}\xi(t')\end{aligned} \tag{E.4}$$

that explains the expression of parameter ν.

Finally, using the change of variable $u_1 = x_1 + \epsilon x_2$ and $u_2 = x_1 - x_2$ the equations of motion (E.3) become

$$\ddot{u}_1 + u_1 - \epsilon\left[\rho\dot{u}_1(ru_1^2 - 1) + u_1 - u_2\right] = \epsilon\nu\xi(t') \tag{E.5a}$$

$$\ddot{u}_2 + \mu\dot{u}_2 + \alpha u_2^3 - \epsilon\left[\rho\dot{u}_1(ru_1^2 - 1) + u_1 - \mu\dot{u}_2 - u_2 - \alpha u_2^3\right] = \epsilon\nu\xi(t') \tag{E.5b}$$

in which a first order Taylor expansion around $\epsilon = 0$ has been performed assuming a small mass ratio between the NES and the primary oscillator (i.e. $0 < \epsilon \ll 1$).

In the next sections, the time t' is denoted by t for the sake of conciseness.

E.3 The stochastic slow flow dynamics

The standard stochastic averaging method [169, 191], whose general formulation is recalled in Appendix G.8, is used in this section to obtain the equations governing the stochastic slow flow dynamics of Eq. (E.5).

TET is due to the interaction between two non-linear modes of the coupled structure [76, 203]. This phenomenon, called a $1:1$ resonance capture, occurs at a frequency close to the natural frequency of the primary structure, here the VdP oscillator. It is customary to study the dynamic behavior of the system in the neighborhood of this $1:1$ resonance capture. Then, the system is simplified by averaging it over a natural period of the primary structure using the Krylov-Bogolyubov averaged approximation (see e.g. [145]). The resulting averaged dynamics is called slow flow. In general, in the context of NES studies, the complexification-averaging method [135, 206] is used. Here a real amplitude-angle representation (completely equivalent to the latter) is preferred by stating

$$u_1 = a_1\cos(t + \varphi_1) \tag{E.6a}$$

$$\dot{u}_1 = -a_1\sin(t + \varphi_1) \tag{E.6b}$$

and

$$u_2 = a_2\cos(t + \varphi_2) \tag{E.7a}$$

$$\dot{u}_2 = -a_2\sin(t + \varphi_2)\,. \tag{E.7b}$$

The imposed forms of Eqs. (E.6b) and (E.7b) require that

$$\dot{a}_1\cos\phi_1 - a_1\dot{\varphi}_1\sin\phi_1 = 0, \tag{E.8}$$

and

$$\dot{a}_2\cos\phi_2 - a_2\dot{\varphi}_2\sin\phi_2 = 0, \tag{E.9}$$

with

$$\phi_1 = t + \varphi_1 \quad \text{and} \quad \phi_2 = t + \varphi_2 \tag{E.10}$$

that leads to

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{\dot{a}_1}{a_1}\frac{\cos\phi_1}{\sin\phi_1}, \quad \dot{a}_1 = a_1\dot{\varphi}_1\frac{\sin\phi_1}{\cos\phi_1}, \tag{E.11a}$$

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{\dot{a}_2}{a_2}\frac{\cos\phi_2}{\sin\phi_2} \quad \text{and} \quad \dot{a}_2 = a_2\dot{\varphi}_2\frac{\sin\phi_2}{\cos\phi_2}. \tag{E.11b}$$

Then differentiation of Eqs. (E.6b) and (E.7b) yields

$$\ddot{u}_1 = -a_1\cos\phi_1 - \dot{a}_1\sin\phi_1 - a_1\dot{\varphi}_1\cos\phi_1. \tag{E.12}$$

and

$$\ddot{u}_2 = -a_2\cos\phi_2 - \dot{a}_2\sin\phi_2 - a_2\dot{\varphi}_2\cos\phi_2. \tag{E.13}$$

The substitution of Eqs. (E.6), (E.7), (E.12) and (E.13) into Eq. (E.5) and the use of Eq. (E.11) leads to the following $(2,2)$-fast-slow non-autonomous system of stochastic differential equations

$$\dot{a}_1 = \epsilon f_1(a_1, \varphi_1, a_2, \varphi_2, t) - \epsilon\nu\xi\sin\phi_1 \tag{E.14a}$$

$$\dot{\varphi}_1 = \epsilon f_2(a_1, \varphi_1, a_2, \varphi_2, t) - \epsilon\nu\xi\frac{\cos\phi_1}{a_1} \tag{E.14b}$$

$$\dot{a}_2 = f_3(a_1, \varphi_1, a_2, \varphi_2, t, \epsilon) - \epsilon\nu\xi \sin\phi_2 \tag{E.14c}$$

$$\dot{\varphi}_2 = f_4(a_1, \varphi_1, a_2, \varphi_2, t, \epsilon) - \epsilon\nu\xi \frac{\cos\phi_2}{a_2} \tag{E.14d}$$

where the expressions of the functions f_1, f_2, f_3 and f_4 are given in Appendix E.8.

The terms of order $\mathcal{O}(\epsilon)$ are neglected in the equations of the fast variables (i.e. Eqs. (E.14c) and (E.14d)), that leads to

$$\dot{a}_1 = \epsilon f_1(a_1, \varphi_1, a_2, \varphi_2, t) - \epsilon\nu\xi \sin\phi_1 \tag{E.15a}$$

$$\dot{\varphi}_1 = \epsilon f_2(a_1, \varphi_1, a_2, \varphi_2, t) - \epsilon\nu\xi \frac{\cos\phi_1}{a_1} \tag{E.15b}$$

$$\dot{a}_2 = f_3(a_1, \varphi_1, a_2, \varphi_2, t, 0) \tag{E.15c}$$

$$\dot{\varphi}_2 = f_4(a_1, \varphi_1, a_2, \varphi_2, t, 0) \tag{E.15d}$$

which has a similar form as (G.70) with

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= (a_1, \varphi_1, a_2, \varphi_2)^T \\
\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) &= \begin{pmatrix} \epsilon f_1(a_1, \varphi_1, a_2, \varphi_2, t) \\ \epsilon f_2(a_1, \varphi_1, a_2, \varphi_2, t) \\ f_3(a_1, \varphi_1, a_2, \varphi_2, t, 0) \\ f_4(a_1, \varphi_1, a_2, \varphi_2, t, 0) \end{pmatrix}, \\
\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) &= \epsilon\nu \begin{pmatrix} -\sin\phi_1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\cos\phi_1}{a_1} \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{\eta} &= (\xi, \xi, \xi, \xi)^T
\end{aligned} \tag{E.16}$$

where $()^T$ denotes the transpose operator.

Following the standard stochastic averaging method described in Appendix G.8, the drift vector $\mathbf{m}$ (see Eq. (G.72)) is first computed. The first term corresponds to classical (deterministic) Krylov-Bogolyubov averaging of the vector function $\mathbf{f}$, here over one period equal to 2π. This term is written as follows

$$M^{\text{av}}\{\mathbf{f}\} = \begin{pmatrix} \epsilon\hat{f}_1(a_1, a_2, \varphi) \\ \epsilon\hat{f}_2(a_1, a_2, \varphi) \\ \hat{f}_3(a_1, a_2, \varphi) \\ \hat{f}_4(a_1, a_2, \varphi) \end{pmatrix} \tag{E.17}$$

where $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ and

$$\hat{f}_1(a_1, a_2, \varphi) = \frac{1}{8}\left(4a_2 \sin(\varphi) - a_1\left(ra_1^2 - 4\right)\rho\right) \tag{E.18}$$

$$\hat{f}_2(a_1, a_2, \varphi) = \frac{1}{2}\left(\frac{a_2\cos(\varphi)}{a_1} - 1\right) \tag{E.19}$$

$$\hat{f}_3(a_1, a_2, \varphi) = \frac{1}{8}\left(-4a_2\mu - 4a_1\sin(\varphi)\right) \tag{E.20}$$

$$\hat{f}_4(a_1, a_2, \varphi) = \frac{3\alpha a_2^3 + 4a_1\cos(\varphi) - 4a_2}{8a_2} \tag{E.21}$$

Then the second part of the drift vector $\mathbf{m}$ (see again Eq. (G.72)) is determined as

$$\begin{aligned}
&M^{\text{av}}\left\{\int_{-\infty}^{0} \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial(\mathbf{g}\boldsymbol{\eta})}{\partial\mathbf{x}}\right)_t (\mathbf{g}\boldsymbol{\eta})_{t+s}\right] ds\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{t_0}^{t_0+2\pi}\int_{-\infty}^{0} \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial(\mathbf{g}\boldsymbol{\eta})}{\partial\mathbf{x}}\right)_t (\mathbf{g}\boldsymbol{\eta})_{t+s}\right] ds dt \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\epsilon^2\nu^2}{2a_1}\int_{-\infty}^{0}\delta(s)\cos(s)ds \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{E.22}$$

in which the symbol $\mathbb{E}\,[]$ has been removed by means of Eq. (G.8). Because

$$\int_{-\infty}^{0} \delta(s)\cos(s)ds = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(s)\cos(s)ds = \frac{1}{2} \tag{E.23}$$

the final expression of the drift vector is obtained as

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} \epsilon\hat{f}_1(a_1,a_2,\varphi) + \dfrac{\epsilon^2\nu^2}{4a_1} \\ \epsilon\hat{f}_2(a_1,a_2,\varphi) \\ \hat{f}_3(a_1,a_2,\varphi) \\ \hat{f}_4(a_1,a_2,\varphi) \end{pmatrix}. \tag{E.24}$$

The expression of the diffusion matrix $\boldsymbol{\sigma}$ is now determined from (G.73). First, $\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^T$ is computed as follows

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^T &= M^{\text{av}}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}\left[(\mathbf{g}\boldsymbol{\eta})_t(\mathbf{g}\boldsymbol{\eta})_{t+s}^T\right] ds\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{t_0}^{t_0+2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}\left[(\mathbf{g}\boldsymbol{\eta})_t(\mathbf{g}\boldsymbol{\eta})_{t+s}^T\right] dsdt \\ &= \epsilon^2\nu^2\int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \frac{\delta(s)\cos(s)}{2} & -\frac{\delta(s)\sin(s)}{2a_1} \\ \frac{\delta(s)\sin(s)}{2a_1} & \frac{\delta(s)\cos(s)}{2a_1^2} \end{pmatrix} ds \\ &= \epsilon^2\nu^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{E.25}$$

Therefore, from (G.24) a possible solution of (G.73) is

$$\boldsymbol{\sigma} = \epsilon\nu \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_1\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{E.26}$$

According to (G.71) the equations governing the stochastic slow dynamics of (E.5) are

$$\dot{a}_1 = \epsilon\hat{f}_1(a_1,a_2,\varphi) + \frac{\epsilon^2\nu^2}{4a_1} + \frac{\epsilon\nu}{\sqrt{2}}\xi(t) \tag{E.27a}$$

$$\dot{\varphi}_1 = \epsilon\hat{f}_2(a_1,a_2,\varphi) + \frac{\epsilon\nu}{a_1\sqrt{2}}\xi(t) \tag{E.27b}$$

$$\dot{a}_2 = \hat{f}_3(a_1,a_2,\varphi) \tag{E.27c}$$

$$\dot{\varphi}_2 = \hat{f}_4(a_1,a_2,\varphi) \tag{E.27d}$$

The final form of the stochastic slow flow is obtained by combining Eqs. (E.27b) and (E.27d), that leads to

$$\dot{a}_1 = \epsilon f(a_1,a_2,\varphi) + \epsilon\sigma\xi(t) \tag{E.28a}$$

$$\dot{a}_2 = g_1(a_1,a_2,\varphi) \tag{E.28b}$$

$$\dot{\varphi} = g_2(a_1,a_2,\varphi) \tag{E.28c}$$

where $f = \hat{f}_1$, $g_1 = \hat{f}_3$, $\sigma = \frac{\nu}{\sqrt{2}}$ and the term $\frac{\epsilon^2\nu^2}{4a_1}$ (of order $\mathcal{O}(\epsilon^2)$) has been neglected in Eq. (E.28a). The difference between Eqs. (E.27b) and (E.27d) should yield $\epsilon\hat{f}_2(a_1,a_2,\varphi) + \frac{\epsilon\nu}{a_1\sqrt{2}}\xi - \hat{f}_4(a_1,a_2,\varphi)$ as the right-hand side of Eq. (E.28c). However, the terms of order $\mathcal{O}(\epsilon)$ are neglected, one has therefore only $g_2 = -\hat{f}_4(a_1,a_2,\varphi)$ remains. Eq. (E.28) appears as a stochastic $(2,1)$-fast-slow system where a_2 and φ are the fast variables and a_1 is the slow variable on which the noise acts.

A key mathematical tool for the description of a fast-slow system such as Eq. (E.28) is its critical manifold. The latter is defined in this section. First, the slow flow (E.28) is written with respect to the slow time $\tau = \epsilon t$ as follows

$$a_1' = f(a_1, a_2, \varphi) + \sqrt{\epsilon}\sigma\xi(\tau) \tag{E.29a}$$
$$\epsilon a_2' = g_1(a_1, a_2, \varphi) \tag{E.29b}$$
$$\epsilon\varphi' = g_2(a_1, a_2, \varphi) \tag{E.29c}$$

where $(.)'$ denotes the derivative with respect to the slow time τ. Again the scaling property of the Wiener process has been used, i.e. $\xi(t) = \sqrt{\epsilon}\xi(\tau)$. Considering $\epsilon = 0$ respectively in Eqs. (E.28) and (E.29) yields the *slow subsystem*

$$a_1' = f(a_1, a_2, \varphi) \tag{E.30a}$$
$$0 = g_1(a_1, a_2, \varphi) \tag{E.30b}$$
$$0 = g_2(a_1, a_2, \varphi), \tag{E.30c}$$

which is a differential-algebraic equation, and the *fast subsystem*

$$\dot{a}_1 = 0 \tag{E.31a}$$
$$\dot{a}_2 = g_1(a_1, a_2, \varphi) \tag{E.31b}$$
$$\dot{\varphi} = g_2(a_1, a_2, \varphi). \tag{E.31c}$$

The critical manifold of the slow flow is the solution of the algebraic part of Eq. (E.30) and it is expressed as follows

$$\mathcal{M}_0 = \Big\{ (a_1, a_2, \varphi) \in \mathbb{R}^{+^2} \times [-\pi, \pi] \,\Big|\, g_1(a_1, a_2, \varphi) = 0 \text{ and } g_2(a_1, a_2, \varphi) = 0 \Big\}. \tag{E.32}$$

Note that because of the assumptions made (i.e. a noise which acts only on the primary structure with a level of the order $\mathcal{O}(\epsilon)$), the effect of the noise on the fast variables a_2 and φ has been neglected. Consequently both slow and fast subsystems are deterministic. This has two major consequences. First, the critical manifold is deterministic too and it can therefore be obtained with the usual approach (the classical analysis of the deterministic slow flow including the computation of the critical manifold is recalled in Appendix E.10). Then, it means that the role of the noise cannot be investigated within the zeroth-order approximation, i.e. within the limit case in which the perturbation parameter ϵ is equal to zero, as it is usually done in the context of NES studies.

E.4 Problem statement and preliminary results

In this section we first recall in Section E.4.1 how the deterministic system behaves using both numerical simulations of the deterministic slow flow (i.e. Eq. (E.29) with $\sigma = 0$) and the classical analytical results presented in Appendix E.10. Then, in Section E.4.2, the comparison with numerical integration of the stochastic slow flow (E.29) (using the function `ItoProcess` of Mathematica software [216]) allows us to highlight the influence of noise on the system behavior.

E.4.1 Reminder of the deterministic behavior of the system

The slow-fast nature of the slow flow implies that it evolves at two time scales : the slow time scale τ in which the slow flow is on the critical manifold and approximatively described by the slow subsystem (E.30) and the fast time scale t in which the slow flow is outside the critical manifold and described by the fast subsystem (E.31). The particular S-shape of the critical manifold (see Fig. E.9) together with the stability analysis of the fixed points of the slow flow allows to explain and predict its different responses and consequently those of the full-order system. Four scenarios are possible and in previous works by the authors [a7, a8] these responses are classified into two categories called *harmless situations* and *harmful situations*. In harmless situations, the NES acts, resulting in three possible responses. The first scenario is called *Complete suppression*. In this case the trivial fixed point of the slow flow is stable and then reached. This is a linear effect of the NES and, in the context of non-linear vibrations absorption, the complete suppression is not the desired effect. The second possible regime is called *mitigation through periodic responses (PRs)*. This corresponds to the situation in which a nontrivial stable fixed point of the slow flow is reached leading to a periodic regime for the initial full-order system. The last harmless situations correspond to *mitigation through Strongly Modulated Responses (SMRs)*. SMRs are quasi-periodic regimes (amplitude and phase modulated) of the full-order system

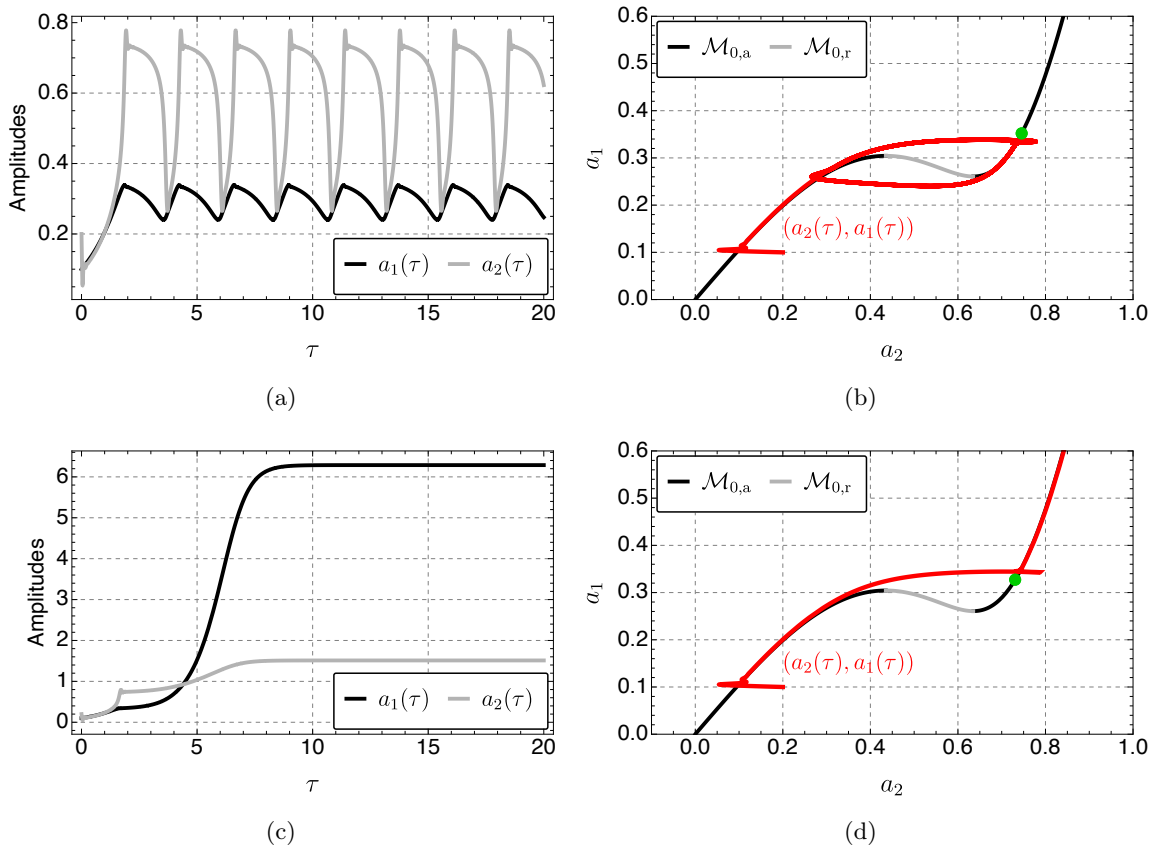


Figure E.2. Transition from relaxation oscillations scenario (Figs. E.2(a) and E.2(c)) to no mitigation scenario (Figs. E.2(b) and E.2(d)). The top figures show the times series (obtained from numerical integration of the deterministic slow flow, i.e. Eq. (E.29) with $\sigma = 0$) of the amplitudes a_1 (solid black lines) and a_2 (solid gray lines) at the slow time scale τ and the bottom figures show the comparison between the trajectory of the slow flow (solid red lines) and the critical manifold (E.32) in the (a_2, a_1)-plane. The following set of parameters is used : $r = 0.1$, $\epsilon = 0.01$, $\mu = 0.4$, $\alpha = 3$ and $\rho = 1.8$ in (a) and (c) and $\rho = 2$ in (b) and (d).

corresponding to relaxations oscillations of the slow flow. There is only one type of harmful situations for which the NES is not able to produce small amplitude responses. In this case, a limit cycle with an amplitude close to that of the Van der Pol oscillator alone is observed.

In general, the transition from harmless to harmful situations corresponds to the transition from an SMR to a no mitigation regime. This transition is illustrated in Fig. E.2 : Figs. E.2(a) and E.2(c) show a relaxations oscillation scenario and Figs. E.2(b) and E.2(d) show a no mitigation scenario. The top figures depict the times series of the amplitude a_1 and a_2 at the slow time scale τ and the bottom figures depict the comparison between the trajectory of the slow flow and the critical manifold (E.32) in the (a_2, a_1)-plane. In the latter (see Figs. E.2(c) and E.2(d)), in both relaxation oscillations and no mitigation scenarios, from an initial condition near zero and outside the critical manifold, the trajectory of the slow flow evolves rapidly and almost horizontally to the left attracting branch of $\mathcal{M}_0$. During this fast epoch the slow flow dynamics is approximatively described by the fast subsystem (E.31). Then, the slow flow evolves slowly close to this branch. During this slow epoch the slow flow dynamics is now approximatively described by the slow subsystem (E.30). If the trajectory does not meet a stable fixed point [1], the trajectory goes toward the left fold point $(a_2^{\mathrm{LF}}, a_1^{\mathrm{LF}})$ at which $\mathcal{M}_0$ becomes repelling (see Eqs. (E.49), (E.51) and (E.52)).

Remark. When the full-order system passes from a PR to an SMR (i.e. when the slow flow passes from a reached stable fixed point to stable relaxation oscillations) *folded singularities* can appear. The latter are points for which fold and fixed points of the slow flow coincide and are hints of particular solutions of fast-slow systems, called *canards* (see e.g. [54] for rigorous mathematical definitions of these concepts). In general, canard solutions appear for a very small range of the bifurcation parameter and are not investigated in this

1. If this is the case the trajectory stops and a mitigation through a PR is observed.

paper.

The zeroth-order approximation assumes that the left fold point is actually reached. However numerical simulations show that when approaching the left fold point the trajectory deviates slightly from the critical manifold (this behavior is analytically described in [a2]). Then the slow flow undergoes a fast and nearly horizontal jump to the right attracting part of $\mathcal{M}_0$ on a point called *arrival point*[2]. This is where the two scenarios differ. In the case of relaxation oscillations the largest unstable fixed point of the slow flow (depicted by a green bullet on the figures) is above the arrival point and prevents the trajectory from reaching the stable fixed point located higher on the critical manifold. This fixed point is not depicted on Figs. E.2(c) and E.2(d), its coordinates in the (a_2, a_1)-plane are $(1.51, 6.28)$. If this fixed point is reached the system undergoes a no mitigation regime. This is what happens when the largest unstable fixed point of the slow flow is below the arrival point (see Fig. E.2(d)). The end of the scenario of relaxation oscillations is as follows (see Fig. E.2(c)) : from the arrival point a second slow epoch occurs in which the trajectory goes toward the right fold point $(a_2^{\mathrm{RF}}, a_1^{\mathrm{RF}})$. A second nearly horizontal jump occurs and the trajectory returns to the left attracting part of $\mathcal{M}_0$. A third slow epoch on $\mathcal{M}_0$ towards $(a_2^{\mathrm{LF}}, a_1^{\mathrm{LF}})$ is observed, and so on.

Then the **mitigation limit**, defined below, is introduced to quantify the NES efficiency.

> **Definition E.1 (Mitigation limit).** Considering a set of initial conditions (for the slow flow) as a small perturbation of the trivial solution, the **mitigation limit** is defined as the value of the bifurcation parameter ρ which separates harmless situations from the harmful situation.

For the set of parameters used in Fig. E.2, using numerical simulations of the slow flow we find a mitigation limit equal to $\rho_{\mathrm{ml}} = 1.9$. The numerical simulations of the deterministic full-order system (i.e. Eq. (E.5) with $\nu = 0$) give $\rho_{\mathrm{ml}} = 1.86$.

In the deterministic case the mitigation limit can be predicted analytically by means of a slow-fast partition of the slow flow dynamics [a2, 75].

E.4.2 Influence of noise on the system behavior

In this section we highlight how noise affects the system behavior and more precisely how it influences the mitigation limit. For this purpose, we show in Fig. E.3 the result of the numerical simulations of the stochastic slow flow (E.29) using the same parameters as in Section E.4.1 with, in addition, $\sigma = 0.5$.

In Figs. E.3(a), E.3(b), E.3(e) and E.3(f), two samples are shown for $\rho = 1.8$, a value of the bifurcation parameter smaller than the mitigation limit $\rho_{\mathrm{ml}} = 1.9$. Therefore, in the deterministic case, we observe persistent relaxation oscillations (see Figs. E.2(a) and E.2(c)). In the deterministic case all cycles of relaxation oscillations are equivalent, whereas in the stochastic case the trajectory of the slow flow is, due to the presence of noise, slightly different at each cycle. The two samples depicted in the figures show that persistent relaxation oscillations can still occur. We can see in Fig. E.3(e) that over the 8 cycles observed (see Fig. E.3(a)), 7 correspond to a scenario similar to the deterministic case (i.e. the arrival point on the right attracting part of of $\mathcal{M}_0$ is below the largest fixed point of the deterministic slow flow). There is however one cycle where the arrival point is above the fixed point and where the trajectory still descends towards the right fold point instead of ascending towards the stable fixed point. For the second sample (see Figs. E.3(b) and E.3(f)) it is the contrary. Indeed, we observe one and a half cycle, and halfway through the second we see that even if the arrival point is below the unstable fixed point the trajectory ascends towards the stable fixed point and a no mitigation regime finally occurs.

In Figs. E.3(c), E.3(d), E.3(g) and E.3(h) two samples are depicted for $\rho = 2$, a value of the bifurcation parameter larger than the mitigation limit $\rho_{\mathrm{ml}} = 1.9$. Consequently, in the deterministic case, we observe a no mitigation regime (see Figs. E.2(b) and E.2(d)). The first sample (see Figs. E.3(c) and E.3(g)) shows that during the first cycle, the noise prevents the trajectory from reaching the stable fixed point corresponding to the no mitigation regime, which is finally reached in the second cycle. In this example, at each cycle the regime actually reached can be deduced in a similar way as in deterministic case comparing the relative position of the arrival point and the largest unstable fixed point. However, as in the previous example for $\rho = 1.8$, this reasoning can be contradicted in a positive way (favoring the relaxation oscillations) or in a negative way (favoring the no mitigation regimes). For example, in the second sample (see Figs. E.3(d) and E.3(h)) we can see that during the first cycle, the arrival point is above the largest fixed point but the trajectory still descends towards the right fold point.

2. The zeroth-order approximation supposes that the arrival point is $(a_2^{\mathrm{U}}, a_1^{\mathrm{LF}})$ (see Eqs. (E.53) and (E.9)). In fact, the arrival point is slightly higher on the critical manifold [a2].

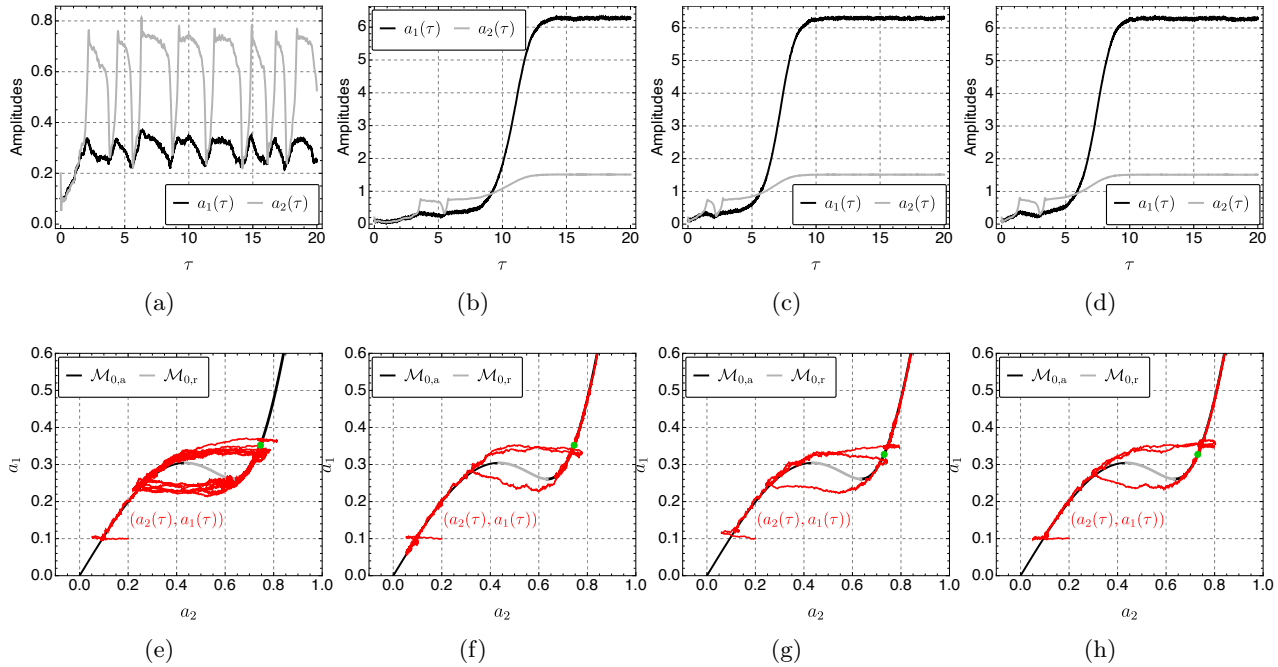


Figure E.3. Numerical simulations of the stochastic slow flow (E.29) using the same parameters as in Section E.4.1 with, in addition, $\sigma = 0.5$. In Figs. E.3(a), E.3(b), E.3(e) and E.3(f) (resp. Figs. E.3(c), E.3(d), E.3(g) and E.3(h)) two samples are shown for $\rho = 1.8$ (resp. $\rho = 2$). Figs. E.3(a), E.3(b), E.3(c) and E.3(d) show the time series of a_1 (black lines) and a_2 (gray lines) and Figs. E.3(e), E.3(f), E.3(g) and E.3(h) show the trajectory (red lines) of the slow flow and the critical manifold $\mathcal{M}_0$ (gray and black lines) in the (a_1, a_2)-plane.

The previous preliminary results confirm that the effect of the noise cannot be only studied with the zeroth-order approximation. Indeed, as in the deterministic case the trajectory of the slow flow dynamics moves away from the critical manifold when it passes near the left fold point [a2, cn1]. The zeroth-order approximation [75] assumed that the trajectory goes along the critical manifold and reaches the left jump before jumping to the right attractive part of the critical manifold. However, in the deterministic case the zeroth-order approximation is sufficient to describe the slow epochs of the slow flow except in the neighborhood of the left fold points. Combining the center manifold reduction technique to describe the the slow flow dynamics near the left fold point and the zeroth-order approximation elsewhere, and following the reasoning described in Section E.4.1, allows an accurate prediction of the mitigation limit [a2]. Here, in the stochastic case, the latter reasoning can be wrong to predict the actual regime and therefore the mitigation limit. That means that the noise acts at the slow time scale in contradiction with the zeroth-order approximation (see Eqs. (E.30) E.31 and the comments below).

In the next sections the Monte Carlo method is used to study the effect of the noise on the dynamic behavior of the system in a more systematic way. To achieve that, two quantities are introduced : (i) the *probability of being in a harmless regime* and (ii) the *First-Passage Time to reach a harmful regimes.*

E.5 Probability of being in a harmless regime

Definition E.2 (The probability of being in a harmless regime). The probability of being in a harmless regime (PBHR), denoted by $p_{\mathrm{h},n}$, is, as its name suggests, the probability for the system of being in a harmless regime after a given number n of full cycles of relaxation oscillations.

For instance, in the case shown in Figs. E.3(b) and E.3(f), the trajectory of the slow flow ascends towards the stable fixed point (to reach a no mitigation regime) halfway through the second cycle of relaxation oscillations, therefore after one full cycle. In practice, $p_{\mathrm{h},n}$ is computed as the proportion of samples for which we observe at least $n+1$ consecutive full cycles of relaxation oscillations from the beginning of the sample. For example, if 4 samples are computed and we observe : 1 full cycle in the first sample (as in Figs. E.3(b), E.3(c) a,d E.3(d)), 0 full cycle in the second sample (as in the deterministic case shown in Fig. E.2(b)) and 3 and 2

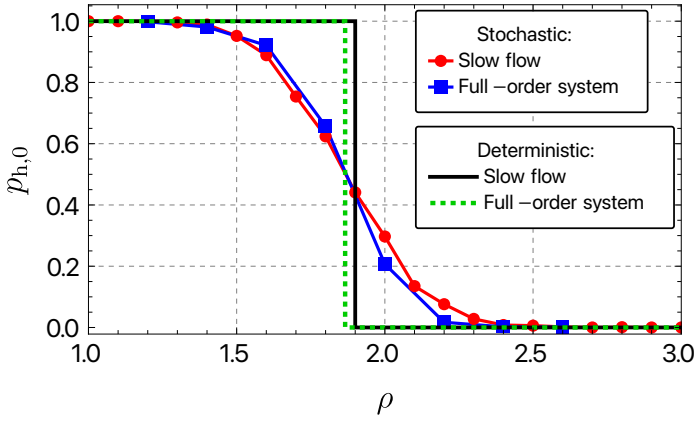


Figure E.4. Probabilities $p_{h,0}$ as functions of ρ obtained from 1000 samples of the slow flow (E.29) (blue squares) and 1000 samples of the full order system (E.14) (red bullets) and for several values of the bifurcation parameter ρ. The deterministic cases (green dashed line for the slow flow and black line for the full-order system) are also represented. The same parameters as in Section E.4.1 are used with, in addition, $\sigma = 0.5$.

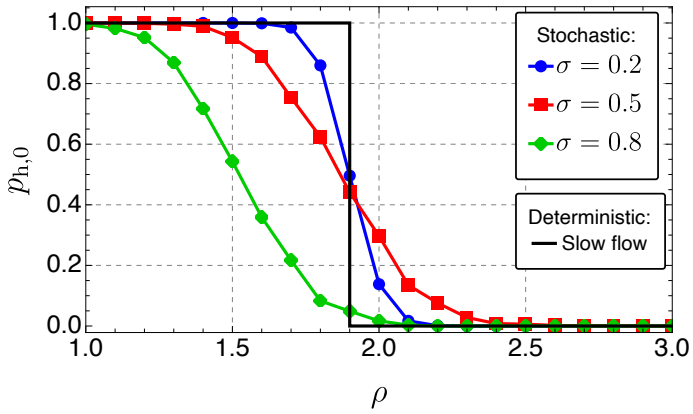


Figure E.5. Probabilities $p_{h,0}$ as functions of ρ for three different values of the noise level, i.e. $\sigma = 0.2$ (blue bullets), $\sigma = 0.5$ (red squares) and $\sigma = 0.8$ (green diamonds) and for the same parameters as in Section E.4.1.

full cycles in the third and fourth samples respectively, then the corresponding PBHR are $p_{h,0} = \frac{3}{4}$, $p_{h,1} = \frac{2}{4}$, $p_{h,2} = \frac{1}{4}$ and $p_{h,n} = 0$ for $n \geq 3$.

Fig. E.4 shows the PBHR $p_{h,0}$ obtained from 1000 samples of the slow flow (E.29) and 1000 samples of the full-order system (E.14) and for several values of the bifurcation parameter ρ. The deterministic cases for which $p_{h,0} = 1$ if $\rho < \rho_{ml}$ and $p_{h,0} = 0$ if $\rho > \rho_{ml}$ are also represented (remember that $\rho_{ml} = 1.86$ for the full order system and $\rho_{ml} = 1.9$ for the slow flow). The same parameters as in Section E.4.1 are used with, in addition, $\sigma = 0.5$.

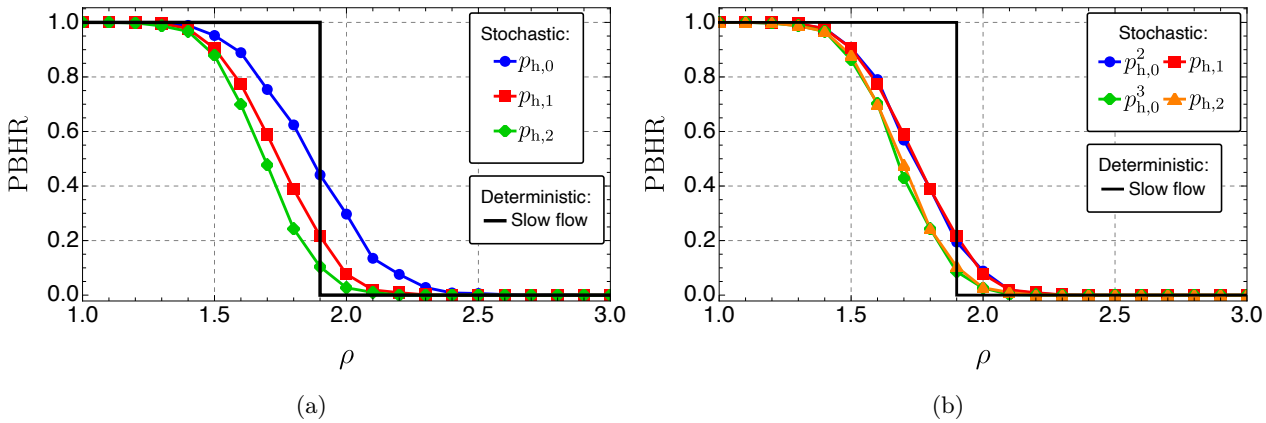
First, the figure validates the stochastic averaging procedure. Therefore, in the remaining of the paper, only the slow flow will be used, which allows us to perform the Monte Carlo method with a reasonable computational cost. Indeed with the full-order system, the convergence of the numerical results is obtained with a very small time step, which is highly expensive in terms of computing time.

Then we can see that the step shape observed in the deterministic case, turns into an error function shape in the stochastic case, with $p_{h,0}$ tending to 1 when $\rho \ll \rho_{ml}$ and to 0 when $\rho \gg \rho_{ml}$.

Fig. E.5 plots $p_{h,0}$ for three different values of the noise level, i.e. $\sigma = 0.2$, $\sigma = 0.5$ and $\sigma = 0.8$. As expected, the lower the noise level is, the closer of the deterministic case the system behavior is.

Finally, in Fig. E.6 we can see the comparison between $p_{h,0}$, $p_{h,1}$ and $p_{h,2}$. First, as expected, we have $p_{h,2} < p_{h,1} < p_{h,0}$ (see Fig. E.6(a)). Then, we observe that $p_{h,1} \approx p_{h,0}^2$ and $p_{h,2} \approx p_{h,0}^3 \approx p_{h,0}p_{h,1}$ (see Fig. E.6(b)). From these numerical results (and others not shown here) the following generalization is proposed :

$$p_{h,n} \approx \prod_{i=0}^{n-1} p_{h,i} \approx p_{h,0}^{n+1}. \tag{E.33}$$



(a) (b)

Figure E.6. (a) Comparison between $p_{h,0}$ (blue bullets), $p_{h,1}$ (red squares) and $p_{h,2}$ (green diamonds) as functions of the bifurcation parameter ρ. (b) Comparison between $p^2_{h,0}$ (blue bullets), $p_{h,1}$ (red squares), and comparison between $p^3_{h,0}$ (green diamonds) and $p_{h,2}$ (orange triangles). In each figure the deterministic cases (black line) is also represented. The same parameters as in Section E.4.1 are used with, in addition, $\sigma = 0.5$.

This result highlights that at each cycle of relaxation oscillations the probability of being in a harmless regime is independent of the past trajectory of the system (we verified that this also true for the full-order system) and it is equal to $p_{h,0}$.

The PBHR quantifies, in terms of probability, one of the results previously obtained in Section E.4.2, namely the fact that no mitigation (resp. mitigation) regimes may occur even if the $\rho < \rho_{ml}$ (resp. $\rho > \rho_{ml}$). It is interesting to know the probability to be in a harmless regime after a given number of cycles of relaxation oscillations as the value of $p_{h,n}$ tells us. However, the time spent in a harmless regime, i.e. the time the system is safe, is also interesting from an engineering point of view. This is quantified in the next section by computing the *First-Passage Time Density to reach a harmful regime*.

E.6 First-Passage Time to reach a harmful regime

Let us denote by $(a_1^e, a_2^e, \varphi^e)$ the coordinates of the largest stable fixed point of the deterministic slow flow. Remember that if the trajectory of the slow flow reaches the fixed point the system is in a no mitigation (i.e. harmful) regime (see Section E.4.1). Then, we choose that the system is safe as long as $a_1 < a_1^{th} = 0.5a_1^e$. This choice is arbitrary, it may change depending of the unstable primary structure studied. Next, the First-Passage Time to reach a harmful regime is defined below.

Definition E.3 (First-Passage Time to reach a harmful regime). If the process starts at $a_1(0) = a_{1,0}$, the first time it reaches the value of the threshold a_1^{th} is called the First-Passage Time to reach a Harmful Regime (FPTHR) and it is denoted by T.

At the slow time scale τ and from the previous definition, the probability $\Pr(\tau < T)$ that $\tau < T$ is the probability $\Pr(a_1 < a_1^{th})$ that $a_1 < a_1^{th}$. Therefore, one also has

$$\Pr(T < \tau) = \Pr(a_1 > a_1^{th}) := P(\tau). \tag{E.34}$$

Consequently, the probability that the FPTHR T is between the actuel time τ and $\tau + d\tau$ is $R(\tau)d\tau$ where

$$R(\tau) = \frac{dP(\tau)}{d\tau} \tag{E.35}$$

is the First-Passage Time to reach a Harmful Regime Density (FPTHRD).

The Mean First-Passage Time to reach a Harmful Regime (MFPTHR) denoted by $\mathbb{E}[T]$ is also defined as

$$\mathbb{E}[T] = \int_0^\infty \tau R(\tau) d\tau. \tag{E.36}$$

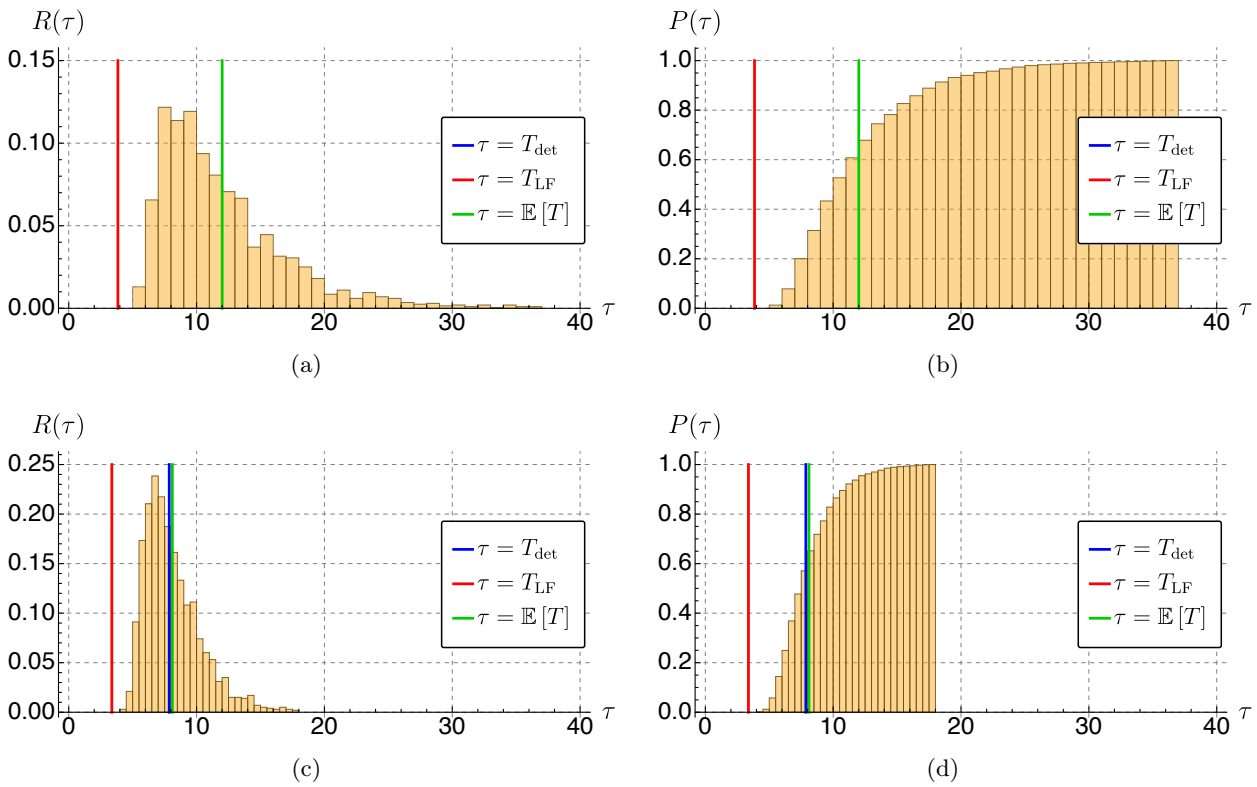


Figure E.7. Histograms representing $R(\tau)$ (Figs. E.7(a) and E.7(c)) and $P(\tau)$ (Figs. E.7(b) and E.7(d)). Vertical lines of equations $\tau = T_{\text{det}}$ (blue lines), $\tau = T_{\text{LF}}$ (red lines) and $\tau = \mathbb{E}[T]$ (green lines) are also represented. The same parameters as in Section E.4.2 are used with $\rho = 1.8 < \rho_{\text{ml}}$ (Figs. E.7(a) and E.7(b)) and $\rho = 2 > \rho_{\text{ml}}$ (Figs. E.7(c) ans E.7(d)).

In practice, 2000 samples of Eq. (E.29) are computed. On each sample, the FPTHR is measured as the first value of the time τ for which $a_1(\tau) > a_1^{\text{th}}$. We obtain therefore a list of 2000 values the FPTHR and from it $R(\tau)$, $P(\tau)$ (as histograms) and $\mathbb{E}[T]$ are evaluated.

The Deterministic Passage Time to reach a Harmful Regime (DPTHR), denoted by T_{det}, is defined as the first time $a_1(\tau)$, obtained from the numerical integration of Eq. (E.29) for $\sigma = 0$ and $a_1(0) = a_{1,0}$, reaches the threshold a_1^{th}. For given initial conditions, T_{det} has a unique finite value if $\rho > \rho_{\text{ml}}$ and tends to infinity if $\rho < \rho_{\text{ml}}$ (i.e. the deterministic system never reaches the threshold a_1^{th}).

Finally, for comparison purposes, a characteristic time is needed. We choose the time, denoted by T_{LF}, at which the deterministic system reaches the neighborhood of the left fold point of the critical manifold (i.e. when $a_1(\tau) = a_1^{\text{LF}}$, obtained from the numerical integration of Eq. (E.29) for $\sigma = 0$ and $a_1(0) = a_{1,0}$, reaches a_1^{LF}).

Examples of histograms representing $R(\tau)$ and $P(\tau)$ are shown in Fig. E.8 (on the left and the right respectively). The same parameters are used as in Section E.4.2 with $\rho = 1.8 < \rho_{\text{ml}}$ (see Figs. E.7(a) and E.7(b)) and $\rho = 2 > \rho_{\text{ml}}$ (see Figs. E.7(c) ans E.7(d)). Vertical lines of equations $\tau = T_{\text{det}}$, $\tau = T_{\text{LF}}$ and $\tau = \mathbb{E}[T]$ are also represented. In Figs. E.7(a) and E.7(b) the deterministic system is in a mitigation regime and in theory $T_{\text{det}} \to +\infty$. In practice it is equal to the final time of the numerical simulation, here the final time is $\tau = 140$ which is outside the frame of the figures. The numerical values of the important times are $T_{\text{det}} = 60$, $T_{\text{LF}} = 3.85$ and $\mathbb{E}[T] = 12$ for $\rho = 1.8$ and $T_{\text{det}} = 7.86$, $T_{\text{LF}} = 3.37$ and $\mathbb{E}[T] = 8.11$ for $\rho = 2$.

We can see in Figs. E.7(a) and E.7(b) that even if $\rho < \rho_{\text{ml}}$ (i.e. the corresponding deterministic system undergoes a harmless regime), it is almost certain that if we wait for a sufficiently long time the threshold a_1^{th} will be reached. Even for relatively short times (approximately 2 to 4 times T_{LF}) the probability of reaching the threshold is not negligible. To complete the information given in Fig. E.7, the values of $P(6)$, $P(10)$ and $P(14)$ for $\rho = 1.7, 1.6, \ldots, 2.4$ are given in Table. E.1. For example (see Fig. E.7(b) and Table. E.1), we have $P(10) = 0.433$, i.e. if $\tau = 10$ we have a 43.3% chance that the threshold has already been reached. Not surprisingly, for a given value of ρ, the larger the time τ is, the larger $P(\tau)$ becomes; for a given value of τ, the larger ρ is, the larger $P(\tau)$ becomes again. Moreover, these results (those shown in Figs. E.7(a) and E.7(c)) show that the most likely value is not the deterministic value $\tau = T_{\text{det}}$ which is very close to the mean time

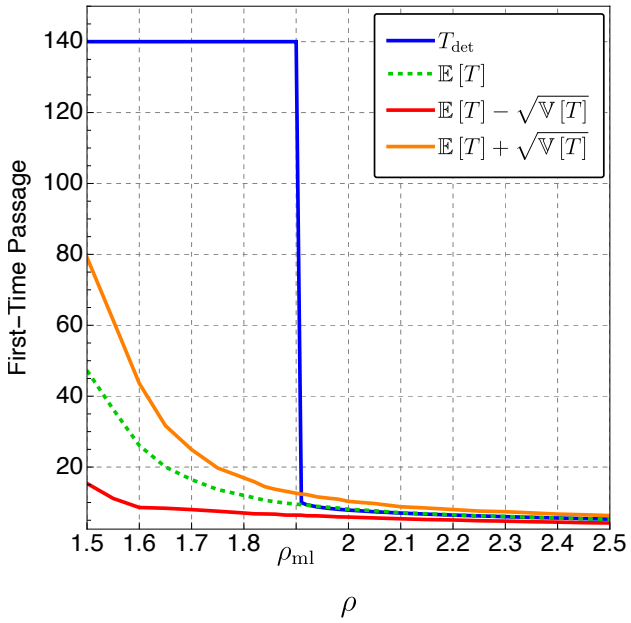


Figure E.8. Comparison between T_{det} (blue line), $\mathbb{E}[T]$ (green dashed line), $\mathbb{E}[T] - \sqrt{\mathbb{V}[T]}$ (red line) and $\mathbb{E}[T] + \sqrt{\mathbb{V}[T]}$ (orange line) as function of the bifurcation parameter ρ. The same parameters as in Section E.4.2 are used.

$\mathbb{E}[T]$ (see Fig. E.7(c)). Contrary to the deterministic case, in the stochastic case we do not see any qualitative difference between the results obtained for $\rho = 1.8$ and those obtained for $\rho = 2$.

Tableau E.1. Values of $P(6)$, $P(10)$ and $P(14)$ for $\rho = 1.7, 1.6, \ldots, 2.4$. The same parameters are used as in Fig. E.7.

ρ	1.7	1.8	1.9	2	2.1	2.2	2.3	2.4
$P(6)$	0.003	0.013	0.051	0.144	0.276	0.425	0.563	0.706
$P(10)$	0.219	0.433	0.652	0.828	0.932	0.973	0.985	0.997
$P(14)$	0.5	0.745	0.913	0.977	0.998	1	1	1

The latter observation is even more highlighted in Fig. E.8 which compares T_{det}, $\mathbb{E}[T]$ and $\mathbb{E}[T] \pm \sqrt{\mathbb{V}[T]}$ where $\sqrt{\mathbb{V}[T]}$ is the standard deviation of the FPTHR with

$$\mathbb{V}[T] = \mathbb{E}\left[T^2\right] - \mathbb{E}[T]^2 \tag{E.37}$$

the variance. Indeed, we can see a discontinuity in the graph of T_{det} at $\rho = \rho_{\text{ml}}$ which does not appear in the graphs of $\mathbb{E}[T]$ and $\mathbb{E}[T] \pm \sqrt{\mathbb{V}[T]}$. Again, note that the constant value of the DPTHR, i.e. $T_{\text{det}} = 140$ for $\rho < \rho_{\text{ml}}$, is a numerical artefact. Indeed, when the deterministic system is in a mitigation regimes (here relaxation oscillations of the slow flow) we have $T_{\text{det}} \to +\infty$ in theory. In practice, T_{det} is detected as the final time of the numerical integration which is here $\tau = 140$. Both mean and standard deviation increase when ρ decreases, moving away from the deterministic mitigation limit ρ_{ml}. Finally, we can see again that when $\rho > \rho_{\text{ml}}$ one has $\mathbb{E}[T] \approx T_{\text{det}}$.

In my opinion, what should be retained from the results of this section is the fact that even if the system is supposed to be in an mitigation regime from a deterministic point of view, the amplitude of the self-sustained oscillator can reach a harmful value in a relatively short time with a non-negligible probability.

