



**HAL**  
open science

# Commande et construction d'observateurs pour des systèmes non linéaires incertains à données échantillonnées et en réseau

Romain Postoyan

► **To cite this version:**

Romain Postoyan. Commande et construction d'observateurs pour des systèmes non linéaires incertains à données échantillonnées et en réseau. Automatique / Robotique. Université Paris-Sud, 2009. Français. NNT: . tel-04420190

**HAL Id: tel-04420190**

**<https://hal.science/tel-04420190v1>**

Submitted on 26 Jan 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain



**THÈSE DE DOCTORAT**

**SPECIALITE : PHYSIQUE**

*Ecole Doctorale « Sciences et Technologies de l'Information des  
Télécommunications et des Systèmes »*

Présentée par : Romain POSTOYAN

Sujet :

COMMANDE ET CONSTRUCTION D'OBSERVATEURS POUR DES SYSTEMES NON  
LINEAIRES INCERTAINS A DONNEES ECHANTILLONNEES ET EN RESEAU

Soutenue le 26 novembre 2009 devant les membres du jury :

Mme Brigitte D'ANDREA-NOVEL	(Présidente)
M Jamal DAAFOUZ	(Rapporteur)
M Frédéric MAZENC	(Rapporteur)
Mme Maria DI BENEDETTO	(Examinatrice)
M Antonio LORIA	(Examineur)
Mme Françoise LAMNABHI-LAGARRIGUE	(Directrice de thèse)



*À mes parents et à Iwona.*



« Tout est déjà dans l'air il me semble. J'ai ainsi vingt châteaux en l'air où je n'aurais jamais le temps d'aller - Mais ils sont complets *tout y est* - Ils m'appartiennent - seulement - Il y a un *grave, très grave SEULEMENT*... Que je m'approche de ces châteaux il faut que je les libère, les extirpe d'une sorte de gangue et de fatras... que je burine, pioche, creuse, déblaye toute la gangue, la sorte de coton dur qui les emmaillotte, mirage, fouille, puis ménage - Ainsi *Voyage*, ainsi *Mort*, ainsi *Guignols* (...) Je ne crée rien à vrai dire - je nettoye une sorte de médaille cachée, une statue enfouie dans la glaise - *Tout existe déjà*. C'est mon impression - lorsque tout est bien nettoyé, propre, net - alors le livre est fini - le ménage est fait - ou sculpté ; il faut seulement nettoyer, déblayer autour - faire venir au jour cru - *AVOIR LA FORCE* c'est une question de force - forcer le rêve dans la réalité - une question ménagère - De soi, de ses propres plans, il ne vient que des bêtises - Tout est fait hors de soi - dans les ondes je pense - Aucune vanité en tout ceci - c'est un labeur bien ouvrier - ouvrier dans les ondes. »

Louis-Ferdinand Céline, Lettre à Milton Hindus, *Cahiers de l'Herne* n° 5.



# Présentation

Cette thèse est construite autour de deux sujets : d'une part la commande échantillonnée de systèmes non linéaires incertains, d'autre part la synthèse d'observateurs pour les systèmes en réseau. Bien que présentées distinctement, ces deux études traitent de la même problématique qui est celle des systèmes sous contraintes de communication.

**Contributions à la commande échantillonnée de systèmes non linéaires incertains.** L'essentiel des techniques de commande non linéaire disponibles dans la littérature est développé en temps continu. Or, en pratique, les contrôleurs sont généralement implémentés numériquement. L'erreur induite par l'échantillonnage de la commande peut avoir un impact important sur les performances du système. Ainsi, de nombreuses études ont permis ces dernières années de proposer des méthodes de commande efficaces pour les systèmes à données échantillonnées. Dans la plupart de ces travaux, les incertitudes et perturbations affectant les dynamiques du système ne sont pas prises en compte bien qu'elles soient omniprésentes en pratique. Nous proposons dans cette thèse des techniques de commande basées sur l'utilisation de fonctions de Lyapunov, pour différents modèles non linéaires de process affectés par des incertitudes paramétriques, de modélisation ou des perturbations extérieures.

**Observateurs pour les systèmes en réseau.** Dans de nombreux domaines d'applications, la mise en place de structures de commande en réseau permet de diminuer le coût de l'installation, de faciliter la maintenance et offre une plus grande flexibilité comparées aux structures de commande dites classiques. Il s'agit d'assurer les transmissions des données des capteurs et des actionneurs au travers de canaux de communication numériques partagés. En contrepartie, les contraintes de communication induites peuvent fortement affecter le comportement du système. Depuis près d'une décennie, différentes méthodologies de commande ont été proposées afin de prendre en compte ces phénomènes. Le problème de la synthèse d'observateurs a quant à lui été très peu abordé. Ainsi, nous proposons un cadre d'étude méthodologique pour la conception d'observateurs par émulation pour les systèmes en réseau affectés par des perturbations.

Dans tout ce travail, nous nous sommes efforcés de partir de considérations pratiques afin de proposer des résultats généraux qui reposent sur des hypothèses réalistes.





# Remerciements

Je remercie sincèrement Brigitte d'Andréa-Novel, Professeur à l'École des Mines de Paris, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma thèse. Je suis très honoré que Jamal Daa-fouz, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Lorraine, et Frédéric Mazenc, Chargé de Recherche à l'INRIA Sophia-Antipolis, aient accepté de rapporter mes travaux. Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance envers Maria di Benedetto, Professeur à l'Université de l'Aquila (Italie), et Antonio Loría, Directeur de Recherche au LSS-CNRS, pour avoir accepté d'être membre du jury.

Je remercie chaleureusement Françoise Lammabhi-Lagarrigue, directrice de thèse, pour sa disponibilité au cours de ces trois années.

Je remercie Tarek Ahmed-Ali (ENSIETA - Brest, Université Basse-Normandie - Caen), co-encadrant de thèse, de m'avoir initié à la commande des systèmes non linéaires à données échantillonnées et de m'avoir permis d'enseigner à l'ENSIETA. Une pensée à Laurent Burlion, mon prédécesseur, pour ses conseils au début de ma thèse.

Je remercie chaleureusement Elena Panteley, co-encadrante de thèse, pour tous nos échanges, discussions et ses conseils. Ce fut un véritable plaisir de travailler avec elle. Je suis conscient d'avoir beaucoup appris à ses côtés, je lui en suis plus que reconnaissant.

I warmly thank Dragan Nešić, who supervised me during my three-month visit at the University of Melbourne (March - May 2009). It was a great honour and privilege to collaborate with him. I am most grateful to him for his availability, his advices and his confidence.

Je remercie sincèrement Antonio Loría pour le temps passé à travailler ensemble sur un problème commun. Ces recherches n'ont pas abouti mais elles m'ont apporté.

Je remercie sincèrement Antoine Chaillet pour nos nombreux échanges et discussions. Je lui suis très reconnaissant pour le temps qu'il a passé à relire certains chapitres de ce mémoire et pour ses commentaires précieux et justes. Je lui souhaite tout le meilleur pour l'avenir.

Ces trois années furent l'occasion de rencontrer des personnes que j'apprécie, une pensée donc aux « collègues » et amis Fernando, Antonio, Dhruv, Yiannis, Wissam, Antoine P., Moussa, William, Sami, Rafael, Paolo, Denis, Mike, Alessio, Laurie, Fernando T., Reine.

Last but not the least, I warmly thank David Goodall, who was my Master supervisor at Coventry University. David is an example for me and I constantly kept remembering his advices during my Ph.D. I am impatient to work with him again.

# Table des matières

<b>Contributions</b>	<b>1</b>
<b>Publications</b>	<b>5</b>
<b>Notations</b>	<b>7</b>
<b>I Contributions à la commande échantillonnée de systèmes non linéaires incertains</b>	<b>11</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>13</b>
1.1 Problématique de l'échantillonnage . . . . .	13
1.2 Systèmes non linéaires incertains . . . . .	15
1.2.1 Modèle non linéaire . . . . .	15
1.2.2 Incertitudes . . . . .	16
1.2.3 Stabilisation de systèmes incertains . . . . .	17
1.3 Approches de commande en temps échantillonné . . . . .	19
1.3.1 Synthèse en temps continu (Continuous-Time Design - CTD) . . . . .	19
1.3.2 Synthèse en temps discret (Discrete-Time Design - DTD) . . . . .	22
1.3.3 Synthèse en temps échantillonné (Sampled-Data Design - SDD) . . . . .	24
1.4 Présentation des travaux de thèse . . . . .	24
<b>2 Commande adaptative échantillonnée de systèmes non linéaires</b>	<b>27</b>
2.1 Introduction . . . . .	27
2.2 Problématique . . . . .	30
2.3 Loi d'estimation . . . . .	32
2.3.1 Développement en série de Fliess de l'équation aux différences de $V$ . . . . .	32
2.3.2 Reparamétrisation . . . . .	34
2.3.3 Loi d'estimation . . . . .	35
2.4 Analyse de stabilité . . . . .	35
2.4.1 Théorème de stabilisation . . . . .	35

2.4.2	Méthode de <i>redesign</i> . . . . .	40
2.4.3	Commentaires . . . . .	41
2.5	Exemple numérique . . . . .	42
2.5.1	Commande adaptative continue . . . . .	42
2.5.2	Commande échantillonnée . . . . .	42
2.5.3	Simulations . . . . .	43
2.6	Conclusion . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Backstepping robuste échantillonné</b>	<b>47</b>
3.1	Introduction . . . . .	47
3.2	Stabilité entrée-état des systèmes à données échantillonnées . . . . .	49
3.3	Problématique . . . . .	51
3.4	Stabilisation entrée-état semiglobale pratique . . . . .	52
3.5	Stabilisation semiglobale pratique asymptotique . . . . .	56
3.6	Discussions . . . . .	61
3.6.1	Application aux systèmes de la forme (3.1) . . . . .	61
3.6.2	Cas des approximations d'ordre supérieur . . . . .	61
3.7	Exemple numérique . . . . .	62
3.8	Conclusion . . . . .	62
<b>II</b>	<b>Observateurs pour les systèmes en réseau</b>	<b>67</b>
<b>4</b>	<b>Introduction</b>	<b>69</b>
4.1	Systèmes commandés par réseau . . . . .	69
4.2	Commande des NCS . . . . .	73
4.2.1	Émulation . . . . .	74
4.2.2	Co-synthèse du contrôleur et du protocole . . . . .	77
4.3	Synthèse d'observateurs pour les NCS . . . . .	78
4.3.1	Problématique et état de l'art . . . . .	78
4.3.2	Cadre d'étude . . . . .	79
4.3.3	Travaux de thèse . . . . .	88
<b>5</b>	<b>Conditions suffisantes pour l'émulation d'observateurs pour les NCS</b>	<b>91</b>
5.1	Introduction . . . . .	91
5.2	Hypothèses et analyse de stabilité . . . . .	92
5.2.1	Convergence pratique . . . . .	92
5.2.2	Convergence asymptotique . . . . .	102
5.3	Applications . . . . .	103
5.3.1	Observateurs linéaires . . . . .	103

5.3.2	Observateurs à grand gain . . . . .	107
5.4	Conclusion . . . . .	111
<b>6</b>	<b>Extension des observateurs de Karafyllis-Kravaris aux NCS</b>	<b>113</b>
6.1	Introduction . . . . .	113
6.2	Préliminaires . . . . .	114
6.3	Observateurs pour les systèmes à données échantillonnées . . . . .	117
6.4	Observateurs pour les NCS . . . . .	118
6.4.1	Modélisation et hypothèses . . . . .	118
6.4.2	Pour des protocoles à excitation persistante . . . . .	121
6.4.3	Pour des protocoles TOD . . . . .	125
6.5	Applications . . . . .	128
6.5.1	Observateurs linéaires . . . . .	128
6.5.2	Observateurs à grand gain . . . . .	129
6.6	Simulations . . . . .	131
6.6.1	Exemple numérique . . . . .	131
6.6.2	Robot flexible . . . . .	137
6.7	Conclusion . . . . .	141
<b>7</b>	<b>Convergence semiglobale pratique d'observateurs émulsés pour les NCS</b>	<b>143</b>
7.1	Introduction . . . . .	143
7.2	Hypothèses et analyse de stabilité . . . . .	144
7.3	Applications aux observateurs par critère du cercle . . . . .	152
7.4	Commentaires . . . . .	158
7.5	Conclusion . . . . .	158
	<b>Conclusion</b>	<b>159</b>
	<b>Annexes</b>	<b>165</b>
<b>A</b>	<b>Rappels mathématiques</b>	<b>165</b>
A.1	Formules algébriques . . . . .	165
A.2	Rappels d'analyse . . . . .	166
<b>B</b>	<b>Rappels de stabilité</b>	<b>169</b>
B.1	Stabilité des systèmes à temps variant . . . . .	169
B.2	Stabilité des systèmes munis d'entrées et de sorties . . . . .	170
<b>C</b>	<b>Preuve de la Proposition 4.3.1</b>	<b>173</b>

---

<b>D</b>	<b>Théorèmes du petit gain pour des systèmes paramétrés</b>	<b>175</b>
D.1	Définitions et résultats préliminaires . . . . .	176
D.2	Théorèmes du petit gain pour des systèmes non-paramétrés . . . . .	183
D.3	Théorèmes du petit gain pour des systèmes paramétrés . . . . .	211
<b>E</b>	<b>Fonction de Lyapunov pour le protocole TOD modifié</b>	<b>219</b>
<b>F</b>	<b>Observateur adaptatif continu-discret pour des systèmes affines en l'état</b>	<b>221</b>
	<b>Références</b>	<b>236</b>

# Contributions

Les contributions sont résumées par chapitre ainsi que les publications correspondantes, listées pages 5 et 6. Les travaux développés dans le cadre de cette thèse mais non présentés dans ce mémoire sont également évoqués.

## **Partie I: Contributions à la commande échantillonnée de systèmes non linéaires incertains.**

### ***Chapitre 2: Commande adaptative échantillonnée de systèmes non linéaires.***

Bien que de nombreuses méthodes de commande adaptative soient disponibles pour les systèmes non linéaires en temps continu, très peu d'études se sont penchées sur le cas où la commande est implémentée numériquement. Au Chapitre 2, nous développons des contrôleurs discrets dans le but de garantir la stabilité du système à données échantillonnées bouclé et d'améliorer les performances obtenues par le simple blocage de la loi de commande continue. Des conditions suffisantes pour la synthèse de retours d'état dits d'ordre élevé sont établies et une méthode de *redesign* est proposée. Contrairement aux résultats similaires existants, nous n'avons recouru à aucune surparamétrisation pour résoudre ce problème. Cela se traduit par l'obtention de lois de commande simplifiées.

Ces résultats ont été publiés avec T. Ahmed-Ali, L. Burlion F. et Lamnabhi-Lagarrigue dans : (ii) et (vii).

### ***Chapitre 3: Backstepping robuste échantillonné.***

Parmi les méthodes de commande de systèmes non linéaires existantes, le *backstepping* est l'une des plus employées et ce dans de nombreux domaines d'applications. Au Chapitre 3, nous proposons des lois de commande échantillonnée par *backstepping* pour des systèmes sous forme *strict-feedback* affectés par des perturbations. Les contrôleurs obtenus s'avèrent être plus performants que l'émulation de la commande continue: ils sont donc à privilégier en pratique.

Suggérée par D. Nešić, cette étude a donné lieu à la publication (i) avec T. Ahmed-Ali et F. Lamnabhi-Lagarrigue.



## **Partie II : Observateurs pour les systèmes en réseau.**

### ***Chapitre 4 : Introduction.***

Après avoir présenté la problématique des systèmes commandés par réseau, un cadre d'étude est développé pour l'analyse de stabilité d'observateurs émuloés pour de tels systèmes. A partir d'un observateur continu, nous étudions son comportement une fois implémenté via un réseau et proposons pour la première fois une modélisation générale qui permet de considérer de nombreuses configurations. Bien que nous nous concentrons dans cette thèse sur l'émulation d'observateurs, ces outils peuvent être le point de départ d'autres types de conceptions d'observateurs et d'implémentations. A noter que ce cadre offre également un regard nouveau pour la construction d'observateurs pour les systèmes à données échantillonnées.

Développé en collaboration avec D. Nešić, ce cadre d'étude est présenté dans (viii) conjointement aux résultats du Chapitre 5.

### ***Chapitre 5 : Conditions suffisantes pour l'émulation d'observateurs pour les NCS.***

Considérant un observateur continu lorsque les contraintes de communication sont ignorées, des conditions suffisantes sont proposées afin d'assurer la convergence de l'erreur d'observation lorsque le transfert des données est réalisé par l'intermédiaire d'un réseau. Des bornes explicites sur l'intervalle maximal admissible entre deux instants de transmission (MATI) sont établies. Nous montrons que les observateurs linéaires et à grand gain vérifient les conditions requises et déterminons, pour la première fois, des bornes sur le MATI pour différentes configurations de réseau en termes de protocoles d'ordonnancement et de fonctions de blocage.

Cette contribution a été développée en collaboration avec D. Nešić et a donné lieu à la publication (viii). Un article de revue est en cours de rédaction.

### ***Chapitre 6 : Extension des observateurs de Karafyllis-Kravaris aux NCS.***

Les observateurs initialement développés dans [92], pour les systèmes continus dont les mesures sont échantillonnées, sont étendus aux systèmes en réseau. En réinterprétant les travaux de [92] à l'aide du cadre d'étude du Chapitre 4, de nouvelles conditions suffisantes sont dérivées par rapport au Chapitre 5. Les observateurs linéaires et à grand gain satisfont également les conditions requises, ce qui nous permet de déduire de nouvelles bornes sur le MATI. Cette étude peut être considérée comme une alternative au Chapitre 5 pour un type particulier de fonctions de blocage.

Ces travaux ont été publiés dans (v) et (xi) avec T. Ahmed-Ali et F. Lamnabhi-Lagarrigue.

### ***Chapitre 7 : Convergence semiglobale pratique d'observateurs émuloés pour les NCS.***

Les hypothèses du Chapitre 5 sont revues afin d'élargir l'étude à de plus grandes classes de systèmes et de protocoles. Contrairement au Chapitre 5, les propriétés de stabilité ne sont plus valables globalement mais semiglobalement : la borne sur le MATI dépend notamment

de la zone où se situent les conditions initiales. L'analyse fait appel à un théorème du petit gain atypique (voir Annexe D). Les résultats obtenus sont ensuite appliqués aux observateurs par critère du cercle et par injection de sortie.

Cette étude a été réalisée en partenariat avec D. Nešić, une publication est en cours de préparation.

***Annexe D : Théorèmes du petit gain pour des systèmes paramétrés.***

Les théorèmes du petit gain utilisés au Chapitre 7 sont énoncés et prouvés. Ces extensions des travaux de [86, 184] permettent d'établir des conditions suffisantes pour la stabilité semi-globale pratique de systèmes paramétrés interconnectés. Ces résultats ont leur propre intérêt puisqu'ils peuvent être utilisés pour de nombreux autres problèmes de commande et de poursuites de trajectoires notamment.

Ce résultat a été obtenu avec D. Nešić et correspond à la publication (ix). Un article de revue est en cours de rédaction.

***Annexe F : Observateur adaptatif continu-discret pour des systèmes affines en l'état. Seule une copie de l'article de revue est proposée.***

Pour un système sous forme *affine* dont certains paramètres sont inconnus et dont les sorties sont échantillonnées, un observateur est synthétisé. Comparé aux solutions existantes en temps continu, l'observateur est modifié afin de prendre en compte l'échantillonnage. Une borne sur la période d'échantillonnage est ainsi obtenue sous des conditions d'excitation persistante. On peut voir ces travaux comme une extension des observateurs de [138] au cas adaptatif.

Cette étude a donné lieu à deux publications en collaboration avec T. Ahmed-Ali et F. Lamnabhi-Lagarrigue : (iii) et (vi).

**Contributions non présentées.**

Les travaux suivants ne sont pas développés dans ce mémoire. Plus d'informations sont disponibles dans la publication citée.

***Bornes explicites sur la période d'échantillonnage pour la stabilisation semiglobale de systèmes non linéaires à données échantillonnées.***

Jusqu'à ces dernières années, il n'existait que très peu de méthodes pour obtenir une borne sur la période d'échantillonnage d'un système en boucle fermée. Oubliant les approches en temps discret, de récents travaux ont permis de répondre à cette question pour des classes particulières de systèmes, à l'aide d'un formalisme hybride, pour lesquels l'origine est globalement asymptotiquement stable une fois le contrôleur émulé. Il est désormais établi que ces propriétés de stabilité ne sont pas les plus naturelles lorsque l'on étudie les systèmes à données échantillonnées. Ainsi, toujours à l'aide d'outils hybrides, nous proposons une méthode pour

déduire des bornes sur la période échantillonnage pour les systèmes échantillonnés semiglobalement asymptotiquement/pratiquement stables par émulation.

Ces résultats ont été développés avec E. Panteley et ont donné lieu aux publications (iv) et (x), d'autres sont en cours de préparation.

# Publications

La liste exhaustive des publications rédigées au cours de cette thèse est fournie ci-dessous.

## Articles de revues

- (i) R. Postoyan, T. Ahmed-Ali et F. Lamnabhi-Lagarrigue, *Robust backstepping for the Euler approximate model of sampled-data strict-feedback systems*, *Automatica* 45 (9) : 2164–2168, 2009.
- (ii) R. Postoyan, T. Ahmed-Ali, L. Burlion et F. Lamnabhi-Lagarrigue, *On the Lyapunov-based adaptive control redesign for a class of nonlinear sampled-data systems*, *Automatica* 44 (8) : 2099–2107, 2008.
- (iii) T. Ahmed Ali, R. Postoyan et F. Lamnabhi-Lagarrigue, *Continuous-discrete adaptive observers for state affine systems*, *Automatica* 45 (12) : 2986-2990, 2009.

## Articles de conférences

- (iv) E. Panteley et R. Postoyan, *Semiglobal asymptotic stabilization of a class of nonlinear sampled-data systems using emulated controllers*, Workshop NESTER, ICINCO (International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics), Milan : Italie, 2009.
- (v) R. Postoyan, T. Ahmed-Ali et F. Lamnabhi-Lagarrigue, *Observers for classes of nonlinear networked systems*, IEEE SSD (IEEE International Conference on Systems, Signals and Devices), Djerba : Tunisie, 2009.
- (vi) T. Ahmed Ali, R. Postoyan et F. Lamnabhi-Lagarrigue, *Continuous-discrete adaptive observers for state affine systems*, IEEE CDC (Conference on Decision and Control) : 1356-1360, Nouvelle Orléans : Etats-Unis, 2007.
- (vii) L. Burlion, T. Ahmed-Ali, R. Postoyan et F. Lamnabhi-Lagarrigue, *Adaptive control redesign for nonlinear sampled-data systems*, IFAC NOLCOS (Symposium on Nonlinear Control Systems) : 754-759, Pretoria : Afrique du Sud, 2007.

