Une approche mécanicienne des phénomènes non linéaires en thermoacoustique

Diana Baltean-Carlès

▶ **To cite this version:**

Diana Baltean-Carlès. Une approche mécanicienne des phénomènes non linéaires en thermoacoustique. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Sorbonne Université, 2020. tel-04439100

HAL Id: tel-04439100
https://hal.science/tel-04439100

Submitted on 8 Feb 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

SORBONNE UNIVERSITÉ
Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur

Mémoire présenté pour obtenir
L'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Diana BALTEAN-CARLÈS

Une approche mécanicienne des phénomènes non linéaires en thermoacoustique

---

Soutenue le **24 juin 2020**,

devant le jury composé de :

Rapporteurs	**Valéry Botton**	Professeur des Universités, LMFA, INSA, Lyon
	Joël Gilbert	Directeur de Recherche, LAUM, CNRS, Le Mans
	Benoît Goyeau	Professeur des Universités, EM2C, CentraleSupélec, Université Paris-Saclay
Examinateurs	**Hélène Bailliet**	Maître de Conférences, Institut Pprime, Université de Poitiers-ENSMA, ENSIP
	Pierre-Yves Lagrée	Directeur de Recherche, ∂'Alembert, CNRS, Sorbonne Université, Paris
	François Lusseyran	Directeur de Recherche, LIMSI, CNRS, Orsay

Părinţilor mei.

Table des matières

Curriculum Vitae **7**

Activités d'enseignement **19**

1 Introduction générale aux machines thermoacoustiques **25**
1.1 Description de l'effet thermoacoustique 25
1.2 Les éléments constitutifs d'une machine thermoacoustique 27
1.3 Outils de modélisation : la théorie linéaire de Rott 28
1.4 Phénomènes limitant l'efficacité des systèmes - les axes de recherche 29
1.5 Machines thermoacoustiques au LIMSI 29

2 Streaming acoustique **33**
2.1 Streaming de Rayleigh 33
2.2 Étude expérimentale sur le streaming dans les machines thermoacoustiques . . 35
2.2.1 Mesure des composantes acoustiques et continues des champs de vitesses dans le résonateur 36
2.2.2 Dispositif expérimental 37
2.2.3 Calcul des champs de vitesses PIV 38
2.2.4 Réarrangement des champs PIV sous-échantillonnés selon une phase auto-référencée 39
2.2.5 Calcul de la vitesse moyenne (de streaming) 40
2.2.6 Reconstruction de l'acoustique et du champ moyen par décomposition POD 41
2.2.7 Champs PIV avec référence de phase 42
2.2.8 Résultats pour plusieurs drive ratio 42
2.3 Streaming acoustique en guide d'onde 44
2.3.1 Une histoire d'aller et retour 44
2.3.2 Premières simulations du streaming en canal plan, dans les deux régimes, incluant les effets thermiques 45
2.3.3 Analyse du streaming en régime nonlinéaire, hypothèse insentropique . 48
2.3.4 Retour au régime linéaire : analyse des termes sources de streaming en hypothèse isentropique 55
2.3.5 Retour au regime linéaire et aux effets thermiques : conséquences sur le régime non linéaire 56

3 Thermoacoustique : Modélisation et simulation d'un moteur thermoacoustique **61**
3.1 Modélisation d'un moteur thermoacoustique idéalisé 61
3.1.1 Modèle physique 62
3.1.2 Echelles de référence et adimensionnement 62
3.1.3 Résonateur 63

3.1.4 Conditions aux extrémités du tube . . . 63
3.1.5 Cellule active . . . 64
3.1.6 Conditions aux limites . . . 66
3.1.7 Raccord . . . 66
3.1.8 Conditions initiales . . . 66
3.1.9 Solution numérique . . . 66
3.1.10 Simulation du démarrage du moteur jusqu'à la saturation . . . 67
3.1.11 Conclusion . . . 67
3.2 Étude de stabilité : influence de la charge sur un moteur thermoacoustique à onde stationnaire . . . 68
3.2.1 Calculs des modes propres et du rapport de températures critique . . . 68
3.2.2 Influence de la position de la cellule active . . . 70
3.2.3 Comparaison avec la théorie linéaire . . . 70
3.2.4 Comparaison avec les résultats expérimentaux . . . 71
3.3 Analyse du régime périodique . . . 72
3.4 Application : thermophones . . . 73

4 Couplages fluide-poreux **75**
4.1 Étude numérique de la convection naturelle autour et dans le stack moteur . . . 76
4.2 Étude numérique de la convection naturelle dans un système thermoacoustique 79
4.2.1 Résultats sur la configuration 1 . . . 81
4.2.2 Résultats sur la configuration 2 . . . 83

Projet de recherche **85**

Bibliographie **90**

Articles en annexe **97**
P. Debesse, D. Baltean Carlès, F. Lusseyran and M-X François, Oscillating and streaming flow identification in a thermoacoustic resonator, from undersampled PIV measurements, Meas. Sci. Technol. 25, 025005, (2014) . . . 97
O. Hireche, C. Weisman, D. Baltean-Carlès, P. Le Quéré and L. Bauwens, Low Mach number analysis of idealized thermoacoustic engines with numerical solution , J. Acoust. Soc. Am. 128(6), 3438-3448, (2010) . . . 115
L. Ma, C. Weisman, D. Baltean-Carlès, I. Delbende, L. Bauwens, Effect of a resistive load on the starting performance of a standing wave thermoacoustic engine : A numerical study, J. Acoust. Soc. Am. 138 (2), 847-857, (2015) . . . 129
V. Daru, D. Baltean-Carlès, C. Weisman, P. Debesse, G. Gandikota, Two-dimensional numerical simulations of nonlinear acoustic streaming in standing waves, Wave Motion 50, 955-963 (2013) . . . 143
V. Daru, C. Weisman, D. Baltean-Carlès, I. Reyt, H. Bailliet, Inertial effects on acoustic Rayleigh streaming flow : Transient and established regimes, Wave Motion 74, 1-17, (2017) . . . 155
D. Baltean-Carlès, V. Daru, C. Weisman, S.Tabakova, H. Bailliet, An unexpected balance between outer Rayleigh streaming sources , J. Fluid Mech. 867, 985-1011, (2019) . . . 175
O. Hireche, I. Ramadan, C. Weisman, H. Bailliet, Y. Fraigneau, D. Baltean-Carlès, V. Daru, Experimental and numerical investigation of natural convection flows in two horizontal thermoacoustic cavities. Int. J. of Heat and Mass Transf. 149, 119195, (2020) . . . 205

BALTEAN-CARLÈS Diana, née BALTEAN

Docteur en Mécanique

Maître de Conférences 60ème section
U.F.R. 919 Ingénierie, Faculté des Sciences et Ingénierie, Sorbonne Université,
4 Place Jussieu, 75005 Paris
Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur LIMSI, CNRS UPR 3251
Campus Universitaire bât 508, rue John Von Neumann, 91405 Orsay Cedex

Renseignements personnels

Date et lieu de naissance	le 21 février 1972 à Drobeta Turnu Severin (Roumanie)
Nationalité	Roumaine, Française
Situation de famille	Mariée, 1 enfant
Courrier électronique	diana-georgiana.baltean-carles@upmc.fr

Cursus universitaire et diplômes

1999	Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie et de l'Université de l'Ouest de Timisoara (UVT, Roumanie), spécialité Mécanique
1995	Diplôme d'Etudes Approfondies de l'UVT, spécialité Mathématiques Appliquées à la Mécanique Equivalence avec le DEA de Mécanique de l'Université Paris 6
1990-1995	Diplôme d'Etudes Supérieures de l'UVT, spécialité Mathématiques

Déroulement de carrière

Sept 2002-présent Maître de Conférences à l'Université Pierre et Marie Curie puis Sorbonne Université, UFR 923 (Mécanique, Energétique, Robotique) puis UFR 919 (Ingénierie), intégrée depuis janvier 2016 dans la Faculté des Sciences et Ingénierie

Titularisée en 2003
Promotion Hors Classe le 01/09/2019

Sept 2001-sept 2002 ATER à l'Université Pierre et Marie Curie

Fev 2001-Juin 2001 Contrat post-doctoral à l'UPMC

2000-2001	Maître de Conférences à l'Université de l'Ouest de Timisoara (UVT)
1998 – 2000	Assistante à l'Université de l'Ouest de Timisoara
1995 – 1998	Monitrice à l'Université de l'Ouest de Timisoara

Recherche

Depuis 2002 : Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur, LIMSI (accueil sous convention UPMC)
2000-2002 : Laboratoire de Modélisation en Mécanique (UPMC)
1996-1999 : Laboratoire de Modélisation en Mécanique (UPMC) et Université de l'Ouest de Timisoara (Roumanie)

Thèmes de recherche :

Modélisation du transport en milieux poreux (méthodes asymptotiques, homogénéisation en milieux périodiques) ; convection naturelle en cavité partiellement remplie d'un milieu poreux (configurations issues des systèmes thermoacoustiques) ; modèles faible Mach et simulation numérique des phénomènes d'excitation et de pompage de chaleur thermoacoustiques : application aux moteurs thermoacoustiques et dans le domaine musical ; analyse expérimentale (mesures PIV), modélisation et simulation numérique du streaming acoustique en guide d'ondes, en particulier le streaming non linéaire.

Encadrement doctoral et scientifique

Co-encadrements de thèse **:**

1. P. Debesse (2004-08), ED SMAER, Thèse de Doctorat de l'UPMC, intitulée «*Vers une mesure du vent thermoacoustique*», sous la direction de M.-X. François et F. Lusseyran
   Participation à l'encadrement : 60% (autre co-encadrant : F. Lusseyran)
   Publications : 2 articles de revue internationale à comité de lecture, 3 congrès internationaux avec actes, 2 congrès nationaux avec actes, 1 colloque
   P. Debesse est ingénieur de recherche au laboratoire LIEFT, CEA Saclay

2. O. Hireche (2007-10), thèse Algérienne de l'USTO Oran, intitulée « *Analyse faible Mach et étude numérique d'un système thermoacoustique* », sous la direction de M.-X. François et M. Abidat –USTO
   Participation à l'encadrement : 30% (autre co-encadrante : C. Weisman)
   Publications : 2 articles de revue internationale à comité de lecture, 1 congrès international avec actes, 1 congrès/acte à diffusion restreinte, 1 congrès sans acte, 1 colloque
   Omar Hireche est Maître de Conférences classe A au Département de Mécanique de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Oran, Algérie

3. L. Ma (2011-14), ED SMAER, Thèse de Doctorat de l'UPMC, intitulée « *Modélisation et simulation des effets non linéaires et multidimensionnels d'un moteur thermoacoustique : influence d'une charge résistive* », sous la direction de I. Delbende
   Participation à l'encadrement : 40% (autre co-encadrante : C. Weisman)
   Publications : 1 article de revues internationale à comité de lecture, 1 article de revue internationale. « special issue », 3 congrès internationaux avec actes, 1 congrès/acte à diffusion restreinte
   Lin Ma est enseignant-chercheur en Chine

Séjour post-doctoraux **:**

1. I. Reyt (2012-214), ATER Paris 11 (2012-2013), ATER ENSAM (2013-2014), Post-doc ENSAM (2015), « Streaming acoustique non linéaire »
   Participation à l'encadrement : 30% (autre co-encadrants : V. Daru et C. Weisman)
   Publications : 3 articles de revues internationales à comité de lecture, 3 congrès nationaux avec actes, 1 congrès international sans actes, 1 colloque.

2. O. Hireche (2018-19), Contrat post-doctoral dans le cadre de l'ANR « TACOT », « Convection naturelle dans un système thermoacoustique : simulation numérique et comparaison avec les expériences »
   Participation à l'encadrement : 30% (autre co-encadrante : C. Weisman)
   Publications : 2 articles de revue internationale à comité de lecture soumis (IJHMT et Mechanics & Industry), 1 congrès national avec actes, 1 colloque

Encadrement de stages niveau M2**:**

1. L. Ma (M2 – Master Sciences de l'ingénieur UPMC, spécialité Mécanique des Fluides Fondements et Applications MF2A, co-encadrement 50% avec C. Weisman), *Modélisation d'un moteur thermoacoustique idéalisé*, 2011.

2. K. Sodjavi (M2 –Master Sciences de l'ingénieur UPMC, spécialité Mécanique des Fluides et Energétique MFE, co-encadrement 50% avec C. Weisman), *Simulation numérique d'un moteur thermoacoustique,* 2009.

3. C. Ratier, N. Kuncio (M2, Dynamique des Fluides, Univ. Paris 11), Evaluation de la puissance acoustique dans un système thermo acoustique par la méthode des deux capteurs, 2006.

4. V. Macary (DEA Modélisation et Instrumentation en Physique, Univ. Paris 6, Paris 7, Paris 11, INSTN – CEA), *Contrôle du champ acoustique par des éléments passifs dans un système thermoacoustique,* 2004.

Encadrement de stages niveau M1:

1. S. Benyahia (M1 MF2A, co-encadrement 50 % avec D. Baltean-Carlès), Convection naturelle, simulations et application à la thermoacoustique, *Thermoacoustique),* 2017

2. V.D.R. Dalli (M1 ENSAM, co-encadrement 50% avec D. Baltean-Carlès), *Thermoaocustique et Thermophones*, (*Thermoacoustique),* 2016

3. D. H. Truong (M1 MF2A, co-encadrement 50% avec D. Baltean-Carlès), *Thermoacoustique,* 2015

4. W. Gault, projet de synthèse ECP, co-encadrement 50% avec D. Baltean-Carlès, *Simulation numérique d'un écoulement oscillant à travers un orifice,* 2014.

5. B. Belhassein (Master Sciences de l'ingénieur UPMC, spécialité Energie et Environnement, co-encadrement 50% avec D. Baltean-Carlès), *Caractérisation de la charge pour un moteur thermoacoustique* (*Thermoacoustique),* 2010.

6. M. Sahal (Master Mécanique des Fluides, Université Paris 11*), Etude du streaming dans un écoulement thermoacoustique* (*Thermoacoustique),* 2009.

Encadrement de stages niveau L:

1. Khrishnakumar A. (L3 UPMC), *Simulation des écoulements oscillants en cavité fermée*, 2019.

2. M. Elkoby (L2 UPMC), *Simulation d'un moteur thermoacoustique à ondes stationnaires*, 2012.

3. L. Lounis (L3-Physique, Univ. de Cergy-Pontoise), *Un modèle simplifié pour la thermoacoustique : approche linéaire de Rott*, 2012.

4. C. Rassier (IUT d'Evry-Bretigny), *Caractérisation thermique d'un réfrigérateur à onde stationnaire ou progressive*, 2003.

Diffusion et rayonnement de la recherche :

J'ai effectué plusieurs expertises d'articles dans les journeaux suivants: J. of Sound and Vibration, Acta Acustica, Int. J. Heat Mass Transfer.

J'ai été membre de plusieurs jurys de thèse :

- C. Olivier, "Contributions à l'Étude des Générateurs d'Ondes Thermoacoustiques. Contrôle Actif des Auto-Oscillations, et Propagation Non Linéaire", soutenue le 13.10. 2015 au LAUM, Université du Maine, Le Mans. J'ai fait également partie du comité de suivi de thèse en tant que référent extérieur.
- H. Chatou , "Etude d'optimisation par essaims particulaires d'un moteur thermoacoustique : application au couplage avec un générateur électrique linéaire", soutenue le 09.04.2013 à l'Université de Franche-Compté
- I. Reyt, Écoulements induits en guide d'onde acoustique fort niveau, soutenue le 20.11. 2012 à l'Institut PPrime, Université de Poitiers.
- C. Desjouy, Etudes thermoacoustiques en résonateurs annulaires : mesure des écoulements redressés par Vélocimétrie Laser Doppler, et contrôle actif de l'amplification thermoacoustique , soutenue le 30.03. 2010 au LAUM, Université du Maine, Le Mans.

Membre de : AUM, SFT, SFA

J'ai organisé avec C. Weisman**,** 2 journées de rencontre au LIMSI sur les effets non linéaires en thermoacoustique, les 3/4 juillet 2006.

J'ai été membre du comité scientifique et d'organisation de la première école de Thermoacoustique (labellisée CNRS), organisée à Roscoff du 30 mai au 4 juin 2010, 42 participants.

Cours de recherche (avec C. Weisman) "Mathematical modeling and numerical simulation in Thermoacoustics" dans le cadre de l'école thématique "Space trips" Summer School on thermoacoustic and space Technologies, june 17-20, 2014, French Institute, 59 Elizabetes street, LV-1050 Riga

J'ai participé à deux réseaux de recherche :

GDR 3058 *« Thermoacoustique »* (2007-2014)
J'ai participé à l'initiation puis à la création en 2007 du GDR thermoacoustique, ainsi qu'à toutes les réunions du GDR. J'ai fait partie du conseil du GDR en tant que représentante du laboratoire LIMSI. J'ai également participé aux rédactions annuelles des bilans du GDR (laboratoires partenaires, LMFA, LEA, LAUM, LIMSI, IPNO, FEMTO).

Fédération «*Transferts de masse et de chaleur» dans l'axe instabilités thermoconvectives* » sur le thème de la convection hors Boussinesq. J'ai participé aux premières réunions de la Fédération, aux réunions de bilan, et à une journée organisée sur le thème « convection hors Boussinesq ».

Responsabilités scientifiques

- Porteur du projet d'Action Incitative LIMSI 2005-07, « Analyse expérimentale des effets non linéaires dans les systèmes thermoacoustiques », financement 18000 euros, autres participants : P. Debesse, F. Lusseyran, M.-X. François.
- Porteur du projet BQR-Recherche 2007 de L'UPMC « Etude des effets non linéaires en thermoacoustique », financement 15000 euros, autres participants : F. Lusseyran, M.-X. François.
- Participation au projet CMEP 10MDU809, «Etude numérique et expérimentale des systèmes thermoacoustiques», (2010-2014, 38000 euros sur 4 ans), dans le cadre du programme de collaboration franco-algérienne Hubert Curien Tassili, porteur P. Le Quéré.

Ce contrat a permis de financer les voyages et séjours en France et en Algérie pour poursuivre la collaboration déjà établie lors de la thèse algérienne de O. Hireche, entre le Laboratoire de Mécanique Appliquée de l'Université des Sciences et de la Technologie d'Oran et le LIMSI. Un des objectifs était la création d'une équipe de recherche à l'USTO sur la problématique de l'optimisation des machines thermoacoustiques. Dans ce cadre, nous avons accueilli au LIMSI deux doctorants, S.A. Litim (2010, 2011) et K. Nehar Belaïd (2012, 2013). Plusieurs séjours de M. Abidat et O. Hireche au LIMSI ont aussi été financés ainsi qu'un séjour que j'ai effectué à l'USTO en 2010.

- Participation au projet d'Action Incitative LIMSI 2012-13, « Thac3G» (3500 euros + 1 stage, AAP 2015-16), autres participants : C. Weisman (porteur du projet) et V. Daru.

- Porteur scientifique du projet Arts&Science 2015-2016, La Diagonale, Paris Saclay, « Thermophones », (15000 euros, AAP 2015-16), avec J. Rémus (porteur artistique de la Société Ipotam Mécamusique), autres participants : C. Weisman, V. Daru, F. Jebali.

- Porteur du projet d'Action Incitative LIMSI 2015-16, « Thermoacoustique dans l'audio : le thermophone comme un instrument de musique » (4600 euros, AAP 2015-16), avec C. d'Alessandro, autres participants : C. Weisman, V. Daru.

- ANR TACOT, **T**hermo-**A**coustic **C**ooler for **O**n road **T**ransportation, AAP Generique 2017, Défi « Energie Propre, Sûre et Efficace », 2017-2020 (Porteur Hélène Bailliet P')
  5 Partenaires: Institut P', Groupe PSA, LAUM, LIMSI, LMFA
  Début du projet le 01 Janvier 2018, durée 36 mois, aide ANR 491.7 keuros, coût complet 1148 keuros
  Labellisation par 2 pôles de compétitivité: S2E2 et iDforCAR
  LIMSI : aide allouée 67896 euros, entre-autres pour le financement de 12 mois de stage post-doctoral.
  Je suis participante à 10 pm (personnes-mois), chargée avec C. Weisman et V. Daru de la modélisation et simulation numérique.

Responsabilités collectives

Au sein de l'UPMC (Sorbonne Université)

Je suis responsable des parcours intensifs L2-L3 avec la Mécanique (mono-disciplinaire et double majeure avec la Physique, les Mathématiques et l'Electronique). A ce titre, je suis membre de l'EFU (Équipe de Formation Universitaire) du département de Licence de Mécanique.

J'ai été membre élue du Conseil du Département des Licences de Mécanique et EEA, à l'UFR d'ingénierie à l'UPMC dans la période 2015-2017.

J'ai été élue dans les commissions de l'UPMC:
Membre de la Commission de Spécialistes, section 60, de l'UPMC (2004-2011) (2 mandats).
Membre du jury de concours de recrutement IRTF, pour le recrutement d'un assistant ingénieur expérimental à l'UPMC, avec affectation au LIMSI en 2006.

Au sein du laboratoire LIMSI

Membre du Conseil du Département de Mécanique du LIMSI depuis 2004.
Membre de la Commission des locaux
Membre de la Commission informatique
Membre du Conseil du laboratoire depuis janvier 2020

Au sein des instances nationales

Membre suppléante nommée au CNU, section 60 (2019-2023)

Enseignement

Enseignements à l'Université de Timisoara, (UVT) - Faculté de Mathématique, Roumanie (1995-2001).

Formations équivalentes Licence et Master, parcours Mathématiques, Mathématiques Appliquées et Mathématiques Physiques.
Total : ~**1500** heures présentielles (équivalent TD) avec une moyenne de 250 heures annuelles
Les heures effectives se répartissent 6% CM + 60% TD +34% TP.

Enseignements depuis 2001 à l'U.P.M.C. (Faculté des Sciences et Ingénierie, Sorbonne Université, depuis janvier 2018)

Les enseignements que j'ai dispensés l'ont été au sein de l'UFR919 (ingénierie), anciennement UFR 923 (Mécanique, Energétique, Robotique), en formation initiale, presque entièrement présentielle, et encadrements/tutorats de stages.

Total : ~**3400** heures présentielles en formation initiale (équivalent TD)
Les heures effectives se répartissent 15% CM + 62% TD +23% TP, avec plus de 80% en Licence.

Thèmes et niveaux des enseignements :

Licence de mécanique niveaux L1, L2 et L3 : mécanique des milieux continus, mécanique des fluides, mathématiques, thermodynamique, mécanique des solides, méthodologie en mécanique, initiation à la mécanique- énergétique et acoustique, méthodes numériques
Master (Sciences pour l'Ingénieur, spécialité MF2A, Mécanique des Fluides, Fondements et Applications), niveaux M1 et M2 : mécanique des milieux continus-fluides, acoustique, techniques expérimentales, énergétique et impact environnemental, méthodes asymptotiques, suspensions et milieux diphasiques, milieux poreux et suspensions.

Responsabilités et activités pédagogiques:

- Responsable des parcours intensifs L2-L3 avec la Mécanique (mono-disciplinaire et double majeure avec la Physique, les Mathématiques et l'Electronique) depuis 2017.
- Responsabilité de l'UE « Méthodes mathématiques pour la mécanique » depuis 2014 (L2, ~250 étudiants/an)
- Responsabilité de l'UE « Equations aux dérivées partielles II » depuis 2009 (L3, ~250 étudiants/an)
- Co - responsabilité de l'UE de Master Suspensions et milieux diphasiques depuis 2012, devenue Milieux poreux et suspensions en 2015, dans le Master Sciences pour l'Ingénieur, spécialité MF2A.
- Participation à la mise en place des enseignements de mathématiques des maquettes majeure-mineure (en 2014-2015 et 2018-2019)
- Titulaire de la prime de responsabilités pédagogiques pour investissement en licence PIL de l'UPMC pour les années 2013-15 et 2015-17.
- En Roumanie : responsable de Filière pour la 3ème année Universitaire (Licence) de la Faculté de Mathématique, UVT. J'ai créé un cours de M2 « Méthodes asymptotiques » et j'ai mis en place des travaux pratiques numériques pour le cours de mécanique du point matériel

Publications

- *Articles dans revues internationales à comité de lecture*

V. Daru, C. Weisman, **D. Baltean-Carlès**, H. Bailliet, «Thermal effects on fast acoustic streaming inside a resonator », soumis à J. Fluid Mech., février 2020.

1. O. Hireche, I. Ramadan, C. Weisman, H. Bailliet, Y. Fraigneau, **D. Baltean-Carles**, V. Daru, « Experimental and numerical investigation of natural convection flows in two horizontal thermoacoustic cavities », Int. J. Heat Mass Transfer 149, 119195, (2020).
2. **D. Baltean-Carlès**, V. Daru, C. Weisman, S.Tabakova, H. Bailliet, « An unexpected balance between outer Rayleigh streaming sources », J. Fluid Mech. 867, 985-1011, (2019).
3. V. Daru, C. Weisman, **D. Baltean-Carlès**, I. Reyt, H. Bailliet, « Inertial effects on acoustic Rayleigh streaming flow: Transient and established regimes », *Wave Motion 74*, 1-17, (2017).
4. V. Daru, I. Reyt, H. Bailliet, C. Weisman**, D. Baltean-Carlès,** « Acoustic and streaming velocity components in a resonant wave guide at high acoustic levels », *J. Acoust. Soc. Am. 141(1)*, 563-574, (2017).
5. L. Ma, C. Weisman, **D. Baltean-Carlès**, I. Delbende, L. Bauwens, « Effect of a resistive load on the starting performance of a standing wave thermoacoustic engine: A numerical study », *J. Acoust. Soc. Am. 138 (2*), 847–857, (2015).
6. P. Debesse, **D. Baltean-Carlès**, F. Lusseyran, M.-X. François, « Oscillating and streaming flow identification in a thermoacoustic resonator, from undersampled PIV measurements », *Meas. Sci. Technol. 2,5* 025005 (16pp), (2014).
7. I. Reyt, V. Daru, H. Bailliet, S. Moreau, J.-C. Valière, **D. Baltean-Carlès**, C. Weisman, « Fast acoustic streaming in standing waves: Generation of an additional outer streaming cell », *J. Acoust. Soc. Am. 134 (3)*, 1791-1801 (2013).
8. V. Daru, **D. Baltean-Carlès**, C. Weisman, P. Debesse, G. Gandikota, « Two-dimensional numerical simulations of nonlinear acoustic streaming in standing waves », *Wave Motion 50*, 955-963 (2013).
9. O. Hireche, C. Weisman, **D. Baltean-Carlès**, P. Le Quéré and L. Bauwens, « Low Mach number analysis of idealized thermoacoustic engines with numerical solution », *J. Acoust. Soc. Am. 128(6)*, 3438-3448, (2010).
10. O. Hireche, C. Weisman, **D. Baltean-Carlès**, P. Le Quéré, M.-X. François and L. Bauwens, « Numerical model of a thermoacoustic engine », *Comptes Rendus Mécanique 338*, 18-23, (2010).
11. **D. Baltean**, T. Lévy, S. Balint, « Diffusion-convection in a porous medium with impervious inclusions at low flow rates », *Transport in Porous Media*, Vol 51, No 1, pp. 19-39, (2003).

- *Articles dans des revues internationales à comité de lecture « special issues »,*

12. L. Ma, C. Weisman, **D. Baltean-Carlès**, I. Delbende, L. Bauwens, « Numerical simulation of flow dynamics in the periodic regime in an idealized thermoacoustic engine », *Magnetohydrodynamics*, vol. 51, n°3, 601-608, (2015).

13. Duthil, P., **D. Baltean**, A. Bétrancourt, M.X. François, Z.B. Yu, and J.-P. Thermeau. Experiments and valve modelling in Thermoacoustic device. in *Advances in Cryogenic Engineering*, Vol. 51 B, pp. 1095-1102, (2006).

14. M. Balint, M.M. Mihailovici, **D.G. Baltean**, St. Balint, A modified Chang-Brown model for the determination of the dopant distribution in a Bridgman-Stockbarger semiconductor crystal growth, *Journal of Crystal Growth* , 230, pp. 195-201, (2001).

15. M. Balint, M.M. Mihailovici, **D.G. Baltean,** St. Balint, Interface structure in the growth of semiconductor crystals using the Bridgman-Stockbarger method, *Thin Solid Films*, 380, pp. 108-110, (2000).

16. A.M. Balint**, D.G. Baltean,** T. Lévy, M. Mihailovici, A. Neculae, S. Balint, The dopant fields in « uniform-diffusion-layer », « global-thermal-convection » and « precrystallization-zone » models, *Material Science in Semiconductor Processing*, 3 pp. 115-121, (2000).

- *Articles dans des revues nationales à comité de lecture,*

17. **D. Baltean**, T. Lévy, S. Balin, Transport de masse par convection et diffusion, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 326, Série II b, pp. 821-826, (1998).

- *Conférences invitées*

1. **D. Baltean-Carlès**, C. Weisman, Invited lecture, « Modelling and numerical simulations of thermoacoustics », as part of the *'Space trips' Summer School on thermoacoustic and space Technologies*, june 17-20, 2014, French Institute, 59 Elizabetes street, LV-1050 Riga.

2. **D. Baltean Carlès**, P. Debesse, F. Lusseyran, M.-X François, « PIV contribution for measuring acoustic and streaming flow in thermoacoustic systems, using phase average dynamics », *Acoustics 08 meeting,* June 29-July 4, Paris, abstract dans J. Acoust. Soc. Am. (123), 3545, 2008.

- *Communications dans des congrès internationaux à comité de lecture et actes publiés*

1. V. Daru, **D. Baltean-Carlès**, C. Weisman, « Inertial Effects on Non Linear Acoustic Streaming », *20th International Symposium on Nonlinear Acoustics*, Lyon, France, 2015.

2. L. Ma, C. Weisman, **D. Baltean-Carlès**, I. Delbende, L. Bauwens, « Numerical simulation of flow dynamics in the periodic regime inside an idealized thermoacoustic engine », *PAMIR International Conference on Fundamental and Applied MHD*, Riga, Latvia, 2014.

3. V. Daru, **D. Baltean-Carlès**, C. Weisman, « Numerical Simulation of nonlinear acoustic streaming in a standing wave resonator », *19th International Symposium on Nonlinear Acoustics*, Tokyo, Japon, 2012.

4. L. Ma, C. Weisman, **D. Baltean-Carlès**, L. Bauwens, « Multiple scale model and numerical simulation of thermoacoustic devices », *International Stirling Engine Conference*, Dubrovnik, Croatie, 2012.

5. L. Ma, C. Weisman, **D. Baltean-Carlès**, P. Le Quéré, L. Bauwens, « Low Mach number simulation of a loaded standing-wave thermoacoustic engine », *Congrès Français d'Acoustique & Annual IOA Meeting*, Nantes, France, 2012.

6. C. Weisman, **D. Baltean-Carlès**, P. Le Quéré, L. Bauwens, « Comparison of different heat exchanger models in a thermoacoustic engine simulation », *US-European Fluids Engineering Summer Meeting*, *FEDSM-ICNMM2010-31166*, Montreal, Canada, 2010.

7. C. Weisman, **D. Baltean-Carlès**, P. Le Quéré, L. Bauwens, « Numerical study of thermoacoustic wave amplification », *V European Conference on Computational Fluid Dynamics*, *ECCOMAS CFD*, Lisbon, Portugal, 2010.
8. F. Lusseyran, L.R. Pastur, P. Debesse, **D. Baltean**, Th. Faure, « Self referenced phase averaging and flow complexity », *Conference on Modeling Fluid Flow (CMFF'09)*, *The 14th International Conference on Fluid Flow Technologies* Budapest, Hungary, September 9-12, 2009

9. O. Hireche, C. Weisman, **D. Baltean-Carlès**, L. Bauwens, M.-X. François and P. Le Quéré, « Numerical model of a thermoacoustic engine », *proceedings of the acoustic week in Canada 2008, Vancouver, 6-8 oct. 2008, Canadian acoustics - acoustique canadienne, vol. 36 (3), 164-165*, 2008.

10. C. Weisman, **D. Baltean-Carlès**, P. Duthil, P. Le Quéré, « Natural convection in a stack of horizontal plates in a differentially heated cavity», *International Symposium on Transport Phenomena,* Reykjavik, Island, 2008.

11. P. Debesse, **D. Baltean-Carles**, F. Lusseyran, « Experimental analysis of nonlinear phenomena in a thermoacoustic system », in *Nonlinear acoustics fundamentals and applications, proceedings of 18th ISNA*, July 07-10, 2008 Stockholm SWEDEN, vol.1022, 355-358, 2008.

12. A.M. Balint, **D. Baltean**, M. Mihailovici, A. Neculae, S. Balint, « Influence of the precrystallization-zone on the dopant field in microgravity », *Proceedings of the SPIE - The International Society for Optical Engineering (USA)*, Vol. 4068, pp.33-44, 2001.

13. **D. Baltean**, A.M. Balint, T. Lévy, A. Neculae, S. Balint, « Mass transport by diffusion and convection through periodic porous media », Proceedings of *the International Conference on Non-Linear Problems in Aviation and Aerospace*, May 10-12 2000, Daytona Beach, Florida (USA), 2000.

14. S. Balint, A.M. Balint, **D. Baltean**, A. Neculae, « Analysis of the convective-diffusive transport equation of the dopant in the neighbourhood of the growth interface in the context of Bridgman-Stockbarger crystal growth configuration », *Second International Conference on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace*, S. Sivasundaram (Ed.), European Conference Publications, Cambridge (UK), Vol.1 pp.63-72, 1999.

15. **D.Baltean**, T. Lévy, S. Balint, « Mass transport by convection and diffusion », *Proceedings of the Ninth International Symposium on Continuum Models and Discrete Systems*, 28 june-3 july 1998, Istanbul (Turkey), Vol. 32, pp. 82-90, 1998.

16. **D. Baltean**, T. Lévy, S. Balint, « Dispersion of a solute in a periodic porous media », *Proceedings of the International Conference on Analysis and Numerical Computations of Solutions of Nonlinear Systems Modelling Physcal Phenomena, especially Nonlinear Optics, Inverse Problems, Mathematical Material Science and Theoretical Fluid Mechanics*, 19-21 May 1997, University of the West Timisoara (Romania), pp. 451-466, 1997.

17. S.Balint, A. M. Balint, **D. Baltean**, A. Neculae, «The heat and mass transport by convection and diffusion during quartz crystal growth by hydrothermal system », *Proceedings of the International Conference on Analysis and Numerical Computations of Solutions of Nonlinear Systems Modelling Physcal Phenomena, especially Nonlinear Optics, Inverse Problems, Mathematical Material Science and Theoretical Fluid Mechanics*, 19-21 May 1997, University of the West Timisoara (Romania), pp. 225-239, 1997.

18. A. M. Balint, **D. Baltean** , « Solitary wave solutions for the one dimensional flow of a polytropic gas through a homogenous porous medium », *Bulletins for Applied Mathematics (BAM)*, Technical University of Budapest, 1259/96 (LXXX), pp. 219-230, 1996.

- *Communications dans des congrès nationaux à comité de lecture et actes publiés*

1. O. Hireche, C. Weisman, **D. Baltean-Carlès**, V. Daru, Y. Fraigneau, « Numerical study of the effects of natural convection in a themoacoustic device, *Congrès Français de Mécanique*, Brest, 2019.

2. D.H. Truong, C. Weisman, **D. Baltean-Carlès**, F. Jebali Jerbi et J. Rémus, « Etude du démarrage du son produit par un instrument de musique thermoacoustique : le thermophone. », *Congrès Français d'Acoustique*, Le Mans, 2016.

3. V. Daru, H. Bailliet, **D. Baltean-Carlès**, I. Reyt et C. Weisman, « Transitoire et changement de régime des écoulements redressés de Rayleigh à forts niveaux : Etudes numérique et expérimentale », *Congrès Français d'Acoustique*, Le Mans, 2016.

4. V. Daru, **D. Baltean-Carlès**, I. Reyt et C. Weisman, « Streaming non linéaire : rôle de la composante radiale acoustique », *Congrès Français d'Acoustique*, Le Mans, 2016.

5. I. Reyt, H. Bailliet, **D. Baltean-Carlès**, V. Daru, J-C. Valière, C. Weisman, « Influence de la propagation non-linéaire et de l'inertie sur le vent acoustique », *Congrès Français de Mécanique*, Bordeaux, 2013.

6. C. Weisman, **D. Baltean-Carlès**, P. Le Quéré, L. Bauwens, « Modélisation nonlinéaire des écoulements et transferts de la cellule active d'un moteur thermoacoustique », *Congrès Français de Mécanique*, Besançon, 2011.

7. V. Daru, **D. Baltean-Carlès**, G. Gandikota, C. Weisman, « Etude numérique du vent acoustique non linéaire dans un résonateur à ondes stationnaires », *Congrès Français de Mécanique*, Besançon, 2011.

8. C. Weisman, **D. Baltean-Carlès**, P. Le Quéré, L. Bauwens, « Modèle faible Mach et simulations numériques 2D de l'amplification d'onde thermoacoustique », *Congrès Français d'Acoustique*, Lyon, 2010.

9. P. Debesse, **D. Baltean-Carlès**, F. Lusseyran, M.-X. François, « Analyse expérimentale des effets non linéaires dans les systèmes thermoacoustiques », *CFM 2007, 18ème Congrès Français de Mécanique*, Grenoble, France: 2007.

10. P. Debesse, **D. Baltean-Carlès**, F. Lusseyran, M.-X. François, « Adaptation de la vélocimétrie par images de particules à l'analyse des effets non linéaires en thermoacoustique », *CFTL 2006. Congrès Francophone de Techniques Laser,* Toulouse, France, 2006.

11. P. Duthil, **D. Baltean-Carlès**, A. Bétrancourt, G. Defresne, M.-X. François, Z. B Yu., Q. Li, « Méthode de caractérisation acoustique d'éléments passifs », *CFA06, 8ème Congrès Français d'Acoustique*, Tours, France, 2006.

12. P. Duthil, **D. Baltean-Carlès**, A. Bétrancourt, M.X. François, J. Wu, Z. B. Yu, « Caractérisation des éléments de contrôle du champ acoustique dans les systèmes thermoacoustiques », *CFM 2005, 17-ème Congrès Français de Mécanique,* AFM Troyes, France, 29 août-2 septembre 2005.

- *Communications dans des congrès avec actes à diffusion restreinte*

1. C. Weisman, **D. Baltean-Carlès**, I. Delbende, L. Ma, L. Bauwens, « Effect of a resistive load on the starting performance of a standing wave thermoacoustic engine », *Eurotherm Symposium 107, 3rd International Workshop on Thermoacoustics*, University of Twente, Enschede, The Netherlands, 2015.
2. O. Hireche, C. Weisman, **D. Baltean-Carlès**, L. Bauwens, M.-X. François and P. Le Quéré, « Numerical simulation of a thermoacoustic engine », *17th Annual Conference of the CFD Society of Canada,* Ottawa, Canada, 2009.

- *Communications dans des congrès sans actes diffusés*

3. V. Daru, **D. Baltean-Carlès**, C. Weisman, « A numerical study of Rayleigh streaming at high acoustic level », *Acoustofluidics*, Lille, France, 2018.
4. V. Daru, I. Reyt, **D. Baltean-Carlès**, C. Weisman, H. Bailliet, « Evolution of Rayleigh streaming flow velocity components in a resonant wave guide at high acoustic levels », *Acoustics'17*, Boston, USA, 2017.
5. **D. Baltean-Carlès**, V. Daru, C. Weisman, H. Bailliet, I. Reyt, « Numerical and experimental investigation of the role of inertia on acoustic Rayleigh streaming in a standing waveguide », *Acoustics'17*, Boston, USA, 2017.
6. O. Hireche, C. Weisman, **D. Baltean-Carlès**, M.-X. François, P. Le Quéré, L. Bauwens, « Numerical simulation of a thermoacoustic wave amplification », *Acoustics'08,* Paris, 2008.
7. A. Bétrancourt, T. Le Pollès, G. Defresne, D. **Baltean-Carlès**, P. Duthil, J.-P. Thermeau, M.-X. François, « Experimental validations of a new thermoacoustic simulation software CRISTA », *Acoustic'08,* Paris, 2008.

- *Autres : Colloques et séminaires sans actes diffusés*

1. V. Daru, **D. Baltean,** C. Weisman, H. Bailliet, I. Reyt, *Numerical investigation of acoustic streaming in standing waves*, *Thermoacoustic Hub Date Workshop*, Le Mans, France, du 30/05 au 01/06, 2018.
2. C. Weisman, **D. Baltean-Carlès**, F. Jebali Jerbi, D.H. Truong et J. Rémus, « Le Thermophone: Un moteur thermoacoustique particulier », *Journée Dynamique des Fluides*, Orsay, 2016.
3. C. Weisman, **D. Baltean-Carlès**, O. Hireche, K. Sodjavi, P. Le Quéré, « Modèle Faible Mach et simulations numériques 2D de l'amplification d'onde thermoacoustique »**,** *Journée Dynamique des Fluides*, Orsay, 2009.
4. **D. Baltean Carlès,** P. Debesse, F. Lusseyran, M.-X. François, «Méthodologie d'analyse par SVD appliquée aux champs PIV, dans un système thermoacoustique », *Journées du GDR Thermoacoustique : Métrologie pour les systèmes thermoacoustiques*, Poitiers 4-5 mai 2009
5. C. Weisman, **D. Baltean-Carlès**, P. Le Quéré, P. Duthil, « Convection naturelle en cavité contenant un empilement de plaques horizontales », *1ercolloque GDR 3058 Thermoacoustique,* Orsay, 2008.
6. C. Weisman, O. Hireche, **D. Baltean-Carlès**, P. Le Quéré, « Simulation de l'amplification d'onde thermoacoustique à l'aide d'un code Faible Mach », *Journée de la Fédération Transfert de Masse et de Chaleur,* Orsay, 2008.

7. **D. Baltean-Carlès**, A. Bétrancourt, G. Defresne, P. Duthil, J.P.Thermeau, M.X. François, « Sound Wave Cooling: a new thermodynamic process», *METIME 2005: Int. Conference on Thermal Engines and Environmental Engineering*, Galati, Romania, 3-4 june 2005.

8. **D. Baltean Carlès**, A. Bétrancourt, G. Defresne, P. Duthil, M.X. François, J Wu, Z.B. Yu, « La réfrigération thermoacoustique », *Journée SFT : Machines thermiques exotiques*, Paris, 8 déc. 2004.

Activités d'enseignement

J'ai débuté ma carrière d'enseignant-chercheur en 1995 en Roumanie, à l'Université de Timisoara, Faculté de Mathématiques, où j'ai été recrutée en tant que monitrice, puis assistante universitaire (1998) et maître de conférences (2000). J'ai donc débuté en enseignement en Roumanie où j'ai travaillé jusqu'en 2001. J'y ai enseigné dans des modules de modélisation en mécanique (mécanique du point matériel, mécanique du solide rigide, mécanique des milieux continus et mécanique des fluides) ainsi que dans des modules de mathématiques (équations aux dérivées partielles), aux niveaux équivalents de Licence et Master, avec une charge d'enseignement de 250h TD/an en moyenne.

J'enseigne différentes disciplines de la Mécanique et des Mathématiques pour la Mécanique à l'UPMC, devenue Sorbonne Université depuis 17 ans. J'ai d'abord été rattachée à l'UFR 923, puis celle-ci a été intégrée à l'UFR 919 (Ingénierie). Depuis janvier 2018, l'UFR est rattachée à la Faculté des Sciences et Ingénierie de Sorbonne Université.

Mes enseignements se sont centrés progressivement autour des méthodes mathématiques pour la mécanique mais j'ai enseigné dans des modules de mécanique très variés au fil des années : mécanique des milieux continus, mécanique des fluides, mécanique des solides, résistance des structures, mathématiques, thermodynamique et thermique, méthodologie en mécanique, initiation à la mécanique-énergétique et acoustique, méthodes numériques, orientation et insertion professionnelle en Licence (L1, L2 et L3) et mécanique des milieux continus-fluides, acoustique, techniques expérimentales et capteurs, énergétique et environnement, méthodes asymptotiques, suspensions et milieux diphasiques en Master (M1 et M2). J'ai assuré à la fois des cours, des travaux dirigés et des travaux pratiques expérimentaux et numériques, ainsi que l'encadrement de stages de recherche au niveau Licence et Master et le suivi de stages d'étudiants dans des laboratoires ou des entreprises extérieures. En Licence, les effectifs étudiants sont de l'ordre de 200-250 par unité d'enseignement (UE). Nous fonctionnons donc en équipes pédagogiques de 5-6 personnes (même 10 cette année en L2), constituées en majorité par des moniteurs ou ATER qu'il faut former à leur arrivée. Mon investissement dans une UE, même lorsque je n'en suis pas responsable, comprend donc toujours une part importante de réunions, de préparation en amont des documents (polycopiés, sujets de TD et de TP, corrigés), de réalisation et maintenance d'un site internet dédié, d'organisation des examens (rédaction des sujets et corrigés, surveillance, correction des copies, aide à la collecte des notes et participation aux jurys).

Ma spécialité première reste les Mathématiques. Je me suis donc investie et fait évoluer au fil des années les enseignements en Mathématiques pour la Licence de Mécanique. Je participe à tous les modules de mathématiques enseignés en Licence de Mécanique pour assurer une cohérence et avoir une vision globale de la formation mathématique de nos étudiants. J'ai participé en 2005 à la création des TD de mathématiques pour la Licence commune de Mécanique (Mécanique et Technologie) entre l'UPMC et l'ENS de Cachan (niveau L3). En 2009, j'ai pris en charge le cours (250 étudiants) d'équations aux dérivées partielles basé sur des méthodes variationnelles que j'ai adapté pour les étudiants de la Licence de mécanique. Ce module pose les bases des méthodes variationnelles pour les EDP elliptiques. Les méthodes sont appliquées dans le module de Mécanique de milieux continus enseigné en parallèle, l'objectif étant de familia-

riser les étudiants avec des méthodes avancées et de leur faire acquérir les bases mathématiques pour les méthodes numériques de résolution des EDP (par exemple la méthode des éléments finis) qui sont enseignées en Master. En 2010 j'ai pris la responsabilité d'un module optionnel de compléments de mathématiques en L3 (150 étudiants) qui avait pour but de renforcer l'enseignement en mathématiques et de mettre à niveau les étudiants provenant des différents parcours ou formations qui intégraient le L3 de Mécanique. Enfin, en 2014, j'ai participé à la création et à la mise en place d'un module de méthodes mathématiques pour la mécanique en L2 (250 étudiants), dont je suis responsable. Cette UE a été construite pour répondre aux besoins des collègues d'UE de spécialité : il est centré sur les équations différentielles ordinaires, les systèmes différentiels et les méthodes de résolution. J'ai assuré sur plusieurs années les cours d'Energétique (200 étudiants) dans l'enseignement d'introduction à la Mécanique en L1, en étant co-responsable du thème avec C. Weisman ou L. Martin Witkowski. L'investissement en L1 est très important pour faire découvrir aux étudiants les domaines de la mécanique et les attirer vers la formation de Licence en Mécanique.

En Master, je suis co-responsable avec Anne Mongruel d'un cours sur les milieux poreux et suspensions (caractéristiques des milieux poreux, différents modèles de milieux poreux, obtention des lois macroscopiques pour la filtration en milieux poreux, transport de chaleur/masse à travers un milieu poreux, dispersion par convection et diffusion en milieu poreux ; différentes méthodes d'obtention des équations effectives-macroscopiques) (2012-2019).

Je me suis également intéressée au devenir des étudiants, et j'ai participé aux enseignements d'orientation et d'insertion professionnelle en 2018 (niveau L2), organisés sous forme d'ateliers. Les étudiants y découvrent et étudient les métiers de la mécanique, et sont formés à l'élaboration d'un projet personnel et professionnel, à la rédaction de CV et lettres de motivation.

J'ai également encadré au LIMSI plusieurs stagiaires (5 stages L2/L3, 6 stages M1, 5 stages M2) sur des sujets de recherche accessibles aux étudiants.

En 2015, l'Université a mis en place une nouvelle maquette Majeure/mineure pour les niveaux L2 et L3. Les étudiants ont donc la possibilité de s'inscrire en L2 dans un parcours monodisciplinaire ou bi-disciplinaire, où la mécanique est associée avec la physique, les mathématiques, l'informatique, l'électronique, la biologie, la chimie, les sciences humaines et sociales. Ainsi, j'ai participé à la mise en place des enseignements de mathématiques de la nouvelle maquette, travail que j'ai poursuivi en 2018 pour la maquette qui sera mise en place en 2020.

Depuis 2017 je fais partie de l'équipe de direction de la Licence de Mécanique, ayant la responsabilité des parcours intensifs L2-L3 avec la Mécanique (mono-disciplinaire et double majeure avec la Physique, les Mathématiques et l'Electronique). Je participe aux inscriptions pédagogiques, à la réorientation de certains étudiants, au suivi individualisé des étudiants, à la préparation et tenue des jurys mono- et bi-disciplinaires, aux journées portes ouvertes aux lycéens et journées d'information à nos étudiants (JOR).

J'ai contribué également aux évolutions de la licence par ma participation aux réunions du Conseil de Département de Licence de Mécanique/Electronique entre 2015 et 2017.

J'ai été Titulaire de la prime de responsabilités pédagogiques pour investissement en licence PIL de l'UPMC, pour les années 2013-15 et 2015-17 et je suis Titulaire de la prime d'investissement unique PIU de Sorbonne Université depuis septembre 2019 pour l'ensemble des activités en eseignement, recherche et pédagogiques.

Présentations des travaux de recherche

Entre 1996 et 1999 j'ai effectué ma thèse de doctorat en cotutelle au Laboratoire de Modélisation en Mécanique de l'UPMC et à la Faculté de Mathématiques de l'UVT de Roumanie, sur la dispersion d'un contaminant passif dans les milieux poreux. Le but était d'obtenir les équations macroscopiques de transport par convection et diffusion d'un traceur passif dans un milieu poreux périodique. Je me suis alors familiarisée avec les méthodes asymptotiques et en particulier avec l'homogénéisation des milieux périodiques, les développements en échelles multiples et l'approximation par éléments finis pour le calcul des coefficients macroscopiques. J'ai continué mon travail de recherche à l'UVT sur l'application des travaux de thèse à la modélisation de la zone de précristallisation en croissance cristalline.

J'ai intégré l'UPMC en 2002, pour faire mon travail de recherche au Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur (LIMSI) dans le domaine de la thermoacoustique (équipe de M.X. François). J'ai donc commencé par une conversion thématique à la fois concernant le sujet de recherche et les méthodes. Je me suis formée pour faire des expériences sur les machines thermoacoustiques du laboratoire. Une introduction générale à la thermoacoustique et aux machines thermoacoustiques fait l'objet du premier chapitre de ce mémoire. La première étude importante a été expérimentale, sur les écoulements redressés appelés aussi vent acoustique ou streaming, suivie des études de modélisation et simulation de moteurs thermoacoustiques idéalisés, pour revenir à un travail de modélisation et simulation du streaming non linéaire en 2010, auxquels s'ajoutent des études sur la convection naturelle dans les mêmes systèmes thermoacoustiques.

Les axes de recherche développés au LIMSI sont détaillés ci-dessous :

Streaming acoustique

Les études sur le streaming acoustique se sont déroulées en deux étapes présentées ci-dessous chronologiquement :

I. Étude expérimentale (par PIV) des effets non linéaires de streaming dans les systèmes thermoacoustiques.

L'objectif de cette étude (2005-2009) a été de caractériser le champ de vitesses acoustiques (de l'ordre du m/s) dans un résonateur contenant un générateur d'onde thermoacoustique et de mettre en évidence les écoulements secondaires (de l'ordre du cm/s ou inférieur) générés par les contraintes de Reynolds près de la paroi. Ces écoulements secondaires (streaming) peuvent être pénalisants dans les machines thermoacoustiques car ils sont une source de transport convectif de chaleur, diminuant ainsi leur efficacité. Nous avons utilisé une métrologie basée sur la vélocimétrie par images de particules (PIV), adaptée aux systèmes sous pression (entre 7bar et 15bar) et températures allant jusqu'à 900 K, comme c'est le cas d'un générateur d'ondes thermoacoustique de puissance. La PIV a été intégrée au coeœur de plusieurs procédures d'acquisition qui ont été testées, chacune nécessitant une adaptation des post-traitements. Une méthode de reconstruction du champ acoustique à partir de champs PIV fortement sous-échantillonnés a

été développée, basée sur une technique de projection par décomposition en valeurs singulières (SVD) et réarrangement des vitesses suivant leur phase. Le calcul du champ de vitesse moyenné en temps montre l'existence d'un écoulement continu avec une topologie différente de celle de Rayleigh-Schlichting (caractéristique pour un résonateur vide et à faible niveau acoustique), suggérant un caractère tridimensionnel (thèse P. Debesse, en collab. F. Lusseyran, M.-X. François).

II. Streaming acoustique nonlinéaire.

J'ai démarré en 2010 une collaboration très fructueuse avec V. Daru et C. Weisman sur la modélisation théorique et la simulation numérique du streaming acoustique en guide d'onde stationnaire. Les premiers résultats des simulations numériques ont mis en évidence une déformation à fort niveau acoustique avec apparition de nouvelles cellules au centre du guide, en très bon accord avec les expériences réalisées à l'Institut Pprime (Poitiers) (collab. H. Bailliet, I. Reyt). Cela a permis d'établir une collaboration durable avec H. Bailliet. Pour déterminer la cause de l'apparition de cette nouvelle cellule nous avons d'abord analysé la dynamique du streaming en enlevant les effets thermiques, choix motivé par les très faibles écarts de température dans l'expérience. Une étude comparative avec un écoulement en cavité entraînée a permis de conclure que, à fort niveau acoustique, les effets d'inertie sur le streaming restent faibles et ne sont pas responsable du changement de régime. L'analyse de l'évolution du streaming avec l'acoustique, pour un écoulement isentropique, montre l'existence de deux régimes d'écoulement de streaming, dû à l'interaction non linéaire entre l'acoustique et le streaming. Par ailleurs, nous avons développé une solution analytique pour l'écoulement de streaming à faible niveau acoustique, en isentropique, ce qui nous a permis d'étudier l'influence de chaque terme source acoustique sur la vitesse de streaming et de montrer qu'un des termes source, généralement négligé dans la littérature, peut générer des nouvelles cellules de streaming contra-rotatives, pour certaines valeurs du rapport de forme de guide d'onde. Récemment, nous avons repris les études concernant l'influence de la température sur les streaming dans les deux régimes de streaming.

Thermoacoustique : modélisation et simulation d'un moteur thermoacoustique.

Depuis 2004, je travaille en étroite collaboration avec C. Weisman sur la modélisation théorique du phénomène thermoacoustique de conversion d'énergie. Nous avons mené une analyse asymptotique qui a permis de dégager les conditions de couplage entre l'écoulement dans le stack et le champ acoustique dans le résonateur (collab. L. Bauwens, Univ. de Calgary). Le code faible Mach développé au LIMSI (P.L. Quéré) a été adapté (thèse O. Hireche, collab. USTO Algérie) pour une étude des effets de couplages au sein de la cellule active thermoacoustique (stack+échangeurs de chaleur) lors du fonctionnement moteur de la cellule. Le démarrage et la saturation d'un moteur thermoacoustique idéalisé one été ainsi simulés. Nous avons ensuite déterminé numériquement le seuil de l'instabilité thermoacoustique et étudié l'influence de la charge sur le déclenchement d'un moteur thermoacoustique (thèse L. Ma, collab. C. Weisman et I. Delbende). Les compétences développées ont nourri récemment une collaboration sur une application musicale dans le cadre d'un projet Art&Sciences Thermophonia (collab. J. Rémus - Ipotam Mécamusique).

Couplages fluide-poreux.

Dans l'étude des machines thermacoustiques, je me suis également intéressée à la description des écoulements de convection, généralement négligés. Le calcul de l'écoulement dans stack-moteur thermoacoustique, modélisé comme un empilement de plaques parallèles horizontales,

encadré par deux échangeurs de chaleur (collab. P. Duthil, C. Weisman, P. Le Quéré) a montré que le phénomène global de convection s'accompagne éventuellement de transferts convectifs de plus petite échelle, localisés entre deux plaques. Depuis le démarrage de l'ANR TACOT (Thermo-Acoustic Cooler for On road Transportation, Défi Energie Propre, Sûre et Efficace , 2017-2020, Porteur Hélène Bailliet institut P', LIMSI partenaire), nous avons repris les études de convection en cavité fluide, partiellement remplie de poreux pour estimer les écoulements convectifs dans une machine thermoacoustique. Les résultats des simulations, en excellent accord avec l'expérience à P', montrent que ces écoulements sont tridimensionnels et du même ordre de grandeur que le streaming acoustique, voire plus grand (collab. O. Hireche, C. Weisman, V. Daru, Y. Fraigneau, H. Bailliet, I. Ramadan).

Depuis 2002, l'ensemble de mes travaux de recherche a donné lieu à 16 articles dans des revues internationales reconnues (dont 5 "special issues"), 1 revue nationale, 11 actes de congrès internationaux et 11 actes de congrès nationaux. J'ai participé à l'encadrement de trois thèses, deux post-doc et encadré 4 stages L3, 6 stages M1, 4 stages M2.

Chapitre 1

Introduction générale aux machines thermoacoustiques

J'ai intégré l'UPMC en 2002, pour faire mon travail de recherche au Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur (LIMSI) dans le domaine de la thermoacoustique dans l'équipe de M.X. François. Mes expériences de recherche passées concernaient la modélisation des écoulements et le transport de masse en milieux poreux et la propagation acoustique en milieux poreux. J'ai donc commencé par une conversion thématique à la fois concernant le sujet de recherche et les méthodes. Tout d'abord, je me suis familiarisée avec la thermoacoustique en commençant par le manuel de base de tout thermoacousticien, publié en 2000 par G. Swift ([78]), et je me suis formée à la recherche expérimentale sur les machines thermoacoustiques du laboratoire. Ma première étude importante en thermoacoustique concerne l'analyse des écoulements de streaming prenant place dans une machine thermoacoustique réaliste, de forte puissance, existante au laboratoire. J'aborderai ce sujet plus en détail dans le chapitre suivant, entièrement dédié au streaming. Tout ceci a été un grand changement dans mon travail de recherche, à la fois de sujet, complètement nouveau pour moi, d'environnement et de méthodes de travail. J'ai donc regroupé dans ce premier chapitre une brève présentation du phénomène thermoacoustique, des machines thermoacoustiques, ainsi que mes premiers pas dans la recherche expérimentale.

1.1 Description de l'effet thermoacoustique

La thermoacoustique concerne les phénomènes qui résultent de l'interaction entre un flux de chaleur et une onde acoustique. Le procédé thermoacoustique permet la conversion de l'énergie thermique en énergie acoustique (moteur thermoacoustique) mais également le pompage de la chaleur grâce à de l'énergie acoustique (réfrigérateur thermoacoustique). Le processus prend place dans la couche limite qui se développe au voisinage de la paroi solide dans un fluide soumis à une onde acoustique. Les premières observations de ce phénomène ont été faites par les souffleurs de verre il y a des siècles, qui entendaient un son lorsqu'ils chauffaient les parois d'un tube de verre. Il se retrouve également dans le rituel de Kibitsu-no-ō-kama-san (la bouilloire chantante en fer), une cérémonie divinatoire qui se pratiquait dans le sanctuaire shinto Kibitsu-jinja, à Okayama au Japon. Le chant de la bouilloire dans laquelle étaient préparées les offrandes alimentaires provient d'une conversion de la chaleur en vibrations (voir figure 1.1).

Lord Rayleigh a été le premier à expliquer qualitativement le phénomène thermoacoustique [64] observé par les souffleurs de verre il y a de siècles : si un gaz qui oscille absorbe de la chaleur pendant la phase de compression et cède de la chaleur pendant la phase de détente, alors l'oscillation est amplifiée : c'est le mode de fonctionnement moteur. Le critère de Rayleigh

FIGURE 1.1 – Souffleur de verre (gauche). La bouilloire chantante (droite).

conditionne donc l'apparition de l'instabilité thermoacoustique à la présence d'un déphasage entre les fluctuations de pression et celles de température qui ont lieu dans la couche limite thermique en proche paroi. Ceci peut être réalisé si la paroi solide est soumise à un gradient thermique très important, supérieur à une valeur critique. Au contraire, si le gaz qui oscille absorbe de la chaleur pendant la phase de détente, et cède de la chaleur pendant la phase de compression, alors l'oscillation est amortie et il y a un transport de chaleur thermoacoustique : le gaz situé à des faibles amplitudes de pression voit sa température augmenter, tandis que le gaz situé à des fortes amplitudes de pression est refroidi. Cette description lagrangienne dans laquelle chaque particule fluide effectue un cycle thermodynamique en même temps que son cycle acoustique est une vision simplifiée. L'effet thermoacoustique est un effet moyen (sur la période acoustique), dont les conséquences sont visibles dans tout le fluide au bout de nombreuses périodes acoustiques. Sur la figure 1.2 on a représenté le résultat d'un calcul DNS de la température moyenne dans un gaz en oscillation à l'intérieur d'un résonateur fermé à ses extrémités avec des parois isothermes. La figure montre seulement la moitié supérieure du domaine, entre l'axe du résonateur (en bas) et la paroi du résonateur (en haut) et les nœuds de vitesse acoustique (extrémités gauche et droite) sur une demi-longueur d'onde. Les vecteurs représentés correspondent au flux de chaleur thermoacoustique, dirigé du maximum d'amplitude de vitesses acoustiques (=nœud de pression acoustique) vers le minimum (nœud) de vitesses acoustiques (=maximum d'amplitude de pression). L'intensité maximale de ce flux se situe à une distance égale à une épaisseur de couche limite. Le gaz au milieu du résonateur se refroidit (alors que c'est la position où l'amplitude de l'oscillation de vitesse est maximale) tandis que le gaz aux extrémités se réchauffe. Si la paroi n'est pas forcée de rester isotherme, alors on verra un gradient de température s'établir dans la paroi, dans le même sens que celui du gaz. La même chose se produit à proximité d'une plaque solide dans un fluide oscillant. Etant donné

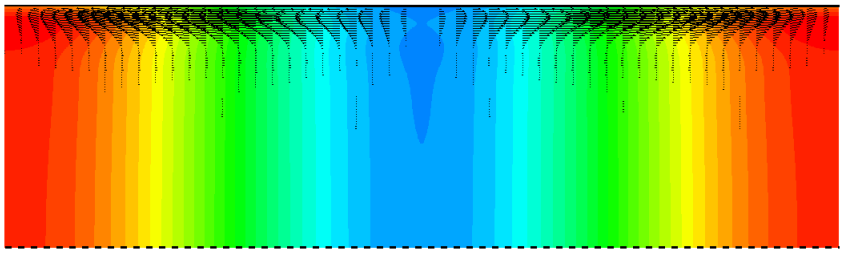


FIGURE 1.2 – Champ de température moyen et vecteurs du flux de chaleur thermoacoustique, dans un résonateur à onde stationnaire, sur une demi-longueur d'onde

que l'effet thermoacoustique est un effet de couche limite, si on veut augmenter l'effet on doit empiler un grand nombre de plaques solides. On obtient ainsi l'élément constitutif de base pour une machine thermoacoustique : le stack, qui est un milieu poreux responsable de la conversion d'énergie. Si on ajoute deux échangeurs de chaleur, on a construit une machine thermique.

1.2 Les éléments constitutifs d'une machine thermoacoustique

Une machine thermoacoustique est constituée typiquement d'un milieu poreux solide (empilement de plaques ou de grilles), placé entre deux échangeurs de chaleur, l'ensemble constituant ce qu'on appelle la cellule active, et un résonateur qui joue le rôle de guide d'onde. Dans la figure 1.3 est représenté un schéma d'un générateur d'onde thermoacoustique (moteur). Le milieu poreux est maintenu sous un fort gradient de température à l'aide des deux échangeurs. Si la différence de température est supérieure à une valeur critique alors n'importe quelle perturbation est amplifiée et le gaz à l'intérieur du résonateur se met à osciller à la fréquence de résonance du système, via une instabilité thermoacoustique. La fréquence de l'onde entretenue par le maintien d'un gradient de température, tout au long du milieu poreux, est proche de la fréquence fondamentale de résonance propre du guide d'onde vide. Dans le sens inverse de la

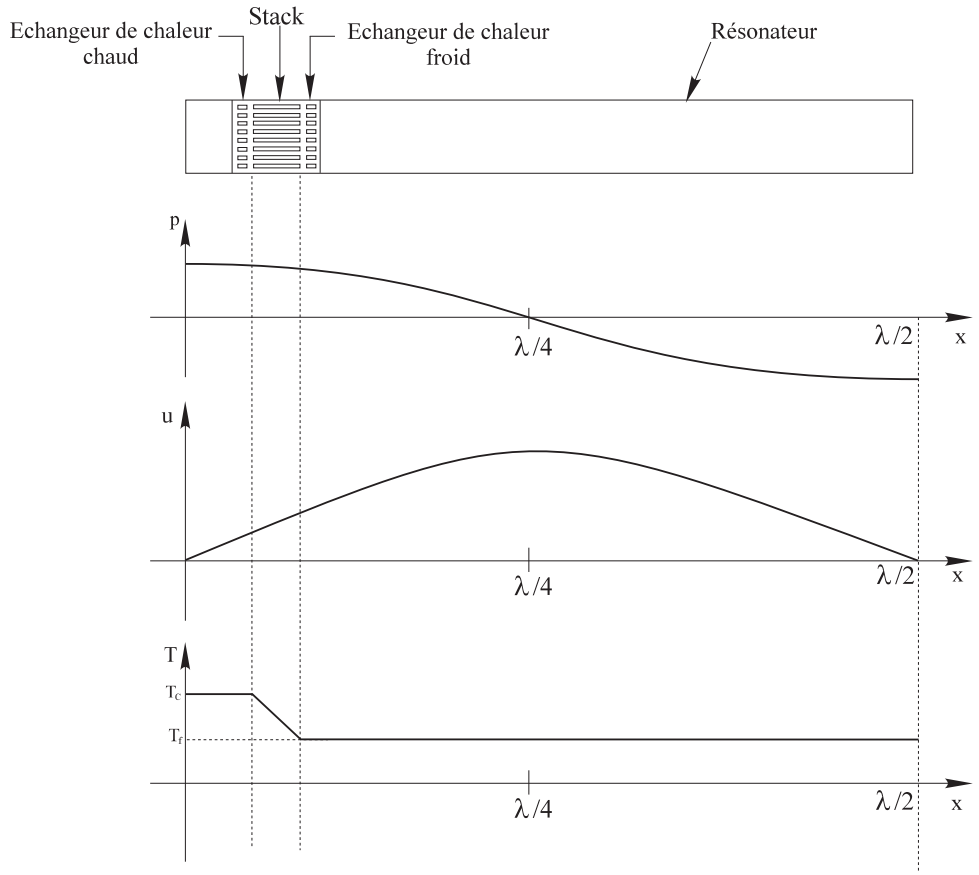


FIGURE 1.3 – Schéma d'un générateur d'onde thermoacoustique, système à ondes stationnaire. Amplitudes de pression et de vitesse, distribution de température moyenne dans le résonateur, λ désigne la longueur d'onde.

conversion, si on crée une onde à l'intérieur d'un résonateur à l'aide d'un haut-parleur, un pis-

ton mécanique ou encore un moteur thermoacoustique, et si on place une telle cellule active à un endroit bien choisi du résonateur pour avoir le maximum d'effet thermoacoustique, alors on va créer un gradient de température tout au long du milieu poreux grâce au transport de chaleur thermoacoustique effectué par le gaz. En fonction de l'architecture des systèmes, on aura des machines à ondes quasi-stationnaires (comme dans le schéma 1.3), où le tube fermé à ses deux extrémités impose des conditions limites spécifiques à une onde stationnaire, ou des machines à ondes progressives (si le résonateur est un tore) ou entre les deux pour des systèmes encore plus compliqués (voir figures 1.4) . Des efforts de recherche importants ont été consacrés à la mise au point de machines thermoacoustiques depuis 1980 d'abord dans l'équipe de G. Swift (Los Alamos) et ensuite partout dans le monde. En effet, le développement de telles machines est motivé par leur simplicité et leur fiabilité (absence de composants mécaniques mobiles) et par leur caractère non-polluant : elles n'utilisent pas de gaz à effet de serre. Ils ont été construits au début pour des applications cryogéniques [78, 22]. Les moteurs thermoacoustiques peuvent utiliser des énergies non fossiles, comme l'énergie solaire [1]. Couplés à des réfrigérateurs thermoacoustiques, ils peuvent être utilisés pour le refroidissement des composants électroniques sur des systèmes embarqués dans l'espace : satellites, station spatiale, ou pour la climatisation des avions [86]. Les systèmes thermoacoustiques peuvent aussi être utilisés dans les procédés industriels pour récupérer la chaleur perdue à basse température, puis la réintroduire dans le procédé [74], ou encore pour la cogénération : utilisation de la puissance acoustique produite par un moteur thermoacoustique pour une production d'électricité [8].

1.3 Outils de modélisation : la théorie linéaire de Rott

La difficulté principale pour décrire les oscillations du gaz dans des géométries variables (passages étroits et larges), en présence d'un gradient de température important dans la cellule active (stack/régénérateur), réside dans l'existence des échelles spatiales et temporelles très différentes : épaisseur des couches limite (thermique et visqueuse), du même ordre de grandeur que la taille du pore (stack) ou petite devant la taille du pore (régénérateur), les deux très petites devant le diamètre du résonateur et surtout devant la longueur d'onde, la période acoustique très petite devant le temps caractéristique de conduction de la chaleur. La théorie linéaire classique propose une modélisation quasi 1D, à partir des équations de Rott (1969-1980) [69], étendues et utilisées par Swift [78], [63], [4] par la suite. Le modèle de Rott est basé sur une approximation acoustique linéaire et une approximation de couche limite des équations de Navier-Stokes compressibles, en présence d'un gradient de température moyen. Les équations approchées sont moyennées sur la section pour obtenir 3 équations différentielles dans le domaine fréquentiel. Les équations relient les fluctuations de pression, vitesse, température, l'énergie totale et la fréquence de l'onde. Elles utilisent les conditions initiales au repos du gaz ainsi que les paramètres thermophysiques du gaz et du solide. La géométrie de chaque élément de la machine thermoacoustique (stack, échangeurs de chaleur, résonateur etc.) est prise en compte à travers sa porosité et des facteurs de forme traduisant les dissipations visqueuses et thermiques.

La théorie linéaire permet de calculer le champ acoustique, d'analyser les performances des machines et de prédire le seuil de déclenchement de l'onde pour un système donné, mode par mode. Ces équations sont utilisées dans des codes 1D pour simuler une machine entière, comme c'est le cas du plus connu DeltaEC [81]. Les codes 1D sont employés par la communauté scientifique thermoacoustique pour le dimensionnement des machines. Une très bonne connaissance pratique des machines est néanmoins nécessaire pour utiliser correctement ces codes.

1.4 Phénomènes limitant l'efficacité des systèmes - les axes de recherche

La théorie linéaire a plusieurs limites : les simulations des codes 1D sont faites pour une seule fréquence, les transitoires ne sont pas décrits (seulement le régime périodique), les non linéarités hydrodynamiques ou acoustiques ne sont généralement pas prises en compte et les effets multidimensionnels sont partiellement pris en compte (via les coefficients thermovisqueux). Les codes 1D donnent satisfaction dans le cas des fluctuations de faible amplitude, tant que les effets non linéaires restent assez petits, mais ils donnent des résultats faux, parfois avec plus de 50% d'erreurs, pour des grandes valeurs de drive ratio (rapport entre l'amplitude de la pression acoustique et la pression moyenne) nécessaires dans les applications énergétiques. Les efforts de recherches fondamentales des dernières années ont été concentrés sur plusieurs axes :

Les effets non linéaires de **vent acoustique (streaming)** représentent un écoulement secondaire continu tout au long du résonateur mais aussi à l'intérieur de la cellule active. Pour des onde de forte intensité, le vent acoustique constitue une source de transport convectif de chaleur entre les deux échangeurs de chaleur, qui diminue l'efficacité des machines.

Les **effets multidimensionnels** peuvent être importants localement dans la cellule active thermoacoustique pour un fonctionnement à de fortes amplitudes acoustiques. Les effets de bord thermiques et hydrodynamiques, aux extrémités du stack, entre le stack et les échangeurs de chaleur, peuvent influencer les échanges thermiques et donc le fonctionnement des échangeurs de chaleur.

Les **effets** de jet associés à chaque changement brusque de géométrie (comme par exemple en sortie des échangeurs) vont créer un streaming du même ordre de grandeur que la vitesse acoustique, dissipant ainsi de l'énergie.

La **génération d'harmoniques** engendrées pour des ondes acoustiques de forte intensité, suite à la propagation acoustique non linéaire dans le résonateur est un phénomène dissipatif qui nuit à la conversion d'énergie. Une partie de l'énergie acoustique du mode fondamental est transférée vers les autres modes par cascade harmonique et ne sert plus la conversion acoustique $\leftrightarrow$ thermique.

La **convection naturelle** peut être à l'origine des écoulements continus rapides pour des systèmes de grande taille, dans les parties de la machine où il y a des cavités fluides soumises à des différences de température très grandes (de l'ordre de plusieurs centaines de degrés). Ces écoulements convectifs peuvent distordre fortement le champ de température initial, inhibant ainsi le démarrage du moteur. Ils peuvent également affecter l'efficacité de la machine surtout si les vitesses acoustiques sont très faibles dans la cellule active en régime permanent périodique, comme c'est le cas des régénérateurs.

1.5 Machines thermoacoustiques au LIMSI

L'équipe de recherche du LIMSI travaillait dans ce domaine depuis les années 1995-1996, dans un contexte où la thermoacoustique et le développement des machines thermoacoustiques était un domaine de recherche assez nouveau en France dans les années 2000. Les plus grands progrès dans la compréhension des phénomènes fondamentaux et dans le développement des machines avaient été faits aux USA, dans l'équipe de G. Swift, au laboratoire LANL. L'équipe thermoacoustique fondée par M.-X. François comprenait plusieurs doctorants (E. Bretagne, P. Duthil. A. Betrancourt) et deux chercheurs permanents (F. Jebali, et G. Defresne), qui travaillaient sur le développement des machines de fortes puissances, tant dans leur conception que dans leur étude expérimentale et numérique (développement des codes 1D). A cette équipe

à coloration "expérimentale" s'ajoutent deux numériciens C. Weisman et I. Delbende qui collaboraient à l'activité de recherche transversale "Thermoacoustique" avec des études plus fondamentales sur le pompage de chaleur thermoacoustique via une simulation numérique multidimensionnelle à l'intérieur du stack pour l'un, et sur une étude numérique d'instabilité thermoacoustique pour l'autre. Au début de ma prise de fonctions j'ai été associée à l'équipe expérimentale, tout en faisant le lien avec les numériciens. Je me suis donc intéréssée à tous les aspects de la recherche en thermoacoustique qui se déroulait au LIMSI.

Le but de l'équipe "expérimentale" était d'avoir des outils pour concevoir et prédire le comportement d'une machine selon un cahier des charges donné, d'augmenter l'efficacité des machines, pour ensuite faire un transfert de technologie vers l'industrie. Trois codes 1D (Crista, Margo, et TADesign), qui modélisent les machines dans leur ensemble, étaient en cours de développement et plusieurs machines thermoacoustiques avaient été construites. Les codes 1D sont basés sur l'approximation acoustique linéaire de Rott (1969) tout comme le code DeltaEC développé à Los Alamos par Swift et Ward. Dans les codes classiques ces équations sont intégrées numériquement, en fonction de la coordonnée de la position axiale, la géométrie étant définie comme une succession de segments, avec des conditions de raccord à la jonction entre deux segments. En se basant sur ce modèle et à l'aide d'une analyse de stabilité linéaire, le code Margo prédit la condition de démarrage d'un moteur thermoacoustique (le gradient thermique critique) et permet de construire des courbes marginales dans l'espace gradient critique, pression moyenne pour chaque mode instable, mode par mode. Le code Crista permet de prédire le champ acoustique partout dans une machine thermoacoustique, pour un certain nombre de paramètres de fonctionnement fixés. Enfin, le code TADesign permet de dimensionner tout simplement une machine, en fonction d'un cahier des charges.

Les résultats obtenus ont conduit à la publication de deux brevets (François et Bretagne 2002, Bretagne et François 2004) et à la réalisation de plusieurs bancs expérimentaux (voir figure 1.4) : un moteur à ondes stationnaires, un moteur à ondes progressives, et une machine tritherme, couplant un moteur à ondes stationnaires à deux types de systèmes de pompage de chaleur : soit un régénérateur et un tube à gaz pulsé, séparés par trois échangeurs de chaleur, fonctionnant avec une onde majoritairement progressive, soit une cellule réfrigérante constituée d'un stack entre deux échangeurs de chaleur fonctionnant avec une onde majoritairement stationnaire.

Ces différentes machines fonctionnent avec des ondes de pression de forte amplitude (de l'ordre de 10^4 Pa jusqu'à 10^5 Pa ou plus) et des puissances acoustiques de l'ordre de $100-200$ W acoustiques. Elles ont servi pour étudier des systèmes thermoacoustiques dans des configurations variées et tester ainsi les codes 1D, le but étant de chercher des configurations optimisées de point de vue de l'efficacité. Les maquettes expérimentales pour des refrigérateurs thermoacoustiques ont montré que les régénérateurs fonctionnant avec une onde progressive sont plus performants que ceux à onde stationnaire. Les températures froides atteintes ont été de -90° C (configuration TGP= tube à gaz pulsé) et de -110° C (configuration boucle de rétroaction). Le savoir faire a été utilisé pour la construction d'un prototype de liquéfaction de gaz naturel (2005-2007) à l'IPNO (Institut de Physique Nucléaire d'Orsay). Ce démonstrateur de forte puissance est un système de réfrigération entièrement thermoacoustique, qui permet d'extraire une puissance frigorifique de l'ordre de 2 kW, à une température froide de 120 K au niveau du réfrigérateur thermoacoustique. Le réfrigérateur est couplé à un générateur d'ondes thermoacoustiques, la puissance acoustique disponible étant de presque 15 kW.

Mes premiers pas expérimentaux ont été dans l'accompagnement de l'équipe à la fois pour la construction des différentes composantes des machines, utilisées pour modifier les architectures acoustiques des systèmes, et dans l'apprentissage des différentes métrologies utilisées. J'ai participé à plusieurs études caractérisant les systèmes déphaseurs qui sont très importants

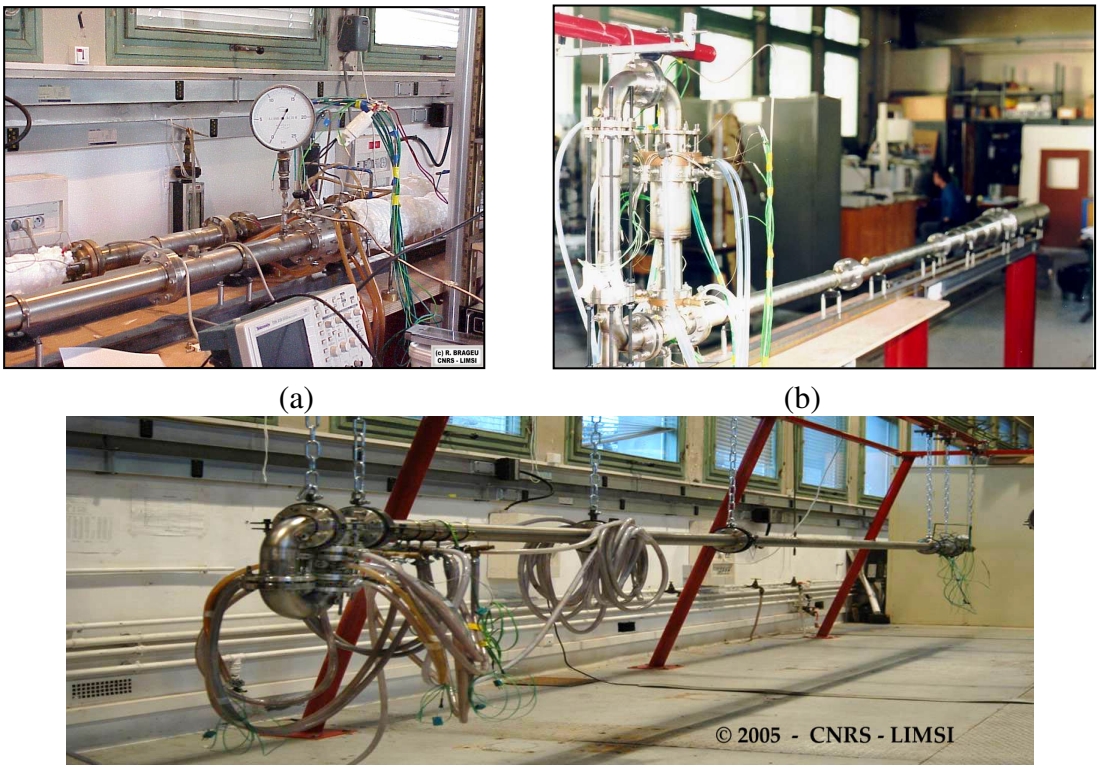


FIGURE 1.4 – Quelques réalisations du laboratoire : a) moteur à ondes stationnaires, b) moteur à ondes progressives, c) machine tritherme.

dans l'optimisation de la conversion d'énergie effectuée dans les machines thermoacoustiques résonantes. Les systèmes déphaseurs sont constitués par l'assemblage de vannes, tubes fins et réservoirs. Dans l'analogie electro-acoustique, ces éléments jouent le rôle de résistance, inertance, respectivement capacitance fluidiques, chacune caractérisée par son impédance acoustique, fonction de la géométrie et des caractéristiques de l'onde. Ils modifient le champ acoustique localement, de sorte que le déphasage entre vitesse et pression acoustiques soit celui désiré pour un fonctionnement optimal de la machine. Plus précisément, dans les machines thermoacoustiques trithermes, un moteur à onde stationnaire (plus robuste et fiable quand au démarrage de l'onde) est couplé à un réfrigérateur de type régénérateur, fonctionnant avec une onde progressive (plus performant en terme de conversion d'énergie). L'utilisation d'un générateur thermoacoustique d'onde permet d'imposer une condition de résonance acoustique à l'ensemble du système. Une description complète peut alors être menée de manière simple à travers une analogie électrique dans l'espace fréquentiel selon la théorie des lignes. La tension et le courant représentent alors les paramètres hydrodynamiques pression P et débit massique U du système. À chaque élément peut donc être associée une impédance acoustique, fonction de ses paramètres géométriques et impliquant une caractéristique de propagation.

Le système déphaseur, bien placé dans le résonateur, modifie le déphasage entre vitesse et pression de sorte qu'il soit proche de 0 dans le régénerateur, comme dans une onde progressive pure, pour que ce dernier puisse fonctionner de manière optimale.

Si les tubes et les réservoirs sont bien caractérisés dans cette analogie électro-aoustique, les vannes sont moins bien caractérisées en écoulement oscillant. Les modèles existants sont linéaires et les vannes sont caractérisées par une impédance résistive dépendant du débit volumique et d'un coefficient de débit donné par les constructeurs. L'étude a porté sur la validation

expérimentale et numérique (avec DeltaE et Crista) du modèle simple de réseau de type RLC (dans l'analogie électrique), via des estimations et des mesures de pressions acoustiques tout au long du système RLC [30]. Le banc d'essai est constitué d'un générateur thermoacoustique à ondes stationnaires couplé à un réfrigérateur de type OIPTR (orifice inertance pulse tube refrigerator) et d'une charge dissipative de type RLC contenant la vanne. Cette charge est montée en dérivation par rapport au résonateur principal (cf. figure 1.5).

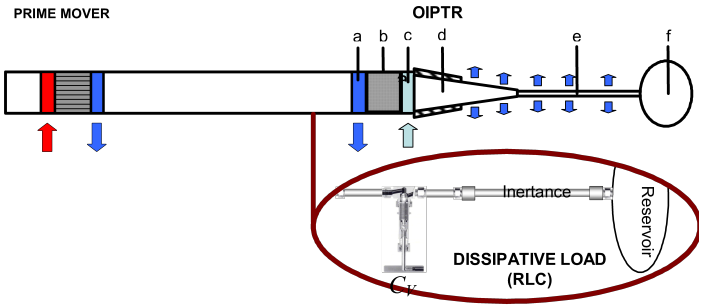


FIGURE 1.5 – Schéma du système expérimental. Zoom sur le système RLC

L'influence de la vanne sur le champ acoustique (pression acoustique et déphasage pression/vitesse déduit de la théorie des lignes) a été analysée pour différents drive ratio, allant de 0.7% à 2.7%. Le gaz utilisé est l'azote à une pression moyenne de 2.08×10^5 Pa. La fréquence de résonance du système est 23.7 Hz. On a trouvé que le modèle décrit bien le caractère dissipatif de la vanne pour des grandes valeurs du coefficient de débit (correspondant à des grandes angles d'ouverture de la vanne) et une variation du déphasage de $20°$ sur la plage de mesures. Pour des faibles valeurs du coefficient de débit, les mesures expérimentales s'écartent considérablement des prédictions. Une analyse du contenu harmonique du signal de pression montre que, pour ces coefficients de débit, le taux d'harmoniques pour le 1-er et le 2-ème harmonique atteint 25%, respectivement 45% pour le plus grand drive ratio, ce qui explique la défaillance du modèle linéaire.

Pour avoir des informations complémentaires sur l'impédance acoustique de la vanne et s'affranchir des cascades acoustiques, une méthode alternative a été utilisée. Elle était basée sur la mesure de la température ΔT_{crit} de déclenchement de l'onde, en variant la charge du moteur via l'ouverture de la vanne. Le modèle résistif de vanne, utilisé dans le code MARGO pour prédire le ΔT_{crit} montre un comportement similaire à celui observé expérimentalement. Ceci confirme la validité du modèle dans le cas d'un faible drive ratio pour toute la plage des valeurs du coefficient de débit de la vanne. Lors de cette étude j'ai fait des mesures du seuil de déclenchement des instabilités du moteur thermoacoustique à ondes stationnaires, dans la configuration présentée dans la figure 1.5. Le couplage avec cette charge change le comportement du moteur, comme on a pu le voir aussi en régime établi. De même, cette charge peut changer le seuil de démarrage. Cette méthode expérimentale a été développée dans la thèse d'E. Bretagne. Elle permet d'estimer le ΔT_{crit} du générateur à ondes stationnaires par des mesures du taux d'amortissement d'une perturbation que l'on applique au système, tout en maintenant le stack moteur sous un gradient de température proche du seuil mais légérement inférieur. Près du seuil, la variation du ΔT en fonction du taux d'amortissement est linéaire si bien que la valeur critique ΔT_{crit} est obtenue pour un taux d'amortissement nul. L'étude expérimentale d'identification du ΔT_{crit} en variant l'ouverture de la vanne a constitué aussi une première étude expérimentale effectuée au laboratoire, sur l'influence de la charge d'un moteur thermoacoustique à ondes stationnaires sur le seuil de démarrage.

Chapitre 2

Streaming acoustique

À partir de 2005 j'ai choisi de me pencher sur un phénomène fondamental limitant l'efficacité des systèmes thermoacoustiques : le vent acoustique, appelé aussi streaming acoustique. Le streaming acoustique est un écoulement continu créé par les contraintes de Reynolds dans un fluide sujet à une onde acoustique qui est atténuée par l'absorption de l'énergie acoustique, soit dans le volume fluide soumis à un faisceau émetteur d'ondes ultrasonores irrotationnelles (pour le streaming d'Eckart, appelé aussi Quartz wind), soit dans la couche limite de Stokes oscillante formée tout au long des parois solides en contact avec l'onde (streaming de Rayleigh). Le streaming d'Eckart apparait dans des systèmes dont les dimensions sont grandes par rapport à la longueur d'onde, tandis que le streaming de Rayleigh est un phénomène de couche limite et les dimensions des structures de cet écoulement sont du même ordre de grandeur que la longueur d'onde.

L'écoulement de streaming le plus connu en guide d'onde stationnaire, susceptible d'apparaître dans les résonateurs thermoacoustiques, est le streaming de Rayleigh et il fait l'objet de mes préocupations en recherche depuis 15 ans. Voici une brève description de cet écoulement.

2.1 Streaming de Rayleigh

Ce type de streaming porte le nom de lord Rayleigh car il a été le premier à développer une solution analytique décrivant les tourbillons stationnaires qui se forment dans un fluide soumis à une onde stationnaire, entre deux plans solides parallèles infinis et adiabatiques [64]. Il est le résultat des contraintes de Reynolds dans la couche limite de Stokes oscillante, formée tout au long des parois solides, comme déjà mentionné en début du chapitre. On note λ la longueur d'onde, ω la pulsation et ν la viscosité cinématique, et on fait l'hypothèse que l'épaisseur de couche limite visqueuse $\delta_\nu = \sqrt{2\nu/\omega}$ est très petite devant la hauteur du canal, les deux étant très petits devant la longueur d'onde. On note U_{ac} l'amplitude de la vitesse acoustique (prise au ventre de vitesse) et c_0 la vitesse du son. En faisant des développements asymptotiques en fonction du nombre de Mach acoustique $M = U_{ac}/c_0 \ll 1$, ensuite des approximations successives, puis une moyenne temporelle sur la période acoustique, on obtient les équations vérifiées par la vitesse moyenne de l'écoulement $\overline{\mathbf{u}}$ (responsable de l'écoulement de streaming) :

$$\mu \nabla^2 \overline{\mathbf{u}} = -\overline{\mathbf{F}} + \nabla \overline{p}. \tag{2.1}$$

Dans les équations précédentes $\bar{p}$ est la pression moyenne, du second ordre, μ est la viscosité dynamique, et $\overline{\mathbf{F}}$ est une somme de produits de quantités de premier ordre (quantités acoustiques) et de leurs dérivées, donc non linéaire par rapport à l'amplitude acoustique. $\overline{\mathbf{F}}$ représente les contraintes de Reynolds. Les quantités acoustiques intervenant dans les termes sources de $\overline{\mathbf{F}}$

sont solution des équations de l'acoustique linéaire. Les termes sources étant non linéaires, le streaming est en soi un phénomène non linéaire. Les équations régissant l'écoulement de streaming ont été obtenues dans le cas d'un écoulement de streaming lent et sont associées à une acoustique de faible amplitude. Elles sont donc linéaires. C'est la raison pour laquelle ce régime de streaming lent est souvent appelé régime linéaire. La solution des équations, loin des parois solides s'écrit en première approximation (en négligeant les termes en $e^{-(R-y)/\delta_\nu}$) sous la forme :

$$\begin{aligned} \bar{u}_{Rayleigh} &= -\tfrac{3U_{ac}^2}{16c_0}\sin(2kx)\left[1-3(\tfrac{y}{R})^2\right], \\ \bar{v}_{Rayleigh} &= -\tfrac{3U_{ac}^2}{8c_0}kR\cos(2kx)\left[\tfrac{y}{R}-(\tfrac{y}{R})^3\right], \end{aligned}$$

où $\bar{u}_{Rayleigh}$ et $\bar{v}_{Rayleigh}$ sont les composantes axiale et radiale de la vitesse de streaming (appelée aussi dans la littérature vitesse eulérienne de streaming), R la demi-hauteur du canal, x la coordonnée axiale, k le nombre d'onde complexe, et y la distance à l'axe du guide. Dans le cas de guides cylindriques la solution est légèrement modifiée [73] :

$$\begin{aligned} \bar{u}_{Rayleigh} &= -\tfrac{3U_{ac}^2}{8c_0}\sin(2kx)\left[1-2(\tfrac{y}{R})^2\right], \\ \bar{v}_{Rayleigh} &= -\tfrac{3U_{ac}^2}{8c_0}kR\cos(2kx)\left[\tfrac{y}{R}-(\tfrac{y}{R})^3\right], \end{aligned}$$

Ici R est le rayon du cylindre. Ces expressions montrent les caractéristiques principales du streaming de Rayleigh (appelé aussi streaming extérieur) : les vitesses adimensionnées sont du second ordre par rapport au nombre de Mach M, avec 4 tourbillons contrarotatifs étendus sur $\lambda/4$ dans la direction axiale . La vitesse de streaming transverse est bien plus petite que la vitesse axiale (dans le rapport $4R/\lambda$) et a un déphasage spatial de $\lambda/4$. Une solution complète du problème considéré par Rayleigh a été proposée plus tard par [83] et [53]. Les résultats sont regroupés dans ce que Lighthill ([43]) appelle la théorie linéaire du streaming RNW . En réalité, les tourbillons de Rayleigh sont engendrés par un écoulement moyen qui se développe dans les couches limites et qui consiste en 4 autres tourbillons contrarotatifs [72] . Un schéma récapitulatif de ces écoulements moyens de streaming, associés à une onde acoustique stationnaire en canal plan est représenté sur la figure 2.1, sur une étendue axiale d'une demi-longueur d'onde. Dans le contexte particulier d'applications en thermoacoustique [69, 55, 9, 37, 38] ont amélioré ces modèles linéaires pour prendre en compte l'influence d'un gradient de température axial et la dépendence des coefficients thermophysiques des variations de la température moyenne, dans le but de quantifier le transport de chaleur associé au streaming, ce qui est facteur limitant pour l'efficacité des machines thermoacoustiques. Dans ces études l'influence de la température reste limitée.

Pour des ondes de forte intensité, Menguy et Gilbert [47] ont montré que l'influence de l'inertie sur l'écoulement de streaming est caractérisée par un nombre de Reynolds non linéaire $Re_{NL} = (M \times R/\delta_\nu)^2$. Dans ce mémoire on a choisi une définition légèrement différente pour δ_ν par rapport à [47]. Par conséquent, Re_{NL} utilisé ici est deux fois plus petit que celui défini par eux. Suite à une analyse asymptotique, l'équation 2.1, projetée sur la direction axiale, est modifiée par la prise en compte du terme non linéaire $Re_{NL}\left(\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\hat{x}} + \bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\hat{r}}\right)$ où $\bar{u}$, $\bar{v}$ sont les composantes axiale et radiale de streaming et $\hat{x}$, $\hat{r}$ les variables axiale, respectivement radiale, écrites ici sous forme adimensionnelle, pour des valeurs de Re_{NL} de l'ordre de 1 (jusqu'à $Re_{NL} = 4$). L'inertie modifie les cellules de streaming à l'extérieur de la couche limite tandis que les tourbillons intérieurs restent inchangés. Ces prédictions sont obtenues en considérant seulement les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Les effets thermiques ne sont pas étudiés. Leur étude fait référence dans la littérature pour la séparation des deux régimes : le régime lent ou linéaire, caractérisé par $Re_{NL} \ll 1$ et créé par une onde de faible intensité, et le régime rapide, non linéaire, caractérisé par $Re_{NL} > 1$ et créé par une onde de forte intensité.

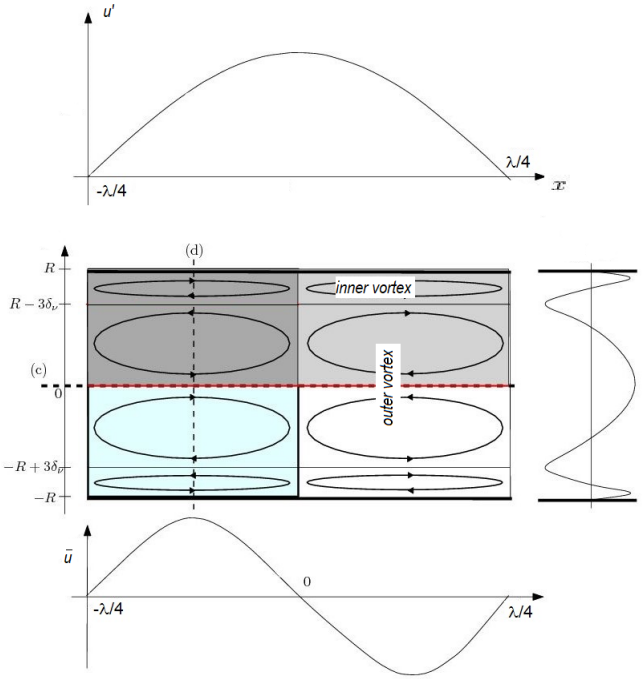


FIGURE 2.1 – Schéma des cellules de streaming intérieur et extérieur dans un canal plan, avec le profil de vitesse acoustique axiale u' le long de la ligne (c) (haut), et le profil de la vitesse de streaming axiale $\bar{u}$ le long des linges (c) et (d).

Plusieurs études expérimentales en résonateurs avec des ondes de forte intensité (donc pour $Re_{NL} > 1$) ont montré un comportement du streaming très différent de celui prédit par la théorie linéaire et pas forcément en accord avec la tendance observée par [47] comme influence de l'inertie. Thompson et Atchley [80] ont développé une méthode de mesures optiques de vitesse d'écoulement moyen (par LDV), pour des ondes acoustiques d'intensité croissante et des valeurs de Re_{NL} allant jusqu'à 20, et les conditions thermiques sur la paroi du résonateur étaient très bien controlées. Ce travail fait également référence dans la littérature sur l'influence des effets thermiques sur le streaming, en régime non linéaire. H. Bailliet et J.C.Valière [50] ont développé également une métrologie très précise, par LDV d'abord et ensuite par PIV, pour étudier la dynamique du streaming en guide d'onde dans la couche limite et dans le corps du résonateur, à forts niveaux acoustiques.

2.2 Étude expérimentale sur le streaming dans les machines thermoacoustiques

La communauté thermoacoustique s'est intéressée au mécanisme de streaming présent dans les machines thermoacoustiques car c'est un phénomène qui limite l'efficacité des systèmes, surtout pour ceux avec une géométrie en boucle. À Los Alamos, G. Swift a mis en évidence de manière expérimentale l'influence du streaming sur l'efficacité des systèmes et a imaginé des solutions de suppression du streaming, via des tubes coniques insérés dans le résonateur pour créer un écoulement asymmétrique avec une perte de charge qui serait compensée par celle associée au streaming [55]. Au LAUM, H. Bailliet et V. Gusev [9] ont développé des modèles analytiques de streaming en régime linéaire qui prennent en compte l'interaction avec la thermique et sont donc adaptées aux machines thermoacoustiques .

Des mesures optiques des écoulements continus dans les machines thermoacoustiques existaient peu. Au LMFA, P. Blanc-Benon et ses collaborateurs ([29]) ont developpé des techniques de mesures de vitesse de streaming par PIV aux extrémités d'un stack réfrigérant, car ils étaient intéressés par l'analyse fine des effets de bord liés au changement brusque de géométrie. Dans leur configuration le stack est presque isotherme et placé dans un résonateur transparent. Les mesures ont été faites à pression ambiante, pour des faibles amplitudes de pression acoustique.

Dans les machines thermoacoustiques de forte puissance, l'accès optique et l'ensemencement des particules sont plus difficiles. Dans ce type de systèmes, le streaming peut être influencé par la présence de la cellule active, maintenue sous un fort gradient de température, ou encore par la forte intensité des ondes acoustiques qui y siègent. Dans ce cas le streaming lui-même deviendra très rapide et ne suivra plus l'évolution prédite par les modèles théoriques linéaires, comme le streaming de Rayleigh. Des mesures optiques de vitesse de streaming n'avaient pas encore été réalisées dans les machines sous forte pression moyenne, comme celles construites au LIMSI. F. Lusseyran avait développé, depuis plusieurs années au LIMSI, une activité expérimentale autour de la dynamique des écoulements en cavité. Il utilisait des techniques de mesure de vitesse par PIV avec une méthode originale et très précise de post-traitement des données par flot optique [61]. Sous l'impulsion de M. X.-François, nous avons demarré une collaboration avec F. Lusseyran pour adapter ses méthodes de mesure aux systèmes thermoacoustiques existant au laboratoire et construire un banc expérimental dédié. Ce fut le cadre de la thèse de P. Debesse : "Vers une mesure du vent thermoacoustique", soutenue en 2008.

2.2.1 Mesure des composantes acoustiques et continues des champs de vitesses dans le résonateur

La mise en évidence expérimentale des écoulements non-linéaires de streaming présente un certain nombre de difficultés métrologiques et d'analyse du signal. En effet la seule connaissance de la pression ne suffit pas, il faut accéder à la connaissance du champ spatial de vitesse instantanée. La métrologie classiquement utilisée dans ce cas est la Vélocimétrie par Images de particules (PIV) ou la Vélocimétrie Laser à Effet Doppler (LDV), techniques de mesure optique très peu intrusives, utilisées largement pour mesurer les écoulements turbulents. Cependant, dans le cadre de la thermoacoustique on se heurte à plusieurs obstacles. Le premier obstacle est lié à l'ensemencement de l'écoulement qui doit être fait sous haute pression. Les particules d'ensemencement doivent pouvoir résister aux fortes températures du moteur acoustique, tout en étant suffisamment fines pour suivre le champ acoustique. La deuxième difficulté, plus fondamentale, est directement liée à la nature du phénomène étudié. En effet, les écoulements induits par les non-linéarités (quelques cm/s ou mm/s pour la vitesse de streaming) sont de plusieurs ordres de grandeur en-dessous de l'oscillation acoustique (quelques m/s ou dizaines de m/s).

Le résultat le plus important de ce travail a été le développement d'une méthode originale de traitement du signal, dans le contexte d'une métrologie PIV, basée sur les techniques de plongement de Broomhead et King [16], permettant de reconstruire la dymanique de l'écoulement. La technique de plongement avait été utilisée avec succès dans le cas des oscillations auto-entretenues se développpant dans une cavité ouverte, pour déterminer le taux d'intermittence des modes non linéaires en compétition [59]. Dans le travail de thèse de P. Debesse, cette technique de plongement a été adaptée pour reconstruire à la fois la composante acoustique et la composante continue stationnaire des champs de vitesses instantannées. Les champs PIV sont fortement sous-échantillonnés (cadence d'acquisition des paires d'images de $10\,\mathrm{Hz}$) par rapport à la période acoustique du mode fondamental ($\approx 4.5 \times 10^{-2}\,\mathrm{s}$). Cette méthode consiste en la démarche suivante : le champ de vitesses sous-échantillonné est projeté sur ses composantes principales à l'aide de la décomposition en valeurs singulières (SVD) [16] ; ceci permet la re-

construction d'un espace de phases et de définir une phase auto-référencée à l'intérieur de la période acoustique ; le champ de vitesse, initialement distribué de manière aléatoire en temps, peut ensuite être réordonné par rapport à cette phase. On peut alors effectuer une moyenne de phase sur cette période fondamentale pour obtenir la composante continue de la vitesse. Si on extrait du signal réordonné la valeur moyenne on obtient la composante acoustique. On a donc une méthode originale de plongement dans un espace de phases, qui ne nécessite pas un signal de référence pour reconstruire le champ de vitesses, via des séries de mesures de phases. Cette méthode est décrite en détail dans [28] (article annexé au mémoire) et elle est présentée brièvement dans la suite.

2.2.2 Dispositif expérimental

Le système expérimental est constitué de deux parties : un générateur d'onde thermoacoustique quasi-stationnaire, placé dans un résonateur fermé à ses extrémités, et une zone de mesure adaptée pour la PIV. Le résonateur est un cylindre en inox (voir figure 2.2), de longueur $L = 7.88$ m et de diamètre intérieur de 56.3 mm, suspendu par un système de chaînes et ressorts pour amortir les vibrations de la structure. Le générateur d'onde, constitué d'un empilement de plaques en inox, se trouve à 0.5 m de l'extrémité du résonateur, loin de la zone de mesure.

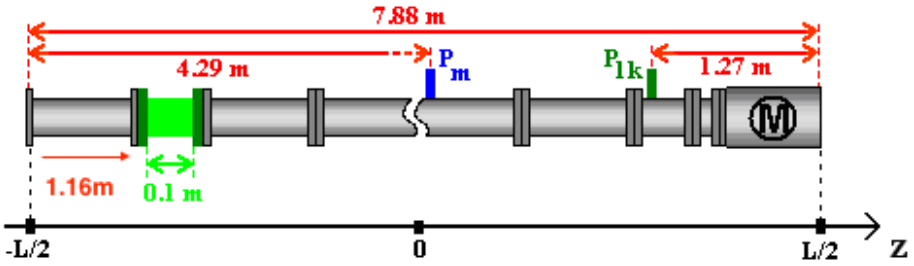
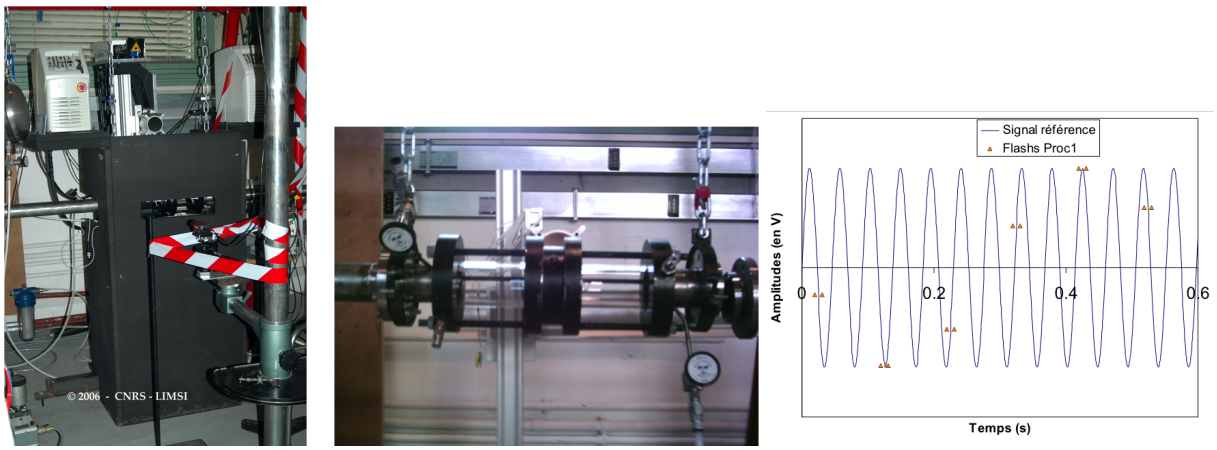


FIGURE 2.2 – Schéma du système thermoacoustique avec la zone de mesures optiques en vert. Le moteur thermoacoustique est indiqué avec la lettre M

L'onde est maintenue dans le résonateur avec un gradient de température imposé entre l'échangeur chaud (chauffé avec une résistance Thermocoax, connectée à une alimentation de courant alternatif) et l'échangeur froid maintenu à une température constante, avec de l'eau utilisée comme fluide secondaire refroidissant. Dans les expériences, les températures de l'échangeurs chaud varient entre 458 K ($185°$ C) et 573 K ($300°$ C). L'onde générée est une onde stationnaire, avec une amplitude de pression variant entre 10^4 Pa et $5 \cdot 10^4$ Pa. Le gaz utilisé est de l'azote sous une pression moyenne de $P_m = 7.26 \times 10^5$ Pa et une température moyenne $T_m = 289$ K. Le signal de pression est mesuré à la sortie du moteur thermoacoustique, en proche paroi, à une distance de 2.67 m du milieu du résonateur, à l'aide d'un capteur piézoélectrique Kistler alimenté par un amplificateur de charge. L'analyse de Fourier de ce signal fournit l'amplitude de pression maximale $P_1 = 1,27 \times 10^4$ Pa (donc un drive ratio de 1.75%) et la fréquence fondamentale de l'onde $f_1 = 21.92$ Hz. Par ailleurs 8 harmoniques du mode fondamental sont identifiés. La vitesse du son est $c_0 = 347.28$ m/s.

La zone de mesure par PIV est située à 1.16 m de l'extrémité du résonateur opposée au moteur. Elle est constituée d'un module en verre, transparent, avec un traitement anti-reflets, sur 0.1 m de long (voir figure 2.3). Le montage expérimental contenait deux modules en verre, mais les mesures ont été faites dans l'un des deux modules. Les particules d'ensemencement sont de l'oxyde de magnésium (MgO) dont le diamètre est de l'ordre de 1μ m. Elles sont injectées

dans le résonateur à proximité de la zone de mesure via un système d'ensemencement sous pression Dantec (limité à 10^6 Pa). La source de lumière est un laser pulsé mini-YAG Quantel double cavité, cadencé à 10Hz et de longueur d'onde de 532nm et 30 mJ/pulse. Les images sont enregistrées avec une caméra CDD Marlin à 20Hz (1024×768 pixels) équipée d'un filtre passe-bande. La fréquence d'enregistrement des paires d'images est $f_e = 10$ Hz avec un intervalle de temps de 0.002 s entre les images de la même paire. L'acquisition des paires d'images a été indiquée sur le signal de pression dans la figure 2.3 (c). Le temps d'enregistrement d'une série de mesures est de 100 s. Un système d'acquisition (SigLab) à plusieurs canaux synchrones a été utilisé, permettant d'acquérir simultanement le signal de pression. Ceci permet d'avoir une origine temporelle commune entre la vitesse et la pression. Les mesures sont faites dans un plan vertical, passant par l'axe du résonateur.