E.7 Conclusion

In this paper a Van der Pol oscillator (used as an archetypal self-sustained oscillator) undergoing a white noise forcing and coupled to a non-linear energy sink (NES) has been studied. It was highlighted that the stochastic forcing can modify significantly the dynamic behavior of the corresponding deterministic system. Indeed we showed first, by means of numerical integration of the slow flow dynamics of the system - derived

using the standard stochastic averaging method - that the reasoning which allows the theoretical prediction of the system behavior in the deterministic case can be contradicted in presence of stochasticity.

Then the system behavior has been studied in a more systematic way by introducing two quantities : (i) the probability of being in a harmless regime (PBHR), i.e. the probability of obtaining a regime of small amplitude compared to the case without NES ; and (ii) the first-passage time to reach a harmful regime (FPTHR), i.e. the time for the system to reach an arbitrary amplitude threshold considered as dangerous if reached by the primary structure. Both quantities have been investigated combining the Monte Carlo approach with numerical integration of the stochastic slow flow dynamics. When they are computed on the corresponding deterministic regime, the PBHR and FPTHR reveal themselves to be discontinuous functions of the bifurcation parameter under consideration. Indeed, at the mitigation limit (i.e. the value of the bifurcation parameter below which the NES acts and above which it no longer acts) the PBHR goes abruptly from 1 (we are sure to be in a mitigation regime) to 0 (we are sure to be in a no mitigation regime), and the FPTHR from infinity (i.e. the deterministic system never reaches the no mitigation regime) to a finite value. We showed that in the stochastic case, both PBHR and FPTHR become smooth at the mitigation limit. This work highlights that taking into account stochasticity allows a better understanding of targeted energy transfer mechanisms in the context of limit cycles mitigation by means of an NES under more realistic conditions than in a deterministic study.

An interesting sequel to this research would be the theoretical analysis of stochastic slow flow inspired by methodologies dedicated to the analysis of noisy slow-fast systems as developed by Berglund and Gentz [22, 24]. This would help to understand the mechanisms underlying the phenomena highlighted in this article.

E.8 Appendix A. Expressions of functions

The expressions of the functions f_1, f_2, f_3 and f_4 which appear in Eq. (E.14) are

$$\begin{aligned} f_1(a_1,\varphi_1,a_2,\varphi_2,t) = \frac{1}{2}\Big(& a_1 - a_1\rho\cos(2t+2\varphi_1) - a_1\sin(2t+2\varphi_1) \\ &+ a_2\sin(2t+\varphi_1+\varphi_2) + a_2\sin(\varphi_1-\varphi_2) \\ &- a_1^3\rho r + a_1^3\rho r\cos(4t+4\varphi_1)\Big), \end{aligned} \tag{E.38}$$

$$\begin{aligned} f_2(a_1,\varphi_1,a_2,\varphi_2,t) = \frac{1}{2a_1}\Big(& - a_1 + 4a_1\rho\sin(2t+2\varphi_1) - a_1\cos(2t+2\varphi_1) \\ &+ a_2\cos(2t+\varphi_1+\varphi_2) + a_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) \\ &- 2a_1^3\rho r\sin(2t+2\varphi_1) + a_1^3\rho r\sin(4t+4\varphi_1)\Big), \end{aligned} \tag{E.39}$$

$$\begin{aligned} f_3(a_1,\varphi_1,a_2,\varphi_2,t,\epsilon) = \frac{1}{8}\Big(& - 4a_2\mu + 4a_1\sin(2t+\varphi_1+\varphi_2) - 4a_1\sin(\varphi_1-\varphi_2) \\ &+ 4a_2\mu\cos(2t+2\varphi_2) - 4a_2\sin(2t+2\varphi_2) \\ &+ 2\alpha a_2^3\sin(2t+2\varphi_2) + \alpha a_2^3\sin(4t+4\varphi_2)\Big) \\ + \frac{\epsilon}{8}\Big[& 4a_1\rho\cos(\varphi_1-\varphi_2) - 4a_1\rho\cos(2t+\varphi_1+\varphi_2) \\ &+ 4a_1\sin(\varphi_1-\varphi_2) - 4a_1\sin(2t+\varphi_1+\varphi_2) \\ &- 4a_2\mu + 4a_2\mu\cos(2t+2\varphi_2) + 4a_2\sin(2t+2\varphi_2) \\ &+ 2\alpha a_2^3\sin(2t+2\varphi_2) + \alpha a_2^3\sin(4t+4\varphi_2) \\ &- a_1^3\rho r\cos(\varphi_1-\varphi_2) - a_1^3\rho r\cos(2t+3\phi_1-\phi_2) \\ &+ a_1^3\rho r\cos(2t+\phi_1+\phi_2) + a_1^3\rho r\cos(4t+3\phi_1+\phi_2)\Big] \end{aligned} \tag{E.40}$$

and

$$\begin{aligned} f_4(a_1,\varphi_1,a_2,\varphi_2,t,\epsilon) = \frac{1}{8a_2}\Big(& - 4a_2 + 3\alpha a_2^3 + 4\alpha a_2^3\cos(2t+2\varphi_2) + \alpha a_2^3\cos(4t+4\varphi_2) \\ &+ 4a_1\cos(2t+\varphi_1+\varphi_2) + 4a_1\cos(\varphi_1-\varphi_2) \\ &- 4a_2\mu\sin(2t+2\varphi_2) - 4a_2\cos(2t+2\varphi_2)\Big) \end{aligned}$$

$$+\frac{\epsilon}{8a_2}\Big[4a_2+3\alpha a_2^3-4a_1\cos(2t+\varphi_1+\varphi_2)-4a_1\cos(\varphi_1-\varphi_2)$$
$$+4a_1\rho\sin(\varphi_1-\varphi_2)+4a_1\rho\sin(2t+\varphi_1+\varphi_2)$$
$$+4a_2\cos(2t+2\varphi_2)-4a_2\mu\sin(2t+2\varphi_2)$$
$$+4\alpha a_2^3\cos(2t+2\varphi_2)+\alpha a_2^3\cos(4t+4\varphi_2)$$
$$-a_1^3\rho r\sin(\varphi_1-\varphi_2)-a_1^3\rho r\sin(2t+3\phi_1-\phi_2)$$
$$a_1^3\rho r\sin(2t+\phi_1+\phi_2)\,a_1^3\rho r\sin(4t+3\phi_1+\phi_2)\Big]. \tag{E.41}$$

E.9 Appendix B. General formulation of the standard stochastic averaging method

In this appendix the stochastic averaging method [114, 191] is briefly described. For that we consider the following system of differential equations in standard form

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x},t)+\mathbf{g}(\mathbf{x},t)\boldsymbol{\eta} \tag{E.42}$$

where $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$. If the deterministic vector function $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)\in\mathbb{R}^n$ and matrix function $\mathbf{g}(\mathbf{x},t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ satisfy certain requirements [114] and if the elements of the vector $\boldsymbol{\eta}$ are broadband processes, with zero means, then the slow (or averaged) dynamics of Eq. (G.70) may be approximated by the following stochastic differential equations

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{m}(\mathbf{x},t)+\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)\boldsymbol{\xi}, \tag{E.43}$$

where $\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n$ is a vector of n white noise processes with zero means. The vector $\mathbf{m}$ and the matrix $\boldsymbol{\sigma}$ are called *drift vector* and *diffusion matrix* respectively and are defined by

$$\mathbf{m}=M^{\mathrm{av}}\left\{\mathbf{f}+\int_{-\infty}^{0}\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial(\mathbf{g}\boldsymbol{\eta})}{\partial\mathbf{x}}\right)_t(\mathbf{g}\boldsymbol{\eta})_{t+s}\right]ds\right\}, \tag{E.44}$$

where $\frac{\partial(\mathbf{g}\boldsymbol{\eta})}{\partial\mathbf{x}}$ is the Jacobian matrix of $\mathbf{g}\boldsymbol{\eta}$, and

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^T=M^{\mathrm{av}}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{E}\left[(\mathbf{g}\boldsymbol{\eta})_t(\mathbf{g}\boldsymbol{\eta})_{t+s}^T\right]ds\right\}, \tag{E.45}$$

where $\{.\}^T$ and $\mathbb{E}[\{.\}]$ denote respectively the transpose and the expected value of $\{.\}$. M^{av} is an averaging operator defined as follows

$$M^{\mathrm{av}}\{.\}=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\{.\}\,dt. \tag{E.46}$$

It should be noted that in the case of periodic variables with period T_0 (which is the case in this paper), the operator M^{av} becomes a classical Krylov–Bogolyubov time averaging over one period T_0, i.e.

$$M^{\mathrm{av}}\{.\}=\frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0}\{.\}\,dt \tag{E.47}$$

and the result is independent of t_0.

E.10 Appendix C. Elements of the classical deterministic analysis of the slow flow dynamics

Combining Eqs. (E.30b) and (E.30c) leads to the following amplitude and angle equations

$$a_1=a_2\sqrt{\mu^2+\left(1-\frac{3\alpha a_2^2}{4}\right)^2}=H(a_2) \tag{E.48a}$$

$$\tan\varphi=\frac{4\mu}{4-3\alpha a_2^2}. \tag{E.48b}$$

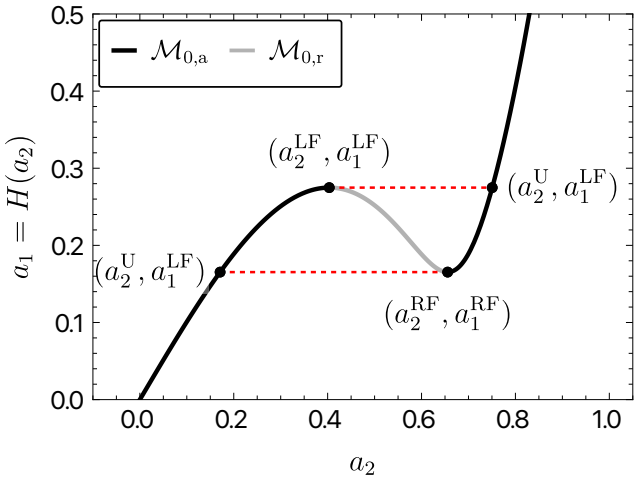


Figure E.9. Typical example of the critical manifold in the (a_2, a_1)-plane given by Eq. (E.48a) for $\mu = 0.25$ and $\alpha = 3$.

As usual, the stability of the critical manifold is carried out studying the fast subsystem (E.31). A fixed point of Eq. (E.31) is shown to be stable if $d_{a_2}H(a_2) > 0$ and unstable if $d_{a_2}H(a_2) < 0$. Exploiting the polynomial properties of H, it can be shown that the local extrema of H (i.e $d_{a_2}H(a_2) = 0$) occur at

$$\begin{aligned} a_2^{\mathrm{LF}} &= \frac{2}{3\sqrt{\alpha}}\sqrt{2-\sqrt{1-3\mu^2}} \\ a_2^{\mathrm{RF}} &= \frac{2}{3\sqrt{\alpha}}\sqrt{2+\sqrt{1-3\mu^2}} \end{aligned} \tag{E.49}$$

if the following relation holds

$$\mu < \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{E.50}$$

If the condition (E.50) is not satisfied, the H function no longer has local extrema. In the rest of the paper, one considers that (E.50) always holds.

In Eq. (E.49), a_2^{LF} and a_2^{RF} are the abscissa values in the (a_2, a_1)-plane of the maximum and the minimum of the H function respectively. The superscripts $()^{\mathrm{LF}}$ and $()^{\mathrm{RF}}$ refer to *left fold point* and *right fold point* respectively. Indeed, in the (a_2, a_1, φ)-space, the two points $(a_2^{\mathrm{RF}}, a_1^{\mathrm{RF}}, \varphi^{\mathrm{RF}})$ and $(a_2^{\mathrm{LF}}, a_1^{\mathrm{LF}}, \varphi^{\mathrm{LF}})$ (where a_1^{LF}, a_1^{RF}, φ^{LF} and φ^{RF} are obtained from a_2^{LF} and a_2^{RF} using Eq. (E.48)) are generally called *fold points*.

Each point of the critical manifold is a fixed point of the fast subsystem (E.31). It can be shown that the stability of these fixed points changes at the fold points : they are stable (resp. unstable) for $a_2 < a_2^{\mathrm{LF}}$ and $a_2 > a_2^{\mathrm{RF}}$ (resp. $a_2^{\mathrm{LF}} < a_2 < a_2^{\mathrm{RF}}$).

Given the previous results, the critical manifold $\mathcal{M}_0$ is hyperbolic [3] except at the fold points and it consists of an attracting branch

$$\mathcal{M}_{0,\mathrm{a}} = \left\{ (a_1, a_2, \varphi) \in \mathbb{R}^{+^2} \times [-\pi, \pi] \;\middle|\; a_2 < a_2^{\mathrm{LF}} \;\text{ and }\; a_2 > a_2^{\mathrm{RF}} \right\} \tag{E.51}$$

and a repelling branch

$$\mathcal{M}_{0,\mathrm{r}} = \left\{ (a_1, a_2, \varphi) \in \mathbb{R}^{+^2} \times [-\pi, \pi] \;\middle|\; a_2^{\mathrm{LF}} < a_2 < a_2^{\mathrm{RF}} \right\}. \tag{E.52}$$

A typical amplitude part of the critical manifold (see Eq. (E.48a)) is shown in Fig. E.9. One can see that the fold points connect attracting parts to the repelling part of the critical manifold $\mathcal{M}_0$.

Solving $H\left(a_2^{\mathrm{RF}}\right) = H\left(a_2^{\mathrm{D}}\right)$ and $H\left(a_2^{\mathrm{LF}}\right) = H\left(a_2^{\mathrm{U}}\right)$ the two following scalars a_2^{D} and a_2^{U} are obtained

$$\begin{aligned} a_2^{\mathrm{D}} &= \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{\alpha}}\sqrt{1-\sqrt{1-3\mu^2}} \\ a_2^{\mathrm{U}} &= \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{\alpha}}\sqrt{1+\sqrt{1-3\mu^2}} \end{aligned} \tag{E.53}$$

which are the horizontal projection of the fold points on the critical manifold.

3. $\mathcal{M}_0$ is hyperbolic when all eigenvalues of the Jacobian of the fast susbsystem on $\mathcal{M}_0$ have nonzero real parts, here that means $d_{a_2}H(a_2) \neq 0$.

Annexe F

European Journal of Mechanics - A/Solids 93 (2022) : 10452 [a18]

Robust optimization of nonlinear energy sinks used for mitigation of friction-induced limit cycle oscillations

Cherif Snoun, Baptiste Bergeot and Christophe Vergez

Abstract

This paper aims at proposing robust methods to optimize nonlinear energy sinks (NES) used for the mitigation of friction-induced vibrations due to mode coupling instabilities. The study is based on a mechanical system composed of two NES coupled to the well-known two-degrees-of-freedom Hultèn's model. In such an unstable system coupled with NES, it is usual to observe a discontinuity in the steady-state amplitude profile which separates the parameter space into two parts corresponding respectively to the mitigated and unmitigated regimes. The discontinuity is predicted by a methodology previously developed by the authors and based on Multi-Element generalized Polynomial Chaos. The method allows to determine the Propensity of the system to undergo a Harmless Steady-State Regime (PHSSR). The objective of the present work is therefore to maximize the value of the PHSSR to obtain a robust optimal design of the NES. To this end, several stochastic optimization problems are presented that take into account the dispersion of the uncertain parameters using two approaches ; in the first one, the parameters of the NES are considered as deterministic, and in the second one they are also supposed uncertain but with a known probability law.

Keywords : Friction-induced vibration, Nonlinear Energy Sink, Uncertainty, Robust optimisation, Polynomial Chaos

F.1 Introduction

Friction-induced vibrations rank among the major issues that friction systems may face. This phenomenon can result from the generation of Limit Cycle Oscillations (LCO) induced by dry friction, which are explained by the coupling of two modes of the system [72, 97, 152]. Given the parametric uncertainties present in friction systems, it is very difficult to design them so that they always have stable behaviors. It is therefore necessary to use strategies to attenuate vibrations when they appear. As a way to model this phenomenon, the well-known two-degrees-of-freedom Hultèn's model [101, 102] has been widely used in the past.

Nonlinear Energy Sinks (NES) are nonlinear passive vibration absorbers which consist in a spring mass damper with a strong nonlinear stiffness (usually cubic as is the case in this work). The NES can adapt themselves to the Primary Structure (PS) without being tuned to a specific frequency. Their operation is based on the concept of Targeted Energy Transfer (TET) which has become an important passive control technique for reducing or eliminating unwanted vibrations [203, 205]. The design and optimization of NES constitute a very dynamic field of research. Recently, a lot of work has for example been produced concerning the study of new configurations and technologies allowing/enhancing TET [197, 219], the analysis of the underlying dynamics of the coupled system [a2, a9, 96], the deterministic optimization of NES [80, 115], the stochastic optimization of NES [161, 162], the coupling of the NES to an energy harvester [60, 108, 109] or the use of a NES as an energy harvester [125, 226], etc. Among the many research subfields about NES, the present work takes place within the framework of robust optimization of NES when the latter have uncertain parameters and are used to mitigate Limit Cycle Oscillations (LCO).

The mitigation of LCO by NES has also been widely studied in the past. The first work reported in this framework concerns the LCO mitigation of the Van der Pol oscillator [122]. In the field of friction-induced vibrations mitigation, [a14] analyzed the behavior of a Hultèn's model coupled to two ungrounded NES ; the same model in considered in this work.

Lately, special attention has been paid to the optimal design of NES in a deterministic context. Nguyen and Pernot [150] have studied the effectiveness of a NES to attenuate free oscillations of a single degree-of-freedom oscillator. The optimization procedure consisted in studying the influence of the NES damping on the efficiency

of the energy transfer from the primary system to the NES. Wang et al. [210] presented multi-objective designs of a track NES and a single-sided vibro-impact track NES used as effective control devices to mitigate the seismic response of high-rise buildings. In [165] a design criteria for optimally tuned Vibro-Impact NES to control vibration under periodic and transient excitation has been proposed. Oliva et al. [154] developed an approximate design approach based on the use of the Statistical Linearization Technique, and an accurate empirical formulation linking the NES optimal parameters to the characteristics of the main structure and the random excitation.

More recently, the optimization of NES under uncertainties has also been considered. Boroson [31] has introduced the "discontinuity in the effectiveness" of the NES, i.e., the fact that the effectiveness can change from a high value to a low value following a small perturbation of the design parameters or of the initial conditions. In [30], the optimal design of several parallel NES configurations for maximum mean efficiency has been investigated. It has been shown again that the variation of some system parameters or of the initial conditions generates a discontinuity on the energy shape of the system. An optimization algorithm based on the Support Vector Machine (SVM) technique and a kriging meta-model have been used to predict this discontinuity according to the dispersion of some uncertain parameters. Khazaee et al. [115] studied the stochastic optimization of multiple NES (configured in parallel and in series) attached to a simply supported pipe conveying fluid. The results show that the optima obtained from stochastic optimization are much more robust than those obtained from deterministic optimization. Pidaparthi and Missoum [161, 162] performed optimization of NES under uncertainties in the context of attenuating self-sustained vibrations of an aircraft wing created by aeroelastic instability (which is also due to mode coupling). Depending on the nonlinear properties of the system, the latter may undergo LCO that are either supercritical or subcritical. In this case the bifurcation diagram of the system (which represents the amplitude of the LCO as a function of the airflow velocity over the wing) may exhibit two types of discontinuities, respectively due to the operation of the NES, and to the generation of subcritical LCO. Using again the SVM technique and a kriging meta-model, several stochastic optimization problems have been presented in order to maximize the average reduction of the LCO amplitude.

Various probabilistic approaches may be used to study the propagation of uncertainties in the deterministic model (DM) of a mechanical system. A review of the numerical methods dedicated to the stochastic prediction can be found in [151]. Efficient methods such as the generalized Polynomial Chaos (gPC) or the Multi-Element generalized Polynomial Chaos (ME-gPC) have been developed as a less costly alternative to the common Monte Carlo approach. These methods have been for example used to perform a stochastic analysis of the dynamic behavior of friction systems [146-149, 174, 175, a17, 199].

In this paper, two original optimization methods under uncertainties, based on polynomial chaos theory, are developed for the robust design of two ungrounded NES used to mitigate LCO due to mode coupling instability in the Hultèn's model, which is the primary structure (PS). [a14] classified the steady-state response regimes in two main categories related to the dispersion of some uncertain parameters : the mitigated regimes (harmless situations) and the unmitigated regimes (harmful situations). In the context of instability mitigation by means of NES, the LCO amplitude profile as a function of a given bifurcation parameter usually presents a discontinuity between these two regimes, which makes the NES potentially very sensitive to uncertainties. In [a17], this discontinuity is predicted by means of a ME-gPC based method. This allows to determine the Propensity of the system to undergo a Harmless Steady-State Regime (PHSSR), which is defined as the probability for the system to undergo a mitigated regime. The aim of this paper is therefore to maximize the PHSSR value to obtain a robust optimal design of the NES with a low computational cost. For this purpose, several stochastic optimization problems are presented for a PS having uncertain parameters, in which the NES parameters are either considered as deterministic, or are also supposed uncertain but with a known probability law.

The article is organized as follows. In Section F.2, the two degrees-of-freedom Hultèn's model coupled to two NES is presented. In Section F.3, the possible steady-state regimes of the coupled system are studied, and the PHSSR is defined. Section F.4 describes the polynomial chaos theory and recalls the stochastic optimization algorithm used to compute the PHSSR. The optimization formulation under uncertainties is described in Section F.5, and the results are presented in Section F.6. Finally, conclusions are given in Section F.8.

F.2 The friction system under study

The studied mechanical system is similar to that previously used by the authors in [a14, a17]. It is recalled hereafter for the sake of clarity.

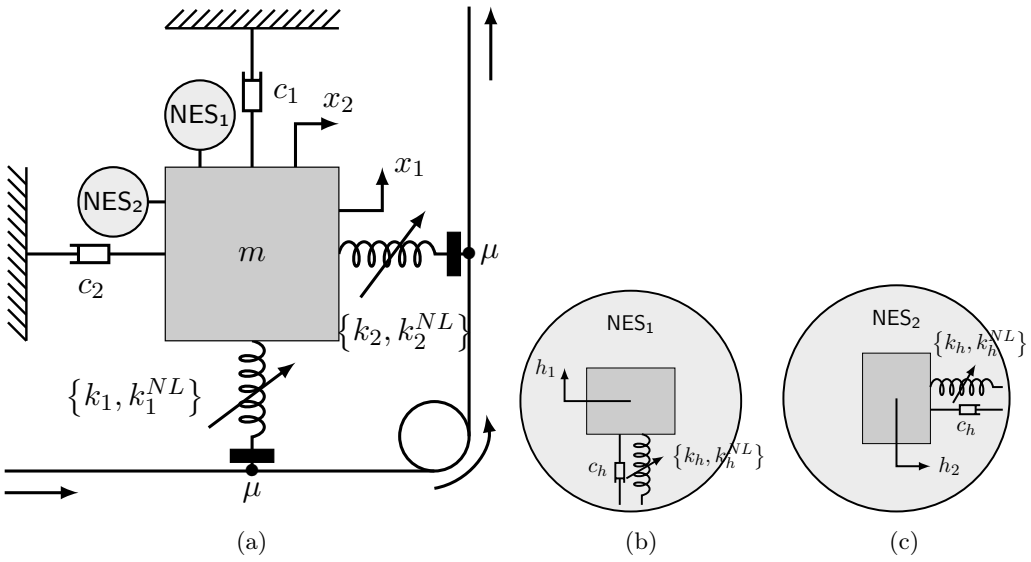


Figure F.1. The mechanical model. (a) Mechanical system with NES; (b) Zoom on NES_1; (c) Zoom on NES_2.

F.2.1 The primary system

The primary system (PS) consists in the two degree-of-freedom (DOF) Hultèn's phenomenological model ([101, 102]). This simple model can reproduce the mode-coupling phenomenon and is composed of a mass m held against a moving strip. The contact between the mass and the strip is modeled by two plates supported by two different springs, with linear components k_1 and k_2 and cubic components k_1^{NL} and k_2^{NL}, and two dampers with damping coefficients c_1 and c_2 (see Fig. F.1). We assume that the friction coefficient is constant and that the strip moves at a constant velocity. The relative velocity between the strip velocity and dx_1/dt or dx_2/dt is supposed to be positive, and the friction contact is modeled by the Coulomb's law, i.e. $F_T = \mu F_N$ where F_T is the tangential friction force, F_N is the normal force and μ is the friction coefficient. Using Newton's second law the equations of motion, that constitute the primary system in this work, are derived as follows :

$$m\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 - \mu k_2x_2 + k_1^{NL}x_1^3 - \mu k_2^{NL}x_2^3 = 0 \tag{F.1a}$$

$$m\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + k_2x_2 + \mu k_1x_1 + \mu k_1^{NL}x_1^3 + k_2^{NL}x_2^3 = 0. \tag{F.1b}$$

F.2.2 Mechanical model with Nonlinear Energy Sinks

Two strongly cubic and identical ungrounded NES with masses m_h, damping coefficients c_h and cubic stiffnesses k_h^{NL}, are attached on the primary system (see Fig. F.1). Introducing the NES displacements $h_1(t)$ and $h_2(t)$ in Eq. (F.1) leads to the following equations of motion of the coupled system

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + \eta_1\omega_1\dot{x}_1 + \omega_1^2x_1 - \mu\omega_2^2x_2 + \varphi_1x_1^3 - \mu\varphi_2x_2^3 + \\ \eta_h\omega_1\left(\dot{x}_1 - \dot{h}_1\right) + \xi_h\left(x_1 - h_1\right) + \varphi_h\left(x_1 - h_1\right)^3 = 0\end{aligned} \tag{F.2a}$$

$$\epsilon\ddot{h}_1 + \eta_h\omega_1\left(\dot{h}_1 - \dot{x}_1\right) + \xi_h\left(h_1 - x_1\right) + \varphi_h\left(h_1 - x_1\right)^3 = 0 \tag{F.2b}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_2 + \eta_2\omega_2\dot{x}_2 + \omega_2^2x_2 + \mu\omega_1^2x_1 + \mu\varphi_1x_1^3 + \varphi_2x_2^3 + \\ \eta_h\omega_1\left(\dot{x}_2 - \dot{h}_2\right) + \xi_h\left(x_2 - h_2\right) + \varphi_h\left(x_2 - h_2\right)^3 = 0\end{aligned} \tag{F.2c}$$

$$\epsilon\ddot{h}_2 + \eta_h\omega_1\left(\dot{h}_2 - \dot{x}_2\right) + \xi_h\left(h_2 - x_2\right) + \varphi_h\left(h_2 - x_2\right)^3 = 0, \tag{F.2d}$$

where $\eta_i = c_i/\sqrt{mk_i}$ (with $i = 1, 2$) are the relative damping coefficients, $\omega_i = \sqrt{k_i/m}$ are the natural angular frequencies, $\varphi_i = k_i^{NL}/m$; as for the NES parameters, $\epsilon = m_h/m$ is the mass ratio between the NES and the primary structure, $\xi_h = k_h/m$, $\eta_h = c_h/\sqrt{mk_1}$ and $\varphi_h = k_h^{NL}/m$. Because strongly cubic NES are considered, one has $\xi_h \ll \varphi_h$. In general, the mass ratio ϵ is in the range $0.01 - 0.1$ as in the present paper.

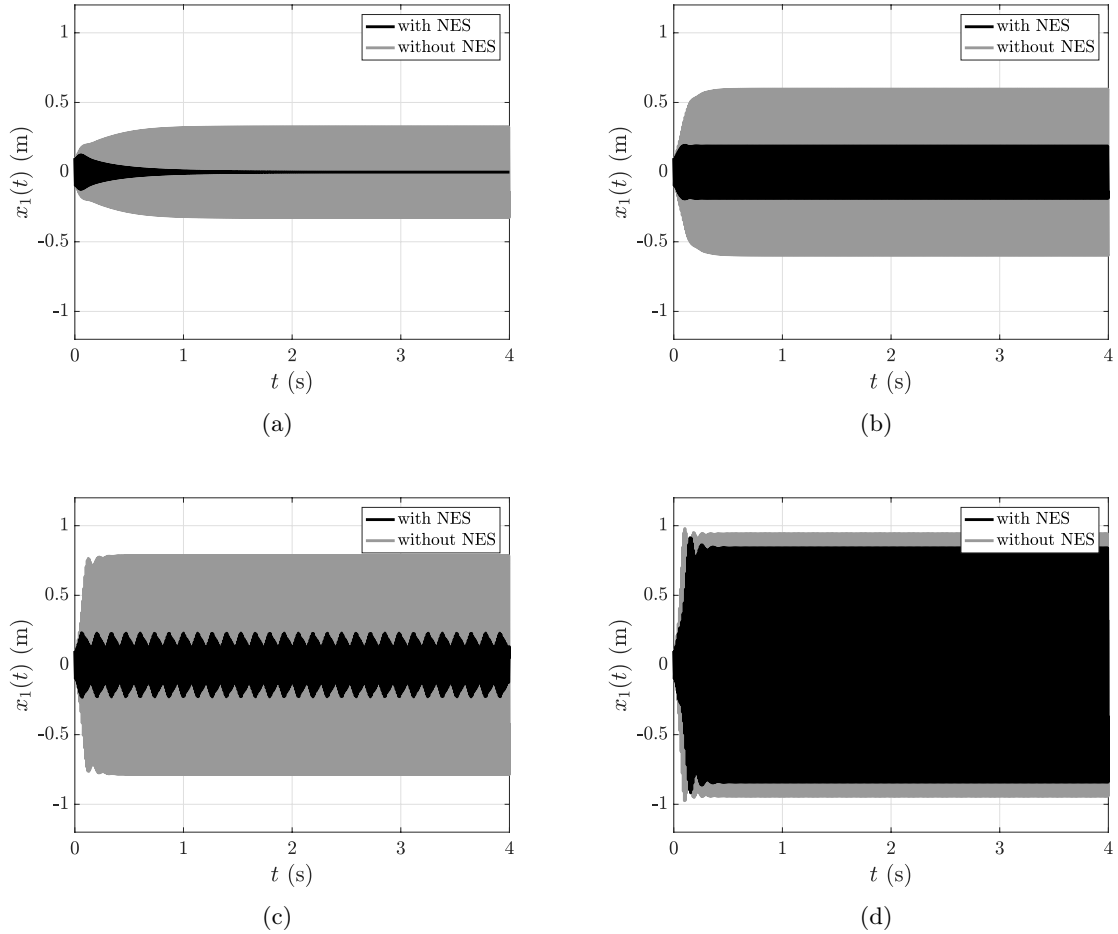


Figure F.2. Comparison between time series $x_1(t)$ resulting from the numerical integration of the friction system with and without NES. (a) Complete suppression, $\mu = 0.16$; (b) Mitigation : PR, $\mu = 0.18$; (c) Mitigation : SMR, $\mu = 0.2$; (d) No mitigation, $\mu = 0.22$. The set of parameters Eq. (F.4) has been used.

F.3 Possible steady-state regimes

Four main types of steady-state regimes (SSR) may be generated when one or several NES are attached on a primary system which undergoes an LCO : complete suppression of the instability, mitigation through Periodic Response (PR), mitigation through Strongly Modulated Response (SMR) or no mitigation. Those four regimes can also be observed on the studied system (F.2) ([a14]), and are presented in Fig. F.2 which shows for each case the displacements $x_1(t)$ - with and without NES attachments - with respect to time. The regimes described above are classified into two categories depending on whether the LCO is considered as mitigated (Figs. F.2(a), F.2(b) and F.2(c)) or not (Fig. F.2(d)).

In this work the Quantity of Interest (QoI) under consideration is the amplitude $A_{x_1}^{wNES}$ of the variable x_1 in the system with NES (F.2) and within a steady-state regime. It is defined as follows

$$A_1^{\text{wNES}} = \frac{\max\left[x_1^{SSR}(t)\right] - \min\left[x_1^{SSR}(t)\right]}{2}, \tag{F.3}$$

where $x_1^{SSR}(t)$ is the times series of the variables x_1 obtained from the numerical integration of the coupled system (F.2) within the steady-state regime. For comparison purposes, the amplitude A_1^{woNES} of the system without NES (F.1) is also computed.

The time integration of system (F.2) (resp. (F.1)) is performed between $t_b = 0$ and $t_e = 4$ seconds and the amplitude A_1^{wNES} (resp. A_1^{woNES}) is computed in the interval $[0.9t_e\ t_e]$ in which we assume that the system has reached its steady-state regime.

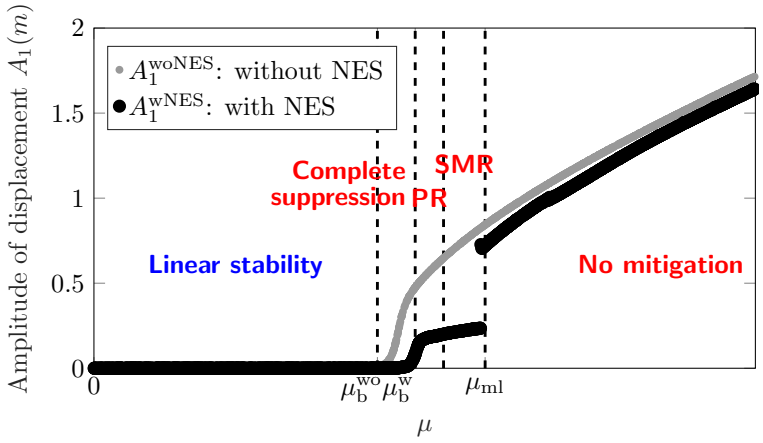


Figure F.3. Amplitudes A_1^{wNES} and A_1^{woNES} as functions of the friction coefficient μ. The set of parameters Eq. (F.4) has been used.

Using the following set of parameters

$$\begin{aligned} &\omega_1 = 2\pi 100 \ (\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}), \quad \omega_2 = 2\pi 85 \ (\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}), \\ &\eta_1 = 0.02, \quad \eta_2 = 0.06, \\ &\varphi_1 = 10^5 \ (\text{N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}), \quad \varphi_2 = 0 \ (\text{N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}), \\ &\epsilon = 0.05, \quad \xi_h = 0.001 \ (\text{N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}), \\ &\eta_h = 0.02, \quad \varphi_h = 1.4 \cdot 10^5 \ (\text{N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}), \end{aligned} \tag{F.4}$$

the amplitudes A_1^{wNES} and A_1^{woNES} are plotted as functions of the friction coefficient μ in Fig. F.3. The specific values of μ denoted as μ_b^{wo} and μ_b^{w} correspond to the Hopf bifurcation points without and with the NES attachments, respectively. The four steady-state regimes described above are visible on the Figure, which highlights a discontinuity (or jump) in the profile of A_1^{wNES}. For increasing values of μ, this discontinuity corresponds in general to the transition from the SMR to the no suppression regime and separates mitigated regimes from unmitigated ones. The value of μ at the discontinuity is called mitigation limit and is denoted as μ_{ml}.

The Propensity to be in a Harmless Steady-State Regime (PHSSR) ([a17]) can be computed from the mitigation limit μ_{ml}. The PHSSR is the probability of obtaining a mitigated regime given the probability laws governing the dispersion of the primary system parameters. Here, only μ is considered as uncertain and it is assumed to follow a uniform probability law within the interval $[0, \mu_e = 0.4]$; the PHSSR is then simply defined as

$$\text{PHSSR} = \int_0^{\mu_{\text{ml}}} \frac{1}{\mu_e} d\mu = \frac{\mu_{\text{ml}}}{\mu_e}. \tag{F.5}$$

F.4 Multi-Element Polynomial Chaos based algorithm to detect a discontinuity

The ME-gPC method previously developed by the authors in [a17] to locate the discontinuity in the QoI profile is recalled in Section F.4.2. Elements of the Polynomial Chaos theory are first presented in Section F.4.1.

F.4.1 Elements of the Polynomial Chaos theory

F.4.1.1 Generalized Polynomial Chaos (gPC)

Let us consider a dynamical system with r uncertain physical parameters β_j $(j = 1, \ldots, r)$ assumed to be uniformly distributed within a given space $\prod_{i=1}^{r}[a_i, b_i]$, and let ξ_j $(j = 1, \ldots, r)$ be the independent random variables within the space $[-1\ 1]^r$, linked to β_j by

$$\beta_j(\xi_j) = \frac{a_j + b_j}{2} + \frac{b_j - a_j}{2}\xi_j, \quad (j = 1, \ldots, r). \tag{F.6}$$

The gPC theory ([34, 213, 220]) states that the system output variable $X(\xi_1, ..., \xi_r)$, called the quantity of Interest (QoI), may be approximated by a truncated orthogonal polynomial function series as

$$X(\xi_1, ..., \xi_r) \approx \sum_{j=0}^{N_p} \bar{x}_j \phi_j(\xi_1, ..., \xi_r), \tag{F.7}$$

where $\phi_j(\xi)$ are orthogonal polynomials which represent the stochastic part of the process, whereas $\bar{x}_j$ are the gPC coefficients that take into account the deterministic part of the process. In this paper, according to the Askey-scheme ([8]), the orthogonal polynomials $\phi_j(\xi_1, ..., \xi_r)$ are built from Legendre polynomials because the uncertain parameters follow a uniform probabilistic law. From [220], the number of terms $N_p + 1$ of the expansion is given by

$$N_p + 1 = \frac{(p+r)!}{p!r!}, \tag{F.8}$$

where r is the number of uncertain parameters and p is the order of the gPC. To obtain the approximated values of the QoI X, the coefficients $\bar{x}_j$ of the truncated series (F.7) must be computed. To that end, the non-intrusive regression method ([28]) is used in this paper. In this method, the gPC coefficients are built from Q values of the QoI X. The corresponding Q simulations may be performed at points chosen with the Latin Hypercube Samples (LHS) method [138] that will be referred to as the Numerical Experimental Design (NED) in this paper. A minimum of $Q = N_p$ simulations is required but in practice, $Q = kN_p$ simulations are used, with k a small integer usually equal to 2, 3 or 4.

F.4.1.2 Multi-Element Generalized Polynomial Chaos (ME-gPC)

When the QoI is nonlinear, high polynomial orders may be required to reduce the approximation error. Thus, when the number of uncertain parameters r is high, the number of simulations required to compute the gPC coefficients may be excessive, leading to a prohibitive computational cost. An alternative is to split the vector $\xi = (\xi_1, ..., \xi_r)$ into a collection of m non-intersecting elements and to use a low order polynomial approximation on each element. That is the basic idea behind the ME-gPC [209].

The local physical variables β_j^k, in the k^{th} element $\prod_{i=1}^{r}[a_i^k, b_i^k]$, are expressed in terms of independent uniform random variables ξ_j^k in $[-1, 1]^r$ through

$$\beta_j^k = \frac{b_j^k + a_j^k}{2} + \frac{b_j^k - a_j^k}{2}\xi_j^k. \tag{F.9}$$

Consequently, Legendre polynomials can be used locally and a gPC expansion developped in each element as follows :

$$X_k(\bar{\xi}^k) \approx \sum_{j=0}^{N_p} \bar{x}_{k,j} \phi_j(\bar{\xi}^k), \tag{F.10}$$

where $X_k(\bar{\xi}^k)$ is the random process corresponding to the k^{th} element.

From the gPC theory, the approximated local mean $\hat{X}_{p,k}$ and variance $\sigma_{p,k}^2$ in the k^{th} element can be expressed analytically from the gPC coefficients as

$$\begin{cases} \hat{X}_{p,k} = \bar{x}_{k,0} \\ \sigma_{p,k}^2 = \dfrac{1}{2^r} \displaystyle\sum_{j=1}^{N_p} \bar{x}_{k,j}^2 \langle \phi_j^2 \rangle. \end{cases} \tag{F.11}$$

Several criteria have been proposed in the literature for the convergence of the ME-gPC algorithm. They depend on the aim of the ME-gPC. The criteria chosen in this study are presented in the next section.

F.4.2 Detection of a discontinuity in the QoI with the ME-gPC

This section recalls the method based on the ME-gPC and proposed in [a17] to locate a discontinuity in a Quantity of Interest (QoI) derived from the DM of a mechanical system. The aim of the method is not necessarily to obtain an accurate representation of the QoI, but to locate precisely the discontinuity, i.e. to know the values of the uncertain parameters for which the discontinuity in the QoI profile appears.

The underlying principle of the method is that the variance of a QoI that contains a discontinuity is higher than that of a QoI that does not contain any discontinuity. Therefore, if the discontinuity lies in a given element of the stochastic parameter space, the variance of the ME-gPC expansion in that element will

be high. From these considerations a ME-gPC algorithm has been built, in which at each step and for each element the local variance $\sigma^2_{p,k}$, computed directly from the gPC coefficients using Eq. (F.11), is compared to a threshold θ_1. If for a given element k

$$\sigma^2_{p,k} \geq \theta_1, \tag{F.12}$$

it is assumed that the discontinuity lies within this element. The latter is then divided by two in each direction of the stochastic space in order to locate more accurately the discontinuity. On the contrary, if the condition Eq. (F.12) is not satisfied, the element k is supposed not to contain the discontinuity and is removed from the algorithm.

The threshold θ_1 is chosen so that the variance of the element which contains the discontinuity always satisfies the condition Eq. (F.12). Therefore, two other criteria are introduced to stop the algorithm. The first one is the minimum element size $J_{\min}$ defined as

$$J_{\min} = \theta_2 J_0, \tag{F.13}$$

where J_0 is the size of the initial element corresponding to the whole stochastic parameter space and θ_2 is a percentage. At a given iteration i, the retained elements of size J_i are actually divided into two equal parts in each direction of the stochastic space if the following condition

$$J_i \geq J_{\min} \tag{F.14}$$

holds. It is worth recalling that all the elements at iteration i have the same size J_i because at each step the division is performed in each direction of the stochastic. If the condition (F.14) does not hold, the algorithm is stopped and we assume that the discontinuity in the QoI profile lies within the remaining elements.

In Section F.6, a comparison is performed with a reference method that needs N simulations of the DM to locate a discontinuity in the QoI profile. Therefore, the proposed method is only effective if the number of numerical simulations N' required to obtain the gPC coefficients in all the elements is smaller than N. Consequently, the second criterion is that N' should verify

$$N' \leq N, \tag{F.15}$$

otherwise the algorithm is stopped.

The algorithm is summarized in Fig. F.4. At the first step, only one element is present (i.e. the whole stochastic parameter space) and for a given iteration the parameter space has been divided into K elements during the previous iterations. At each iteration, the gPC coefficients are computed for the K elements and we check if the corresponding computational cost is larger than the reference one (see Eq. (F.15)). If that is the case, the algorithm is stopped and in general the discontinuity in the QoI profile has not been located. If Eq. (F.15) holds, we check the variance in each of the K elements (see Eq. (F.13)). If it is smaller than the threshold θ_1, the element is removed from the algorithm. If it is larger, it is kept and K' elements remain at the exit of the loop in k. If Eq. (F.14) does not hold, the algorithm is stopped and we assume that the discontinuity in the QoI profile lies within the K' remaining elements. If Eq. (F.14) holds, then each of the K' elements is divided into two parts in each direction of the stochastic parameter space, then a new iteration begins with $K = 2^r K'$.

As for the reference method, the detection of the discontinuity can be performed by the so-called Jump Criterion (JC). To be considered as an effective jump, the difference between the amplitude at the right of the jump, denoted as $A(\mu^+_{\text{ml}})$, and the amplitude at the left, denoted as $A(\mu^-_{\text{ml}})$, must be greater than the half of $A(\mu^-_{\text{ml}})$, i.e.

$$\text{JC} = \frac{A(\mu^+_{\text{ml}}) - A(\mu^-_{\text{ml}})}{A(\mu^-_{\text{ml}})} \geqslant \frac{1}{2}. \tag{F.16}$$

As an example, Fig. F.5 shows the last iteration of the algorithm applied to the system (F.2) for $\theta_1 = 0.7 \cdot 10^{-3}$, $\theta_2 = 1\%$ and $p = 1$. The Reference curve is similar to that displayed in Fig. F.3. One can see that the last interval obtained with the ME-gPC method contains the discontinuity observed on the reference.

F.5 Optimization strategy under uncertainties

This section focuses on the optimization methodology proposed to maximize the PHSSR defined in Section F.3. Two NES parameters are retained as the design parameters to optimize : the damping coefficient η_h and the nonlinear stiffness φ_h. The uncertain parameter is again the friction coefficient μ. Following [30, 162], the problem is treated in two different ways depending on whether the physical design parameters η_h and φ_h are deterministic or stochastic.

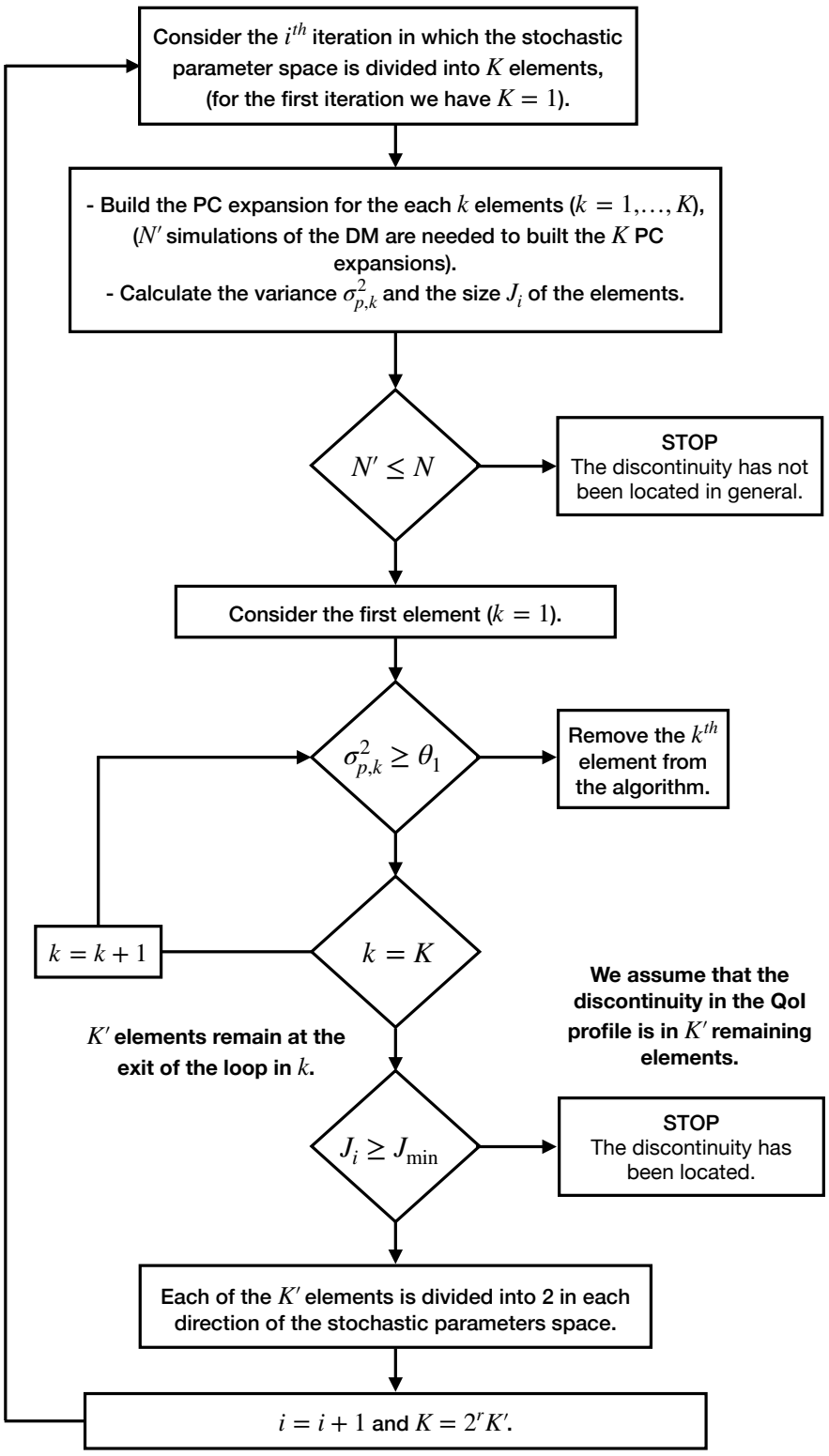


Figure F.4. Algorithm of the proposed method based on the ME-gPC.

F.5.1 Deterministic design variables

In this case, the parameters to optimize are directly the physical design parameters which are assumed to be known with certainty. The objective of the method is to find the optimal values of the NES parameters x_d that maximize the PHSSR value. For this purpose, the PHSSR is determined in the space of uncertain parameters x_u for each value of $x_d \in [x_d^{(\min)}\ x_d^{(\max)}]$. The maximum of the PHSSR is then detected, which

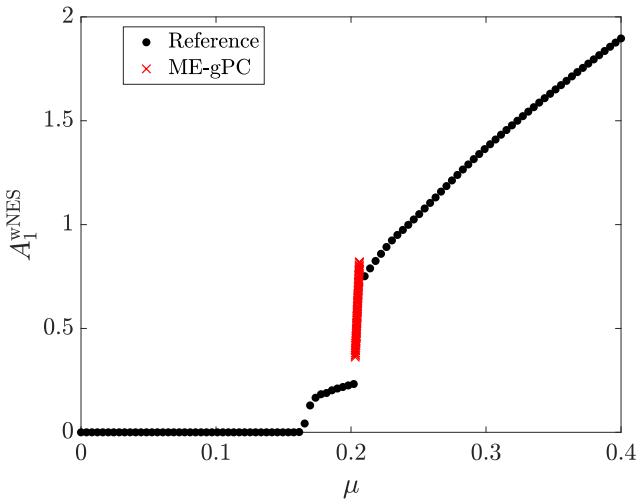


Figure F.5. Last iteration of the detection algorithm when the friction coefficient μ is uncertain, with $\theta_1 = 0.7 \cdot 10^{-3}$, $\theta_2 = 1\%$ and $p = 1$; reference curve obtained from Fig. F.3.

corresponds to the optimal value of x_d. The method can be summarized as follows :

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & \text{PHSSR } (A(x_d, x_u)) \\ \text{Subject to} \quad & x_d^{(\min)} \leqslant x_d \leqslant x_d^{(\max)} \\ \text{where} \quad & x_d = \{\eta_h, \varphi_h\}, \\ & x_u = \{\mu\} \end{aligned} \tag{F.17}$$

where

- $A(x_d, x_u)$ is the amplitude of the displacement of the coupled system (F.2) defined by Eq. (F.3) (from now on the amplitude is simply written A instead of A_1^{wNES} to lighten the notations) ; it depends on both the uncertain parameters x_u and the design variables x_d ;
- $x_d^{(\min)}$ and $x_d^{(\max)}$ are the minimum and maximum values of the design variables x_d respectively ; the optimal values of the design parameters are searched within the intervals $[x_d^{(\min)}\ x_d^{(\max)}]$, called *design intervals*.

F.5.2 Stochastic design variables

The physical design parameters are considered here to be random with a known probability law. This case is closer to a real situation, as it is known in particular that obtaining an exact value of a damping coefficient is almost impossible. The parameters to be optimized are then statistical characteristics of these physical parameters (for instance their means or variances) and are called *hyperparameters*. In this study the hyperparameters considered are the means $\hat{\eta}_h$ and $\hat{\varphi}_h$ of the damping coefficient and of the cubic stiffness of the NES, respectively.

The optimization process consists in dividing the design space into subspaces. In each subspace a draw of N values of the design parameters is performed according to their probability laws (in this work we use uniform laws). For each of these N values the PHSSR is calculated and the optimal value of x_d (here of $\hat{\eta}_h$ or $\hat{\varphi}_h$) corresponds to the subspace where the mean of the N PHSSR values is maximum. This can be summarized as follows :

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & \mathbb{E}[\text{PHSSR } (A(x_d, x_u))] \\ \text{Subject to} \quad & x_d^{(\min)} \leqslant x_d \leqslant x_d^{(\max)} \\ \text{where} \quad & x_d = \{\hat{\eta}_h, \hat{\varphi}_h\}, \\ & x_u = \{\mu\} \end{aligned} \tag{F.18}$$

where

- $\mathbb{E}$ is the value of the mathematical expectation (the mean) of all PHSSR evaluations ;

- $\hat{\eta}_h$ is the mean of the NES damping coefficient values ;
- $\hat{\varphi}_h$ is the mean of the NES cubic stiffness values.

F.6 Results for deterministic design variables

As explained before, the first method of NES optimization considers that the NES parameters are deterministic and constitute therefore directly the design variables to optimize.