## Articles soumis

- (viii) R. Postoyan et D. Nešić, *A framework for the observer design for networked control systems*, ACC'10 (American Control Conference), Baltimore : Etats-Unis, 2010.
- (ix) R. Postoyan et D. Nešić, *Trajectory based small gain theorems for parameterized systems*, ACC'10 (American Control Conference), Baltimore : Etats-Unis, 2010.
- (x) R. Postoyan et E. Panteley, *On the semiglobal asymptotic stabilization of a class of nonlinear sampled-data systems using emulated controllers*, HSCC'10 (Hybrid Systems: Computation and Control), Stockholm : Suède, 2010.
- (xi) R. Postoyan, T. Ahmed-Ali et F. Lamnabhi-Lagarrigue, *Observers for classes of nonlinear networked control systems*, International Journal of Modelling, Identification and Control.

# Notations

## Ensembles

On note  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ ,  $\mathbb{R}_{\geq 0} = [0, \infty)$ ,  $\mathbb{R}_{> 0} = (0, \infty)$ ,  $\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\mathbb{Z}_{> 0} = \{1, 2, \dots\}$ .

## Classes et ensembles de fonctions

Soit  $C(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ ,  $p, q \in \mathbb{Z}_{> 0}$ , l'ensemble des applications continues de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^q$  et  $C^i(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ ,  $i \in \mathbb{Z}_{> 0}$ , l'ensemble des applications continues dont les dérivées partielles d'ordre  $i$  sont définies et continues. L'ensemble des fonctions pour lesquelles ces dérivées sont continues pour tout  $i \in \mathbb{Z}_{> 0}$  est noté  $C^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ .

Soit  $a \in \mathbb{R}_{> 0} \cup \{\infty\}$ , la fonction  $\gamma : [0, a) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  est dite de classe  $\mathcal{K}$  si elle est continue, égale à zéro en zéro et strictement croissante, on dit qu'elle est de classe  $\mathcal{K}_\infty$  si de plus  $a = \infty$  et  $\gamma(s) \rightarrow \infty$  quand  $s \rightarrow \infty$ . Par extension, pour  $a, b \in \mathbb{R}_{> 0} \cup \{\infty\}$ ,  $\gamma : [0, a) \times [0, b) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  est de classe  $\mathcal{K}\mathcal{K}$  si, pour tout  $(s_1, s_2) \in [0, a) \times [0, b)$ ,  $\gamma(s_1, \cdot)$  et  $\gamma(\cdot, s_2)$  sont de classe  $\mathcal{K}$ . Une fonction continue  $\gamma : [0, a) \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  est de classe  $\mathcal{K}\mathcal{L}$  si, pour tout  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $\gamma(\cdot, t)$  est de classe  $\mathcal{K}$ , et, pour tout  $s \in [0, a)$ ,  $\gamma(s, \cdot)$  est décroissante et tend vers zéro à l'infini. De plus,  $\gamma$  est dite de classe  $\text{exp-}\mathcal{K}\mathcal{L}$  s'il existe  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_{> 0}$  tels que  $\gamma(s, t) = \lambda_1 \exp(-\lambda_2 t) s$ , pour  $(s, t) \in [0, a) \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

On définit la fonction *signe* de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{sign} &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

La notation  $\mathbb{I}$  représente l'application identité sur les espaces considérés.

## Normes

Le norme Euclidienne d'un vecteur ou d'une matrice est notée  $|\cdot|$ . Pour une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}_{> 0}$ , Lebesgue mesurable, on définit pour  $t_1 \leq t_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\|f\|_{[t_1, t_2]} =$

ess.  $\sup_{\tau \in [t_1, t_2]} |f(\tau)|$  et  $\|f\|_\infty = \text{ess. sup}_{\tau \in [t_0, \infty)} |f(\tau)|$ . L'ensemble  $\mathcal{L}_\infty^n$  représente l'ensemble des fonctions  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^n$  telles que  $\|f\|_{[0, \infty)} < r$ ,  $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

## Opérations sur les fonctions et propriétés

Pour des applications  $f = [f_1, \dots, f_n]^T \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  et  $h \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ ,  $L_f h$  représente  $\sum_{i=1}^n (\partial_i h) f_i$  où  $\partial_i h$  est la dérivée première de  $h$  par rapport à la  $i^{\text{ème}}$  variable,  $n, p \in \mathbb{Z}_{>0}$ . On notera  $\partial h$  la dérivée première de  $h$ .

Pour une fonction  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ , la notation  $f(t^+)$  représente  $\lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s > t}} f(s)$  où  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , si une telle limite existe. Parallèlement, on note  $f(t^-) = \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s < t}} f(s)$ , si elle existe.

Une fonction  $R_{T,r,a} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est dite un *grand o de  $T^r$* , que l'on note  $R_{T,r,a}(y) = \mathcal{O}(T^r)$ , où  $y \in \mathbb{R}^n$  est une variable et  $T, r, a \in \mathbb{R}_{>0}$  des paramètres, s'il existe une fonction  $\gamma_{r,a}$  de classe  $\mathcal{K}_\infty$  telle que, pour tout  $r, a \in \mathbb{R}$ ,  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ , il existe  $\bar{T} \in \mathbb{R}_{>0}$  tel que pour tout  $|y| \leq \delta$  et  $T \in (0, \bar{T})$ , on a :

$$|R_{T,r,a}(y)| \leq T^r \gamma_{r,a}(|y|). \quad (2)$$

## Vecteurs et matrices

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$ , la notation  $(x, y)$  correspond à  $[x^T, y^T]^T$ .

Pour une matrice symétrique définie positive  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\lambda_{\min}(A)$  ( $\lambda_{\max}(A)$ ) symbolise la valeur propre minimale (maximale) de  $A$ . La matrice identité est représentée par  $\mathbb{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Considérant  $p$  matrices  $A_1, \dots, A_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\text{diag}(A_1, \dots, A_p)$  représente la matrice bloc-diagonal  $np \times np$  suivante :

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & A_p \end{bmatrix}.$$

## Solution d'une équation différentielle ordinaire

Soit l'équation différentielle ordinaire :

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (3)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Pour un instant initial donné  $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , une condition initiale  $x_0 = x(t_0) \in \mathbb{R}^n$  et un signal d'entrée  $u \in \mathcal{L}_\infty^m$ , la solution

(ou les solutions) de (3) est notée  $x(\cdot, t_0, x_0, u)$  (si elle existe). Lorsque les dépendances sont suffisamment claires de par le contexte, nous la notons simplement  $x(t)$ .

## Divers

Pour  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $i_0, \dots, i_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $I_k = \{i_0, \dots, i_k\}$ ,  $\tilde{I}_k = i_0 + \dots + i_k$ ,  $\bar{I}_k = \sum_{j=0}^k j \cdot i_j$ . Pour une suite réelle  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ , on notera  $\limsup_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (\sup_{p \geq k} x_p)$  si elle existe.





Première partie

Contributions à la commande  
échantillonnée de systèmes non  
linéaires incertains



# Chapitre 1

## Introduction

Dans ce chapitre, les deux problématiques centrales, que sont l'échantillonnage et la stabilisation des systèmes non linéaires incertains, sont tout d'abord brièvement présentées. Les principales approches de synthèse de contrôleurs pour les systèmes à données échantillonnées sont ensuite expliquées. Ce chapitre se conclut par la présentation des travaux de cette première partie de thèse.

### 1.1 Problématique de l'échantillonnage

Jusqu'aux années 1950, la plupart des systèmes étaient commandés à l'aide de contrôleurs analogiques. Le développement exponentiel des capacités de calcul des ordinateurs a permis l'utilisation grandissante des contrôleurs numériques. De nos jours, ces systèmes dits *contrôlés par ordinateur* sont prédominants dans le monde industriel.

Comparés aux analogiques, les contrôleurs numériques offrent l'avantage d'être généralement moins chers, en particulier pour les grandes installations comprenant de nombreuses boucles de commande. Plus ergonomiques, leurs réglages s'effectuent par programmation et non par câblage, ils sont dès lors plus facile à configurer. Cette flexibilité les rend également plus appropriés pour l'implémentation d'algorithmes adaptatifs ou non linéaires. De plus, le même contrôleur numérique peut être utilisé pour différents modes de fonctionnement et applications. De manière générale, ils sont plus adaptés aux systèmes complexes pour lesquels les interactions entre les boucles de commande sont multiples. Dans de nombreux cas, l'ingénieur a le choix entre commande analogique et numérique, cependant, les avantages des schémas numériques en termes de flexibilité et de simplicité sont parfois indispensables, comme dans [173].

L'utilisation de contrôleurs numériques a pour conséquence de créer une différence entre la nature des signaux générés par l'algorithme de commande et ceux entrant et sortant du système. En effet, les dynamiques de la plupart des systèmes physiques étudiés sont en temps continu. Les machines électriques, robots manipulateurs, process biochimiques,

véhicules automobiles, systèmes hydrauliques ne sont qu'un échantillon d'exemples admettant une modélisation en temps continu. Les lois de commande numérique sont elles par définition discrètes. La juxtaposition des dynamiques discrètes et continues donne ici lieu à ce que l'on appelle les *systèmes à données échantillonnées*. La configuration typique est celle décrite Figure 1.1 (voir [13]).

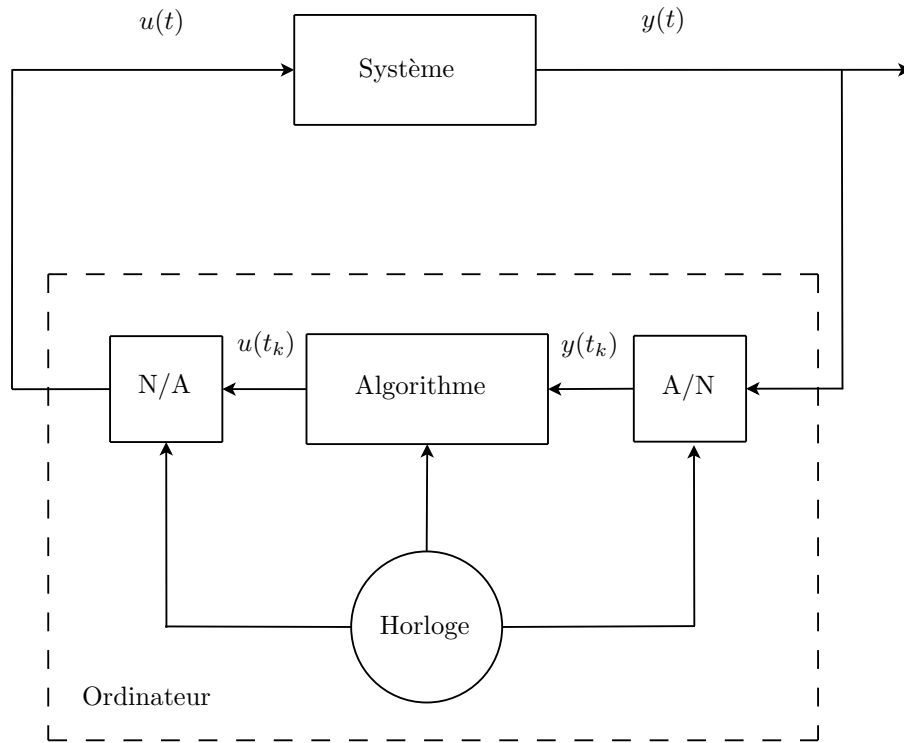


FIG. 1.1 – Architecture de commande de systèmes à données échantillonnées

La sortie du système continu,  $y(t)$ , est échantillonnée c'est-à-dire transformée en un signal discret par le convertisseur analogique-numérique (A/N) aux instants d'échantillonnage  $t_k$ . Ce signal discret est ensuite utilisé par l'algorithme pour générer un signal de commande discret,  $u(t_k)$ . Signal de commande qui est ensuite converti en un signal analogique à l'aide du convertisseur numérique-analogique (N/A) afin d'être transmis au système. Ces opérations sont synchronisées à l'aide d'une horloge temps-réel. Il existe une multitude de convertisseurs N-A. La configuration typique consiste à bloquer le signal de commande entre deux instants d'échantillonnage, on parle de *bloqueur d'ordre zéro*.

La situation est ainsi différente de celle d'un schéma analogique, pour lequel toutes les dynamiques sont continues. En effet, entre deux instants d'échantillonnage, le système est commandé en boucle ouverte, puisque le signal de commande ne tient pas compte des valeurs de la sortie  $y(t)$ . On devine immédiatement que la période d'échantillonnage joue un rôle crucial pour l'analyse de la stabilité. Il existe ainsi différentes philosophies. La première est de

traiter le problème à l'aide d'outils en *temps discret* : toutes les dynamiques sont ramenées à celles du contrôleur. Un autre point de vue consiste à voir ce problème comme un *système hybride* ou *impulsif* : le système est commandé par un signal affecté par des sauts aux instants d'échantillonnage. On peut également aborder le sujet comme un problème de *commande à entrée retardée* : l'entrée appliquée au système à l'instant  $t \in [t_k, t_{k+1})$  est affectée par un retard variant  $t - t_k$  (lorsque l'on considère un bloqueur d'ordre zéro). Ces approches sont détaillées dans la suite de ce chapitre.

Dans cette thèse, le point de vue en temps discret est adopté afin de développer des contrôleurs pour des classes de systèmes non linéaires incertains.

## 1.2 Systèmes non linéaires incertains

Dans cette section, des connaissances de base sur les systèmes non linéaires sont rappelées, puis les méthodes de stabilisation de systèmes incertains poursuivies par la suite présentées.

### 1.2.1 Modèle non linéaire

La plupart des systèmes physiques ont un comportement dynamique par nature non linéaire. Ces non-linéarités donnent lieu à des modèles mathématiques souvent difficiles à analyser, c'est pourquoi une alternative consiste à linéariser le comportement du système autour d'un point de fonctionnement. Cette approximation présente l'avantage d'être beaucoup simple à étudier. En contrepartie, ces modèles ne sont valables que localement et ne permettent par conséquent pas de représenter fidèlement les trajectoires du système pour de larges plages de fonctionnement. De plus, certains phénomènes fortement non linéaires comme les saturations (des signaux de commande), les hystérésis (dues aux amplificateurs opérationnels), les relais (électromécaniques ou électriques), ne peuvent être linéarisés.

Le comportement dynamique d'un système non linéaire est généralement représenté comme un ensemble d'équations différentielles ordinaires couplées du premier ordre :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ y_1 &= h_1(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ &\vdots \\ y_p &= h_p(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m), \end{cases} \quad (1.1)$$

qui se résume à

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(t, x, u) \\ y &= h(t, x, u), \end{cases} \quad (1.2)$$

où  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur d'état,  $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$  le vecteur d'entrée,  $y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$  le vecteur de sortie,  $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  la dynamique du système et  $h = (h_1, \dots, h_p) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  le vecteur fonction de sortie.

Le modèle mathématique (1.2) permet de considérer des phénomènes impossibles à reproduire par un modèle linéaire. Par exemple, l'existence de solution de (1.2) n'est pas toujours garantie, même pour un intervalle de temps donné. Pour une même condition initiale, (1.2) peut également générer plusieurs solutions. D'autres caractéristiques comme l'échappement en temps fini ou certains phénomènes oscillatoires font que les modèles non linéaires requiert une analyse plus aigüe que les modèles linéaires. Un dernier point est que la solution analytique de (1.2), pour une condition initiale donnée, est en général impossible à déterminer. Cet aspect sera particulièrement important lorsque seront évoqués les problèmes de discrétisation dans §1.3.

### 1.2.2 Incertitudes

Aussi complexes soient-ils, les modèles non linéaires sont la plupart du temps le fruit d'une série d'approximations. Ces dernières sont à l'origine d'incertitudes, que l'on doit toujours prendre en compte lorsque l'on synthétise une loi de commande pour un système physique. D'autres types d'incertitudes et de perturbations peuvent affecter le système. Ces phénomènes sont récapitulés ci-dessous :

- *incertitudes de modélisation*, les étapes de simplification réalisées lors de la modélisation induisent des erreurs qui peuvent avoir un impact significatif sur la validité du modèle ;
- *incertitudes paramétriques*, les valeurs de certains paramètres sont parfois inconnues à cause de la difficulté voire l'impossibilité de les mesurer ;
- *perturbations extérieures / exogènes*, des phénomènes extérieurs peuvent perturber l'évolution du système comme par exemple, les bourrasques de vent sur le déplacement d'un véhicule, le choc accidentel d'un robot, les bruits de mesure etc...

**Remarque 1.2.1** *A noter que l'expression système incertain est utilisée dans cette thèse pour nommer les systèmes affectés, de manière générale, par les phénomènes cités ci-dessus. Cet abus de langage a pour but de rendre la présentation plus claire.*

Des informations sont généralement disponibles sur les incertitudes et/ou perturbations. Dans le cas des incertitudes paramétriques, on sait le plus souvent si la valeur du paramètre inconnu varie fortement ou pas au cours du temps, parfois, une plage de valeurs est même connue. Prenons l'exemple de la masse d'un avion. Celle-ci dépend notamment de la structure de l'avion, du nombre de passagers, de leur quantité de bagages, des réserves en carburant qui sont autant de paramètres incertains. Cette masse varie lentement au cours du temps, au fur et à mesure que les stocks de kérosène sont consommés. On devine qu'il est toutefois possible

d'établir une plage de valeurs plausibles pour ce paramètre. Dans le cas des incertitudes de modèle ou des perturbations exogènes, une borne sur leur amplitude est souvent connue, comme cela peut-être le cas pour les frottements affectant un système mécanique par exemple. Ce type d'information constitue le point de départ pour la synthèse de contrôleurs.

### 1.2.3 Stabilisation de systèmes incertains

Contrairement aux systèmes linéaires, il n'existe pas de méthode générique de synthèse de contrôleurs globaux pour les systèmes non linéaires. Les travaux existants ne sont donc applicables qu'à des classes données de modèles. Dans ce mémoire, nous nous intéressons à des méthodes basées sur l'utilisation de fonctions de Lyapunov. Le but n'est pas ici de proposer un état de l'art exhaustif mais de rappeler les grandes lignes directrices des approches suivies dans les chapitres suivants.

#### Incertitudes paramétriques

Le domaine consacré à la commande des systèmes dont certains paramètres sont inconnus est communément appelé *commande adaptative* (expression qui est également utilisée dans d'autres contextes). L'idée de base est de construire un contrôleur composé, d'une part, d'une *loi d'estimation* qui fournit, comme son nom l'indique, un estimé du paramètre inconnu, d'autre part de *la loi de commande* à proprement parler, qui génère un signal à partir des mesures du système et de l'estimé du paramètre inconnu. Deux familles de commande adaptative se distinguent alors :

- *approche directe*, où les lois d'estimation et de commande sont synthétisées à la même étape. Dès lors, la loi de commande stabilisera le système même si l'estimé du paramètre inconnu ne tend pas vers sa véritable valeur ;
- *approche indirecte*, où il s'agit d'assurer l'identification du paramètre inconnu et de développer une loi de commande indépendamment.

De nombreux ouvrages sont disponibles pour expliquer les différentes méthodes de commande adaptative [4, 12, 83, 105, 126, 169] (par modèle de référence, par la méthode de Lyapunov, par identification du modèle, par gains préprogrammés etc...). Nous nous intéresserons au Chapitre 2 au cas la commande adaptative directe par la méthode de Lyapunov (cf. [105, 106]). Un exemple très simple permet d'en saisir le principe.



**Exemple 1.2.1** *Considérons le système scalaire mono-entrée suivant :*

$$\dot{x} = x^2\theta + u, \quad (1.3)$$

où  $\theta \in \mathbb{R}$  est un paramètre inconnu supposé constant. Soit la fonction de Lyapunov candidate suivante, pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta} \in \mathbb{R}$  où  $\hat{\theta}$  est l'estimé de  $\theta$  :

$$V(x, \theta) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^2. \quad (1.4)$$

Lorsque l'on dérive  $V$  le long des solutions de (1.3), en remarquant que  $\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta} - \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\hat{\theta}}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \theta) &= x(x^2\theta + u) - \tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} \\ &= x(x^2\hat{\theta} + u) + x^3\tilde{\theta} - \tilde{\theta}\dot{\hat{\theta}}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Définissons  $\dot{\hat{\theta}}$  comme la solution de l'équation différentielle :

$$\dot{\hat{\theta}} = x^3, \quad (1.6)$$

et

$$u = -x^2\hat{\theta} - x, \quad (1.7)$$

on a

$$\dot{V}(x, \theta) = -x^2. \quad (1.8)$$

La fonction  $V$  est donc une fonction de Lyapunov faible (voir Annexe B) pour notre système augmenté (1.3), (1.6) avec le retour d'état (1.7). D'après le théorème de LaSalle (Théorème B.1.2), on en conclut que  $x(t)$  converge asymptotiquement vers l'origine tandis que  $\hat{\theta}$  tend vers une valeur constante qui dépend des conditions initiales.

Il s'agit donc de considérer une fonction de Lyapunov candidate pour le système augmenté prenant en compte la loi d'estimation, puis de définir cette dernière ainsi que la loi de commande à partir de l'analyse de sa dérivée le long des trajectoires ; le but étant d'annuler les termes inconnus à l'aide de la loi d'estimation et d'assurer la décroissance de la fonction à l'aide de celle de commande. Bien évidemment, cette technique n'est applicable qu'à certaines classes de systèmes. Néanmoins, elle permet notamment d'assurer la convergence asymptotique des états vers l'origine pour de nombreux systèmes dont ceux sous forme *parametric-strict-feedback* [104]. Au Chapitre 2, une méthode de synthèse de contrôleurs adaptatifs par la méthode de Lyapunov directe sera proposée pour une classe de systèmes à données échantillonnées.

## Incertitudes de modélisation et perturbations extérieures

La stabilisation des systèmes perturbés et/ou incertains est une thématique centrale de l'automatique. Souvent nommée *commande robuste*, elle a donné lieu à un très large éventail d'approches et de techniques. Nous rappelons brièvement celles poursuivies dans les chapitres suivants.