(a) (b) (c)

FIGURE 2.3 – (a) Système d'acquisition d'images : les deux cavités laser, les modules transparents entourées d'un panneau de protection (en bois), et la caméra posée sur un dispositif permettant les translations verticales et horizontales, (b) Zone de mesure (modules transparents), (c) Acquisition des paires d'images, représentée sur le signal de pression.

2.2.3 Calcul des champs de vitesses PIV

Le premier traitement consiste à soustraire aux images une image de bruit de fond pour réduire les réflexions des parois dues à la géométrie cylindrique. L'image soustraite ici est la moyenne de toutes les images avec particules. Le pré-traitement des images est complété par une amélioration du contraste et un filtre passe-haut pour corriger les niveaux d'intensité des images. La deuxième étape est le calcul des déplacements à partir d'une paire d'images, en utilisant un algorithme de flot optique avec une programmation dynamique orthogonale [61]. L'avantage de cette approche réside dans le fait qu'elle est bien adaptée aux écoulements à fort gradient de vitesse et fournit une mesure peu bruitée. La précision de résolution du flot optique dans le traitement d'images est de 1/181 pixel ce qui correspond à une précision du champ de vitesse de 4×10^{-4} m/s. Les champs de vitesse obtenus sont ensuite corrigés pour tenir compte des effets de dioptre [32].

2.2.4 Réarrangement des champs PIV sous-échantillonnés selon une phase auto-référencée

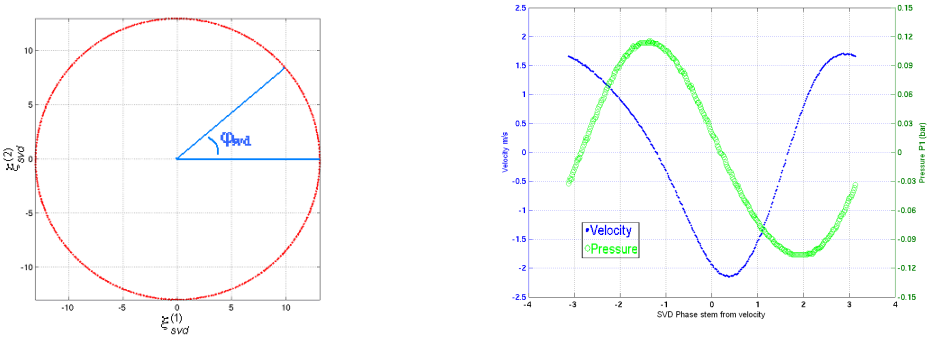
Les champs PIV sont calculés sur une fenêtre de mesure de la hauteur du diamètre du résonateur et de longueur représentant 2.5% de la longueur des cellules de streaming de Rayleigh. Une première estimation de la vitesse moyenne, notée $\overrightarrow{U}(x,y,t)$ (x est la variable dans la direction axiale et y est la variable dans la direction verticale), est obtenue en faisant la moyenne d'ensemble de tous les champs PIV. La composante acoustique $\vec{U}_{ac}(x,y,t) = \vec{U}(x,y,t) - \overrightarrow{U}(x,y,t)$, obtenue par soustraction, est ensuite moyennée sur une région centrale, située loin des couches limites, où les variations spatiales sont négligeables. On obtient un ensemble discret, dépendant du temps. Seule la composante horizontale $u_x(t_n)$ sera utilisée par la suite. Pour analyser l'onde acoustique, la série $u_x(t_n)$ est réordonnée sur un cycle acoustique du mode fondamental de la manière suivante :

La partie périodique de la dynamique de l'écoulement est obtenue en projetant le mode le plus énergétique sur les deux composantes principales du signal. Pour ce faire, on applique une décomposition SVD sur la matrice de retard :

$$S = \begin{pmatrix} u_x(t_0) & u_x(t_1) & \dots & u_x(t_{M_{SVD}-1}) \\ u_x(t_1) & u_x(t_2) & \dots & u_x(t_{M_{SVD}}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_x(t_{r-1}) & u_x(t_r) & \dots & u_x(t_{N_{max}-1}) \end{pmatrix}$$

où M_{SVD} représente le nombre des modes SVD sur lesquels on fait la décomposition (99 ici), N_{max} le nombre total des données de vitesse, $r = N_{max} - (M_{SVD} - 1)$ et $t_n = n/f_e$, $1 \leq n \leq N_{max} - 1$. La matrice de retard S est donc décomposée selon la relation $S = UVD^t$, avec D la matrice diagonale des valeurs singulières et V la matrice unitaire des vecteurs propres. L'espace des phases est généré par une base construite avec les colonnes de la matrice $\Phi_{SVD} = UD = SV$, les modes étant ordonnés du plus énergétique $\xi^1_{SVD}(t)$ (correspondant à la première colonne) au moins énergétique $\xi^{M_{SVD}}_{SVD}(t)$ (correspondant à la dernière colonne).

Les deux premiers modes sont utilisés pour construire un portrait de phase, ce qui représente la projection de la dynamique de l'écoulement sur la partie périodique (figure 2.4(a)). Une phase φ_{SVD}, définie comme l'argument du nombre complexe $\xi^1_{SVD}(t) + i\xi^2_{SVD}(t)$, peut être associée à chaque champ de vitesse instantané $u_x(t_n)$ et donc au champ de vitesses $\vec{U}(x,y,t_n)$ tout entier. Le champ de vitesse $u_x(\varphi_{SVD})$ réordonné selon la phase $\varphi_{SVD} \in [-\pi, \pi]$ est représenté sur la figure 2.4(b) en bleu, avec le signal de pression $P_1(\varphi_{SVD})$ en vert. Le signal est sinusoïdal et légèrement déformé par la présence d'harmoniques. Cette technique de réarrangement selon la phase a été validée sur le signal de pression qui est sur-échantillonné. Les caractéristiques de l'onde stationnaire peuvent être déduites ensuite du champ de vitesse global, après réarrangement en phase, en faisant une interpolation des profils. Malgré la fenêtre de mesure qui représente 1% de la longueur du résonateur, on peut faire une identification assez précise des amplitudes des deux premiers modes (fondamental et premier harmonique) ainsi que de leurs phases et du nombre d'onde. On trouve une amplitude du fondamental de 1.890 m/s dans la zone de mesure et un taux du premier harmonique de 19% par rapport au fondamental. Le déphasage mesuré entre les deux modes montre que l'onde n'est pas purement stationnaire.



(a) (b)

FIGURE 2.4 – a) Portrait de phase ; b) Séries de vitesse $u_x(\varphi_{SVD})$ et de pression $P_1(\varphi_{SVD})$ réordonnées en phase.

2.2.5 Calcul de la vitesse moyenne (de streaming)

Un premier calcul de la vitesse moyenne peut être effectué avec une simple moyenne en temps sur l'ensemble de l'échantillon de mesure :

$$\overrightarrow{\overline{U}}(\vec{x}) \approx \frac{1}{N_{max}} \sum_{n=0}^{N_{max}} \vec{U}(\vec{x}, t_n)$$

Si on applique cette moyenne aux séries de mesures, le résidu d'approximation risque d'être du même ordre de grandeur que la moyenne recherchée, du fait de la convergence lente de la moyenne d'ensemble (N_{max} n'étant pas suffisamment grand). Un meilleur calcul de la moyenne peut être proposé à partir du champ de vitesses ordonné selon la phase :

$$\overrightarrow{\overline{U}}(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \vec{U}(\vec{x}) d\varphi_{SVD}$$

Le champ moyen obtenu est représenté sur les figures 16 et 17 de [28] (article en annexe). Il est du même ordre de grandeur que la vitesse de streaming de Rayleigh estimée dans les conditions de l'expérience (10^{-2} m/s). L'analyse de l'écoulement montre qu'il s'agit d'un écoulement continu irrégulier, avec une composante transverse (donc un écoulement tri-dimensionnel). L'écoulement mesuré était différent des résultats existant dans la littérature dans des guides d'ondes sans moteur thermoacoustique. Il présente une forte asymétrie par rapport à l'axe du tube, avec une zone centrale de faibles vitesses, et avec un écoulement moyen allant du moteur vers le fond du résonateur en haut de la zone de mesure, et un autre écoulement allant dans le sens inverse en bas de la zone de mesure. Le calcul du nombre de Reynolds non linéaire montre que dans notre expérience $Re_{NL} = 9.7$ et donc on peut s'attendre à une distorsion du streaming à cause de l'inertie, ce qui n'explique tout de même pas les profils observés. La présence d'un écoulement moyen du moteur vers le fond du résonateur en haut de la zone de mesure et d'un autre écoulement dans le sens inverse en bas de la zone de mesure pourrait être le résultat d'un écoulement de convection naturelle typique d'une cavité différentiellement chauffée. Des mesures complémentaires ont été faites dans le résonateur après la disparition de l'onde (ce qui se produit très rapidement, en moins d'une minute, en coupant le chauffage au niveau de l'échangeur chaud). Le profil de la composante horizontale de vitesse est caractéristique d'un écoulement de convection naturelle (voir figure 2.5).

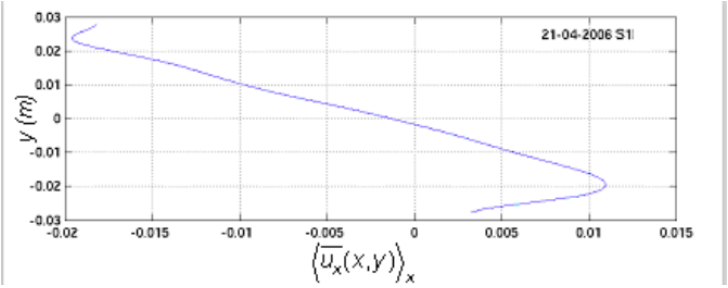
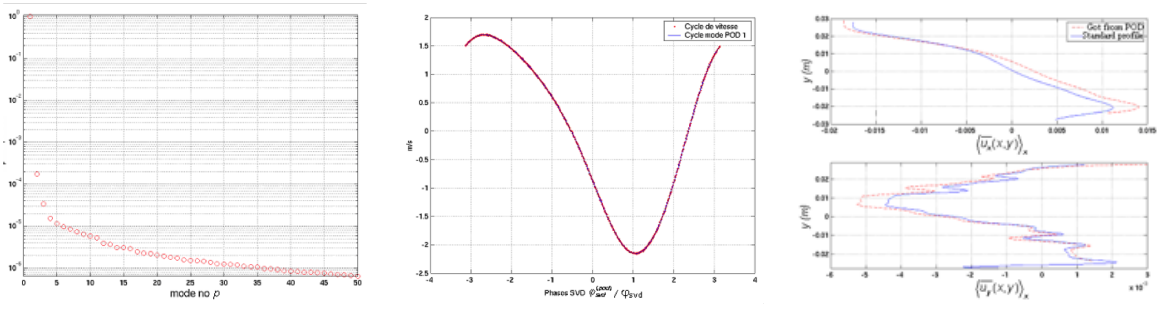


FIGURE 2.5 – Profil de la composante horizontale de vitesse, en fonction de la variable verticale, après la disparition de l'onde.

2.2.6 Reconstruction de l'acoustique et du champ moyen par décomposition POD

Pour compléter l'étude des champs PIV, et dans le but de confirmer les résultats obtenus par la SVD appliquée aux champs sous-échantillonnés, une étude basée sur la décompostion POD (Proper Othogonal Decomposition) a été faite. En utilisant un signal synthétique, on a montré qu'on peut extraire l'onde acoustique du premier mode POD (le plus énergétique) et l'écoulement moyen (de streaming) du second, à condition que les structures spatiales associées à l'acoustique et au streaming soient suffisamment distinctes. Dans la figure 2.6 (a) on a représenté le spectre des valeurs propres POD (i.e. le carré des valeurs singulières σ_i^2) : la première valeur propre est associée au mode fondamental acoustique, la deuxième est associée au champ moyen et la troisième valeur propre correspond au premier harmonique acoustique. Si on reconstruit la composante axiale de la vitesse à partir du premier mode POD, et qu'on fait ensuite une moyenne spatiale pour obtenir la série temporelle $u^{(1)}_{POD}(t) =< \sigma_1 a_1(t) \Psi_{x,1}(\vec{r}) >_{x,y}$, on peut appliquer de nouveau une décomposition SVD et un réarrangement en phase du signal obtenu du premier mode POD. Le champ de vitesse reconstruit avec la POD et réordonné en phase se superpose bien avec le champ de vitesse complet, ce qui confirme le fait que la POD permet de reconstruire l'acoustique avec le premier mode POD (cf. figure 2.6 (b)). On retrouve également la stratification spatiale d'amplitude associée à une onde plane. La reconstruction du deuxième mode POD indique un champ moyen comparable au champ complet d'origine (sans décomposition POD) (figure 2.6 (c)).

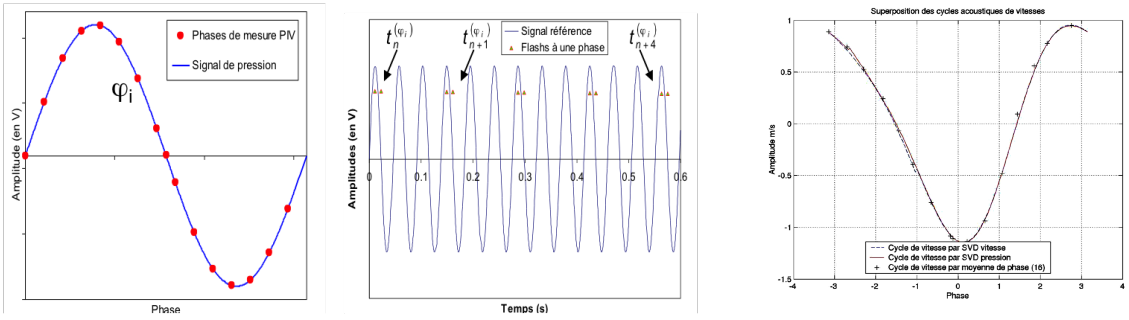


(a) (b) (c)

FIGURE 2.6 – (a) Spectre des valeurs propres POD. (b) Superposition des profils de vitesses axiales acoustiques reconstruites par POD et du champ complet, sur une période acoustique. (c) $\overline{u}_x(y)$ intégrées aussi selon x dans la zone de mesure, par la POD (en rouge) et sans POD (en bleu). Dr= 1.75%

2.2.7 Champs PIV avec référence de phase

Ces séries de mesures ont été réalisées dans les mêmes conditions expérimentales que les précédentes. La différence réside dans les instants de prises de vue PIV : les paires d'images sont prises à la même phase du cycle acoustique en prenant comme référence le signal de pression, à l'aide d'une électronique de synchronisation (figure 2.7 (a)). L'écart temporel entre deux images d'une paire est toujours de 2ms. Pour réaliser les moyennes de phase on a montré qu'il y a une bonne convergence statistique à partir de 500 champs instantanés. La validation des moyennes de phase a été faite en utilisant environ 800 champs instantanés pour chaque phase, et en décomposant le signal de pression en 16 phases. On observe un bon accord avec les mesures faites de manière désordonnée et traitées avec le réarrangement en phase par SVD (figure 2.7 (b)). Néanmoins, l'extraction du champ moyen après une moyenne sur les 16 phases, conduit à un écoulement continu moins bien résolu que celui obtenu par moyenne sur toutes les phases SVD, qui sont entre 700 et 2000.



(a) (b)

FIGURE 2.7 – (a) Schéma de la procédure d'acquisition des images pour les moyennes de phase. (b) Comparaison du signal reconstruit par moyennes de phase et moyennes en phase SVD.

2.2.8 Résultats pour plusieurs drive ratio

Trois espaces de paramètres distincts associés au drive ratio Dr de 1.75% ($P_1/P_m = 127 \times 10^3/(7.26 \times 10^5)$), 0.97% ($145 \times 10^3/(15.01 \times 10^5)$) et 4.40% ($317 \times 10^3/(7.20 \times 10^5)$) ont été étudiés avec les méthodes décrites précédemment. Pour chacun, l'onde acoustique a été caractérisée notamment par l'amplitude de vitesse locale (dans la zone de mesure) et le contenu fréquentiel de l'onde. Le taux du premier harmonique augmente avec le drive ratio : 20% par rapport au fondamental pour $Dr = 1.75\%$ et 50% pour $Dr = 4.40\%$. Le reclassement a permis le calcul de la longueur d'onde acoustique, et ce grâce aux données obtenues sur une distance qui représente moins de 1% de cette longueur d'onde. Les valeurs obtenues montrent qu'il y a un très bon accord avec les valeurs théoriques, l'écart ne dépassant pas les 6% de la valeur théorique. Un résumé des résultats est présenté figure 2.8. Les champs moyens ont été déterminés par moyenne sur les phases obtenues par SVD et aussi par POD. Ces résultats se recoupent bien et les valeurs des vitesses moyennes sont 10^{-2} à 10^{-3} fois plus faibles que les vitesses acoustiques. Elles sont de ce fait, sensibles aux incertitudes de mesure et sont parfois proches de la précision de mesure. Cependant, nous pensons pouvoir affirmer que ces champs moyens présentent une composante tridimensionnelle et sont principalement constitués de deux cellules principales de convection (cf. Figure 2.9). Elles existent pour les trois espaces des paramètres. Pour le plus faible rapport $Dr = 0,97\%$, elles sont localisées dans la partie supérieure de la zone de mesure et en proche paroi, soit une extension radiale d'un demi-rayon. Alors que le

drive ratio augmente, elles ont tendance à s'étaler dans la direction radiale : extension d'un rayon pour $Dr = 1.75\%$ et d'un diamètre pour celui de $Dr = 4.40\%$.

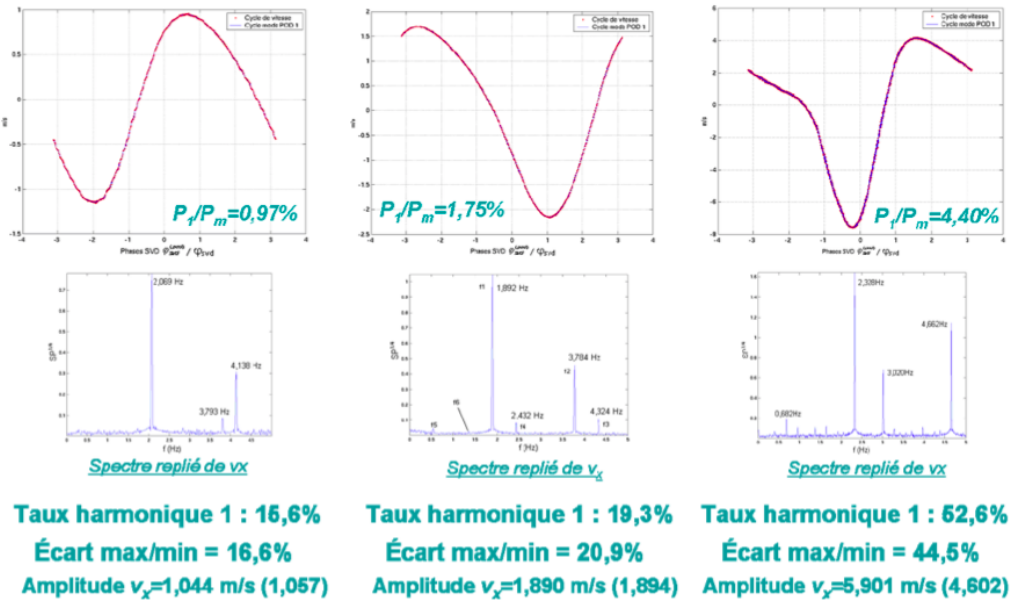


FIGURE 2.8 – Récapitulatif de résultats pour l'acoustique pour les trois espaces de paramètres ; de gauche à droite dans l'ordre des Dr ; de haut en bas, les vitesse acoustique reclassées en phase par SVD, les spectres fréquentiels repliés, les taux de premier harmonique dans la zone de mesure, l'écart entre le max, le min et les amplitudes de vitesse acoustique locale

Nous sommes dans une configuration d'acoustique non-linéaire (harmoniques multiples) et de streaming non-linéaire. Les nombres de Reynolds non-linéaires sont respectivement $Re_{NL} = 5.7$, $Re_{NL} = 9.8$ et $Re_{NL} = 120.2$. Les cellules de convection telles qu'elles nous apparaissent ne sont donc pas de type Rayleigh-Schlichting. Notons qu'après la disparition de l'onde, une fois le chauffage du moteur arrêté, un écoulement résiduel est observé qui pourrait être d'origine thermoconvective avec pour moteur un gradient thermique orienté de l'échangeur froid de la cellule thermoacoustique vers le fond opposé du résonateur. Son ordre de grandeur de vitesse est une décade inférieure à l'amplitude de vitesse acoustique. Cet écoulement pourrait exister alors que l'onde est établie et éventuellement être une des causes de déstructuration du streaming de Rayleigh-Schlichting. Ces résultats n'ont pas trouvé de comparaison directe dans la littérature car le système étudié dépassait les simplifications académiques pour se rapprocher des conditions rencontrées dans les applications de la thermoacoustique.

La complexité des écoulements moyens observés nécessitait d'étendre les investigations à d'autres positions dans le résonateur et à d'autres plans de mesure, pour connaître le développement de ces cellules d'écoulement permanent sur toute l'étendue de l'onde stationnaire. L'immense travail expérimental exploratoire mené par Philippe Debesse, comprenant la mise en place d'un banc expérimental lourd, ainsi que le développement d'une métrologie dédiée, n'a malheureusement pas pu être continué après la fin de sa thèse. Le sujet était complexe et faute de candidat en thèse, ce travail n'a pas eu de suite. Il a donné lieu à beaucoup de résultats qui ont été publiés partiellement quelques années après la thèse, quand tous les trois, P. Debesse, F. Lusseyran et moi même avons pu nous réunir pour le faire. Cette expérience m'a appris ce qu'était réellement la recherche expérimentale et combien il était difficile de faire de "bonnes mesures" et qu'avant tout il fallait avoir la "bonne expérience".

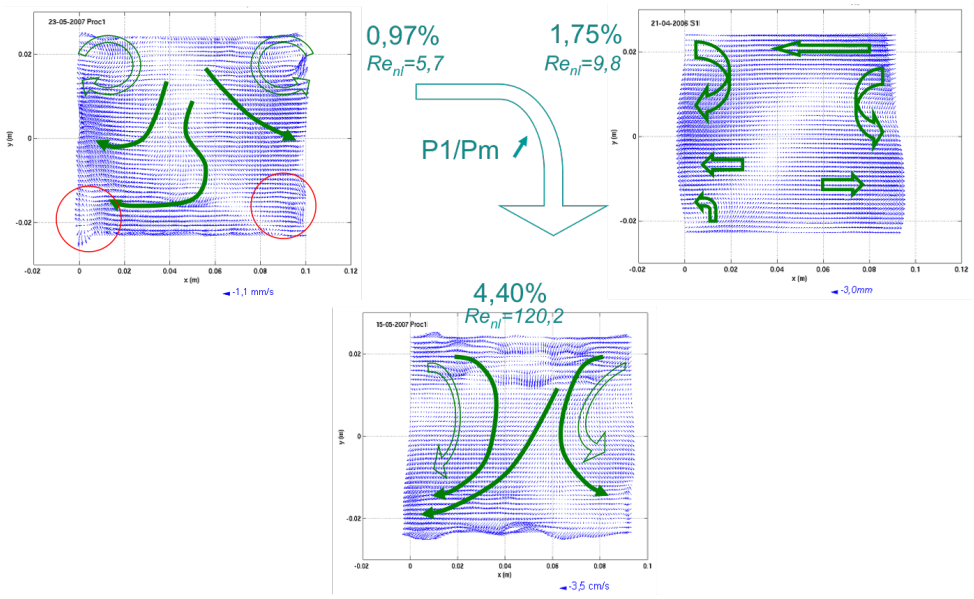


FIGURE 2.9 – Récapitulatif des résultats concernant le champ moyen pour les trois espaces de paramètres, correspondant aux trois drive ratio.

Comme discuté précédemment, le dispositif expérimental utilisé était bien trop complexe pour pouvoir faire la part des choses entre l'influence de l'inertie ($Re_{NL} > 1$ et allant jusqu'à 120), de la thermique, des écoulements de convection naturelle, et des harmoniques. Par conséquent, le travail de recherche sur le streaming a été poursuivi du point de vue de la modélisation et de la simulation numérique, dans des configurations académiques, et ceci fera l'objet de la section suivante.

2.3 Streaming acoustique en guide d'onde

Cette partie du mémoire est consacrée à l'étude numérique du vent acoustique créé dans un résonateur à ondes stationnaires, en régime non linéaire, complétée par une étude théorique en régime linéaire. Il raconte l'histoire de travaux de recherche étalés sur une dizaine d'années, qui ont fait l'objet d'une collaboration très fructueuse et très féminine, avec V. Daru et C. Weisman à partir de 2009, puis avec H. Bailliet à partir de 2012. À ce noyau s'ajoutent des collaborations ponctuelles avec I. Reyt durant ses séjours post-doctoraux et avec S. Tabakova sur les travaux analytiques.

2.3.1 Une histoire d'aller et retour

Nous avons commencé un premier travail avec V. Daru et C. Weisman sur la simulation de l'écoulement du fluide dans un guide d'onde sans machine thermoacoustique, le but étant de comprendre le comportement du streaming y siégeant en regime non linéaire. Les expériences menées dans la littérature à ce moment ne donnaient pas accès aux structures spatiales des tourbillons de streaming, ni à leur dynamique quand l'intensité acoustique augmente, ni à l'évolution du champ de température dans le guide d'onde. Les quelques simulations [2] qui traitaient le régime non linéaire $Re_{NL} > 1$ étaient en désaccord avec les mesures expérimentales existantes, et mettaient en évidence des valeurs de Re_{NL} critiques pour la transition vers le régime non linéaire en contradiction avec l'expérience. De plus, contrairement à nos attentes,

les meures que nous avions faites avec P. Debesse et F. Lusseyran sur les résonateurs des machines thermoacoustiques indiquaient un streaming qui ne ressemblait à rien d'existant dans la littérature.

Dans ce contexte, les premières simulations faites par V. Daru, ont mis en évidence une déformation des cellules tourbillonnaires de streaming à fort niveau acoustique, avec une apparition de nouvelles cellules au centre du guide, et une interaction non-triviale avec le champ de température moyen. La même déformation des cellules de streaming a été observée dans les expériences par H. Bailliet et son équipe. À partir de ces observations simultanées nous avons démarré une collaboration très riche et complémentaire. Plusieurs pistes d'investigation, évoquées dans la section précédente, s'offraient à nous. Pour bien cerner les effets des différentes sources, nous avons mené un certain nombre d'études numériques en écoulement isentropique, en nous aidant dans l'interprétation des résultats du modèle linéaire, caractéristique du streaming lent. Nous avons bien identifié l'effet de l'inertie, ainsi que l'interaction non linéaire entre l'acoustique et le streaming. Il a éte conclu que, sous l'hypothèse isentropique, cette interaction est responsable des déformations des cellules de streaming, avec un seuil d'apparition de nouvelles cellules, portant sur la valeur de Re_{NL}, bien plus grand que pour un écoulement influencé par les échanges thermiques. La prise en compte des effets thermiques dans nos dernières études ont montré une influence très forte de ces derniers sur l'acoustique, et par rétroaction sur le streaming : à fort niveau le streaming réorganise le champ de température moyen, qui modifie à son tour l'acoustique et donc le streaming. Dans l'interaction non linéaire entre l'acoustique et le streaming, l'effet induit par la température moyenne est plus important que celui vu en hypothèse isentropique et le seuil d'apparition des cellules supplémentaires est plus faible. Un nouveau critère a été obtenu en nous aidant de la théorie linéaire : $Re_{NL} > K_C$, K_C étant un nombre sans dimension dépendant des échanges avec les parois du résonateur.

2.3.2 Premières simulations du streaming en canal plan, dans les deux régimes, incluant les effets thermiques

Ce premier travail a été fait en collaboration avec V. Daru, C. Weisman, G. Gandikota et P. Debesse, sur la simulation d'un écoulement de streaming dans un guide d'onde rempli d'air, pour des valeurs croissantes de l'amplitude de l'onde, couvrant les régimes lent et rapide de streaming.

Description du problème et modèle numérique

On considère une cavité rectangulaire 2D de longueur L et de demi hauteur R, initialement remplie d'air à pression p et masse volumique ρ respectivement égales à $101325Pa$ et $1.2kg/m^3$. Afin d'installer une onde acoustique stationnaire dans cette cavité, on la secoue suivant la direction longitudinale x, avec une vitesse harmonique $\vec{V}(t) = (x_p\omega cos(\omega t), 0)^T$, ω étant la pulsation et x_p l'amplitude de déplacement de la cavité. L'écoulement produit peut être modélisé par les équations de Navier-Stokes compressibles exprimées en repère mobile, attaché à la cavité, ce qui produit un terme source de forçage. Le modèle s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) & = & 0 \\ \dfrac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla p & = & \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}}) - \rho \dfrac{d\mathbf{V}}{dt} \\ \dfrac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{v} + p\mathbf{v}) & = & \nabla \cdot (k \nabla T) + \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}} \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v} \cdot \dfrac{d\mathbf{V}}{dt} \end{array}\right. \tag{2.2}$$

où $\vec{v} = (u, v)^T$ est la vitesse du fluide, $E = e + \frac{1}{2}\vec{v} \cdot \vec{v}$ est l'énergie totale, $e = \frac{p}{(\gamma-1)\rho}$ étant l'énergie interne, $\gamma = 1.4$ le rapport des chaleurs spécifiques de l'air, $\bar{\bar{\tau}} = -\frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \vec{v})\bar{\bar{I}} + 2\mu\bar{\bar{D}}$ le tenseur des contraintes visqueuses, $\bar{\bar{D}}$ le tenseur des taux de déformations, μ la viscosité dynamique, k la conductivité thermique. Les propriétés thermophysiques de l'air sont supposées constantes, $\mu = 1.795\ 10^{-5} kgm^{-1}s^{-1}$ et $k = 0.025 Wm^{-1}K^{-1}$. L'air est considéré comme un gaz parfait et suit la loi d'état $p = r\rho T$, où T est la température et $r = 287.06 Jkg^{-1}K^{-1}$ est la constante des gaz parfaits pour l'air. Les conditions aux limites employées dans le repère mobile sont : condition d'adhérence pour la vitesse et paroi isotherme pour la température.

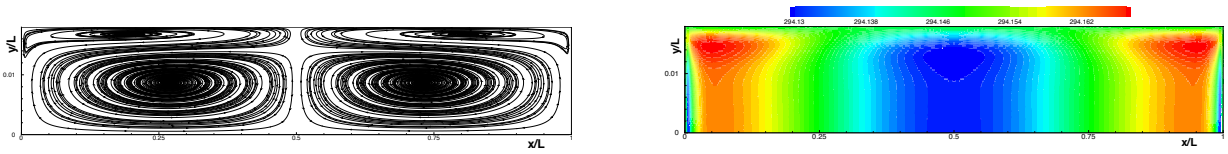
Le modèle est résolu numériquement en utilisant un schéma aux différences finies explicite décentré d'ordre 3 en temps et en espace pour les termes convectifs, centré d'ordre 2 pour les termes diffusifs. Le code et les simulations numériques ont été effectuées par V. Daru. Les détails du schéma peuvent être trouvés dans [23]. Le maillage utilisé est régulier de pas δx et δy, composé de 500 points dans la direction axiale x, et de $5 \times R/\delta_\nu$ points dans la direction y normale à l'axe. Seule la moitié supérieure de la cavité est simulée, l'écoulement étant symétrique par rapport à l'axe x. Les simulations étant très coûteuses, on a considéré des petites cavités, de longueur $L = 8.825mm$, correspondant à une onde de haute fréquence $f = 20000Hz$. Dans ce cas le pas de temps $\delta t = 8 \times 10^{-9}$s est choisi égal à $T/6250$ pour satisfaire la condition de stabilité numérique. L'épaisseur de la couche limite qui en résulte est $\delta_\nu = 1.54 \times 10^{-5}$m.

Les simulations sont effectuées pour des valeurs différentes de Re_{NL}, du régime de streaming lent ($Re_{NL} = 0,001$) au régime de streaming rapide ($Re_{NL} = 29$), pour des cavités de plus en plus larges ($R/\delta_\nu = 10, 20, 40$) et pour des ondes acoustiques de plus en plus intenses, avec un nombre de Mach allant de $M = 0.003$ à $M = 0.027$ donc des régimes avec des ondes de choc. L'écoulement moyenné est obtenu en effectuant une moyenne simple des différentes quantités (vitesse, pression, température) sur chaque période acoustique.

Résultats numériques

Pour de petites valeurs de Re_{NL} ($Re_{NL} \ll 1$), l'onde plane est quasi mono-fréquentielle et on obtient quatre cellules de streaming symétriques sur la longueur de la cavité et la demi-hauteur : deux cellules dans la couche limite et deux autres dans le coeur de la cavité, comme le streaming de Rayleigh. Le champ de température moyen est quasi-unidimensionnel dans le guide, excepté dans la couche limite, avec une stratification horizontale des températures du chaud près des nœuds de vitesse acoustique vers le froid près du ventre de vitesse acoustiques (Figure 2.10). Le calcul du flux d'entropie moyen, correspondant au transfert de chaleur thermoacoustique, montre un pompage de chaleur du centre du résonateur (ventre de vitesse et nœud de pression) vers les extrémités (nœuds de vitesse, ventre de pression). Ce pompage de chaleur localisé au début en bord de couche limite est suivi par une diffusion de la chaleur dans la direction radiale pour finir avec un champ stationnaire quasi 1D. La différence de température entre le maximum et le minimum est petite pour des faibles valeurs de Re_{NL}, par exemple $\Delta T = 0.039$K pour $Re_{NL} = 0.041$.

Pour $Re_{NL} > 1$, les cellules de recirculation se dissymétrisent fortement avec l'augmentation de Re_{NL} et le streaming devient irrégulier (Figure 2.3.2). On observe un déplacement des centres des cellules de streaming (aussi bien celles de couche limite que les cellules centrales) vers les extrémités de la cavité résonante, proche des couches limites sur les parois verticales. La sinusoïde caractéristique du streaming lent (cf. figure 2.1), représentant la variation en x, le long de l'axe de la cavité, de la composante axiale de la vitesse de streaming, se raidit vers les extrémités du résonateur. Au fur et à mesure que le nombre Re_{NL} augmente on peut observer l'apparition de plusieurs cellules de streaming ([24]). Une autre conséquence de la distorsion des cellules de streaming concerne le profil de la vitesse axiale de streaming en fonction de la



(a) (b)

FIGURE 2.10 – (a) Lignes de courant pour le streaming, (b) Champ de température moyen sur la moitié du canal. $Re_{NL} = 0.041$, $y_0/\delta_\nu = 10$, $M = 0.02$.

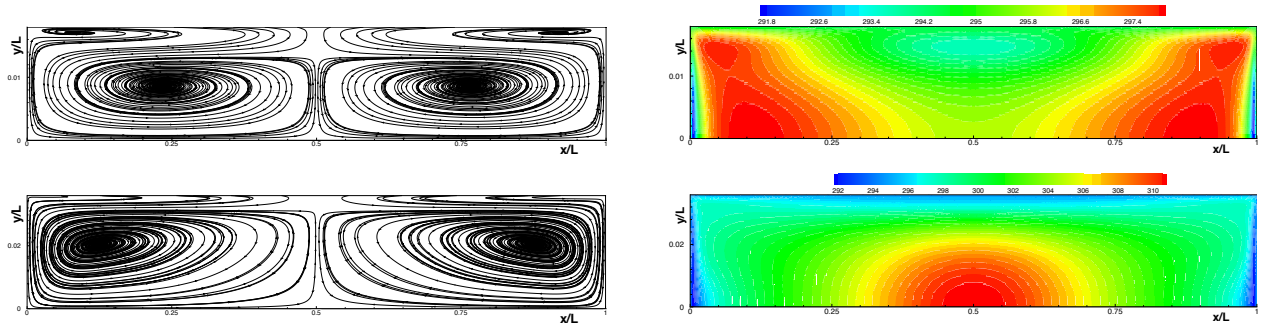


FIGURE 2.11 – Lignes de courant de l'écoulement moyenné sur la demi hauteur du résonateur (à gauche) et champ de température moyen (à droite). a) $Re_{NL} = 4.257$ ($y_0/\delta_\nu = 10$, $M = 0.206$). b) $Re_{NL} = 12.636$ ($y_0/\delta_\nu = 20$, $M = 0.178$). Les longueurs sont normalisées par L.

hauteur de la cavité. La caractère parabolique est perdu, comme cela a été observé dans des expériences à $Re_{NL} = 98$ [50]. Nos simulations ont mis en évidence le même type de distorsion pour des plus faibles nombre de Reynolds non linéaires (cas $Re_{NL} = 13, 26$ et 29).

L'analyse du champ de température moyen dans le cas $Re_{NL} > 1$ montre que le champ de température devient bidimensionnel à cause du transport de chaleur par convection (via l'écoulement de streaming qui devient de plus en plus fort). Par ailleurs, au fur et à mesure que l'intensité des ondes acoustiques augmente, des ondes de choc périodiques apparaissent, qui induisent des gradients de températures de plus en plus forts : $\Delta T = 19.4$K pour $Re_{NL} = 12.636$. Ceci peut également influencer le streaming. Dans la dynamique du streaming on a observé plusieurs étapes : d'abord l'établissement du streaming de Rayleigh régulier sur quelques dizaines de périodes, ensuite une déstabilisation de ce motif concrétisé par une dissymmétrie de plus en plus forte des cellules (les centres des tourbillons se déplacent vers les nœuds de vitesse acoustiques), accompagnée par une modification du champ de température moyen qui semble suivre l'écoulement jusqu'à une nouvelle stabilisation. Cette stabilisation peut se faire toujours à deux cellules extérieures à la couche limite ou à plusieurs si le nombre de Reynolds non linéaire continue à augmenter.

La même dynamique du streaming a été observée de manière indépendante et simultanée par l'équipe d'Hélène Bailliet . Nous avons présenté nos résultats remarquablement similaires à une rencontre du GDR Thermaocoustique en décembre 2011 et nous avons décidé de travailler ensemble sur des configurations comparables, du moins du point de vue d'une similitude, dans le but de comprendre la physique derrière ce comportement surprenant du streaming.

Comparaison avec l'expérience

Le travail en collaboration a été fait en guide d'onde cylindrique. L'expérience est décrite en détail dans [66] (article en annexe). L'onde est générée à l'aide de deux haut-parleurs qui

travaillent avec la même fréquence, en opposition de phase. Les haut-parleurs sont connectés au guide via des tubes coniques. Le fréquence de fonctionnement du système est de $f_{exp} = 240$ Hz ce qui représente le troisième mode du système. Le but est de pouvoir faire des mesures dans une cellule de streaming située loin des singularités dues aux changements de section. La géométrie anharmonique du guide d'onde assure le maintien d'une onde presque monochromatique, même à des fortes amplitudes acoustiques.

Les simulations ont été faites toujours sur des petits résonateurs pour diminuer le temps de calcul. Pour pouvoir faire la comparaison avec l'expérience on s'est placé en situation de similitude par rapport aux expériences. L'analyse dimensionnelle des équations fondamentales régissant l'acoustique et le streaming met en évidence cinq nombres sans dimension : le nombre de Mach, $M = \frac{U_0}{c_0}$, le nombre de Reynolds acoustique, $Re = \frac{\rho_0 c_0^2}{\mu_0 \omega}$, le nombre de Prandtl $Pr = \frac{\mu_0 c_p}{\rho_0 k_0}$, le nombre de Shear $Sh = \frac{\delta_\nu}{R}$, le dernier pouvant être remplacé par le nombre de Reynolds non linéaire $Re_{NL} = \frac{M^2}{Sh^2}$. Dans les deux configurations, numérique et expérimentale, le fluide utilisé est fixé (l'air) donc le nombre de Prandtl est le même. L'acoustique et le streaming en proche paroi sont similaires pour $M \ll 1$, $Re \gg 1$ et $Sh \ll 1$. Le streaming extérieur est caractérisé par le nombre Re_{NL} et l'analyse de la dynamique du streaming a été faite dans un premier temps seulement en fonction de ce nombre. Les conditions limites en température ont étés choisies pour être les mêmes ou presque : dans les simulations les parois sont isothermes tandis que dans l'expérience les parois du résonateur sont refroidies par des ventilateurs : la différence maximale de température entre le ventre de vitesse et le nœud de vitesse est de 0.3 K ce qui a été considéré comme assez faible pour pouvoir conclure à une condition quasi-isotherme sur les parois. Les résultats adimensionnés par rapport à la vitesse de Rayleigh $u_{Rayleigh}$ sont en très bon accord et ont montré une évolution régulière du streaming avec l'augmentation du nombre de Reynolds non linéaire : du régime de streaming lent (quelque soit les valeurs des nombres sans dimension du moment qu'on respecte les limites asymptotiques) vers le régime de streaming rapide, où on observe la même déformation. La valeur adimensionnée de la vitesse de streaming diminue quand Re_{NL} augmente, et une nouvelle cellule de streaming apparaît près du ventre de vitesse pour $Re_{NL} \approx 30$, à la fois dans les simulations numériques et dans les expériences (voir Figures 5-10 de [66], article en annexe).

Même si la dynamique est similaire entre expérience et numérique il y a deux différences majeures entre les deux situations. Le signal acoustique dans la simulation est multifréquentiel, avec des ondes de choc pour des ondes de forte intensité, tandis que dans l'expérience l'onde est presque monofréquentielle. Les variations de température moyenne à l'intérieur du résonateur simulé sont très grandes (jusqu'a 20 K), tandis dans l'expérience elles sont de l'ordre de 0.3K en paroi, voire de l'ordre de 1K à l'intérieur du résonateur (mesures faites ultérieurement). Malgré ces différences, le comportement était similaire. Chose étrange : les résultats obtenus pour une condition isotherme à la paroi solide dans ce cas étaient à première vue en contradiction avec l'observation de Thompson et Atchley [80], qui avaient trouvé un streaming proche du streaming de Rayleigh, donc non deformé pour un grand Re_{NL}.

Toutes ces considérations nous ont conduit par la suite vers une étude du streaming à fort régime, non influencé par les effets de température. Nous avons donc fait l'hypothèse d'un écoulement isentropique.

2.3.3 Analyse du streaming en régime nonlinéaire, hypothèse insentropique

La même résolution par DNS a été faite cette fois-ci sur les équations de Navier-Stokes compressible écrites dans le réferentiel attaché au résonateur, pour un gaz suivant une loi d'état

isentropique 2.3 :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) & = & 0 \\ \dfrac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla p & = & \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}}) - \rho \dfrac{d\mathbf{V}}{dt} \\ p - p_0 & = & c_0^2 (\rho - \rho_0), \end{array}\right. \tag{2.3}$$

Les conditions limite imposées sont : l'adhérence aux parois solides ($r = R$, i.e. $\mathbf{v}(r = R, z) = 0$) et conditions de symétrie sur l'axe $r = 0$ et sur les frontières verticales $z = 0, L$ ($\mathbf{v}(r = 0, z) = v(z)\vec{e}_z$ avec $\frac{\partial v}{\partial r}(r = 0, z) = 0$, $\mathbf{v}(r, z = 0, L) = v(r)\vec{e}_r$ avec $\frac{\partial v}{\partial z}(r, z = 0, L) = 0$). Pour analyser le transitoire du streaming, de manière indépendante de l'établissement de l'onde, le code présenté précédemment est utilisé de la manière suivante : pendant l'établissement de l'acoustique, à la fin de chaque période acoustique le champ instantané est réinitialisé en soustrayant l'écoulement moyen sur cette même période. Ce faisant, l'écoulement de streaming est donc calculé seulement après l'établissement de l'onde. L'analyse des résultats a conduit aux observations suivantes :

Dans le cas du streaming lent : l'établissement du streaming se fait bien en deux étapes : d'abord les cellules de streaming intérieur se forment dans la couche limite sur une longueur transversale approximativement égale à $3\delta_\nu$ et elles n'évoluent presque plus par la suite. Les cellules extérieures apparaissent en dernier sur une échelle de temps bien plus longue.

Dans le cas du streaming rapide, les cellules de streaming intérieures se forment en premier sur un temps court et elles n'évoluent plus beaucoup. Elles perdent la symmétrie par rapport au milieu de la cellule, leur centre se déplaçant vers les nœuds de vitesse acoustique. Les cellules extérieures qui se forment par la suite sont symétriques au début du transitoire, puis elles se déforment de sorte que les centres des cellules se déplacent progressivement vers les nœuds de vitesse, comme dans les premières simulations qui tiennent compte de l'équation de l'énergie. Contrairement au streaming lent, le maximum de vitesse des cellules extérieures est plus petit que celui de vitesse des cellules intérieures, et cette différence augmente avec le nombre de Reynolds non linéaire, tout comme observé précédemment. L'apparition des nouvelles cellules contrarotatives se fait en dernier, à des nombres de Reynolds non linéaires plus grands que dans les simulations précedentes. Le transitoire comporte donc trois échelles de temps avant la stabilisation des cellules extérieures (voire figure 2.12, extraite de [25]).

Influence de l'inertie sur le streaming

Pour analyser la dynamique de l'écoulement de streaming et la compétition entre diffusion et convection, cette dernière associée aux effets inertiels, une analyse dimensionnelle a été effectuée sur les équations complètes qui gouvernent l'écoulement moyen. Ces équations sont obtenues en décomposant chaque inconnue physique en une composante oscillante périodique, notée avec l'exposant $'$, et une composante stationnaire obtenue par une moyenne temporelle sur la période acoustique, notée avec une barre $\bar{}$:

$$(\mathbf{v}, \rho, p) = (\mathbf{v}' + \overline{\mathbf{v}}, \rho' + \overline{\rho}, p' + \overline{p}), \tag{2.4}$$

La composante stationnaire décrit le streaming et elle vérifie les équations générales suivantes, obtenues en prenant la moyenne temporelle des équations 2.3 :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho}\, \overline{\mathbf{v}}) & = & -\nabla \cdot (\overline{\rho' \mathbf{v}'}) \\ \dfrac{\partial \overline{\rho}\, \overline{\mathbf{v}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho}\, \overline{\mathbf{v}} \otimes \overline{\mathbf{v}}) + \nabla \overline{p} & = & \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}}) + \bar{F}, \end{array}\right. \tag{2.5}$$

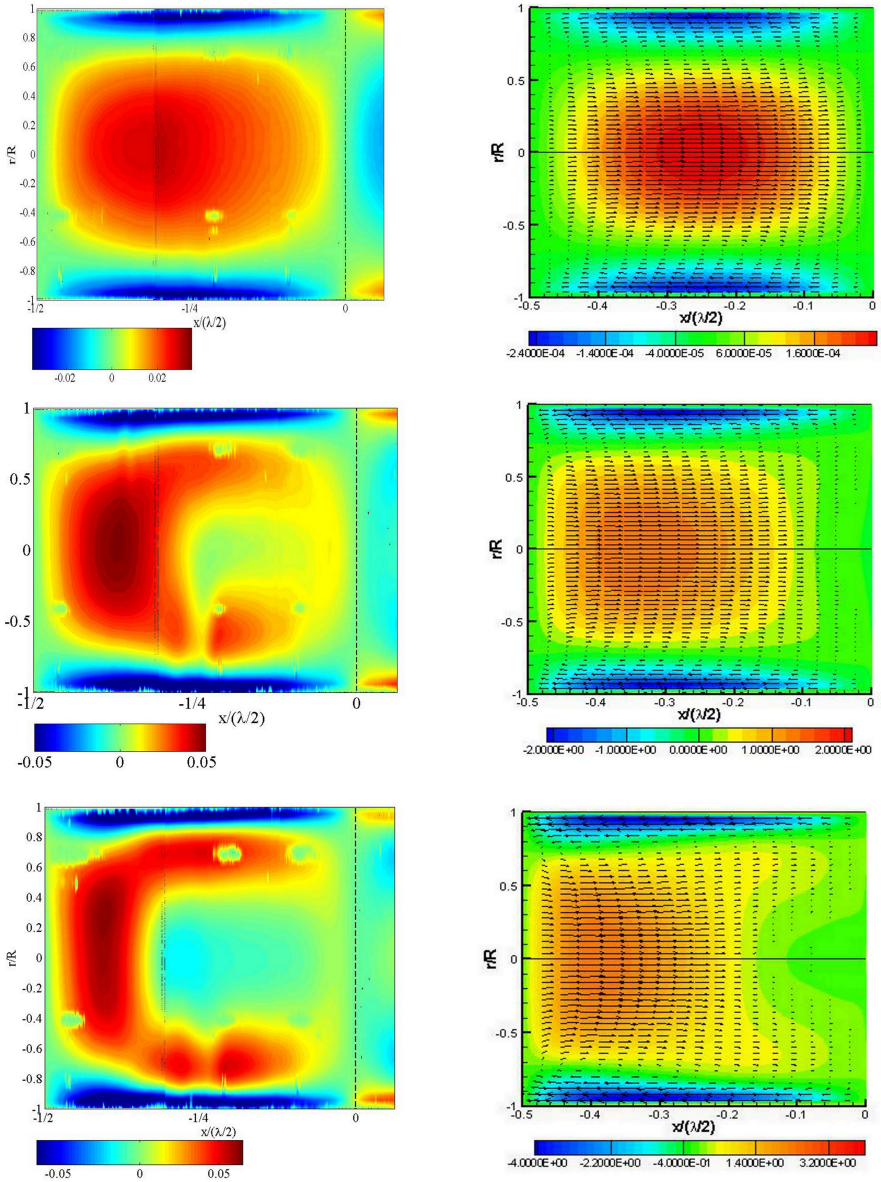


FIGURE 2.12 – Contours des isovaleurs pour la vitesse axiale de streaming (en m/s) et vecteurs vitesse. Gauche : résultats PIV de E_2 pour $Re_{NL} = 6, 14, 30$ de haut en bas, Droite : Résultats numériques de N_3 pour $Re_{NL} = 0.006, 51, 111$ de haut en bas.

où $\overline{\overline{\tau}}$ est la moyenne du tenseur des contraintes visqueuses et :

$$\bar{F} = -\nabla \cdot (\overline{\rho' \mathbf{v}'} \otimes \overline{\mathbf{v}} + \overline{\mathbf{v}} \otimes \overline{\rho' \mathbf{v}'} + \overline{\rho} \overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'} + \overline{\rho' \mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'}). \tag{2.6}$$

$\bar{F}$ est la force volumique qui crée l'écoulement moyen. Elle est la somme tous les termes sources, représentant la contribution nonlinéaire du champ acoustique imposé. À ceci on ajoute $\overline{p} - p_0 = c_0^2(\overline{\rho} - \rho_0)$.

Contrairement aux modèles habituels de streaming lent, dans ces équations on ne fait pas d'hypothèse sur l'ordre de grandeur des composantes moyennes par rapport aux fluctuations, et donc ces équations sont valables en général, pour tous les types de streaming. La forme adimensionnelle des ces équations fait apparaître un nombre de Reynolds $Re = \frac{4U_s}{\lambda}\frac{R^2}{\nu}$, défini comme le rapport entre le temps de diffusion transversale et le temps de convection longitudinale. Dans l'hypothèse des faibles oscillations acoustiques, $M \ll 1$, et d'une vitesse de streaming de l'ordre M^2 ($U_s = MU_{ac}$), ce nombre de Reynolds s'écrit $Re = \frac{4}{\pi}\frac{M^2}{Sh^2} = \frac{4}{\pi}Re_{NL}$ et on retrouve le nombre de Reynolds non linéaire introduit par Menguy et Gilbert [47]. Une comparaison des deux nombres en régime non linéaire montre que Re_{NL} surestime l'influence de l'inertie mais il reste extrêmement utile car il peut être calculé seulement avec l'acoustique. L'analyse des temps caractéristiques de diffusion et convection prédit que la diffusion de la quantité de mouvement dans la direction radiale sera dominante pour le streaming lent. Le temps caractéristique d'établissement du streaming extérieur sera $t_d = R^2/\nu$. Ceci est confirmé par l'analyse de l'évolution temporelle de la vitesse moyenne issue des simulations, en points spécifiques du résonateur. Dans le cas du streaming rapide, la diffusion dans la direction transverse est en compétition avec la convection dans la direction axiale. Ceci est confirmé par les courbes temporelles d'évolution de la vitesse moyenne en points spécifiques sur l'axe du résonateur, où les deux échelles de temps peuvent être observées (par un fit exponentiel pour la diffusion et un fit linéaire pour la convection).

La dynamique du streaming extérieur indique qu'il se comporte comme un écoulement entraîné par la couche limite. Pour montrer cela, on a fait une analogie avec un écoulement classique : celui d'une cavité entraînée par une paroi fictive qui bougerait avec une vitesse égale à la vitesse de streaming intérieure, à la frontière entre le streaming intérieur et le streaming extérieur. On a donc résolu numériquement les équations de Navier-Stokes sans source acoustique, sur une géometrie définie par $z \in [0, L/2]$ et $r \in [0, R - 3\delta_\nu]$, en imposant les mêmes conditions limites sauf sur $r = R - 3\delta_\nu$, où la vitesse est une vitesse axiale (sans composante transverse) et son profil est issu de la simulation directe décrite dans la section précédente.

Ces simulations ont montré que l'écoulement est presque incompressible et l'évolution des cellules de recirculation dans la cavité se fait à travers une compétition entre diffusion et convection. Cette fois-ci, la déformation due à la convection est différente pour des écoulements de plus en plus forts et elle ne conduit pas à l'apparition d'une cellule suplémentaire sur l'axe. Donc un simple écoulement d'entraînement ne conduit pas au même résultat.

L'étude a été complété par la résolution numérique des équations de streaming 2.5, ce qui a été appelé AMS (average model simulation). Dans cette méthode, on résout numériquement les équations 2.5, en utilisant comme termes sources un champ acoustique monofréquentiel issu de la DNS, dont l'amplitude est augmentée artificiellement pour obtenir des grandes valeurs du nombre de Reynolds non linéaire. Ainsi on a pu simuler le streaming créé par des ondes monofréquentielles de grande amplitude. Ces conditions de création du streaming sont similaires aux conditions du travail de [47] avec l'avantage du numérique qui permet de calculer le streaming pour $0.002 \leq Re_{NL} \leq 94$. Le résultat était sans appel : le comportement du streaming était en parfait accord avec la tendance observé par [47] pour $Re_{NL} = O(1)$, avec un raidissement du profil axial de la composante axiale de vitesse de streaming vers le ventre de vitesse acoustique et non pas vers les nœuds (voire figure 2.13, extraite de l'article [26], en annexe). Le comporte-

ment est vraiment similaire à celui de la cavité entraînée et ne conduit pas à l'apparition d'une cellule supplémentaire. De plus, les niveaux de vitesse de streaming, aussi bien dans le modèle de cavité entraînée que dans le modèle AMS , sont du même ordre de grandeur que la vitesse de streaming intérieur et donc que la vitesse de Rayleigh, parce que justement il n'y a plus cette cellule supplémentaire qui fait que la vitesse sur l'axe s'écrase littéralement.

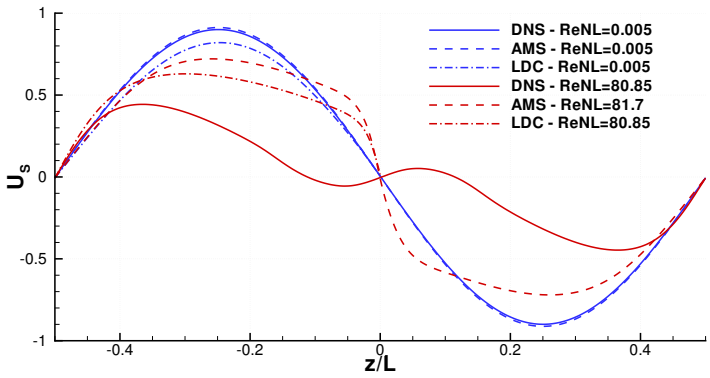


FIGURE 2.13 – Vitesse de streaming adimensionnée sur l' axe. Comparaison entre les résultats des simulations DNS, AMS, LDC (cavité entraînée), $R/\delta_\nu = 50$, pour streaming lent (bleu) et streaming rapide (rouge).

Avec ces dernières simulations, on a réussi à isoler l'effet de l'inertie sur le streaming et à mettre en évidence avec précision son influence sur le champ de streaming. On a conclu que l'inertie n'est pas responsable de l'apparition des nouvelles cellules sur l'axe. Dans la simulation du streaming à fort niveau avec l'AMS, le couplage entre l'acoustique et le streaming est dans un seul sens : l'acoustique crée le streaming , mais celui ci ne modifie pas l'acoustique qui est imposée. Dans les simulations DNS les deux composantes, acoustique et streaming évoulent en même temps et peuvent s'influencer mutuellement. Ceci nous a emmené à l'étude suivante : l'interaction non linéaire entre le streaming et l'acoustique, ou comment le streaming modifie à son tour l'acoustique qui change de nouveau le streaming, pour arriver à la mutation observée dans le comportement du streaming .

Étude des deux composantes des vitesses acoustiques et de streaming ; interaction non linéaire streaming - acoustique

Dans cette étude nous avons analysé l'évolution des différentes composantes des vitesses pour des ondes ayant une amplitude croissante, à partir des simulations numériques isentropiques (par DNS, voire section 2.3.3). La même analyse a été faite sur les mesures expérimentales de l'équipe d'Hélène Bailliet pour deux longueurs d'onde différentes. Dans les deux cas il s'agit de résonateurs larges ($R/\delta_\nu \gg 1$) et une large plage de variation de Re_{NL} est considérée, allant jusqu'à 112 pour les simulations et 120 pour les expériences. L'ensemble des cas est résumé dans le tableau 2.1.

Jusqu'à maintenant, seules les composantes axiales de vitesse de streaming et acoustique avaient été considérées. Ici, on a également analysé l'évolution des composantes transverse pour des faibles et fortes amplitudes de l'onde. Les résultats sont présentés sur la figure 2.14 où on a représenté la variation de $U_s \times \left(\frac{1}{1-4.8\frac{\delta_\nu}{R}}\right)$ avec U_{ac}, ce qui correspond au meilleur fit entre la prédiction de Rayleigh et les résultats numériques et expérimentaux dans le régime lent de streaming.

L'analyse des résultats indique que pour des faibles amplitudes la vitesse de streaming sur l'axe ($r = 0$) dépend du rapport R/δ_ν, $U_s \propto U_{ac}^2 \left(1 - 4.8\frac{\delta_\nu}{R}\right)$. Deux régimes ont été identi-

TABLE 2.1 – Paramètres des différents cas de comparaison.

Name	$f(Hz)$	R/δ_ν	R/λ	$U_{ac}(m/s)$	$U_s(m/s)$	Re_{NL}
N_1	20000	20	2×10^{-3}	$[0.2 - 60]$	$[0.4 \times 10^{-4} - 2.4]$	$[1.3 \times 10^{-4} - 12.18]$
N_2	20000	40	3.7×10^{-2}	$[0.4 - 80]$	$[1.6 \times 10^{-4} - 4.9]$	$[2 \times 10^{-3} - 86.62]$
N_3	20000	50	4.5×10^{-2}	$[0.5 - 73]$	$[2.6 \times 10^{-4} - 4.2]$	$[5.3 \times 10^{-3} - 112.7]$
N_4	5000	50	2.25×10^{-2}	$[0.5 - 62]$	$[2.6 \times 10^{-4} - 3.3]$	$[5.3 \times 10^{-3} - 81.3]$
E_1	88	84	5×10^{-3}	$[2.7 - 45]$	$[90 \times 10^{-4} - 1.5]$	$[0.43 - 120.87]$
E_2	240	138	1.4×10^{-2}	$[2.7 - 30]$	$[80 \times 10^{-4} - 0.4]$	$[1.17 - 145]$

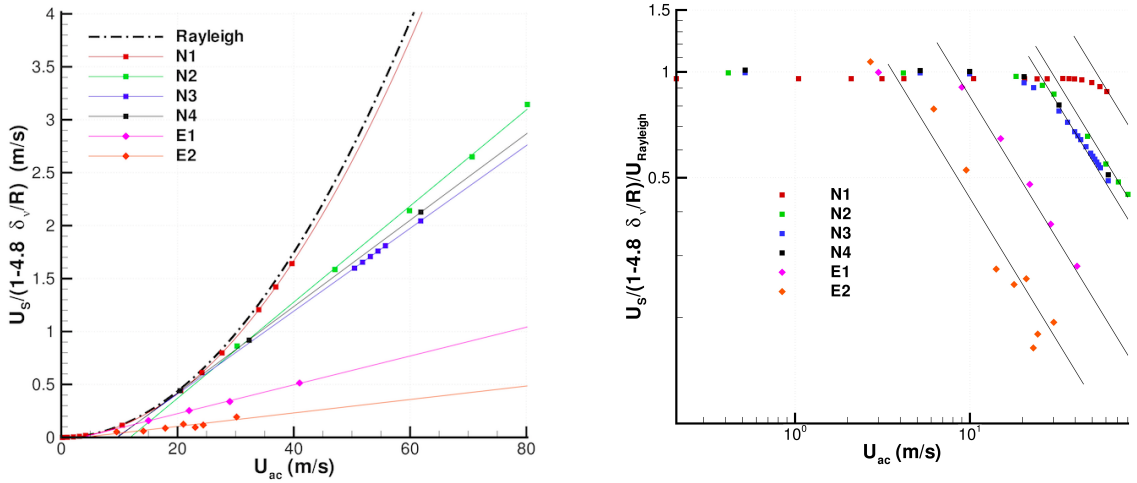


FIGURE 2.14 – Gauche : $U_s \times \left(\frac{1}{1-4.8\frac{\delta_\nu}{R}}\right)$ en fonction de l'amplitude acoustique U_{ac}. Droite : sur une échelle log-log

fiés : le premier correspond à une dépendance quadratique de la vitesse de streaming axiale en fonction de U_{ac} , comme dans la loi de Rayleigh, valable jusqu'à une certaine valeur de U_{ac}, puis un deuxième régime où la dépendance est linéaire, avec une pente différente pour chaque configuration. Dans le deuxième régime on peut observer des cellules supplémentaires ou pas en fonction du cas. On ne peut pas observer de corrélation entre la transition au deuxième régime et l'apparition de nouvelles cellules de streaming. La même analyse a été faite pour les vitesses de streaming des cellules intérieures. Dans ce cas la variation est toujours parabolique quelque soit l'amplitude acoustique. Un seul régime est donc observé et on trouve de nouveau une dépendance du rapport R/δ_ν de la forme $U_s \propto U_{ac}^2 \left(1 - 6.8\frac{\delta_\nu}{R}\right)$.

La composante radiale de la vitesse acoustique est obtenue par intégration radiale de l'équation de continuité, connaissant la composante axiale. Elle a la même dépendance axiale que la pression acoustique. La variation radiale de v_{ac} est linéaire sur tout le diamètre, excepté la région en proche paroi. De même, la composante radiale de la vitesse de streaming a une dépendance axiale opposée à celle de la vitesse axiale de streaming et son échelle est plus petite que celle de la vitesse axiale (dans le rapport $4R/\lambda$ pour le streaming extérieur).

Pour des fortes amplitudes acoustiques, les profils des vitesses radiales acoustiques et de streaming sont modifiées. Les profils de la composante radiale de vitesse acoustique ne sont plus linéaires en r mais polynômiales. Les profils de la composante radiale de vitesse de streaming ne sont plus sinusoïdaux par raport à x et décroissent jusqu'à changer de signe quand une cellule supplémentaire de streaming apparaît.

Si on compare les composantes radiales des vitesses acoustiques et de streaming (voir figure 2.15) on observe une dépendance linéaire de V_{ac} en fonction de U_{ac}. Ceci ne dépend pas du rapport R/δ_ν. L'amplitude de la composante radiale de la vitesse de streaming V_s est une fonction quadratique de U_{ac}. Cette amplitude augmente avec R/δ_ν. Au moment du changement de régime, les deux courbes se croisent et la vitesse de streaming V_s devient plus grande que la vitesse acoustique V_{ac}, ce qui veut dire aussi que la séquence asymptotique qui permet de retrouver les deux composantes n'est plus valable. Cette observation ouvre de perspectives de modélisation pour trouver une relation d'ordre entre les petits paramètres sans dimension et une nouvelle séquence asymptotique compatible avec ces observations. L'ensemble des résultats de cette section peut être retrouvé dans [25].

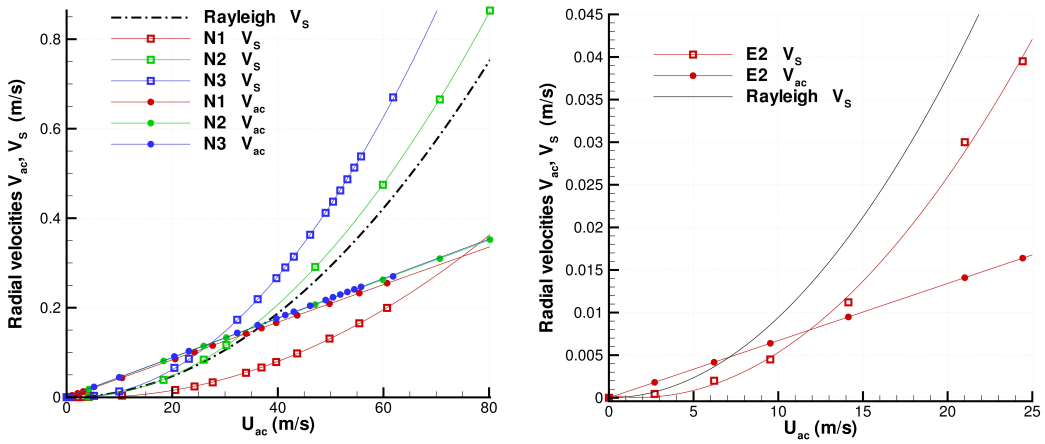


FIGURE 2.15 – Vitesses radiales maximales de streaming et acoustique en fonction de U_{ac}. Gauche : Résultats numériques. Droite : Résultats expérimentaux.

2.3.4 Retour au régime linéaire : analyse des termes sources de streaming en hypothèse isentropique

L'analyse des résultats en régime lent et rapide, pour des simulations numériques ou mesures expérimentales ont mis en évidence un comportement du streaming dépendant de la largeur du résonateur, même dans le cas des tubes larges. Elle a montré aussi les mécanismes physiques à l'origine de l'évolution du streaming intérieur et extérieur. Pour mieux comprendre le rôle des termes sources acoustiques, nous avons fait une étude de l'influence de chaque terme en régime lent, en travaillant sur les équations linéaire de streaming, toujours en hypothèse isentropique. L'étude a été faite aussi bien en canal plan qu'en géométrie cylindrique. Seuls des guides d'onde avec des valeurs du rapport ($R/\delta_\nu \gtrsim 6$) assez grandes ont été considérés, pour assurer l'existence des cellules de streaming extérieures ([9], [38]). Une hypothèse est faite sur la géométrie $(R/L)^2 \ll 1$, de sorte que la diffusion de la quantité de mouvement dans la direction axiale est négligeable devant la diffusion de la quantité de mouvement dans la direction radiale. Les équations linéaires de streaming sont résolues suivant [83]. Les deux équations de la quantité de mouvement pour les deux composantes de la vitesse de streaming sont combinées pour aboutir à l'équation pour la composante axiale $\overline{u}$, sous la forme :

$$-\frac{\pi}{2}c_0\hat{L}\frac{\partial^3\overline{u}}{\partial\hat{y}^3} = -\hat{L}\frac{\partial^2(\overline{u'u'})}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}} - \hat{L}^2\frac{\partial^2(\overline{u'v'})}{\partial\hat{y}^2} + \frac{\partial^2(\overline{u'v'})}{\partial\hat{x}^2} + \hat{L}\frac{\partial^2(\overline{v'v'})}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}. \tag{2.7}$$

où les variables spatiales sont sans dimensions $\hat{y} = y/\delta_\nu$, $\hat{x} = x/L$, $\hat{t} = t/T$, $\hat{R} = R/\delta_\nu$, $\hat{L} = L/\delta_\nu$ $L/T = (1/2)c_0$.

Dans tous les modèles linéaires de streaming (e.g. [64], [83], [9], [38]) seuls les deux premiers termes sont considérés car dominants en ordre de grandeur. Ici nous avons pris en compte tous les termes et, en considérant séparement les quatre problèmes liés à chaque terme source, nous avons montré que le troisième terme source peut avoir un effet important, du même ordre de grandeur que les deux premiers. Chaque solution $\overline{u}_i$ du problème associé au terme source i est calculé explicitement avec Mathematica. Leurs expressions sur l'axe, adimensionnées par rapport à $\overline{u}_R = -\frac{3}{16}\frac{U_{ac}^2}{c_0}\sin(2\pi\hat{x})$ et simplifiées à l'odre $O(1/\hat{R})$ sont :

$$\frac{\overline{u}_1(\hat{x},0)}{\overline{u}_R} = \frac{2}{3} - \frac{5}{\hat{R}}, \qquad \frac{\overline{u}_2(\hat{x},0)}{\overline{u}_R} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6\hat{R}}, \tag{2.8}$$

et a somme des deux $\overline{u}_{1+2}$:

$$\frac{\overline{u}_{1+2}(\hat{x},0)}{\overline{u}_R} = 1 - \frac{29}{6}\frac{1}{\hat{R}} \tag{2.9}$$

Pour des guides larges ($\hat{R} \gg 1$), on retrouve la solution de Rayleigh. Les contributions du premier et du second terme sont $2/3$, respectivement $1/3$, comme indiqué par [43]. L'équation montre une variation linéaire avec $1/\hat{R}$ (ou δ_ν/R), avec le même coefficient que dans les observations numériques et expérimentales (voir figure 2.14)($29/6 = 4.8$). Ce terme peut être non-négligeable pour des valeurs modérées de $\hat{R}$. Le premier problème produit le streaming intérieur, tandis que le deuxième contribue seulement au streaming extérieur (voire figure 3 de [11], article en annexe).

La solution associée au troisème terme est approchée sur l'axe :

$$\frac{\overline{u}_3(\hat{x},0)}{\overline{u}_R} = -\frac{2\pi^2}{45}\left(\frac{\hat{R}}{\hat{L}}\right)^2\left[\hat{R} + \frac{75}{2} - \frac{585}{4\hat{R}} + \frac{180}{\hat{R}^2}\right]. \tag{2.10}$$

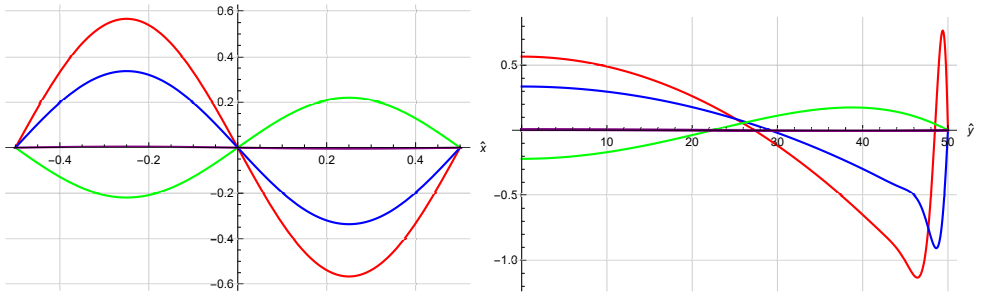


FIGURE 2.16 – Vitesse axiale de streaming $\overline{u}_1(\hat{x},\hat{y})/\overline{u}_R$ (rouge), $\overline{u}_2(\hat{x},\hat{y})/\overline{u}_R$ (bleue), $\overline{u}_3(\hat{x},\hat{y})/\overline{u}_R$ (vert) and $\overline{u}_4(\hat{x},\hat{y})/\overline{u}_R$ (violet). $\hat{R} = 50$, $\hat{L} = 500$. Gauche : $\hat{y} = 0$; droite : $\hat{x} = -1/4$.

Cette vitesse $\overline{u}_3$ est de signe opposé par rapport à la solution de Rayleigh, par conséquent, les tourbillons associés tournent dans le sens opposé. Le quatrième terme $\overline{u}_4$ trouvé est quand à lui négligeable devant les autres pour toutes les valeurs de $\hat{R}$. La superposition des quatre solutions conduit à une nouvelle expression pour la vitesse de streaming axiale, qui sur l'axe, et en négligeant les termes d'ordre inférieur, devient :

$$\frac{\overline{u}(\hat{x},0)}{\overline{u}_R} = \frac{\sum_{i=1}^{4}\overline{u}_i(\hat{x},0)}{\overline{u}_R} = 1 - \frac{29}{6}\frac{1}{\hat{R}} - \frac{2\pi^2}{45}\frac{\hat{R}^3}{\hat{L}^2}\left[1 + \frac{73}{2\hat{R}} - \frac{585}{4\hat{R}^2} + \frac{180}{\hat{R}^3}\right] . \tag{2.11}$$

Sur la figure 2.16 on a représenté chacune des quatre solutions. On observe que pour ces valeurs des paramètres, la contribution du troisième terme est du même ordre de grandeur que la contribution du deuxième, tandis que le quatrième est négligeable. Cette expression montre que pour certaines géométries, l'écoulement de streaming peut devenir négatif sur l'axe $\overline{u}(\hat{x},0)/\overline{u}_R < 0$ et dans ce cas on aura des cellules qui tournent dans le sens inverse des tourbillons de Rayleigh. La condition pour une telle situation est donnée dans [11].

2.3.5 Retour au regime linéaire et aux effets thermiques : conséquences sur le régime non linéaire

Le retour vers les effets thermiques a été fait suite aux dernières études publiées dans la littérature [18, 19, 49] sur l'effet très important d'un gradient thermique transverse sur la déformation du streaming , même dans le cas linéaire, effet d'autant plus important si les résonateurs sont très larges. Ceci pouvait être utilisé pour réinterpréter les résultats de streaming en régime non linéaire.

Récapitulons nos observations et nos résultats :

Nous avons vu dans les premières simulations de la section 2.3.2 l'évolution du champ de température moyen au fur et à mesure que l'amplitude de l'onde acoustique augmente. Sur la figure ci-dessous nous avons reproduit les lignes de courant superposées au champ de température moyen, issus de la simulation numérique, pour Re_{NL} allant de 5 à 29 (figure 2.17).

À bas niveau, le champ de température est presque unidimensionnel : il y a le pompage de chaleur thermoacoustique en bord de couche limite et ensuite une diffusion de la chaleur dans la direction transversale, l'écoulement moyen de streaming est très faible et la diffusion domine la convection dans la dynamique du streaming extérieur. Le tout se stabilise dans cette configuration où le champ de température moyen est stratifié horizontalement. Quand l'intensité

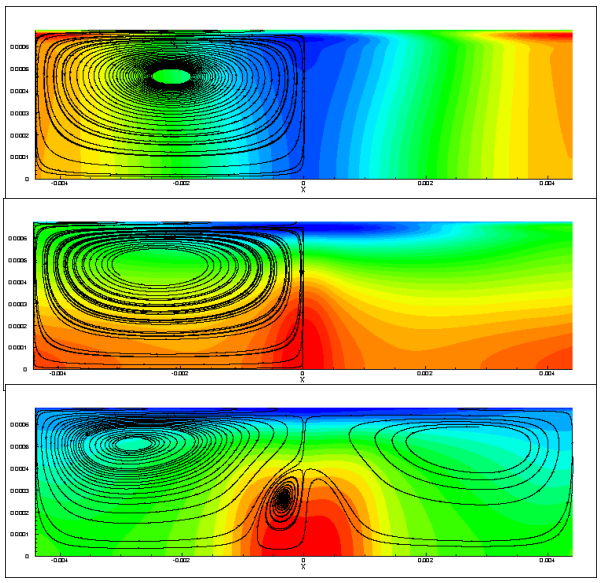


FIGURE 2.17 – Lignes de courant pour l'écoulement de streaming, pour $Re_{NL} = 5\,,16\,,29$ (de haut en bas).

de l'onde augmente, nous avons observé dans la dynamique du streaming plusieurs échelles de temps : une première échelle pendant laquelle les choses se passent comme en streaming lent, une deuxième échelle où la convection est visible et avec elle on observe également la chaleur transportée de manière convective selon la direction de l'écoulement de streaming extérieur : en bord de couche limite elle est transportée du ventre de vitesse acoustique vers le nœud de vitesse acoustique et sur l'axe c'est l'inverse : du nœud vers le ventre. Le tout se stabilise en un champ température moyen bidimensionnel et les cellules de streaming sont déformées. A partir d'une certaine valeur de Re_{NL} on a une stratification presque inversée et en même temps plusieurs cellules de streaming qui apparaissent sur l'axe, près du ventre de vitesse acoustique. Le passage d'une configuration avec une cellule extérieure à une configuration à plusieurs cellules semble être régulier.

Il nous faut un coupable !

La modification des cellules de streaming n'est pas due à l'inertie, comme on a pu le démontrer en écoulement isentropique. Toujours en écoulement isentropique nous avons montré que la déstabilisation du streaming à très fort niveau est due à une interaction non linéaire streaming - acoustique. Le streaming, s'il est assez fort modifie l'acoustique, qui modifie à son tour le streaming. Cette mutation a lieu à des niveaux bien plus forts en insentropique que pour les niveaux expérimentaux, ou ceux des simulations prenant en compte la thermique. Ce qui nous amène à reconsidérer les effets de température : le streaming à fort niveau modifie la température moyenne, qui modifie l'acoustique, qui modifie à son tour le streaming. L'extraordinaire accord obtenu en 2013 entre simulations numériques et expériences nous a fait laisser de côté les effets thermiques en première instance, ce qui aussi était logique quand on veut analyser les sources, l'une après l'autre. Ce cheminement a eu du bon aussi car nous avons compris le rôle de l'inertie et l'existence d'une interaction non linéaire entre streaming et acoustique, responsable d'un vrai changement de régime et qui est un phénomène non linéaire de nature différente de l'inertie.

Nous avons donc essayé d'estimé l'influence des effets thermiques sur le streaming pour des fortes amplitudes acoustiques en décomposant le problème de la manière suivante :

1. Calcul analytique de l'acoustique et du streaming, en présence d'un gradient vertical de température, en régime de streaming lent.

   D'abord nous avons quantifié l'effet de la distribution de température stratifié sur l' écoulement de streaming dans le cas linéaire (streaming lent). Le modèle analytique développé dans [11] pour un écoulement isentropique a été étendu à un gaz parfait initialement au repos, pour lequel la variation de la température moyenne se fait seulement selon la direction transverse :

   $$\frac{T_m}{T_0} = 1 + \Theta(1 - \frac{\hat{y}^2}{\hat{R}^2}) = f(\hat{y}), \tag{2.12}$$

   avec $\Theta = \frac{\Delta T}{T_0} \ll 1$, ΔT étant la différence de température dans le fluide entre la paroi et l'axe du résonateur. L'acoustique est recalculée en présence de ce champ moyen de température avec Mathematica. Si la composante axiale de la vitesse est presque inchangée par rapport au cas $\Delta T = 0$, la composante transverse est modifiée de manière plus importante. Le calcul de la vitesse de streaming axiale montre une importante dépendance du paramètre Θ, notamment sur l'axe :

   $$\begin{aligned} \frac{\overline{u}(\hat{x},0)}{\overline{u}_R} &= 1 + \frac{2}{3}\frac{(\gamma-1)\sqrt{Pr}}{1+Pr} - \frac{29}{6}\frac{1}{\hat{R}} - \frac{2}{45}\Theta\hat{R}^2 + \\ &\frac{1}{6\hat{R}}\left[\frac{2(\gamma-1)}{Pr^{3/2}(1+Pr)^2}\left(3+5Pr+6Pr^{3/2}-8Pr^2-4Pr^3\right)\right] \quad . \end{aligned} \tag{2.13}$$

   grâce au terme en $\hat{R}^2$. Ce terme, proportionnel à $\Theta\hat{R}^2$ peut générer un tourbillon supplémentaire sur l'axe, tournant dans la même direction que celui de Rayleigh si $\Theta < 0$ (le fluide près de l'axe est plus froid que celui près de la paroi), ou dans la direction opposée si $\Theta \geq 0$ (le fluide près de l'axe est plus chaud que celui près de la paroi) auquel cas l'écoulement du tourbillon extérieur diminue et éventuellement conduit à un écoulement total de streaming qui tourne dans le sens inverse par rapport au streaming de Rayleigh . Ceci est consistent avec les résultats de [18, 19, 20, 49] avec l'avantage d'avoir trouvé des expressions simplifiées permettant de quantifier ce phénomène. À titre d'exemple, pour un résonateur avec $\hat{R} = 50$, une différence de température de quelques degrés peut modifier fortement la vitesse de streaming qui devient négative sur l'axe et donc un tourbillon supplémentaire peut apparaître. Pour un résonateur trois fois plus large $\hat{R} = 150$ le même effet est obtenu avec une différence de température de seulement quelque dizaines de degrés. Ceci remet en cause l'interprétation qu'on a pu faire sur les expériences avec des conditions en parois $\Delta T = 0.3$ qu'on a considéré quasi-isothermes.

2. Estimation du gradient température longitudinal établi en proche paroi par transport de chaleur thermoacoustique.

   Dans l'analyse du streaming on a observé qu'un gradient de température longitudinal est établi en proche paroi suite au transport de chaleur thermoacoustique, résultat connu depuis très longtemps [48]. De plus, les observations de [80] indiquent que la condition limite imposée à la paroi du résonateur a une grande influence sur le champ de streaming. Il est donc important de connaître la distribution de température dans la paroi du résonateur, qui est le résultat de l'effet thermoacoustique dans le fluide, de la conduction

thermique dans la paroi solide et de l'échange entre la paroi et l'air extérieur. La différence de température à la paroi entre un nœud de vitesse et un ventre de vitesse a pu être estimée :

$$\Delta T_{long} = \left(\frac{k}{k_s}\hat{w} + \frac{k}{h\delta_\nu} \right) \frac{1}{c_p}\sqrt{Pr} \left[\frac{-1 + Pr^{3/2} + \varepsilon_0\sqrt{Pr}(1+Pr)}{(1+\varepsilon_0)(1+Pr)} \right] U_{ac}^2 \quad , \quad (2.14)$$

en fonction du carré de l'amplitude acoustique (résultat déjà reporté dans l'expérience de [80] et vérifée également sur les mesures de [66]), des propriétés thermophysiques du fluide et du solide, de l'épaisseur de la paroi w ($\hat{w} = w/\delta_\nu$) et du coefficient d'échange avec l'air extérieur h.

3. Conséquence sur le régime non linéaire : nouveau critère pour caractériser la mutation du streaming.

En régime de streaming rapide, on a vu que le champ de température est déformé par rapport à la stratification horizontale initiale, cette dernière étant liée à l'établissement du streaming intérieur et à l'effet thermoacoustique. Dans le cas d'un streaming rapide, la convection crée une stratification transverse de la température moyenne, et donc un ΔT transverse du même ordre de grandeur que le ΔT_{long}. En posant $\Delta T = \Delta T_{long}$ on peut quantifier l'influence du ΔT_{long} sur le streaming lent et en déduire son influence sur le streaming rapide, tout ceci dans l'hypothèse où l'effet de l'inertie sur le streaming sera plus petit que l'effet de la réorganisation du champ de température. L'équation 2.13 nous fournit un critère d'annulation de la vitesse sur l'axe et donc une valeur minimale du ΔT_{long} à partir de laquelle une nouvelle cellule de streaming, tournant dans le sens inverse, apparait. Ceci peut se traduire en termes de critère sur le nombre de Reynlods non linéaire :

$$Re_{NL} \geq K_C \quad (2.15)$$

où

$$K_C = 30 \frac{k_s/k}{\hat{w} + k_s/(h\delta_\nu)} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{1+Pr}{(\gamma-1)\sqrt{Pr}} \right) \frac{1}{(1 - Pr^{3/2})}. \quad (2.16)$$

K_C est un nouveau paramètre fournissant une valeur critique pour Re_{NL} à partir de laquelle la transition vers plusieurs cellules de streaming se fait . Il dépend des caractéristiques thermo-physiques du fluide et de la paroi, de la fréquence de l'onde ainsi que du coefficient de transfert de chaleur. La façon dont l'échange de chaleur se fait entre la paroi et l'air extérieur a donc une grande importance sur la dynamique du streaming. Une comparaison avec les expériences de [80] et [66] montre que ce nouveau critère explique la diminution drastique du champ de streaming à partir d'une valeur spécifique de Re_{NL}, qui est d'ailleurs différente entre les deux expériences. Et enfin, le comportement étrangement non modifié du streaming, pour une condition en paroi isotherme et pour le même nombre Re_{NL} pour lequel il y a annulation de vitesse de streaming en condition incontrôlée ou adiabatique, peut être expliqué au regard du nouveau critère : l'estimation du K_C critique dans les conditions de l'expérience de [80] donne $K_C = 931$ (car le coefficient d'échange avec l'extérieur est infini dans le cas isotherme). Par conséquent, en paroi isotherme on est très loin d'une influence quelconque de la température sur le streaming qui va voir seulement l'influence de l'inertie, relativement faible et qui ne conduit pas à une modification majeure du streaming de Rayleigh. Il reste à expliquer pourquoi dans la simulation avec paroi isotherme on a observé la mutation du streaming

mais ceci fera l'objet d'un travail futur. Une chose est presque sûre : le coupable originel est le même : le champ inhomogène de température.

Ce travail très récent fait l'objet du dernier article soumis [27].

Chapitre 3

Thermoacoustique : Modélisation et simulation d'un moteur thermoacoustique

Depuis 2004, je travaille en étroite collaboration avec C. Weisman sur la modélisation théorique des machines thermoacoustiques. Nous avons co-encadré deux thèses et de multiples stages d'étudiants.

En 2007-2008 nous avons démarré un travail de modélisation et simulation d'un moteur thermoacoustique à onde stationnaire en prenant compte le caractère multidimensionnel et non linéaire du phénomène à l'intérieur de la cellule active thermoacoustique. Le travail de modélisation est le fruit d'une collaboration avec C. Weisman et L. Bauwens. La mise en oeuvre numérique a éte faite avec O. Hireche durant sa thèse, en utilisant le code Faible Mach développé au laboratoire par P. Le Quéré, code qui a nécéssité une adaptation à l'application thermoacoustique.

La théorie classique linéaire basée sur les travaux de Rott [70, 4, 78] peut prédire les ΔT_{crit} critiques au-delà desquelles il y a déclenchement des oscillations, ainsi que les courbes de stabilité pour chaque mode acoustique, en assez bon accord avec les expériences [6, 7]. Néanmoins, les études basées sur la théorie linéaire restent dans le domaine fréquentiel. Elles ne décrivent pas le comportement transitoire des moteurs ni la compétition qui peut exister entre différents modes instables, ni les non linéarités ou les effets multi -dimensionnels dans la cellule active.

3.1 Modélisation d'un moteur thermoacoustique idéalisé

Le modèle hybride qui fait l'objet de ce chapitre a été développé pour simuler le démarrage d'un moteur thermoacoustique, de la phase transitoire jusqu'à la saturation et l'établissement du régime périodique [39]. Dans ce modèle le système est séparé en deux régions différentes : le domaine occupé par le stack et les échangeurs de chaleur (domaine que l'on appellera cellule active) et le résonateur. La longueur de la cellule active est très petite devant la longueur d'onde dans ce type de systèmes et elle est du même ordre de grandeur que l'amplitude du déplacement acoustique en régime établi, pour les moteurs qui génèrent des ondes de forte intensité. Avec cette hypothèse on aboutit à un modèle d'approximation Faible Mach des équations de Navier-Stokes compressibles pour la cellule active. Pour le résonateur, dont la longueur est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde, le modèle choisi est celui de l'approximation acoustique linéaire 1-D, non dissipative. Le couplage des deux modèles se fait à chaque pas de temps jusqu'à l'ordre Mach dans les développements asymptotiques des variables physiques. Il s'agit d'un raccord asymptotique dans un modèle de perturbation singulière. Ce modèle présente l'avantage de pouvoir prendre en compte les non linéarités advectives de l'écoulement. Notons que l'approximation Faible Mach [58] a été utilisée par le passé dans la modélisation de

la réfrigération thermoacoustique [14, 84, 85], mais avec une acoustique imposée aux frontières de la cellule active et qui n'est pas influencée par les échanges dans cette dernière.

3.1.1 Modèle physique

Le système idéalisé est constitué d'un résonateur cylindrique, fermé à l'extrémité gauche et chargé à l'extrémité droite, à l'intérieur duquel est placée la cellule active thermoacoustique. Cette dernière est composée de deux échangeurs séparés par le stack. Entre les échangeurs et le stack il y a un espace horizontal, de la taille de l'espacement entre les plaques. Il est représenté dans la figure 3.1 (haut).

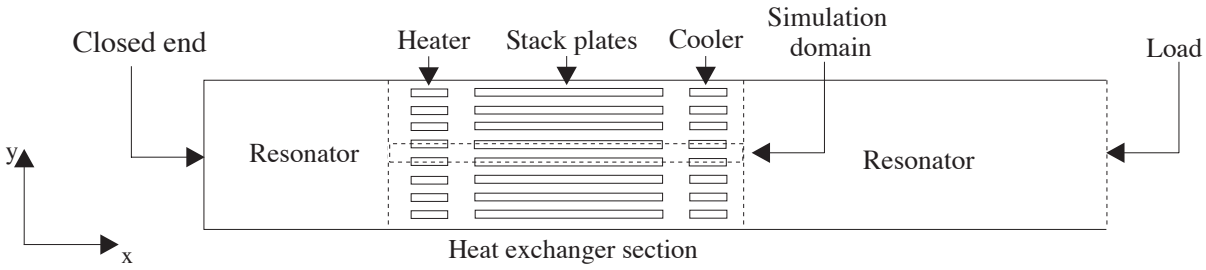


FIGURE 3.1 – Géométrie du système idéalisé.

3.1.2 Echelles de référence et adimensionnement

Pour décrire l'acoustique dans le résonateur on choisit la longueur du résonateur $\tilde{L}_{res}$ comme échelle spatiale. La température de référence $\tilde{T}_{ref}$ est la température de l'échangeur froid. On prendra $\tilde{c}_{ref} = \sqrt{\gamma r \tilde{T}_{ref}}$ comme vitesse du son de référence dans le gaz, $\gamma = c_p/c_v$ étant le rapport des chaleurs spécifiques à $\tilde{T}_{ref}$ et r la constante du gaz. L'échelle de temps est déterminée par la résonance acoustique $\tilde{t}_{ref} = \tilde{L}_{res}/\tilde{c}_{ref}$. Elle représente la moitié de la période acoustique du mode résonant fondamental pour un tube rempli de gaz à température $\tilde{T}_{ref}$, fermé à ses deux extrémités. C'est l'unique échelle de temps que l'on va utiliser. En régime établi périodique, le déplacement acoustique a une amplitude du même ordre de grandeur que la longueur du stack et $\tilde{L}_{st} \ll \tilde{L}_{res}$. Par conséquent, pour établir une approximation pouvant décrire l'écoulement à l'intérieur de la cellule active il est préférable d'utiliser une autre échelle spatiale : $\tilde{L}_{st}$. L'écoulement dans le régime périodique est caractérisé par une amplitude de vitesse acoustique qui aura l'ordre de grandeur donné par $\tilde{U}_{ref} = \tilde{L}_{st}/\tilde{t}_{ref}$ Le nombre de Mach caractéristique du régime établi est définit par :

$$M = \frac{\tilde{U}_{ref}}{\tilde{c}_{ref}} = \frac{\tilde{L}_{st}}{\tilde{L}_{res}} \ll 1 \tag{3.1}$$

La pression moyenne du gaz au repos est prise comme une pression de référence $\tilde{p}_{ref}$. La masse volumique de référence est la valeur moyenne au repos, définie par l'équation d'état $\tilde{\rho}_{ref} = \tilde{p}_{ref}/(r\tilde{T}_{ref})$.

Toutes les variables sont adimensionnées par ces valeurs de référence dans tout le domaine, excepté pour les coordonnées spatiales dont la valeur de référence est soit $\tilde{L}_{st}$ (cellule active) soit $\tilde{L}_{res}$ (résonateur).

$$\rho = \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_{ref}}, p = \frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_{ref}}, u = \frac{\tilde{u}}{\tilde{U}_{ref}}, \hat{x} = \frac{\tilde{x}}{\tilde{L}_{ref}}, t = \frac{\tilde{t}}{\tilde{t}_{ref}}$$

Par la suite, on écrit les équations sans dimension dans les deux régions et on cherche ensuite une approximation de chaque problème en développant chaque inconnue en fonction du petit paramètre $M \ll 1$.

$$\begin{aligned} u &= u^{(0)} + o(1) \\ T &= T^{(0)} + MT^{(1)} + o(M) \\ p &= p^{(0)} + Mp^{(1)} + o(M) \\ \rho &= \rho^{(0)} + M\rho^{(1)} + o(M) \end{aligned} \tag{3.2}$$

où $u^{(i)},\ T^{(i)},\ p^{(i)},\ \rho^{(i)} = O(1), i = 0,\ 1, ...$

3.1.3 Résonateur

Le résonateur se compose de deux parties situées à gauche et à droite du centre de la cellule active et ayant pour longueur $\tilde{l}_L$ et $\tilde{l}_R$ ($\tilde{l}_L + \tilde{l}_R = \tilde{L}_{res}$). Le schéma du résonateur en variables sans dimensions est présenté dans la figure 3.2 : Le diamètre du résonateur étant très grand

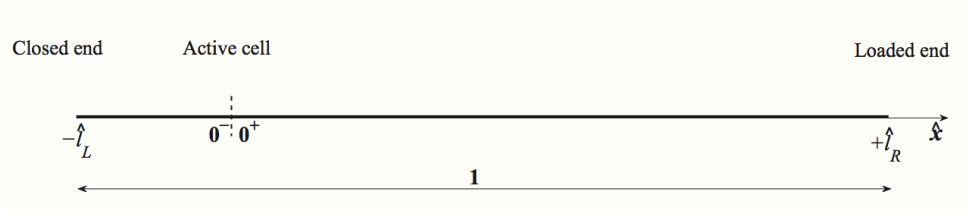


FIGURE 3.2 – Modélisation 1D du résonateur .

devant l'épaisseur des couches limites visqueuse et thermique, l'écoulement peut être considéré unidimensionnel, non visqueux et isentropique. Les équations régissant le mouvement du fluide sont les équations classiques d'acoustique linéaire isentropiques. Elles sont résolues avec avec la méthode des caractéristiques à l'aide des invariants de Riemann :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\hat{x}, t) = \gamma u^{(0)} - \sqrt{T^{(0)}} p^{(1)} \\ \mathcal{R}(\hat{x}, t) = \gamma u^{(0)} + \sqrt{T^{(0)}} p^{(1)}. \end{cases} \tag{3.3}$$

3.1.4 Conditions aux extrémités du tube

Les conditions aux limites dans le résonateur sont celles relatives à une onde plane dans un tube fermé à une extrémité et avec une charge à l'autre extrémité. Ces conditions portent sur les fluctuations de vitesse et pression :

$$u(-l_L, t) = 0, \quad p^{(1)}(l_R, t) = f u(l_R, t) \tag{3.4}$$

Elles seront interprétées à travers l'évolution des invariants de Riemann sur les caractéristiques. La condition à l'extrémité gauche est transportée par les invariants de Riemann en $\hat{x} = 0^-$ ce qui représente la position de la cellule active, du côté chaud (voire figure 3.3) :

$$\mathcal{R}_L(0^-, t_0) = -\mathcal{L}_L\left(0^-, t_0 - \frac{2\hat{l}_L}{\sqrt{T^{(0)}}}\right). \tag{3.5}$$

A l'extrémité droite du tube, à la distance $\hat{x} = \hat{l}_R$, est placée une charge. La relation entre vitesse et pression est de nouveau transportée sur les caractéristiques par les invariants de Riemann en $\hat{x} = 0^+$, à la sortie de la cellule active (voir figure 3.3).

$$\mathcal{L}_R\left(0^+, t_0\right) = Z\mathcal{R}_R\left(0^+, t_0 - \frac{2\hat{l}_R}{\sqrt{T^{(0)}}}\right) \tag{3.6}$$

où

$$\mathcal{Z} = \frac{\gamma - f\sqrt{T^{(0)}}}{\gamma + f\sqrt{T^{(0)}}} \tag{3.7}$$

avec $T^{(0)} = 1$ (car on décrit la propagation dans la partie froide du tube).

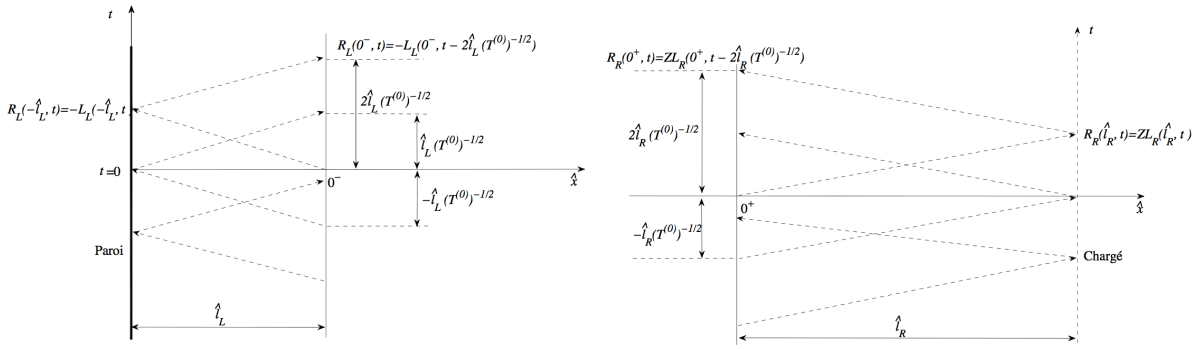


FIGURE 3.3 – Evolution des variables de Riemann sur les caractéristiques à gauche et à droite de la cellule active.

Z est un coefficient réel, dont la valeur absolue est égale au module du coefficient de reflexion de l'onde à l'extrémité droite du tube, où il y a une charge. Quand $f \to \infty$, $Z \to -1$, ce qui correspond à une extrémité fermée et un résonateur à demi-longueur d'onde. Quand $f \to 0$, $Z \to 1$, ce qui correspond à une extrémité ouverte et un résonateur à un quart de longueur d'onde. Les deux cas correspondent à une onde stationnaire pure. Lorsque $f = \gamma$, Z devient zéro et $\mathcal{L}_R = 0$, donc il n'y a pas de réflexion de l'onde à l'extrémité chargée et la solution ne dépend plus de la longueur à droite de la cellule active. C'est une onde progressive pure.

3.1.5 Cellule active

Le stack étant fait d'un grand nombre de plaques espacées de manière uniforme on peut faire l'hypothèse de périodicité verticale. On va considérer donc seulement l'écoulement entre deux plaques. Dans la cellule active, le modèle est basé sur deux hypothèses importantes : l'amplitude des oscillations dans le fluide reste petite devant les valeurs moyennes, et la longueur de la cellule active est très courte comparée à la longueur d'onde, le rapport étant de l'ordre $O(M)$. L'écoulement est compressible, visqueux et conducteur de chaleur. Pour établir un modèle simplifié, on part des équations de Navier-Stokes pour un écoulement compressible dans le domaine fluide avec une loi d'état de gaz parfait pour le fluide, ainsi que l'équation de conduction de la chaleur instationnaire dans le domaine solide (les plaques du stack et des échangeurs). L'adimensionnement se fait en utilisant les mêmes échelles caractéristiques du résonateur. La seule échelle différente est l'échelle spatiale pour laquelle on prend la longueur du stack $\tilde{L}_{ref} = \tilde{L}_{st}$. Si l'on se place à l'échelle du résonateur, ceci revient à faire une dilatation dans le rapport $1/M$ en $\hat{x} = 0$ ($x = \hat{x}/M$). Dans le nouveau repère (x, y), l'origine est au milieu des plaques du stack, et les extrémités de la cellule active sont repoussées à $\pm\infty$ (voir figure 3.4).

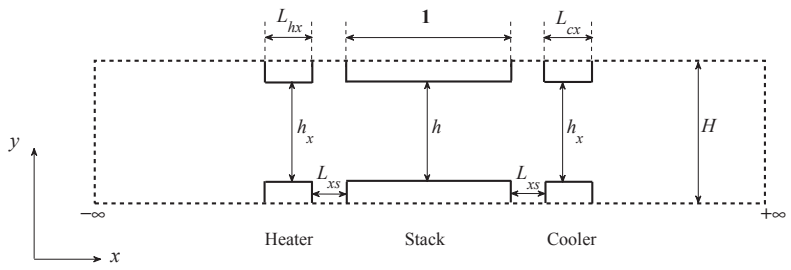


FIGURE 3.4 – Schéma de la cellule active.

Les équations adimensionnées s'écrivent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho \mathbf{V}) = 0 \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) = -\frac{1}{\gamma M^2} \nabla p + \frac{1}{Re} \mu \nabla \cdot \tau + \frac{1}{Fr} \rho \mathbf{e}_y \tag{3.9}$$

$$\rho \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) T \right] = \frac{1}{Pe} \nabla \cdot (k \nabla T) + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left[\frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) p \right] + (\gamma - 1) M^2 \frac{1}{Re} \phi \tag{3.10}$$

$$p = \rho T \tag{3.11}$$

$Re = \tilde{\rho}_{ref} \tilde{U}_{ref} \tilde{L}_{stack} / \tilde{\mu}_{ref}$ étant le nombre de Reynolds de référence, $Pe = \tilde{U}_{ref} \tilde{L}_{stack} / \tilde{\alpha}_{ref}$ le nombre de Péclet de référence, $Fr = \tilde{U}^2_{ref} / (g L_{stack}$ le nombre de Froude de référence, μ, k, and α sont la viscosité dynamique, conductivité thermique, diffusivité thermique repectivement, adimenionnées par leurs valeurs de référence. Compte tenu des valeurs des paramètres de fonctionnement des machines thermoacoustiques, on peut faire raisonnablement les hypothèses suivantes :

$$Fr \gg \ Re, \ Pe \gg \frac{1}{M} \gg 1 \gg M. \tag{3.12}$$

Avec les développements asymptotiques introduites précédemment, le système devient :

$$\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^{(0)} \mathbf{u}) = 0 \tag{3.13}$$

$$\begin{cases} O(M^{-2}) : \ \nabla p^{(0)} = 0 \\ O(M^{-1}) : \ \nabla p^{(1)} = 0 \\ O(1) : \ \dfrac{\partial (\rho^{(0)} \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^{(0)} \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla p^{(2)} + \dfrac{1}{Re} \nabla \cdot \tau \end{cases} \tag{3.14}$$

$$\rho^{(0)} \left[\frac{\partial T^{(0)}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T^{(0)} \right] = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left[\frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) p^{(0)} \right] + \frac{1}{Pe} \nabla \cdot (k \nabla T^{(0)}) \tag{3.15}$$

avec $\tau = \mu [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t - \frac{2}{3} (\nabla . \mathbf{u}) \mathbf{I}]$, Le modèle est complété par l'équation de conduction de la chaleur dans les plaques du stack :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{Pe_s} \nabla^2 T, \tag{3.16}$$

où $Pe_s = Pe_{\tilde{H}} H \, \alpha_{ref} / \alpha_s$ est le nombre de Péclet solide. Dans les plaques des échangeurs la température est fixée, égale à $T_h = \dfrac{\tilde{T}_h}{T_c}$ dans l'échangeur chaud et 1 dans l'échangeur froid.

3.1.6 Conditions aux limites

Les conditions aux limites imposées sur les interfaces entre fluide/solides sont la continuité de la température et du flux de chaleur ainsi que la condition d'adhérence pour la vitesse.

Les conditions aux limites imposées sur les frontières horizontales du domaine de la cellule active vont dépendre de la géométrie du système choisi. Les conditions aux limites imposées sur les frontières verticales du domaine de la cellule active sont obtenues par raccordement avec la solution du modèle dans le résonateur. Plus précisément, la solution du résonateur (solution extérieure) et la solution de la cellule active (solution intérieure) doivent être raccordées lorsque $M \to 0$.

3.1.7 Raccord

À l'échelle du résonateur, le domaine occupé par la cellule active a une épaisseur qui tend vers zéro dans la limite $M = \tilde{L}_{stack}/\tilde{L}_{res} \to 0$. À l'échelle de la cellule active, le résonateur devient infiniment long, ce qui revient à dire que pour $M \to 0$ la position $\hat{x} = 0^-$ dans le repère du résonateur correspond à $x \to -\infty$ dans le repère de la cellule active. De même, $\hat{x} = 0^+$ dans le repère du résonateur correspond à $x \to -\infty$ dans le repère de la cellule active. Le raccord consiste à écrire que la vitesse, la température et la pression doivent approcher la même valeur suivant qu'elles sont calculées par la solution intérieure ou extérieure. Les échelles caractéristiques de ces variables étant les mêmes dans les deux approximations, la continuité des variables dimensionnelles induit la continuité des variables adimensionnelles. Ceci se traduit d'abord par la continuité de la pression $p^{(1)}(0^-) = p^{(1)}(0^+) = p^{(1)}(0)$. La température au premier ordre est constante et uniforme, donc la température $T^{(0)}$ doit tendre vers ces valeurs fixes pour $x \to -\infty$ et $x \to +\infty$. La solution acoustique dans les deux parties du résonateur fournit une équation reliant la pression acoustique $p^{(1)}(0)$ et la vitesse horizontale de chaque côté, pour $x \to -\infty$ et pour $x \to +\infty$ (3.5, 3.6). La vitesse verticale est nulle dans le résonateur, elle est donc nulle aux frontières de la cellule active. Enfin, l'intégration de l'équation de l'énergie sur le domaine fluide de la cellule active fournit une troisième condition qui ferme le problème :

$$H[u(0^-) - u(0^+)] + \frac{1}{Pe_{\tilde{H}}} \int \nabla T^{(0)} \cdot \mathbf{n} ds = 0 \tag{3.17}$$

avec H la hauteur du domaine de la cellule active.

Les équations (3.5), (3.6) et (3.17) déterminent $u(0^-)$, $u(0^+)$ and $p^{(1)}(0)$ et fournissent des conditions limite à la fois pour les deux résonateurs et pour la cellule active.

3.1.8 Conditions initiales

Le problème qu'on veut simuler est un problème de stabilité dans lequel une perturbation initiale sera amplifiée ou non. Le modèle dans la cellule active étant non linéaire, il est intéressant de partir de différentes conditions initiales. Pour cette raison on considérera soit une variation linéaire entre les échangeurs, soit la solution de conduction thermique stationnaire. La vitesse et la pression dynamique $p^{(2)}$ initiale sont nulles dans le domaine. La perturbation initiale est faite sur la pression acoustique $p^{(1)}$: soit de type oscillation harmonique de très faible amplitude, soit de type bruit aléatoire .

3.1.9 Solution numérique

Le problème dans la cellule active est résolu numériquement en associant une discrétisation en volumes finis du problème posé sur la cellule active d'un écoulement dynamiquement incom-

pressible avec densité variable, et une discrétisation en temps des conditions limites traduisant le couplage avec l'acoustique linéaire 1D dans le résonateur. L'algorithme principal de résolution du problème sur la cellule active utilise une méthode à pas fractionnaire, développée pour résoudre les équations Navier-Stokes dynamiquement incompressibles avec densité variable. Un maillage cartésien décalé de la cellule active est introduit. Les schémas de discrétisation spatiale et temporelle sont d'ordre 2. Pour la discrétisation temporelle, on utilise un schéma de type Euler retardé. Un schéma explicite est utilisé pour les termes convectifs et un schéma implicite est utilisé pour les termes diffusifs. Le maillage étant cartésien, les systèmes de Helmholtz obtenus sont résolus par une méthode ADI, et la correction de pression dynamique est déterminée par une méthode multigrille. L'introduction d'une fonction de phase permet de résoudre simultanément les équations dans le domaine fluide et sur les parties solides (échangeurs, plaques du stack). Le couplage est mis en place en résolvant à chaque pas de temps les 3 équations liant les invariants de Riemann définis aux 2 extrémités de la cellule active et l'intégrale du flux de chaleur sur les frontières du domaine fluide de la cellule active. La résolution fournit alors à chaque pas de temps les vitesses 1D aux extrémités de la cellule active $u(0^-)$ et $u(0^-)$ qui servent de conditions limites au problème en vitesse, ainsi que la valeur de la pression acoustique p_1 qui est homogène sur toute la cellule active. Pour plus de détails sur la méthode numériques voir [39] (article en annexe).