F.6.1 Optimization of the NES damping coefficient

In this section, we consider first that the design space is a one-dimensional space according to the variable η_h, represented by the interval $[0, 0.04]$. The optimization problem (F.17) is therefore solved with $x_d = \eta_h \in [0, 0.04]$ with the other parameters given Eq. (F.4). The results are expressed in terms of computational cost, on the one hand, and of precision compared to the reference method, on the other hand. For this purpose, the following quantities are introduced :

- $\mu_{\text{ml}}^{\max}$ is the maximum value of the mitigation limit μ_{ml}, and corresponds to the maximum value of the PHSSR, denoted as $\text{PHSSR}^{\max}$. The mitigation limit is here searched within the interval $[0, 0.4]$. The PHSSR value estimated by the ME-gPC method is determined using the upper bounds of the last intervals found by the algorithm presented in Fig. F.5. The precision of the corresponding $\mu_{\text{ml}}^{\max}$ value is therefore given by :
$$\mu_{\text{ml}}^{\max} \pm \frac{\Delta\mu}{\mu_{\text{ml}}^{\max}}. \tag{F.19}$$
For the reference method, $\Delta\mu$ is given by the discretization step of the design space, whereas $\Delta\mu = 0.4\theta_2$, whith θ_2 defined by Eq. (F.13), for the ME-gPC method.
- $E_{\text{PHSSR}^{\max}}$ is the relative error of the maximum PHSSR obtained with the ME-gPC method ($\text{PHSSR}_{\text{ME-gPC}}^{\max}$) compared to the maximum PHSSR value obtained with the reference method ($\text{PHSSR}_{\text{ref}}^{\max}$), and is defined as follows :
$$E_{\text{PHSSR}^{\max}} = \frac{\left|\text{PHSSR}_{\text{ME-gPC}}^{\max} - \text{PHSSR}_{\text{ref}}^{\max}\right|}{\text{PHSSR}_{\text{ref}}^{\max}}. \tag{F.20}$$
- η_h^{opt} is the optimal value of the NES damping coefficient, i.e. the value for which $\mu_{\text{ml}}^{\max}$, and thus $\text{PHSSR}^{\max}$, are obtained. Since the design space is discretized with a step $\Delta\eta_h$, the optimal value is expressed as follows
$$\eta_h^{\text{opt}} \pm \frac{\Delta\eta_h}{\eta_h^{\text{opt}}}. \tag{F.21}$$
- Err is the relative error of the optimal design value η_h^{opt} obtained with the ME-gPC method, compared to that obtained with the reference method :
$$Err = \frac{\left|(\eta_h^{\text{opt}})_{\text{ME-gPC}} - (\eta_h^{\text{opt}})_{\text{ref}}\right|}{(\eta_h^{\text{opt}})_{\text{ref}}}. \tag{F.22}$$

F.6.1.1 Reference optimization

The reference value of the optimal NES damping coefficient, denoted as $(\eta_h^{\text{opt}})_{\text{ref}}$, is obtained by solving (F.17) where the amplitude $A(x_d, x_u)$, and thus the mitigation limit, directly result from the numerical simulation of (F.2). The design space for η_h $[0, 0.04]$ is uniformly discretized into 51 values. To reduce the computational cost, the mitigation limit μ_{ml} and the PHSSR are first roughly estimated for each η_h value using only 1000 values of the friction coefficient $\mu \in [0, 0.4]$ and applying the criterion (F.16). Fig. F.6 shows the resulting evolution of the PHSSR as a function of η_h. This first step enables the locating of the interval - here $[0.0208, 0.028]$ - in which the optimal value of the design parameter $(\eta_h^{\text{opt}})_{\text{ref}}$ lies. In this interval the PHSSR is maximum ($\text{PHSSR}^{\max} = 50.10\% \pm 0.19\%$) but constant due to the too coarse discretization in μ. To refine this reference result, the PHSSR is then calculated in the design interval $\eta_h \in [0.02, 0.03]$ with the same discretization step for η_h as previously, but now with 10 000 values of μ to determine the mitigation limit for each value of η_h. The total number of simulations needed to obtain the reference value is therefore equal to $50 \times 1000 + 10 \times 10\,000 = 150\,000$.

Fig. F.7 shows the new PHSSR as a function of η_h. In this case, $(\mu_{\text{ml}}^{\max})_{\text{ref}} = 0.2004 \pm 0.02\%$ which gives $(\text{PHSSR}^{\max})_{\text{ref}} = 50.1\% \pm 0.02\%$. The corresponding optimal design value of the damping coefficient is $(\eta_h^{\text{opt}})_{\text{ref}} = 0.0240 \pm 3.33\%$.

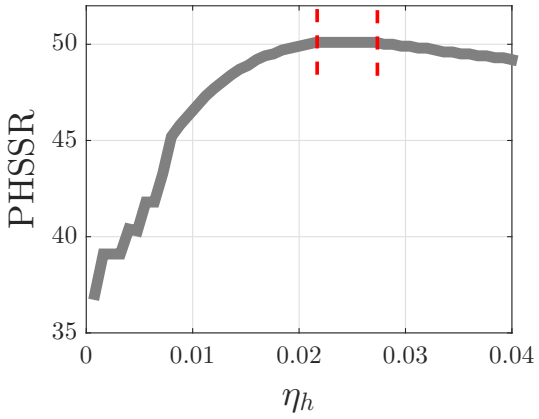


Figure F.6. Result of the first step of the reference optimization procedure : PHSSR as a function of η_h, for $\varphi_h = 140\ 000\ \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$.

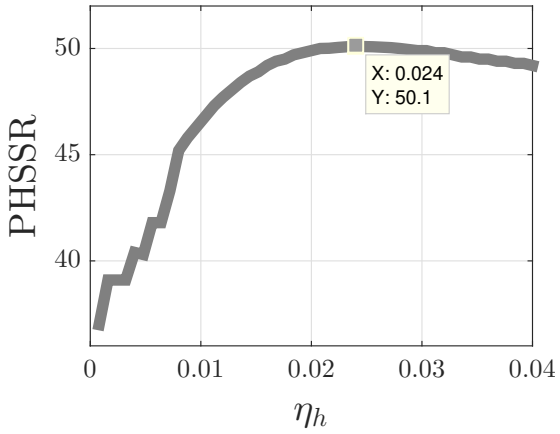


Figure F.7. Result of the second step of Reference optimization : PHSSR as a function of η_h, for $\varphi_h = 140\ 000\ \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$.

F.6.1.2 Optimization with the ME-gPC method

In the proposed approach, the optimal value of the NES damping coefficient, denoted as $(\eta_h^{\text{opt}})_{\text{ME-gPC}}$, is still obtained by solving (F.17), but the amplitude $A(x_d, x_u)$ and the mitigation limit (F.17) are now determined by the method based on the ME-gPC.

Three optimization procedures are applied with a gPC order $p = 1$, a variance threshold $\theta_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ and three values of the element size threshold : $\theta_2 = 1\%$, 0.1% and 0.001%. The results of this ME-gPC based optimization are presented in Tab. F.1, along with the reference results for comparison.

Fig. F.8 displays the variations of the PHSSR as functions of η_h respectively obtained with the reference method and the three ME-gPC methods with $\theta_2 = 1\%$, 0.1% and 0.001%. For $\theta_2 = 1\%$ the number of simulations is equal to 4324, the optimal value is $(\eta_h^{\text{opt}})_{\text{ME-gPC}} = 0.0241 \pm 15.14\%$ and the maximum value of the corresponding PHSSR is 50.78%, implying an error compared to the reference solution $E_{\text{PHSSR}^{\max}} = 1.35\%$. In the case of $\theta_2 = 0.1\%$, although the new value of θ_2 has no influence on η_h^{opt}, it changes the maximum value of the PHSSR to $\text{PHSSR}^{\max}_{\text{ME-gPC}} = 50.09\%$ which induces a relative error $E_{\text{PHSSR}^{\max}} = 0.02\%$. This error is lower than the previous one (with $\theta_2 = 1\%$) but the number of simulations has increased and is now equal to 5165. For $\theta_2 = 0.001\%$ the optimal value becomes $(\eta_h^{\text{opt}})_{\text{ME-gPC}} = 0.0237 \pm 3.33\%$, implying a relative error $Err = 1.25\%$ compared to the reference value, which is higher than the errors in the previous cases. This is not illogical since the error is calculated according to the midpoints of the intervals. Nevertheless, the interval obtained with $\theta_2 = 0.001\%$ is much narrower ($\pm 3.33\%$) than that obtained with $\theta_2 = 0.01\%$ ($\pm 15.14\%$), and contains the value resulting from the reference method. The total number of simulations is in this last case equal to 7026, which remains 22 times smaller than the number needed with the reference method.

The plateaus observed in Fig. F.8 are due to the fact that for two close values of η_h the mitigation limits

Tableau F.1. Comparison between the reference optimization and the ME-gPC optimization considering deterministic design variables. The design parameter is η_h. The reference results are obtained as described in Sect. F.6.1.1.

	Nb of simulations	Computational time	$\text{PHSSR}^{\max}$	$E_{\text{PHSSR}^{\max}}$	η_h^{opt}	Err
Reference	150 000	2.15 days	$50.10\% \pm 0.02\%$	–	$0.0240 \pm 3.33\%$	–
ME-gPC ($\theta_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ and $\theta_2 = 1\%$)	4324	1.70 hours	$50.78\% \pm 1.97\%$	1.35%	$0.0241 \pm 15.14\%$	0.41%
ME-gPC ($\theta_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ and $\theta_2 = 0.1\%$)	5165	2.06 hours	$50.09\% \pm 0.2\%$	0.02%	$0.0241 \pm 15.14\%$	0.41%
ME-gPC ($\theta_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ and $\theta_2 = 0.001\%$)	7026	3.23 hours	$50.09\% \pm 0.02\%$	0.02%	$0.0237 \pm 3.33\%$	1.25%

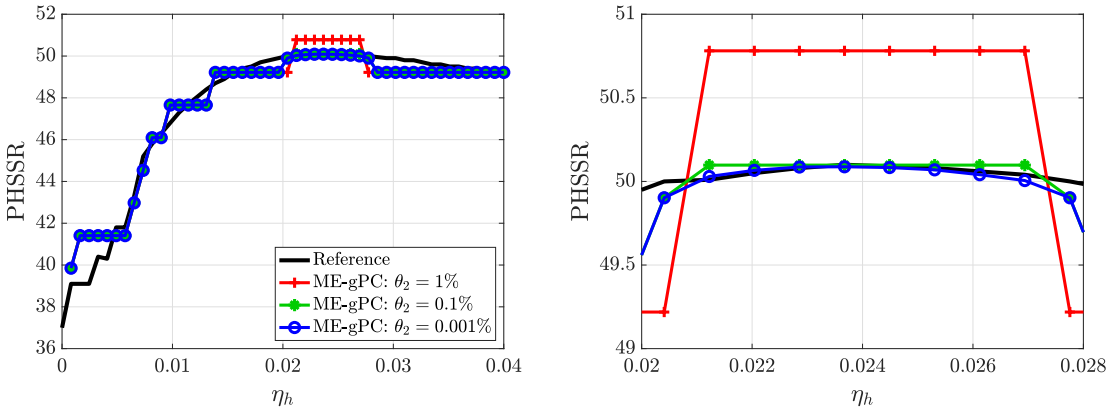


Figure F.8. Comparison between the optimization strategies based on the reference method and the ME-gPC for $\eta_h \in [0\ 0.04]$ with $\varphi_h = 140\ 000\ \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$. (a) PHSSR and (b) Zoom of the PHSSR. The reference results are obtained as described in Sect. F.6.1.1.

are found in the same element. They are related to the value of the threshold θ_2 : the lower it is, the more accurate the localization of the mitigation limit is, with in counterpart an increase of the computational cost. The precision is therefore driven by the value of the threshold θ_2.

Finally, with a computational cost much lower than the reference one, the proposed approach proves efficient to identify the value of the optimal NES damping coefficient while taking into account the dispersion of the friction coefficient.

F.6.2 Optimization of the NES nonlinear stiffness

The aim of this section is to find the optimal value of the cubic stiffness of the NES φ_h assumed here to be deterministic. The damping coefficient value η_h is here set to 0.024. Similarly to the previous section, the following quantities are defined :

- φ_h^{opt} is the optimal value of the NES cubic stiffness for which $\mu_{\text{ml}}^{\max}$, and thus $\text{PHSSR}^{\max}$, are obtained. It may be again expressed with respect to the discretization step $\Delta\varphi_h$ of the design space as

$$\varphi_h^{\text{opt}} \pm \frac{\Delta\varphi_h}{\varphi_h^{\text{opt}}}. \tag{F.23}$$

- *Err* is now the relative error of the optimal design value φ_h^{opt} obtained with the ME-gPC method, compared to that obtained with the reference method :

$$Err = \frac{|(\varphi_h^{\text{opt}})_{\text{ME-gPC}} - (\varphi_h^{\text{opt}})_{\text{ref}}|}{(\varphi_h^{\text{mid}})_{\text{ref}}}. \tag{F.24}$$

F.6.2.1 Reference optimization

The same strategy has been applied for the reference optimization of the NES cubic stiffness φ_h. First, to get an idea of the shape of the PHSSR as a function of φ_h, a small number of simulations is performed with a discretization step equal to 10 on the design space $\varphi_h \in [0, 900\,000]$ N·kg^{-1}·m^{-3}. For each value of φ_h the PHSSR is computed using 1000 values of μ within the interval $[0, 0.4]$. Fig. F.9 shows the resulting evolution of the PHSSR as a function of φ_h. The mitigation limit appears to decrease monotonically with the cubic stiffness value. The optimal value φ_h^{opt} is therefore the lowest value of φ_h for which the jump criterion (F.16) is met and is found equal to 100 000 N·kg^{-1}m^{-3}.

The next step then consists in focusing on a reduced design space composed of the lowest values of φ_h in order to understand the dynamic behavior of the system for these values and to refine the optimization result. The retained design interval $\varphi_h \in [0, 150\,000]$ N·kg^{-1}·m^{-3} is uniformly discretized into 100 values, and for each one the mitigation limit is directly computed from (F.2) using again 1000 values of μ within $[0, 0.4]$ interval. The number of simulations is thus equal to $100 \times 1000 = 100\,000$.

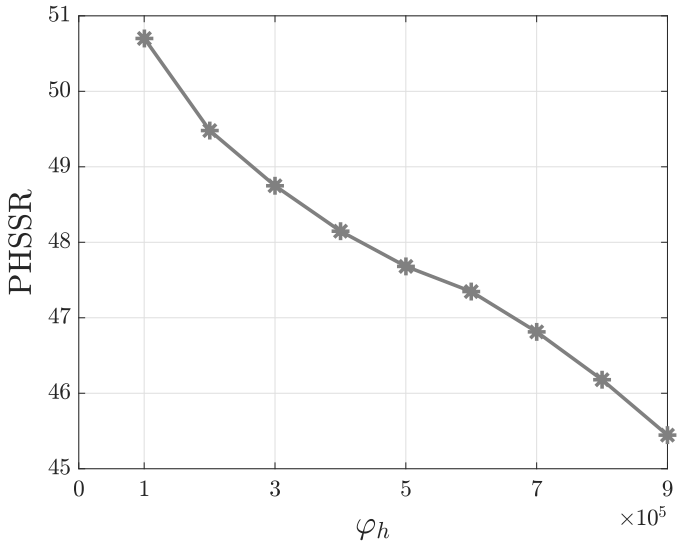


Figure F.9. PHSSR as a function of φ_h for $\eta_h = 0.024$ and $\varphi_h \in [0\ 900\,000]$ N·kg^{-1}·m^{-3}. The mitigation limits are assessed using the reference method.

Fig. F.10 shows the evolutions of the jump criterion (F.16) and of the PHSSR as functions of φ_h, respectively. For low values of φ_h ($\varphi_h \in [0\ 46\,970]$ N·kg^{-1}·m^{-3} a jump exists but, as mentioned before, we consider that the difference between the amplitudes of the limit cycles before and after the jump is too small for the concerned regimes to be qualified as mitigated. The difficulty of this optimization problem is then to find the lowest value of φ_h for which the discontinuity jump is high enough. It is clear that the solution depends on the value of the threshold for the jump criterion (here 50%). The optimal value here is therefore $(\varphi_h^{\text{opt}})_{\text{ref}} = 46\,970 \pm 3.22\%$ N·kg^{-1}·m^{-3}, which corresponds to the maximum PHSSR value $\text{PHSSR}^{\text{max}} = 52.25\% \pm 0.19\%$. The PHSSR curve exhibits again stationary phases linked to the discretization step for μ. Indeed, for two close values of φ_h, the discontinuities in the amplitude profiles as functions of μ appear for very close μ values whose difference is smaller than the discretization step.

F.6.2.2 Optimization with the ME-gPC method

We denote by $(\varphi_h^{\text{opt}})_{\text{ME-gPC}}$ the optimal value of the NES cubic stiffness coefficient obtained by solving (F.17) where the amplitude $A(x_d, x_u)$ and the mitigation limit are assessed using the ME-gPC based method.

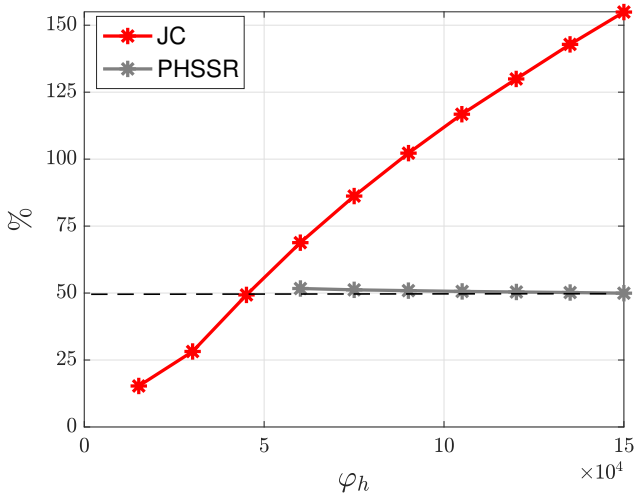


Figure F.10. Evolutions of the Jump Criterion (JC) and of the PHSSR as functions of φ_h obtained with the reference method.

Tableau F.2. Comparison between the reference optimization and the Me-gPC based optimization considering deterministic design variables. The design parameter is φ_h. The reference results are obtained as described in Sect. F.6.2.2.

	Nb of simulations	Computational time	$\text{PHSSR}^{\max}$	$E_{\text{PHSSR}^{\max}}$	φ_h^{opt}	Err
Reference	100 000	1.49 days	$52.25\% \pm 0.19\%$	–	$46\,970 \pm 3.22\%$	–
ME-gPC ($\theta_1 = 3.3 \cdot 10^{-3}$ and $\theta_2 = 1\%$)	6 652	2.64 hours	$53.90\% \pm 1.86\%$	3.15%	$33\,333 \pm 4.50\%$	29.03%
ME-gPC ($\theta_1 = 4.2 \cdot 10^{-3}$ and $\theta_2 = 1\%$)	5 817	2.31 hours	$53.13\% \pm 1.88\%$	1.68%	$39\,394 \pm 3.40\%$	22.51%
ME-gPC ($\theta_1 = 4.8 \cdot 10^{-3}$ and $\theta_2 = 1\%$)	5 706	2.25 hours	$53.13\% \pm 1.88\%$	1.68%	$45\,454 \pm 3.33\%$	3.22%
ME-gPC ($\theta_1 = 3.5 \cdot 10^{-3}$ and $\theta_2 = 0.1\%$)	7 023	2.96 hours	$52.34\% \pm 0.19\%$	0.35%	$46\,970 \pm 3.22\%\%$	0%

The gPC order is again set to $p = 1$ and the mitigation limit, as explained before, is approached by the upper bound of the last element found. Tab. F.2 compares the results obtained with this ME-gPC method, for several thresholds values θ_1 and θ_2, to those arising from the reference procedure (in which, as detailed in the previous section, the values of φ_h are taken from the design space $[0, 150\,000]$ $\text{N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$ which is uniformly discretized).

Fig. F.11 shows the evolution of the PHSSR as a function of φ_h for $\theta_1 = 3.5 \cdot 10^{-3}\%$ and $\theta_2 = 0.1\%$.

For a given value of the threshold θ_2, it can be observed from Tab. F.2 that the precision of the results depends on the jump threshold θ_1. Indeed, when the value of θ_1 increases, the error $\text{PHSSR}^{\max}$ decreases from 3.15% to 1.68% and the error Err decreases from 29.03% to 3.22%. Another benefit of increasing θ_1 is that it reduces the number of required simulations, as can be seen in Tab. F.2. However, for higher values of θ_1, the ME-gPC method appears unable to detect the discontinuity in the amplitude profile, as the jump in the amplitude values becomes lower than the threshold θ_1, which makes the research of the optimum θ_1 value difficult. Another way to reduce the error levels is to increase the value of the precision threshold θ_2. The optimum value of the jump detection threshold θ_1 depending on the precision threshold θ_2, the optimum pair

of thresholds is finally found as $\theta_1 = 3.5 \cdot 10^{-}3$ and $\theta_2 = 0.1$ %. The corresponding relative errors are 0.19 % for $\text{PHSSR}^{\max}$ and $Err = 0$ % for φ_h^{opt}, while the number of simulations has increased from 5706 to 7023. It is therefore observed that the precision level depends on the accepted computational cost. In this study, the final computational cost (7 023) with the ME-gPC method remains much weaker than that of the reference method (100 000).

Remark : as in section F.6.1 for the optimization of the NES damping coefficient, identical values of $\text{PHSSR}^{\max}$ may be observed with the ME-gPC method. The widths of the plateaus decrease when the precision threshold θ_1 is reduced.

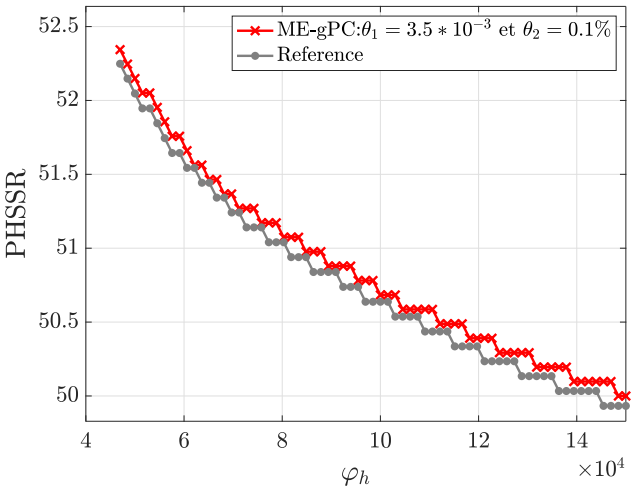


Figure F.11. PHSSR as a function of φ_h for $\eta_h = 0.024$ and $\varphi_h \in [0\ 150\,000]$ $\text{N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$. The thresholds are respectively : $\theta_1 = 3.5 \cdot 10^{-3}$ and $\theta_2 = 0.1\%$. The reference results are obtained as described in Sect. F.6.2.2.

F.7 Results for stochastic design variables

The second optimization technique considers that the NES parameters are also uncertain with a known probability law. Thus, the design variables to be optimized are not directly the NES parameters but one of their statistics called hyperparameters. In this work, the design parameters follow uniform probability distributions and the considered hyperparameter is the mean $\tilde{x}_d$. Regarding the system parameters, as previously only the friction coefficient μ is assumed to be uncertain.

F.7.1 Optimization of the NES damping coefficient

F.7.1.1 Reference optimization

In this section, the optimization problem (F.18) is solved with a single design variable (hyperparameter) defined as the mean $\hat{\eta}_h$ of the NES damping coefficient η_h, which is a stochastic parameter following a uniform law. The NES cubic stiffness is fixed and equal to $\varphi_h = 140\ 000$ $\text{N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$. The design space is divided into $N_I = 5$ intervals as shown in Tab. F.3. For each interval the lower and upper bounds are determined as follows : $\eta_h^{\text{inf}} = \hat{\eta}_h - 0.1\hat{\eta}_h$ and $\eta_h^{\text{sup}} = \hat{\eta}_h + 0.1\hat{\eta}_h$ where $\hat{\eta}_h$ is the mean. The mean values are chosen so that the upper bound of one interval coincides with the lower bound of the next interval.

In each interval, $N_d = 10$ random samples of damping coefficient values η_h are drawn according to the uniform probability law. For each of these 10 samples, the mitigation limit and the PHSSR are determined directly from the numerical simulation of (F.2) using 10000 values of the friction coefficient μ. The objective function to be maximized is now the mean $\mathbb{E}$[PHSSR] of the 10 PHSSR values obtained in each interval.

Tab. F.3 shows the reference results of the $\hat{\eta}_h$ optimization. For each interval, the mean of the 10 samples of η_h is calculated and compared to the theoretical $\hat{\eta}_h$ value in order to validate the number of samples. The mean PHSSR value $\mathbb{E}$[PHSSR] is also indicated, along with the error on $\mathbb{E}$[PHSSR] for a confidence level of 99%. The resulting values (errors lower than 0.15%) show that the number of samples $N_d = 10$ of η_h in each interval is sufficient.

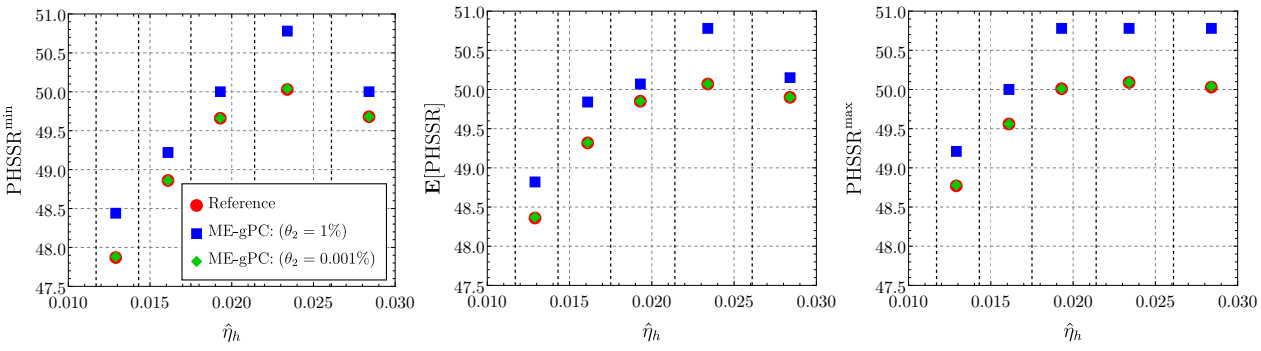
Tableau F.3. Results of the reference optimization (see Sect. F.7.1.1). The design parameter is $\hat{\eta}_h$.

$[\eta_h^{\text{inf}}, \eta_h^{\text{sup}}]$	Theoretical mean $\hat{\eta}_h$	Mean of the 10 samples of η_h	$\mathbb{E}$[PHSSR] (%)	Error on $\mathbb{E}$[PHSSR] for a confidence level = 99% (%)
[0.0117,0.0143]	0.0130	0.0129	48.36	0.1417
[0.0143,0.0175]	0.0159	0.0161	49.31	0.1086
[0.0175,0.0214]	0.0194	0.0193	48.85	0.0220
[0.0214,0.0261]	0.0237	0.0234	50.07	0.0005
[0.0261,0.0319]	0.0290	0.0284	49.90	0.0277

Tableau F.4. Results of the optimization with the ME-gPC method. The design parameter is $\hat{\eta}_h$.

			$\theta_2 = 1$ %		$\theta_2 = 0.001$ %	
$[\eta_h^{\text{inf}}, \eta_h^{\text{sup}}]$	Theoretical mean	Mean of the 10 samples of η_h	$\mathbb{E}$[PHSSR] (%)	Error on $\mathbb{E}$[PHSSR] for a confidence level = 99% (%)	$\mathbb{E}$[PHSSR] (%)	Error on $\mathbb{E}$[PHSSR] for a confidence level = 99% (%)
[0.0117,0.0143]	0.0130	0.0129	48.82	0.2833	48.37	0.1423
[0.0143,0.0175]	0.0159	0.0161	49.84	0.1776	49.32	0.1091
[0.0175,0.0214]	0.0194	0.0193	50.07	0.0994	49.85	0.0224
[0.0214,0.0261]	0.0237	0.0234	50.78	0	50.07	0.0005
[0.0261,0.0319]	0.0290	0.0284	50.15	0.1765	49.90	0.0280

Fig. F.12 displays the evolutions of $\mathbb{E}$[PHSSR], PHSSR$^{\text{max}}$ and PHSSR$^{\text{min}}$ as functions of $\hat{\eta}_h$. In this case, the maximum value of the objective function is 50.07%, which corresponds to an optimal theoretical value of $\hat{\eta}_h$ equal to 0.0237. The number of simulations is equal to $5 \times 10 \times 10\,000 = 500\,000$.



(a) Minimum of PHSSR (b) Mean of PHSSR (c) Maximum of PHSSR

Figure F.12. Evolutions of $\mathbb{E}$[PHSSR], PHSSR$^{\text{max}}$ and PHSSR$^{\text{min}}$ as functions of $\hat{\eta}_h$ obtained with the reference method, the ME-gPC based method with $\theta_2 = 1$ %, and the ME-gPC based method with $\theta_2 = 0.001$ %. The black segments denote the limits of the intervals. The reference results are obtained as described in Sect. F.7.1.1.

F.7.1.2 Optimization with the ME-gPC method

Tab. F.4 shows the results of the optimization of $\hat{\eta}_h$ by the ME-gpC based method. The gPC order is again chosen as $p = 1$, θ_1 is set to $1 \cdot 10^{-3}$ and two values of θ_2 are tested : $\theta_2 = 1\%$ and $\theta_2 = 0.001\%$. The design space is the same as for the reference optimization and the same quantities are considered.

Tab. F.5 compares the results obtained with the three strategies (reference optimization and ME-gPC based optimizations with $\theta_2 = 1\%$ and $\theta_2 = 0.001\%$). The corresponding evolutions of $\mathbb{E}[\text{PHSSR}]$, $\text{PHSSR}^{\max}$ and $\text{PHSSR}^{\min}$ according to $\hat{\eta}_h$ are displayed in Fig. F.12.

In the case of $\theta_2 = 1\%$, the number of simulations is equal to 4613, leading to a computational cost reduction of 98.98%. The maximum value of the objective function is here 50.78%, which corresponds to the same optimal value $\hat{\eta}_h = 0.0237$ as for the reference case. The relative error of the maximum PHSSR mean value with respect to the reference is $E_{\mathbb{E}[\text{PHSSR}]^{\max}} = 1.41\%$.

For $\theta_2 = 0.001\%$, the number of simulations is increased to 8006, which still induces a high computational cost reduction of 98.38%. The maximum value of the objective function is equal to that of the reference case, 50.07%, leading to a relative error $E_{\mathbb{E}[\text{PHSSR}]^{\max}} = 0\%$. The corresponding optimal value of $\hat{\eta}_h$ is again equal to 0.0237.

As for the optimization with deterministic design variables, it is again shown that a proper choice of the precision threshold θ_2 enables the reduction of the error levels. However, an error reduction leads to an increase of the required simulation number (from 4613 to 8006), and thus the retained precision level depends on the accepted computational cost. In both cases presented above, the computational costs with the ME-gPC optimization remains much weaker than that of the reference method (500 000). Moreover, it can be noticed that the optimal values of the mean of η_h, $\hat{\eta}_h = 0.0237$, and of the PHSSR mean, $\mathbb{E}(\text{PHSSR}) = 50,07\%$, are the same as those obtained with the deterministic optimization. This result is logical because the curve of the PHSSR as a function of η_h varies very little around the optimal value. Thus, the PHSSR mean remains practically constant.

Tableau F.5. Comparison between the reference optimization and the ME-gPC based optimization. The design parameter is $\hat{\eta}_h$. The reference results are obtained as described in Sect. F.7.1.1.

	Nb of simulations	Computational time	Computational cost reduction(%)	$\mathbb{E}[\text{PHSSR}]^{\max}$	$E_{\mathbb{E}[\text{PHSSR}]^{\max}}$	$\hat{\eta}_h^{\text{opt}}$
Reference	500 000	7.86 days	-	$50.07\% \pm 0.02\%$	–	0.0237
ME-gPC ($\theta_1 = 1 \cdot 10^{-3}$ and $\theta_2 = 1\%$)	4 613	1.92 hours	98.98	$50.78\% \pm 2\%$	1.41%	0.0237
ME-gPC ($\theta_1 = 1 \cdot 10^{-3}$ and $\theta_2 = 0.001\%$)	8 006	3.29 hours	98.38	$50.07\% \pm 0.02\%$	0%	0.0237

F.7.2 Optimization of the NES nonlinear stiffness

F.7.2.1 Reference optimization

The last optimization problem proposed in this paper (still represented by (F.18)) considers a single design variable (hyperparameter) $\hat{\varphi}_h$ which is here the mean of the NES nonlinear stiffness φ_h ; similarly to the previous optimization problem, φ_h is a stochastic parameter supposed to follow a uniform law. The NES damping coefficient η_h is set to 0.024.

The methodology is similar to that of the previous section with a design space divided into $N_I = 5$ intervals as shown in Tab. F.6. The lower and upper bounds of the intervals are again defined as $\varphi_h^{\text{inf}} = \hat{\varphi}_h - 0.1\hat{\varphi}_h$ and $\varphi_h^{\text{sup}} = \hat{\varphi}_h + 0.1\hat{\varphi}_h$, where the mean value $\hat{\varphi}_h$ is chosen so that the upper bound of one interval coincides with the lower bound of the next interval.

As previously, $N_d = 10$ random samples of stiffness values φ_h are drawn in each interval according to the uniform probability law, and for each sample the mitigation limit and the PHSSR are directly determined from the numerical simulation of (F.2) using 10000 values of the friction coefficient μ. The objective function to be maximized is the mean $\mathbb{E}[\text{PHSSR}]$ of the 10 PHSSR values obtained in each interval.

In section F.6.2 it has been shown that the PHSSR is a decreasing function of φ_h, which implies that the optimal value is the lowest value of φ_h for which the jump criterion (F.16) is met. It is therefore possible that a part of the interval where this optimal value lies (in concrete terms here, some of the 10 samples in the first interval $[38\,438, 46\,980]$ $\text{N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$) corresponds to φ_h values for which the jump criterion (F.16)

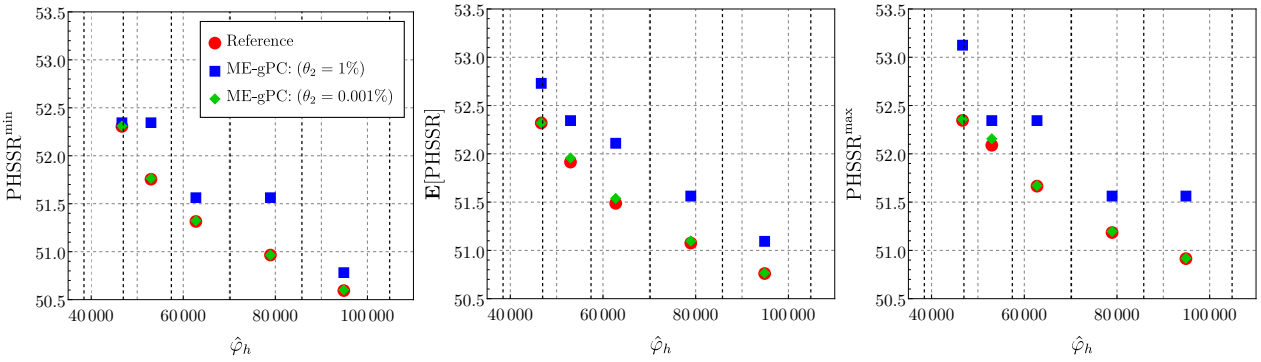
is not respected. In that case, 10 new samples of φ_h values are generated in the part of the interval (here [38 438, 46 980]) for which (F.16) is satisfied.

Tab. F.6 shows the reference results of the $\hat{\varphi}_h$ optimization. Similarly to the previous section, the mean of the 10 samples φ_h is calculated for each interval and compared to the theoretical $\hat{\varphi}_h$ value. The mean value $\mathbb{E}$[PHSSR] is also indicated, along with the error on $\mathbb{E}$[PHSSR] for a confidence level of 99%. With very low error levels (lower than 0.03%), the number of φ_h samples $N_d = 10$ in each interval is again found sufficient. This reference optimization has required a simulation number equal to $5 \times 10 \times 10\,000 = 500\,000$.

Tableau F.6. Results of the reference optimization (see Sect. F.7.2.1). The design parameter is $\hat{\varphi}_h$.

	Theoretical mean $\hat{\varphi}_h$	Mean of 10 samples of φ_h	$\mathbb{E}$[PHSSR] (%)	Error on $\mathbb{E}$[PHSSR] for a confidence level = 99% (%)
[38 438, 46 980]	42 709	46 678	52.32	0.0004
[46 980, 57 420]	52 200	52 992	51.95	0.0299
[57 420, 70 180]	63 800	62 746	51.53	0.0296
[70 180, 85 776]	77 978	78 942	51.07	0.0095
[85 776, 104 837]	95 306	94 876	50.76	0.0200

The evolutions of $\mathbb{E}$[PHSSR], PHSSR$^{\max}$ and PHSSR$^{\min}$ according to $\hat{\varphi}_h$ are displayed in Fig. F.13. In this case, the maximum value of the objective function is 52.32% which corresponds to an optimal value of $\hat{\varphi}_h$ equal to 46678. The very low error on the E(PHSSR) for a 99% confidence level obtained in this case is due to the fact that the PHSSR values are close in the interval.



(a) Minimum of PHSSR (b) Mean of PHSSR (c) Maximum of PHSSR

Figure F.13. Evolutions of $\mathbb{E}$[PHSSR], PHSSR$^{\max}$ and PHSSR$^{\min}$ as functions of $\hat{\varphi}_h$ with the reference method, the ME-gPC based method with $\theta_2 = 1$ % and the ME-gPC based method with $\theta_2 = 0.001$ %. The black segments denote the limits of the intervals. The reference results are obtained as described in Sect. F.7.2.1.

F.7.2.2 Optimization with the ME-gPC method

Tab. F.7 shows the results of the optimization of $\hat{\varphi}_h$ based on the ME-gPC, with again a gPC order $p = 1$, $\theta_1 = 4.8 \cdot 10^{-3}$ and two values of θ_2 : $\theta_2 = 1\%$ and $\theta_2 = 0.001\%$. The design space is discretized as for the reference optimization. For several intervals the error on $\mathbb{E}$[PHSSR] for a confidence level of 99% is null, meaning that the 10 PHSSR values corresponding to the 10 samples are identical. The evolutions of $\mathbb{E}$[PHSSR], PHSSR$^{\max}$ and PHSSR$^{\min}$ according to $\hat{\varphi}_h$ for the cases $\theta_2 = 1\%$ and $\theta_2 = 0.001\%$ are visible in Fig. F.13 along with the reference results.

The comparison of the different strategies to optimize the NES nonlinear stiffness (that is, the reference optimization and the two ME-gPC based optimizations with $\theta_2 = 1\%$ and $\theta_2 = 0.001\%$) is presented in Tab. F.8. In the case of $\theta_1 = 4.8 \cdot 10^{-3}$ and $\theta_2 = 1\%$, the number of simulations is equal to 3248, leading to a computational cost reduction of 99.21%. The maximum value of the objective function is 52.73%, which

Tableau F.7. Results of the optimization with the ME-gPC method. The design parameter is $\hat{\varphi}_h$.

			$\theta_2 = 1$ %		$\theta_2 = 0.001$ %	
$[\varphi_h^{\inf}, \varphi_h^{\sup}]$	Theoretical mean $\hat{\varphi}_h$	Mean of the 10 samples of φ_h	$\mathbb{E}$[PHSSR] (%)	Error on $\mathbb{E}$[PHSSR] for a confidence level = 99% (%)	$\mathbb{E}$[PHSSR] (%)	Error on $\mathbb{E}$[PHSSR] for a confidence level = 99% (%)
[38 438, 46 980]	42 709	46 678	52.73	0.4721	52.33	0.0007
[46 980, 57 420]	52 200	52 992	52.34	0	51.91	0.0148
[57 420, 70 180]	63 800	62 746	52.10	0.2230	51.48	0.0399
[70 180, 85 776]	77 978	78 942	51.56	0	51.09	0.0105
[85 776, 104 837]	95 306	94 876	51.09	0.2599	50.76	0.0206

Tableau F.8. Comparison between the reference optimization and the optimization with the ME-gPC method. The design parameter is $\hat{\varphi}_h$. The reference results are obtained as described in Sect. F.7.2.1.

	Nb of simulations	Computational time	Computational cost reduction (%)	$\mathbb{E}[\text{PHSSR}]^{\max}$	$E_{\mathbb{E}[\text{PHSSR}]^{\max}}$	$\hat{\varphi}_h^{\text{opt}}$
Reference	500 000	7.53 days	-	$52.32\% \pm 0.02\%$	–	46 678
ME-gPC ($\theta_1 = 4.8 \cdot 10^{-3}$ and $\theta_2 = 1\%$)	3248	1.42 hours	99.21	$52.73\% \pm 1.9\%$	1.50%	46 678
ME-gPC ($\theta_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ and $\theta_2 = 0.001\%$)	6947	3.06 hours	98.30	$52.33\% \pm 0.019\%$	0.09%	46 678

corresponds to an optimal value of $\hat{\varphi}_h$ equal to 46 678 N·kg^{-1}·m^{-3}, and the relative error on the maximum value of the PHSSR mean is $E_{\mathbb{E}[\text{PHSSR}]^{\max}} = 1.5\%$.

When $\theta_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ and $\theta_2 = 0.001\%$, the number of simulations is increased up to 6947, inducing a slightly reduced computational cost reduction of 98.30%. The maximum value of the objective function is now 52.33%, the optimal value of $\hat{\varphi}_h$ 46 678 N·kg^{-1}·m^{-3}, and the relative error on the maximum value of the PHSSR mean $E_{\mathbb{E}[\text{PHSSR}]^{\max}} = 0.09\%$.

The conclusions given for the optimization of the damping coefficient with the ME-gPC based method hold here : the choice of the precision threshold θ_2 enables the control of the error levels but impacts the computational costs, which remain however much lower than that with the reference method (500 000 simulations).

F.8 Conclusion

In this paper, the robust optimization of NES used to mitigate limit cycles of a friction system with an uncertain friction coefficient has been studied. The optimization strategy is based on the maximization of the propensity of the system to be in an attenuated regime (PHSSR), which constitutes the objective function of the problem. Two original approaches are proposed, depending on whether the parameters of the NES are considered as deterministic or as uncertain, but with a known probability distribution. In each case, two optimization strategies are developed, that consist in evaluating the objective function by either a deterministic reference optimization or by a method based on the Multi-Element generalized Polynomial Chaos (the so-called ME-gPC method). The comparison between the two methods shows the efficiency of the ME-gPC method to significantly reduce the computational cost while keeping a good accuracy compared to

the reference optimization.

These optimization approaches have been applied to determine the optimal values of the NES parameters to maximize their ability to passively attenuate limit cycle of oscillations. Concerning the NES nonlinear stiffness, the optimal value is the lowest value for which the discontinuity jump is considered as high enough. Concerning the NES damping coefficient, the curve representing the PHSSR as a function of the damping coefficient is nonlinear and presents a maximum corresponding to the optimal NES damping value. However, the variations of the PHSSR near the optimal value are very small, which makes it more difficult (but also less crucial) to precisely locate this optimal value.

The general nature of the proposed strategy suggests that it could be used for the robust optimization of any vibration absorber, providing that the transition from the attenuated state to the non-attenuated state passes through a discontinuity in the amplitude profile of the system as a function of the bifurcation parameter considered.

In future works, several issues should be tackled. First, as one of the difficulties of the proposed approach is to choose relevant values for the thresholds, it could be interesting to develop automatically adaptive thresholds. Another issue lies in the extension of the proposed method to several uncertain parameters. It can also be envisaged to study the efficiency of the method for a model with a higher number of degrees of freedom.

Annexe G

Nonlinear Dynamics 107 (2022) : 3291-3312 [a15]

Analytical prediction of delayed Hopf bifurcations in a simplified stochastic model of reed musical instruments

Baptiste Bergeot and Christophe Vergez

Abstract

This paper investigates the dynamic behavior of a simplified single reed instrument model subject to a stochastic forcing of white noise type when one of its bifurcation parameters (the dimensionless blowing pressure) increases linearly over time and crosses the Hopf bifurcation point of its trivial equilibrium position. The stochastic slow dynamics of the model is first obtained by means of the stochastic averaging method. The resulting averaged system reduces to a non-autonomous one-dimensional Itô stochastic differential equation governing the time evolution of the mouthpiece pressure amplitude. Under relevant approximations the latter is solved analytically treating separately cases where noise can be ignored and cases where it cannot. From that, two analytical expressions of the bifurcation parameter value for which the mouthpiece pressure amplitude gets its initial value back are deduced. These special values of the bifurcation parameter characterize the effective appearance of sound in the instrument and are called deterministic dynamic bifurcation point if the noise can be neglected and stochastic dynamic bifurcation point otherwise. Finally, for illustration and validation purposes, the analytical results are compared with direct numerical integration of the model in both deterministic and stochastic situations. In each considered case, a good agreement is observed between theoretical results and numerical simulations, which validates the proposed analysis.

Keywords : Single reed instruments, Self-sustained oscillations, Dynamic bifurcation, Bifurcation delay, Stochastic averaging

List of main symbols

The next list is not exhaustive, it describes only the main symbols that will be later used within the body of the document.

p_n, p, u	Physical unknowns in the reed instrument model (n^{th} modal component, pressure and volume flow at the input of the instrument respectively)
x_t, x_y	Amplitude of p in the amplitude/phase representation (different subscript is used to stress the dependance)
$A(y)$	Intermediate quantity used throughout the paper and defined by Eq. (G.34)
γ, γ_t	Dimensionless blowing pressure (the subscript $()_t$ indicates that γ varies with time)
$\hat{\gamma}^{st}$	Value of γ corresponding to a static Hopf bifurcation
y_t	Time-varying dimensionless blowing overpressure with respect to the static Hopf bifurcation ($= \gamma_t - \hat{\gamma}^{st}$)
$\hat{y}^{\text{dyn}}_{\text{det}}$	Analytical prediction of the value of y at which the system undergoes a dynamic Hopf bifurcation in the deterministic case
y_0	Value of y_t at $t = 0$
$\hat{y}^{\text{dyn}}_{\text{stoch,a}}$	Analytical prediction of the value of y at which the system undergoes a dynamic Hopf bifurcation in the stochastic case (the subscript $()_{\text{a}}$ means first level of approximation)
$\hat{y}^{\text{dyn}}_{\text{stoch,b}}$	Analytical prediction of the value of y at which the system undergoes a dynamic Hopf bifurcation in the stochastic case (the subscript $()_{\text{b}}$ means second level of approximation, less accurate than $\hat{y}^{\text{dyn}}_{\text{stoch,a}}$)
ν, σ	Magnitude of the stochastic forcing ($\sigma = \nu/\sqrt{2}$)
ϵ	Rate of linear increasing of the bifurcation parameter
α_i, ω_i, F_i	Modal parameters of the i^{th} mode (damping, eigenfrequency, modal factor respectively)

ζ Embouchure parameter (physical model of clarinet)

G.1 Introduction

Musical instruments are non-linear dynamical systems. An important specificity is that sound production in a musical context corresponds to a time-varying control. Indeed, control parameters are modified continuously by the instrument player. To give just one example, wind instruments players control air pressure in their mouth with variations over time finely tuned to produce the desired sound effect. On the other hand, when studying the corresponding mathematical models of sound production by musical instruments, the control parameters are considered constant over time most of the time. In this respect, the instruments are modeled by autonomous nonlinear systems of differential equations (ODEs) having, among other solutions, at least one trivial equilibrium position (corresponding to silence) and periodic solutions (corresponding to musical notes). The mouth pressure is then a bifurcation parameter of this ODEs system : when it is small the trivial solution is stable and, beyond a precise value called static bifurcation point ("static" because the bifurcation parameter is constant over time), the trivial solution loses its stability through a Hopf bifurcation giving rise to a periodic solution. In musical acoustics literature, the static bifurcation point of the trivial solution is often called oscillation threshold [49]. In this "static" context, periodic solutions and their stability can be also determined using for example the harmonic balance method [42, 71] or orthogonal collocation [81, 196]. Control parameters are changed over time only in the very special context of time simulations, e.g. when the objective is sound synthesis, not model behavior analysis.

The purpose of this paper is not to question these methods (with constant control parameters) which have shown their relevance (experimentally and numerically) when considering steady-state oscillation regimes (i.e. excluding all forms of transients). On the contrary, it is more a question of shedding light on the appearance of a sound when a time-varying control parameter (more specifically, the mouth pressure) crosses the static (Hopf) bifurcation point, as it is the case in playing situations. Moreover, experiments with a blowing machine and a clarinet-like instrument have shown in this case the existence of a delay at the bifurcation [a4] : when the pressure in the musician's mouth is increased linearly, the start of oscillations is observed for a pressure value greater than the static bifurcation point. This particular value of the mouth pressure for which the oscillations actually appear is called dynamic bifurcation point.

An analytical study to explain this observation has already been carried out on a discrete-time model of the clarinet [1] [a5, a6]. Considering a blowing pressure linearly increasing over time, the following results have been obtained in these works, which are typical of what is known in the field of dynamical bifurcation of discrete-time systems. In fact, the behavior of the bifurcation delay depends on the possibility of ignoring or not the presence of noise in the model. We are referring here only to the presence of an additive white noise. Sometimes even a noise with a very low amplitude coming from the rounding errors of the computer in numerical simulations must be taken into account. If the noise can be ignored the bifurcation delay depends only on the initial value of the linearly increasing mouth pressure, the farthest it starts below the static bifurcation point, the larger the delay. If the noise is no longer negligible, then the bifurcation delay loses the dependence on the initial condition and logically becomes dependent on the noise level but also on the increase rate of the mouth pressure. In this case, the bifurcation delay decreases with the noise level and increases with the increase rate of the mouth pressure. These properties of the bifurcation delay shown in these works are also found in other works in applied mathematics and physics whether for discrete or continuous-time systems with an additive white noise [11, 12, 23, 106]. The strong dependence of the bifurcation delay on noise makes essential to take it into account in the modeling a real life system like a musical instrument.

The discrete-time clarinet model considered in our previous cited works is known for its simplicity and its ability to explain some phenomena observed experimentally. However, the simple formulation of this model is achieved under very strict simplifying hypotheses. The most important ones are frequency independent losses, a cylindrical geometry, idealized radiation ...

Another approach, based on continuous-time models including ODE's, allows an easier consideration of refinements in the equations, leading to models with different levels of complexity [182]. The simplest model consists in retaining only one acoustic mode of the air-column in the instrument while assuming that the cane reed is driven instantaneously by the pressure difference between the mouth of the player and the input of the instrument [37]. The work presented in this paper is based on this model which is here considered with a blowing pressure linearly increasing over time and a stochastic forcing of white noise type.

The questions addressed in this paper are : How does the continuous-time clarinet model behave when the blowing pressure increases linearly, compared to the classical case of a blowing pressure constant over time ?

1. In this case the instrument is modeled by a difference equation similar to the logistic map. This model has been thoroughly studied in musical acoustics for control parameters constant over time [48, 194, 195].

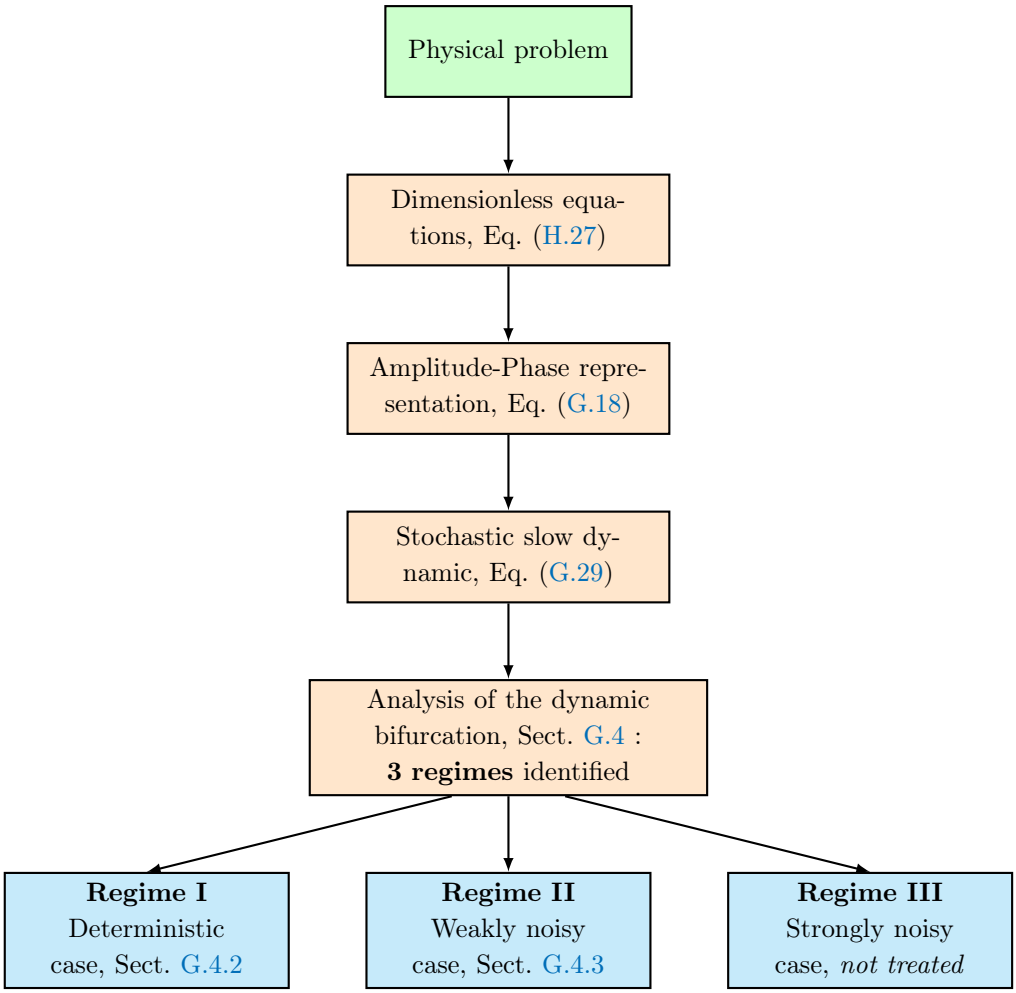


Figure G.1. Main steps of the proposed approach as a block diagram.

How do the results change when random fluctuations in the source term of the model are added (which may represent an idealized version of the turbulent noise due to the airflow) ? More precisely, through relevant approximations, the objective is to solve the studied model analytically by considering the general framework of the stochastic differential equations in order to predict the dynamic bifurcation points of the model.