En 1989, Eduardo Sontag introduit une nouvelle notion de stabilité dite *stabilité entrée-état* afin d'analyser l'impact de signaux bornés sur le comportement du système en représentation d'état [180]. Elle peut être vue comme un cas particulier de la propriété « entrée bornée » implique « état borné ». Largement étendue depuis (voir [183]), cette propriété et ses dérivées ont été entièrement caractérisées par des outils de Lyapunov. De nombreuses études se sont dès lors intéressées à la stabilisation entrée-état afin d'avoir à disposition des contrôleurs robustes vis-à-vis des perturbations pouvant affecter le système. Ainsi, il est montré dans [180] qu'un retour d'état bâti sur des *fonctions de Lyapunov de commande* pour les systèmes affines peut être modifié afin d'assurer la stabilité entrée-état du système vis-à-vis des perturbations sur les signaux des actionneurs. Dans [56], une commande par *backstepping* pour les systèmes sous forme *strict-feedback* est proposée afin de garantir la stabilité entrée-état vis-à-vis des termes incertains affectant les dynamiques du modèle. La stabilisation de cette classe de systèmes par *backstepping* est établie depuis les années 1990 [101, 172] et a été appliquée pour de nombreux problèmes comme la commande d'actionneurs hydro-électriques, de véhicules autonomes, de machines électriques, de robots manipulateurs, la synchronisation de systèmes chaotiques etc... Nous nous intéresserons au Chapitre 3 à ce problème lorsque le contrôleur utilisé est numérique. Il faut souligner que ces résultats n'ont pas pour but d'atténuer l'effet des perturbations mais de garantir la robustesse du système bouclé en ce sens que l'erreur de convergence dépendra de l'amplitude maximale des perturbations.

D'autre part, lorsqu'une borne sur l'amplitude des perturbations est connue et que la structure du problème le permet, la stabilisation asymptotique est envisageable par diverses méthodes déterministes. Il s'agit dès lors de compenser les perturbations et de garantir la stabilité du système bouclé. Une multitude de techniques ont été développées dans ce sens que ce soit à l'aide de lois de commande continues ou discontinues comme les modes glissants. Nous utiliserons l'une d'entre elles au Chapitre 3, toujours pour la commande par *backstepping* de systèmes sous forme *strict-feedback*. Cette étude reprend certaines lois de commande de [55] pour ensuite les reconstruire en fonction de la période d'échantillonnage. Les travaux de [55] peuvent être considérés comme une extension des techniques initialement développées dans [17, 38].

### 1.3 Approches de commande en temps échantillonné

Les trois approches permettant de synthétiser des contrôleurs pour les systèmes à données échantillonnées sont présentées en prêtant une attention particulière au cas des systèmes non linéaires. Un tableau comparatif est proposé à la fin de cette section (voir Tableau 1.1).

#### 1.3.1 Synthèse en temps continu (Continuous-Time Design - CTD)

La façon la plus simple de commander un système à données échantillonnées est de discrétiser un contrôleur continu. L'idée étant, qu'en échantillonnant à une fréquence suffisam-

ment élevée, le contrôleur discret fournira un signal proche du continu. On parle d'approche par *émulation*.

Ainsi, dans un premier temps, une loi de commande continue est synthétisée à partir des techniques disponibles dans la littérature. A cette étape, l'échantillonnage est ignoré. Le contrôleur continu est ensuite discrétisé à l'aide de schéma d'intégrations numériques ou, pour les systèmes linéaires, de correspondance des pôles et des zéros entre le continu et le discret. Les méthodes d'Euler, de Runge-Kutta, de Tustin sont autant de façons d'obtenir un contrôleur discret à partir du continu. Finalement, le contrôleur discret est implémenté numériquement (voir Figure 1.1). Le choix de la période d'échantillonnage est un point clef de cette étape. Dans la grande majorité des cas, elle est choisie suffisamment petite pour garantir la stabilité du système bouclé. Une exception est [212] où cette contrainte est relaxée, à la condition que le vecteur d'état réside dans le bassin d'attraction de l'origine à chaque instant d'échantillonnage.

De nombreux travaux de recherche ont étudié le comportement dynamique des systèmes à données échantillonnées par émulation. Pour les systèmes linéaires, la stabilité entrée-sortie est étudiée dans [33, 54]. Des analyses fréquentielles sont proposées dans [43, 162]. Le cas des systèmes non linéaires est examiné dans [33, 34, 109, 159, 196, 211] à l'aide d'outils d'analyse en temps discret. Dans [109], un cadre méthodologique pour la discrétisation de commandes continues est développée. Considérant des contrôleurs garantissant certaines propriétés de dissipativité, il est prouvé qu'une discrétisation appropriée et l'implémentation numérique à l'aide d'un bloqueur d'ordre zéro assurent des propriétés similaires pour le système à données échantillonnées. Cette large extension de [196] propose une solution pour le cas particulier, fondamentale en pratique, où l'origine du système continue bouclé est globalement asymptotiquement stable. Il y est prouvé que cette propriété est maintenue par émulation semiglobalement et pratiquement dans le cas général. Les notions de semiglobalité et de convergence pratique signifient que pour tout boule de conditions initiales donnée il existe une période d'échantillonnage telle que l'origine du système est asymptotiquement stable à une erreur résiduelle près que l'on peut diminuer autant que désiré.

Le récent engouement pour la thématique des systèmes hybrides a permis de voir le problème sous un jour nouveau. Il est montré, dans [74], que pour les systèmes globalement Lipschitziens, le blocage d'une loi de commande statique maintient la stabilité exponentielle sous un échantillonnage rapide. Cette étude a ensuite été étendue, sous des conditions similaires, au cas des contrôleurs dynamiques discrétisés d'après le schéma d'Euler [28]. L'étude d'un retour de sortie dynamique est proposée dans [114] à partir de la linéarisation du système et du contrôleur. La commande de systèmes non linéaires continus par une loi linéaire numérique est traitée dans [77, 81] où il est expliqué comment les propriétés de stabilité du système peuvent être déduites de celles du système linéaire associé, pour des échantillonnages à pas simples ou multiples. Dernièrement, les résultats initialement dédiés aux systèmes en réseau (voir Partie II) ont prouvé leur utilité pour l'obtention d'une borne

explicite sur la période d'échantillonnage maximale admissible, sans qu'aucune linéarisation ou hypothèse de type Lipschitzienne ne soit requise [154]. Des conditions suffisantes sur le système bouclé continu sont proposées en termes de fonctions de Lyapunov. Une borne sur la période d'échantillonnage est alors déduite assurant ainsi la stabilité (globale) asymptotique de l'origine. Une approche alternative à [154] a été développée au cours de cette thèse [161] pour de plus larges classes de systèmes. Pour les systèmes linéaires à temps invariant (LTI), des fonctions de Lyapunov, inspirées des fonctionnelles habituellement utilisées pour les systèmes à retard, sont considérées dans [140] afin de déduire des conditions suffisantes exprimées en termes d'inégalités matricielles linéaires (LMI). L'analyse de stabilité repose sur l'application d'un théorème développé pour les systèmes impulsifs. D'autre part, lorsque l'échantillonnage n'est pas uniforme, les systèmes LTI à données échantillonnées sont vus comme des systèmes à commutation discrets dans [76]. Le cas des systèmes LTI à retards à données échantillonnées y est également traité.

Lorsque le signal de commande discret est converti en un signal analogique à l'aide d'un bloqueur d'ordre zéro, le problème peut être considéré comme un système commandé par une entrée retardée  $u(t - \tau)$ , où  $\tau = t - t_k$ ,  $t \in [t_k, t_{k+1})$ , voir [58, 59, 93]. Le cas des systèmes LTI est pour la première fois abordé sous cet angle dans [58], où des conditions suffisantes pour la stabilisation sont exprimées en termes de LMI, notamment lorsque le signal de commande est soumis à des saturations. Poursuivant cette approche, une classe de systèmes non linéaires est étudiée dans [93] sans contrainte d'homogénéité ou de type Lipschitzienne, à l'aide de fonctions de Razumikhin classiques ou vectorielles. Cette étude présente l'avantage de considérer des perturbations sur l'échantillonnage et permet de calculer une borne sur la période maximale admissible.

L'approche CTD désigne également la synthèse de lois de commande, toujours en temps continu, mais en tentant de compenser l'effet de l'échantillonnage, voir [37, 70, 80, 82, 95, 136]. Les travaux sur les systèmes linéaires [58, 140] peuvent être également regroupés dans cette catégorie si le problème est pris à l'envers : plutôt que de fixer le gain du contrôleur linéaire puis de résoudre les LMI en jouant sur la période d'échantillonnage, l'inverse est réalisé, on fixe cette dernière afin de déterminer le gain.

L'approche CTD présente l'avantage d'être simple d'utilisation. Il suffit, en effet, de développer une loi de commande en temps continu, à l'aide des techniques disponibles dans la littérature, puis de la discrétiser à l'aide de schémas numériques bien établis. En revanche, elle nécessite la mise en place d'échantillonneurs à fréquence élevée du fait que la structure de commande ne prend pas en compte l'échantillonnage. Dans de nombreux cas, l'utilisation de puissants calculateurs permet d'assurer le bon fonctionnement du système bouclé. Cependant, la période d'échantillonnage requise peut parfois excéder les capacités de calcul disponibles, il est alors nécessaire d'envisager d'autres approches.

### 1.3.2 Synthèse en temps discret (Discrete-Time Design - DTD)

Contrairement à la commande par émulation, le contrôleur est ici synthétisé à partir d'un modèle discret du système continu. On remarque que l'analyse de stabilité de tels systèmes repose exclusivement sur les outils en temps discret : aucune approche hybride ou à retard n'est envisageable. Le principe est donc le suivant. Premièrement, le système continu est discrétisé, ramenant ainsi le problème au comportement de l'état du système aux instants d'échantillonnage uniquement. Une loi de commande est ensuite développée pour ce modèle, à partir des techniques existantes en temps discret. Les propriétés de stabilité du système à données échantillonnées sont alors déduites de celles du système discret bouclé, sous certaines conditions.

Le choix du modèle discret, et donc du schéma de discrétisation, est fondamental. Dans de nombreuses études [5, 15, 52, 96, 103, 141, 156, 175], il est supposé que le *modèle discrétisé exact* est connu, c'est-à-dire que l'équation aux différences permettant de prédire exactement l'état du système à l'instant d'échantillonnage  $t_{k+1}$  à partir de sa valeur à  $t_k$ , est disponible. Il est alors aisé de déduire des propriétés de stabilité pour le système à données échantillonnées à partir de celles du modèle discret. Supposer la connaissance du discrétisé exact, revient toutefois à affirmer savoir résoudre analytiquement (1.2), or nous avons vu dans §1.2.1 que c'est en général impossible, à l'exception des systèmes linéaires et de certains cas particuliers. Ce constat limite donc l'applicabilité de telles méthodes.

L'alternative communément employée consiste à considérer des modèles dits *approximés*. Une simple intégration par la méthode d'Euler permet ainsi d'obtenir un modèle discret du système continu. D'autres schémas plus sophistiqués peuvent être choisis, comme par exemple Runge-Kutta ou Newton-Hooke, voir [188] pour plus de détails. Le problème est alors de savoir si les propriétés de stabilité obtenues pour le modèle approximé bouclé sont maintenues pour le système à données échantillonnées. Il est montré dans [150], que si le contrôleur ou l'approximation ne sont pas choisis avec attention, aucune propriété de stabilité ne pourra être déduite pour le discrétisé exact et a fortiori pour le système à données échantillonnées. De plus, la structure algébrique du système continu est en général fortement affectée par la discrétisation : l'affinité en la commande ou dans les paramètres est le plus souvent perdue, à l'instar de propriétés clés pour la synthèse de contrôleurs comme la linéarisabilité par retour d'état ou la fait d'être à minimum de phase [10, 64, 132, 133]. En conséquence, les premiers résultats se concentraient sur des cas particuliers, en terme d'approximation de modèle et de synthèse de contrôleurs, cf. [45, 63, 68, 125] par exemple. La plupart de ces études se basent sur l'approximation d'Euler qui présente notamment l'avantage de maintenir l'affinité en la commande.

Ces constatations ont motivé le développement d'un cadre d'étude méthodologique rigoureux pour la conception de contrôleurs à partir de modèles approximés. Considérant des systèmes dont le comportement dynamique est décrit par une inclusion différentielle,

il est prouvé dans [150], que si le modèle discret constitue une *approximation consistante* du discrétisé exact (i.e. qu'il lui est en quelque sorte suffisamment fidèle) et si le contrôleur synthétisé est *uniformément bornée* (typiquement, qu'il n'explose pas lorsque la période d'échantillonnage tend vers zéro), alors des propriétés de stabilité similaires à celles dérivées pour le modèle approximé sont maintenues pour le discrétisé exact. Le passage « stabilité du discrétisé exact » à « stabilité du système à données échantillonnées » est ensuite assuré sous certaines conditions d'après [155]. Dans cette étude, les modèles approximés sont vus comme des familles de systèmes discrets paramétrés par la période d'échantillonnage. Cette méthodologie non-constructive permet d'étudier de nombreux schémas de discrétisation et de lois de commande.

Lorsque l'on décide de résoudre un problème de commande à l'aide de l'approche DTD, la question première est de savoir quel schéma de discrétisation considéré. En effet, meilleure sera l'approximation, plus performant sera le contrôleur développé. Il existe de nombreuses méthodes pour construire un modèle approximé, voir par exemple [65, 66] où des modèles dits d'ordre élevé sont étudiés. Ce type de modèles présente l'avantage de fournir de bonnes approximations de l'état à chaque instant d'échantillonnage, mais est évidemment plus difficile à analyser qu'un modèle d'Euler. D'autres travaux ont pour objet de déterminer des lois de commande et des schémas de discrétisation assurant la correspondance des entrées et sorties des systèmes continu et discret aux instants d'échantillonnage, pour plus d'informations voir [134] et les références qui y sont citées.

Contrairement à l'approche CTD, la DTD permet de développer des contrôleurs qui dépendent de la période d'échantillonnage. Une configuration classique est la synthèse de lois de la forme,  $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ , [16, 29, 136, 147, 153] :

$$u = u_0 + \sum_{i=1}^r T^i u_i. \quad (1.9)$$

On parle généralement de contrôleurs d'ordre élevé (pour  $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ ). Typiquement,  $u_0$  correspond au blocage de la loi continue, tandis que les  $u_i$  ( $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ ) sont synthétisés à partir du modèle discret. L'ajout de ces termes supplémentaires a pour but d'améliorer la réponse du système par rapport à la simple émulation, en termes de contraintes sur la période d'échantillonnage et de vitesse de convergence notamment. A noter que les contrôleurs (1.9) ne peuvent pas être, en général, un simple développement de Taylor d'une commande continue [67, 147].

La commande par DTD permet donc de développer des contrôleurs plus adaptés aux systèmes échantillonnés que par CTD. Cependant, cette approche est généralement plus difficile de par le choix du modèle approximé, de sa complexité mais aussi du fait que l'analyse de stabilité est réalisée en temps discret, les techniques de commande étant moins aisées à manipuler qu'en continu.

	CTD	DTD	SDD
Avantages	<i>synthèse du contrôleur en temps continu</i>	<i>meilleures performances que le CTD</i>	<i>meilleures performances que le DTD</i>
Inconvénients	<i>échantillonnage à fréquence élevée</i>	<i>synthèse du contrôleur en temps discret, choix du modèle discret</i>	<i>synthèse du contrôleur en temps discret en prenant en compte l'inter-échantillonnage</i>
Représentation	<i>temps discret, hybride, à retard</i>	<i>temps discret,</i>	<i>temps discret (hybride)</i>

TAB. 1.1 – Récapitulatif des différentes approches de commande

### 1.3.3 Synthèse en temps échantillonné (Sampled-Data Design - SDD)

Cette dernière approche repose toujours sur un modèle échantillonné du système mais tient également compte de la dynamique entre deux instants d'échantillonnage, contrairement à la DTD. Développé à partir des années 1990, elle est potentiellement prometteuse mais sa formulation rend l'analyse du problème souvent complexe. Pour des résultats pour les systèmes linéaires cf. [34]. La différence entre CTD et SDD repose sur l'utilisation d'un modèle échantillonné. Cependant, des études comme [94] semblent être partagées entre CTD et SDD. En effet, dans [94], l'espace d'état est décomposé en un nombre (infini) de régions pour lesquelles une loi de commande est synthétisée. Ainsi, la loi de commande change en fonction de la zone, à chaque instant d'échantillonnage. Cette technique hybride présente l'éventuel avantage de considérer de plus larges périodes d'échantillonnage que les méthodes dites classiques.

L'approche SDD n'est pas suivie dans cette thèse, pour plus d'informations voir [135] et les références qui y sont citées.

## 1.4 Présentation des travaux de thèse

Dans cette première partie de thèse, deux résultats sont présentés, tout deux ayant pour cadre la synthèse de retours d'état discrets pour des systèmes non linéaires incertains par l'approche DTD et ce afin d'améliorer les performances du système par rapport au simple blocage d'une loi de commande continue.

### Commande adaptative échantillonnée de systèmes non linéaires.

Une méthode de commande adaptative de type Lyapunov directe pour des systèmes non linéaires affines en la commande et en le paramètre est présentée. Il s'agit de développer des contrôleurs discrets d'ordre élevé de la forme (1.9) afin d'améliorer les performances de l'émulation. Cette étude est une extension des travaux de [147] au cas adaptatif. Dans [147],

une technique dite de *redesign* de contrôleurs de type *grand gain* est proposée. L'analyse repose sur l'utilisation de fonctions de Lyapunov, à partir desquelles des conditions suffisantes sont exprimées, permettant la synthèse du retour d'état désiré. Cette étude présente l'avantage de considérer une classe de systèmes générale et d'être flexible, c'est pourquoi nous avons choisi d'étendre ces résultats au cas où un paramètre inconnu affecte linéairement les dynamiques du système continu. L'analyse repose toujours sur le développement en série de Liess d'une fonction de Lyapunov à partir duquel les lois d'estimation et de commande sont obtenues. Une des difficultés majeures lorsque l'on considère des modèles discrets approximatés d'ordre élevé, est que la paramétrisation linéaire originelle du système continu devient polynomiale. L'argument traditionnellement utilisé ([68]) consiste à voir chaque puissance comme un nouveau paramètre. En conséquence, la complexité de la structure de commande augmente linéairement avec le degré d'approximation considéré. Au Chapitre 2, en supposant que le paramètre inconnu appartienne à un ensemble compact donné, aussi large soit-il mais de bornes connues, le système est reparamétré d'après [145] et une unique loi d'estimation est développée.

### **Backstepping robuste échantillonné.**

Des contrôleurs pour la stabilisation robuste par *backstepping* de systèmes sous forme à données échantillonnées *strict-feedback* sont développés. Deux objectifs de commande sont satisfaits : la stabilisation entrée-état et la compensation des perturbations lorsque celles-ci vérifient certaines hypothèses. Cette étude peut être considérée comme l'extension robuste des travaux de [153]. Le modèle discret approximaté est obtenu à l'aide d'une intégration d'Euler. Le premier objectif permet en quelque sorte, d'assurer le bon comportement du système bouclé lorsque celui-ci est perturbé par des signaux bornés, tandis que le second le stabilise asymptotiquement en tentant d'annihiler l'effet des incertitudes à l'instar des travaux en temps continu de [55].

Les résultats de ce chapitre sont un complément aux travaux de [107, 109], puisqu'une nouvelle classe de systèmes générale est considérée à l'aide des mêmes outils d'analyse. Les lois de commande proposées permettent d'améliorer les propriétés de robustesse intrinsèques du *backstepping* bloqué étudiées dans [97]. Ainsi, le domaine d'attraction est généralement élargi et la vitesse de convergence des états augmentée comparé à l'émulation, pour une même période d'échantillonnage. Par conséquent, nos contrôleurs sont à privilégier lorsqu'une loi de commande par *backstepping* robuste est appliquée numériquement à un système continu.





## Chapitre 2

# Commande adaptative échantillonnée de systèmes non linéaires

### 2.1 Introduction

Bien que de nombreuses méthodes de commande adaptative soient disponibles pour les systèmes non linéaires en temps continu, très peu d'études se sont penchées sur le cas où la commande est implémentée numériquement. Cet état de fait se justifie par les difficultés induites par l'échantillonnage. En effet, lorsque la synthèse du contrôleur discret est réalisée à partir d'un modèle discret approximé, les incertitudes dues à l'approximation viennent s'ajouter à l'ignorance de la valeur du paramètre. Il s'agit dès lors de proposer un contrôleur pour un système non linéaire discret incertain à la fois au niveau des paramètres et du modèle, tâche qui est loin d'être aisée. De plus, si le système original dépend du paramètre inconnu de manière linéaire, ce ne sera plus le cas du modèle discret (à l'exception des modèles approximatés d'Euler par exemple). Or la commande adaptative pour les systèmes paramétrés non linéairement est extrêmement ardue : rares sont les études à proposer des solutions, voir [7, 12, 100, 120, 145, 146, 178] par exemple.

Les principales études disponibles pour la commande adaptative des systèmes non linéaires à données échantillonnées sont rappelées. Dans [68], l'objectif est de transposer les lois de commande adaptative linéarisantes initialement développées en temps continu dans [18, 195]. Nous avons vu au Chapitre 1 que la linéarisabilité par retour d'état d'un système peut être détruite par l'échantillonnage, à l'instar de la dépendance linéaire du paramètre inconnu. Pour ces raisons, les auteurs de [68] se concentrent sur les systèmes linéarisables par retour d'état sans avoir recours à un difféomorphisme dépendant du paramètre. Considérant des modèles approximatés discrets d'ordre élevé, la dépendance linéaire du paramètre inconnu devient polynomiale. Le problème est alors surparamétré : à chaque puissance est associé un nouveau

paramètre. Des algorithmes récursifs normalisés des moindres carrés sont alors utilisés afin d'estimer chacun d'entre eux. Une loi de commande est ensuite synthétisée. Il s'agit donc ici d'une méthode de commande adaptative indirecte qui présente l'inconvénient de rapidement gagner en complexité, puisqu'à chaque fois que l'on augmente l'ordre du modèle approximé, une nouvelle loi d'estimation est requise. De plus la classe de systèmes étudiée est relativement restrictive. Dans [125, 177] des lois de commande adaptative sont proposées pour des systèmes non linéaires incertains non pas en termes de paramètres inconnus, mais de manière plus générale, au niveau de leurs champs de vecteurs et des perturbations extérieures. Il ne s'agit donc pas d'identifier un paramètre inconnu, mais d'estimer le modèle du système localement en temps et en espace, à chaque instant d'échantillonnage. L'analyse repose sur le modèle d'Euler et nécessite que le système inverse soit stable dans [125] ou que des propriétés de factorisation soient satisfaites dans [177]. Des contrôleurs adaptatifs discrets sont proposés dans les études applicatives [60, 202]. Dans [60], la commande d'une machine synchrone, dont le couple de charge et les résistances statoriques sont incertains, est proposée. Combinant schémas de discrétisation approximatifs multi-pas et identification par la méthode des moindres carrés, une loi de commande est obtenue qui garantit la stabilité du système. Dans [202], la stabilisation de robots manipulateurs est assurée à l'aide d'une loi de commande également multi-pas composée d'une part, du contrôleur de Slotine-Li discrétisé [179], et d'autre part, d'un terme de compensation non linéaire. Cette étude repose sur l'approximé d'Euler du modèle continu.