3.1.10 Simulation du démarrage du moteur jusqu'à la saturation

L'implémentation numérique du modèle avec couplage a été réalisée par O. Hireche durant sa thèse. Le démarrage et la saturation d'un moteur thermoacoustique idéalisé ont été ainsi simulés, sur la configuration géométrique du dispositif expérimental de référence du LIMSI, présenté dans le chapitre 2. Pour un moteur sans charge correspondant à $f = \infty$ (tube fermé à ses deux extrémités), il est montré que la perturbation initiale est amplifiée et le signal de pression présente une croissance exponentielle. Le mode fondamental (en $\lambda/2$) est le plus instable mais le signal est multi-fréquentiel et le premier harmonique est présent également, ce qui a été observé aussi dans les expériences. L'influence des conditions initiales est également analysée. Un exemple de saturation obtenue pour un $T_{hot} = 1.2$, $f = 90$ (où $Z = -0.96$) est également analysé. Ce que l'on constate dans ce cas précis est que dans la phase initiale d'amplification plusieurs modes sont pré sents. Le signal se stabilise ensuite sur le mode le plus énergétique qui est dans cet exemple est le premier harmonique. L'onde à gauche de la cellule active est une onde purement stationnaire, tandis que à droite elle a une composante d'onde progressive, à cause de la différence de vitesses entre les deux extrémités de la cellule active et du déphasage induit entre la pression et la vitesse en 0^+.

3.1.11 Conclusion

Nous avons mené une analyse asymptotique qui a permis de dégager les conditions de couplage entre l'écoulement dans le stack et le champ acoustique dans le résonateur. Dans ce modèle hybride, le domaine de la cellule active est transparent aux fluctuations de pression acoustique (acoustiquement compact), mais il se comporte comme une source de volume dans l'acoustique du résonateur. Le modèle dans la cellule active est un modèle non linéaire, instationnaire, dans lequel le transfert de chaleur et les variations en temps et en espace de la masse volumiques à l'ordre dominant $O(1)$ sont prises en compte. En appliquant une différence de température au niveau des échangeurs, la système va amplifier toute perturbation initiale et une différence de vitesse horizontale est obtenue $u(0^-) - u(0^+)$ au niveau de la cellule active. Malgré le fait que la pression acoustique n'intervienne pas dans les équations du modèle dans la

cellule active, elle est présente à travers les conditions de raccord avec l'acoustique du résonateur, elle mêmes écrites à chaque pas de temps. La cellule active se comporte comme un seul volume qui vérifie le critère de Rayleigh : il absorbe de la chaleur pendant la phase de compression et en cède pendant la phase de détente, amplifiant ainsi toute oscillation. En cela, le modèle hybride est différent du modèle linéaire où l'amplification de l'oscillation du volume entier est le résultat du travail d'amplification de chaque volume élémentaire qui se transmet de proche en proche tout au long de la cellule.

Le modèle linéaire ne peut pas rendre compte des interactions entre modes acoustiques, ni des non-linéarités hydrodynamiques à l'intérieur du stack, ni des effets multidimensionnels liés à une géométrie potentiellement complexe du stack. L'intérêt du modèle hybride utilisé dans notre étude par rapport au modèle linéaire réside dans la prise en compte des non-linéarités hydrodynamiques à l'intérieur du stack et des effets multidimensionnels, découplés des non-linéarités qui peuvent exister dans le résonateur.

Les premières simulations ont montré que la croissance des modes instables est influencée par de la différence de température imposée aux échangeurs, le type de condition initiale en température et celui de la perturbation initiale en pression. Il est est de même pour la phase de saturation et donc le régime périodique. Ces observations ont motivé la suite des travaux dédiés à une étude systématique de l'influence de ces paramètres, et plus particulièrement de la charge. Ces travaux ont fait l'objet de la thése de Ma Lin dont les résultats sont présentés dans la suite du chapitre. Sur cette étude de stabilité nous avons collaboré avec I. Delbende qui connâit bien les instabilités thermoacoustiques.

3.2 Étude de stabilité : influence de la charge sur un moteur thermoacoustique à onde stationnaire

L'étude de stabilité est basée sur une méthode d'analyse des résultats des simulations numériques pour déterminer la température critique du déclenchement de l'instabilité thermoacoustique à partir de l'étude du taux de croissance des différents modes instables. Si le rapport des températures des deux échangeurs est petit les taux de croissances sont tous négatifs et tout perturbation initiale est amortie. Une valeur critique du rapport est obtenue quand un des modes a un taux de croissance positif : l'instabilité est déclenchée. Pour trouver cette valeur critique on fait plusieurs simulations pour des valeurs croissantes du rapport de températures jusqu'à l'obtention des taux de croissance positifs.

3.2.1 Calculs des modes propres et du rapport de températures critique

Le système est un moteur thermoacoustique à onde stationnaire avec une charge résistive localisée à l'extrémité froide du résonateur (configuration géométrique de l'expérience du LIMSI). Les conditions initiales de simulation sont un champ de conduction stationnaire pour la température initiale dans la cellule active, et un bruit aléatoire (avec des valeurs faibles de l'ordre $O(10^{-4})$ pour les invariants de Riemann aux extrémités de la celulle active, dans toutes les simulations. L'étude est effectuée sur la pression acoustique au niveau de la cellule active $p'(0,t)$. Le signal temporel obtenu à l'issue de la simulation étant multi-fréquentiel, on identifie les caractéristiques de chaque mode (amplitude, fréquence et taux de croissance) par interpolation avec une approximation de la forme :

$$p'(0,t) = \sum_{i=1}^{n} [A_i e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t) + B_i e^{\sigma_i t} \sin(\omega_i t)] \tag{3.18}$$

où n est le nombre de modes (ici on prendra 4), σ_i le taux de croissance du mode i, ω_i sa pulsation, A_i, B_i les amplitudes.

Dans la figure 3.6 on a représenté la variation du taux de croissance du mode le plus instable (ici le fondamental) en fonction du rapport de températures $T_h = \tilde{T}_h/\tilde{T}_c$. On trouve une variation linéaire, comme attendu dans le voisinage de la valeur critique, avec un $T_{crit} = 1.845$ corespondant à $\sigma = 0$. Si on fait varier la valeur de la charge et on reproduit la même procédure

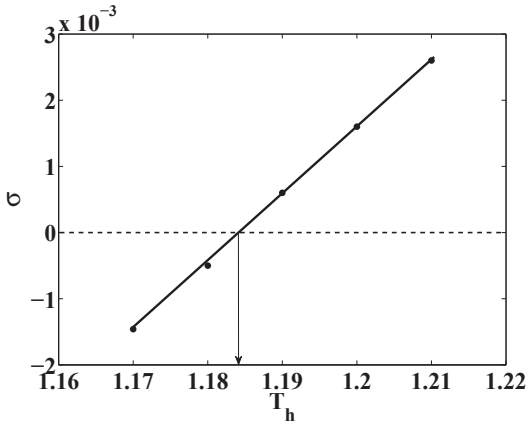
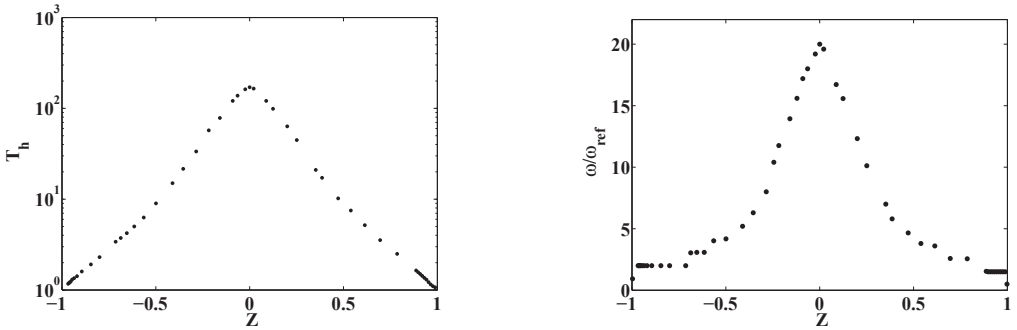


FIGURE 3.5 – Taux de croissance du mode le plus instable en fonction du rapport de températures, $Z = -0.963$.

on obtient un diagramme de stabilité dans le plan (Z, T_h) (voir figure 3.6 (a)). Les régions au-dessus de la courbe correspondent à des situations instables. Les valeurs au-delà de $T_h > 5$ ne sont pas réalistes, mais le diagramme est présenté entièrement pour donner une image qualitative. La même étude nous donne accès aux fréquences des modes le plus instables en fonction de la charge. On observe que les modes les plus instables pour des valeurs négatives de Z sont des modes propres en $\lambda/2$, allant du fondamental (proche de $Z = -1$) vers les harmoniques croissantes au fur et à mesure que $|Z|$ decroît. Pour des valeurs positives de Z on a des modes en $\lambda/4$ avec ses multiples impaires, correspondant à un tube fermé/ouvert (figure 3.6 (b)).



(a) (b)

FIGURE 3.6 – a) Diagramme de stabilité dans le plan (Z, T_h) , $Z = -0.963$, b) Variation de ω/ω_{ref} pour les modes critiques en fonction de Z. Config. LIMSI.

3.2.2 Influence de la position de la cellule active

Les diagrammes de stabilité obtenus précédemment sont modifiés si la position relative de la cellule active à l'intérieur du résonateur est modifiée. Par exemple, pour le système précédent et un rapport de températures de $T_h = 1.2$ on peut tracer l'évolution du taux de croissance du mode fondamental et du premier harmonique en fonction de la position de la cellule active (figure 3.7 gauche). Avec ce nouveau paramètre on peut prédire la région optimale de la cellule

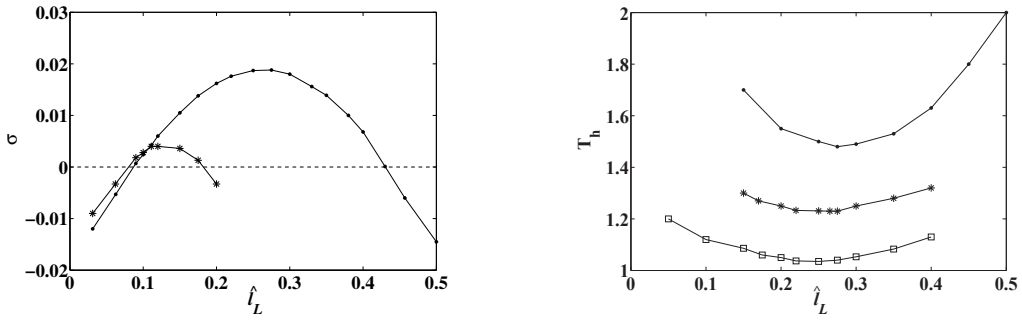


FIGURE 3.7 – Taux de croissances des modes 1 et 2 en fonction de la position de la cellule active, $Z = -0.963$. $T_h = 1.2$

active pour le démarrage du moteur et pour la sélection de la fréquence de fonctionnement : si la cellule active est placée à $0.083 < \hat{l}_L < 0.12$ le premier harmonique est le mode le plus instable, tandis que si $0.12 < \hat{l}_L < 0.43$ le mode dominant est le fondamental. La position optimale pour le démarrage est $\hat{l}_L = 0.27$ correspondant au taux de croissance maximal. Une autre façon de détreminer la position optimale est de tracer l'évolution de la température critique en fonction de $\hat{l}_L$ et de prendre la valeur minimale (voir figure 3.7 droite). La position optimale est proche de $\lambda/8$ comme il était attendu. Le mode le plus instable est le fondamental ($\lambda/2$). Quand Z s'éloigne de -1 la position optimale se déplace légérement à droite, vers le centre du résonateur. Pour Z proche de 1 le mode le plus instable est le premier harmonique (le mode $3\lambda/4$) et quand Z s'éloigne de 1 la position optimale se déplace légérement à gauche, toujours vers le centre du résonateur.

L'influence de l'espacement entre les plaques du stack et celles des échangeurs sur le rapport de températures critique de déclenchement de l'instabilité a été également étudiée, pour conclure à une réduction de la valeur de ce rapport dans le cas ou les échangeurs sont collés au stack.

3.2.3 Comparaison avec la théorie linéaire

Les résultats de stabilité linéaire obtenus á partir des simulations numériques ont été comparés avec ceux obtenus avec la théorie linéaire. Pour cela, une étude de stabilité linéaire a été faite à partir des équations linéaires de Rott [70]. Dans ce modèle la cellule active est constituée seulement des plaques du stack (sans échangeurs), les dimensions du résonateur et du stack étant les mêmes. Dans la région du stack, soumis à un gradient de température constant, l'écoulement est décrit avec l'approximation acoustique et l'approximation de couche limite, dans l'hypothèse d'une dépendence harmonique en temps ($e^{\tilde{\omega}t}$). Dans l'hypothèse de stack court, l'intégration sur la hauteur du canal conduit à l'équation des ondes uni-dimensionnelle de Rott [70, 78], équation qui peut être réexprimée comme une relation entre vitesse et pression acoustiques en fonction du champ de température et de la position horizontale (longitudinale). L'acoustique dans le résonateur est considérée uni-dimensionnelle et isentropique, avec des vitesses de son

différentes à gauche et à droite du stack, correspondant aux températures moyennes T_h et T_c, et les dissipations concentrées à l'extremité froide du résonateur. De nouveau, les conditions limites aux extrémités du stack sont obtenues par raccord avec l'acoustique dans le résonateur (continuité des vitesses et de la pression acoustiques). En imposant que le système global ait une solution non-nulle on obtient une condition d'existence qui représente une relation de dispersion faisant intervenir la pulsation complexe $\tilde{\omega}$. Cette équation est résolue numériquement par une méthode de tir qui nécessite une valeur initiale proche de la solution, valeur qui sera fournie par les résultats numériques précédents. Les diagrammes de stabilité obtenus dans le plan (T_h, Z) ainsi que le calcul des fréquences des modes les plus instables sont en très bon accord avec les résultats de stabilité sur les simulations numériques.

3.2.4 Comparaison avec les résultats expérimentaux

Les résultats numériques sont également comparés aux résultats expérimentaux de Atchley et al. [7], sur les conditions de déclenchement de l'instabilité. Le dispositif expérimental consiste en un moteur à onde stationnaire, pour lequel la charge est représentée par les dissipations thermo-visqueues dans le résonateur. La figure 3.8 est une représentation, dans le plan (température chaude $\tilde{T}_h$, pression moyenne $\tilde{P}_m$), des régions qui présentent des régimes de fonctionnement différents : dans la région I, le mode fondamental $\lambda/2$ est observé ; dans la région II, c'est le premier harmonique ; dans la région III, les deux modes sont présents. Les frontières de ces régions sont données par les seuils d'instabilité. On note de plus que si la pression moyenne $\tilde{P}_m$ est très faible, il faut imposer un gradient de température très important pour démarrer le moteur, et c'est le premier harmonique qui apparaît alors. La figure 3.8 montre que pour $\tilde{P}_m = 2.4$

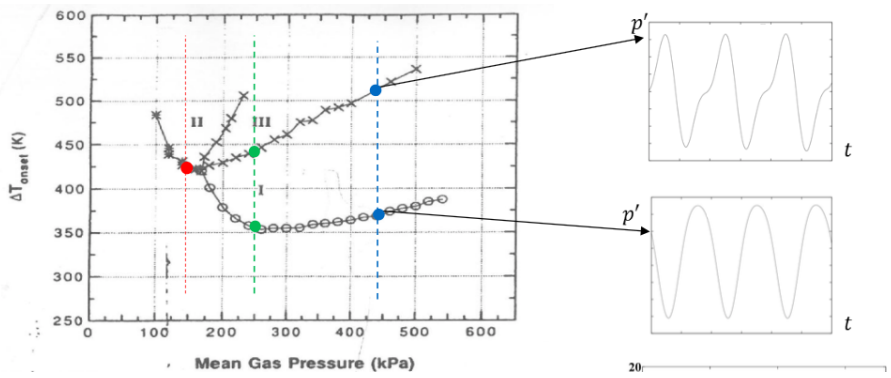


FIGURE 3.8 – Diagramme de stabilité de [7]. Courbes marginales des modes 1 et 2. Résultats des calculs numériques représentés par points

bar, lorsque $\tilde{T}_h = 653$ K ($\Delta\tilde{T} = 360$ K), seul le mode fondamental $\lambda/2$ est amplifié. Et lorsque $\tilde{T}_h = 730$ K ($\Delta\tilde{T} = 437$ K), le premier harmonique devient à son tour instable.

Pour comparer aves les expériences, plusieurs simulations ont été faites pour différentes pressions moyennes. Comme les dissipations ne se font pas de la même manière entre simulations et expériences, il est nécessaire de caler les deux. La démarche suivie a été de fixer la pression moyenne et de trouver par simulation la valeur de la charge Z qui correspond à la température critique du diagramme de stabilité. Par exemple, pour $\tilde{P}_m = 4.4$ bar on trouve que la valeur de la charge $f = 45$, soit $Z = -0.928$ correspond à la température critique $\tilde{T}_h = 660$ K pour laquelle le mode fondamental $\lambda/2$ est le plus instable ($\Delta\tilde{T} = 367$ K). Cette valeur correspond à une résistance dimensionnelle $\tilde{R} = fM\tilde{P}_m/(AU_{ref}) = 17.1$ MPa.s/m^3, A étant l'aire de la section du résonateur ($\tilde{R} = \gamma \dfrac{1-Z}{1+Z} \dfrac{M\tilde{P}_m}{A\tilde{U}_{ref}}$). Si on augmente la température jusqu'à

$\tilde{T}_h = 821$ K ($\Delta\tilde{T} = 528$ K), avec la même charge, le premier harmonique λ devient également instable, en accord avec la valeur $\tilde{T}_h = 800$ K de l'expérience. Les résutats numériques sont représentés avec des points bleus et verts sur la diagramme d'Atchley. Les signaux de pression associés aux calculs sont montrés à droite du diagramme. On a également vérifié que pour des faibles valeurs de pression moyenne, $\tilde{P}_m = 0.15$ bar on trouve que le premier harmonique est le mode le plus instable et la valeur de la charge $f = 16$, soit $Z = -0.839$, correspond à la température critique $\tilde{T}_h = 718$ K ($\Delta\tilde{T} = 367$ K). Cette valeur correspond à une résistance dimensionnelle $\tilde{R} = 2.1$ MPa.s/m^3. Si on essaye de faire une interprétation physique de cette charge, on trouve qu'elle pourrait jouer le rôle d'une résistance thermique. Une estimation de la résistance thermique de l'expérience d'Atchley, basée sur l'expression classique ([78]) $\tilde{R}_\kappa = \dfrac{2\gamma\tilde{P}_m}{\tilde{\omega}(\gamma-1)\tilde{S}_s\tilde{\delta}_\kappa}$, où $\tilde{S}_s = \pi\tilde{d}\tilde{L}_{res}$ est la surface latérale du résonateur, conduit à un bon accord qualitatif avec les expériences (cf. figure 12 dans [45], article en annexe). Ceci donne une indication sur la manière dont on peut rendre compte du fonctionnement d'une machine réelle où les dissipations sont réparties dans tout le résonateur, à l'aide du modèle hybride avec une charge résistive localisée.

3.3 Analyse du régime périodique

Le modèle numérique décrit précédemment a été utilisé pour étudier le comportement transitoire d'un moteur chargé : influence de la charge, de l'espacement entre le stack et les échangeurs, de la pression moyenne ainsi que de la différence de température entre les échangeurs ΔT. Pour des différences de température $\Delta T > \Delta T_{crit}$ on observe une onde avec un comportement multi fréquentiel, résultat confirmé par les études de stabilité de Atchley [7]. Un comportement similaire a été observé aussi dans les expériences sur le dispositif expérimental du LIMSI pour des drive ratio supérieurs à 1% (voir mesures expérimentales chapitre 2). Ceci avait été attribué à la propagation acoustique non-linéaire dans le résonateur. Il y a probablement une combinaison des effets non linéaires : ceux intrinséques à la cellule active et ceux liés au résonateur. L'analyse du transitoire montre aussi qu'il y a une redistribution des températures dans le stack : le gradient de température diminue lentement pendant le transitoire ayant comme conséquence un réajustement de l'amplitude de saturation après la phase rapide d'amplification, traduit dans les évolution temporelles du signal de pression par un "overshoot" . La saturation se fait sur une échelle de temps bien plus longue que l'amplification initiale (10000 périodes = 100hCPU pour la saturation et 400 périodes = 2hCPU pour l'amplification), et elle a lieu à des vitesses du fluide très élevées, ce qui nécessite le réajustement du pas de temps, par exemple de 10^{-2} à 10^{-4}. Pour des valeurs importantes de ΔT il est difficile d'atteindre le régime stable (sans évolution de l'amplitude de pression) car les simulations deviennent très coûteuses en temps de calcul. De ce fait, une étude paramétrique n'a pas pu être envisagée et probablement ce modèle n'est pas adapté pour cet objectif. Pour avoir une saturation à des niveaux raisonnables du drive ratio il faudrait pouvoir prendre en compte la propagation non linéaire dans le résonateur et donc changer le modèle concernant l'acoustique du résonateur. Néanmoins, le modèle qu'on a dévelopé montre le caractère non linéaire de l'écoulement dans la cellule active, responsable de la saturation. La charge quand à elle va avoir une influence sur le ΔT_{crit} et sur la sélection des modes instables. En régime périodique, on a pu calculer le drive ratio du moteur, la puissance acoustique délivrée dans le résonateur froid, et on a pu faire un bilan énergétique pour caractériser le moteur simulé. Une analyse de la dynamique de l'écoulement au voisinage des éxtrémités du stack et des échangeurs pour différents drive ratio a été également faite en régime périodique, mettant en évidence les non-linéarités hydrodynamiques dans la cellule ac-

tive. Le calcul des champs instantanés de vorticité montre que pendant une période acoustique, une paire de tourbillons se forme en sortie de l'échangeur froid, qui sont ensuite aspirés entre les plaques du stack, suivi d'une réformation de deux tourbillons contrarotatifs en fin de cycle. Le champ de température subi des fluctuations importantes.

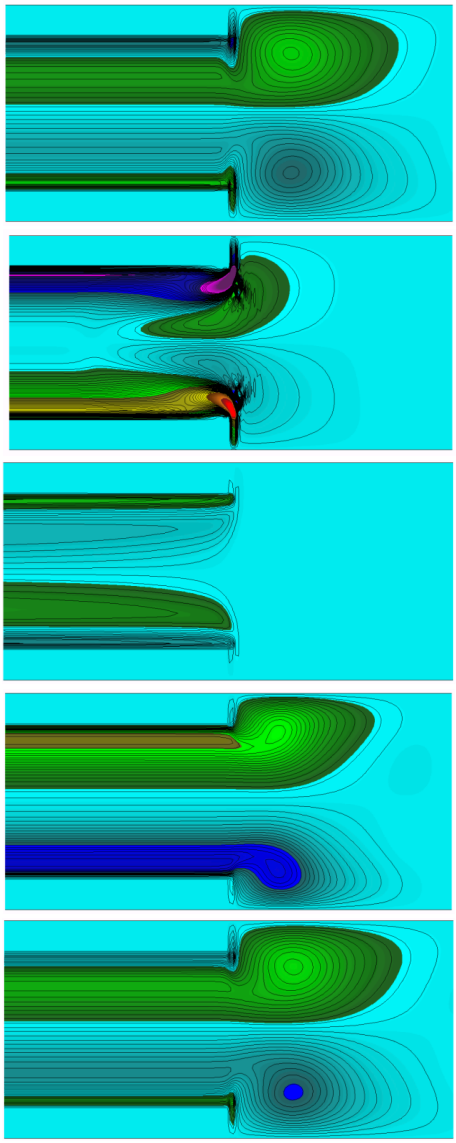


FIGURE 3.9 – Champ instantané de vorticité à la sortie de l'échangeur froid pendant une période acoustique à 5 instants de la période. Config. Atchley. $Dr = 3.4\%$. .

3.4 Application : thermophones

Les compétences développées dans la modélisation et simulation des moteurs thermoacoustiques ont nourri une collaboration avec J. Rémus (Ipotam Mécamusique) sur une application musicale dans le cadre d'un projet Art&Sciences, "Thermophonia", en 2015/2016 (collab. J. Rémus - Ipotam Mécamusique, C. Weisman, V. Daru, F. Jebali). Jacques Rémus, musicien et plasticien, constructeur de sculptures et machines musicales, a créé depuis plusieurs années des tuyaux sonores thermo-acoustiques, qu'il a baptisés "thermophones" (Figure 3.10). Le projet Thermophonia avait comme objectif de réaliser un ensemble visuel et sonore de jeux de tuyaux de thermophones électriques, afin de créer des installations sonores spatialisées.

FIGURE 3.10 – Thermophones aux support mobiles. Installation Curiositas 2015, J. Rémus

Le thermophone est un un instrument de musique particulier, où le son est produit par effet thermoacoustique. Il est constitué d'un tuyau en acier doux, verre ou aluminium, de section circulaire ou carrée, ouvert aux deux extrémités (flûte) ou bien ouvert à une extrémité et fermé à l'autre extrémité (bourdon). À l'intérieur du tuyau se trouve un stack solide. Le stack est chauffé par une résistance électrique à une extrémité. Lorsque la température de l'extrémité chaude devient suffisamment élevée, le thermophone se met à chanter. Le démarrage du son est le résultat d'une instabilité thermoacoustique. Un thermophone s'apparente donc à un générateur d'ondes thermoacoustique, à onde stationnaire, le gaz utilisé étant l'air atmosphérique. Pour des raisons pratiques, les thermophones ne sont pas pourvus d'un échangeur froid permettant de contrôler la température de l'autre extrémité du stack, comme les moteurs thermoacoustiques, et celle-ci peut donc varier le long du tube (voir figure 3.11) : Le son du thermophone est dominé par la

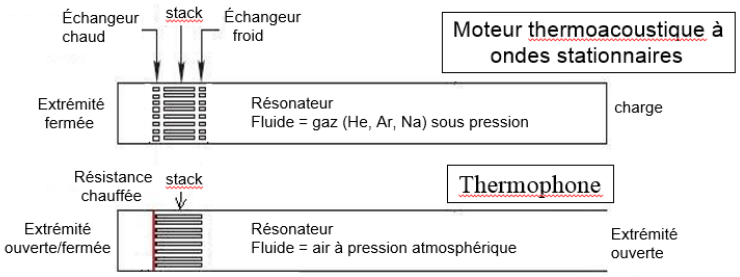


FIGURE 3.11 – Schéma : comparaison moteur thermoacoustique/thermophone

fréquence de résonance fondamentale du tuyau, liée à sa longueur, et il dépend bien évidemment de la chaleur apportée et de la géométrie du stack et du résonateur. Il est donc important de connaître les paramètres de fonctionnement du thermophone pour avoir le son désiré pour un ensemble des tuyaux. Nous avons utilisé un modèle 1D d'un thermophone, basé sur la théorie linéaire de Rott que l'on a adapté pour prendre en compte les particularités du thermophone (voir section 3.2). L'équation de dispersion a été résolue numériquement sur Matlab pour une variété de thermophones existants (tuyaux de section carrée ou circulaire, ouvert/ouvert ou ouvert/fermé). Pour chaque instrument on a determiné par une étude de stabilité le seuil de l'écart de température entre les extrémités du stack correspondant au démarrage, ainsi que la fréquence du mode le plus instable. Plusieurs études paramétriques ont été menées sur la solution numérique afin de guider la conception de futurs thermophones : position du stack, longueur du stack, température de la résistance chauffante (stage M1 T.Hung, 2015). Les résultats ont fait l'objet d'une communication au CFA 2016.

Chapitre 4

Couplages fluide-poreux

La modélisation de la cellule active où se réalise la conversion d'énergie est une étape importante dans la modélisation de la machine complète, comme on a pu le voir dans le chapitre précédent. L'élément clé de la cellule active est un milieu poreux, constitué d'un empilement de plaques ou de grilles métalliques, ou autre géométries [78]. L'approche actuelle de modélisation pour la prise en compte de la géométrie des pores est à travers des fonctions de forme et des approximations de couche limite. Ces modèles sont adaptés à des géométries simples de milieux poreux comme un empilement de plaques (stack) ou un réseau de capillaires parallèles de section circulaire, rectangulaire ou arbitraire. Dans le cas d'un empilement de grilles, utilisé pour des machines plus efficaces, il s'agit d'un milieu poreux topologiquement complexe et difficile à modéliser. Plusieurs études sur des modèles de milieux poreux adaptés aux régénérateurs des systèmes thermoacoustiques ont été menés récemment [42, 68, 79].

Travaux de thèse : modélisation du transport d'un traceur, par convection et diffusion, dans les milieux poreux et multiporeux

Dans mes travaux de thèse, faite sous la direction de T. Lévy, j'ai utilisé la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques (développée par Sanchez-Palencia [71]) pour étudier le transport de masse à travers un milieu poreux périodique. L'homogénéisation est une méthode qui emploie des techniques asymptotiques conjointes aux techniques d'équations aux dérivées partielles pour modéliser le comportement des milieux comportant beaucoup d'hétérogénéités de très petites dimensions, réparties avec une certaine régularité, de façon qu'à une échelle bien plus grande que celles des hétérogénèités, le milieu puisse être perçu comme homogène. En partant des équations écrites à l'échelle du pore et en développant les inconnues en échelles spatiales doubles (échelle du pore et échelle du milieu), avec des approximations successives et un processus de moyenne spatiale sur un volume élémentaire représentatif (ici la période du milieu) on déduit les équations macroscopiques ou moyennes. Ces équations font intervenir des quantités moyennes et des coefficients "macroscopiques" qui dépendent de la géométrie du pore.

Le premier problème étudié a été celui du transport d'un traceur passif par convection-diffusion, dans un milieu poreux périodique, dans deux cas : le cas où la convection et la diffusion sont du même ordre de grandeur au niveau macroscopique et le cas où les deux phénomènes sont du même ordre de grandeur au niveau microscopique (au niveau du pore). L'équation macroscopique vérifiée par la concentration moyenne du traceur a été obtenue par homogénéisation, ainsi que les coefficients macroscopiques de diffusion. Quand les deux modes de transport sont du même ordre de grandeur au niveau microscopique, l'analyse asymptotique a été faite avec deux échelles de temps différentes et on a montré que l'utilisation d'une seule échelle temporelle est suffisante, le temps caractéristique important étant le temps de convection

macroscopique.

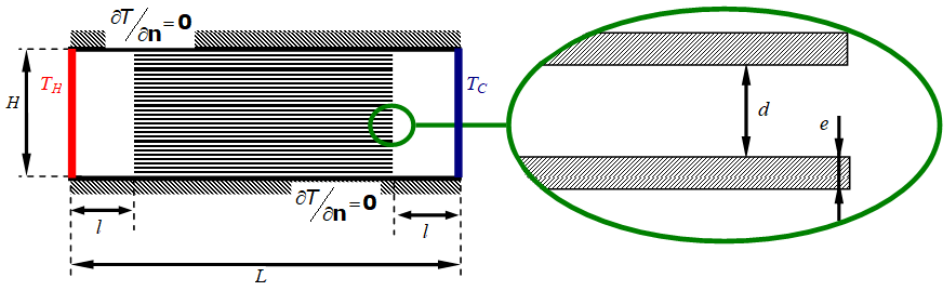
Le deuxième problème étudié a été le problème de convection-diffusion dans des milieux multiporeux, dans le cas où la convection et la diffusion sont du même ordre de grandeur au niveau macroscopique. Dans le cas des milieux poreux contenant des inclusions imperméables, une nouvelle équation macroscopique de convection-diffusion a été obtenue, avec un tenseur de diffusion ne dépendant pas de la vitesse de filtration, pour une concentration volumique en inclusions rigides d'ordre 1. Dans le cas des faibles concentrations, les coefficients homogénéisés ont été approximés avec un développement en fonction de la concentration des inclusions solides pour des géométries spécifiques des inclusions [10]. Pour finir, le problème de convection-diffusion dans des milieux poreux comportant des cavités saturées de fluide a été étudié dans deux cas : cavités non connexes et cavités connexes. Cette partie de modélisation a été complétée par le calcul numérique des coefficients de diffusion homogénéisés macroscopiques. Pour cela il faut résoudre numériquement les problèmes locaux sur la cellule de base. La résolution numérique a été faite avec la méthode des éléments finis, en utilisant deux codes de calcul : MODULEF en 2D et CASTEM 2000 en 3D, dans le cas isotrope, pour plusieurs géométries. À partir de ces solutions on a calculé numériquement les coefficients homogénéisés en fonction de la porosité du milieu. Les résultats numériques ont été validés avec les résultats analytiques trouvés pour des inclusions sphériques en faible concentration.

Un des objectifs que j'avais en arrivant au LIMSI était d'établir un nouveau modèle du transport ayant lieu au sein du régénérateur, modèle qui devait prendre en compte explicitement le caractère poreux de celui-ci et les non linéarités locales qui y surviennent. L'investissement important que j'ai fourni pour la recherche expérimentale lors de mes premiŕes années au LIMSI m'ont éloignée de cet objectif. Néanmoins, mon expérience de modélisation en milieu poreux a été utilisée pour les études de convection dans le stack soumis à un fort gradient de température.

4.1 Étude numérique de la convection naturelle autour et dans le stack moteur

Dans l'étude des machines thermacoustiques, les écoulements de convection naturelle ont été généralement négligés dans les modèles 1D des systèmes thermoacoustiques. Ils existent pourtant à la fois dans la cellule active et dans la résonateur. Les essais infructueux de démarrage du moteur thermoacoustique d'un grand démonstrateur construit par les équipes LIMSI/INPO en 2005-2006 ont motivé un travail plus fondamental sur les écoulements de convection naturelle présents dans le stack moteur. Le grand démonstrateur thermoacoustique a été rempli avec de l'air, azote ou hélium, sous une pression moyenne allant de 1 à 30 bars. Malgré une différence de température aux échangeurs $\Delta T > \Delta T_{crit}$, le "bon champ" de température nécessaire au déclenchement de l'instabilité n'était pas obtenu. En effet, l'analyse des mesures de température à l'intérieur du stack montrait une inhomogénéité dans le plan de la gravité, avec des températures plus chaudes en haut et plus froides en bas, à de grandes valeurs de pression moyenne. Ces expériences indiquaient la présence d'écoulements de convection naturelle, comme en cavité différentiellement chauffée.

Je me suis donc intéressée à la convection naturelle dans la cellule active, modélisée comme une cavité 2D différentiellement chauffée et partiellement remplie d'un empilement de plaques planes conductrices horizontales régulièrement espacées, représentant un stack moteur placé entre deux échangeurs de chaleur. Ce travail a été effectué en collaboration avec P. Duthil, C. Weisman et P. Le Quéré. La géométrie considérée est évidemment une simplification par rapport à la géométrie réelle du stack qui remplit un tube cylindrique : cavité rectangulaire 2D, remplie partiellement par un empilement de plaques parallèles (4.1). Le rapport de forme de



(a) (b)

FIGURE 4.1 – Schéma de la cavité rectangulaire, partiellement remplie d'un empilement de plaques planes horizontales.

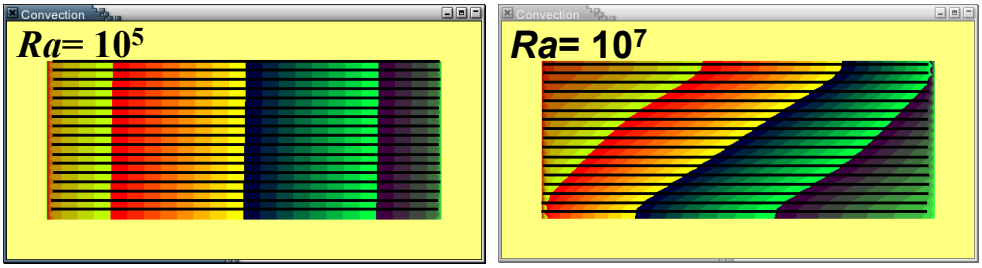
la cavité L/H (longueur/hauteur) est fixé pour cette application par le dimensionnement du moteur thermoacoustique ($= 2.5$ dans notre cas d'étude). De même, les échangeurs sont ici représentés par une simple condition limite en température sur les parois verticales de la cavité, ce qui représente également une simplification (on appelle $\Delta T = T_h - T_c$ la différence de température imposée entre les parois, T_h = température de l'échangeur chaud, T_c = température de l'échangeur froid). L'empilement de plaques est situé à une distance l de chaque paroi verticale représentant l'échangeur de chaleur. L'espacement inter plaques d et l'épaisseur des plaques e définissent la porosité ε du stack, $\varepsilon = d/(d+\varepsilon)$. Les conditions d'adiabaticité sur les parois horizontales sont une bonne représentation de ce que l'on souhaite obtenir dans la pratique en isolant le tube du mieux possible. Aux interfaces solide/fluide on suppose la continuité des températures et des flux de chaleur ainsi que l'adhérence pour le champ de vitesses. Les stacks utilisés dans l'application sont constitués d'une centaine de plaques, et les nombres de Rayleigh $Ra = g\beta\Delta T H^3/(\nu\alpha)$ (basés sur la hauteur et les propriétés physiques du fluide) peuvent varier entre 10^5 et 10^8. Les paramètres $\beta = 1/T_m$ (avec $T_m = (T_h + T_c)/2$), α, ν et ρ tous pris constants. Afin d'éviter les études paramétriques systématiques sur la géométrie finale, ce qui nécessiterait un maillage très fin et des calculs lourds, l'étude est réalisée pour une configuration fixée, et pour un nombre de plaques variable (mais inférieur à la réalité) : 17, 34, 68, 100. Les calculs ont été réalisés en conservant la porosité ε constante. L'objectif était de détermier le comportement global de l'écoulement, décrit comme un écoulement en milieu poreux, pour prédire ensuite la solution dans un cas réaliste. Dans le domaine fluide on considère les équations de Navier-Stokes, écrites dans l'approximation de Boussinesq :

$$\begin{aligned} \nabla.\mathbf{V} &= 0 \\ \frac{\partial(\mathbf{V})}{\partial t} + \nabla.(\mathbf{V}\otimes\mathbf{V}) &= -\nabla p + \nu\Delta\mathbf{V} + \mathbf{g}\beta(T - T_m) \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V}.\nabla)T &= \kappa\Delta T \end{aligned}$$

Dans les plaques du stack la température vérifie l'équation de conduction stationnaire :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_s \Delta T \tag{4.1}$$

avec α_s la diffusisvité thermique dans le solide. Les équations sont résolues numériquement avec un code volumes finis (développé par P. Le Quéré), utilisant une discrétisation spatiale de second ordre. Les termes de diffusion sont traités implicitement et les termes de convection explicitement. Le code inclut un algorithme de projection avec un solveur ADI et des méthodes multi-grilles. Les équations sont résolues simultanément dans le fluide et dans le solide



(a) (b)

FIGURE 4.2 – Isovaleurs des températures dans le stack avec 17 plaques , pour a) $Ra = 10^5$ et b) $Ra = 10^7$.

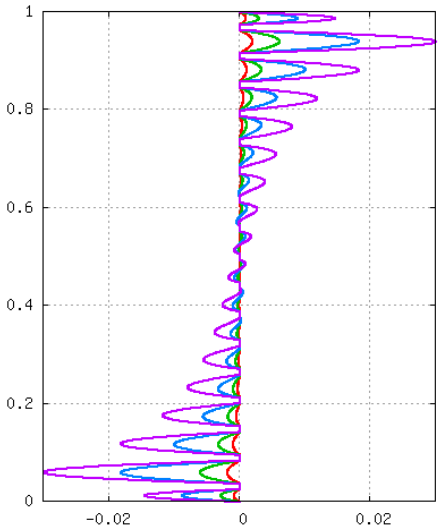


FIGURE 4.3 – Champ de vitesses horizontales pour $Ra = 10^7$.

en utilisant une variable de phase. Les équations sont intégrées jusqu'à l'obtention d'un état stationnaire. Les grilles spatiales sont uniformes dans les deux directions. On a montré que la convection modifie considérablement la distribution de température à l'intérieur du stack.

Les calculs réalisés ont montré qu'en fonction de la distance entre les plaques, le phénomène global de convection s'accompagne éventuellement de transferts convectifs de plus petite échelle localisés entre deux plaques (figure 4.3) Plusieurs modèles de type milieu-poreux ont été testés pour proposer une formulation analytique approchée de l'écoulement du cœur de la cavité, montrant la nécessité d'utiliser une description anisotrope. Le modèle retenu est celui de la convection naturelle stationnaire en milieu poreux vérifiant la loi de Darcy, dans l'hypothèse de Boussinesq [13] :

$$\nabla.\vec{V} = 0 \tag{4.2}$$

$$\mu\vec{V} = -\overline{\overline{K}}(\nabla p - \rho_0 g\beta(T - T_m)\vec{e}_z) \tag{4.3}$$

$$\vec{V}.\nabla T = \nabla.(\overline{\overline{\alpha}}_m \nabla T) \tag{4.4}$$

$\overline{\overline{K}}$ étant le tenseur de perméabilité et $\overline{\overline{\alpha}}_m$ est le tenseur de diffusivité thermique effective du milieu poreux. Pour un milieu poreux homogène et anisotrope, on a :

$$\overline{\overline{K}} = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 \\ 0 & K_{zz} \end{bmatrix} \qquad \overline{\overline{\alpha}}_m = \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & 0 \\ 0 & \alpha_{zz} \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

avec

$$K_{xx} = \frac{d^3}{12(d+e)}, \quad K_{zz} = 0, \quad \alpha_{xx} = \frac{\lambda_{xx}}{\rho_0 c_p}, \quad \alpha_{zz} = \frac{\lambda_{zz}}{\rho_0 c_p} \tag{4.6}$$

avec c_p la chaleur spécifique du fluide, et

$$\lambda_{xx} = \epsilon\lambda + (1-\epsilon)\lambda_s \quad \text{et} \quad \frac{1}{\lambda_{zz}} = \frac{\epsilon}{\lambda} + \frac{(1-\epsilon)}{\lambda_s} \tag{4.7}$$

où λ est la conductivité thermique du fluide, λ_s est la conductivité thermique du solide.

Avec le nombre de Rayleigh modifié $Ra_K = g\beta\Delta T H K_{xx}/\nu\alpha_{zz}$ et une vitesse de référence $U_{refK} = \frac{\alpha_{zz}}{L}$, une solution approchée 1D adimensionnée (u^*, T^*) dans le cœur de la cavité est retenue :

$$u^* = -C(z^* - \frac{1}{2}) \tag{4.8}$$

$$T^* = Cx^* + D + (\frac{H}{L})^2 C^2 Ra_K(\frac{1}{4}z^{*2} - \frac{1}{6}z^{*3}) \tag{4.9}$$

avec C et D deux constantes qui dépendent du nombre de Rayleigh et du rapport L/H ([13]). Dans notre étude on a déterminé ces constantes à partir des solutions numériques. L'analyse a montré que l'approche milieu poreux fournit un ordre de grandeur correct pour l'échelle de vitesse et permet une description qualitative des solutions. La solution approche bien la solution numérique lorsque le rapport de forme de la cavité est suffisamment grand $L/H = 10$. Dans notre application, le rapport de forme n'étant pas très grand, il n'y a pas de solution analytique de type milieu poreux qui puisse décrire correctement le phénomène. Néanmoins, l'approche milieu poreux est utile pour donner une idée de l'écoulement et de la distribution de température dans le cœur de la cellule. On utilisera la représentation du stack comme milieu poreux homogène anisotrope dans l'étude de la section suivante.

4.2 Étude numérique de la convection naturelle dans un système thermoacoustique

Les études de convection naturelle, abandonnées en 2008, ont été repris en 2018 sous l'impulsion de l'ANR TACOT. Le travail a été mené en collaboration avec O. Hireche (post-doc pendant 1 an), C. Weisman, V. Daru et Y. Fraigneau. Les résultats numériques ont montré un très bon accord avec les expériences effectuées au laboratoire Pprime, par H. Bailliet et I. Ramadan.

L'objectif de ce travail a été de modéliser et simuler en 3D les écoulements de convection naturelle qui peuvent se développer dans des systèmes thermoacoustiques constitués d'une cellule active soumise à une différence de température via deux échangeurs de chaleur, le tout placé dans un résonateur rempli de gaz. Les simulations ont été faites sur des géométries simplifiées spécifiques à deux configurations réalistes construites au laboratoire P Prime et sur lesquelles l'équipe de H. Bailliet a fait des mesures de température et de vitesse par PIV et LDV. Les expériences et les simulations sont effectuées en l'absence d'onde acoustique. Les deux approches ont été élaborés en même temps, en faisant des ajustements au fur et à mesure, dans le but de rapprocher le plus possible les conditions de la simulation et des expériences. Il est important de préciser que la partie chaude du résonateur et celle de la cellule active ne sont pas accessibles aux mesures de vitesse. Les mesures de température ne sont pas nombreuses non plus. De ce fait, la simulation numérique seule peut nous donner des informations sur les écoulements dans cette partie importante du système, dès lors que modèle est validé. L'objectif principal de ce

travail a été de montrer la capacité de prédiction des modèles classiques de convection naturelle en cavité fluide, partiellement remplie de milieu poreux dans des configurations représentatives des systèmes thermoacoustiques.

Deux configurations disposées horizontalement ont été modélisées. La première consiste en un résonateur rempli d'air, contenant un stack en céramique, chauffé à une extrémité par une résistance électrique jouant le rôle d'échangeur chaud. La deuxième consiste en un résonateur de section rectangulaire, rempli d'air, contenant une cellule active constituée d'un régénérateur (empilement de grilles métalliques) placé entre une résistance électrique (échangeur chaud) et un échangeur à température ambiante (échangeur froid). Celui-ci utilisait l'eau comme fluide secondaire refroidissant et des ailettes pour un meilleur échange entre la partie solide de l'échangeur et le gaz (voir [40]).

Le modèle numérique consiste à résoudre les équations de Navier -Stokes avec l'approximation de Boussinesq dans les cavités fluides et une équation de type Darcy-Brinkman dans la cellule active [12, 13, 34], dans chacune des configurations. À noter que dans la cellule active, dans le cas d'un moteur, la différence de températures peut être très grande et le critère d'application pour l'approximation de Boussinesq n'est plus vraiment respecté ($\Delta T/T_m = O(10^{-1})$ ce qui n'est pas très petit). Néanmois, ce modèle peut servir comme premier choix d'étude. Dans les applications thermoacoustiques, la cellule active est un milieu poreux avec une porosité très grande (typiquement 80%) et l'écoulement qui la traverse est très lent (le nombre de Reynolds du pore est très inférieur à 1). Par conséquent, l'écoulement à travers le milieu poreux peut être modélisé avec l'équation de Darcy-Brinkman où la viscosité effective dans le terme de Brinkman $\mu_{eff}\Delta\mathbf{V}$ est prise $\mu_{eff} \approx \mu$.

$$
\begin{aligned}
&\nabla.\mathbf{V} = 0 \\
&\frac{1}{\epsilon}\frac{\partial(\rho\mathbf{V})}{\partial t} + X\frac{1}{\epsilon^2}\nabla.(\rho\mathbf{V}\otimes\mathbf{V}) = -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{V} - \rho\beta(T-T_{ref})\mathbf{g} - (1-X)\mu\mathbf{K}^{-1}\mathbf{V} \\
&\left((1-X)(\rho c_p)_{eff} + X\rho c_p\right)\frac{\partial T}{\partial t} + \rho_0 c_p(\mathbf{V}.\nabla)T = \nabla.\left[\left(X\,k + (1-X)\,k_p\right)\nabla T\right]
\end{aligned}
$$

Dans les équations précédentes la masse volumique ρ, la conductivité thermique k, la capacité calorifique c_p, la viscosité dynamique μ sont constantes et égales aux valeurs prises à T_{ref}, $\beta = 1/T_{ref}$ est le coefficient de dilatation isobare pour un gaz parfait, $(\rho c_p)_{eff} = \epsilon(\rho c_p)_{fluide} + (1-\epsilon)(\rho c_p)_{solide}$ est la valeur effective pour le milieu poreux, $\mathbf{K}$ est le tenseur de perméabilité, X est une fonction de phase ($X = 0$ dans le poreux et $X = 1$ dans le fluide) et k_p la conductivité effective du milieux poreux. Les caractéristiques du milieu poreux sont basées sur [13] : la perméabilité axiale $K_{xx} = \frac{a^3\epsilon}{8}$, $K_{yy} = K_{zz} = 0$ pour le stack anisotrope (a= taille du pore, ϵ= porosité), respectivement $K_{xx} = K_{yy} = K_{zz} = 10^{-8}$ pour le régénérateur considéré isotrope et la conductivité thermique effective $k_p = \epsilon k_{fluide} + (1-\epsilon)k_{solide}$.

Dans la première configuration le stack en céramique est modélisé comme un milieu poreux homogène anisotrope. L'échangeur chaud a été modélisé avec plusieurs corps solides à température fixée. L'échangeur froid étant inexistant dans cette expérience, l'air du résonateur joue ce rôle. Dans la simulation il n'y a donc pas d'échangeur froid et la température est imposé' au long de la paroi du résonateur en utilisant les mesures expérimentales. Dans la deuxième configuration, l'échangeur chaud est le même, le régénérateur est modélisé avec un milieu poreux homogène isotrope tandis que l'échangeur froid est modélisé avec des barres solides à température fixée (température de l'eau), imergées dans un milieux poreux anisotrope (voir figure 4.4). Les conditions en température sur les frontières du résonateur ont été imposées de la façon suivante : adiabatique à gauche de l'échangeur chaud, température constante égale à la température ambiante à droite de l'échangeur froid et variation linéaire de température entre les deux échangeurs.

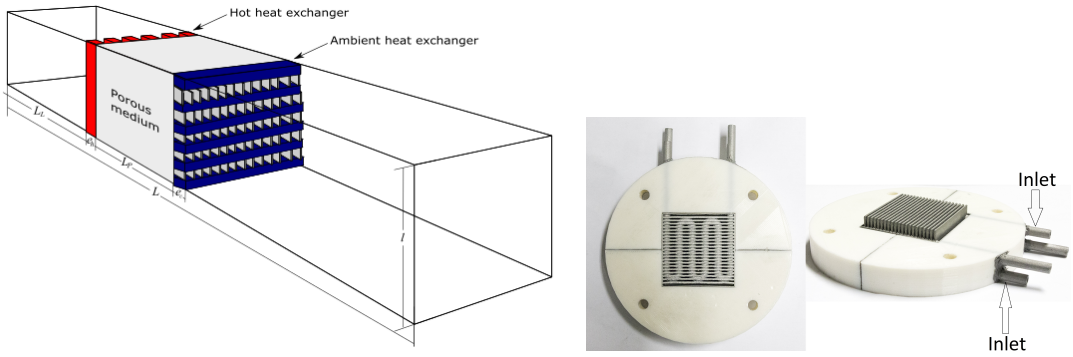


FIGURE 4.4 – Gauche : Configuration numérique pour l'expérience 2. Droite : échangeur froid du dispositif expérimental

Les simulations numériques ont été effectuées avec le code SunfluidH, développé au LIMSI par Y. Fraigneau pour des simulations d'écoulements incompressibles. Les équations (4.10) sont résolues par une méthode volumes finis, avec une discrétisation de second ordre en espace et en temps. Les termes de diffusion sont traités implicitement et les termes de convection explicitement. Le code inclut un algorithme de projection avec un solveur ADI et des méthodes multi-grilles. Le maillage est uniforme dans toutes les directions. Le pas de temps est ajusté durant la simulation pour satisfaire le critère de stabilité $CFL < 0.5$.

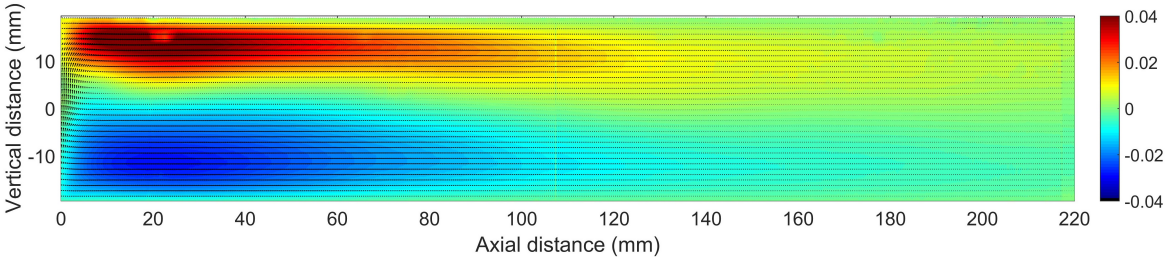
4.2.1 Résultats sur la configuration 1

Les résultats des simulations sont en très bon accord avec les mesures expérimentales des vitesses (PIV/LDV). L'analyse des résultats montre la présence d'un écoulement de convection dans la cavité fluide à droite du milieu poreux. Cette cavité est différentiellement chauffée (chaude à gauche, en sortie du stack poreux $T = 310K$) et froide à droite (l'extrémité droite du résonateur $T = 290K$). L'air monte du côté chaud et descend du côté froid avec un écoulement global du milieu poreux vers l'extrémité droite du résonateur dans la partie haute et de l'extrémité du résonateur vers le milieu poreux dans la partie basse. La vitesse près du milieu poreux est quasi nulle avec un profil de couche limite pour la composante verticale. Les différents profils axiaux, à différentes positions radiales montrent le caractère tridimensionnel des écoulements. L'ordre de grandeur du champ de vitesses est de 0.04 m/s. A l'intérieur du stack, un poreux fortement anisotrope, l'écoulement est très faible (vitesse de 0.04 m/s) malgré la différence de température très grande, $\Delta T = 220K$, et suit la géométrie de l'échangeur chaud. Le faible écoulement obtenu est en accord avec l'estimation du nombre de Rayleigh pour un milieu poreux, $Ra_p = \frac{\rho g \beta \Delta T H K_{xx}}{\mu \alpha_p} = 1.1$ dans ce cas ($\alpha_p = \frac{k_p}{\rho c_p}$).

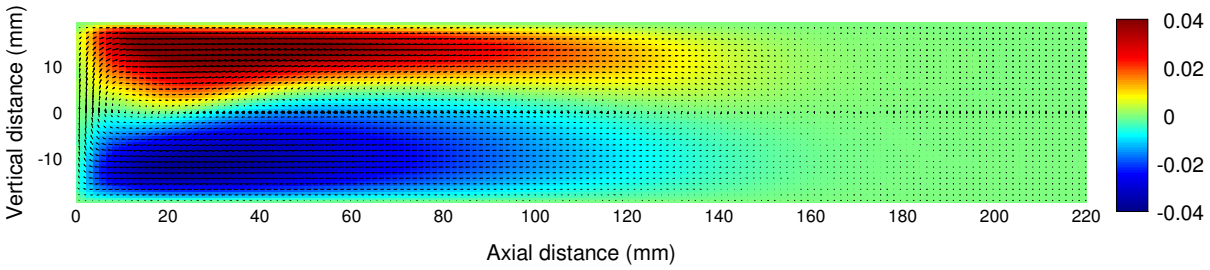
Dans la cavité fluide à gauche de l'échangeur chaud, le sens du ΔT est inversé. La cavité est froide à gauche et chaude à droite. La différence de température est très importante, $\Delta T = 110K$ et comme c'est une cavité fluide, l'écoulement de convection est très fort, avec des vitesses de 0.15m/s. Le calcul du nombre de Rayleigh fluide donne ici $Ra = \frac{\rho g \beta \Delta T_l H^3}{\mu \alpha} = 3.36 \times 10^5$, $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$. Ce calcul montre la nécessité d'isolation de cette partie chaude dans le but de réduire la différence de température et diminuer donc l'écoulement de convection.

Les mesures effectuées sur ce système thermoacoustique avec une onde entretenue par la même puissance électrique fournie à l'èchangeur chaud, ont montré l'existence d'un écoulement de streaming dans la partie froide du résonateur de 1cm/s, superposé au champ acoustique d'amplitude 4m/s. L'écoulement de streaming est donc du même ordre de grandeur que l'écoulement de convection en absence de l'onde. Il sera donc important de prendre en compte la convection naturelle pour comprendre l'origine et le comportement des écoulements continus

présents dans les machines thermoacoustiques.

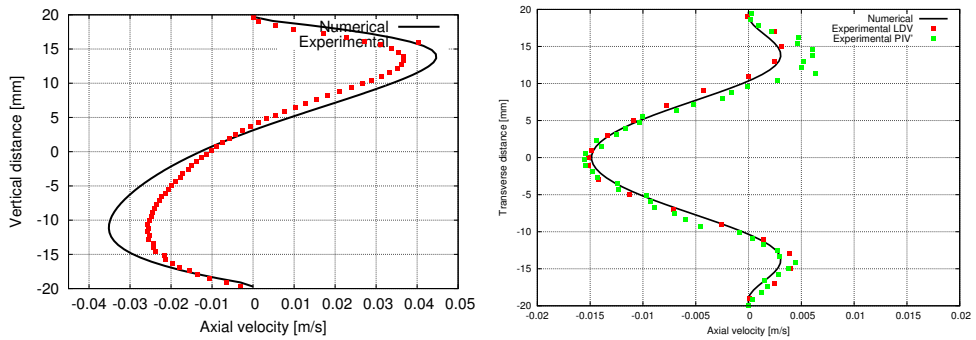


(a)



(b)

FIGURE 4.5 – Vecteurs vitesse (flèches) et isolignes de la composante axiale de l'écoulement pour (a) les expériences et (b) les simulations numériques, sur un plan vertical central, à droite du milieu poreux.



(c) (d)

FIGURE 4.6 – (a) Profil vertical de la composante axiale de vitesse, à droite du milieu poreux, dans le plan vertical à $x = 40mm$. (b) Profil de la composante axiale de vitesse en fonction de la coordonnée radiale, dans le plan horizontal à $x = 60mm$.

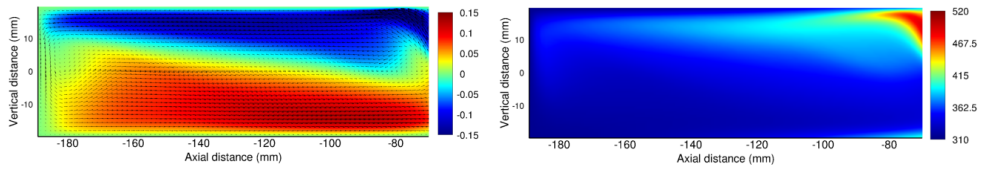


FIGURE 4.7 – Vecteurs vitesse (gauche) et champ de température (droite) dans le plan vertical central, à gauche de l'échangeur chaud

4.2.2 Résultats sur la configuration 2

Dans cette configuration, la présence de l'échangeur froid change complètement la topologie des écoulements convectifs : tout d'abord, dans la partie froide de l'échangeur nous avons observé un écoulement de convection inversé par rapport à la configuration 1 sans échangeur : l'air monte du côté de l'extrémité du résonateur et descend du côté du régénérateur. Une analyse plus attentive du champ de température montre que la différence de température est inversée $\Delta T = T_{cold} - T_{amb} = -3K$. L'ordre de grandeur du champ de vitesse convective est 0.025 m/s, en accord avec l'estimation du nombre de Rayleigh de la cavité fluide $Ra = 1.63 \times 10^4$. L'échangeur froid empêche donc le développement d'un fort écoulement convectif. Dans le régénérateur, l'écoulement qui se développe est similaire à un écoulement de convection naturelle dans un milieu poreux, soumis à une différence de température $\Delta T = T_{hot} - T_{cold} = 147K$. La vitesse de 0.002 m/s est en accord avec l'estimation du nombre de Rayleigh poreux $Ra_p = 1.26 \times 10^{-1}$. La convection dans le régénérateur est freinée par sa faible perméabilité. Par conséquent, l'écoulement de convection est bien faible et le champ de température a une stratification presque horizontale, comme dans un solide conducteur. Du côté gauche de l'échangeur chaud, le résonateur a été isolé et la température est presque uniforme dans la cavité fluide, comme on peut le voir sur la figure 4.7. L'écoulement résultant n'est qu'un écoulement résiduel de convection, issu de l'écoulement dans le régénérateur qui traverse les grilles métalliques.

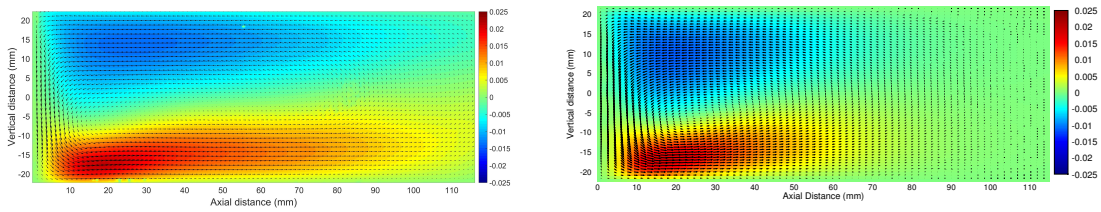


FIGURE 4.8 – Vecteurs vitesse et isovaleurs de la composante axiale de vitesse à droite de AHX, dans le plan vertical $y = -0$ (gauche expériences, droite : simulations numériques).

Les résultats des simulations numériques et des mesures expérimentales par PIV et LDV sont en très bon accord pour les deux configurations de point de vue qualitatif et quantitatif. Les échelles de vitesse obtenues dans les différentes régions des cavités thermoacoustiques sont en accord avec les échelles classiques des écoulements de convection en cavités fluide et poreuse. Il sera donc possible de prédire l'ordre de grandeur et la topologie des écoulements de convection à l'intérieur des machines thermoacoustiques avec une approche similaire à celle présentée ici. Le résultat principal est que l'écoulement de convection et le champ de température sont tridimensionnels. Ils dépendent des propriétés thermophysiques du gaz et du milieux poreux dont la cellule active est constituée ou les échangeurs ainsi que de la géométrie et des conditions thermiques extérieures.

La question à laquelle on devra répondre par la suite est : quel sera le comportement de ces écoulements en présence de l'acoustique, après le démarrage du moteur ? Jusqu'à maintenant, dans la littérature on a considéré que la convection naturelle serait effacée par l'acoustique, mais est-ce réellement le cas ? Certaines expériences dédiées aux mesures de streaming montrent une présence possible de la convection naturelle.

Projet de recherche

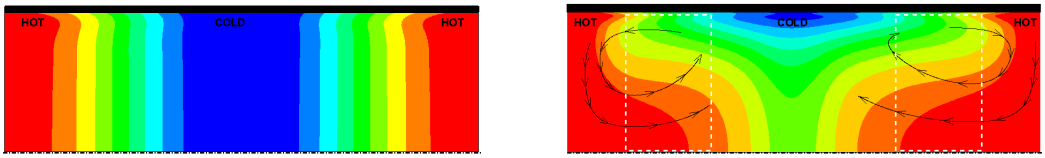
Les échanges scientifiques et humains apportés par un travail en équipe ont été le moteur dans mon activité de recherche. Il y une dizaine d'années, j'ai démarré une collaboration étroite avec C. Weisman sur la modélisation asymptotique et numérique d'un moteur thermoacoustique et la convection en milieu poreux, puis avec V. Daru sur l'étude numérique du streaming et plus récemment avec H. Bailliet qui apporte ses compétences expérimentales et sa spécificité acoustique. Nous avons ainsi constitué une équipe solide et solidaire, qui me motive fortement pour continuer dans les mêmes directions. Le contexte du projet TACOT a donné une impulsion nouvelle aux thèmes de recherches que j'ai abordés jusqu'à maintenant : le streaming acoustique et la simulation des effets multidimenionnels à l'intérieur d'une machine thermoacoustique. Dans les résonateurs des machines thermoacoustiques il y a des éléments maintenus sous un fort gradient de température comme les tubes à gaz pulsé, les stacks ou les régénérateurs. Le streaming créé par l'onde sera donc influencé par ce champ de température fortement inhomogène. La présence des plaques solides (le cas du stack) ou d'un régénérateur, les deux étant deux types de milieu poreux très différents, va modifier également le streaming. Les simulations récentes, validées par les expériences ont montré l'influence de la gravité qui engendre des écoulements caractéristiques de convection naturelle. Une question à laquelle on devra répondre sera : quel rôle joue la gravité sur le streaming ? Y a-t-il aussi un couplage entre convection naturelle et streaming ? Pendant toute cette période de recherche en thermoacoustique, je me suis un peu éloignée des techniques apprises pendant ma thèse de doctorat. Je souhaite y revenir pour essayer d'appliquer la méthode d'homogéisation des milieux périodiques pour obtenir des modèles de type milieux poreux pour les cellules actives, modèles qui pourraient être utilisés par la suite dans les simulations.

Je souhaite donc continuer le travail de recherche sur le streaming acoustique en guide d'onde à fort niveau acoustique, qui est le thème que j'ai abordé à mon arrivée au LIMSI et qui s'avère être très riche.

Streaming acoustique

Dans l'analyse des effets thermiques sur le streaming à faible niveau nous avons trouvé un critère pour le changement de configuration des cellules de streaming extérieures, la mutation du streaming, qui permet de passer de une à deux cellules de streaming extérieur sur une étendue axiale de quart de longueur d'onde acoustique.

L'explication de cette dynamique observée numériquement et expérimentalement était la suivante : dans le contexte d'un guide d'onde d'une machine thermoacoustique, un gradient de température axial est créé par l'onde, dû au pompage thermoacoustique de chaleur. Ce gradient dépend de l'amplitude de l'onde, de la paroi solide et des échanges thermiques avec l'extérieur du résonateur. Le streaming extérieur qui se met en place par entraînement du streaming intérieur, est responsable ensuite du transport convectif de chaleur dans le résonateur quand $Re_{NL} > 1$. Le champ de température moyen devient bidimensionnel et un gradient vertical est créé (voir figure 4.9). L'acoustique sera donc modifiée et avec elle le streaming extérieur (



(a) (b)

FIGURE 4.9 – Schèma des isothermes dans un guide d'onde à faible niveau acoustique (a) et à fort niveau acoustique (b). Les rectangles blancs indiquent les régions où la température est stratifiée dans la direction transverse.

[27]). Cette explication phénoménologique de la dynamique du streaming nécessite une validation numérique car les couplages streaming-acoustique sont non-linéaires. De plus, nous avons fait deux hypothèses importantes :

- premièrement, nous avons supposé que les effets peuvent être découplés : l'acoustique crée le streaming en première phase, puis le streaming modifie l'acoustique qui modifie le streaming et on ferme la boucle. Il y a donc deux questions auxquelles on doit répondre à ce stade : notre hypothèse de séparation des effets est-elle correcte ? Jusqu'où peut-on continuer cette boucle et si elle s'arrête quel sera le mécanisme de saturation ?

-deuxièmement, nous avons fait l'hypothèse que la différence de température moyenne transversale est du même ordre de grandeur que la différence de température moyenne longitudinale, en nous basant sur une analyse dimensionnelle sur l'équation de transport de chaleur moyenne. Ceci n'a pas pu être vérifié avec les premières simulations puisque le streaming à fort niveau est obtenu pour une onde de forte intensité qui présente des chocs. Dans ce cas la température moyenne dans le résonateur augmente de manière excessive dépassant largement le petit pompage de chaleur thermoacoustique en bord de couche limite.

Il faudra donc vérifier toutes ces hypothèses avec une simulation complète du streaming en régime rapide, crée par une onde monofréquentielle, de forte intensité. V. Daru travaille actuellement sur la parallèlisation du code DNS dans le but d'effectuer des simulations sur une configuration plus proche de l'expérience [67], dans laquelle l'onde est monofréquentielle et l'influence de la paroi du résonateur est prise en compte. Bien évidemment, de nouvelles expériences où on a accès au champ de température bidimensionnel à l'intérieur du résonateur seraient plus que bienvenues. Mais il est difficile de faire ce genre de mesures sans affecter l'écoulement. De plus, les précédentes meures de température en paroi ont montré de très petites valeurs de ΔT tout au long de la paroi, entre 0.3 K et 3 K, ce qui est difficilement mesurable. L'équipe d'Hélène Bailliet a fait récemment une cartographie du champ de température à différents endroits dans le résonateur avec une faisceau de thermocouples. Nous espérons que ces mesures seront utiles pour une confrontation numérique / expérimental.

En étroite liaison avec l'étude précédente, le streaming de Rayleigh pourra être analysé par la suite en résonateurs maintenus sous un important gradient de température axial, ce qui est le cas des pulse tubes dans les machines thermoacoustiques. Les pulse tubes sont des portions de résonateur, courtes par rapport à la longueur d'onde, maintenues sous une différence de température très importante (dizaines ou centaines de degrés), grâce à des échangeurs de chaleur. Ils ont le rôle d'isoler thermiquement la cellule active du reste du résonateur et jouent également un rôle déphaseur entre vitesse et pression acoustique. Olson et Swif [55] ont utilisé un pulse tube conique dans le but de réduire, voire annuler le streaming de Rayleigh. Ils ont développé un modèle pour estimer le streaming massique dans la couche limite en fonction de l'angle entre la paroi conique et l'axe du résonateur, et en fonction du gradient de température axial. Le modèle leur a permis de déduire une valeur de l'angle qui annule le streaming dans le pulse tube, prédictions confirmées indirectement par des mesures de température. Il serait alors intéressant de

pouvoir simuler des écoulements de streaming dans des résonateurs à section variable. L'idée serait, une fois la dynamique du streaming comprise, de trouver des solutions de contrôle du streaming : suppression ou augmentation du streaming, si celle-ci présente un intérêt, en jouant sur son couplage avec les effets de température ou sur la géométrie.

Streaming acoustique : influence de la gravité

Les observations expérimentales des premiers travaux sur le streaming durant la thèse de P. Debesse avaient montré des déformations du profil de streaming, non expliquées par les modèles linéaires ou les simulations de la littérature. A l'époque nous avions pensé à une superposition de l'écoulement de convection naturelle et le streaming de Rayleigh, mais nous n'avions pas encore les moyens de calcul pour estimer l'écoulement de convection. La possibilité que le streaming soit modifié par la convection naturelle et les résultats récents concernant les effets thermiques sur le streaming ont relancé les études sur la simulation des écoulements de convection en cavité fluide/poreux, avec des besoins de modélisation.

Récemment, les études de convection naturelle démarrées dans le cadre du projet TACOT ont montré l'existence d'un écoulement de convection dans la cavité fluide située entre l'extrémité du résonateur et l'échangeur froid en sortie du moteur thermoacoustique, même pour de faibles différences de température axiale. Les simulations sont en très bon accord avec les mesures réalisées sur un système avec la même géométrie [40]. L'écoulement observé est du même ordre de grandeur que le streaming de Rayleigh prédit par un modèle linéaire de streaming lent, associé à une onde dont l'amplitude est celle de l'onde générée par le moteur thermoacoustique, pour la même différence de température. L'écoulement est tridimensionnel, comme dans la thèse de P. Debesse. Les études envisagées par la suite ont comme objectif l'analyse du couplage entre la convection naturelle et le streaming acoustique. L'équipe d'Hélène Bailliet a effectué des mesures d'écoulements moyens en présence et en absence de l'onde pour le moteur à ondes stationnaires présenté dans le chapitre 4. Notre contribution sera du point de vue de la simulation : il s'agit d'étudier et de simuler le couplage des deux écoulements.

Il y a plusieurs manières d'aborder le problème : on peut considérer comme état de base l'écoulement de convection naturelle et perturber cet état par une oscillation acoustique modélisée soit comme comme une source volumique, soit comme un piston mobile. On pourra étudier si l'acoustique qui en résulte est modifiée par le champ de température tridimensionnel issu de la convection naturelle, ce que semble indiquer le modèle présenté dans le chapitre précédent [27]. Des mesures précises pour la composante verticale acoustique pourraient compléter ce travail. Certains auteurs avaient conclu récemment que le mécanisme de convection naturelle est inhibé par l'acoustique et remplacé par un écoulement de convection forcée [57, 56]. La question de la convection naturelle reste donc ouverte.

Une autre stratégie va consister à considérer les équations de Navier -Stokes compressibles, modifiées par la présence de la gravité, et à effectuer des simulations directes sur les équations complètes pour calculer à la fois l'acoustique et le streaming. Ces calculs pourront bien sûr se faire initialement sur des configurations géométriques simplifiées et de taille réduite, mais qui pourront être choisies en similitude avec l'expérience, à la fois du point de vue de l'écoulement et des conditions thermiques. Cette étude sera plus une étude fondamentale, sur un guide d'onde représenté par un canal plan bidimensionnel, contenant un fluide et soumis à une différence de température entre les deux frontières verticales.

Application à la réfrigération thermoacoustique : projet TACOT

Enfin, depuis 2017 nous faisons partie d'un projet ANR TACOT dont le porteur est H. Bailliet du laboratoire Pprime et qui regroupe plusieurs équipes de recherches françaises (LAUM,

LIMSI, ECL) et un partenaire industriel PSA. L'objectif est la construction et l'étude d'une pompe à chaleur thermoacoustique compacte pour le transport terrestre. Un prototype instrumenté et compact a été construit à l'Institut Pprime suite à la collaboration étroite entre G. Poignand (LAUM) et I. Ramadam et H. Bailliet (Pprime), avec les conseils précieux de D. Gardner (ancien collaborateur de G.Swift). Le prototype est constitué de deux sources acoustiques qui permettent de régler le déphasage entre pression et vitesse et réaliser ainsi une géométrie compacte sans avoir besoin d'un résonateur [60]. La pompe à chaleur est une cellule active de type thermoacoustique, constituée d'un régénérateur placé entre deux échangeurs de chaleur (un échangeur froid et un échangeur à température ambiante) (Figure 4.2.2). Entre le cœur thermoacoustique et les parois de l'enceinte il y a un petit espacement pour permettre le passage du gaz et réaliser une boucle de retour. Le gaz utilisé est un mélange d'Helium et d'Argon à pression moyenne de 40 bar (valeur maximale testée). Pour 210 W de puissance électrique fournie, 200 W sont pompés à la source froide avec une différence de température de 36 K entre les échangeurs (pour un déphasage de 180° entre les deux sources), c'est à dire un gradient de température de 900 K/m. Le COP global de la machine est 0.95, et celui de la conversion d'énergie thermoacoustique seule est de 2.37. Ces résultats montrent l'intérêt du projet et des applications possibles pour le secteur automobile. Le prototype a été instrumenté avec des thermocouples et des capteurs de pression pour pouvoir suivre l'évolution de la température dans la cellule active et contrôler les pressions moyenne et acoustique. Cependant l'instrumentation du prototype est délicate et les grandeurs mesurées disponibles sont insuffisantes pour suivre le mouvement du gaz et les échanges de chaleur à l'intérieur de la machine. La simulation numérique doit donc pouvoir apporter des informations précieuses.

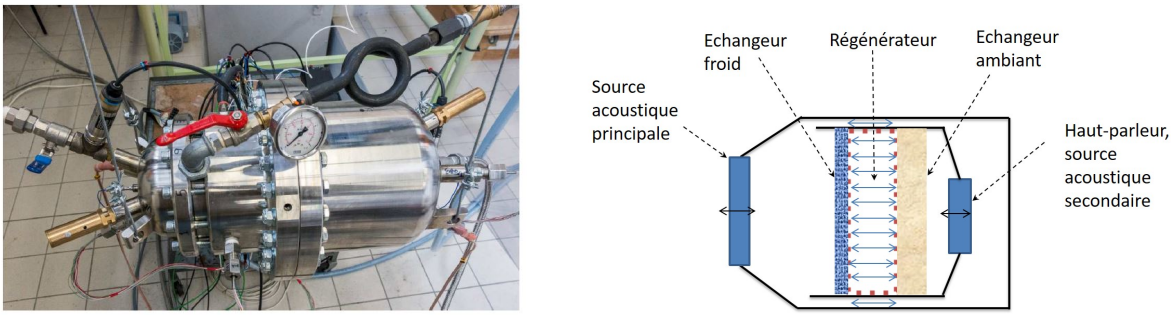


FIGURE 4.10 – Projet ANR TACOT, schéma du prototype construit à l'institut Pprime.

La contribution de notre équipe (C. Weisman, V. Daru, Y. Fraigneau) au projet concerne la modélisation et la simulation des phénomènes non linéaires présents dans ce type de machines : convection naturelle, effets multidimensionnels et streaming.

La deuxième configuration expérimentale sur laquelle nous avons fait les calculs de convection avec O . Hireche contient une cellule thermoacoustique similaire à celle du prototype avec quelques différences : le gradient thermique plus petit dans le prototype et sa géométrie compacte. Une estimation du nombre de Rayleigh basée pour la configuration du prototype TACOT nous indique que le nombre de Rayleigh poreux est du même ordre de grandeur que dans le cas d'étude précédent [40]. Il sera nécessaire donc de faire des calculs de convection naturelle dans cette configuration, d'autant plus que les premières mesures de température dans le prototype montrent une différence de temperature importante (de l'ordre de 30K) sur une ligne verticale, entre le haut et le bas du régénerateur.

L'étude des effets multidimensionnels et de streaming en machine compacte sera réalisée avec deux outils numériques différents : un code compressible utilisable à des hautes fréquences

et un code Faible Mach adapté pour des basses fréquences (donc des géométries courtes par rapport à la longueur d'onde). L'approximation Faible Mach peut être particulièrement intéressante pour limiter les temps de calcul, et son utilisation se justifie par la compacité des prototypes du projet TACOT par rapport à la longueur d'onde. Nous souhaitons appliquer cette approximation à la modélisation du pompage de chaleur thermoacoustique dans le prototype, en géométrie axisymétrique tout d'abord. Le code SunfluidH développé au LIMSI par Y. Fraigneau est un code 3D instationnaire qui résout les equations de Navier-Stokes en approximation faible Mach (modèle présenté dans le chapitre 3).

Le premier travail envisagé est de comparer les résultats des deux codes et estimer la gamme de fréquences dans laquelle leurs résultats sont similaires pour déterminer ensuite une stratégie de leur utilisation (collab. Y. Fraigneau, V. Daru, C. Weisman). Une première étude de comparaison a démarré l'an dernier durant le stage de A. Krishakumar, sur un cas académique d'une cavité remplie de fluide, dans laquelle l'onde est créé par un piston. Les premiers résultats ont montré la validité de l'approximation Faible Mach concernant les caractéristiques de l'écoulement oscillant obtenu. Le travail sera poursuivi d'une étude comparative quant au pompage de chaleur thermoacoustique à proximité d'une plaque solide à l'intérieur de la cavité et d'un empilement de plaques, ainsi que l'écoulement moyen de streaming.

Elle sera suivie de simulations en présence d'un milieu poreux qui constitue la cellule active d'une machine thermoacoustique. Les cellules actives les plus efficaces sont celles constituées d'un milieu poreux avec une géométrie de la microstructure bien plus compliquée que celle d'un stack, avec une taille caractéristique des pores plus petite que l'épaisseur des couches limites thermique et visqueuse acoustiques. Les modèles de milieux poreux utilisés dans la littérature thermoacoustique sont peu nombreux. Le modèle généralement utilisé dans la construction des machines thermoacoustiques est celui des milieux poreux tortueux soumis aux oscillations harmoniques, basé sur des coefficients de friction et de transfert de chaleur spécifiques des écoulements quasi-stationnaires [78]. Plus récemment, la théorie linéaire de la thermoacoustique a été étendue pour un milieu poreux où l'écoulement est régi par la loi de Darcy, ou l'extension semi-empirique de Brinkman-Forchheimer, en effectuant une approximation acoustique de ces équations moyennées en espace [79]. Dans ces modèles on suppose que le déplacement acoustique est assez grand pour qu'on puisse négliger l'influence du pore sur la propagation acoustique et le transfert de chaleur.

Le but du travail futur sera d'établir un modèle de propagation thermo-acoustique en milieu poreux, en partant de l'approximation acoustique au niveau du pore pour arriver à des équations moyennes (en espace) caractérisant le milieu poreux à l'échelle macroscopique, avec une technique basée sur des développements asymptotiques en échelles multiples. Ceci nous permettra de développer des équations de propagation acoustique et de transfert de chaleur en milieux poreux pour n'importe quelle géométrie du pore et pour différents ordres de grandeur de l'écoulement à travers le milieu poreux. Ces équations vont nourrir ensuite les simulations numériques dans le code compressible, où on peut envisager de séparer les opérateurs pour l'acoustique et pour le transport convectif (séparation d'échelles de temps), permettant ainsi d'analyser l'influence des caractéristiques du milieu poreux sur les performances des machines.

Bibliographie

[1] ADEFF J.A., HOFLER T.J, 2005 Design and construction of a solar-powered, thermoacoustically driven, thermoacoustic refrigerator *J. Acoust. Soc. Am.* **107 (6)**, L37–L42.

[2] AKTAS M., FAROUK B. 2004 Numerical simulation of acoustic streaming produced by finite-amplitude resonant oscillations in an enclosure. *J. Acoust. Soc. Am.* **116**, 2822-2831.

[3] AKTAS, M. K. & OZGUMUS, T. 2010 The effects of acoustic streaming on thermal convection in an enclosure with differentially heated horizontal walls. *Int. J. Heat and Mass Transfer* **53 (23-24)**, 5289-5297.

[4] ARNOTT W. P. , BASS H. E., RASPET R. 1991 General formulation of thermoacoustics for stacks having arbitrarily shaped pore cross section, J. Acoust. Soc. Am. **90**, 3228–3237.

[5] ARROYO M.P., GREATED C.A. 1991 Stereoscopic particle image velocimetry. *Meas. Sci. Technol.* **2**,1181-1186.

[6] ATCHLEY A. A. , BASS H. E., HOFLER T. J., LIN H. T. 1992 Study of a thermoacoustic prime mover below onset of self-oscillation, *J. Acoust. Soc. Am.* **91**, 734–743.

[7] ATCHLEY A. A. AND F. M. KUO 1994 Stability curves for a thermoacoustic prime mover. *J. Acoust. Soc. Am.* **95**, 1401–1404.

[8] S. BACKHAUS, E. TWARD, M. PETACH 2004 Traveling wave thermoacoustic electric generator. *Appl. Phys. Lett.* **85** 1085.

[9] BAILLIET H., GUSEV V., RASPET R. & HILLER R. A. 2001 Acoustic streaming in closed thermoacoustic devices. *J. Acoust. Soc. Am.* **110**, 1808–1821.

[10] BALTEAN D., LÉVY T., BALINT S. 2003 Diffusion-convection in a porous medium with impervious inclusions at low flow rates. *Transport in Porous Media* **51**, 19–39.

[11] BALTEAN-CARLÈS D., DARU V., WEISMAN C., TABAKOVA S. & BAILLIET H. 2019 An unexpected balance between outer Rayleigh streaming sources. *J. Fluid Mech.* **867**, 985–1011.

[12] A. BEJAN 1985 Convection Heat Transfer, *Mac Graw Hill* .

[13] NIELD D.A., BEJAN A. 2006 Convection in Porous Media, *Springer and Business Media, New York*

[14] BESNOIN E. 2001 Numerical study of thermoacoustic heat exchangers. Thèse de doctorat, Johns Hopkins University.

[15] BOLURIAAN S. & MORRIS P. J. 2003 Numerical simulation of acoustic streaming in high amplitude standing wave. *9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit 12-14 May 2003, Hilton Head, South Carolina* AIAA 2003-3152

[16] BROOMHEAD D.S., KING G.P. 1986 Extracting qualitative dynamics from experimental data. *Physica D : Nonlinear Phenomena* **20**, 217–236.

[17] CAMPBELL M., COSGROVE J.A., GREATED C.A., JACK S., ROCKLIFF D. 2000 Review of LDA and PIV applied to the measurement of sound and acoustic streaming. *Opt. Laser Technol* **32**, 629–639.

[18] CERVENKA M. & BEDNARRIK M. 2017 Effect of inhomogeneous temperature fields on acoustic streaming structures in resonators. *J. Acoust. Soc. Am.* **141**, 4418–4426.

[19] CERVENKA M. & BEDNARRIK M. 2018 Numerical study of the influence of the convective heat transport on acoustic streaming in a standing wave. *J. Acoust. Soc. Am.* **143**, 727.

[20] CHINI G. P., MALECHA Z. & DREEBEN T. B. 2014 Large-amplitude acoustic streaming. *J. Fluid Mech.* **744**, 329–351.

[21] CHURCHILL S. W. & CHU H. H. S. 1975 Correlating equations for laminar and turbulent free convection from a horizontal cylinder. *Int. J. Heat Mass Transfer* **18**(9), 1323–1329.

[22] DAI W., LUO E. , HU J., LING H. 2005 A heat driven thermoacoustic cooler capable of reaching liquid nitrogen temperature. *Appl. Phys. Lett.* **86**, 224103 .

[23] V. DARU, C. TENAUD 2009 Numerical simulation of the viscous shock tube problem by using a high resolution monotonicity preserving scheme, *Computers and Fluids* **38(3)**, 664-676.

[24] DARU V., BALTEAN-CARLÈS D., WEISMAN C., DEBESSE P. & GANDIKOTA G. 2013 Two-dimensional numerical simulations of nonlinear acoustic streaming in standing waves. *Wave Motion* **50**, 955–96

[25] DARU V., REYT I., BAILLIET H., WEISMAN C. & BALTEAN-CARLÈS D. 2017a Acoustic and streaming velocity components in a resonant wave guide at high acoustic levels. *J. Acoust. Soc. Am.***141** (1), 563–574

[26] DARU V., WEISMAN C., BALTEAN-CARLÈS D., REYT I., BAILLIET H. 2017b Inertial effects on acoustic Rayleigh streaming flow : Transient and established regimes. *Wave Motion***74**, 1–17.

[27] DARU V., WEISMAN C., BALTEAN-CARLÈS D., & BAILLIET H. 2020 Thermal effects on fast acoustic streaming inside a resonator. soumis au *J. Fluid Mech.*

[28] DEBESSE P., BALTEAN-CARLES D., LUSSEYRAN F., FRANÇOIS M.-X. , 2014 Oscillating and streaming flow identification in a thermoacoustic resonator from under-sampled PIV measurements. *Meas. Sci. Technol.* **25**, 025005 .

[29] DUFFOURD S., 2001 Réfrigérateur thermoacoustique : Études analytiques et expérimentales en vue d'une miniaturisation. *Dissertation, Ecole Centrale de Lyon* .

[30] DUTHIL P., BALTEAN CARLÈS D., BÉTRANCOURT A., FRANÇOIS M.-X., YU Z.B., THERMEAU J.P, 2006 Experiments and valve modelling in Thermoacoustic device. *in Advances in Cryogenic Engineering* **51 B**, 1095-1102.

[31] DUTHIL P. , WEISMAN C. , BRETAGNE E. , FRANÇOIS M-X. 2004 Experimental and numerical investigation of heat transfer and flow within a thermoacoustic cell, *International Journal of Transport Phenomena* **6 (4)**, 265-272.

[32] FAURE T.M., LUSSEYRAN F., GOUGAT P., LAUNAY F. 2006 Experimental and numerical investigation of the flow distribution inside a tubular heat exchanger. *J. Fluids Eng.* **128**,1218–1227.

[33] GARDNER D. L. AND SWIFT G. W. 2003 A cascade thermoacoustic engine *J. Acoust. Soc. Am.* **114(4)**, 1905-1919.

[34] D. GOBIN AND B. GOYEAU 2008 Natural convection in partially porous media : a brief overview, *Int. J. Num. Meth. Heat Fluid Flow, Emerald* **18 (3-4)**, 465–490.

[35] GOPINATH A. & MILLS A. F. 1994 Convective heat transfer due to acoustic streaming across the ends of a Kundt tube, *J. Heat Transfer***102**(3) 47-53

[36] GOPINATH A., TAIT N. L. & GARRETT S. L. 1998 Thermoacoustic streaming in a resonant channel : The time averaged emperature distribution. *J. Acoust. Soc. Am.* **102**(3), 1388-1405.

[37] HAMILTON M. F., ILINSKII Y. A. & ZABOLOTSKAYA E. A. 2003a Acoustic streaming generated by standing waves in two-dimensional channels of arbitrary width. *J. Acoust. Soc. Am.* **113**(1), 153–160.

[38] HAMILTON M. F., ILINSKII Y. A. & ZABOLOTSKAYA E. A. 2003 Thermal effects on acoustic streaming in standing waves. *J. Acoust. Soc. Am.* **114**(6), 3092–3101.

[39] HIRECHE O., WEISMAN C., BALTEAN-CARLÈS D., LE QUÉRÉ P., BAUWENS L. 2010 Low Mach number analysis of idealized thermoacoustic engines with numerical solution, *J. Acoust. Soc. Am.* **128 (6)**, 3438–3448.

[40] HIRECHE O., RAMADAN I., WEISMAN C., BAILLIET H., FRAIGNEAU Y., BALTEAN-CARLES D., DARU V. 2020 Experimental and numerical investigation of natural convection flows in two horizontal thermoacoustic cavities . *Int. J. Heat Mass Transfer* **149**, 119195.

[41] INCROPERA F. P., DEWIT D. P., BERGMAN T. L. & LAVINE A. S. 2013 Principles of heat and mass transfer. Seventh Edition. *John Wiley & Sons*.

[42] JENSEN C., AND RASPET R. 2010 Thermoacoustic properties of fibrous materials. *The Journal of the Acoustical Society of America* **127**, 3470–3484.

[43] LIGHTHILL, J. 1978 Acoustic streaming. *J. Sound Vib.* **61**, 391–418.

[44] LIN Y. & FAROUK B. 2008 Heat transfer in a rectangular chamber with differentially heated horizontal walls : Effects of a vibrating sidewall. *Int. J. Heat Mass Transfer* **51**, 3179–3189.

[45] MA L. , WEISMAN C., BALTEAN-CARLÈS D., DELBENDE I., BAUWENS L. 2015 Effect of a resistive load on the starting performance of a standing wave thermoacoustic engine : A numerical study. *J. Acoust. Soc. Am.* **138 (2)**, 847–857.

[46] WOLFRAM RESEARCH, INC. 2018 Mathematica, Version 11.3, Champaign, IL.

[47] MENGUY L. & GILBERT J. 2000 Non-linear Acoustic Streaming Accompanying a Plane Stationary Wave in a Guide. *Acta Acustica united with Acustica* **86** , 249–259.

[48] MERKLI P. & THOMANN H. 1975 Thermoacoustic effects in a resonance tube. *J. Fluid Mech.* **70** , 161–177.

[49] MICHEL G. & CHINI G. P. 2019 Strong wave-mean-flow coupling in baroclinic acoustic streaming. *J. Fluid Mech.* **858**, 536–564.

[50] MOREAU S., BAILLIET H. & VALIÈRE J. -C. 2008 Measurements of inner and outer streaming vortices in a standing waveguide using laser doppler velocimetry. *J. Acoust. Soc. Am.* **123(2)**, 640–647.

[51] MORZUKEWICH, G. 2002 Heat transport by acoustic streaming within a cylindrical resonator. *Applied Acoustics* **63**, 713–735.

[52] NABAVI M., SIDDIQUI K. & DARGAHI, J. 2008 Influence of differentially heated horizontal walls on the streaming shape and velocity in a standing wave resonator. *International Communications in Heat and Mass Transfer* **35**, 106–1064.

[53] NYBORG, W. L. 1953 Acoustic streaming due to attenuated plane waves. *J. Acoust. Soc. Am.* **25**, 68–75.

[54] NYBORG, W. L. 1965 Acoustic streaming. *in Physical Acoustics, W. P. Mason (ed), Academic Press, New York* **2B**, 265–331.

[55] OLSON J. R. & SWIFT G. W. 1997 Acoustic streaming in pulse tube refrigerators : Tapered pulse tubes. *Cryogenics.* **37**, 769–776.

[56] PAN N. , WANG S. , SHEN C. 2012 Visualization investigation of the flow and heat transfer in thermoacoustic engine driven by loudspeaker, *Int. J. Heat and Mass Transf.* **55**, 7737–7746.

[57] PAN N. , WANG S. , SHEN C. 2014 A fundamental study on characteristic of thermoacoustic engine with different tilt angles, *Int. J. Heat and Mass Transf.* **74**, 228–237.

[58] PAOLUCCI S. 1982 On filtering of sound from the Navier-Stokes equations. *Sandia National lab. Report SAND 82-8257*, (non publié).

[59] PASTUR L.R., LUSSEYRAN F., FAURE T.M., FRAIGNEAU Y., PETHIEU R., DEBESSE P. 2008 Quantifying the non-linear mode competition in the flow over an open cavity at medium Reynolds number. *Exp. Fluids* **44**, 597–608

[60] POIGNAND G., LIHOREAU B., LOTTONP., GAVIOT E., BRUNEAU M. AND GUSEV V. 2007 Optimal acoustic fields in compact thermoacoustic refrigerators, *Applied Acoustics* **68** 642–659.

[61] QUÉNOT G, PAKLEZA J, KOWALEWSKI TA 1998 Particle image velocimetry with optical flow. *Exp. Fluids* **25**,177–189

[62] RAMADAN I., BAILLIET H. AND VALIÈRE J.-C. 2018 Experimental investigation of the influence of natural convection and end-effects on Rayleigh streaming in a thermoacoustic engine, *J. Acoust. Soc. Am.* **143(1)**, 361–372.

[63] RASPET R., BRUSTER J., . BASS H. E 1998 New Approximation Method for Thermoacoustic Calculations, *J. Acoust. Soc. Am.* **103 (5)**, 2395–2402

[64] LORD RAYLEIGH 1884 On the circulation of air observed in Kundt tubes, and on some allied acoustical problems. *Philos. Trans. R. Soc. London* **175**, 1–21

[65] RÉMUS J. http ://jacques-remus.fr/

[66] REYT I., DARU V., BAILLIET H., MOREAU S., VALIÈRE J.-C., BALTEAN-CARLÈS D. & WEISMAN C. 2013 Fast acoustic streaming in standing waves : Generation of an additional outer streaming cell. *J. Acoust. Soc. Am.* **134**, 1791–1801.

[67] REYT I., BAILLIET H. & VALIÈRE J.-C. 2014 Experimental investigation of acoustic streaming in a cylindrical wave guide up to high streaming Reynolds numbers . *J. Acoust. Soc. Am.* **135 (1)**, 27–37.

[68] ROH H., RASPET R., AND BASS H. E. 2007 Parallel capillary-tube-based extension of thermoacoustic theory for random porous media. *The Journal of the Acoustical Society of America* **121(3)**, 1443-1421.

[69] ROTT, N. 1974 The influence of heat conduction on acoustic streaming. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)* **25**, 417–421.

[70] N. ROTT 1980 Thermoacoustics. *Adv. Appl. Mech.* 20, 135–243.

[71] SANCHEZ-PALENCIA, E. 1980 Non-Homogeneous Media and Vibration Theory. *Lecture Notes in Physics* 127, Springer Verlag Berlin

[72] SCHLICHTING H 1932 Berechnung ebener periodischer Grenzschichtströmungen (calculation of plane periodic boundary layer streaming). *Phys. Zeit* **33**, 327–335 .

[73] SCHUSTER V. K. & MATZ W. 1940 Über stationare Strömungen im Kundtschen Rohr (On Stationary Streaming in Kundt Tubes). *Akust. Zeitschrift* **5**, 349–352.

[74] SPOELSTRA S., TIJANI. M.E.H. 2005 Thermoacoustic heat pumps for energy savings, *in seminar "Boundary crossing acoustics" of the Acoustical Society of the Netherlands*

[75] STANISLAS M., OKAMOTO K., KÄHLER C.J., WESTERWEELN J. 2005 Main results of the Second International PIV Challenge. *Exp. Fluids* **39**,170–191.

[76] STANISLAS M., OKAMOTO K., KÄHLER C.J., WESTERWEEL J., SCARANO F. 2008 Main results of the third international PIV Challenge. *Exp. Fluids* **45**, 27–71.

[77] STUART J.T. 1966 Double boundary layer in oscillatory viscous flow. *J. Fluid Mech.* **24**, 673–987

[78] SWIFT, G. W. 1988 Thermoacoustic engines. *J. Acoust. Soc. Am.* **84**, 1145-1180.

[79] S. H. TASNIM, 2011 Porous Media Thermoacoustic Stacks : Measurements and Models. *Thesis, University of Waterloo, Ontario, Canada*

[80] THOMPSON M. W., ATCHLEY A. A. & MACCARONE M. J. 2005 Influences of a temperature gradient and fluid inertia on acoustic streaming in a standing wave. *J. Acoust. Soc. Am.* **117**(4) 1839–1849.

[81] WARD B., CLARK J. AND SWIFT G. W. 2008 Design Environment for Low-Amplitude Thermoacoustic Energy Conversion (DeltaEC) User's Guide (version 6.2). Los Alamos National Laboratory.

[82] WEISMAN C., BALTEAN-CARLÈS D., DUTHIL P. , LE QUÉRÉ P. 2008 Natural convection in a stack of horizontal plates in a differentially heated cavity, *in : Proceedings of the 19th International Symposium on Transport Phenomena (ISTP-19), Reykjavik, Island 2008.*

[83] WESTERVELT P. J. 1953 The Theory of Steady Rotational Flow Generated by a Sound Field. *J. Acoust. Soc. Am.* **25**, 60–67.

[84] WORLIKAR A. S., AND KNIO O. M.,1996 Numerical simulation of a thermoacoustic refrigerator. I : Unsteady adiabatic flow around a thermoacoustic refrigerator. *J. Comput. Phys.* **127**, 424-451

[85] WORLIKAR A. S., KNIO O. M., AND KLEIN R., 1998 Numerical simulation of a thermoacoustic refrigerator. II : stratified flow around the stack. *J. of Comput. Fluid.* **144**, 299-324.

[86] ZOONTJENS L., HOWARD C., ZANDER A. AND B. CAZZOLATO 2005. Feasibility Study of an Automotive Thermo acoustics Refrigerator *in : Proceedings of Acoustics, Busselton, Australia*

P. Debesse, D. Baltean Carlès, F. Lusseyran and M-X François.
Oscillating and streaming flow identification in a thermoacoustic resonator, from undersampled PIV measurements.
Meas. Sci. Technol. 25, 025005 (16pp), (2014).

IOP Publishing Measurement Science and Technology
Meas. Sci. Technol. **25** (2014) 025005 (16pp) doi:10.1088/0957-0233/25/2/025005

Oscillating and streaming flow identification in a thermoacoustic resonator, from undersampled PIV measurements

P Debesse[1,2], D Baltean Carlès[1,2], F Lusseyran[2] and M-X François[1,2]

[1] Université Pierre et Marie Curie, 4 Place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05, France
[2] LIMSI-UPR CNRS 3251, BP133, F-91403 Orsay Cedex, France

E-mail: baltean@limsi.fr

Received 15 July 2013, revised 7 October 2013
Accepted for publication 12 November 2013
Published 3 January 2014

Abstract
The nonlinear phenomena that appear in thermoacoustic systems generate continuous secondary flows (streaming), superimposed on the dominant acoustic oscillations, reducing system efficiency. In this paper, an experimental study is presented for evaluating both acoustics and streaming in such a system. The velocity measurements, based on particle image velocimetry, are undersampled with respect to the acoustic period and without external phase reference. A new method is proposed for treating the undersampled data, in which the acoustic field is reconstructed via an embedding technique. The application of this method and use of different data processing tools provide results in good agreement with linear acoustic theory. The harmonic content of the velocity as well as the wavelength are obtained. The estimate of the mean velocity over the time period indicates the existence of a continuous flow different from the Rayleigh–Schlichting streaming.

Keywords: acoustic streaming, thermoacoustics, particle image velocimetry, phase averaging, singular value decomposition

(Some figures may appear in colour only in the online journal)

1. Introduction

Thermoacoustic systems (Swift 2002) convert thermal energy into acoustic energy (thermoacoustic engines) and vice versa (thermoacoustic refrigerators or heat pumps). Such devices consist of a long resonator tube filled with gas, containing an active cell, which is composed of a porous solid matrix placed between a heater and a cooler. In the past twenty years, great effort has been made by researchers to develop such systems, because of the large field of industrial applications, ranging from cryogenics to air conditioning and domestic refrigeration. Despite these efforts, a lot of phenomena limiting the efficiency of thermoacoustic systems are still not well understood. Acoustic streaming and in general continuous flows, source of convective heat transport, are nonlinear phenomena responsible for thermal losses. Acoustic streaming is a continuous secondary flow, superimposed on the first-order acoustic motion, generated in a resonator as an interaction between an acoustic wave and a solid boundary, caused by Reynolds stresses. In the case of a wide standing wave resonator (half-wavelength), it consists of four steady vortices outside the viscous boundary layer, referred to as Rayleigh streaming (outer streaming). Inside the boundary layer, there are other four vortices, referred to as Schlichting streaming (inner streaming), rotating in directions opposite to those of outer vortices. The streaming patterns are represented in figure 1 and are characteristic of slow (linear) streaming.

These types of continuous flows have been modelled and precisely measured for resonators with no active thermoacoustic cell (Rayleigh 1884, Stuart 1966, Schlichting 1932, Hamilton *et al* 2003, Arroyo and Greated 1991, Campbell *et al* 2000, Bailliet *et al* 2001, Thompson and Atchley 2005, Nabavi *et al* 2007). In the case of a realistic thermoacoustic system, the acoustic streaming can be influenced by the presence of the active cell maintained under a large temperature gradient, and even more by the

 © 2014 IOP Publishing Ltd Printed in the UK

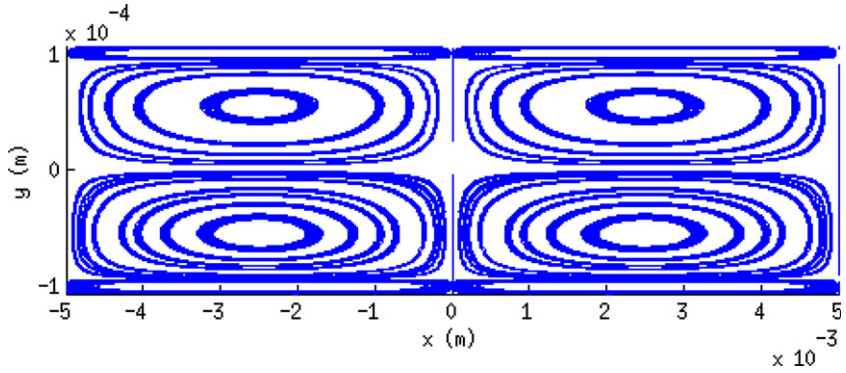


Figure 1. Streaming patterns (streamlines) for a standing wave in a half-wavelength resonator obtained with the model of Hamilton *et al* (2003).

nonlinear regime attained for high intensity waves with large harmonic content. For high intensity waves, the streaming itself becomes nonlinear and the streaming cells are deformed (experimental studies: Arroyo and Greated 1991, Campbell *et al* 2000, Thompson *et al* 2005, Moreau *et al* 2008, Nabavi *et al* 2009, Reyt *et al* 2012; theoretical studies: Menguy and Gilbert 2000, Aktas and Farouk 2004, Daru *et al* 2013). In this nonlinear regime, few experiments were performed in the case when the wave is generated with a thermoacoustic engine, under high mean pressure, driven at very high acoustic pressures.

In this type of system, the measurement of both acoustic velocity field and acoustic streaming velocity is a challenge in metrology and signal processing, and requires high precision. Indeed, both phenomena have two very different time scales, some m s^{-1} for the acoustic component and some cm s^{-1} or even less for the continuous component. However, non-intrusive optical velocimetry, laser Doppler velocimetry (LDV) and particle image velocimetry (PIV), mainly applied for turbulent flows, can be used in the acoustic context if associated with adapted post-treatments.

Thompson and Atchley (2005) used LDV in a cylindrical standing-wave resonator to study the streaming onset and also the influence of temperature gradient and fluid inertia on the developed streaming. Moreau *et al* (2008) measured acoustic streaming at different points in a standing-wave flow as the nonlinear Reynolds number increases, and highlighted the inner vortices. Desjouy *et al* (2009) compared successfully experimental results obtained in a closed-loop waveguide with theoretical results and revealed that acoustic velocity and streaming are impacted by the resonator curvature. In works employing PIV measurements (Duffourd 2001, Michard *et al* 2004, Nabavi *et al* 2007, 2009), acoustic and streaming fields are always extracted using phase averaging based on well-sampled external signal. Indeed, the phase averaging method is necessarily linked to the identification of a periodic component of the phenomenon under study. The general framework of the conditional averaging allows structures identification even for non-periodic phenomena, but requires a specific criterion (see pioneering works on turbulence, for example Adrian 1979, Hussain and Haykawa 1987). In the case of thermoacoustics, the average process has to be linked to the dominant acoustic oscillation, and therefore a phase reference is needed.

Classical phase averaging based on an external reference (Kiya and Matsumara 1985), presents a risk of bias induced by phase jitter between the trigger and the averaged signal. It is of crucial importance to avoid this effect when the structure of interest is several orders of magnitude smaller than the leading velocity, as in our case. A more favourable case can be mentioned, when the external reference is the triggering force also. In this case, the phase jitter may not affect the averaged signal, as shown by Widmann *et al* (2012), who identified very small structures (Tollmien–Schlichting waves) having the same magnitude as the turbulent noise. To overcome a potential loss of phase coherence, a few procedures are proposed in the literature, which are not based on an external reference signal. One way consists in using local information taken inside the measured field itself (PIV time resolved velocity records), as in the case of the average of the wake behind a cylinder, either using as phase reference the circulation computed at a precise location inside the recirculation domain (Lourenco *et al* 1997) or using band-pass filtered time series (Negri *et al* 2011). Still, the results appear to be very dependent on details of the procedure.

More recently, instead of using local information taken inside the velocity field, global approaches are proposed. Konstantinidis *et al* (2005) used the cross-correlation between velocity fields as a phase identifier. This procedure allows randomly and not resolved time sampling, but cannot identify the value of each phase, the phase ordering being done visually. With another global approach, Perrin *et al* (2007) obtained the phase angle of the vortex shedding in the wake behind a cylinder using the two first modes obtained with the proper orthogonal decomposition (POD) method applied to the velocity snapshots. This phase averaging gives a more precise description than those using an external pressure signal, but the quality of the phase reference depends on the spectral content of the chosen POD modes.

The present study proposes an original method of signal processing (Debesse 2008), within the frame of PIV, based on the embedment technique of the underlying dynamics proposed by Broomhead and King (1986). The embedment technique has been successfully used in the case of self-sustained oscillations developing in open cavity flows in order to quantify the rate of intermittency of nonlinearly competing modes (Pastur *et al* 2008). In the present work,

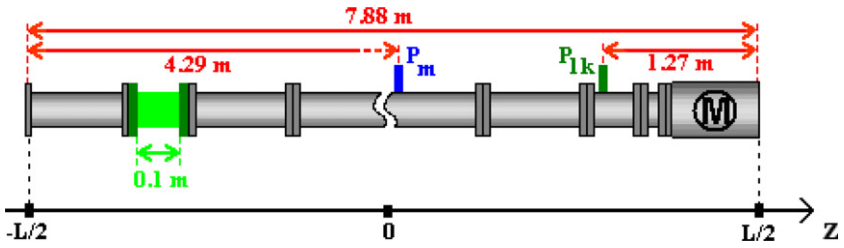


Figure 2. Simplified diagram of the apparatus: in green, the PIV measurement zone; M, the thermoacoustic engine; P_{1k}, the dynamical pressure transducer; P_m, the mean pressure transducer; the proportions are not respected.

the embedment technique was adapted to a different aim: the reconstruction of both acoustic part and time-independent part from experimental undersampled PIV velocity fields. No reference signal is needed to reconstruct the velocity field through phase-averaged series. Singular value decomposition (SVD) projects, on their principal components, the velocity fields strongly undersampled with respect to the fundamental acoustic period. This allows reconstruction of a pseudo phase space and then defining a self-referenced phase inside the acoustic fundamental period. The velocity fields can be then rearranged with respect to their phase, initially randomly distributed in time. Hence, we obtain a signal with enough information in space and time through phase sampling. A phase average over the fundamental period is then possible, yielding the mean velocity corresponding to second-order steady effect. The embedment technique together with the estimation of the mean velocity (second-order) from undersampled velocity PIV series represents an original method for measuring second-order steady flow in thermoacoustic waves.

This approach is developed and applied to experiments in a cylindrical standing-wave resonator, with a thermoacoustic engine acting as a wave generator. The following sections of this paper present the experimental setup (section 2), the acoustic velocity field estimate (section 3), the self-referenced phase arrangement (section 4), the streaming flow estimate and analysis (section 5) and an overall summary (section 6).

2. Experimental setup and metrology

The experimental device contains two major parts: the thermoacoustic system and the PIV measurement zone (figure 2).

The thermoacoustic system consists of a cylindrical steel tube closed at both ends, with length $L = 7.88$ m and inner diameter $D = 56.3$ mm, suspended by chains and shock absorbers in order to reduce structure vibration losses.

The thermoacoustic engine (active cell) consists of a stack of plates, placed between two heat exchangers. The wave is generated and maintained inside the system with a temperature gradient imposed between the hot heat exchanger and the cold heat exchanger. The hot heat exchanger is heated by an electrical power supply, while the cold heat exchanger is maintained at constant temperature with cooling water. This allows hot temperatures to be obtained in the range of 423 K (150 °C) to 873 K (600 °C); for our experiments, the temperature differences between hot and cold exchangers were 458 K (185 °C) to 573 K (300 °C). The wave generated inside

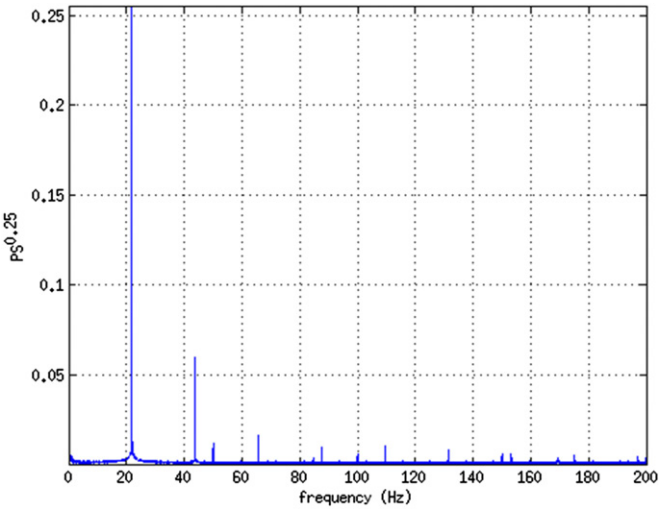


Figure 3. Power spectrum of the pressure recorded by transducer P_1.

the resonator is a standing wave. The corresponding acoustic pressure amplitudes vary within the range 0.1 to 0.5 bar.