The paper is organized as follows. The single reed instrument model is presented in Section G.2. Section G.2.1 gives the equations of motion of the classical deterministic one-mode model of single reed instruments and recalls the expression of its static bifurcation point. Section G.2.2 presents the model with, in addition, a stochastic forcing of white noise type, a linearly increasing blowing pressure and pertinent rescaling. In Section G.3, the stochastic averaging method is used to derive the slow dynamics of the model. Through simplifying assumptions, the slow dynamics is solved in Section G.4. The method is based on treating separately cases where noise can be ignored and cases where it cannot. An analytical expression of the dynamic bifurcation point is obtained in each case. In Section G.5, for illustration and validation purposes, these analytical results are compared with direct numerical integration of the model. Finally, concluding remarks and some perspectives are given in Section G.6.

The main steps of the proposed approach are summarized in Fig. G.1.

G.2 Single reed instrument model with a white noise forcing

G.2.1 Deterministic model of single reed instrument and its static bifurcation point

In this section the single reed instrument model is recalled as it is generally discussed in the literature, i.e. it is deterministic and the control parameters are constant over time.

Sound production by single reed instruments is classically modeled through the nonlinear coupling of two linear sub-systems [14, 37, 66] : the cane reed and the air-column inside the instrument. While blowing

air through the reed channel into the instrument, the musician provides a quasi-static source of energy. The instrument and the player constitute an autonomous dynamical system. When the trivial equilibrium solution of this system becomes unstable, a sound is produced [67, 181, 215].

Since the lowest resonance frequency of the reed is one order of magnitude higher than the sound frequency for many notes, the reed is often modeled as a lossless stiffness spring [10, 155]. Therefore, the position of the reed relative to rest (which determines the opening of the reed channel) is proportional to the pressure drop across the reed, i.e. the pressure difference between the mouth and the mouthpiece of the instrument. The linear pressure response of the air column P to the volume flow U through the reed channel is given in the frequency domain through the input impedance of the air column Z :

$$P(\omega) = Z(\omega)U(\omega), \tag{G.1}$$

where ω is the angular frequency. The contribution at the input of the instrument of the (infinite) series of modes of the air column is taken into account in $Z(\omega)$. For computational reasons, the series is truncated to N modes, where N is an integer :

$$Z(\omega) = \sum_{n=1}^{N} F_n \frac{j\omega}{\omega_n^2 + j\omega\alpha_n\omega_n - \omega^2}, \tag{G.2}$$

with F_n, ω_n and α_n the modal parameters, respectively the modal factor, the resonance angular frequency and the inverse of the quality factor of the n^{th} peak of the impedance (corresponding to the n^{th} mode of the air column). Eq. (H.22) can be written in the time domain :

$$\ddot{p}_n + \alpha_n\omega_n\dot{p}_n + \omega_n^2 p_n = F_n\dot{u}, \qquad \forall n \in [1, N], \tag{G.3}$$

with u the inverse Fourier transform of U and p_n is such that $p = \sum_{i=1}^{N} p_n$, where p is the inverse Fourier transform of P [181] and corresponds to the time evolution of the mouthpiece pressure.

The volume flow through the reed channel is related nonlinearly to the reed channel opening and the pressure difference between the mouth and the mouthpiece [50, 98]. A polynomial expansion of this relation is often written in the neighborhood of the equilibrium solution (i.e. the mean flow) [111] :

$$u(t) = u_{eq} + c_1 p(t) + c_2 p(t)^2 + c_3 p(t)^3, \tag{G.4}$$

with $u_{eq} = \zeta(1-\gamma)\sqrt{\gamma}$ the mean volume flow, $c_1 = \zeta\frac{3\gamma-1}{2\gamma^{\frac{1}{2}}}$, $c_2 = -\zeta\frac{3\gamma+1}{8\gamma^{\frac{3}{2}}}$ and $c_3 = -\zeta\frac{\gamma+1}{16\gamma^{\frac{5}{2}}}$, where γ is the dimensionless pressure in the mouth of the musician and ζ a dimensionless parameter accounting for many embouchure parameters. By Eq. (G.4), Eq. (H.23) can be written using only the pressure p as follows

$$\ddot{p}_n + \alpha_n\omega_n\dot{p}_n + \omega_n^2 p_n + F_n\dot{p}f(p,\gamma) = 0, \quad \forall n \in [1, N], \tag{G.5}$$

where $f(p,\gamma) = -\frac{\partial u}{\partial p}$.

A minimal model of a reed instrument including a single mode of the air-column is obtained by stating $N = 1$. In this case (H.25) becomes

$$\ddot{p} + \alpha_1\omega_1\dot{p} + \omega_1^2 p + F_1\dot{p}f(p,\gamma) = 0 \tag{G.6}$$

In this case ($N = 1$), since $p_1 = p$, p_1 is replaced by p in Eq. (H.26). Note that p and u are dimensionless and F_1 unit is s^{-1}. This is clearly a minimal yet useful model of sound production in reed instruments. Indeed, it takes into account the two main control parameters adjusted by the musician and describes the physical mechanism through which sound emerges from equilibrium (i.e. silence) when a resonance of the air column is excited by an incoming flow.

In this paper the bifurcation parameter under consideration is γ. The stability of the trivial equilibrium solution $p = 0$ with respect to γ is classically analyzed by looking at the sign of the eigenvalues real parts of the Jacobian matrix of Eq. (H.26) written in the state-space form. This leads to the following expression for the static Hopf bifurcation point

$$\hat{\gamma}^{\text{st}} = \frac{1}{3} + \frac{2\alpha_1\omega_1\left(\alpha_1\omega_1 + \sqrt{\alpha_1^2\omega_1^2 + 3\zeta^2F_1^2}\right)}{9\zeta^2F_1^2} \tag{G.7}$$

corresponding to the value of γ for which the two complex conjugate eigenvalues become with positive real parts. Note that in the lossless case (i.e. $\alpha_1 = 0$) the static bifurcation parameter is $\hat{\gamma}^{\text{st}} = \frac{1}{3}$. Static bifurcation point is known in the literature of acoustics of musical instruments as the "oscillation threshold" of the instrument. Expressions equivalent to Eq. (G.7) are given for example by Kergomard *et al.* [112] and Silva *et al.* [183].

Compared to the model given by (H.26), this article studies the case of a linearly increasing blowing pressure γ, with additional stochastic excitation as detailed in Sect. G.2.2.

G.2.2 One-mode stochastic single-reed instrument model with a linearly increasing blowing pressure

Hereafter, the formalism of stochastic differential equations is used in the framework of the Itô stochastic calculus. A good description of these concepts can found for example in [153].

The one-mode model described by Eq. (H.26) is now considered with a linearly increasing blowing pressure $\gamma = \hat{\epsilon}t + \gamma_0$. The variation of the blowing pressure is assumed to be small during a period $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ which is ensured by $0 < \hat{\epsilon} \ll 1$. Because one assumes also that $\omega_1 \gg 1$ (without loss a generality in musical context) the time variation of the mouth pressure γ is neglected in the time derivative of the mean flow (G.4). Moreover, the model is now forced by a stochastic excitation $\hat{\nu}\xi_t$ where $\hat{\nu}$ is the noise level and ξ_t is assumed to be a unitary idealized white noise process with zero mean, i.e.

$$\mathbb{E}\left[\xi_t\right] = 0 \quad \text{and} \quad \mathbb{E}\left[\xi_t \xi_{t+\tau}\right] = \delta(\tau) \tag{G.8}$$

where δ is the Dirac delta function and $\mathbb{E}\left[\{.\}\right]$ denotes the ensemble average [2] of $\{.\}$. Finally, the one-mode stochastic model is written as follows

$$\ddot{p}_t + \alpha_1\omega_1\dot{p}_t + \omega_1^2 p_t + F_1\dot{p}_t f(p_t, \gamma_t) = \hat{\nu}\xi_t \tag{G.9}$$

where the subscript t is used to show the stochastic nature of the differential equation. This is the classical notation in the framework of stochastic differential equations.

From the physical point of view, Eq. (G.9) can be interpreted as a simple model of sound production in reed instruments with turbulent noise contribution taken into account as an additive stochastic noise in the source term.

To facilitate the mathematical developments of the following sections, transformations are performed within Eq. (G.9). First, a new bifurcation parameter $y_t = \gamma_t - \hat{\gamma}^{\mathrm{st}}$ is considered to obtain a system whose trivial solution becomes unstable at $y = 0$ (i.e. $\hat{y}^{\mathrm{st}} = 0$). Then the time rescaling $t \to t' = \omega_1 t$ is introduced. Recalling that a normalized white noise ξ_t is defined as the time derivative of the normalized Wiener process W_t and using the *scaling property of Wiener process* (see [153], Chap. 2) which states that $W_{\frac{t}{\omega_1}}$ and $\frac{1}{\sqrt{\omega_1}}W_t$ are equivalent, we have

$$\xi_t = \frac{dW_t}{dt} \sim \omega_1 \frac{dW_{\frac{t'}{\omega_1}}}{dt'} \sim \sqrt{\omega_1}\frac{dW_{t'}}{dt'} = \sqrt{\omega_1}\xi_{t'}. \tag{G.10}$$

Therefore, by using also $\dot{\{\}}$ for the derivation with respect to t' and denoting t' by t for the sake of conciseness, Eq. (G.9) takes the form of the following stochastically forced self-excited oscillator

$$\ddot{p}_t + h\left(p_t, \dot{p}_t, y_t\right) + p_t = \nu\xi_t \tag{G.11}$$

where

$$h\left(p_t, \dot{p}_t, y_t\right) = \alpha_1\dot{p}_t + \frac{F_1}{\omega_1}\dot{p}_t f\left(p_t, y_t + \hat{\gamma}^{\mathrm{st}}\right) \tag{G.12}$$

and $\nu = \frac{\hat{\nu}}{\omega_1^{3/2}}$. The time evolution of y_t is given by

$$y_t = \epsilon t + y_0 \tag{G.13}$$

where $y_0 = \gamma_0 - \hat{\gamma}^{\mathrm{st}}$ and $\epsilon = \frac{\hat{\epsilon}}{\omega_1}$ with $0 < \epsilon \ll 1$ (because $\omega_1 \gg 1$). That means that if y_t is a slow variable for the time scale t it is also slow for the faster time scale $\omega_1 t$.

G.3 Equations governing the stochastic slow dynamics

Following Roberts and Spanos [169] the stochastic averaging method [114, 191], whose general formulation is recalled in Appendix G.8, is used to obtain the stochastic slow dynamics of Eq. (H.27). To apply the method, the response process $(p_t, \dot{p}_t)$ needs to be transformed into a pair of slowly varying processes. To achieve that, as in classical averaging methods of deterministic systems, an amplitude-phase representation is used imposing

$$p_t = x_t \cos\left(t + \varphi_t\right) \tag{G.14a}$$

$$\dot{p}_t = -x_t \sin\left(t + \varphi_t\right) \tag{G.14b}$$

2. We recall that the ensemble average consists in repeating the same measurement many times, and in calculating the average over them.

The desired form of Eq. (G.14b) requires that

$$\dot{x}_t \cos\phi_t - x_t\dot{\varphi}_t \sin\phi_t = 0, \tag{G.15}$$

with $\phi_t = t + \varphi_t$ which yields

$$\dot{\varphi}_t = \frac{\dot{x}_t}{x_t}\frac{\cos\phi_t}{\sin\phi_t} \quad \text{and} \quad \dot{x}_t = x_t\dot{\varphi}_t\frac{\sin\phi_t}{\cos\phi_t}. \tag{G.16}$$

Then differentiation of Eq. (G.14b) leads to

$$\ddot{p}_t = -x_t\cos\phi_t - \dot{x}_t\sin\phi_t - x_t\dot{\varphi}\cos\phi_t. \tag{G.17}$$

Finally, the substitution of (G.14) and (G.17) into (H.27) and the use of (G.16) yields

$$\dot{x}_t = h\left(x_t\cos\phi_t, -x_t\sin\phi_t, y_t\right)\sin\phi_t - \nu\xi_t\sin\phi_t \tag{G.18a}$$

$$\dot{\varphi}_t = h\left(x_t\cos\phi_t, -x_t\sin\phi_t, y_t\right)\frac{\cos\phi_t}{x_t} - \nu\xi_t\frac{\cos\phi_t}{x_t} \tag{G.18b}$$

which has a similar form as (G.70) in Appendix G.8 with

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_t &= (x_t, \varphi_t)^T, \qquad \boldsymbol{\eta}_t = (\xi_t, \xi_t)^T, \\
\mathbf{f}(\mathbf{x}_t, t) &= \begin{pmatrix} h\left(x_t\cos\phi_t, -x_t\sin\phi_t, y_t\right)\sin\phi_t \\ \dfrac{1}{x_t}h\left(x_t\cos\phi_t, -x_t\sin\phi_t, y_t\right)\cos\phi_t \end{pmatrix}, \\
\mathbf{g}(\mathbf{x}_t, t) &= \begin{pmatrix} -\nu\sin\phi_t & 0 \\ 0 & -\nu\dfrac{\cos\phi_t}{x_t} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{G.19}$$

with $()^T$ the transpose operator.

Following the approach described in Appendix G.8, the drift vector $\mathbf{m}$ (see Eq. (G.72)) is first computed. The first term $T^{\text{av}}\{\mathbf{f}\} = (F(x_t, y_t), G(x_t, y_t))^T$, with

$$\begin{aligned}
F(x_t, y_t) &= \left(\frac{F_1}{\omega_1}\zeta\frac{3(y_t + \hat{\gamma}^{\text{st}}) - 1}{4(y_t + \hat{\gamma}^{\text{st}})^{1/2}} - \frac{\alpha_1}{2}\right)x_t \\
&\quad + \frac{F_1}{\omega_1}\zeta\frac{3\left(\hat{\gamma}^{\text{st}} + y_t + 1\right)}{128\left(\hat{\gamma}^{\text{st}} + y_t\right)^{5/2}}x_t^3
\end{aligned} \tag{G.20}$$

$$G(x_t, y_t) = 0, \tag{G.21}$$

corresponds to the classical (deterministic) Bogoliubov-Krylov averaging of the vector function $\mathbf{f}$, i.e. the time average is performed assuming that x_t and ϕ_t are slow variables with respect to the unitary eigenfrequency of the considered dimensionless simplified reed instrument model (H.27) which therefore corresponds to a period equal to 2π.

Then, the second part of the drift vector $\mathbf{m}$ (see again Eq. (G.72)) is determined as

$$\begin{aligned}
&T^{\text{av}}\left\{\int_{-\infty}^{0}\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial(\mathbf{g}\boldsymbol{\eta})}{\partial\mathbf{x}}\right)_t(\mathbf{g}\boldsymbol{\eta})_{t+\tau}\right]d\tau\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial(\mathbf{g}\boldsymbol{\eta})}{\partial\mathbf{x}}\right)_t(\mathbf{g}\boldsymbol{\eta})_{t+\tau}\right]d\tau dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\int_0^{2\pi}\delta(\tau)\begin{pmatrix} \dfrac{\nu^2\cos\phi_t\cos\phi_{t+\tau}}{x_t} \\ -\nu^2\dfrac{\sin\phi_t\cos\phi_{t+\tau} + \cos\phi_t\sin\phi_{t+\tau}}{x_t^2}\end{pmatrix}dtd\tau \\
&= \begin{pmatrix}\frac{\nu^2}{4x_t} \\ 0\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{G.22}$$

in which the symbol $\mathbb{E}[]$ disappeared due to definitions (G.8) and one used the fact that $\int_{-\infty}^{0}\delta(\tau)\cos(\tau)d\tau = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau)\cos(\tau)d\tau = \frac{1}{2}$. The final expression of the drift vector is therefore

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} F(x_t, y_t) + \dfrac{\nu^2}{4x_t} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{G.23}$$

Now the expression of the diffusion matrix $\boldsymbol{\sigma}$ is determined from (G.73) starting by computing

$$\begin{aligned} & T^{\mathrm{av}}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{E}\left[(\mathbf{g}\boldsymbol{\eta})_t(\mathbf{g}\boldsymbol{\eta})_{t+\tau}^T\right]d\tau\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{E}\left[(\mathbf{g}\boldsymbol{\eta})_t(\mathbf{g}\boldsymbol{\eta})_{t+\tau}^T\right]d\tau dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\begin{pmatrix}\frac{\nu^2\delta(\tau)\cos(\tau)}{2} & -\frac{\nu^2\delta(\tau)\sin(\tau)}{2x_t} \\ \frac{\nu^2\delta(\tau)\sin(\tau)}{2x_t} & \frac{\nu^2\delta(\tau)\cos(\tau)}{2x_t^2}\end{pmatrix}d\tau \\ &= \begin{pmatrix}\frac{\nu^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\nu^2}{2x_t^2}\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{G.24}$$

in which again definitions (G.8) have been used. From (G.24) a possible solution of (G.73) is

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix}\frac{\nu}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_t}\frac{\nu}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}. \tag{G.25}$$

Therefore, according to (G.71) the equations governing the stochastic slow dynamics of (H.27) are

$$dx_t = \left(F(x_t,y_t) + \frac{\nu^2}{4x_t}\right)dt + \frac{\nu}{\sqrt{2}}dW_t \tag{G.26a}$$

$$d\varphi_t = \frac{1}{x_t}\frac{\nu}{\sqrt{2}}dW_t. \tag{G.26b}$$

in which the time evolution of the amplitude x_t is uncoupled from that of the phase φ_t.

Assuming a weak noise level (i.e. $\nu \ll 1$) and therefore neglecting the term $\frac{\nu^2}{4x_t}$ in (G.26a) and denoting $\sigma = \frac{\nu}{\sqrt{2}}$ we obtain the following Itô stochastic differential equation for the amplitude of the mouth pressure p_t

$$dx_t = F(x_t,y_t)dt + \sigma dW_t. \tag{G.27}$$

The scaling and time shift properties of Wiener process (see [153], Chap. 2) allow us to write that $\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\left(W_{\epsilon t+y_0} - W_{y_0}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}W_{\epsilon t} \sim W_t$ and therefore

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}dW_y \sim dW_t. \tag{G.28}$$

Finally, from (G.27) and (G.28) we obtain the final form of the slow dynamics as

$$dx_y = \frac{1}{\epsilon}F(x_y,y)dy + \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}}dW_y. \tag{G.29}$$

where x_t and y_t are now denoted x_y and y respectively to emphasize that Eq. (G.29) is a non-autonomous one-dimensional Itô stochastic differential equation with respect to x_y depending on y which acts as the time variable.

G.4 Analytical expression of the dynamic pitchfork bifurcation points of the averaged system

The supercritical Hopf bifurcation at $y = 0$ for the initial (non averaged) system (H.27) becomes a supercritical pitchfork bifurcation for Eq. (G.27). Therefore, if the averaged system (G.27) is a good approximation of (H.27), the dynamic Hopf bifurcation point of Eq. (H.27) is very close to the dynamic pitchfork bifurcation point of (G.27). The analytical expression of the latter is obtained in this section in both deterministic and stochastic cases.

As stated by Stocks et al. [190], the dynamic bifurcation point [3] has two main definitions : it is (1) the value of the bifurcation parameter y when $\sqrt{\mathbb{E}\left[x_y^2\right]}$ crosses a predefined threshold x_{th}^2 (here the initial value is

3. Sometimes called *exit value* in the literature.

chosen) or (2) the value of the bifurcation parameter y at which, on average, the random variable x_y^2 crosses the same given threshold x_{th}^2. In general, these two averaging procedures will lead to two slightly different results. In the paper the first definition is chosen and is clearly recalled below. Other definitions exist (see e.g. [11] and [a6] for a clarinet-like system).

Definition G.1 (Dynamic pitchfork bifurcation point). In the case of a pitchfork bifurcation and in a deterministic framework, the dynamic bifurcation point is defined as the value of y for which x_y exceeds its initial value x_{y_0} (in absolute value). In a stochastic framework, as in this work, the expected value of the squared amplitude is considered and the bifurcation point, denoted $\hat{y}^{\text{dyn}}$, is defined as the value of y_t for which $\sqrt{\mathbb{E}\left[x_y^2\right]}$ exceeds the initial value x_{y_0}. The dynamic bifurcation point is larger than the static bifurcation and the difference between them is called **bifurcation delay**.

G.4.1 Solution of the linearized averaged system

The linearized version of (G.29) with respect to x_y around 0 is considered

$$dx_y = \frac{1}{\epsilon}a(y)x_y dy + \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}}dW_y \tag{G.30}$$

where, from Eq. (G.20), one has

$$a(y) = \frac{\partial F}{\partial x_y}(0,y) = \frac{F_1}{\omega_1}\zeta\frac{3(y+\hat{\gamma}^{\text{st}})-1}{4(y+\hat{\gamma}^{\text{st}})^{1/2}} - \frac{\alpha_1}{2}. \tag{G.31}$$

In order to solve (G.30), the deterministic differential equation associated to the latter is first considered as

$$\frac{dx_y}{dy} = \frac{1}{\epsilon}a(y)x_y \tag{G.32}$$

whose solution, denoted $x^{\text{det}}(y)$, is

$$x^{\text{det}}(y) = x_{y_0}e^{\frac{1}{\epsilon}(A(y)-A(y_0))} \tag{G.33}$$

where

$$A(y) = \frac{\zeta F_1(\hat{\gamma}^{\text{st}}+y-1)\sqrt{\hat{\gamma}^{\text{st}}+y}}{2\omega_1} - \frac{\alpha_1}{2}y. \tag{G.34}$$

is the antiderivative of $a(y)$.

Following a well-known method for solving stochastic differential equations, we apply the Itô formula (see Eq. (G.69) in Appendix G.7) to the function $f(x_y,y) = x_y e^{-\frac{1}{\epsilon}(A(y)-A(y_0))}$ which is constant for the deterministic Eq. (G.32) (indeed through Eq. (G.33) one has $f(x^{\text{det}}(y),y) = x_{y_0}$). Using the differential of the product rule, and noting that in the Itô formula the term $\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{\epsilon}a(y)x_y\frac{\partial f}{\partial x}$ vanishes, we obtain

$$df(x_y,y) = \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}}e^{-\frac{1}{\epsilon}(A(y)-A(y_0))}dW_y \tag{G.35}$$

and integrating (G.35) from y_0 to y yields the following solution of Eq. (G.30)

$$x_y = x^{\text{det}}(y) + \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}}e^{\frac{1}{\epsilon}A(y)}\int_{y_0}^{y} e^{-\frac{1}{\epsilon}A(y')}dW_{y'}. \tag{G.36}$$

Note that the first and second terms of the right-hand side of (G.36) are the deterministic and stochastic parts of x_y respectively. The integral in the second term is called an Itô integral and, for a given function g, has the following property $\mathbb{E}\left[\int g dW_y\right] = 0$ assuming some properties for the function g (see [153], Chap. 3) that are respected by $e^{-\frac{1}{\epsilon}A(y)}$. Therefore we have

$$\mathbb{E}\left[\int_{y_0}^{y} e^{-\frac{1}{\epsilon}A(y)}dW_y\right] = 0. \tag{G.37}$$

That means that the expected value of x_y is the solution of the associated deterministic equation (G.32), i.e. $\mathbb{E}\left[x_y\right] = x^{\text{det}}(y)$.

Now $\mathbb{E}\left[x_y^2\right]$ is computed from (G.36), that yields

$$\mathbb{E}\left[x_y^2\right] = \mathbb{E}\left[(x^{\text{det}}(y))^2\right]$$

$$+\mathbb{E}\left[\frac{\sigma^2}{\epsilon}e^{\frac{2}{\epsilon}A(y)}\left(\int_{y_0}^{y}e^{-\frac{1}{\epsilon}A(y')}dW_{y'}\right)^2\right]+\mathbb{E}\left[2\,x^{\mathrm{det}}(y)\frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}}e^{\frac{1}{\epsilon}A(y)}\int_{y_0}^{y}e^{-\frac{1}{\epsilon}A(y')}dW_{y'}\right]. \tag{G.38}$$

Using again the property of the Itô integral which states that $\mathbb{E}\left[\int g dW_y\right]=0$, the third term in the right-hand side of (G.38) is equal to zero. The second term is simplified using the *Itô isometry* (see Corollary 3.1.7 in [153], Chap. 3) which states that $\mathbb{E}\left[\left(\int g dW_y\right)^2\right]=\mathbb{E}\left[\int g^2 dy\right]$ assuming again some properties for the function g that are resected by $e^{-\frac{1}{\epsilon}A(y)}$. Therefore we obtain the final expression of the expected value of the squared amplitude

$$\mathbb{E}\left[x_y^2\right]=\mathcal{D}(y)+\mathcal{S}(y) \tag{G.39}$$

where

$$\mathcal{D}(y)=(x^{\mathrm{det}}(y))^2 \tag{G.40a}$$

$$\mathcal{S}(y)=\frac{\sigma^2}{\epsilon}e^{\frac{2}{\epsilon}A(y)}\int_{y_0}^{y}e^{-\frac{2}{\epsilon}A(y)}dy \tag{G.40b}$$

are respectively the deterministic and the stochastic parts of the expected value of the squared amplitude.

From (G.39) and according to [19], three regimes can be distinguished for a system such as (G.29) undergoing a dynamic pitchfork bifurcation :

- *Regime I :* $\mathcal{S}(y)\ll\mathcal{D}(y)$. In this case the noise level is so small that it can be neglected and the problem is identical to the deterministic case (G.32) which undergoes the greatest possible bifurcation delay.
- *Regime II :* $\mathcal{S}(y)\gg\mathcal{D}(y)$ with a noise level not too high. The noise can no longer be neglected but it remains small enough for linearized model (G.30) to remain valid. A bifurcation delay still exists but it is reduced compared to Regime I.
- *Regime III :* $\mathcal{S}(y)\gg\mathcal{D}(y)$ with a high noise level. In this situation the behavior of the system is dominated by noise and the trajectory of x_y leaves the neighborhood of zero before the static bifurcation point $y=0$ is reached. In such a case the linear approximation is therefore not valid anymore and, as highlighted by Berglung and Gentz [19], the notion of bifurcation delay becomes meaningless.

The domains of existence of each regime are given explicitly in Sect. G.4.4.

In the two following parts, we concentrate on Regimes I and II, giving the analytical expression of the dynamic bifurcation points considering each regime separately.

G.4.2 Dynamic bifurcation point in the deterministic case

In this section we assume that the system is in Regime I and therefore $\mathbb{E}\left[x_y^2\right]=\mathcal{D}(y)=(x^{\mathrm{det}}(y))^2$ (with $x^{\mathrm{det}}(y)$ given by Eq. (G.33)). Consequently, from Definition G.1, the deterministic dynamic bifurcation point, denoted $\hat{y}_{\mathrm{det}}^{\mathrm{dyn}}$, is a solution of $x_{y_0}=x_{y_0}e^{\frac{1}{\epsilon}(A(y)-A(y_0))}$ and therefore of

$$A(y)=A(y_0). \tag{G.41}$$

From (G.34), Eq. (G.41) is solved (details are given in Appendix G.9). It is shown that, in addition to the trivial solution $y=y_0$, Eq. (G.41) has two other solutions. The one that corresponds to the deterministic dynamic bifurcation point is

$$\hat{y}_{\mathrm{det}}^{\mathrm{dyn}}=X_2^2-\hat{\gamma}^{\mathrm{st}}, \tag{G.42}$$

where X_2 is given by Eq. (G.78). We will see in Fig. G.2 that the maximum of $\hat{y}_{\mathrm{det}}^{\mathrm{dyn}}$ is obtained for $y_0=-\hat{\gamma}^{\mathrm{st}}$ and in this case Eq. (G.42) reduces to

$$\hat{y}_{\mathrm{det}}^{\mathrm{dyn}}=\frac{\left(\alpha_1\omega_1+\sqrt{\alpha_1^2\omega_1^2+4\zeta^2F_1^2}\right)^2}{4\zeta^2F_1^2}-\hat{\gamma}^{\mathrm{st}} \tag{G.43}$$

It is important to be aware that even if $\hat{y}_{\mathrm{det}}^{\mathrm{dyn}}$ has a finite value for $y_0=-\hat{\gamma}^{\mathrm{st}}$, the function $F(x,y)$ in Eq. (G.29) diverge at $y=-\hat{\gamma}^{\mathrm{st}}$. Therefore, Eq. (G.43) must be understood as a limit value for y_0 very close to $-\hat{\gamma}^{\mathrm{st}}$ (from above). However, for values of y very close to $-\hat{\gamma}^{\mathrm{st}}$, the linearization of Eq. (G.29) with respect to x (leading to Eq. (G.30)) is valid if x is very close to zero. In other words, Eq. (G.43) is valid to predict the deterministic bifurcation point of a numerical simulation of Eq. (G.29) only if y_0 and x_{y_0} are very close to $-\hat{\gamma}^{\mathrm{st}}$ and 0 respectively. This corresponds to the situation where the musician begins to blow gently into the instrument.

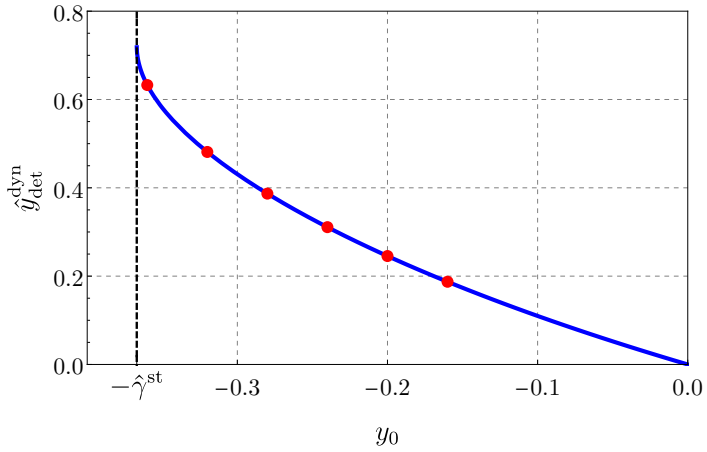


Figure G.2. Deterministic dynamic bifurcation point $\hat{y}^{\rm dyn}_{\rm det}$, given by Eq. (G.42), as a function of the initial condition y_0. The opposite of the static bifurcation point $\hat{\gamma}^{\rm st}$, given by Eq. (G.7), is depicted by a vertical dashed line. The red points correspond to the initial conditions used in Fig. G.3. The set of parameters (G.45) is used.

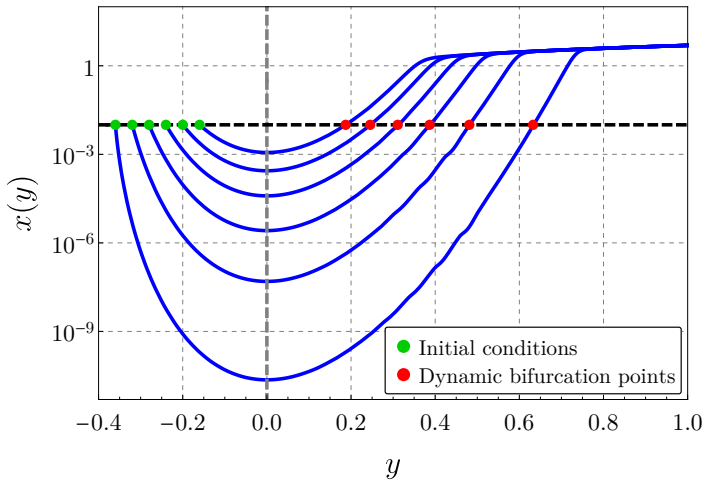


Figure G.3. Numerical simulations of the deterministic differential equation associated to Eq. (G.29) using a logarithm scale for the vertical axis. The set of parameters (G.45) is used with, in addition, $x(y_0) = 0.01$ (the latter is depicted by a horizontal dashed line) and $y_0 = -0.36, -0.32, \ldots, -0.16$. The static bifurcation point $\hat{y}^{\rm st} = 0$ is depicted by a vertical gray dashed line. The dynamic bifurcation point $\hat{y}^{\rm dyn}_{\rm det}$ is defined for a given initial condition by the value of y for which $|x(y)| = |x(y_0)|$, which corresponds graphically to the intersection between the blue curves and the horizontal dashed line. The green and red points are used respectively to highlight the considered initial conditions and the corresponding dynamic bifurcation points predicted by Eq. (G.42).

In the lossless case, i.e. $\alpha_1 = 0$ and $\hat{\gamma}^{\rm st} = \frac{1}{3}$, Eq. (G.42) becomes

$$\hat{y}^{\rm dyn}_{\rm det} = \frac{1}{2}\left(1 - y_0 - \sqrt{1 + y_0(2 - 3y_0)}\right) \tag{G.44}$$

which depends only on the initial value y_0. Note first that Eq. (G.44) yields $\hat{y}^{\rm dyn}_{\rm det} = 2/3$ if $y_0 = -\hat{\gamma}^{\rm st} = -\frac{1}{3}$.

This is the largest value of the dynamic bifurcation point. From a physical point of view this means that the oscillations emerge when the blowing pressure $\gamma = \hat{\gamma}^{\rm st} + \hat{y}^{\rm dyn}_{\rm det} = 1$. However this value is known to be the limit of validity of the clarinet model since the reed channel becomes completely closed (an effect not taken into account in the model considered in the work). Therefore, in the lossless case a linear increase of the blowing pressure from an arbitrary small value gives a scenario where the clarinet never plays. This remark can be extended, as shown below, to situations in which damping is taken into account (i.e. $\alpha_1 > 0$).

Then, in cases with and without damping, $\hat{y}^{\rm dyn}_{\rm det}$ does not depend on the slope ϵ which may seem counterintuitive.

The deterministic dynamic bifurcation point $\hat{y}^{\rm dyn}_{\rm det}$, given by Eq. (G.42), is plotted in Fig. G.2 as a function

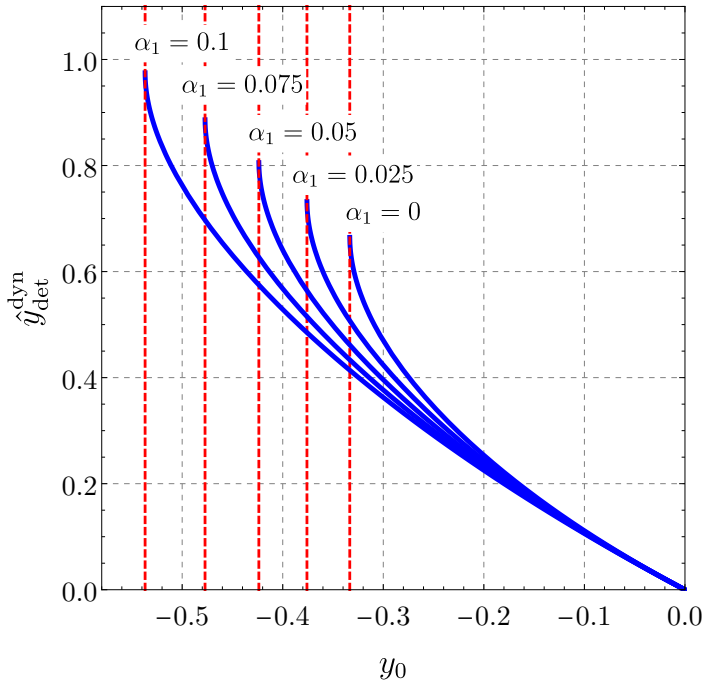


Figure G.4. The deterministic bifurcation point $\hat{y}_{\text{det}}^{\text{dyn}}$ given by Eq. (G.42) as a function of the initial condition y_0 for five values of the damping coefficient, i.e. $\alpha_1 = 0, 0.025 \ldots, 0.1$ with $\omega_1 = 1000$ rad·s^{-1}, $F_1 = 1200$ s^{-1} and $\zeta = 0.2$. Red dashed lines indicate the value of $-\hat{\gamma}^{\text{st}}$ for each value of α_n.

of the initial condition y_0 with the following set of parameters :

$$\begin{gathered} \epsilon = 0.002, \quad \omega_1 = 1000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \alpha_1 = 0.02, \\ F_1 = 1200 \text{ s}^{-1} \quad \text{and} \quad \zeta = 0.2. \end{gathered} \tag{G.45}$$

The figure shows that $\hat{y}_{\text{det}}^{\text{dyn}}$ is a decreasing function with respect to y_0 and, as previously mentioned, the maximum is obtained for $y_0 = -\hat{\gamma}^{\text{st}}$. Moreover, the red points correspond to the initial conditions used in Fig. G.3. In the latter, numerical simulations of the deterministic differential deterministic differential equation associated to Eq. (G.29) are shown with a logarithmic scale for the vertical axis. The same parameters are as in Fig. G.2 and the initial values are : $x(y_0) = 0.01$ and $y_0 = -0.36, -0.32, \ldots, -0.16$. The dynamic bifurcation point is defined for a given initial condition by the value of y for which $|x(y)| = |x(y_0)|$, which corresponds graphically to the intersection between the blue curves and the horizontal dashed line. The minimum is reached at the static bifurcation point $\hat{y}^{\text{st}} = 0$ (depicted by a vertical dashed gray line). One can see that the smaller y_0, the smaller the minimum of the trajectory $x(y)$ too and consequently the longer the path to travel before reaching $x(y_0)$ leading to larger values of the deterministic dynamic bifurcation point $\hat{y}_{\text{det}}^{\text{dyn}}$. The green and red points are used respectively to highlight the considered initial conditions and the corresponding dynamic bifurcation points predicted by Eq. (G.42). This shows that the theoretical results presented in Fig. G.2 predict the deterministic bifurcation points measured on numerical simulations.

In the lossless case the expression of the deterministic dynamic bifurcation point $\hat{y}_{\text{det}}^{\text{dyn}}$ is given by (G.44) which depends only on the initial value y_0. The deterministic bifurcation point $\hat{y}_{\text{det}}^{\text{dyn}}$ given by Eq. (G.42) is plotted as a function of the initial condition y_0 for five values of the damping coefficient in Fig. G.4 and as a function of the parameter ζ for four values of the damping coefficient α_1 and for three values of the initial condition y_0 in Fig. G.5. The figures show that in the case with a small damping, the initial value y_0 remains the most influential parameter except for the smallest values of the control parameter ζ and for initial conditions y_0 close to the opposite of the static bifurcation point $\hat{\gamma}^{\text{st}}$ (see Fig. G.5). In general one has $0.1 < \zeta < 0.4$ for a clarinet, $0.25 < \zeta < 1$ for a saxophone and more for double-reed instruments.

As said previously, the deterministic dynamic bifurcation point corresponds to the largest possible bifurcation delay which holds when the noise can be neglected. In general, because the noise prevents the amplitude x_y to have a very small value when the parameter y reaches its static bifurcation value, the effect of an additive noise is to reduce the delay and to make it lose its dependence on the initial condition y_0. The influence of noise is studied in the next section.

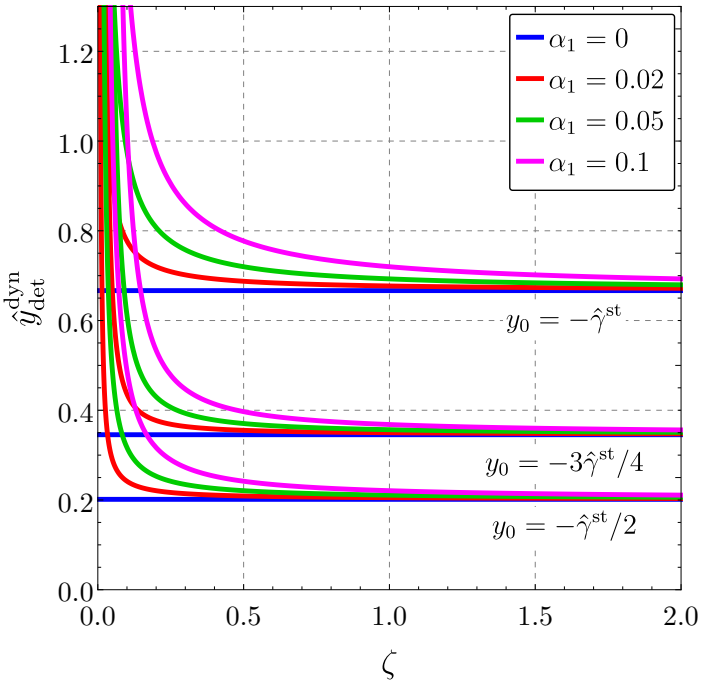


Figure G.5. The deterministic bifurcation point $\hat{y}^{\mathrm{dyn}}_{\mathrm{det}}$ given by Eq. (G.42) as a function of the parameter ζ for four of the damping coefficient ($\alpha_1 = 0, 0.01, 0.02$ and 0.05), for three value of the initial condition ($y_0 = -\hat{\gamma}^{\mathrm{st}}, -3\hat{\gamma}^{\mathrm{st}}/4$ and $-\hat{\gamma}^{\mathrm{st}}/2$) with $\omega_1 = 1000$ rad·s^{-1} and $F_1 = 1200$ s^{-1}.

G.4.3 Dynamic bifurcation point in the stochastic case

Now the system is assumed to evolve according to Regime II, i.e. $\mathbb{E}\left[x_y^2\right] = \mathcal{S}(y)$. In this case, again through Definition G.1 and using Eq. (G.40b), the equation to solve in order to find the dynamic bifurcation point is

$$x_{y_0}^2 = \frac{\sigma^2}{\epsilon} e^{\frac{2}{\epsilon}A(y)} \int_{y_0}^{y} e^{-\frac{2}{\epsilon}A(y)} dy. \tag{G.46}$$

The first step is to obtain the approximate expression of the integral

$$I(y_0, y) = \int_{y_0}^{y} e^{-\frac{2}{\epsilon}A(y)} dy. \tag{G.47}$$

For this purpose $A(y)$ (given by Eq. (G.34)) is expanded in a second order Taylor series around 0 (the static bifurcation point), that leads to

$$A(y) \approx A(0) + y\frac{dA}{dy}(0) + \frac{y^2}{2}\frac{d^2A}{dy^2}(0) \tag{G.48a}$$

$$= A(0) + ya(0) + \frac{y^2}{2}a'(0) \tag{G.48b}$$

where the second term in the right-hand side of (G.48b) vanishes by definition [4] and $a'(0) = \frac{da}{dy}(0)$. The approximate expression of $I(y_0, y)$ is therefore given at order 2 by

$$\begin{aligned} I(y_0, y) &= \int_{y_0}^{y} e^{-\frac{2}{\epsilon}\left(A(0) + \frac{y^2}{2}a'(0)\right)} dy \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi\epsilon}{a'(0)}} e^{-\frac{2}{\epsilon}A(0)} \left(\mathrm{erf}\left(y\sqrt{\frac{a'(0)}{\epsilon}} \right) - \mathrm{erf}\left(y_0\sqrt{\frac{a'(0)}{\epsilon}} \right) \right) \end{aligned} \tag{G.49}$$

where erf is the error function.

4. Indeed, at the bifurcation one has $a(0) = \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = 0$.

Since we consider $0 < \epsilon \ll 1$ and because $a'(0)$ has a finite value, one has for an initial value chosen smaller than the static bifurcation point, i.e. for $y_0 < 0$

$$y_0\sqrt{\frac{a'(0)}{\epsilon}} \ll -1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{erf}\left(y_0\sqrt{\frac{a'(0)}{\epsilon}}\right) \approx -1 \tag{G.50}$$

and for $y > 0$ (we are interested in the dynamic bifurcation point which is by definition larger than the static bifurcation point)

$$y\sqrt{\frac{a'(0)}{\epsilon}} \gg 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{erf}\left(y\sqrt{\frac{a'(0)}{\epsilon}}\right) \approx 1. \tag{G.51}$$

Therefore, from Eqs. (G.50) and (G.51), Eq. (G.49) reduces to

$$I(y_0, y) = \sqrt{\frac{\pi\epsilon}{a'(0)}}e^{-\frac{2}{\epsilon}A(0)}. \tag{G.52}$$

Eq. (G.52) highlights that $I(y_0, y)$ is now independent of y and y_0 and simply denoted I. Therefore Eq. (G.46) becomes

$$A(y) = K, \tag{G.53}$$

with

$$K = -\epsilon \ln \sigma - \frac{\epsilon}{2}\ln\frac{I}{\epsilon} + \epsilon \ln x_{y_0} \tag{G.54}$$

and the function $A(y)$ given by (G.34).

Eq. (G.53) can be expressed as a third order polynomial equation with respect to y as

$$a_1 y^3 + a_2 y^2 + a_3 y + a_4 = 0 \tag{G.55}$$

with

$$\begin{gathered} a_1 = \frac{\zeta^2 F_1^2}{4\omega_1^2}, \qquad a_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{(3\hat{\gamma}^{\mathrm{st}} - 2)\zeta^2 F_1^2}{\omega_1^2} - \alpha_1^2\right), \\ a_3 = \frac{(\hat{\gamma}^{\mathrm{st}} - 1)(3\hat{\gamma}^{\mathrm{st}} - 1)\zeta^2 F_1^2}{4\omega_1^2} - \alpha_1 K, \qquad a_4 = \frac{(\hat{\gamma}^{\mathrm{st}} - 1)^2 \hat{\gamma}^{\mathrm{st}} \zeta^2 F_1^2}{4\omega_1^2} - K^2 \end{gathered} \tag{G.56}$$

and $\hat{\gamma}^{\mathrm{st}}$ given by Eq. (G.7) (details are given in Appendix G.10).

Eq. (G.55) is solved analytically using Cardano's formula (see again Appendix G.10 for details). One obtains

$$\hat{y}^{\mathrm{dyn}}_{\mathrm{stoch,a}} = \begin{cases} r_0 & \text{if } \sigma < \sigma_3, \quad \text{(G.57a)} \\ r_2 & \text{if } \sigma_3 < \sigma < \sigma_2 \quad \text{(G.57b)} \end{cases}$$

where r_0 and r_2 are given by Eq. (G.85), as depicted in Fig. G.13. The expressions of σ_2 and σ_3 are given respectively by Eqs. (G.82) to (G.84).

A second approximate expression of the stochastic dynamic bifurcation point is obtained using (G.48b) in Eq. (G.53) which becomes a second order polynomial equation with respect to y. Solving the latter leads to the following less accurate approximate, but easier to interpret, expression

$$\hat{y}^{\mathrm{dyn}}_{\mathrm{stoch,b}} = 2\left[-\frac{(\hat{\gamma}^{\mathrm{st}})^{3/2}\omega_1\epsilon}{\zeta F_1(3\hat{\gamma}^{\mathrm{st}} + 1)}\left(\frac{3\ln(\hat{\gamma}^{\mathrm{st}})}{2} + \ln\left(\frac{8\pi\omega_1}{\epsilon\zeta F_1(3\hat{\gamma}^{\mathrm{st}} + 1)}\right) + 4\ln(\sigma) - 4\ln\left(x_{y_0}\right)\right)\right]^{1/2}. \tag{G.58}$$

Note that both in Eqs. (G.57) and (G.58) the dependence on the initial value y_0 is lost. However, contrary to the deterministic case, the stochastic dynamic bifurcation point depends on the slope ϵ.

Deterministic and stochastic dynamic bifurcation points, given by Eqs. (G.42), (G.57) and (G.58) respectively, are plotted in Fig. G.6 as functions of the noise level σ. The deterministic bifurcation point $\hat{y}^{\mathrm{dyn}}_{\mathrm{det}}$ is plotted for two values of the initial condition y_0, i.e. $y_0 = -\hat{\gamma}^{\mathrm{st}}$ and $-3\hat{\gamma}^{\mathrm{st}}/4$. The stochastic bifurcation points are plotted for two values of the parameter ϵ, i.e. $\epsilon = 0.002$ and 0.01. The other parameters are given by (G.45) with in addition $x_{y_0} = 0.01$. First, we can see that the higher the noise level the closer the two approximate expressions of the stochastic dynamic bifurcation points. This is because the higher the noise level the more the bifurcation delay is reduced, hence the more the Taylor series (G.48b) is valid. Secondly, Fig. G.6 shows graphically the domains of existence of the regimes listed at the end of the Sect. G.4.1.

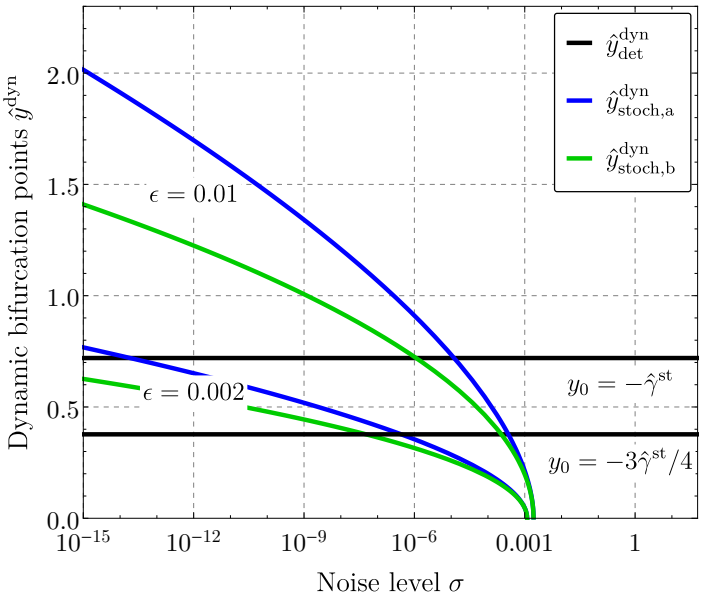


Figure G.6. Deterministic and stochastic dynamic bifurcation points, given by Eqs. (G.42), (G.57) and (G.58) respectively, as functions of the noise level σ. The deterministic bifurcation point $\hat{y}^{\mathrm{dyn}}_{\mathrm{det}}$ is plotted for two values of the initial condition y_0, i.e. $y_0 = -\hat{\gamma}^{\mathrm{st}}$ and $-3\hat{\gamma}^{\mathrm{st}}/4$. The stochastic bifurcation points are plotted for two values of the parameter ϵ, i.e. $\epsilon = 0.002$ and 0.01. The other parameters are given by (G.45) with in addition $x_{y_0} = 0.01$.

The following definitions are chosen for the boundary values (with respect to the noise level σ) between the different regimes previously mentioned : the boundary value between Regime I and Regime II, denoted $\sigma_{I/II}$, corresponds to the intersection between $\hat{y}^{\mathrm{dyn}}_{\mathrm{det}}$ and $\hat{y}^{\mathrm{dyn}}_{\mathrm{stoch,a}}$. This means in Fig. G.6 that if $\sigma < \sigma_{I/II}$ (Regime I), $\hat{y}^{\mathrm{dyn}}_{\mathrm{det}}$ is the actual dynamic bifurcation point. On the contrary, if $\sigma > \sigma_{I/II}$ (Regime II), $\hat{y}^{\mathrm{dyn}}_{\mathrm{stoch,a}}$ or $\hat{y}^{\mathrm{dyn}}_{\mathrm{stoch,b}}$ (depending on the approximation retained) is the actual dynamic bifurcation point. The boundary value between Regime II and Regime III, denoted $\sigma_{II/III}$, is the value at which $\hat{y}^{\mathrm{dyn}}_{\mathrm{stoch,a}}$ (and $\hat{y}^{\mathrm{dyn}}_{\mathrm{stoch,b}}$) no longer exists. The expressions of $\sigma_{I/II}$ and $\sigma_{II/III}$ are given in next section.

G.4.4 Domains of existence of the regimes

The boundary value between Regime I and Regime II, with respect to the noise level σ and denoted $\sigma_{I/II}$, is obtained solving

$$\mathcal{D}(y) = \mathcal{S}(y). \tag{G.59}$$

with respect to σ. Therefore, from (G.40) and (G.52), we find

$$\sigma_{I/II} = x_{y_0} \left(\frac{a'(0)\epsilon}{\pi} \right)^{1/4} e^{\frac{2}{\epsilon}(A(0)-A(y_0))}. \tag{G.60}$$

The second boundary value between Regime II and Regime III, again with respect to the noise level σ denoted $\sigma_{II/III}$, corresponds to the value of σ for which $\hat{y}^{\mathrm{dyn}}_{\mathrm{stoch,a}}$ and $\hat{y}^{\mathrm{dyn}}_{\mathrm{stoch,b}}$ do not exist anymore [5] (see Fig. G.6). The expression of $\sigma_{II/III}$ is obtained by noting that $\hat{y}^{\mathrm{dyn}}_{\mathrm{stoch,a}}$ and $\hat{y}^{\mathrm{dyn}}_{\mathrm{stoch,b}}$ vanish at $\sigma = \sigma_{II/III}$. Therefore, one may solve $\hat{y}^{\mathrm{dyn}}_{\mathrm{stoch,b}} = 0$ that, from (G.58), leads to

$$\sigma_{II/III} = x_0 \left(\frac{1}{\hat{\gamma}^{\mathrm{st}}} \right)^{3/8} \left(\frac{\epsilon\zeta F_1(3\hat{\gamma}^{\mathrm{st}} + 1)}{8\pi\omega_1} \right)^{1/4} \tag{G.61}$$

with $\hat{\gamma}^{\mathrm{st}}$ given by Eq. (G.7).

Using Eqs. (G.60) and (G.61) respectively the values of $\sigma_{I/II}$ and $\sigma_{II/III}$ corresponding to situations plotted in Fig. G.6 are given in Tab. G.2.

5. This corresponds to the fact that the solutions of Eq. (G.53) for both cubic and quadratic approximations become complex for $\sigma > \sigma_{II/III}$.