Analyser la stabilité d'un système contrôlé par une loi adaptative à l'aide de fonctions de Lyapunov est souvent délicat. En effet, la fonction étudiée est généralement faible (cf. Annexe B), c'est-à-dire qu'elle ne permet pas de conclure directement quant à la stabilité du système complet. Deux techniques sont alors envisageables : d'une part, le principe d'invariance de LaSalle qui ramène l'étude de la stabilité du système à l'ensemble pour lequel la dérivée de la fonction s'annule, d'autre part les théorèmes de Matrosov, qui fournissent, dans certains cas, une fonction de Lyapunov forte (cf. Annexe B) à partir de celle considérée [123, 127, 129, 130]. Dans [149], la commande adaptative par modèle de référence est étudiée à l'aide de théorèmes de Matrosov pour les systèmes discrets paramétrés. Considérant l'approximé d'Euler et supposant que des propriétés d'excitation persistante soient vérifiées, il est montré que le système bouclé est uniformément semiglobalement pratiquement asymptotiquement stable.

La commande par *backstepping* adaptatif de l'approximation d'Euler de systèmes sous forme *parametric strict-feedback* est proposée dans [205], où la technique des  $\sigma$ -modifications est utilisée afin de garantir la stabilité de la loi d'estimation. A noter que dans [124], la commande par *backstepping* pour les systèmes discrets est proposée. A la différence de [124], les travaux de [205] considèrent des modèles approximatifs, donc incertains, paramétrés en la période d'échantillonnage.

Dans ce chapitre, la stabilisation adaptative d'une classe de systèmes non linéaires, dont un

paramètre est incertain, est réalisée. L'objectif est de proposer des contrôleurs discrets d'ordre élevé aussi simples que possible, qui permettent d'obtenir de meilleures performances que le blocage de la commande continue. La méthode suivie est celle initialement développée dans [147] pour la synthèse de contrôleurs dits *grand gain*. Le principe est le suivant. Considérant une fonction de Lyapunov pour le système bouclé continu, son équation aux différences est développée en série de Fliess. Des conditions suffisantes sont ensuite déduites, à partir desquelles, une loi de commande d'ordre élevé peut être déduite. Cette méthode présente l'avantage d'être relativement simple, flexible et de pouvoir s'appliquer à une large classe de systèmes. Nous étendons ici ces résultats au cas où un paramètre inconnu affecte les dynamiques du modèle. La commande adaptative développée repose donc sur des outils de Lyapunov et est du type directe : notre but n'est pas d'identifier le paramètre mais de véritablement assurer des propriétés de stabilité pour l'état du système. Puisque le développement de l'équation aux différences de la fonction de Lyapunov se fait à un ordre élevé, le problème perd sa linéarité originale en le paramètre inconnu. Contrairement à [68], aucune surparamétrisation n'est nécessaire. En effet, en supposant que le paramètre appartienne à un ensemble compact de bornes connues, le problème est reparamétré. Puis, à l'aide des techniques de [146], une unique loi d'estimation est dérivée. Celle-ci est notamment composée de  $\sigma$ -modifications comme dans [205], afin de garantir la stabilité de l'estimé. Des conditions suffisantes, similaires à celles de [147], sont alors déduites, permettant d'obtenir un contrôleur d'ordre élevé. La structure de commande adaptative garantit des propriétés de bornitude semiglobale pour le système bouclé. L'analyse de stabilité ne permet pas de distinguer les propriétés du vecteur d'état du système de celles de l'estimé. En effet, il n'existe pas aujourd'hui de principe de LaSalle approprié pour les systèmes discrets paramétrés incertains et la construction de fonctions de Lyapunov forte à l'aide de théorèmes de Matrosov est ici vaine, puisque la convergence de l'estimé vers la véritable valeur n'a a priori pas lieu d'être. Les simulations sur un exemple numérique montrent que les états du système convergent bien vers un voisinage de l'origine. Bien que l'analyse de stabilité soit réalisée à partir du développement en série de Fliess tronquée de l'équation aux différences de Lyapunov, les propriétés obtenues sont garanties pour le discrétisé exact. Celles du système à données échantillonnées suivent alors sous de faibles conditions d'après [155]. En comparaison avec le simple blocage d'une loi continue, les contrôleurs d'ordre élevé permettent généralement d'augmenter la vitesse de convergence et d'élargir le bassin d'attraction, comme nous le montrons sur un exemple. En résumé, les contrôleurs proposés fournissent de meilleures performances que l'émulation et sont plus simples que ceux d'ordre élevé précédemment donnés dans [68] puisqu'aucune surparamétrisation n'est requise.

Ce chapitre est organisée de la façon suivante. Dans un premier temps, la problématique est présentée dans §2.2, puis une loi d'estimation est proposée après avoir reparamétré le problème dans §2.3. Le théorème de stabilité principal est alors énoncé dans §2.4, ainsi que des conditions suffisantes pour la synthèse de contrôleurs. Une méthode de synthèse est donnée

à la fin de cette section. Finalement, un exemple numérique illustre les résultats théoriques obtenus dans §2.5.

## 2.2 Problématique

Considérons la classe de systèmes non linéaires suivante :

$$\dot{x}(t) = g_0(x(t))\theta + g_1(x(t))u(t), \quad (2.1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u \in \mathbb{R}$  le signal d'entrée,  $\theta \in \mathbb{R}$  un paramètre constant inconnu et  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Les fonctions  $g_0, g_1$  sont connues, analytiques et s'annulent à l'origine. Le paramètre  $\theta$  est supposé appartenir à l'ensemble compact  $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$  où  $\underline{\theta}, \bar{\theta} \in \mathbb{R}$  sont connus,  $\underline{\theta} < \bar{\theta}$  et  $\text{sign}(\underline{\theta}) = \text{sign}(\bar{\theta})$ . La notation  $\hat{\theta}$  est utilisée pour désigner l'estimation du paramètre inconnu  $\theta$  et  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$  l'erreur d'estimation.

**Remarque 2.2.1** *En pratique, il est souvent aisé de déterminer un intervalle de valeurs possibles pour le paramètre inconnu,  $\theta$ , en prenant en compte sa signification physique et l'environnement dans lequel le système évolue. Le fait que nous supposons que les bornes du compact soient de même signe n'induit pas de restriction supplémentaire. En effet, si ce n'est pas le cas au départ, un changement de paramètre par translation est suffisant pour satisfaire cette hypothèse. Ainsi, pour  $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$  avec  $\underline{\theta} < \bar{\theta}$  et  $\underline{\theta}\bar{\theta} < 0$ , en introduisant  $\theta_1 = \theta - \bar{\theta} - 1$ , le système (2.1) devient :*

$$\dot{x}(t) = g_0(x(t))(\theta_1 + \bar{\theta} + 1) + g_1(x(t))u(t), \quad (2.2)$$

avec  $\theta_1$  inconnu qui appartient au compact de bornes de même signe  $[\underline{\theta} - \bar{\theta} - 1, -1]$ . Le système (2.2) n'est pas exactement de la forme (2.1), néanmoins les résultats de ce chapitre peuvent être appliqués après d'évidentes modifications.

On suppose, au cours de ce chapitre, que toutes les composantes du vecteur d'état sont mesurées et donc disponible pour le contrôleur. L'instant initial considéré est  $t = 0$ , sans perte de généralité. La méthode proposée se concentre sur les systèmes mono-entrée, toutefois elle peut être étendue au cas multi-entrées au prix de calculs additionnels. De même, lorsqu'un vecteur de paramètres est inconnu, une extension est possible sous des hypothèses supplémentaires, voir [146].

Nous supposons que le problème de commande en temps continu est résolu, en ce sens, que l'on sait déterminer une loi de commande adaptative assurant la convergence asymptotique de l'état  $x$  vers l'origine et la stabilité de l'estimé. L'hypothèse proposée repose sur la connaissance de fonctions de Lyapunov.

**Hypothèse 2.2.1** *Il existe une fonction définie positive  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  telle que, lorsqu'on applique la loi de commande connue  $u(t) = u_c(x(t), \hat{\theta}(t))$  et la boucle d'estimation  $\dot{\hat{\theta}}(t) = \alpha L_{g_0} V(x(t))$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}_{> 0}$ , ( $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ), il existe  $\underline{\beta}, \bar{\beta} \in \mathcal{K}_\infty$  et une constante  $c \in \mathbb{R}_{> 0}$  qui satisfont, lorsque l'on considère la fonction de Lyapunov  $W(x, \tilde{\theta}) = V(x) + \frac{1}{2\alpha} \tilde{\theta}^2$ , pour tout  $(x, \tilde{\theta}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ,*

$$\underline{\beta}(|(x, \tilde{\theta})|) \leq W(x, \tilde{\theta}) \leq \bar{\beta}(|(x, \tilde{\theta})|), \quad (2.3)$$

et le long des trajectoires de (2.1),

$$\dot{W}(t) = L_{g_1} V(x) u_c(x, \hat{\theta}) + L_{g_0} V(x) \hat{\theta} \leq -cV(x). \quad (2.4)$$

Lorsque l'Hypothèse 2.2.1 est vérifiée, la convergence globale asymptotique des états du système vers l'origine est assurée. En effet, puisque le plus grand ensemble invariant inclus dans  $\{(x, \tilde{\theta}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \dot{V} = 0\}$  est  $\{(x, \tilde{\theta}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x = 0 \text{ et } \theta = d \text{ où } d \in \mathbb{R}\}$ , d'après le principe d'invariance de LaSalle (Théorème B.1.2), le vecteur  $(x, \tilde{\theta})$  converge globalement asymptotiquement vers ce dernier ensemble.

Il existe de nombreuses méthodes de commande adaptative directe pouvant permettre de satisfaire l'Hypothèse 2.2.1 pour des classes de système de la forme (2.1), comme les méthodes par *backstepping* [104] ou plus généralement celles faisant appel aux fonctions de Lyapunov de commande [105, 172].

**Remarque 2.2.2** *Contrairement aux résultats de [147], l'hypothèse sur le système bouclé en temps continu repose sur une fonction de Lyapunov faible de par l'extension du vecteur d'état à l'estimé du paramètre inconnu. C'est là une difficulté majeure de cette étude.*

Nous nous concentrons désormais sur le cas où la commande  $u$  et par conséquent la variable d'estimation  $\hat{\theta}$  sont implémentées numériquement à l'aide d'un échantillonneur de période  $T \in (0, 1)$  et d'un bloqueur d'ordre zéro. La configuration correspond à celle dépeinte Figure 1.1.

**Remarque 2.2.3** *Le fait de prendre  $T < 1$  n'apporte aucune contrainte : il suffit de changer l'échelle de temps si nécessaire.*

Le terme  $u_{sd}^r$  est utilisé pour désigner le signal de commande constant par morceaux d'ordre  $r$ ,  $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , appliqué au système (2.1),  $u_{sd}^r(t) = u_{sd}^r(kT)$ , pour  $t \in [kT, (k+1)T)$ ,  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , qui s'écrit sous la forme :

$$u_{sd}^r = u_0 + \sum_{s=1}^r T^s u_s. \quad (2.5)$$

Le système (2.1) devient alors, pour  $t \in [kT, (k+1)T)$ ,  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  :

$$\dot{x}(t) = g_0(x(t))\theta + g_1(x(t))u_{sd}^r(kT). \quad (2.6)$$

**Remarque 2.2.4** *Tout au long de ce chapitre, les variables dont dépend l'entrée sont omises par souci de clarté. Implicitement, à chaque fois qu'une composante de la loi de commande est mentionnée, une loi d'estimation est utilisée. Lorsqu'aucune définition explicite de la loi d'estimation n'est donnée, la variable correspondante est supposée bornée. Il sera montré que celle développée dans §2.3 l'est effectivement.*

Pour une condition initiale,  $x_0 = x(0)$ , et une loi de commande échantillonnée,  $u_{sd}^r$ ,  $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , données, la solution de (2.6),  $x(\cdot, x_0, T, u_{sd}^r)$  coïncide avec celle du système discrétisé exact,  $x_e(\cdot, x_0, T, u_{sd}^r)$ , à chaque instant d'échantillonnage. Le système discrétisé exact associé à (2.6) est, pour  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,

$$x((k+1)T) = x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} [g_0(x(s))\theta + g_1(x(s))u_{sd}^r(kT)] ds \quad (2.7)$$

$$= F_{T,\theta}^e(x(kT), u_{sd}^r(kT)). \quad (2.8)$$

Nous rappelons que l'expression analytique de (2.6) est en général impossible à établir (cf. Chapitre 1).

L'objectif principal de ce chapitre est de donner des conditions suffisantes pour la synthèse de contrôleurs d'ordre élevé de la forme (2.5), qui garantissent la bornitude des états et de la variable d'estimation du discrétisé exact (2.8) semiglobalement, pour  $T$  suffisamment petit. Le système à données échantillonnées (2.6) héritera alors de cette propriété sous de faibles conditions sur le comportement du système entre deux instants d'échantillonnage (cf. [155]). Par exemple, si  $g_0$  et  $g_1$  sont des champs de vecteurs globalement Lipschitziens, la bornitude des états suit immédiatement en utilisant le lemme de Gronwall (Lemme A.1 dans [98]). Il sera montré sur un exemple, dans §2.5, qu'en augmentant l'ordre du contrôleur, on améliore la vitesse de convergence et étend le bassin d'attraction du système en boucle fermée.

**Remarque 2.2.5** *Les résultats de ce chapitre ne sont pas fondés sur le cadre méthodologique de [150], contrairement à ceux du Chapitre 3, puisqu'aucun modèle approximé n'est considéré, mais uniquement le développement en série de Fliess de la fonction de Lyapunov continue.*

## 2.3 Loi d'estimation

### 2.3.1 Développement en série de Fliess de l'équation aux différences de $V$

Premièrement, l'équation aux différences de  $V$ ,  $\Delta V(x) = V(x^+) - V(x)$ , est développée en une série de Fliess. Cela constituera le point de départ pour la synthèse de contrôleurs adaptatifs.

**Proposition 2.3.1** *Soit  $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , le long des trajectoires de (2.8), considérant un contrôleur de la forme (2.5), pour  $T \in \mathbb{R}_{>0}$  suffisamment petit,*

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V(x)}{T} &= L_{g_1} V(x) u_0 + P_0(\theta, x) + \sum_{s=1}^r T^s (L_{g_1} V(x) u_s + P_s(\theta, x, U_{s-1})) \\ &\quad + R_{T, \theta, r}(x, U_r), \end{aligned} \quad (2.9)$$

où  $U_s = (u_0, \dots, u_s)$ , pour  $s \in \{0, \dots, r\}$ ,  $R_{T, \theta, r}(x, U_r) = \mathcal{O}(T^{r+1})$ ,

$$P_0(\theta, x) = L_{g_0} V(x) \theta, \quad (2.10)$$

pour  $s \geq 1$ ,

$$P_s(\theta, x, U_{s-1}) = \sum_{k=1}^s \sum_{i=0}^{k+1} p_{iks}(x, U_{s-1}) \theta^i, \quad (2.11)$$

pour tout  $i \in \{0, \dots, r+1\}$ ,  $(k, s) \in \{1, \dots, r\}^2$ ,

$$p_{iks}(x, U_{s-1}) = \sum_{(i_0, \dots, i_k) \in \mathcal{J}_{ik}} \frac{L_{g_{i_0}} \dots L_{g_{i_k}} V(x)}{(k+1)!} \left( \sum_{\substack{|N|=\tilde{I}_k \\ \tilde{N}=s-k}} \binom{k+1-i}{n_0 \ n_1 \ \dots \ n_r} \prod_{j=0}^r u_j^{n_j} \right) \quad (2.12)$$

où  $\mathcal{J}_{ik} = \{(i_0, \dots, i_k) \in \{0, 1\}^{k+1} : \tilde{I}_k = k+1-i\}$  (on rappelle que  $\tilde{I}_k = i_0 + \dots + i_k$ ).

**Preuve.** D'après le Théorème 3.1.5 dans [85] et du fait que le signal de commande est constant entre deux instants d'échantillonnage, on peut montrer que :

$$\frac{\Delta V(x)}{T} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_0=0, \dots, i_k=0}^{m=1} L_{\tilde{g}_{i_0}} \dots L_{\tilde{g}_{i_k}} V(x) \frac{T^k}{(k+1)!} (u_{sd}^r)^{\tilde{I}_k}, \quad (2.13)$$

où  $\tilde{g}_0 = \theta g_0$  et  $\tilde{g}_1 = g_1$ . En écrivant (2.13) comme un polynôme en  $\theta$  et puisque  $u_{sd}^r = \sum_{s=0}^r T^s u_s$ , le développement (2.9) est obtenu après quelques calculs.  $\square$

**Remarque 2.3.1** *Le terme  $R_{T, \theta, r}(x, U_r)$  dépend de l'entrée et par conséquent de la variable d'estimation. Puisque celle-ci est bornée,  $R_{T, \theta, r}(x, U_r)$  peut être qualifié de  $\mathcal{O}(T^{r+1})$  (voir Remarque 2.2.4).*

La Proposition 2.3.1 est une extension du Théorème 3.1 dans [147] pour la classe de systèmes incertains (2.8). Le calcul des termes d'ordre élevé de la série (2.9) devient généralement rapidement complexe et peut nécessiter l'utilisation d'un logiciel de calcul symbolique. Les deux premiers termes du développement (2.9) sont :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V(x)}{T} &= L_{g_0} V(x) \theta + L_{g_1} V(x) u_0 + T(L_{g_1} V(x) u_1 + p_{011}(x, u_0) + p_{111}(x, u_0) \theta \\ &\quad + p_{211}(x) \theta^2) + \mathcal{O}(T^2), \end{aligned} \quad (2.14)$$



avec

$$\begin{cases} p_{011}(x, u_0) = \frac{1}{2} L_{g_1}^2 V(x) u_0^2 \\ p_{111}(x, u_0) = \frac{1}{2} (L_{g_0} L_{g_1} V(x) + L_{g_1} L_{g_0} V(x)) u_0 \\ p_{211}(x) = \frac{1}{2} L_{g_0}^2 V(x). \end{cases}$$

### 2.3.2 Reparamétrisation

Nous avons vu que le développement en série de Fliess de l'équation aux différences de la fonction  $V$ , le long des solutions de (2.8), change la nature de la paramétrisation. D'après la méthode de [146], le problème est reparamétrisé afin de synthétiser une unique loi d'estimation. Sachant que le paramètre inconnu appartient à un ensemble compact de bornes connues de même signe, le nouveau paramètre  $\gamma$  est défini comme suit :

$$\gamma = \frac{1}{\zeta} \ln\left(\frac{|\theta|}{\underline{\theta}}\right), \quad (2.15)$$

où  $\zeta = \ln(\frac{\bar{\theta}}{\underline{\theta}})$  (de manière équivalente,  $\theta = e^{\zeta\gamma}$ ). On remarque que  $\gamma \in [0, 1]$ .

Les fonctions suivantes joueront un rôle clef lors de l'analyse de stabilité. Tout d'abord, nous définissons les fonctions convexes suivantes, pour  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  :

$$\begin{aligned} f_i &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \\ a &\mapsto f_i(a) = e^{i\zeta a}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Un autre ensemble de fonctions est donnée ci-dessous.

**Définition 2.3.1** Soit  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , la fonction  $\tilde{f}_i$  satisfait les propriétés suivantes :

1.  $\tilde{f}_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continûment dérivable ;
2.  $\tilde{f}_i$  est concave sur  $\mathbb{R}$  ;
3.  $\tilde{f}_i \geq f_i$  sur  $[0, 1]$ .

**Remarque 2.3.2** Il existe une infinité de telles fonctions  $\tilde{f}_i$  (des exemples sont proposés dans [145] et §2.5).

En utilisant les définitions et respectivement la convexité des  $f_i$  et la concavité des  $\tilde{f}_i$ , le lemme ci-dessous est obtenu.

**Lemme 2.3.1** ([145]) Pour tout  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$   $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ ,

$$f_i(\gamma_1) - f_i(\gamma_2) \geq \partial_1 f_i(\gamma_2)(\gamma_1 - \gamma_2), \quad (2.17)$$

et pour tout  $\gamma_1 \in [0, 1]$ ,  $\gamma_2 \in \mathbb{R}$ ,

$$f_i(\gamma_1) - \tilde{f}_i(\gamma_2) \leq \partial_1 \tilde{f}_i(\gamma_2)(\gamma_1 - \gamma_2). \quad (2.18)$$

### 2.3.3 Loi d'estimation

A partir de l'analyse du développement en série de l'équation aux différences de la fonction Lyapunov  $V$  (Proposition 2.3.1), la loi d'estimation suivante est choisie pour le nouveau paramètre  $\gamma$  :

$$\hat{\gamma}^+ = \hat{\gamma} + \alpha T \left( \sum_{s=1}^r T^s \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^{k+1} \bar{p}_{iks}(x, U_{s-1}) L_{is}(\hat{\gamma}) + \bar{p}_0(x) L_{10}(\hat{\gamma}) + \Gamma(\hat{\gamma}) \right), \quad (2.19)$$

où  $\alpha$  est défini dans l'Hypothèse 2.2.1, les  $p_{iks}$  dans la Proposition 2.3.1,

$$\bar{p}_{iks}(x, U_{s-1}) = p_{iks}(x, U_{s-1}) |\underline{\theta}|^i \quad (2.20)$$

$$\bar{p}_0(x) = L_{g_0} V(x) |\underline{\theta}|, \quad (2.21)$$

les  $L_{is}$ 's sont définis par, pour  $i \in \{1, \dots, r+1\}$  et  $s \in \{1, \dots, r\}$  :

$$L_{is}(\hat{\gamma}) = \begin{cases} \partial_1 f_i(\hat{\gamma}) & \text{si } \sum_{k=1}^s \sum_{i \geq k-1} \bar{p}_{iks}(x, U_{s-1}) \leq 0 \\ \partial_1 \tilde{f}_i(\hat{\gamma}) & \text{si } \sum_{k=1}^s \sum_{i \geq k-1} \bar{p}_{iks}(x, U_{s-1}) > 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

$$L_{10}(\hat{\gamma}) = \begin{cases} \partial_1 f_1(\hat{\gamma}) & \text{si } \bar{p}_0(x) \leq 0 \\ \partial_1 \tilde{f}_1(\hat{\gamma}) & \text{si } \bar{p}_0(x) > 0, \end{cases} \quad (2.23)$$

et  $\Gamma(\hat{\gamma})$  est une  $\sigma$ -modification définie par, pour  $\sigma \in \mathbb{R}_{>0}$ ,

$$\Gamma(\hat{\gamma}) = -\sigma \hat{\gamma}. \quad (2.24)$$

Les  $\sigma$ -modifications sont généralement utilisées afin d'assurer la stabilité de systèmes incertains (cf. [47, 57, 83]). Ici le problème est non seulement incertain à cause du paramètre inconnu, mais aussi de la discrétisation qui est à l'origine d'erreurs non-négligeables, comme dans [205]. Le choix d'une telle loi d'estimation sera justifiée lors de l'analyse de stabilité.