The resonator is filled with nitrogen, confined under a mean pressure of $P_m = 7.26$ bar (7.26×10^5 Pa). The experiments were conducted at the mean temperature $T = 289$ K. The kinematic viscosity is $\nu = 2.09 \times 10^{-6}$ m^2 s^{-1} and the mean density is $\rho = 8.47$ kg m^{-3}.

The pressure signal is measured near the engine at $z_{1k} = L/2 - 1.27 = 2.67$ m from the middle of the resonator (figure 2). At the measurement location, the pressure fundamental amplitude is estimated by fitting the entire pressure signal with a Fourier series. Then, maximum pressure amplitude P_1 is calculated at the end of the resonator (standing wave in perfect fluid hypothesis):

$$P_1 = \frac{P_{1k}}{\cos\left(\frac{2\pi f_1}{c_0} z_{1k}\right)} \tag{1}$$

with f_1 the fundamental frequency, $\omega = 2\pi f$ the angular frequency and c_0 the sound speed; here, we have $P_1 = 127$ mbar. This corresponds to a drive ratio $P_1/P_m = 1.75\%$. The measured frequency of the acoustic wave is $f_1 = 21.92$ Hz (resonance frequency of the tube with stack and heat exchangers) and $c_0 = 347.28$ m s^{-1} (adiabatic sound speed). Up to the eighth harmonic of f_1 are present in the pressure power spectrum (figure 3).

The velocity fields are measured by PIV in a small pipe section located at 1.16 m from the left end of the resonator. It is constituted of a cylindrical tube of glass 0.1 m in

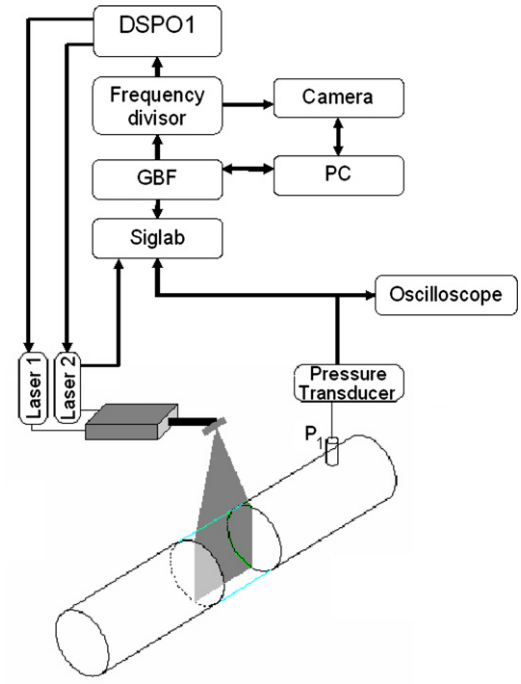


Figure 4. Diagram of PIV and pressure acquiring system.

length, with an anti-reflection coating. Seeding particles of magnesium oxide (MgO), less than 1 μm in diameter, are injected into the pipe close to the measurement section using a Dantec spreading device, limited to a maximum pressure of 10 bar. A buffer tank allows seeding of the resonator up to 20 bar. The particles have a sedimentation velocity between 1 and 6.6 mm min^{-1} (respectively for diameter of 0.4 μm and 1 μm). The light source is a 10 Hz double cavity pulsed YAG of 532 nm wavelength and 30 mJ/pulse. Particle images are recorded with a 20 Hz CCD camera (1024 $\times$ 768 pixels). The sampling double frame rate is $f_e = 10$ Hz with a delay of 2.000 ms between the two images of one pair. The time record of one series is close to 100 s. The data acquisition system (SigLab) has two parallel synchronized channels, one for the acoustic pressure and the other for the cavities laser Q-switch control, with the signal sample frequency at 5120 Hz. An anti-aliasing filter is activated only for the pressure channel (see figure 4).

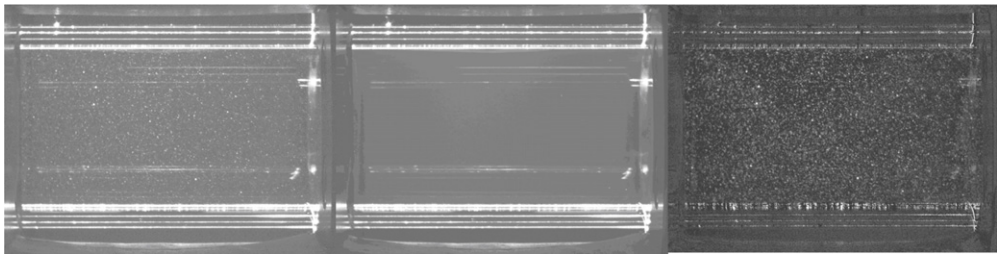
Seven different measurement series were performed with the same control parameters, allowing verification of the reproducibility of the results. Two data sets of measurements are carried out with two days lag, respectively labelled A (A1–A3) and B (B1–B4). The first record A1 starts 12.5 min after a first seeding injection, followed by A2 and A3 carried out respectively 2.5 min and 7.5 min after a second injection. The same procedure is applied for the four records of set B with only one seeding injection.

The velocity field ensues from image pairs processing in two steps: image pre-processing and particle displacement computation. Firstly, the optical reflections on the pipe walls are removed and the ground noise reduced (figure 5(*a*)). Usually this is obtained by subtracting from each frame a reference one, acquired before seeding. In our case, this solution is not well adapted because the seeding particles induce a strong additional light source that modifies reflections. Consequently, subtraction of an image averaged over the entire series is preferred (figure 5(*b*)), suppressing most of the reflections. The image contrast is finally improved by applying a gamma factor to the gray level (see figure 5(*c*)).

Then, the nonhomogeneous intensity of images is corrected by applying a high-pass filter and the intensity mean levels between the images are equalized.

The second step addresses the particle displacement fields computed from a pair of images as usual, but with an original optical flow algorithm using orthogonal dynamic programming (Quénot *et al* 1998). Dynamic programming algorithms are generally used for optimization (Horowitz *et al* 1996). This advanced PIV method is based on an iterative search for a global alignment of particle images, with regularity and continuity constraints (minimization of a Minkowski norm). The particle image displacement problem inside a plane is reduced to a one-dimension problem, dividing the images in strips along one direction and considering the displacement in the same direction. The two-dimensional (2D) solution is obtained by successive iterative resolution within smaller and smaller orthogonal strips. When the algorithm converges a displacement vector for each pixel is obtained. This algorithm presents some decided advantages (Stanislas *et al* 2005) when looking for a wide velocity range, compared with classical or even advanced correlation methods of PIV:

- a vector field without outliers (<0.02%), saving their identification and the interpolation artefacts for their replacement,
- the velocity field is by construction continuous and differentiable yielding an accurate and reliable estimate where strong velocity gradients occur (Stanislas *et al* 2008), in particular inside the boundary layer if the reflection problem can be overcome,



(*a*) (*b*) (*c*)

Figure 5. (*a*) Unprocessed image with particles; (*b*) reference average image; (*c*) processed image after subtraction.

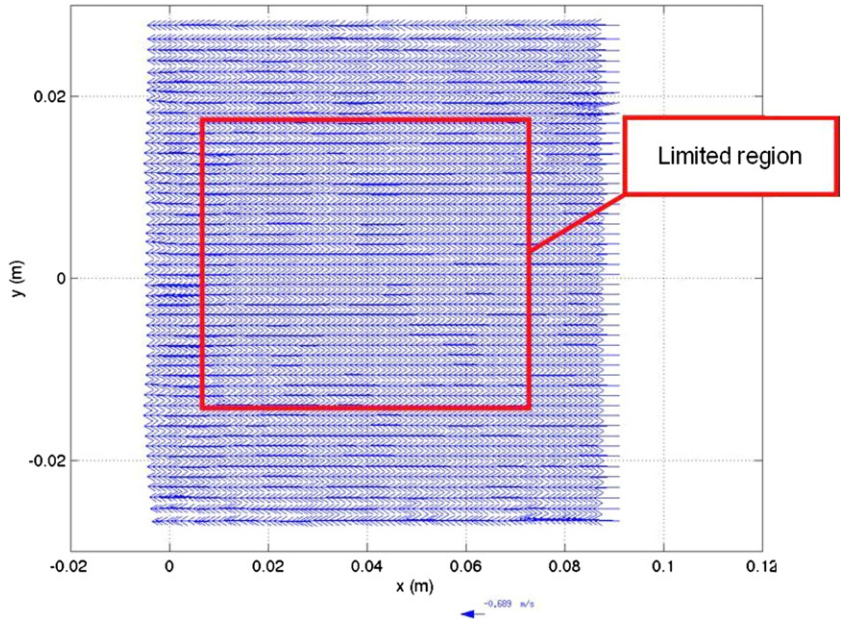


Figure 6. Velocity vector field $\overrightarrow{U}_{\mathrm{ac}}(x, y, t)$ and the limited region.

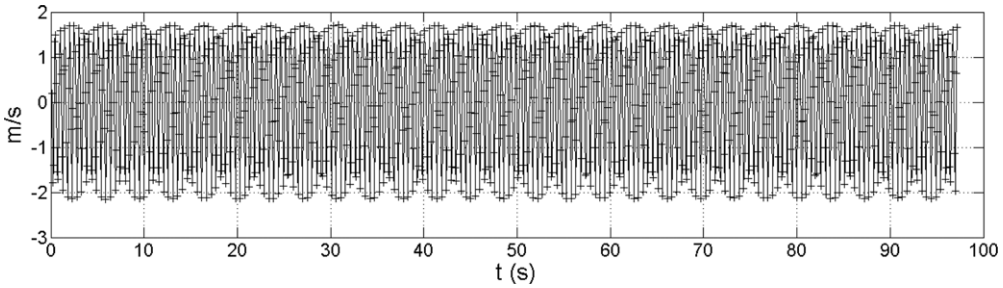


Figure 7. Evolution of axial component of space average acoustic velocity $u_x(t_n)$ versus acquisition time t.

– a high spatial resolution of one vector per pixel and an accuracy comparable to the best advanced algorithms based on cross-correlation using adaptive meshes.
– very good stability, especially in noisy images processing with low spatial definition.

The algorithm presents several disadvantages:

– sensitivity to local out-of-plane velocity component in the two-component version of the algorithm (Stanislas *et al* 2005);
– adjustment of many parameters and their sensitivity to flow configuration.

The optical flow resolution with the image analysis setting used in the present work is 1/181 pixel. That resolution corresponds to a velocity accuracy of 4×10^{-4} m s^{-1}.

The cylindrical curvature of the measurement region deforms vertical displacements and positions of the particles. This dioptre effect is corrected with an optical model, detailed in appendix B.

The image processing presented above gives instantaneous velocity fields, strongly undersampled in time. In the following section, a first estimate of the acoustic field is obtained from this set of undersampled data.

3. Characterization of the first-order acoustic field

The height of the domain of measurements is the entire diameter of the waveguide and the axial length represents 0.63% of the wavelength and 2.5% of the axial length of the expected Rayleigh streaming cells. The velocity fields obtained in the previous section are referred to as $\vec{U}(x, y, t)$, $x \in [0, 10\ \mathrm{cm}]$ and $y \in [-28.15\ \mathrm{mm},\ 28.15\ \mathrm{mm}]$ being the axial and radial local coordinates of the PIV measurement zone and t the acquisition time, respectively.

Consider the decomposition $\overrightarrow{U}(x, y, t) = \overrightarrow{\overline{U}}(x, y) + \overrightarrow{U}_{\mathrm{ac}}(x, y, t)$. The time mean velocity is first estimated over a long integration time t_{tot}, $\overrightarrow{\overline{U}}(x, y) = \frac{1}{t_{\mathrm{tot}}} \int_0^{t_{\mathrm{tot}}} \overrightarrow{U}(x, y, t)\, \mathrm{d}t$. The acoustic velocity is obtained by subtraction:

$$\overrightarrow{U}_{\mathrm{ac}}(x, y, t) = \overrightarrow{U}(x, y, t) - \overrightarrow{\overline{U}}(x, y).$$

Then, a limited region is selected, situated far from the boundary layers (figure 6), over which space variations are considered negligible. In this region, spatial average of the axial acoustic velocity component $\overrightarrow{U}_{\mathrm{ac}}$ is performed yielding a new discrete time set $u_x(t_n)$.

The time dependent set $u_x(t_n)$ is represented in figure 7 for one measurement series. This time behavior is characteristic of an undersampled periodic signal. The class distribution of that series (figure 8) is also typical of a mono-periodical signal

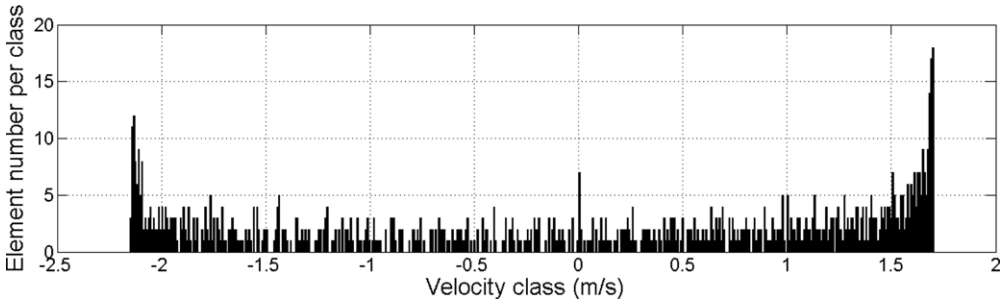


Figure 8. Velocity class distribution.

Table 1. Values of velocity extrema and amplitudes (in m s^{-1}) for the experimental data of the seven measurement series and their mean values over all the series from A1 to B4 (in bold type).

	Name of experimental series							
Velocities (m s^{-1})	**A1**	**A2**	**A3**	**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	Mean
Experimental								
Maximum	1.647	1.663	1.649	1.699	1.684	1.690	1.685	**1.672**
Minimum	−2.064	−2.103	−2.083	−2.142	−2.124	−2.128	−2.131	**−2.107**
Amplitude	1.856	1.883	1.866	1.921	1.904	1.909	1.908	**1.890**
Analytical amplitude	1.867	1.892	1.870	1.923	1.901	1.908	1.904	**1.894**
Amplitude difference (% of the analytical)	−0.012	−0.009	−0.004	−0.002	0.003	0.001	0.004	**−0.004**

with some noise. The two extrema of the set are distributed over several classes and not in the most probable class, as for a pure cosine. Therefore, their minimum $u_x(t_n)_{\min}$ and maximum $u_x(t_n)_{\max}$ values must be averaged at least on the two last classes.

The amplitude of $u_x(t_n)$ is then roughly given by $(u_x(t_n)_{\max} - u_x(t_n)_{\min})/2$.

The estimated amplitudes of the seven series are compared with the corresponding analytical values obtained from the theoretical acoustic field (Hamilton *et al* 2003):

$$u_z(z, y) = v_0 \left(\frac{\cosh(\alpha z)}{\cosh(\alpha L/2)} - 1 \right) R_z(y). \qquad (2)$$

In the previous equation, u_z represents the axial component of acoustic velocity inside the resonator, $z \in [-L/2,\ L/2]$ represents the axial coordinate in the resonator, v_0 is the amplitude of the harmonic excitation of the resonator (control parameter), α and $R_z(y)$ are intermediate functions depending on the thermal-viscous properties of the gas, the characteristics of the wave and the Bessel functions J_0 and J_1:

$$\alpha^2 = -\left(\frac{1 + (\gamma - 1) f_\kappa}{1 - f_\nu} \right) \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$f_{\nu,\kappa} = \frac{2 J_1(\beta_{\nu,\kappa} r_0)}{\beta_{\nu,\kappa} r_0 J_0(\beta_{\nu,\kappa} r_0)}, \quad \beta_{\nu,\kappa} = \frac{\mathrm{i} - 1}{\delta_{\nu,\kappa}},$$

$$\delta_\nu = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}, \quad \delta_\kappa = \sqrt{\frac{2\kappa}{\omega}}$$

$$R_z(r) = 1 - \frac{J_0(\beta_\nu r)}{J_0(\beta_\nu r_0)}$$

$$R_r(r) = \frac{r}{r_0} - \frac{J_1(\beta_\nu r)}{J_1(\beta_\nu r_0)} + \frac{(\gamma - 1)(1 - f_\nu) f_\kappa}{[1 + (\gamma - 1) f_\kappa] f_\nu} \left(\frac{r}{r_0} - \frac{J_1(\beta_\kappa r)}{J_1(\beta_\kappa r_0)} \right).$$

The control parameter v_0 is not directly accessible by experiment but can be calculated from the maximal pressure defined in equation (1), knowing the pressure P_{1k} at the end of the resonator (P_{1k} is measured with a pressure transducer as shown in figure 2), $v_0 = \frac{P_{1k}\alpha}{\mathrm{i}\omega\rho_0} \frac{\cosh(\alpha \frac{L}{2})}{\sinh(\alpha z_{1k})}$. Table 1 summarizes the measured acoustic wave characteristics and the analytical values obtained with equations (2), for the seven records.

The reproducibility of the results is good whatever the series, validating the measurement system and the data treatments. In particular, these results confirm that the initial flow conditions, induced by the seeding injection process, vanish rapidly, as concluded from direct visualization. Moreover, experimental and analytical values are in close agreement, their difference lying between 1 to 4 mm s^{-1}. The velocity extrema point out a large asymmetry. The difference between maximum and minimum velocity is about 20.7% of the minimum velocity. This means that, within an acoustic cycle, the flow coming from the thermoacoustic engine is faster than the flow going back to the thermoacoustic engine. This asymmetry is generated by the harmonics presence as confirmed by the power spectrum for one series (B1), plotted in figure 9.

The velocity temporal set being undersampled, the spectrum is aliased. The fundamental frequency of the wave $f_1 = 21.89$ Hz appears in this spectrum at $f_1 = 1.892$ Hz (one can verify that 1.892 Hz + 2 × 10 Hz = 21.89 Hz). Similar expressions can be found for the harmonics $f_2 = 43.78$ Hz to $f_6 = 131.34$ Hz. The same frequencies can be observed in the pressure power spectrum (figure 3). The local rate of the first harmonic (ratio of the amplitude of the first harmonic to the fundamental) is evaluated with the Fourier spectrum to reach 19.3%. Asymmetrical wave extrema indicate a phase lag of harmonics with respect to the fundamental mode, which cannot be evaluated at this stage. The wave appears as a mix

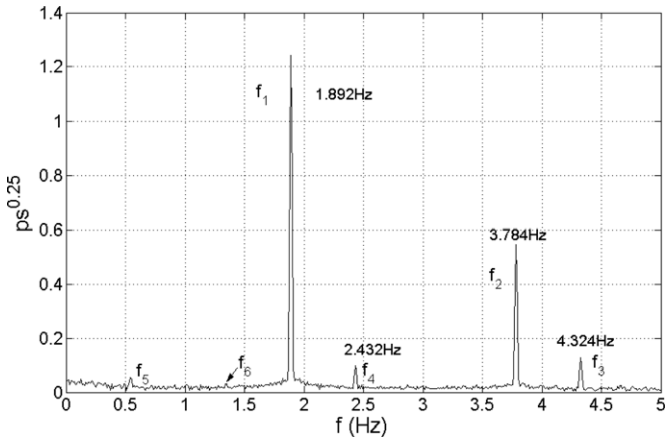


Figure 9. Aliased power spectrum PS (fourth root) for the axial velocity component; f_1 is the fundamental mode frequency and f_2 to f_6 are the frequencies of the five first harmonics.

of a standing-wave component and a low-rate travelling wave component.

To go further in the wave analysis, a precise wave cycle reconstruction is needed.

4. Phase rearrangement of the undersampled data

Let us recall that quantifying the continuous secondary flow $\overrightarrow{\overrightarrow{U}}(x, y)$ is this paper's main goal, with $\overrightarrow{\overrightarrow{U}}(x, y) = \overrightarrow{U}(x, y, t) - \overrightarrow{U}_{ac}(x, y, t)$. As previously seen, the PIV fields are strongly undersampled (approximately one snapshot every two periods). Moreover, the periodic component is at least two orders of magnitude greater than the searched steady component $\overrightarrow{\overrightarrow{U}}(x, y)$. The separation can therefore be achieved only by knowing $\overrightarrow{U}_{ac}(x, y, t)$ very precisely over one cycle of the lowest fundamental frequency f_1 (see figure 9). Usually such a rearrangement is done by phase averaging based on an external clock, which can be obtained by filtering a well-sampled pressure signal around the fundamental frequency. But in the nonlinear range this procedure presents some limitations, particularly when the pressure reference has to be taken far from the velocity field measurement. The shift lag between the two measurements can induce correlation losses or phase shift not necessarily frequency independent. We propose here a direct identification of the torus associated with the fundamental frequency, from the undersampled time series itself. Therefore, a phase portrait is built with an embedding technique: the signal is projected on its principal components using SVD (Broomhead and King 1986, Mees *et al* 1987). The time set is reorganized over one cycle using the phase order.

4.1. Self-referenced acoustic velocity cycle

The results presented above show that the time set $u_x(t_n)$ is mainly a periodic signal with a fundamental frequency f_1 and its harmonics (figure 9), which built the acoustic wave. In order to analyse the acoustic wave, the set $u_x(t_n)$ is rearranged over one cycle of f_1 using self-referenced phase ordering. The periodic part of the dynamics is obtained by projecting the most energetic mode on the first two principal components of

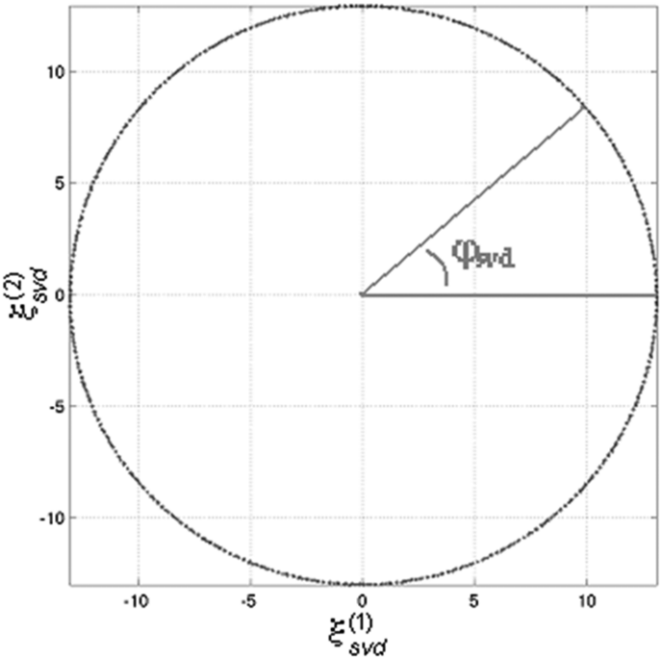


Figure 10. Phase portrait $(\xi^{(1)}_{svd}(t);\ \xi^{(2)}_{svd}(t))$ obtained from SVD on 99 modes; φ_{svd} represents the current phase.

the signal. To this end, the SVD is applied to the delay matrix (called 'trajectory matrix' by Broomhead and King (1986)), denoted by S and constructed with the discrete time set $u_x(t_n)$:

$$S = \begin{pmatrix} u_x(t_0) & u_x(t_1) & \dots & u_x(t_{M_{SVD}-1}) \\ u_x(t_1) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_x(t_{r-1}) & u_x(t_r) & \dots & u_x(t_{N_{max}-1}) \end{pmatrix}.$$

In the previous definition, M_{SVD} is the number of SVD decomposition modes, $r = N_{max} - (M_{SVD} - 1)$, N_{max} being the total number of velocity data and $t_n = \frac{n}{f_e}$, $1 \leqslant n \leqslant N_{max} - 1$.

S is decomposed according to the relation:

$$S = UVD^t,$$

D being the diagonal matrix of the singular values and V the unitary matrix of eigenvectors. The phase space is generated with a basis provided with the columns of Φ_{SVD}, defined as:

$$\Phi_{SVD} = UD = SV.$$

The jth column of Φ_{SVD} represents the jth mode $\xi^{(j)}_{svd}(t)$, ranked from the most energetic mode to the lowest. The first two modes $\xi^{(1)}_{svd}(t)$ and $\xi^{(2)}_{svd}(t)$ are used to construct a phase portrait, which is the projection of the dynamic on its fundamental periodic part. But this phase portrait is not sufficiently circular, because SVD decomposition modes 1 and 2 contain a harmonic residue. If the phase portrait is not a perfect circle, the velocity reconstruction will yield a deformed profile. This will have a consequence on the mean velocity estimate, as detailed in appendix A. Therefore, a band-pass filtering centered on the aliased fundamental acoustic frequency is applied to $\xi^{(1)}_{svd}(t)$ and $\xi^{(2)}_{svd}(t)$, in order to filter harmonics. Then the phase portrait is constructed (figure 10). Let us remark that the band-pass filter cannot be applied directly on the time set, because the aliasing associated with the undersampling is uncontrolled.

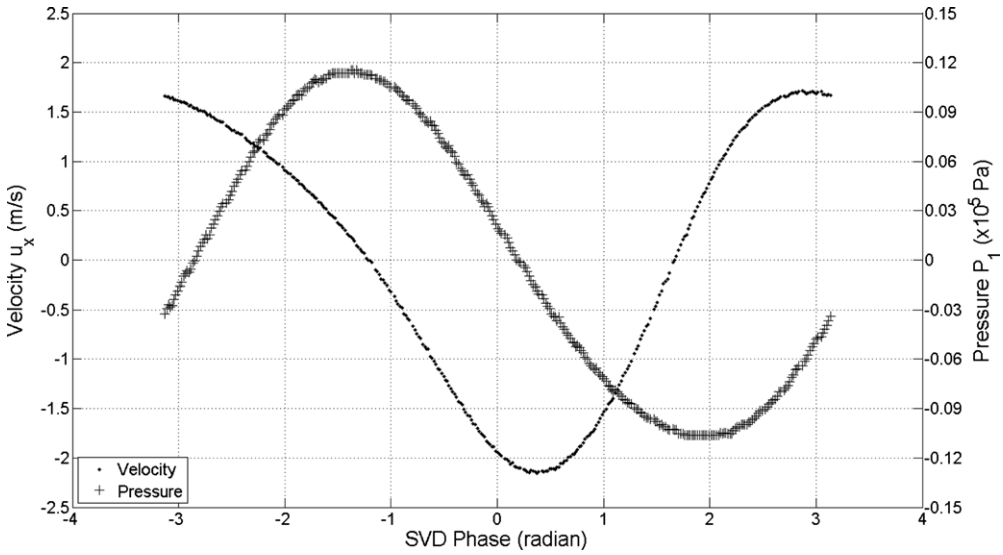


Figure 11. Phase rearrangements of velocity $u_x(\varphi_{\text{svd}})$ $(\cdot)$ and of pressure $P_1(\varphi_{\text{svd}})$ $(+)$ measured at P_{1k}, using SVD decomposition based on velocity field.

A phase φ_{svd}, defined as the phase of the complex number $\xi^{(1)}_{\text{svd}} + \text{i}\xi^{(2)}_{\text{svd}}$ (figure 10), can be assigned to each instantaneous field velocity $u_x(t_n)$ and therefore to the whole corresponding velocity field $\overrightarrow{U}(x, y, t_n)$. Velocity data are then rearranged in phase on the interval $[-\pi; \pi]$ according to φ_{svd} values. Pressure data measured near the engine (position P_{1k} in figure 2) are also rearranged on the interval $[-\pi; \pi]$ according to φ_{svd} values. In figure 11 are represented both the velocity $u_x(\varphi_{\text{svd}})$ and the pressure $P_1(\varphi_{\text{svd}})$. The phase origin cannot be determined from the phase portrait and is arbitrarily taken in figure 11 as being $-\pi$. This phase rearrangement shows a sinusoidal signal, slightly deformed by the harmonics. The asymmetry values of the extrema are close to those found in section 3.

A validation of the embedding procedure is done using the oversampled pressure record $P_1(t)$. An undersampled pressure set is constructed linking the pressure data to their corresponding velocity one. Hence, we obtain an undersampled pressure signal, like the velocity data. The phase order obtained previously is used to rearrange this undersampled pressure series. In figure 12 are plotted the acoustic pressure cycle $P_1(\varphi_{\text{svd}})$ together with a representative period $[-\pi; \pi]$ of the original pressure signal. The good agreement validates the phase ordering.

4.2. Standing-wave properties

The undersampled data being rearranged over one period, information on acoustics and streaming can be extracted. In this section, local and global properties of acoustic wave are successively obtained.

Harmonic content of velocity cycle is estimated identifying the signal with a sinusoidal function, having one fundamental oscillating mode and its first harmonic:

$$v_{\text{fit}}(\varphi_{\text{svd}}) = a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu)} \cos\left(d_1^{(\nu)}\varphi_{\text{svd}} + \psi_1^{(\nu)}\right) + a_2^{(\nu)} \cos\left(d_2^{(\nu)}\varphi_{\text{svd}} + \psi_2^{(\nu)}\right).$$

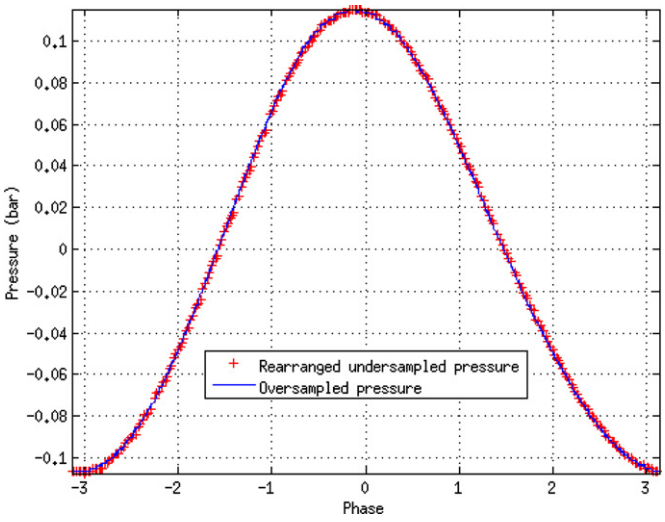


Figure 12. Comparison between the oversampled pressure data for one period $P_1(t)$ (—) and the undersampled data rearranged by SVD $P_1(\varphi_{\text{svd}})$ $(+)$.

In this equation, $a_0^{(\nu)}$ represents the time averaged value, $a_i^{(\nu)}$ and $\psi_i^{(\nu)}$, respectively, the amplitude and the phase of mode 'i'. The parameters $d_1^{(\nu)}$ and $d_2^{(\nu)}$ are considered unknown in order not to impose the wave shape. The time average being already removed from the signal before the phase rearrangement, the constant $a_0^{(\nu)}$ should be useless. Nevertheless, many calculations have established that the identification does not run properly when this term is left out. The main reason is that the exact mean value will only be accessible at the end of the procedure (see section 5.1). The results averaged over all series A1–A3, B1–B4 are summarized in table 2.

The fundamental mode is identified through the coefficient $d_1^{(\nu)} = 1.0$ and its first harmonic with $d_2^{(\nu)} = 2.0$, with an accuracy of 5%. The fundamental mode amplitude is 1.816 m s^{-1}, slightly smaller than the amplitude obtained with the histograms method (1.890 m s^{-1}, cf table 1). One

Table 2. Averaged coefficients obtained by identification of the velocity cycle rearranged in phase.

Coefficients of fit					
$a_0^{(v)}$ (m s^{-1})	$a_1^{(v)}$ (m s^{-1})	$a_2^{(v)}$ (m s^{-1})	$\left\lvert\frac{a_2^{(v)}}{a_1^{(v)}}\right\rvert$ (%)	$d_1^{(v)}$	$d_2^{(v)}$
0.030	1.816	0.339	18.7	1.0	2.0

Table 3. Coefficients obtained by identification of the pressure cycle rearranged in phase.

Coefficients of fit					
$a_0^{(p)}$ (bar)	$a_1^{(p)}$ (bar)	$a_2^{(p)}$ (bar)	$\left\lvert\frac{a_2^{(p)}}{a_1^{(p)}}\right\rvert$ (%)	$d_1^{(p)}$	$d_2^{(p)}$
0.001	0.110	0.006	5.8	1.0	2.0

explanation of this difference is that the histogram method overestimates the velocity amplitude, by integrating all modes. The harmonic amplitude is about 34 cm s^{-1} and its rate with respect to the fundamental is 18.7%, in good agreement with the result obtained from the folded spectrum (19.3% harmonic rate, figure 9). This high rate is then explained by the measurement zone location, situated near the harmonic maximum amplitude. The phase lag between the fundamental and harmonic $|\psi_1^{(v)} - \psi_2^{(v)}|$ varies significantly from one series to another and is responsible for the velocity extrema asymmetry.

The same approach is used for the pressure cycle, which is identified with the function

$$P_{\text{fit}}(\varphi_{\text{svd}}) = a_0^{(P)} + a_1^{(P)} \cos\left(d_1^{(P)}\varphi_{\text{svd}} + \psi_1^{(P)}\right) + a_2^{(P)} \cos\left(d_2^{(P)}\varphi_{\text{svd}} + \psi_2^{(P)}\right).$$

The results averaged over all series A1–A3, B1–B4 are summarized in table 3.

Again the identified values of the parameters $d_1^{(v)}$ and $d_2^{(v)}$ indicate that the two first modes match the fundamental and the first harmonic modes. The first harmonic rate with respect to the fundamental is 5.8%, much smaller than the velocity harmonic rate as a consequence of the pressure sensor location in the standing wave (0.5 m from the wave generator, close to fundamental pressure antinodes). The cycle is then less deformed.

Now, one can estimate the phase-lag between fundamental modes of pressure and velocity. For all the measurement series A and B, the same value is obtained, $|\psi_1^{(P)} - \psi_1^{(v)}| = 0.48\pi$, which is close to the theoretical value of 0.50π, specific for a standing wave inside a resonator.

In the following, the global space evolution of the wave (wavelength, maximum amplitude, etc) is deduced from the undersampled velocity data, measured on a very small fraction (0.63%) of the wavelength.

The initial axial velocity data are used again, but averaged only in the radial direction y. A new space-time set is obtained, depending on x and t, denoted by $u_x(x,t) = \langle U_x(x,y,t)\rangle_y$. For each location x in the measurement zone, the time average component is subtracted from the previous set $u_x(x,t)$. Then, SVD phase rearrangement is done on the new velocity set after subtraction, leading to the velocity profiles $u_x(\varphi_{\text{svd}})$ over one

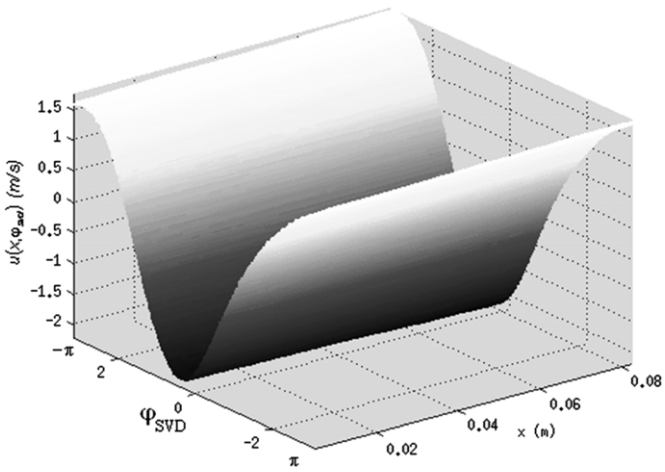


Figure 13. y-averaged velocity profiles evolution according to x and phases φ_{svd}.

Table 4. Identification coefficients for data $u_x(\varphi_{\text{svd}})$.

Coefficients of fit					
u_{m0} (m s^{-1})	u_{m1} (m s^{-1})	u_{m2} (m s^{-1})	$\left\lvert\frac{u_{m2}}{u_{m1}}\right\rvert$ (%)	λ_{exp} (m)	λ_{th} (m)
0.004	4.046	0.438	10.9	15.56	15.84

cycle. In figure 13 are represented a large number of those profiles according to their phases, on about 8.5 cm length, corresponding to the measurement area.

For each phase lag, the x-evolution is typical of a standing wave. Despite the length of the measurement window being about 1% of the resonator length, a proper identification can be achieved using the whole space $\{x, \varphi_{\text{svd}}\}_{x\in[0,0.1],\ \varphi_{\text{svd}}\in[-\pi,\pi]}$ information. Therefore, supposing a two-frequency plane standing wave, the fitted velocity depending on the global axial coordinate $z \in [-\frac{L}{2};\ \frac{L}{2}]$, is given by:

$$u_{\text{fit}}(z,\ \varphi_{\text{svd}}) = u_{m0} + u_{m1}\ \sin\left[k\left(z+\frac{L}{2}\right)\right]\cos(\varphi_{\text{svd}}+\psi_1) + u_{m2}\ \sin\left[2k\left(z+\frac{L}{2}\right)\right]\cos(2\varphi_{\text{svd}}+\psi_2). \quad (3)$$

The unknowns of the fit procedure are the amplitudes (u_{m0}, u_{m1}, u_{m2}), the phases (ψ_1, ψ_2) and the wave number k. The identification is done for each measurement series A and B and the coefficients are averaged over all series (table 4).

The global harmonic rate u_{m2}/u_{m1} is about 11%. The wavelength estimate of the fundamental mode is $\lambda_{\text{exp}} = 15.56$ m. This experimental estimation can be compared to $2L$ (L the tube length) which yields 15.76 m or with $\lambda_{\text{th}} = c_0/f_1 = 15.84$ m (f_1 measured fundamental frequency and c_0 the sound wave velocity). The latter is preferred, closer to reality of the system (resonator with thermoacoustic stacks and heat exchangers) in which the temperature varies significantly (Bétrancourt 2008). The difference with the experience is then 1.77% (0.28 m) of the theoretical wavelength, which represents a slight difference when knowing that λ_{exp} is estimated on a pipe segment which represents only 0.63% of the wavelength.

Finally, the maximum velocity amplitude measured by PIV at the location $z_{\text{piv}} = L/2+1.16$ is compared with the

estimated one at the same location using equation (3). One finds 2.172 m s^{-1}, in quite good agreement with the maximum velocity amplitude 1.894 m s^{-1} estimated by the histogram method (section 3). The phase values $\psi_1 = 1.12\pi$ and $\psi_2 = 0.95\pi$ are obtained through the fit.

After this careful characterization of the acoustic velocity, it becomes possible to evaluate the mean velocity field.

5. Streaming estimation

5.1. Phase average method

As already done in section 3 to extract the oscillations of the acoustic part, the mean velocity component calculation could be performed by a simple time average, approximated in the discrete form by:

$$\overline{\vec{U}}(\vec{x}) \approx \frac{1}{N_{\max}} \sum_{n=0}^{N_{\max}} \vec{U}(x_i, y_j, t_n).$$

This zero order discrete averaging form presents several limitations that penalize an exact partition between the strong periodic oscillation and the tiny steady component. Practically, the most challenging point comes from the slow convergence to zero of the periodic residue when the number $N_{\max}$ of velocity fields increases. With the considered time series, the discrete average approximation approaches the exact time average with an error of the same magnitude as the term which has to be estimated yielding high imprecision. To illustrate that, let us estimate the residue of the average calculation for the velocity axial component. Consider the Hussain and Reynolds (1970) decomposition:

$$v_x(\vec{x}, t) = \tilde{u}_x(\vec{x}, t) + u'_x(\vec{x}, t) + \bar{u}_x(\vec{x}).$$

In this equation, $\tilde{u}_x(\vec{x}, t)$ is the periodic part (including the fundamental acoustic mode and harmonics of the wave) such as $\tilde{u}_x(\vec{x}, t + T) = \tilde{u}_x(\vec{x}, t)$, T being the fundamental period of the oscillation and $\vec{x} = (x, y)$. $\bar{u}_x(\vec{x})$ is the time-independent component (time average) and $u'_x(\vec{x}, t)$ the non-periodic velocity component (turbulence, noise, etc). Over an infinite time, the mean value of the whole time dependent part of the velocity field $\hat{u}_x(\vec{x}, t) = \tilde{u}_x(\vec{x}, t) + u'_x(\vec{x}, t)$ is by definition equal to zero:

$$\overline{\tilde{u}(\vec{x}, t)} = \lim_{t_{\text{tot}} \to \infty} \frac{1}{t_{\text{tot}}} \int_0^{t_{\text{tot}}} \tilde{u}(\vec{x}, t)\, \mathrm{d}t = 0$$

$$\overline{u'_x(\vec{x}, t)} = 0.$$

Let us estimate the maximum error related to an average over a finite time interval $[0, t_{\text{tot}}]$. Consider $t_{\text{tot}} \gg 1$ and N_T the number of intervals $[kT, (k+1)T]$ included in $[0, t_{\text{tot}}]$, with T the fundamental period of the oscillation. We shall leave out the spatial dependence in $\vec{x}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{t_{\text{tot}}} \int_0^{t_{\text{tot}}} v_x(t)\, \mathrm{d}t &= \frac{1}{t_{\text{tot}}} \left(\int_0^{t_{\text{tot}}} [\tilde{u}_x(t) + u'_x(t) + \bar{u}_x]\, \mathrm{d}t \right) \\ &= \frac{1}{t_{\text{tot}}} \left(\int_0^{t_{\text{tot}}} u'_x(t)\, \mathrm{d}t + \int_0^{N_T T} \tilde{u}_x(t)\, \mathrm{d}t \right. \\ &\quad \left. + \int_{N_T T}^{t_{\text{tot}}} \tilde{u}_x(t)\, \mathrm{d}t \right) + \bar{u}_x.\end{aligned}$$

The periodicity of $\tilde{u}_x$ implies $\int_0^{N_T T} \tilde{u}_x(t)\, \mathrm{d}t = 0$. Furthermore, the time mean value of $u'(t)$ converges to zero faster than the residual integral $\frac{1}{t_{\text{tot}}} \int_{N_T T}^{t_{\text{tot}}} \tilde{u}_x(t)\, \mathrm{d}t$, so that one obtains at the first order of approximation:

$$\frac{1}{t_{\text{tot}}} \int_0^{t_{\text{tot}}} v_x(t)\, \mathrm{d}t = \bar{u}_x + \underbrace{\frac{1}{t_{\text{tot}}} \int_{N_T T}^{t_{\text{tot}}} \tilde{u}_x(t)\, \mathrm{d}t}_{(1)}.$$

The residual integral (1) can be estimated by changing the time variable t into the phase variable φ. Consider the following transformation:

$$t = \frac{T}{2\pi}\varphi + N_T T, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

The residue becomes then

$$\frac{t}{t_{\text{tot}}} \int_{N_T T}^{t_{\text{tot}}} \tilde{u}_x(t)\, \mathrm{d}t = \frac{T}{2\pi t_{\text{tot}}} \int_0^{2\pi \left(\frac{t_{\text{tot}}}{T} - N_T\right)} \tilde{u}_x(\varphi)\, \mathrm{d}\varphi.$$

Suppose now that $\tilde{u}_x(\varphi)$ has the simplified form $2\sin(\varphi)$ (one frequency wave with an amplitude close to the experiment), and consider the case the most unfavourable where the integral has a maximal contribution, corresponding to $2\pi\left(\frac{t_{\text{tot}}}{T} - N_T\right) = \pi$. In our experiment, $T = 4.56 \times 10^{-2}$ s, $t_{\text{tot}} = 100$ s, $N_T = \mathrm{O}(000)$ and the residual part estimate is:

$$\frac{T}{2\pi t_{\text{tot}}} \int_0^{\pi} 2\cos(\varphi)\, \mathrm{d}\varphi = 2.9 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}.$$

Knowing that the expected mean velocity can be around 10^3 smaller than the acoustic component, this residue can represent 30% of the mean velocity. Consequently, the averaging of the velocity field has to be performed over an integer number of reconstructed cycles using the SVD phase rearrangement discussed in section 4.1.

This being established, two other sources of errors must be reduced. Firstly, the average integral is done using a first-order scheme, because the adaptive Simpson quadrature does not improve the result here. The velocity field averaged with respect to the phase is calculated for the 2D velocity field at each point of the measurement zone:

$$\overline{\vec{U}}(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \vec{U}(\vec{x}\, \varphi_{\text{svd}})\, \mathrm{d}\varphi_{\text{svd}}.$$

Phases are deduced from the phase portrait $(\xi_{\text{svd}}^{(1)};\ \xi_{\text{svd}}^{(2)})$ (figure 10). As mentioned in section 4.1, both SVD modes are filtered around the fundamental frequency to avoid harmonic pollution. Appendix A highlights this problem with a synthetic signal, composed of a standing wave in (x, t) (containing a fundamental mode and its first harmonic) superimposed on a parabolic y-profile representing a streaming mean flow. We observed that filtering the harmonic into the two SVD modes before rearrangement gives a better approximation.

5.2. Mean velocity field

In order to test the reproducibility of the phase mean velocity estimation, we compare this average result for all measurement series A and B. The comparison is performed in a limited region of the measurement zone, to avoid the loss of image quality coming from the boundaries. We notice quite good stability of this mean flow, whatever the series, despite distinct

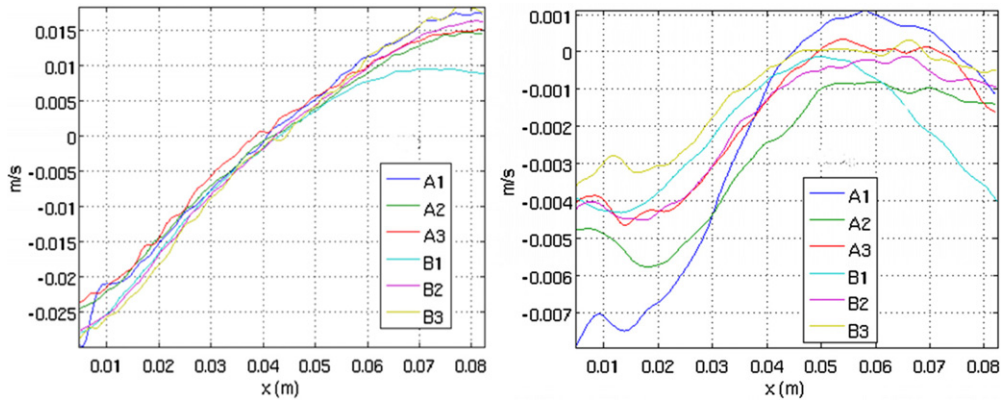


Figure 14. Mean velocity profiles averaged over y axis $\langle \overline{u_x}(x, y) \rangle_y$ (left), $\langle \overline{u_y}(x, y) \rangle_y$ (right) for all six series.

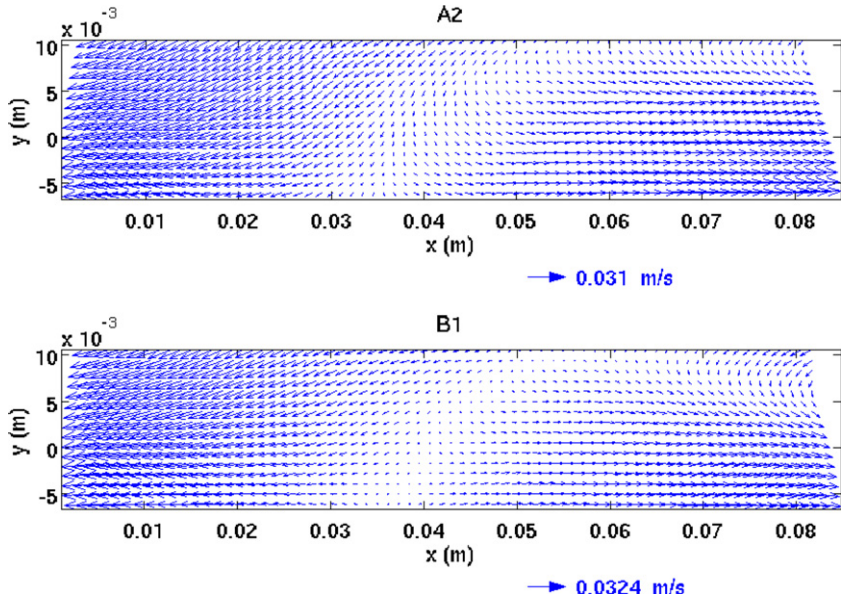


Figure 15. Phase mean velocity field (limited zone) for the series: A2 (left) and B1 (right).

measurement times after particle injection according to series (see section 2). In order to compare the time averaged velocity field, the variance between the six records A1, A2, A3, B1, B2, B3 is computed at each spatial location and then averaged over the whole space. Finally, the square root is computed. This deviation is normalized with the mean value, i.e. $\sqrt{\langle \underset{1\leqslant i\leqslant 6}{\text{var}}(\overline{u_{x,i}}(x, y))\rangle_{x,y}}/\langle \underset{1\leqslant i\leqslant 6}{\text{mean}}(\overline{u_{x,i}}(x, y))\rangle_{x,y}$, yielding 3% maximum variation for the axial velocity component $\overline{u_x}(x, y)$ and 7% for the radial component $\overline{u_y}(x, y)$. It is also worthwhile to compare velocity profiles versus x averaged over y. For the axial velocity component (figure 14 left), the agreement is very good, keeping in mind that the acoustic velocity field is 100 times stronger than the mean flow. For the radial component (figure 14 right), the discrepancy between the six series is still acceptable because the same trend is observed even if the two first series A1 and B1 are less similar. As an example, figure 15 presents two mean velocity fields, obtained in the limited region (defined in figure 6) for the series A2 and B1.

The reproducibility being quantified, let us consider now the whole measured field, excepted for the very near wall region corrupted by reflection. Figure 16 presents the mean field for the whole PIV measurement zone obtained for the series B1. In the following, only this series is treated, the fields from the other series being similar.

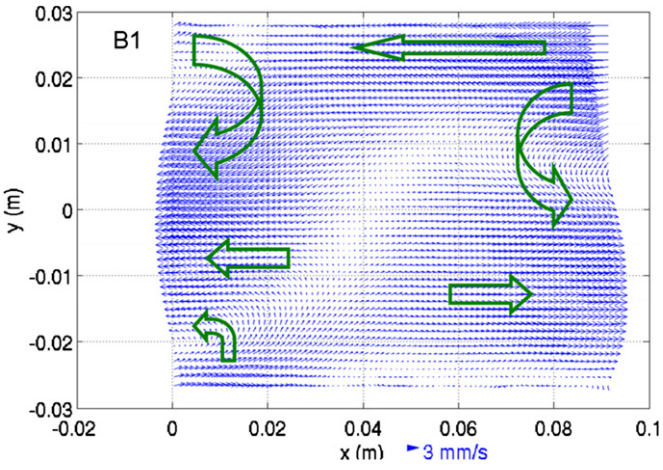


Figure 16. Phase mean velocity field (PIV zone) for the series B1.

The flow has a complicated structure that can be separated into three regions:

(i) One central region with small velocities probably due to the presence of deformed vortices, corresponding to a stagnation boundary between two streaming cells, eventually accompanied by a transverse flow.
(ii) A right side region in which the flow coming from the engine moves towards the left side near the upper edge; in the middle, it goes down again to head for the engine.
(iii) A left side region, roughly symmetric to the right part, but with the presence of a little vortex at the bottom corner.

Globally, it seems there are two large and two small counter-rotating three-dimensional cells exactly at the position of the measurement zone. Arroyo and Greated (1991) noticed the existence of a slight transverse velocity in the case of the Rayleigh streaming that stands for 11% of the maximum Rayleigh streaming velocity. This could explain the transverse drift of the seeding particles in the laser sheet. In addition, in the present work, cells are strongly asymmetric. This flow is different from that expected for a regular axisymmetric Rayleigh streaming in terms of patterns. Nevertheless, the velocity values of this field are between 0 cm s^{-1} and 5 cm s^{-1}, which is of the same order of magnitude as the Rayleigh theoretical estimation: 2.2 cm s^{-1} in our experimental conditions. The observed cell asymmetry could be due to a nonlinear regime of streaming. This regime is characterized by the critical values of the streaming Reynolds number. Two definitions of the Reynolds number are generally used. According to Stuart (1966), $\mathrm{Re}_s = \frac{u_s \lambda}{\nu}$ where u_s is the streaming velocity, λ the wavelength and ν the kinematic viscosity. For $\mathrm{Re}_s > 1$, inertial effects deform the streaming cells. In our case, $u_s = 2.2$ cm s^{-1} and Re_s is of the order of 166 000. According to Menguy and Gilbert (2000), the nonlinear Reynolds number $\mathrm{Re}_{nl} = \frac{U_{\max}^2}{\frac{1}{2}(\frac{\delta_R}{R} c_0)^2}$, based on the maximal amplitude of acoustic velocity in the center of the resonator, separates the linear and nonlinear regime for a critical value $Re_{nl} = 1$. In the present case, it reaches the value $Re_{nl} = 9.7$, which means once again that streaming cells would be deformed by the inertial effects. As Re_{nl} increases above one, some authors indicate the possible presence of more than four outer streaming cells in a half-wavelength resonator, still due to inertial effects (Nabavi *et al* 2009, Reyt *et al* 2012, Daru *et al* 2013). The 2D velocity field in our measurements seems to correspond to this case.

Let us examine the transverse evolution of axial velocity profiles $\overline{u_x}(y)$, associated with the vector field in figure 16. These profiles are represented in figure 17 for different local axial positions, from $x = 0.4$ mm to 9.1 cm (in steps of 1.1 mm). Three values of x are displayed in the graph to indicate the axial evolution of the velocity.

One can observe three different flow regions, delimited by $y = -2$ mm and $y = 1.5$ mm, with a strong asymmetry, as already observed from the 2D velocity field. The flow near boundaries ($y > 1.5$ cm and $y < -2$ cm) is roughly opposite to that existing in the zone $y \in [-2; 1.5]$ cm. The same observation can be made for the left/right side regions. All this indicates the presence of four counter-rotating convection cells between the core of the resonator and the wall boundaries, and also between left and right, confirming the conclusions of the 2D flow analysis. The flow close to the tube walls

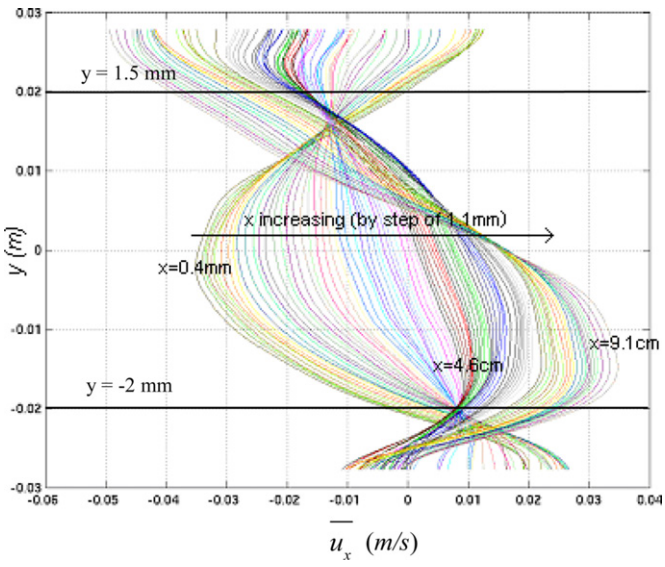


Figure 17. Velocity profiles $\overline{u_x}(y)$ in m s^{-1} plotted for different x values (in steps of 1.1 mm) for the series B1.

does not approach zero as expected for a boundary layer region (of 0.17 mm) because the measurements are polluted by reflections as already explained previously. Nevertheless, the global evolution of velocity profiles near the walls indicates the existence of strong mean flows in this region.

In conclusion, analysis of experimental results shows that the measurement area is located at the boundary between four irregular streaming cells, indicating the existence of multiple streaming vortices inside the resonator. The flow regime observed is then far above the linear case of Rayleigh streaming cells.

6. Conclusion

This work is dedicated to the study of a thermoacoustic system reproducing the working conditions of a real machine: the low frequency wave is generated with a thermoacoustic engine, which allows high intensity waves, under large mean pressure (above 7 bars). This makes our configuration different from other academic studies on acoustic streaming. Thus, one has to deal with the metrological challenge of optical measurements in realistic systems. Moreover, first-order (acoustic oscillation) and second-order quantities (streaming motion) have to be estimated at different time scales (acoustic fast scale and slow streaming scale).

All measurements are performed at fixed drive-ratio in order to validate the method. The velocity field measurements are provided by PIV in a small segment of a long resonator. The data, recorded on a long time scale, are strongly undersampled. The acquisition rate of particle images is low (10 Hz) in relation to the frequency wave (~22 Hz). The velocity fields are computed with an optical flow technique, which allows accuracy of 3×10^{-4} m s^{-1}. The undersampled velocity data are rearranged with respect to their phase over one period $[-\pi; \pi]$, with Bromhead and King's embedding technique based on SVD. Then, information on acoustics and streaming

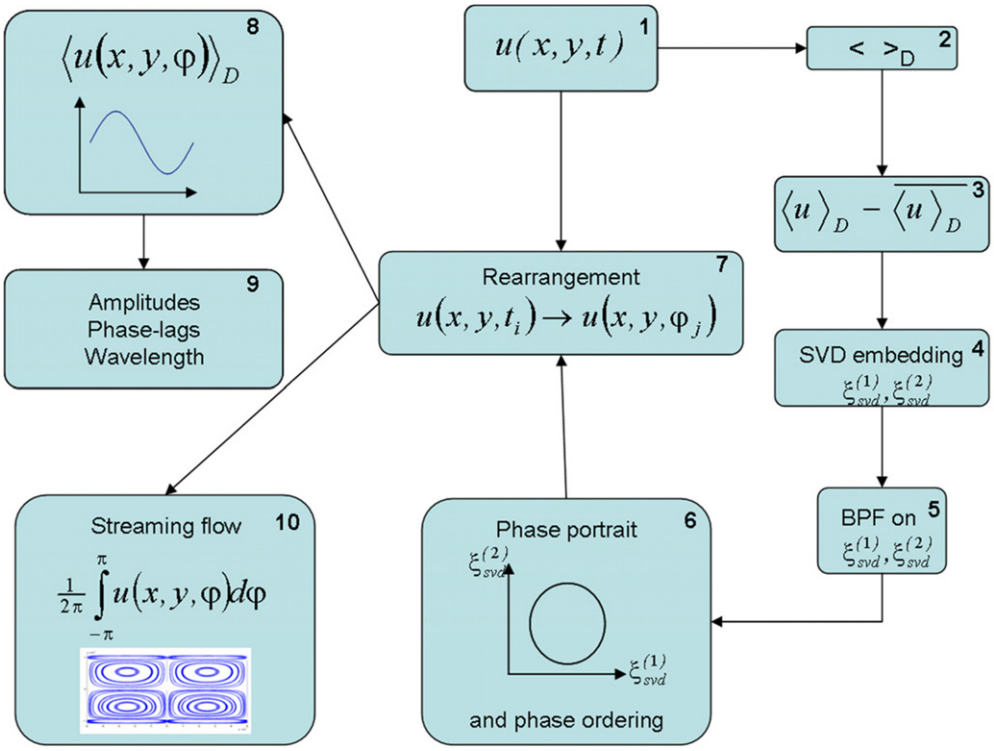


Figure 18. Diagram of the processing methodology in ten steps: 1, velocity field snapshots input (cf section 2, figure 6); 2, space averaged field reduced to a temporal set (cf section 3); 3, temporal set of velocity fluctuation (cf section 3); 4, embedding of the dynamics into a phase-space (cf section 4.1); 5, band pass filtering centered on the fundamental frequency (cf section 4.1); 6, 2D phase portrait projection and phase ordering (cf section 4.1); 7, rearrangement of the velocity field input according to phase ordering (cf section 4.1); 8, 9, acoustic wave properties (cf section 4); 10, phase-averaged velocity field (cf section 5).

are extracted. The methodology analysis developed in this paper is summarized in the diagram below (figure 18).

First, PIV velocity measurements allow characterization of the first-order flow. The fundamental acoustic component (of 1.890 m s^{-1} at the PIV location) is identified in agreement with the analytic amplitude (1.894 m s^{-1}). The first harmonic rate amplitude is 19% of the fundamental amplitude at the PIV location. The phase lag between the first harmonic and the fundamental mode is measured, confirming the existence of a travelling wave component. The comparison with the acoustic pressure cycle shows a phase lag velocity–pressure of 0.48 π, close but not equal to the theoretical value specific for standing waves. The wavelength is estimated from measurements taken on a small distance representing 0.63% of this wavelength, yielding a difference of 1.77% with respect to the theoretical value.

Finally, the time-mean velocity is estimated, using a phase average over the period $[-\pi; \pi]$. This velocity of the order of 10^{-2} m s^{-1} corresponds to the streaming motion. Several calculations over different sets of data show good reproducibility of the mean measurement. Results show the existence of irregular streaming, of the same order of magnitude as Rayleigh streaming but with different space patterns. We can see a complex flow with several counter-rotating vortices at the measurement location, indicating the existence of multiple streaming cells inside the resonator, with an axial periodicity higher than quarter of the wavelength. This flow differs from the linear Rayleigh–Schlichting streaming. This is because the inertia effects of the oscillating flow cannot be neglected, the Re_{nl} characteristic of this experiment being higher than one. In the literature, there is no model available in the parameter range corresponding to our chosen configuration. However, recent experiments and numerical simulations in the nonlinear regime of streaming show the existence of multiple distorted streaming cells (Nabavi *et al* 2009, Daru *et al* 2013, Reyt *et al* 2012).

From the methodology point of view, a new procedure is proposed, that overcomes the undersampling of acoustic oscillation for evaluating both acoustics and streaming. It is a general method that can be used to study the mean flow evolution when varying parameters in a range beyond existing theoretical models. In particular, when increasing acoustic wave intensity, the irregular streaming regime appears, under the influence of inertia effects as well as thermal effects, which are not yet entirely understood.

Appendix A. Harmonic influence on SVD embedding

In order to show the influence of the harmonic in SVD mode decomposition, a synthetic sinusoidal standing wave is used, which contains a fundamental frequency of 21.95 Hz and a first harmonic with an amplitude rate of 18% from the fundamental mode, each mode having its own phase. The characteristic parameters of the wave are chosen to fit those of experiment. The Rayleigh–Nyborg 2D analytical solution for streaming in large channels bounded by two parallel solid

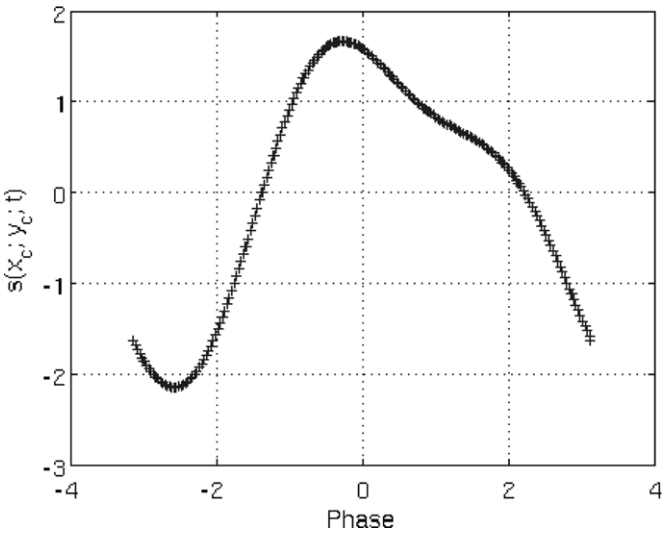


Figure A1. Evolution of signal $s(x_c, y_c, t)$ versus phase for a period; (x_c, y_c) is the central point of the observation zone.

walls is superimposed on the standing wave:

$$s(x; y; t) = u_m(x, y) + u_A \cos(2\pi f t + \psi_1) \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) + u_A 0.18 \cos(4\pi f t + \psi_2) \sin\left(\frac{4\pi}{\lambda} x\right).$$

Here $u_m(x, y)$ is the Rayleigh–Nyborg streaming velocity, given by

$$u_m(x, y) = \frac{u_A^2}{8c} \sin(2kx)[F_1(y) + 3 - 18F_2(y)],$$

with

$$F_1(y) = -\left[e^{-2y/\delta_v} + 2\, e^{-y/\delta_n} \cos\left(\frac{y}{\delta_v}\right) + 6\, e^{-y/\delta_v} \sin\left(\frac{y}{\delta_v}\right)\right],$$

$$F_2(y) = \frac{y}{2y_0}\left(1 - \frac{y}{2y_0}\right).$$

Here, $u_A = 3.8\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, $x \in [1.115\ \mathrm{m};\ 1.205\ \mathrm{m}]$, $y \in [0;\ 2y_0]$, $y_0 = 56.5 \times 10^{-3}$ m, $f = 21.95$ Hz, $\psi_1 = 1.12\pi$ and $\psi_2 = 0.95\pi$.

The synthetic signal $s(x, y, t)$ is oversampled at the frequency 21 950 Hz. In figure A1 the phase/time evolution of $s(x_c, y_c, t)$ is represented over one acoustic period, (x_c, y_c) being the center of the observation zone. In figure A2 the time mean profile of $s(x, y, t)$ is shown at $x = x_c$.

With the previous function, a synthetic signal is created, undersampled in time, at the frequency 10 Hz over 100 s, like in PIV measurements. The SVD is applied on temporal set $s(t) = \langle s(x, y, t) - \overline{s(x, y, t)}\rangle_{x,y}$, as explained in section 4.1. The average with respect to the phase is then calculated for the entire velocity field. Figure A3 presents: (i) the phase average evolution with respect to y-coordinate of the axial velocity $s_m(y) = \overline{s(x_c, y, t)}$, at $x = x_c$, (ii) the streaming Rayleigh–Nyborg velocity $u_m(x, y)$ and (iii) the simple time average (over $t_{\mathrm{tot}} = 100$ s) of $s(x_c, y, t)$. A difference of 3.8 mm s^{-1} between the phase average velocity and the Rayleigh–Nyborg solution can be observed at the maximum value of the profile, representing an error of 62% of the maximum Rayleigh–Nyborg solution. The simple time

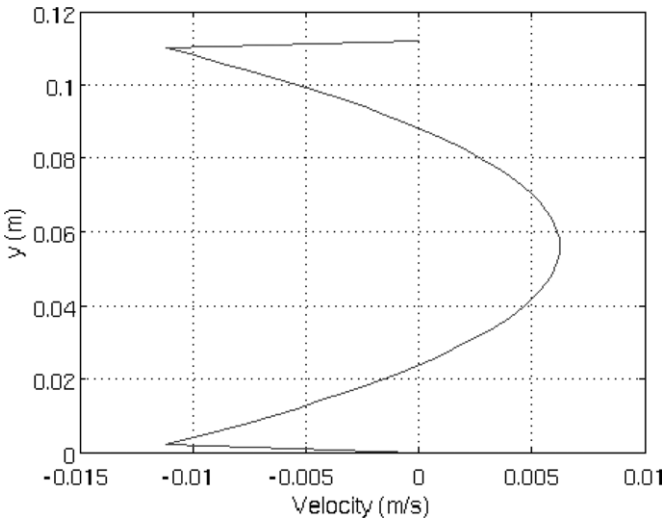


Figure A2. The axial streaming Rayleigh–Nyborg velocity profile versus y-coordinate.

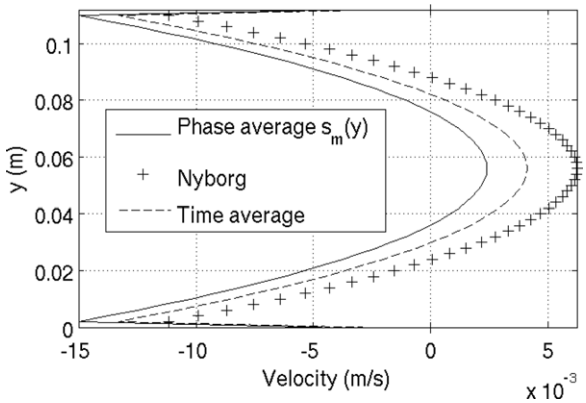


Figure A3. Axial mean velocity y-profile for the synthetic signal with harmonic: (i) —, $s_m(y)$ (phase average), (ii) - - -, time average and (iii) +, Nyborg solution.

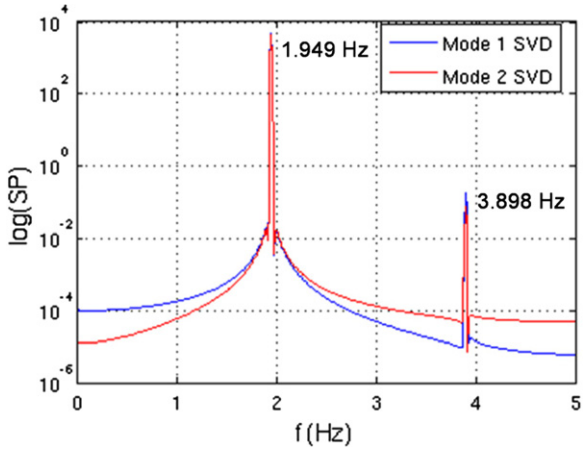


Figure A4. Aliased power spectrum PS of $\xi_{\mathrm{svd}}^{(1)}$ and $\xi_{\mathrm{svd}}^{(1)}$ SVD modes in semi-log scale.

average velocity also underestimates the exact value, the error being smaller (34% of the maximum).

Analysis of the aliased power spectrum of the two first SVD modes, plotted in figure A4, shows the fundamental acoustic mode (at $f_1 = 1.949$ Hz) and a residue of the

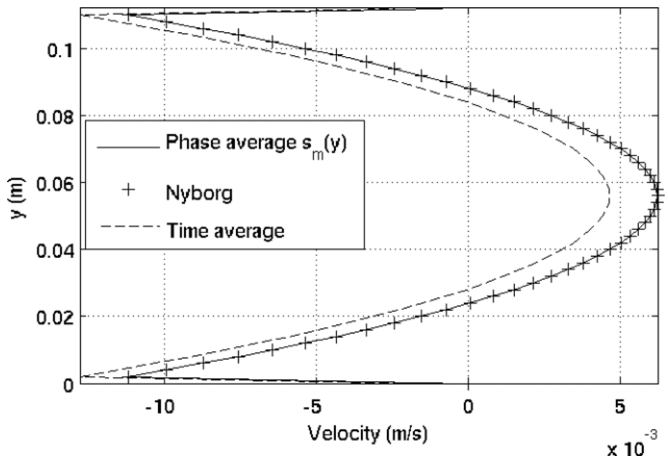


Figure A5. Axial mean velocity y-profile for the synthetic signal without harmonic: (i) —, $s_m(y)$ (phase average), (ii) - - -, time average and (iii) +, Nyborg solution.

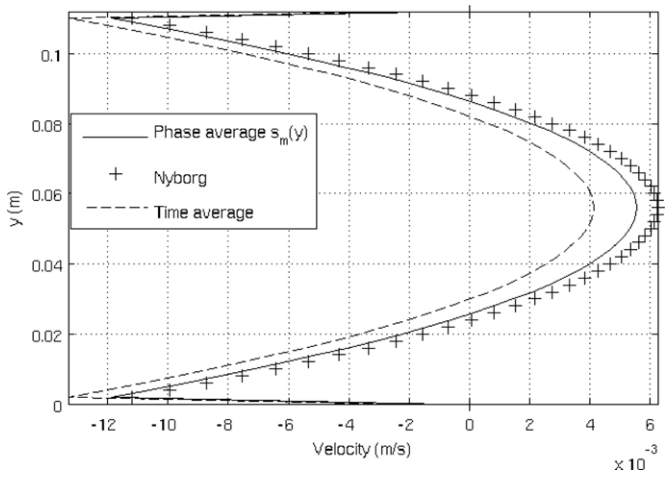


Figure A6. Axial mean velocity y-profile for the synthetic signal with harmonic: (i) —, $s_m(y)$ (phase average with filtered harmonic), (ii) - - -, time average and (iii) +, Nyborg solution.

harmonic (at $f_2 = 3.898$ Hz). Even though its intensity is small (0.002% of fundamental), this harmonic residue is responsible for deforming the phase portrait so that the average calculation is biased. This is confirmed performing the same procedure on the previous undersampled signal but without the harmonic part. The results show very good agreement between the phase average velocity and the Rayleigh–Nyborg solution (see figure A5). The maximum difference is 0.02 mm s^{-1}, representing 0.3% of the maximum Rayleigh–Nyborg solution, while the time average velocity still underestimates the exact value (error estimation is 25%).

In the case of a signal with harmonic content, a great part of the harmonic is contained in the third and fourth SVD modes. However, increasing the number of SVD modes does not allow suppression of the harmonic pollution of the two first modes. Instead, a simple band-pass filter applied to the two first SVD modes $\xi^{(1)}_{\mathrm{svd}}$ and $\xi^{(2)}_{\mathrm{svd}}$ (three-order Butterworth filter) significantly reduces the estimate error (figure A6). The maximum difference between phase-averaged velocity and the Rayleigh–Nyborg solution is 0.7 mm s^{-1} (representing 11% of the maximum Nyborg's solution).

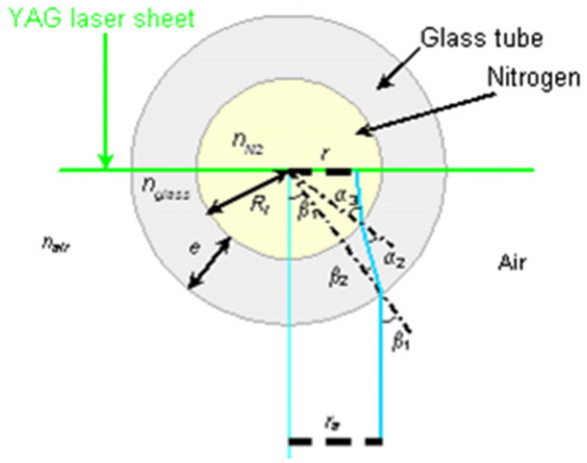


Figure B1. Schema of different trajectories of the diffracted light through the glass tube of inner radius R_i and glass thickness e.

Appendix B. Optical correction for dioptre effect

The cylindrical curvature of the measurement region deforms vertical displacements and positions of the particles. This dioptre effect is corrected with an optical model (Faure *et al* 2006) applied to the present configuration. In figure B1 is represented a schema of a plane orthogonal to the resonator axis and to the laser sheet plane. The light diffracted by particles crosses three different media before reaching the camera lens: the working gas (nitrogen), the glass wall (circular cylinder) and the air, outside the tube.

Here, r represents the current distance from the center, and r_a its apparent distance on the camera image. The refractive indices of the three media are respectively n_N, n_{glass}, n_{air}. The beam deviations at the nitrogen/glass and glass/air interfaces are characterized by the angles $\alpha_{1,2,3}$ and $\beta_{1,2}$.

Using Snell–Descartes equations, the dioptre effect correction is found to be:

$$r = \frac{n_{\mathrm{air}}}{n_{N2}} \frac{r_a}{\cos(\alpha_3 - \beta_1 + \beta_2 - \alpha_2)}.$$

References

Adrian R J 1979 Conditional eddies in isotropic turbulence *Phys. Fluids* **22** 2065–70

Aktas M and Farouk B 2004 Numerical simulation of acoustic streaming produced by finite-amplitude resonant oscillations in an enclosure *J. Acoust. Soc. Am.* **116** 2822–31

Arroyo M P and Greated C A 1991 Stereoscopic particle image velocimetry *Meas. Sci. Technol.* **2** 1181–6

Bailliet H, Gusev V, Raspet R and Hiller R A 2001 Acoustic streaming in closed thermoacoustic devices *J. Acoust. Soc. Am.* **110** 1808–21

Bétrancourt A 2008 Simulations numériques et validations expérimentales de machines de réfrigération thermoacoustiques *Dissertation* Université Pierre et Marie Curie (Paris)

Broomhead D S and King G P 1986 Extracting qualitative dynamics from experimental data *Physica D: Nonlinear Phenom.* **20** 217–36

Campbell M, Cosgrove J A, Greated C A, Jack S and Rockliff D 2000 Review of LDA and PIV applied to the measurement of sound and acoustic streaming *Opt. Laser Technol.* **32** 629–39

Daru V, Baltean Carlès D, Weisman C, Debesse P and Gandikota G 2013 Two-dimensional numerical simulations of nonlinear acoustic streaming in standing waves *Wave Motion* **50** 955–63

Debesse P 2008 Vers une mesure du vent thermoacoustique *Dissertation* Université Pierre et Marie Curie (Paris)

Desjouy C, Pénelet G, Lotton P and Blondeau J 2009 Measurement of acoustic streaming in a closed-loop traveling wave resonator using laser Doppler velocimetry *J. Acoust. Soc. Am.* **126** 2176–83

Duffourd S 2001 Réfrigérateur thermoacoustique: études analytiques et expérimentales en vue d'une miniaturisation *Dissertation* Ecole Centrale de Lyon, Lyon

Faure T M, Lusseyran F, Gougat P and Launay F 2006 Experimental and numerical investigation of the flow distribution inside a tubular heat exchanger *J. Fluids Eng.* **128** 1218–27

Hamilton M F, Ilinskii Y A and Zabolotskaya E A 2003 Thermal effects on acoustic streaming in standing waves *J. Acoust. Soc. Am.* **114** 3092–101

Horowitz E, Sahni S and Rajasekaran S 1996 *Computer Algorithms in C++* (New York: Freeman)

Hussain A K M F and Hayakawa M 1987 Eduction of large-scale organized structures in a turbulent plane wake *J. Fluid. Mech.* **180** 193–229

Hussain A K M F and Reynolds W C 1970 The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow *J. Fluid. Mech.* **41** 241–58

Kiya M and Matsumara M 1985 Turbulence structure in intermediate wake of a circular cylinder *Bull. Japan Soc. Mech. Eng.* **28** 2617–24

Konstantinidis E, Balabani S and Yianneskis M 2005 Conditional averaging of PIV plane wake data using a cross-correlation approach *Exp. Fluids* **39** 38–47

Lourenco L, Subramanian S and Ding Z 1997 Time series velocity field reconstruction from PIV data *Meas. Sci. Technol.* **8** 1533–8

Mees A I, Rapp P E and Jennings L S 1987 Singular-value decomposition and embedding dimension *Phys. Rev.* A **36** 340–6

Menguy L and Gilbert J 2000 Non-linear acoustic streaming accompanying a plane stationary wave in a guide *Acustica* **86** 249–59

Michard M, Blanc-Benon P, Grosjean N and Nicot C 2004 Apport de la vélocimétrie par images de particules pour la caractérisation du champ de vitesse acoustique dans une maquette de réfrigérateur thermoacoustique *9ème Congrès Francophone de Vélocimétrie Laser (Brussels, 14–17 Sept.)*

Moreau S, Bailliet H and Valière J-C 2008 Measurements of inner and outer streaming vortices in a standing waveguide using laser Doppler velocimetry *J. Acoust. Soc. Am.* **123** 640–7

Nabavi M, Siddiqui M H K and Dargahi J 2007 Simultaneous measurement of acoustic and streaming velocities using synchronized PIV technique *Meas. Sci. Technol.* **123** 1811–7

Nabavi M, Siddiqui M H K and Dargahi J 2009 Analysis of regular and irregular acoustic streaming patterns in a rectangular enclosure *Wave Motion* **46** 312–22

Negri M, Cozzi F and Malavasi S 2011 Self-synchronized phase averaging of PIV measurements in the base region of a rectangular cylinder *Meccanica* **46** 423–35

Pastur L R, Lusseyran F, Faure T M, Fraigneau Y, Pethieu R and Debesse P 2008 Quantifying the non-linear mode competition in the flow over an open cavity at medium reynolds number *Exp. Fluids* **44** 597–608

Perrin R, Braza M, Cid E, Cazin S, Barthet A, Sevrain A and Mockett C 2007 Phase-averaged measurements of the turbulence properties in the near wake of a circular cylinder at high Reynolds number by 2C-PIV and 3C-PIV *Exp. Fluids* **43** 341–55

Quénot G, Pakleza J and Kowalewski T A 1998 Particle image velocimetry with optical flow *Exp. Fluids* **25** 177–89

Rayleigh L 1884 On the circulations of air observed in Kundt's tubes, and on some allied acoustical problems *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **175** 1–21

Reyt I, Moreau S, Bailliet H and Valière J C 2012 Experimental study of acoustic streaming in a high level standing wave guide: Influence of mean temperature and higher harmonics distribution *Nonlinear Acoustics: State-of-the-Art and Perspectives (ISNA 19), AIP Conf. Proc.* **1474** 83–6

Schlichting H 1932 Berechnung ebener periodischer grenzschichtströmungen (calculation of plane periodic boundary layer streaming) *Z. Phys.* **33** 327–35

Stanislas M, Okamoto K, Kähler C J, Westerweel J and Scarano F 2008 Main results of the third international PIV challenge *Exp. Fluids* **45** 27–71

Stanislas M, Okamoto K, Kähler C J and Westerweel J 2005 Main results of the second international PIV challenge *Exp. Fluids* **39** 170–91

Stuart J T 1966 Double boundary layer in oscillatory viscous flow *J. Fluid Mech.* **24** 673–987

Swift G W 2002 *Thermoacoustics: A Unifying Perspective for Some Engines and Refrigerators* (Melville, NY: Acoustical Society of America)

Thompson M W and Atchley A A 2005 Simultaneous measurement of acoustic and streaming velocities in a standing wave using laser doppler anemometry *J. Acoust. Soc. Am.* **117** 1828–38

Thompson M W, Atchley A A and Maccarone M J 2005 Influences of a temperature gradient and fluid inertia on acoustic streaming in a standing wave *J. Acoust. Soc. Am.* **117** 1839–49

Widmann A, Duchmann A, Kurz A, Grundmann S and Tropea C 2012 Measuring Tollmien–Schlichting waves using phase-averaged particle image velocimetry *Exp. Fluids* **53** 707–15

O. Hireche, C. Weisman, D. Baltean-Carlès, P. Le Quéré and L. Bauwens
Low Mach number analysis of idealized thermoacoustic engines with numerical solution.
J. Acoust. Soc. Am. 128(6), 3438-3448, (2010).

Low Mach number analysis of idealized thermoacoustic engines with numerical solution

Omar Hireche
Laboratoire de Mécanique Appliquée, Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed Boudiaf, BP 1523, EL-M'naouer Oran 31000, Algeria

Catherine Weisman[a] and Diana Baltean-Carlès[b]
Université Pierre et Marie Curie, 4 Place Jussieu 75252 Paris Cedex 05, France

Patrick Le Quéré
Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur, Centre National de la Recherche Scientifique UPR 3251, 91403 Orsay Cedex, France

Luc Bauwens
Department of Mechanical and Manufacturing Engineering, University of Calgary, Calgary, Alberta T2N 1N4, Canada

(Received 4 June 2009; revised 29 September 2010; accepted 4 October 2010)

A model of an idealized thermoacoustic engine is formulated, coupling nonlinear flow and heat exchange in the heat exchangers and stack with a simple linear acoustic model of the resonator and load. Correct coupling results in an asymptotically consistent global model, in the small Mach number approximation. A well-resolved numerical solution is obtained for two-dimensional heat exchangers and stack. The model assumes that the heat exchangers and stack are shorter than the overall length by a factor of the order of a representative Mach number. The model is well-suited for simulation of the entire startup process, whereby as a result of some excitation, an initially specified temperature profile in the stack evolves toward a near-steady profile, eventually reaching stationary operation. A validation analysis is presented, together with results showing the early amplitude growth and approach of a stationary regime. Two types of initial excitation are used: Random noise and a small periodic wave. The set of assumptions made leads to a heat-exchanger section that acts as a source of volume but is transparent to pressure and to a local heat-exchanger model characterized by a dynamically incompressible flow to which a locally spatially uniform acoustic pressure fluctuation is superimposed. © *2010 Acoustical Society of America*. [DOI: 10.1121/1.3506348]

PACS number(s): 43.35.Ud [RR] Pages: 3438–3448

I. INTRODUCTION

The nonlinear nature of the energy exchanges within the stack plays a crucial role in thermoacoustic engines, affecting power generation, development of thermoacoustic instability, frequency selection, and saturation. Classical linear theory[1–3] has been successful in predicting onset temperatures and stability curves for each acoustic mode that are in good agreement with experiments.[4–7] Quasi-one-dimensional linear codes[8] yield parameters such as temperature profile, frequency, power of the saturated regime for a fixed geometry, working gas, and mean pressure. Subsequent work based upon linear theory includes, for instance, approximate relations for the thermoacoustic gain and efficiency, damping coefficient, oscillation frequency, and onset temperature.[9,10] So far, extension to nonlinear regimes has either used simplified quasi-one-dimensional models[11,12] or if based upon multidimensional models,[13,14] these rely upon restrictive assumptions, or a rather coarse spatial resolution in the stack and heat exchangers. The current work presents a well-resolved model, in which the flow in the stack and heat exchangers remains fully nonlinear and multidimensional. Resonator and load are described by a standard linear one-dimensional acoustic model. Proper coupling between these two submodels results in a global model that is asymptotically consistent in the small Mach number approximation.

The classical thermoacoustic stability analysis by Rott[1] was based upon the standard assumptions leading to linear acoustics, i.e., a formulation in the small Mach number limit, with length and time in a ratio of the order of the speed of sound, which he also coupled with a boundary layer model. Rott proceeded by considering the limit case whereby temperature changes are reduced to a jump with zero thickness between two uniform values and introducing *ad-hoc* continuity conditions across that singularity. In order to obtain this limit solution, he thus considered a temperature gradient taking place over a length that becomes negligible compared with the wavelength, as the Mach number approaches zero.

In the "short engine" model, Swift[2] also assumed that the stack is short compared with the wavelength but long compared with the sweep by the fluid motion. Indeed, in the resulting model, pressure is time-dependent but with negligible phase shift over the stack length, while a linear

[a]Author to whom correspondence should be addressed. Present address: LIMSI, CNRS UPR 3251, 91403 Orsay Cedex, France. Electronic mail: catherine.weisman@upmc.fr
[b]Current address: LIMSI, CNRS UPR 3251, 91403 Orsay Cedex, France.

Author's complimentary copy

formulation is retained, hence the implicit assumption whereby the stack is longer than the sweep.

In the current model, the system is split into two different regions. The length of the stack and heat exchangers assembly is assumed comparable with the sweep by the fluid motion. While often realistic, this scaling is interesting because the resulting local model for the heat exchanger assembly retains all the physics included in Swift's short engine model to which it adds the physics of nonlinear advection (at the cost of additional complications). In the resonators, the usual assumption is made of a length of the order of the wavelength. With the local flow in the heat exchangers thus adequately modeled, consistent jump conditions across Rott's singularity are obtained, which, coupled with an acoustic formulation in the resonator, result in an asymptotically consistent global model. There is no *ad-hoc* assumption in this approach and no phenomenological imposed law.

The model can deal with complex and realistic heat exchanger and stack configurations, and it retains the essential advective nonlinearity. Although that nonlinearity remains fully reversible, it does result in the stack and heat exchangers behaving as a source in the acoustics, with a strength that will be reduced as the amplitude grows. It is thus suitable for transient operation and if the computation is pursued long enough it should result in a saturation and hence stationary operation.

Different scalings characterize different physics, which opens the door to a variety of singular perturbation or multiple scales studies. There are situations that require using a single length scale and multiple time scales, such as slowly varying acoustics.[11,15] Here, the presence of two distinct regions described by different length scales while sharing a single characteristic time lead to a singular perturbation problem (i.e., matched asymptotics or boundary layer methods).

The goal here is to demonstrate the effectiveness of the singular perturbation analysis. In doing so, the emphasis was placed on the flow in the stack and heat exchangers, which was coupled with the simplest meaningful consistent resonator model. On that basis, an exploration of the fundamental consequences of the current set of scaling assumptions is presented, but no attempt is made to obtain realistic results that could be used for practical purposes. To illustrate the power of the method, results were obtained focusing mainly upon startup and stability and also saturation due to nonlinear effects in the heat exchangers and stack, in a much idealized resonator and load configuration.

The two assumptions proposed for the stack and heat exchangers, of a small Mach number and a sweep of the order of the stack and heat-exchangers length, lead to a local model in which spatially uniform pressure fluctuations can still actually occur at up to leading order. Large temperature and density variations can also be dealt with, both in time and in space.[16] (If additionally the solution domain would be connected to a large pressure reservoir such as the atmosphere, and if the boundary conditions would restrict temperature variations to some small values, the standard incompressible Navier–Stokes equations would be obtained; however, these additional assumptions are not applicable in the current context.) The resulting model is more or less standard in Stirling engine and pulse-tube cryorefrigerator models, in which leading order pressure varies,[17] in contrast to the current situation, where due to the presence of the resonators, pressure fluctuations only occur at acoustic order. It has been used in an analysis in straight ducts,[18] and simulations motivated by thermoacoustic devices, either using a vortex method[19] or second-order accurate finite volume method,[20] that dealt with the heat exchangers alone, with boundary conditions meant to represent resonator acoustics.

In the current formulation, the computational fluid dynamics (CFD) solution for the local flow in the stack and heat exchangers is coupled with a consistent acoustic model in the resonators. Other recent CFD studies have been based upon a fully viscous, conductive, and compressible solution.[21] Some have relied upon commercial codes to simulate the thermoacoustic engine.[22] Given the broad range of scales present in the fully compressible problem, these approach leads to extremely large simulations[23] or simulation of devices of very small (miniature) size.[24] In contrast, the current approach allows focusing a smaller computational effort upon the heat exchangers and stack, where it is important because this is where small scales truly matter.

II. PHYSICAL MODEL

A. Geometry

The geometry of the device consists of a duct with rectangular cross-section within which a set of heat exchangers is placed. The set of heat exchangers is made up of a stack placed between a cold and a hot heat exchanger. This assembly is inserted within the resonator tube, which is closed at one end and terminates with a load at the other end, which thus undergoes a small amplitude oscillation. Dead space separates the stack from the heat exchangers. In this article, the expression "heat-exchanger section" is consistently used to refer to the entire region, including heater, stack, and cooler. The geometry is shown in Fig. 1 (top).

B. Formulation

The problem that is being addressed consists of an initial boundary value problem, on the spatial domain shown in Fig. 1 (top), characterized by the conservation laws of viscous, conducting, compressible fluid dynamics, together with conservation of energy in the stack walls. The working fluid is a known ideal gas with constant specific heats.

Boundary conditions include no-slip conditions on the heat exchanger and stack walls. Resonator walls are free slip and adiabatic. A temperature boundary condition is provided on the heat-exchanger walls. Both temperature and heat flux are continuous on the stack walls. The load is characterized by a known relationship between the local acoustic pressure and velocity, which is approximately the same at the mean load location and the actual load location, assuming its displacement is negligible compared with the wavelength. These initial conditions are discussed in detail in Sec. II G.

The problem thus described can be solved numerically without further simplification. However, this entails very large computations, while, clearly, as long as the Mach numbers remain small, flow in the resonators will differ very little from linear acoustics. In contrast, in the heat-exchanger

Author's complimentary copy

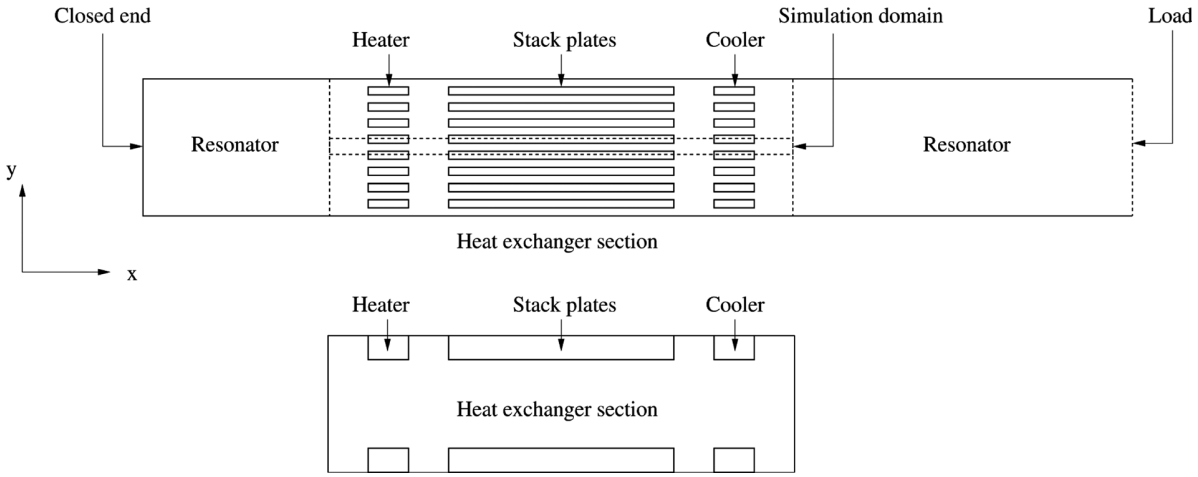


FIG. 1. Geometry of entire system (top) and of numerical simulation domain (bottom).

section, there is a need for a simulation that deals with transient and spatially resolved velocities and temperatures. Next, an appropriate simplified model is derived from asymptotic analysis, reducing the flow in the resonator to an acoustic model, eliminating the need for an acoustic Courant–Friedrichs–Lewy condition (time steps smaller than mesh size divided by the speed of sound) and focusing on the heat-exchanger section.

C. Scaling assumptions

Since temperatures must be properly resolved throughout the device, temperatures, hence the speed of sound, must be taken to be of the same order throughout. Although the presence of a load requires that one of the extremities of the resonator must be moving, the displacement will be small as long as fluid velocities are small. Thus one can introduce a reference resonator length $\tilde{L}_{\mathrm{res}}$, a reference temperature, which here, is set equal to the cold heat-exchanger temperature $\tilde{T}_{\mathrm{ref}}$, and consequently, a reference speed of sound $\tilde{c}_{\mathrm{ref}}$. Given that the period will be determined by an acoustic resonance, time is scaled by $\tilde{t}_{\mathrm{ref}} = \tilde{L}_{\mathrm{res}}/\tilde{c}_{\mathrm{ref}}$, which equals one half of the resonant period in an empty tube closed at both ends and at the cold end temperature. This provides a single time scale for the entire problem.

It is reasonable to expect the heat-exchanger section to be acoustically compact, i.e., its characteristic length is small compared with the resonator length. If the heat exchangers are not overly large compared to the stack, the length of the heat-exchanger section is of the same order as the stack length, which provides a suitable reference, and $\tilde{L}_{\mathrm{stack}} \ll \tilde{L}_{\mathrm{res}}$.

As to fluid velocities, very low initial values associated with initial conditions are not particularly representative and do not provide a meaningful scale. However, close to the stationary regime, the fluid motion should sweep a length comparable with the stack length, over which the temperature gradient takes place, hence velocities of order $\tilde{L}_{\mathrm{stack}}/\tilde{t}_{\mathrm{ref}}$. Taking into account the definition of $\tilde{t}_{\mathrm{ref}}$ above results in $\tilde{L}_{\mathrm{stack}}/\tilde{L}_{\mathrm{res}} = \tilde{U}_{\mathrm{ref}}/\tilde{c}_{\mathrm{ref}}$, so that

$$M = \frac{\tilde{U}_{\mathrm{ref}}}{\tilde{c}_{\mathrm{ref}}} = \frac{\tilde{L}_{\mathrm{stack}}}{\tilde{L}_{\mathrm{res}}} \ll 1. \tag{1}$$

Pressure is scaled by its value at rest $\tilde{P}_{\mathrm{ref}}$ and density by its value at reference pressure and temperature $\tilde{\rho}_{\mathrm{ref}} = \tilde{P}_{\mathrm{ref}}/R\tilde{T}_{\mathrm{ref}}$. All variables are scaled uniformly throughout the device except for the longitudinal coordinate $\tilde{x}$, which is scaled by $\tilde{L}_{\mathrm{stack}}$ in the heat-exchangers section but by $\tilde{L}_{\mathrm{res}}$ in the resonators. Perturbation series in the reference Mach number are introduced for all dependent variables, using the notation, for example, for pressure

$$p = p^{(0)} + Mp^{(1)} + M^2p^{(2)} + \mathcal{O}(M^3). \tag{2}$$

For velocity, however, the solution below only includes the leading order contribution so there is no need to introduce extra symbols. Below, u is used for the dimensionless longitudinal velocity and v for the transverse velocity; $\mathbf{u}$ represents the dimensionless velocity vector.

If the length of the heat-exchanger section is smaller than the resonator length by a factor of order M, then it only contributes to $O(M)$ on the overall length. The symbol $\hat{x}$ is used for the longitudinal coordinate as scaled in the resonators and setting its origin at the heat-exchangers location. Then at the closed end on the hot side, $\hat{x} = -l_L = -\tilde{l}_L/\tilde{L}_{\mathrm{res}}$. Likewise, at the mean load location, $\hat{x} = l_R = \tilde{l}_R/\tilde{L}_{\mathrm{res}}$. Both the stack plate thickness and the distance between plates are of the order of the viscous and heat penetration depth. In the heat-exchanger section, the dimensionless spatial coordinates scaled by the stack length are denoted as x and y, with the origin set at the stack center.

Next, the formulation is written in the dimensionless variables (without $\tilde{}$) introduced above, respectively, in the resonators and then in the heat-exchanger section.

D. Resonators

If the resonator cross-section is much wider than the viscous penetration depth, the wall boundary layer thickness is negligible compared to the resonator width. Furthermore, if the thermal boundary conditions are adiabatic, the flow is one-dimensional. Likewise, longitudinal diffusion results in negligible irreversibility. Thus, the flow is approximately isentropic, and as long as the Mach number remains small, temperature, density, and pressure remain constant at leading

Author's complimentary copy

order, hence equal to their spatially uniform initial values: $p^{(0)}=1$ and $\rho^{(0)}=1/T^{(0)}$. The temperature is $T^{(0)}=T_{\text{cold}}=1$ on the cold side while it equals $T^{(0)}=T_{\text{hot}}=\tilde{T}_{\text{hot}}/\tilde{T}_{\text{cold}}$ on the hot side. At leading order, these assumptions lead to linear acoustics. Indeed, the mass and momentum conservation equations become

$$\frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t}+\rho^{(0)}\frac{\partial u}{\partial \hat{x}}=0, \qquad \rho^{(0)}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p^{(1)}}{\partial \hat{x}}=0, \tag{3}$$

in which $\rho^{(1)}$ and $p^{(1)}$ are related by the isentropic relation: $p^{(1)}=\gamma T^{(0)}\rho^{(1)}$, where γ is the ratio of specific heats.

Boundary conditions at the two resonator ends correspond, respectively, to a closed end at $\hat{x}=-l_L$ and a load at the other extremity, instantaneously located at $\hat{x}_R=l_R+\mathcal{O}(M)$, and characterized by some differential relationship between velocity and pressure, which becomes linear in the small Mach number limit. A purely dissipative load is then represented by a reflection coefficient, applied at the fixed location $\hat{x}=l_R$ and denoted by f in dimensionless form. (The current formulation can readily be extended to more realistic loads.) Thus,

$$u(-l_L,t)=0, \qquad p^{(1)}(l_R,t)=fu(l_R,t). \tag{4}$$

The acoustic problem depends upon continuity or jump conditions at the heat-exchanger location, yet to be determined. However, based upon the current information, the problem can be reduced to a single relationship between acoustic pressure and velocity at the location $\hat{x}=0$, on each side, based upon a d'Alembert solution on characteristics.

Eliminating density,

$$\frac{\partial p^{(1)}}{\partial t}+\gamma\frac{\partial u}{\partial \hat{x}}=0, \qquad \gamma\frac{\partial u}{\partial t}+T^{(0)}\frac{\partial p^{(1)}}{\partial \hat{x}}=0. \tag{5}$$

This system is readily diagonalized, adding and subtracting the second equation to the first one multiplied by $\sqrt{T^{(0)}}$, yielding the Riemann variables, which remain constant on characteristics moving at the speed of sound $\sqrt{T^{(0)}}$, respectively, left and right:

$$\mathcal{L}=\gamma u-\sqrt{T^{(0)}}p^{(1)}, \qquad \mathcal{R}=\gamma u+\sqrt{T^{(0)}}p^{(1)}. \tag{6}$$

At the hot (left) side, the boundary condition is $u=0$, which, since $\mathcal{L}+\mathcal{R}=2\gamma u$ determines a reflection whereby $\mathcal{R}_L(-l_L,t)=-\mathcal{L}_L(-l_L,t)$. Since acoustic waves move at the speed of sound, $\mathcal{L}(\hat{x},t)=\mathcal{L}(0,t+\hat{x}/\sqrt{T^{(0)}})$ and $\mathcal{R}(\hat{x},t)=\mathcal{R}(0,t-\hat{x}/\sqrt{T^{(0)}})$, so that $\mathcal{R}_L(0,t+l_L/\sqrt{T^{(0)}})=-\mathcal{L}_L(0,t-l_L/\sqrt{T^{(0)}})$. Shifting time by $2l_L/\sqrt{T^{(0)}}$, at the heat-exchanger location, $\hat{x}=0^-$, taking into account that $T^{(0)}=T_{\text{hot}}$, one finds

$$\mathcal{R}_L(0^-,t)=-\mathcal{L}_L\left(0^-,\frac{t-2l_L}{\sqrt{T_{\text{hot}}}}\right). \tag{7}$$

Likewise, on the cold side, taking into account that $\mathcal{L}+\mathcal{R}=2\gamma u$ and $\mathcal{R}-\mathcal{L}=2\sqrt{T^{(0)}}p^{(1)}$, and in view of the boundary condition of Eq. (6), at the heat-exchangers location $\hat{x}=0^+$, and since $T^{(0)}=1$,

$$\mathcal{L}_R(0^+,t)=Z\mathcal{R}_R(0^+,t-2l_R), \tag{8}$$

in which

$$Z=\frac{\gamma-f}{\gamma+f}. \tag{9}$$

An open end corresponds to $f=0$ hence $Z=1$ while at a closed end, f is infinite and $Z=-1$. Both cases result in a zero load since the power developed is the time-averaged value of $up^{(1)}$.

E. Heat-exchanger section

Within the heat-exchanger section, the problem is not amenable to analytical solution. A numerical simulation is required.

The stack is made up of a large number of identical uniformly spaced plates. It is thus reasonable to assume vertical periodicity, i.e., flow and heat transfer are identical in all gaps. The flow in only one slot between two contiguous plates needs being simulated, as shown in Fig. 1 (bottom). The same scaling as described above is used but, in contrast with the resonator model, length is now scaled by $\tilde{L}_{\text{stack}}$. The perturbation series equations, Eq. (2), are then introduced in the compressible, viscous, and conductive Navier–Stokes equations, respectively, conservation of mass, momentum, and energy. The system equations become

$$\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho^{(0)}\mathbf{u})=0, \tag{10}$$

$$\begin{cases}\nabla p^{(0)}=0,\\ \nabla p^{(1)}=0,\\ \dfrac{\partial(\rho^{(0)}\mathbf{u})}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho^{(0)}\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})=-\nabla p^{(2)}+\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\nabla\cdot\tau,\end{cases} \tag{11}$$

$$\rho^{(0)}\left[\frac{\partial T^{(0)}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)T^{(0)}\right]=\frac{\gamma-1}{\gamma}\left[\frac{\partial p^{(0)}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)p^{(0)}\right]+\frac{1}{\mathrm{Pe}}\nabla\cdot(k\nabla T^{(0)}), \tag{12}$$

where $\tau=\mu[\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})^t-\frac{2}{3}(\nabla\cdot\mathbf{u})\mathbf{I}]$, Re is the reference Reynolds number $\mathrm{Re}=\tilde{\rho}_{\text{ref}}\tilde{U}_{\text{ref}}\tilde{L}_{\text{stack}}/\tilde{\mu}_{\text{ref}}$, Pe is the reference Péclet number $\mathrm{Pe}=\tilde{U}_{\text{ref}}\tilde{L}_{\text{stack}}/\tilde{\alpha}_{\text{ref}}$, and μ, k, and α are the dynamic viscosity, thermal conductivity, thermal diffusivity, respectively, scaled by their value at the reference state $\tilde{\mu}_{\text{ref}}$, $\tilde{k}_{\text{ref}}$, and $\tilde{\alpha}_{\text{ref}}$. Gravity has been neglected. k and μ are assumed to be independent of temperature.

From momentum at leading order, $p^{(0)}$ is a function of time only. However, this value has to equal the pressure $p^{(0)}=1$ in the resonator. At order M, likewise, $p^{(1)}$ is a function of time only, but given that in the resonator $p^{(1)}$ fluctuates, it remains a function of time. Taking the leading order equation of state into account, $\rho^{(0)}=1/T^{(0)}$, the problem becomes

$$\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho^{(0)}\mathbf{u})=0, \tag{13}$$

Author's complimentary copy

$$\frac{\partial(\rho^{(0)}\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho^{(0)}\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) = -\nabla p^{(2)} + \frac{H}{\mathrm{Re}_{\tilde{H}}}\nabla\cdot\tau, \quad (14)$$

$$\rho^{(0)}\left[\frac{\partial T^{(0)}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)T^{(0)}\right] = \frac{H}{\mathrm{Pe}_{\tilde{H}}}\nabla^2 T^{(0)}, \quad (15)$$

$$\rho^{(0)}T^{(0)} = 1, \quad (16)$$

introducing $\mathrm{Re}_{\tilde{H}}$, $\mathrm{Pe}_{\tilde{H}}$, based on the distance $\tilde{H}$ separating two successive plates centerlines, and H being the corresponding dimensionless distance, $H = \tilde{H}/\tilde{L}_{\mathrm{stack}}$.

In the solid plates, the heat conduction equation written in dimensionless form is

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{Pe}_s}\nabla^2 T, \quad (17)$$

where $\mathrm{Pe}_s = \mathrm{Pe}_{\tilde{H}} H\,\alpha_{\mathrm{ref}}/\alpha_s$ is the Péclet number in the wall.

Boundary conditions on symmetry lines (due to vertical periodicity of the stack) include zero normal velocities within the fluid domain and zero normal temperature gradients on all symmetry lines. Fixed temperatures are imposed at the heat-exchanger walls, while continuity of temperature and normal heat flux are imposed at the interface between fluid and stack. Both velocity components vanish on all solid walls. Boundary conditions at the left and right ends are dealt with below and so are the initial conditions.

F. Matching

In the resonator scaling, the heat-exchanger section shrinks to zero thickness as $M = \tilde{L}_{\mathrm{stack}}/\tilde{L}_{\mathrm{res}} \to 0$. In the heat-exchanger scaling, the resonator length becomes infinity. In other words, in the limit of $M \to 0$, the location $\hat{x} = 0^-$, i.e., the right end of the left resonator section corresponds to $x \to -\infty$ in the heat-exchanger section. Likewise, $\hat{x} = 0^+$, the left end of the right resonator section corresponds to $x \to +\infty$ in the scaling used in the heat-exchanger section. Thus, velocity, pressure, and temperature values must approach the same values at these locations in both solutions.

First, according to the formulation in the heat-exchanger section, pressure is spatially uniform to order M; thus, for acoustic pressures,

$$p^{(1)}(0^-) = p^{(1)}(0^+) = p^{(1)}(0). \quad (18)$$

Leading order temperatures are constant and uniform in each resonator side. Thus, leading order temperatures in the heat exchangers must approach these fixed values for both $x \to -\infty$ and $x \to +\infty$. The acoustic solution in the resonators provides one equation on each side relating the acoustic pressure $p^{(1)}(0)$, respectively, to longitudinal velocity for $x \to -\infty$, Eq. (7), and $x \to +\infty$, Eq. (8). Transverse velocities vanish in the resonators, hence also for $x \to \pm\infty$.

Finally, integrating the energy equation, Eq. (15), over the entire heat-exchanger section and making use of continuity, a global energy balance is obtained, relating velocities at the two ends to heat transfer (with the end boundaries set to be adiabatic $\partial T/\partial n = 0$). Taking into account that $u(0^-) = \lim_{x\to-\infty} u$, $u(0^+) = \lim_{x\to+\infty} u$,

$$[u(0^-) - u(0^+)] + \frac{1}{\mathrm{Pe}_{\tilde{H}}}\int \nabla T^{(0)}\cdot\mathbf{n}\,ds = 0. \quad (19)$$

Finally, solving Eqs. (7), (8), and (19) determines $u(0^-)$, $u(0^+)$, and $p^{(1)}(0)$, providing boundary conditions for both resonators and for the low Mach number problem in the heat-exchanger section. These results show that the heat-exchanger section is transparent to acoustic pressure but appears in the acoustics as a point source of volume.