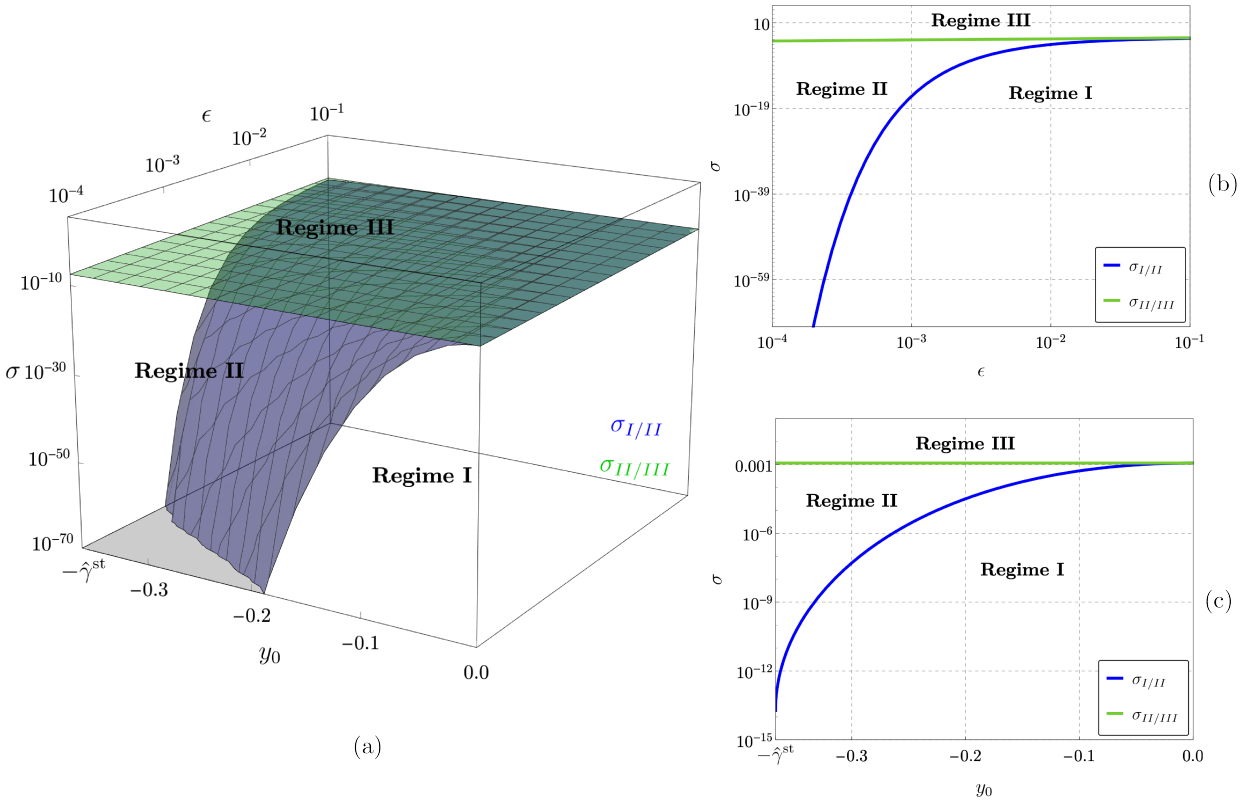


Figure G.7. Regions of existence of the Regimes I, II and III (a) in the (y_0, ϵ, σ)-space, (b) in the (y_0, σ)-plane for $\epsilon = 0.002$ and (c) in the plane (ϵ, σ)-plane for $y_0 = -0.34$. The expressions of $\sigma_{I/II}$ and $\sigma_{II/III}$ are given by Eqs. (G.60) and (G.61) respectively.

Tableau G.2. Values $\sigma_{I/II}$ and $\sigma_{II/III}$, computed through Eqs. (G.60) and (G.61) respectively, corresponding to situations plotted in Fig. G.6.

		$y_0 = -\hat{\gamma}^{st}$	$y_0 = -3\hat{\gamma}^{st}/4$
$\sigma_{I/II}$	$\epsilon = 0.002$	$1.88 \cdot 10^{-14}$	$4.39 \cdot 10^{-7}$
	$\epsilon = 0.01$	$1.20 \cdot 10^{-5}$	$3.59 \cdot 10^{-4}$
$\sigma_{II/III}$	$\epsilon = 0.002$	$1.16 \cdot 10^{-3}$	$1.16 \cdot 10^{-3}$
	$\epsilon = 0.01$	$1.17 \cdot 10^{-3}$	$1.17 \cdot 10^{-3}$

By means of Eqs. (G.60) and (G.61) one can also depict the regions of existence of each of the three regimes in the (y_0, ϵ, σ)-space (see Fig. G.7(a)). A representation of these regions is also given in the (y_0, σ)-plane for $\epsilon = 0.002$ and in the plane (ϵ, σ)-plane for $y_0 = -0.34$ in Figs. G.7(b) and G.7(c) respectively. One can see that the boundary between Regime II and Regime III mainly depends on σ. On the contrary, the boundary between Regime I and Regime II depends simultaneously on σ, y_0 and ϵ. That means that the use of Eq. (G.42) (the deterministic bifurcation point) or Eq. (G.58) (the stochastic bifurcation point) as a theoretical prediction of the actual dynamic bifurcation point observed on numerical simulations does not depend only on the noise level. Fig. G.7 shows that the dependence on ϵ is the most important. Indeed, the above value $\sigma_{I/II} = 3.15 \cdot 10^{-10}$ has been obtained for $\epsilon = 0.002$. The value becomes $\sigma_{I/II} = 7.21 \cdot 10^{-17}$ for $\epsilon = 10^{-3}$ and $\sigma_{I/II} = 1.44 \cdot 10^{-69}$ for $\epsilon = 2 \cdot 10^{-4}$. In other words, if $\epsilon = 2 \cdot 10^{-4}$, to simulate the deterministic case, the number of digits of precision used by the computer must be at least equal to 69.

The latter observation shows that, in some instances, even with an extremely low level, the noise can influence the bifurcation delay. That means for example that a deterministic approach can fail to predict the bifurcation delay observed on numerical integration of the model in which the round-off errors act as an additive noise with a very low level [a6].

G.4.5 Probability density function of the stochastic averaged amplitude

In addition to being able to obtain the expected value of the squared amplitude (G.39), Eq. (G.36) allows us to calculate the probability density function (PDF) of the amplitude x_y without having to solve the Fokker-

Planck equation associated to Eq. (G.29). Indeed, a known result of stochastic calculus (see e.g. [116], Chap. 4) is that the Itô integral of a deterministic function $f(t)$, i.e. $\int_0^t f(t)dW_t$, is a Gaussian process with mean equal to zero and variance $v = \int_0^t f(t)^2 dt$. Therefore, from (G.36), x_y is a Gaussian process with mean $\mathbb{E}[x_y] = x^{\text{det}}(y)$ and variance

$$\mathbb{E}\left[x_y^2\right] - \mathbb{E}[x_y]^2 = \mathcal{S}(y) = \frac{\sigma^2}{\epsilon} e^{\frac{2}{\epsilon}A(y)} \int_{y_0}^{y} e^{-\frac{2}{\epsilon}A(y)} dy \tag{G.62}$$

with $\int_{y_0}^{y} e^{-\frac{2}{\epsilon}A(y)} dy$ given by (G.52).

The associated Gaussian PDF is therefore

$$\rho(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mathcal{S}(y)}} e^{-\frac{(x - x^{\text{det}}(y))^2}{2\mathcal{S}(y)}}. \tag{G.63}$$

This means that, for a given value of y, the probability that x_y lies between x and $x + dx$ is $\rho(x, y)dx$. Then, we define the function $R(y) = \rho(x_{y_0}, y)$ for which the probability that x_y lies between x_{y_0} and $x_{y_0} + dx$ is $R(y)dx$. From (G.63), the expression of the function $R(y)$ is

$$R(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mathcal{S}(y)}} e^{-\frac{(x_{y_0} - x^{\text{det}}(y))^2}{2\mathcal{S}(y)}}. \tag{G.64}$$

In the Regime I we have $\mathcal{D}(y) = x^{\text{det}}(y)^2 \gg \mathcal{S}(y)$ and the function $R(y)$ can be approximated by a Dirac delta function as $R(y) \approx \delta(x_{y_0} - x^{\text{det}}(y))$. Denoting $\ell(y) = x_{y_0} - x^{\text{det}}(y)$ the roots of which are y_0 and $\hat{y}^{\text{dyn}}_{\text{det}}$ (see Eq. (G.41)) and using the composition property of Dirac delta function one obtains

$$R(y) \approx R_I(y) = \frac{\delta(y - y_0)}{|\ell'(y_0)|} + \frac{\delta(y - \hat{y}^{\text{dyn}}_{\text{det}})}{|\ell'(\hat{y}^{\text{dyn}}_{\text{det}})|} \tag{G.65}$$

when the system evolves according to Regime I.

In the Regime II, because $\mathcal{D}(y) \ll \mathcal{S}(y)$, Eq. (G.64) becomes

$$R(y) \approx R_{II}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mathcal{S}(y)}} e^{-\frac{x_{y_0}^2}{2\mathcal{S}(y)}}. \tag{G.66}$$

We have therefore

$$R'_{II}(y) = \frac{\mathcal{S}'(y)\left(x_{y_0}^2 - \mathcal{S}(y)\right)}{\sqrt{2\pi}\mathcal{S}(y)^{5/2}} e^{-\frac{x_{y_0}^2}{2\mathcal{S}(y)}}. \tag{G.67}$$

which vanishes for $x_{y_0} = \mathcal{S}(y)$ (it can be shown that this corresponds to a maximum of $R'_{II}(y)$) and therefore, according to the Definition G.1, for $y = \hat{y}^{\text{dyn}}_{\text{stoch,a}}$.

In Fig. G.8 the function $R(y)$ is plotted using parameters (G.45) and three values of the noise level, i.e. $\sigma = 10^{-4}$, $\sigma = 10^{-6}$ and $\sigma = 10^{-11}$. For the first two values of the noise level the system is in Regime II and it is in the Regime I for the third value (see Fig. G.10 in the next section). In Figs. G.8(a) and G.8(b) one can see that the maximum of $R(y)$ is obtained for $y = \hat{y}^{\text{dyn}}_{\text{stoch,a}}$ as predicted by Eq. (G.67). Eq. (G.65) is illustrated in Fig. G.8(c) in which we can see that in Regime I the function $R(y)$ becomes a Dirac delta function translated to $y = \hat{y}^{\text{dyn}}_{\text{det}}$. In the figure only the positive values of y are represented and $y_0 < 0$. Consequently, the first term of the sum in the right-hand side of Eq. (G.65) does not appear.

G.5 Comparison between theoretical results and numerical simulation

G.5.1 Comparison in term of the expected value of the squared amplitude

The aim of this section is to validate both the stochastic averaging procedure in term of expected value of the squared amplitude and the analytical predictions $\hat{y}^{\text{dyn}}_{\text{det}}$ of the deterministic dynamic bifurcation point given by Eq. (G.42) and those of the stochastic bifurcation points, $\hat{y}^{\text{dyn}}_{\text{stoch,a}}$ and $\hat{y}^{\text{dyn}}_{\text{stoch,b}}$, given by Eqs. (G.57) and (G.58) respectively.

To achieve that, after getting the time series of p_t from the numerical integration of (H.27) [6], the corresponding amplitude (denoted A_y) is computed as a function of y. To that end, the time series of p_t and y_t are

6. All numerical simulations of the Itô stochastic differential equations are performed using the function `ItoProcess` of the *Wolfram Mathematica* software.

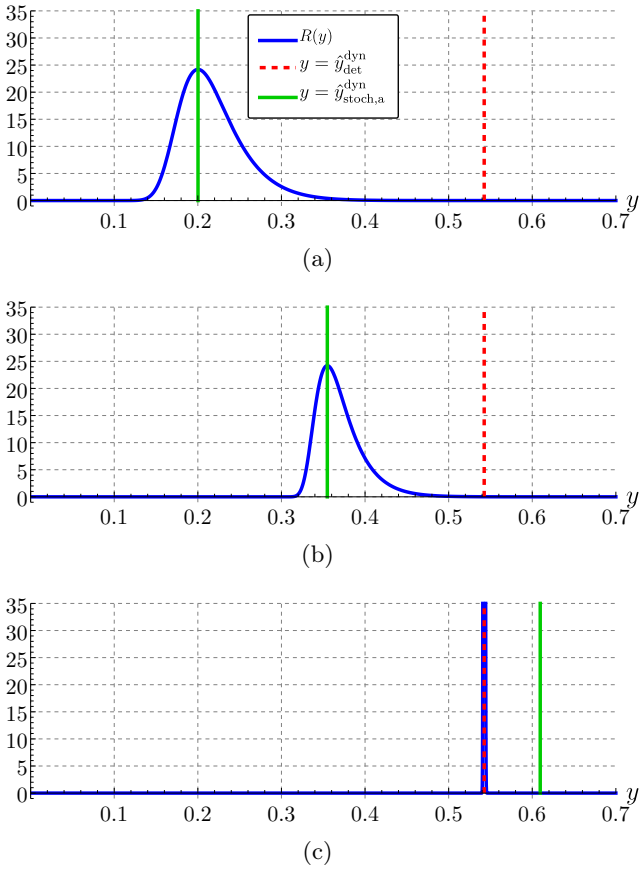


Figure G.8. The function $R(y)$ defined by Eq. (G.64). The quantities $\hat{y}^{\text{dyn}}_{\text{det}}$, $\hat{y}^{\text{dyn}}_{\text{stoch,a}}$ and $\hat{y}^{\text{dyn}}_{\text{stoch,b}}$ are depicted by vertical green line and vertical red dashes line respectively. The parameters (G.45) are used and (a) $\sigma = 10^{-4}$, (b) $\sigma = 10^{-6}$ and (c) $\sigma = 10^{-11}$. Moreover $y_0 = -0.34$, $x_{y_0} = 0.01$ and $\epsilon = 0.002$.

divided into N intervals and on each of them the maximum of p_t ($\max(p)_i$ with $i = 1, \ldots, N$) and the mean of y_t ($\text{mean}(y)_i$ with $i = 1, \ldots, N$) are computed. Then A_y is defined as $\max(p)_i$ as a function of $\text{mean}(y)_i$ for i from 1 to N. The procedure is repeated 50 times and the expected value $\mathbb{E}\left[A_y^2\right]$ is computed over the 50 realizations. Simultaneously, the expected value $\mathbb{E}\left[x_y^2\right]$ of x_y is computed over 50 realizations of the numerical integration of the averaged equation (G.29).

The results are shown in Fig. G.9 which represents : (on the left) a plot of $\sqrt{\mathbb{E}\left[A_y^2\right]}$ (dashed red line), $\sqrt{\mathbb{E}\left[x_y^2\right]}$ (blue line), the static bifurcation diagram (red) computed in Appendix G.11 and $\hat{y}^{\text{dyn}}_{\text{det}}$, $\hat{y}^{\text{dyn}}_{\text{stoch,a}}$ and $\hat{y}^{\text{dyn}}_{\text{stoch,b}}$ depicted by vertical black line, vertical green line and vertical magenta dashed line respectively ; (on the right) same as on the left without the static bifurcation diagram, with an horizontal black dashed at $\sqrt{\mathbb{E}\left[x_y^2\right]} = x_{y_0}$ and using a logarithm scale for the $\sqrt{\mathbb{E}\left[x_y^2\right]}$-axis. The set of parameters (G.45) is used and, from top to bottom : $\sigma = 10^{-4}$, $\sigma = 10^{-6}$ and $\sigma = 10^{-11}$. The initial conditions are $y_0 = -0.34$ and $x_{y_0} = 0.01$.

The agreement through numerical integration between expected of the squared amplitude of the stochastic slow dynamics and the initial full order system for different situations corresponding to Regimes I and II is considered as a successful assessment of the stochastic averaging procedure.

In Fig. G.9(a) and G.9(b) the system is in Regime II. Therefore, the noise cannot be ignored and the dynamic bifurcation must be determined by $\hat{y}^{\text{dyn}}_{\text{stoch,a}}$ or $\hat{y}^{\text{dyn}}_{\text{stoch,b}}$. The figure shows that the latter provides a good approximation of the dynamic bifurcation point. Indeed, through the Definition G.1, the dynamic bifurcation point is the abscissa of the point of intersection between $\mathbb{E}\left[x_y\right]$ and the horizontal at $\mathbb{E}\left[x_y\right] = x_{y_0}$. The logarithmic scale used in Fig. G.9 (right column) allows us to locate this intersection and to see that the vertical green line, corresponding to $\hat{y}^{\text{dyn}}_{\text{stoch,a}}$, passes also through this intersection and the vertical magenta dashed line, corresponding to $\hat{y}^{\text{dyn}}_{\text{stoch,b}}$, passes a little on the left (all the more as σ is decreased). Of course the expression $\hat{y}^{\text{dyn}}_{\text{stoch,a}}$ is more accurate than $\hat{y}^{\text{dyn}}_{\text{stoch,b}}$ because it corresponds to a lesser degree of approximation. In

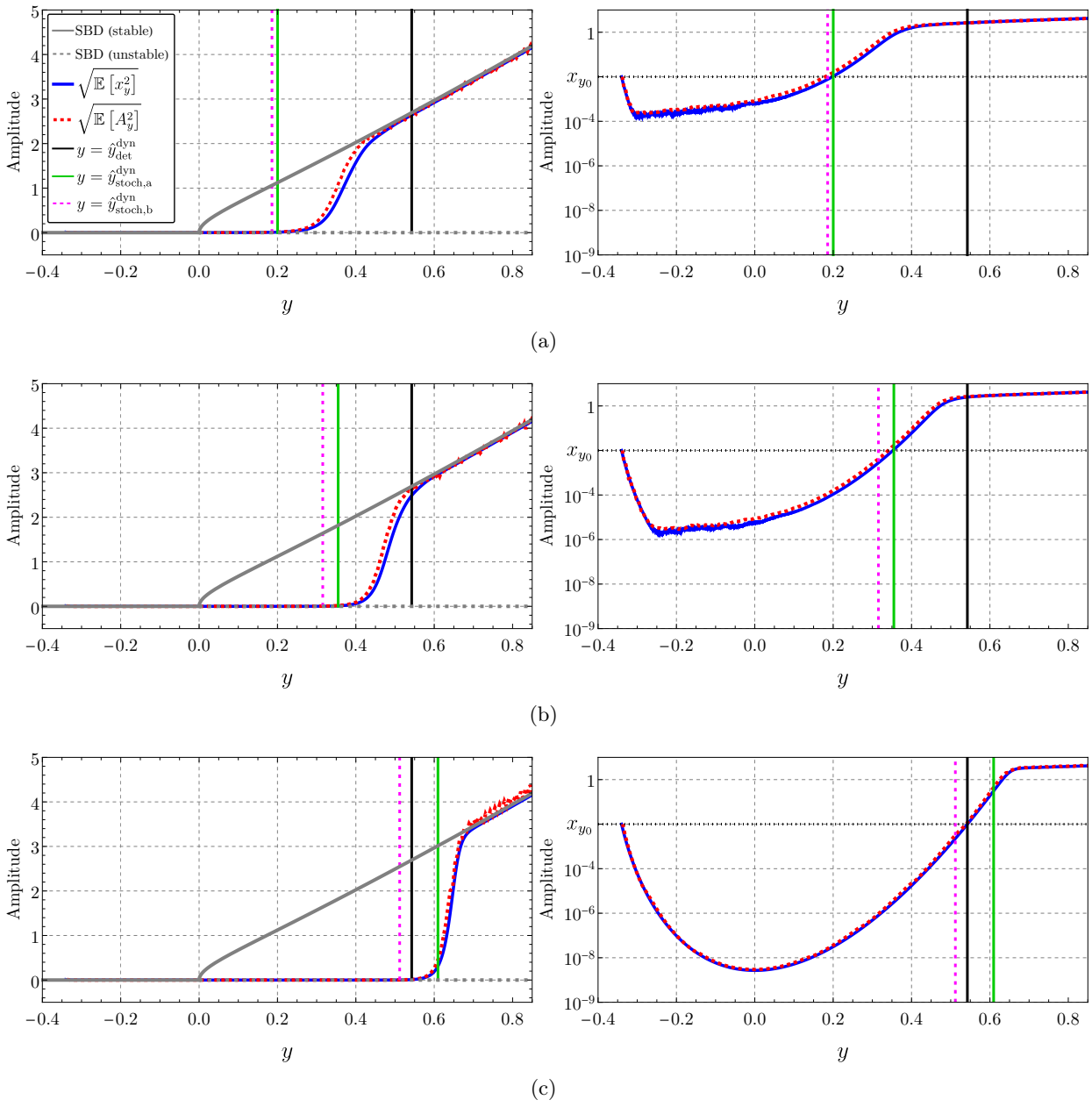


Figure G.9. On the left : a plot with the expected values of A_y^2 (red dashed line) and x_y^2 (blue line) obtained using 50 realizations of the numerical integration of Eqs (H.27) and (G.29) respectively, the stable branches of the static bifurcation diagram (SBD, gray line) computed in Appendix G.11 and $\hat{y}^{\text{dyn}}_{\text{det}}$, $\hat{y}^{\text{dyn}}_{\text{stoch,a}}$ and $\hat{y}^{\text{dyn}}_{\text{stoch,b}}$ depicted by vertical black line, vertical green line and vertical magenta dashed line respectively. On the right : same as on the left without the static bifurcation diagram, with an horizontal black dashed at $\sqrt{\mathbb{E}\left[x_y^2\right]} = x_{y_0}$ and using a logarithm scale for the $\sqrt{\mathbb{E}\left[x_y^2\right]}$-axis. The set of parameters (G.45) is used and, from (a) to (c), $\sigma = 10^{-4}$, $\sigma = 10^{-6}$ and $\sigma = 10^{-11}$. Moreover $y_0 = -0.34$, $x_{y_0} = 0.01$ and $\epsilon = 0.002$.

Fig. G.9(c) the system is in Regime I, consequently, the noise can be neglected and the dynamic bifurcation point is determined by $\hat{y}^{\text{dyn}}_{\text{det}}$. A good agreement between theoretical prediction and numerical simulations can still be observed on the right column. Indeed, the vertical black line passes through the point of intersection between $\mathbb{E}\left[x_y\right]$ and the horizontal line at $\mathbb{E}\left[x_y\right] = x_{y_0}$.

The position in the (y_0, σ)-plane of the three situations depicted in Fig. G.9 is shown in Fig. G.10 and superimposed to the regions of existence of the Regimes I, II and III.

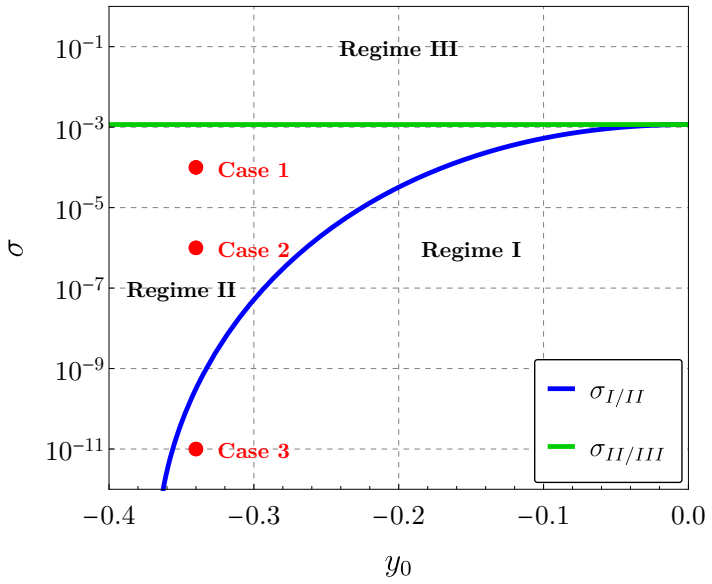


Figure G.10. The regions of existence of the Regimes I, II and III in the (y_0, σ)-plane in which the red points show the position of the three cases depicted in Fig. G.9. The initial conditions are $y_0 = -0.34$ and $x_{y_0} = 0.01$ and three values of the noise level are used : $\sigma = 10^{-4}$, $\sigma = 10^{-6}$ and $\sigma = 10^{-11}$ which correspond to cases 1 to 3 respectively.

G.5.2 Comparison in term of probability density function

In this section the theoretical PDF $\rho(x, y)$ (see Eq.(G.63)) is compared to two histograms : one in built from the full order system (H.27) and the other from the stochastic slow dynamics (G.29). In both cases, 2000 realizations of the system are computed and we take, for each realization, the value of the considered random variable (x_y or p_t) for a given value of y denoted $\tilde{y}$ (chosen arbitrary to be $\tilde{y} = 0.15$). The comparison, presented in Fig. G.11, is performed for three values of the noise level (the same as chosen previously in Figs. G.8 and G.9) and shows en excellent agreement between theoretical and numerical results. In Fig. G.11(c), the system is in Regime I and, as expected, the PDF appears as a Dirac delta function. In this case the histograms are also in agreement with the theoretical PDF but this cannot be seen in the figure.

We choose a value of $\tilde{y}$ smaller than the dynamic bifurcation point but results using a larger value (not presented here) shows also a good agreement between theoretical PDF and histograms as long as the linear approximation is valid and therefore for a value y not too far from the dynamic bifurcation point.

G.6 Discussion and conclusion

This article is inspired by work initially done in the applied mathematics community. The approach adopted is general and can be adapted to other systems undergoing a dynamic Hopf bifurcation.

For the clarinet model studied, the stochastic averaging procedure preserves the properties of the dynamic behavior of the original system. Thus, the same bifurcation delay is observed in the original and the averaged system. The different behaviors observed according to the amplitude of the random forcing, the initial condition or the rate of change of the bifurcation parameter are in line with those found in other fields of physics or in applied mathematics. In particular, the conclusions are the same as for another simple clarinet model already studied a few years ago. The latter model is a discrete-time model and is based on very different simplifying assumptions : it results from the discretization of a delay model which therefore retains an infinite number of acoustic modes. In contrast, the model studied in this article retains only a single acoustic mode.

Studying the dynamic bifurcations of ODE-based models is nevertheless necessary. Firstly, because these are the models used by researchers in the context of instrument making. Secondly, because recent works underline the importance of taking into account the temporal dynamics of the bifurcation parameters (in particular those controlled by the musician [41]). The study carried out in this article already allows to obtain analytically the dynamic oscillation thresholds according to the main parameters controlled by the musician. This information could be linked to important notions for the musician and the instrument manufacturer such as the ease of playing. This opens interesting perspectives such as the study of dynamic bifurcations of a more realistic model than the one studied in this article. The first improvement is undoubtedly to complete this model with other acoustic modes whose importance is already known in the static case [37].

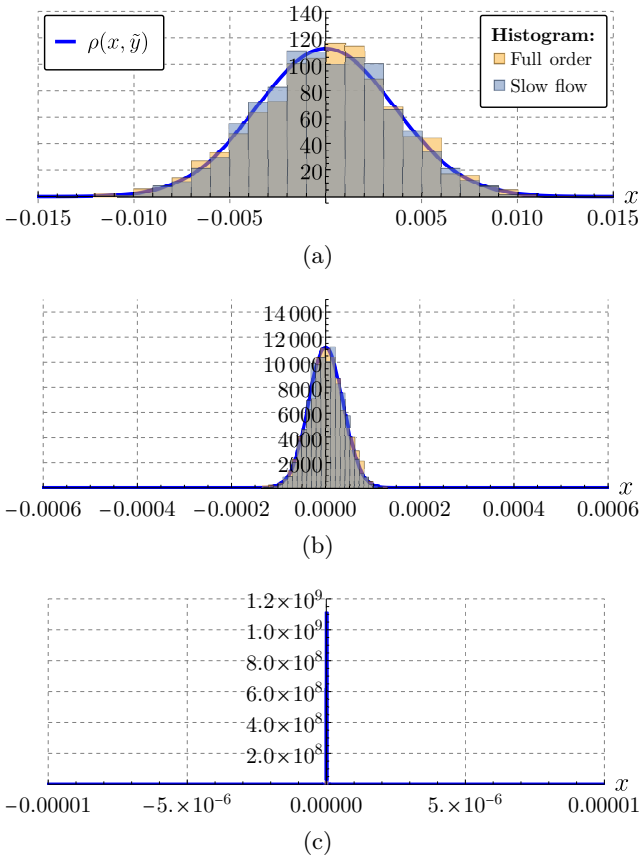


Figure G.11. Comparison between theoretical PDF $\rho(x, y)$ given by Eq. (G.63) and two histograms : one in built from the full order system (H.27) and the other from the stochastic slow dynamics (G.29). In both cases, 2000 realizations of the system are computed and we take, for each realization, the value of the considered random variable (x_y or p_t) for a given value of y denoted $\tilde{y}$ (chosen arbitrary to be $\tilde{y} = 0.15$). The comparison is performed for three values of the noise level : (a) $\sigma = 10^{-4}$, (b) $\sigma = 10^{-6}$ and (c) $\sigma = 10^{-11}$. Moreover $y_0 = -0.34$, $x_{y_0} = 0.01$ and $\epsilon = 0.002$.

G.7 Appendix A. The 1-dimensional Itô's formula

Let the following Itô differential equation

$$dx_t = m(x_t, t)dt + \sigma(x_t, t)dW_t, \tag{G.68}$$

where m and σ are real functions and W_t is the so-called Wiener process.

Let $f(x_t, t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ (i.e. f is twice continuously differentiable on $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$). Then $f(x_t, t)$ is also Itô process, and

$$df(x_t, t) = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma(x_t, t)^2 dt \tag{G.69a}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + m(x_t, t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sigma(x_t, t)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt + \sigma(x_t, t)\frac{\partial f}{\partial x}\,dW_t. \tag{G.69b}$$

Eq. (G.69) is the 1-dimensional Itô's formula (for more details and proof see [153], Chap. 4).

G.8 Appendix B. General formulation of the stochastic averaging method

In this appendix the stochastic averaging method [114, 191] is briefly described. For that we consider the following system of differential equations in standard form

$$\dot{\mathbf{x}}_t = \mathbf{f}(\mathbf{x}_t, t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_t, t)\boldsymbol{\eta}_t \tag{G.70}$$

where $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$. If the deterministic vector function $\mathbf{f}(\mathbf{x}_t, t) \in \mathbb{R}^n$ and matrix function $\mathbf{g}(\mathbf{x}_t, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ satisfy certain requirements [114] and the elements of the vector $\boldsymbol{\eta}_t$ are broadband processes, with zero means, then the slow (or averaged) dynamics of Eq. (G.70) may be approximated by the following Itô equations

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{m}(\mathbf{x}_t)dt + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_t, t)d\mathbf{W}_t, \tag{G.71}$$

where $\mathbf{W}_t \in \mathbb{R}^n$ is a vector of n Wiener processes. The vector $\mathbf{m}$ and the matrix $\boldsymbol{\sigma}$ are called *drift vector* and *diffusion matrix* respectively and defined by

$$\mathbf{m} = T^{\text{av}}\left\{\mathbf{f} + \int_{-\infty}^{0} \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial(\mathbf{g}\boldsymbol{\eta})}{\partial \mathbf{x}}\right)_t (\mathbf{g}\boldsymbol{\eta})_{t+\tau}\right] d\tau\right\}, \tag{G.72}$$

where $\frac{\partial(\mathbf{g}\boldsymbol{\eta})}{\partial \mathbf{x}}$ is the Jacobian matrix of $\mathbf{g}\boldsymbol{\eta}$, and

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^T = T^{\text{av}}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}\left[(\mathbf{g}\boldsymbol{\eta})_t (\mathbf{g}\boldsymbol{\eta})_{t+\tau}^T\right] d\tau\right\} \tag{G.73}$$

where $\{.\}^T$ and $\mathbb{E}[\{.\}]$ denotes respectively the transpose and the expected value of $\{.\}$. T^{av} is an averaging operator defined as follows

$$T^{\text{av}}\{.\} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \{.\}\, dt. \tag{G.74}$$

It should be noted that in the case of a periodic variables with period T_0 (which is the case in this paper), the operator T^{av} becomes a classical Krylov–Bogolyubov time averaging over one period T_0, i.e.

$$T^{\text{av}}\{.\} = \frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} \{.\}\, dt \tag{G.75}$$

and the result is independent of t_0.

G.9 Appendix C. Derivation of the expression of the deterministic dynamic bifurcation point

In this appendix we give the details of the résolution of Eq. (G.41). First we state $y + \hat{\gamma}^{\text{st}} = X^2$ and then it can be shown that, using Eq. (G.34), Eq. (G.41) takes the following form

$$(X - X_0)\left(\zeta F_1 X^2 + (\zeta F_1 X_0 - \alpha_1\omega_1)X - \zeta F_1 + \zeta F_1 X_0^2 - \alpha_1 X_0\omega_1\right) = 0 \tag{G.76}$$

where $X_0^2 = y_0 + \hat{\gamma}^{\text{st}}$. Obviously $X = X_0$ and therefore $y = y_0$ is a solution of (G.76). The second term of the product in the left-hand side of (G.76) is a second order polynomial equations whose roots X_1 and X_2 are

$$X_1 = \frac{1}{2\zeta F_1}\left(\alpha_1\omega_1 - \zeta F_1 X_0 - \sqrt{\alpha_1^2\omega_1^2 + 2\alpha_1\zeta F_1 X_0\omega_1 + \zeta^2 F_1^2\,(4 - 3X_0^2)}\right) \tag{G.77}$$

and

$$X_2 = \frac{1}{2\zeta F_1}\left(\alpha_1\omega_1 - \zeta F_1 X_0 + \sqrt{\alpha_1^2\omega_1^2 + 2\alpha_1\zeta F_1 X_0\omega_1 + \zeta^2 F_1^2\,(4 - 3X_0^2)}\right). \tag{G.78}$$

The initial value y_0 is always chosen to be larger than $-\hat{\gamma}^{\text{st}}$ (because the mouth pressure γ must be larger than zero). Therefore, X must be larger than zero and, for a realistic set of parameters, only X_2 is positive. Consequently, the expression of the deterministic dynamic bifurcation point is given by

$$\hat{y}_{\text{det}}^{\text{dyn}} = X_2^2 - \hat{\gamma}^{\text{st}}. \tag{G.79}$$

G.10 Appendix D. Derivation of the expression of the stochastic dynamic bifurcation point

Using Eq. (G.34), Eq. (G.53) takes the following explicit form

$$K = \frac{\zeta F_1 \sqrt{\hat{\gamma}^{\mathrm{st}} + y}}{2\omega_1} \left(y - 1 + \hat{\gamma}^{\mathrm{st}}\right) - \frac{\alpha_1 y}{2}. \tag{G.80}$$

To obtain a solvable cubic form (i.e. without square root), Eq. (G.80) is transformed into

$$\left(K + \frac{\alpha_1 y}{2}\right)^2 = \frac{\zeta^2 F_1^2 \left(\hat{\gamma}^{\mathrm{st}} + y\right)}{4\omega_1^2} \left(y - 1 + \hat{\gamma}^{\mathrm{st}}\right)^2 \tag{G.81}$$

which yields Eq. (G.55).

In the remaining of this appendix the Cardano's method (see e.g. [185]) is used to solve the latter, i.e. $a_1 y^3 + a_2 y^2 + a_3 y + a_4 = 0$.

First, the following parameters are introduced

$$p = -\frac{a_2^2}{3a_1^2} + \frac{c_3}{a_1} \quad \text{and} \quad q = \frac{a_2}{27a_1}\left(\frac{2a_2^2}{a_1^2} - \frac{9a_3}{a_1}\right) + \frac{a_4}{a_1}.$$

The discriminant Δ is defined as $\Delta = -\left(4p^3 + 27q^2\right)$. Then :

1. If $\Delta < 0$, one root is real and two are complex conjugate.
2. If $\Delta = 0$, all roots are real and at least two are equal.
3. If $\Delta > 0$, all roots are real and unequal.

A typical example of the discriminant Δ, plotted as a function of the noise level σ, is depicted in Fig. G.12 for a typical set of parameters. It can be shown that Δ can be expressed as a fourth order polynomial equation with respect to $\ln\sigma$ which has two distinct roots

$$\begin{aligned}\ln(\sigma_1) = {} & \frac{2\alpha_1^3\omega_1^3 - 27\alpha_1\hat{\gamma}^{\mathrm{st}}\zeta^2F_1^2\omega_1}{54\zeta^2F_1^2\omega_1\epsilon} - \frac{2\left(\alpha_1^2\omega_1^2 + 3\zeta^2F_1^2\right)^{3/2} - 9\alpha_1\zeta^2F_1^2\omega_1}{54\zeta^2F_1^2\omega_1\epsilon} \\ & - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\sqrt{2\pi}\hat{\gamma}^{\mathrm{st}^{3/4}}\omega_1 e^{-\frac{(\hat{\gamma}^{\mathrm{st}}-1)\sqrt{\hat{\gamma}^{\mathrm{st}}}\zeta F_1}{\omega_1\epsilon}}}{\sqrt{(3\hat{\gamma}^{\mathrm{st}}+1)\zeta F_1\omega_1\epsilon}}\right) + \ln(x_{y_0})\end{aligned} \tag{G.82}$$

and

$$\begin{aligned}\ln(\sigma_2) = {} & \frac{9\alpha_1(1-3\hat{\gamma}^{\mathrm{st}}) + \frac{2\left(\alpha_1^3\omega_1^3 + \left(\alpha_1^2\omega_1^2 + 3\zeta^2F_1^2\right)^{3/2}\right)}{\zeta^2F_1^2\omega_1}}{54\epsilon} \\ & - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\sqrt{2\pi}\hat{\gamma}^{\mathrm{st}^{3/4}}\omega_1 e^{-\frac{(\hat{\gamma}^{\mathrm{st}}-1)\sqrt{\hat{\gamma}^{\mathrm{st}}}\zeta F_1}{\omega_1\epsilon}}}{\sqrt{(3\hat{\gamma}^{\mathrm{st}}+1)\zeta F_1\omega_1\epsilon}}\right) + \ln(x_{y_0})\end{aligned} \tag{G.83}$$

and a double root

$$\ln(\sigma_3) = \frac{\alpha_1(\hat{\gamma}^{\mathrm{st}} - 1)}{2\epsilon} - \frac{\log\left(\frac{2\sqrt{2\pi}\hat{\gamma}^{\mathrm{st}^{3/4}}\omega_1 e^{-\frac{(\hat{\gamma}^{\mathrm{st}}-1)\sqrt{\hat{\gamma}^{\mathrm{st}}}\zeta F_1}{\omega_1\epsilon}}}{\sqrt{(3\hat{\gamma}^{\mathrm{st}}+1)\zeta F_1\omega_1\epsilon}}\right)}{2} + \ln(x_{y_0}). \tag{G.84}$$

In the example shown in Fig. G.12 one has : $\ln(\sigma_1) = -53.1$, $\ln(\sigma_2) = -6.8$ and $\ln(\sigma_3) = -26.6$.

If $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ we have $\Delta > 0$ except at $\sigma = \sigma_3$ for which $\Delta = 0$. In general, when $\Delta > 0$ the three real roots are written using trigonometric functions as follows

$$r_k = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}\right) + \frac{2k\pi}{3}\right) - \frac{a_2}{3a_1} \text{with} \quad k = 0, 1, 2. \tag{G.85}$$

Fig. G.13 shows the roots r_k $(k = 0, 1, 2)$ as functions of the noise level σ using again the parameters (G.45) and $x_{y_0} = 0.01$. The stochastic dynamic bifurcation point, denoted $\hat{y}^{\mathrm{dyn}}_{\mathrm{stoch,a}}$, is equal to r_0 if $\sigma < \sigma_3$ and to r_2 if $\sigma_3 < \sigma < \sigma_2$. This choice is justified by means of a numerical resolution which shows that this is the unique positive solution of Eq. (G.80).

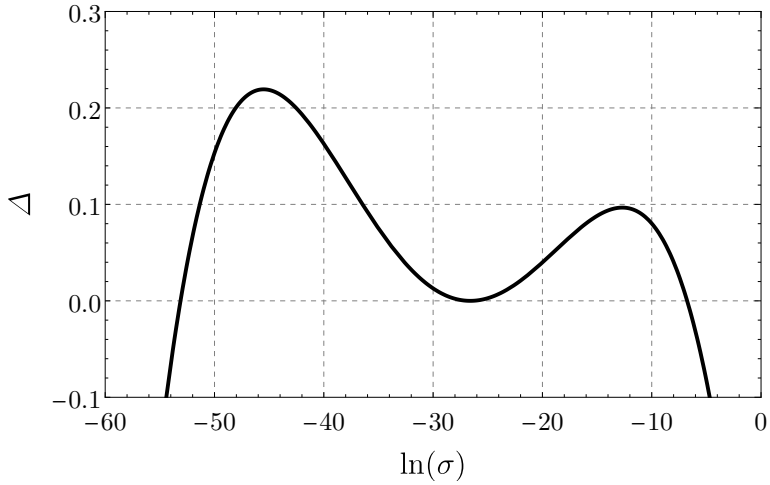


Figure G.12. Discriminant Δ of (G.55) as a function the natural logarithm of the noise level $\ln \sigma$. The set of parameters (G.45) is used.

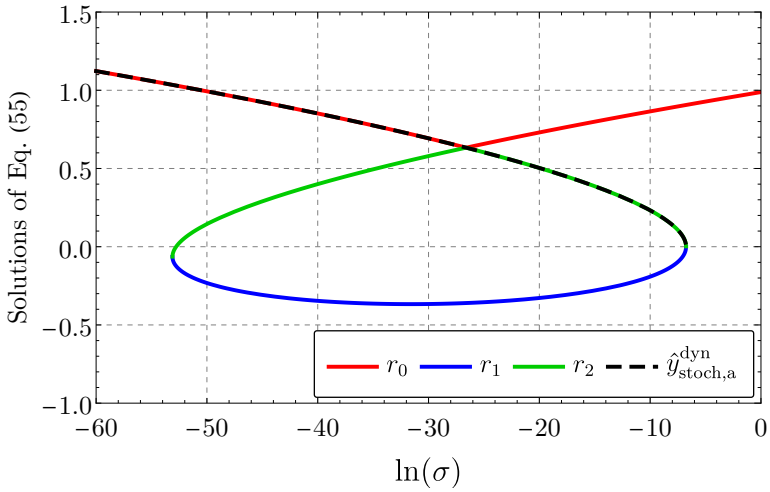


Figure G.13. The roots r_k $(k = 0, 1, 2)$ of Eq. (G.55) and the the stochastic dynamic bifurcation $\hat{y}^{\text{dyn}}_{\text{stoch,a}}$ as functions of the natural logarithm of the noise level σ. The parameters (G.45) are used and $x_{y_0} = 0.01$.

G.11 Appendix E. Static bifurcation diagram

The static bifurcation diagram is the result of the bifurcation analysis of a deterministic dynamical system with constant bifurcation parameter, here Eq. (H.26) with a constant value of y. It plots, as a function of the considered bifurcation parameter (here y), the possible steady-state regimes (fixed points and periodic motions) indicating their stability.

We use here the averaging procedure to obtain the approximated analytical bifurcation diagram of the one-mode model. For that Eq. (G.27) is considered without noise et with a constant bifurcation parameter y, i.e.

$$\frac{dx_t}{dt} = F(x_t, y), \tag{G.86}$$

where the function $F(x_t, y_t)$ is given by Eq. (G.20).

The fixed points x^e of (G.86) are obtained by solving $F(x, y) = 0$. We obtain three solutions : the trivial solution $x^e_1 = 0$ and two non trivial solutions, one is negative and one is positive. Only the the positive non trivial solution is retained and denoted x^e_2, its expression is

$$x^e_2 = 4\sqrt{\frac{\frac{2\zeta F_1(3\hat{\gamma}^{\text{st}}+3y-1)}{3\omega_1\sqrt{\hat{\gamma}^{\text{st}}+y}} - \frac{4\alpha_1}{3}}{\frac{\zeta F_1(\hat{\gamma}^{\text{st}}+y+1)}{\omega_1(\hat{\gamma}^{\text{st}}+y)^{5/2}}}} \tag{G.87}$$

where the expression of $\hat{y}^{\text{st}}$ is given by Eq. (G.7). In the lossless case with $\alpha_1 = 0$ and $\hat{\gamma}^{\text{st}} = \frac{1}{3}$, Eq. (G.87) reduces to $x_2^e = 4\sqrt{2}(3y+1)\sqrt{\frac{y}{9y+12}}$.

The trivial solution corresponds to zero equilibrium position of (H.26) whereas the non trivial solution characterizes its periodic steady-state regimes.

As we know, the trivial fixed point x_1^e is stable if $y < 0$ and unstable if $y > 0$. One can be shown that the non trivial fixed point x_2^e exists only for $y > 0$ and is stable.

Annexe H

To be submitted to Chaos : an interdisciplinary journal of nonlinear science (2023) [p1]

Computing the separatrix between dynamic basins of attraction of low dimensional dynamical systems with a time-varying parameter : application to a model of musical instrument

Baptiste Bergeot, Soizic Terrien and Christophe Vergez

Abstract

We investigate the behavior of one-dimensional non-autonomous dynamical systems obtained by slowly varying over time the bifurcation parameter of the corresponding autonomous systems, i.e., whose bifurcation parameter is constant. In this context, the study focuses on the case for which the time-varying parameter crosses the bistability domain of the corresponding autonomous system. Considering the time-varying parameter as a new (slow) state variable, the considered non-autonomous one-dimensional system becomes a two-dimensional fast-slow system. In the bistability domain, the latter has attracting manifolds (resp. a repelling manifold) associated with the two stable branches (resp. unstable branch) of the bifurcation diagram of the corresponding autonomous system with constant parameter. In the framework of the geometric singular perturbation theory, we define the separatrix in the phase space between what we call the dynamic basin of attraction of the attracting manifolds. Reverse time numerical integration is used to practically compute this separatrix. Finally the proposed methodology is illustrated on a simple musical reed instrument model. This highlights which asymptotic regime is reached (played note or silence) in the bistability domain, depending on how the musician's control is varied over time.

Keywords : Single reed instruments, Time-varying control parameter, Global dynamic bifurcation, Basins of attraction

Lead paragraph

Multistability is a common phenomenon in nonlinear dynamics. It corresponds to the coexistence, in a dynamical system, of stable solutions for a given set of parameters. A multistable system can switch abruptly from a state to another when a parameter is slightly varied, a phenomenon sometimes referred to as critical transition. In this context, we investigate the behavior of one-dimensional non-autonomous dynamical systems obtained by slowly varying over time a bifurcation parameter of the corresponding autonomous systems, i.e., whose bifurcation parameter is constant. The study focuses on the case for which the time-varying parameter crosses the bistability domain of the corresponding autonomous system. Depending on the characteristics of the time-varying parameter, when the bistability domain is crossed, the system can remain close to its current position or leave it abruptly to reach another parameter dependent attractor (called attracting manifold in the paper). Considering the time-varying parameter as another (slow) state variable and then the studied model as a fast-slow system, we define and compute the separatrix in the phase space (which includes the time-varying parameter as another state variable) between what we call the dynamic basin of attraction of a given attractor, i.e., the set of initial conditions leading the system to this attractor. We illustrate our methodology using a simple bistable model of reed musical instrument.

H.1 Introduction

Nonlinear dynamical systems can possess coexisting stable solutions (or states) for a given set of parameters. This phenomenon is called *multistability* and can imply stable states of different nature such as equilibria, periodic, quasiperiodic and chaotic solutions. To illustrate the concepts considered below we consider the following n-dimensional autonomous (i.e., with no explicit dependence on time) dynamical system

$$\dot{x} = f(x, \gamma), \tag{H.1}$$

with $x \in \mathbb{R}^n$ the vector of state variables, γ the considered control parameter and f a nonlinear function.

Multistability can be related to the phenomenon of "critical transition", i.e., a sudden and large change in the output of the system induced by a small change in the input. The link between multistability and critical transition is discussed in the survey article [63] and applications are presented in physics, neuroscience, climate science, biology and ecology. Critical transitions are also referred to as "tipping points", in particular in climate sciences, and can relate to different phenomena. Ashwin *et al.* [7] propose three categories based on the mathematical description of the underlying mechanisms : *noise-induced transitions*, *bifurcation-induced transition*s and *rate-induced transitions*. Noise-induced transitions, where noise make a multistable system switch from one stable state to another, are not considered in the present article. Then there are the *bifurcation-induced transitions* (or *dynamic bifurcations* [15]) and the *rate-induced transitions*. Both of these transitions consider $(n+1)$-dimensional autonomous systems of the following form

$$\dot{x} = f(x, y), \tag{H.2a}$$
$$\dot{y} = \epsilon g(y), \tag{H.2b}$$

associated to Eq. (H.1) but with a time-varying bifurcation parameter y which therefore becomes a new state variable. The time variation of the latter is slow compared to the original time scale of Eq. (H.1) ; this is accounted for here by the small dimensionless parameter ϵ in the right-hand side of Eq. (H.2b). y is called the *slow variable*, the variables of the original state vector x are called the *fast variables* and Eq. (H.2) is a *fast-slow* dynamical system. Solutions of Eq. (H.1) (both transient and stationary) are no more solutions of Eq. (H.2) since y is no constant in time anymore. However, stable stationary solutions of Eq. (H.1) are associated with attracting invariant manifolds of Eq. (H.2) that evolve in its $(n+1)$-dimensional phase space and attract orbits which are in their vicinity [62, 107]. Bifurcation-induced transitions correspond to the slow variable y passing through a bifurcation point γ^* at which the considered stable solution of Eq. (H.1) losses stability. At this point, the corresponding manifold of Eq. (H.2) ceases to be attracting and in general the transition to another attracting manifold does not appear at γ^* but at a larger value through a phenomenon of *bifurcation delay* [18, 118, 198]. The rate-induced transitions, identified by Wieczorek *et al.* [212], are transitions between stable attracting manifolds of Eq. (H.2) without the presence of noise or a bifurcation point. In this case the critical transition is only due to the time variation of parameter under consideration. Considering equilibria of Eq. (H.1) (becoming a one-dimensional manifold of Eq. (H.2)), Ashwin *et al.* [7] derived the critical value of the parameter ϵ above which the orbit of the system leaves the attracting manifold it was going along.

In Ref. [6], Ashwin *et al.* introduce a formalism that uses so-called pullback attractors to describe the phenomena of bifurcation-induced transitions and rate-induced transitions, again considering equilibria. The method is extended by Alkhayoun and Ashwin [3] to the case of periodic solutions of Eq. (H.1), becoming two-dimensional manifolds of Eq. (H.2). In a realistic physical system, critical transitions may be associated with a combination of the three mechanisms mentioned above.

The works cited in the previous paragraph focus on the conditions causing an orbit to leave the neighborhood of a manifold that it was following. Therefore, these works deal with the beginning of the critical transition. However, the question of the end of the transition, when several other attracting manifolds can be potentially reached, is poorly addressed in the literature. In the case of dynamical system with constant parameters (i.e., of type (H.1)) for an asymptotically stable solution to be reached, the initial conditions must be in its *basin of attraction*, i.e., the set of initial conditions leading to it. What happens to the notion of basin of attraction when the control (or bifurcation) parameter slowly varies over time, i.e., when Eq. (H.2) is considered ? In other words, what happens to an orbit of Eq. (H.2) when it leaves the neighborhood of a given attractive manifold (or a manifold which has been locally attractive) and several attractive manifolds exist ?

In this paper, we propose first elements of response to these questions. To do so, (i) we consider a one-dimensional original system (i.e., $x \in \mathbb{R}$ in Eq. (H.1) and (H.2)) and (ii) we consider the framework of the geometric singular perturbation theory (GSPT) [62, 107] which provides general results on the behavior of fast-slow dynamical systems. In this context, the concepts of *dynamic basin of attraction* (DBA) and of the separatrix between two DBAs are introduced. Basically, these concepts can be exemplified as follows : if, in the case of a one-dimensional nonlinear ODE with a constant control parameter (i.e., of type (H.1) with $x \in \mathbb{R}$), the system is bistable with two coexisting stable equilibria whose basins of attraction, called here *static basin of attraction* (SBA), are separated by an unstable equilibrium ; then, for the same ODE with a slowly time-varying control parameter (i.e., of type (H.2) with $x \in \mathbb{R}$) the stable equilibria becomes attracting one-dimensional manifolds that evolve in the two-dimensional phase space. Depending on the initial condition considered, one or other of these manifolds is reached by the system orbit. The set of initial conditions, in the two-dimensional phase space, leading to a given attracting manifold constitutes the DBA of this manifold. Logically, the Separatrix Between two DBA (SDBA) also becomes a one-dimensional manifold. The present research aims (i) to propose mathematical definitions of DBA and SDBA and to propose a method to compute

the SDBA and (ii) to illustrate the method on a toy model of reed instrument with a linearly time-increasing mouth pressure parameter.

Self-sustained musical instruments - such as wind instruments, bowed string instruments or singing voice - are nonlinear dynamical systems known to produce a diversity of different sound regimes. An important specificity is that sound production in a musical context is associated to a time-varying control. Indeed, control parameters are modified continuously by the instrument player. In particular, wind instruments players control air pressure in their mouth with variations over time finely tuned, first to start the sound and then to obtain the desired sound effect. However, in general, when the corresponding mathematical models of musical instruments are analyzed, the control parameters are assumed to be constant. Consequently, the instruments are modeled by autonomous nonlinear systems of differential equations (ODEs) which can have a wealth of solutions including equilibria, periodic and quasiperiodic solutions. In this context, the silence corresponds to the trivial equilibrium of the instrument model and a musical note to a periodic solution. In general, for a given set of constant control parameters, this desired periodic solution is not the only stable solution of the model. In practice, from the point of view of instrument playing, the size of the SBA of a given periodic solution can be linked to the ease with which the corresponding note can be played. For example, in the case of a reed instrument such as the saxophone, musicians know that for a given fingering corresponding to a low pitch note, the first harmonic of the desired note are sometimes easier to play. It is also on this principle of mulistability that brass instruments, such as trumpets, operate.