## 2.4 Analyse de stabilité

### 2.4.1 Théorème de stabilisation

Tout d'abord, une hypothèse sur les contrôleurs d'ordre  $r$  est supposée satisfaite. Elle garantit la bornitude du vecteur d'état étendu  $(x, \tilde{\gamma})$  pour le système (2.8), pour  $T$  suffisamment petit. Nous verrons par la suite qu'elle peut nous permettre de synthétiser récursivement les composantes de la loi de commande (2.5).

**Hypothèse 2.4.1** *Il existe une loi de commande  $u_{sd}^r(x, \hat{\gamma}) = \sum_{s=0}^r T^s u_s(x, \hat{\gamma})$ , avec  $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , qui assure :*

$$-cV(x) \geq \sum_{s=1}^r T^s \left( L_{g_1} V(x) u_s + \Lambda_s + \sum_{k=1}^s \bar{p}_{0ks}(x, U_{s-1}) + \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^{k+1} \bar{p}_{iks}(x, U_{s-1}) S_{is}(\hat{\gamma}) \right) + \bar{p}_0(x) S_{10}(\hat{\gamma}) + L_{g_1} V(x) u_0, \quad (2.25)$$

où les  $\Lambda_s$ 's,  $s \in \{1, \dots, r\}$ , sont définis par comparaison des termes homogènes du polynôme en  $T$ :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha T}{2} \left( \sum_{s=1}^r T^s \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^{k+1} \bar{p}_{iks}(x, U_{s-1}) L_{is}(\hat{\gamma}) + \bar{p}_0(x) L_{10}(\hat{\gamma}) + \Gamma(\hat{\gamma}) \right)^2 - \frac{\alpha T}{2} \Gamma(\hat{\gamma})^2 &= \Lambda_1(x, \hat{\gamma}) \\ &+ \sum_{s=2}^r T^s \Lambda_s(x, \hat{\gamma}, U_{s-2}) + \mathcal{O}(T^{r+1}), \end{aligned} \quad (2.26)$$

et les  $S_{is}$ 's sont :

$$S_{is}(\hat{\gamma}) = \begin{cases} f_i(\hat{\gamma}) & \text{si } \sum_{k=1}^s \sum_{\text{et } k \geq i-1} \bar{p}_{iks}(x, U_{s-1}) \leq 0 \\ \tilde{f}_i(\hat{\gamma}) & \text{si } \sum_{k=1}^s \sum_{\text{et } k \geq i-1} \bar{p}_{iks}(x, U_{s-1}) > 0, \end{cases} \quad (2.27)$$

et

$$S_{10}(\hat{\gamma}) = \begin{cases} f_1(\hat{\gamma}) & \text{si } \bar{p}_0(x) \leq 0 \\ \tilde{f}_1(\hat{\gamma}) & \text{si } \bar{p}_0(x) > 0. \end{cases} \quad (2.28)$$

Le théorème principal peut alors être énoncé.

**Théorème 2.4.1** *Supposons qu'un contrôleur  $u_{sd}^r$  de la forme (2.5) valide l'Hypothèse 2.4.1, alors le système (2.8) est semiglobalement borné, i.e. pour tout  $\Delta \in \mathbb{R}_{>0}$ , il existe  $\bar{\Delta} > \Delta$  et  $\bar{T}(\Delta, \bar{\Delta}) \in \mathbb{R}_{>0}$ , que l'on note  $\bar{T}$ , tels que, pour tout  $T \in (0, \bar{T})$ ,*

$$\left( |(x_0, \tilde{\gamma}_0)| < \Delta \right) \Rightarrow \left( |(x(kT), \tilde{\gamma}(kT))| < \bar{\Delta} \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right), \quad (2.29)$$

de plus,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |(x(kT), \tilde{\gamma}(kT))| \leq \underline{\beta}^{-1} \left( \frac{\sigma}{2a} (2 - \pi) + T^{r+1} \frac{\eta_{\bar{\Delta}}}{a} \right), \quad (2.30)$$

où  $\pi$  est n'importe quelle constante dans  $(0, 1)$ ,  $a = \min\{c, \sigma\alpha\pi\}$ , avec  $c, \alpha, \underline{\beta}$  (définis dans l'Hypothèse 2.2.1) et  $\eta_{\bar{\Delta}}$  est une constante définie dans la preuve.

**Preuve.** Dans un premier temps, le développement en série de Fliess de l'équation aux différences de  $V$  est reparamétré en  $\gamma$ . Ensuite, la fonction de Lyapunov pour le système étendu,  $W$ , est considérée et la loi d'estimation appliquée. Finalement, la propriété de stabilité désirée est prouvée en invoquant l'Hypothèse 2.4.1.

D'après la Proposition 2.3.1, pour  $T$  suffisamment petit :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V(x)}{T} &= L_{g_1} V(x) u_0 + P_0(\theta, x) + \sum_{s=1}^r T^s (L_{g_1} V(x) u_s + P_s(\theta, x, U_{s-1})) \\ &+ \mathcal{O}(T^{r+1}) \\ &= L_{g_1} V(x) u_0 + L_{g_0} V(x) \theta + \sum_{s=1}^r T^s \left( L_{g_1} V(x) u_s + \sum_{k=1}^s \sum_{i=0}^{k+1} p_{iks}(x, U_{s-1}) \theta^i \right) \\ &+ \mathcal{O}(T^{r+1}). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Puisque  $\theta = |\underline{\theta}|e^{\zeta\gamma}$ , on a  $\theta^i = |\underline{\theta}|^i f_i(\gamma)$  pour  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , par conséquent d'après (2.31),

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V(x)}{T} &= L_{g_1} V(x) u_0 + L_{g_0} V(x) |\underline{\theta}| f_1(\gamma) \\ &\quad + \sum_{s=1}^r T^s \left( L_{g_1} V(x) u_s + \sum_{k=1}^s \sum_{i=0}^{k+1} p_{iks}(x, U_{s-1}) |\underline{\theta}|^i f_i(\gamma) \right) + \mathcal{O}(T^{r+1}), \end{aligned} \quad (2.32)$$

ainsi, d'après (2.20) et (2.21),

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V(x)}{T} &= L_{g_1} V(x) u_0 + \bar{p}_0(x) f_1(\gamma) \\ &\quad + \sum_{s=1}^r T^s \left( L_{g_1} V(x) u_s + \sum_{k=1}^s \sum_{i=0}^{k+1} \bar{p}_{iks}(x, U_{s-1}) f_i(\gamma) \right) + \mathcal{O}(T^{r+1}), \end{aligned} \quad (2.33)$$

le développement de l'équation aux différences de  $V$  est paramétré désormais en  $\gamma$ .

Considérons la fonction  $W$  définie dans l'Hypothèse 2.2.1 avec  $\tilde{\gamma} = \gamma - \hat{\gamma}$ :

$$W(x, \tilde{\gamma}) = V(x) + \frac{1}{2\alpha} \tilde{\gamma}^2, \quad (2.34)$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ . D'après la loi d'estimation (2.19) le développement de l'équation aux différences de  $W$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta W(x, \tilde{\gamma})}{T} &= L_{g_1} V(x) u_0 + \bar{p}_0(x) (f_1(\gamma) - L_{10}(\hat{\gamma}) \tilde{\gamma}) \\ &\quad + \sum_{s=1}^r T^s \left[ L_{g_1} V(x) u_s + \sum_{k=1}^s \bar{p}_{0ks}(x, U_{s-1}) \right] \\ &\quad + \sum_{s=1}^r T^s \left[ \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^{k+1} \bar{p}_{iks}(x, U_{s-1}) (f_i(\gamma) - L_{is}(\hat{\gamma}) \tilde{\gamma}) \right] - \Gamma(\hat{\gamma}) \tilde{\gamma} \\ &\quad + \frac{\alpha T}{2} \left[ \sum_{s=1}^r T^s \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^{k+1} \bar{p}_{iks}(x, U_{s-1}) L_{is}(\hat{\gamma}) + \bar{p}_0(x) L_{10}(\hat{\gamma}) + \Gamma(\hat{\gamma}) \right]^2 + \mathcal{O}(T^{r+1}). \end{aligned} \quad (2.35)$$

En appliquant le Lemme 2.3.1, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta W(x, \tilde{\gamma})}{T} &\leq L_{g_1} V(x) u_0 + \bar{p}_0(x) S_{10}(\hat{\gamma}) \\ &\quad + \sum_{s=1}^r T^s \left[ L_{g_1} V(x) u_s + \sum_{k=1}^s \bar{p}_{0ks}(x, U_{s-1}) \right] \\ &\quad + \sum_{s=1}^r T^s \left[ \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^{k+1} \bar{p}_{iks}(x, U_{s-1}) S_{is}(\hat{\gamma}) \right] - \Gamma(\hat{\gamma}) \tilde{\gamma} \\ &\quad + \frac{\alpha T}{2} \left[ \sum_{s=1}^r T^s \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^{k+1} \bar{p}_{iks}(x, U_{s-1}) L_{is}(\hat{\gamma}) + \bar{p}_0(x) L_{10}(\hat{\gamma}) + \Gamma(\hat{\gamma}) \right]^2 + \mathcal{O}(T^{r+1}). \end{aligned} \quad (2.36)$$

D'après l'Hypothèse 2.4.1, on a alors :

$$\frac{\Delta W(x, \tilde{\gamma})}{T} \leq -cV(x) - \Gamma(\hat{\gamma}) \tilde{\gamma} + \frac{\alpha T}{2} \Gamma(\hat{\gamma})^2 + \mathcal{O}(T^{r+1}). \quad (2.37)$$

Sachant que  $\Gamma = -\sigma\hat{\gamma}$ ,  $\gamma \in [0,1]$  et  $\hat{\gamma} = \gamma - \tilde{\gamma}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta W(x, \tilde{\gamma})}{T} &\leq -cV(x) + \sigma(\gamma - \tilde{\gamma})\tilde{\gamma} + \frac{\alpha T}{2}\sigma^2(\gamma - \tilde{\gamma})^2 + \mathcal{O}(T^{r+1}) \\ &\leq -cV(x) - (\sigma - \sigma^2\frac{\alpha T}{2})\tilde{\gamma}^2 + (\sigma - \sigma^2\alpha T)\gamma\tilde{\gamma} + \frac{\alpha T}{2}\sigma^2 + \mathcal{O}(T^{r+1}) \\ &\leq -cV(x) - \sigma(1 - \sigma\frac{\alpha T}{2})\tilde{\gamma}^2 + \sigma|\gamma\tilde{\gamma}| + \frac{\alpha T}{2}\sigma^2 + \mathcal{O}(T^{r+1}), \end{aligned} \quad (2.38)$$

en utilisant le fait que  $|\gamma\tilde{\gamma}| \leq \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2}\tilde{\gamma}^2$  (Proposition A.1.1),

$$\frac{\Delta W(x, \tilde{\gamma})}{T} \leq -cV(x) - \sigma(1 - \sigma\frac{\alpha T}{2})\tilde{\gamma}^2 + \frac{1}{2}\sigma\gamma^2 + \frac{1}{2}\sigma\tilde{\gamma}^2 + \frac{\alpha T}{2}\sigma^2 + \mathcal{O}(T^{r+1}), \quad (2.39)$$

par conséquent, puisque  $|\gamma| < 1$ ,

$$\frac{\Delta W(x, \tilde{\gamma})}{T} \leq -cV(x) - \frac{1}{2}\sigma(1 - \sigma\alpha T)\tilde{\gamma}^2 + \frac{1}{2}\sigma(1 + \sigma\alpha T) + \mathcal{O}(T^{r+1}). \quad (2.40)$$

Prenons  $\pi \in (0,1)$ , et définissons  $a = \min\{c, \sigma\alpha\pi\}$ ,  $T^* = \frac{1-\pi}{\alpha\sigma}$ , pour tout  $T \in (0, T^*)$ ,  $1 - \sigma\alpha T > \pi$ , dès lors, pour  $T \in (0, T^*)$  suffisamment petit,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta W(x, \tilde{\gamma})}{T} &\leq -cV(x) - \sigma\pi\alpha\frac{1}{2\alpha}\tilde{\gamma}^2 + \frac{1}{2}\sigma(1 + \sigma\alpha T) + \mathcal{O}(T^{r+1}) \\ &\leq -aW(x, \tilde{\gamma}) + \frac{1}{2}\sigma(2 - \pi) + \mathcal{O}(T^{r+1}). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Pour tout  $\Delta \in \mathbb{R}_{>0}$ , la notation  $\eta_\Delta$  est utilisée pour dénommer un réel positif qui garantit  $\mathcal{O}((T^*)^{r+1}) \leq (T^*)^{r+1}\eta_\Delta$  dans (2.41), pour  $|(x, \tilde{\gamma})| \leq \Delta$  ( $\eta$  peut être considérée comme une fonction croissante en  $\Delta$ ). Il est maintenant montré que le système (2.8) est semiglobalement borné. Soit  $\Delta \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $\bar{\Delta} \in \mathbb{R}_{>0}$  suffisamment grand tel que  $\bar{\Delta} > \max\{\underline{\beta}^{-1} \circ \bar{\beta}(\Delta), \underline{\beta}^{-1}(\frac{1}{2a}\sigma(2 - \pi))\}$ , et  $|(x_0, \tilde{\gamma}_0)| \leq \Delta$ . On définit  $\bar{T} = \min\{T^*, \frac{1}{a}, \left(\frac{a\bar{\beta}(\bar{\Delta}) - \frac{1}{2}\sigma(2 - \pi)}{\eta_{\bar{\Delta}}}\right)^{\frac{1}{r+1}}\}$ . Notons  $[0, k_{\max}T)$ , l'intervalle maximal d'existence du système discrétisé exact (2.8) couplé à la commande et la loi d'estimation considérée, où  $k_{\max} \in \mathbb{Z}_{>0} \cup \{\infty\}$ . Nous allons montrer que  $k_{\max} = \infty$  et que pour tout  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $|(x(kT), \tilde{\gamma}(kT))| < \bar{\Delta}$  pour  $T \in (0, \bar{T})$  suffisamment petit, sachant que  $|(x_0, \tilde{\gamma}_0)| \leq \Delta$ . Puisque les champs de vecteurs du système (2.1) sont analytiques, en prenant  $T$  suffisamment petit, la solution du discrétisé exact de (2.1) contrôlé par  $u_{sd}^r$  est bien définie à l'instant  $t = T$ , ainsi d'après (2.41),

$$W(x(T), \tilde{\gamma}(T)) \leq (1 - Ta)W(x_0, \tilde{\gamma}_0) + T\frac{\sigma}{2}(2 - \pi) + T^{r+2}\eta_\Delta,$$

puisque  $\bar{\Delta} > \underline{\beta}^{-1} \circ \bar{\beta}(\Delta)$ , on a  $\bar{\Delta} > \Delta$ , ainsi

$$W(x(T), \tilde{\gamma}(T)) \leq (1 - Ta)W(x_0, \tilde{\gamma}_0) + T\frac{\sigma}{2}(2 - \pi) + T^{r+2}\eta_\Delta, \quad (2.42)$$

d'après (2.3) et puisque  $|(x_0, \tilde{\gamma}_0)| \leq \Delta < \bar{\Delta}$ , on a :

$$\begin{aligned} W(x(T), \tilde{\gamma}(T)) &\leq (1 - Ta)\bar{\beta}(\Delta) + T\frac{\sigma}{2}(2 - \pi) + T^{r+2}\eta_\Delta \\ &\leq (1 - Ta)\underline{\beta}(\bar{\Delta}) + T\frac{\sigma}{2}(2 - \pi) + T^{r+2}\eta_{\bar{\Delta}}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

On peut alors montrer, d'après les définitions de  $\bar{\Delta}$  et de  $\bar{T}$ , que :

$$W(x(T), \tilde{\gamma}(T)) < \underline{\beta}(\bar{\Delta}), \quad (2.44)$$

et donc :

$$|(x(T), \tilde{\gamma}(T))| < \bar{\Delta}. \quad (2.45)$$

Il est important de remarquer que l'inégalité (2.45) a été obtenue en utilisant le fait que  $|(x_0, \tilde{\gamma}_0)| < \bar{\Delta}$  et non pas  $|(x_0, \tilde{\gamma}_0)| \leq \Delta$ . Par conséquent, on en déduit par récurrence que le système discrétisé exact (2.8) est positivement complet, c'est-à-dire  $k_{\max} = \infty$ , et que, pour tout  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , pour  $T \in (0, \bar{T})$  suffisamment petit :

$$|(x(kT), \tilde{\gamma}(kT))| \leq \bar{\Delta}, \quad (2.46)$$

le système (2.8) est donc semiglobalement borné. De plus, on peut montrer que, pour  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  :

$$W(x(kT), \tilde{\gamma}(kT)) \leq (1 - Ta)^k W(x_0, \tilde{\gamma}_0) + \frac{\sigma}{2a}(2 - \pi) + T^{r+1} \frac{\eta \bar{\Delta}}{a}. \quad (2.47)$$

Ainsi, puisque  $(1 - Ta) \in (0, 1)$ ,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} W(x(kT), \tilde{\gamma}(kT)) \leq \frac{\sigma}{2a}(2 - \pi) + T^{r+1} \frac{\eta \bar{\Delta}}{a}, \quad (2.48)$$

en d'autres termes,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |(x(kT), \tilde{\gamma}(kT))| \leq \underline{\beta}^{-1} \left( \frac{\sigma}{2a}(2 - \pi) + T^{r+1} \frac{\eta \bar{\Delta}}{a} \right). \quad (2.49)$$

Tous les résultats désirés ont été démontrés.  $\square$

On remarque que l'Hypothèse initiale 2.2.1 n'est pas nécessaire pour appliquer le Théorème 2.4.1. Cependant nous verrons par la suite dans quelle mesure elle permet de satisfaire l'Hypothèse 2.4.1 qui est elle un point clef de la preuve ci-dessus.

On constate que l'ensemble compact vers lequel converge l'état étendu du système dans le Théorème 2.4.1 tend vers la boule centrée en l'origine de rayon  $\underline{\beta}^{-1} \left( \frac{\sigma}{2a}(2 - \pi) \right)$  lorsque l'on augmente l'ordre du contrôleur.

**Remarque 2.4.1** *On ne peut espérer prouver que  $|(x(kT), \tilde{\gamma}(kT))|$  tende vers 0 lorsque  $k$  tend vers l'infini, puisqu'il n'y a a priori aucune raison que  $\hat{\gamma}$  converge vers  $\gamma$ .*

**Remarque 2.4.2** *D'après la preuve du Théorème 2.4.1, la bornitude des variables du système (2.8), n'est a priori pas garantie avec cette analyse lorsque l'on considère l'émulation directe de la loi de commande adaptative continue (sans  $\sigma$ -modification dans la loi d'estimation) de l'Hypothèse 2.2.1, même pour  $T$  très petit.*

### 2.4.2 Méthode de *redesign*

D'après le Théorème 2.4.1, la condition (2.25) est suffisante pour assurer la bornitude semiglobale des variables du système (2.8) lorsque l'on applique un contrôleur du type (2.5) couplé à la loi d'estimation (2.19). Une telle loi de commande peut être obtenue par récurrence en considérant les termes de droite de (2.25) comme un polynôme en  $T$ . En effet, résoudre (2.25) revient à résoudre le système d'inégalités suivant :

$$\begin{cases} L_{g_1}V(x)u_0 + \bar{p}_0(x)S_{10}(\hat{\gamma}) \leq -cV(x), \\ L_{g_1}V(x)u_1 + \sum_{i=1}^2 \bar{p}_{i11}(x, u_0)S_{i1}(\hat{\gamma}) + \bar{p}_{011}(x, u_0) \leq -\Lambda_1(x, \hat{\gamma}), \\ \vdots \\ L_{g_1}V(x)u_r + \sum_{k=1}^r \bar{p}_{0kr}(x, U_{r-1}) + \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{k+1} \bar{p}_{ikr}(x, U_{r-1})S_{ir}(\hat{\gamma}) \leq -\Lambda_r(x, U_{r-1}, \hat{\gamma}). \end{cases} \quad (2.50)$$

De par la structure triangulaire de (2.50), les  $u_s$ 's,  $s \in \{0, \dots, r\}$  peuvent être déterminés étape après étape. Notons que, d'après l'Hypothèse 2.2.1, la première inégalité de (2.50) est toujours satisfaite (en identifiant  $\hat{\theta}$  à  $|\underline{\theta}|S_{10}(\hat{\gamma})$ ). Ensuite,  $u_1$  est obtenu en résolvant la seconde inégalité, puisque les autres termes ne dépendent que de variables connues  $x, \hat{\gamma}, u_0$ . En répétant cette procédure pour chaque  $u_s$ ,  $s \in \{1, \dots, r\}$ , un contrôleur d'ordre  $r$  peut être construit. Cette approche repose grandement sur le choix de la fonction  $V$  satisfaisant l'Hypothèse 2.2.1, ainsi, lorsque l'on se trouve dans l'impossibilité de résoudre ces inégalités, une fonction de Lyapunov différente peut être une alternative.

Le point clef repose sur la façon de déterminer les  $u_s$ 's de telle sorte que (2.50) soit satisfaite. Ceci doit être examiné au cas par cas. Lorsque des propriétés de factorisation sont vérifiées, la proposition suivante présente une technique possible de synthèse de contrôleurs.