G. Initial conditions

The onset problem is a stability problem, in which the issue is the growth of initial perturbations. When using numerical simulation, it is often the case that numerical errors provide an initial perturbation which triggers the instability. However, here, for initial conditions in which the fluid is initially at rest, the initial field is uniform. Since our code is, appropriately, symmetrically implemented, subtracting, however, approximate but identical binary representations at neighboring spatial locations yields differences with a binary representation that is exactly zero; likewise, the value of the initial velocities is zero, which likewise has an exact binary representation. As a result, numerical errors do not provide an initial perturbation. For initial conditions in which the fluid is initially at rest, it stays at rest, as long as the temperature in the heat exchangers and the fluid corresponds to a steady solution. However, if the initial temperature field is not uniform lengthwise, round-off errors result in an initial numerical value of the integral in Eq. (19) that is not exactly zero.

The current model being nonlinear, different initial conditions might trigger different results, and it might be worthwhile testing different initial models. Since the acoustic solution in the resonators, Eqs. (7) and (8), relates the current solution to solutions at earlier times, defining initial conditions is equivalent to defining the previous acoustic history. Likewise, specific temperature distributions can be tested. These issues are discussed in detail below.

III. NUMERICAL SOLUTION

A finite volume solver suitable for low Mach number flows with large temperature gradients and large pressure fluctuations[25] was adapted to deal with the present configuration. The solver has been validated on a benchmark problem of non-Boussinesq natural convection. Time discretization combines an implicit treatment of the viscous and diffusive terms with an explicit discretization for the convective terms. The algorithm implements a second-order spatial and time discretization on a uniform mesh.

The simulation domain is extended beyond the heat-exchanger section by a length equal to twice the stack length. In the matching equations, values on the left and right boundaries are used, where the flow is forced to be one-dimensional. An additional phase variable is used, specifying whether a given cell is to be treated as solid or fluid. The equations are then solved through the whole domain, using appropriate tests

Author's complimentary copy

of the phase variable, ensuring continuity of both temperature and heat flux through the plate-fluid interfaces.

Spatial discretization is based upon a staggered mesh. Velocities are defined on cell faces, while density, temperature, and phase are defined on cell centers. In the continuity equation, the divergence of the velocity field is adjusted at each time step using a fractional time step method derived from the projection method for incompressible flows.

The sequence of steps for advancing in time from time t^n to time t^{n+1} is as follows:

(1) The energy equation, Eq. (15), is solved for the new temperature field T^{n+1}, using density at time t^n, by either a nonincremental alternating direction implicit (ADI) algorithm or the generalized minimal residual method (GMRES).[26]
(2) The linear system of Eqs. (7), (8), and (19) is solved, determining $u(0^-)^{n+1}$, $u(0^+)^{n+1}$, and $p^{(1)}(0)^{n+1}$, based upon values at previous times. The velocity values provide boundary conditions in the calculation of the velocity field. These values and the new value of the acoustic pressure are stored since they will be needed at future time steps.
(3) The new density is determined from the equation of state, Eq. (16).
(4) The new divergence, at time t^{n+1}, is obtained by combining the energy equation and the continuity equation, yielding $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = (H/\mathrm{Pe}_{\tilde{H}})\Delta T^{n+1}$.
(5) An intermediate velocity vector is calculated which does not satisfy continuity, from momentum, Eq. (14), using ADI or GMRES, with dynamic pressure at t_n.
(6) The dynamic pressure correction is determined using the multigrid method.[27] Numerical parameters in the multigrid algorithm are adjusted for optimal convergence.
(7) Respective arrays are updated with the new velocity field $\mathbf{u}^{n+1}$ and dynamic pressure.

IV. RESULTS

A. Device and configurations simulated

The various cases that were simulated correspond to a single engine geometry, based upon an existing experimental set-up.[28] The overall length is $\tilde{L}_{\mathrm{res}} = 7.57\,\mathrm{m}$, with a stack $\tilde{L}_{\mathrm{stack}} = 150\,\mathrm{mm}$ long, made up of stainless steel plates 0.20 mm thick separated by a spacing $\tilde{h} = 0.77\,\mathrm{mm}$ wide. The stack porosity is $\tilde{h}/\tilde{H} = 0.794$, where $\tilde{H}$ is the distance separating two successive plate centerlines, and $\tilde{h}$ is the gap or flow passage between two successive stack plates. The distance between the heat exchangers and the ends of the stack plates equals $\tilde{h}$, and the heat-exchanger length is taken to be $\tilde{L}_{\mathrm{stack}}/20$. The length of the left resonator section is $\tilde{l}_L = 676$ mm. The device is filled with helium at 1 MPa and a temperature of 293 K on the cold side. The heat exchangers are taken to be made of the same material as the stack plates. The resonant frequency of the device is 66.6 Hz when filled with helium at 293 K in both cold and hot sections, no thermoacoustic heat pumping, and no load. These data result in a ratio of 0.38 between thermal boundary layer and spacing between two successive stack plates, which is appropriate for thermoacoustic energy transfer.[2]

Using the scalings previously defined, the reference Mach number is equal to $M = 0.02$, so that $\tilde{L}_{\mathrm{res}} = 50\,\tilde{L}_{\mathrm{stack}}$ [Eq. (1)]. The Péclet and Reynolds numbers, based on $\tilde{H}$ are $\mathrm{Pe}_{\tilde{H}} = 1093$ and $\mathrm{Re}_{\tilde{H}} = 1584$. The solid Péclet number for the stack plates and the heat exchangers is $\mathrm{Pe}_s = 4.485 \times \mathrm{Pe}_{\tilde{H}} = 31.7$.

A combination of values of the dimensionless temperature in the hot heat exchanger ($T_{\mathrm{hot}} = 1.2$, 1.3, and 2) and of the load ($f = \infty$, 90) were simulated. Two initial conditions were tested, with initial velocities and acoustic pressures in a resonator excited by either: (1) A random noise or (2) a standing wave at the cold resonator frequency, with no load and no thermoacoustics. In the heat-exchanger section, both initial dynamic pressure and velocity were set to zero. Two sets of initial temperature conditions in the stack and the fluid in the gap were also considered: A longitudinally linear distribution between heat exchangers, in both solid and fluid, or a distribution corresponding to steady-state heat conduction, with the fluid at rest. The latter was calculated numerically, taking into account the geometry of the heat-exchanger section, including the gas layer between heat exchangers and stack plates, and the thermal conductivities in the wall and the gas.

B. Convergence analysis

A convergence analysis was performed for $T_{\mathrm{hot}} = 1.2$, with a closed cold end, starting from random noise, and assuming balanced initial temperatures due to conduction in the heat-exchanger section, with spatial resolutions of 1024×32, 2048×32, and 2048×64 grid points. The coarse mesh allows for three grid points inside each half-plate width and three grid points in the fluid gap between heat exchanger and plate end. The time step was chosen as large as possible, maximizing the Courant number while ensuring stability. The coarsest resolution used was about 600 time steps per dimensionless unit of time, which, since initially velocities are small, is appropriate. As velocities increased, the time step was decreased by a factor of 10, to a value of 1/6000. The CPU (Central Processing Unit) time was about 1 μs per time step and per mesh point on a NEC SX8. The numerical parameters for the multigrid algorithm dealing with pressure correction and the divergence of the velocity field are adjusted so that for the coarsest grid, an average of only three or four iterations is needed. On the coarsest grid, the average CPU time per run is 2 h when only simulating the early phase of the process, showing amplification of the initial perturbation. It took about 50 h until saturation was observed, when the wave amplitude no longer increases. These are good performance figures when compared with current literature reports.[23]

While qualitatively the results were observed to be independent of the grid size, quantitative differences of about 10% in the growth rates were noted between coarse and fine mesh, but only of 1% between the two finest meshes. For each spatial grid, solutions were obtained using three different time steps, from 1/600th to 1/6000th of the unit time. In order to

Author's complimentary copy

assess any effect of the truncation error inherent to the ADI solver, while GMRES yields an exact solution of the discretized equations, results using both solvers were compared. For all the time steps that were used, they were nearly identical. Since GMRES is more costly, all results below were obtained using the ADI solver, and for the coarsest mesh.

V. DISCUSSION

A. Initial amplification

Figures 2 and 3 show results obtained for an initially linear temperature profile between the heat exchangers, with $T_{hot} = 1.3$, in a tube closed at both ends ($f = \infty$). The initial excitation of the resonator was a standing wave of small amplitude at the resonator fundamental frequency in cold fluid. The results shown correspond to the early part of the process, while wave amplification is taking place, for $0 \leq t \leq 410$. Figures 2(a) and 2(b) show respectively, the evolution of acoustic pressure $Mp^{(1)}(0)$ and velocity $u(0^-)$ (on the left side of the heat exchangers). The results show the thermoacoustic instability resulting in an approximately exponential amplitude increases. Indeed when acoustic pressure is plotted on a logarithmic scale, Fig. 3(a), the envelope of the signal appears to be linear. However, in Fig. 3(b), the positive and negative parts of the acoustic pressure and velocity signals are noticeably asymmetric, as predicted from nonlinear theoretical models and observed in experiments.[11,14,28] Predictably, the dominant frequency is very close to 0.5, corresponding to the resonance in a tube at a uniformly cold temperature, closed at both ends, with no thermoacoustic power generation and no load. For the relatively modest temperature ratio of 1.3, the Lees/Rott dispersion relation,[1,29] which accounts for a temperature discontinuity at the location of the heat-exchangers section, yields a frequency that only differs by 0.053% from the resonant frequency in a tube entirely filled with cold fluid, which was used as the initial excitation. The effect of the thermoacoustic load resulting in a nonzero growth rate, which also shifts frequencies, is small too, as readily verified in a linear model accounting for a source of volume at the location of the temperature jump. The fundamental is the most energetic mode, which is consistent since the initial excitation starts by feeding energy in the fundamental exclusively. However, closer analysis of the signal shows that the first harmonic, oscillating twice as fast, is also unstable, as reported in both theoretical studies and experiments.[4,6,28]

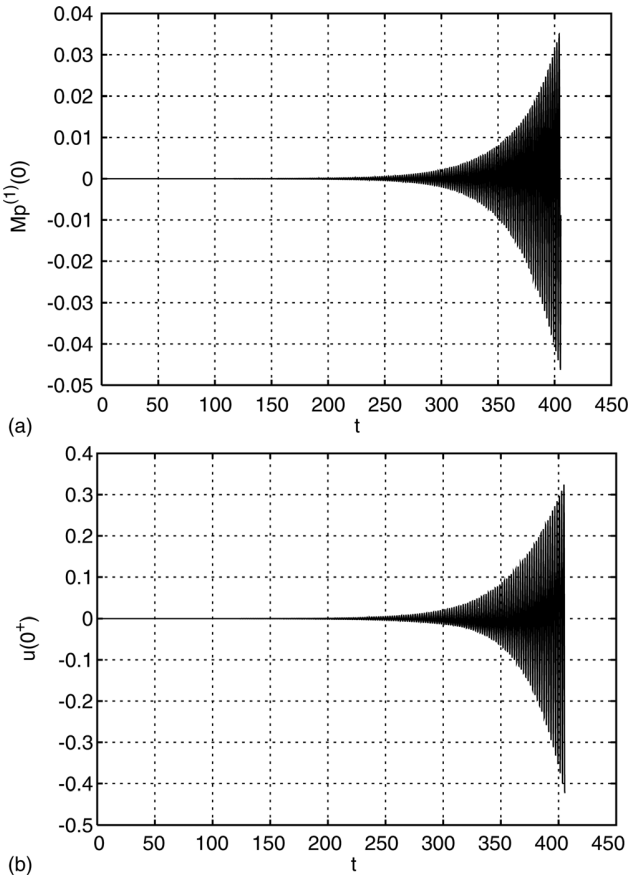


FIG. 2. Acoustic pressure $Mp^{(1)}(0)$ (a) and left velocity $u(0^-)$ (b) history, $f = \infty$, $T_{hot} = 1.3$, with linear initial temperature distribution and initial standing wave.

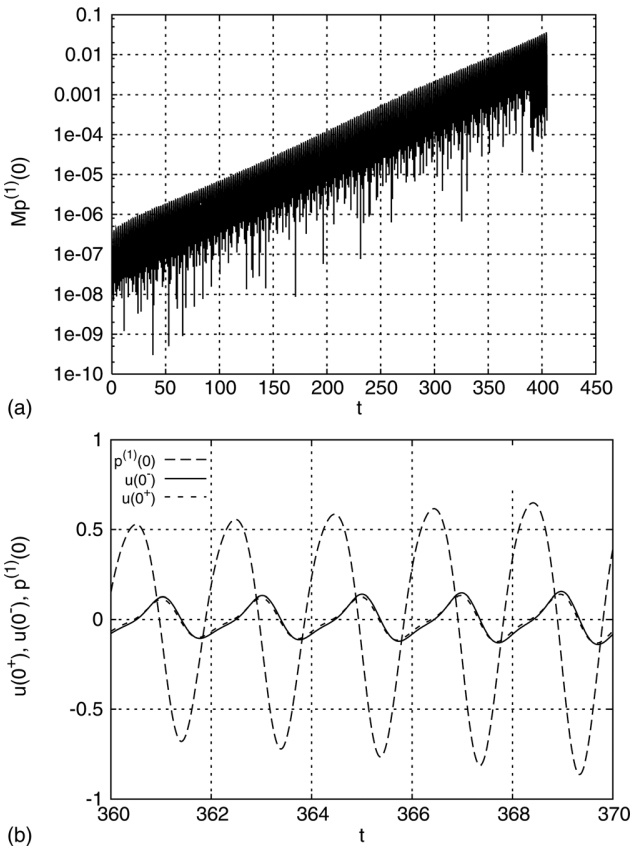


FIG. 3. Acoustic pressure $Mp^{(1)}(0)$ history, in semi-log scale (a) and detail (b) of acoustic pressure $p^{(1)}(0)$, left velocity $u(0^-)$, right velocity $u(0^+)$ history, $f = \infty$, $T_{hot} = 1.3$, with linear initial temperature distribution and standing wave as initial condition.

The difference between the left and the right velocity amplitudes is shown in Fig. 3, which presents a close-up view of acoustic pressure and axial velocities at the end of the computation. The phase shift between pressure and left velocity is close to 90°. Since the acoustic energy flux is proportional to the integral of the product pressure times velocity, which on the left, becomes zero in the stationary regime, a phase shift of 90° corresponds to a standing wave. Here,

Author's complimentary copy

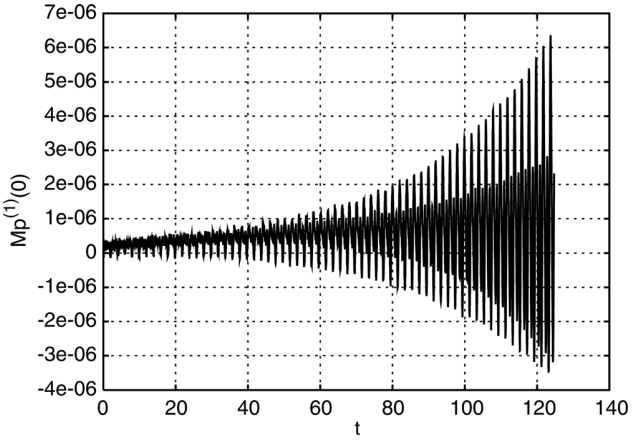


FIG. 4. Acoustic pressure $Mp^{(1)}(0)$ history, $f = \infty$, $T_{\text{hot}} = 1.3$, with linear initial temperature distribution and random noise as initial perturbation.

however, the amplitude is still increasing, which requires a nonzero energy flux, smaller on the left than on the right since the left side represents only about 9% of the resonator length.

In Fig. 3(b), corresponding to the end of the run in Fig. 2, the drive ratio at the heat-exchanger section location [defined as $\max|Mp^{(1)}(0)|$] is 3.5% and dimensionless velocities are approximately 0.15. Pursuing the simulation with such high velocities requires the time step to be significantly reduced. With no load (closed end, infinite f), saturation will only occur on a time scale of $1/M$. Indeed, the irreversibility due to damping in the heat-exchanger section is smaller than the acoustic energy fluxes by order M, while the resonator model is isentropic.

Figure 4 shows the growth of pressure for the same configuration and parameters ($T_{\text{hot}} = 1.3$, $f = \infty$, and linear initial temperature distribution), except for the initial excitation, which is a random noise. Since, in this case, there is no significant energy initially deposited in any mode in particular, the effect of the strong growth rate of the first harmonic becomes clear. Both the fundamental and the first harmonic appear to be unstable.

When increasing the hot temperature to $T_{\text{hot}} = 2$ in Fig. 5, starting from a standing wave, the first harmonic (second

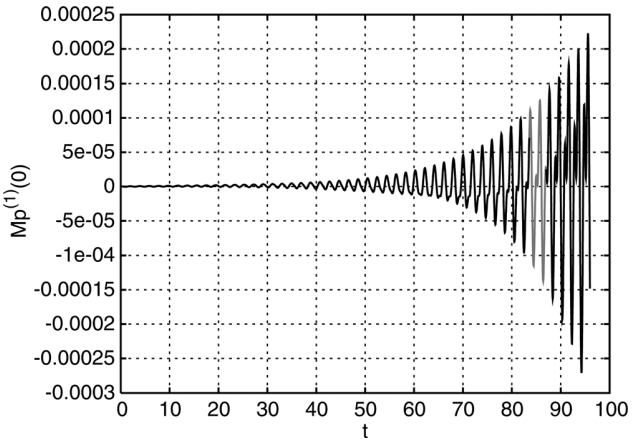


FIG. 5. Acoustic pressure $Mp^{(1)}(0)$ history, $f = \infty$, $T_{\text{hot}} = 2$, with linear initial temperature distribution and standing wave as initial perturbation.

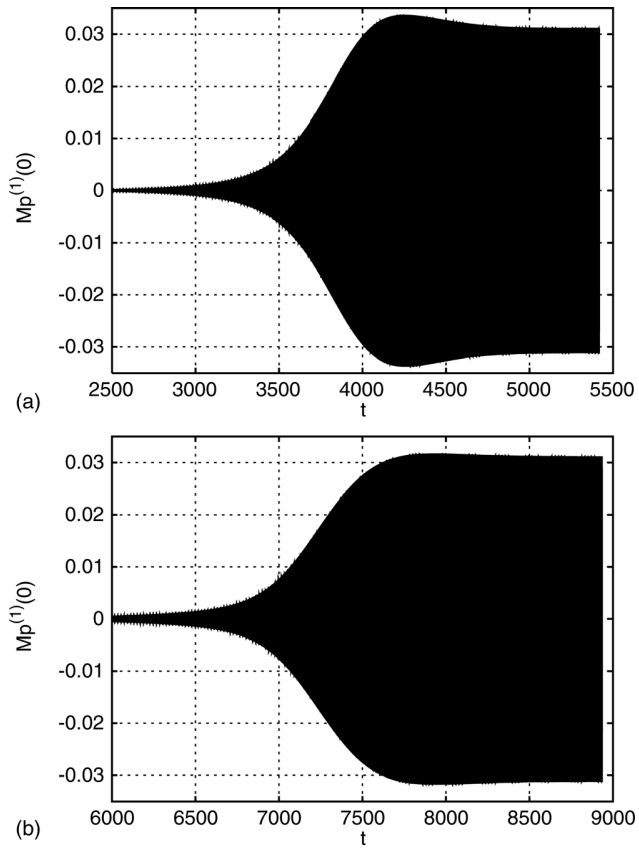


FIG. 6. Acoustic pressure $Mp^{(1)}(0)$ history, $t > 2500$, $f = 90$, $T_{\text{hot}} = 1.2$, with linear initial temperature distribution (a) or steady-state heat conduction initial temperature (b) and initial random noise.

mode) is clearly unstable and can be seen already very early on. Similar observations are made when starting with noise.

B. Periodic regime

In order to show the evolution of the wave toward a stationary regime, a purely resistive load was introduced at the right end. For f ranging between 80 and infinity, increasing

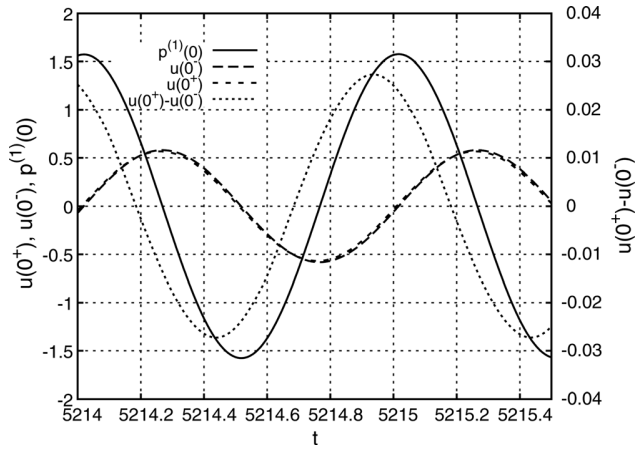


FIG. 7. Time history (detail) of acoustic pressure $p^{(1)}(0)$, left velocity $u(0^-)$, right velocity $u(0^+)$, difference $u(0^+) - u(0^-)$ (scale on right vertical axis), $t = \tilde{t}/(2\tilde{t}_{\text{ref}})$, $f = 90$, $T_{\text{hot}} = 1.2$ with linear initial temperature distribution and initial random noise.

Author's complimentary copy

the impedance f leads to an increase in the growth rate, and saturation comes sooner. Results below were obtained for $f = 90$, which leads to saturation with a reasonable pressure amplitude level and in a reasonable time. Two separate calculations were done for $f = 90$, both for a temperature ratio of 1.2. The first one started from an initially linear temperature distribution between heat exchangers, with results shown in Figs. 6(a) and 7. In the second simulation, temperature initial conditions considered a steady-state heat conduction field. Results are shown in Fig. 6(b). In the former case, saturation occurs after $t \simeq 4500$ (which corresponds to about 35 s in real time). Figure 7 shows acoustic pressure, axial velocities, and the difference between axial velocities for a narrow time window at the end of the simulation. The phase shift between acoustic pressure and left velocity is very close to 90° and the period is approximately 0.998, which is again very close to the first harmonic, and even more so if taking the presence of a temperature jump into account. Indeed, its period is 0.9986 in a tube closed at both ends (i.e., with no load) according to the Lees/Rott dispersion relation.[1,29] At the stationary regime, acoustics on the left side is a monochromatic standing wave since there is no longer any energy transfer. On the right side, however, the power developed by the heat-exchanger section acting as a source of volume is carried to the load by the acoustics, which consequently do no longer behave as a pure standing wave (Fig. 7). The final drive ratio $(\max|Mp^{(1)}(0)|)$ is about 3.2% and the velocity amplitudes are 0.59. The signal in Fig. 7 is now much more symmetric than for infinite f. An overshoot is clearly noticeable in the pressure amplitudes, before the stationary oscillatory regime is reached. The same observation has been reported in previous theoretical, numerical,[14,23] and experimental studies. This overshoot may be due to interaction between the evolution of the stack temperature and the thermoacoustic wave amplification, which are taking place simultaneously, each of which is characterized by its own time scale. The initially linear temperature gradient evolves mostly by conduction in the solid plates and in the fluid, toward a stationary solution which, for heavy stack plates, will be nearly steady. The time scale characterizing conduction in the stack is of the order of 1–2 h, i.e., approximately 3.5×10^6 dimensionless time units (based on the stack length and the thermal diffusivity of the stack plates $\tau \simeq \tilde{L}^2_{\text{stack}}/\alpha_s$). Meanwhile, the thermoacoustic engine provides for an increase in amplitude and delivers power to the load, until reaching an equilibrium. Here equilibrium, hence a nearly periodic regime, appears to be reached while the stack temperature is still adjusting due to its high thermal mass. In contrast, in the case of steady-state heat conduction field, the initial temperature profile has already been adjusted for conduction (but not for the effect of oscillating flow), and it is much closer to its final profile.

In the case of steady-state heat conduction, as a result of relatively poor conduction between heat exchangers and stack, the actual temperature gradient in the stack is much lower already when the device starts, the engine is clearly weaker, and wave amplification is slower, as observed by comparing times in Fig. 6(b) with those in Fig. 6(a). Figure 8 shows the initial temperature field, zooming between heater and stack plate, due to conduction but no motion, which is

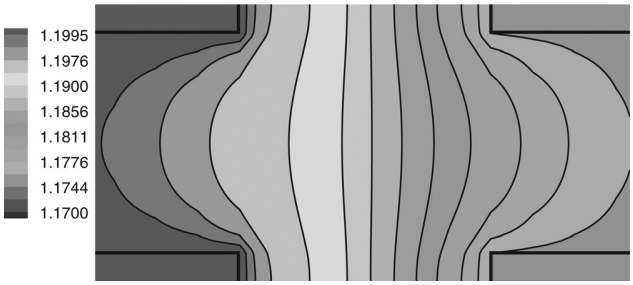


FIG. 8. Temperature field detail between the hot heat exchanger and the stack plates due to conduction (no motion), $T_{\text{hot}} = 1.2$, same view as Fig. 1 (bottom).

clearly two-dimensional. The initial temperature gradient in the stack plates is significantly smaller than the linear profile used as initial conditions in the previous case and much closer to the final profile, as shown in Fig. 9. This is due primarily to the gap between the heat exchangers and the stack ends. The gas layer in this gap is much less conductive than the solid plates and, therefore, it absorbs much of the temperature difference, resulting in a smaller gradient in the stack. The same drive ratio is reached eventually but, as Fig. 6(b) shows, there is almost no overshoot.

The unavoidable presence of a fluid layer between heat exchangers and plates has a definite impact on the growth rate. Thermal edge effects and gaps between the stack ends and the heat exchangers were further analyzed through linear and nonlinear studies in order to derive improved heat exchange laws and to optimize the systems.[30–34] The current model will allow for optimization of its width and exploration of the optimum values of other design parameters, such as stack and heat-exchanger location.

VI. CONCLUSION

A globally consistent low Mach number model of the thermoacoustic engine has been developed, based upon the assumption that the stack and heat-exchangers length is

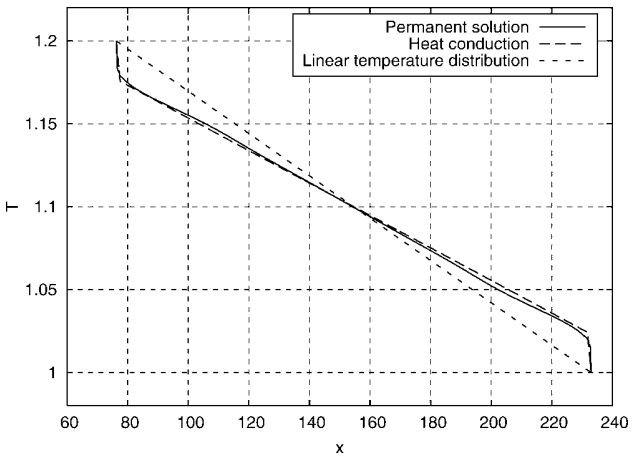


FIG. 9. Temperature distribution along the stack symmetry plane and in the gas from left to right heat exchanger, showing both initial conditions, linear distribution and heat conduction solution, and the mean stationary periodic solution for $f = 90$, $T_{\text{hot}} = 1.2$, and initial random noise.

Author's complimentary copy

comparable with the fluid particle displacement, resulting in a heat-exchanger section that is transparent to acoustic pressure but acts as a source of volume.

Transient processes whereby amplitude grows and eventually reaches a steady value are predicted, including frequencies and power fluxes. The key components of the thermoacoustic device are included. Yet by virtue of not needing a numerical solution in the resonator, and because the flow in the stack and heat exchangers is reduced to a low Mach number flow, implementation is orders of magnitude faster than compressible models of the entire device. Indeed, the current model entails solving numerically for only a small fraction of the overall volume, and the time step is not restricted by an acoustic Courant–Friedrichs–Lewy condition. The current approach is a good example whereby the singular perturbation technique can be used successfully, allowing the computational effort to be concentrated where it truly matters. Even so, large computations are still required, since the direct simulation of a transient period flow in the heat-exchanger section is still required.

The model will allow for exploring and understanding crucial trade-offs on stack position, stack wall thickness and thermal mass, heat-exchanger size and location, and load impedance including the trade-off between optimizing for device performance and optimizing for its ability to start, which may lead to conflicting requirements.

The resonator and the load models that were used are admittedly much simplified. However, the current approach can readily be extended to more realistic resonators as long as they can be described by linear acoustics, and to more complex load models, including multidimensional resonators with losses, complex losses, and loops, or in which the long acoustic resonator is replaced by a free piston, hence allowing for arbitrarily large pressure amplitudes, and a much higher power density. In particular, losses due to heat and momentum diffusion can readily be included, since these are linear in nature. Wave steepening cannot be dealt with; however, until shocks appear, wave steepening remains a fully reversible phenomenon, which as such does not directly contribute to losses.

ACKNOWLEDGMENTS

Support of the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada is gratefully acknowledged (L.B.). Computations were performed on the NEC-SX8 of the IDRIS-CNRS computing center, under Project No. i2009020599. The authors thank Professor Maurice-Xavier François for his interest and numerous fruitful exchanges on this work and for initiating the collaboration that made this study possible. Finally, support of the Algerian and French governments through a doctoral fellowship 2007–2008, "Programme Boursier Enseignants du Ministère Algérien de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique" is gratefully acknowledged (O.H.).

[1]N. Rott, "Damped and thermally driven acoustic oscillations in wide and narrow tubes," Z. Angew. Math. Phys. **20**, 230–243 (1969).
[2]G. W. Swift, "Thermoacoustic engines," J. Acoust. Soc. Am. **84**, 1145–1180 (1988).
[3]W. P. Arnott, H. E. Bass, and R. Raspet, "General formulation of thermoacoustics for stacks having arbitrarily shaped pore cross-sections," J. Acoust. Soc. Am. **90**, 3228–3237 (1991).
[4]A. A. Atchley, H. E. Bass, T. J. Hofler, and H. T. Lin, "Study of a thermoacoustic prime mover below onset of self-oscillation," J. Acoust. Soc. Am. **91**, 734–743 (1992).
[5]A. A. Atchley, "Standing wave analysis of a thermoacoustic prime mover below the onset of self-oscillation," J. Acoust. Soc. Am. **92**, 2907–2914 (1992).
[6]A. A. Atchley and F. M. Kuo, "Stability curves for a thermoacoustic prime mover," J. Acoust. Soc. Am. **95**, 1401–1404 (1994).
[7]W. P. Arnott, J. R. Belcher, R. Raspet, and H. E. Bass, "Stability analysis of a helium-filled thermoacoustic engine," J. Acoust. Soc. Am. **96**, 370–375 (1994).
[8]B. Ward, J. Clark, and G. W. Swift, *Design Environment for Low-Amplitude Thermoacoustic Energy Conversion (DeltaEC) User's Guide* (version 6.2) (Los Alamos National Laboratory, 2008), http://www.lanl.gov/thermoacoustics/UsersGuide.pdf.
[9]R. Raspet, J. Brewster, and H. E. Bass, "A new approximation method for thermoacoustic calculations," J. Acoust. Soc. Am. **103**, 2395–2402 (1998).
[10]A. T. A. M. de Waele, "Basic treatment of onset conditions and transient effects in thermoacoustic Stirling engines," J. Sound Vib. **325**, 974–988 (2009).
[11]S. Karpov and A. Prosperetti, "Nonlinear saturation of the thermoacoustic instability," J. Acoust. Soc. Am. **107**, 3130–3147 (2000).
[12]S. Karpov and A. Prosperetti, "A nonlinear model of thermoacoustic devices," J. Acoust. Soc. Am. **112**, 1431–1444 (2002).
[13]N. Cao, J. R. Olson, G. W. Swift, and S. Chen, "Energy flux density in a thermoacoustic couple," J. Acoust. Soc. Am. **99**, 3456–3464 (1996).
[14]M. F. Hamilton, Y. A. Ilinski, and E. Zabolotskaya, "Nonlinear two-dimensional model for thermoacoustic engines," J. Acoust. Soc. Am. **111**, 2076–2086 (2002).
[15]L. Bauwens, C. R. L. Bauwens, and I. Wierzba, "Oscillating flames: Multiple-scale analysis," Proc. R. Soc. London, Ser. A **465**, 2089–2110 (2009).
[16]S. Paolucci, "On the filtering of sound from the Navier-Stokes equations," Report No. SAND82-8257, Sandia National Laboratories (1982).
[17]L. Bauwens, "Near-isothermal regenerator: A perturbation analysis," AIAA J. Thermophys. Heat Transfer **9**, 749–756 (1995).
[18]L. Bauwens, "Oscillating flow of a heat-conducting fluid in a narrow tube," J. Fluid Mech. **324**, 135–161 (1996).
[19]A. Worlikar and O. Knio, "Numerical study of oscillatory flow and heat transfer in a loaded thermoacoustic stack," Numer. Heat Transfer, Part A **35**, 49–65 (1999).
[20]P. Duthil, C. Weisman, E. Bretagne, and M.-X. François, "Experimental and numerical investigation of heat transfer and flow within a thermoacoustic cell," Int. J. Transp. Phenom. **6**, 265–272 (2004).
[21]D. Marx and P. Blanc-Benon, "Computation of the temperature distortion in the stack of a standing-wave thermoacoustic refrigerator," J. Acoust. Soc. Am. **118**, 2993–2999 (2005).
[22]J. A. Lycklama à Nijeholt, M. E. H. Tijani, and S. Spoelstra, "Simulation of a traveling-wave thermoacoustic engine using computational fluid dynamics," J. Acoust. Soc. Am. **118**, 2265–2270 (2005).
[23]G. Y. Yu, E. C. Luo, W. Dai, and J. Y. Hu, "Study of nonlinear processes of a large experimental thermoacoustic-Stirling heat engine by using computational fluid dynamics," J. Appl. Phys. **102**, 074901–074907 (2007).
[24]D. Marx and P. Blanc-Benon, "Numerical simulation of stack-heat exchangers coupling in a thermoacoustic refrigerator," AIAA J. **42**, 1338–1347 (2004).
[25]P. Le Quéré, C. Weisman, H. Paillère, J. Vierendeels, E. Dick, R. Becker, M. Braack, and J. Locke, "Modelling of natural convection flows with large temperature differences: A benchmark problem for low Mach number solvers. Part 1. Reference Solutions," M2AN, Math. Modell. Numer. Anal. **39**, 609–616 (2005).
[26]Y. Saad and M. Schultz, "GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems," SIAM (Soc. Ind. Appl. Math.) J. Sci. Stat. Comput. **7**, 856–869 (1986).
[27]W. Briggs, *A Multigrid Tutorial*, 2nd ed. (SIAM Publications, Philadelphia, 1987).
[28]P. Debesse, D. Baltean-Carlès, and F. Lusseyran, "Experimental analysis of nonlinear phenomena in a thermoacoustic system, nonlinear acoustics fundamentals and applications," in *Proceedings of the 18th International Symposium on Nonlinear Acoustics (ISNA)*, Stockholm, Sweden (July 7–10, 2008), Vol. 1022, pp. 355–358.

Author's complimentary copy

[29]C. H. Lees. "The free periods of a composite elastic column or composite stretched wire," Proc. Phys. Soc. **41**, 204–213 (1929). Cited in H. Guénoche, "Flame propagation in tubes and in closed vessels," in *Non-steady Flame Propagation*, edited by G. H. Markstein (Pergamon Press, New York, 1964), pp. 107–181.
[30]G. Mozurkewich, "Time-average temperature distribution in a thermoacoustic stack," J. Acoust. Soc. Am. **103**, 380–388 (1998).
[31]V. Gusev, "Relaxation-time approximation for analytical evaluation of temperature field in thermoacoustic stack," J. Sound Vib. **235**, 711–726 (2000).
[32]H. Ishikawa and D. J. Mee, "Numerical investigations of flow and energy fields near a thermoacoustic couple," J. Acoust. Soc. Am. **111**, 831–839 (2002).
[33]A. Berson and P. Blanc-Benon, "Nonperiodicity of the flow within the gap of a thermoacoustic couple at high amplitudes," J. Acoust. Soc. Am. **122**, 122–127 (2007).
[34]L. Zoontjens, C. Q. Howard, A. C. Zander, and B. S. Cazzolato, "Numerical study of flow and energy fields in thermoacoustic couples of non-zero thickness," Int. J. Therm. Sci. **48**, 733–746 (2008).

Author's complimentary copy

L. Ma, C. Weisman, D. Baltean-Carlès, I. Delbende, L. Bauwens
Effect of a resistive load on the starting performance of a standing wave thermoacoustic engine : A numerical study
J. Acoust. Soc. Am. 138 (2), 847-857, 2015

Effect of a resistive load on the starting performance of a standing wave thermoacoustic engine: A numerical study

Lin Ma, Catherine Weisman,[a] Diana Baltean-Carlès, and Ivan Delbende
Université Pierre et Marie Curie UPMC Sorbonne Universités, UFR 919 - Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur, 91405 Orsay Cedex, France

Luc Bauwens
Department of Mechanical and Manufacturing Engineering, University of Calgary, Calgary, Alberta T2N 1N4, Canada

(Received 4 August 2014; revised 23 April 2015; accepted 8 July 2015; published online 17 August 2015)

The influence of a resistive load on the starting performance of a standing-wave thermoacoustic engine is investigated numerically. The model used is based upon a low Mach number assumption; it couples the two-dimensional nonlinear flow and heat exchange within the thermoacoustic active cell with one-dimensional linear acoustics in the loaded resonator. For a given engine geometry, prescribed temperatures at the heat exchangers, prescribed mean pressure, and prescribed load, results from a simulation in the time domain include the evolution of the acoustic pressure in the active cell. That signal is then analyzed, extracting growth rate and frequency of the dominant modes. For a given load, the temperature difference between the two sides is then varied; the most unstable mode is identified and so is the corresponding critical temperature ratio between heater and cooler. Next, varying the load, a stability diagram is obtained, potentially with a predictive value. Results are compared with those derived from Rott's linear theory as well as with experimental results found in the literature. © *2015 Acoustical Society of America*. [http://dx.doi.org/10.1121/1.4927092]

[JDM] Pages: 847–857

I. INTRODUCTION

A thermoacoustic engine is a device absorbing heat at the hot heat exchanger and releasing heat at the cold heat exchanger while producing acoustic work as an output. Engines are meant to carry a load, which in the case of an acoustic device might include a thermoacoustic refrigerator,[1] a pulse tube refrigerator,[2] a (possibly linear) electric generator,[3] or a piezoelectric transducer.[4] The strong coupling that will exist between the engine and the load influences both starting performance and steady (periodic) operation.

Thermoacoustic devices have been studied extensively for more than 30 years. Most of the work in the literature is based upon the linear theory developed by Rott[5] and later extended by Swift *et al.*[1,6] The theory can handle different geometries for the various parts of the system, such as stack, heat exchangers, and ducts. Numerical implementation is based upon a lumped element approximation.[7] The linear theory will then yield the acoustic field and, as a result, the performance of a given system when in the periodic regime.[1] Linear theory can also predict the onset conditions (critical starting temperature gradient) as a function of the mean pressure by performing a stability analysis for a fixed geometry and working fluid. Results from linear theory are in good agreement with experiments[8–10] for the onset of a standing wave thermoacoustic engine inside a resonator closed at both ends. Recently, a completely analytical boundary layer theory extending linear theory was developed by Sugimoto,[11,12] reducing the problem to a one-dimensional model. That theory was then used in an analytical stability analysis for systems with a stack under given temperature gradient inside straight or looped resonators, for given acoustic frequency, without resorting to lumped elements. Linear theory has important limitations: the stability analysis is performed in the frequency domain for each mode, the transient regime is not described, and nonlinear and multidimensional effects are not considered or are only partially taken into account.

Transient regimes were addressed by de Waele[13] who developed a one-dimensional time-dependent model of a thermoacoustic Stirling engine taking into account the dynamics of individual components, again using a lumped-element approximation. de Waele studied engine start phase and transient effects while acoustics is still considered linear. A mixed empirical and theoretical one-dimensional model was developed by Guedra and co-workers[14,15] based upon a transmission matrix formulation, also assuming linear acoustics. The transmission matrix was obtained experimentally from impedance measurements. Using that model, they studied the onset of oscillations for both a basic standing wave engine and a traveling wave-engine. None of these studies included the influence of a load on onset conditions.

In contrast, the influence of the load has been accounted for in studies of thermoacoustic devices in the periodic regime. The performance of a loaded thermoacoustic engine was investigated by Olson *et al.*,[16] and also others,[17,18] using linear theory[1] and the lumped elements approximation. More recently, Hatori *et al.*[19] developed an experimental method based on measuring the acoustic impedance of the engine and of the load separately, and predicted the operating point

[a]Electronic mail: catherine.weisman@limsi.fr

of the combination engine plus load. Coming to nonlinear models, some numerical simulations of the full compressible Navier–Stokes equations in loaded thermoacoustic devices with complicated geometry have been performed.[20,21] These simulations were performed using commercial codes and gave a good description of thermoacoustic engines in the transient and periodic regimes. However, each test case required extremely large and time consuming simulations; therefore, these are not appropriate for a parametric study of a variable load coupled with an engine.

The aim of the current work is to study the influence of a variable load on the marginal stability conditions of a standing-wave thermoacoustic engine. The model used implements a hybrid low Mach number approximation. It is based on coupling the two-dimensional nonlinear flow and heat exchange in the thermoacoustic active cell with one-dimensional linear acoustics in the loaded resonator. For a detailed description, see Ref. 22. In the load model used in the present study, instantaneous acoustic pressure and velocity are assumed to be in phase at the loaded end, and the load is thus reduced to a real scalar value measuring the ratio of velocity over acoustic pressure. For a given engine geometry and a given temperature ratio between heater and cooler, numerical simulations of the active cell show that depending on the load value, the engine will or will not start. From the numerical results, for any given configuration, a critical temperature ratio is thus determined, corresponding to the onset of thermoacoustic oscillations, together with the frequency of the corresponding, most unstable mode. The analysis is performed using a time-dependent nonlinear model that takes into account two-dimensional effects as well as multi-frequency content. Finally, the influence of the load on the starting phase of the engine is discussed and the results are compared, both with results derived from the linear theory and with Atchley's experiments,[8] bringing new insight into the engine-load coupling.

II. PHYSICAL MODEL

A. Low Mach number approximation

The geometry consists of a long tube with length $\tilde{L}_{res}$, within which an active cell is placed at a distance $\tilde{L}_L$ from the left end. The active cell consists of a stack of horizontal solid plates with length $\tilde{L}_{stack}$, placed between two heat exchangers also consisting of solid horizontal plates that have the same periodicity as the stack (see Fig. 1). The geometry can then be reduced to a domain consisting of two half-plates plus the gap between them, plus a region that extends away from the solid plates.

First, a dimensionless coordinate system $\hat{x}$ is introduced, that resolves the acoustic aspect of the device, which is thus scaled by the resonator length $\tilde{L}_{res}$. The inert resonator end located at $\hat{x} = -\hat{l}_L = -\tilde{L}_L/\tilde{L}_{res}$ is a closed end. The second resonator end consists of a load placed at a fixed location $\hat{x} = \hat{l}_R = 1 - \hat{l}_L$, described in more detail below. The active cell is positioned at $\hat{x} = 0$. It has negligible size when scaled by $\tilde{L}_{res}$, as discussed below [see Fig. 2(a)].

Next, a different dimensionless coordinate system (x, y) is introduced, that characterizes the active cell geometry,

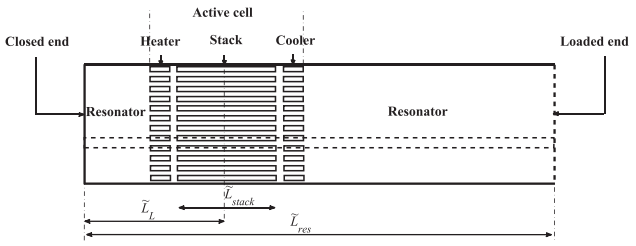


FIG. 1. Simplified geometry of a thermoacoustic engine.

where lengths are scaled by the stack length $\tilde{L}_{stack}$, in both x and y. The corresponding dimensionless geometrical parameters include the vertical gap or flow passage between two stack plates h, the stack porosity h/H, where H is the domain height, equal to the vertical gap plus the thickness of one stack plate, the vertical gap between two heat exchanger plates h_x, the horizontal gap between heat-exchangers and stack L_{xs}, and the heat-exchanger lengths L_{hx} and L_{cx} [see Fig. 2(b)].

The low Mach number model is described in detail in previous work.[22] The model assumes that the particle displacement spans a length on the order of $\tilde{L}_{stack}$, hence typical velocities on the order of $\tilde{U}_{ref} = \tilde{L}_{stack}/\tilde{\tau}$, where $\tilde{\tau}$ is on the order of the fundamental acoustic period of the empty resonator, $\tilde{\tau} = \tilde{L}_{res}/\tilde{c}$, and $\tilde{c}$ is the speed of sound. A reference Mach number $M = \tilde{U}_{ref}/\tilde{c}$ can then be introduced which also equals $M = \tilde{L}_{stack}/\tilde{L}_{res}$. In the following, the Mach number is assumed to be small or equivalently the stack is then taken to be much shorter than the resonator. The active cell size is then negligible in the $\hat{x}$ coordinate system.

Flow in the resonator is then described by linear acoustics. The solutions are expressed as a pair of planar traveling waves that move respectively left and right at the speed of sound. The two Riemann invariants $\mathcal{L}(\hat{x}, t)$ and $\mathcal{R}(\hat{x}, t)$ are used, defined by

$$\mathcal{L} = \gamma u - \sqrt{T}p', \quad \mathcal{R} = \gamma u + \sqrt{T}p' \tag{1}$$

with γ the ratio of specific heats, $u(\hat{x}, t)$ the dimensionless gas velocity, T the dimensionless temperature (using the cold temperature as a reference) which is assumed to be constant in each resonator part ($T = T_h$ on the left side of the

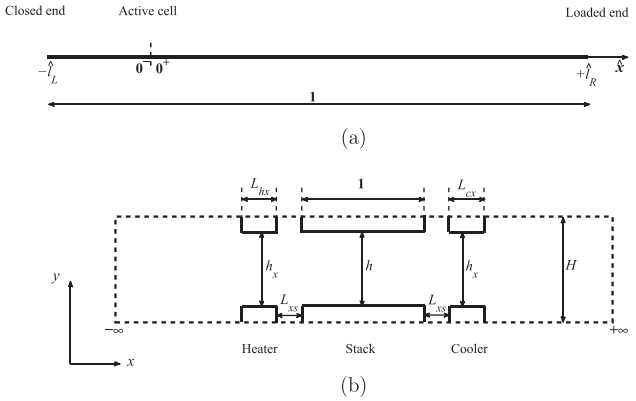


FIG. 2. Geometry of resonator (a) and of active cell geometry (b) in dimensionless coordinates.

active cell, and $T = T_c = 1$ on the right side), and $p'(\hat{x}, t)$ the dimensionless order M (acoustic) pressure (using the mean gas pressure as a reference). At each tube end, the boundary condition results in a relationship that determines the outgoing wave as a function of the incoming wave, as explained in Ref. 22. The order M pressure and acoustic velocity on both sides of the active cell ($\hat{x} = 0^{\pm}$) are expressed using these same quantities at previous times accounting for propagation on each side and reflections at the respective ends. The specific treatment of the loaded end will be described in detail in Sec. II B.

Flow in the active cell is described by two-dimensional Navier–Stokes equations, with order M^2 pressure gradients superimposed to a pressure spatially uniform up to order M, and varying density and temperature. The solid stack plate problem is described by the heat conduction equation. In the stack and heat exchanger plates, physical properties such as density, thermal conductivity, and heat capacity are taken to be constant. Thermal conductivity and heat capacity of the gas are also constant, with values corresponding to cold temperature, chosen as the reference temperature. Reference density of the gas is that corresponding to the reference (cold) temperature and the mean gas pressure.

At the solid-gas boundaries, continuity of temperature and heat flux are imposed, as well as a no slip condition. In the heat exchangers, uniform, constant temperatures are imposed with dimensionless values $T_c = 1$ in the cooler plates, $T_h > 1$ in the heater plates. Given the periodicity, open active cell boundaries are effectively adiabatic.

Boundary conditions at the open ends of the active cell are provided by appropriate matching of the inner (active cell) and outer (resonator) solutions. The latter are expressed using the Riemann invariants $\mathcal{L}$ and $\mathcal{R}$ defined by Eq. (1), traveling respectively left and right in the resonator, at the speed of sound. At each extremity of the active cell, the outgoing invariant is determined as a function of the incoming one, taking the corresponding resonator boundary conditions into account. These consist respectively of a zero velocity at the closed end, and the load, described in Sec. II B, at the loaded end.[22] Finally, a global energy balance over the active cell relates velocities at the two cell extremities to heat transfer.

From the standpoint of resonator acoustics, the active cell is transparent to pressure but provides a source of volume. From the standpoint of the active cell, matching with the resonator occurs at infinity so that, in principle, the active cell has infinite length on both sides. However the numerical domain has to be finite. Its length is chosen equal to 5 times the stack length, which ensures proper matching, as confirmed by validation. The dimensionless parameters characterizing the problem are then the reference Mach number M, the relative position of the active cell in the resonator $\hat{l}_L$, parameters describing the geometry of the active cell (H, h_s, h_x, L_{xs}, L_{hx}, L_{cx}), a Péclet number $P_e = \tilde{U}_{ref}\tilde{H}/\tilde{\alpha}_{ref}$, where $\tilde{\alpha}_{ref}$ is the reference thermal diffusivity, a Reynolds number $R_e = \tilde{\rho}_{ref}\tilde{U}_{ref}\tilde{H}/\tilde{\mu}_{ref}$, $\tilde{\rho}_{ref}$ and $\tilde{\mu}_{ref}$ being the reference density and viscosity, and the Péclet number $P_{es} = P_e\,\tilde{\alpha}_{ref}/\tilde{\alpha}_s$ in solid walls, where $\tilde{\alpha}_s$ is the thermal diffusivity of the solid material.

B. Load model

The present study considers a purely resistive load, so that instantaneous acoustic pressure $p'(\hat{l}_R, t)$ and velocity $u(\hat{l}_R, t)$ at the loaded end are assumed to be in phase. The load is thus characterized by a scalar value equal to the ratio of dimensionless acoustic pressure to velocity, i.e., $f = p'(\hat{l}_R, t)/u(\hat{l}_R, t)$, with f a positive real. Such a load behaves as a pure resistance in the electrical analogy. Actual loads may include inertial and capacitance effects; these will depend not only on mechanical design, but also on the driven devices. A detailed study of these issues is beyond the scope of the present work.

The limit value $f \to 0$ corresponds to an open end, with $p'(\hat{l}_R, t) = 0$, while the limit value $f \to \infty$ corresponds to a closed end, with $u(\hat{l}_R, t) = 0$.

The boundary condition at the load location $\hat{x} = \hat{l}_R$ is carried along the returning (left-moving) characteristic, resulting in the corresponding boundary condition at the right end of the active cell, at $\hat{x} = 0^+$. Specifically, the boundary condition at $\hat{x} = 0^+$ relates the current local value of the left-moving Riemann invariant and the value of the right-moving Riemann invariant at the same location but at a previous time that differs by the round trip time between the active cell and the load at the speed of sound $\sqrt{T_c}$,

$$\mathcal{L}(0^+, t) = Z\mathcal{R}(0^+, t - 2\hat{l}_R/\sqrt{T_c}), \tag{2}$$

in which a real coefficient Z was introduced, defined as

$$Z = \frac{\gamma - f}{\gamma + f}. \tag{3}$$

While f goes from zero for an open end to infinity for a closed end, Z has the finite span from -1 for a closed end to $+1$ for an open end. Furthermore, the expression emphasizes the particular value $f = \gamma$, for which Z vanishes, corresponding to a left-moving Riemann variable with zero value, regardless of the right-moving variable, hence to a nonreflecting load. If $Z = 0$, the solution no longer depends upon the length of the right side of the resonator; such a load may be difficult to implement, and of little practical value, as results below will confirm; however, that case still has some interest as it separates different regimes. In the framework of the harmonic approximation, it is possible to relate f or Z to the reflection coefficient at the loaded end hence to the standing wave ratio.[23] In that context the absolute value of Z is equal to the modulus of the reflection coefficient. The limit values $Z = \pm 1$ correspond to a pure standing wave in the resonator, while the limit case $Z = 0$ corresponds to a pure traveling wave moving from the active cell towards the load. Between those limit cases, the wave is a combination of two waves traveling in opposite directions with unequal amplitudes, i.e., neither standing or purely traveling. In the current study, however, the effect of the load parameter on starting performance will be investigated in the time domain with no *a priori* on the nature of the wave developing in the engine. Critical temperature ratio between heater and cooler and starting frequencies will be analyzed by varying the value of

f in the range 0 to $+\infty$. Results will be more conveniently shown as functions of the coefficient Z in the range $[-1, 1]$.

III. NUMERICAL SIMULATION

A. Algorithm

The problem in the active cell is solved numerically using a finite volume code.[22] Diffusion is dealt with implicitly while advection is explicit. The scheme is second-order accurate in space and in time. A fractional time step projection method adapted for variable density is used to enforce continuity. The ADI algorithm is used to solve the Helmholtz equation for time advance of temperature and velocities. A multigrid algorithm determines the pressure correction. Solutions of the coupled equations providing velocity boundary conditions and acoustic pressure at the active cell location from resonator acoustics and energy balance are appropriately integrated in the solution sequence.[22]

B. Procedure

Simulations account for a specific engine geometry, characterized by the reference Mach number M, the relative distance of the active cell to the left end $\hat{l}_L$, and the dimensions of the active cell H, h, h_x, L_x, and L_{xs}. Most of the current results were obtained for L_{xs} equal to h. Reference Péclet number P_e, solid Péclet number P_{es}, and Reynolds number R_e are maintained constant. The evolution in time of the velocity and temperature fields is computed for given heater and cooler temperatures and load. The required initial conditions consider fluid at rest and temperature profiles, obtained numerically, corresponding to steady conduction in the walls and in fluid at rest. Initial conditions also need to be specified for resonator acoustics, and these need to be nonzero since the steady solution to the global problem consists of fluid at rest, together with a stationary conduction solution. To that effect, and in order not to favor specific modes, an initial random noise is imposed in the resonators. Small $\mathcal{O}(10^{-4})$ random values are thus assigned to the Riemann invariants at the active cell entrance and exit for a time window prior to zero, of length equal to the round trip time between active cell and the respective resonator end.

Starting from initial conditions specified above, the velocity $u(x, y, t)$, dynamic pressure $p(x, y, t)$, temperature $T(x, y, t)$, and density $\rho(x, y, t)$ fields are calculated inside the active cell at each time step. Coupling at the active cell entrance and exit provides the velocity at the entrance $u(0^-, t)$ and exit $u(0^+, t)$ of the active cell, as well as the value of the acoustic pressure at the active cell location $p'(0, t)$ at each time step. The velocity values at the entrance and exit of the active cell serve as boundary conditions for velocity inside the active cell. The order M acoustic pressure $p'(0, t)$, which is included in the active cell model only through boundary conditions, is an outcome of the simulation. That quantity is analyzed here to characterize the device's regime: motion damping or amplification.

C. Post-processing

Acoustic modes are characterized by amplitude and complex frequency, i.e., frequency and growth rate. If the temperature ratio between heater and cooler is small, growth rates are all negative, i.e., the amplitudes of all modes decrease in time and motion stops. A critical temperature ratio is obtained when one of the modes exhibits positive growth: instability occurs and the device starts. In order to find the critical temperature ratio $T_{crit} = \tilde{T}_{hcrit}/\tilde{T}_c$ for a given load, repeated simulations are performed for increasing values of the hot temperature, until a first growth rate becomes positive.

The pressure signal $p'(0, t)$ is analyzed to extract the growth rate and frequency of the dominant modes, by fitting the signal to an approximation of the form

$$p'(0,t) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t) + B_i e^{\sigma_i t} \sin(\omega_i t), \tag{4}$$

where n is the desired number of modes, with typical value 4. The fitting uses a window that includes m consecutive data points, collected after several reference periods have elapsed so that a dominant exponential mode has emerged from the initial phase affected by initial conditions. In Eq. (4), σ_i is the growth rate of mode i, ω_i is its angular frequency, and A_i, B_i are amplitudes.

Fitting the $(A_i, B_i, \sigma_i, \omega_i)$ coefficients is performed using an iterative two stage procedure. Starting with an initial guess (σ_i, ω_i), the (A_i, B_i) coefficients are determined by least mean square error minimization, using the m data points. Then the (σ_i, ω_i) coefficients are obtained using a simplex algorithm. Iterations continue until the fit satisfies a given criterion, with the quadratic error below some adequate lower bound. The whole procedure is iterated until an error below 10^{-4} on (σ_i, ω_i) is reached.

IV. RESULTS

A. Conditions

Numerical simulations were carried out on an existing prototype of thermoacoustic engine,[22] with a "short" thermoacoustic active cell inserted in a long resonator closed at both ends. The engine is modeled as the simplified device introduced in Fig. 2, assuming acoustics is lossless in the resonators and concentrating all dissipation at the loaded end.

The working fluid is helium. The dimensions (resonator length, stack length, distance between the left end and the active cell, plate spacing) and the conditions of the experiments, such as mean pressure and cold temperature, are kept constant. The relevant dimensionless parameters are summarized in Table I, and the relevant fluid properties are summarized in Table II.

Numerical simulations were carried out using a regular two-dimensional mesh for the active cell, with either 2048×32 or 4096×64 grid points. The simulation domain is long enough to ensure that the flow velocity near the entrance and exit is parallel to the resonators. The time step is adjusted in order to satisfy the numerical stability

TABLE I. Dimensionless parameters characterizing the reference experimental device (Ref. 22).

M	P_e	P_{es}	R_e	$\hat{l}_L$	H	h/H	h_x/H	L_{hx}	L_{cx}	L_{xs}
0.02	1100	4900	1600	0.09	0.007	0.73	0.73	0.05	0.05	0.005

condition, with about 200 (coarse grid) to 2000 (fine grid) time steps per reference acoustic period. Typically only 60 min of CPU time are necessary for each numerical run (about 100 periods), such as the one shown in Fig. 3.

For given load value and given heater temperature, the time history of acoustic pressure in the active cell was recorded from the computation. An example of the time signal is shown in Fig. 3(a). The first oscillations are rather erratic [details are not shown in Fig. 3(a)] and they depend upon initial conditions. The signal eventually becomes smoother and amplitudes appear to correspond to a superimposition of exponentially varying modes. The signal appears to remain multi-frequency. This is confirmed in Fig. 3(b) which shows the corresponding spectrogram. In the figure, the angular frequency is scaled by a reference angular frequency ω_{ref} equal to the fundamental angular frequency of the empty resonator closed at both ends, filled with gas at a mean pressure $\tilde{P}_m$ and a temperature equal to the cold temperature $\tilde{T}_c$. At any given time, the power spectrum exhibits successive peaks corresponding to the resonant frequencies of the engine for the specific load value. As time evolves, most modes are damped while some are amplified. A more accurate determination of the frequencies and growth rates of the dominant modes is presented in Sec. IV B.

B. Results at a given active cell location

First, the effect of the load on the critical temperature ratio is studied, for a single active cell location.

Analyzing the pressure signal using the approach described in Sec. III C, the growth rate and frequency of the four dominant modes are calculated, for a range of increasing values of the temperature of the heater T_h, for a given load f, until unstable modes appear. The most unstable mode is identified as the first mode for which the growth rate σ goes from negative to positive, as T_h is increased. Plotting σ as a function of the dimensionless temperature T_h helps one to identify the precise value of the critical temperature ratio, as Fig. 4 shows. In the vicinity of the critical value, σ varies nearly linearly with T_h, and a precise determination of the critical temperature ratio is obtained by interpolation. For example in Fig. 4, the critical temperature ratio is found to be $T_{crit} = 1.845$.

TABLE II. Fluid properties in reference experiment (Ref. 22).

Helium gas					
$\tilde{P}_m$ MPa	$\tilde{T}_c$ K	$\tilde{\rho}$ kg m^{-3}	$\tilde{\mu}$ Pa s	$\tilde{c}_p$ J kg^{-1} K^{-1}	$\tilde{k}$ W m^{-1} K^{-1}
1.0	293	1.6	2×10^{-5}	5193	0.15

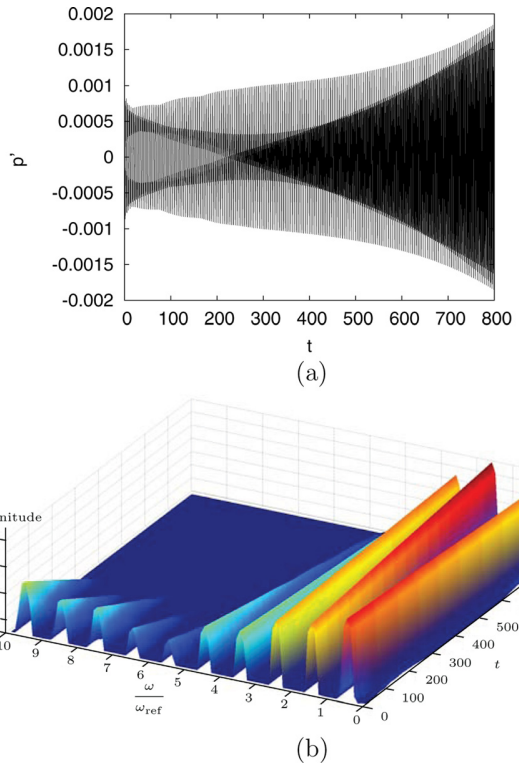


FIG. 3. (Color online) (a) Typical time signal of acoustic pressure $p'(0,t)$ and (b) associated spectrogram (the magnitude is the square root of the power density spectrum). $Z = 0.988$. $T_h = 1.08$.

Next, varying the load and reproducing the same procedure for each load value results in a stability diagram (Fig. 5) in the (Z, T_h) plane showing stable and unstable zones. The zones are separated by a stability curve connecting all the critical temperature ratios causing the engine to start. The region above the stability curve corresponds to instability. Figure 5 shows a stability domain roughly delimited by a symmetrical triangle peaking at $Z = 0$, when a semi-log scale is used.

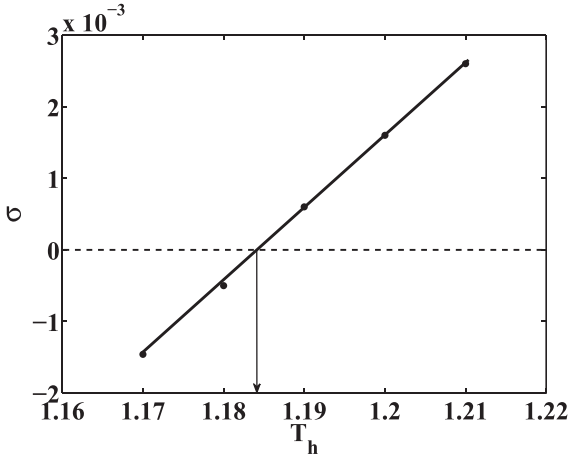


FIG. 4. Growth rate of most unstable mode as a function of the hot exchanger temperature, $Z = -0.963$.

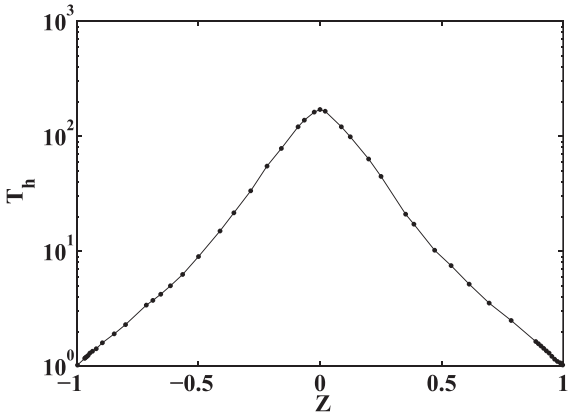


FIG. 5. Stability diagram in the (Z, T_h) plane, showing the stability curve (–•–). The region above the curve corresponds to instability.

Figure 6 shows the angular frequency ω of the first mode to become unstable as a function of Z. As $|Z|$ decreases, the frequency of the most unstable mode is observed to increase. Although the general shape of the curve is approximately symmetrical as it is in Fig. 5 for the critical temperature, the values of ω do not display any symmetry. Indeed, critical modes near $Z = -1$ are of the closed-end type (multiples of $\lambda/2$) whereas critical modes near $Z = 1$ are of the open-end type (odd multiples of $\lambda/4$). This results in distinct sets of onset frequencies, as is further discussed and analyzed in Secs. IV C and V when commenting on Figs. 7, 8, and 11.

For Z close to zero, Fig. 5 shows a very large critical temperature ratio, too large to be realistic. Likewise, frequencies become so high that resolution, both of the wavelength in space and of the period in time, becomes quite poor. Furthermore, these curves were obtained assuming constant viscosity and thermal conductivity conditions, which is unrealistic at high temperature. These results are thus somewhat dubious and, therefore, Fig. 5 merely gives a qualitative picture for Z close to zero. While such numerical critical temperature ratios may be of limited value, the conclusion is valid that in the vicinity of $Z = 0$ the device will not start for any realistic temperature ratio (T_h less than about 10), all modes remaining stable.

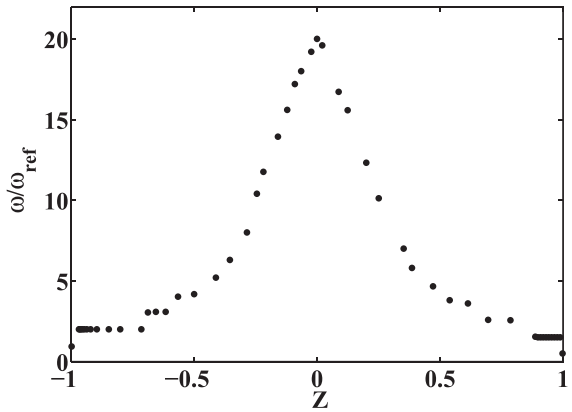


FIG. 6. Angular frequency of the most unstable mode scaled by ω_{ref}, as a function of Z.

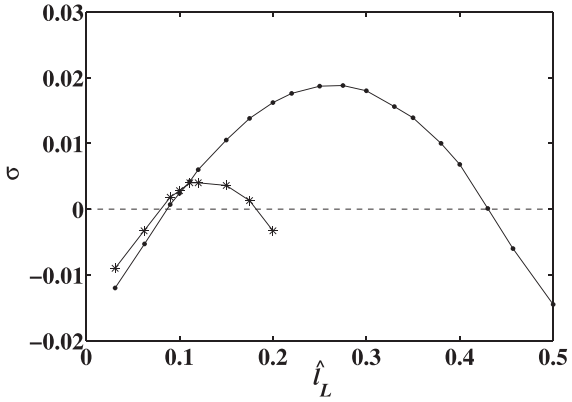


FIG. 7. Growth rates as a function of the active cell location for $0 < \hat{l}_L < 0.5$, $Z = -0.963$, $T_h = 1.2$. (–•–) fundamental mode (the $\lambda/2$ mode), (–∗–) first harmonic mode (the λ mode).

C. Results varying the active cell location or configuration

The stability diagrams shown in Figs. 5 and 6 can be used, for a given configuration, to predict the critical temperature ratio and the dominant frequency as a function of the load.

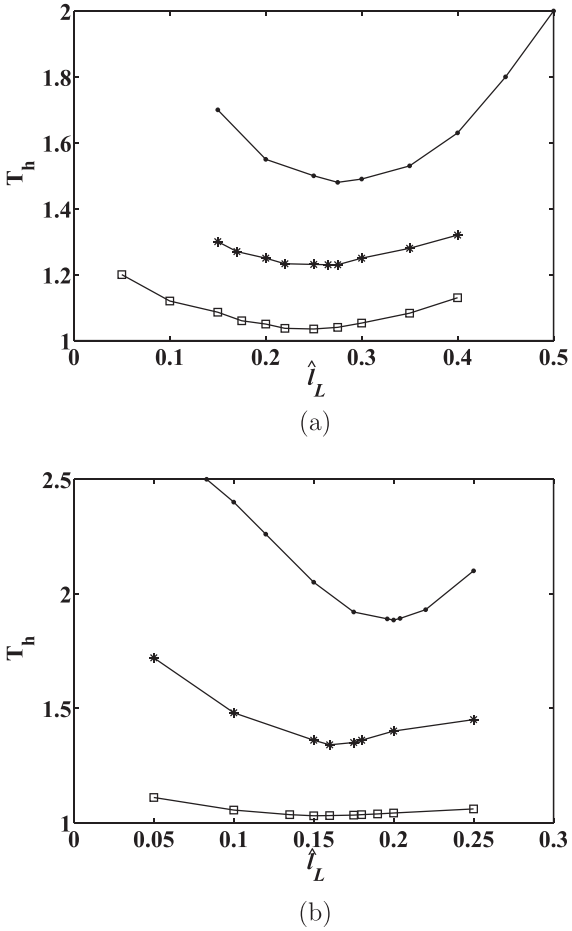


FIG. 8. Stability diagram showing the critical temperature ratio as a function of the active cell location for (a) (–□–) $Z = -0.99$, (–∗–) $Z = -0.92$, (–•–) $Z = -0.85$, the critical mode is the fundamental mode ($\lambda/2$), and (b) (–•–) $Z = 0.79$, (–∗–) $Z = 0.90$, (–□–) $Z = 0.99$, the critical mode is the first harmonic ($3\lambda/4$).

These diagrams are modified if the location of the active cell measured by $\hat{l}_L$ is varied. The stability curve becomes a stability surface, which can be used to predict the critical temperature ratio for a given setup. For given load and heater temperature values, the position of the active cell has to be within a certain region for the engine to start. For an active cell outside this region, all modes are dampened and the engine will not start.

Figure 7 shows the growth rate of the fundamental mode and of the first harmonic as a function of the active cell location for $Z = -0.963$ and $T_h = 1.2$. It is found that if the active cell is positioned at $0.083 < \hat{l}_L < 0.12$, the first harmonic is the most unstable mode. In contrast, if it is placed at $0.12 < \hat{l}_L < 0.43$, the fundamental mode is dominant. For that parameter setting, the overall optimal position for starting performance is $\hat{l}_L = 0.27$, for which the growth rate is maximum. Another way to address the issue is to determine the active cell location for which the critical temperature ratio is minimum. Figure 8 shows the value of the critical temperature ratio for varying active cell locations and for selected load values. Figure 8(a) shows results for negative values of Z near $Z = -1$, in which case both ends are closed. For each value of Z, there is one stack position that minimizes the critical temperature ratio. The optimal position is approximately 0.25 for $Z = -0.99$. Since the fundamental mode (the $\lambda/2$ mode) is the critical one in that region, this corresponds to a stack located at $\lambda/8 \simeq \hat{L}_{res}/4$ as expected ($\hat{L}_{res} = 1$). As Z departs from $Z = -1$, the wavelength increases so that the optimal position shifts towards the center of the resonator.

Figure 8(b) corresponds to positive values of Z, near $Z = 1$, for which the cold end is open. The optimal position is approximately 0.16 for $Z = 0.99$. Now the first harmonic (the $3\lambda/4$ mode) is the critical mode in that range of stack locations. This corresponds to a stack located at $\lambda/8 \simeq \hat{L}_{res}/6 \approx 0.17$. For decreasing values of Z, below $Z = 1$, the wavelength increases so that the optimal position again shifts towards the resonator center. Note that here the active cell is located at $\hat{l}_L \leq 0.25$. If the stack were placed further away, the fundamental mode would become the critical one and the optimal position would shift towards 0.5.

The effect of varying the distance between the heat exchangers and the stack L_{xs} was also studied. In all previous cases the horizontal spacing L_{xs} was equal to the vertical stack plate spacing h. Figure 9 shows the stability diagram for two other situations: for heat-exchangers and stack in direct contact ($L_{xs} = 0$) and doubling the horizontal spacing ($L_{xs} = 2h$). While placing the heat-exchangers and stack incontact together results in significant reduction of the critical temperature ratio for all values of the load (potentially leading to a significant increase in longitudinal conduction losses), the effect of doubling the spacing is insignificant. The nature of the critical modes will be discussed in Sec. V (see comments of Fig. 11).

V. COMPARISON WITH THE LINEAR THEORY

In this section the critical temperature ratio associated to a given acoustic mode is estimated following Rott's linear theory,[5,24] which is outlined here using dimensional values

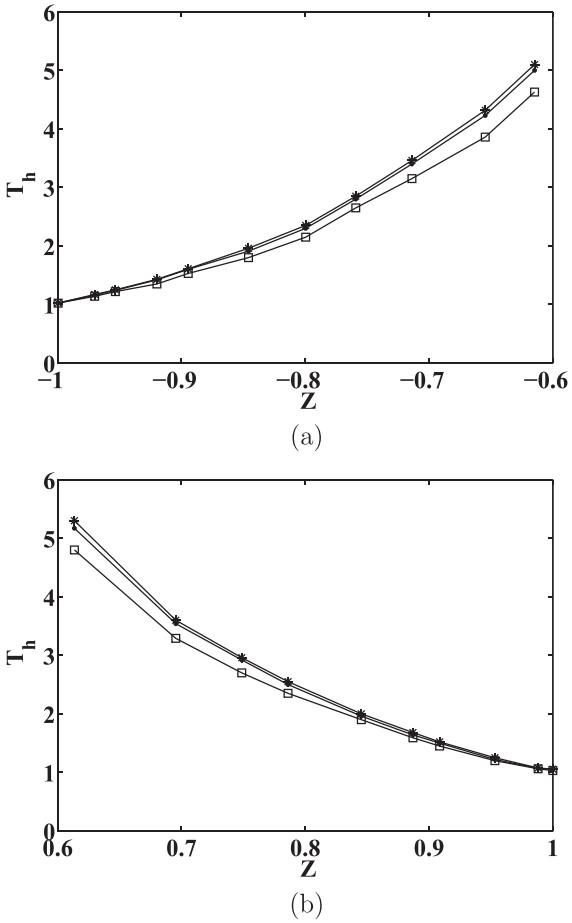


FIG. 9. Stability diagram in the (Z, T_h) plane, showing the stability curve (critical temperature ratios) for three distances between heat-exchangers and stack, (–□–) $L_{xs} = 0$, (–•–) $L_{xs} = h$, (–∗–) $L_{xs} = 2h$. (a) $-1 < Z < -0.6$, (b) $0.6 < Z < 1$.

for the various parameters. Linear results were obtained for a slightly different configuration, with the same total resonator length, stack length, and position of the stack center within the resonator as above. However, the detailed heat exchanger geometry used above was replaced by imposing a linear wall temperature profile in the stack, constant mean temperatures $\tilde{T}_h$ on the left side of the stack, and constant mean cold temperature $\tilde{T}_c$ on the right side.

The flow in the resonator tubes left and right of the stack was taken as one-dimensional isentropic linear acoustics with different speeds of sound corresponding to the respective temperatures $\tilde{T}_h$ and $\tilde{T}_c$. The boundary conditions on the left and right ends were the same as previously, with a load modeled as a real impedance $\tilde{R}$ relating acoustic velocity and acoustic pressure. The acoustic pressure and velocity amplitudes $[\tilde{p}'_h(\tilde{x}), \tilde{u}_h(\tilde{x})]$ on the left resonator part and $[\tilde{p}'_c(\tilde{x}), \tilde{u}_c(\tilde{x})]$ on the right resonator part are functions of position which can be expressed simply in terms of two unknowns, namely, the complex maximum amplitudes $\tilde{U}_h$ and $\tilde{U}_c$.

The stack region is described as a two-dimensional channel of height $2\tilde{y}_0$ equal to the vertical distance between stack plates, extending from $\tilde{x} = 0$ to $\tilde{x} = \tilde{L}_{stack}$. Following Rott's approach, solutions of the viscous flow equations are sought for as harmonic functions in time with angular frequency $\tilde{\omega}$,

using a boundary layer approximation and integrating vertically over the channel height. Also, the stack is assumed to be acoustically compact, so that the acoustic pressure amplitude $\tilde{p}'$ is homogeneous through the stack. Since temperature varies linearly through the stack, $d\tilde{T}/d\tilde{x}$ is a constant.

The resulting dimensional equation for the acoustic velocity in Fourier space is[25]

$$\frac{d\tilde{u}_1}{d\tilde{x}} - \frac{\tilde{f}_\kappa - \tilde{f}_\nu}{(1-\tilde{f}_\nu)(1-P_r)}\frac{1}{\tilde{T}}\frac{d\tilde{T}}{d\tilde{x}}\tilde{u}_1 = -\frac{i\tilde{\omega}}{\gamma \tilde{P}_m}\left[1+(\gamma-1)\tilde{f}_\kappa\right]\tilde{p}', \tag{5}$$

where $\tilde{P}_m$ is the gas mean pressure, Rott's factors are defined as

$$\tilde{f}_\nu = \frac{\tanh\left[(1+i)\tilde{y}_0/\sqrt{2\tilde{\mu}/(\tilde{\rho}\tilde{\omega})}\right]}{(1+i)\tilde{y}_0/\sqrt{2\tilde{\mu}/(\tilde{\rho}\tilde{\omega})}},$$
$$\tilde{f}_\kappa = \frac{\tanh\left[(1+i)\tilde{y}_0/\sqrt{2\tilde{k}/(\tilde{\rho}\tilde{c}_p\tilde{\omega})}\right]}{(1+i)\tilde{y}_0/\sqrt{2\tilde{k}/(\tilde{\rho}\tilde{c}_p\tilde{\omega})}} \tag{6}$$

with constant gas properties $\tilde{\mu}$, $\tilde{c}_p$, $\tilde{k}$ (therefore the Prandtl number P_r is constant also), and density $\tilde{\rho}$ depending on position through variation of temperature. The $\tilde{f}_\nu$ and $\tilde{f}_\kappa$ factors are functions of $\tilde{x}$. Equation (5) is a first order linear inhomogeneous equation, so the solution is expressed as

$$\tilde{u}_1(\tilde{x}) = \exp\left[\int_0^{\tilde{x}} \frac{\tilde{f}_\kappa(\tilde{x}_1)-\tilde{f}_\nu(\tilde{x}_1)}{(1-\tilde{f}_\nu(\tilde{x}_1))(1-P_r)}\frac{1}{\tilde{T}(\tilde{x}_1)}\frac{d\tilde{T}}{d\tilde{x}_1}d\tilde{x}_1\right]$$
$$\times\left\{C_1 - \int_0^{\tilde{x}}\frac{i\tilde{\omega}}{\gamma\tilde{P}_m}\left[1+(\gamma-1)\tilde{f}_\kappa(\tilde{x}_1)\right]\tilde{p}'\exp\left[-\int_0^{\tilde{x}_1}\frac{\tilde{f}_\kappa(\tilde{x}_2)-\tilde{f}_\nu(\tilde{x}_2)}{[1-\tilde{f}_\nu(\tilde{x}_2)](1-P_r)}\frac{1}{\tilde{T}(\tilde{x}_2)}\frac{d\tilde{T}}{d\tilde{x}_2}d\tilde{x}_2\right]d\tilde{x}_1\right\}, \tag{7}$$

in which C_1 is an integration constant.

That expression can be rewritten using the relationship between position and temperature as

$$\tilde{u}_1(\tilde{x}) = \exp\left[-\int_{\tilde{T}(\tilde{x})}^{\tilde{T}_h}\frac{\tilde{f}_\kappa(\theta)-\tilde{f}_\nu(\theta)}{[1-\tilde{f}_\nu(\theta)](1-P_r)}\frac{1}{\theta}d\theta\right]$$
$$\times\left\{C_1 + \int_{\tilde{T}(\tilde{x})}^{\tilde{T}_h}\frac{i\tilde{\omega}}{\gamma\tilde{P}_m}\left[1+(\gamma-1)\tilde{f}_\kappa(\theta)\right]\tilde{p}'\right.$$
$$\left.\times\exp\left[\int_\theta^{\tilde{T}_h}\frac{\tilde{f}_\kappa(\theta^*)-\tilde{f}_\nu(\theta^*)}{[1-\tilde{f}_\nu(\theta^*)](1-P_r)}\frac{1}{\theta^*}d\theta^*\right]\frac{\tilde{L}_{stack}}{\tilde{T}_c-\tilde{T}_h}d\theta\right\}. \tag{8}$$

Boundary conditions are provided by matching with resonator acoustics. While the resonator acoustics yield velocities uniform transversally, the boundary layer model incorporated in the linear theory used in the stack results in a specific nonuniform velocity profile. Matching the mean velocities values is justified based upon a multiple length approach similar to that used above. Indeed the transition region is small compared with acoustic lengths, so that mass and pressure corrections due to the transition zone occur at higher order. For known boundary conditions at the outer resonator ends, acoustics yield a relationship between acoustic pressure in the stack, $\tilde{p}'$, and the uniform acoustic velocities, $\tilde{U}_h$ and $\tilde{U}_c$, respectively, on the left and right side. Continuity conditions require mean velocities and acoustic pressure to match at both stack ends.

Requiring the resulting globally homogeneous problem to have non-trivial solutions results in a dispersion relation that cannot be solved in closed form for the complex frequency ω. A numerical solution was thus implemented using a shooting method, integrating over the stack length, and iterating until the relationship between pressure and velocity at the end match the acoustic boundary condition. The method requires an initial guess for the complex frequency, conveniently provided by the numerical results of Sec. IV B.

Figures 10 and 11 show a comparison between numerical results and results obtained using the linear theory. Only the range $|Z| > 0.6$ is shown, which contains all cases of practical interest.

In Fig. 10, the critical temperature ratio is shown as a function of Z. There is very good agreement between the two approaches, with the ratio obtained through the linear theory slightly above the numerical values, which may be ascribed to a shorter length for lossless acoustics in the linear approach. As $Z \to -1$, the critical temperature ratio becomes very close to 1. For instance, for $Z = -0.997$, the critical temperature ratio is found to be $T_{crit} = 1.024$ numerically while linear theory gives $T_{crit} = 1.14$. Similarly, for an almost open-end resonator, $Z = 0.998$, numerical simulations yield a value $T_{crit} = 1.025$ vs $T_{crit} = 1.13$ from linear theory.

In Fig. 11, the onset frequency normalized by ω_{ref} is shown as a function of Z for both approaches, again showing excellent agreement. Also plotted (continuous lines) are the resonant frequencies of a lossless resonator with a temperature discontinuity positioned at $\hat{x} = 0$, for hot temperature T_h set to the critical value $T_{crit}(Z)$ determined by the simulation, for a closed right end in Fig. 11(a) or an open right end in Fig. 11(b). The small frequency increase as T_h increases is barely noticeable on the continuous (nearly horizontal) lines. The load itself has a small effect since the points from both

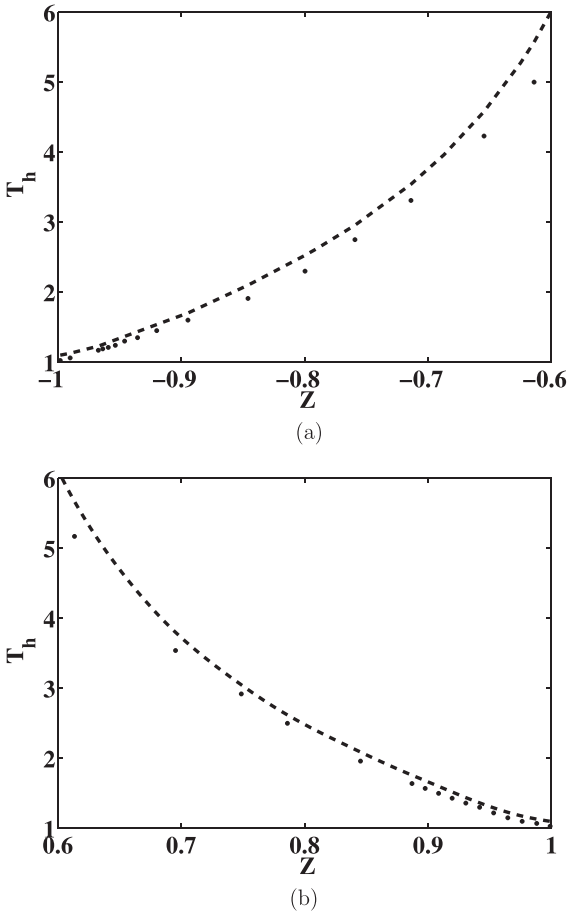


FIG. 10. Stability diagrams in the (Z, T_h) plane showing critical temperature ratios, (•) numerical simulation, (– – –) linear theory. (a) $-1 < Z < -0.6$; (b) $0.6 < Z < 1$.

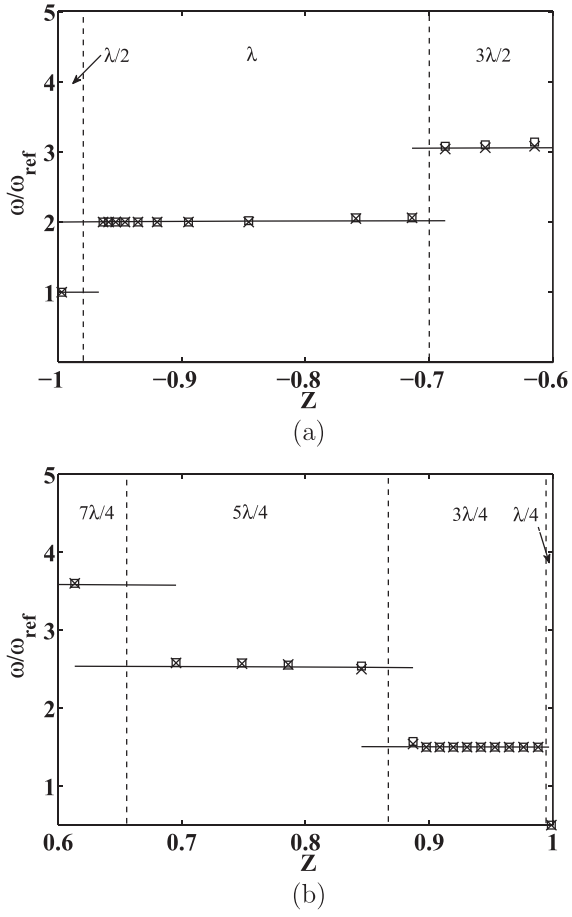


FIG. 11. Frequency of the most unstable modes vs Z. (□) Linear theory, (×) simulations, (a) $-1 < Z < -0.6$; (—) resonant frequencies of a closed-closed lossless resonator with temperature discontinuity at $\hat{x} = 0$ and $T_h = T_{crit}(Z)$ determined by numerical simulations, (– – –) approximate vertical separation between modes (multiples of $\lambda/2$). (b) $0.6 < Z < 1$, (—) resonant frequencies of an open-closed lossless resonator with temperature discontinuity at $\hat{x} = 0$ and $T_h = T_{crit}(Z)$, (– – –) approximate vertical separation between modes (odd multiples of $\lambda/4$).

numerical results and linear theory, and the points on the horizontal lines, which only take into consideration the changes in temperature due to Z, but not the values of Z itself only differ slightly. However, the most visible effect of the load is the switch in the first mode to become unstable (and thus of the onset frequency), represented by vertical lines in Fig. 11. In Fig. 11(a), each vertical range corresponds to a multiple of $\lambda/2$, and in Fig. 11(b), each vertical range corresponds to an odd multiple of $\lambda/4$. As $|Z|$ diminishes, progressively higher frequency modes are the first to become unstable. For the current configuration, $|Z|$ has to be extremely close to 1 for a fundamental mode to be the first to become unstable. The results, both numerical and from linear theory, show that as $|Z|$ decreases, the wavelengths of each mode increase. Thus the position within the resonator maximizing power shifts away from the closed end for each mode. Hence, the optimal position of the active cell for destabilizing any mode ($\lambda_n/8$, $n = 1, 2, 3, ...$) shifts to the right, as was already shown in Fig. 8. Mode n will remain the most unstable until $\lambda_n/8$ of the nth mode shifts too far away from the active cell location and $\lambda_{n+1}/8$ of the next mode becomes more favorably located, resulting in step increases in the frequency of the most unstable mode as shown in Fig. 11.

VI. COMPARISON WITH EXPERIMENTAL RESULTS

In this section, numerical results from the current model are compared with the experimental results of Atchley *et al.*[8] The experimental setup consists of a thermoacoustic cell that is about 6.5 cm long, with a 3.5 cm long stack inserted inside a 1 m long resonator closed at both ends, at about one tenth of its length, 0.87 m from the right end.[26] The inner radius of the resonator is 1.91 cm. Here its cross-sectional area is denoted by A. The only "load" on the engine is dissipation in the gas contained in the resonator (helium under pressure, initially at ambient temperature). The experiments[8] show that at low mean pressure, the most unstable mode is the first harmonic, while at higher pressure, the fundamental mode becomes the most unstable. There is also a region where both modes are unstable.

For comparison, simulations were performed for several mean pressure values. One of the model assumptions is that acoustics is lossless in the resonators so that all dissipation is due to the load, while the experimental results[8] were obtained with no load but with losses. For comparison, the load value in the present model was identified such that the

critical temperature ratio obtained by simulation matches the experiment. For $\tilde{P}_m = 0.44$ MPa, it is found that a dimensionless load value of $f = 45$ in the present model yields a critical heater temperature that coincides with the value obtained experimentally, $\tilde{T}_h = 660$ K. This value corresponds to a dimensional resistive load value $\tilde{R} = fM\tilde{P}_m/(A\tilde{U}_{ref}) = 17.1$ MPa s m^{-3}. The mode that becomes unstable is the fundamental mode, which is also consistent with the experiments. As the heater temperature is increased in the simulation while keeping the load value constant, the first harmonic also becomes unstable when $\tilde{T}_h =$ 821 K, which is again in agreement with the value $\tilde{T}_h \simeq 800$ K found in the experiment.

For $\tilde{P}_m = 0.15$ MPa, a load value $f = 16$ is necessary to reproduce the measured critical heater temperature $\tilde{T}_h = 718$ K, corresponding to dimensional value $\tilde{R} = 2.1$ MPa s m^{-3}. For that mean pressure value, the mode that first becomes unstable is the first harmonic, again in the experiments as well as in the present simulations. The load value that matches the experimental stability diagram of Atchley *et al.*,[8] shown in Fig. 12, is found to depend only on the mean pressure. In the electro-acoustic analogy, the cold resonator in the experimental configuration is a simple right-ended duct filled with helium prone to viscous and thermal dissipation. In the present model, the lossless resonator is connected to a purely resistive load, which is found to mainly play the role of thermal resistance. Indeed the thermal resistance in the experiment may be estimated based on the classical expression,[1] $R_\kappa = 2\gamma\tilde{P}_m/[\omega(\gamma-1)S\delta_\kappa]$, where S is the surface area of the resonator side and δ_κ the thermal boundary-layer thickness. If $\tilde{P}_m = 0.44$ MPa (respectively, 0.15 MPa), $\tilde{T}_{cold} = 293$ K, the thermal resistance is found to be on the order of 40 MPa s m^{-3} (respectively, 5 MPa s m^{-3}). For $\tilde{P}_m = 0.15$ MPa, the angular frequency corresponds to the first harmonic, since this is the mode that destabilizes first. These values are found to be in qualitative agreement with the abovementioned values $\tilde{R}$ obtained numerically, thus lossless acoustics with a loaded end can adequately model a dissipative resonator. Moreover, the value of the load strongly influences the ability of the thermoacoustic engine to start on its own.

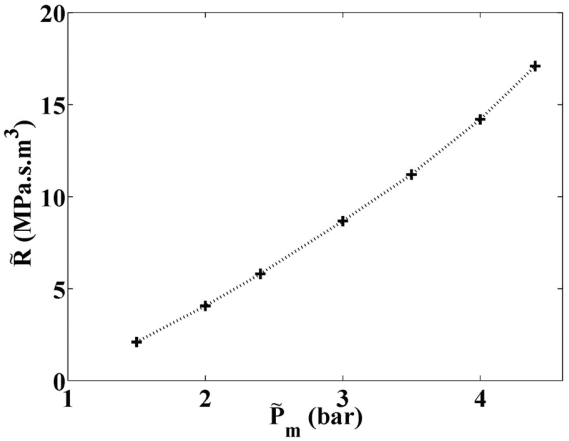


FIG. 12. Dimensional load $\tilde{R}$ yielding the critical temperatures of Atchley *et al.* (Ref. 8) vs mean pressure $\tilde{P}_m$.

VII. CONCLUSION

The dynamics of a thermoacoustic engine was investigated numerically for varying mean pressure and temperature ratio between heater and cooler. The model is based upon a low Mach number assumption, leading to a combination between a numerical solution of the flow and heat transfer in the active cell and an analytical solution of linear acoustics in the resonator. Numerical simulations were carried out on existing thermoacoustic engine configurations,[22,26] showing how a resistive load influences the onset of thermoacoustic oscillations.

The resistive load was varied to encompass a full range of situations from a resonator with a closed end to an open end, hence values range from infinity to zero. To that effect, for a large number of load values, the critical temperature ratio was determined, as well as the angular frequency of the most unstable mode. Results show that for a wide range of intermediate load values, the critical temperature ratio is so high that, in practice, the engine will not start on its own.

The active cell consisted of a stack of parallel plates placed between heat exchangers also made of plates aligned with the stack plates. For this simple configuration, comparison was possible between the numerical results and a theoretical analysis based on Rott's linear theory. Good agreement was found for both the critical temperature ratio and the dominant oscillation frequency. The hybrid numerical model will be most useful whenever a realistic active cell with complex geometry must be dealt with, for example, for misaligned plates or even fully three-dimensional configurations.

The current model of a lossless resonator associated with a resistance placed at the resonator end can be extended to describe real loads to which the thermoacoustic engine is coupled. The approach used also allows one to account for dissipation in a simple experimental resonator with a closed end,[8] provided the resistive load value is adequately chosen. In that case, the load is mainly associated with the thermal resistance of the resonator.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was financed by a Ph.D. grant from Université Pierre et Marie Curie. Support of the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada is gratefully acknowledged (L.B.).

[1]G. W. Swift, "Thermoacoustic engines," J. Acoust. Soc. Am. **84**, 1145–1180 (1988).
[2]R. Radebaugh, "A review of pulse tube refrigeration," Adv. Cryog. Eng. **35B**, 1191–1205 (1990).
[3]A. Miglori and G. W. Swift, "Liquid sodium thermoacoustic engine," Appl. Phys. Lett. **53**, 355–357 (1988).
[4]C. Jensen and R. Raspet, "Thermoacoustic power conversion using piezoelectric transducer," J. Acoust. Soc. Am. **128**(1), 98–103 (2010).
[5]N. Rott, "Damped and thermally driven acoustic oscillations in wide and narrow tubes," Z. Angew. Math. Phys. **20**, 230–243 (1969).
[6]W. P. Arnott, H. E. Bass, and R. Raspet, "General formulation of thermoacoustics for stacks having arbitrarily shaped pore cross section," J. Acoust. Soc. Am. **90**, 3228–3237 (1991).
[7]B. Ward, J. Clark, and G. W. Swift, "Design environment for low-amplitude thermoacoustic energy conversion (DeltaEC) user's guide (version 6.2)," Los Alamos National Laboratory (2008).

[8]A. A. Atchley and F. M. Kuo, "Stability curves for a thermoacoustic prime mover," J. Acoust. Soc. Am. **95**, 1401–1404 (1994).
[9]W. P. Arnott, J. R. Belcher, R. Raspet, and H. E. Bass, "Stability analysis of a helium-filled thermoacoustic engine," J. Acoust. Soc. Am. **96**, 370–375 (1994).
[10]T. Yazaki, A. Iwata, T. Maekawa, and T. Tominaga, "Travelling wave thermoacoustic engine in a looped tubeT," Phys. Rev. Lett. **81**, 3128–3131 (1998).
[11]N. Sugimoto, "Thermoacoustic-wave equations for gas in a channel and a tube subject to temperature gradient," J. Fluid Mech. **658**, 89–116 (2010).
[12]H. Hyodo and N. Sugimoto, "Stability analysis for the onset of thermoacoustic oscillations in a gas-filled looped tube," J. Fluid Mech. **741**, 585–618 (2014).
[13]A. T. A. M. de Waele, "Basic treatement of onset conditions and transient effects in thermoacoustic Stirling engines," J. Sound Vib. **325**, 974–988 (2009).
[14]M. Guedra, G. Penelet, P. Lotton, and J.-P. Dalmont, "Theoretical prediction of the onset of thermoacoustic instability from the experimental transfer matrix of a thermoacoustic core," J. Acoust. Soc. Am. **130**, 145–152 (2011).
[15]M. Guedra, G. Penelet, and P. Lotton, "Experimental and theoretical study of the dynamics of self-sustained oscillations in a standing wave thermoacoustic engine," J. Appl. Phys. **115**, 024504 (2014).
[16]J. R. Olson and G. W. Swift, "A loaded thermoacoustic engine," J. Acoust. Soc. Am. **98**, 2690–2693 (1995).
[17]R. Bao, G. B. Chen, K. Tang, Z. Z. Jia, and W. H. Cao, "Effect of RC load on performance of thermoacoustic engine," Cryogenics **46**, 666–671 (2006).
[18]P. Duthil, D. Baltean Carlès, A. Bétrancourt, M.-X. François, Z. B. Yu, and J. P. Thermeau, "Experiments and valve modeling in thermoacoustic device," Adv. Cryog. Eng. **51**(B), 1095–1102 (2006).
[19]H. Hatori, T. Biwa, and T. Yazaki, "How to build a loaded thermoacoustic engine," J. Appl. Phys. **111**, 074905 (2012).
[20]G. Y. Yu, E. C. Luo, W. Dai, and J. Y. Hu, "Study of nonlinear processes of a large experimental thermoacoustic-Stirling heat engine by using computational fluid dynamics," J. Appl. Phys. **102**, 074901 (2007).
[21]J. A. Lycklama à Nijeholt, M. E. H. Tijani, and S. Spoelstra, "Simulation of a traveling-wave thermoacoustic engine using computational fluid dynamics," J. Acoust. Soc. Am. **118**, 2265–2270 (2005).
[22]O. Hireche, C. Weisman, D. Baltean-Carlès, P. Le Quéré, and L. Bauwens, "Low Mach number analysis of idealized thermoacoustic engines with numerical solution," J. Acoust. Soc. Am. **128**(6), 3438–3448 (2010).
[23]R. Raspet, J. Bruster, and H. E. Bass, "New approximation method for thermoacoustic calculations," J. Acoust. Soc. Am. **103**(5), 2395–2402 (1998).
[24]N. Rott, "Thermoacoustics," Adv. Appl. Mech. **20**, 135–243 (1980).
[25]G. W. Swift, *A Unifying Perspective for Some Engines and Refrigerators* (Acoustical Society of America, Melville, NY, 2002), p. 90, Eq. 4.70.
[26]A. A. Atchley, H. E. Bass, T. J. Hofler, and H. T. Lin, "Study of a thermoacoustic prime mover below onset of self-oscillation," J. Acoust. Soc. Am. **91**, 734–743 (1992).

V. Daru, D. Baltean-Carlès, C. Weisman, P. Debesse, G. Gandikota
Two-dimensional numerical simulations of nonlinear acoustic streaming in standing waves
Wave Motion 50, 955-963 (2013).

Wave Motion 50 (2013) 955–963

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

Wave Motion

journal homepage: www.elsevier.com/locate/wavemoti

Two-dimensional numerical simulations of nonlinear acoustic streaming in standing waves

Virginie Daru [a,b,*], Diana Baltean-Carlès [a,c], Catherine Weisman [a,c], Philippe Debesse [a], Gurunath Gandikota [a]

[a] LIMSI-UPR CNRS 3251, BP133, 91403 Orsay Cedex, France
[b] Arts et Métiers ParisTech, Lab. DynFluid, 151 bd de l'hôpital, 75013 Paris, France
[c] Université Pierre et Marie Curie, 4 Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

HIGHLIGHTS

- Numerical simulations of acoustic streaming in standing wave 2D channels are shown.
- Compressible Navier–Stokes equations are solved with high-order differential schemes.
- The transition from regular to irregular streaming flow regimes is described.
- Simulations are in good alinement with experiments of nonlinear streaming regimes.
- Intricate coupling exists between the mean temperature field and the streaming flow.

ARTICLE INFO

Article history:
Received 4 August 2012
Received in revised form 17 March 2013
Accepted 21 March 2013
Available online 1 April 2013

Keywords:
Acoustic streaming
Standing wave
Numerical simulation
Nonlinear streaming regime

ABSTRACT

Numerical simulations of compressible Navier–Stokes equations in closed two-dimensional channels are performed. A plane standing wave is excited inside the channel and the associated acoustic streaming is investigated for high intensity waves, in the nonlinear streaming regime. Significant distortion of streaming cells is observed, with the centers of streaming cells pushed toward the end-walls. The mean temperature evolution associated with the streaming motion is also investigated.

© 2013 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

Acoustic streaming is generated inside a two-dimensional channel as a consequence of the interaction between a plane standing wave and the solid boundaries. It consists of a mean second order flow produced mainly by shear forces within the viscous boundary layer along the solid walls. This motion was initially studied by Rayleigh [1] in the case of wide channels, in which the boundary layer thickness is negligible in comparison with the channel width. This streaming flow is characterized by four steady counter-rotating vortices in one-half wavelength of the standing wave outside the boundary layer, nowadays referred to as Rayleigh streaming. The vortices develop along the half wavelength of the standing wave. Along the central axis of the channel, the streaming motion is oriented from axial particle velocity nodes to antinodes. Inside the boundary layer four additional vortices are created simultaneously, with the streaming motion oriented from axial particle velocity antinodes to nodes along the inner walls of the tube [2,3].

* Corresponding author at: LIMSI-UPR CNRS 3251, BP133, 91403 Orsay Cedex, France. Tel.: +33 169858078.
E-mail address: virginie.daru@limsi.fr (V. Daru).

0165-2125/$ – see front matter © 2013 Elsevier B.V. All rights reserved.
http://dx.doi.org/10.1016/j.wavemoti.2013.03.004

In the case of wide channels, Menguy and Gilbert [4] showed that streaming itself can be linear (case of slow streaming) or nonlinear (case of fast streaming), and both regimes are characterized by a reference nonlinear Reynolds number $Re_{NL} = (M \times y_0/\delta_\nu)^2$ reflecting the influence of inertial effects on the streaming flow (M is the acoustic Mach number, $M = U_{max}/c_0$, with U_{max} the maximum axial particle velocity inside the channel and c_0 the initial speed of sound, y_0 is the half width of the channel and δ_ν the viscous boundary layer thickness). The value of Re_{NL} determines the magnitude of the nonlinear hydrodynamic effect of the fluid inertia in the time-averaged momentum equation for the streaming velocity field [4]. Most analytical streaming models have been established in the case of slow streaming, characterized by $Re_{NL} \ll 1$. They are based on successive approximations of the nonlinear hydrodynamic equations and have been derived for arbitrary values of the ratio y_0/δ_ν, taking into account the variations of heat conduction and viscosity with temperature [5], and the existence of a longitudinal temperature gradient [6]. In the case $Re_{NL} = O(1)$, Menguy and Gilbert [4] derived an asymptotic model for streaming flow inside wide cylindrical resonators, with no mean temperature gradient, and showed a distortion of streaming patterns due to inertia effects. However, this model does not cover the strongly nonlinear streaming regime ($Re_{NL} \gg 1$), and does not explain the nonlinear effects on acoustic streaming recently observed in several experimental works [7–9], where the temperature gradient along the resonator wall has a significant influence.

Numerical simulations in the linear regime, yielding results for non idealized geometries, were performed in the specific cases of thermoacoustic refrigerators [10] or in annular resonators [11] and solved the dynamics of the flow without taking heat transfer into account.

Simulations in the nonlinear regime were first performed by Yano [12], who studied the acoustic streaming associated with resonant oscillations with periodic shock waves in tubes with aspect ratio (width over length) very large (0.1). He solved the full 2D Navier–Stokes equations with an upwind finite-difference TVD scheme and showed the existence of irregular vortex structures and even turbulent streaming for high streaming Reynolds numbers (based on a characteristic streaming velocity, the tube length, and the kinematic viscosity, $R_s = U_s L/\nu$). This is a different configuration than our configuration, since it considers low frequency acoustic waves in wide tubes with respect to their length and focuses on turbulent streaming.

Simulations of acoustic streaming in the linear and nonlinear regime, taking heat transfer into account, in a two-dimensional rectangular enclosure, were performed by Aktas and Farouk [13]. In their study, the wave is created by vibrating the left wall of the enclosure and the full compressible Navier–Stokes equations are solved, with an explicit time-marching algorithm (a fourth order flux-corrected transport algorithm) to track the acoustic waves. Their numerical results are in agreement with theoretical results in the linear regime and show irregular streaming motion in the nonlinear regime, but they show the existence of irregular streaming at small values of Re_{NL}, in contradiction with experiments cited above. Moreover, these simulations do not analyze the deformation of the streaming cells until they split onto several cells.

We propose in this work to conduct numerical 2D compressible simulations for studying the origin of the distortion of streaming cells (of Rayleigh type) that were experimentally observed. Calculations are performed for channels with aspect ratios ranging from 0.01 to 0.07, and the coupling between streaming effects and thermal effects in the channel (existence of a mean temperature gradient) is also investigated.

2. Problem description and numerical model

We consider a rectangular channel of length L and half width y_0, initially filled with the working gas. In order to initiate an acoustic standing wave in the channel, it is shaken in the longitudinal direction (x), so that an harmonic velocity law is imposed, $\mathbf{V}(t) = (V(t), 0)^T$, with $V(t) = x_p\omega\cos(\omega t)$, ω being the angular frequency and x_p the amplitude of the channel displacement. The channel being undeformable, the flow can be modeled by the compressible Navier–Stokes equations expressed in the moving frame attached to the channel, so that a forcing source term is added. The model reads

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0 \\ \dfrac{\partial \rho\mathbf{v}}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}) + \nabla p = \nabla\cdot(\bar{\bar{\tau}}) - \rho\dfrac{d\mathbf{V}}{dt} \\ \dfrac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho E\mathbf{v} + p\mathbf{v}) = \nabla\cdot(k\nabla T) + \nabla\cdot(\bar{\bar{\tau}}\mathbf{v}) - \rho\mathbf{v}\cdot\dfrac{d\mathbf{V}}{dt} \end{cases} \tag{1}$$

where $\mathbf{v} = (u, v)^T$ is the flow velocity, $E = e + \frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ is the total energy, with $e = \frac{p}{(\gamma-1)\rho}$ the internal energy, γ the specific heat ratio, $\bar{\bar{\tau}} = -\frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\mathbf{v})\bar{\bar{I}} + 2\mu\bar{\bar{D}}$ the viscous stress tensor of a Newtonian fluid, $\bar{\bar{D}}$ the strain tensor, μ the dynamic viscosity, k the thermal conductivity. The thermo-physical properties μ and k are supposed to be constant. The gas is considered as a perfect gas obeying the state law $p = r\rho T$, where T is the temperature and r is the perfect gas constant corresponding to the working gas. The physical boundary conditions employed in the moving frame are no slip and isothermal walls.

The model is numerically solved by using high order finite difference schemes, developed in Daru and Tenaud [14]. An upwind scheme, third order accurate in time and space, is used for convective terms, and a centered scheme, second order, is used for diffusion terms. More detail about the scheme and computations showing its good qualities can be found in Daru and Gloerfelt [15] and Daru and Tenaud [16]. This scheme can be derived up to an arbitrary order of accuracy for convective terms in the case of a scalar equation. Here the third order scheme is selected, after having done several comparisons using

higher order schemes (up to the 11th order), that have shown that third order gives sufficient accuracy for a reasonable CPU cost. In cases where shock waves are present, the scheme can be equipped with a flux limiter (MP), preserving monotonicity, intended for suppressing the parasitic numerical oscillations generated in the shock region, while preserving the accuracy of the scheme in smooth regions. However, the flows considered here are always low Mach number flows. Although traveling shock waves are a main feature of the flow for high acoustics levels, as noticed by several authors [17], they are of weak intensity and the numerical oscillations are very small and do not spoil the solution. Thus the MP limiter, which is expensive in terms of CPU cost, was not activated in these calculations. For solving the 2D Navier–Stokes equations, the scheme is implemented using Strang splitting. This reduces the formal accuracy of the scheme to second order. However, numerical experiments have shown that a very low level of error is still achieved.