In physical models of wind musical instruments, state variables are classically the modal pressures and their derivatives : these are the fast variables of Eq. (H.2). The considered control parameter is the pressure inside the mouth of the musician. We assume that it varies slowly over time and it is considered as another state variable : the slow variable such as y for Eq. (H.2). In this context, previous theoretical works be the authors [a5, a6, a15] investigated the emergence of oscillations in a simple models of reed instruments in which the pressure in the mouth, which the control parameter, varies over time. This allowed to interpret experimental results [a4] as the manifestation of the bifurcation delay phenomenon. After studying this in the case of the appearance of oscillations, we investigate here the influence of the temporal dynamics of the mouth pressure on the nature of the regime reached in the presence of multistability. A problem that has been preliminary studied by Colinot *et al.* [43] through *a posteriori* observations on results of direct time numerical integration of a saxophone model. Authors showed that different regimes may be reached by modifying the mouth pressure dynamics. Here, we focused on the underlying phenomenons allowing us to interpret these kinds of observations. Although the dynamics observed in this particular system corresponds to a bifurcation-induced transition, the concepts of BDA and SDBA might also de of interest in the case of rate-induced transitions.

The paper is organized as follows. In Section H.2, the single reed instrument model under consideration is briefly presented. The static bifurcation diagram of the model is computed in Section H.3. Section H.4 provides elements of geometric singular perturbation theory needed for the mathematical definition of the DBA and of the separatrix between two of them. The latter are defined in Section H.5.1 in which the method used to compute the separatrix is also presented. The method is then illustrated on the studied model in Section H.5.2. A discussion about the case of a blowing pressure which saturates in the bistability domain and about the extension of the method to more realistic models of instruments is proposed in Section H.6. Finally, concluding remarks and some perspectives are given in Section H.7.

H.2 Background on the physical model of reed instrument

The model of single reed instrument model considered in the paper consists in a classical toy model obtained under strong assumptions (see Section H.8.1). We focus here on dynamic basins of attraction mentioned above and describe a method to define and compute the separatrix between two basins. For sake of conciseness, details on the clarinet model (which is classical in musical acoustics) are presented in the Appendix H.8.

The state variables are the pressure p at the entrance to the instrument resonator (i.e., inside the mouthpiece) and its first time derivative and the bifurcation parameter is the blowing pressure γ. We consider the averaged dynamics of this model, in which the amplitude x of p is a state variable, with a time-varying blowing pressure (the control parameter under consideration in this work), now considered as another state variable and denoted y (see Section H.8.2).

Equations of the averaged dynamics are of the form of Eq. (H.2), i.e.,

$$\dot{x} = f(x, y), \tag{H.3a}$$

$$\dot{y} = \epsilon g(y), \tag{H.3b}$$

with $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Eq. (H.3a) is the equation of the physical instrument model and Eq. (H.3b) describes the

Tableau H.1. Modal and embouchure parameters. Taken from Ref. [81]. Unless stated otherwise, these parameter values are used through out the article.

Modal parameters	$\epsilon_1 = 1/36.6$ $\omega_1 = 1440$ $Z_1 = 50$
Embouchure parameter	$\zeta = 0.1$

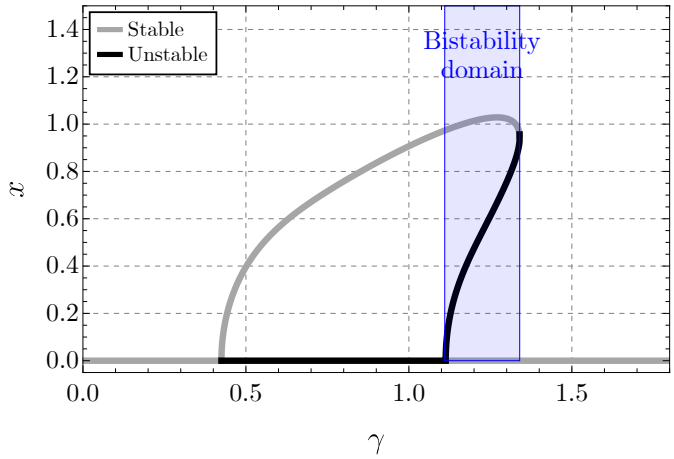


Figure H.1. Static bifurcation diagram of the clarinet obtained by averaging procedure. A bistability domain is observed between $\gamma = 1.11$ and $\gamma = 1.34$ and depicted by an blue colored area. The parameters given in Table H.1 are used.

time variation of the blowing pressure y. The function f is derived from the so-called nonlinear characteristic (NLC) of the instrument exciter which links the volume flow through the reed channel to the pressure difference between the mouth and the mouthpiece and has been widely studied in the literature [50, 98].

In the following sections, we refer to *static* when the mouth pressure is time-constant (i.e. $\dot{y} = 0$) and to *dynamic* when the mouth pressure is time-varying (i.e. $\dot{y} = \epsilon g(y)$).

H.3 Static bifurcation diagram of the model

The *static bifurcation diagram* is a commonly used tool in musical acoustics (see e.g. Refs. [37, 81]). It It provides useful information beyond the purely static case, and has shown its interest in the dynamic case, in particular in a model of reed musical instrument [a5, a6, a15]. Here, the static bifurcation diagram is computed by stating $\dot{y} = 0$ with $y = \text{const.} = \gamma$ in Eq. (H.3). Fixed points of $\dot{x} = f(x, \gamma)$ (with f given by Eq. (H.36)) are computed by solving $f(x, \gamma) = 0$. In practice, we use the function `NSolve` of the Mathematica software [216].

The trivial fixed point is the equilibrium solution of the original (non-averaged) dynamics (H.27) and the non trivial fixed points correspond to the periodic solution of (H.27). The stability of the fixed points is determined subsequently from the sign of $\partial_x f(x, \gamma)$.

Fig. H.1 shows the static bifurcation diagram obtained for the modal parameters of the air-column and the embouchure parameter ζ given in Table H.1. Unless stated otherwise, the parameter values given in Table H.1 are used through out the article. Fig. H.1 shows that the model is bistable between $\gamma = 1.11$ and $\gamma = 1.34$. Within this range of the parameter value the trivial fixed point and a non trivial fixed point are stable and, lying between them, the other non trivial fixed point is unstable.

For a given stable solution, the *static basin of attraction* (SBA) is the set of initial conditions leading to this solution. Here, for our 1D system $\dot{x} = f(x, \gamma)$, the separatrix between the SBAs of the two stable fixed points in the bistability domain is trivial, and is the unstable fixed point.

H.4 Elements of geometric singular perturbation theory

In this section some basics of the geometric singular perturbation theory (GSPT) [107] are recalled. System (H.3) is considered for sake of illustration. In the GSPT framework (i) the latter is a $(1, 1)$-fast-slow system, i.e., a dynamical system with one fast variable (x, here the amplitude of the mouthpiece pressure) and

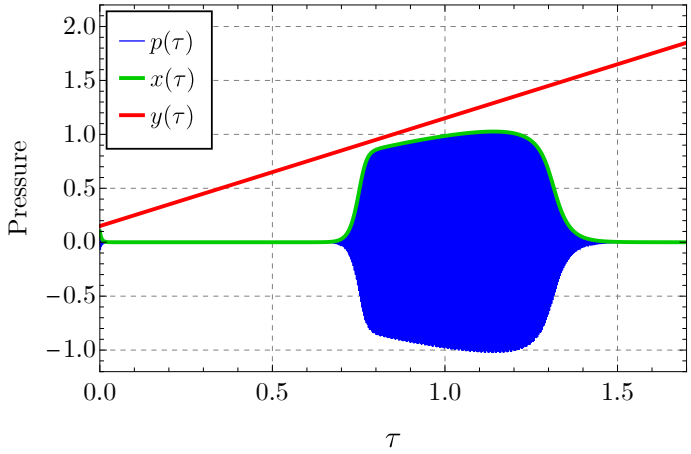


Figure H.2. Times series $x(\tau)$ (green) and $p(\tau)$ (blue) obtained from the numerical integration of the averaged system (H.4) and of the original system (H.27) (replacing γ by $y(t')$ and switching from t' to t, see Appendix H.8), respectively. Both are obtained with $g(y) = 1$. The time profile of the linearly increased blowing pressure $y(\tau)$ is also represented (red). The parameters given in Table H.1 are used with $\epsilon = 0.0183$. The initial conditions are : $x(0) = p(0) = 0.1$, $\dot{p}(0) = 0$ and $y(0) = 0.15$.

one slow variable (here y, the blowing pressure) and (ii) t represents the fast timescale. Most of these elements of GSPT are reproduced from Berglund and Gentz [22, 24] and Kuehn [40].

Eq. (H.3) is now written on the slow timescale $\tau = \epsilon t$, Eq. (H.3) becomes

$$\epsilon x' = f(x, y) \tag{H.4a}$$
$$y' = g(y), \tag{H.4b}$$

where $\{\}' = d_\tau\{\}$ (the first time derivative with respect to the slow time τ).

As an illustration, Fig. H.2 shows an example of possible time series $x(\tau)$ and $p(\tau)$ obtained from the numerical integration of the averaged system (H.4) and of the original system (H.27) (replacing γ par $y(t')$ and switching from t' to t, see Appendix H.8), respectively. We considered a linear time variation of the slow variable, i.e.,

$$y(\tau) = \tau + y_0, \tag{H.5}$$

or $y(t) = \epsilon t + y_0$, with $y_0 = y(0)$. Therefore, the function $g(y)$ is simply

$$g(y) = 1. \tag{H.6}$$

We used the parameters given in Table H.1.

The time profile of the linearly increasing blowing pressure $y(\tau)$ is also represented. Overall, the figure shows an excellent agreement between time series $x(\tau)$ and $p(\tau)$ which validates the averaging procedure.

The time evolution of slow-fast systems is characterized by possible successions of fast epochs and slow epochs. This is shown in Fig. H.2. Indeed, the variable x first decreases rapidly to zero (first fast epoch). Then during the increase of the mouth pressure, x follows zero (first slow epoch) and increases rapidly at $\tau \approx 0.65$ (second fast epoch). A slow evolution follows corresponding to oscillations of the mouthpiece pressure p (second slow epoch). Finally, x decreases again rapidly to zero at $\tau \approx 1.45$ (third fast epoch) and follows zero slowly (third slow epoch).

In the GSPT framework, the so-called *slow subsystem* is obtained by stating $\epsilon = 0$ in Eq. (H.4), which leads to

$$0 = f(x, y) \tag{H.7a}$$
$$y' = g(y). \tag{H.7b}$$

The dynamics of (H.7) approximates the dynamics of (H.3) (or (H.4)) during slow epochs. It is restricted to the *critical manifold* $\mathcal{M}_0$ defined below.

Definition H.1. The critical manifold is defined as

$$\mathcal{M}_0 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = x^\star(y)\right\} \tag{H.8}$$

with $x^\star(y)$ the branches of the solution of

$$f\left(x^\star(y), y\right) = 0 \tag{H.9}$$

in each interval of y where $\partial_x f(x, y)$ does not vanish and therefore where we can write that $f(x, y) = 0$ is equivalent to $x = x^\star(y)$ by the *implicit function theorem*.

Note that the critical manifold does not depend on the function $g(y)$.

Points on the critical manifold are equilibria (or fixed points) of the so-called *fast subsystem* defined by

$$\dot{x} = f(x, y) \tag{H.10a}$$
$$\dot{y} = 0 \tag{H.10b}$$

which descibes the dynamics of the variable x for a constant bifurcation parameter. This corresponds to the static case considered in Section H.3.

Definition H.2. Let $a^\star(y)$ be the linearization of the fast vector field (H.10) on $\mathcal{M}_0$, i.e., at $x = x^\star(y)$, defined as

$$a^\star(y) = \partial_x f\left(x^\star(y), y\right) \tag{H.11}$$

A value $x^\star(y)$ of the fast variable x is a hyperbolic equilibrium point of (H.10) if $a^\star(y) \neq 0$; stable if $a^\star(y) < 0$ and unstable if $a^\star(y) > 0$. Then, the critical manifold is called *attracting* (resp. *repelling*) if $a^\star(y) < 0$ (resp. $a^\star(y) > 0$) for $y \in I$ with I a subset of $\mathbb{R}$. A subset $\mathcal{M}_0^{\text{nh}}$ of the critical manifold $\mathcal{M}_0$ is *normally hyperbolic* if for each point $P = (x^\star(y), y) \in \mathcal{M}_0^{\text{nh}}$ we have $a^\star(y) \neq 0$, i.e., $\mathcal{M}_0^{\text{nh}}$ is either attracting or repelling [a].

a. *Normally* means that each point of $\mathcal{M}_0$ must be hyperbolic only in the the direction normal (i.e., non tangent) to itself (see e.g. Definition 2.3.4 and the text below of Ref. [40]).

A simple form of the Fenichel's theorem (from [24]) is given below. It states that all orbits starting near an attracting branch of the critical manifold actually converge to an invariant manifold.

Theorem H.1 (Fenichel 1979). *If the critical manifold $\mathcal{M}_0$ is normally hyperbolic (i.e. attracting or repelling), then there exists a manifold $\mathcal{M}_\epsilon$, which is $\mathcal{O}(\epsilon)$-close [a] to $\mathcal{M}_0$ and invariant under the flow (H.3) [b] (or (H.4)). The manifold $\mathcal{M}_\epsilon$ is normally hyperbolic, i.e., it attracts or repels neighboring orbits exponentially fast in directions normal to itself.*

a. To be understood in the sense of the Hausdorff distance (see e.g. Chap. 3 of Ref. [40]).

b. $\mathcal{M}_\epsilon$ is called invariant (locally in I) under the flow, if $(x_0, y_0) \in \mathcal{M}_\epsilon$ implies that $(x(t), y(t)) \in \mathcal{M}_\epsilon$ as long as $y(t) \in I$ holds.

For a more complete statement of the Fenichel's theorem see e.g. Chap. 3 of Ref. [40].

Definition H.3. The manifold $\mathcal{M}_\epsilon$, as obtained by the Theorem H.1, is called the *slow manifold*.

Here and as often, we say "the" manifold $\mathcal{M}_\epsilon$. Formally, this is incorrect. Indeed, the complete statement of the Fenichel's theorem stipulates that $\mathcal{M}_\epsilon$ is usually not unique. However, it also stipulates that all these manifolds are exponentially close to each other, i.e., they lie at a distance [1] $\mathcal{O}(e^{-K/\epsilon})$ from each other for some $K > 0$ with $K = \mathcal{O}(1)$. Consequently, we adopt the convention to refer to $\mathcal{M}_\epsilon$ as "the" slow manifold of Eq. (H.4).

Based on these elements of GSPT, the definition of what we referred to as a *dynamic basin of attraction* is formalized in Section H.5.

1. Again, to be understood in the sense of the Hausdorff distance.

H.5 Separatrix between dynamic basins of attraction

This section presents the main results of this work. We give in Section H.5.1 definitions for general $(1,1)$-fast-slow systems. The results are then illustrated in Section H.5.2.

H.5.1 Definitions and method for computing separatrix between DBAs

The definitions stated in this section are valuable for $(1,1)$-fast-slow systems in the form of Eq. (H.3) whose critical manifold $\mathcal{M}_0$ (see Definition H.1) has a bistability domain. The definition of the latter is given below.

Definition H.4 (Bistability domain of $\mathcal{M}_0$). An open subset

$$D =]y_\mathrm{l}, y_\mathrm{u}[\tag{H.12}$$

of $\mathbb{R}$ is called a *bistability domain* of the critical manifold if for $y \in D$ Eq. (H.9) has two attracting branches $x_1^\star(y)$ and $x_2^\star(y)$, i.e., $a_1^\star(y) = \partial_x f\left(x_1^\star(y), y\right) < 0$ and $a_2^\star(y) = \partial_x f\left(x_2^\star(y), y\right) < 0$. Necessarily, Eq. (H.9) has also a repelling branch $x_3^\star(y)$ for which $a_3^\star(y) = \partial_x f\left(x_3^\star(y), y\right) > 0$. The critical manifold is non normally hyperbolic at $y = y_\mathrm{l}$ and $y = y_\mathrm{u}$.

The bistability domain of the critical manifold $\mathcal{M}_0$ is of course, in the case of a $(1,1)$-fast-slow system, identical to the bistability domain of the corresponding static problem (see Fig. H.1), one has therefore $y_\mathrm{l} = 1.11$ and $y_\mathrm{u} = 1.34$.

We can now define what we call a *dynamic basin of attraction*.

Definition H.5 (Dynamic basin of attraction). In the bistability domain D (see Definition H.4) the critical manifold $\mathcal{M}_0$ of (H.4) has two coexisting attracting branches $\mathcal{M}_{0,\mathrm{a}_1}$ and $\mathcal{M}_{0,\mathrm{a}_2}$ defined as

$$\mathcal{M}_{0,\mathrm{a}_i} = \left\{x \in \mathbb{R}, y \in D \mid x = x_i^\star(y)\right\}, \quad i = 1,2 \tag{H.13}$$

separated by a repelling branch $\mathcal{M}_{0,\mathrm{r}}$

$$\mathcal{M}_{0,\mathrm{r}} = \left\{x \in \mathbb{R}, y \in D \mid x = x_3^\star(y)\right\} \tag{H.14}$$

Through Fenichel's Theorem H.1, Eq. (H.4) has two attracting invariant manifolds $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{a}_i}$ $\mathcal{O}(\epsilon)$-close of $\mathcal{M}_{0,\mathrm{a}_i}$ $(i = 1,2)$ and a repelling slow invariant manifold $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{r}}$ $\mathcal{O}(\epsilon)$-close of $\mathcal{M}_{0,\mathrm{r}}$. Then the *dynamic basin of attraction* (DBA) of a given attracting branch $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{a}_i}$ $(i = 1,2)$ is the subset of the phase space for which orbits originating from initial conditions in the DBA end up following $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{a}_i}$ $(i = 1,2)$ when the bistability domain D is crossed.

We state in Definition H.5 "end up following" because some transient regimes can exist before the branches $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{a}_i}$ $(i = 1,2)$ are reached.

The separatrix between two DBAs and its nature are finally defined.

Definition H.6 (Separatrix between DBAs). The *separatrix between DBAs* (SDBA) is the boundary in the phase space that separates two DBAs.

Definition H.7 (Nature of the SDBA). The SDBA is the repelling invariant manifold $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{r}}$ considered beyond the lower bound y_l of the bistability domain until a point of the phase space having the smallest physically relevant value of the slow variable y.

The previous definitions are especially relevant when the increasing blowing pressure does not saturate in the bistability domain. In such a case, the system has no fixed points (at least it has none for $y < y_\mathrm{u}$) and we want to know when the bistability zone is crossed whether or not the original (i.e., non averaged) system oscillates significantly. In the case of musical instrument, this corresponds to the fact that a sound is produced (or not) during the transient. The case of a blowing pressure that saturates in the bistability domain is discussed in Section H.6.1.

In view of the definitions H.6 and H.7, we are interested in computing the repelling invariant manifold $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{r}}$. Through the Fenichel's theorem H.1, if $x^\star(y)$ is a normally hyperbolic branch of the critical manifold (either

attracting or repelling), the invariant manifold $\mathcal{M}_\epsilon$ (either attracting or repelling) admits a parametric equation of the form $x = \bar{x}(y, \epsilon)$, where $\bar{x}(y, \epsilon) = x^\star(y) + \mathcal{O}(\varepsilon)$. The function $\bar{x}(y, \varepsilon)$ is the solution of $\epsilon \frac{dx}{dy} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ obtained by dividing (H.4a) by (H.4b). Asymptotic analytical expressions of $\bar{x}(y, \epsilon)$, in the form of a power series in ϵ, can be easily obtained in regions in which the critical manifold is hyperbolic (see e.g. Ref. [24]). These approximations fail at non hyperbolic points, making them unusable for our study [2]. Indeed, an SDBA is the extension of a repelling invariant manifold $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{r}}$ through non hyperbolic points of the critical manifold (see Definition H.6). The curve $\bar{x}(y, \epsilon)$ can be defined as a particular solution of Eq. (H.3) or Eq. (H.4). In the manner of Berglund and Landon [26], this particular solution, i.e., the SDBA, is here approximated numerically by means of a time reversal procedure, i.e., by a numerical integration of

$$\epsilon x' = -f(x, y) \tag{H.15a}$$
$$y' = -g(x, y) \tag{H.15b}$$

choosing an initial condition (x_0, y_0) on the upper boundary of the bistability domain D and on the repelling part $\mathcal{M}_{0,\mathrm{r}}$ of the critical manifold, i.e.,

$$(x_0, y_0) = (x_3^\star(y_\mathrm{u}), y_\mathrm{u}). \tag{H.16}$$

We use the fact that, through Theorem H.1, $\mathcal{M}_{0,\mathrm{r}}$ is $\mathcal{O}(\epsilon)$-close to the corresponding repelling invariant manifold $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{r}}$ which is attracting for (H.15). The numerical integration is then stopped at the required value of the slow variable y.

The time reversal method has also the advantage to be easily extended to higher dimensional systems (see Section H.6.2).

H.5.2 Illustration of SDBAs in the averaged clarinet model with slowly time varying blowing pressure

The attracting and repelling branches of the critical manifold $\mathcal{M}_0$ of Eq. (H.4) with the parameters given in Table H.1 are respectively the stable and unstable branches of the bifurcation diagram depicted in Fig. H.1 (see Definition H.1 and the beginning of Section H.3). The bistability domain of $\mathcal{M}_0$, as described by Definition H.4, is $D = [y_\mathrm{l} = 1.11, y_\mathrm{u} = 1.34]$. In the latter, the DBAs of each attracting invariant manifold $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{a}_1}$ and $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{a}_2}$ (see Definition H.5) are denoted DBA_1 and DBA_2, respectively. Without loss of generality, we chose arbitrarily that $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{a}_1}$ is the branch corresponding to $x_1^\star(y) = 0$. The separatrix between DBA_1 and DBA_2 is obtained through Definition H.7. It is the extended slow repelling invariant manifold $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{r}}$ (associated to the repelling branch $\mathcal{M}_{0,\mathrm{r}}$ of the critical manifold) beyond the lower bound y_l of the bistability domain to a point of the phase space having the smallest possible value of the slow variable y. In system (H.15) with a linear time variation of y, i.e., $g(y) = 1$, $x(\tau)$ diverges as τ tends to infinity. Consequently, the SDBA is approximated by an orbit of Eq. (H.15) having the appropriate initial condition given by (H.16). Here that yields $(x_0, y_0) = (x_3^\star(y_\mathrm{u}) = 0.95, y_\mathrm{u} = 1.34)$. As mentioned in Section H.5.1, this orbit is obtained by a numerical simulation. The simulation is stopped when an arbitrary large value of $x(\tau)$ is reached. The resulting times series are shown in Fig. H.3(a) (red solid and dashed lines for $x(\tau)$ and $y(\tau)$, respectively).

Fig. H.3(b) shows the time integration of the direct time system (H.4) with an initial condition (IC) first in DBA_1 (in blue) and then in DBA_2 (in green). Both of these initial conditions are chosen close to the SDBA. In the case of IC $\in \mathrm{DBA}_1$, we observe that $x(\tau)$ first rapidly approaches zero and remains equal to zero over time. In the case of IC $\in \mathrm{DBA}_2$, similarly to the example in Fig. H.2, after a first similar start transient, $x(\tau)$ remains close to zero for a moment and then moves away from it, taking a non-zero value for a period of time before falling back to zero. The first (resp. second) situation seems to correspond well to the case where the trajectory tends to follow $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{a}_1}$ (resp. $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{a}_2}$) when the bistability domain D is crossed. This appears more clearly in Fig. H.3(c) in which the orbits previously computed are represented in the phase plane and superimposed to the critical manifold. The stream plot of the vector field Eq. (H.4) is also shown. The latter shows, for $y < y_\mathrm{u}$, that the orbits starting with an initial condition in the DBA_1 (resp. DBA_2), i.e., below (resp. above) the SDBA, end up following $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{a}_1}$ (resp. $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{a}_2}$).

To better understand what happens in the vicinity of the y-axis, a logarithmic scale is used in Fig. H.3(d) for the ordinates. This example shows that very small amplitudes are encountered. In a real-world problems, residual noise would prevent reaching such low amplitudes. In the future, stochastic studies (similar to what was done in [a15]) would be relevant to complete this work.

2. The behavior of a $(1, 1)$-fast-slow system near a non hyperbolic point of the critical manifold can be analytically studied by means of the methodology developed by Berglund *et al.* [17, 22] which consists in determining the *scaling law* of the system, i.e., the dependance of the system in the parameter ϵ in the neighborhood of the non hyperbolic point. This is not the purpose of the present paper because this analytical method cannot be extended for higher dimensional phase spaces.

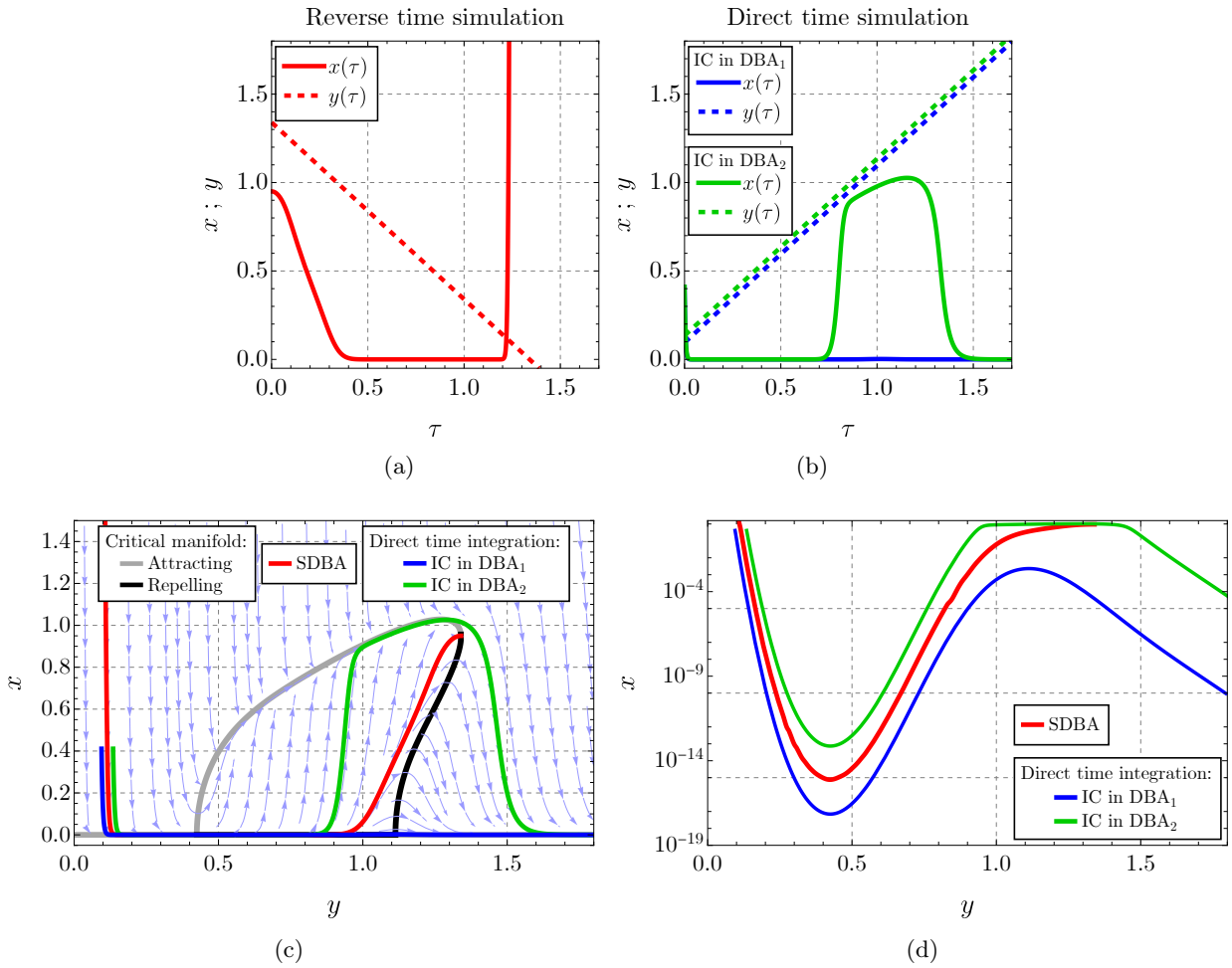
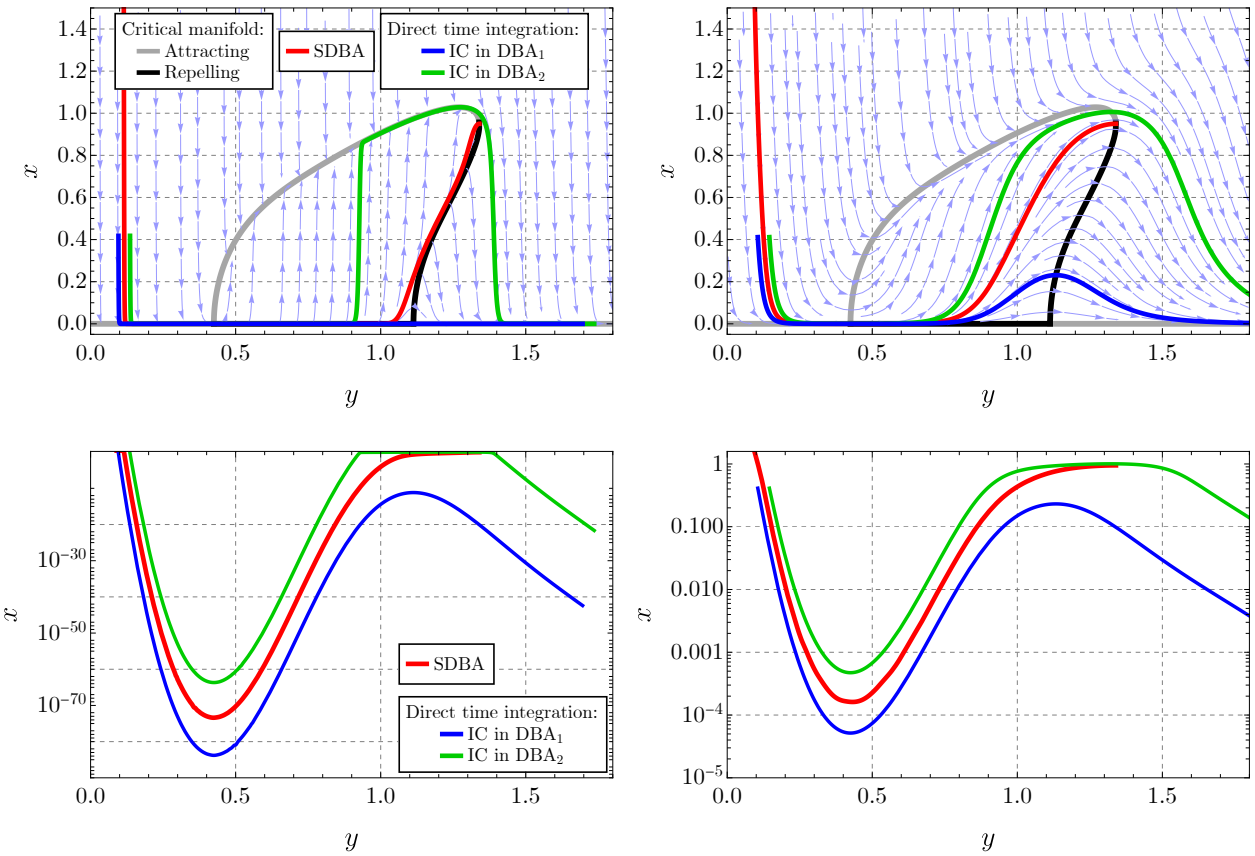


Figure H.3. Illustration of DBA and SDBA for a linear time-varying blowing pressure. (a) Times series of $x(\tau)$ (solid line) and $y(\tau)$ (dashed line) obtained by numerical integration of the reverse time system (H.15) with $g(y) = 1$ and an initial condition (IC) given by (H.16) (red). (b) Time series of the direct time system (H.4) with a IC first in DBA_1 (in blue) and in DBA_2 (in green). (c) The corresponding orbits (same colors are used) in the phase plane and superimposed to the critical manifold. The orbit corresponding to the reverse time integration corresponds to the SDBA. The stream plot of the vector field Eq. (H.4) with streamlines colored in light blue is also shown. (d) The same as in (c) but with a logarithmic scale for the ordinates. The parameters are given in Table H.1 with in addition $\epsilon = 0.0183$.

The transient regimes mentioned after Definition H.5 are visible in the stream plot in Fig. H.3(c). These transient regimes are all the longer as the initial conditions are chosen close to the SDBA. This begs the following question : will these transients be short enough for the system to reach the branches $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{a}_i}$ before the end of the bistability domain? This question relates to the link between the duration of transients and the distance between the initial conditions and the SDBA. This will be explored in future works.

Examples similar to those of Figs. H.3(c) and H.3(d) are shown in Fig. H.4 for two other values of the parameter ϵ : $\epsilon = 0.00366 < 0.0183$ (see Fig. H.4(a)) and $\epsilon = 0.0732 > 0.0183$ (see Fig. H.4(b)). This shows that the smaller ϵ, the shorter (in terms of y) the above-mentioned transients, and the more visible the distinction between slow and fast phases. In Fig. H.4(b) in particular (top, blue line) the orbit is still relatively far from the $\mathcal{M}_{\epsilon,\mathrm{a}_2}$ (the y-axis) when the upper bound of the bistability domain is reached. This highlights the limits of the approach for large values of ϵ. Nevertheless, the approach allows to interpret these borderline situations.



(a) $\hat{\epsilon} = 10^{-4}$, $\epsilon = 0.00366$.

(b) $\hat{\epsilon} = 2 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon = 0.0732$.

Figure H.4. The same figures as Figs H.3(c) and H.3(d) but with (a) $\hat{\epsilon} = 10^{-4}$ and therefore $\epsilon = 0.00366$ and (b) $\hat{\epsilon} = 2 \cdot 10^{-3}$ and therefore $\epsilon = 0.0732$.

H.6 Discussion

H.6.1 Case of a blowing pressure saturating in the bistability domain

In this section the case where the blowing pressure tends towards a finite limit y_{targ} in the bistability domain is explored. More precisely, an exponential growth of the blowing pressure is considered using $g(y) = y_{\text{targ}} - y$ (with $y_{\text{targ}} \in D$) which yields

$$y(\tau) = y_{\text{targ}} + (y_0 - y_{\text{targ}})e^{-\tau}, \tag{H.17}$$

with again $y_0 = y(0)$. Written in the slow timescale τ, the system takes the following form

$$\epsilon x' = f(x, y) \tag{H.18a}$$

$$y' = y_{\text{targ}} - y. \tag{H.18b}$$

This differs from the case studied so far, in which the pressure does not saturate. Here fixed points are solutions of $f(x, y) = 0$ and $y_{\text{targ}} - y = 0$, that leads to $f(x, y_{\text{targ}}) = 0$ and $x = x_i^\star(y_{\text{targ}})$ $(i = 1, 2, 3)$. Therefore, the points $P_i^\star = (x_i^\star(y_{\text{targ}}), y_{\text{targ}})$ $(i = 1, 2, 3)$ are the fixed points of Eq. (H.18). The Jacobian matrices $\mathbf{J}(P_i^\star)$ of (H.18) evaluated at each fixed point $P_i^\star$ are

$$\mathbf{J}(P_i^\star) = \begin{pmatrix} \dfrac{a_i^\star(y_{\text{targ}})}{\epsilon} & \dfrac{\partial_y f(x_i^\star(y_{\text{targ}}), y_{\text{targ}})}{\epsilon} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{H.19}$$

whose eigenvalues are $\mu_1 = \frac{a_i^\star(y_{\text{targ}})}{\epsilon}$ and $\mu_2 = -1$. Because $a_1^\star(y_{\text{targ}}) < 0$, $a_2^\star(y_{\text{targ}}) < 0$ and $a_3^\star(y_{\text{targ}}) > 0$ (see Definition H.4), $P_1^\star$ and $P_2^\star$ are *nodes* (i.e., $\mu_1\mu_2 > 0$) and $P_3^\star$ is a *saddle* (i.e., $\mu_1\mu_2 < 0$). These classical definitions of nodes and saddle are taken from Ref. [179].

The problem therefore becomes a classic problem of finding the basins attraction of stable fixed points of a 2-dimensional system. In this case, the DBAs of the attractive branches $\mathcal{M}_{\epsilon,a_i}$ $(i = 1, 2)$ and the SBAs of

the fixed points $P_1^\star$ and $P_2^\star$ are identical. The separatrix between these basins is the stable manifold of the unstable fixed point $P_3^\star$ [38]. The latter is again computed using a time reversal simulation. The following equation

$$\epsilon x' = -f(x, y) \tag{H.20a}$$
$$y' = -y_{\text{targ}} - y. \tag{H.20b}$$

is numerically integrated from initial condition chosen as a small perturbation of $P_3^\star$.

An example is shown in Fig. H.5. Figures H.5(a) and H.5(b) show similar representations as in Figs H.3(c) and H.3(d), respectively. In Fig. H.5(a) the orange vertical line indicates the target value y_{targ} of the mouth pressure. Intersections between this vertical line and the critical manifold correspond to fixed points of (H.18). Importantly, the critical manifold is independent of the function $g(y)$ and therefore identical to the one previously obtained in Section H.5.2 for a linear growth of y. Still in Fig. H.5(a), a zoom near the unstable fixed point $P_3^\star$ is performed to highlight its stable manifold interpreted here as a SDBA (represented by a red line in the figure). We can see in Fig. H.5(b) that the SDBA intersects the x-axis for a value of y just below 0.01.

Two orbits obtained by numerical integration of the direct time system Eq. (H.18) with (i) a IC first in DBA_1 (in blue) and (ii) in DBA_2 (in green) also appear in Fig. H.5. The corresponding time series are plotted in Figs. H.5(c) and H.5(d), respectively. In the case of IC $\in \text{DBA}_1$, the orbit stays close to the y-axis for a moment and then moves away from it, follows the branch $\mathcal{M}_{\epsilon,\text{a}_1}$ of the critical manifold before stopping at $P_1^\star$. For IC $\in \text{DBA}_2$, it is the point $P_2^\star$ which ends up being reached. Here too transients are observed before the fixed points are reached.

H.6.2 DBA and SDBA to more realistic models

This work introduces the notions of DBA and SDBA for $(1, 1)$-fast-slow systems. However, more realistic models of reed instruments cannot be reduced to $(1, 1)$-fast-slow systems. Working in the plane makes it easier to illustrate and understand these concepts. However, the concepts of DBA and SDBA can be generalized to (m, n)-fast-slow systems. Indeed, the SDBA is a particular solution of the considered system. However, there are two things to bear in mind when the fast subsystem is more than one-dimensional. Firstly, the critical manifold is also more than one-dimensional and it can be attracting (if all eigenvalues of the Jacobian matrix of the fast subsystem evaluated on the critical manifold have negative real parts), repelling (if all the eigenvalues have positive reals parts) and *saddle-type* (if there are eigenvalues with negative real parts and others with positive real parts). Previous definitions are taken from Ref. [40] (Chap. 3). In this case of a saddle-type invariant manifold, the SDBA cannot be obtained by reversing the time, as presented above for a purely repelling manifold. Indeed, a saddle-type manifold in direct time remains saddle-type in reverse time. In this case methods of continuation of orbits could be used, for example using the software AUTO [57]. The second thing to consider is that the fast subsystem can have other types of than equilibria ; such as periodic or quasiperiodic solutions. The complete bifurcation diagram of the fast subsystem (including periodic solutions and if possible quasiperiodic solutions) is not anymore the critical manifold of the studied (m, n)-fast-slow system which includes only the equilibrium solutions. In a (m, n)-fast-slow system, invariant manifolds associated to quasiperiodic solutions of the fast subsystem are more complicated to deal with, both analytically and computationally. However, periodic solutions can be treated in the same way as equilibrium solutions. First, because theoretically Berglund [22] proposes an analogue of Fenichel's theorem on the existence of an invariant manifold tracking families of periodic orbits and also because periodic solutions are easy to compute numerically. As in the case of equilibrium solutions, for the time reversal method to be used, the invariant manifold considered for the SDBA calculation must be repelling. For periodic solutions, that means that $m - 1$ [3] of the *Floquet multipliers* associated with the periodic solution under consideration have modulus strictly larger than one (see e.g. Ref. [179], Chap. 7, for details about local stability of periodic solutions).

We provide here an illustration for the original system (H.27) (replacing γ par $y(t')$ and switching from t' to t, see Appendix H.8), a $(2, 1)$-fast-slow system (globally 3-dimensional) since the 1-dimensional complex Eq. (H.33) is a 2-dimensional real equation.

As mentioned above, the trivial fixed point of the fast subsystem (H.10) associated to the averaged dynamics (H.3) is the equilibrium solution of the original non-averaged dynamics (H.27) and non trivial fixed points correspond to periodic solutions of (H.27). In the bistability domain the fast subsystem associated to the original dynamics thus has a stable equilibrium solution, a stable and an unstable periodic solutions. The manifolds corresponding to these periodic solutions are represented in Fig. H.6 by gray and black surfaces in

3. A periodic solution of an m-dimensional fast subsystem is associated to m Floquet multipliers but one is always unity (see Lemma 7.3 of Ref. [179]).

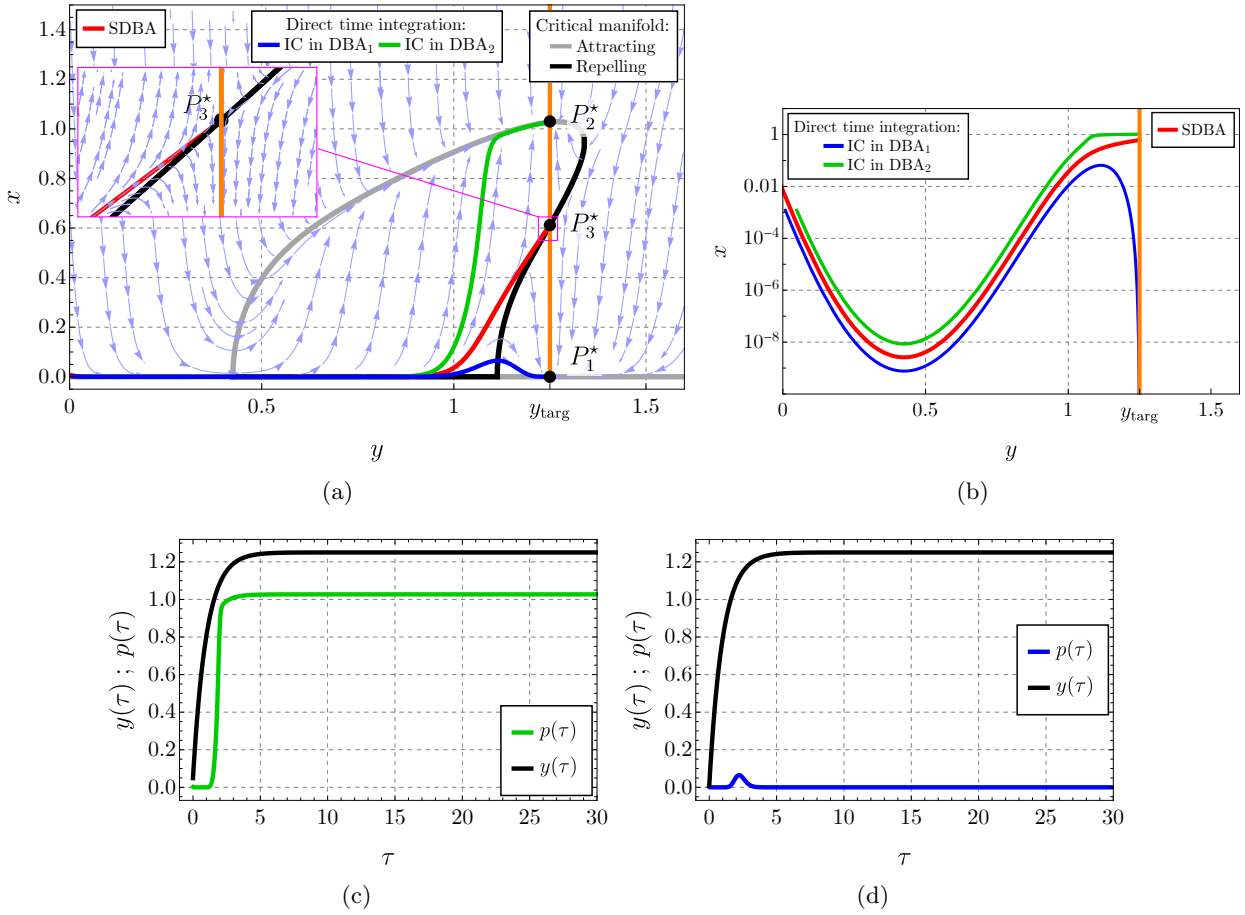


Figure H.5. Illustration of DBA and SDBA for an exponential time-varying blowing pressure. (a) Orbit obtained by the numerical integration of the reverse time system (H.15) with $g(y) = y_{\text{targ}} - y$ and an initial condition (IC) chosen as a small perturbation of the non trivial fixed point $P_3^\star$ (in red). This represents the SDBA of Eq. (H.18). Two orbits obtained by the numerical integration of direct time system Eq. (H.18) : with a IC first in DBA_1 (in blue) and in DBA_2 (in green). The corresponding time series are plotted in Figs. H.5(c) and H.5(d), respectively. The stream plot of the vector field Eq. (H.4) with streamlines colored in light blue is also shown is also shown. (b) The same as in (a) but with a logarithmic scale for the ordinates. The parameters are given in Table H.1 with in addition $\epsilon = 0.0732$, $y_{\text{targ}} = 1.25$.

the $(y, p, \dot{p})$-space, respectively. In practice these manifolds, which also represent the static bifurcation diagram of the original dynamical system, are deduced from the critical manifold of Eq. (H.3). Indeed, in the $(p, \dot{p})$-plane periodic solutions of the non-averaged dynamics (H.27) is a circle whose radius is equal to the value of the corresponding fixed point of Eq. (H.3). The manifolds of the periodic solutions of the latter are then obtained by rotation of the critical manifold of Eq. (H.3) around the y-axis.

The SDBA is here the extension of a 2-dimensional repelling slow invariant manifold associated to the unstable periodic solution of the fast subsystem. In a 2-dimensional system an unstable periodic solution is associated to two Floquet multipliers, one is unity[??] and the other has modulus larger than one. Therefore, the associated invariant manifold is repelling and the reverse time procedure can be used.

In Fig. H.6 the SDBA is shown in red in the $(y, p, \dot{p})$-space. Although the SDBA is 2-dimensional, here we computed only one solution of the time-reversed system for initial conditions on the periodic solution at $y = y_{\text{u}}$. Here, the period of oscillations is short enough for the two-dimensional SDBA to be represented correctly by a single periodic orbit.

Results of time-domain simulation of the $(2, 1)$-fast-slow original system (in direct time) with two different sets of initial conditions, one in DBA_1 (in blue) and the second one in DBA_2 (in green) are also shown in Fig. H.6. The parameters and IC are the same as the same as in Fig. H.3 (same parameters and initial conditions) and similar observations can be made : when IC $\in \text{DBA}_1$, the orbit first winds around the y-axis and remains in the vicinity of it. Conversely, when IC $\in \text{DBA}_2$, after a first similar start transient, the orbits stays on vicinity of the y-axis for a while and then moves away to reach the manifold associated to the stable

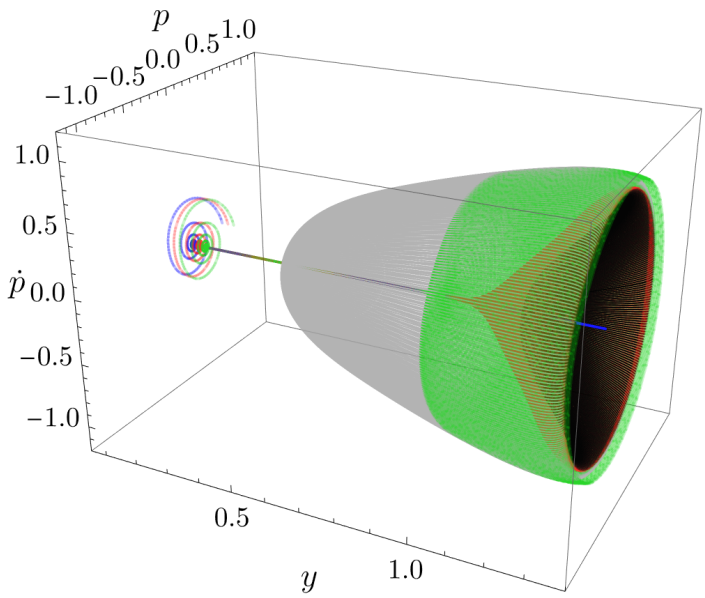


Figure H.6. Illustration of DBA and SDBA for the original system (H.27) with a linear time-varying blowing pressure. The manifolds associated to the stable and unstable periodic solutions of the fast subsystem of the original non-averaged dynamics (H.27) are depicted by gray and black surfaces, respectively. Orbit obtained by the numerical integration of the reverse time system associated to Eq. (H.27) (replacing γ par $y(t')$ and switching from t' to t, see Appendix H.8) and an IC on the circle representing the periodic solution in the $(p, \dot{p})$-plane at $y = y_u$ (in red). This represents the SDBA of the 3-dimensional original dynamics. Two orbits obtained by the numerical integration of direct time system : with a IC first in DBA_1 (in blue) and in DBA_2 (in green). Same parameters as in Fig. H.3.

periodic solution. The simulation is carried out over a shorter period of time than in Fig. H.3. This is why we do not observe the orbit falling back to zero.

H.7 Conclusion

In this paper the behavior of a class of one-dimensional non-autonomous dynamical systems has been investigated. These systems are obtained by slowly varying over time the bifurcation parameter of the corresponding autonomous systems (called fast subsystem in the paper) whose bifurcation parameter is constant. More precisely, the case considered corresponds to the time-varying parameter crossing a bistability domain of the associated autonomous system. The proposed methodology has been illustrated on a simple musical reed instrument model.

In the bistability domain, the non-autonomous system has attracting manifolds (resp. a repelling manifold) associated with the two stable branches (resp. unstable branch) of the bifurcation diagram of the corresponding autonomous system. The concept of dynamic basin of attraction (DBA) of a given attracting manifold has been introduced and defined as the set of initial conditions in the phase space (in which the time-varying parameter is considered as another state variable) from which the orbits end up following this attracting manifold. The separatrix between two DBAs (SDBA), i.e., the boundary in the phase space that separates the two DBAs, has been defined as the repelling invariant manifold mentioned above and considered beyond the lower bound of the bistability domain until a point of the phase space having the smallest possible value of the time-varying bifurcation parameter. In practice, the separatrix has been computed using a numerical reverse time integration with relevant initial conditions. As a first perpective, keep working on low dimension systems, it would be interesting to develop analytical methods that would make it possible to relate the characteristics of the time-varying parameter to the nature of the observed regime. Moreover, in the purpose of real-life applications, the method should be extended to more complex dynamic systems. First, the notions of DBA and SDBA remain valid for high dimensional systems. However, if the solutions (stable and unstable) of the multistable autonomous system are more complex than equilibria, the challenge will be to detect the unstable solutions to then deduce the possible SDBAs of the non-autonomous system. Secondly, multistable systems are known to be very sensitive to noise. Therefore, the influence of noise on SDBAs should be studied in the future. Finally, we believe that the general nature of the method suggests that the results obtained go beyond

musical acoustics. Application in physics, neuroscience or climate science can be envisaged, in particular to deal with the so-called critical transition problems.

H.8 Appendix A. Derivation of the model

H.8.1 Classical single reed instrument model

Sound production by single reed instruments is classically modeled through the nonlinear coupling between two linear components [14, 37, 66] : the reed and the air-column inside the instrument. While blowing air through the reed channel into the instrument, the instrumentalist provides a quasi-static source of energy. The instrument and the player constitute an autonomous dynamical system. When the trivial equilibrium solution of this system becomes unstable, a sound is produced [67, 181, 215].

Since the lowest resonance frequency of the reed is one order of magnitude higher than the sound frequency for many notes, the reed is often modeled as a lossless stiffness spring [10, 155]. Therefore its position relative to rest is proportional to the pressure drop across the reed, i.e., the pressure difference between the mouth and the mouthpiece of the instrument. The linear pressure response of the air column P to the volume flow U through the reed channel is given in the frequency domain through the input impedance of the air column Z

$$P(\omega) = Z(\omega)U(\omega), \tag{H.21}$$

where ω is the angular frequency. We point out that the model presented in the appendix already considers a dimensionless pressure and flow (see Chap. 9 of Ref. [37] for more details on the model).

The contribution at the input of the instrument of the (infinite) series of modes of the air column is taken into account in $Z(\omega)$. For computational reasons, the series is truncated to N modes, where N is an integer :

$$Z(\omega) = \sum_{n=1}^{N} Z_n \frac{j\epsilon_n\omega_n\omega}{\omega_n^2 + j\epsilon_n\omega_n\omega - \omega^2}, \tag{H.22}$$

with Z_n, ω_n and ϵ_n the modal parameters, respectively the modal factor, the resonance angular frequency and the inverse of the quality factor of the n^{th} peak of the impedance (corresponding to the n^{th} mode of the air column). Eq. (H.22) can be written in the time domain

$$d_{t''t''}p_n + \epsilon_n\omega_n d_{t''}p_n + \omega_n^2 p_n = Z_n\epsilon_n\omega_n d_{t''}u, \quad \forall n \in [1, N], \tag{H.23}$$

in which t'' is used to denote the original timescale, u is the inverse Fourier transform of U and p_n is such that $p = \sum_{i=1}^{N} p_n$, where p is the inverse Fourier transform of P [181] and corresponds to the time evolution of the mouthpiece pressure.