**Proposition 2.4.1** *Soit  $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , supposons que pour tout  $i \in \{0, \dots, r+1\}$ ,  $k, s \in \{1, \dots, r\}$ , les  $\bar{p}_{iks}$ 's puissent être factorisés comme suit :*

$$\bar{p}_{iks}(x, \hat{\gamma}) = L_{g_1}V(x)\tilde{p}_{iks}(x, \hat{\gamma}) \quad (2.51)$$

pour  $(x, \hat{\gamma}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Alors, le système en boucle fermée constitué de (2.8), (2.19) et :

$$\begin{cases} u_s = -\kappa_s \text{sign}(L_{g_1}V(x)) \left| \sum_{k=1}^s \tilde{p}_{0ks}(x, U_{s-1}) + \Lambda_s(x, U_{s-1}, \hat{\gamma}) \right| - \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^{k+1} \tilde{p}_{iks}(x, U_{s-1})S_{is}(\hat{\gamma}), \\ u_0 = u_c(x, |\underline{\theta}|S_{10}(\hat{\gamma})), \end{cases} \quad (2.52)$$

avec  $\kappa_s \in \mathbb{R}^+$ ,  $s \in \{1, \dots, r\}$ , vérifie les propriétés (2.29) et (2.30).

**Preuve.** Ce résultat est une conséquence directe du Théorème 2.4.1 puisque la condition (2.51) permet au contrôleur (2.52) de satisfaire l'Hypothèse 2.4.1 .  $\square$

**Remarque 2.4.3** *Les premiers termes dans l'expression des  $u_s$ 's,  $s \in \{1, \dots, r\}$ , ne sont pas choisis pour compenser le terme correspondant en facteur de  $T^s$  dans le développement de l'équation aux différences de la fonction de Lyapunov, mais pour assurer plus de négativité, afin d'améliorer la vitesse de réponse du système comme nous le verrons dans §2.5. Des termes supplémentaires peuvent ainsi être ajoutés dans (2.52).*

Il n'est pas toujours possible de résoudre chaque étape de (2.50). Dans un tel cas, le contrôleur pourra être synthétisé afin de rendre aussi faible que possible l'impact des termes d'ordre élevé du développement de la fonction  $V$ . Dans ce cas, pour  $r \in \mathbb{Z}_{>0}$  donné, les termes  $u_1, \dots, u_r$  seront choisis par récurrence tels que, pour  $s \in \{1, \dots, r\}$ :

$$u_s = \arg \min_{|\bar{u}_s| \leq U_M} (L_{g_1} V(x) \bar{u}_s + G_s(\hat{\gamma}, x, U_{s-1})), \quad (2.53)$$

où

$$G_1(\hat{\gamma}, x, u_0) = \sum_{i=1}^2 \bar{p}_{i11}(x, u_0) S_{i1}(\hat{\gamma}) + \bar{p}_{011}(x, u_0) + \Lambda_1(x, \hat{\gamma}) \quad (2.54)$$

et

$$G_s(\hat{\gamma}, x, U_{s-1}) = \sum_{k=1}^s \bar{p}_{0ks}(x, U_{s-1}) + \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^{k+1} \bar{p}_{iks}(x, U_{s-1}) S_{is}(\hat{\gamma}) + \Lambda_s(x, U_{s-1}, \hat{\gamma}). \quad (2.55)$$

### 2.4.3 Commentaires

Lorsque la condition (2.50) est assurée, les composantes  $u_s$ 's de la loi de commande obtenue rendent chaque terme du développement en série de la fonction de Lyapunov plus « négatifs ». En conséquence, la vitesse de convergence du système en boucle fermée généralement augmente, le domaine d'attraction est élargi et les états convergent vers un plus petit voisinage centré en l'origine, lorsque l'ordre du contrôleur augmente. Cependant, la loi de commande dépend généralement de termes à grand gain (voir les  $\kappa_s$ 's dans la Proposition 2.4.1 par exemple). En conséquence, le terme  $\mathcal{O}(T^{r+1})$  qui dépend du signal de commande, peut augmenter et devenir de moins en moins négligeable. Cet aspect doit être pris en compte lorsque l'on synthétise de tels contrôleurs. Toutefois, un contrôleur redésigné avec attention fournit des résultats supérieurs à ceux du blocage d'une loi continue, comme nous le verrons dans la prochaine section.

Concernant le choix des paramètres  $\alpha$  et  $\sigma$ , l'utilisateur est libre. La preuve du Théorème 2.4.1 nous indique qu'un  $\alpha$  grand et un  $\sigma$  petit permettent de réduire le voisinage de l'origine vers lequel les états convergent, au prix d'un échantillonnage plus rapide.

Un dernier phénomène peut apparaître avec de tels contrôleurs : l'accroissement du dépassement qui peut être atténué lorsque le système continu vérifie certaines propriétés, voir la condition (ii) de l'Hypothèse 2.2 dans [147].



## 2.5 Exemple numérique

Considérons le système monodimensionnel non linéaire suivant, où  $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$  est inconnu et  $0 < \underline{\theta} < \bar{\theta}$ ,

$$\dot{x} = x^2\theta + u. \quad (2.56)$$

Une loi de commande continue est dans un premier temps synthétisée, puis nous nous intéressons au cas où la commande est échantillonnée à une période constante  $T \in \mathbb{R}_{>0}$  et maintenue constante entre deux instants d'échantillonnage. Des contrôleurs d'ordre 0 et 1 sont obtenus pour le discrétisé exact de (2.56) d'après la résolution du système d'inégalités équivalent à (2.50).

### 2.5.1 Commande adaptative continue

Considérons la fonction de Lyapunov candidate suivante :

$$W(x, \tilde{\theta}) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\alpha}\tilde{\theta}^2,$$

avec  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , le contrôleur adaptatif suivant peut être choisi (voir Chapitre 1):

$$\begin{cases} u_c(x, \hat{\theta}) = -cx - \hat{\theta}x^2 \\ \dot{\hat{\theta}} = \alpha x^3, \end{cases} \quad (2.57)$$

où  $c \in \mathbb{R}_{>0}$ . En effet, il permet d'obtenir, le long des solutions de (2.56),

$$\dot{W} = x(x^2\theta + u_c) - \dot{\hat{\theta}}\tilde{\theta} = -cx^2. \quad (2.58)$$

L'Hypothèse 2.2.1 est satisfaite et  $x$  converge asymptotiquement vers l'origine, d'après le principe d'invariance de LaSalle (Théorème B.1.2).

### 2.5.2 Commande échantillonnée

#### Commande d'ordre zéro

Le nouveau paramètre  $\gamma$  est introduit, ainsi, d'après (2.19) (les dépendances sont omises par souci de clarté) :

$$\hat{\gamma}^+ = \hat{\gamma} + T\alpha(x\tilde{p}_0(x)L_{10}(\hat{\gamma}) - \sigma\hat{\gamma}), \quad (2.59)$$

avec

$$\tilde{p}_0(x) = x^2\underline{\theta}. \quad (2.60)$$

Le terme  $L_{10}$  est défini dans (2.23) avec  $\zeta = \ln\left(\frac{\bar{\theta}}{\underline{\theta}}\right)$ ,  $f_i(z) = e^{i\zeta z}$  et  $\tilde{f}_i(z) = -2z^2 + (f_i(1) + 1)z + 1.2$  pour  $z \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . La loi de commande suivante est proposée, selon la Proposition 2.4.1,

$$u_{sd}^0 = -cx - \tilde{p}_0(x)S_{10}(\hat{\gamma}), \quad (2.61)$$

où  $S_{10}$  est défini dans (2.28).

En accord avec la Remarque 2.4.2, on constate que le contrôleur d'ordre 0 ne correspond pas au blocage de la loi continue à cause de la reparamétrisation.

**Remarque 2.5.1** *Puisque la développement de l'équation aux différences de Lyapunov ne change pas la paramétrisation en  $\theta$  ici, nous aurions pu déterminer un loi d'estimation en terme de  $\theta$  directement et obtenir ainsi, un contrôleur différent en utilisant des techniques similaires à celles développées dans §2.3 et §2.4.*

### Commande d'ordre un

On peut montrer que les conditions de la Proposition 2.4.1 sont garanties ici, le contrôleur adaptatif suivant est proposé :

$$\begin{cases} \hat{\gamma}^+ &= \hat{\gamma} + \alpha T (xT(\tilde{p}_{111}(x, \hat{\gamma})L_{11}(\hat{\gamma}) + \tilde{p}_{211}(x, \hat{\gamma})L_{21}(\hat{\gamma})) + x\tilde{p}_0(x)L_{10}(\hat{\gamma}) - \sigma\hat{\gamma}) \\ u_0 &= -cx - \tilde{p}_0(x)S_{10}(\hat{\gamma}) \\ u_1 &= -\mu \text{sign}(x)|\lambda_1(x, \hat{\gamma})| - \tilde{p}_{111}(x, \hat{\gamma})S_{11}(\hat{\gamma}) - \tilde{p}_{211}(x)S_{21}(\hat{\gamma}) - \tilde{p}_{011}(x, \hat{\gamma}) \\ u_{sd}^1 &= u_0 + Tu_1, \end{cases} \quad (2.62)$$

avec  $\mu > 1$ ,

$$\begin{aligned} \lambda_1(x, \hat{\gamma}) &= \frac{1}{2}\alpha x^5 \underline{\theta}^2 L_{10}(\hat{\gamma})^2 - \alpha x^2 \underline{\theta} L_{10}(\hat{\gamma}) \sigma \hat{\gamma} \\ \tilde{p}_{011}(x, \hat{\gamma}) &= \frac{1}{2}x(-c - x\underline{\theta}S_{10}(\hat{\gamma}))^2 \\ \tilde{p}_{111}(x, \hat{\gamma}) &= 2xu_0(x, \hat{\gamma})\underline{\theta} \\ \tilde{p}_{211}(x) &= \frac{3}{2}x^3 \underline{\theta}^2, \end{aligned} \quad (2.63)$$

les  $S_{is}$  et  $L_{is}$  sont respectivement définis dans (2.27) et (2.22) avec les mêmes  $f_1$  et  $\tilde{f}_1$  que pour la commande d'ordre d'ordre 0.

### 2.5.3 Simulations

Différentes simulations sont présentées pour lesquelles seule la période d'échantillonnage varie. Dans chacun des cas, quatre contrôleurs sont considérés : le continu (2.57), l'émulation du continu, celui d'ordre 0 (2.59), (2.61) et celui d'ordre 1 (2.62). Les valeurs suivantes sont prises :  $c = 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\theta = 0.6$  ( $\gamma = 0.6826$ ),  $\underline{\theta} = 0.2$ ,  $\bar{\theta} = 1$ ,  $\sigma = 0.5$ ,  $x(0) = -5$ ,  $\hat{\gamma}(0) = 0.5$ ,  $\hat{\theta}(0) = -0.5$ .

Premièrement, pour  $T = 0.3$ , la Figure 2.1 montre que tous les contrôleurs échantillonnés assurent la convergence de l'état  $x$  vers un voisinage de l'origine. Les contrôleurs d'ordre 0 et 1 fournissent des réponses similaires, à ceci près qu'avec l'ordre 1,  $x$  converge plus rapidement, tandis que l'émulation présente un fort dépassement, potentiellement néfaste pour le système.

Concernant l'évolution des variables  $\tilde{\theta}$  et  $\tilde{\gamma}$ , on observe bien que celles-ci ne convergent pas vers zéro. On remarque également que la loi continue et son blocage convergent vers des valeurs très différentes : cet écart est entièrement dû à l'échantillonnage. En effet, plus la période  $T$  diminue, plus l'émulation tendra vers le continu (nous l'avons vérifié en simulation).

Dans un second temps, la période d'échantillonnage a été augmentée :  $T = 0.5$ . Dans ce cas, on constate, Figure 2.2, que le blocage de la loi continue ne stabilise plus le système contrairement aux contrôleurs d'ordre 0 et 1. De plus, le contrôleur d'ordre 1 fournit des performances supérieures à celui d'ordre 0 en terme de vitesse de convergence et de dépassement. En prenant la période d'échantillonnage  $T = 0.8$ , on observe, Figure 2.3, que seul le contrôleur d'ordre 1 est capable de stabiliser le système.

En résumé, ces simulations justifient la construction proposée dans §2.4.2 puisqu'il est montré qu'en augmentant l'ordre du contrôleur, de plus grandes périodes d'échantillonnage peuvent être choisies, ce qui permet en pratique de diminuer la consommation d'énergie de la structure de commande. De plus, ces contrôleurs ont permis ici d'améliorer la vitesse de convergence de l'état et de diminuer le dépassement. La supériorité potentielle des contrôleurs d'ordre 0 sur le simple blocage de la loi continue a également été constatée.

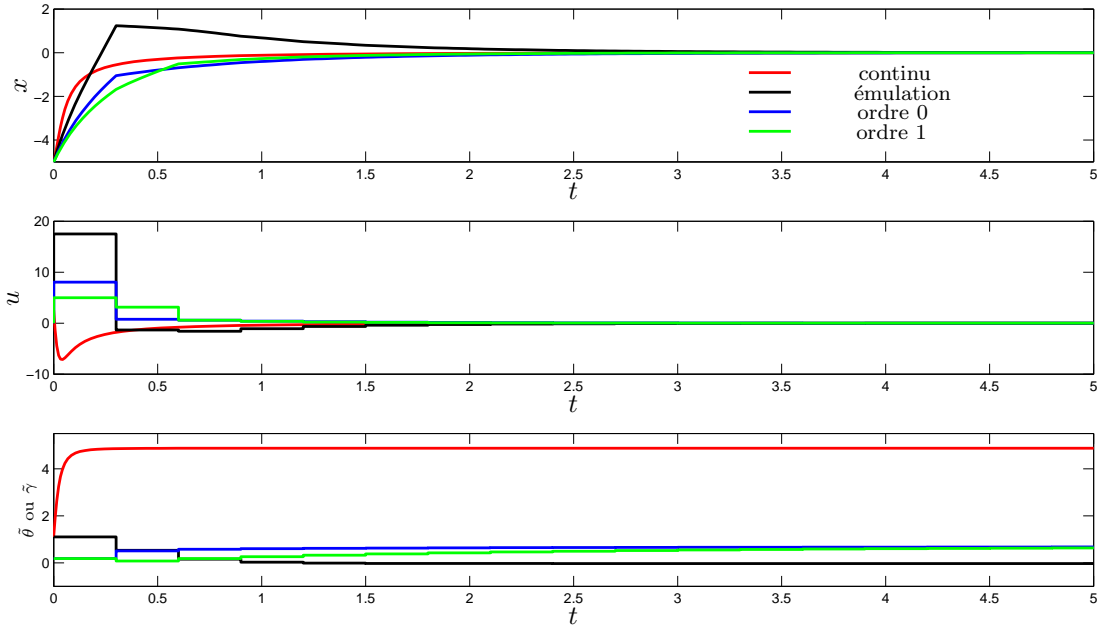


FIG. 2.1 – Simulations pour  $x(0) = -5$  et  $T = 0.3$

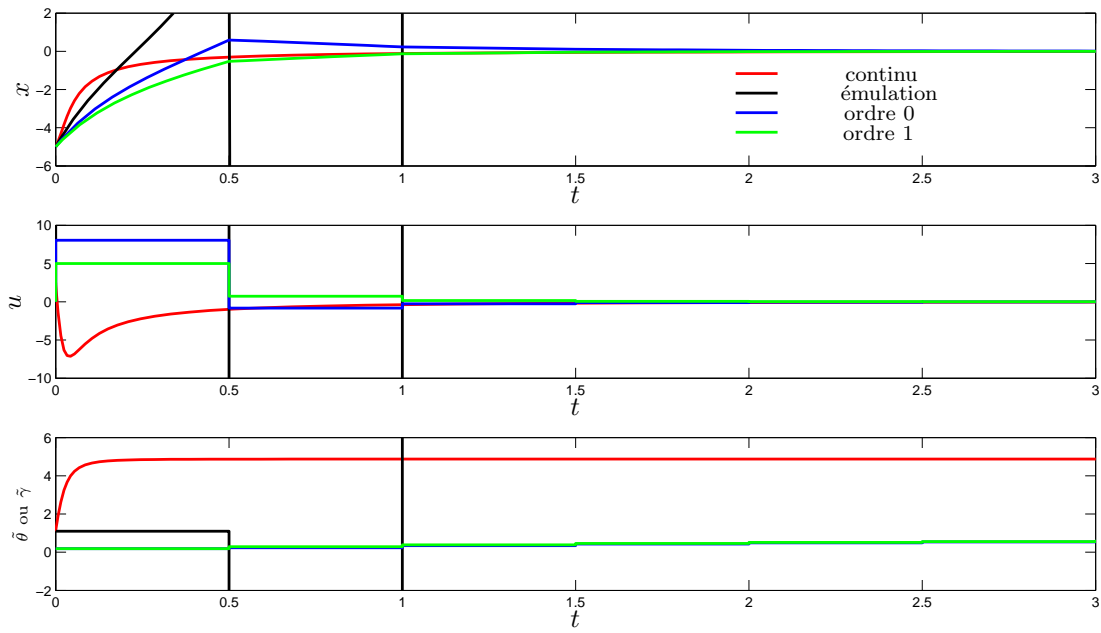


FIG. 2.2 – Simulations pour  $x(0) = -5$  et  $T = 0.5$

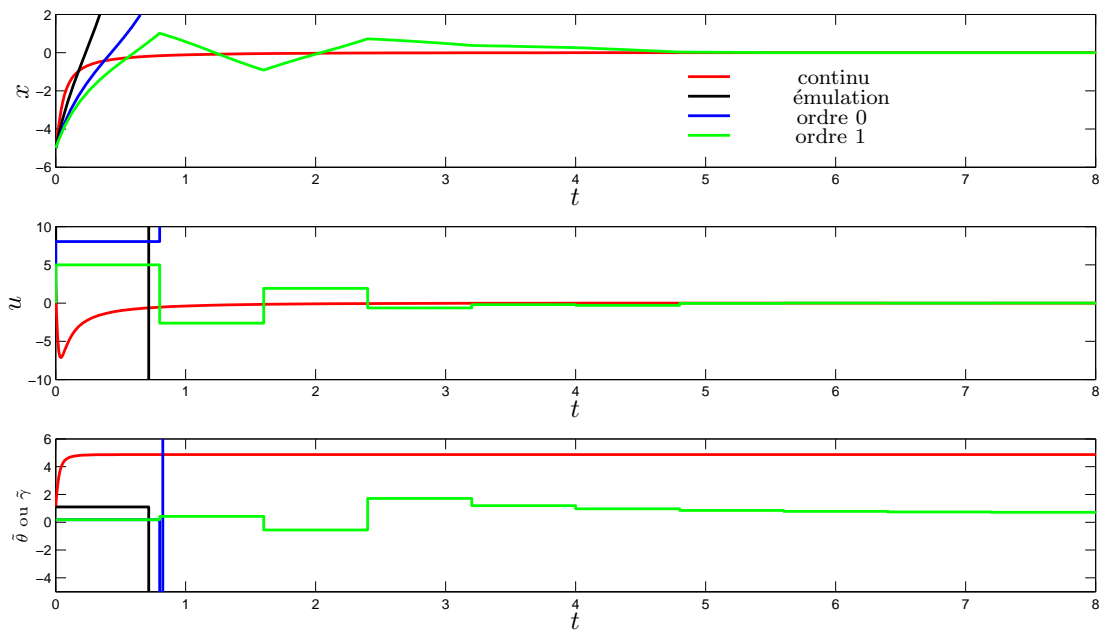


FIG. 2.3 – Simulations pour  $x(0) = -5$  et  $T = 0.8$

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étendu la technique de *redesign* de type *grand gain* proposée dans [147], au cas où un paramètre inconnu affecte les dynamiques du système. Une loi de commande adaptative directe de Lyapunov est synthétisée à partir de l'analyse de développement en série de Fliess de l'équation aux différences de la fonction de Lyapunov continu. Le problème de la paramétrisation polynomiale est contourné, non pas à l'aide d'une surparamétrisation, mais en reparamétrant la série. Une unique loi d'estimation est alors développée à partir de laquelle des conditions suffisantes sur le contrôleur d'ordre  $r$  sont déduites. Lorsque toutes les hypothèses sont validées, le discrétisé exact du système est semiglobalement borné et l'état étendu converge asymptotiquement vers une boule centrée en l'origine. Il est ensuite expliqué comment les hypothèses sur le contrôleur peuvent être utilisées afin de synthétiser une loi de commande d'ordre élevé. Une des techniques de *redesign* proposées est ainsi appliquée sur un exemple numérique. On constate qu'en augmentant l'ordre du contrôleur, les contraintes sur la période d'échantillonnage sont relaxées et la vitesse de convergence du système améliorée.

Une des principales difficultés techniques de cette étude est l'absence de principe d'invariance de LaSalle pour le type de système considéré. En effet, en temps continu, ce dernier est généralement utilisé pour conclure quant à la stabilité des systèmes contrôlés par des lois de commande adaptative directes de Lyapunov. Pour cette raison, la propriété de stabilité obtenue dans ce chapitre ne permet pas de distinguer le vecteur d'état du système et l'estimé du paramètre. Cependant, les résultats obtenus en simulation indiquent que le vecteur d'état converge effectivement vers une zone proche de l'origine, tandis que l'estimé tend vers une valeur constante. Le développement d'un principe d'invariance de LaSalle pour les systèmes discrets paramétrés incertains reste un problème ouvert qui permettrait d'affiner les résultats de ce chapitre.