Let us describe our numerical procedure. The system (1) can be written in vector form:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f - f^v) + \frac{\partial}{\partial y}(g - g^v) = h \tag{2}$$

where w is the vector of conservative variables $(\rho, \rho u, \rho v, \rho E)^T$, f and g are the inviscid fluxes $f = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho Eu + pu)^T$ and $g = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, \rho Ev + pv)^T$, f^v and g^v being the viscous fluxes $f^v = (0, \tau_{xx}, \tau_{xy}, k\frac{\partial T}{\partial x} + u\tau_{xx} + v\tau_{xy})^T$, $g^v = (0, \tau_{xy}, \tau_{yy}, k\frac{\partial T}{\partial y} + u\tau_{xy} + v\tau_{yy})^T$. The source term reads $h = (0, -\rho\frac{dV}{dt}, 0, -\rho u\frac{dV}{dt})^T$. Denoting by $w^n_{i,j}$ the numerical solution at time $t = n\delta t$ and grid point $(x, y) = (i\delta x, j\delta y)$, we use the following Strang splitting procedure to obtain second order of accuracy every two time steps:

$$w^{n+2}_{i,j} = L_{\delta x} L_{\delta y} L_{\delta y} L_{\delta x} w^n_{ij} \tag{3}$$

where $L_{\delta x}$ (resp. $L_{\delta y}$) is a discrete approximation of $L_x(w) = w + \delta t(-f_x + f^v_x + h)$ (resp. $L_y(w) = w + \delta t(-g_y + g^v_y)$). The 1D operators being similar in the two directions, we only describe the x operator. The scheme is implemented as a correction to the second order MacCormack scheme. It consists of three steps, as follows:

$$\begin{aligned} w^*_{i,j} &= w^n_{i,j} - \frac{\delta t}{\delta x}(f_{i+1,j} - f_{i,j} - f^v_{i+1/2,j} + f^v_{i-1/2,j})^n + \delta t\, h^n_{i,j} \\ w^{**}_{i,j} &= w^*_{i,j} - \frac{\delta t}{\delta x}(f_{i,j} - f_{i-1,j} - f^v_{i+1/2,j} + f^v_{i-1/2,j})^* \\ w^{n+1}_{i,j} &= \frac{1}{2}(w^n_{i,j} + w^{**}_{i,j}) + C^x_{i+1/2,j} - C^x_{i-1/2,j}. \end{aligned} \tag{4}$$

The viscous fluxes are discretized at each interface using centered second order finite differences formulas. The corrective term $C^x_{i+1/2,j} - C^x_{i-1/2,j}$ provides the third order accuracy and the upwinding for the inviscid terms. Let us define $\psi_{i+1/2,j} = \frac{1}{6}\sum_{l=1}^{4}\left\{|\nu^l_{i+1/2,j}|(1 - \nu^l_{i+1/2,j})(1 + \nu^l_{i+1/2,j})\delta\alpha^l_{i+1/2,j} \cdot d^l_{i+1/2,j}\right\}$, where $\nu^l = \frac{\delta t}{\delta x}\lambda^l$, λ^l and d^l are the eigenvalues and eigenvectors of the Roe-averaged Jacobian matrix $A = \frac{df}{dw}$ [18], and $\delta\alpha^l$ is the contribution of the l-wave to the variation $(w^n_{i+1/2,j} - w^n_{i-1/2,j})$. Using the function ψ, the corrective term reads

$$C^x_{i+1/2,j} = \begin{cases} -\psi^n_{i+1/2,j} + \psi^n_{i-1/2,j} & \text{if } \nu_{i+1/2,j} \geq 0 \\ \psi^n_{i+3/2,j} - \psi^n_{i+1/2,j} & \text{if } \nu_{i+1/2,j} < 0. \end{cases} \tag{5}$$

This completes the description of the numerical method.

We are interested in the acoustic streaming generated by the interaction of the imposed plane standing wave and the channel wall. Resonant conditions are imposed, for which $L = \lambda/2$, $\lambda = c_0/f$ being the wavelength, c_0 the speed of sound for initial state and f the vibration frequency of the channel. It is known [5] that boundary layers develop along the walls, with thickness $\delta_\nu = \sqrt{2\nu/\omega}$, ν being the kinematic viscosity $\nu = \mu/\rho_0$, and ρ_0 the density at initial state. Depending on the value of the ratio y_0/δ_ν, several patterns of streaming can appear: Rayleigh-type streaming in the central region, and boundary layer type streaming near the longitudinal walls. The boundary layer is of small thickness and must be correctly resolved by the discretization mesh. After several trials, we have determined that a value of 5 points per boundary layer thickness is sufficient for reasonable accuracy of the simulations. The results obtained using 10 points per boundary layer thickness show very small differences with the former, the maximum value of the differences being less than 3%. All results presented below are thus obtained using a cartesian mesh of rectangular cells of constant size δx and δy, composed of 500 points in the axial direction x, and of $5 \times y_0/\delta_\nu$ points in the y direction normal to the axis. In the considered geometry, this leads to cells such that $\delta x = 5.8\ \delta y$, which is sufficient to correctly solve the equations in the region close to the vertical walls. The flow being symmetrical with respect to the x axis (at least in the range of parameters treated), only the upper half of the channel was considered. Also, the scheme being fully explicit, the time step δt is fixed such as to satisfy the stability condition of the scheme which can be written as

$$\delta t \leq \frac{1}{2}\min(\delta y^2/\nu, \delta y^2/(k/\rho_0 c_0), \delta y/c_0). \tag{6}$$

Table 1
Values of the parameters of the simulations.

$x_p(\mu m)$	5	10	50	80	100
U_{max}(m/s)	7.0	26.45	61.11	70.94	89.96
y_0/δ_ν	10	40	20	10	20
y_0/L	0.0180	0.0718	0.0359	0.018	0.0359
Re_{NL}	0.041	9.469	12.636	4.257	27.384

As shown in Eq. (6), the first two limiting values $\delta y^2/\nu$ and $\delta y^2/(k/\rho_0 c_0)$ are related to the viscous and thermal conduction terms, and the third one $\delta y/c_0$ is related to the acoustic propagation. In all cases considered here, the time step limitation is acoustic, *i.e.* $\delta t \leq \frac{1}{2}\delta y/c_0$. Taking $\delta t = \frac{1}{2}\delta y/c_0$ and $\delta y = \delta_\nu/5$, this results in a number of time steps N_T per period of oscillation proportional to $\sqrt{L}$, $N_T = 1/(f\delta t) = 10\sqrt{\frac{2\pi c_0}{\nu}}\sqrt{L}$. Since transients of several hundreds of periods may be needed in order to reach stabilized steady streaming flow, simulations are very costly, and one must rely on numerical schemes that are sufficiently accurate in both space and time.

Finally, the mean flow is obtained from calculating a simple mean value for each physical quantity (velocity, pressure, temperature) over an acoustic period, which for example in the case of velocity can be written as

$$\bar{\mathbf{v}}^E_{i,j} = \frac{1}{N_T}\sum_{n=1}^{N_T}\mathbf{v}^n_{i,j}. \tag{7}$$

The mean velocity obtained in Eq. (7) can be understood as a "Eulerian" time-average velocity. Similarly, an "average mass transport" velocity, associated with the streaming mass transport, could also be computed, as the Eulerian time-average of mass flux vector divided by the Eulerian time-average of gas density:

$$\bar{\mathbf{v}}^M_{i,j} = \frac{\sum_{n=1}^{N_T}\rho^n_{i,j}\mathbf{v}^n_{i,j}}{\sum_{n=1}^{N_T}\rho^n_{i,j}}. \tag{8}$$

For weakly nonlinear regimes, the difference between these two velocities is significant only in the boundary layer, and in the case of wide channels they are almost the same. In order to observe the mechanism of cell distortion, either one of these velocities can be monitored.

3. Numerical results

We consider a channel initially filled with air at standard thermodynamic conditions, $p_0 = 101{,}325$ Pa, $\rho_0 = 1.2$ kg m^{-3}, $T_0 = 294.15$ K. The thermo-physical properties of air are $\mu = 1.795\ 10^{-5}$ kg m^{-1} s^{-1} and $k = 0.025$ W m^{-1} K^{-1}. Also for air, $\gamma = 1.4$ and $r = 287.06$ J kg^{-1} K^{-1}. The Prandtl number Pr is equal to 0.726. This results in an initial speed of sound $c_0 = 343.82$ ms^{-1}.

For a 1 m long channel, the limiting time step would correspond to $N_T \approx 25{,}000\sqrt{L}$, that is 25,000 iterations per period. Since transients of several hundreds of periods may be needed in order to reach stabilized streaming flow, several millions of iterations are necessary for each simulation. Considering these numerical constraints, a shorter channel is considered, with $L = 8.59$ mm. This corresponds to a high-frequency wave, with $f = 20{,}000$ Hz. The resulting boundary layer thickness is $\delta_\nu = 1.54\ 10^{-5}$ m. The time step $\delta t = 8\ 10^{-9}$ s is chosen in order to satisfy the numerical stability condition, corresponding to 6250 time iterations per period for a mesh involving 5 grid points across the boundary layer thickness. The axial particle velocity produced in the channel depends on the amplitude of the channel displacement and on the ratio y_0/δ_ν. It varies approximately linearly with the amplitude of the channel displacement, for a given ratio y_0/δ_ν. Table 1 summarizes the different parameter values corresponding to the simulations that are presented thereafter.

As mentioned earlier, the parameter identified as relevant in describing the regularity of streaming flow is the nonlinear Reynolds number Re_{NL} introduced by Menguy and Gilbert [4]. In this paper we used a slightly different definition for Re_{NL}, because the definition of the viscous boundary layer thickness is different. Our Reynolds number corresponds to half of that of Menguy and Gilbert [4].

We first present results concerning the main acoustic field in the channel, for a small value of Re_{NL} corresponding to slow streaming. In Fig. 1(a) is represented the velocity signal at the center of the channel, as a function of the number of periods elapsed. At this location, the axial particle velocity amplitude is maximum since it corresponds to the antinode. For this value of Re_{NL}, the problem is nearly linear and the final signal is purely sinusoidal, in agreement with the linear theory. The amplification of the initial perturbation until saturation can be observed. The periodic regime is established after about 20 periods. Fig. 1(b) shows the time evolution of the mean horizontal velocity (over an acoustic period) and of the mean temperature difference $\Delta T = T - T_0$ (also over an acoustic period) on the axis, at $x = \lambda/8$. At this location the streaming velocity is maximum. It can be noticed that the steady streaming field is established also after about 20 periods which is

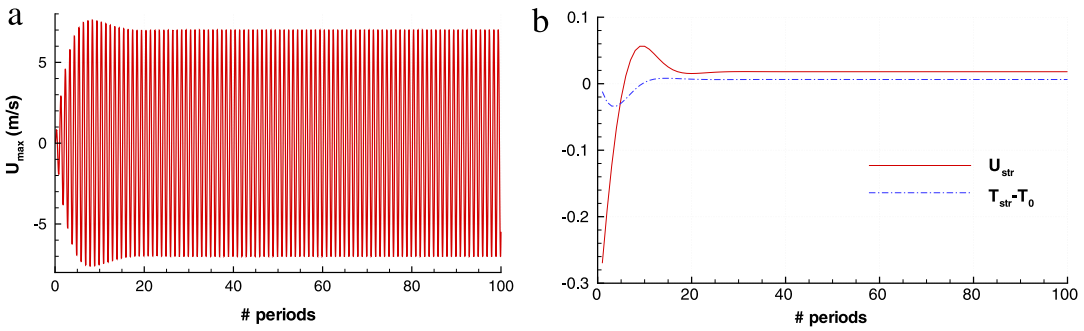


Fig. 1. (a) Axial particle velocity at the channel's center, as a function of time counted by the number of periods elapsed. (b) Mean horizontal velocity and mean temperature variation, on the channel's axis at $x = \lambda/8$. Case $Re_{NL} = 0.041$ ($y_0/\delta_\nu = 10$, $M = 0.02$).

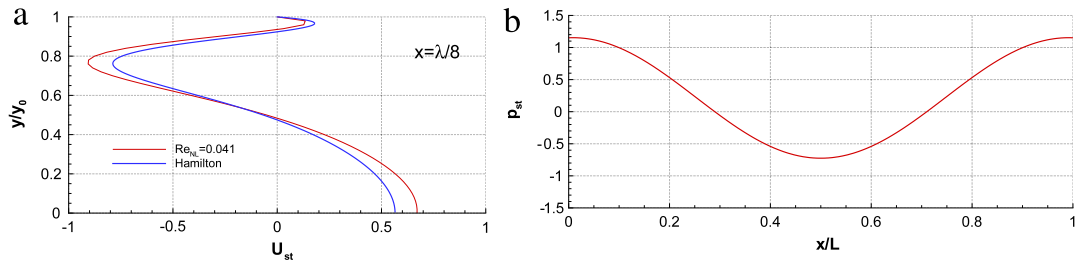


Fig. 2. (a) U_{st} as a function of y/y_0 at $x = \lambda/8$, numerical (present study) and analytical [20] results. (b) Dimensionless mean fluctuating pressure, $p - p_0$ along the channel's axis. Case $Re_{NL} = 0.041$ ($y_0/\delta_\nu = 10$, $M = 0.02$).

of the same order of magnitude as the theoretical characteristic streaming timescale $\tau_c = (\frac{2y_0}{\pi})^2 \frac{1}{\nu}$ (see Amari, Gusev and Joly [19]) which in this case gives n_c periods for reaching steady-state, with $n_c = 13$. In Fig. 2(a) is shown the variation of the axial dimensionless streaming velocity at $x = \lambda/8$ along the channel's width, compared with results computed using the analytical expressions of Hamilton, Ilinskii and Zabolotskaya [20]. In this figure, the reference velocity is the Rayleigh streaming reference velocity [2,5], $u_{\text{Rayleigh}} = \frac{3}{16} U_{\max}^2/c_0$. The slight discrepancy between the numerical and the analytical profiles is probably due to the presence of the vertical end walls, which is not accounted for in the model of Hamilton, Ilinskii and Zabolotskaya [20]. In Fig. 2(b) is shown the stabilized mean pressure $p - p_0$ (over an acoustic period), scaled by $(\gamma/4)p_0M^2$, along the channel's axis. It is the second order average pressure resulting from the streaming flow, which is clearly one-dimensional and has a cosine variation with respect to x, as expected in the linear regime of streaming. In the present case, there is an offset pressure p_{off}, corresponding to an increase of the mean pressure and temperature inside the channel, due to the harmonic forcing source term. When subtracting off this offset pressure, the theoretical result for the dimensionless hydrodynamic streaming pressure is obtained, $P_{2s} = \cos 4\pi \frac{x}{\lambda}$ (see Menguy and Gilbert [4]).

Simulations are then performed for several values of Re_{NL} corresponding to configurations ranging from slow streaming flow ($Re_{NL} = 0.041$) to fast streaming flow ($Re_{NL} = 27.384$), for several values of the cavity width ($y_0/\delta_\nu = 10, 20, 40$), and for increasing acoustic velocities, with Mach numbers ranging from $M = 0.02$ to $M = 0.27$ so that shock waves can occur. This can be seen in Fig. 3(right) showing the axial velocity signal at channel's center as a function of time counted by the number of periods elapsed. In Fig. 3(a)(right) the signal contains only one frequency, but for all other cases, there are shock waves and the axial velocity signal is distorted in a "U" shape, because of the presence of odd harmonics (3, 5, etc.). Fig. 3(left) shows the streamlines of the streaming velocity field over the whole length and only over the top half width of the channel. As expected, in the case of small Re_{NL} number values (Fig. 3(a)), four symmetric streaming cells develop over the length and the half width of the channel: two cells in the boundary layer, and two cells in the core of the channel, identified in the literature as Rayleigh streaming. These results are in agreement with the predictions of analytical models of streaming flows [5,6], and with experimental measurements [7]. The only noticeable difference is the slight asymmetry of cells with respect to the vertical lines $x = \lambda/8$ and $x = 3\lambda/8$, due to the presence of boundary layers along the vertical end walls. Indeed the effects of the vertical end walls are accounted for in the present simulations but are neglected in the analytical models and are very far from the measurement area in the experiments. Several simulations have shown that this asymmetry is independent of Re_{NL} as long as the value of the latter remains small with respect to 1. One can note that 2-D steady (time-periodic) streamlines shown in Fig. 3(left) correspond to the Eulerian time-average velocity defined in Eq. (7). They are not closed curves, even though steady streaming motion is completely established. If the streamlines were calculated for the average mass transport velocity of Eq. (8), they would be closed curves, since they would show streamlines of mass transport.

For $Re_{NL} > 1$, the steady streaming flow is established after the same characteristic time as in the linear case. The re-circulation cells become very asymmetric as Re_{NL} increases, and streaming flow becomes irregular (Fig. 3(b)–(e)(left)). This was also observed experimentally (with PIV measurements) by Nabavi, Siddiqui and Dargahi [8] in a rectangular enclosure. The centers of all streaming cells (boundary layer cells as well as central cells) are displaced toward the ends of the resonant

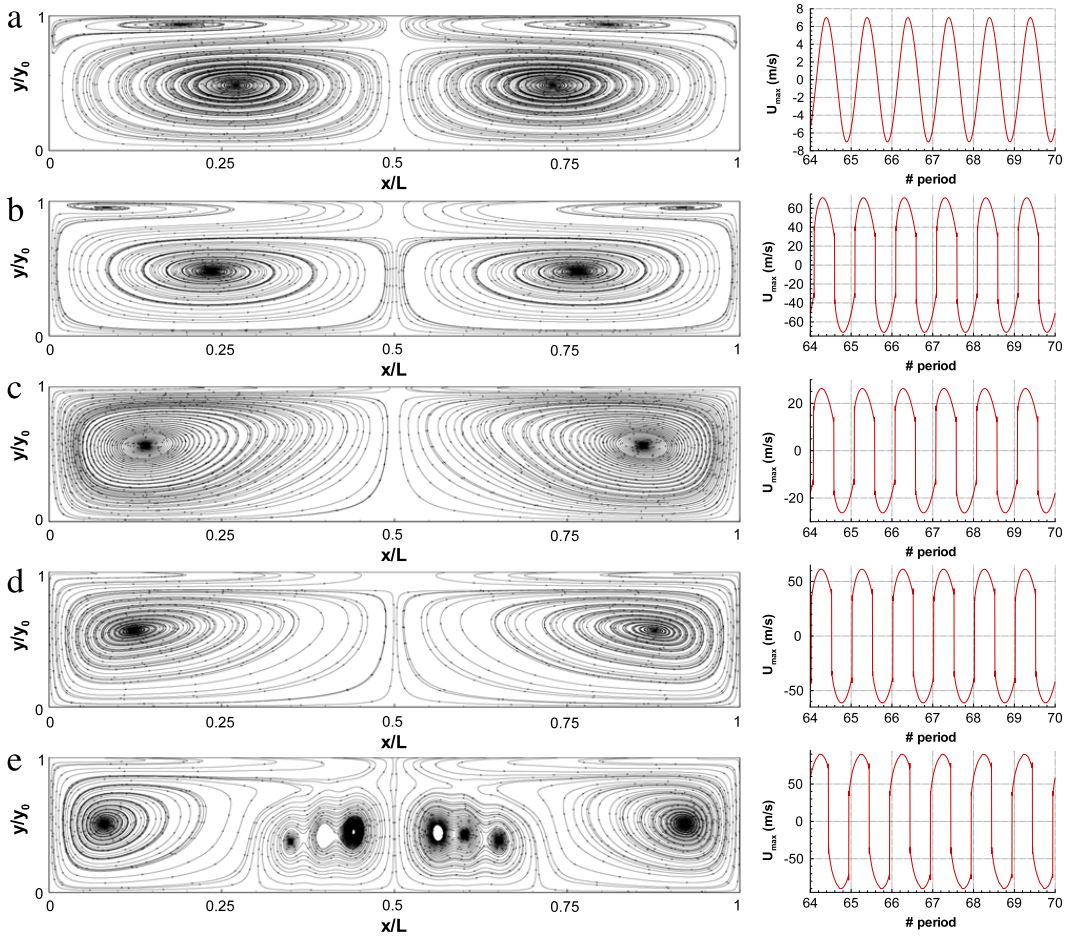


Fig. 3. Streamlines of mean flow on the top half of the channel (left) and axial particle velocity signal at channel's center as a function of time counted by the number of periods elapsed (right) (a) $Re_{NL} = 0.041$ ($y_0/\delta_\nu = 10, M = 0.02$). (b) $Re_{NL} = 4.257$ ($y_0/\delta_\nu = 10, M = 0.206$). (c) $Re_{NL} = 9.469$ ($y_0/\delta_\nu = 40, M = 0.077$). (d) $Re_{NL} = 12.636$ ($y_0/\delta_\nu = 20, M = 0.178$). (e) $Re_{NL} = 27.384$ ($y_0/\delta_\nu = 20, M = 0.262$). Lengths are normalized with L.

channel, close to the boundary layers next to the vertical walls. PIV measurements by Nabavi, Siddiqui and Dargahi [8] show the same distortion of streamlines between an axial particle velocity node and an antinode. Fig. 4(a) shows the x variation along the channel's central axis $y = 0$, of the axial dimensionless streaming velocity component, using as reference velocity the Rayleigh streaming reference velocity [2,5], $u_{\text{Rayleigh}} = \frac{3}{16} U_{\max}^2/c_0$. There is a clear modification of the velocity profiles as Re_{NL} increases: the sine function associated with slow streaming becomes steeper in the vicinity of both ends. The slope to the curve at the channel's center (axial particle velocity node) becomes smaller as Re_{NL} increases, then becomes close to zero (curve parallel to the longitudinal axis) for a critical value between 13 and 27, and then changes sign, which indicates the emergence of new streaming cells (Fig. 4(a)). Another consequence of the distortion of streaming cells can be observed on the acoustic streaming axial velocity profiles along the width of the channel, shown in Fig. 4(b)–(d). The parabolic behavior in the center of the channel at $x = \lambda/8$ disappears as Re_{NL} increases (see Fig. 4(b)), as a consequence of displacement of the center of each streaming cell toward the velocity node. Fig. 4(c), (d) also confirm the direction of the displacement of the streaming cells' centers. This distortion of streaming cells was already observed in experiments in rectangular or cylindrical geometries in wide channels [7–9]. Nabavi, Siddiqui and Dargahi [8] described it as irregular streaming and detected a critical nonlinear Reynolds number $Re_{NL} = 25$ that separates regular and irregular streaming, which is in agreement with our simulations. In the literature there is to our knowledge no other theoretical or numerical study confirming measurements in these streaming regimes. With the weakly nonlinear model of Menguy and Gilbert [4] the streaming can be calculated for a maximum value of $Re_{NL} = 2$ (in our definition), while the numerical simulations of Aktas and Farouk [13] show the existence of multiple streaming cells for a low value of $Re_{NL} = 1.4$, which is in contradiction with our results and with experiments. Moreover, these numerical simulations [13] do not analyze in detail the transition from two exterior streaming cells to more streaming cells.

According to Menguy and Gilbert [4], the fluid inertia causes distortion of streaming cells for large values of Re_{NL}. This was also verified through our simulations. For $Re_{NL} = O(1)$, the Mach number is still small (the wave is almost a mono-frequency wave) and the mean temperature difference inside the channel is smaller than 0.1 K (the mean temperature gradient is negligible). The approximations of the model by Menguy and Gilbert [4] still apply here, so we can say that the distortion is caused only by inertial effects. In their experimental study, Thompson, Atchley and Maccarone [9] show the existence of some distortion of the streaming field that are not predicted by existing models of the literature in the nonlinear regime. They do not relate this distortion to fluid inertia but rather to the influence of the mean temperature

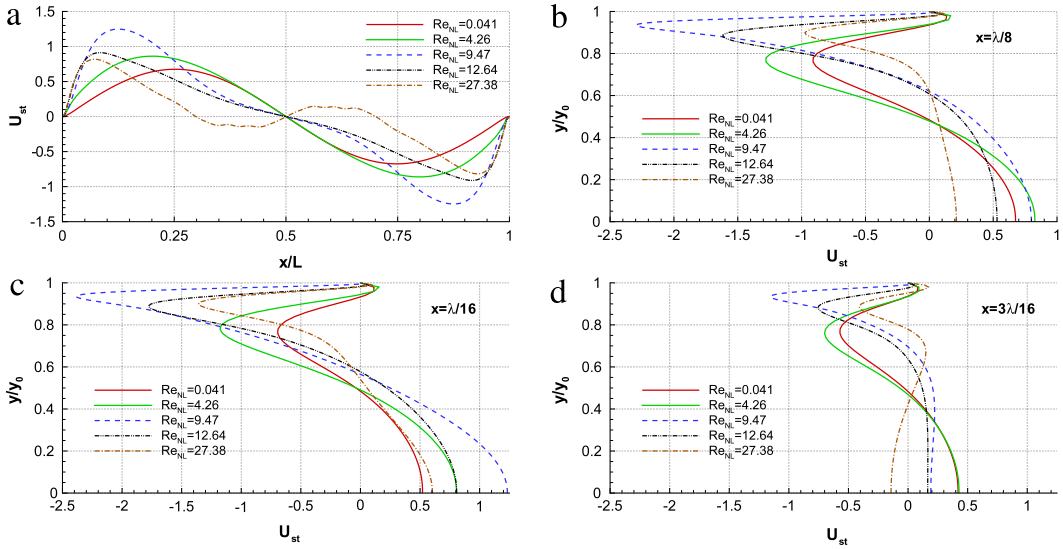


Fig. 4. Horizontal mean velocity component U_{st}, normalized with $\frac{3}{16}U_{\max}^2/c_0$ for the 5 cases of Fig. 3. (a) U_{st} along the channel's central axis. (b)–(d) U_{st} as a function of y/y_0 for several sections x.

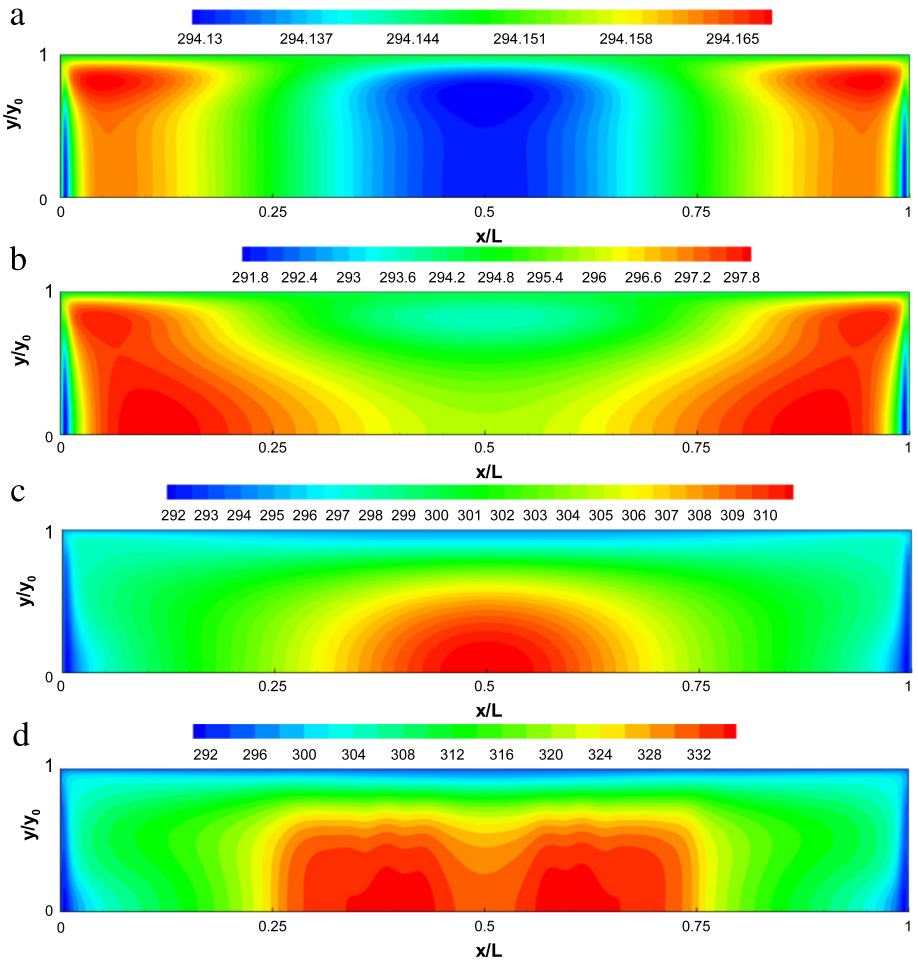


Fig. 5. Mean temperature field on the top half of the channel (a) $Re_{NL} = 0.041$. (b) $Re_{NL} = 4.257$. (c) $Re_{NL} = 12.636$. (d) $Re_{NL} = 27.383$. The difference between minimum and maximum values of temperature is (respectively): (a) $\Delta T = 0.039$ K, (b) $\Delta T = 6.39$ K, (c) $\Delta T = 19.4$ K, (d) $\Delta T = 44$ K.

field, and more specifically of the axial temperature gradient induced through a thermoacoustic effect along the horizontal walls of the resonating channel. In an experimental case with no shock waves Merkli and Thomann [17] showed that a mean temperature gradient is established inside the tube so that heat is removed close to the velocity antinodes, i.e. at the location of largest viscous dissipation, and heat is produced close to velocity nodes, along the lateral walls. Similar observations can

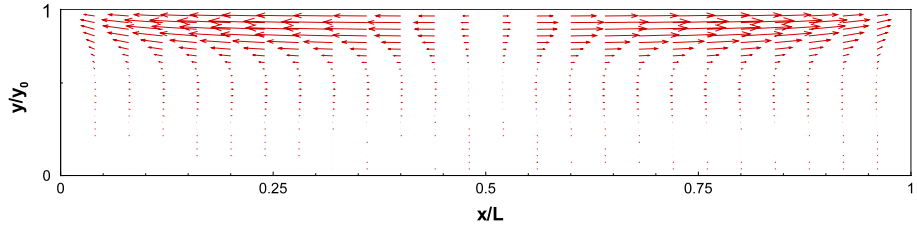


Fig. 6. Vector field for the second order hydrodynamic entropy flux, with only one out of twenty vectors shown in the axial direction, and one out of two vectors shown in the transverse direction, for $Re_{NL} = 0.041$.

be made in our simulations. Fig. 5 shows the mean temperature field for increasing values of Re_{NL}. Also, for a small value of Re_{NL}, Fig. 6 shows the corresponding vector field for the second order hydrodynamic entropy flux (corresponding to the induced thermoacoustic heat transfer in the case of a standing wave [21]). It is defined as the discrete mean value over the acoustic period of $\rho_0 T_0 \Delta s \mathbf{v}$, with Δs the excess entropy defined as $\Delta s = s - s_0 = c_v \log[(p/p_0)(\rho_0/\rho)^\gamma]$. For small values of Re_{NL}, as can be seen in Figs. 5(a) and 6 the thermoacoustic heat transfer takes place at a distance of one thermal boundary layer thickness and then heat diffuses in the radial direction, yielding a temperature field almost one-dimensional in the central part of the tube in the steady-state. Note that the prescribed temperature condition at the vertical walls influences the mean temperature field only close to the walls. The associated thermal boundary layer width remains about the same in all simulation cases, suggesting that it is linked to the acoustic boundary layer width δ_v.

When Re_{NL} increases, periodic shocks appear and the mean temperature gradient becomes important, potentially modifying the streaming patterns. The mean temperature field clearly becomes two-dimensional, as a consequence of both convective heat transport by streaming flow and heat conduction in both directions (Fig. 5(b)). Within the considered range of values of the nonlinear Reynolds number, there is a change of regime for the temperature field before $Re_{NL} = 12$, corresponding to the confinement of outer streaming cell toward the axial particle velocity node. Consequently a zone of very small streaming velocities is generated in the middle of the cavity and that induces the accumulation of heat (Fig. 5(c)). The mean temperature gradient changes the orientation and can cause the splitting of the outer cell into several cells when further increasing Re_{NL} (Fig. 5(d)).

Note that the streaming flow stabilizes in several stages in regimes with high values of the nonlinear Reynolds number. In a first and rapid stage (a few tens of periods), regular streaming flow appears. Then this regular streaming is destabilized along with increasing heterogeneity of the mean temperature field. The steady mean flow stabilizes much later, with timescales related to convection and heat conduction.

4. Conclusions

The numerical simulations performed demonstrate the transition from regular acoustic streaming flow toward irregular streaming, in agreement with existing experimental data. These are the first simulations, to our knowledge, in good alinement with experiments of nonlinear streaming regimes. Results show a sizable influence of vertical boundary layers for the chosen configuration. There is also intricate coupling between the mean temperature field and the streaming flow. This coupling effect will be the object of future work. Also, extension of current results in configurations with larger channels is currently in progress.

Acknowledgments

The authors wish to acknowledge many fruitful discussions with Joël Gilbert and Hélène Bailliet.

References

[1] Lord Rayleigh, On the circulation of air observed in Kundts tubes, and on some allied acoustical problems, Philos. Trans. R. Soc. Lond. 175 (1884) 1–21.
[2] W.L. Nyborg, Acoustic streaming, in: W.P. Mason (Ed.), Physical Acoustics, Vol. 2B, Academic Press, New York, 1965, pp. 265–331.
[3] H. Schlichting, Berechnung ebener periodischer Grenzschicht–Strommungen [calculation of plane periodic boundary layer streaming], Phys. Zcit. 33 (1932) 327–335.
[4] L. Menguy, J. Gilbert, Non-linear acoustic streaming accompanying a plane stationary wave in a guide, Acta Acust. 86 (2000) 249–259.
[5] M.F. Hamilton, Y.A. Ilinskii, E.A. Zabolotskaya, Acoustic streaming generated by standing waves in two-dimensional channels of arbitrary width, J. Acoust. Soc. Am. 113 (1) (2003) 153–160.
[6] H. Bailliet, V. Gusev, R. Raspet, R.A. Hiller, Acoustic streaming in closed thermoacoustic devices, J. Acoust. Soc. Am. 110 (2001) 1808–1821.
[7] S. Moreau, H. Bailliet, J.-C. Valière, Measurements of inner and outer streaming vortices in a standing waveguide using laser doppler velocimetry, J. Acoust. Soc. Am. 123 (2) (2008) 640–647.
[8] M. Nabavi, K. Siddiqui, J. Dargahi, Analysis of regular and irregular acoustic streaming patterns in a rectangular enclosure, Wave Motion 46 (2009) 312–322.
[9] M.W. Thompson, A.A. Atchley, M.J. Maccarone, Influences of a temperature gradient and fluid inertia on acoustic streaming in a standing wave, J. Acoust. Soc. Am. 117 (4) (2004) 1839–1849.
[10] D. Marx, P. Blanc-Benon, Computation of the mean velocity field above a stack plate in a thermoacoustic refrigerator, C. R. Mecanique 332 (2004) 867–874.

[11] A. Boufermel, N. Joly, P. Lotton, M. Amari, V. Gusev, Velocity of mass transport to model acoustic streaming: numerical application to annular resonators, Acta Acust. United Acust. 97 (2) (2011) 219–227.
[12] T. Yano, Turbulent acoustic streaming excited by resonant gas oscillation with periodic shock waves in a closed tube, J. Acoust. Soc. Am. 106 (1999) L7–L12.
[13] M.K. Aktas, B. Farouk, Numerical simulation of acoustic streaming generated by finite-amplitude resonant oscillations in an enclosure, J. Acoust. Soc. Am. 116 (5) (2004) 2822–2831.
[14] V. Daru, C. Tenaud, High order one-step monotonicity-preserving schemes for unsteady compressible flow calculations, J. Comput. Phys. 193 (2004) 563–594.
[15] V. Daru, X. Gloerfelt, Aeroacoustic computations using a high order shock-capturing scheme, AIAA J. 45 (10) (2007) 2474–2486.
[16] V. Daru, C. Tenaud, Numerical simulation of the viscous shock tube problem by using a high resolution monotonicity preserving scheme, Comput. Fluids 38 (3) (2009) 664–676.
[17] P. Merkli, H. Thomann, Thermoacoustic effects in a resonance tube, J. Fluid Mech. 70 (1) (1975) 161–177.
[18] P.L. Roe, Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes, J. Comput. Phys. 43 (1981) 357–372.
[19] M. Amari, V. Gusev, N. Joly, Temporal dynamics of the sound wind in acoustitron, Acta Acust. United Acust. 89 (2003) 1008–1024.
[20] M.F. Hamilton, Y.A. Ilinskii, E.A. Zabolotskaya, Thermal effects on acoustic streaming in standing waves, J. Acoust. Soc. Am. 114 (6) (2003) 3092–3101.
[21] G.W. Swift, Thermoacoustics: A Unifying Perspective for Some Engines and Refrigerators, Acoustical Society of America, Melville, NY, 2002.

V. Daru, C. Weisman, D. Baltean-Carlès, I. Reyt, H. Bailliet
Inertial effects on acoustic Rayleigh streaming flow : Transient and established regimes
Wave Motion 74, 1-17, 2017

Wave Motion 74 (2017) 1–17

Contents lists available at ScienceDirect

Wave Motion

journal homepage: www.elsevier.com/locate/wavemoti

Inertial effects on acoustic Rayleigh streaming flow: Transient and established regimes

Virginie Daru [a,b], Catherine Weisman [b,c], Diana Baltean-Carlès [b,c,*], Ida Reyt [a,d], Hélène Bailliet [d]

[a] Arts et Métiers ParisTech, Lab. DynFluid, 151 Bd. de l'Hôpital, 75013 Paris, France
[b] LIMSI, CNRS, Université Paris-Saclay, Bât. 508, Rue John Von Neumann, Campus Universitaire, F-91405 Orsay Cedex, France
[c] Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, UFR d'Ingénierie, 4 Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France
[d] Institut Pprime, CNRS - Université de Poitiers - ENSMA, ENSIP, 6 rue Marcel Doré, Bât. B17 - BP 633, 86022 Poitiers Cedex, France

HIGHLIGHTS

- Nonlinear inertial effects produce patterns different from DNS and experiments.
- Time evolutions of streaming cells near the wall and in the core are analyzed.
- The full streaming equations are solved numerically to obtain the established flow.
- Nonlinear inertial effects produce patterns different from DNS and experiments.
- Nonlinear inertial effects cannot explain the mutation of streaming at high levels.

ARTICLE INFO

Article history:
Received 27 October 2016
Received in revised form 21 April 2017
Accepted 5 June 2017
Available online 19 June 2017

Keywords:
Rayleigh streaming
Standing wave
Inertial effects
Nonlinear streaming
Transient evolution

ABSTRACT

The effect of inertia on Rayleigh streaming generated inside a cylindrical resonator where a mono-frequency standing wave is imposed, is investigated numerically and experimentally. To this effect, time evolutions of streaming cells in the near wall region and in the resonator core are analyzed. An analogy with the lid-driven cavity in a cylindrical geometry is presented in order to analyze the physical meanings of the characteristic times.

Inertial effects on the established streaming flow pattern are then investigated numerically using a code solving the time averaged Navier–Stokes compressible equations, where a mono-frequency acoustic flow field is used to compute the source terms.

It is shown that inertia of streaming cannot be considered as the leading phenomenon to explain the mutation of streaming at high acoustic levels.

© 2017 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

Acoustic streaming is often pointed out as being responsible for misunderstood thermal losses in thermoacoustic machines [1]. Among the different streaming flows found in such devices, Rayleigh streaming consists of a mean flow, of second order, which is produced by the interaction between the acoustic wave and a solid wall [2]. The pioneering work of Rayleigh was continued with the studies, among others, of Schlichting [3], Nyborg [4], Westervelt [5], Rudenko and Soluyan [6], yielding the steady streaming theory. Later, thermal effects were taken into account by Rott [7], the compressibility of the fluid by Qi [8] and more recently semi-analytical models adapted for thermoacoustic applications

* Corresponding author.
E-mail address: baltean@limsi.fr (D. Baltean-Carlès).

http://dx.doi.org/10.1016/j.wavemoti.2017.06.001
0165-2125/© 2017 Elsevier B.V. All rights reserved.

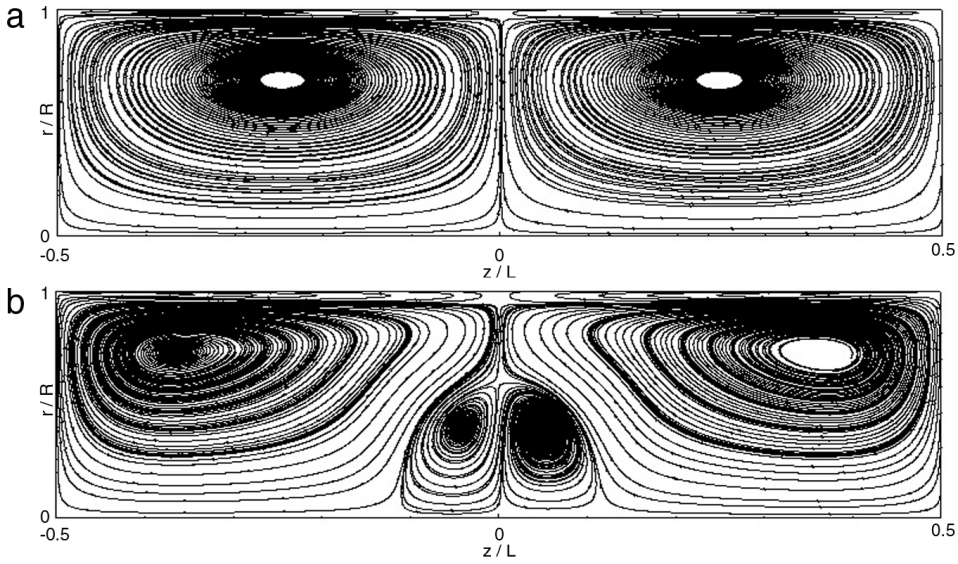


Fig. 1. Streamlines of streaming velocity fields without (a) and with (b) the extra contra-rotating cell (results of numerical simulations N_1 and N_2).

were developed (see for example [9,10]). These theoretical models, used to describe the streaming flow in the slow regime, are based on the method of successive approximations in powers of the Mach number, performed up to the second order and followed by time averaging over the acoustic period, yielding linear equations for streaming flow.

For high intensity acoustic waves, the streaming flow is referred to as nonlinear streaming or fast streaming. In this case, the effect of fluid inertia was first considered by [11–14] in unbounded or semi-infinite spaces, and more recently by Menguy and Gilbert [15] in resonators and thus for Rayleigh streaming. In the weakly nonlinear study proposed by [15], the method of successive approximations is performed up to the third order and separate solutions are obtained for the near-wall region (inner streaming) and in the resonator core (outer streaming). The global solution is obtained by applying matching conditions to the streaming velocity components. The inner streaming approximate equations were shown to remain linear in the weakly nonlinear case, while the outer streaming flow is affected by inertia [15].

Numerical simulations for acoustic Rayleigh streaming can be found in the literature starting in the 1990's. Two approaches are used: one is based on solving the full Navier–Stokes equations for low and high intensity waves and extract the mean flow from the instantaneous flow [16–18], and recently [19–22] and the other approach is based on solving streaming equations for the mean flow in the linear case [23,24] or in the nonlinear case [25]. Numerical simulations as well as experimental studies (for example [26,27]) in large resonators have shown the two regimes of streaming flows associated with standing waves: slow streaming similar to Rayleigh type streaming or fast streaming where the mean flow is strongly modified when the intensity of the acoustic wave is increased. The dimensionless number commonly used to differentiate between slow and fast streaming is the nonlinear Reynolds number Re_{NL} [15], defined by $Re_{NL} = (M \times R/\delta_\nu)^2$, where M is the acoustic Mach number, $M = U_{\max}/c_0$, with $U_{\max}$ the acoustic velocity amplitude at the velocity antinode and c_0 the speed of sound, R the guide radius and $\delta_\nu = \sqrt{2\nu/\omega}$ the acoustic boundary layer thickness, ω being the pulsation and ν the kinematic viscosity of the gas. Fig. 1(a) shows the streaming flow pattern (i.e. the streamlines for the steady mean velocity field, with the average performed over an acoustic period) in a half-plane containing the axis of a cylindrical waveguide of axial extension $\lambda/2$ in the slow streaming regime (result from the numerical simulation N_1 further described in this paper). This pattern is symmetrical with respect to the guide center and is composed of four streaming cells: two inner toroidal cells close to the tube wall and two outer toroidal cells in the core. The established streaming flow behavior for high acoustic amplitudes (i.e. in the nonlinear regime of streaming) was previously analyzed numerically [19] (with a DNS code) and experimentally [28]: additional streaming cells were observed inside the resonator [29]. Fig. 1(b) shows the distorted streaming pattern (result from the numerical simulation N_2 further described in this paper) in the fast streaming regime, when two new streaming cells are observed in the center of the guide, near the acoustic velocity antinode ($z/L = 0$) [19,28,29]. Several sources could potentially be responsible for this mutation of streaming pattern: thermal effects were considered [26], as well as nonlinear propagation [29] and it was concluded that inertial effects on acoustic streaming could be the main source [29]. In the literature there is no study available that allows to conclude about the role of inertia in the behavior of streaming when the latter is "fast". The current study aims at investigating the hypothesis that inertia is responsible for the mutation of streaming flow at high levels by using both experimental and numerical results.

In Section 2, numerical methods and experimental setup are presented. Section 3 describes the establishment of slow and fast streaming using numerical and experimental observations. Time evolutions of inner and outer streaming cells are discussed. In order to analyze the associated physics, Section 4 shows the streaming flow equations and a scale analysis used to point out the leading parameters. The characteristic time scales are estimated according to the configuration parameters and compared with numerical and experimental results.

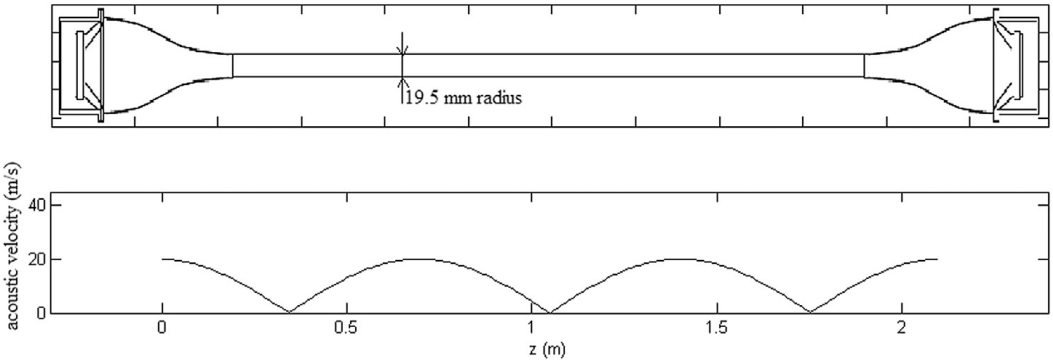


Fig. 2. Sketch of experimental setup and wave pattern for the working frequency.

In order to further isolate the driving effect of inner streaming on outer streaming, the problem of a flow inside a cylindrical tube with prescribed axial velocity on the walls is solved and analyzed in Section 5. Then the role of inertia on the established nonlinear streaming flow patterns is examined (Section 6) by solving the time-averaged isentropic Navier–Stokes compressible equations (AMS), where a mono-frequency acoustic flow field is used to compute the different terms that are sources of streaming flow. The effect of increasing the amplitude of the acoustic flow field on the streaming flow is analyzed. The results are compared with the predictions of the asymptotic model developed in [15] for the weakly nonlinear regime.

2. Methods and set-up

In this section, the experimental setup and the numerical configurations and methods used to investigate the effect of inertia during the establishment of the streaming flow and on the steady state flow are presented briefly (see [29] for more detail). The experimental and numerical configurations are very different in physical dimensions and in frequency but it was checked in [29] that they are asymptotically similar for acoustic and streaming flow. It was shown indeed that the same flow behavior is to be expected if $M \ll 1$, $Re_{ac} \gg 1$ and $Sh \ll 1$ (where $Re_{ac} = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\pi\delta_v}\right)^2$, $Sh = \frac{\delta_v}{R}$, λ being the acoustic wavelength). Both experimental and numerical configurations match these conditions (see Table 1 in [29]).

2.1. Experimental set-up

The set-up used to study acoustic streaming consists of a cylindrical glass tube of radius $R_{exp} = 19.5$ mm filled with air at atmospheric pressure and at ambient temperature (Fig. 2). In order to reach high acoustic levels, the acoustic sound wave is generated by two loudspeakers (one at each end of the guide), tuned at the same frequency, that are driven in opposite phase. Those loudspeakers are connected to the main part of the guide via connecting tubes designed to avoid separation effects related to the singularities in change of section. The total length of the wave guide is $L_{exp} = 2.13$ m and the system is tuned at a frequency $f_{exp} = 240$ Hz so that to excite the third mode of the system. This choice of working frequency allows to perform measurements on a streaming cell away from singularities. The set-up geometry prevents the wave distortion even at high levels.

A wave generator provides the loudspeakers input signal, whose frequency and amplitude are controlled, as well as a trigger reference signal, used to synchronize the laser Doppler measurement system. Velocity measurements are started when the acoustic field is switched on in order to measure the transient evolution of the streaming velocity field. Those measurements are performed at different locations within the streaming cells. The laser system used and the processing of the laser signal are described in [28].

2.2. Numerical methods

For the numerical calculation, we consider a cylindrical tube of length L and radius R, initially filled with air, considered as an ideal gas. An acoustic standing wave is initiated by shaking the tube in the axial direction (z) with given amplitude and frequency, so that a harmonic velocity law is imposed, $\mathbf{V}(t) = V(t)\vec{e}_z$, with $V(t) = z_p\omega\cos(\omega t)$, ω being the angular frequency and z_p the amplitude of the tube displacement.

The flow verifies the compressible Navier–Stokes equations expressed in the moving frame attached to the tube, with an additional forcing source term depending on $\mathbf{V}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0 \\ \dfrac{\partial \rho\mathbf{v}}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}) + \nabla p = \nabla\cdot(\bar{\bar{\tau}}) - \rho\dfrac{d\mathbf{V}}{dt} \end{cases} \tag{1}$$

Table 1
Parameters of different presented cases (N: numerical, E: experimental).

Name	f (Hz)	R/δ_v	R/L	$U_{\max}$ (m/s)($z=0$)	M	Re_{NL}
N_1	20 000	50	0.09	0.5	1.45×10^{-3}	0.005
N_2	20 000	50	0.09	61.83	0.18	80.84
E_2	240	138	0.027	23	0.067	85.22

where p is the pressure, ρ is the density, $\mathbf{v} = u\vec{e}_z + v\vec{e}_r$ is the flow velocity, $\bar{\bar{\tau}} = -\frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\mathbf{v})\bar{\bar{I}} + 2\mu\bar{\bar{D}}$ the viscous stress tensor of a Newtonian fluid, $\bar{\bar{D}}$ the strain tensor, μ the dynamic viscosity which is supposed to be constant. In this formulation we have neglected the bulk viscosity since $\frac{M^2}{Sh^2 Re_{ac}^2} \ll 1$ [30].

We consider an isentropic state law for the ideal gas, given by

$$p - p_0 = c_0^2(\rho - \rho_0), \tag{2}$$

where p_0, ρ_0 and c_0 are respectively the constant initial pressure, density and sound velocity. Therefore the energy equation is decoupled from the other equations and we only solve the mass and momentum equations (Eqs. (1) and (2)), excluding thermal effects in our study.

No slip conditions are used on the solid boundary $r = R$, i.e. $\mathbf{v}(r = R, z) = 0$. On the axis $r = 0$, symmetry conditions are used, i.e. $\mathbf{v}(r = 0, z) = u(z)\vec{e}_z$ with $\frac{\partial u}{\partial r}(r = 0, z) = 0$. On the vertical boundaries $z = 0, L$, symmetry conditions are also used, i.e. $\mathbf{v}(r, z = 0, L) = v(r)\vec{e}_r$ with $\frac{\partial v}{\partial z}(r, z = 0, L) = 0$.

Due to the geometry, shock waves are generated in the simulations but it was checked that they are of small intensity and do not affect drastically the streaming flow [19,29]. The presence of harmonics will also be addressed in Section 6 of the present article.

The unsteady equations (Eq. (1)) are solved numerically using third order finite difference schemes [19,29]. The mean (streaming) flow is obtained from calculating a simple mean value for each physical quantity (velocity, pressure, density) over an acoustic period.

For simulations, the reference air pressure is $p_0 = 101\,325$ Pa and the density is $\rho_0 = 1.2$ kg/m^3. The reference speed of sound is $c_0 = 343.82$ m/s. The air viscosity is $\mu = 1.795 \times 10^{-5}$ kg m^{-1} s^{-1}. Resonant conditions are imposed, for which $L = \lambda/2$. Numerical values are $f_{num} = 20\,000$ Hz, so that $\lambda/2 = 8.396$ mm and the acoustic period is $T_{num} = 50 \times 10^{-6}$ s. All results presented below are obtained using a regular mesh of rectangular cells composed of 500 points in the axial direction, and of $5 \times R/\delta_v$ points in the radial direction. The time step δt is fixed equal to 8×10^{-9} s.

3. Establishment of acoustic streaming

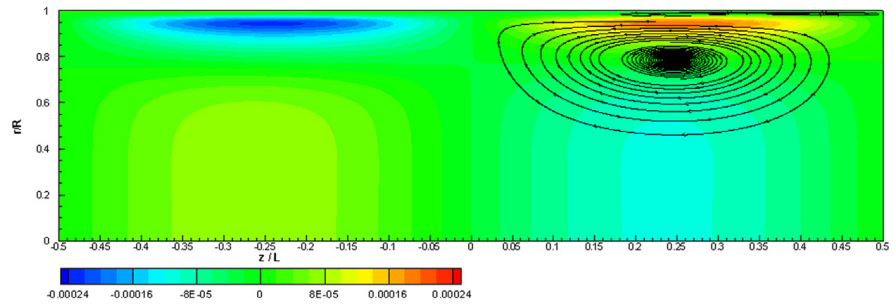
In order to study the establishment of the streaming flow generated by a sinusoidal standing wave independently from the transient of its acoustic source, the numerical code described in Section 2.2 is used in the following modified manner: for time stepping during the transient of acoustics, at the end of each acoustic period, the instantaneous fields are reinitialized by subtracting the mean flow over that period. Hence, the streaming flow is calculated here only once the acoustics is established, in order to dissociate the transient of streaming from the establishment of acoustics. Of course this cannot be done in experiments so we chose to discuss only experimental results for which the establishment of streaming has its own time scale, which is not the case of experimental results at low levels.

The different case parameters are summarized in Table 1. Subscript 1 is used to denote slow streaming and subscript 2 is used to denote fast streaming.

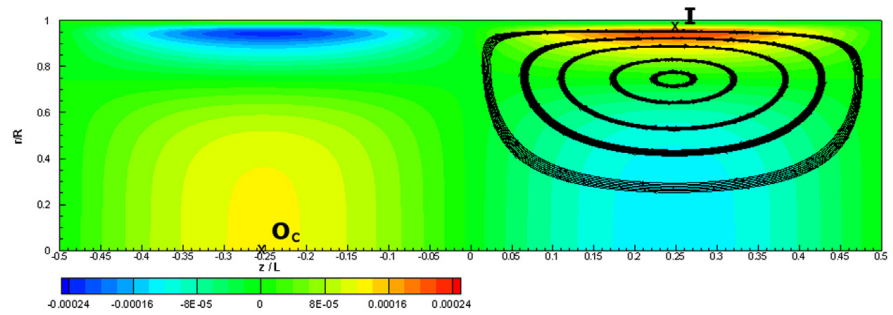
3.1. Slow streaming

Figs. 3 and 4 address the case of slow streaming flow (for N_1). The established streaming flow pattern is very regular and corresponds to the representation in Fig. 1(a). Fig. 3 shows the time evolution of the streaming pattern: contours of axial streaming velocity are displayed (with color code) and streamlines are superimposed on the right half plane section. On Fig. 3(b) are also displayed two specific locations that will be used for further investigations: $I(r = R - 3\delta_v, z = L/4)$ representing the place of maximum inner streaming velocity and $O_c(r = 0, z = -L/4)$ representing the center of the plane section and the place of maximum outer streaming velocity in the slow regime. Note that the aspect ratio (height/length) of the displayed figures is equal to 0.25 which is much larger than the actual aspect ratio (height/length = 0.09) so that both inner and outer streaming are visible. One can observe that the establishment of the streaming flow occurs in several stages: The inner streaming cell is established first (Fig. 3(a)) and then does not evolve very much. The magnitude of the outer streaming velocity increases on a longer time scale (Fig. 3(b), (c) and (d)). This is in agreement with the results of previous numerical simulations [25].

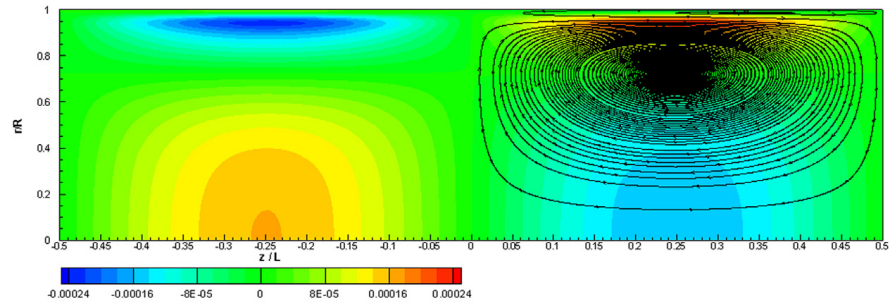
The time evolution of the streaming velocity at some specific points can also be displayed. Fig. 4(a) shows the time evolution of the axial streaming velocity at I (see Fig. 3(b)). Fig. 4(b) shows the time evolution of the axial streaming velocity



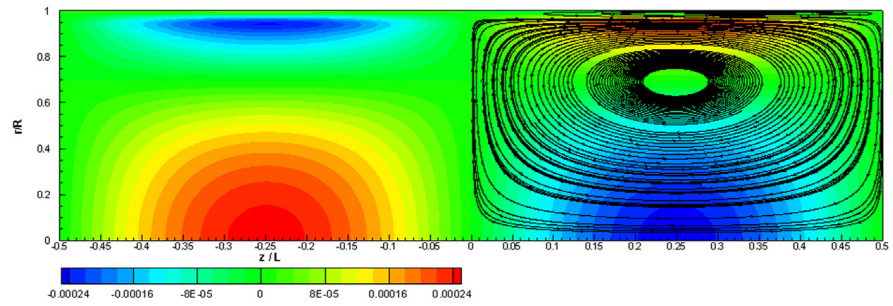
(a) $t = 5.75 \times 10^{-3}$ s.



(b) $t = 6.25 \times 10^{-3}$ s.



(c) $t = 6.75 \times 10^{-3}$ s.



(d) $t = 1 \times 10^{-2}$ s.

Fig. 3. Contours of the axial streaming velocity (with color codes in m/s) at different times during the transient evolution of N_1. Streamlines are superimposed on the right half plane section (real aspect ratio height/length=0.09). (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

at the center of the plane section O_c (see Fig. 3(b)). In agreement with Fig. 3 the inner streaming (Fig. 4(a)) is established much faster than outer streaming (Fig. 4(b)). As expected from Rayleigh calculations [2], the steady state values at O_I and O_c are roughly equal.

In the experiments, the establishment of acoustics at low amplitudes is very long (see Fig. 13 of [28]). In this case, the evolution of streaming is intrinsically linked to that of acoustics and the associated establishment time scales, determined by fitting an $\exp(-t/\tau)$ law to experimental data, are very close ($\tau_{ac} = 190$ s and $\tau_{st} = 233$ s). As will be shown in the next section, acoustics' transient is much shorter for high amplitudes (τ_{ac} is of the order of tenths of seconds) so that the establishment of streaming can be observed for different locations in the wave guide.

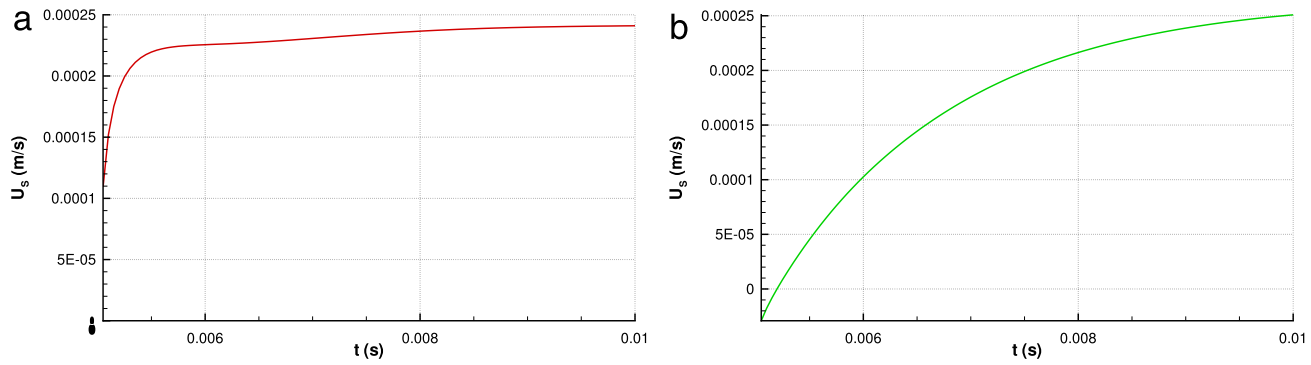


Fig. 4. Time evolution N_1. Axial streaming velocity at (a) I and (b) O_c.

3.2. Fast streaming

Figs. 5–7 address cases of fast streaming flow (for N_2 and E_2 respectively). The established streaming flow pattern is strongly distorted with respect to the slow streaming case, and two extra contra-rotating streaming cells are present near the acoustic velocity antinode (see Fig. 5(d)), in agreement with Fig. 1(b).

Fig. 5 shows the time evolution of the streaming patterns: contours of axial velocity are displayed on the left, and streamlines are displayed on the right. On Fig. 5(d) are also displayed two specific locations that will be used for further investigations: O_e representing the place on the axis corresponding to the maximum velocity inside the extra contra-rotating cell and $O_{c\text{-}exp}$ representing the location on the axis, close to the position $z = L/4$, where measurements were performed to characterize the transient of the main outer streaming cell (both locations are on the right half side of the resonator). Here also the aspect ratio of the displayed figures is increased so that both inner and outer streaming are visible. One can observe that the establishment of the streaming flow occurs in several stages:

The inner streaming cell is established first, typically after 3×10^{-3} s (see Fig. 5(a)) and then does not evolve very much. It is not as symmetrical as in the case of slow streaming (Fig. 3(a)), the cell centers being shifted towards the resonator closed ends (acoustic velocity node).

The magnitude of the outer streaming velocity increases on a longer time scale, and the main outer cell centers progressively shift towards the resonator closed ends (Fig. 5(b), (c) and (d)). Conversely to the slow streaming case, the maximum velocity of the outer streaming cell is smaller than that of inner streaming, as can be seen on the color code.

The emergence of the extra contra-rotating cell happens last (Fig. 5(d)).

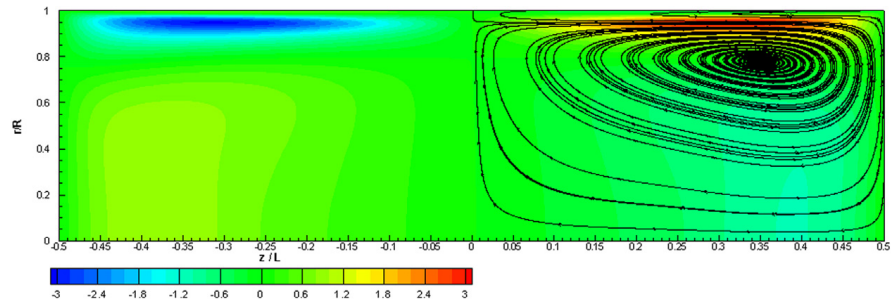
On Fig. 6 are presented numerical time evolutions of the streaming velocity at I, O_c (defined in the previous section, Fig. 3(b)) and at the place on the axis corresponding to the maximum velocity inside the extra contra-rotating cells O_e (refer to Fig. 5(d)). First, this figure show that the time evolution of the inner streaming velocity at I (Fig. 6(a)) is similar to the case of slow streaming (similar time scale).

Conversely in the core, the velocity increase for the location O_c (Fig. 6(b)) depicts clearly an inflection point so that two characteristic time scales can be distinguished. Finally for the location O_e (Fig. 6(c)) the velocity is first positive before becoming negative meaning that the contra-rotating cell appears after a certain time. A third time scale emerges from this time evolution. Note that the appearance of the extra cell does not modify the time evolution of streaming outside the extra cell (see Fig. 6(a) and (b)).

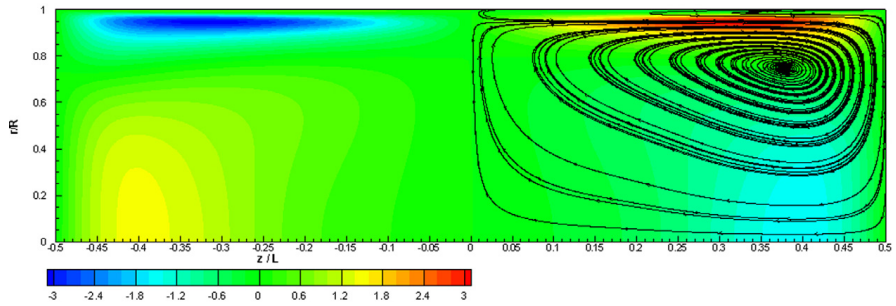
On Fig. 7 are presented experimental time evolutions for inner streaming at location I (Fig. 7(a)), for outer streaming on the axis $r = 0$ at location $O_{c\text{-}exp}$ (Fig. 7(b)) and at the extra contra-rotating cell center O_e (Fig. 7(c)) for the fast streaming case E2. Similar behavior to numerical results for equivalent positions can be observed on the experimental measurements and several distinct time scales are visible. The inner streaming is established first. Time evolution of outer streaming at $O_{c\text{-}exp}$ shows a distinct time scale. The magnitude of the contra-rotating cell maximum velocity is very small but the establishment of the extra streaming cell at O_e is on a distinguished time scale from the last two.

In the experiment E_2 the established value in the inner cell ($U_s \simeq 0.5$ m/s at I) is much greater than the established value in the core of the guide ($U_s \simeq 0.01$ m/s at $O_{c\text{-}exp}$), as can be seen on Fig. 7. Similar observations were made on the simulation results in Fig. 5(b). Therefore, both experiments and numerical simulations show that nonlinear phenomena have very small influence on the streaming velocity in the boundary layer.

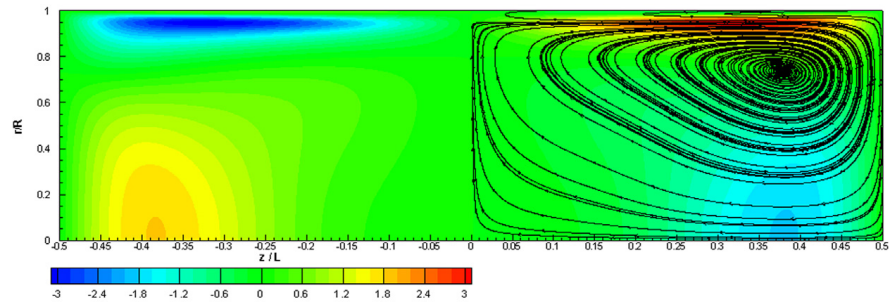
In summary, for slow streaming flow, only one time scale is necessary to describe the dynamics of streaming in the core of the waveguide. On the contrary for fast streaming flow, three different time scales were observed numerically and two experimentally in the core of the waveguide. At this stage the results seem to indicate that inner streaming flow is hardly modified by nonlinear effects (inertia included) at high levels. On the contrary the outer streaming is very strongly modified. This is in agreement with Menguy and Gilbert findings [15] which stated that inertia affects outer streaming but not inner streaming. However, it is necessary first to clearly identify the effect of inertia on the establishment of streaming. At this stage one cannot indeed assess whether inertial effects are truly responsible for the emergence of the new streaming cell.



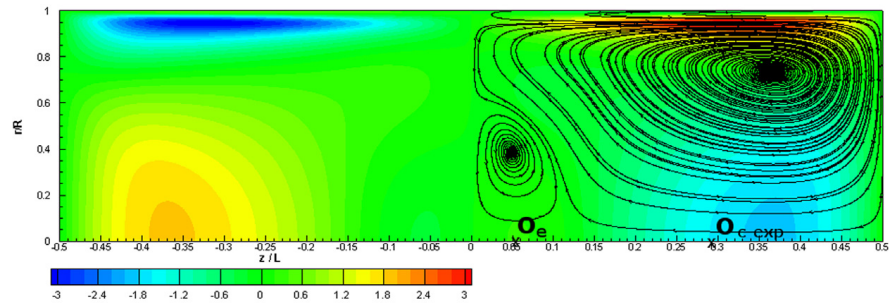
(a) $t = 2.75 \times 10^{-3}$ s.



(b) $t = 3.25 \times 10^{-3}$ s.



(c) $t = 3.75 \times 10^{-3}$ s.



(d) $t = 1 \times 10^{-2}$ s.

Fig. 5. Contours of the axial streaming velocity (with color code) at different times during the transient evolution of N_2. Streamlines are superimposed on the right half plane section (real aspect ratio height/length = 0.09). (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

In the next section, the equations governing the streaming flow are presented along with a scale analysis in order to exhibit governing dimensionless numbers and time scales for the establishment of inner and outer streaming flows. The expected time scales for the configuration under study are then calculated and compared with fits to the curves shown in the present section.

4. Scale analysis of slow and fast streaming flow

In order to analyze the dynamics of the streaming flow and particularly the competition between diffusion at the origin of streaming and convection associated to nonlinear inertial effects, a scale analysis based on the full equations governing

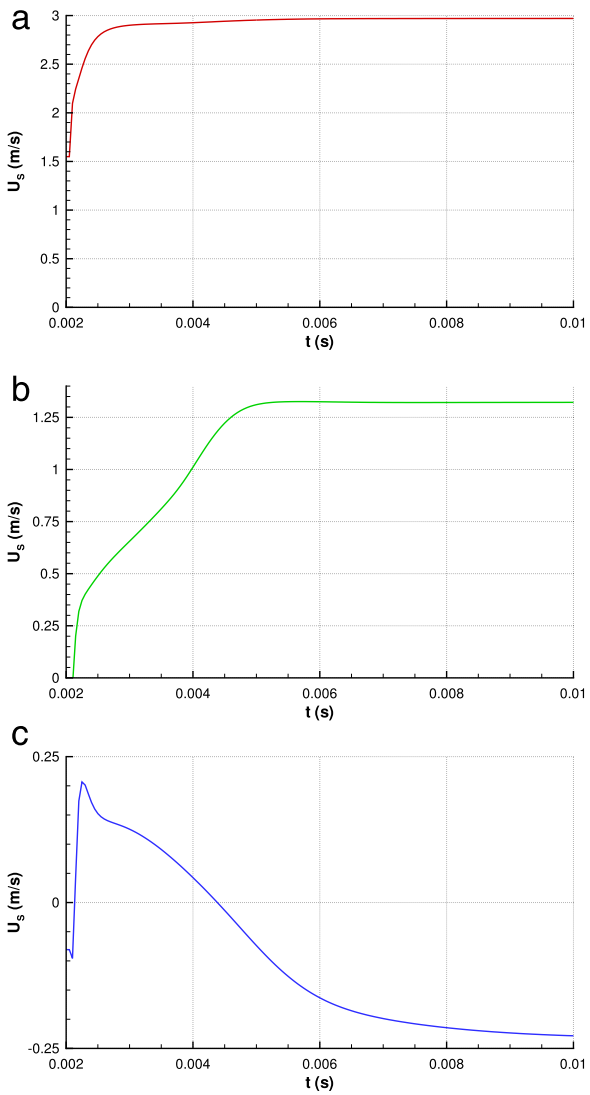


Fig. 6. Time evolution N_2. Axial streaming velocity at (a) I (b) O_c and (c) O_e.

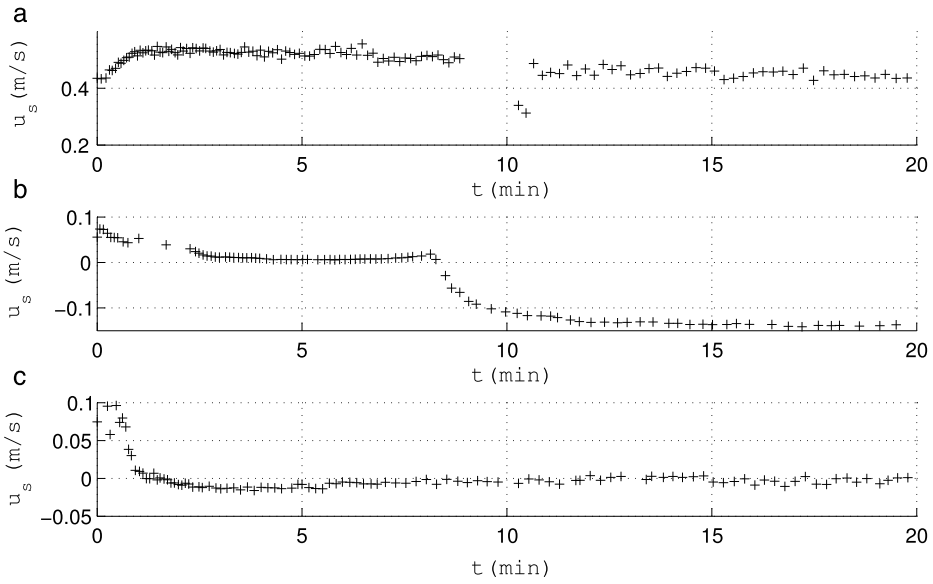


Fig. 7. Time evolution in the fast streaming case E_2. Axial streaming velocity at (a) I (b) O_{c-exp} and (c) O_e.

the streaming flow is conducted below. Our approach is similar to that developed by Boufermel et al. [24] for computing the average mass transport velocity $\frac{\overline{\rho \mathbf{v}}}{\overline{\rho}}$ in the slow streaming regime, as well as to that developed by Moudjed et al. [31] in the somehow different configuration of bulk streaming.

Focus is on outer streaming, whose transient and established regimes was shown to be drastically modified in the fast nonlinear regime.

4.1. Equations governing the streaming flow

Particle velocity $\mathbf{v}$, fluid density ρ and pressure p are decomposed into a fluctuating, periodic component, and a steady component (corresponding to the time average of the variable over the period, i.e. corresponding to the streaming flow)

$$(\mathbf{v}, \rho, p) = (\mathbf{v}' + \bar{\mathbf{v}}, \rho' + \bar{\rho}, p' + \bar{p}), \tag{3}$$

the fluctuating component being denoted by a $'$ superscript and the average operator by an overline. The time average of the fluctuating component is zero. Conversely to usual models of slow streaming, in the present approach no assumption is done on the magnitude of the fluctuation with respect to the steady component. The equations are therefore correct whether the streaming flow is slow or fast.

With this decomposition, the double and triple averaged products between any three variables f, g, h become:

$$\begin{cases} \overline{fg} &= \bar{f}\bar{g} + \overline{f'g'} \\ \overline{fgh} &= \bar{f}\bar{g}\bar{h} + \overline{f'g'}\bar{h} + \overline{f'h'}\bar{g} + \overline{g'h'}\bar{f} + \overline{f'g'h'}. \end{cases} \tag{4}$$

The equations governing the streaming flow are obtained by averaging over the acoustic period the full compressible (isentropic) instantaneous Navier–Stokes equations (1) and the isentropic state law (2). Using the double and triple averaged products detailed in Eq. (4) then results in the following time averaged equation system:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho}\, \bar{\mathbf{v}}) &= -\nabla \cdot (\overline{\rho' \mathbf{v}'}) \\ \dfrac{\partial \overline{\rho}\, \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho}\, \bar{\mathbf{v}} \otimes \bar{\mathbf{v}}) + \nabla \overline{p} &= \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}}) + \bar{F}, \end{cases} \tag{5}$$

and $\overline{p} - p_0 = c_0^2(\overline{\rho} - \rho_0)$, where $\bar{\bar{\tau}}$ is the averaged viscous tensor and $\bar{F}$ is the excitation force given by:

$$\bar{F} = -\nabla \cdot (\overline{\rho' \mathbf{v}'} \otimes \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}} \otimes \overline{\rho' \mathbf{v}'} + \overline{\rho} \overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'} + \overline{\rho' \mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'}). \tag{6}$$

Note that $\bar{F}$ is the sum of the source terms, representing the nonlinear contribution of the imposed acoustic field.

4.2. Scale analysis

The equation system (5) is written in dimensionless form, using standard fluid mechanics scalings, detailed in the following. As stated previously, focus is on the resonator core. In a cylindrical wave guide, streaming cells are toroidal of axial dimension $\lambda/4$ and radial dimension R in the core of the resonator. Therefore the axial variable z is scaled with $\lambda/4$ and the radial variable r with R.

Mean velocity is scaled with a reference value of the axial streaming velocity U_s. Density is scaled with ρ_0. Pressure variations are scaled with (δp), not specified at this stage of the scale analysis. The aim of the study is to determine the role of inertia on streaming in the fast regime. Therefore, time is scaled with the characteristic convection time scale in the axial direction $t_c = \lambda/(4U_s)$.

Scalings can then be summarized as follows:

$$r^* = \frac{r}{R}, \qquad z^* = \frac{z}{\lambda/4}, \qquad \mathbf{v}^* = \frac{\bar{\mathbf{v}}}{U_s}, \qquad t^* = \frac{t}{t_c}, \qquad \rho^* = \frac{\overline{\rho}}{\rho_0}, \qquad p^* = \frac{\overline{p} - p_0}{(\delta p)}. \tag{7}$$

Also, the fluctuation variables required to assemble the source terms are scaled with the acoustic amplitudes as follows:

$$\mathbf{v}'^* = \frac{\mathbf{v}'}{U_{\max}}, \qquad \rho'^* = \frac{\rho'}{\rho_{\max}}, \tag{8}$$

$\rho_{\max}$ being the amplitude of density fluctuations at acoustic antinode position in the standing wave. Whenever two different spatial derivatives are involved, the coefficient multiplying each dimensionless term is chosen with respect to the dominant spatial derivative under plane wave assumption: $R \ll \lambda$. In particular, scaling the viscous stress tensor yields a $\frac{\mu U_s}{R^2}$ factor, and scaling the divergence operator $\nabla \cdot (\mathbf{v}^*)$ yields a $\frac{U_s}{\lambda/4}$ coefficient. The following dimensionless equations are deduced from (5):

$$\begin{cases} \dfrac{\rho_0}{t_c}\dfrac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \dfrac{\rho_0 U_s}{\lambda/4} \nabla \cdot (\rho^* \mathbf{v}^*) = -\dfrac{\rho_{\max} U_{\max}}{\lambda/4} \nabla \cdot (\overline{\rho'^* \mathbf{v}'^*}) \\ \dfrac{\rho_0 U_s}{t_c}\dfrac{\partial \rho^* \mathbf{v}^*}{\partial t_c^*} + \dfrac{\rho_0 U_s^2}{\lambda/4} \nabla \cdot (\rho^* \mathbf{v}^* \otimes \mathbf{v}^*) + \dfrac{(\delta p)}{\lambda/4} \nabla p^* = \dfrac{\mu U_s}{R^2} \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}}^*) + \bar{F}, \end{cases} \tag{9}$$

with

$$\overline{F} = -\frac{\rho_{\max} U_{\max} U_s}{\lambda/4} \nabla \cdot (\overline{\rho'^* \mathbf{v}'^*} \otimes \mathbf{v}^* + \mathbf{v}^* \otimes \overline{\rho'^* \mathbf{v}'^*} + \frac{\rho_0 U_{\max}}{\rho_{\max} U_s} \overline{\rho}^* \overline{\mathbf{v}'^* \otimes \mathbf{v}'^*} + \frac{U_{\max}}{U_s} \overline{\rho'^* \mathbf{v}'^* \otimes \mathbf{v}'^*}). \tag{10}$$

Then, multiplying the mass equation with $\lambda/(4\rho_0 U_s)$ and the momentum equation with $\lambda/(4\rho_0 U_s^2)$ and using $t_c = \lambda/(4U_s)$ one can obtain:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla \cdot (\rho^* \mathbf{v}^*) = -\dfrac{\rho_{\max}}{\rho_0} \dfrac{U_{\max}}{U_s} \nabla \cdot (\overline{\rho'^* \mathbf{v}'^*}) \\ \dfrac{\partial \rho^* \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \nabla \cdot (\rho^* \mathbf{v}^* \otimes \mathbf{v}^*) + \dfrac{(\delta p)}{\rho_0 U_s^2} \nabla p^* = \dfrac{1}{Re} \nabla \cdot (\overline{\overline{\tau}}^*) + \overline{F}^*, \end{cases} \tag{11}$$

where the dimensionless excitation force, gathering all the source terms is expressed as:

$$\begin{aligned} \overline{F}^* = & -\frac{\rho_{\max}}{\rho_0} \frac{U_{\max}}{U_s} \nabla \cdot (\overline{\rho'^* \mathbf{v}'^*} \otimes \mathbf{v}^* + \mathbf{v}^* \otimes \overline{\rho'^* \mathbf{v}'^*}) \\ & - \frac{U_{\max}^2}{U_s^2} \nabla \cdot (\rho^* \overline{\mathbf{v}'^* \otimes \mathbf{v}'^*}) - \frac{\rho_{\max}}{\rho_0} \frac{U_{\max}^2}{U_s^2} \nabla \cdot (\overline{\rho'^* \mathbf{v}'^* \otimes \mathbf{v}'^*}). \end{aligned} \tag{12}$$

The system equations (Eq. (11)) is the dimensionless form of the general governing streaming equations (Eq. (5)). The Reynolds number $Re = \frac{4U_s}{\lambda} \frac{R^2}{\nu}$ that appears in the momentum equation is the Reynolds number characterizing the mean flow in a thin tube, defined as the ratio between the diffusion time scale in the radial direction $t_d = R^2/\nu$ and the convection time scale in the axial direction $t_c = \lambda/(4U_s)$, $Re = t_d/t_c$. Note that t_d is equivalent (with a different length reference value) to the characteristic time for streaming development defined by Amari et al. in [32] and used to obtain the transient linear streaming equations. Under the assumptions that acoustic perturbations are small (i.e. of order $M = \frac{U_{\max}}{c_0} \ll 1$) and the streaming field is of order M^2 ($U_s = MU_{\max}$), this Reynolds number can be rewritten as $Re = \frac{4}{\pi} \frac{M^2}{Sh^2} = \frac{4}{\pi} Re_{NL}$, Re_{NL} being the commonly introduced nonlinear Reynolds number.

Under these assumptions, the Reynolds number Re and the nonlinear Reynolds number Re_{NL} are thus of the same order of magnitude. However, since the Reynolds number Re is defined directly with the value of the maximum streaming velocity, it describes more accurately the influence of inertia in the nonlinear regime in the core of the wave guide than Re_{NL}. Indeed, previous numerical and experimental studies [29] have shown that in the nonlinear regime, the maximum value of the axial streaming velocity on the tube axis is much smaller than slow streaming expectations $3U_{\max}^2/(8c)$. Therefore the nonlinear Reynolds number Re_{NL} overestimates the influence of inertia on the streaming flow. For example, in the numerical case N_2, the Reynolds number based on the maximum value of U_s on the axis is $Re = 17.1$ while the corresponding nonlinear Reynolds number is $Re_{NL} = 80.84$. Nonetheless Re cannot be estimated before the simulations/experiments whereas Re_{NL} can be calculated from the acoustics and thus remains useful.

Another Reynolds number used in the literature to distinguish linear from nonlinear regime was the streaming Reynolds number used by Stuart et al. [11] defined as $Re_s = \frac{U_s \lambda}{2\pi\nu}$. It can be expressed as $Re_s = Re \frac{\lambda^2}{R^2}$ and also has the drawback to overestimate the nonlinear inertial effects on Rayleigh streaming.

In the case $Re \ll 1$ (which also means that convection time is much greater than diffusion time) and under the assumption of small perturbations ($M = \frac{U_{\max}}{c_0} = \frac{U_s}{U_{\max}} \ll 1$), the inertial term and the time depending term can both be neglected with respect to the viscous term. The magnitude of source terms is then estimated :

$$\frac{\rho_{ac}}{\rho_0} \frac{U_{ac}}{U_s} \nabla \cdot (\overline{\rho'^* \mathbf{v}'^*} \otimes \mathbf{v}^* + \mathbf{v}^* \otimes \overline{\rho'^* \mathbf{v}'^*}) = O\left(M \cdot \frac{1}{M}\right) = O(1), \tag{13}$$

$$\frac{U_{\max}^2}{U_s^2} \nabla \cdot (\rho^* \overline{\mathbf{v}'^* \otimes \mathbf{v}'^*}) = O\left(\frac{1}{M^2}\right), \tag{14}$$

$$\frac{\rho_{\max}}{\rho_0} \frac{U_{\max}^2}{U_s^2} \nabla \cdot (\overline{\rho'^* \mathbf{v}'^* \otimes \mathbf{v}'^*}) = O\left(M \cdot \frac{1}{M^2}\right) = O\left(\frac{1}{M}\right). \tag{15}$$

$\overline{F}^*$ is then of order $\frac{1}{M^2}$. The pressure gradient must have the same order of magnitude as $\overline{F}^*$ which yields also the pressure variations scale $(\delta p) = \rho_0 U_{\max}^2 = p_0 M^2$. The magnitude of the source term in the mass equation is estimated as previously: $\frac{\rho_{\max}}{\rho_0} \frac{U_{\max}}{U_s} \nabla \cdot (\overline{\rho'^* \mathbf{v}'^*}) = O(1)$. Finally, the steady linear equations for the streaming flow (dimensional form) are then deduced from the first order approximation of the momentum equation and (5) gives:

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\overline{\rho} \overline{\mathbf{v}}) = -\nabla \cdot (\overline{\rho' \mathbf{v}'}) \\ \nabla \overline{p} = \nabla \cdot (\overline{\overline{\tau}}) - \overline{\mathbf{F}}, \end{cases} \tag{16}$$

where $\bar{F} \approx \nabla \cdot (\overline{\rho \mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'})$.

As the Re number is increased i.e. $Re \gtrsim 1$, inertial and time depending terms cannot be neglected anymore and the complete unsteady form of streaming equations (5) with all the source terms should be used. In this case the diffusion time scale becomes larger than the convection time scale, thus the overall process is faster and the steady state is reached earlier.

Table 2
Reynolds numbers of different presented cases (N: numerical, E: experimental).

Name	U_s (at I) (m/s)	U_s (at O_c) (m/s)	Re_{NL}	$Re(I)$	$Re(O_c)$
N_1	2.42×10^{-4}	2.63×10^{-4}	0.005	2.24×10^{-3}	2.43×10^{-3}
N_2	3.18	1.84	80.84	29.44	17
E_2	0.5	0.01	85.22	35.26	0.7

4.3. Reynolds numbers and time scale values for slow and fast outer streaming

Table 2 displays the values of the axial streaming velocity at points I or O_c, and of the corresponding Reynolds number of previously described cases N_1, N_2 and E_2.

The previous analysis can also be used to estimate quantitatively the expected time scales of the streaming time evolutions for outer streaming, in the slow and fast streaming regime, that was described qualitatively in Section 3.

In the slow streaming case, diffusion of momentum in the radial direction is expected to be dominant. The convection time variations take place over a very long scale and they are very small, therefore only time variations over a diffusion time scale are significant. The associated characteristic time scale for the establishment of outer streaming is $t_d = R^2/\nu$, which, using the parameter values in Table 2 for N_1, amounts to $t_d = 0.026$ s. Taking into account the fact that the streaming velocity at O_c in Fig. 4(b) is not established in 0.01 s, this is a coherent result.

Based on known analytical solutions of the unsteady pure diffusion equation, if diffusion were dominant the time evolution curves should be in the form $u(t) = u_\infty(1 - e^{-t/\tau})$, where the time constant τ is the time needed for the value u to reach 63% of the established value u_∞ and the time constant needed to achieve 99.999% of the established value is equal to 10τ. The time evolution curve at O_c in Fig. 4(b) is actually very well fitted with such a diffusion curve, and the quantitative fit gives $\tau \simeq 0.0015$ s and therefore $10\tau = 0.015$ s, which is the same order of magnitude as t_d.

In the fast streaming case N_2, in the core, transverse diffusion is expected to compete with convection in the axial direction. The value of the theoretical diffusion time scale t_d is still the same, since it does not depend on the excitation level ($t_d = 0.026$ s). The first velocity increase in the time evolution curve at O_c (Fig. 6(b)) can be fitted by assuming dominant diffusion and the obtained characteristic time scale is the same as in the slow streaming case. Therefore transverse diffusion is dominant at first in the establishment of the outer streaming, just like in the slow streaming case. Assuming next that the second velocity increase in the time evolution curve at O_c (Fig. 6(b)) is related to convection, the theoretical time scale associated with convection along the length $\lambda/4$ with velocity U_s at the location I is $t_c = \lambda/(4U_s) = 1.6 \times 10^{-3}$ s based on the parameters in Table 2. This increase is 20 times faster than that of the diffusion process. A linear fit of the second velocity increase at O_c on Fig. 6(b) gives $t_{cfit} \approx 10^{-3}$ s, which is of the same order as t_c. This shows that the second velocity increase is indeed related to convection in the axial direction. Note that convective transport is much faster than diffusive transport and that the steady state is reached earlier than in the slow streaming case N_1, in agreement with the analysis given at the end of Section 4.2.

In the experimental case $E2$, Fig. 7 shows the evolution of streaming at the three different locations I, $O_{c\text{-}exp}$ and O_e. Two separate slopes in the time evolution of streaming at $O_{c\text{-}exp}$ are also observed, but these are not due to the competition between diffusion and convection as was the case for numerical results. Actually our experimental set up does not allow to observe this competition: the theoretical value of the radial diffusion time scale is $t_d = 24$ s and the convection time scale in the axial direction calculated for E_2 based on the maximum value of U_s at I location (read in Fig. 7(a)) is $t_{cE2} = 0.71$ s. It can be observed that acoustics requires about 3 min to be established. The transient of acoustics is therefore too long to allow to separately identify the establishment of streaming. Moreover one measurement point actually corresponds to an integration of results of particle velocity measurements over several seconds: indeed in order to obtain converged results of the particle velocity estimate, several thousands of seeding particles need to have crossed the measuring volume [27,33]. The associated measuring time depends on the data rate associated with the seeding density; in our set up this process can take as long as 10 s. Therefore it is impossible to distinguish time scales as short as t_d or t_c. The evolution of streaming shown in Fig. 7 can be supposed to result from heat transfer effects. Indeed measurements give an estimate of the mean velocity, that is equal to streaming velocity only if no heat convection occurs. In the case of E_2 experiments, a 4 K temperature difference in the guide wall temperature was measured across a distance of $\lambda/4$. The temperature establishment was found to last for 20 min, probably due to the time needed to reach thermal equilibrium between thermoacoustic, conduction and convection heat fluxes. It can thus be assumed that the measured time evolution of mean velocity is not the only result of acoustic streaming. In the following, only the numerical results will be considered.

In the next section, the driving effect of inner streaming on the outer streaming will be analyzed. Indeed, an analogy with the lid-driven cavity in a cylindrical geometry is presented in order to identify the physical meanings of the characteristic times.

5. Lid-driven cavity analogy

Based on the observation that inner streaming drives outer streaming with competing diffusion and convection, and in order to mimic the establishment of outer streaming, we introduce an equivalent fluid-mechanics problem. We therefore consider the establishment of flow in a lid-driven cavity, but with a cylindrical geometry, and assume that the “lid” is the tube envelope where the inner streaming velocity is imposed.

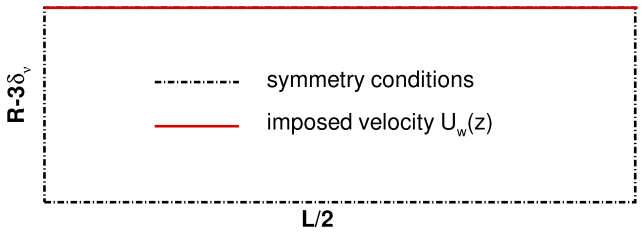


Fig. 8. Schematics of the lid-driven cylindrical flow problem: geometry and boundary conditions.

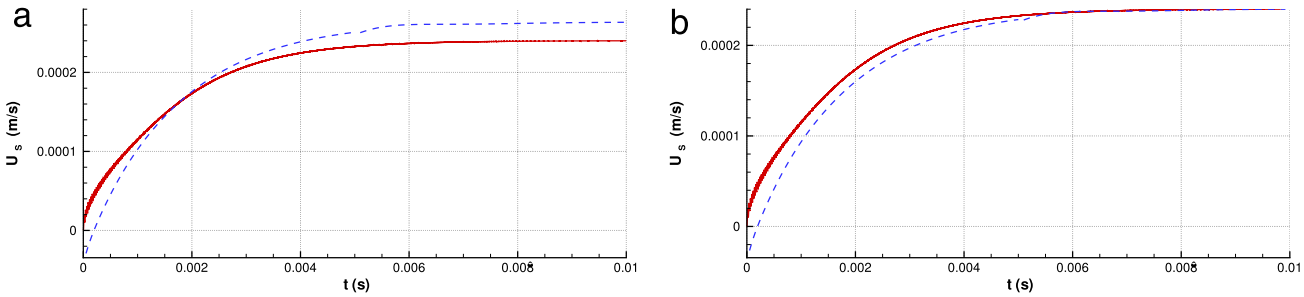


Fig. 9. (a) Time evolution (—) of U ($z = L/4, r = 0$) in lid-driven cavity for U_w from N_1, and (— —) of U_s at O_c from Fig. 4. (b) Same with both curves normalized to reach the same steady-state value. (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

5.1. Description of the problem

The problem being axisymmetric, the geometry is defined by $z \in [0, L/2]$ and $r \in [0, R - 3\delta_\nu]$. The viscous flow is governed by the following equations, which are the same as in Eq. (1) without the acoustic source terms:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \dfrac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla p = \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}}) \end{cases} \tag{17}$$

This system is completed with the isentropic state law Eq. (2). Symmetry conditions are imposed at the vertical walls $z = 0, L/2$ and on the horizontal axis $r = 0$. The boundary condition at the wall $r = R - 3\delta_\nu$ (the "lid") is that the velocity is only axial. Its value $U_w(z)$ is equal to the streaming axial velocity profile $U_s(z)$ along the tube at $r = R - 3\delta_\nu$ given by direct numerical calculations described in the previous sections (see Fig. 8). There is initially no flow in the cavity. The numerical procedure is the same as that described in Section 2.2. The simulations show that the flow is almost incompressible (density variations are less than 0.006%).

5.2. Results

A first simulation (low level) is run with U_w corresponding to the established U_s at $r = R - 3\delta_\nu$ for N_1 case (slow streaming). Fig. 9(a) shows (in red) the time evolution of the axial velocity U at $r = 0$ and $z = L/4$ (center of the mimicked streaming cell). The time evolution of the streaming velocity at O_c (same location) in Fig. 4 is reproduced in blue dots. Fig. 9(b) shows both curves normalized so that they reach the same steady state value. Both curves are very similar with similar time scales, which confirms that transverse diffusion of momentum is the dominant physical phenomenon for the establishment of the slow streaming pattern.

A simulation at higher level is run with U_w corresponding to the established U_s at $r = R - 3\delta_\nu$ for N_2 case (fast streaming). Fig. 10(a) shows (solid red line) the time evolution in the lid-driven cavity of the axial velocity U at $r = 0$ and $z = L/4$. The time evolution of the streaming velocity at O_c (same location) given by Fig. 6(b) is reproduced in blue dots. Both curves are very similar in shape, although the maximum value obtained for the streaming curve is about half of that in the lid-driven cavity. Fig. 10(b) shows the same curves normalized to reach the same steady-state. Both curves are almost superimposed, which shows that the time scales are the same and that the change of slope in the curve is indeed related to the inertial effect, when convection becomes strong enough to compete efficiently with diffusion and to modify the time evolution. However, as stated above the established streaming velocity is much smaller than that obtained in the lid-driven cavity. This suggests that the inertial effects of the lid-driven cavity model are not sufficient to correctly model the change in the streaming flow field.

Fig. 11 shows several snapshots of contours of the axial velocity in the lid-driven cavity during the transient evolution. Streamlines are superimposed on the right half plane section (the simulations are performed on a length $L/2$ and the solution

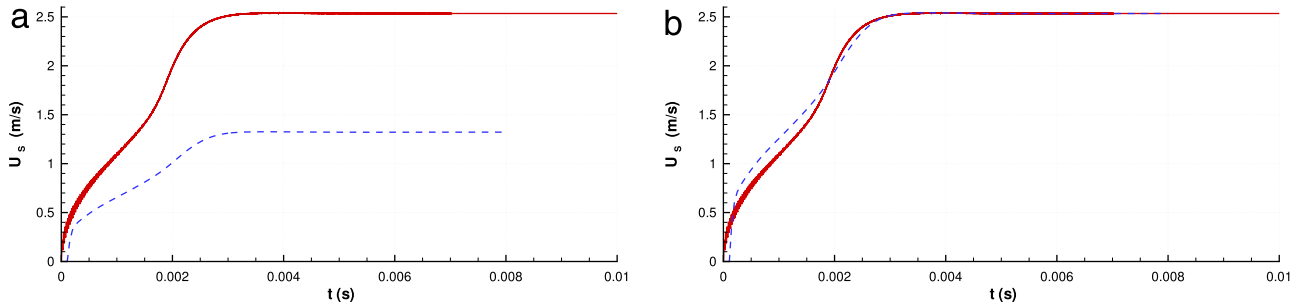


Fig. 10. (a) Time evolution (—) of U ($z = L/4$, $r = 0$) in lid-driven cavity for U_w from N_2, and (— —) of U_s at O_c from Fig. 6. (b) Same with both curves normalized to reach the same steady-state value. (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

in the right half plane section is constructed by symmetry). Comparison with Fig. 5 shows that the time evolution of patterns are very similar which confirms that the transient evolution of the streaming patterns comes from competing diffusion and convection in a manner analogous to the lid-driven cavity. However, an important difference exists: there is no extra streaming cell in the lid-driven cavity.

Fig. 12 shows axial profiles of U on the axis $r = 0$ for corresponding times of Fig. 11. The axial profile imposed at the wall $r = R - 3\delta_\nu$ is also shown. At early times the axial profile of U is similar to the profile of U_w, which confirms that momentum diffusion in the radial direction is dominant. The distortion observed in the last profile is due to convection in the axial direction.

A similar simulation can be conducted using the experimental configuration of E_2. Fig. 13 shows the time evolution of the axial velocity U at $r = 0$ and $z = L/4$ in the lid-driven cavity (the experimental inner streaming axial profile is imposed at the lid). The associated time scales are of the same order as t_d and t_c calculated in Section 4.3, and the transient behavior of the flow is analogous to that observed in Fig. 10. As mentioned earlier, this evolution cannot be highlighted experimentally.

This analysis shows that although diffusion and convection do compete in the establishment of the streaming flow in a similar manner as in the lid-driven cavity problem, this is not enough to explain the emergence of the new streaming cell. Therefore, at this stage, we can conclude that the lid-cavity model is not complete enough to describe the mutation of streaming at high levels.

In the next section, the complete streaming equations (5) are solved numerically, with a mono-frequency acoustic source used to compute the different source terms. The effect of increasing the amplitude of the acoustic flow field is analyzed.

6. Averaged model simulation for the streaming flow

The high-level mono-frequency acoustic field source used in this section is obtained in two steps. Firstly a DNS simulation at very low-level amplitude is run until a steady streaming flow is obtained. The resulting acoustic field, calculated by subtracting the streaming flow from the total velocity field ($\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \overline{\mathbf{v}}$, $\rho' = \rho - \overline{\rho}$), contains insignificant level of harmonics. Then this acoustic field ($\mathbf{v}'$, ρ') is multiplied by a coefficient α chosen to obtain high values of the nonlinear Reynolds number Re_{NL}. This acoustic field is used to compute the source terms so that the following averaged Navier–Stokes equations are solved for the unknown streaming field ($\mathbf{v}_S$, ρ_S, p_S):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho_S}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_S\, \mathbf{v}_S) & = -\alpha^2 \nabla \cdot (\overline{\rho' \mathbf{v}'}) \\ \dfrac{\partial \rho_S\, \mathbf{v}_S}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_S\, \mathbf{v}_S \otimes \mathbf{v}_S) + \nabla p_S & = \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}}_S) + \bar{F}_1, \end{cases} \tag{18}$$

with $\bar{F}_1$ defined by

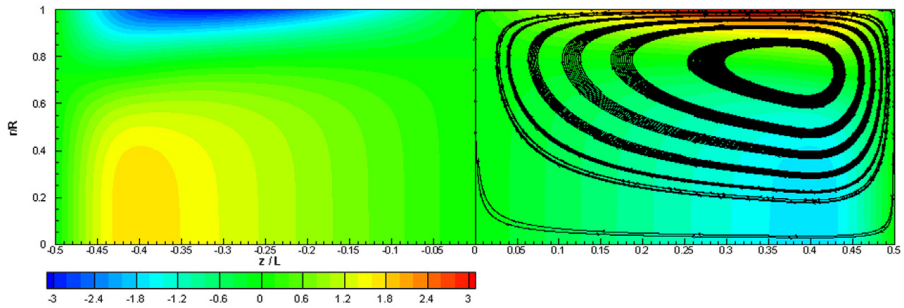
$$\bar{F}_1 = -\nabla \cdot (\alpha^2 \overline{\rho' \mathbf{v}'} \otimes \mathbf{v}_S + \alpha^2 \mathbf{v}_S \otimes \overline{\rho' \mathbf{v}'} + \alpha^2 \rho_S \overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'} + \alpha^3 \overline{\rho' \mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'}) \tag{19}$$

and $p_S - p_0 = c_0^2(\rho_S - \rho_0)$. The boundary conditions are no slip on the outside wall parallel to the horizontal symmetry axis, and symmetry conditions on the vertical boundaries and horizontal axis.

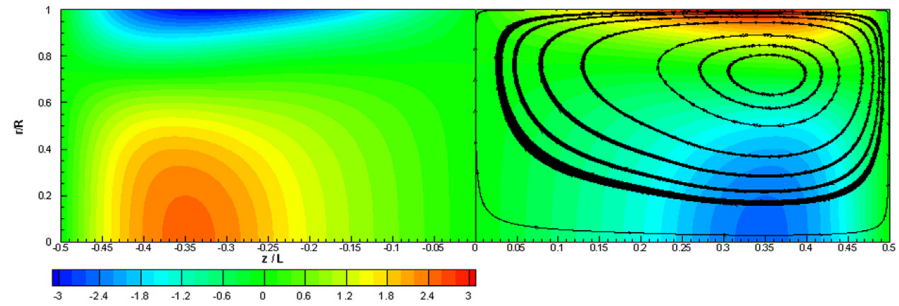
These equations, very similar to Eqs. (5), are solved with the same numerical method as presented in Section 2.2.

This AMS approach can be used to study the influence of inertial effects on the streaming flow for a monofrequency high amplitude acoustic forcing field. This is equivalent to the strategy followed in [15]. In this way we are able to exclude the influence on the streaming flow of higher harmonics in the acoustic signal. This numerical approach is used here to investigate nonlinear Reynolds numbers Re_{NL} ranging from 0.002 up to 94 (corresponding to Re ranging from 0.0025 to 30.81).

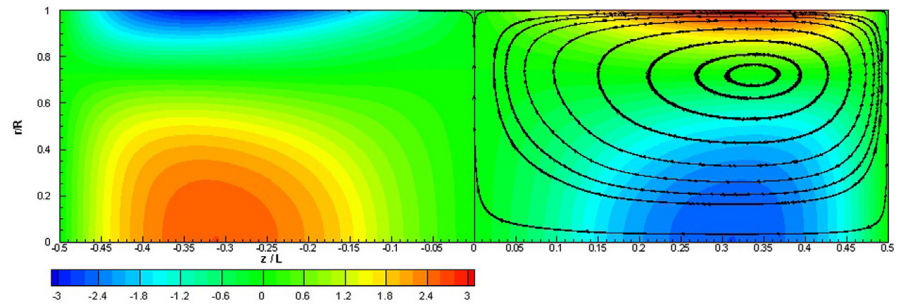
Fig. 14 displays the axial streaming velocity component U_s obtained with the AMS simulation scaled by the Rayleigh streaming maximum velocity $3 \times U_{\max}^2/(8c_0)$ along the scaled central axis z/L for $R/\delta_\nu = 40$ and $0.002 \leq Re_{NL} \leq 94$. For



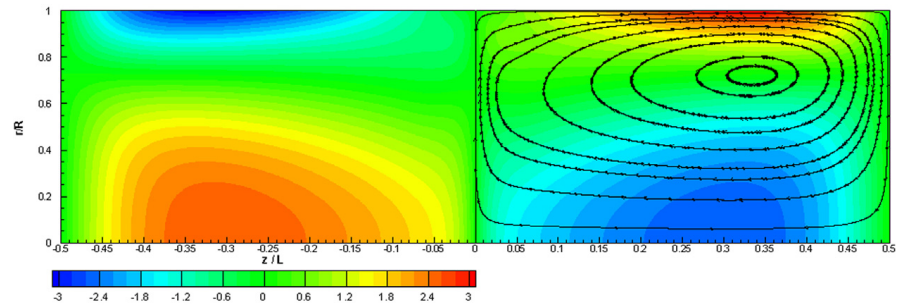
(a) $t = 7.5 \times 10^{-4}$ s.



(b) $t = 1.25 \times 10^{-3}$ s.



(c) $t = 1.75 \times 10^{-3}$ s.



(d) $t = 1 \times 10^{-2}$ s.

Fig. 11. Contours of the axial velocity (with color code) at different times during the transient evolution in the lid-driven cavity for U_u from N_2. Streamlines are superimposed on the right half plane section. (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

increasing Re_{NL} numbers, the sine function associated to slow streaming becomes steeper next to the resonator center, at the acoustic velocity antinode location, and not next to the resonator ends (acoustic velocity nodes locations). This behavior is in agreement with the predictions of the nonlinear model developed by Menguy and Gilbert [15] at moderate nonlinear Reynolds numbers $Re_{NL} = O(1)$. The direction of distortion is opposite to that observed in the full DNS simulations and experiments [28,29].

In Fig. 15, the dimensionless streaming velocity is plotted along the axis for DNS, AMS and Lid-driven cavity (LDC) simulations, for slow-streaming (N_1) and fast-streaming (N_2). For slow-streaming, all three simulations give analogous

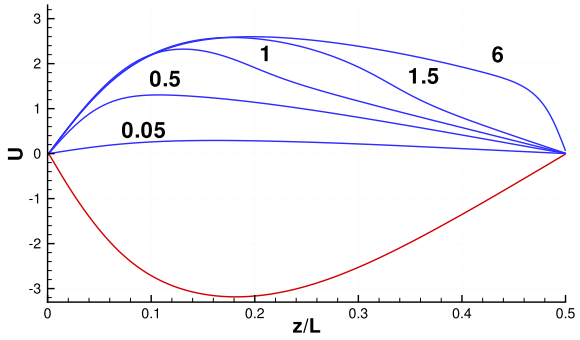


Fig. 12. Axial profiles of U at $r = 0$ (in blue) for corresponding times expressed in 10^{-3} s and at $r = R - 3\delta_v$ (in red) in the lid-driven cavity for U_w from N_2. (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

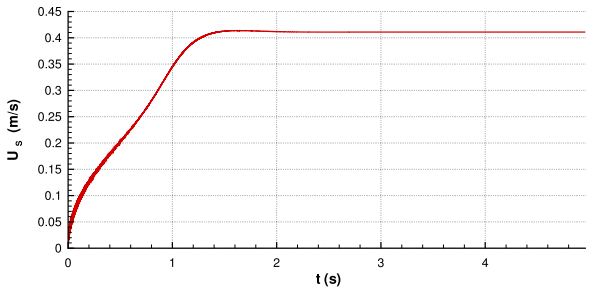


Fig. 13. Time evolution of $U(z = L/4, r = 0)$ in lid-driven cavity for U_w from E_2.

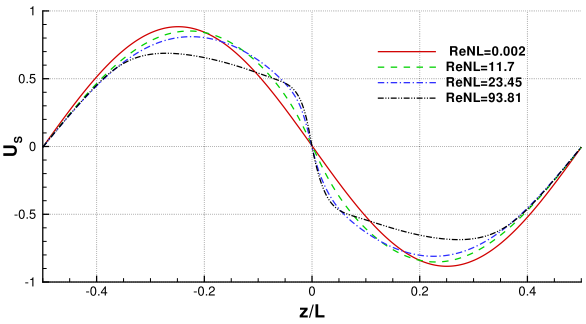


Fig. 14. AMS results for streaming velocity scaled by $3 \times U_{\max}^2/(8c_0)$ along the axis, $R/\delta_v = 40$.

profiles even though the LDC streaming velocity is slightly smaller. This is because the lid-cavity model does not include the acoustic source terms.

For fast-streaming, the AMS result shows the same behavior as the lid-driven cavity. Once again the LDC streaming velocity is slightly smaller, because that model does not include the acoustic source terms. For the AMS simulations, the associated axial velocity contours and streamlines are displayed in Fig. 16. They are similar to those obtained for the lid driven cavity flow, in the steady state (see Fig. 11(d)). On the contrary, the DNS streaming velocity on the axis is globally much smaller, and shows the presence of new streaming cells.

Both the lid-driven cavity and the AMS approaches show that when the intensity of a monofrequency wave is increased, the streaming flow becomes nonlinear because of inertial effects, but the distortion of the Rayleigh streaming profile is different than in DNS simulations or experiments.