Through Bernoulli's principle, the volume flow through the reed channel u is related nonlinearly to the reed channel opening and the pressure difference between the mouth and the mouthpiece [50, 98]

$$u = \hat{F}(p, \gamma) = \zeta(1 + p - \gamma)\sqrt{|\gamma - p|}\,\mathrm{sgn}(\gamma - p)H(1 + p - \gamma) \tag{H.24}$$

where H is the Heaviside function, γ is the dimensionless pressure in the mouth of the musician and ζ a dimensionless parameter accounting for many embouchure parameters. The parameters γ and ζ are the *control (or bifurcation) parameters* of the model. The relation (H.24) is called the nonlinear characteristic (NLC) of the instrument exciter. In this work a polynomial fitting of the function $\hat{F}(p, \gamma)$ (see Eq. (H.24)), denoted $F(p, \gamma)$, is obtained using the function `InterpolatingPolynomial` of the Mathematica software [216] (see Fig. H.7).

Using the function $F(p, \gamma)$, Eq. (H.23) can be written using only the pressure p as follows

$$d_{t''t''}p_n + \epsilon_n\omega_n d_{t''}p_n + \omega_n^2 p_n - Z_n\epsilon_n\omega_n d_{t''}p_n\partial_p F(p, \gamma) = 0, \quad \forall n \in [1, N]. \tag{H.25}$$

A minimal model of a reed instrument including a single mode of the air-column is obtained by stating $N = 1$. In this case (H.25) becomes

$$d_{t''t''}p + \epsilon_1\omega_1 d_{t''}p + \omega_1^2 p - Z_1\epsilon_1\omega_1 d_{t''}p\partial_p F(p, \gamma) = 0 \tag{H.26}$$

In this case ($N = 1$), since $p_1 = p$, p_1 is replaced by p in Eq. (H.26). This is clearly a minimal yet useful model of sound production in reed instruments. Indeed, it takes into account the two main control parameters, γ et ζ, adjusted by the musician and describes the physical mechanism through which sound emerges from the

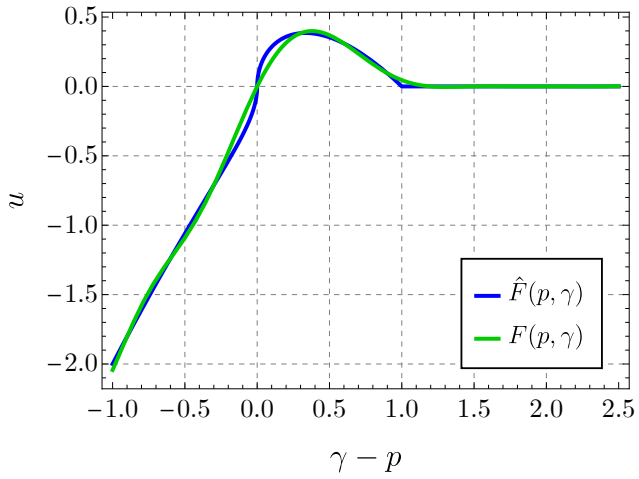


Figure H.7. Comparison between the function $\hat{F}(p,\gamma)$ given by Eq. (H.24) (blue line) and its polynomial fitting $F(p,\gamma)$ (green line) as functions of the pressure difference $\gamma - p$.

trivial equilibrium (i.e. silence) when a resonance of the air column is excited by an incoming flow. We finally introduce the dimensionless time $t' = \omega_1 t''$, so Eq. (H.26) takes the form of the following self-excited oscillator

$$d_{t't'}p + \epsilon_1 h(p, d_{t'}p, \gamma) + p = 0. \tag{H.27}$$

where

$$h(p, d_{t'}p, \gamma) = d_{t'}p\,(1 - Z_1 \partial_p F(p,\gamma))\,. \tag{H.28}$$

H.8.2 Averaged dynamics with a slowly time-varying control parameter

Eq. (H.27), in the phase space $(p, d_{t'}p)$, is transformed to a slowly varying system using the following complex representation introducing a new variable ξ as

$$\xi e^{jt'} = d_{t'}p + jp \tag{H.29}$$

with $j^2 = -1$. Combining Eq. (H.29) and its complex conjugate yields the expressions of p and $d_{t'}p$ as functions of ξ

$$p = \frac{\xi e^{jt'} - \xi^* e^{-jt'}}{2j}, \tag{H.30}$$

$$d_{t'}p = \frac{\xi e^{jt'} + \xi^* e^{-jt'}}{2}, \tag{H.31}$$

where ξ^* is the complex conjugate of ξ. Deriving Eq. (H.29) with respect to t' and using Eq. (H.31) give $d_{t't'}p$ as

$$d_{t't'}p = d_{t'}\xi e^{jt'} + j\xi e^{jt'} - \frac{j}{2}\left(\xi e^{jt'} + \xi^* e^{-jt'}\right). \tag{H.32}$$

Substituting Eqs. (H.30), (H.31) and (H.32) into Eq. (H.27) yields the following complex non-autonomous system

$$d_{t'}\xi = -\epsilon_1 h\left(\frac{\xi e^{jt'} - \xi^* e^{-jt'}}{2j}, \frac{\xi e^{jt'} + \xi^* e^{-jt'}}{2}, \gamma\right) e^{-jt'}. \tag{H.33}$$

Then, stating $\xi = x e^{j\varphi}$ and $\phi = t' + \varphi$ and separating real and imaginary parts of each side of Eq. (H.33) gives

$$d_{t'}x = -\epsilon_1 h\,(x\sin\phi, x\cos\phi, \gamma)\cos\phi, \tag{H.34a}$$

$$d_{t'}\phi = 1 + \epsilon_1 h\,(x\sin\phi, x\cos\phi, \gamma)\,\frac{\sin\phi}{x}. \tag{H.34b}$$

Since $0 < \epsilon_1 \ll 1$, Eq. (H.34) is simplified by means of an averaging method (see Chap. 7 of Ref. [172]) to

$$d_{t'}x = \epsilon_1 f(x,\gamma), \tag{H.35a}$$

$$d_{t'}\phi = 1 \tag{H.35b}$$

where x and ϕ are uncoupled and

$$f(x,\gamma) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h\left(x\sin\alpha, x\cos\alpha, \gamma\right)\cos\alpha d\alpha. \tag{H.36}$$

Details on the averaging procedure are provided in Section H.9.

The integral in Eq. (H.36) is generally hard to solve analytically, except if the function h is assumed to have a polynomial form. This is the case here using the polynomial fitting $F(p,\gamma)$ of the NLC.

The dynamics of the mouth pressure (now denoted y) is finally added as $d_{t'}y = \hat{\epsilon}g(y)$. Then, assuming $\hat{\epsilon}/\epsilon_1 \ll 1$, switching the time from t' to $t = \epsilon_1 t'$ and using the notation $\{\dot{}\} = d_t\{\}$, the following system is obtained

$$\dot{x} = f(x,y) \tag{H.37a}$$
$$\dot{y} = \epsilon g(y) \tag{H.37b}$$

where ϵ is defined as

$$\epsilon = \frac{\hat{\epsilon}}{\epsilon_1} \tag{H.38}$$

which is the relevant small parameter to use for this model.

H.9 Appendix B. Details on the averaging procedure

Omitting here, for the sake of clarity, the dependence in γ, and introducing

$$X(x,\phi) = -h\left(x\sin\phi, x\cos\phi, \gamma\right)\cos\phi, \tag{H.39a}$$
$$\Omega(x,\phi) = h\left(x\sin\phi, x\cos\phi, \gamma\right)\frac{\sin\phi}{x}, \tag{H.39b}$$

Eq. (H.34) becomes

$$d_{t'}x = \epsilon_1 X(x,\phi), \tag{H.40a}$$
$$d_{t'}\phi = 1 + \epsilon_1\Omega(x,\phi). \tag{H.40b}$$

The latter is a $(1,1)$-fast-slow systems with t' the fast timescale, x the slow variable and ϕ the fast variable. The principle of the average procedure (see Chap. 7 of Ref. [172]), consists in assuming the following form for the variable x

$$x = v + \epsilon_1 u(v,\phi) \tag{H.41}$$

with $u(v,\phi)$ a function $2\pi-$periodic in ϕ.

Using Eq. (H.41) and

$$d_{t'}u = \left(1 + \epsilon_1\Omega(v+\epsilon_1 u,\phi)\right)\partial_\phi u + d_{t'}v\partial_v u, \tag{H.42}$$

Eq. (H.40a) becomes

$$d_{t'}v(1+\epsilon_1\partial_v u) + \epsilon_1\left(1+\epsilon_1\Omega(v+\epsilon_1 u,\phi)\right)\partial_\phi u = \epsilon_1 X(v+\epsilon_1 u,\phi). \tag{H.43}$$

Each ϵ_1-dependent function in (H.43) is expanded in a first-order Taylor series around $\epsilon_1 = 0$, that yields

$$d_{t'}v + \epsilon_1\left(1+\epsilon_1\Omega(v,\phi) + \mathcal{O}(\epsilon_1^2)\right)\left(1-\epsilon_1\partial_v u + \mathcal{O}(\epsilon_1^2)\right)\partial_\phi u = \left(\epsilon_1 X(v,\phi) + \mathcal{O}(\epsilon_1^2)\right)\left(1-\epsilon_1\partial_v u + \mathcal{O}(\epsilon_1^2)\right) \tag{H.44}$$

which simplifies into

$$d_{t'}v = \epsilon_1\left(X(v,\phi) - \partial_\phi u\right) + \mathcal{O}(\epsilon_1^2) \tag{H.45}$$

Then one assumes a function $u(v,\phi)$ which satisfies the following equation

$$\partial_\phi u = X(v,\phi) - f(v). \tag{H.46}$$

Integrating (H.46) with respect to ϕ from 0 to 2π and because $u(v,\phi)$ is 2π-periodic in ϕ we obtain

$$f(v) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(v,\alpha)d\alpha, \tag{H.47}$$

and then $f(v)$ is the average of $X(v, \phi)$ as defined in Eq. (H.36).

Substituting (H.46) into (H.45) and adding Eq. (H.40b) we obtain a simplified dynamical system with the following form

$$d_{t'} v = \epsilon_1 f(v) + \mathcal{O}(\epsilon_1^2) \tag{H.48a}$$
$$d_{t'} \phi = 1 + \mathcal{O}(\epsilon_1). \tag{H.48b}$$

Finally, consistently with $0 < \epsilon_1 \ll 1$, we have $\epsilon_1 f(v) + \mathcal{O}(\epsilon_1^2) \approx \epsilon_1 f(v)$, $1 + \mathcal{O}(\epsilon_1) \approx 1$ and $v \approx x$ and therefore Eq. (H.35) is proven.

Troisième partie

Notice personnelle

Chapitre 5

Curriculum vitæ

Baptiste BERGEOT

né le 14 janvier 1985 à Rennes (35)

Adresse électronique : baptiste.bergeot@insa-cvl.fr

Site internet académique : https://baptistebergeotacademic.github.io/AcademicWebsite/

Position actuelle : **Maître de conférences** (section CNU 60), INSA Centre Val de Loire [1],
Laboratoire de Mécanique Gabriel Lamé (LaMé, EA 7494),
Équipe *Dynamique interactions vibrations Structures* (DivS).

5.1 Cursus académique

2015 **Qualification Maître de Conférences, Section 60.**

2013 **Doctorat d'acoustique, Université du Mans.**

- Préparé au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Mans (LAUM, UMR 6613).
- Soutenue le 10 octobre 2013.
- Encadrement : Bruno Gazengel (PU, Univ. Le Mans), Christophe Vergez (DR CNRS, LMA [2]) et André Almeida (MCF, Univ. Le Mans).
- Intitulé : *Naissance des oscillations dans les instruments de type clarinette à paramètre de contrôle variable.*
- Lien TEL : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01149513.

2010 **Master d'Ingénierie Mécanique et Acoustique, parcours Acoustique,**
Université du Mans.

2007 **Maîtrise de Sciences Physiques, parcours Physique,**
Université de Rennes 1.

2003 **Baccalauréat Scientifique.**

5.2 Parcours professionnel

Depuis 2015	**Maître de Conférences**	INSA Centre Val de Loire
2013 → 2015	**Post-doctorant** Encadrement : Bruno Cochelin (PU, ECM) et Sergio Bellizzi (DR CNRS, LMA)	École Centrale Marseille (ECM), LMA

1. INSA Centre Val de Loire, 3 rue de la chocolaterie, CS 23410, 41034 Blois cedex, FRANCE.
2. LMA ≡ Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (UMR 7031, Marseille, FRANCE).

5.3 Encadrements doctoraux et scientifiques

5.3.1 Doctorats

Doctorant	Informations
Israa Zogheib	Intitulé : *Comportement dynamique de systèmes mécaniques lents-rapides stochastiques* Date de début : **1er novembre 2023** (thèse en cours) Taux de participation : 50% Autre encadrant : Nils Berglund (directeur de thèse, taux de participation 50%)
Chérif Snoun	Intitulé : *Contrôle passif des vibrations des systèmes mécaniques à l'aide d'absorbeurs dynamiques non linéaires avec prise en compte d'incertitudes paramétriques* Date de début : **1er octobre 2016** Date de soutenance : **16 juillet 2020** Taux de participation : 50% Autre encadrant : Sébastien Berger (directeur de thèse, taux de participation 50%)
Duc Thinh Kieu	Intitulé : *Méthodes de réduction de modèles pour l'analyse du comportement dynamique des structures complexes à paramètres incertains* Date de début : **1er septembre 2015** Date de soutenance : **10 février 2020** Taux de participation : 25% Autres encadrants : Sébastien Berger (directeur, taux de participation 25%), Jean-Mathieu Mencik (co-directeur, taux de participation 25%) et Marie-Laure Gobert (co-encadrante, taux de participation 25%)

5.3.2 Stages de recherche de Master

2023	Stagiaire : **Helmi Chaabene** Intitulé : *Atténuation passive de résonance vibratoire à l'aide d'un absorbeur non linéaire bistable : étude numérique* Taux de participation : 100%
2022	Stagiaire : **Joris Nguyen** Intitulé : *Atténuation des cycles limites d'un modèle non linéaire d'éolienne à l'aide d'absorbeurs non linéaires de vibrations* Taux de participation : 100%
2021	Stagiaire : **Riccardo Gega** Intitulé : *Contrôle passif des vibrations indésirables dans les éoliennes à l'aide d'absorbeurs dynamiques non linéaires* Taux de participation : 100%
2020	Stagiaire : **Joulia Salloum** Intitulé : *Calculs stochastiques pour le dimensionnement d'un échangeur de chaleur* Taux de participation : 50% Autre encadrant : Quentin Serra (INSA CVL, taux de participation 50%)
2019	Stagiaire : **Barthélemy Jeandel**

	Intitulé : *Vers la conception d'une sourdine pour instrument à anche basée sur le concept de pompage énergétique* Taux de participation : 50% Autre encadrant : Christophe Vergez (LMA, taux de participation 50%)
2019	Stagiaire : **Corentin Coustham** Intitulé : *Calculs stochastiques pour le dimensionnement d'un échangeur de chaleur* Taux de participation : 50% Autre encadrant : Quentin Serra (INSA CVL, taux de participation 50%)
2016	Stagiaire : **Ayda Halouani** Intitulé : *Calculs mécaniques robustes pour le dimensionnement de réservoirs d'hydrogène* Taux de participation : 50% Autre encadrant : Benoît Magnain (INSA CVL, taux de participation 50%)

5.4 Liste des contrats de recherche

5.4.1 Contrats de recherche évalués à la suite d'appels à projets

- **[Sure-Methonum]** (Sureté et ingénierie système : Méthode numériques pour les approches probabilistes) : Projet régional LAVOISIER (2015-2016).

  Partenaires : INSA CVL, CEA.

  Montant : 22k€.

  Rôle : participant au contrat par l'encadrement d'un stage de Master 2.

- **[DSG DPT2MA]** (Déploiement de Plateformes Technologiques en Matériaux, Mécanique et Acoustique ultrasonore) : Projet de Recherche et d'innovation dans le cadre du Dialogue Stratégique et de Gestion 2021-2022 de l'INSA CVL.

  Partenaires : INSA CVL, LaMé, GREMAN.

  Montant : 135k€.

  Durée : 2 ans.

  Rôle : co-responsable scientifique pour le LaMé et encadrant d'un stage de Master 2.

  Descriptif du projet. Collaboration avec le laboratoire GREMAN afin d'associer au contrôle passif des vibrations à l'aide d'absorbeurs dynamiques non linéaires, la récupération d'énergie à partir d'un dispositif piézoélectrique. Cette collaboration s'inscrit dans un projet de recherche et d'innovation lauréat dans le cadre du Dialogue Stratégique et de Gestion 2021-2022 de l'INSA CVL. L'objectif est d'étudier la capacité d'un absorbeur non linéaire couplé à un dispositif piézoélectrique de récupération d'énergie à réduire les vibrations néfastes à une structure primaire tout en récupérant cette énergie. L'idée est d'augmenter le transfert d'énergie de la structure mécanique primaire à protéger vers le matériau piézoélectrique, à l'aide de l'absorbeur non linéaire. Un démonstrateur expérimental est en cours de conception et de réalisation dans le cadre d'un stage de Master 2.

- **[BQR DiSPaREVMT]** (Dispositifs Semi-Passif de Récupération d'Énergie Vibratoire dans les Machines Tournantes réceptrices de type éolienne basé sur le concept de pompage énergétique et la piézoélectricité) : Bonus Qualité Recherche (BQR) 2023-2024 de l'INSA Centre Val de Loire.

  Partenaires : INSA CVL, LaMé, GREMAN.

  Montant : 15k€.

  Durée : 1 an.

  Rôle : porteur et responsable scientifique pour le LaMé.

Descriptif du projet. Le travail de recherche imaginé pour ce projet s'inscrit dans la continuité du projet DSG [DSG DPT2MA] décrit plus haut. Le but serait d'adapter les résultats obtenus dans ce dernier aux problèmes d'instabilités vibratoires dans les machines tournantes réceptrices de type éolienne. Le problème sera abordé à la fois d'un point de vue théorique/numérique (développement d'une méthode de conception du NES) et expérimental (mise en place d'expériences de laboratoire reproduisant les instabilités de flottement ou de couplage rotor/mat puis leur contrôle à l'aide d'un NES).

- **[CoREVE]** (**Co**ntrôle et **R**écupération d'**É**nergie **V**ibratoire dans les **é**oliennes)

  Il s'agit d'un appel à « projets de recherche d'initiative académique » (APR IA) de la région Centre-Val de Loire remporté en juillet 2023 et qui débutera début 2024.

  Titre long : Dispositifs passifs pour le contrôle et la récupération de l'énergie vibratoire nuisible dans les systèmes mécaniques tournants : application aux éoliennes

  Partenaires : INSA CVL, LaMé, GREMAN.

  Montant : 113 k€.

  Durée : 3 ans.

  Rôle : responsable scientifique

  Descriptif du projet. (cf. Section 4.2.1.1).

5.4.2 Contrats de recherche de gré à gré

- **[Caline 1]** (Calcul incertains d'échangeurs de chaleur 1) : Contrat industriel de recherche (2019).

  Partenaires : Air Liquide, LaMé.

  Montant : 14k€.

  Durée : 1 an.

  Rôle : participant au contrat par l'encadrement d'un stage de Master 2.

- **[Caline 2]** (Calcul incertains d'échangeurs de chaleur 2) : Contrat industriel de recherche (2020).

  Partenaires : Air Liquide, LaMé.

  Montant : 14k€.

  Durée : 1 an.

  Rôle : participant au contrat par l'encadrement d'un stage de Master 2.

5.5 Responsabilités

5.5.1 Responsabilités scientifiques

- Membre du Conseil de Laboratoire du Laboratoire de Mécanique Gabriel Lamé (LaMé, EA 7494)
  Période d'exercice : 20 février 2020 - 31 décembre 2023

- Référent sur le campus de Blois de l'INSA Centre Val de Loire du Master *mention Mécanique, Génie Civil, Matériaux, Structures* adossé au Laboratoire de Mécanique Gabriel Lamé. Le Master est co-accrédité par 3 établissements : l'Université de Tours, l'Université d'Orléans et l'INSA Centre Val de Loire
  Période d'exercice : depuis la rentrée universitaire 2018 (rentrée de la première promotion du Master)

5.5.2 Responsabilités pédagogiques

- Responsable de l'option *Ingénierie Mécanique et Conception*, option de 5e année du département *Génie des Systèmes Industriels* de l'INSA Centre Val de Loire.
  Période d'exercice : depuis la rentrée universitaire 2018

5.6 Expertise scientifique

5.6.1 Relecture d'articles

Relecteur de 32 articles pour les journaux suivants : Aerospace Science and Technology (3 article), Automatica (1 article), CEAS Aeronautical Journal (1 article), Chaos, Solitons & Fractals (1 article), International Journal of Non-Linear Mechanics (4 articles), Journal of Computational and Nonlinear Dynamics (1 article), Journal of Engineering Mechanics (1 article), Journal of Sound and Vibration (5 article), Journal of Vibration and Acoustics (1 article), Journal of Vibration and Control (1 article) Mechanism and Machine Theory (1 article), Nonlinear Dynamics (10 articles), The Journal of the Acoustical Society of America (1 article), The Journal of the Acoustical Society of America Express Letters (1 article).

5.6.2 Participation à des jurys de thèse

- **Examinateur** de la thèse de **Rémy Tanays** intitulée *« Contrôle passif non linéaire des instabilités dynamiques »*, préparée à l'ISAE[3] et soutenue le 12 décembre 2022 à Toulouse.

5.7 Rayonnement et diffusion scientifique

Séminaires et communications dans des journées thématiques

1. **Journées annuelles du GdR ExModeli[4], FEMTO-ST Besançon**
   Titre : *Atténuation passive de vibrations auto-entretenues au moyen d'un absorbeur dynamique non linéaire bistable*
   Date : 10 novembre 2023

2. **Séminaire de l'Institut Denis Poisson (IDP UMR CNRS 7013, Orléans, France)**
   Titre : *Systèmes lents-rapides en mécanique vibratoire : application au contrôle passif non linéaire de vibrations auto-entretenues et à l'étude des phénomènes transitoires dans les instruments de musique à anche*
   Date : 23 mars 2023

3. **Séminaire du Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA UMR CNRS 7031, Marseille, France)**
   Titre : *Atténuation passive d'oscillations auto-entretenues à l'aide d'absorbeurs dynamiques non linéaires de type NES : approches analytiques et numériques*
   Date : 7 février 2023

4. **Séminaire du Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés (LMSSC, EA 3196, CNAM, Paris, France)**
   Titre : *Atténuation passive d'oscillations auto-entretenues à l'aide d'absorbeurs dynamiques non linéaires de type NES : approches analytiques et numériques*
   Date : 12 octobre 2022

3. ISAE ≡ Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace
4. Groupe de Recherche « Exploitation Et Modélisation Des Dynamiques Non Linéaires ».

5. **Séminaire du Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA UMR CNRS 7031, Marseille, France)**
   Titre : *Atténuation d'instabilités vibratoires à l'aide d'absorbeurs dynamiques non linéaires de type « NES » : prédiction théorique des régimes d'oscillations*
   Date : 15 janvier 2019

6. **Journées annuelles du GdR DYNOLIN [5], CNAM Paris**
   Titre : *Steady-state regimes of a helicopter ground resonance model including a nonlinear energy sink*
   Date : 14 octobre 2014

7. **Séminaire du Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA UMR CNRS 7031, Marseille, France)**
   Titre : *Naissance des oscillations dans les instruments de type clarinette à paramètre de contrôle variable*
   Date : 12 novembre 2013

5. Groupe de Recherche « Dynamique non linéaire ».

Chapitre 6

Activités d'enseignement

6.1 Introduction

J'ai eu la chance de participer à la formation de jeunes scientifiques et ingénieurs depuis mon doctorat à l'Université du Mans. Mes activités d'enseignement se situent dans les domaines de la mécanique, de l'acoustique et des vibrations au niveaux Licence et Master. Elles sont décrites ci-dessous, classées par établissement où elles ont été dispensées : à l'INSA Centre Val de Loire et à l'Université de Tours en tant que Maître de Conférences et à l'Université du Mans en tant que doctorant.

Certains des supports (notes de cours et/ou diaporamas) des cours mentionnés ci-dessous sont disponibles au téléchargement sur mon site internet académique :
https://baptistebergeotacademic.github.io/AcademicWebsite/SWBB_teaching.html

6.2 À l'INSA Centre Val de Loire

Vibrations non linéaires (2019-aujourd'hui)

Ce cours est une création. Il comporte 6h de Cours Magistraux et 6h de Travaux Dirigés pour les étudiants en 5^{e} année FISE [1] du département GSI [2] option IMC [3] et les étudiants du Master Mécanique, Génie Civil, Matériaux, Structures adossé au Laboratoire de Mécanique Gabriel Lamé.

L'objectif du cours est de donner aux étudiants une introduction aux méthodes d'analyses des vibrations non linéaires. Le Chapitre 1 permet de mettre en contexte le cours en présentant d'abord quelques généralités sur les non-linéarités en mécanique. Il présente ensuite, à l'aide d'exemples, certaines propriétés propres aux systèmes vibratoires non linéaires (distorsion harmonique, fréquence dépendant de l'amplitude) qui seront étudiés en détail dans ce cours. Le Chapitre 2 détaille les techniques qui serviront à l'analyse des systèmes vibratoires non linéaires effectuées dans les chapitres qui suivent. Le forçage harmonique de l'oscillateur de Duffing est étudié dans le Chapitre 3. La résonance primaire et les résonances secondaires (super-harmonique et sous-harmonique) sont étudiées par la méthode des échelles multiples. Le chapitre 4 est consacré à l'analyse de systèmes auto-oscillants. Le cas d'un amortissement négatif induit par le frottement est étudié par la méthode des échelles multiples et celui de l'instabilité aéroélastique d'une aile par la méthode de moyennisation de Bogoliubov–Krylov.

Notions abordées. Oscillateur de Duffing (résonances primaire et secondaires), stabilité linéaire des systèmes dynamiques, oscillations auto-entretenues (induites par le frottement, flottement), méthodes perturbatives (échelles de temps multiples, moyennage de Bogoliubov–Krylov).

1. FISE ≡ Formation Initiale sous Statut Étudiant.
2. GSI ≡ Génie des Systèmes Industriels.
3. IMC ≡ Ingénieries Mécanique et Conception.

Vibrations des structures (2017-aujourd'hui)

J'ai repris et fait évoluer ce cours depuis 2017. Il était initialement donner par Jean-Mathieu Mencik (Professeur de Université à l'INSA Centre Val de Loire). Il comporte 12h de Cours Magistraux, 9h20 de Travaux Dirigés et 8h de Travaux Pratiques pour les étudiants en 4^{e} année du département GSI. Je n'interviens pas directement en Travaux Pratique.

L'objectif du cours est de former les étudiants aux méthodes d'analyses et de calcul en dynamique des structures. En particulier, après un premier chapitre rappelant la notion d'oscillateur harmonique, l'analyse modale des systèmes discrets à plusieurs degrés de liberté et des systèmes continus simples est abordée. La réponse de ces systèmes à des sollicitations harmoniques est également étudiée.

Notions abordées. Oscillations amorties des systèmes à plusieurs degrés de liberté, Oscillations des systèmes continus (barre en traction-compression et poutre en flexion), forçage harmonique, réponse en fréquence, analyse modale.

Matériaux pour l'ingénieur (2015-aujourd'hui)

Ce cours est également une création. Il comporte 9h20 de Cours Magistral et 20h de Travaux Dirigés pour les étudiants en 4^{e} année du département GSI. Je prenais initialement en charge l'intégralité du cours mais depuis deux ans je n'interviens plus que la première partie consacrée à la physique des matériaux métalliques. Les reste est dispensé par mes collègues Arnaud Frachon, Michaël Caliez et Michel Grattons (Maîtres de Conférences à l'INSA Centre Val de Loire).

L'objectif du cours est d'étudier un large spectre de la physique des matériaux métalliques mais également le comportement des matériaux des polymères. Le cours est divisée en quatre partie : (i) physique des matériaux métalliques, (ii) comportement des matériaux métalliques, (iii) comportement des polymères et (iv) mécanique du collage.

Notions abordées. Physique des matériaux métalliques : composition et structure des matériaux, diffusion à l'état solide, thermochimie, propriétés mécaniques. Élasticité et plasticité 3D des métaux, fatigue des métaux, nature chimique et recyclage des polymères, mise en œuvre, caractérisation et comportement des polymères, dimensionnement d'un assemblage collé.

Qualité et maitrise statistique des processus (2015-2022).

J'ai repris et fait évoluer ce cours depuis 2015. Initialement donné par Marie-Laure Gobert (Maîtresse de Conférences à l'INSA Centre Val de Loire), il comporte 9h de Cours Magistraux et 8h20 de Travaux Dirigés pour les étudiants en 3^{e} année FISE et 4^{e} année FISA [4] du département GSI.

L'objectif du cours est (i) de sensibiliser les étudiants à la notion de qualité en milieu industriel dans le cadre des normes ISO 9000 et ISO 9001, (ii) d'introduire la notion de capabilité et (iii) de présenter un outil d'amélioration de la qualité particulièrement adapté aux processus de production de moyennes et grandes séries : la maîtrise statistique des processus (MSP).

Notions abordées. Capabilité, cartes de contrôle aux moyennes (carte de Shewhart, carte de type Shewhart, carte EWMA), carte de contrôle à la dispersion, contrôle aux attributs.

4. FISE ≡ Formation Initiales sous Statut Apprenti.

Mécanique du point (2017-aujourd'hui)

Ce cours comporte 10h40 de Cour Magistral, 24h de Travaux Dirigés et 5h20 de Travaux Pratiques pour les étudiants en 1re année du département STPI [5]. Les Cours Magistraux sont dispensés par Frédéric Mabilat (Professeur Agrégé à l'INSA Centre Val de Loire) et Marie-Laure Gobert. J'interviens dans les Travaux Dirigés et les Travaux Pratiques.

Il s'agit d'un cours classique de mécanique du point pour des étudiants-ingénieurs débutant leur cursus universitaire. Le cours est divisé en trois parties :

1. Dynamique et énergétique en coordonnées cartésiennes : Principe Fondamental de la dynamique (PFD), Théorème de l'Énergie Cinétique (TEC).
2. Dynamique (PFD) et énergétique (TEC) en coordonnées cylindriques ; Théorème du moment cinétique ; statique des solides.
3. Energie potentielle et mécanique (théorème de l'énergie mécanique) ; Force de rappel élastique exercée par un ressort ; Oscillations mécaniques

Notions abordées. Initiation au calcul vectoriel, dynamique du point, cinématique et dynamique en coordonnées cylindriques, forces conservatives et énergie, énergie mécanique et théorèmes associés, oscillations créées par un ressort.

Conception assistée par ordinateur (2015-aujourd'hui)

Ce cours comporte 8h40 de Travaux Dirigés et 15h20 de Travaux Pratiques pour les étudiants en 1re année du département STPI. Il est sous la responsabilité de Flavien Baudou (Professeur Agrégé à l'INSA Centre Val de Loire). J'interviens exclusivement en Travaux Pratiques.

L'objectif du cours est l'apprentissage d'un logiciel de C.A.O. 3D (Solidworks).

Notions abordées. Conception (par extrusion, révolution ou balayage) des différentes pièces d'un assemblage simple, réalisation de l'assemblage, réalisation d'une mise en plan côtée, utilisation d'une bibliothèque de composants.

6.3 À l'Université de Tours

Fluid-structure interactions (2015-2018)

Ce cours fut une création pour les étudiants en 2e année du Master International « Electronics and Mechanical Engineering » et était dispensé en anglais. Il comportait 6h de Cours Magistraux et 6h de Travaux Dirigés.

Ce cours considère le problème vibroacoustique du rayonnement acoustique de structures élastiques couplées à un fluide. L'objectif est de mettre en évidence dans les cas de structures simples comme les plaques, les lois essentielles qui régissent les transferts vibroacoustiques. Le problème est abordé de façon analytique.

Notions abordées. Équations de l'acoustique linéaire, équations d'onde dans les plaques, couplage vibra-acoustique (cas d'une plaque infinie) dans les cas de fluides légers et de fluides lourds, courbes de dispersion.

5. STPI ≡ Sciences et Technologies Pour l'Ingénieur.

6.4 À l'Université du Mans

Au cours de mes trois années de doctorat à l'Université de Mans et dans le cadre de mon contrat doctoral, j'ai eu l'opportunité d'effectuer une mission complémentaire « enseignement ». Ce fut pour moi l'occasion d'enseigner à plusieurs niveaux dans les formations proposées à l'UFR Sciences et Techniques de l'Université du Mans. Ces enseignements sont brièvement décrits ci-dessous.

Onde plane (2013-2015)

Responsable du module : Jean-Pierre Dalmont (Professeur des Universités à l'Université de Mans).
Volume horaire : 26h de Cours et de Travaux dirigés pour des étudiants et 2^{e} année de Licence STI[6].

Contenu scientifique. Les équations de l'acoustique linéaire (en onde plane) sont établies à partir des lois fondamentales de la physique : principe fondamentale de la dynamique (i.e. équation d'Euler), la conservation de la masse et une équation thermodynamique (i.e. équation d'état). Les solutions des équations de l'acoustique sont étudiées dans le domaine temporel puis fréquentiel. Sont ensuite étudiés successivement les notions de réflexion et transmission des ondes, de mode propre et de résonance, d'énergie, d'intensité et de puissance des ondes acoustiques. Enfin les mécanismes de dissipation et leur prise en compte dans les équations de l'acoustique sont abordés.

Notions élémentaires d'acoustique (2013-2015)

Responsable du module : Jean-Pierre Dalmont.
Volume horaire : 24h de Travaux Pratiques pour des étudiants et 1re année de Licence STI.

Contenu scientifique. Corde vibrante, tube de Kundt, réflexion et transmission des ondes, interférences, propagation d'ondes ultrasonores, pendules couplés, sources à directivité variable (monopôle, dipôle, quadripôle), propagation guidée avec écoulement.

Perception du son et codage (2013-2015)

Responsable du module : André Almeida (Maître de Conférences à l'Université de Mans).
Volume horaire : 12h de Travaux Pratiques pour des étudiants et 1re année de Licence STI.

Contenu scientifique. Notion de son musical, sources cohérentes/incohérentes et battement, initiation à l'audiologie, échelle de sonie.

Électroacoustique avancée (2013)

Responsable du module : Bruno Gazengel (Professeur des Universités à l'Université de Mans).
Volume horaire : 24h de Travaux Pratiques pour des étudiants et 2^{e} année du DEUST Vibration, Acoustique et Signal (VAS).

Contenu scientifique. Mesure de l'impédance acoustique d'un guide d'onde, étude des caractéristiques d'un silencieux acoustique, étude des charges d'un haut-parleur, filtrage électrique d'un haut-parleur, directivité de système électroacoustique, caractérisation de microphones de mesure.

6. SPI ≡ Sciences Pour l'Ingénieur.

Physique des instruments de musique (2013-2015)

Responsable du module : Jean-Pierre Dalmont.
Volume horaire : 12h de Travaux Pratiques pour des étudiants et 1re année du Master Ingénierie Mécanique et Acoustique (IMA).

Contenu scientifique. Mesure et analyse des courbes d'impédance d'entrée de différents instruments à vent, oscillations auto-entretenues (exemple d'un modèle simplifié de clarinette), couplage structure-cavité (exemple du couplage table-caisse d'une guitare classique).

Contribution personnelle notable. Élaboration du TP « Oscillations auto-entretenues : modèle simplifié de clarinette ».

Bibliographie personnelle

Articles dans des revues internationales à comité de lecture

[a1] A. Almeida, B. Bergeot, C. Vergez et B. Gazengel. « Analytical Determination of the Attack Transient in a Clarinet With Time-Varying Blowing Pressure ». *Acta Acustica united with Acustica* 101.5 (2015), p. 1026-1038. DOI : 10.3813/AAA.918897.

[a2] B. Bergeot. « Scaling law for the slow flow of an unstable mechanical system coupled to a nonlinear energy sink ». *Journal of Sound and Vibration* 503 (2021), p. 116109. ISSN : 0022-460X. DOI : doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116109.

[a3] B. Bergeot. « Effect of stochastic forcing on the dynamic behavior of a self-sustained oscillator coupled to a non-linear energy sink ». *International Journal of Non-Linear Mechanics* 150 (2023), p. 104351. DOI : 10.1016/j.ijnonlinmec.2023.104351.

[a4] B. Bergeot, A. Almeida, B. Gazengel, C. Vergez et D. Ferrand. « Response of an artificially blown clarinet to different blowing pressure profiles ». *The Journal of the Acoustical Society of America* 135.1 (2014), p. 479. DOI : 10.1121/1.4835755.

[a5] B. Bergeot, A. Almeida, C. Vergez et B. Gazengel. « Prediction of the dynamic oscillation threshold in a clarinet model with a linearly increasing blowing pressure ». *Nonlinear Dynamics* 73.1-2 (2013), p. 521-534. DOI : 10.1007/s11071-013-0806-y.

[a6] B. Bergeot, A. Almeida, C. Vergez et B. Gazengel. « Prediction of the dynamic oscillation threshold in a clarinet model with a linearly increasing blowing pressure : influence of noise ». *Nonlinear Dynamics* 74.3 (2013), p. 591-605. DOI : 10.1007/s11071-013-0991-8.

[a7] B. Bergeot et S. Bellizzi. « Asymptotic analysis of passive mitigation of dynamic instability using a nonlinear energy sink network ». *Nonlinear Dynamics* 94.2 (2018), p. 1501-1522. DOI : 10.1007/s11071-018-4438-0.

[a8] B. Bergeot et S. Bellizzi. « Steady-state regimes prediction of a multi-degree-of-freedom unstable dynamical system coupled to a set of nonlinear energy sinks ». *Mechanical Systems and Signal Processing* 131 (2019), p. 728-750. DOI : https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2019.05.045.

[a9] B. Bergeot, S. Bellizzi et S. Berger. « Dynamic behavior analysis of a mechanical system with two unstable modes coupled to a single nonlinear energy sink ». *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 95 (2021), p. 105623. ISSN : 1007-5704. DOI : https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105623.

[a10] B. Bergeot, S. Bellizzi et B. Cochelin. « Analysis of steady-state response regimes of a helicopter ground resonance model including a non-linear energy sink attachment ». *International Journal of Non-Linear Mechanics* 78 (2016), p. 72-89. DOI : 10.1016/j.ijnonlinmec.2015.10.006.

[a11] B. Bergeot, S. Bellizzi et B. Cochelin. « Passive suppression of helicopter ground resonance instability by means of a strongly nonlinear absorber ». *Advances in Aircraft and Spacecraft Science* 3.3 (2016), p. 271-298.

[a12] B. Bergeot, S. Bellizzi et B. Cochelin. « Passive suppression of helicopter ground resonance using nonlinear energy sinks attached on the helicopter blades ». *Journal of Sound and Vibration* 392 (2017), p. 41-55. DOI : 10.1016/j.jsv.2016.12.039.

[a13] B. Bergeot et S. Berger. « Fast-slow analysis of passive mitigation of self-sustained oscillations by means of a bistable nonlinear energy sink ». *Physica D : Nonlinear Phenomena* 460 (2024), p. 134063. DOI : 10.1016/j.physd.2024.134063. URL : https://hal.science/hal-04280444.

[a14] B. Bergeot, S. Berger et S. Bellizzi. « Mode coupling instability mitigation in friction systems by means of nonlinear energy sinks : numerical highlighting and local stability analysis ». *Journal of Vibration and Control* 24.15 (2017), p. 3487-3511. ISSN : 1077-5463. DOI : 10.1177/1077546317707101.

[a15] B. Bergeot et C. Vergez. « Analytical prediction of delayed Hopf bifurcations in a simplified stochastic model of reed musical instruments ». *Nonlinear Dynamics* 107 (2022), p. 3291-3312. doi : 10.1007/s11071-021-07104-9.

[a16] D. T. Kieu, B. Bergeot, M.-L. Gobert et S. Berger. « Stability analysis of a clutch system with uncertain parameters using sparse polynomial chaos expansions ». *Mechanics & Industry* 20.1 (2019), p. 104. doi : 10.1051/meca/2019003.

[a17] C. Snoun, B. Bergeot et S. Berger. « Prediction of the dynamic behavior of an uncertain friction system coupled to nonlinear energy sinks using a multi-element generalized polynomial chaos approach ». *European Journal of Mechanics - A/Solids* 80 (2020), p. 103917. doi : 10.1016/j.euromechsol.2019.103917.

[a18] C. Snoun, B. Bergeot et S. Berger. « Robust optimization of nonlinear energy sinks used for mitigation of friction-induced limit cycle oscillations ». *European Journal of Mechanics - A/Solids* 93 (2022), p. 104529. doi : 10.1016/j.euromechsol.2022.104529.

Articles en cours de relecture ou en fin d'écriture

[p1] B. Bergeot, S. Terrien et C. Vergez. « Computing the separatrix between dynamic basins of attraction of low dimensional dynamical systems with a time-varying parameter : application to a model of musical instrument ». *Preprint to be submitted to Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* (2023).

[p2] S. Terrien, B. Bergeot et C. Vergez. « Influence of time variation of a control parameter on the basins of attraction of a self-oscillating system : application to a model of reed musical instrument ». *Preprint to be submitted to Journal of Sound and Vibration* (2023).

Communications dans des congrès internationaux à comité de lecture

[ci1] A. Almeida, B. Bergeot et C. Vergez. « Attack transients in clarinet models with different complexity - a comparative view ». *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics*. 2014, p. 51-57.

[ci2] B. Bergeot, A. Almeida et B. Gazengel. « Prediction of the dynamic oscillation threshold of a clarinet model : Comparison between analytical predictions and simulation results ». *Proceedings of the Stockholm Music Acoustics Conference 2013*. 2013, p. 344-349.

[ci3] B. Bergeot, A. Almeida et C. Vergez. « Effect of the shape of mouth pressure variation on dynamic oscillation threshold of a clarinet model ». *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics*. 2014, p. 535-540.

[ci4] B. Bergeot, A. Almeida, C. Vergez et B. Gazengel. « Attack transients in a clarinet model with time-varying blowing pressure ». *Proceedings of the Acoustics 2012 Nantes Conference*. 2012, p. 1987-1992.

[ci5] B. Bergeot, A. Almeida, C. Vergez et B. Gazengel. « Measurement of attack transients in a clarinet driven by a ramp-like varying pressure ». *Proceedings of the Acoustics 2012 Nantes Conference*. 2012, p. 361-366.

[ci6] B. Bergeot et S. Bellizzi. « Dynamic instability mitigation by means of nonlinear energy sinks in mechanical systems having one or two unstable modes ». *7th Conference on Nonlinear Vibrations, Localization and Energy Transfer - NNM2019*. 2019, p. 30-31.

[ci7] B. Bergeot, S. Bellizzi et S. Berger. « Mitigation of friction-induced vibrations in braking systems : prediction of the mitigation limit ». *Proceedings of ISMA2018 and USD 2018*. 2018, p. 3315-3330.

[ci8] B. Bergeot, S. Bellizzi et S. Berger. « Dynamic instability mitigation using a single nonlinear energy sink in a friction system with two unstable modes ». *10th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2020+2)*. 2022.

[ci9] B. Bergeot, S. Bellizzi et B. Cochelin. « Control of helicopter ground resonance by means of passive non-linear energy sink ». *5th Conference on Nonlinear Vibrations, Localization and Energy Transfer - NV2014*. 2014.

[ci10] B. Bergeot, S. Bellizzi et B. Cochelin. « Passive suppression of helicopter ground resonance instability by means of a strongly nonlinear absorber ». *INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings*. 2015.

[ci11] C. Snoun, B. Bergeot et S. Berger. « Robust optimization of nonlinear energy sinks used for dynamic instabilities mitigation of an uncertain friction system ». *Surveillance, Vibration Shock and Noise, and Experimental Vibration Analysis, SURVISHNO 2019*. 2019.

[ci12] S. Terrien, B. Bergeot et C. Vergez. « Dynamical basins of attraction in a toy-model of reed musical instruments ». *10th Convention of the European Acoustics Association*. Société Française d'Acoustique and Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique. Turin, Italy * 11th – 15th September 2023 * Politecnico di Torino, 2023.

Communications dans des congrès nationaux à comité de lecture

[cn1] B. Bergeot et S. Berger. « Solution analytique d'une bifurcation col-nœud dynamique : application à la prédiction de la limite de fonctionnement d'un absorbeur non linéaire de type NES pour l'atténuation de cycles limites ». *15ème Colloque National en Calcul des Structures (CSMA 2022)*. 2022.

[cn2] B. Bergeot, S. Berger et S. Bellizzi. « Réduction du bruit de crissement à l'aide d'absorbeurs non linéaires ». *Actes du 13e Congrès Français d'Acoustique joint avec le colloque VIbrations, SHocks and NOise*. 2016, p. 2307-2308.

[cn3] B. Bergeot et C. Vergez. « Prédiction théorique du retard à la bifurcation dans un modèle simplifié d'instrument à anche soumis à un bruit blanc ». *16ème Congrès Français d'Acoustique, CFA2022*. Société Française d'Acoustique and Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique. Marseille, France, avr. 2022.

[cn4] D. T. Kieu, B. Bergeot, M.-L. Gobert et S. Berger. « Sparse polynomial chaos expansion for stability analysis of a clutch system with uncertain parameters ». *Acte du 23ème Congrès Français de Mécanique*. 2017.

[cn5] C. Snoun, B. Bergeot et S. Berger. « Generalized Polynomial Chaos for robust modelling of Nonlinear Energy Sinks used to mitigate dynamic instabilities in braking systems ». *Acte du 24ème Congrès Français de Mécanique*. 2019.

[cn6] S. Terrien, B. Bergeot et C. Vergez. « De la stabilité locale à la stabilité globale : application à un modèle simple d'instrument à anche ». *16ème Congrès Français d'Acoustique, CFA2022*. Société Française d'Acoustique and Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique. Marseille, France, avr. 2022.

Thèse de doctorat

[t1] B. Bergeot. « Naissance des oscillations dans les instruments de type clarinette à paramètre de contrôle variable (Birth of oscillation in clarinet-like interments with variable control parameter) ». Thèse de doct. Université du Mans, LAUM - Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Mans, 2013. URL : https://theses.hal.science/tel-01149513.

Travaux de recherche encadrés

[e1] C. Coustam. « Calculs stochastiques pour le dimensionnement d'un échangeur de chaleur ». Mém. de mast. INSA Centre Val Loire, Laboratoire de Mécanique Gabriel Lamé, 2019.

[e2] R. Gega. « Contrôle passif des vibrations indésirables dans les éoliennes à l'aide d'absorbeurs dynamiques non linéaires ». Mém. de mast. INSA Centre Val Loire, Laboratoire de Mécanique Gabriel Lamé, 2021.

[e3] A. Halouani. « Calculs mécaniques robustes pour le dimensionnement de réservoirs d'hydrogène ». Mém. de mast. INSA Centre Val Loire, Laboratoire de Mécanique Gabriel Lamé, 2016.

[e4] C. Helmi. « Atténuation passive de résonance vibratoire à l'aide d'un absorbeur non linéaire bistable : étude numérique ». Mém. de mast. INSA Centre Val Loire, Laboratoire de Mécanique Gabriel Lamé, 2023.

[e5] B. Jeandel. « Vers la conception d'une sourdine pour instrument à anche basée sur le concept de pompage énergétique. » Mém. de mast. INSA Centre Val Loire, Laboratoire de Mécanique Gabriel Lamé, 2019.

[e6] D. T. Kieu. « Méthodes de réduction de modèles pour l'analyse du comportement dynamique des structures à paramètres incertains ». Thèse de doct. INSA Centre Val Loire, 2020.

[e7] J. Nguyen. « Atténuation des cycles limites d'un modèle non linéaire d'éolienne à l'aide d'absorbeurs non linéaires de vibrations ». Mém. de mast. INSA Centre Val Loire, Laboratoire de Mécanique Gabriel Lamé, 2022.

[e8] J. Salloum. « Calculs stochastiques pour le dimensionnement d'un échangeur de chaleur ». Mém. de mast. INSA Centre Val Loire, Laboratoire de Mécanique Gabriel Lamé, 2020.

[e9] C. Snoun. « Contrôle passif des vibrations des systèmes mécaniques à l'aide d'absorbeurs dynamiques non linéaires avec prise en compte des incertitudes ». Thèse de doct. Université de Tours, 2020.

Bibliographie générale

[1] M. Abramowitz et I. Stegun. « Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables ». 9th. Applied mathematics series. Wiley, 1972. Chap. Airy Functions.

[2] A. Ahlström. « Influence of wind turbine flexibility on loads and power production ». en. *Wind Energy* 9.3 (mai 2006), p. 237-249. ISSN : 1095-4244, 1099-1824. DOI : 10.1002/we.167. URL : https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/we.167 (visité le 13/04/2023).

[3] H. M. Alkhayuon et P. Ashwin. « Rate-induced tipping from periodic attractors : Partial tipping and connecting orbits ». *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 28.3 (mars 2018), p. 033608. DOI : 10.1063/1.5000418.

[4] A. Almeida. « The Physics of Double-reed Wind Instruments and its Application to Sound Synthesis ». Thèse de doct. Université de Paris 6, 2006.

[5] J. Arrigan, V. Pakrashi, B. Basu et S. Nagarajaiah. « Semi-active frequency tracking algorithm for control of flapwise vibrations in wind turbine blades ». *IET Irish Signals and Systems Conference ISSC 2009*. Dublin, Ireland : IET, 2009, p. 11-11. DOI : 10.1049/cp.2009.1688.

[6] P. Ashwin, C. Perryman et S. Wieczorek. « Parameter shifts for nonautonomous systems in low dimension : bifurcation- and rate-induced tipping ». *Nonlinearity* 30.6 (juin 2017), p. 2185-2210. DOI : 10.1088/1361-6544/aa675b. URL : https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6544/aa675b.

[7] P. Ashwin, S. Wieczorek, R. Vitolo et P. Cox. « Tipping points in open systems : bifurcation, noise-induced and rate-dependent examples in the climate system ». en. *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 370.1962 (mars 2012), p. 1166-1184. ISSN : 1364-503X, 1471-2962. DOI : 10.1098/rsta.2011.0306. URL : https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsta.2011.0306 (visité le 02/10/2023).

[8] R. Askey et J. Wilson. *Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials*. T. 319. American Mathematical Soc., 1985.

[9] I. Babuska, R. Tempone et G. E. Zouraris. « Galerkin finite element approximations of stochastic elliptic partial differential equations ». *SIAM Journal on Numerical Analysis* 42.2 (2004), p. 800-825.

[10] J. Backus. « Small-Vibration Theory of the Clarinet ». *J. Acoust. Soc. Am.* 35.3 (1963), p. 305-313. DOI : 10.1121/1.1918458.

[11] C. Baesens. « Noise effect on dynamic bifurcations : The case of a period-doubling cascade ». *Dynamic Bifurcations*. T. 1493. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 1991, p. 107-130.

[12] C. Baesens. « Slow sweep through a period-doubling cascade : Delayed bifurcations and renormalisation ». *Physica D* 53 (1991), p. 319-375.

[13] S. Bellizzi, R. Côte et M. Pachebat. « Responses of a two degree-of-freedom system coupled to a nonlinear damper under multi-forcing frequencies ». *Journal of Sound and Vibration* 332 (2013), p. 1639-1653.

[14] A. H. Benade. *Fundamentals of musical acoustics*. Sous la dir. d'O. U. Press. Oxford University Press, 1976.

[15] E. Benoît. « Dynamic Bifurcations ». *Lect. Notes Math.* T. 1493. Springer, Actes de la condérence tenue à Luminy, Marseilles, France, du 5 au 10 mars 1990.

[16] E. Benoît, J. Callot, F. Diener et M. Diener. « Chasse au canard ("Duck hunting") ». *Collectanea Mathematica* 32.1-2 (1981), p. 37-119.

[17] N. Berglund et H. Kunz. « Memory effects and scaling laws in slowly driven systems ». *J. Phys. A : Math. Gen* 32 (1999), p. 15-39. DOI : 10.1088/0305-4470/32/1/005. URL : http://iopscience.iop.org/0305-4470/32/1/005.

[18] N. Berglund. « Dynamic Bifurcations : Hysteresis, Scaling Laws and Feedback Control ». en. *Progress of Theoretical Physics Supplement* 139 (2000), p. 325-336. ISSN : 0375-9687. DOI : 10.1143/PTPS.139.325. URL : https://academic.oup.com/ptps/article-lookup/doi/10.1143/PTPS.139.325 (visité le 03/10/2023).

[19] N. Berglund et B. Gentz. « Pathwise description of dynamic pitchfork bifurcations with additive noise ». *Probability Theory and Related Fields* 122.3 (2002), p. 341-388. DOI : 10.1007/s004400100174.

[20] N. Berglund. *An Introduction to Singular Stochastic PDEs : Allen–Cahn Equations, Metastability, and Regularity Structures*. EMS Press, 2022. DOI : 10.4171/ELM/34.

[21] N. Berglund et B. Gentz. « On the Noise-Induced Passage Through an Unstable Periodic Orbit I : Two-Level Model ». *Journal of Statistical Physics* 114.5/6 (2004), p. 1577-1618. ISSN : 0022-4715. DOI : 10.1023/B:JOSS.0000013966.54504.da. URL : http://link.springer.com/10.1023/B:JOSS.0000013966.54504.da.