## Chapitre 3

# Backstepping robuste échantillonné

### 3.1 Introduction

Après nous être intéressés à la commande échantillonnée de systèmes aux paramètres incertains, nous considérons, dans ce chapitre, le cas des incertitudes de modèle et/ou des perturbations exogènes pour une nouvelle classe de systèmes, toujours à l'aide de fonctions de Lyapunov. La technique de commande considérée est de type *backstepping*. Il s'agit d'une méthode constructive non linéaire adaptée aux systèmes ayant une structure de type triangulaire inférieure (cf. [101], Chapitre 6 dans [172] et les références qui y sont citées). Nous en rappelons le principe pour les systèmes sous forme *strict-feedback* suivants d'ordre  $n$ ,  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_3 + f_2(x_1, x_2) \\ \dot{x}_3 &= x_4 + f_3(x_1, x_2, x_3) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= u + f_n(x_1, \dots, x_n). \end{cases} \quad (3.1)$$

La synthèse du contrôleur s'effectue en  $n$  étapes. A la première, uniquement le sous-système  $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$  est considéré. Supposant que  $x_2$  soit un signal de commande, un contrôleur virtuel  $x_2 = \alpha_1(x_1)$  est déterminé afin de garantir la stabilité globale asymptotique de l'origine, à l'aide d'une fonction de Lyapunov  $V_1(x_1)$ . Puisqu'en réalité  $x_2$  n'est pas une commande, l'erreur  $z_2 = x_2 - \alpha_1(x_1)$  est introduite afin d'analyser l'évolution entre sa valeur réelle et celle désirée. A la seconde étape, le sous-système, dont l'état est  $(x_1, z_2)$  et la commande  $x_3$  est étudié. En suivant la même procédure qu'à l'étape précédente, une loi de commande virtuelle  $\alpha_2(x_1, z_2)$  est attribuée à  $x_3$  à l'aide de la fonction de Lyapunov  $V_2(x_1, z_2) = V_1(x_1) + \frac{1}{2}z_2^2$ . L'erreur  $z_3 = x_3 - \alpha_2(x_1, z_2)$  est ensuite introduite. Après  $n$  étapes, une loi de commande,  $u$ , et une fonction de Lyapunov,  $V(x) = V_1(x_1) + \frac{1}{2} \sum_{i \in \{2, \dots, n\}} z_i^2$ , sont obtenues et la stabilité globale asymptotique de l'origine du système bouclé de coordonnées  $(x_1, z_2, \dots, z_n)$  est garantie. Une brève analyse du changement de variables de  $(x_1, z_2, \dots, z_n)$  à  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  permet de déduire

des propriétés de stabilité pour le système (3.1) sous sa forme initiale.

Comme nous l'avons évoqué au cours du Chapitre 1, depuis son développement au début des années 1990, le *backstepping* a été employé dans de nombreuses applications comme la commande de machines électriques [193], de véhicules [208], de suspensions actives, de turboréacteurs [105], de bateaux [61], ou encore la synchronisation de systèmes chaotiques [201]. Dans la majorité des cas, le contrôleur est implémenté numériquement. Afin d'améliorer les performances obtenues par émulation, l'étude de la commande par *backstepping* échantillonné de systèmes sous forme *strict-feedback* est réalisée par l'approche DTD dans [153]. A partir de l'approximé discret d'Euler, des retours d'état sont synthétisés permettant généralement d'élargir le domaine d'attraction et d'augmenter la vitesse de convergence, comparés au blocage de la loi continue (pour une période d'échantillonnage donnée). Le cas des approximations d'ordre supérieur est traité dans [29] pour la même classe de systèmes.

Dans ce chapitre, nous considérons le cas où les systèmes étudiés dans [153] sont affectés par des termes inconnus représentant des incertitudes de modèle et/ou des perturbations extérieures. Le but est de synthétiser des lois de commande discrètes assurant des propriétés de robustesse pour l'approximé d'Euler. Contrairement au Chapitre 2, nous ne considérons pas d'approximation d'ordre supérieur. Ce choix se justifie par le fait qu'il faudrait, pour cela, que les termes incertains vérifient des propriétés très restrictives donc peu réalistes (cf. §3.6.2). L'impact des perturbations induites par l'utilisation d'actionneurs à dynamiques rapides, sur le blocage d'une commande par *backstepping* a été étudié dans [97]. Les perturbations considérées ici sont beaucoup moins restrictives et le problème, de manière générale, est différent puisqu'il s'agit véritablement de proposer de nouveaux contrôleurs et non d'étudier la robustesse d'une loi continue bloquée. Deux objectifs sont ainsi satisfaits : la stabilisation entrée-état et la compensation des perturbations, lorsque celles-ci vérifient certaines conditions.

La stabilité entrée-état a été introduite en temps continu dans [180] puis en temps discret dans [87]. Dans [196], il est prouvé que cette propriété est préservée par émulation, dans un sens semiglobale et pratique, pour des fréquences d'échantillonnage suffisamment élevées. La notion de semiglobalité signifie que la période d'échantillonnage dépend de la boule dans laquelle se trouvent les conditions initiales et où évoluent les signaux de perturbations. Le terme pratique traduit le fait que la propriété de convergence du continu est maintenue à une erreur résiduelle près, que l'on peut diminuer autant que désiré en ajustant la période d'échantillonnage. Ces travaux reposent sur l'utilisation de fonctions de Razumikhin communément employées pour étudier la stabilité des systèmes à retard. Une approche alternative est proposée dans [109] pour le même problème. Dans [108], des conditions suffisantes pour que la stabilité entrée-état d'un modèle discret approximé soit maintenue pour le discrétisé exact sont énoncées. Ces résultats ont ensuite été étendus aux systèmes à temps variant dans [107] où la stabilisation entrée-état de modèles approximés de systèmes perturbés non holonomes sous *forme de puissance* est proposée puis appliquée à plusieurs classes de robots.

Comme dans [107, 108], les résultats de notre étude se basent sur le cadre méthodologique de [150]. Considérant l'approximé d'Euler des systèmes considérés, un retour d'état entrée-état stabilisant est développé à l'aide des théorèmes de stabilité de [108], pour des perturbations bornées et mesurables au sens de Lebesgue. Lorsque que des informations sur les bornes des termes incertains sont disponibles et vérifient certaines propriétés, une classe de retours d'état est synthétisée afin de compenser leurs effets. Cette dernière peut être vue comme un *redesign* des lois de commande continu de type *hard* de [55]. Il est ainsi montré, sur un exemple, que les contrôleurs proposés améliorent certaines performances comparés au blocage des lois de [55].

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Dans un premier temps, des définitions et théorèmes relatifs à la stabilité entrée-état des systèmes à données échantillonnées sont rappelés dans §3.2. Après avoir énoncé la problématique dans §3.3, la stabilisation entrée-état est ensuite réalisée dans §3.4. La stabilisation semiglobale pratique asymptotique est garantie lorsque les incertitudes sont bornées par des termes appropriés dans §3.5. Une discussion sur de possibles extensions de cette étude est proposée dans §3.6. Enfin, un exemple numérique est présenté afin d'illustrer les résultats obtenus dans §3.7.

## 3.2 Stabilité entrée-état des systèmes à données échantillonnées

Soit le système non linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), d(t)), \quad (3.2)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u \in \mathbb{R}^m$  celui d'entrée et  $d \in \mathbb{R}^m$  un vecteur de perturbations exogènes. La fonction  $f$  est telle que  $f(0,0,0) = 0$ . La fonction  $d$  est mesurable au sens de Lebesgue et la commande  $u$  est échantillonnée à une période fixe donnée  $T \in \mathbb{R}_{>0}$ . Un bloqueur d'ordre zéro est utilisé afin de convertir le signal discret du contrôleur en un signal continu. Le système discrétisé exact de (3.2) est donné par, sur  $[kT, (k+1)T)$  pour  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,

$$x((k+1)T) = F_T^e(x(kT), u(kT), d[kT]), \quad (3.3)$$

où  $d[kT] = \{d(t) : t \in [kT, (k+1)T)\}$ . En général, l'expression analytique de  $F_T^e$  n'est pas connue puisqu'il faudrait, pour cela, résoudre un problème de Cauchy non linéaire, ce qui est d'autant plus difficile voire impossible compte tenu du fait que  $F_T^e$  dépend de perturbations (voir §5.2 dans [107]). Pour ces raisons, nous considérons un modèle discret approximé de (3.2) :

$$x((k+1)T) = F_T^a(x(kT), u(kT), d[kT]). \quad (3.4)$$

Le problème est alors de savoir si les propriétés de stabilité obtenues pour (3.4) sont satisfaites par le discrétisé exact. Après avoir rappelé quelques définitions, un théorème faisant le lien entre la stabilité de ces deux systèmes est présenté.



La définition suivante étend semiglobalement et pratiquement la notion classique de stabilité (globale) entrée-état des systèmes discrets [87] aux systèmes discrets paramétrés.

**Définition 3.2.1 (Stabilité entrée-état semiglobale pratique [108])** *Le système (3.4) est dit **SP-SEE** (semiglobalement pratiquement stable entrée-état) s'il existe  $\beta \in \mathcal{KL}$  et  $\gamma \in \mathcal{K}$  telles que pour tout  $\Delta_x, \Delta_d, \delta \in \mathbb{R}_{>0}$ , il existe  $T^* \in \mathbb{R}_{>0}$  telle que, les solutions de (3.4) satisfont, pour tout  $T \in (0, T^*)$ ,  $|x_0| \leq \Delta_x$  et  $d \in \mathcal{L}_\infty$  avec  $\|d\|_\infty \leq \Delta_d$ , et  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  :*

$$|x(k, x_0, d)| \leq \beta(|x_0|, k) + \gamma(\|d\|_\infty) + \delta. \quad (3.5)$$

Lorsque l'on a :

$$|x(k, x_0, d)| \leq \beta(|x_0|, k) + \delta, \quad (3.6)$$

le système (3.4) est dit **SP-AS** (semiglobalement pratiquement asymptotiquement stable).

La définition ci-dessous permet de caractériser la Définition 3.2.1 à l'aide de fonctions de Lyapunov.

**Définition 3.2.2 (Stabilité entrée-état semiglobale pratique de Lyapunov [108])** *Le système (3.4) est **Lyapunov SP-SEE** s'il existe une famille paramétrée de fonctions  $V_T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  telle qu'il existe  $\alpha_i \in \mathcal{K}_\infty$ ,  $i \in \{1, \dots, 3\}$ ,  $\gamma \in \mathcal{K}$ , et pour tout  $\Delta_x, \Delta_d, \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ , il existe  $T^*, L \in \mathbb{R}_{>0}$  tels que pour tout  $T \in (0, T^*)$ ,  $|x| \leq \Delta_x$  et  $d \in \mathcal{L}_\infty$  avec  $\|d\|_\infty \leq \Delta_d$  les propriétés suivantes sont satisfaites,  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  :*

$$\alpha_1(|x|) \leq V_T(x) \leq \alpha_2(|x|) \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{T} [V_T(F_T^a(x(kT), u(kT), d[kT])) - V_T(x)] \leq -\alpha_3(|x|) + \gamma(\|d\|_\infty) + \delta_1, \quad (3.8)$$

et, pour tout  $(x_1, x_2, z) \in \mathbb{R}^{3n}$  avec  $|(x_1, z)|, |(x_2, z)| \in [\delta_2, \Delta_x]$  et tout  $T \in (0, T^*)$ ,

$$|V_T(x_1, z) - V_T(x_2, z)| \leq L|x_1 - x_2|. \quad (3.9)$$

De plus, si  $d = 0$ , système (3.4) est dit **Lyapunov SP-AS**. La paire  $(u, V_T)$  est appelée une **paire SP-EE(SP-A) stabilisante**.

N'importe quelle approximation discrète de (3.3) ne peut être considérée. Il faut en effet que celle-ci soit suffisamment « fidèle » au véritable modèle discret au sens défini ci-dessous.

**Définition 3.2.3 (Approximation fortement consistante [108])** *La famille de systèmes (3.4) est **fortement consistante** avec (3.3) si, pour tout  $\Delta_x, \Delta_u, \Delta_d \in \mathbb{R}_{>0}$ , il existe  $\rho \in \mathcal{K}_\infty$  et  $T^* \in \mathbb{R}_{>0}$  tels que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $d \in \mathcal{L}_\infty$  où  $|x| \leq \Delta_x$ ,  $|u| \leq \Delta_u$ ,  $\|d\|_\infty \leq \Delta_d$ ,*

$$|F_T^e(x, u, d) - F_T^a(x, u, d)| \leq T\rho(T). \quad (3.10)$$

**Remarque 3.2.1** *Dans [108], la notion d'approximation faiblement consistante est également introduite. Elle relaxe les conditions de la définition précédente mais requiert des hypothèses supplémentaires lors de l'analyse de stabilité. Nous ne l'utiliserons pas par la suite.*

Nous nous intéresserons, dans notre étude, à l'approximation d'Euler de la classe de systèmes étudiée. Dans le cas général où le signal exogène  $d$  est élément de  $\mathcal{L}_\infty^{n+1}$ , l'approximation suivante sera considérée, pour  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ :

$$x((k+1)T) = x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} f(x(kT), u(kT), d(s)) ds. \quad (3.11)$$

Lorsque  $d$  est continûment dérivable (comme dans §3.5), le modèle approximé d'Euler peut prendre la forme suivante, pour  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ :

$$x((k+1)T) = x(kT) + Tf(x(kT), u(kT), d(kT)). \quad (3.12)$$

Il n'est pas nécessaire de connaître l'expression analytique du discrétisé exact afin de prouver qu'une approximation est fortement consistante. Des conditions suffisantes sont par exemple proposées dans la Proposition 1.5 de [112]. Dans notre cas, si l'on nomme les approximations d'Euler de (3.11) et (3.12) respectivement  $F_T^{Euler,1}$  et  $F_T^{Euler,2}$ , on peut voir que  $F_T^e = F_T^{Euler,i} + \mathcal{O}(T^2)$ ,  $i \in \{1,2\}$ , et que, par définition des grand «  $\mathcal{O}$  », (3.10) est satisfaite. Ces approximations sont donc fortement consistantes avec (3.3).

En conséquence, les propriétés de stabilité de (3.3) peuvent être déduites de l'analyse de la stabilité de (3.4) (de manière équivalente de (3.11) ou (3.12)) d'après le théorème suivant qui est une conséquence directe du Théorème 3.2 dans [108].

**Théorème 3.2.1** *Si le système (3.4) est Lyapunov SP-SEE (SP-AS) et si l'entrée est localement uniformément bornée, c'est-à-dire que pour tout  $\Delta_x \in \mathbb{R}_{>0}$  il existe  $T^*, \Delta_u \in \mathbb{R}_{>0}$  tels que, pour tout  $T \in (0, T^*)$  et  $|x| \leq \Delta_x$  on a*

$$|u_T(x)| \leq \Delta_u, \quad (3.13)$$

*alors le système discrétisé exact (3.3) est également SP-SEE (SP-AS).*

Les propriétés de stabilité du système à données échantillonnées original (3.2) peuvent ensuite être déduites de celles du discrétisé exact sous de faibles conditions, cf. [155].

### 3.3 Problématique

L'objectif de ce chapitre est de synthétiser des lois de commande qui garantissent des propriétés de stabilité semiglobale pour les systèmes sous forme *strict-feedback* :

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\xi + d_1 \quad (3.14)$$

$$\dot{\xi} = u + d_2, \quad (3.15)$$

où  $x = (\eta, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}$  avec  $\eta \in \mathbb{R}^n$  et  $\xi \in \mathbb{R}$ , est le vecteur d'état,  $u \in \mathbb{R}$  celui d'entrée qui est échantillonné et bloqué à une période constante  $T \in \mathbb{R}_{>0}$ . Les champs de vecteur  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  et  $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  sont supposés connus et  $f(0) = 0$ . Le vecteur  $d = (d_1, d_2) \in \mathcal{L}_\infty^{n+1}$

est lui inconnu et représente les incertitudes ou perturbations affectant les dynamiques du système.

Deux classes de retours d'état seront développés : l'une assurant la stabilité entrée-état vis-à-vis des perturbations, l'autre leur compensation sous certaines conditions. Il sera montré que les contrôleurs synthétisés sont reconstruits par rapport au simple blocage de la loi de commande continue, c'est-à-dire qu'une partie correspondra au continu et une autre sera purement le fruit de l'analyse en temps discret.

**Remarque 3.3.1** *La classe de systèmes (3.14)-(3.15) peut paraître restrictive par rapport à (3.1), toutefois les méthodes proposées s'y appliquent comme nous le verrons dans §3.6.1.*

### 3.4 Stabilisation entrée-état semiglobale pratique

Dans cette section, des retours d'état sont développés afin de garantir la stabilité entrée-état du système approximé, et par conséquent du discrétisé exact, vis-à-vis des perturbations. L'approximation d'Euler suivante du système à données échantillonnées (3.14)-(3.15) est étudiée :

$$\eta^+ = \eta + T(f(\eta) + g(\eta)\xi) + \tilde{d}_1 \quad (3.16)$$

$$\xi^+ = \xi + Tu + \tilde{d}_2, \quad (3.17)$$

où  $\tilde{d}_i = \int_{kT}^{(k+1)T} d_i(s) ds$ ,  $i \in \{1,2\}$ . A noter que (3.16) et (3.17) sont toutes deux des « équations fonctionnelles aux différences » et non des « équations de fonctions aux différences » de par la dépendance en  $\tilde{d}_1$  et  $\tilde{d}_2$ .

Avant d'énoncer le résultat principal de cette section, les conditions suivantes sont supposées vérifiées. Elles stipulent qu'une commande virtuelle et une fonction de Lyapunov suffisamment régulières sont connues pour le système (3.16) avec  $\xi$  comme entrée, qui forment une paire SP-SEE. Cela signifie que les étapes précédentes du *backstepping* (cf. §3.1) sont d'ores et déjà réalisées et que seule reste la construction de la loi de commande  $u$  à proprement parler.

**Hypothèse 3.4.1** *Il existe  $\hat{T} \in \mathbb{R}_{>0}$  et une paire SP-SEE  $(\bar{\xi}_T, W_T)$  définie pour chaque  $T \in (0, \hat{T})$  pour le sous-système (3.16) avec  $\xi \in \mathbb{R}$  vu comme un signal de commande. Supposons également que :*

- (1)  $\bar{\xi}_T$  et  $W_T$  soient deux fois dérivables pour tout  $T \in (0, \hat{T})$  ;
- (2) il existe  $\tilde{\phi} \in \mathcal{K}_\infty$  telle que  $|\bar{\xi}_T(\eta)| \leq \tilde{\phi}(|\eta|)$  pour tout  $\eta \in \mathbb{R}^n$ ,  $T \in (0, \hat{T})$  ;
- (3) pour tout  $\tilde{\Delta} > 0$  il existe une paire de réels strictement positifs  $(\tilde{T}, \tilde{M}_1)$  telle que pour chaque  $T \in (0, \tilde{T})$  et  $|\eta| \leq \tilde{\Delta}$ ,

$$\max\left\{\left|\frac{\partial W_T}{\partial \eta}\right|, \left|\frac{\partial \bar{\xi}_T}{\partial \eta}\right|, \left|\frac{\partial^2 \bar{\xi}_T}{\partial \eta^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 W_T}{\partial \eta^2}\right|, \left|\frac{\partial}{\partial \eta} \left|\frac{\partial \bar{\xi}_T}{\partial \eta}\right|^2\right|\right\} \leq \tilde{M}_1. \quad (3.18)$$

Le théorème principal de cette section est énoncé.

**Théorème 3.4.1** *Supposons que l'Hypothèse 3.4.1 soit vérifiée, définissons, avec  $c \in \mathbb{R}_{>0}$ ,*

$$\begin{aligned} u_T(x) = & -(c+1-cT)(\xi - \bar{\xi}_T(\eta)) + \frac{\bar{\xi}_T(\eta_0^+) - \bar{\xi}_T(\eta)}{T} - \left( \frac{\partial W}{\partial \eta}(\bar{\eta}_0^+) \right)^\top g(\eta) \\ & -(1-cT)(\xi - \bar{\xi}_T(\eta)) \left| \frac{\partial \bar{\xi}_T}{\partial \eta}(\eta_0^+) \right|^2, \end{aligned} \quad (3.19)$$

où  $\bar{\eta}_0^+ = \eta + T[f(\eta) + g(\eta)\bar{\xi}_T]$ ,  $\eta_0^+ = \eta + T[f(\eta) + g(\eta)\xi]$ , alors le système (3.14)-(3.15) contrôlé par (3.19) est SP-SEE.