This shows that in order to explain the mutation of the streaming flow at high levels, other effects must be analyzed. The only effects that have not been considered yet are the consequences of nonlinear interaction between the streaming flow and acoustics, i.e. the modification of the acoustic flow by the streaming flow. This is currently under study.

7. Conclusion

In this paper the effect of inertia on Rayleigh streaming was investigated numerically and experimentally.

Time evolution of streaming patterns were analyzed. Based on an analysis of the equations driving the streaming flow, two time scales were identified: the diffusion and the convection time scales. The ratio of these time scales is a Reynolds

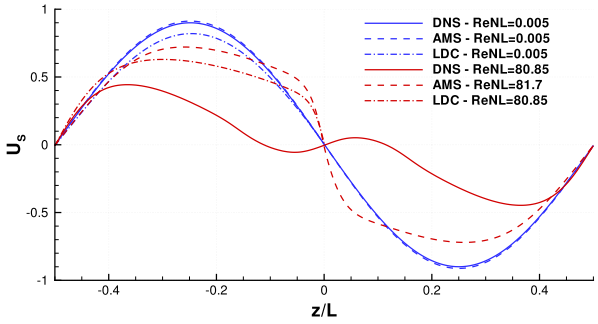


Fig. 15. Dimensionless streaming velocity along the axis. Comparison of DNS (solid lines), AMS (dashed lines) and Lid-Driven Cavity, LDC (dashed–dotted lines) results, $R/\delta_\nu = 50$, for slow-streaming (in blue) and fast-streaming (in red). (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

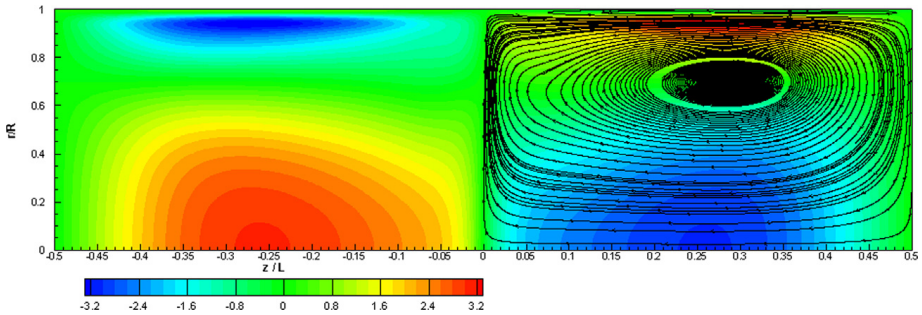


Fig. 16. AMS results, $R/\delta_\nu = 50$. Isolines of the axial streaming velocity colored by its value and the streamlines of the streaming flow. (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

number $Re = \frac{4U_s}{\lambda}\frac{R^2}{\nu}$ that characterizes the streaming flow and separates the linear from the nonlinear regime. This number is proportional to the nonlinear Reynolds number Re_{NL} only when the streaming flow is of order $M^2 c_0$.

The time evolution of outer streaming was mimicked by analyzing a lid-driven flow. It was confirmed that in a first stage, the outer fast streaming cells are created due to momentum diffusion in the radial direction and that in a second stage, the streaming cells are distorted due to convection in the axial direction. But no extra cell is created in the lid-driven cavity.

Nonlinear inertial effects on the established streaming flow were further investigated using a numerical approach that solves the full streaming flow equations with an imposed monofrequency acoustic wave source computed from the DNS. These simulations as well as the lid-driven cavity simulations show similar results: The streaming patterns in the core of the waveguide are different than those observed in DNS simulations and experiments.

Therefore inertial effects cannot be considered as the leading phenomenon to explain the mutation of streaming at high acoustic levels. Nonlinear interactions between the streaming flow and acoustics have to be considered, which will be the scope of further studies.

Acknowledgment

The authors wish to thank J. Gilbert for many fruitful discussions on this work.

References

[1] G.W. Swift, D.L. Gardner, S. Backhaus, Acoustic recovery of lost power in pulse tube refrigerators, J. Acoust. Soc. Am. 105 (1999) 711–724.
[2] L. Rayleigh, On the circulation of air observed in Kundt's tubes, and on some allied acoustical problems, Philos. Trans. R. Soc. 175 (1884) 1–21.
[3] H. Schlichting, Berechnung ebener periodischer Grenzschicht- strommungen [calculation of plane periodic boundary layer streaming], Phys. Zcit. 33 (1932) 327–335.
[4] W.L. Nyborg, Acoustic streaming, in: W.P. Mason (Ed.), Physical Acoustics, Vol. 2B, Academic Press, New York, 1965, pp. 265–331.
[5] P.J. Westervelt, The theory of steady rotational flow generated by sound fields, J. Acoust. Soc. Am. 25 (1953) 60–67.
[6] O.V. Rudenko, S.I. Soluyan, Theoretical Fundations of Non- Linear Acoustics, English Translation, Plenum, New York, 1977, p. 187-211.
[7] N. Rott, The influence of heat conduction on acoustic streaming, Z. Angew. Math. Phys. 25 (1974) 417–421.
[8] Q. Qi, The effect of compressibility on acoustic streaming near a rigid boundary for a plane traveling wave, J. Acoust. Soc. Am. 94 (1993) 1090–1098.
[9] H. Bailliet, V. Gusev, R. Raspet, R.A. Hiller, Acoustic streaming in closed thermoacoustic devices, J. Acoust. Soc. Am. 110 (2001) 1808–1821.
[10] M.F. Hamilton, Y.A. Ilinskii, E.A. Zabolotskaya, J. Acoust. Soc. Am. 114 (6) (2003) 3092–3101.
[11] J.T. Stuart, Double boundary layer in oscillatory viscous flow, J. Fluid Mech. 24 (1966) 673–987.
[12] J. Lighthill, Acoustic streaming, J. Sound Vib. 61 (1978) 391–418.
[13] V.E. Gusev, O.V. Rudenko, Nonsteady quasi-one-dimensional acoustic streaming in unbounded volumes with hydrodynamic nonlinearity, Sov. Phys. - Acoust. 25 (1979) 493–497.

[14] N. Riley, Streaming from a cylinder due to an acoustic source, J. Fluid Mech. 180 (1987) 319–326.
[15] L. Menguy, J. Gilbert, Non-linear acoustic streaming accompanying a plane stationary wave in a guide, Acta Acust. 86 (2000) 249–259.
[16] A. Gopinath, A.F. Mills, Convective heat transfer due to acoustic streaming across the ends of a Kundt tube, J. Heat Transfer 116 (1994) 47–53.
[17] M. Kawahashi, M. Arakawa, Nonlinear phenomena induced by finite-amplitude oscillation of air column in closed duct, JSME Int. J. 39 (1996) 280–286.
[18] M.K. Aktas, B. Farouk, Numerical simulation of acoustic streaming generated by finite-amplitude resonant oscillations in an enclosure, J. Acoust. Soc. Am. 116 (5) (2004) 2822–2831.
[19] V. Daru, D. Baltean-Carlès, C. Weisman, P. Debesse, G. Gandikota, Two-dimensional numerical simulations of nonlinear acoustic streaming in standing waves, Wave Motion 50 (2013) 955–963.
[20] A.A. Gubaidullin, A.V. Yakovenko, Effects of heat exchange and nonlinearity on acoustic streaming in a vibrating cylindrical cavity, J. Acoust. Soc. Am. 137 (2015) 3281–3287.
[21] A.A. Gubaidullin, A.V. Pyatkova, Acoustic streaming with allowance for heat transfer, Acoust. Phys. 62 (3) (2016) 300–305.
[22] C. Scalo, S.K. Lele, L. Hesselink, Linear and nonlinear modelling of a theoretical travelling-wave thermoacoustic heat engine, J. Fluid Mech. 766 (2015) 368–404.
[23] M. Cervenka, M. Bednarik, Variety of acoustic streaming in 2D resonant channels, Wave Motion 66 (2016) 21–30.
[24] A. Boufermel, N. Joly, P. Lotton, M. Amari, V. Gusev, Velocity of mass transport to model acoustic streaming: Numerical application to annular resonators, Acta Acust. United Acust. 97 (2) (2011) 219–227.
[25] S. Boluriaan, P.J. Morris, Numerical simulation of acoustic streaming in high amplitude standing wave, in: AAIA Paper 2003–3152 (9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit, 12–14 May 2003, Hilton Head, South Carolina).
[26] M. Thompson, A. Atchley, M. Maccarone, Influences of a temperature gradient and fluid inertia on acoustic streaming in a standing wave, J. Acoust. Soc. Am. 117 (2005) 1839–1849.
[27] S. Moreau, H. Bailliet, J.-C. Valière, Measurements of inner and outer streaming vortices in a standing waveguide using laser doppler velocimetry, J. Acoust. Soc. Am. 123 (2008) 640–664.
[28] I. Reyt, H. Bailliet, J.C. Valière, Experimental investigation of acoustic streaming in a cylindrical wave guide up to high streaming Reynolds numbers, J. Acoust. Soc. Am. 135 (2014) 27–37.
[29] I. Reyt, V. Daru, H. Bailliet, S. Moreau, J.C. Valière, D. Baltean-Carlès, C. Weisman, Fast acoustic streaming in standing waves: Generation of an additional outer streaming cell, J. Acoust. Soc. Am. 134 (3) (2013) 1791–1801.
[30] C. Olivier, G. Penelet, G. Poignand, J. Gilbert, P. Lotton, Weakly nonlinear propagation in thermoacoustic engines: A numerical study of higher harmonics generation up to the appearance of shock waves, Acta Acust. United Acust. 101 (5) (2015) 941–949.
[31] B. Moudjed, V. Botton, D. Henry, H. Ben Hadid, J.-P. Garandet, Scaling and dimensional analysis of acoustic streaming jets, Phys. Fluids 26 (2014) 093602.
[32] M. Amari, V. Gusev, N. Joly, Temporal dynamics of the sound wind in acoustitron, Acta Acust. United Acust. 89 (2003) 1008–1024.
[33] J.-C. Valière, S. Moreau, H. Bailliet, Development of laser techniques for acoustic boundary layer measurements. Part I: LDV signal processing for high acoustic displacements, Acta Acust. United Acust. 95 (2009) 585–594.

D. Baltean-Carlès, V. Daru, C. Weisman, S. Tabakova, H. Bailliet
An unexpected balance between outer Rayleigh streaming sources
J. Fluid Mech. 867, 985-1011, 2019.

J. Fluid Mech. (2019), *vol.* 867, *pp.* 985–1011. © Cambridge University Press 2019
doi:10.1017/jfm.2019.111

An unexpected balance between outer Rayleigh streaming sources

D. Baltean-Carlès[1,3], V. Daru[2,3], C. Weisman[1,3,†], S. Tabakova[4] and H. Bailliet[5]

[1]Sorbonne-Université, Faculté des Sciences et Ingénierie, UFR d'Ingénierie, 4 Place Jussieu, 75005 Paris, France

[2]DynFluid Lab., ENSAM, 151 boulevard de l'hôpital, 75013, Paris, France

[3]LIMSI, CNRS, Université Paris-Saclay, Bât. 508, Rue John Von Neumann, Campus Universitaire, F-91405 Orsay CEDEX, France

[4]Institute of Mechanics, BAS, 4 acad. G. Bontchev, 1113 Sofia, Bulgaria

[5]Institut Pprime, CNRS - Université de Poitiers - ISAE-ENSMA, ENSIP, 6 Rue Marcel Doré, Bâtiment B17 - BP 633, 86022 Poitiers CEDEX, France

(Received 25 July 2018; revised 20 December 2018; accepted 4 February 2019)

Acoustic streaming generated by a plane standing wave between two infinite plates or inside a cylindrical tube is considered, under the isentropic flow assumption. A two-dimensional analysis is performed in the linear case of slow streaming motion, based on analytical formal solutions of separate problems, each associated with a specific source term (Reynolds stress term). In order to obtain these analytical solutions, a necessary geometrical hypothesis is that $(R/L)^2 \ll 1$, where R and L are the guide half-width (or radius) and length. The effect of the two source terms classically taken into account is quantified in order to derive the dependence of the maximum axial streaming velocity on the axis as a function of the ratio R/δ_ν, where δ_ν is the acoustic boundary layer thickness. The effect of two other source terms that are usually neglected, is then analysed. It is found that one of these terms can generate a counter-rotating streaming flow. While negligible for very narrow guides, this term can become important for some values of the aspect ratio L/R.

Key words: acoustics, boundary layers, low-Reynolds-number flows

1. Introduction

Rayleigh streaming generated by a plane standing wave between two infinite plates or inside a cylindrical tube is considered in the present paper. This acoustic wind is a mean flow generated by Reynolds stresses in the Stokes boundary layer formed along the solid walls of an acoustic guide (with no other mean flow and a no-slip boundary condition on the guide walls). It is usually referred to as Rayleigh streaming because Lord Rayleigh (1884) was the first to develop an analytical solution that describes the steady vortices generated in the core of the fluid in a wide channel formed by two

† Email address for correspondence: catherine.weisman@limsi.fr

Downloaded from https://www.cambridge.org/core. IP address: 82.123.107.129, on 02 Apr 2019 at 17:42:30, subject to the Cambridge Core terms of use, available at https://www.cambridge.org/core/terms. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.111

infinite parallel adiabatic plates. These vortices, also called outer cells, are the main object of the present study.

Rayleigh–Nyborg–Westervelt (RNW) classical approach. Consider a standing plane acoustic wave of wavelength λ and angular frequency ω propagating in a wide channel formed by two infinite parallel plates. Assuming that the viscous penetration depth is small compared to the channel width and that they are both small compared to the wavelength, Rayleigh (1884) established the equations that govern the second-order velocity (responsible for the streaming motion), based on successive approximations. These second-order equations were obtained in the case of slow streaming motion (associated with low acoustic amplitudes) and therefore they are linear. The source terms that create the streaming motion are provided by the solution of the first-order problem (linear acoustics). In Rayleigh's solution the first-order motion is assumed to be divergence free in the viscous boundary layer. The resulting reference solution for the second-order velocity, far away from the guide wall is

$$\bar{u}_{Rayleigh} = -\frac{3U_{ac}^2}{16c_0}\sin(2kx)\left[1-3\left(\frac{y}{R}\right)^2\right], \tag{1.1}$$

$$\bar{v}_{Rayleigh} = -\frac{3U_{ac}^2}{8c_0}kR\cos(2kx)\left[\frac{y}{R}-\left(\frac{y}{R}\right)^3\right], \tag{1.2}$$

with $\bar{u}_{Rayleigh}$ (respectively $\bar{v}_{Rayleigh}$) the axial (respectively vertical) component of the streaming velocity i.e. the time average over an acoustic period of the velocity component, U_{ac} the acoustic velocity amplitude at its antinode, c_0 the speed of sound, R the channel half-width, x the axial coordinate, k the complex wavenumber and y the distance from the guide axis. Rayleigh's analysis was applied to the case of a large cylindrical guide by Schuster & Matz (1940) yielding the following second-order velocity components:

$$\bar{u}_{Rayleigh} = -\frac{3U_{ac}^2}{8c_0}\sin(2kx)\left[1-2\left(\frac{y}{R}\right)^2\right], \tag{1.3}$$

$$\bar{v}_{Rayleigh} = -\frac{3U_{ac}^2}{8c_0}kR\cos(2kx)\left[\frac{y}{R}-\left(\frac{y}{R}\right)^3\right], \tag{1.4}$$

where here R is the cylinder radius. In order to obtain these solutions, terms in $e^{-(R-y)/\delta_\nu}$ were neglected in the complete Rayleigh solution, with $\delta_\nu = \sqrt{2\nu/\omega}$ the acoustic viscous boundary layer thickness. Here ν is the gas kinematic viscosity, related to the gas dynamic viscosity μ by the classical relation $\nu = \mu/\rho_0$, where ρ_0 is the reference gas density. This is valid far enough from the wall. These expressions show the main characteristics of Rayleigh streaming: velocities are of second order in powers of acoustic Mach number $M = U_{ac}/c_0$, with counter-rotating vortices that span $\lambda/4$ in the axial direction. The transverse streaming velocity is much smaller and has a $\lambda/4$ spatial phase shift with the axial streaming velocity.

Later Westervelt (1953) and Nyborg (1953) improved this analytical model by proposing a complete solution to the problem considered by Rayleigh. This solution is based on a vorticity equation and there is no assumption on the divergence of the acoustic velocity. The theoretical description issued from the works of Rayleigh, Westervelt and Nyborg is usually associated with the so-called RNW streaming theory Lighthill (1978).

Downloaded from https://www.cambridge.org/core. IP address: 82.123.107.129, on 02 Apr 2019 at 17:42:30, subject to the Cambridge Core terms of use, available at https://www.cambridge.org/core/terms. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.111

Sources of streaming. The analytical studies mentioned above (and most of the subsequent ones) are based on the same process of derivation of the streaming velocity: write fundamental laws of fluid motion, use a perturbation method with asymptotic expansions and then time average. As discussed by Lighthill (1978), this process leads to an equation of the form

$$\mu\nabla^2\bar{\boldsymbol{u}} = -\bar{\boldsymbol{F}} + \nabla\bar{p}, \tag{1.5}$$

where $\bar{p}$ is the second-order pressure and $\bar{\boldsymbol{F}}$ is a product of first-order quantities and their derivatives. The source terms composing $\bar{\boldsymbol{F}}$ are based on acoustic quantities. They are also referred to as Reynolds stresses.

In all studies mentioned above, the source terms that appear in the transverse momentum equation are neglected, as discussed by Lighthill (1978). The averaged acoustic velocity source term $\bar{\boldsymbol{F}}$ (Reynolds stresses) is approximated as the sum of the two largest source terms, that are associated with the axial momentum equation. The variation of these two source terms with the radius was analysed analytically in annular resonators, in the case of a pure travelling wave by Amari, Gusev & Joly (2003). An investigation of the streaming flow generation through the analysis of the contribution of each source term was conducted recently by Paridaens, Kouidri & Jebali Jerbi (2013), in the case of a thermoacoustic system. Again, only the two dominant Reynolds stress terms were considered.

One of the goals of the present study is to show that one of the terms that compose $\bar{\boldsymbol{F}}$ and that is classically neglected in the analysis of Rayleigh streaming can be responsible for drastic change of acoustic streaming patterns within a given range of guide geometry. It will be shown that it can be the case even in the linear regime. A modified analytical expression for the streaming velocity is proposed, that takes into account the other two acoustic source terms associated with the transverse component of the momentum equation. This represents an improved approximation for the Rayleigh problem. This enriched solution exhibits an unexpected balance between outer Rayleigh streaming sources.

Beyond RNW streaming. As stated above, RNW analysis concerns streaming in wide channels outside the viscous boundary layers that results in large counter-rotating vortices usually referred to as outer vortices. These vortices are actually generated by a driving mean flow taking place inside the viscous boundary layers, associated with slender counter-rotating vortices usually referred to as inner streaming vortices. A sketch of inner and outer streaming cells, as well as transverse and axial profiles of the axial streaming velocity are shown in figure 1, in the case of a $\lambda/2$ resonator. Schlichting (1932) first described the inner streaming vortices, under the hypothesis of incompressible flow. Reviews of theoretical investigations for inner and outer streaming were proposed by Nyborg (1965) and Zarembo (1971). As shown by figure 1, the limit between inner and outer streaming cells is generally considered to be equal to $3\delta_\nu$ from the wall. In the present study the evolution of this limit with the dimensions of the channel will be briefly addressed.

Rott (1974) improved the description of outer streaming by taking into account thermal effects and Qi (1993) included the fluid compressibility and temperature effects to improve the description of inner streaming. Investigations of streaming in channels of arbitrary width with a mean temperature gradient were performed by Waxler (2001) and Bailliet *et al.* (2001) in the context of thermoacoustic applications where heat transport associated with the streaming flow is an important mechanism that may limit the efficiency of the systems. Sugimoto (2016) obtained a nonlinear

Downloaded from https://www.cambridge.org/core. IP address: 82.123.107.129, on 02 Apr 2019 at 17:42:30, subject to the Cambridge Core terms of use, available at https://www.cambridge.org/core/terms. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.111

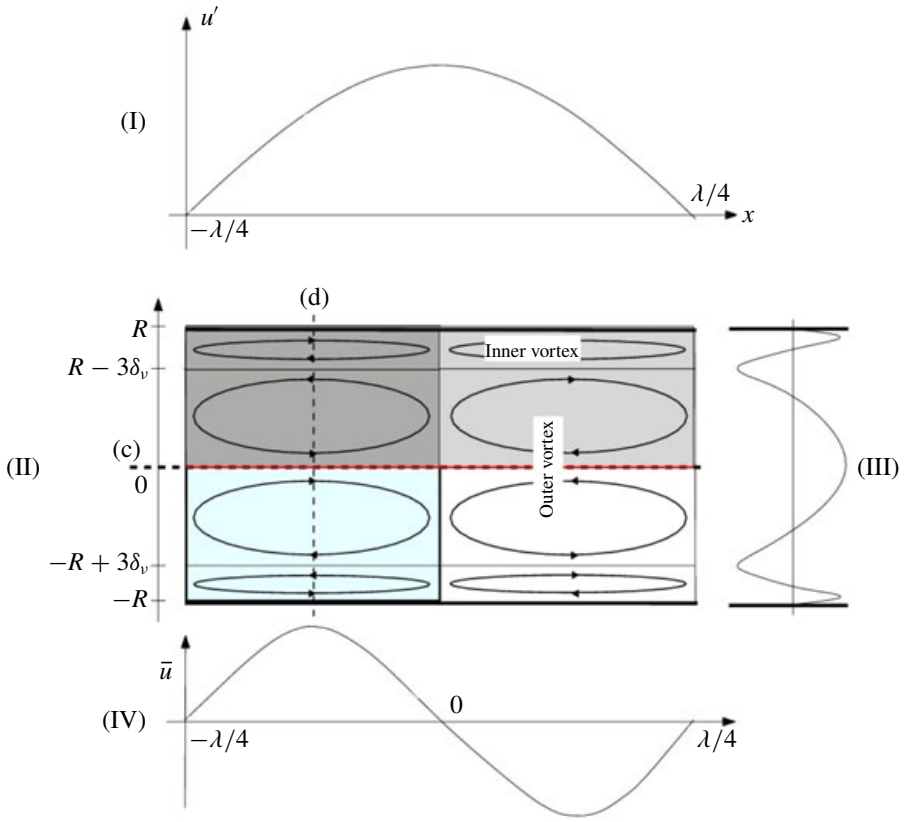


FIGURE 1. (Colour online) RNW theory. (II) sketch of inner and outer streaming cells in the case of two infinite parallel plates, showing lines (c) and (d). (I) axial acoustic velocity u' profile along line (c). (III) axial streaming velocity $\bar{u}$ profile along line (d). (IV) axial streaming velocity $\bar{u}$ profile along line (c).

thermoacoustic wave equation inside narrow channels and the associated streaming flow results can be applied to pore modelling in thermoacoustic engines.

Also in thermoacoustics the overall mass transport velocity is usually considered instead of the time-averaged velocity:

$$\overline{\boldsymbol{u}}^M = \frac{\overline{\rho \boldsymbol{u}}}{\bar{\rho}}. \tag{1.6}$$

Here the previously considered $\bar{\boldsymbol{u}}$ velocity is called Eulerian streaming velocity. Hamilton, Ilinskii & Zabolotskaya (2003*a*), Olson & Swift (1997) adopted a Lagrangian approach, considering the density weighted average velocity $\overline{\boldsymbol{u}}^M$, also referred to as the Favre average (Favre 1965), because it is responsible for effective mass and heat transport. Hamilton *et al.* (2003*a*), Hamilton, Ilinskii & Zabolotskaya (2003*b*) proposed an analytical solution for the average mass transport velocity with or without temperature effects. They studied the influence of the channel width on the relative size of the inner and outer streaming vortices. Most of the present study is conducted following an Eulerian approach but the consequences of the results presented thereafter will also be briefly discussed following a Lagrangian approach.

Thermoacoustic applications which require large amplitude acoustic waves also led the authors to reconsider the hypothesis of slow streaming that is one of the bases of RNW streaming, as discussed in the extensive review proposed by Boluriaan & Morris (2003). In the last decades experimental studies (Thompson, Atchley & Maccarone

Downloaded from https://www.cambridge.org/core. IP address: 82.123.107.129, on 02 Apr 2019 at 17:42:30, subject to the Cambridge Core terms of use, available at https://www.cambridge.org/core/terms. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.111

2004; Moreau, Bailliet & Valière 2008) and numerical studies (Menguy & Gilbert 2000*a*; Daru *et al.* 2013; Reyt *et al.* 2013) on acoustic streaming from slow to fast regimes were performed (the fast regime is associated with high amplitude acoustics). These studies exhibited streaming behaviour departing from the RNW theory: in the fast regime the dependence of the streaming velocity on the acoustic velocity is no longer parabolic and new streaming cells can emerge near the guide axis. In the slow regime, it was found that the axial streaming velocity along the axis, when normalized by Rayleigh's solution, is a linear function of the ratio δ_ν/R (Daru *et al.* 2017*a*). Another goal of the present study is to quantify further this linear function, and also to show a dependency on the aspect ratio (length over width or length over radius) of the wave guide.

The hypotheses are listed in § 2, along with a description of the geometries under study. Section 3 then focuses on the rectangular case. The classical Rayleigh solution of the (first order) acoustic problem is described (§ 3.1) and the source terms for the streaming flow are deduced (§ 3.2). An analysis of the influence of each of the source terms is conducted and their effect on streaming flow patterns is highlighted (§§ 3.2.1–3.2.6). The effect of both Reynolds stress source terms, classically considered, is shown first, and then the effects of the third and fourth source terms, classically neglected, are also discussed.

The influence of the aspect ratio of the channel geometry on the streaming velocity is quantified. The results show that for specific values of the aspect ratio new streaming counter-rotating cells appear next to the guide axis. Then other characteristics of the streaming flow are examined in §§ 3.2.7–3.2.9: slip velocity, mass transport velocity, transverse component of streaming velocity. The axisymmetric case is briefly addressed in § 4.

2. Position of the problem

In the present approach, the discussed geometry is valid for both a cylindrical acoustic guide and acoustic flow between two infinite parallel plates. We consider a rectangular (or cylindrical) channel, of length L, and half-width (or radius) R, filled with a perfect gas of density ρ_0 and pressure p_0. The sound velocity in the ideal gas is $c_0 = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$, γ being the specific heat ratio ($\gamma = 1.4$ for air). We use a coordinate system (x, y) (or (x, r)) with the origin located at the centre of the channel, that is $-L/2 \leqslant x \leqslant L/2$, $-R \leqslant y \leqslant R$ (or $0 \leqslant r \leqslant R$).

By exploiting the symmetry of the problem, only the upper half-channel $0 \leqslant y \leqslant R$ is considered in the plane case. The symbolic computational software Mathematica (Wolfram 2018) is used to solve the equations throughout this study.

Throughout this work, the angular frequency is always considered to be equal to ω_0, the angular frequency corresponding to the acoustic standing wave resonating at its first mode along x (so-called $\lambda/2$ mode), in the case of a non-viscous gas ($\omega_0 = \pi c_0/L$).

It is assumed that an acoustic wave propagates laminarly along the x axis of the guide. There is no mean flow apart from acoustic streaming. A main hypothesis is that the wave is plane. More precisely the condition that only plane modes propagate is that the working frequency is lower than the first mode cutoff frequency. In cylindrical guides the cutoff frequency is $f_{c(1,0)} = 1.84c_0/2\pi R$ (e.g. Pierce 1989) and the condition of a plane wave is equivalent to $\lambda > 2\pi/1.84R$. In the case of a half-wavelength guide, the plane wave condition becomes $L/R > 1.7$. For rectangular channels the cutoff frequency is $c_0/2R$ or equivalently $L/R > 1$.

Downloaded from https://www.cambridge.org/core. IP address: 82.123.107.129, on 02 Apr 2019 at 17:42:30, subject to the Cambridge Core terms of use, available at https://www.cambridge.org/core/terms. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.111

Another important hypothesis is that the effect of viscosity is assumed to be concentrated in the near wall region, that is, volume viscosity is neglected because the real part of the wavenumber associated with volume viscosity is negligible compared to the one associated with the viscous boundary layer. This hypothesis is valid if $1/(ReSh) \ll 1$, where $Re = \rho_0 c_0^2/(\mu\omega)$ is the acoustic Reynolds number and $Sh = \delta_\nu/R$ is the Shear number (Menguy & Gilbert 2000*b*).

We also make the assumption of an isentropic flow, in order to exclude thermal effects on streaming that are not within the scope of this work. Under these hypotheses, acoustic pressure is independent of y, and, as a consequence of isentropy, so is acoustic density.

Finally, several hypotheses on streaming flow are imposed. Only channels with moderate to large width values ($R/\delta_\nu \gtrsim 6$) are considered here in which outer streaming vortices do exist (Bailliet *et al.* 2001; Hamilton *et al.* 2003*a*). Another hypothesis is that $(R/L)^2 \ll 1$ which means that momentum diffusion in the axial direction is negligible with respect to momentum diffusion in the transverse direction. Moreover the present study concerns the slow streaming regime, in which the streaming flow equations are linear. This hypothesis is valid if inertial effects are negligible, which is usually related to small values of the nonlinear Reynolds number $Re_{NL} = (M/Sh)^2 \ll 1$ (Menguy & Gilbert 2000*b*).

3. Flow between two parallel plates

3.1. *Acoustics*

Let us note u' and v' the axial and vertical components of the acoustic velocity, and $\rho' = \rho - \rho_0$, $p' = p - p_0$ the associated density and pressure fluctuations. Using the hypothesis $\partial^2 u'/\partial x^2 \ll \partial^2 u'/\partial y^2$, the linearized equations governing acoustics are

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) = 0 \tag{3.1a}$$

$$\rho_0 \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \tag{3.1b}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial y} = 0. \tag{3.1c}$$

Using the assumption of isentropic flow, we have $p' = c_0^2 \rho'$.

The following change of variables is introduced

$$\hat{y} = y/\delta_\nu, \quad \hat{x} = x/L, \quad \hat{t} = t/T, \quad \hat{R} = R/\delta_\nu, \quad \hat{L} = L/\delta_\nu, \tag{3.2a–e}$$

T being the acoustic time period so that $L/T = (1/2)c_0$. The half-channel is then described by $-1/2 \leqslant \hat{x} \leqslant 1/2$, $0 \leqslant \hat{y} \leqslant \hat{R}$ and the dependency on $\hat{x}$ is of $e^{i\pi\hat{x}}$ form. Let us note that this is only a convenient change of variables that allows us to work with non-dimensional parameters $\hat{R}$ and $\hat{L}$ instead of dimensional values of R and L. Velocity, pressure and density are left in dimensional units.

The boundary and symmetry conditions for u' and v' with respect to $\hat{y}$ are

$$u' = 0 \quad \text{at } \hat{y} = \hat{R}; \qquad \frac{\partial u'}{\partial \hat{y}} = 0 \quad \text{at } \hat{y} = 0, \tag{3.3a,b}$$

$$v' = 0 \quad \text{at } \hat{y} = 0 \text{ and } \hat{y} = \hat{R}. \tag{3.3c}$$

Downloaded from https://www.cambridge.org/core. IP address: 82.123.107.129, on 02 Apr 2019 at 17:42:30, subject to the Cambridge Core terms of use, available at https://www.cambridge.org/core/terms. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.111

Following Rayleigh (1884), the axial acoustic velocity is expressed as

$$u'(\hat{x},\hat{y},\hat{t}) = U_{ac}\cos(\pi\hat{x})\,[(-1+\mathrm{e}^{\hat{y}-\hat{R}}\cos(\hat{R}-\hat{y}))\cos(2\pi\hat{t}) + \mathrm{e}^{\hat{y}-\hat{R}}\sin(\hat{R}-\hat{y})\sin(2\pi\hat{t})], \tag{3.4}$$

where U_{ac} is the acoustic amplitude at the velocity antinode.

Using the hypothesis that ρ' depends on $\hat{x}$ and $\hat{t}$ only, together with the boundary conditions, equation (3.1*a*) is integrated with respect to $\hat{y}$ to obtain the vertical acoustic velocity component

$$v'(\hat{x},\hat{y},\hat{t}) = -\frac{\pi U_{ac}}{2\hat{R}}\frac{1}{\hat{L}}\sin(\pi\hat{x})\,[\hat{y}(\cos(2\pi\hat{t})+\sin(2\pi\hat{t}))+\hat{R}\mathrm{e}^{\hat{y}-\hat{R}}(\sin(\hat{R}-\hat{y}-2\pi\hat{t}) - \cos(\hat{R}-\hat{y}-2\pi\hat{t}))+\mathrm{e}^{-\hat{R}}(\hat{R}-\hat{y})(\cos(\hat{R}-2\pi\hat{t})-\sin(\hat{R}-2\pi\hat{t}))]\,. \tag{3.5}$$

Finally the density fluctuation ρ' is obtained by integrating (3.1*a*) with respect to time

$$\rho'(\hat{x},\hat{t}) = \frac{\rho_0 U_{ac}}{2c_0\hat{R}}\sin(\pi\hat{x})\,[(1-2\hat{R})\sin(2\pi\hat{t})-\cos(2\pi\hat{t}) + \mathrm{e}^{-\hat{R}}(\cos(\hat{R}-2\pi\hat{t})+\sin(\hat{R}-2\pi\hat{t}))]\,. \tag{3.6}$$

3.2. *Streaming flow*

The averaged equations are derived from the Navier–Stokes equations with each variable f divided into a fluctuating, periodic, component f', and a steady component $\overline{f}$ (corresponding to the streaming flow) according to

$$f = \overline{f} + f'. \tag{3.7}$$

where the overline denotes the average operator in time over one period. For any two variables f and g

$$\overline{fg} = \overline{f}\,\overline{g} + \overline{f'g'}. \tag{3.8}$$

Using the hypotheses that $\partial^2/\partial x^2 \ll \partial^2/\partial y^2$ and $Re_{NL} = (M/Sh)^2 \ll 1$, the Navier–Stokes equations are averaged in time over one period, linearized and simplified as

$$\begin{cases} \rho_0\left(\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\dfrac{\partial\overline{v}}{\partial y}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial x}(\overline{\rho' u'}) - \dfrac{\partial}{\partial y}(\overline{\rho' v'}) \\ \mu\dfrac{\partial^2\overline{u}}{\partial y^2} = \dfrac{\partial\overline{p}}{\partial x} + \rho_0\dfrac{\partial}{\partial x}(\overline{u'u'}) + \rho_0\dfrac{\partial}{\partial y}(\overline{u'v'}) \\ \mu\dfrac{\partial^2\overline{v}}{\partial y^2} = \dfrac{\partial\overline{p}}{\partial y} + \rho_0\dfrac{\partial}{\partial x}(\overline{u'v'}) + \rho_0\dfrac{\partial}{\partial y}(\overline{v'v'}). \end{cases} \tag{3.9}$$

where $\overline{u}$, $\overline{v}$ and $\overline{p}$ are the averaged velocity components and pressure.

Making the same change of variables as in § 3.1, equations (3.9) above are rewritten as

$$\begin{cases} \rho_0\left(\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial\hat{x}}+\hat{L}\dfrac{\partial\overline{v}}{\partial\hat{y}}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial\hat{x}}(\overline{\rho' u'}) - \hat{L}\dfrac{\partial}{\partial\hat{y}}(\overline{\rho' v'}) \\ \rho_0\dfrac{\pi}{2}c_0\dfrac{\partial^2\overline{u}}{\partial\hat{y}^2} = \dfrac{\partial\overline{p}}{\partial\hat{x}} + \rho_0\dfrac{\partial}{\partial\hat{x}}(\overline{u'u'}) + \rho_0\hat{L}\dfrac{\partial}{\partial\hat{y}}(\overline{u'v'}). \\ \rho_0\dfrac{\pi}{2}c_0\dfrac{\partial^2\overline{v}}{\partial\hat{y}^2} = \hat{L}\dfrac{\partial\overline{p}}{\partial\hat{y}} + \rho_0\dfrac{\partial}{\partial\hat{x}}(\overline{u'v'}) + \rho_0\hat{L}\dfrac{\partial}{\partial\hat{y}}(\overline{v'v'}). \end{cases} \tag{3.10}$$

Downloaded from https://www.cambridge.org/core. IP address: 82.123.107.129, on 02 Apr 2019 at 17:42:30, subject to the Cambridge Core terms of use, available at https://www.cambridge.org/core/terms. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.111

The boundary conditions for $\overline{u}$ and $\overline{v}$ are

$$\overline{u}=0 \quad \text{at } \hat{y}=\hat{R}; \qquad \frac{\partial \overline{u}}{\partial \hat{y}}=0 \quad \text{at } \hat{y}=0, \tag{3.11a,b}$$

$$\overline{v}=0 \quad \text{at } \hat{y}=0 \text{ and } \hat{y}=\hat{R}, \tag{3.11c}$$

$$\int_0^{\hat{R}} \overline{u}\,\mathrm{d}\hat{y}=0. \tag{3.11d}$$

The third condition in (3.11) is obtained by integrating the continuity equation in (3.10) over the half-width of the channel.

The expression of the five averaged products (Reynolds stresses) on the right-hand side of (3.10) are obtained from (3.4), (3.5) and (3.6):

$$\begin{aligned}\overline{\rho' u'} &= \frac{\rho_0 U_{ac}^2}{8c_0\hat{R}}\sin(2\pi\hat{x})\{1-\mathrm{e}^{\hat{y}-\hat{R}}(\cos(\hat{R}-\hat{y})+(2\hat{R}-1)\sin(\hat{R}-\hat{y}))\\ &\quad+\mathrm{e}^{\hat{y}-2\hat{R}}(\cos\hat{y}+\sin(\hat{y}))-\mathrm{e}^{-\hat{R}}(\cos(\hat{R})+\sin(\hat{R}))\},\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}\overline{\rho' v'} &= \frac{\pi\rho_0 U_{ac}^2}{4c_0\hat{R}}\frac{1}{\hat{L}}\sin^2(\pi\hat{x})\{\hat{y}+\mathrm{e}^{\hat{y}-\hat{R}}(-\hat{R}\cos(\hat{R}-\hat{y})+\sin(\hat{R}-\hat{y})(1-\hat{R}))\\ &\quad+\mathrm{e}^{\hat{y}-2\hat{R}}\sin\hat{y}+\mathrm{e}^{-\hat{R}}((\hat{R}-\hat{y})\cos\hat{R}+(\hat{R}-\hat{y}-1)\sin\hat{R})\},\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\overline{u'u'}=\tfrac{1}{2}U_{ac}^2\cos^2(\pi\hat{x})(1+\mathrm{e}^{2(\hat{y}-\hat{R})}-2\mathrm{e}^{\hat{y}-\hat{R}}\cos(\hat{R}-\hat{y})), \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}\overline{u'v'} &= \frac{\pi U_{ac}^2}{8\hat{R}\hat{L}}\sin(2\pi\hat{x})\,\{\hat{y}+\mathrm{e}^{\hat{y}-\hat{R}}(-(\hat{R}+\hat{y})\cos(\hat{R}-\hat{y})+(\hat{R}-\hat{y})\sin(\hat{R}-\hat{y}))\\ &\quad+\hat{R}\mathrm{e}^{2(\hat{y}-\hat{R})}+\mathrm{e}^{\hat{y}-2\hat{R}}((\hat{y}-\hat{R})\cos\hat{y}+(\hat{R}-\hat{y})\sin\hat{y})\\ &\quad+\mathrm{e}^{-\hat{R}}((\hat{R}-\hat{y})\cos\hat{R}-(\hat{R}-\hat{y})\sin\hat{R})\},\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}\overline{v'v'} &= \frac{\pi U_{ac}^2}{\hat{L}^2}\frac{1}{4\hat{R}^2}\sin^2(\pi\hat{x})\,\{\hat{y}^2-2\mathrm{e}^{\hat{y}-\hat{R}}\hat{y}\hat{R}\cos(\hat{R}-\hat{y})+\mathrm{e}^{2(\hat{y}-\hat{R})}\hat{R}^2\\ &\quad+2\hat{R}\mathrm{e}^{\hat{y}-2\hat{R}}(\hat{y}-\hat{R})\cos\hat{y}+2\mathrm{e}^{-\hat{R}}\hat{y}(\hat{y}+\hat{R})\cos\hat{R}+\mathrm{e}^{-2\hat{R}}(\hat{R}-\hat{y})^2\}\,.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Under the hypothesis $\hat{R}\gtrsim 6$, terms of the same magnitude as $\mathrm{e}^{-\hat{R}}$ or smaller can be neglected in the previous expressions of the averaged products. Nevertheless, all symbolic calculations were performed using the full expressions.

Following Westervelt (1953), we take the curl of the momentum equations, which eliminates pressure, and use the assumption $\partial\overline{v}/L\partial\hat{x}\ll\partial\overline{u}/\delta_\nu\partial\hat{y}$, to obtain

$$-\frac{\pi}{2}c_0\hat{L}\frac{\partial^3\overline{u}}{\partial\hat{y}^3}=-\hat{L}\frac{\partial^2(\overline{u'u'})}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}-\hat{L}^2\frac{\partial^2(\overline{u'v'})}{\partial\hat{y}^2}+\frac{\partial^2(\overline{u'v'})}{\partial\hat{x}^2}+\hat{L}\frac{\partial^2(\overline{v'v'})}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}. \tag{3.17}$$

Classical studies (e.g. Rayleigh 1884, Westervelt 1953, Bailliet *et al.* 2001, Hamilton *et al.* 2003*a*) always consider an added approximation in which the last two source terms on the right-hand side of (3.17) are negligible. Neglecting these two terms was justified by an analysis of the orders of magnitude, based on the variations in the

Downloaded from https://www.cambridge.org/core. IP address: 82.123.107.129, on 02 Apr 2019 at 17:42:30, subject to the Cambridge Core terms of use, available at https://www.cambridge.org/core/terms. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.111

viscous boundary layer. The usual assumptions are $\partial/\partial x \propto 1/\lambda \propto 1/L$ and $\partial/\partial y \propto 1/\delta_\nu$ so that $\partial/\partial\hat{x} \propto 1$ and $\partial/\partial\hat{y} \propto 1$. Therefore equations (3.14), (3.15), (3.16) yield

$$\hat{L}\frac{\partial^2(\overline{u'u'})}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}} \propto \hat{L}U_{ac}^2, \quad \hat{L}^2\frac{\partial^2(\overline{u'v'})}{\partial\hat{y}^2} \propto \hat{L}U_{ac}^2, \quad \frac{\partial^2(\overline{u'v'})}{\partial\hat{x}^2} \propto \frac{U_{ac}^2}{\hat{L}}, \quad \hat{L}\frac{\partial^2(\overline{v'v'})}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}} \propto \frac{U_{ac}^2}{\hat{L}}. \tag{3.18a–d}$$

It follows that the third and fourth terms are respectively $1/\hat{L}^2$ smaller than the first two terms.

In his analysis, Lighthill (1978) states that making a decision to keep or neglect a term should be based on an order of magnitude analysis and not a perturbation expansion alone. In the present work it will be shown that even an order of magnitude analysis on the acoustic source terms is not sufficient to neglect a term. This is because the different terms in (3.17) do not have the same $\hat{y}$ dependence; some are proportional to $\hat{y}$, others to $\hat{y}^2$ and others do not have any $\hat{y}$ dependence so that the successive integrations over $\hat{y}$ needed to obtain $\bar{u}$ from (3.17) together with the boundary conditions will change the balance between the effects of these different source terms. Even though they do not have the same order of magnitude, the source terms can have effects of the same order on the streaming velocity. Therefore, they will all be considered. (The change in balance between the source terms can take place independently of the fact that $\partial\bar{v}/L\partial\hat{x} \ll \partial\bar{u}/\delta_\nu\partial\hat{y}$, which is given by the fundamental equations for streaming (3.9). Thus the process of keeping all the terms on the right-hand side of (3.17) is consistent with neglecting the $\bar{v}$ term on its left-hand side.)

In order to analyse in detail the effect of each of the source terms, we will consider separately the four problems linked to each source term. We will normalize the solutions with Rayleigh's solution on the axis $\bar{u}_R = -(3/16)U_{ac}^2/c_0 \sin(2\pi\hat{x})$. The solution of problem i, associated with the ith source term, will be denoted by $\bar{u}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. In the following, for the sake of simplicity, the expressions for each solution $\bar{u}_i$ will be presented in an approximated form, in which terms of the same magnitude as $\mathrm{e}^{-\hat{R}}$ or smaller will be neglected with respect to terms of order $1/\hat{R}^n$, for $n \in \mathbb{N}$. However the symbolic computations are still performed using the full expressions.

3.2.1. *Problem 1: first source term*

When reducing equation (3.17) by taking into account the first source term only, the equation to be solved is

$$\frac{\pi}{2}c_0\frac{\partial^3\bar{u}_1}{\partial\hat{y}^3} = \frac{\partial^2(\overline{u'u'})}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}, \tag{3.19}$$

with boundary conditions (3.11a,b)–(3.11d), for $\bar{u}_1$. Integrating equation (3.19) and using the boundary conditions yields the following simplified solution:

$$\bar{u}_1(\hat{x},\hat{y}) = -\frac{U_{ac}^2}{16c_0}\sin(2\pi\hat{x})\left\{15\frac{\hat{y}^2}{\hat{R}^3} - \frac{15}{\hat{R}} - 6\frac{\hat{y}^2}{\hat{R}^2} + 2(1 + 2\mathrm{e}^{2(\hat{y}-\hat{R})} + 8\mathrm{e}^{\hat{y}-\hat{R}}\sin(\hat{R}-\hat{y}))\right\}. \tag{3.20}$$

Downloaded from https://www.cambridge.org/core. IP address: 82.123.107.129, on 02 Apr 2019 at 17:42:30, subject to the Cambridge Core terms of use, available at https://www.cambridge.org/core/terms. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.111

Along the axis, by normalizing with Rayleigh's solution and neglecting smaller terms, we obtain at $O(1/\hat{R})$:

$$\frac{\overline{u}_1(\hat{x}, 0)}{\overline{u}_R} = \frac{2}{3} - \frac{5}{\hat{R}}. \tag{3.21}$$

The second-order pressure gradient can also be obtained, and as expected is independent of $\hat{y}$. It is given by

$$\frac{\mathrm{d}\overline{p}_1}{\mathrm{d}\hat{x}} = \frac{\rho_0 \pi U_{ac}^2}{16} \sin(2\pi\hat{x}) \left(8 + \frac{6}{\hat{R}^2} - \frac{15}{\hat{R}^3}\right). \tag{3.22}$$

3.2.2. *Problem 2: second source term*

The equation to be solved for the acoustic streaming issued from the second source term in equation (3.17) is

$$\frac{\pi}{2} c_0 \frac{\partial^3 \overline{u}_2}{\partial \hat{y}^3} = \hat{L} \frac{\partial^2 (\overline{u'v'})}{\partial \hat{y}^2}, \tag{3.23}$$

with boundary conditions (3.11*a*,*b*)–(3.11*d*) for $\overline{u}_2$. Integrating (3.23) gives the following simplified expression for $\overline{u}_2$

$$\begin{aligned}\overline{u}_2(\hat{x}, \hat{y}) \;=\; & -\frac{U_{ac}^2}{32 c_0} \sin(2\pi\hat{x}) \left\{ \frac{1}{\hat{R}} + 3\frac{\hat{y}^2}{\hat{R}^3}(1 - 2\hat{R}) + 2(1 - 2\mathrm{e}^{2(\hat{y}-\hat{R})}) \right. \\ & \left. + \frac{4}{\hat{R}} \mathrm{e}^{\hat{y}-\hat{R}} [(-1 + 2\hat{y}) \cos(\hat{R} - \hat{y}) + (1 - 2\hat{R}) \sin(\hat{R} - \hat{y})] \right\}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Along the axis, we obtain at the order $O(1/\hat{R})$:

$$\frac{\overline{u}_2(\hat{x}, 0)}{\overline{u}_R} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6\hat{R}}, \tag{3.25}$$

and the corresponding pressure gradient is

$$\frac{\mathrm{d}\overline{p}_2}{\mathrm{d}\hat{x}} = -\frac{\rho_0 \pi U_{ac}^2}{32} \sin(2\pi\hat{x}) \left(\frac{4}{\hat{R}} - \frac{6}{\hat{R}^2} + \frac{3}{\hat{R}^3}\right). \tag{3.26}$$

3.2.3. *Analysis of the effect of the first two source terms*

It is interesting to analyse the right-hand side of the axial component of the momentum equation in (3.10). For the first problem, the right-hand side is $\mathrm{RHS}_1 = \partial\overline{p}_1/\partial\hat{x} + \rho_0(\partial/\partial\hat{x})(\overline{u'u'})$. For the second problem, the right hand side is $\mathrm{RHS}_2 = \partial\overline{p}_2/\partial\hat{x} + \rho_0\hat{L}(\partial/\partial\hat{y})(\overline{u'v'})$.

The right-hand sides are therefore composed of two terms, a pressure gradient term and a Reynolds stress term. Figure 2 shows, for $\hat{R} = 20$, at $\hat{x} = -1/4$, the transverse profile of both terms composing RHS_1 figures 2(*a*) and RHS_2 2(*b*), normalized by $\rho_0 U_{ac}^2$. Comparing figure 2(*a*,*b*) shows that the terms in RHS_2 are much smaller than in RHS_1, and also that the pressure gradient and Reynolds stress terms almost compensate each other in the core of the guide, for both problems 1 and 2. The pressure gradients of problems 1 and 2 have opposite signs, and also $\mathrm{d}\overline{p}_2/\mathrm{d}\hat{x}$ is much

Downloaded from https://www.cambridge.org/core. IP address: 82.123.107.129, on 02 Apr 2019 at 17:42:30, subject to the Cambridge Core terms of use, available at https://www.cambridge.org/core/terms. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.111

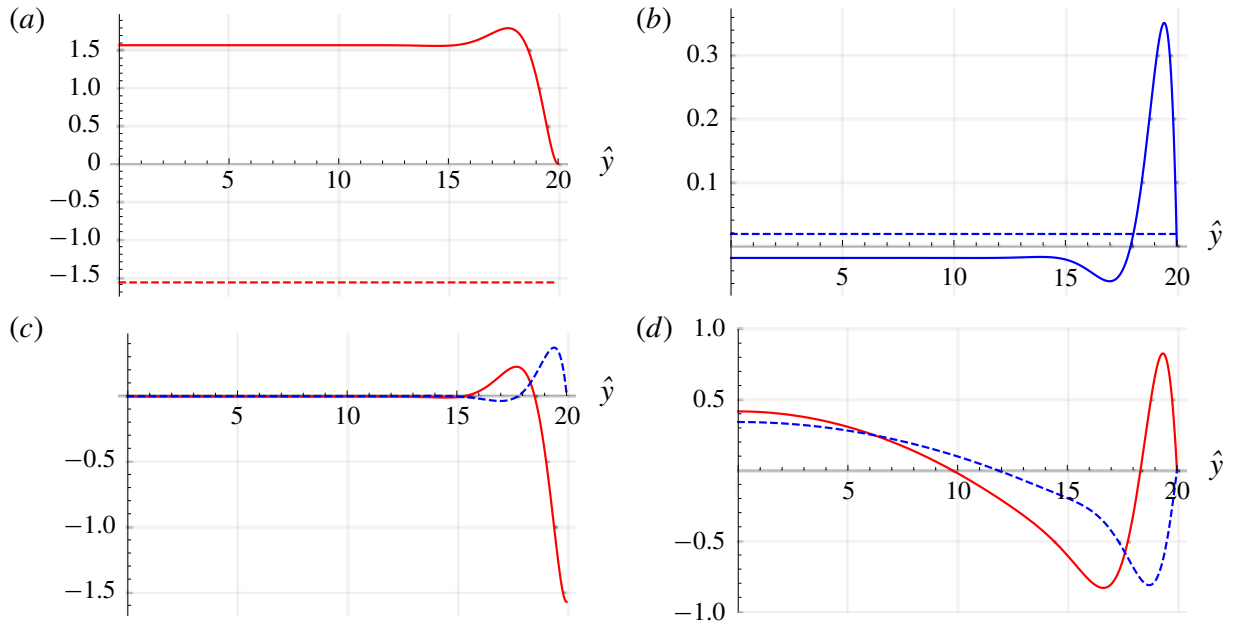


FIGURE 2. (Colour online) Variation with $\hat{y}$, for $\hat{x} = -1/4$ and $\hat{R} = 20$ of (*a*) Reynolds stresses term (red solid line) and normalized pressure gradient term (red dashed line) in RHS_1, (*b*) Reynolds stresses term (blue solid line) and normalized pressure gradient term (blue dashed line) in RHS_2, (*c*) total normalized RHS_1 (red solid line) and RHS_2 (blue dashed line), (*d*) normalized axial streaming velocity $\overline{u}_1/\overline{u}_R$ (red solid line) and $\overline{u}_2/\overline{u}_R$ (blue dashed line).

smaller than $\mathrm{d}\overline{p}_1/\mathrm{d}\hat{x}$, with $\mathrm{d}\overline{p}_2/\mathrm{d}\hat{x} \to 0$ when $\hat{R}$ becomes large (refer to equations (3.22) and (3.26)).

Figure 2(*c*) shows the transverse profile of the complete right-hand sides RHS_1 and RHS_2, normalized by $\rho_0 U_{ac}^2$, again for $\hat{R} = 20$, at $\hat{x} = -1/4$. This figure shows that the two complete right-hand sides are of the same order, with significant values only near the wall. This stresses the fact that streaming is generated only by viscous boundary layer effects. The outer streaming is created from momentum diffusion of the velocity created near the guide wall, and not from pressure gradient effects. As stated by Menguy & Gilbert (2000*a*) (p. 253): pressure is created directly by the acoustic wave, and not by the mean flow. Outer streaming flow can thus be considered as a driven flow, similar to a Couette flow (see the driven cavity analogy developed in Daru *et al.* (2017*b*)).

The resulting normalized axial streaming velocity transverse profiles are plotted on figure 2(*d*). The following observation can be made: the first problem is responsible for the inner streaming (Schlichting streaming), while the second problem only contributes to the outer streaming (Rayleigh streaming), as also noticed in Paridaens *et al.* (2013). This is related to the fact that RHS_2 vanishes for $\hat{y} = \hat{R}$, while RHS_1 does not, as can be seen in figure 2(*c*).

Let us now consider the superposition of problems 1 and 2 considered above, which is usually assumed in the literature to give the total axial streaming velocity $\overline{u}_{1+2} = \overline{u}_1 + \overline{u}_2$. Figure 3 shows the normalized axial streaming velocity transverse profiles $\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$ and $\overline{u}_{1+2}$. This figure also illustrates that the first problem is responsible for the inner streaming, while the second problem only contributes to the outer streaming: only $\overline{u}_1$ takes a positive value near the wall, while $\overline{u}_2$ remains negative.

Downloaded from https://www.cambridge.org/core. IP address: 82.123.107.129, on 02 Apr 2019 at 17:42:30, subject to the Cambridge Core terms of use, available at https://www.cambridge.org/core/terms. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.111

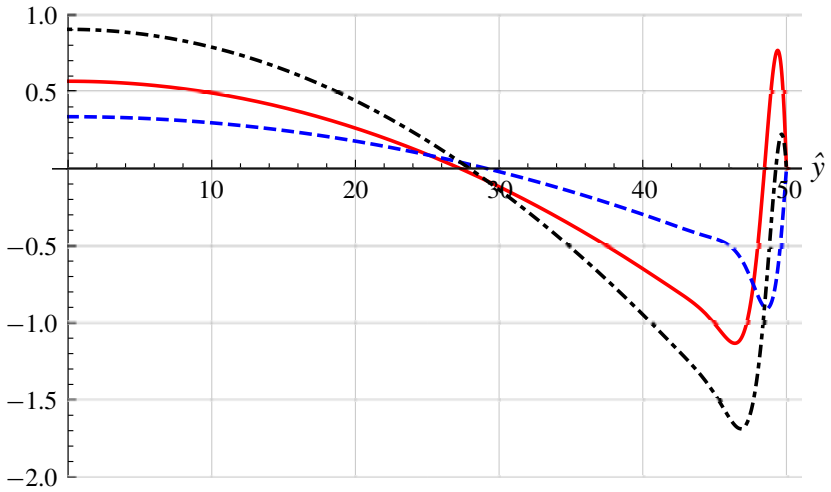


FIGURE 3. (Colour online) Axial streaming velocities $\overline{u}_1(-1/4, \hat{y})/\overline{u}_R$ (red solid line), $\overline{u}_2(-1/4, \hat{y})/\overline{u}_R$ (blue dashed line) and $\overline{u}_{1+2}(-1/4, \hat{y})/\overline{u}_R$ (black dot-dashed line). $\hat{R} = 50$.

The expression for $\overline{u}_{1+2}$ obtained on the axis is approximated as:

$$\frac{\overline{u}_{1+2}(\hat{x}, 0)}{\overline{u}_R} = 1 - \frac{29}{6}\frac{1}{\hat{R}}. \tag{3.27}$$

For large guides ($\hat{R} \gg 1$, but still $(\hat{R}/\hat{L})^2 \ll 1$), we thus recover Rayleigh's solution. As noticed by Lighthill (1978) and as shown by equations (3.21) and (3.25), the contributions of the first and second source terms in Rayleigh's solution are respectively $2/3$ and $1/3$. Equation (3.27) also shows a linear variation with $1/\hat{R}$, which is not negligible for moderate values of $\hat{R}$. The first source term is the main contributor to this dependency: -5 in (3.21) versus $1/6$ in (3.25).

The total axial pressure gradient is

$$\frac{\mathrm{d}\overline{p}_{1+2}}{\mathrm{d}\hat{x}} = \frac{\rho_0 \pi U_{ac}^2}{2} \sin(2\pi\hat{x}) \left(1 - \frac{1}{8\hat{R}} + \frac{3}{16\hat{R}^2} - \frac{27}{32\hat{R}^3}\right). \tag{3.28}$$

It follows that, for large values of $\hat{R}$

$$\frac{\mathrm{d}\overline{p}_{1+2}}{\mathrm{d}\hat{x}} \simeq \frac{\mathrm{d}\overline{p}_1}{\mathrm{d}\hat{x}} = \frac{\rho_0 \pi U_{ac}^2}{2} \sin(2\pi\hat{x}). \tag{3.29}$$

Integrating equation (3.29) with respect to $\hat{x}$ yields

$$\overline{p}_{1+2} \simeq \overline{p}_1 = p_0 - \frac{\rho_0 U_{ac}^2}{4} \cos(2\pi\hat{x}). \tag{3.30}$$

When scaling $\overline{p}_{1+2} - p_0$ by $(\gamma/4)p_0(U_{ac}/c_0)^2$, we recover the theoretical result for the dimensionless hydrodynamic streaming pressure known in the literature $P_{2s} = -\cos(2\pi\hat{x})$ (e.g. Menguy & Gilbert 2000*a*).

Downloaded from https://www.cambridge.org/core. IP address: 82.123.107.129, on 02 Apr 2019 at 17:42:30, subject to the Cambridge Core terms of use, available at https://www.cambridge.org/core/terms. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.111

3.2.4. *Problem 3: third source term*

We now consider the third source term, yielding the following equation

$$\frac{\pi}{2}c_0\hat{L}\frac{\partial^3\overline{u}_3}{\partial\hat{y}^3} = -\frac{\partial^2(\overline{u'v'})}{\partial\hat{x}^2}, \tag{3.31}$$

with boundary conditions (3.11*a*,*b*)–(3.11*d*) for $\overline{u}_3$. Integrating (3.31) gives the simplified solution

$$\begin{aligned}\overline{u}_3(\hat{x},\hat{y}) \;=\; & \frac{\pi^2U_{ac}^2}{480c_0}\frac{1}{\hat{L}^2}\sin(2\pi\hat{x})\left\{4\hat{R}^3+150-\frac{585}{\hat{R}}+\frac{720}{\hat{R}^2}\right.\\ & -3\hat{y}^2\left(\frac{240}{\hat{R}^4}-\frac{315}{\hat{R}^3}+\frac{150}{\hat{R}^2}+8\hat{R}\right)+60\mathrm{e}^{2(\hat{y}-\hat{R})}+20\frac{\hat{y}^4}{\hat{R}}\\ & \left.+20\mathrm{e}^{\hat{y}-\hat{R}}\left(\left(12-\frac{18}{\hat{R}}\right)\cos(\hat{R}-\hat{y})-\frac{18}{\hat{R}}\sin(\hat{R}-\hat{y})+12\frac{\hat{y}}{\hat{R}}\sin(\hat{R}-\hat{y})\right)\right\}.\end{aligned} \tag{3.32}$$

Along the axis we obtain, neglecting terms of order $O(\mathrm{e}^{-\hat{R}})$ and smaller

$$\frac{\overline{u}_3(\hat{x},0)}{\overline{u}_R} = -\frac{2\pi^2}{45}\left(\frac{\hat{R}}{\hat{L}}\right)^2\left[\hat{R}+\frac{75}{2}-\frac{585}{4\hat{R}}+\frac{180}{\hat{R}^2}\right]. \tag{3.33}$$

Since the term in brackets is always positive, velocity $\overline{u}_3$ is of the opposite sign to Rayleigh's solution. Thus the associated vortices are reversed.

Note that in this equation the dominant term $\hat{R}(\hat{R}/\hat{L})^2$ could increase significantly for large values of $\hat{R}$. However, our working hypotheses are that the linear regime of streaming is respected, that is $Re_{NL} = (M\hat{R})^2 \ll 1$, and also that $(\hat{R}/\hat{L})^2 \ll 1$. These relations imply that the product $\hat{R}(\hat{R}/\hat{L})^2$ and consequently the velocity component $\bar{u}_3$ will both remain bounded for large values of $\hat{R}$.

The second-order pressure gradient in the x direction can be calculated from

$$\frac{\partial\overline{p}_3}{\partial\hat{x}} = \rho_0\frac{\pi}{2}c_0\frac{\partial^2\overline{u}_3}{\partial\hat{y}^2}, \tag{3.34}$$

yielding

$$\begin{aligned}\frac{\partial\overline{p}_3}{\partial\hat{x}} \;=\; & -\frac{\rho_0\pi^3U_{ac}^2}{2\hat{L}^2}\sin(2\pi\hat{x})\left\{\frac{3}{\hat{R}^4}-\frac{63}{16\hat{R}^3}+\frac{15}{8\hat{R}^2}+\frac{\hat{R}}{10}-\frac{\hat{y}^2}{2\hat{R}}-\frac{1}{20}\mathrm{e}^{2(\hat{y}-\hat{R})}\right.\\ & \left.+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\hat{y}-\hat{R}}\left(\frac{-1+2\hat{y}}{\hat{R}}\cos(\hat{R}-\hat{y})+\left(\frac{1}{\hat{R}}-2\right)\sin(\hat{R}-\hat{y})\right)\right\}.\end{aligned} \tag{3.35}$$

For this source term the axial pressure gradient (which is very small) does depend on $\hat{y}$.

Downloaded from https://www.cambridge.org/core. IP address: 82.123.107.129, on 02 Apr 2019 at 17:42:30, subject to the Cambridge Core terms of use, available at https://www.cambridge.org/core/terms. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.111

3.2.5. *Problem 4: fourth source term*

Considering the fourth source term yields

$$\frac{\pi}{2}c_0\hat{L}\frac{\partial^3\overline{u_4}}{\partial\hat{y}^3} = -\hat{L}\frac{\partial^2(\overline{v'v'})}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}, \tag{3.36}$$

with boundary conditions (3.11*a*,*b*)–(3.11*d*) for $\overline{u}_4$. Integrating equation (3.36) and using the boundary conditions, the following simplified solution is found:

$$\overline{u}_4(\hat{x},\hat{y}) = \frac{\pi^2 U_{ac}^2}{120c_0}\sin(2\pi\hat{x})\left(\frac{\hat{R}}{\hat{L}}\right)^2\left[1-6\left(\frac{\hat{y}}{\hat{R}}\right)^2+5\left(\frac{\hat{y}}{\hat{R}}\right)^4\right]. \tag{3.37}$$

Along the axis we obtain the following expression for the normalized axial streaming velocity

$$\frac{\overline{u}_4(\hat{x},0)}{\overline{u}_R} = \frac{2\pi^2}{45}\left(\frac{\hat{R}}{\hat{L}}\right)^2. \tag{3.38}$$

Comparing equations (3.38) and (3.33) shows that $\overline{u}_4(\hat{x},0)/\overline{u}_R$ is equal to $-1/\hat{R}$ times the first term of $\overline{u}_3(\hat{x},0)/\overline{u}_R$. The contribution of the fourth source term is thus negligible for large enough guides.

3.2.6. *Superposition of solutions*

Gathering together the four components $\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$, $\overline{u}_3$ and $\overline{u}_4$, and neglecting the lower-order terms, the total streaming velocity along the axis is given by

$$\frac{\overline{u}(\hat{x},0)}{\overline{u}_R} = \frac{\sum_{i=1}^4\overline{u}_i(\hat{x},0)}{\overline{u}_R} = 1-\frac{29}{6}\frac{1}{\hat{R}}-\frac{2\pi^2}{45}\frac{\hat{R}^3}{\hat{L}^2}\left[1+\frac{73}{2\hat{R}}-\frac{585}{4\hat{R}^2}+\frac{180}{\hat{R}^3}\right]. \tag{3.39}$$

This expression shows that, under certain circumstances, the streaming flow can be reversed on the axis ($\overline{u}(\hat{x},0)/\overline{u}_R<0$). This occurs when

$$\hat{L}<\hat{L}_{limit} = \pi\sqrt{\frac{2}{45}}\left(\frac{\hat{R}^3\left(1+\frac{73}{2\hat{R}}-\frac{585}{4\hat{R}^2}+\frac{180}{\hat{R}^3}\right)}{1-\frac{29}{6}\frac{1}{\hat{R}}}\right)^{1/2}. \tag{3.40}$$

Figure 4 shows the variation with $\hat{R}$ of the limit value $\hat{L}_{limit}/\hat{R}$. For geometries that fall under the curve, there exists a reversed flow on the axis. Minimum values are $\hat{R}=13.52$, $\hat{L}/\hat{R}=L/R=5.24$. These values are compatible with the hypothesis $(\hat{R}/\hat{L})^2\ll 1$. For example, for $\hat{R}=100$, reversed outer streaming velocity occurs if $\hat{L}<789$, or $L/R<7.89$.

In order to characterize the possible applications, let us consider a practical case of reverse flow along the guide axis. Let $\hat{L}$ and $\hat{R}$ be fixed. For resonance conditions, $\lambda=2L$ and $\omega=\pi c_0/L$. Using $\delta_\nu^2=2\nu/\omega$ and $\hat{L}=L/\delta_\nu$, the following equations are obtained

$$L=\frac{2\nu}{\pi c_0}\hat{L}^2, \quad R=L\frac{\hat{R}}{\hat{L}}. \tag{3.41a,b}$$

Downloaded from https://www.cambridge.org/core. IP address: 82.123.107.129, on 02 Apr 2019 at 17:42:30, subject to the Cambridge Core terms of use, available at https://www.cambridge.org/core/terms. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.111

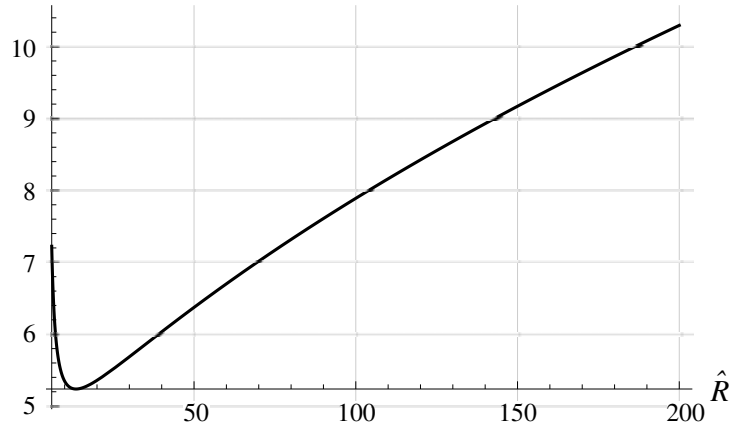


FIGURE 4. Limit value $\hat{L}_{limit}(\hat{R})/\hat{R}$ under which the flow is reversed on the axis. Minimum values: $\hat{R} = 13.52$, $\hat{L}_{limit}/\hat{R} = 5.24$.

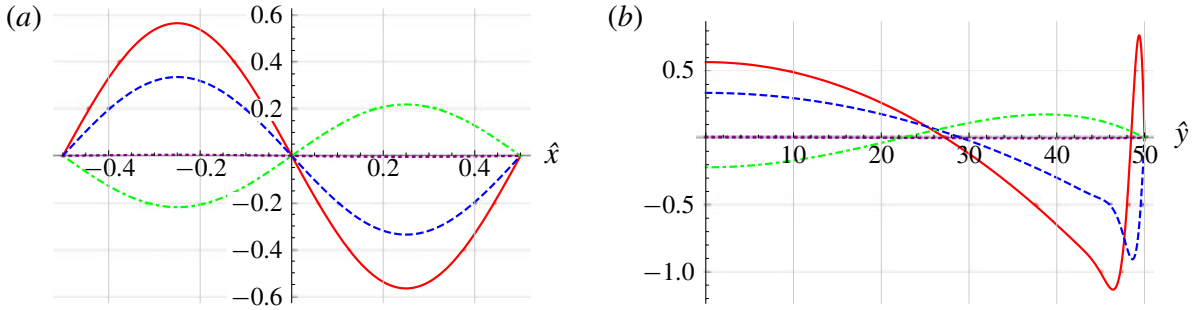


FIGURE 5. (Colour online) Axial streaming velocities $\overline{u}_1(\hat{x}, \hat{y})/\overline{u}_R$ (red solid line), $\overline{u}_2(\hat{x}, \hat{y})/\overline{u}_R$ (blue dashed line), $\overline{u}_3(\hat{x}, \hat{y})/\overline{u}_R$ (green dotdashed line) and $\overline{u}_4(\hat{x}, \hat{y})/\overline{u}_R$ (purple dotted line). $\hat{R} = 50$, $\hat{L} = 500$. (*a*) $\hat{y} = 0$; (*b*) $\hat{x} = -1/4$.

Let $\hat{L} = 789$ and $\hat{R} = 100$, as previously. Taking standard values corresponding to air, $\nu = 1.496 \times 10^{-5}$ m^2 s^{-1} and $c_0 = 343.82$ m s^{-1}, we obtain $L = 17.2$ mm, $R = 2.15$ mm and the resonance frequency $f = 10$ kHz. These dimensions are small and could concern microfluidics systems, where Rayleigh streaming is used, for example within the field of acoustic particle trapping and manipulation or efficient fluid mixing. It is interesting to remark that some experiments in microfluidics have shown Rayleigh streaming vortices rotating in the opposite direction to that expected. Our results could give an explanation to this phenomenon that is a subject of debate (Wiklund, Green & Ohlin 2012).

Figure 5 shows the four components $\overline{u}_1/\overline{u}_R$, $\overline{u}_2/\overline{u}_R$, $\overline{u}_3/\overline{u}_R$ and $\overline{u}_4/\overline{u}_R$ along the axis (*a*) and along $\hat{y}$ for $\hat{x} = -1/4$ (*b*). Here we have $\hat{R} = 50$ and $\hat{L} = 500$. We notice that the fourth contribution is negligible, and that the third contribution is of the same order of magnitude as the second one. Figure 6 shows the total axial velocity $\overline{u}$ profile for $\hat{R} = 100$ and two values of $\hat{L}$: $\hat{L} = 600$ and $\hat{L} = 8000$. The difference between the two profiles is important in the core of the guide, whereas in the very near wall region, both profiles are very close.

This feature was also observed (even though the acoustic regime and the geometric configuration were different) in experiments as well as numerical simulations, that revealed situations where the outer streaming flow was greatly modified (up to occurrence of reverse flow), while the inner streaming flow was nearly unmodified (Reyt *et al.* 2013; Reyt, Bailliet & Valière 2014).

Downloaded from https://www.cambridge.org/core. IP address: 82.123.107.129, on 02 Apr 2019 at 17:42:30, subject to the Cambridge Core terms of use, available at https://www.cambridge.org/core/terms. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.111

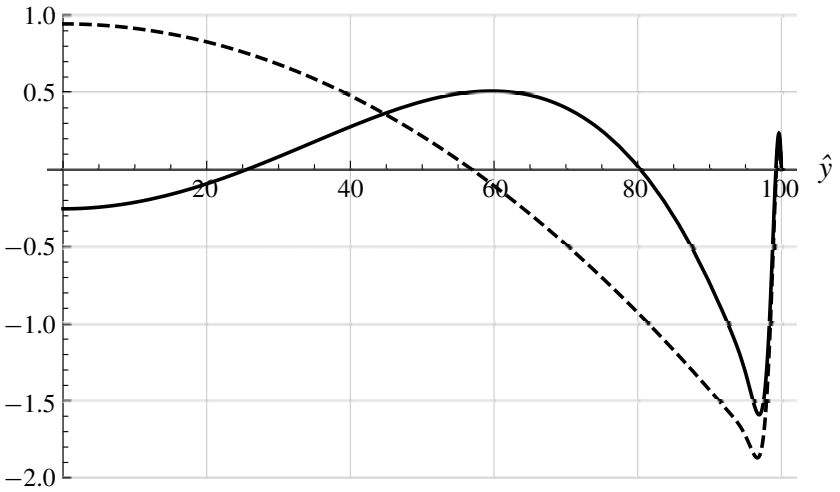


FIGURE 6. Total normalized axial streaming velocity transverse profile $u(-1/4, \hat{y})/\overline{u}_R$ for $\hat{R} = 100$ and $\hat{L} = 600$ (solid line), $\hat{L} = 8000$ (dashed line).

At this stage we have shown that the usually neglected third source term of outer streaming is responsible for drastic change of behaviour of acoustic streaming for certain $(\hat{L}, \hat{R})$ conditions. The ratio R/δ_ν is usually considered as the criterion to differentiate between different streaming regimes, from narrow guides with only inner cells to large guides with mostly outer cells. The present study implies that not only R/δ_ν but also R/L ratios should be considered in order to examine the organization of the streaming flow.

In the following sections we consider the impact of this finding on other characteristics of streaming flow: slip velocity, mass transport velocity, vertical component of streaming velocity.

3.2.7. *Slip velocity*

The viscous boundary layer vortex thickness (inner streaming) was estimated to be approximatively equal to $1.9\delta_\nu$ by Schlichting (1932), who did not consider streaming outside the boundary layer. As shown by experiments (Moreau *et al.* 2008), the limit for large guides between inner and outer streaming cells is $3\delta_\nu$ from the wall, as illustrated in figure 1. At $3\delta_\nu$ from the guide wall, the axial streaming velocity was indeed found to reach its maximum. The flow in the core of the guide is initiated by transverse diffusion of momentum from there. This position is the limit between inner and outer streaming cells and the value of the axial streaming velocity at non-dimensional $\hat{y} = \hat{y}^I = \hat{R} - 3$ is thus generally considered as a slip velocity when inner streaming is not described. Rayleigh's solution for the slip velocity is given by $\overline{u}_R^{SV} = (3/8)U_{ac}^2/c_0 \sin(2\pi\hat{x})$.

The actual non-dimensional transverse location $\hat{y}^{SV}$ of the maximum of the axial streaming velocity can however deviate from this standard value, depending on values of $\hat{R}$ and $\hat{L}$. Figure 7 shows the difference (or offset) $\hat{y}^{SV} - \hat{y}^I$ between the actual and standard location of the slip velocity as a function of $\hat{R}$ (for $6 < \hat{R} < 200$), for two values of $\hat{L}$. For the largest value of $\hat{L}$, we note that the actual location shifts slightly away from the wall as $\hat{R}$ increases (it is placed at the standard value for $\hat{R} = 28$). This is in agreement with previous results showing the evolution of the axial streaming velocity transverse profile with the ratio R/δ_ν (e.g. figure 4 of Bailliet *et al.* (2001) and figure 4 of Hamilton *et al.* (2003*a*)).

Downloaded from https://www.cambridge.org/core. IP address: 82.123.107.129, on 02 Apr 2019 at 17:42:30, subject to the Cambridge Core terms of use, available at https://www.cambridge.org/core/terms. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.111

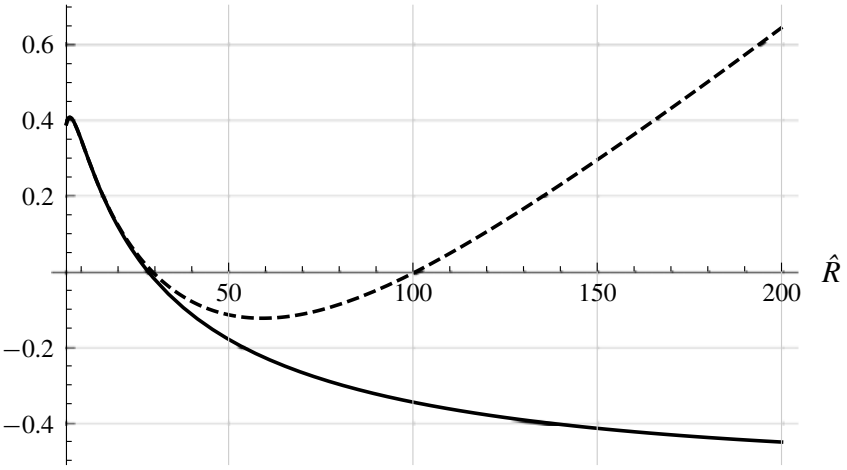


FIGURE 7. Difference (or offset) between the actual location $\hat{y}^{SV}$ and the standard location $\hat{R}-3$ of the slip velocity, as a function of $\hat{R}$. Solid line: $\hat{L}=8000$, dashed line: $\hat{L}=500$.

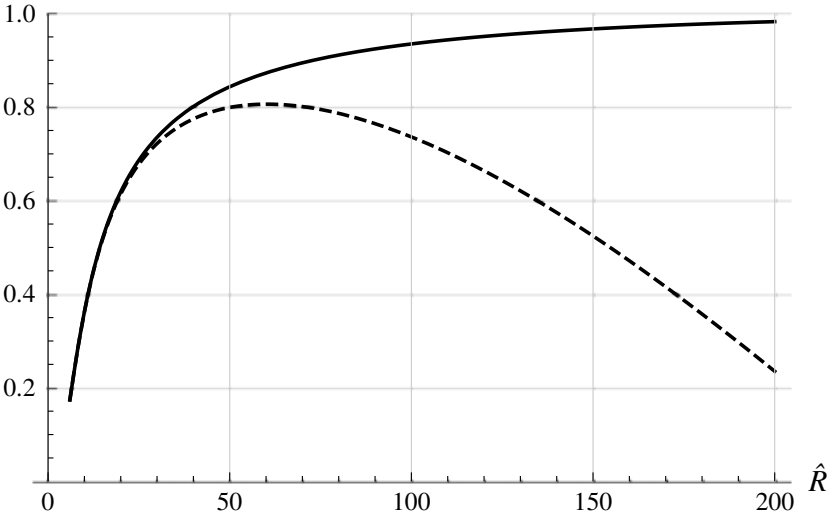


FIGURE 8. Normalized axial slip velocity at position $\hat{y}=\hat{y}^{SV}$, as a function of $\hat{R}$. Solid line: $\hat{L}=8000$, dashed line: $\hat{L}=500$.

For the smallest value of $\hat{L}$, the actual location of the slip velocity shifts closer to the wall as $\hat{R}$ increases. This can be related to the fact that the $\overline{u}_3$ contribution becomes large (see figure 5).

Figure 8 shows the axial slip velocity $\overline{u}$, normalized by $\overline{u}_R^{SV}$, at the actual position $\hat{y}=\hat{y}^{SV}$ (corresponding to figure 7). It can be noted that the normalized value goes naturally to almost 1 as $\hat{R}$ becomes large for the largest value of $\hat{L}$. However this is not the case for the smallest value of $\hat{L}$ and the normalized value is reduced significantly for $\hat{R}>50$.

Here again we explore the limit of validity of the classical approach by showing that both the position and the value of the slip velocity are dependent not only on $\hat{R}$ but also on $\hat{L}$. This is stressed also by results shown in figure 9 that gives a comparison of the slip velocity and the maximum normalized axial velocity on the guide axis, for $\hat{L}=8000$ and $\hat{L}=500$. We can see that the axial slip velocity departs from Rayleigh's solution more than that on the axis for small values of $\hat{R}$ (the solid curve is below

Downloaded from https://www.cambridge.org/core. IP address: 82.123.107.129, on 02 Apr 2019 at 17:42:30, subject to the Cambridge Core terms of use, available at https://www.cambridge.org/core/terms. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.111

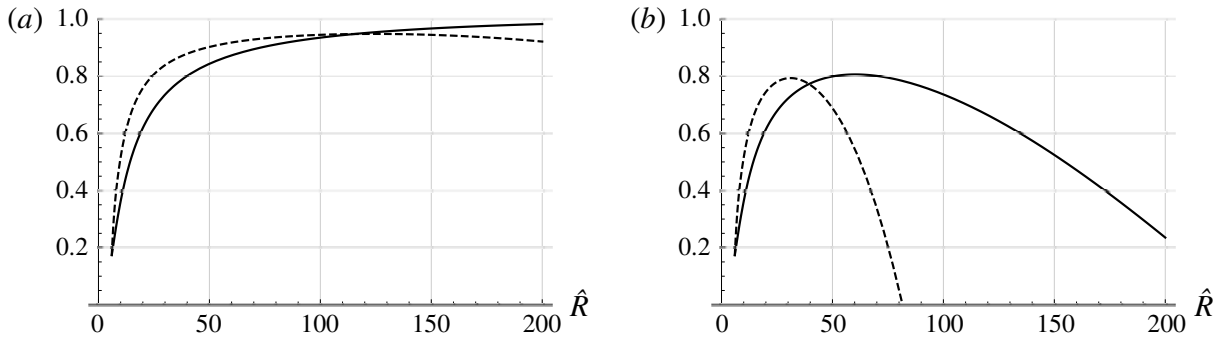


FIGURE 9. Normalized axial slip velocity versus $\hat{R}$ (solid line), and maximum normalized axial streaming velocity on the axis (dashed line). (*a*) $\hat{L} = 8000$, (*b*) $\hat{L} = 500$.

the dashed curve). For large values of $\hat{R}$, the opposite is true: the slip velocity departs from Rayleigh's solution less than the axial streaming velocity on the guide axis. Comparing figure 9 (*a*,*b*) shows that this tendency is emphasized for smaller values of $\hat{L}$, due to increased importance of $\overline{u}_3$.

3.2.8. *Average mass transport velocity*

The streaming velocity considered up to now in this study, is often referred to as 'Eulerian' time-average velocity. The 'average mass transport' velocity, associated with streaming mass transport, is often considered, especially for thermoacoustic applications where heat transport due to streaming is the relevant quantity of interest. The axial component of the average mass transport velocity $\overline{u}^M$, at the first order of approximation, is given by

$$\overline{u}^M(\hat{x}, \hat{y}) = \overline{u} + \frac{\overline{\rho' u'}}{\rho_0}. \tag{3.42}$$

Along the axis, using (3.12) and neglecting terms of order $O(\mathrm{e}^{-\hat{R}})$ and lower, it follows that

$$\frac{\overline{u}^M(\hat{x}, 0)}{\overline{u}_R} = 1 - \frac{11}{2}\frac{1}{\hat{R}} - \frac{2\pi^2}{45}\frac{\hat{R}^2}{\hat{L}^2}\left[\hat{R} - 1 + \frac{30}{\hat{R}^2} - \frac{60}{\hat{R}^3} + \frac{45}{\hat{R}^4}\right]. \tag{3.43}$$

Figure 10 shows the transverse profiles of axial streaming velocities $\overline{u}$ and $\overline{u}^M$, for three values of $\hat{R}$ (6, 50 and 90), and two values of $\hat{L}$ (8000 and 500). The difference between $\overline{u}$ and $\overline{u}^M$ is most significant in the viscous boundary layer, as usually considered. For small values of $\hat{R}$, differences are significant everywhere, including on the axis. These differences between $\overline{u}$ and $\overline{u}^M$ are obviously associated with the additional term $\overline{\rho' u'}$. As shown by expressions (3.4) and (3.6) this term is nearly zero since it is the product of two terms nearly in quadrature apart from viscous boundary layers effects. Indeed on the axis the acoustic velocity oscillates as $\cos(2\pi\hat{t})$ (see dominant terms in equation (3.4)) and the acoustic density oscillates as $\sin(2\pi\hat{t})$ (see dominant terms in equation (3.6)). This feature is associated with the standing wave

Downloaded from https://www.cambridge.org/core. IP address: 82.123.107.129, on 02 Apr 2019 at 17:42:30, subject to the Cambridge Core terms of use, available at https://www.cambridge.org/core/terms. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.111

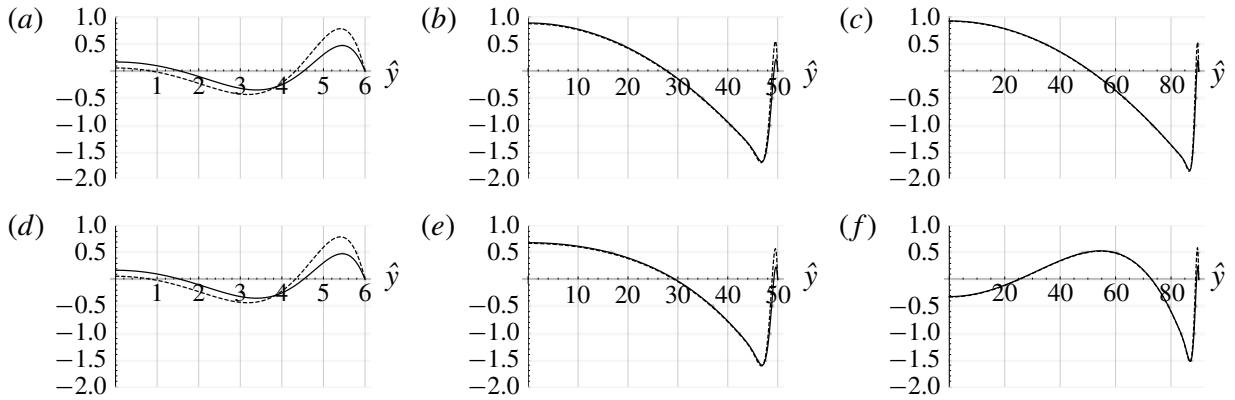


FIGURE 10. Axial velocities $\overline{u}^M(-1/4, \hat{y})/\overline{u}_R$ (dashed line), $\overline{u}(-1/4, \hat{y})/\overline{u}_R$ (solid line). (*a*) $\hat{R} = 6$, $\hat{L} = 8000$, (*b*) $\hat{R} = 50$, $\hat{L} = 8000$, (*c*) $\hat{R} = 90$, $\hat{L} = 8000$, (*d*) $\hat{R} = 6$, $\hat{L} = 500$, (*e*) $\hat{R} = 50$, $\hat{L} = 500$, (*f*) $\hat{R} = 90$, $\hat{L} = 500$.

character of the oscillation in the guide under study that is closed at both ends and excited at its resonance frequency. In such resonators acoustic pressure (and thus density oscillations) are in quadrature with acoustic velocity due to boundary layers effects. Therefore for large guides (see figure 10*b*,*c*,*e*,*f*) the difference between $\overline{u}$ and $\overline{u}^M$ is only significant close to the wall. For narrow guides, the inner streaming takes up most of the guide, thus $\overline{u}$ and $\overline{u}^M$ are different through the whole guide section (see figure 10*a*,*d*).

Also in the case $\hat{R} = 90$ and $\hat{L} = 500$ (figure 10*f*), the change of sign of $\overline{u}$ at $\hat{y} \approx 25$ indicates the appearance of a new vortex with reverse flow near the axis.

3.2.9. *Vertical streaming velocity*

It can also be useful to consider the vertical component of streaming velocity, especially to detect the appearance of new cells. Let us define the average mass transport vertical velocity variable given by, in the first order of approximation

$$\overline{v}^M(\hat{x}, \hat{y}) = \overline{v} + \frac{\overline{\rho' v'}}{\rho_0}. \tag{3.44}$$

The continuity equation (first equation in (3.10)) becomes

$$\frac{\partial \overline{u}^M}{\partial \hat{x}} + \hat{L}\frac{\partial \overline{v}^M}{\partial \hat{y}} = 0. \tag{3.45}$$

Integrating equation (3.45) and using the boundary conditions (3.11*c*) yields the simplified expression

$$\begin{aligned}\overline{v}^M(\hat{x}, \hat{y}) = {} & \frac{\pi U_{ac}^2}{16 c_0 \hat{L}} \cos(2\pi\hat{x}) \left\{ \frac{\hat{y}}{\hat{R}} \left(-33 + 6\hat{R} - 4\pi^2 \frac{\hat{R}^4}{\hat{L}^2} \right) + \frac{\hat{y}^3}{\hat{R}^3} \left(11 - 6\hat{R} + \frac{8\pi^2}{15} \frac{\hat{R}^4}{\hat{L}^2} \right) \right. \\ & - \frac{4\pi^2}{15} \frac{\hat{R}^4}{\hat{L}^2} \frac{\hat{y}^5}{\hat{R}^5} + \mathrm{e}^{\hat{y}-\hat{R}} \left[\cos(\hat{R} - \hat{y}) \left(16 + 4\frac{\hat{y}}{\hat{R}} \right) + \sin(\hat{R} - \hat{y}) \left(16 - 4\frac{\hat{y}}{\hat{R}} \right) \right] \\ & \left. + 2\mathrm{e}^{2(\hat{y}-\hat{R})} \right\}. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Downloaded from https://www.cambridge.org/core. IP address: 82.123.107.129, on 02 Apr 2019 at 17:42:30, subject to the Cambridge Core terms of use, available at https://www.cambridge.org/core/terms. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.111

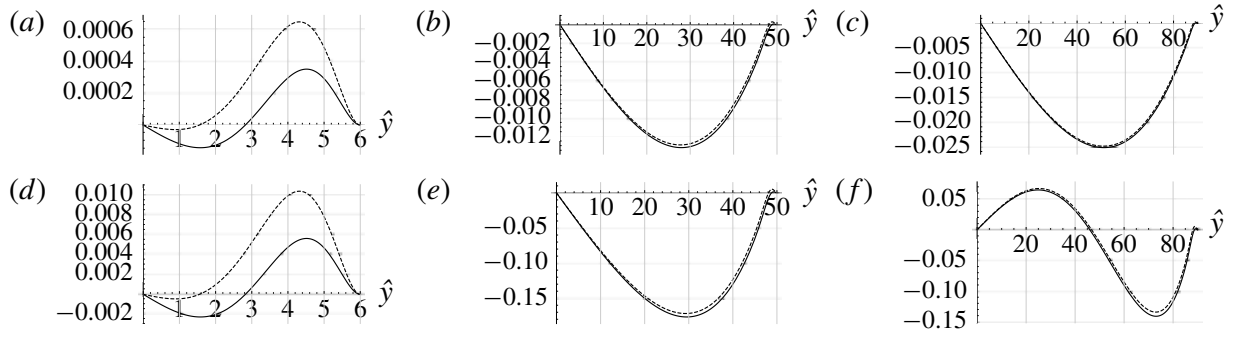


FIGURE 11. Vertical average mass transport velocities $\overline{v}^M(-1/2,\,\hat{y})/\overline{u}_R$ (dashed line), $\overline{v}(-1/2,\hat{y})/\overline{u}_R$ (solid line). (*a*) $\hat{R}=6$, $\hat{L}=8000$, (*b*) $\hat{R}=50$, $\hat{L}=8000$, (*c*) $\hat{R}=90$, $\hat{L}=8000$, (*d*) $\hat{R}=6$, $\hat{L}=500$, (*e*) $\hat{R}=50$, $\hat{L}=500$, (*f*) $\hat{R}=90$, $\hat{L}=500$.

The Eulerian velocity $\overline{v}$ can be obtained using (3.44) and (3.13). Figure 11 shows the vertical velocities $\overline{v}$ and $\overline{v}^M$ for several values of $\hat{R}$ and two values of $\hat{L}$. For small values of $\hat{R}$ (figure 11*a*,*d*), $\overline{v}$ and $\overline{v}^M$ are very different. Also in the case $\hat{R}=90$ and $\hat{L}=500$ (figure 11*f*), the change of sign of $\overline{v}$ and $\overline{v}^M$ at $\hat{y}\approx 46$ indicates the appearance of a new vortex with reverse flow near the axis.

Finally, as a summary, figure 12 shows the streamlines of the streaming flow plotted using (3.42) and (3.46), for $\hat{R}=90$ and $\hat{L}=500$ and 8000. For such large values of $\hat{R}$, the inner streaming is restrained in a very small region near the wall. For $\hat{L}=8000$, Rayleigh streaming is composed of two counter-rotating vortices as usual, while for $\hat{L}=500$ it is composed of four vortices, the flow along the axis being reversed.

4. The axisymmetric case

Streaming flow in cylindrical guides shows common features with the one between plates. It is composed of toroidal vortices that span $\lambda/4$ in the axial direction and inner and outer vortices coexist. Figure 1 corresponds to the streaming patterns observed in an axial section. However the value of the axial streaming velocity on the axis, and the position of the centre of the outer streaming vortex, are quite different from the case of parallel plates. We have performed an analysis similar to that presented above for the case of a cylindrical guide. One goal is to deduce the condition for L/R such that additional counter-rotating streaming cells appear, associated with the third source term.

4.1. *Acoustics*

With the same change of variables as in the plane case ($\hat{r}=r/\delta_\nu$, where r is the radial coordinate), the linearized equations governing acoustics in the axisymmetric case are

$$\frac{1}{2}c_0\frac{\partial\rho'}{\partial\hat{t}}+\rho_0\left(\frac{\partial u'}{\partial\hat{x}}+\hat{L}\frac{1}{\hat{r}}\frac{\partial}{\partial\hat{r}}(\hat{r}v')\right)=0 \tag{4.1a}$$

$$\rho_0\frac{c_0}{2}\frac{\partial u'}{\partial\hat{t}}+c_0^2\frac{\partial\rho'}{\partial\hat{x}}=\rho_0\frac{\pi}{2}c_0\frac{1}{\hat{r}}\frac{\partial}{\partial\hat{r}}\left(\hat{r}\frac{\partial u'}{\partial\hat{r}}\right) \tag{4.1b}$$

$$\frac{\partial\rho'}{\partial\hat{r}}=0, \tag{4.1c}$$

Downloaded from https://www.cambridge.org/core. IP address: 82.123.107.129, on 02 Apr 2019 at 17:42:30, subject to the Cambridge Core terms of use, available at https://www.cambridge.org/core/terms.
https://doi.org/10.1017/jfm.2019.111

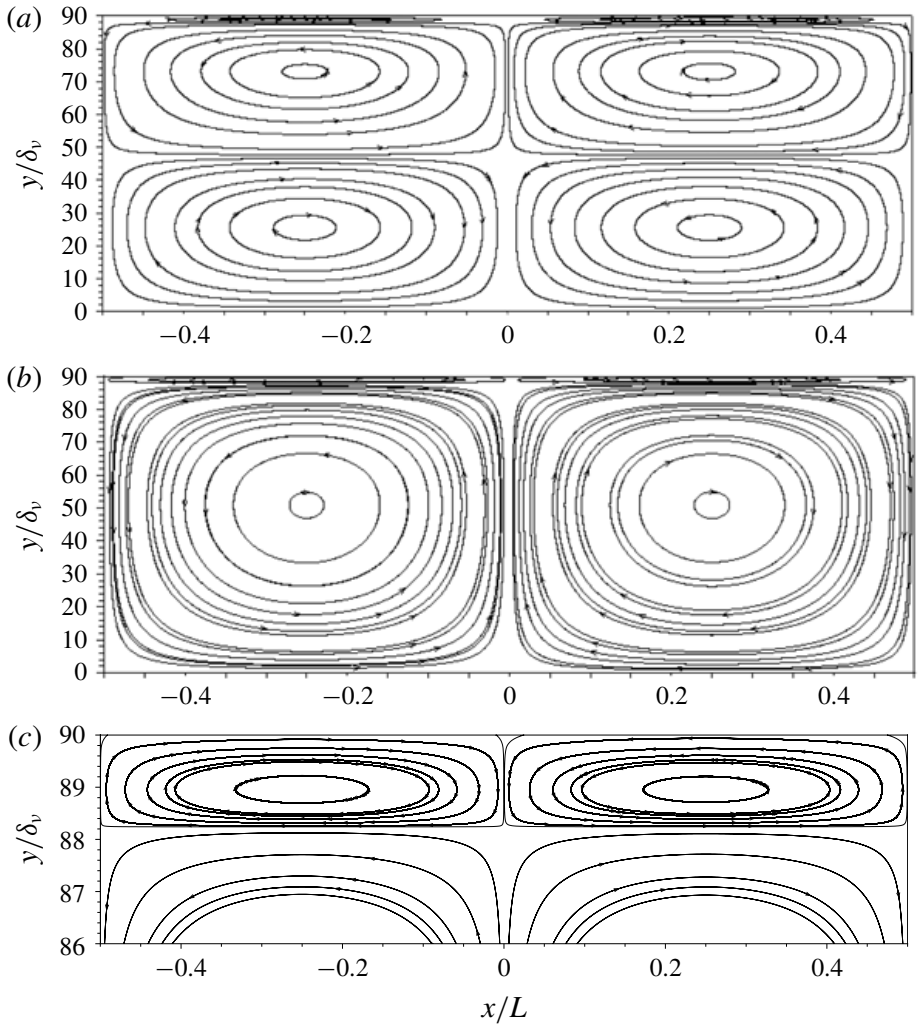


FIGURE 12. Streamlines of the mass transport velocity for $\hat{R} = 90$; $\hat{L} = 500$ (*a*), $\hat{L} = 8000$ (*b*). (*c*) Zoom on the inner region of top figure.

where u' and v' are the axial and radial components of the acoustic velocity. The boundary conditions for u' and v' remain given by (3.3), replacing $\hat{y}$ by $\hat{r}$.

We start again with a given axial velocity solution of (4.1), approximated following Schuster & Matz (1940) for moderate and large channels ($\hat{R} \geqslant 6$)

$$u'(\hat{x}, \hat{r}, \hat{t}) = U_{ac} \cos(\pi\hat{x}) \left[\left(-1 + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{I}_0((1-\mathrm{i})\hat{r})}{\mathrm{I}_0((1-\mathrm{i})\hat{R})} + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{I}_0((1+\mathrm{i})\hat{r})}{\mathrm{I}_0((1+\mathrm{i})\hat{R})} \right) \cos(\omega\hat{t}) - \left(\frac{1}{2\mathrm{i}} \frac{\mathrm{I}_0((1-\mathrm{i})\hat{r})}{\mathrm{I}_0((1-\mathrm{i})\hat{R})} - \frac{1}{2\mathrm{i}} \frac{\mathrm{I}_0((1+\mathrm{i})\hat{r})}{\mathrm{I}_0((1+\mathrm{i})\hat{R})} \right) \sin(\omega\hat{t}) \right], \tag{4.2}$$

where I_0 is the modified Bessel function of the first kind.

Using the hypothesis that ρ' depends on $\hat{x}$ and $\hat{t}$ only, together with the boundary conditions, equation (4.1*a*) is integrated with respect to $\hat{r}$ to obtain the radial acoustic

Downloaded from https://www.cambridge.org/core. IP address: 82.123.107.129, on 02 Apr 2019 at 17:42:30, subject to the Cambridge Core terms of use, available at https://www.cambridge.org/core/terms. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.111

velocity component

$$v'(\hat{x},\hat{r},\hat{t}) = \frac{\pi}{4}U_{ac}\frac{\hat{r}}{\hat{L}}\sin(\pi\hat{x})\left[\frac{{}_0\tilde{F}_1\left(;2,\frac{\mathrm{i}\hat{r}^2}{2}\right)-{}_0\tilde{F}_1\left(;2,\frac{\mathrm{i}\hat{R}^2}{2}\right)}{\mathrm{I}_0((1+\mathrm{i})\hat{R})}(\cos(\omega\hat{t})-\mathrm{i}\sin(\omega\hat{t}))\right.$$
$$\left.+\frac{{}_0\tilde{F}_1\left(;2,\frac{-\mathrm{i}\hat{r}^2}{2}\right)-{}_0\tilde{F}_1\left(;2,\frac{-\mathrm{i}\hat{R}^2}{2}\right)}{\mathrm{I}_0((1-\mathrm{i})\hat{R})}(\cos(\omega\hat{t})+\mathrm{i}\sin(\omega\hat{t}))\right], \tag{4.3}$$

where ${}_0\tilde{F}_1(;b,z)$ is the regularized confluent hypergeometric function.

4.2. *Streaming flow equations*

Using the same change of variables as in the plane case, the equations to be solved are

$$\begin{cases}\rho_0\left(\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial\hat{x}}+\hat{L}\dfrac{1}{\hat{r}}\dfrac{\partial}{\partial\hat{r}}(\hat{r}\overline{v})\right)=-\dfrac{\partial}{\partial\hat{x}}(\overline{\rho' u'})-\hat{L}\dfrac{1}{\hat{r}}\dfrac{\partial}{\partial\hat{r}}(\hat{r}\overline{\rho' v'})\\ \rho_0\dfrac{\pi}{2}c_0\dfrac{1}{\hat{r}}\dfrac{\partial}{\partial\hat{r}}\left(\hat{r}\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial\hat{r}}\right)=\dfrac{\partial\overline{p}}{\partial\hat{x}}+\rho_0\dfrac{\partial}{\partial\hat{x}}(\overline{u'u'})+\rho_0\hat{L}\dfrac{1}{\hat{r}}\dfrac{\partial}{\partial\hat{r}}(\hat{r}\overline{u'v'})\\ \rho_0\dfrac{\pi}{2}c_0\dfrac{1}{\hat{r}}\dfrac{\partial}{\partial\hat{r}}\left(\hat{r}\dfrac{\partial\overline{v}}{\partial\hat{r}}\right)=\hat{L}\dfrac{\partial\overline{p}}{\partial\hat{r}}+\rho_0\dfrac{\partial}{\partial\hat{x}}(\overline{u'v'})+\rho_0\hat{L}\dfrac{1}{\hat{r}}\dfrac{\partial}{\partial\hat{r}}(\hat{r}\overline{v'v'})\end{cases} \tag{4.4}$$

and the boundary conditions for $\overline{u}$ and $\overline{v}$ are now

$$\overline{u}=0 \quad \text{at } \hat{r}=\hat{R}; \quad \frac{\partial\overline{u}}{\partial\hat{r}}=0 \quad \text{at } \hat{r}=0, \tag{4.5a,b}$$

$$\overline{v}=0 \quad \text{at } \hat{r}=0 \text{ and } \hat{r}=\hat{R}, \tag{4.5c}$$

$$\int_0^{\hat{R}}\hat{r}\overline{u}\,\mathrm{d}\hat{r}=0. \tag{4.5d}$$

The average products of fluctuations are calculated with the expressions of u' and v' from equations (4.2) and (4.3). Since the complete expressions are complicated, we only give here $\overline{u'u'}$ and $\overline{u'v'}$:

$$\overline{u'u'}(\hat{x},\hat{r})=\frac{U_{ac}^2}{2}\cos^2(\pi\hat{x})\frac{(\mathrm{I}_0((1+\mathrm{i})\hat{r})-\mathrm{I}_0((1+\mathrm{i})\hat{R}))(\mathrm{I}_0((1-\mathrm{i})\hat{r})-\mathrm{I}_0((1-\mathrm{i})\hat{R}))}{\mathrm{I}_0((1-\mathrm{i})\hat{R})\mathrm{I}_0((1+\mathrm{i})\hat{R})} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}\overline{u'v'}(\hat{x},\hat{r}) = {}& \frac{1}{16}(1-\mathrm{i})\frac{\pi U_{ac}^2}{\hat{R}}\frac{1}{\hat{L}}\frac{\sin(2\pi\hat{x})}{\mathrm{I}_0((1-\mathrm{i})\hat{R})\mathrm{I}_0((1+\mathrm{i})\hat{R})}[\,(\mathrm{I}_0((1-\mathrm{i})\hat{r})\\ & -\mathrm{I}_0((1-\mathrm{i})\hat{R})\,)\left(\hat{R}I_1((1+\mathrm{i})\hat{r})-\hat{r}I_1((1+\mathrm{i})\hat{R})\right)\\ & +(I_0((1+\mathrm{i})\hat{r})-I_0((1+\mathrm{i})\hat{R}))(\hat{R}\mathrm{J}_1((1+\mathrm{i})\hat{r})-\hat{r}\mathrm{J}_1((1+\mathrm{i})\hat{R}))\,],\end{aligned} \tag{4.7}$$

where J_1 is the Bessel function of the first kind.

Downloaded from https://www.cambridge.org/core. IP address: 82.123.107.129, on 02 Apr 2019 at 17:42:30, subject to the Cambridge Core terms of use, available at https://www.cambridge.org/core/terms. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.111

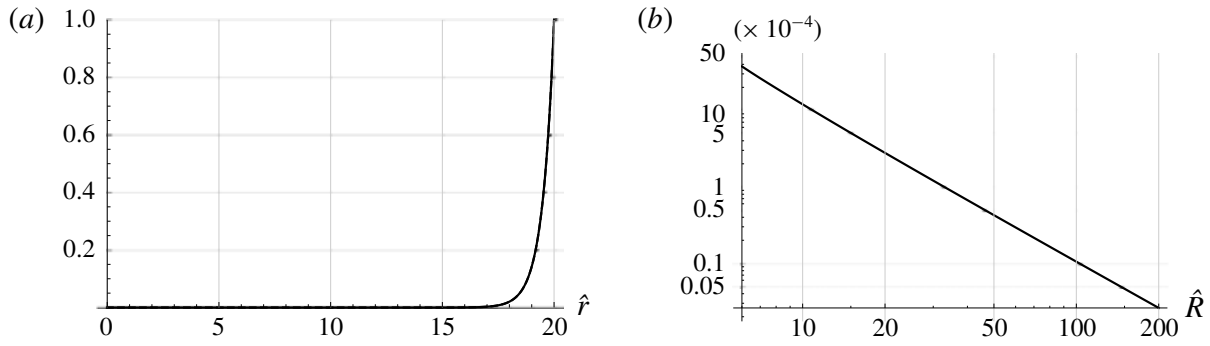


FIGURE 13. (*a*) $T(\hat{r}, 20)$ (solid line), approximated function (dashed line). (*b*) Maximum relative error as a function of $\hat{R}$ (log–log plot).

Taking the curl of the momentum equations results in

$$-\frac{\pi}{2}c_0\hat{L}\frac{\partial}{\partial\hat{r}}\left(\frac{1}{\hat{r}}\frac{\partial}{\partial\hat{r}}\left(\hat{r}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\hat{r}}\right)\right) = -\hat{L}\frac{\partial^2(\overline{u'u'})}{\partial\hat{r}\partial\hat{x}} - \hat{L}^2\frac{\partial}{\partial\hat{r}}\left(\frac{1}{\hat{r}}\frac{\partial(\hat{r}\overline{u'v'})}{\partial\hat{r}}\right) + \frac{\partial^2(\overline{u'v'})}{\partial\hat{x}^2} + \hat{L}\frac{1}{\hat{r}}\frac{\partial^2(\hat{r}\overline{v'v'})}{\partial\hat{x}\partial\hat{r}}. \quad (4.8)$$

4.3. *Results*

In the same way as in the plane case, we consider separately the four problems associated with each source term in equation (4.8).