[22] N. Berglund et B. Gentz. *Berglund, Gentz - 2006 - Noise-induced phenomena in slow-fast dynamical systems a sample-paths approach*. Springer London, 2006. DOI : https://doi.org/10.1007/1-84628-186-5.

[23] N. Berglund et B. Gentz. *Noise-induced phenomena in slow-fast dynamical systems*. Probability and its Applications (New York). A sample-paths approach. London : Springer-Verlag London Ltd., 2006, p. xiv+276.

[24] N. Berglund et B. Gentz. « Stochastic Dynamic Bifurcations and Excitability ». *Stochastic Methods in Neuroscience*. Oxford Scholarship Online, 2010. DOI : 10.1093/acprof:oso/9780199235070.003.0003.

[25] N. Berglund et B. Gentz. « On the Noise-Induced Passage through an Unstable Periodic Orbit II : General Case ». *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 46.1 (2014), p. 310-352. DOI : 10.1137/120887965. URL : http://epubs.siam.org/doi/10.1137/120887965.

[26] N. Berglund et D. Landon. « Mixed-mode oscillations and interspike interval statistics in the stochastic FitzHugh–Nagumo model ». en. *Nonlinearity* 25.8 (août 2012), p. 2303-2335. ISSN : 0951-7715, 1361-6544. DOI : 10.1088/0951-7715/25/8/2303. URL : https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0951-7715/25/8/2303 (visité le 02/10/2023).

[27] N. Berlund et B. Gentz. *Noise-Induced Phenomena in Slow-Fast Dynamical Systems*. Probability and Its Applications. Springer-Verlag, 2006. DOI : 10.1007/1-84628-186-5. URL : http://dx.doi.org/10.1007/1-84628-186-5.

[28] M. Berveiller, B. Sudret et M. Lemaire. « Stochastic finite element : a non intrusive approach by regression ». *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique* 15.1-3 (2006), p. 81-92.

[29] K. Boff, L. Kaufman et J. Thomas. *Handbook of perception and human performance*. John Wiley. Wiley-Interscience, 1986.

[30] E. Boroson, S. Missoum, P.-O. Mattei et C. Vergez. « Optimization under uncertainty of parallel lnonlinear energy sinks ». *JournalofSoundandVibration* 394 (2017), p. 451-464.

[31] E. R. Boroson. *Optimization Under Uncertainty of Nonlinear Energy Sinks*. 2015. URL : http://hdl.handle.net/10150/595972.

[32] F. Brauer et J. A. Nohel. *The qualitative theory of ordinary differential equation : an introduction*. New York : Dover, 1969.

[33] P. Bryk, S. Bellizzi et R. Côte. « Experimental study of a hybrid electro-acoustic nonlinear membrane absorber ». *Journal of Sound and Vibration* 424 (2018), p. 224-237.

[34] R. Cameron et W. Martin. « The Orthogonal Development of Non-Linear Functionals in Series of Fourier-Hermite Functionals ». *Annals of Mathematics* 48.2 (1947), p. 385-392. DOI : http://dx.doi.org/10.2307/1969178.

[35] E. Cataldo, S. Bellizzi et R. Sampaio. « Free vibrations of an uncertain energy pumping system ». *Journal of Sound and Vibration* 332.25 (2013), p. 6815-6828. ISSN : 0022460X. DOI : 10.1016/j.jsv.2013.08.022.

[36] A. Chaigne et J. Kergomard. « Instruments à anche ». *Acoustique des instruments de musique*. Belin, 2008. Chap. 9, p. 400-468.

[37] A. Chaigne et J. Kergomard. *Acoustics of Musical Instruments*. Modern Acoustics and Signal Processing. Springer-Verlag New York, 2016. doi : 10.1007/978-1-4939-3679-3.

[38] H.-D. Chiang, M. Hirsch et F. Wu. « Stability regions of nonlinear autonomous dynamical systems ». en. *IEEE Transactions on Automatic Control* 33.1 (jan. 1988), p. 16-27. issn : 0018-9286, 1558-2523. doi : 10.1109/9.357. url : http://ieeexplore.ieee.org/document/357/ (visité le 21/06/2023).

[39] A. T. Chirathalattu, B. Santhosh, C. Bose, R. Philip et B. Balaram. « Passive suppression of vortex-induced vibrations using a nonlinear energy sink—Numerical and analytical perspective ». *Mechanical Systems and Signal Processing* 182 (2023). issn : 10961216. doi : 10.1016/j.ymssp.2022.109556.

[40] K. Christian. *Multiple Time Scale Dynamics*. Sous la dir. de S. Antman. 1st. T. 191. Applied Mathematical Sciences. Springer International Publishing, 2015.

[41] T. Colinot. « Numerical simulation of woodwind dynamics : investigating nonlinear sound production behavior in saxophone-like instruments ». Thèse de doct. Aix-Marseille Université, 2020.

[42] T. Colinot, P. Guillemain, C. Vergez, J.-B. Doc et P. Sanchez. « Multiple two-step oscillation regimes produced by the alto saxophone ». *The Journal of the Acoustical Society of America* 147.4 (2020), p. 2406-2413. issn : 0001-4966. doi : 10.1121/10.0001109.

[43] T. Colinot, C. Vergez, P. Guillemain et J.-B. Doc. « Multistability of saxophone oscillation regimes and its influence on sound production ». en. *Acta Acustica* 5 (2021), p. 33. issn : 2681-4617. doi : 10.1051/aacus/2021026. url : https://acta-acustica.edpsciences.org/10.1051/aacus/2021026 (visité le 13/05/2023).

[44] S. Colwell et B. Basu. « Tuned liquid column dampers in offshore wind turbines for structural control ». *Engineering Structures* 31.2 (fév. 2009), p. 358-368. doi : 10.1016/j.engstruct.2008.09.001.

[45] R. Côte, M. Pachebat et S. Bellizzi. « Experimental evidence of simultaneous multi-resonance noise reduction using an absorber with essential nonlinearity under two excitation frequencies ». *Journal of Sound and Vibration* 333 (2014), p. 5057-5076.

[46] N. Cristianini et B. Scholkopf. « Support vector machines and kernel methods : the new generation of learning machines ». *Ai Magazine* 23.3 (2002), p. 31-31.

[47] H. L. Dai, A. Abdelkefi et L. Wang. « Vortex-induced vibrations mitigation through a nonlinear energy sink ». *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 42 (2017), p. 22-36. issn : 10075704. doi : 10.1016/j.cnsns.2016.05.014.

[48] J. P. Dalmont et C. Frappé. « Oscillation and extinction thresholds of the clarinet : Comparison of analytical results and experiments ». *J. Acoust. Soc. Am.* 122.2 (2007), p. 1173-1179. doi : 10.1121/1.2747197.

[49] J. P. Dalmont, J. Gilbert, J. Kergomard et S. Ollivier. « An analytical prediction of the oscillation and extinction thresholds of a clarinet ». *J. Acoust. Soc. Am.* 118.5 (2005), p. 3294-3305.

[50] J. P. Dalmont, J. Gilbert et S. Ollivier. « Nonlinear characteristics of single-reed instruments : Quasistatic volume flow and reed opening measurements ». *J. Acoust. Soc. Am.* 114.4 (2003), p. 2253-2262. doi : 10.1121/1.1603235.

[51] K. Dekemele, P. Van Torre et M. Loccufier. « Performance and tuning of a chaotic bi-stable NES to mitigate transient vibrations ». en. *Nonlinear Dynamics* 98.3 (nov. 2019), p. 1831-1851. issn : 0924-090X, 1573-269X. doi : 10.1007/s11071-019-05291-0. url : http://link.springer.com/10.1007/s11071-019-05291-0 (visité le 03/05/2023).

[52] E. Denimal, L. Nechak, J.-J. Sinou et S. Nacivet. « A novel hybrid surrogate model and its application on a mechanical system subjected to friction-induced vibration ». *Journal of Sound and Vibration* 434 (2018), p. 456-474.

[53] E. Denimal, L. Nechak, J.-J. Sinou et S. Nacivet. « Kriging Surrogate Models for Predicting the Complex Eigenvalues of Mechanical Systems Subjected to Friction-Induced Vibration ». *Shock and Vibration Hindawi Publishing Corporation* ID 3586230 (2016), 22 pages.

[54] M. Desroches, J. Guckenheimer, B. Krauskopf, C. Kuehn, H. Osinga et M. Wechselberger. « Mixed-mode oscillations with multiple time scales ». *SIAM Review* 52.2 (2012), p. 211-288. doi : 10.1137/100791233.

[55] V.-N. Dinh et B. Basu. « Passive control of floating offshore wind turbine nacelle and spar vibrations by multiple tuned mass dampers ». *Structural Control and Health Monitoring* 22.1 (jan. 2015), p. 152-176. doi : 10.1002/stc.1666.

[56] J.-B. Doc, C. Vergez et S. Missoum. « A Minimal Model of a Single-Reed Instrument Producing Quasi-Periodic Sounds ». *Acta Acustica united with Acustica* 100.3 (2014), p. 543-554. issn : 16101928. doi : 10.3813/AAA.918734.

[57] E. J. Doedel et B. Oldeman. *Auto-07p : continuation and bifurcation software*. Montreal, QC : Concordia University Canada. 1998. url : http://indy.cs.concordia.ca/auto/.

[58] E. Domany et O. Gendelman. « Dynamic responses and mitigation of limit cycle oscillations in Van der Pol-Duffing oscillator with nonlinear energy sink ». *Journal of Sound and Vibration* 332.21 (oct. 2013), p. 5489-5507. issn : 0022460X. doi : 10.1016/j.jsv.2013.05.001.

[59] E. Domany et O. Gendelman. « Dynamic responses and mitigation of limit cycle oscillations in Van der Pol-Duffing oscillator with nonlinear energy sink ». *Journal of Sound and Vibration* 332 (2013), p. 5489-5507.

[60] S. Fang, K. Chen, J. Xing, S. Zhou et W.-H. Liao. « Tuned bistable nonlinear energy sink for simultaneously improved vibration suppression and energy harvesting ». *International Journal of Mechanical Sciences* 212 (2021), p. 106838. issn : 0020-7403. doi : https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2021.106838. url : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020740321005610.

[61] S. Farjami, V. Kirk et H. M. Osinga. « Computing the Stable Manifold of a Saddle Slow Manifold ». en. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* 17.1 (jan. 2018), p. 350-379. issn : 1536-0040. doi : 10.1137/17M1132458. url : https://epubs.siam.org/doi/10.1137/17M1132458 (visité le 18/01/2023).

[62] N. Fenichel. « Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations ». *Journal of Differential Equations* 98 (1979), p. 53-98.

[63] U. Feudel, A. N. Pisarchik et K. Showalter. « Multistability and tipping : From mathematics and physics to climate and brain—Minireview and preface to the focus issue ». en. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 28.3 (mars 2018), p. 033501. issn : 1054-1500, 1089-7682. doi : 10.1063/1.5027718. url : https://pubs.aip.org/cha/article/28/3/033501/1059586/Multistability-and-tipping-From-mathematics-and (visité le 02/10/2023).

[64] G. S. Fishman. *Monte carlo : concepts, algorithms, and applications*. Springer Series in Operations Research. New York : Springer, 1996. url : http://cds.cern.ch/record/1614885.

[65] B. Fitzgerald, B. Basu et S. R. K. Nielsen. « Active tuned mass dampers for control of in-plane vibrations of wind turbine blades ». *Structural Control and Health Monitoring* 20.12 (déc. 2013), p. 1377-1396. doi : 10.1002/stc.1524.

[66] N. H. Fletcher et T. D. Rossing. *The physics of musical instruments*. Springer-Verlag, New York, 1991.

[67] N. Fletcher. « Nonlinear theory of musical wind instruments ». *Applied Acoustics* 30.2-3 (1990), p. 85-115. issn : 0003-682X. doi : 10.1016/0003-682X(90)90040-2.

[68] K. Foroutan, A. Jalali et H. Ahmadi. « Investigations of energy absorption using tuned bistable nonlinear energy sink with local and global potentials ». *Journal of Sound and Vibration* 447 (2019), p. 155-169.

[69] T. Frankel. *The geometry of physics : An introduction*. 3ed. Cambridge University Press, 2012.

[70] G. R. Franzini, V. S. F. Maciel, G. J. Vernizzi et D. Zulli. « Simultaneous passive suppression and energy harvesting from galloping using a bistable piezoelectric nonlinear energy sink ». en. *Nonlinear Dynamics* (sept. 2023). issn : 0924-090X, 1573-269X. doi : 10.1007/s11071-023-08888-8. url : https://link.springer.com/10.1007/s11071-023-08888-8 (visité le 22/09/2023).

[71] V. Fréour, L. Guillot, H. Masuda, S. Usa, E. Tominaga, Y. Tohgi, C. Vergez et B. Cochelin. « Numerical continuation of a physical model of brass instruments : Application to trumpet comparisons ». *The Journal of the Acoustical Society of America* 148.2 (2020), p. 748-758. issn : 0001-4966. doi : 10.1121/10.0001603.

[72] G. Fritz, J.-J. Sinou, J.-M. Duffal et L. Jézéquel. « Investigation of the relationship between damping and mode-coupling patterns in case of brake squeal ». *Journal of Sound and Vibration* 307.3 (2007), p. 591-609. issn : 0022460X. doi : 10.1016/j.jsv.2007.06.041.

[73] B. Gazengel. « Caratérisation objective de la qualité de justesse, de timbre et d'émission des instruments à vent à anche simple ». Thèse de doct. Université du Maine, 1994.

[74] O. V. Gendelman. « Targeted energy transfer in systems with external and self-excitation ». *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science* 225.9 (2011), p. 2007-2043. doi : 10.1177/0954406211413976. url : http://pic.sagepub.com/content/225/9/2007.abstract.

[75] O. V. Gendelman et T. Bar. « Bifurcations of self-excitation regimes in a Van der Pol oscillator with a nonlinear energy sink ». *Physica D* 239.3-4 (2010), p. 220-229. issn : 01672789. doi : 10.1016/j.physd.2009.10.020.

[76] O. V. Gendelman, L. I. Manevitch, A. F. Vakakis et R. M'Closkey. « Energy Pumping in Nonlinear Mechanical Oscillators : Part I—Dynamics of the Underlying Hamiltonian Systems ». *Journal of Applied Mechanics* 68.1 (2001), p. 34. issn : 00218936. doi : 10.1115/1.1345524.

[77] O. V. Gendelman, L. Manevitch, A. F. Vakakis et R. M'Closkey. « Energy Pumping in Nonlinear Mechanical Oscillators : Part I - Dynamics of the Underlying Hamiltonian Systems ». *Journal of Applied Mechanics* 68.1 (2001), p. 34. issn : 00218936. doi : 10.1115/1.1345524.

[78] O. V. Gendelman, A. F. Vakakis, L. A. Bergman et D. M. McFarland. « Asymptotic analysis of passive nonlinear suppression of aeroelastic instabilities of a rigid wing in subsonic flow ». *SIAM Journal on Applied Mathematics* 70.5 (2010), p. 1655-1677. doi : 10.1137/090754819.

[79] O. Gendelman et C. Lamarque. « Dynamics of linear oscillator coupled to strongly nonlinear attachment with multiple states of equilibrium ». en. *Chaos, Solitons & Fractals* 24.2 (2005), p. 501-509. doi : 10.1016/j.chaos.2004.09.088.

[80] X.-F. Geng, H. Ding, X.-Y. Mao et L.-Q. Chen. « Nonlinear energy sink with limited vibration amplitude ». *Mechanical Systems and Signal Processing* 156 (2021), p. 107625. issn : 0888-3270. doi : https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2021.107625. url : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327021000200.

[81] J. Gilbert, S. Maugeais et C. Vergez. « Minimal blowing pressure allowing periodic oscillations in a simplified reed musical instrument model : Bouasse-Benade prescription assessed through numerical continuation ». *Acta Acustica* 4.27 (2020), p. 12. issn : 2681-4617. doi : 10.1051/aacus/2020026.

[82] E. Gourc, S. Seguy, G. Michon et A. Berlioz. « Chatter Control in Turning Process with a Nonlinear Energy Sink ». *Advanced Materials Research* 698 (mai 2013), p. 89-98. issn : 1662-8985. doi : 10.4028/www.scientific.net/AMR.698.89.

[83] E. Gourdon et C. Lamarque. « Energy pumping for a larger span of energy ». *Journal of Sound and Vibration* 285 (2005), p. 711-720.

[84] E. Gourdon et C.-H. Lamarque. « Nonlinear energy sink with uncertain parameters ». *Journal of computational and nonlinear dynamics* 1.3 (2006), p. 187-195.

[85] E. Gourdon, A. T. Savadkoohi et V. A. Vargas. « Targeted energy transfer from one acoustical mode to an Helmholtz resonator with nonlinear behavior ». *Journal of Vibration and Acoustics* 140 (2018), p. 061005-1 -061005-8.

[86] J. Grasman. *Asymptotic Methods for Relaxation Oscillations and Applications*. T. 63. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, 1987.

[87] I. Grinberg, V. Lanton et O. Gendelman. « Response regimes in linear oscillator with 2DOF nonlinear energy sink under periodic forcing ». *Nonlinear Dynamics* 69 (2012), p. 1889-1902.

[88] J. Guckenheimer et P. Holmes. « Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields ». Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 1983. Chap. 3. doi : 10.1007/978-1-4612-1140-2. url : http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-1140-2.

[89] J. Guckenheimer et C. Kuehn. « Computing Slow Manifolds of Saddle Type ». en. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* 8.3 (jan. 2009), p. 854-879. issn : 1536-0040. doi : 10.1137/080741999. url : http://epubs.siam.org/doi/10.1137/080741999 (visité le 18/11/2023).

[90] L. Guillot, B. Cochelin et C. Vergez. « A Taylor series-based continuation method for solutions of dynamical systems ». *Nonlinear Dynamics* 98.4 (déc. 2019), p. 2827-2845. issn : 0924-090X, 1573-269X. doi : 10.1007/s11071-019-04989-5. url : http://link.springer.com/10.1007/s11071-019-04989-5 (visité le 09/10/2023).

[91] L. Guillot, A. Lazarus, O. Thomas, C. Vergez et B. Cochelin. « A purely frequency based Floquet-Hill formulation for the efficient stability computation of periodic solutions of ordinary differential systems ». *Journal of Computational Physics* 416 (sept. 2020), p. 109477. ISSN : 00219991. DOI : 10.1016/j.jcp.2020.109477. URL : https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0021999120302515 (visité le 09/10/2023).

[92] S. R. Gunn et al. « Support vector machines for classification and regression ». *ISIS technical report* 14.1 (1998), p. 5-16.

[93] H. Guo, S. Cao, T. Yang et Y. Chen. « Aeroelastic suppression of an airfoil with control surface using nonlinear energy sink ». *Nonlinear Dynamics* 94 (2018), p. 857-872.

[94] H.-l. Guo, Y.-s. Chen et T.-z. Yang. « Limit cycle oscillation suppression of 2-DOF airfoil using nonlinear energy sink ». *Appl. Math. Mech. -Engl. Ed.* 34.10 (2013), p. 1277-1290.

[95] G. Habib et F. Romeo. « The tuned bistable nonlinear energy sink ». *Nonlinear Dynamics* 89 (2017), p. 179-196.

[96] G. Habib et F. Romeo. « Tracking modal interactions in nonlinear energy sink dynamics via high-dimensional invariant manifold ». *Nonlinear Dynamics* 103.4 (2021), p. 3187-3208. DOI : 10.1007/s11071-020-05937-4. URL : https://doi.org/10.1007/s11071-020-05937-4.

[97] B. Hervé, J.-J. Sinou, H. Mahé et L. Jézéquel. « Analysis of squeal noise and mode coupling instabilities including damping and gyroscopic effects ». *European Journal of Mechanics - A/Solids* 27.2 (2008), p. 141-160. ISSN : 09977538. DOI : 10.1016/j.euromechsol.2007.05.004. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0997753807000447.

[98] A. Hirschberg. « Aero-acoustics of wind instruments ». *Mechanics of musical instruments by A. Hirschberg/ J. Kergomard/ G. Weinreich*. T. 335 of *CISM Courses and lectures*. Springer-Verlag, 1995. Chap. 7, p. 291-361.

[99] A. Hirschberg, R. W. A. V. de Laar, J. P. Maurires, A. P. J. Wijnands, H. J. Dane, S. G. Kruijswijk et A. J. M. Houtsma. « A quasi-stationary model of air flow in the reed channel of single-reed woodwind instruments ». *Acustica* 70 (1990), p. 146-154.

[100] J. G. Holierhoek. « An Overview of Possible Aeroelastic Instabilities for Wind Turbine Blades ». en. *Wind Engineering* 37.4 (août 2013), p. 421-440. ISSN : 0309-524X, 2048-402X. DOI : 10.1260/0309-524X.37.4.421. URL : http://journals.sagepub.com/doi/10.1260/0309-524X.37.4.421 (visité le 18/04/2023).

[101] J. Hultén. « Brake Squeal - A Self-Exciting Mechanism with Constant Friction ». *SAE Truck and Bus Meeting, Detroit, Mi, USA*. 1993.

[102] J. Hultén. « Friction phenomena related to drum brake squeal instabilities ». *ASME Design Engineering Technical Conferences, Sacramento, CA*. 1997.

[103] V. Iurasov et P. O. Mattei. « Bistable nonlinear damper based on a buckled beam configuration ». *Nonlinear Dynamics* 99.3 (fév. 2020). Publisher : Springer, p. 1801-1822. ISSN : 1573269X. DOI : 10.1007/s11071-019-05387-7.

[104] R. Jagacinski et J. Flach. *Control Theory for Humans : Quantitative approaches to modeling and performance*. Mahwah, New Jersey, London : Lawrence Erlbaum Associates, 2003.

[105] V. Jahangiri et C. Sun. « A novel three dimensional nonlinear tuned mass damper and its application in floating offshore wind turbines ». *Ocean Engineering* 250 (avr. 2022), p. 110703. DOI : 10.1016/j.oceaneng.2022.110703.

[106] K. M. Jansons et G. D. Lythe. « Stochastic Calculus : Application to Dynamic Bifurcations and Threshold Crossings ». *Journal of Statistical Physics* 90.1 (1998), p. 227-251. DOI : 10.1023/A:1023207919293.

[107] C. K. R. T. Jones. « Geometric singular perturbation theory ». English. *Dynamical Systems*. Sous la dir. de R. Johnson. T. 1609. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 1995, p. 44-118. DOI : 10.1007/BFb0095239.

[108] M. Karama, M. Hamdi et M. Habbad. « Energy harvesting in a nonlinear energy sink absorber using delayed resonators ». *Nonlinear Dynamics* 105.1 (2021), p. 113-129. DOI : 10.1007/s11071-021-06611-z. URL : https://doi.org/10.1007/s11071-021-06611-z.

[109] D. Karličić, M. Cajić, S. Paunović et S. Adhikari. « Periodic response of a nonlinear axially moving beam with a nonlinear energy sink and piezoelectric attachment ». *International Journal of Mechanical Sciences* 195 (2021). issn : 00207403. doi : 10.1016/j.ijmecsci.2020.106230.

[110] D. H. Keefe. « Acoustical wave propagation in cylindrical ducts : transmission line parameter approximations for isothermal and non-isothermal boundary conditions ». *J. Acoust. Soc. Am.* 75.1 (1984), p. 58-62.

[111] J. Kergomard. « Elementary considerations on reed-instrument oscillations ». *Mechanics of musical instruments by A. Hirschberg/ J. Kergomard/ G. Weinreich*. T. 335 of *CISM Courses and lectures*. Springer-Verlag, 1995. Chap. 6, p. 229-290.

[112] J. Kergomard, S. Ollivier et J. Gilbert. « Calculation of the spectrum of self-sustained oscillators using a variable truncation method : Application to cylindrical reed instruments ». *Acustica* 86.4 (2000), p. 685-703. issn : 00017884.

[113] G. Kerschen, Y. S. Lee, A. F. Vakakis, D. M. McFarland et L. A. Bergman. « Irreversible Passive Energy Transfer in Coupled Oscillators with Essential Nonlinearity ». *SIAM Journal on Applied Mathematics* 66.2 (2005), p. 648-679. issn : 0036-1399. doi : 10.1137/040613706. url : http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/040613706.

[114] R. Z. Khas'minskii. « A Limit Theorem for the Solutions of Differential Equations with Random Right-Hand Sides ». *Theory of Probability & Its Applications* 11.3 (1966), p. 390-406. issn : 0040-585X. doi : 10.1137/1111038.

[115] M. Khazaee, S. Khadem, A. Moslemi et A. Abdollahi. « A comparative study on optimization of multiple essentially nonlinear isolators attached to a pipe conveying fluid ». *Mechanical Systems and Signal Processing* (2019), p. 106442. issn : 0888-3270. doi : https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2019.106442. url : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327019306636.

[116] F. C. Klebaner. *Introduction to stochastic calculus with applications*. 2nd. Imperial College Press, 2005.

[117] P. E. Kloeden et M. Rasmussen. *Nonautonomous dynamical systems*. en. Mathematical surveys and monographs v. 176. Providence, R.I : American Mathematical Society, 2011. isbn : 978-0-8218-6871-3.

[118] C. Kuehn. « Multiple Time Scale Dynamics ». Sous la dir. de S. Antman. 1st. T. 191. Applied Mathematical Sciences. Springer International Publishing, 2015. Chap. 12. doi : https://doi.org/10.1007/978-3-319-12316-5.

[119] Y. A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Sous la dir. de Springer. 3rd. T. 112. chap. 4, p. 136, Springer, 2004.

[120] M. A. Lackner et M. A. Rotea. « Passive structural control of offshore wind turbines ». *Wind Energy* 14.3 (2011), p. 373-388. issn : 10954244. doi : 10.1002/we.426.

[121] Y. S. Lee, A. F. Vakakis, D. M. Bergman L. A. McFarland et G. Kerschen. « Enhancing the Robustness of Aeroelastic Instability Suppression Using Multi-Degree-of-Freedom Nonlinear Energy Sinks ». *AIAA Journal* 46.6 (2008), p. 1371-1394.

[122] Y. S. Lee, A. F. Vakakis, L. A. Bergman et D. M. McFarland. « Suppression of limit cycle oscillations in the van der Pol oscillator by means of passive non-linear energy sinks ». *Structural Control and Health Monitoring* 13.1 (jan. 2006), p. 41-75. issn : 1545-2255. doi : 10.1002/stc.143.

[123] Y. S. Lee, A. F. Vakakis, L. A. Bergman, D. M. McFarland et G. Kerschen. « Suppressing Aeroelastic Instability Using Broadband Passive Targeted Energy Transfers, Part 1 : Theory ». *AIAA Journal* 45.3 (mars 2007), p. 693-711. issn : 0001-1452. doi : 10.2514/1.24062.

[124] Y. S. Lee, A. F. Vakakis, L. A. Bergman, D. M. McFarland et G. Kerschen. « Suppressing Aeroelastic Instability Using Broadband Passive Targeted Energy Transfers, Part 2 : Experiments ». *AIAA Journal* 45.3 (mars 2007), p. 2391-2400. issn : 0001-1452. doi : 10.2514/1.24062.

[125] H. Li et A. Li. « Potential of a vibro-impact nonlinear energy sink for energy harvesting ». *Mechanical Systems and Signal Processing* 159 (2021), p. 107827. issn : 0888-3270. doi : https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2021.107827. url : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327021002223.

[126] T. Li, E. Gourc, S. Seguy et A. Berlioz. « Dynamics of two vibro-impact nonlinear energy sinks in parallel under periodic and transient excitations ». *International Journal of Non-Linear Mechanics* 90.October 2016 (2017), p. 100-110. issn : 00207462. doi : 10.1016/j.ijnonlinmec.2017.01.010.

[127] A. Liapunov et R. Bellman. *Stability of Motion*. Academic Press, 1966. isbn : 9781483266763.

[128] B. Lossouarn, G. Kerschen et J.-F. Deü. « An analogue twin for piezoelectric vibration damping of multiple nonlinear resonances ». *Journal of Sound and Vibration* 511 (2021), p. 116323. issn : 0022-460X. doi : https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116323. url : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X21003825.

[129] Z. Lu, Z. Wang, Y. Zhou et X. Lu. « Nonlinear dissipative devices in structural vibration control : A review ». *Journal of Sound and Vibration* 423 (2018), p. 18-49.

[130] A. Luongo et D. Zulli. « Dynamic analysis of externally excited NES-controlled systems via a mixed Multiple Scale/Harmonic Balance algorithm ». *Nonlinear Dynamics* 70 (2012), p. 2049-2061.

[131] A. Luongo et D. Zulli. « Aeroelastic instability analysis of NES-controlled systems via a mixed multiple scale/harmonic balance method ». *Journal of Vibration and Control* 20.13 (2014), p. 1985-1998. doi : 10.1177/1077546313480542.

[132] G. D. Lythe. « A noise-controlled dynamic bifurcation ». *arXiv e-prints* (1994). url : https://arxiv.org/abs/adap-org/9707008v1.

[133] C. Maganza, R. Caussé et F. Laloë. « Bifurcations, Period Doublings and Chaos in Clarinet-like Systems ». *EPL (Europhysics Letters)* 1.6 (1986), p. 295.

[134] L. I. Manevitch, G. Sigalov, F. Romeo, L. A. Bergman et A. Vakakis. « Dynamics of a linear oscillator coupled to a bistable light attachment : Analytical study ». *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME* 81.4 (2014), p. 1-10. issn : 00218936. doi : 10.1115/1.4025150.

[135] L. Manevitch. « Complex representation of dynamics of coupled nonlinear oscillators ». *Mathematical Models of Non-Linear Excitations, Transfer, Dynamics, and Control in Condensed Systems and Other Media*. Sous la dir. de L. Uvarova, A. Arinstein et A. Latyshev. Springer US, 1999, p. 269-300. doi : 10.1007/978-1-4615-4799-0_24.

[136] P. O. Mattei, R. Ponçot, M. Pachebat et R. Côte. « Nonlinear targeted energy transfer of two coupled cantilever beams coupled to a bistable light attachment ». *Journal of Sound and Vibration* 373 (2016). Publisher : Elsevier ISBN : 0022460X, p. 29-51. issn : 10958568. doi : 10.1016/j.jsv.2016.03.008. url : http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2016.03.008.

[137] M. E. Mcintyre, R. T. Schumacher et J. Woodhouse. « On the oscillations of musical instruments ». *J. Acoust. Soc. Am.* 74.5 (nov. 1983), p. 1325-1345.

[138] M. McKay, R. Beckman et W. Conover. « A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code ». *Technometrics* 21.2 (1979), p. 239-245. issn : 00401706. doi : 10.2307/1268522. url : http://www.jstor.org/stable/1268522.

[139] D. McRuer. « Human Dynamics in Man-Machine Systems ». *Automatica* 16 (1980), p. 237-253. url : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0005109880900345.

[140] L. Meirovitch. « Fundamentals of Vibrations ». McGraw-Hill, 2001. Chap. 7.

[141] P. J. Murtagh, A. Ghosh, B. Basu et B. M. Broderick. « Passive control of wind turbine vibrations including blade/tower interaction and rotationally sampled turbulence ». *Wind Energy* 11.4 (juill. 2008), p. 305-317. doi : 10.1002/we.249.

[142] A. Nankali, Y. S. Lee et T. Kalmar-Nagy. « Targeted Energy Transfers for Suppressing Regenerative Machine Tool Vibrations ». *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics Transactions of the ASME* 12 (2017), p. 011010-1 -011010-11.

[143] A. H. Nayfeh. *Introduction to perturbation techniques*. Wiley VCH, 2011.

[144] A. Nayfeh. *Perturbation Methods*. Physics textbook. Wiley, 2008. url : https://books.google.fr/books?id=eh6RmWZ51NIC.

[145] A. H. Nayfeh et D. T. Mook. *Nonlinear Oscillations*. John Wiley & Sons, Ltd, 1995.

[146] L. Nechak, S. Berger et E. Aubry. « A polynomial chaos approach to the robust analysis of the dynamic behaviour of friction systems ». *European Journal of Mechanics - A/Solids* 30.4 (2011), p. 594-607. issn : 0997-7538. doi : https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2011.03.002. url : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0997753811000258.

[147] L. Nechak, S. Berger et E. Aubry. « Prediction of random self friction-induced vibrations in uncertain dry friction systems using a Multi-Element generalized Polynomial Chaos approach ». *Journal of Vibration and Acoustics* 134.4 (2012), p. 041015. doi : 10.1115/1.4006413. url : http://dx.doi.org/10.1115/1.4006413.

[148] L. Nechak, S. Berger et E. Aubry. « Non-intrusive generalized polynomial chaos for the robust stability analysis of uncertain nonlinear dynamic friction systems ». *Journal of Sound and Vibration* 332.5 (2013), p. 1204-1215. ISSN : 0022460X. DOI : 10.1016/j.jsv.2012.09.046.

[149] L. Nechak, S. Besset et J.-J. Sinou. « Robustness of stochastic expansions for the stability of uncertain nonlinear dynamical systems – Application to brake squeal ». *Mechanical Systems and Signal Processing* 111 (2018), p. 194-209. ISSN : 0888-3270. DOI : https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2018.01.021. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327018300293.

[150] T. A. Nguyen et S. Pernot. « Design criteria for optimally tuned nonlinear energy sinks—part 1 : transient regime ». *Nonlinear Dynamics* 69.1-2 (2011), p. 1-19. DOI : 10.1007/s11071-011-0242-9.

[151] A. Nouy. « Recent Developments in Spectral Stochastic Methods for the Numerical Solution of Stochastic Partial Differential Equations ». *Archives of Computational Methods in Engineering* 16.3 (2009), p. 251-285. DOI : 10.1007/s11831-009-9034-5.

[152] J. Oden et J. Martins. « Models and computational methods for dynamic friction phenomena ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 52.1 (1985), p. 527-634. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/0045-7825(85)90009-X.

[153] B. Øksendal. *Stochastic Differential Equations : An Introduction with Applications*. 6e éd. Universitext. Springer-Verlag Berlin Heidelberg Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003.

[154] M. Oliva, G. Barone et G. Navarra. « Optimal design of Nonlinear Energy Sinks for {SDOF} structures subjected to white noise base excitations ». *Engineering Structures* 145 (2017), p. 135-152. ISSN : 0141-0296. DOI : https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.03.027. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S014102961730888X.

[155] S. Ollivier, J. P. Dalmont et J. Kergomard. « Idealized models of reed woodwinds. Part 1 : Analogy with bowed string ». *Acta. Acust. Acust.* 90 (2004), p. 1192-1203.

[156] D. R. Q. Pacheco, F. D. Marques, A. J. M. Ferreira, D. R. Q. Pacheco et F. D. Marques. « Panel flutter suppression with nonlinear energy sinks : numerical modeling and analysis ». *International Journal of Non-Linear Mechanics* 106 (2018), p. 108-114.

[157] M. Pavel et T. van Holten. « A rotor-tower instability associated with the advancing lead-lag mode ». en. *2000 ASME Wind Energy Symposium*. Reno,NV,U.S.A. : American Institute of Aeronautics et Astronautics, jan. 2000. DOI : 10.2514/6.2000-68. URL : https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/6.2000-68 (visité le 18/04/2023).

[158] H. Pham. « Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance ». Mathématiques & applications 61. Berlin ; New York : Springer, 2007. Chap. 5.

[159] T. T. Pham, C. H. Lamarque et S. Pernot. « Passive control of one degree of freedom nonlinear quadratic oscillator under combination resonance ». *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 16.5 (2011), p. 2279-2288. ISSN : 10075704. DOI : 10.1016/j.cnsns.2010.04.050. URL : http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2010.04.050.

[160] T. T. Pham, C. H. Lamarque et A. T. Savadkoohi. « Multi-resonance capturing in a two-degree-of-freedom system under two different harmonic excitations ». *Journal of Vibration and Control* 18.3 (2012), p. 451-466. ISSN : 10775463. DOI : 10.1177/1077546311404268.

[161] B. Pidaparthi et S. Missoum. « Optimization of Nonlinear Energy Sinks for the Mitigation of Limit Cycle Oscillations ». *2018 Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*. American Institute of Aeronautics et Astronautics, 2018. DOI : 10.2514/6.2018-3569.

[162] B. Pidaparthi et S. Missoum. « Stochastic Optimization of Nonlinear Energy Sinks for the Mitigation of Limit Cycle Oscillations ». *AIAA Journal* (2019), p. 1-11. DOI : 10.2514/1.j057897.

[163] J. Pitman et M. Yor. *A guide to Brownian motion and related stochastic processes*. 2018. DOI : https://doi.org/10.48550/arXiv.1802.09679. arXiv : 1802.09679.

[164] J. D. Polack, X. Meynial, J. Kergomard, C. Cosnard et M. Bruneau. « Reflection function of a plane sound wave in a cylindrical tube ». *Rev. Phys. Appl.* 22 (1987), p. 331-337. URL : http://dx.doi.org/10.1051/rphysap:01987002205033100.

[165] D. Qiu, S. Seguy et M. Paredes. « Design criteria for optimally tuned vibro-impact nonlinear energy sink ». *Journal of Sound and Vibration* 442 (2019), p. 497-513. ISSN : 0022-460X. DOI : https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.11.021. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X18307831.

[166] C. V. Raman. « On the mechanical theory of vibrations of bowed string [etc.] » *Assoc. Cult. Sci. Bull.* 15 (1918), p. 1-158.

[167] G. Raze, J. Dietrich et G. Kerschen. « Passive control of multiple structural resonances with piezoelectric vibration absorbers ». *Journal of Sound and Vibration* 515 (2021), p. 116490. ISSN : 0022-460X. DOI : https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116490. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X21005253.

[168] S. Redner. *A guide to first-passage time*. Cambridge University Press, 2001.

[169] J. B. Roberts et P. D. Spanos. « Stochastic averaging : An approximate method of solving random vibration problems ». *International Journal of Non-Linear Mechanics* 21.2 (1986), p. 111-134. DOI : 10.1016/0020-7462(86)90025-9.

[170] F. Romeo, L. I. Manevitch, L. A. Bergman et A. Vakakis. « Transient and chaotic low-energy transfers in a system with bistable nonlinearity ». *Chaos* 25.5 (mai 2015). Publisher : American Institute of Physics Inc. ISSN : 10897682. DOI : 10.1063/1.4921193.

[171] F. Romeo, G. Sigalov, L. A. Bergman et A. F. Vakakis. « Dynamics of a linear oscillator coupled to a bistable light attachment : Numerical study ». *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 10.1 (2015), p. 1-13. ISSN : 15551423. DOI : 10.1115/1.4027224.

[172] J. A. Sanders, F. Verhulst et J. A. Murdock. *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*. 2nd. Applied mathematical sciences v. 59. New York : Springer, 2007.

[173] T. P. Sapsis, A. F. Vakakis et L. A. Bergman. « Effect of stochasticity on targeted energy transfer from a linear medium to a strongly nonlinear attachment ». *Probabilistic Engineering Mechanics* 26.2 (2011), p. 119-133. ISSN : 0266-8920. DOI : https://doi.org/10.1016/j.probengmech.2010.11.006. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266892010000998.

[174] E. Sarrouy, O. Dessombz et J.-J. Sinou. « Stochastic Analysis of the Eigenvalue Problem for Mechanical Systems Using Polynomial Chaos Expansion— Application to a Finite Element Rotor ». *Journal of Vibration and Acoustics* 134.5 (2012). DOI : 10.1115/1.4005842.

[175] E. Sarrouy, O. Dessombz et J.-J. Sinou. « Stochastic study of a non-linear self-excited system with friction ». *European Journal of Mechanics-A/Solids* 40 (2013), p. 1-10.

[176] F. Schmidt et C. H. Lamarque. « Computation of the solutions of the Fokker-Planck equation for one and two DOF systems ». *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 14 (2 2009), p. 529-542. ISSN : 10075704. DOI : 10.1016/j.cnsns.2007.09.004.

[177] R. T. Schumacher. « Ab Initio calculations of the oscillations of a clarinet ». *Acustica* 48 (1981), p. 71-85.

[178] R. T. Schumacher et J. Woodhouse. « The transient behaviour of models of bowed-string motion. » *Chaos (Woodbury, N.Y.)* 5.3 (sept. 1995), p. 509-523. ISSN : 1089-7682. DOI : 10.1063/1.166122. URL : http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/12780207.

[179] R. Seydel. *Practical Bifurcation and Stability Analysis*. 3ième. T. 5. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer, 2010.

[180] M. A. Al-Shudeifat. « Highly efficient nonlinear energy sink ». *Nonlinear Dynamics* 76.4 (2014), p. 1905-1920. ISSN : 0924090X. DOI : 10.1007/s11071-014-1256-x.

[181] F. Silva, J. Kergomard, C. Vergez et J. Gilbert. « Interaction of reed and acoustic resonator in clarinet-like systems ». *J. Acoust. Soc. Am.* 124.5 (2008), p. 3284-3295.

[182] F. Silva, C. Vergez, P. Guillemain, J. Kergomard et V. Debut. « MoReeSC : A framework for the simulation and analysis of sound production in reed and brass instruments ». *Acta Acustica united with Acustica* 100.1 (2014), p. 126-138. ISSN : 16101928. DOI : 10.3813/AAA.918693.

[183] F. Silva, J. Kergomard, C. Vergez et J. Gilbert. « Interaction of reed and acoustic resonator in clarinetlike systems ». *The Journal of the Acoustical Society of America* 124.5 (2008), p. 3284-3295. DOI : 10.1121/1.2988280.

[184] J. J. Sinou et L. Jézéquel. « Mode coupling instability in friction-induced vibrations and its dependency on system parameters including damping ». *European Journal of Mechanics, A/Solids* 26.1 (2007), p. 106-122. ISSN : 09977538. DOI : 10.1016/j.euromechsol.2006.03.002.

[185] M. Spiegel, S. Lipschutz et J. Liu. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables (page 13)*. 4th. McGraw-Hill, 2012. DOI : 10.1036/9780071795388.

[186] A. Staino et B. Basu. « Dynamics and control of vibrations in wind turbines with variable rotor speed ». *Engineering Structures* 56 (nov. 2013), p. 58-67. doi : 10.1016/j.engstruct.2013.03.014.

[187] A. Staino et B. Basu. « Emerging trends in vibration control of wind turbines : a focus on a dual control strategy ». *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 373.2035 (fév. 2015), p. 20140069. doi : 10.1098/rsta.2014.0069.

[188] Y. Starosvetsky et O. V. Gendelman. « Strongly modulated response in forced 2DOF oscillatory system with essential mass and potential asymmetry ». *Physica D* 237.13 (2008), p. 1719-1733. doi : 10.1016/j.physd.2008.01.019.

[189] Y. Starosvetsky et O. V. Gendelman. « Response regimes in forced system with non-linear energy sink : Quasi-periodic and random forcing ». *Nonlinear Dynamics* 64 (1-2 2011), p. 177-195. issn : 0924090X. doi : 10.1007/s11071-010-9856-6.

[190] N. G. Stocks, R. Mannella et P. V. McClintock. « Influence of random fluctuations on delayed bifurcations : The case of additive white noise ». *Physical Review A* 40.9 (1989), p. 5361-5369. doi : 10.1103/PhysRevA.40.5361.

[191] R. L. Stratonovich. « Topics In the Theory of Random Noise ». T. 1. Taylor & Francis, 1963. Chap. 4.

[192] H. J. Sutherland. « A summary of the fatigue properties of wind turbine materials ». en. *Wind Energy* 3.1 (jan. 2000), p. 1-34. issn : 1095-4244, 1099-1824. doi : 10.1002/1099-1824(200001/03)3:1<1::AID-WE28>3.0.CO;2-2. url : https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/1099-1824(200001/03)3:1%3C1::AID-WE28%3E3.0.CO;2-2 (visité le 07/06/2023).

[193] J. Taghipour et M. Dardel. « Steady state dynamics and robustness of a harmonically excited essentially nonlinear oscillator coupled with a two-DOF nonlinear energy sink ». *Mechanical Systems and Signal Processing* 62–63.0 (2015), p. 164-182. issn : 10961216. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.ymssp.2015.03.018. url : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327015001442.

[194] P.-A. Taillard et J. Kergomard. « An Analytical Prediction of the Bifurcation Scheme of a Clarinet-Like Instrument : Effects of Resonator Losses ». *Acta Acustica united with Acustica* 101.2 (2015), p. 279-291. issn : 16101928. doi : 10.3813/AAA.918826.

[195] P.-A. Taillard, J. Kergomard et F. Laloë. « Iterated maps for clarinet-like systems ». *Nonlinear Dynam.* 62 (1 2010), p. 253-271. issn : 0924-090X.

[196] S. Terrien, C. Vergez et B. Fabre. « Flute-like musical instruments : A toy model investigated through numerical continuation ». *Journal of Sound and Vibration* 332.15 (2013), p. 3833-3848. doi : 10.1016/j.jsv.2013.01.041.

[197] W. Tian, T. Zhao, Y. Gu et Z. Yang. « Nonlinear flutter suppression and performance evaluation of periodically embedded nonlinear vibration absorbers in a supersonic FGM plate ». *Aerospace Science and Technology* 1 (2021), p. 107198. issn : 1270-9638. doi : 10.1016/j.ast.2021.107198. url : https://doi.org/10.1016/j.ast.2021.107198.

[198] J. R. Tredicce, G. L. Lippi, P. Mandel, B. Charasse, A. Chevalier et B. Picqué. « Critical slowing down at a bifurcation ». *Am. J. Phys.* 72.6 (2004), p. 799-809.

[199] M. Trinh, S. Berger et E. Aubry. « Stability analysis of a clutch system with multi-element generalized polynomial chaos ». *Mechanics & Industry* 17.2 (2016), p. 205. doi : 10.1051/meca/2015061. url : https://doi.org/10.1051/meca/2015061.

[200] S. Tsakirtzis, G. Kerschen, P. N. Panagopoulos et A. F. Vakakis. « Multi-frequency nonlinear energy transfer from linear oscillators to mdof essentially nonlinear attachments ». *Journal of Sound and Vibration* 285 (2005), p. 483-490.

[201] R. K. R. Tumkur, E. Domany, O. V. Gendelman, A. Masud, L. A. Bergman et A. F. Vakakis. « Reduced-order model for laminar vortex-induced vibration of a rigid circular cylinder with an internal nonlinear absorber ». *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 18.7 (2013), p. 1916-1930. issn : 10075704. doi : 10.1016/j.cnsns.2012.11.028. url : http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2012.11.028.

[202] A. F. Vakakis, L. I. Manevitch, O. Gendelman et L. Bergman. « Dynamics of linear discrete systems connected to local, essentially non-linear attachments ». *Journal of Sound and Vibration* 264.3 (2003), p. 559-577. issn : 0022460X. doi : 10.1016/S0022-460X(02)01207-5.

[203] A. Vakakis et O. Gendelman. « Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators : Part II - Resonance capture ». *Journal of Applied Mechanics* 68 (2001), p. 42-48.

[204] A. F. Vakakis, D. M. McFarland, L. Bergman, L. I. Manevitch et O. Gendelman. « Isolated resonance captures and resonance capture cascades leading to single- or multi-mode passive energy pumping in damped coupled oscillators ». *Journal of Vibration and Acoustics* 126.2 (2004), p. 235-244. ISSN : 10489002. DOI : 10.1115/1.1687397.

[205] A. F. Vakatis, O. V. Gendelman, L. A. Bergman, D. M. McFarland, G. Kerschen et Y. S. Lee. *Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems*. Springer-Verlag, Berlin, New York, 2008.

[206] A. F. Vakatis, O. Gendelman, L. A. Bergman, D. M. McFarland, G. Kerschen et Y. Lee. *Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems*. Sous la dir. de G. Gladwell. 156. Springer, 2009. DOI : 10.1007/978-1-4020-9130-8.

[207] B. Vaurigaud, L. Manevitch et C.-H. Lamarque. « Passive control of aeroelastic instability in a long span bridge model prone to couple dflutter using targeted energy transfer ». *Journal of Sound and Vibration* 330 (2011), p. 2580-2595.

[208] B. Vaurigaud, A. Ture Savadkoohi et C. H. Lamarque. « Targeted energy transfer with parallel nonlinear energy sinks. Part I : Design theory and numerical results ». *Nonlinear Dynamics* 66.4 (2011), p. 763-780. ISSN : 0924090X. DOI : 10.1007/s11071-011-9949-x.

[209] X. Wan et G. E. Karniadakis. « An adaptive multi-element generalized polynomial chaos method for stochastic differential equations ». *Journal of Computational Physics* 209.2 (2005), p. 617-642. ISSN : 0021-9991. DOI : https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.03.023. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999105001919.

[210] J. Wang, N. E. Wierschem, B. Wang et B. F. Spencer. « Multi-objective design and performance investigation of a high-rise building with track nonlinear energy sinks ». *The Structural Design of Tall and Special Buildings* (2019). DOI : 10.1002/tal.1692.

[211] Y. Wang, H. Yang, W. Song, C. Lu, Z. Liu et H. Zhou. « Study on excitation threshold of strong modulation response and vibration suppression performance of bistable nonlinear energy sink ». en. *Journal of Vibration and Control* (mai 2023), p. 107754632311755. ISSN : 1077-5463, 1741-2986. DOI : 10.1177/10775463231175576. URL : http://journals.sagepub.com/doi/10.1177/10775463231175576 (visité le 18/05/2023).

[212] S. Wieczorek, P. Ashwin, C. M. Luke et P. M. Cox. « Excitability in ramped systems : the compost-bomb instability ». en. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 467.2129 (mai 2011), p. 1243-1269. ISSN : 1364-5021, 1471-2946. DOI : 10.1098/rspa.2010.0485. URL : https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.2010.0485 (visité le 03/10/2023).

[213] N. Wiener. « The Homogeneous Chaos ». *American Journal of Mathematics* 60.4 (1938), p. 897. DOI : 10.2307/2371268.

[214] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. 2nd ed. Texts in Applied Mathematics 2. Springer New York, 1990. URL : http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=FC5B75B65E2F01A76E888A8082C8D63C.

[215] T. A. Wilson et G. S. Beavers. « Operating modes of the clarinet ». *J. Acoust. Soc. Am.* 56.2 (1974), p. 653-658.

[216] Wolfram Research, Inc. *Mathematica, Version 13.2*. Champaign, IL, 2023. URL : https://www.wolfram.com/mathematica.

[217] Z. Wu, S. Seguy et M. Paredes. « Estimation of Energy Pumping Time in Bistable Nonlinear Energy Sink and Experimental Validation ». *Journal of Vibration and Acoustics* 144.5 (2022), p. 051004. DOI : 10.1115/1.4054253.

[218] Y. Xiao, J. Wen, D. Yu et X. Wen. « Flexural wave propagation in beams with periodically attached vibration absorbers : Band-gap behavior and band formation mechanisms ». *Journal of Sound and Vibration* 332.4 (2013), p. 867-893. ISSN : 0022-460X. DOI : https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.09.035. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X12007596.

[219] L. Xiong, L. Tang, K. Liu et B. R. Mace. « Effect of Electromechanical Coupling on Dynamic Characteristics of a Piezoelectric Nonlinear Energy Sink System ». *Journal of Vibration Engineering and Technologies* 9.4 (2021), p. 687-699. ISSN : 25233939. DOI : 10.1007/s42417-020-00255-w. URL : https://doi.org/10.1007/s42417-020-00255-w.

[220] D. Xiu et G. Karniadakis. « The Wiener–Askey Polynomial Chaos for Stochastic Differential Equations ». *SIAM Journal on Scientific Computing* 24.2 (2002), p. 619-644. DOI : 10.1137/S1064827501387826. eprint : http://dx.doi.org/10.1137/S1064827501387826. URL : http://dx.doi.org/10.1137/S1064827501387826.

[221] H. Yao, Y. Cao, Z. Ding et B. Wen. « Using grounded nonlinear energy sinks to suppress lateral vibration in rotor systems ». *Mechanical Systems and Signal Processing* 124 (2019), p. 237-253.

[222] J. Zang, Y.-W. Zhang, H. Ding, T.-Z. Yang et L.-Q. Chen. « The evaluation of a nonlinear energy sink absorber based on the transmissibility ». *Mechanical Systems and Signal Processing* 12 (2019), p. 99-122.

[223] Y.-W. Zhang, Y.-N. Lu, W. Zhang, Y.-Y. Teng, H.-X. Yang, T.-Z. Yang et L.-Q. Chen. « Nonlinear energy sink with inerter ». *Mechanical Systems and Signal Processing* 12 (2019), p. 52-64.

[224] Y.-W. Zhang, Z. Zhang, L.-Q. Chen, T.-Z. Yang, B. Fang et J. Zang. « Impulse-induced vibration suppression of an axially moving beam with parallel nonlinear energy sinks ». *Nonlinear Dynamics* 82 (2015), p. 61-71.

[225] Z. Zhang, Z.-Q. Lu, H. Ding et L.-Q. Chen. « An inertial nonlinear energy sink ». *Journal of Sound and Vibration* 450 (2019), p. 199-213.

[226] B. Zhou, F. Thouverez et D. Lenoir. « Essentially nonlinear piezoelectric shunt circuits applied to mistuned bladed disks ». *Journal of Sound and Vibration* 333.9 (2014), p. 2520-2542. ISSN : 0022460X. DOI : 10.1016/j.jsv.2013.12.019. URL : http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2013.12.019.

[227] J. van Zon. « Stromingsgeinduceerde klepinstabiliteiten ». Mém. de mast. Vakgroep Transport Fysica, Eindhoven University of Technology, 1989.

[228] D. Zulli et A. Luongo. « Control of primary and subharmonic resonances of a Duffing oscillator via non-linear energy sink ». *International Journal of Non-Linear Mechanics* 80 (2016), p. 170-182. DOI : 10.1016/j.ijnonlinmec.2015.08.014.