However, there is no symbolic form for the integral of terms of the form $T(\hat{r},\ \hat{R}) = \mathrm{Re}[(1+\mathrm{i})\mathrm{I}_0((1+\mathrm{i})\hat{r})/\mathrm{I}_0((1+\mathrm{i})\hat{R}) \cdot I_1((1-\mathrm{i})\hat{r})/\mathrm{I}_0((1-\mathrm{i})\hat{R})]$ that appear in the successive integrations. Nevertheless these terms can be approximated with good accuracy using an exponential function that can be integrated symbolically. Figure 13 (*a*) shows $T(\hat{r},\ 20)$ together with the approximated function (a purely exponential function based on a two-point interpolation) that is used instead in the successive integrations. The curves are nearly superimposed and indistinguishable. The maximum relative error between the two functions is represented in a log–log plot in figure 13 (*b*) for values of $\hat{R}$ between 6 and 200, showing excellent accuracy and a variation in $1/\hat{R}^2$. The full expressions for the streaming velocity components are not developed below, since the formulae are very lengthy. Instead, the following fitted formula is obtained for the axial streaming velocity along the axis, normalized by Rayleigh's solution, which is now $\overline{u}_R = -(3/8)U_{ac}^2/c_0\sin(2\pi\hat{x})$

$$\frac{\overline{u}}{\overline{u}_R} = 1 - 5.676\frac{1}{\hat{R}^{0.98}} - 0.296\frac{\hat{R}^{2.98}}{\hat{L}^2}. \quad (4.9)$$

This expression shows a similar but slightly different dependence on $\hat{R}$ compared to that obtained in the plane case (3.39). It also shows that an extra cell of reversed flow may still appear near the axis in circumstances where the ratio $\hat{R}^{2.98}/\hat{L}^2$ in the third term is not negligible. More precisely, the condition for this is

$$\hat{L} \leqslant \hat{L}_{limit}(\hat{R}) = \left(\frac{0.296\hat{R}^{2.98}}{1 - \dfrac{5.676}{\hat{R}^{0.98}}}\right)^{1/2}. \quad (4.10)$$

Downloaded from https://www.cambridge.org/core. IP address: 82.123.107.129, on 02 Apr 2019 at 17:42:30, subject to the Cambridge Core terms of use, available at https://www.cambridge.org/core/terms. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.111

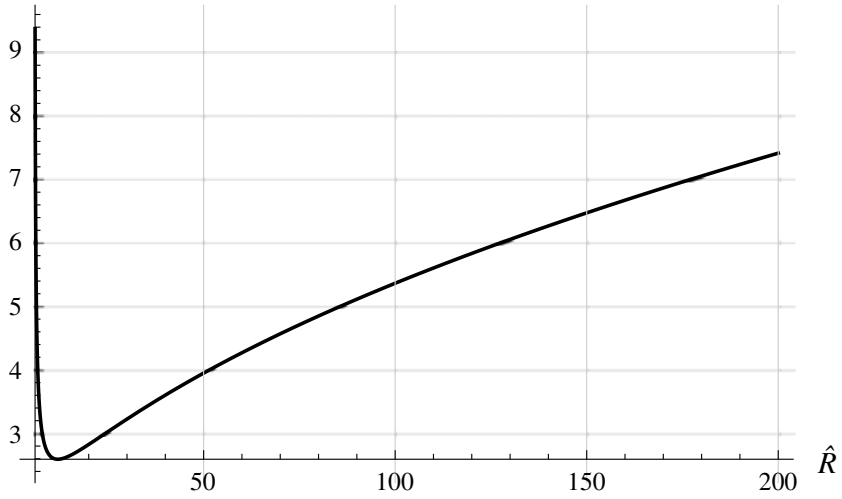


FIGURE 14. Limit value $\hat{L}_{limit}(\hat{R})/\hat{R}$ under which the flow is reversed on the axis. Minimum values: $\hat{R} = 11.93$, $\hat{L}/\hat{R} = 2.6$.

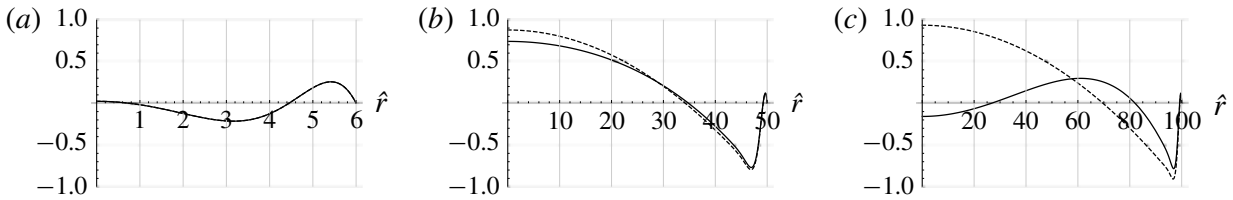


FIGURE 15. Axial velocities $\overline{u}(-1/4, \hat{y})/\overline{u}_R$, $\hat{L} = 500$ (solid line), $\hat{L} = 8000$ (dashed line). (*a*) $\hat{R} = 6$, (*b*) $\hat{R} = 50$, (*c*) $\hat{R} = 100$.

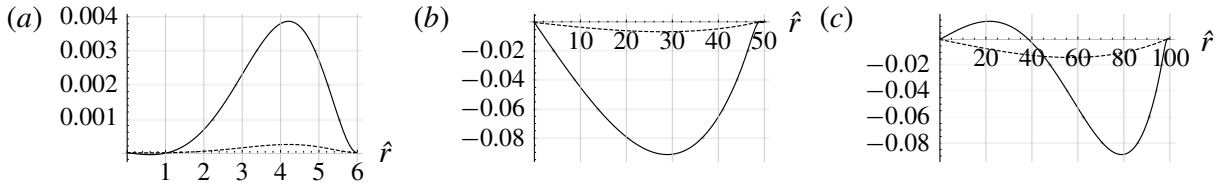


FIGURE 16. Radial velocities $\overline{v}(-1/2, \hat{y})/\overline{u}_R$, $\hat{L} = 500$ (solid line), $\hat{L} = 8000$ (dashed line). (*a*) $\hat{R} = 6$, (*b*) $\hat{R} = 50$, (*c*) $\hat{R} = 100$.

Figure 14 shows, for the axisymmetric case, the variation with $\hat{R}$ of $\hat{L}_{limit}/\hat{R}$ for the appearance of reverse flow on the axis. For example, for $\hat{R} = 100$, the extra cell will appear for $\hat{L} < 536$ in the axisymmetric case, that is for a shorter guide than in the plane case. Note that for small values on the vertical axis of figure 14 the limit of validity of the hypothesis $(R/L)^2 \ll 1$ is reached.

This has to be kept in mind when assessing geometries compatible with the existence of the extra cell.

Figures 15 and 16 show the radial profiles of axial and radial streaming velocities $\overline{u}$, $\overline{v}$, for three values of $\hat{R}$ (6, 50 and 100), and two values of $\hat{L}$ (500 and 8000). The behaviour of the streaming flow is similar to that in the plane case. The inner

Downloaded from https://www.cambridge.org/core. IP address: 82.123.107.129, on 02 Apr 2019 at 17:42:30, subject to the Cambridge Core terms of use, available at https://www.cambridge.org/core/terms. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.111

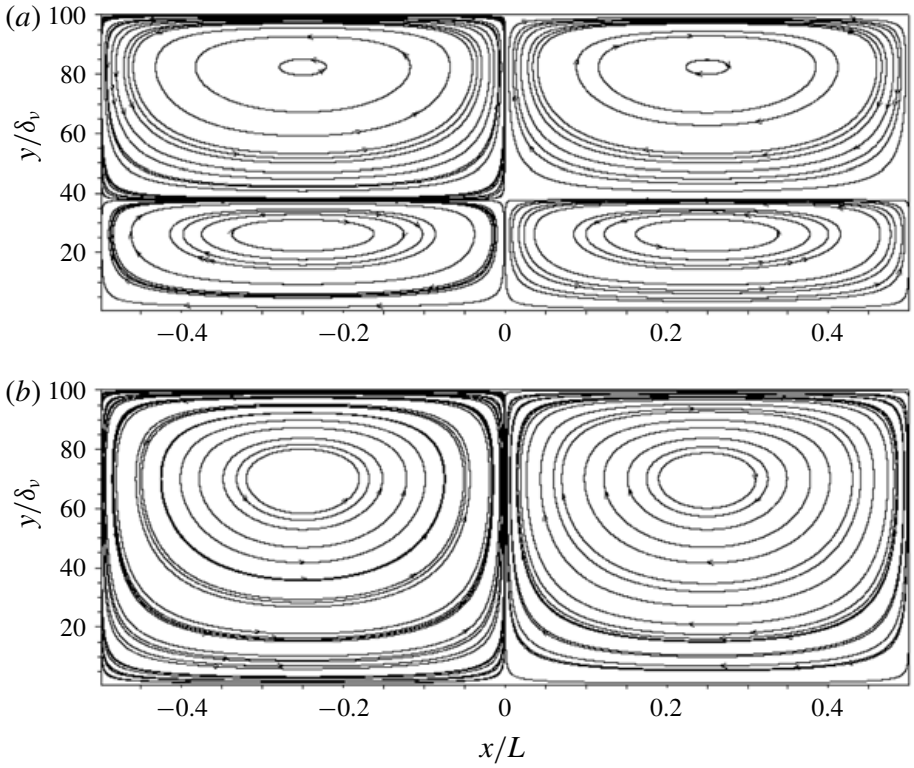


FIGURE 17. Streamlines of the mass transport velocity in an axial plane section for $\hat{R} = 100$; $\hat{L} = 500$ (a), $\hat{L} = 8000$ (b).

streaming is of lower amplitude than in the plane case. It is also seen that the centre of the outer vortex is closer to the wall than in the plane case, as expected (Rayleigh 1884). The influence of the third source term is visible in the case $\hat{R} = 50$, $\hat{L} = 500$. An extra vortex appears and the flow is reversed on the axis for $\hat{R} = 100$, $\hat{L} = 500$. Figure 17 shows the corresponding streamlines of the mass transport velocity in an axial plane section. The inner vortex is very narrow in this case and not visible on this figure.

5. Conclusion

Rayleigh's outer streaming flow in standing wave guides (infinite parallel plates or cylindrical tubes) was revisited, by solving the full linear streaming equations for moderate to large guides, using symbolic computations. The effect of each Reynolds stress source term was analysed separately and several features that were not previously reported were exhibited: analysis of the effect of the two classically dominant Reynolds stress source terms highlighted the commonly accepted fact that the streaming flow is generated only by viscous boundary layer effects. The outer streaming is created from momentum diffusion of the velocity created near the guide wall, and not from pressure gradient effects. The dependency with the guide's length and the radius of the axial streaming velocity normalized by Rayleigh's solution along the axis was quantified. It was shown that the effect of the third Reynolds stress source term which is usually neglected can become important for some geometrical parameters that were identified. In these situations, a vortex with reverse flow is created along the guide axis. Several characteristics of the streaming flow were analysed, such as slip velocity, mass transport velocity and transverse

Downloaded from https://www.cambridge.org/core. IP address: 82.123.107.129, on 02 Apr 2019 at 17:42:30, subject to the Cambridge Core terms of use, available at https://www.cambridge.org/core/terms. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.111

component of streaming flow, in connection with the effect of the third source term. For all these characteristics it was shown that not only the ratio of wave guide width (or radius) to viscous boundary layer thickness, but also the ratio of guide width (or radius) to guide length, are driving criteria for the organization of streaming.

REFERENCES

AMARI, M., GUSEV, V. & JOLY, N. 2003 Temporal dynamics of the sound wind in acoustitron. *Acta Acust. united with Acustica* **89**, 1008–1024.

BAILLIET, H., GUSEV, V., RASPET, R. & HILLER, R. A. 2001 Acoustic streaming in closed thermoacoustic devices. *J. Acoust. Soc. Am.* **110**, 1808–1821.

BOLURIAAN, S. & MORRIS, P. J. 2003 Acoustic streaming: from Rayleigh to today. *Intl J. Aeroacoust.* **2** (3–4), 255–292.

DARU, V., BALTEAN-CARLÈS, D., WEISMAN, C., DEBESSE, P. & GANDIKOTA, G. 2013 Two-dimensional numerical simulations of nonlinear acoustic streaming in standing waves. *Wave Motion* **50**, 955–963.

DARU, V., REYT, I., BAILLIET, H., WEISMAN, C. & BALTEAN-CARLÈS, D. 2017*a* Acoustic and streaming velocity components in a resonant wave guide at high acoustic levels. *J. Acoust. Soc. Am.* **141** (1), 563–574.

DARU, V., WEISMAN, C., BALTEAN-CARLÈS, D., REYT, I. & BAILLIET, H. 2017*b* Inertial effects on acoustic Rayleigh streaming flow: transient and established regimes. *Wave Motion* **74**, 1–17.

FAVRE, A. 1965 Équations des gaz turbulents compressibles ii.-méthode des vitesses moyennes; méthode des vitesses macroscopiques pondérées par la masse volumique. *J. Méch.* **87**, 391–421.

HAMILTON, M. F., ILINSKII, Y. A. & ZABOLOTSKAYA, E. A. 2003*a* Acoustic streaming generated by standing waves in two-dimensional channels of arbitrary width. *J. Acoust. Soc. Am.* **113** (1), 153–160.

HAMILTON, M. F., ILINSKII, Y. A. & ZABOLOTSKAYA, E. A. 2003*b* Thermal effects on acoustic streaming in standing waves. *J. Acoust. Soc. Am.* **114** (6), 3092–3101.

LIGHTHILL, J. 1978 Acoustic streaming. *J. Sound Vib.* **61**, 391–418.

MENGUY, L. & GILBERT, J. 2000*a* Non-linear acoustic streaming accompanying a plane stationary wave in a guide. *Acta Acust. united with Acustica* **86**, 249–259.

MENGUY, L. & GILBERT, J. 2000*b* Weakly nonlinear gas oscillations in air-filled tubes; solutions and experiments. *Acta Acust. united with Acustica* **86** (5), 798–810.

MOREAU, S., BAILLIET, H. & VALIÈRE, J.-C. 2008 Measurements of inner and outer streaming vortices in a standing waveguide using laser doppler velocimetry. *J. Acoust. Soc. Am.* **123** (2), 640–647.

NYBORG, W. L. 1953 Acoustic streaming due to attenuated plane waves. *J. Acoust. Soc. Am.* **25**, 68–75.

NYBORG, W. L. 1965 Acoustic streaming. In *Physical Acoustics* (ed. W. P. Mason), vol. 2B, pp. 265–331. Academic Press.

OLSON, J. R. & SWIFT, G. W. 1997 Acoustic streaming in pulse tube refrigerators: tapered pulse tubes. *Cryogenics* **37**, 769–776.

PARIDAENS, R., KOUIDRI, S. & JEBALI JERBI, F. 2013 Investigation on the generation mechanisms of acoustic streaming in a thermoacoustic prime mover. *Cryogenics* **58**, 78–84.

PIERCE, A. D. 1989 *Acoustics: An Introduction to its Physical Principles and Applications*. ASA.

QI, Q. 1993 The effect of compressibility on acoustic streaming near a rigid boundary for a plane traveling wave. *J. Acoust. Soc. Am.* **94**, 1090–1098.

RAYLEIGH, LORD 1884 On the circulation of air observed in Kundt tubes, and on some allied acoustical problems. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **175**, 1–21.

REYT, I., DARU, V., BAILLIET, H., MOREAU, S., VALIÈRE, J.-C., BALTEAN-CARLÈS, D. & WEISMAN, C. 2013 Fast acoustic streaming in standing waves: generation of an additional outer streaming cell. *J. Acoust. Soc. Am.* **134**, 1791–1801.

Downloaded from https://www.cambridge.org/core. IP address: 82.123.107.129, on 02 Apr 2019 at 17:42:30, subject to the Cambridge Core terms of use, available at https://www.cambridge.org/core/terms. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.111

REYT, I., BAILLIET, H. & VALIÈRE, J.-C. 2014 Experimental investigation of acoustic streaming in a cylindrical wave guide up to high streaming Reynolds numbers. *J. Acoust. Soc. Am.* **135** (1), 27–37.

ROTT, N. 1974 The influence of heat conduction on acoustic streaming. *Z. Angew. Math. Phys.* **25**, 417–421.

SCHLICHTING, H. 1932 Berechnung ebener periodischer Grenzschicht- strommungen [calculation of plane periodic boundary layer streaming]. *Phys. Zcit.* **33**, 327–335.

SCHUSTER, V. K. & MATZ, W. 1940 Über stationare Strömungen im Kundtschen Rohr (on stationary streaming in Kundt tubes). *Akust. Zh.* **5**, 349–352.

SUGIMOTO, N. 2016 Nonlinear theory for thermoacoustic waves in a naroow channel and pore subject to a temperature gradient. *J. Fluid Mech.* **797**, 765–801.

THOMPSON, M. W., ATCHLEY, A. A. & MACCARONE, M. J. 2004 Influences of a temperature gradient and fluid inertia on acoustic streaming in a standing wave. *J. Acoust. Soc. Am.* **117** (4), 1839–1849.

WAXLER, R. 2001 Stationary velocity and pressure gradients in a thermoacoustic stack. *J. Acoust. Soc. Am.* **109** (6), 2739–2750.

WESTERVELT, P. J. 1953 The theory of steady rotational flow generated by a sound field. *J. Acoust. Soc. Am.* **25**, 60–67.

WIKLUND, M. G., GREEN, R. & OHLIN, M. 2012 Acoustofluidics 14: applications of acoustic streaming in microfluidic devices. *Lab on a Chip* **12**, 2438–2451.

WOLFRAM RESEARCH INC. 2018 Mathematica, Version 11.3, Champaign, IL.

ZAREMBO, L. K. 1971 Acoustic streaming. In *High-Intensity Ultrasonic Fields* (ed. L. D. Rozenberg), vol. 175, pp. 135–199. Plenum Press.

Downloaded from https://www.cambridge.org/core. IP address: 82.123.107.129, on 02 Apr 2019 at 17:42:30, subject to the Cambridge Core terms of use, available at https://www.cambridge.org/core/terms. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.111

O. Hireche, I. Ramadan, C. Weisman, H. Bailliet, Y. Fraigneau, D. Baltean-Carlès, V. Daru

Experimental and numerical investigation of natural convection flows in two horizontal thermoacoustic cavities.

Int. J. Heat Mass Transf. 149 (2020), 119195.

International Journal of Heat and Mass Transfer 149 (2020) 119195

Contents lists available at ScienceDirect

International Journal of Heat and Mass Transfer

journal homepage: www.elsevier.com/locate/hmt

Experimental and numerical investigation of natural convection flows in two horizontal thermoacoustic cavities

Omar Hireche[a], Islam Ramadan[b], Catherine Weisman[a,c,*], Hélène Bailliet[b], Yann Fraigneau[a], Diana Baltean-Carlès[a,c], Virginie Daru[a,d]

[a] Laboratoire LIMSI, CNRS, Campus universitaire bât. 507, Rue du Belvedère, Orsay Cedex F-91405, France
[b] Institut Pprime, CNRS - Université de Poitiers - ENSMA, ENSIP, 6 rue Marcel Doré, Bât. B17 - BP 633, Poitiers Cedex 86022, France
[c] Sorbonne Université, Faculté des Sciences et Ingénierie, 4 Place Jussieu, Paris 75005, France
[d] DynFluid Lab., ENSAM, 151 Bd de l'Hôpital, Paris 75013, France

ARTICLE INFO

Article history:
Received 1 August 2019
Revised 22 November 2019
Accepted 8 December 2019

Keywords:
Natural convection
Thermoacoustics
Porous medium
Particle image velocimetry
Numerical simulation

ABSTRACT

This study aims at exploring the potential generation of natural convective flows in thermoacoustic devices. To this effect, two thermoacoustic setups are considered without acoustic oscillations, each setup thus constituting a cavity filled with air and comprising a porous medium heated on one of its ends. In the first configuration, the porous medium is a ceramic stack. In the second configuration, an ambient heat exchanger using circulating ambient water is placed on the other end of the porous medium (which is a regenerator). The wall temperature is measured in several points using thermocouples and natural convection flows developing in these cavities are measured in a vertical plane using Particle Image Velocimetry. Moreover numerical calculations are performed based on simplified 3D configurations, using immersed solid bodies at prescribed temperature to represent the heating or cooling elements and describing the porous media as homogeneous and either isotropic or anisotropic. Navier-Stokes equations under Boussinesq assumption are solved in the entire domain with the addition of a Darcy correction term in the porous media. Excellent qualitative and quantitative agreement on velocity fields is obtained between experimental and numerical simulation results for both configurations, which validates the model description. It is shown that the observed natural convection flows are fully three-dimensional and of significant magnitude so that they could potentially interfere with thermoacoustic effects.

© 2019 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

Thermoacoustic devices use thermal and dynamic interactions between the acoustic oscillations of a working inert gas and conducting solid walls to generate either heat pumping for refrigerating purposes or mechanical work for engine operating purposes [1]. These interactions are called the thermoacoustic effect. They occur nearby the solid walls, in a thermal boundary layer area: the gas experiences acoustic oscillations, while exchanging heat with the solid wall. In order to increase the exchange surface area, a porous medium is used. This porous medium is placed between two heat exchangers, forming the thermoacoustic core (TAC). The heat exchangers enable to either impose a temperature gradient along the porous medium, in order to produce acoustic power (engine), or to benefit from the heat pumping effect steered by an imposed acoustic oscillation (refrigerator). The thermoacoustic core represents the active part of the device, where the energy conversion takes place. Usually, thermoacoustic devices also include an acoustic resonator for sustaining the acoustic wave, and potentially an acoustic source or a linear electric generator, depending on the desired conversion effect. Thermoacoustic devices represent an interesting ecological alternative (almost no moving parts, the use of inert gas, simplicity) for industrial applications: cryogenics [2], air conditioning [3], domestic refrigeration, solar powered thermoacoustic engines [4], electric energy generators (conversion of the acoustic power into electric power) [5], waste heat recovery (for example, thermoacoustic heat pumps are used to upgrade the waste heat for renewed use in the industrial process) [6]. However thermoacoustic devices still suffer from poor performance generally caused by the existence of several nonlinear phenomena interfering with the process of energy transfer and deteriorating the global performance of the device. These nonlinear phenomena are related to jet-driven streaming, acoustic streaming, harmonic generation, end-effects and natural convection, and are not well described or just partially. Among these phenomena, natural con-

* Corresponding author.
E-mail address: weisman@limsi.fr (C. Weisman).

https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.119195
0017-9310/© 2019 Elsevier Ltd. All rights reserved.

vection has been the least investigated. The present study focuses on the effect of natural convection flows.

The influence of natural convection on starting conditions for a thermoacoustic engine was pointed out in an early paper of Gardner and Swift [7]. They observed that in the engine under study, the acoustic oscillation did not start although the design parameters were respected. This appeared to be due to a distortion of the mean temperature field, which was identified by the authors as originating from gravity-driven convection in the stack. The experimental procedure was modified, in order to reduce the convection flow, by decreasing the mean pressure and start the oscillation at a lower pressure. Once the oscillation was stabilized, the mean pressure was changed to its designed value. This is the option generally chosen by thermoacousticians: try to avoid or to reduce natural convection; but most of the time it is impossible to completely avoid it, since the devices come in a variety of geometries. The influence of the tilt angle on the starting condition of a solar powered thermoacoustic engine was analyzed more recently using Thermal Infrared Imager temperature measurements in the TAC [8]. In cousin devices that are pulse tube refrigerators, natural convection was also pointed out as a major source of losses [9,10] but no detailed analysis was performed and no estimate or measurement of the natural convection velocity field is available.

Apart from these few experimental evidence of natural convective flows in real devices, some experimental studies aimed at characterizing natural convection in simplified academic configurations. Natural convection and heat transfer inside a horizontal empty resonator, taking place between a hot heat exchanger and a cold heat exchanger, was investigated experimentally using thermal infrared imaging and particle image velocimetry (PIV) [11], and for different tilt angles [12]. It was shown that heat transfer mode changed from natural convection to forced convection with the addition of acoustic oscillation.

The role of natural convection on the distortion of Rayleigh streaming flow was exhibited in some recent experimental studies [13–15]. Measurement of the sole convection velocity field along a vertical section of the resonator under a temperature gradient was performed in [14] in order to explain the distorted streaming velocity field observed, but the measurement was very localized and there was no theoretical explanation of the complex velocity measurements obtained. Measurements of the mean velocity field in the entire cold resonator part of a simple standing-wave thermoacoustic engine were recently performed by Ramadan et al. [15]. Using both PIV and LDV techniques, they showed the existence of a mean flow with or without thermoacoustic oscillations. This flow was identified as natural convection combined, when acoustic waves are present, with Rayleigh streaming. However, in this preliminary study, measurements were performed only in the central horizontal plane, which is limiting for the study of natural convection. More generally, a characterization of the 3D nature of the natural convection velocity field suggested by all above-cited studies is still lacking and its influence on the overall thermoaoustic heat transfer not yet quantified. This is because dedicated adequate measurements of natural convection flow and temperature distribution are difficult in real devices, due to the many coupled intricate physical phenomena.

From the numerical point of view, natural convection is not yet included in thermoacoustic designing tools. It is therefore necessary to develop a numerical tool that can predict the magnitude and flow pattern of natural convection flows as well as the associated temperature distribution. So far it is unrealistic to integrate all effects in one complete numerical code, for a given complex device: acoustics, thermoacoustic energy conversion, acoustic streaming, natural convection without powerful computing resources. This is due to the existence of several distinct time scales (acoustic, thermal diffusion) and spatial scales (wavelength, viscous and thermal boundary layer thickness, device's characteristic scales). Such simulations would therefore be very time consuming, since long physical times would have to be discretized in small time steps, and extended physical domains discretized with fine mesh. Morever, for a better understanding of how several physical processes interact, it seems relevant to study them separately in a first approach. Therefore, this study focuses on the natural convection flow in thermoacoustic device configurations, with no acoustic oscillation. As will be shown further, the geometrical configuration of thermoacoustic devices can generally be considered as a series of heated cavities, some of which are filled with a porous medium. Each cavity is submitted to a temperature difference, which can generate a heat-driven flow.

Convection flows through non homogenous and anisotropic porous media in cavities heated from the side are quite well described, with studies started in the 1980s [16]. The same problem in mixed fluid and porous cavities was treated extensively in the literature [17,18]. The convection flow depends strongly on the geometry of the cavities and the previous general studies cannot be directly applied to the specific case of a thermoacoustic engine. The specific geometry of a thermoacoustic stack was considered in [19], where natural convection in a 2D differentially heated horizontal cavity, filled with a stack of plates, was considered. This study showed that a Darcean porous model gives correct orders of velocity scales, and allows for a qualitative description of the solutions. A preliminary 3D numerical study of the effects of natural convection in a cylindrical guide containing an assembly of a hot heat exchanger and porous medium was conducted recently [20]. The influence of the porous medium's physical characteristics (permeability, thermal conductivity, anisotropy) on the flow and temperature fields was investigated.

The numerical approach of [20] is pursued in this paper on realistic configurations, and confronted with experiments resulting from extending the preliminary study in [15]. In the present analysis, the experimental and numerical models were elaborated and calibrated jointly in order to improve the description of natural convection flows in a thermoacoustic system. The first objective of this paper is to predict natural convection flows in configurations that are representative of such systems. The second objective is to show that the model works well by comparison with possible measurements in parts of the device.

As mentioned above, to isolate natural convection from other phenomena, we chose to work with a thermoacoustic cavity but not with a thermoacoustic device; i.e. no acoustic oscillation was generated in the cavity. Whether or not natural convection should be accounted for in the design of a thermoacoustic device is going to depend highly on the device's geometry and its orientation with respect to gravity. It is also going to depend particularly on the thermo-physical parameters of all constituting elements, and specifically the thermoacoustic core. Therefore, and in order to explore increasingly realistic geometries, we investigate two different configurations: the first one consists in a very simplified thermoacoustic core that is composed of an electric heater attached to a ceramic stack; the second one is composed of the same two elements followed by an ambient heat exchanger. These two configurations are further referred to as horizontal cavity without ambient heat exchanger (or 1st configuration), and horizontal cavity with ambient heat exchanger (or 2nd configuration).

In the following, the first configuration is investigated in Section 2. The experimental setup and method are described (Section 2.1) and the numerical method is presented (Section 2.2). Experimental and numerical results are then compared and discussed, and the potentiality of the numerical model for predicting purposes is assessed (Section 2.3). The configuration with ambient heat exchanger is considered in Section 3, following the same approach.

2. Horizontal cavity without ambient heat exchanger (1st configuration)

2.1. Experimental setup, measurement systems and procedure

For this first comparison between experimental and numerical approaches, a very simple thermoacoustic cavity is used. As shown in Fig. 1a, the resonator is made of a glass tube with inner and outer diameters of 39 mm and 44 mm, respectively. The total length of the resonator is 738 mm and the thermoacoustic core is placed at a distance of 129 mm away from one end of the resonator. The thermoacoustic core consists of an electric heater attached to one side of a 400 CPSI (Cell Per Square Inch) ceramic stack that has length of 60 mm. The axial coordinate is also defined in Fig. 1a, with $x = 0$ corresponding to the right end of the ceramic stack. In such a simple thermoacoustic engine, applying high enough temperature gradient along the stack generates sustainable standing acoustic waves. A more detailed description for the experimental setup can be found in [15]. In order to isolate the natural convection flow, the two small plugs at the ends of the resonator tube were removed to cease any acoustic oscillations and velocity measurements were performed in the central vertical plane. It was checked previously [15] that the removal of the plugs does not affect the natural convection flow.

A PIV system is used to measure the natural convection flow in the central vertical plane. The PIV system consists of a double pulse Nd:YAG laser source that illuminates the vertical plane. Two cameras (Imager Pro X) with spatial resolution of 2048 $\times$ 2048 pixels^2 and maximum repetition rate of 15 Hz are used to record the images. Each camera is equipped with a Nikon lens (Model: Sigma 105 mm). The two cameras are placed next to each other in order to increase the size of the measurement Field Of View (FOV). An atomizer aerosol generator (Model: TOPAS ATM 210) is used to atomize oil to produce seeding particles with a mean particle diameter of 0.4 µm. In order to achieve better correlation between the acquired double-images, the time between laser pulses is adjusted to allow the seeding particles to displace a distance of about 1/4 the size of the interrogation area [21].

The measurement procedure followed in the current study is similar to the procedure we followed in our previous work [15]. In order to have enough seeding particles after the system reaches to the steady-state conditions (i.e. the change in the temperature over the PIV measurement period does not exceed 5%), the preheating technique is followed. A 31.5 W $\pm$ 1% electrical power is applied to the hot heat exchanger (coiled resistance). After the preheating of the system, the seeding particles are introduced from one extremity and flow until reaching the other extremity of the duct so that the seeding particles are dispersed over the whole duct. The system is left for 3 min in order to eliminate the effects of the seeding introduction on the natural convection flow. Finally, the PIV measurements are started and 100 double-images captured. The natural convection flow distribution is measured in the central vertical plane, covering the axial distance from $x = 0$ mm (end of ceramic stack) to $x = 520$ mm. Since wall temperatures are very important for the study of the natural convection flow, several thermocouples are used to measure the wall temperatures and the temperatures at the center of the two side sections of the ceramic stack. As shown by Fig. 1b (large dots), on the tube wall for each axial position there are two temperature measurements corresponding to the top and bottom of the tube wall.

The uncertainty of the measured quantities (i.e. temperature and the velocity) is estimated by repeating the measurements (3 times) under the same input electric power to the electrical heater and calculating the standard deviation of these quantities. The estimated value of the uncertainty in the temperature measurements is thus found to be $\pm$ 1 % of the reported mean temperatures. For the velocity measurements, the uncertainty of the measurements is calculated over the whole measurement area and then the spatial-average uncertainty is calculated. The spatial-average uncertainty is found to be $\pm$ 13 % of the reported velocities.

2.2. Numerical model

2.2.1. Numerical simulation parameters

A simplified 3D configuration is introduced in order to model the experimental configuration described in the previous section (Fig. 2a). The domain under study is a horizontal cylindrical tube of length L and radius R, filled with air and closed at both ends.

The ceramic stack, constituted of horizontal capillaries of square cross section with side length $a = 1$ mm, is modeled as a homogeneous and anisotropic porous medium of length L_p and radius R (see Fig. 2a and Table 1a). Its porosity ϵ, defined as the ratio of gas volume to total volume is calculated based on the given geometry. The equivalent permeability in the axial direction is $K_{xx} = \frac{a^2\epsilon}{8}$ (calculated using [18]), its permeability in the radial and azimutal directions are approximately zero (in the code they are set to 10^{-12} m^2). The equivalent thermal conductivity is assumed isotropic and homogeneous, of scalar value $k_p = \epsilon k_{fluid} + (1-\epsilon)k_{solid}$ (again based on [18]). The numerical values of these parameters are given by Table 1b.

The hot exchanger (coiled resistance), placed at a distance L_L from the left end, is modeled as 2 solid rings of width e_h

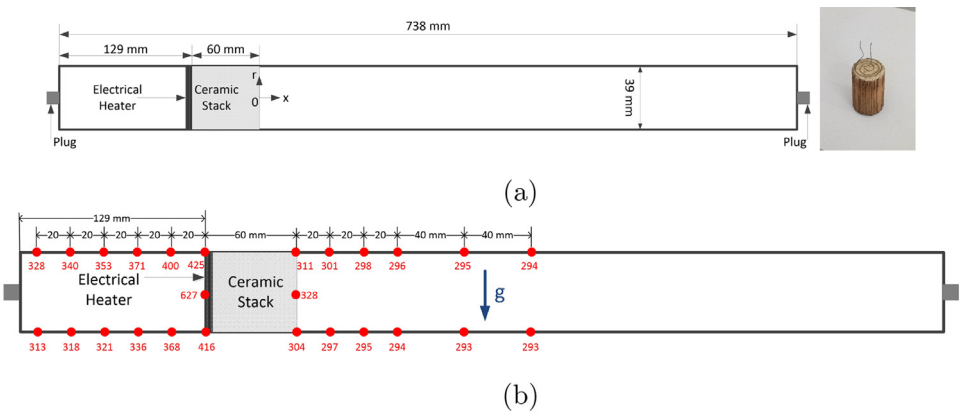


Fig. 1. (a): Schematic for the thermoacoustic resonator and image of the thermoacoustic core. (b): Thermocouples locations and results of measurements (in K) in the 1st configuration.

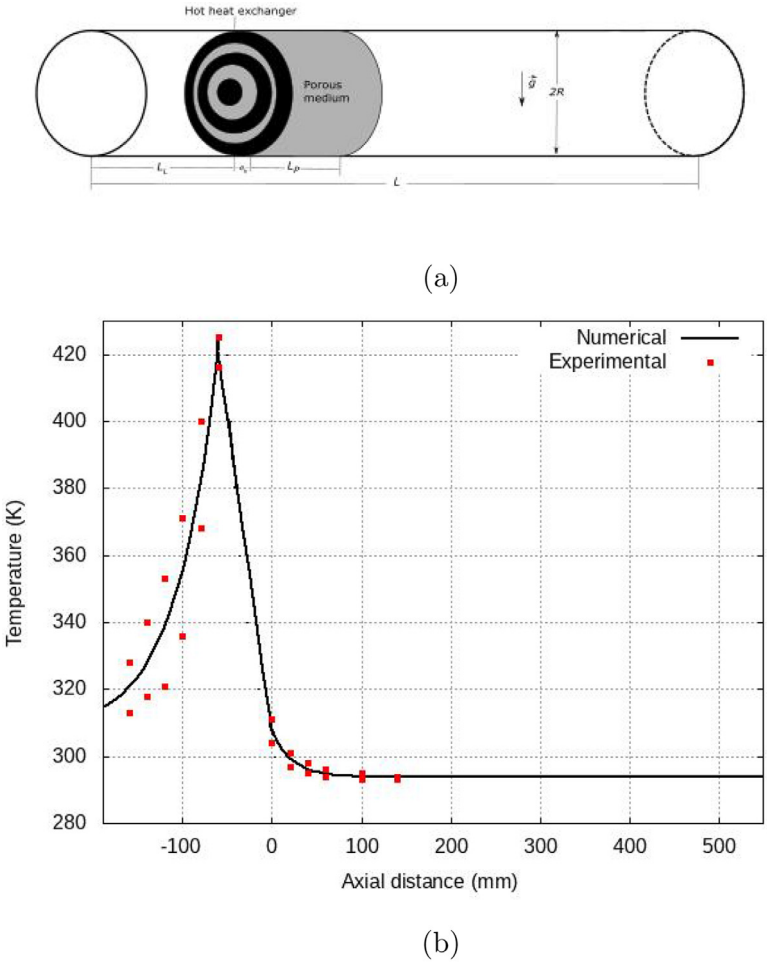


Fig. 2. (a): Numerical configuration for the 1st configuration, (b): temperature prescribed in the numerical model along the tube wall, as a function of axial position (solid line), and measurements on top/bottom of the outside tube wall (squares) reported from Fig. 1b.

Table 1
(a): Geometrical and thermal parameters, (b): Thermophysical parameters for air and porous medium, 1st configuration.

R	L	L_L	e_h	L_p	T_{hot}	T_{cold}
mm	mm	mm	mm	mm	K	K
39	738	129	5.8	60	520	293
			(a)			
ρ	μ	k	c_p	ϵ	K_{xx}	k_p
kg m^{-3}	kg m^{-1} s^{-1}	W m^{-1} K^{-1}	J kg^{-1} K^{-1}		m^2	W m^{-1}K^{-1}
1.07	1.9×10^{-5}	2.8×10^{-2}	1004	0.64	8.10^{-8}	$9.18.10^{-1}$
			(b)			

and a central core maintained at certain hot temperature (the central core being hotter than the outside ring). Temperature values prescribed in this hot heat exchanger are: 420 K on the outside ring, 523 K on the middle ring, and 627 K in the central core. Therefore the "average" hot temperature is estimated as $T_{hot} = 520$ K. Along the tube wall, temperature is imposed as a function of the axial coordinate only, based on the measured temperature distribution, as shown by Fig. 2b. Since for each axial position there are two measures of temperature (at the top and bottom of the outside wall) reported in Fig. 1b, the average value between the two measured values was calculated and prescribed for the corresponding axial position. On the left of the HHX, the temperature distribution is then fit with an exponential function. Along the porous medium a linear variation is used. Finally on the right of the porous medium the temperature distribution is fit with another exponential function (Fig. 2b).

The thermophysical parameters for air are calculated for atmospheric pressure and at a reference temperature chosen to be $T_{ref} = 320$ K which is the global mean temperature of the air.

2.2.2. Governing equations

In the fluid domain, the Navier-Stokes equations are written as classically under Boussinesq assumptions. The reference air density ρ, thermal conductivity k, heat capacity c_p, dynamic viscosity μ, and volume expansion coefficient at constant pressure $\beta = 1/T_{ref}$ for an ideal gas are constant and equal to their value for a reference temperature T_{ref} and atmospheric pressure.

The thermophysical characteristics of the porous medium are its porosity ϵ, its permeability tensor $\mathbf{K}$, and its equivalent thermal conductivity k_p. A scalar phase variable X is introduced to identify the nature of the medium (X = 1 for gas, X = 0 for the porous medium) so that a Darcy term appears as additional term in the

right hand side of the momentum equation in the case of the porous medium zone. Therefore the equations can be written in a unified form as:

$$\nabla.\mathbf{V} = 0$$

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{V})}{\partial t} + \nabla.(\rho\mathbf{V}\otimes\mathbf{V}) = -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{V} - \rho\beta(T - T_{ref})\,\mathbf{g} - (1-X)\mu\mathbf{K}^{-1}\mathbf{V}$$

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V}.\nabla)T\right) = \nabla.[(X\,k + (1-X)\,k_p)\nabla T]$$

In the above equations $\mathbf{V}$ is the velocity vector, p is the nonhydrostatic pressure, T is the temperature, t is time and $\mathbf{g}$ is the acceleration of gravity.

On all solid boundaries (i.e. the cylinder walls and the heat exchanger solid parts), a no-slip condition is imposed, and the temperature is prescribed as detailed in the previous section.

2.2.3. Numerical method

Computations are performed with the in-house code SUNFLUIDH, which has been developed at LIMSI for simulations of unsteady incompressible flows. The previous governing equations are solved in the entire domain using a finite volume approach with a second order discretization in space and time. An implicit treatment of the viscous and thermal conductive terms ensures better numerical stability with regard to the time step which only depends on the CFL criterion. The equation set is solved by means of an ADI method [22]. An incremental projection method is used in order to ensure the divergence-free velocity field [23,24]. This implies to solve a Poisson's equation at each time step which is carried out with a multigrid-SOR algorithm [25]. The solution corresponds to the time-variation of pressure from which the correction term is estimated in order to get the divergence-free velocity field. The mesh is body-fitted regular.

The numerical domain is meshed using 64 points regularly spaced along the radial direction, 64 points regularly spaced along the azimutal direction, and 512 points placed regularly along the axis. The mesh size in the axial direction is $\Delta x = 1.4$ mm. In the radial direction, $\Delta r = 0.61$ mm. It was checked through a mesh-refinement study that this spatial resolution is adequate for the given configuration. The time step is adjusted throughout the simulation in order to satisfy a CFL < 0.5 criterion.

2.3. Results and discussion

Fig. 3 shows the experimental and numerical velocity vector maps and colored contours of the axial velocity component for the central vertical plane at the right side of the porous medium, which corresponds to the measurement field of view (close-up views for the figures near the porous medium (i.e. $x = 0$) are also shown in Fig. 3). Fig. 4 shows the numerical temperature field over the same region. The vortex flow observed is indeed that of natural convection of air in a cylindrical fluid cavity, triggered by a horizontal temperature gradient (the temperature of the right side of the porous medium is still much higher than the ambient temperature, as shown on Fig. 4). The numerical temperature at the center of the right end section of the porous medium is found to be equal to 320 K, in good agreement with the measured value of 328 K (see Fig. 1b). Experimental and numerical results agree remarkably well (Fig. 3), considering the numerous simplifications and approximations made in the numerical model. It should be pointed out that the numerical calculation converges to a steady solution, in agreement with experimental results (in which the temperature and thus velocity fields only change very slowly in time). The main difference lies in that for $x > 150$ mm a small flow remains observable along the whole experimental field of view, while in the numerical simulation it becomes negligible. This could be due to the fact that the temperature imposed on the tube boundary is based on the measurement of the outside temperature and not on the inside, which should be slightly higher, therefore extending the natural convection flow. Also the presence of the openings on the tube ends (open plugs) is not modeled (a closed end with no slip condition is imposed in the numerical domain). In addition, the maximum amplitude and the extent of the convection flow in the field of view are highly dependent on the value of the driving ΔT imposed through prescribed boundary temperature values. The temperature on the glass tube is not controlled and the ambient temperature varied slightly during the experiment (about 2 degrees). The effect of changing ΔT by $\pm$ 2 K (i.e. representing 12% of $\Delta T = 17$ K for the experimental field of view) could also explain the observed discrepancy between the measurements and the numerical results : A rough model gives the max velocity amplitude as a linear function of ΔT. The corresponding variation of the extent of the convection cell is harder to estimate. Fig. 5 shows the axial profile of the vertical velocity component obtained from experiments and numerical simulations at the central vertical plane, again on the right side of the porous medium, for several values of the radial coordinate r (which on this plane measures the height). Here again the agreement between experimental and numerical results is very good, except for the limit $x \to 0$ (end of the porous medium) where the local geometry changes are not accounted for in the model (the porous medium being considered homogeneous). Also, the porous medium being very anisotropic, the model used for the hot exchanger (and particularly its solid-fluid geometry shown on Fig. 2a) influences the velocity near $x = 0$. As expected, the velocity profiles are not symmetric with respect to the x-axis, and show the development of the convection boundary layer along the "hotter" section $x = 0$, in the bottom half between $r = -15$ mm until $r = 0$. The maximum velocity then decreases because when the flow reaches the top tube wall it is forced to turn. Fig. 6 shows the axial profiles of the axial velocity component obtained from experiments and numerical simulations in the same locations as Fig. 5. Here again the agreement between experimental and numerical results is very good, except for the limit $x \to 0$ (end of the porous medium). As expected, the velocity is negative for the lower part of the tube, and positive for the upper part, forced by the upward flow along the hotter porous medium end $x = 0$. Fig. 7 shows the vertical profile of the axial velocity component obtained from experiments and numerical simulations on the central vertical plane, on the right side of the porous medium, for several values of the axial position. The agreement between experiments and numerical simulations is good, but the maximum values are about 20% off. Also, as noted on Fig. 3, for $x > 150$ mm, there is a small discrepancy between numerical and experimental results.

Fig. 8 a and b show velocity vector maps and colored contours of the axial velocity component obtained from numerical simulations and experimental data from [15] on the central horizontal plane, on the right side of the porous medium. There is again excellent agreement between experiments and numerical simulations. Convective velocities are of course a lot smaller on that plane than on the central vertical plane. Fig. 8c shows the numerical and experimental transverse profile (as a function of the radial coordinate) of the axial velocity component on the central horizontal plane at $x = 60$ mm. On this plane the flow is symmetric with respect to the x-axis.

In order to better understand the convective flow observed in the measurement field of view, contours of the axial velocity component and temperature in the central vertical plane obtained from numerical simulations are shown within the porous medium on Fig. 9a and b, and left of the hot heat exchanger on Fig. 9c and d. The flow inside the porous medium is indeed character-

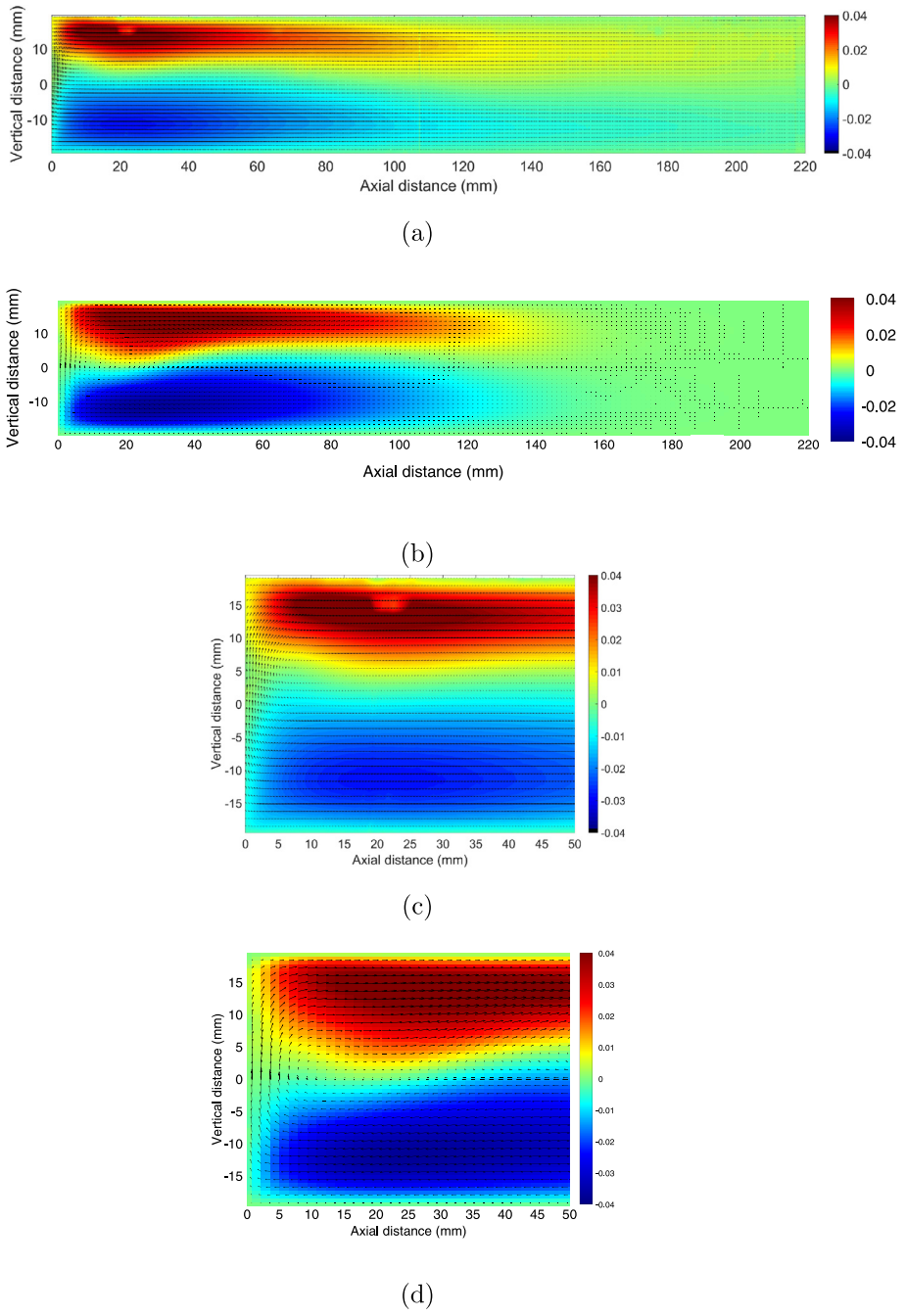


Fig. 3. Velocity vector maps and colored contours of the axial velocity component obtained from experiments (a) and numerical simulations (b) on the central vertical plane, on the right side of the porous medium. Zooms on the left part of the figures, for experimental results (c) and numerical simulations (d).

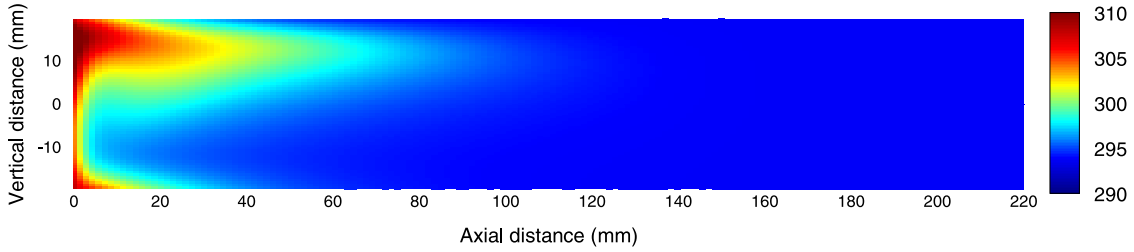


Fig. 4. Calculated temperature map on the central vertical plane, on the right side of the porous medium.

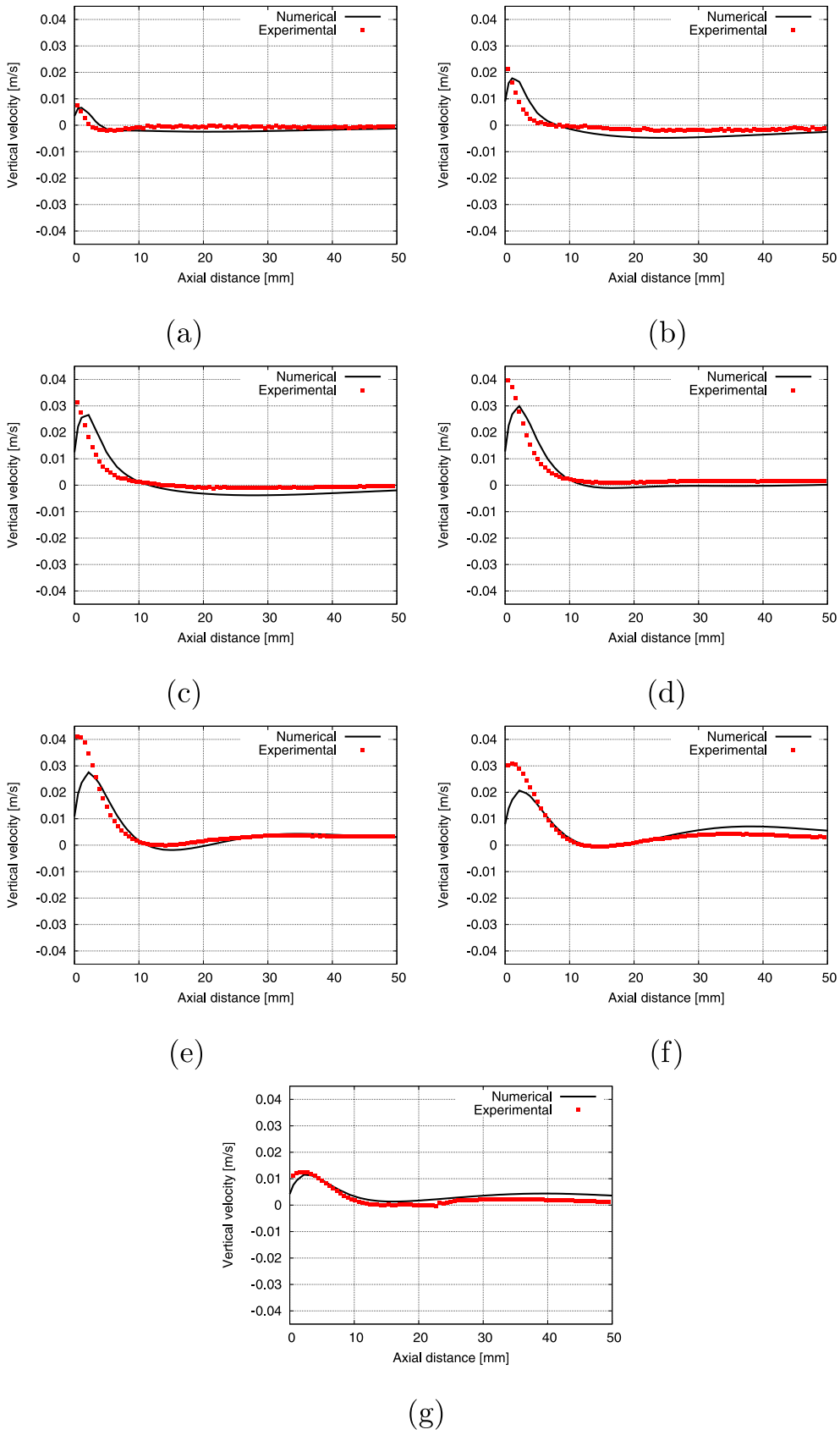


Fig. 5. Axial profile of the vertical velocity component on the right of the porous medium (squares: experiments, solid line : numerical simulation) on the central vertical plane at (a): $r = -15$ mm, (b): $r = -10$ mm, (c): $r = -5$ mm, (d): $r = 0$, (e): $r = 5$ mm, (f): $r = 10$ mm, (g): $r = 15$ mm.

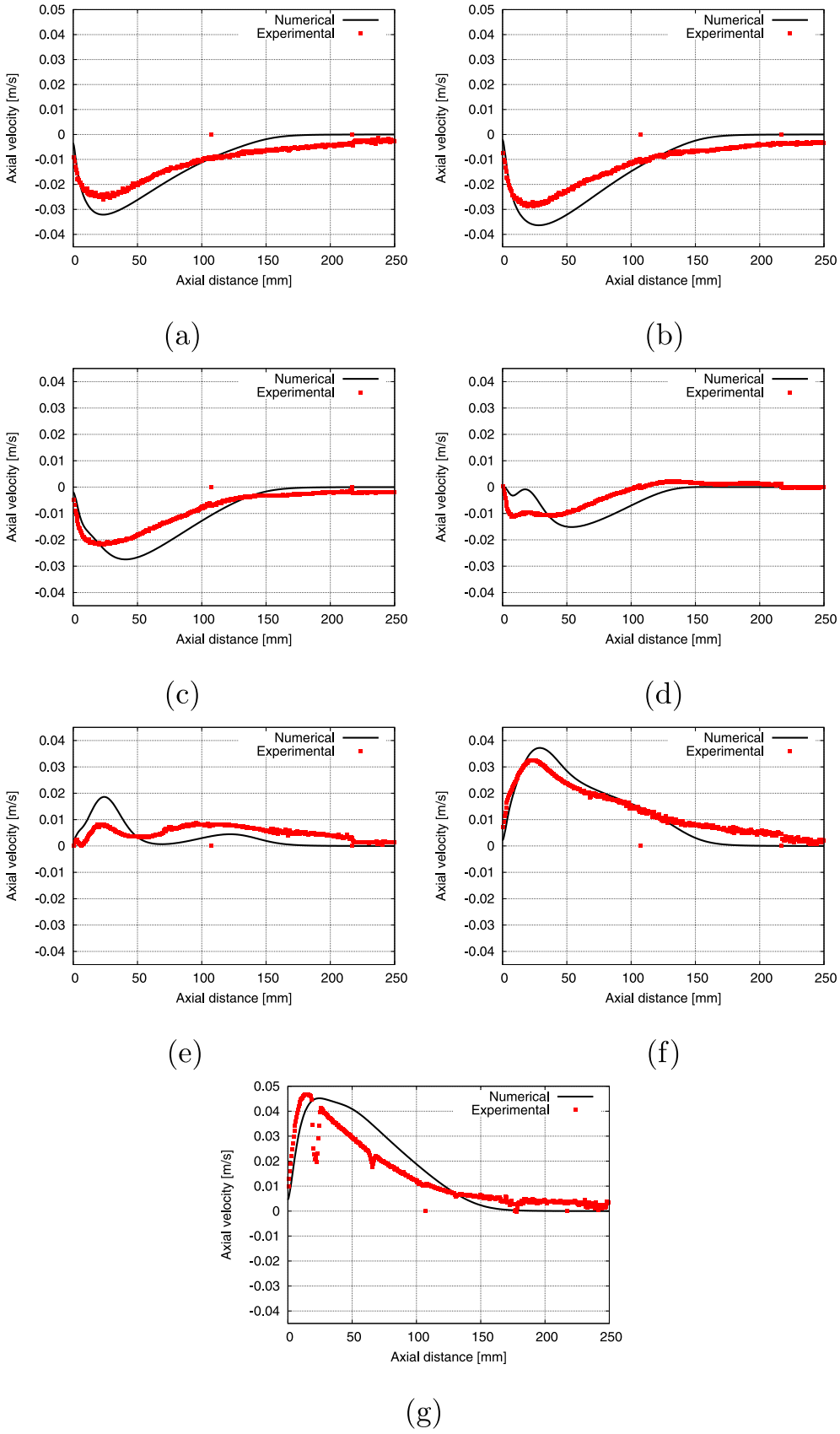


Fig. 6. Axial profile of the axial velocity component on the right of the porous medium (squares: experiments, solid line: numerical simulation) on the central vertical plane at (a): $r = -15$ mm, (b): $r = -10$ mm, (c): $r = -5$ mm, (d): $r = 0$, (e): $r = 5$ mm, (f): $r = 10$ mm, (g): $r = 15$ mm.

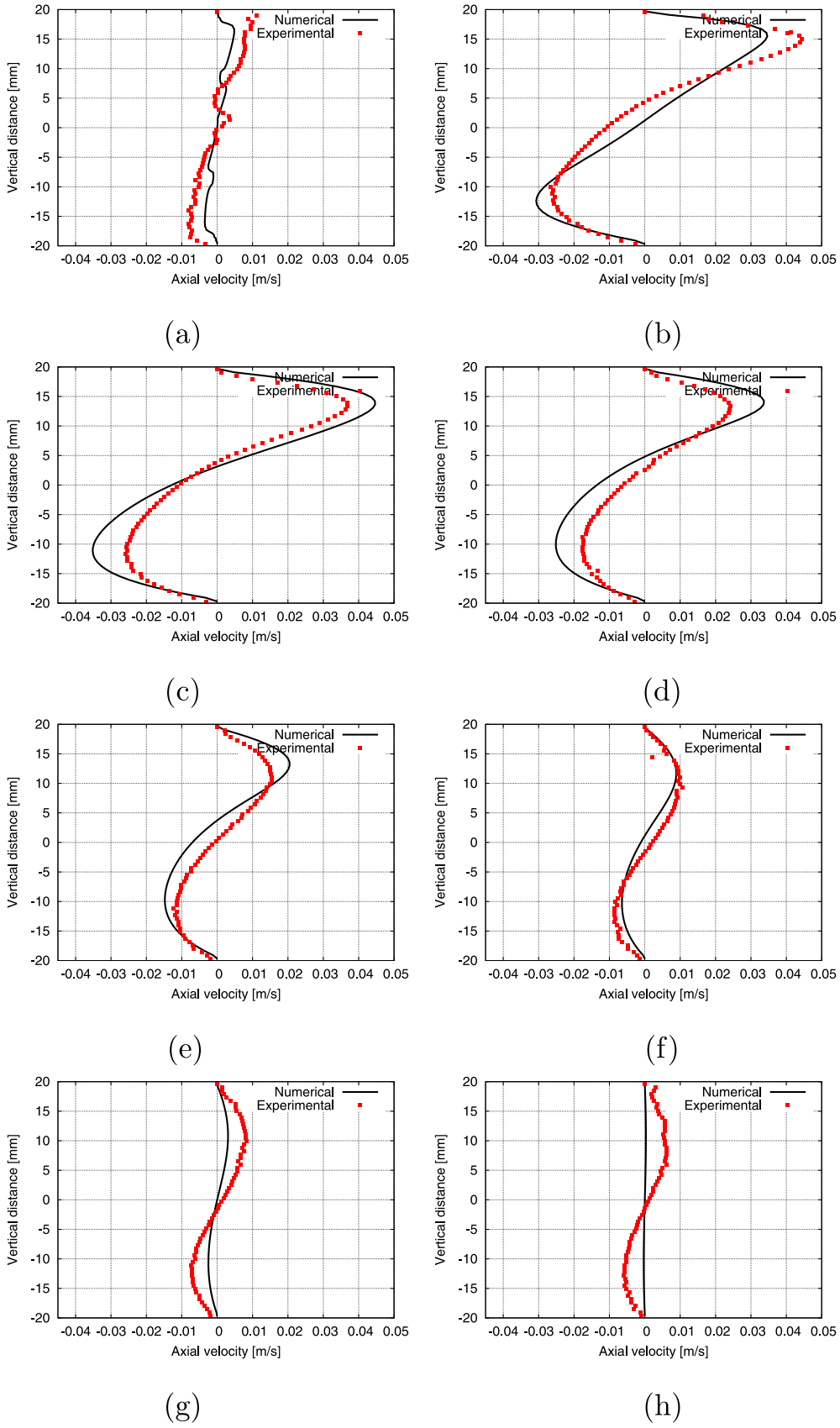


Fig. 7. Vertical profile of the axial velocity component on the right of the porous medium (squares: experiments, solid line: numerical simulation) on the central vertical plane at (a): $x = 0$ mm, (b): $x = 10$ mm, (c): $x = 40$ mm, (d): $x = 70$ mm, (e): $x = 100$ mm, (f): $x = 130$ mm, (g): $x = 150$ mm (h): $x = 180$ mm.

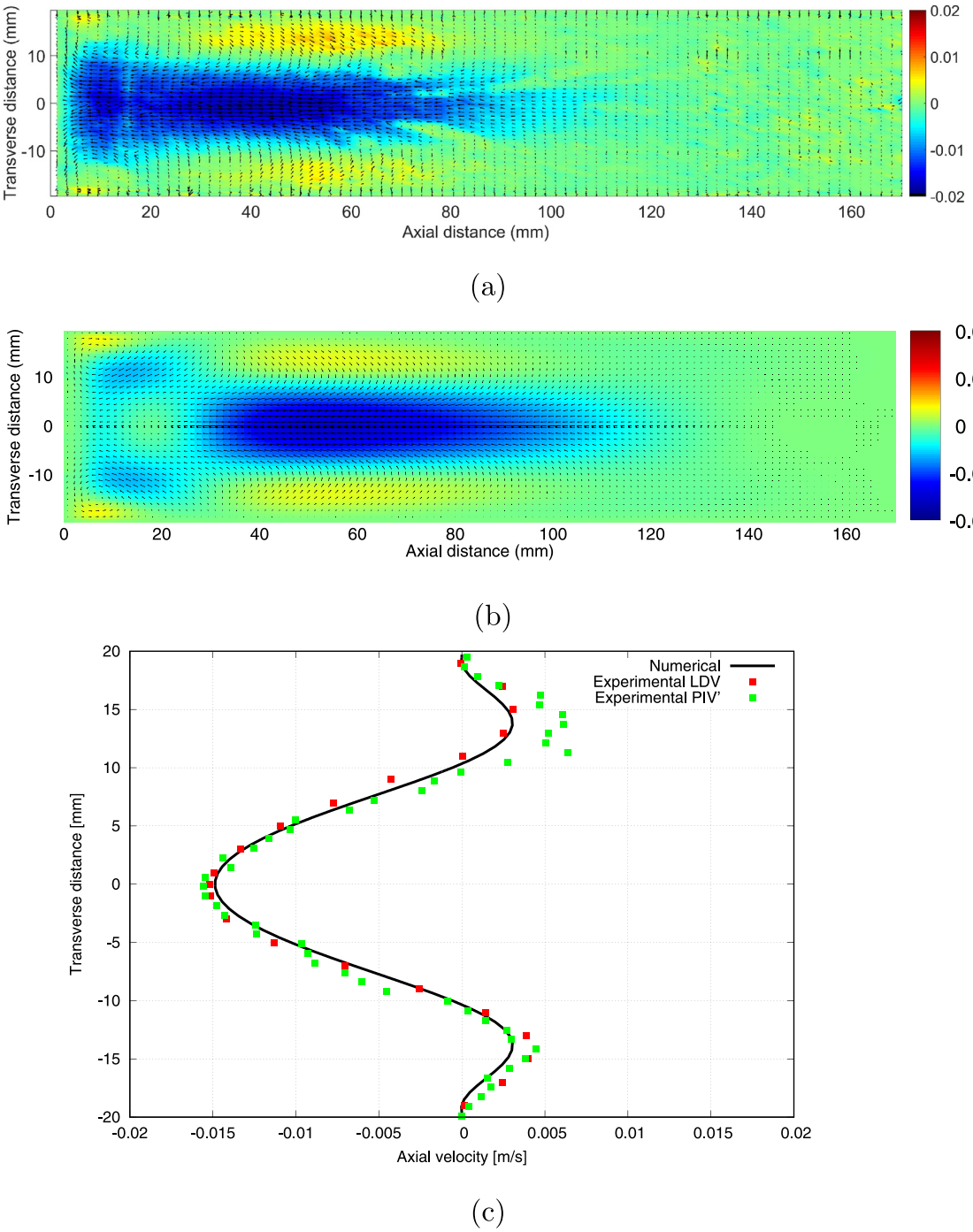


Fig. 8. Velocity vector maps and colored contours of the axial velocity component (a): experiments, (b): numerical simulations on the central horizontal plane, on the right side of the porous medium. (c): Distribution of the axial velocity component as a function of the radial coordinate (squares: experiments, solid line : numerical simulation) on the central horizontal plane at $x = 60$ mm.

istic of natural convection flow in a cavity filled with a strongly anisotropic porous medium (Fig. 9a). The flow is constrained to remain in the horizontal plane, and the permeability being very small, conduction dominates convection (with mostly horizontal stratification of temperature), and the flow is very slow. Also, because of the porous medium's anisotropy, the model used for the hot heat exchanger influences the flow in the right fluid cavity, i.e. in the measurement field of view: For example the no-slip condition on the solid core and rings and the zero permeability in the radial and azimutal directions put high constraints on the development of the flow in the porous medium. The flow thus retains the geometry of the hot heat exchanger (Fig. 9a). In the left fluid cavity the convection vortex turns in the opposite direction, because the cooler boundary is on the left (Fig. 9c).

In order to get an insight in driving effects in the thermoacoustic cavity, the maximum velocity in different regions is examined thereafter in light of classically defined reference Rayleigh numbers and associated velocity scales. On the right side of the hot heat exchanger, the flow is driven by the temperature difference $\Delta T = T_{hot} - T_{cold}$. The flow in this region should then be that of a differentially heated cavity partly filled with an anisotropic porous medium. Using the axial permeability K_{xx} and equivalent thermal

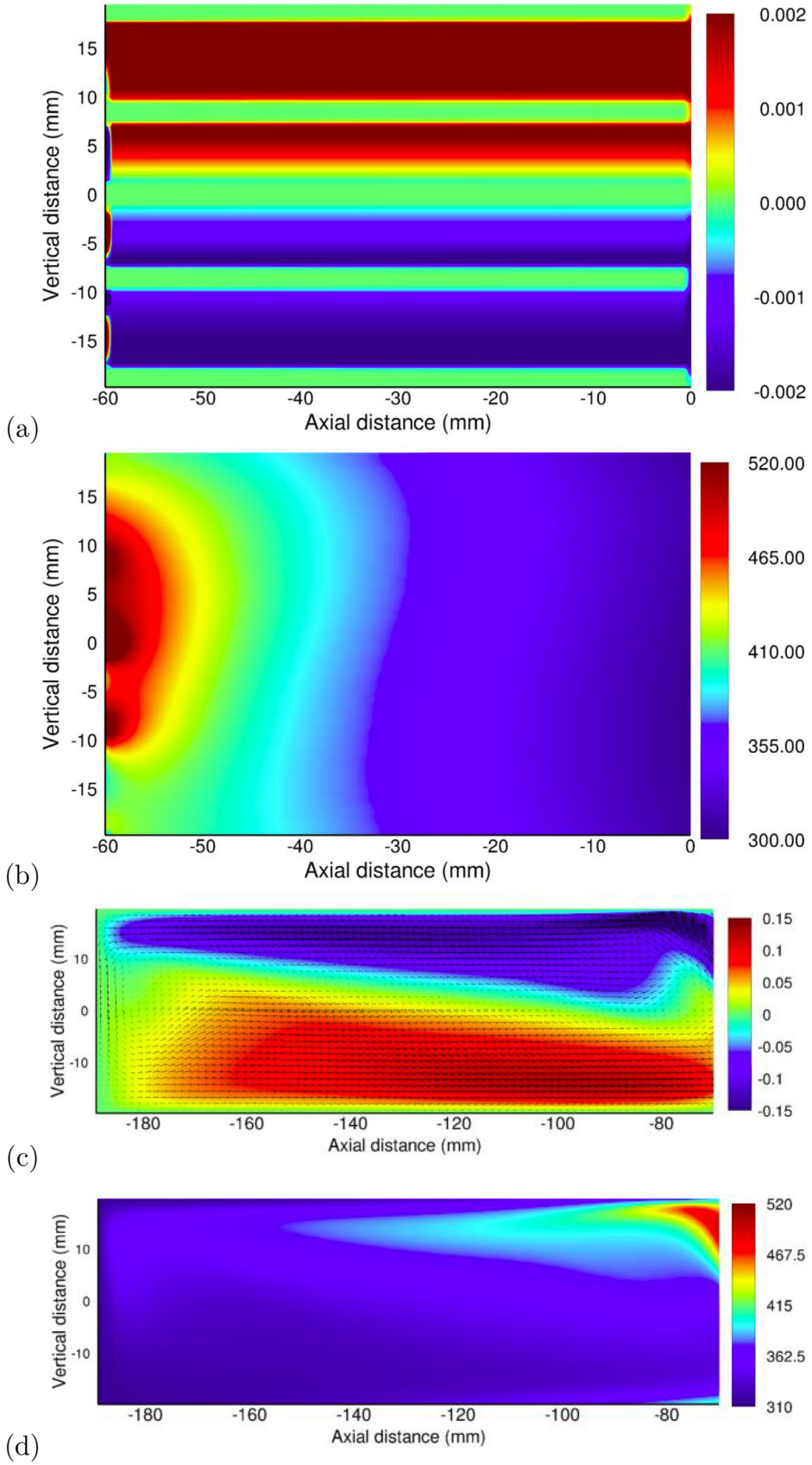


Fig. 9. Contour of the axial velocity component (a) and temperature (b) in the central vertical plane in the porous medium region. Contour of the axial velocity component (c) and temperature (d) in the central vertical plane in the cavity left of the hot heat exchanger.

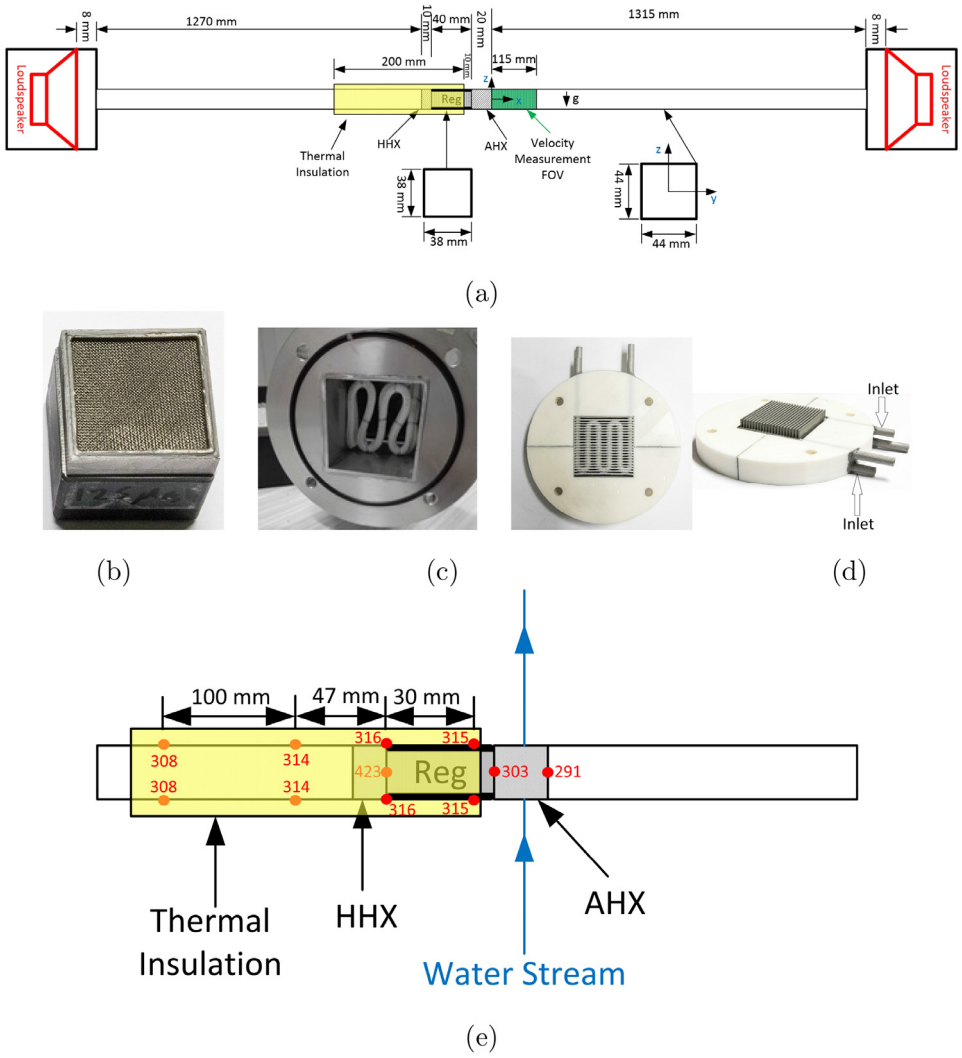


Fig. 10. (a): Schematic for the 2nd experimental setup. Photos for (b): The regenerator, (c): The hot heat exchanger, (d): The ambient heat exchanger, (e): Thermocouples locations and results of measurements.

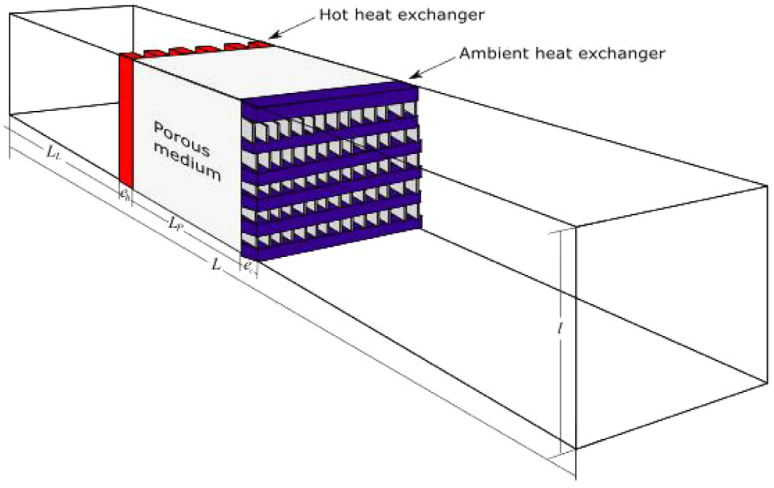


Fig. 11. Numerical configuration for the 2nd configuration.

conductivity k_p, the porous medium Rayleigh number is $Ra_p = \frac{\rho g \beta \Delta T H K_{xx}}{\mu \alpha_p}$, with $\alpha_p = \frac{k_p}{\rho c_p}$ the porous medium equivalent thermal diffusivity, and H a reference height [18]. Using all geometrical and thermophysical parameters presented previously (Table 1), and taking the reference height $H = R$, this porous Rayleigh number is $Ra_p = 1.1$. The associated velocity scale is $V_{refp} = \frac{\alpha_p}{H} Ra_p = 0.02$ m/s [18]. The maximum velocity in the region on the right of the hot heat exchanger is about 0.04 m/s, which is indeed on the order of this velocity scale. The characteristics of the porous medium therefore determine the strength of the convection flow.

On the left of the hot heat exchanger, the flow is driven by the temperature difference between the left end of the cylindrical tube and the heat exchanger (imposed based on the experiments and equal to about $\Delta T_l = 110$ K). The flow in this region should then be that of a differentially heated fluid cavity. The reference fluid Rayleigh number is classically given as $Ra = \frac{\rho g \beta \Delta T_l H^3}{\mu \alpha}$, with $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$ the fluid thermal diffusivity, and H a reference height [17]. Using the same reference height $H = R$, this fluid Rayleigh number is $Ra = 3.36 \times 10^5$. The associated velocity scale is $V_{ref} = \frac{\alpha}{H} Ra^{1/2} = 0.38$ m/s [17]. The maximum velocity in the region on the left of the hot heat exchanger is about 0.15 m/s (Fig. 9c), which is indeed on the order of this velocity scale. The strength of the convection flow in this region will then be determined by the effectiveness of the isolation of this "hot" part of the tube.

When this simple thermoacoustic engine is functioning (with plugs in place), acoustic velocities of about 2 m/s and streaming velocities of about of 1 cm/s have been observed for the same applied electrical power [15]. Therefore the present results confirm that natural convection is significant and that this phenomenon is important in understanding mean velocity measurements in such a device. This phenomenon, as acoustic streaming and jet streaming, is a source of heat flux that should be taken into account for a realistic thermal balance in such a device. Moreover, the above presented results show that a simple model as the one proposed here gives realistic results, meaning that a thermoacoustic core is satisfactorily described as a homogeneous porous medium in terms of natural convection effects. Finally, it was found that the use of Rayleigh numbers give a correct order of magnitude for the convective velocity, that can be used for a preliminary estimate. In the following section we consider a configuration slightly more complicated and more representative of an optimized system because an ambient heat exchanger is added. Our aims here are the same as above, i.e. investigate the natural convection flows in such a system both experimentally and numerically.

3. Natural convection flow in a cavity with ambient heat exchanger

3.1. Experimental setup, measurement systems and procedure

In this second experimental setup, many factors were taken into considerations in the design process to overcome difficulties encountered in the 1st configuration. First, the resonator duct is chosen to have a square cross-sectional area to facilitate the PIV measurements in the vertical plane ($x-z$ plane in Fig. 10a) at different transverse locations (y-direction). Second, an Ambient Heat Exchanger (AHX) is added on the right side of the regen-

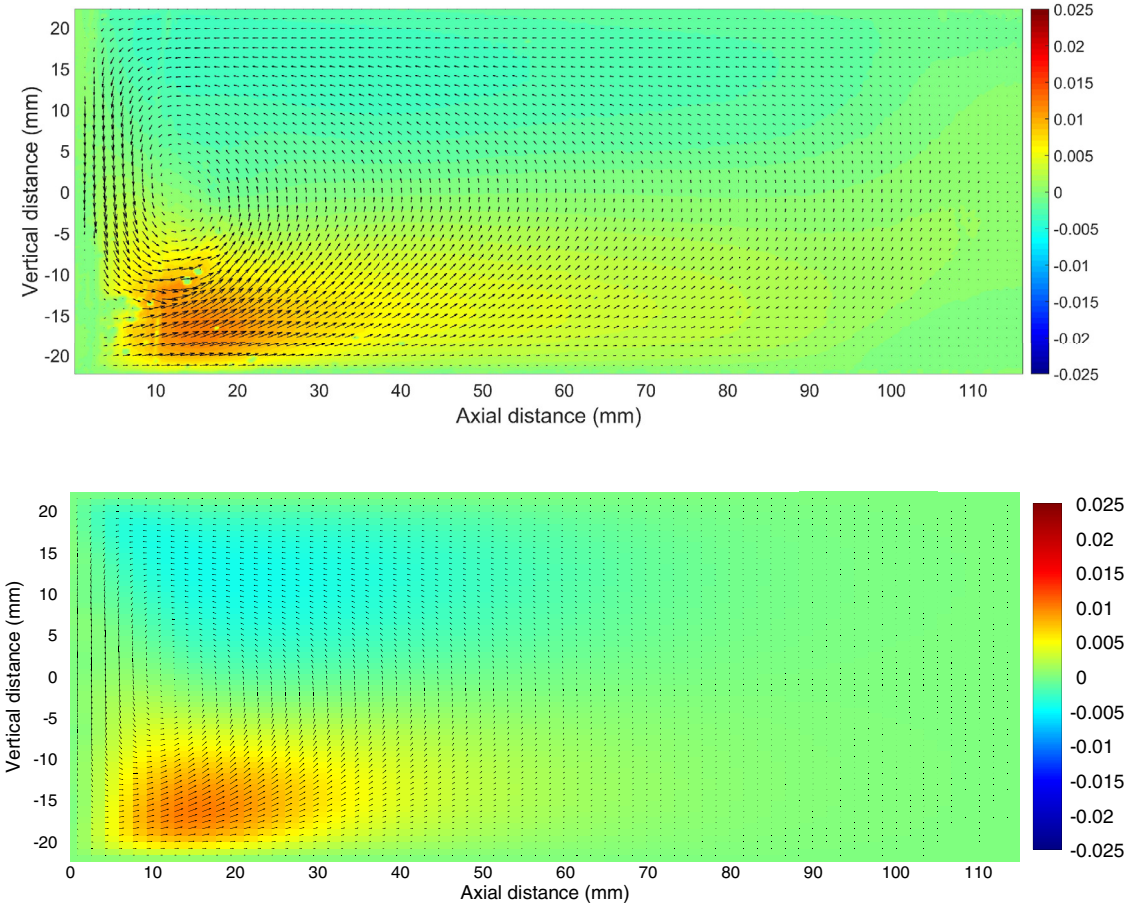


Fig. 12. Velocity vector map overlapped on the color map of the axial velocity component at the exit of the AHX on vertical plane at $y = -19$ mm (top: experiments, bottom: numerical simulations).

erator to keep its temperature constant. At the left side of the regenerator ends is placed an electric resistance as in the 1st configuration. Third, a thermal insulation is used to cover the hot part of the resonator and hence to reduce the heat loss through the walls of the resonator tube. As shown in Fig. 10a, the setup consists of a square duct with inner side length of 44 mm and the total length of the duct is 2655 mm. The left part of the duct is made of aluminum whereas the right part of the duct is made of acrylic to grant an optical access for the laser measurements. Two loudspeakers (Model: PHL - B20/2410) are attached to the ends of the duct. As before, in order to isolate the natural convection flow, no acoustic wave was generated in the resonator, that is the loudspeakers were turned off. The thermoacoustic core consists of a regenerator placed between the Hot Heat Exchanger (HHX) and the AHX. The coordinate system is also defined in Fig. 10a, with $x = 0$ corresponding to the right end of the AHX. As shown in Fig. 10b, the regenerator is made of stainless steel wire meshes stacked in a steel canister with a total length of 40 mm. The volumetric porosity (i.e. the ratio of the gas volume to the total volume) of the regenerator is 80%. The HHX is made of an insulated electric heater wire with total length of 450 mm and an outer diameter of 5 mm. The electrical wire is formed as shown in Fig. 10c, yielding a porosity of the hot heat exchanger of 43% and a length in the axial direction (i.e. x-axis) of 10 mm. As shown in Fig. 10d, the AHX is made of three parts. The central part, which is responsible for the heat exchange between the gas and the water, is printed (using 3D printing technology) from steel powder. The other two parts (white in Fig. 10d) are printed from plastic to avoid the heat transfer through the walls. The three parts are glued together and assembled with the resonator duct. The central part of the AHX is made of fins with thickness of 1 mm and plate spacing of 1 mm. Also, there are two water paths where the water flow direction in one of them is in the opposite direction to the other to achieve a temperature uniformity over the cross-section of the AHX. The inner and outer diameters of the water tubes are 3 mm and 5 mm, respectively. The total length of the AHX in the axial direction (i.e. x-axis) is 20 mm and its porosity is 40.5%.

The same PIV system as for the first setup was used and a similar experimental procedure was followed. Here the input electrical power was $30\,\mathrm{W} \pm 1\%$ and the temperatures of the walls of the aluminum duct are measured (see Fig. 10e). Thermocouples are placed beneath the thermal insulation and in contact with the walls of the duct to accurately measure the wall temperatures. It was checked that thanks to the AHX, the temperature of the right part of the resonator duct (i.e. acrylic duct) remains at the ambient temperature therefore, no temperature measurements were conducted on the walls of the acrylic duct. The PIV measurements performed in this system focus on measuring the natural convection flow at the end of the AHX in the vertical plane (i.e. $x - z$ plane) and at 7 different transverse locations (i.e. $y = 0, \pm 5$ mm, ± 15 mm and $\pm$ 19 mm).

The uncertainty in the temperature measurements is $\pm$ 1 % of the reported mean temperatures. The value of the spatial-average uncertainty in the velocity measurements is reduced to $\pm$ 6 % (compared to $\pm$ 13 % in the first experimental setup in which a circular duct is used) because the laser light reflections are less when the duct walls are flat (i.e. square duct).

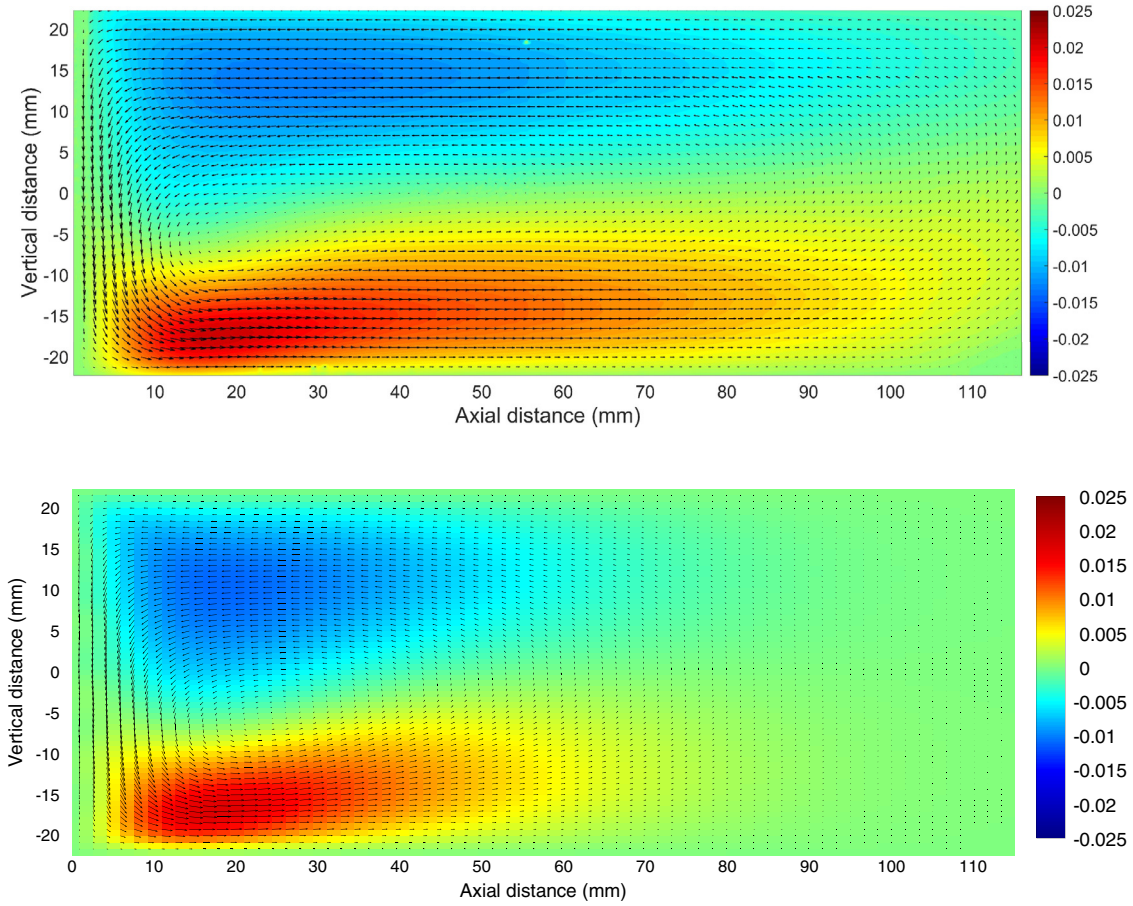


Fig. 13. Velocity vector map overlapped on the color map of the axial velocity component at the exit of the AHX on vertical plane at $y = -5$ mm (top: experiments, bottom: numerical simulations).

3.2. Numerical model

As previously, a simplified 3D configuration is introduced in order to model the experimental configuration (Fig. 11). The horizontal duct has a square cross-section (with side length equal to the inner side length of the experiment $l = 44$ mm).

The regenerator is modeled as a homogeneous parallelepipedic isotropic porous medium block of length $L_p = 40$ mm and cross-section width 38 mm, inserted in a steel case (as in the experiment). Its thermophysical characteristics are its porosity $\epsilon = 0.8$, its permeability $K_{xx} = K_{yy} = K_{zz} = K = 10^{-8}$ m^2 (based on experimental work performed on similar materials [26]), and its equivalent thermal conductivity $k_p = 3.16$ W m^{-1} K^{-1} (calculated as $k_p = \epsilon k_{fluid} + (1-\epsilon)k_{solid}$).

The hot heat exchanger (electric wire) is modeled as 6 vertical solid plates of axial width $e_h = 10$ mm (as in the experiment) and transverse width equal to 4 mm, maintained at given hot temperature $T_{hot} = 438$ K.

The ambient heat exchanger, placed on the right side of the porous medium, is modeled as 6 horizontal solid plates of axial width $e_c = 20$ mm (as in the experiment) and transverse width equal to 4 mm maintained at given cold (water) temperature $T_{cold} = 291$ K. In between the solid plates, the vertical fins are modeled as a homogeneous anisotropic porous medium (i.e. stack of thin plates). The characteristics of that porous medium are its porosity $\epsilon = 0.4$ (as in the experiment), its permeability assumed anisotropic $K_{xx} = K_{zz} = d_1^3/(12d_1 + d_2) = 10^{-8}$ m^2 (where d_1 is the plate's interspace and d_2 the plate's width, based on [18]), $K_{yy} \approx 0$, and its thermal conductivity $k_p = 27.4$ W m^{-1} K^{-1} (calculated from the porosity and thermal conductivities of gas and plates).

On the left of the HHX, in order to model the thermal insulation, the duct walls are adiabatic. Therefore the steady temperature in that region should be homogeneously equal to the hot temperature T_{hot}, and the natural convection flow should not extend very far. For that reason and in order to lower computational costs, the length of the duct left of the HHX is reduced to $L_l = 160$ mm.

Since the thermal insulation also covers part of the regenerator, the duct walls are adiabatic along the insulation (with axial extension identical to that used in the experiment). The temperature of the remainder of the duct wall along the regenerator is prescribed equal to $T_{amb} = 294$ K. The ambient temperature T_{amb} is prescribed along the duct walls on the right side of the AHX.

The temperature difference $T_{amb} - T_{cold} = 3$ K being quite small, the natural convection flow should not extend very far. For that reason and in order to lower computational costs, the length of the duct right of the AHX is reduced so that the total computational length is smaller than that of the experiment and equal to $L = 430$ mm. The reference ambient temperature T_{amb} is used to calculate the thermophysical parameters of the fluid.

The numerical domain is meshed using 64 points regularly spaced along the cross sectional sides in the y and z directions. The mesh size in the axial direction is $\Delta x = 1.6 \times 10^{-3}$ m. This spatial resolution is adequate for the given problem configurations. The time step is adjusted throughout the simulation in order to satisfy a CFL < 0.5 criterion.

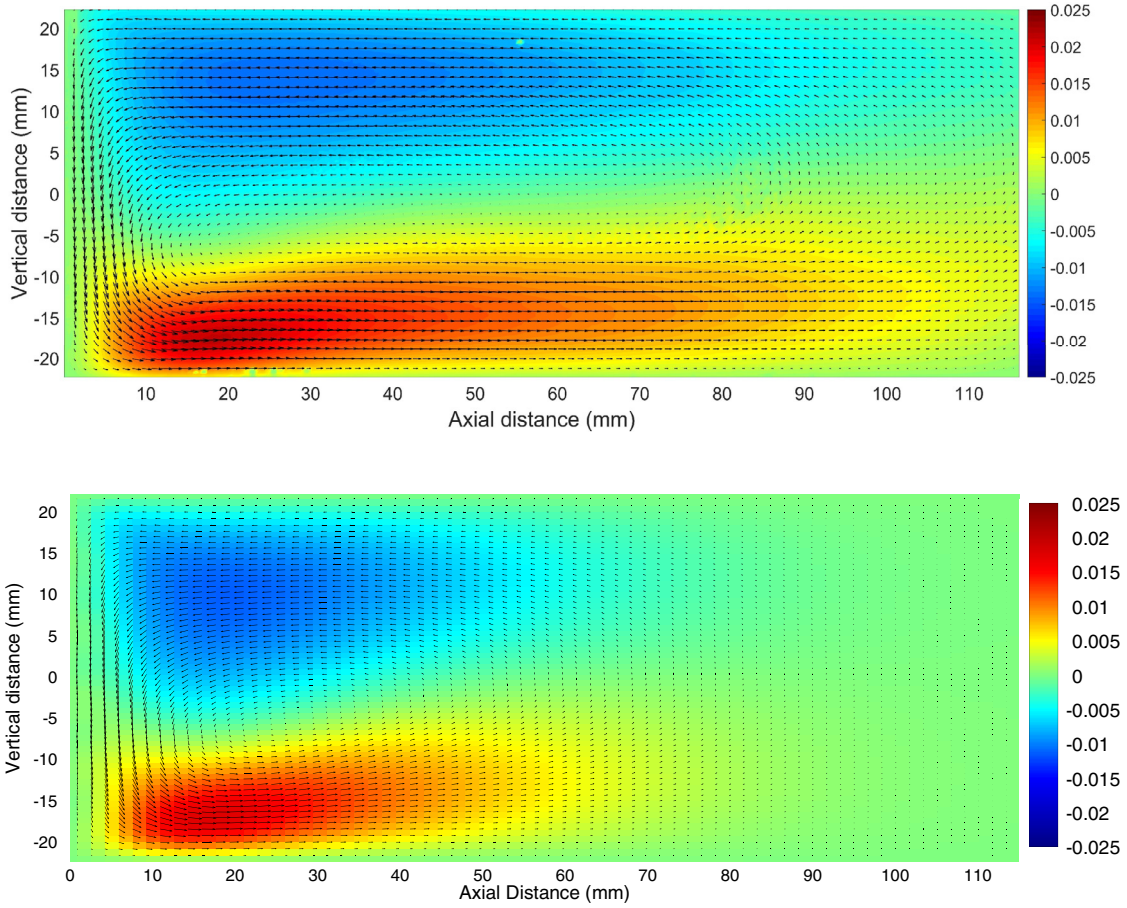


Fig. 14. Velocity vector map overlapped on the color map of the axial velocity component at the exit of the AHX on vertical plane at $y = 0$ (top: experiments, bottom: numerical simulations).

3.3. Results and discussion

As for the previous configuration both simulation and experiments reach a steady state. Figs. 12–14 show the velocity vector map overlapped on the color map of the axial velocity component of the natural convection flow obtained from experiments and numerical simulations at the exit of the AHX on vertical plane for 3 different transverse locations $y = -19$ mm (Fig. 12), $y = -5$ mm (Fig. 13), and $y = 0$ (center plane, Fig. 14). Experimental and numerical results agree remarkably well, both qualitatively and quantitatively, considering the numerous simplifications and approximations made in the numerical model. As in the case of the first experiment -without AHX-, the natural convection vortices extend for a longer axial distance in the experiments than in numerical calculation. Again, this could be due to the fact that the temperatures imposed on the tube boundary are based on the measurement of the outside temperature instead of the inside. The convection vortex is in the opposite direction than in the configuration without ambient heat exchanger, and the maximum axial velocity component is about half. The direction of the flow comes from the fact that the ambient heat exchanger is very effective, so that the tubes containing the cold water are cooler than the ambient temperature on the right fluid cavity. Therefore the fluid tends to move downward in the vicinity of the AHX and then is forced to turn right at the bottom of the duct. The order of magnitude of the velocity can be compared to the natural convection reference velocity in a fluid cavity calculated using $\Delta T_r = T_{amb} - T_{cold} = 3$ K and a reference height $H = 44$ mm. The calculation gives the Rayleigh number $Ra = 1.63 \times 10^4$ and $V_{ref} = 0.07 \times 10^{-3}$ m/s. The maximum velocity in that region is about 0.025 m/s (Figs. 12–14), which is indeed on the order of this velocity scale. In order to better understand the convection flow, contours of the calculated axial velocity component and temperature in the central vertical plane around the regenerator (the measurement field of view does not extend left of $x = 0$) are shown on Fig. 15. Analysis of this figure and of Fig. 12 shows that in this experiment the AHX prevents the development of a strong natural convection flow on the right part of the duct. Therefore the duct is clearly separated in two parts, left of the AHX and right of the AHX.

Since the regenerator is placed between the heat exchangers, the flow is similar to the natural convection flow in a porous differentially heated cavity (Fig. 15). However the regenerator's permeability being very small, so are velocities (on the order of 0.002 m/s) and isothermal lines are almost vertical, i.e. the regenerator acts like a conducting solid. The order of magnitude of the velocity can be compared to the porous natural convection reference calculated using $\Delta T = T_{hot} - T_{cold} = 147$ K, $H = 44$ mm. The calculation gives the porous Rayleigh number $Ra_p = 1.26 \times 10^{-1}$ and $V_{refp} = 2.2 \times 10^{-3}$ m/s. The maximum velocity in the regenerator is about 0.002 m/s (Fig. 15), which is indeed on the order of this velocity scale. Both the ambient heat exchanger and the isolation of the hot duct contribute to the concentration of temperature gradients in the regenerator only. The convection flow inside the regenerator depends then mostly on its permeability.

On the left of the HHX the flow is clearly driven by the flow between the mesh wires of the regenerator (Fig. 15). The temperature in that region is almost homogeneously hot.

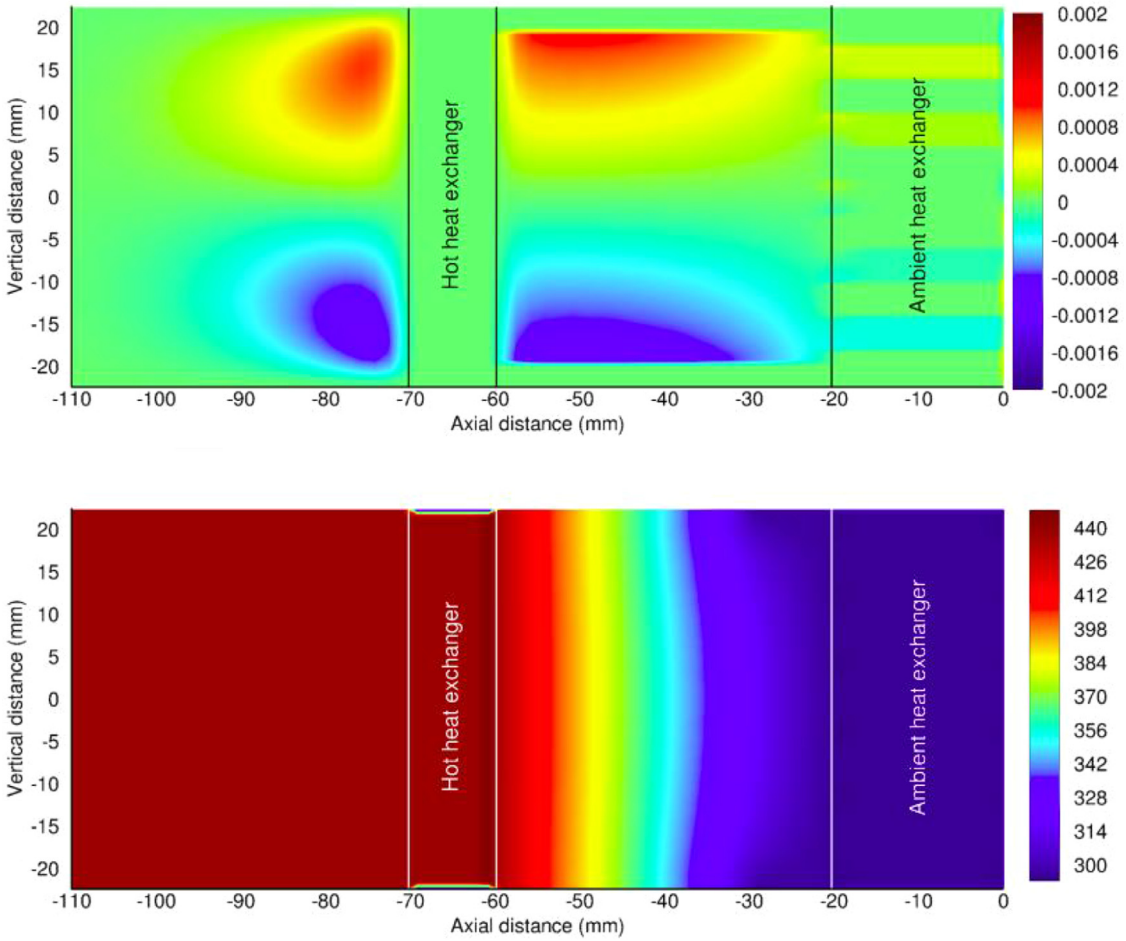


Fig. 15. Contours of the axial velocity component (top) and temperature (bottom) in the vertical central plane (numerical simulation results).

In sum, the simple model proposed here predicts the natural convection flow inside the entire device, with good agreement with measurements in the field of view.

4. Conclusion

Natural convection flows were analyzed both experimentally and numerically for two different horizontal thermoacoustic cavities, when no acoustic oscillations were present. The first cavity consisted of a cylindrical resonator filled with air and containing a thermoacoustic core made of a ceramic stack placed next to a wire resistance (hot heat exchanger). The second cavity consisted of a duct with square cross-section filled with air and containing a thermoacoustic core made of a regenerator placed between a wire resistance (hot heat exchanger) and an ambient heat exchanger (using a water stream for the heat exchange). Temperature was measured by thermocouples in several points along the cavities, and velocity fields were obtained from PIV measurements in several vertical planes (only the central vertical plane in the first experiment). The numerical model consisted in solving Navier-Stokes equations under Boussinesq assumptions inside a simplified cavity based on each experimental setup. In the first experiment, the cylindrical cavity was of similar geometry and dimensions as the experiment, the hot heat exchanger was modeled as several immersed solid bodies at given temperature, and the ceramic stack was modeled as a homogeneous anisotropic porous medium. The temperature along the cylindrical tube was prescribed as a boundary condition based on the experimental measurements. In the second experiment, the cavity was also modeled based on experiments, the regenerator being modeled as a homogeneous isotropic porous medium and the ambient heat exchanger as an immersed solid body at given temperature inside a homogeneous anisotropic porous medium. The temperature boundary conditions were also based on experimental measurements.

It was shown that the flow and temperature distributions are fully three-dimensional. They depend on the thermophysical properties of the working gas and of the porous media constituting the thermoacoustic stack or regenerator and heat exchangers, as well as on the geometrical characteristics of the device and the temperature conditions. There was excellent qualitative and quantitative agreement on the velocity fields between experimental and numerical simulation results for both configurations. Also the velocity scales observed in the different regions of the thermoacoustic cavities were in good agreement with classical scales for natural convection flows within a porous or fluid cavity. It should therefore be possible to predict the strength and patterns of natural convection flows inside functioning thermoacoustic devices using an approach similar to the one proposed here. It was noted that the observed natural convection flows could be quite significant in such devices and potentially interfere with thermoacoustic effects. We hope the fairly simple models used here will be further used by others to assess potential natural convection effects and contribute to optimal design of thermoacoustic devices. However, possible interaction and coupling between thermoacoustic and natural convection effects was not studied here and is the topic of ongoing work.

CRediT authorship contribution statement

Omar Hireche: Formal analysis, Writing - original draft. **Islam Ramadan:** Conceptualization, Visualization, Writing - original draft. **Catherine Weisman:** Supervision, Validation, Writing - review & editing. **Hélène Bailliet:** Project administration, Writing - original draft. **Yann Fraigneau:** Software. **Diana Baltean-Carlès:** Project administration, Writing - original draft. **Virginie Daru:** Validation, Supervision.

Acknowledgments

This research is financially supported by Agence Nationale de la Recherche (Projet ANR-17-CE06-0007-01). The authors also appreciate the technical assistance provided by Pascal Biais, Laurent Philippon and Philippe Szeger.

Supplementary material

Supplementary material associated with this article can be found, in the online version, at 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.119195

References

[1] G.W. Swift, Thermoacoustics: a unifying perspective for some engines and refrigerators, ASA Press, Springer, 2002.
[2] W. Dai, E. Luo, J. Hu, H. Ling, A heat driven thermoacoustic cooler capable of reaching liquid nitrogen temperature, Appl. Phys. Lett. 86 (2005) 224103.
[3] L. Zoontjens, C. Howard, A. Zander, B. Cazzolato, Feasibility study of an automotive thermo acoustics refrigerator, in: Proceedings of Acoustics, Busselton, Australia, 2005.
[4] J.A. Adeff, T.J. Hofler, Design and construction of a solar-powered, thermoacoustically driven, thermoacoustic refrigerator, J. Acoust. Soc. Am. 107 (6) (2005) L37–L42.
[5] S. Backhaus, E. Tward, M. Petach, Traveling wave thermoacoustic electric generator, Appl. Phys. Lett. 85 (2004) 1085.
[6] S. Spoelstra, M.E.H. Tijani, Thermoacoustic heat pumps for energy savings, in seminar “boundary crossing acoustics”, in: Proceedings of the Acoustical Society of the Netherlands, 2005.
[7] D.L. Gardner, G.W. Swift, A cascade thermoacoustic engine, J. Acoust. Soc. Am. 114 (4) (2003) 1905–1919.
[8] Y.-L. He, H.-B. Ke, F.Q. Cui, W.Q. Tao, Explanations on the onset and damping behaviors in a standing-wave thermoacoustic engine, Appl. Therm. Eng. 58 (2013) 298–304.
[9] G. Thummes, M. Schreiber, R. Landgraf, C. Heiden, Convective heat losses in pulse tube coolers: effect of pulse tube inclination, in: R.G. Ross (Ed.), Cryocoolers 9, Springer, Boston, 1997.
[10] M.E. Poese, R.M. Keolian, R.W.M. Smith, S.L. Garrett, E.C. Mitchell, Performance estimates of a helium-based thermoacoustic-Stirling chiller, Int. J. Low-Carbon Technol. 8 (2013) i79–i84.
[11] N. Pan, S. Wang, C. Shen, Visualization investigation of the flow and heat transfer in thermoacoustic engine driven by loudspeaker, Int. J. Heat Mass Transf. 55 (2012) 7737–7746.
[12] N. Pan, S. Wang, C. Shen, A fundamental study on characteristic of thermoacoustic engine with different tilt angles, Int. J. Heat Mass Transf. 74 (2014) 228–237.
[13] P. Debesse, D. Baltean-Carlès, F. Lusseyran, M.X. François, Oscillating and streaming flow identification in a thermoacoustic resonator from under-sampled PIV measurements, Meas. Sci. Technol. 25 (16pp) (2014) 25005.
[14] E. Saint Ellier, Y. Bailly, L. Girardot, D. Ramel, P. Nika, Temperature gradient effects on acoustic and streaming velocities in standing acoustic waves resonator, Exp. Therm. Fluid Sci. 66 (2015) 1–6.
[15] I. Ramadan, H. Bailliet, J.C. Valière, Experimental investigation of the influence of natural convection and end-effects on Rayleigh streaming in a thermoacoustic engine, J. Acoust. Soc. Am. 143 (1) (2018) 361–372.
[16] D. Poulikakos, A. Bejan, Natural convection in vertically and horizontally layered porous media heated from the side, Int. J. Heat Mass Transf. 26 (1983) 1805–1814.
[17] A. Bejan, Convection Heat Transfer, Mac Graw Hill, 1985.
[18] D.A. Nield, A. Bejan, Convection in Porous Media, Springer and Business Media, New York, 2006.
[19] C. Weisman, D. Baltean-Carlès, P. Duthil, P.L. Quéré, Natural convection in a stack of horizontal plates in a differentially heated cavity, in: Proceedings of the 19th International Symposium on Transport Phenomena (ISTP-19), Reykjavik, Island, 2008.
[20] O. Hireche, C. Weisman, D. Baltean-Carlès, V. Daru, Y. Fraigneau, Numerical study of the effects of natural convection in a thermoacoustic device, in: Proceedings of the 24th Congres Francais de Mecanique, Brest, France, 2019.
[21] A.K. Prasad, Particle image velocimetry, Curr. Sci. 79 (1) (2000) 51–60.
[22] D.W. Peaceman, H.H. Rachford, The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations, J. Soc. Indust. Appl. Math. 3 (1) (1955) 28–41.
[23] K. Goda, A multistep technique with implicit difference schemes for calculating two or three-dimensional cavity flows, J. Comput. Phys. 30 (1979) 76–95.
[24] J.L. Guermond, P.D. Minev, J. Shen, An overview of projection methods for incompressible flows, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 195 (2006) 6011–6045.
[25] Y. Saad, Iterative methods for sparse linear systems, Society for Industrial and Applied Mathematics, second ed., 2003.
[26] S.H. Tasnim, Porous Media Thermoacoustic Stacks: Measurements and Models, University of Waterloo, Ontario, Canada, 2011 Thesis.