**Preuve.** Soient  $\Delta, \Delta_d, \delta \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $x = (\eta, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $d = (d_1, d_2) \in \mathcal{L}_\infty^{n+1}$  tels que  $|x| \leq \Delta$  et  $\|d\|_\infty \leq \Delta_d$ . D'après l'Hypothèse 3.4.1, il existe  $\hat{T} \in \mathbb{R}_{>0}$  tel que (3.8) est satisfait pour  $T \in (0, \hat{T})$  avec  $\delta_1 = \frac{\delta}{2}$ ,  $\gamma = \gamma_1 \in \mathcal{K}$ , considérant le système (3.16) avec  $\xi = \bar{\xi}_T$  comme entrée. Soit  $\Delta_1 = \sup_{|x| \leq \Delta, \|d\|_\infty \leq \Delta_d, T \in (0, \hat{T})} \max\{|\eta^+|, |\eta_0^+|, |\bar{\eta}_0^+|, |\bar{\eta}^+|\}$  (où  $\bar{\eta}^+ = \eta + T[f(\eta) + g(\eta)\bar{\xi}_T] + \tilde{d}_1$ ), qui est bien défini puisque les fonctions  $f, g, \bar{\xi}_T$  sont continues et  $d_1 \in \mathcal{L}_\infty^n$ . Soit  $\bar{\Delta} = \max\{\Delta, \Delta_1\}$  qui génère  $(\tilde{T}, \tilde{M}_1)$  tel que la condition (3) de l'Hypothèse 3.4.1 est vérifiée. Soit  $\tilde{M} = \sup_{|x| \leq \Delta, \|d\|_\infty \leq \Delta_d, T \in (0, \hat{T})} \max\{|\xi - \bar{\xi}_T|, |f(\eta) + g(\eta)\xi|, \tilde{M}_1, |g(\eta)|, \Delta_d\}$ , qui est également bien défini grâce à la continuité des fonctions considérées sur ce compact. La période d'échantillonnage  $\bar{T}$  est définie par  $\bar{T} = \min\{\hat{T}, \tilde{T}, \frac{\delta}{2}\hat{M}^{-1}, \frac{1}{c}\}$  où  $\hat{M} = \tilde{M}^2 \left( (\tilde{M}^2 + 2\tilde{M} + 2)^2 + c\tilde{M} + 2\tilde{M}^2 \right)$ . Prenons  $T \in (0, \bar{T})$  et définissons :

$$V_T(\eta, \xi) = W_T(\eta) + \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))^2. \quad (3.20)$$

La condition (3.7) est bien vérifiée, cf. [153]. Il est maintenant montré que l'inégalité (3.8) est satisfaite. Ainsi,

$$\Delta V_T = W_T(\eta^+) - W_T(\eta) + \frac{1}{2}(\xi + Tu_T + \tilde{d}_2 - \bar{\xi}_T(\eta^+))^2 - \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))^2. \quad (3.21)$$

On peut prouver, à l'aide du théorème de la valeur moyenne, qu'avec  $\eta^\diamond = \bar{\eta}^+ + T\theta_1 g(\eta)(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))$  et  $\theta_1 \in (0, 1)$ ,

$$\begin{aligned} W_T(\eta^+) - W_T(\eta) &= W_T(\bar{\eta}^+) - W_T(\eta) + W_T(\eta^+) - W_T(\bar{\eta}^+) \\ &= W_T(\bar{\eta}^+) - W_T(\eta) + \left( \frac{\partial W}{\partial \eta}(\eta^\diamond) \right)^\top Tg(\eta)(\xi - \bar{\xi}_T(\eta)). \end{aligned} \quad (3.22)$$

D'après (3.21) et en nommant  $\Delta W_T = W_T(\bar{\eta}^+) - W_T(\eta)$ ,

$$\begin{aligned}
\Delta V_T &= \Delta W_T + \left( \frac{\partial W}{\partial \eta}(\eta^\diamond) \right)^\top Tg(\eta)(\xi - \bar{\xi}_T(\eta)) - \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}(\xi + Tu_T + \tilde{d}_2 - \bar{\xi}_T(\eta^+))^2 \\
&= \Delta W_T + \left( \frac{\partial W}{\partial \eta}(\eta^\diamond) \right)^\top Tg(\eta)(\xi - \bar{\xi}_T(\eta)) - \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \left( (1 - cT - T(1 - cT))(\xi - \bar{\xi}_T(\eta)) - T \left( \frac{\partial W}{\partial \eta}(\bar{\eta}_0^+) \right)^\top g(\eta) \right. \\
&\quad \left. - T(1 - cT)(\xi - \bar{\xi}_T(\eta)) \left| \frac{\partial \bar{\xi}_T}{\partial \eta}(\eta_0^+) \right|^2 + \tilde{d}_2 + \bar{\xi}_T(\eta_0^+) - \bar{\xi}_T(\eta^+) \right)^2 \\
&= \Delta W_T + \left( \frac{\partial W}{\partial \eta}(\eta^\diamond) \right)^\top Tg(\eta)(\xi - \bar{\xi}_T(\eta)) - cT(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))^2 \\
&\quad + c^2 \frac{T^2}{2}(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))^2 + (1 - cT)(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))\Lambda + \frac{1}{2}\Lambda^2,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\Lambda &= -T(1 - cT)(\xi - \bar{\xi}_T(\eta)) - T \left( \frac{\partial W}{\partial \eta}(\bar{\eta}_0^+) \right)^\top g(\eta) \\
&\quad - T(1 - cT)(\xi - \bar{\xi}_T(\eta)) \left| \frac{\partial \bar{\xi}_T}{\partial \eta}(\eta_0^+) \right|^2 + \tilde{d}_2 + \bar{\xi}_T(\eta_0^+) - \bar{\xi}_T(\eta^+). \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Grâce au théorème de la valeur moyenne, on obtient :

$$\begin{aligned}
&-T(1 - cT)(\xi - \bar{\xi}_T(\eta)) \left( \frac{\partial W}{\partial \eta}(\bar{\eta}_0^+) \right)^\top g(\eta) + \left( \frac{\partial W}{\partial \eta}(\eta^\diamond) \right)^\top Tg(\eta)(\xi - \bar{\xi}_T(\eta)) \\
&\quad \leq T(\xi - \bar{\xi}_T(\eta)) \left( \frac{\partial W}{\partial \eta}(\eta^\diamond) - \frac{\partial W}{\partial \eta}(\bar{\eta}_0^+) \right)^\top g(\eta) + cT^2 \tilde{M}^3 \tag{3.24} \\
&\quad \leq (c\tilde{M} + \tilde{M}^2)T^2 \tilde{M}^2.
\end{aligned}$$

En majorant  $\Lambda^2$  par  $T^2 \tilde{M}^2 (2 + 2\tilde{M} + \tilde{M}^2)^2$  et toujours avec le théorème de la valeur moyenne, on a :

$$\begin{aligned}
\Delta V_T &\leq \Delta W_T - cT(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))^2 \\
&\quad + (1 - cT)(\xi - \bar{\xi}_T(\eta)) \left( \bar{\xi}_T(\eta_0^+) - \bar{\xi}_T(\eta^+) - T(1 - cT)(\xi - \bar{\xi}_T(\eta)) \right. \\
&\quad \left. - T(1 - cT)(\xi - \bar{\xi}_T(\eta)) \left| \frac{\partial \bar{\xi}_T}{\partial \eta}(\eta_0^+) \right|^2 + \tilde{d}_2 \right) \\
&\quad + T^2 \tilde{M}^2 \left( (\tilde{M}^2 + 2\tilde{M} + 2)^2 + c\tilde{M} + \tilde{M}^2 \right). \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Le terme  $\bar{\xi}_T(\eta_0^+) - \bar{\xi}_T(\eta^+)$  peut être écrit, à l'aide du théorème de la valeur moyenne, comme

$\left(\frac{\partial \bar{\xi}_T}{\partial \eta}(\eta^*)\right)^T \tilde{d}_1$ , où  $\eta^* = \eta + T(f(\eta) + g(\eta)\xi) + \theta_2 \tilde{d}_1$ , et  $\theta_2 \in (0,1)$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} \Delta V_T &\leq \Delta W_T - cT(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))^2 \\ &\quad + (1 - cT)(\xi - \bar{\xi}_T(\eta)) \left( \left( \frac{\partial \bar{\xi}_T}{\partial \eta}(\eta^*) \right)^T \tilde{d}_1 - T(1 - cT)(\xi - \bar{\xi}_T(\eta)) \right. \\ &\quad \left. - T(1 - cT)(\xi - \bar{\xi}_T(\eta)) \left| \frac{\partial \bar{\xi}_T}{\partial \eta}(\eta_0^+) \right|^2 + \tilde{d}_2 \right) \\ &\quad + T^2 \tilde{M}^2 \left( (\tilde{M}^2 + 2\tilde{M} + 2)^2 + c\tilde{M} + \tilde{M}^2 \right), \end{aligned} \quad (3.26)$$

en utilisant la Propriété A.1.1 et le fait que  $|\tilde{d}_i| \leq T \|d_i\|_\infty$  pour  $i \in \{1,2\}$ ,

$$\begin{aligned} \Delta V_T &\leq \Delta W_T - cT(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))^2 + T \|d_2\|_\infty^2 + T(1 - cT)^2(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))^2 \left| \frac{\partial \bar{\xi}_T}{\partial \eta}(\eta^*) \right|^2 \\ &\quad + T \|d_1\|_\infty^2 - T(1 - cT)^2(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))^2 \left| \frac{\partial \bar{\xi}_T}{\partial \eta}(\eta_0^+) \right|^2 \\ &\quad + T^2 \tilde{M}^2 \left( (\tilde{M}^2 + 2\tilde{M} + 2)^2 + c\tilde{M} + \tilde{M}^2 \right), \end{aligned} \quad (3.27)$$

d'après le théorème de la valeur moyenne, puisque la fonction  $\zeta : z \mapsto \left| \frac{\partial \bar{\xi}_T}{\partial \eta}(z) \right|^2$  est continûment dérivable,

$$\begin{aligned} \Delta V_T &\leq \Delta W_T - cT(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))^2 + T \|d_2\|_\infty^2 \\ &\quad + T(1 - cT)^2(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))^2 \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}(\eta^{**}) \theta_2 \tilde{d}_1 + T \|d_1\|_\infty^2 \\ &\quad + T^2 \tilde{M}^2 \left( (\tilde{M}^2 + 2\tilde{M} + 2)^2 + c\tilde{M} + \tilde{M}^2 \right), \end{aligned} \quad (3.28)$$

où  $\eta^{**} = \eta + T(f(\eta) + g(\eta)\xi) + T\theta_2\theta_3 d_1$ ,  $\theta_3 \in (0,1)$ . D'après la définition de  $\hat{M}$  on a :

$$\Delta V_T \leq \Delta W_T - cT(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))^2 + T \|d_1\|_\infty^2 + T \|d_2\|_\infty^2 + T^2 \hat{M}. \quad (3.29)$$

L'Hypothèse 3.4.1 nous indique que, pour tout  $T \in (0, \bar{T})$ , il existe  $\tilde{\alpha}_3 \in \mathcal{K}_\infty$  telle que, avec  $\tilde{\gamma}_1 : s \mapsto s^2 + \gamma_1(s)$  et  $\tilde{\gamma}_2 : s \mapsto s^2$  ( $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ),

$$\Delta V_T \leq -T\tilde{\alpha}_3(|\eta|) - cT(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))^2 + T\frac{\delta}{2} + T\frac{\delta}{2} + T\tilde{\gamma}_1(\|d_1\|_\infty) + T\tilde{\gamma}_2(\|d_2\|_\infty). \quad (3.30)$$

D'après la Proposition 1 dans [153], il existe  $\bar{\alpha}_3 \in \mathcal{K}_\infty$  et  $\gamma \in \mathcal{K}$  telles que :

$$\Delta V_T \leq -T\bar{\alpha}_3(|x|) + T\gamma(\|d\|_\infty) + T\delta. \quad (3.31)$$

En invoquant le théorème de la valeur moyenne, on peut montrer qu'il existe  $L \in \mathbb{R}_{>0}$ , tel que, pour tout  $x, z \in \mathbb{R}^{n+1}$  où  $\max\{|x|, |z|\} \leq \Delta$ ,  $|V_T(x) - V_T(z)| \leq L|x - z|$ .

Finalement,

$$\begin{aligned} |u_T| &\leq (c + 1 - cT) |\xi - \bar{\xi}_T(\eta)| + \left| \frac{\bar{\xi}_T(\eta_0^+) - \bar{\xi}_T(\eta)}{T} \right| + \left| \left( \frac{\partial W}{\partial \eta}(\eta_0^+) \right)^T g(\eta) \right| \\ &\quad + (1 - cT) |\xi - \bar{\xi}_T(\eta)| \left| \frac{\partial \bar{\xi}_T}{\partial \eta}(\eta_0^+) \right|^2 \\ &\leq (c + 1) \tilde{M} + \tilde{M}^2 + \tilde{M}^3 + \left| \frac{\bar{\xi}_T(\eta_0^+) - \bar{\xi}_T(\eta)}{T} \right|, \end{aligned} \quad (3.32)$$

en utilisant le théorème de la valeur moyenne avec  $\eta^\dagger = \eta + T\theta_4(f(\eta) + g(\eta)\xi)$  et  $\theta_4 \in (0,1)$ , on a :

$$\begin{aligned} |u_T(x)| &\leq (c+1)\tilde{M} + \tilde{M}^2 + \tilde{M}^3 + \left| \frac{\partial \bar{\xi}_T}{\partial \eta}(\eta^\dagger) \right| |f(\eta) + g(\eta)\xi| \\ &\leq (c+1)\tilde{M} + 2\tilde{M}^2 + \tilde{M}^3 = \bar{M}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

la loi de commande  $u_T$  est donc localement uniformément bornée. Par conséquent, d'après la Définition 3.2.2, le système (3.16)-(3.17), (3.19) est Lyapunov SP-SEE et donc, d'après le Théorème 3.2.1, le discrétisé exact du système (3.14)-(3.15) contrôlé par (3.19) est SP-SEE, puisque (3.16-3.17) est une bien approximation fortement consistante.  $\square$

Les contrôleurs (3.19) sont de la forme  $u_T = u_{cont} + Tu_{dt}$ , où  $u_{cont}$  correspond au blocage de la loi de commande continue [105] et  $u_{dt}$  est une composante supplémentaire qui permet généralement d'élargir le bassin d'attraction et d'augmenter la vitesse de convergence par rapport à la simple émulation.

### 3.5 Stabilisation semiglobale pratique asymptotique

Dans cette section, les termes incertains sont supposés suffisamment réguliers et majorés par des fonctions connues.

**Hypothèse 3.5.1** (i)  $d_1 \in C^1([t_0, \infty) \times \mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^n)$  et  $d_2 \in C^1([t_0, \infty) \times \mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$ .

(ii) Il existe des fonctions connues  $\rho_1 \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_{\geq 0})$  avec  $\rho_1(0) = 0$ ,  $\rho_2 \in C^1(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}_{\geq 0})$  telles que, pour tout  $(t, x) \in [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^{n+1}$  :

$$\begin{aligned} |d_1(t, x)| &\leq \rho_1(\eta) \\ |d_2(t, x)| &\leq \rho_2(x). \end{aligned}$$

**Remarque 3.5.1** Ce type d'hypothèse est commune lorsque des systèmes strict-feedback perturbés sont étudiés [55].

Il ne s'agira plus ici de garantir la robustesse vis-à-vis des perturbations, mais de les compenser. Puisque la condition (i) de l'Hypothèse 3.5.1 sera supposée vérifiée, le modèle approximé discret suivant est considéré :

$$\eta^+ = \eta + T(f(\eta) + g(\eta)\xi + d_1) \quad (3.34)$$

$$\xi^+ = \xi + T(u + d_2). \quad (3.35)$$

Les fonctions suivantes sont utilisées par la suite.

**Définition 3.5.1** Pour tout  $\varepsilon, T \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ , la fonction  $sat_{T\varepsilon, n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est définie par, pour  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$  :  $sat_{T\varepsilon, n}(z) = (\tilde{sat}_{T\varepsilon, 1}(z_1), \dots, \tilde{sat}_{T\varepsilon, 1}(z_n))$  avec

$$\tilde{sat}_{T\varepsilon, 1}(z_i) = \begin{cases} sign(z_i) & \text{si } |z_i| \geq \frac{T\varepsilon}{n} \\ p_{T\varepsilon}(z_i) & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $p_{T\varepsilon} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ,  $p_{T\varepsilon}(0) = 0$  et  $|p| \leq 1$  sur  $[-\frac{T\varepsilon}{n}, \frac{T\varepsilon}{n}]$ ,  $yp_{T\varepsilon}(y) \geq 0$  pour  $y \in [-\frac{T\varepsilon}{n}, \frac{T\varepsilon}{n}]$ , est tel que la fonction  $\text{sat}_{T\varepsilon,n}$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Remarque 3.5.2** Il existe une infinité de fonctions  $p_{T\varepsilon}$  satisfaisant la Définition 3.5.1 (voir par exemple [27, 55]).

L'hypothèse suivante est le pendant de l'Hypothèse 3.4.1.

**Hypothèse 3.5.2** Il existe  $\hat{T} \in \mathbb{R}_{>0}$  et une paire SP-AS  $(\bar{\xi}_T, W_T)$  définie pour tout  $T \in (0, \hat{T})$  pour le sous-système (3.34), avec  $\xi \in \mathbb{R}$  vu comme une commande. Supposons également que :

(1)  $\bar{\xi}_T$  et  $W_T$  soient deux fois dérivables pour tout  $T \in (0, \hat{T})$  ;

(2) il existe  $\tilde{\phi} \in \mathcal{K}_\infty$  telle que, pour tout  $\eta \in \mathbb{R}^n$ ,  $T \in (0, \hat{T})$ ,

$$|\bar{\xi}_T(\eta)| \leq \tilde{\phi}(|\eta|); \quad (3.36)$$

(3) pour tout  $\tilde{\Delta} > 0$  il existe une paire de réels strictement positifs  $(\tilde{T}, \tilde{M}_1)$  telle que pour chaque  $T \in (0, \tilde{T})$  et  $|\eta| \leq \tilde{\Delta}$ ,

$$\max\{|\frac{\partial W_T}{\partial \eta}|, |\frac{\partial \bar{\xi}_T}{\partial \eta}|, |\frac{\partial^2 \bar{\xi}_T}{\partial \eta^2}|, |\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}|\} \leq \tilde{M}_1. \quad (3.37)$$

Le théorème principal de cette section peut être énoncé.

**Théorème 3.5.1** Supposons que les Hypothèses 3.5.1 et 3.5.2 soient vérifiées, définissons, pour  $c \in \mathbb{R}_{>0}$ ,

$$\begin{aligned} u_T(x) = & -c(\xi - \bar{\xi}_T(\eta)) + \hat{d}_2 + \frac{\bar{\xi}_T(\eta_0^+) - \bar{\xi}_T(\eta)}{T} - \left(\frac{\partial W}{\partial \eta}(\bar{\eta}_0^+)\right)^T g(\eta) \\ & - \left(\frac{\partial \bar{\xi}_T}{\partial \eta}(\eta_0^+)\right)^T \hat{d}_1, \end{aligned} \quad (3.38)$$

avec  $\bar{\eta}_0^+ = \eta + T[f(\eta) + g(\eta)\bar{\xi}_T]$ ,  $\eta_0^+ = \eta + T[f(\eta) + g(\eta)\xi]$ , et  $\hat{d}_2 = -\rho_2(x)\text{sat}_{T\varepsilon,1}((\xi - \bar{\xi}_T(\eta)))$  et  $\hat{d}_1 = \rho_1(\eta)\text{sat}_{T\varepsilon,n}\{(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))\left(\frac{\partial \bar{\xi}_T}{\partial \eta}(\eta_0^+)\right)^T\}$ , avec  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ , alors le système (3.34)-(3.35), (3.38) est SP-AS, et tel est également le discrétisé exact de (3.14)-(3.15) contrôlé par (3.38).

**Preuve.** La preuve est similaire à celle du Théorème 3.4.1. Par souci de clarté, les fonctions  $\text{sat}$  sont notées sans indice. Soient  $\Delta, \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $x = (\eta, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}$  avec  $|x| \leq \Delta$ . D'après l'Hypothèse 3.5.2, il existe  $\hat{T} \in \mathbb{R}_{>0}$  telle que la condition (3.8) est vérifiée pour  $T \in (0, \hat{T})$  avec  $\frac{\delta}{2}$ , considérant le système (3.34), quand  $\xi = \bar{\xi}_T$  comme entrée. Soit  $\Delta_1 = \sup_{|x| \leq \Delta, T \in (0, \hat{T})} \max\{|\eta^+|, |\eta_0^+|, |\bar{\eta}_0^+|, |\bar{\eta}^+|\}$  (avec  $\bar{\eta}^+ = \eta + T[f(\eta) + g(\eta)\bar{\xi}_T] + Td_1$ ) qui est bien défini puisque les fonctions  $f, g, \bar{\xi}_T, d_1$  sont continues. Prenons  $\bar{\Delta} = \max\{\Delta, \Delta_1\}$  qui génère  $\tilde{T}, \tilde{M}_1$  tel que la condition (3) de l'Hypothèse 3.5.2 est garantie. Soit  $\tilde{M} = \sup_{|x| \leq \Delta, T \in (0, \hat{T})} \max\{|\xi - \bar{\xi}_T|, |f(\eta) + g(\eta)\xi|, \tilde{M}_1, |g(\eta)|, \rho_1, \rho_2\}$ , qui est également bien défini puisque les fonctions considérées sont continues sur ce compact. La période d'échantillonnage  $\tilde{T}$  est définie



par  $\bar{T} = \min\{\hat{T}, \tilde{T}, \frac{\delta}{2}\hat{M}^{-1}, \frac{1}{c}\}$  où  $\hat{M} = 11\tilde{M}^4 + (12 + c)\tilde{M}^3 + 4\tilde{M}^2 + 4\varepsilon\tilde{M}$ . Soit  $T \in (0, \bar{T})$  et prenons la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$V_T(x) = W_T(\eta) + \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))^2. \quad (3.39)$$

La condition (3.7) est satisfaite ici, voir [153]. Dans un premier temps, nous nous attachons à prouver l'inégalité (3.8) :

$$\begin{aligned} \Delta V_T &= W_T(\eta^+) - W_T(\eta) - \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(\xi + Tu_T + Td_2 - \bar{\xi}_T(\eta^+))^2. \end{aligned} \quad (3.40)$$

On peut voir, à l'aide du théorème de la valeur moyenne, où  $\eta^\diamond = \bar{\eta}^+ + T\theta_1 g(\eta)(\xi - \bar{\xi}(\eta))$ , et  $\theta_1 \in (0, 1)$ , que

$$\begin{aligned} W_T(\eta^+) - W_T(\eta) &= W_T(\eta^+) - W_T(\bar{\eta}^+) + W_T(\bar{\eta}^+) - W_T(\eta) \\ &= (W_T(\bar{\eta}^+) - W_T(\eta)) + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta}(\eta^\diamond)\right)^\top Tg(\eta)(\xi - \bar{\xi}_T(\eta)). \end{aligned} \quad (3.41)$$

D'après (3.40), notons  $\Delta W_T = W_T(\bar{\eta}^+) - W_T(\eta)$ ,

$$\begin{aligned} \Delta V_T &= \Delta W_T + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta}(\eta^\diamond)\right)^\top Tg(\eta)(\xi - \bar{\xi}_T(\eta)) - \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(\xi + Tu_t + Td_2 - \bar{\xi}_T(\eta^+))^2 \\ &= \Delta W_T + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta}(\eta^\diamond)\right)^\top Tg(\eta)(\xi - \bar{\xi}_T(\eta)) - \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( (\xi - \bar{\xi}_T(\eta))(1 - cT) - T\frac{\partial \bar{\xi}_T}{\partial \eta}(\eta_0^+)^\top \hat{d}_1 - T\left(\frac{\partial W}{\partial \eta}(\bar{\eta}_0^+)\right)^\top g(\eta) \right. \\ &\quad \left. + T(\hat{d}_2 + d_2) + \bar{\xi}_T(\eta_0^+) - \bar{\xi}_T(\eta^+) \right) \\ &= \Delta W_T + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta}(\eta^\diamond)\right)^\top Tg(\eta)(\xi - \bar{\xi}_T(\eta)) - cT(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))^2 \\ &\quad + c^2\frac{T^2}{2}(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))^2 + (1 - cT)(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))\Lambda + \frac{1}{2}\Lambda^2, \end{aligned} \quad (3.42)$$

avec

$$\Lambda = \bar{\xi}_T(\eta_0^+) - \bar{\xi}_T(\eta^+) + T \left( -\left(\frac{\partial \bar{\xi}_T}{\partial \eta}(\eta_0^+)\right)^\top \hat{d}_1 - \left(\frac{\partial W}{\partial \eta}(\bar{\eta}_0^+)\right)^\top g(\eta) + \hat{d}_2 + d_2 \right). \quad (3.43)$$

Grâce au théorème de la valeur moyenne,

$$\begin{aligned} &-T(1 - cT)(\xi - \bar{\xi}_T(\eta)) \left(\frac{\partial W}{\partial \eta}(\bar{\eta}_0^+)\right)^\top g(\eta) + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta}(\eta^\diamond)\right)^\top Tg(\eta)(\xi - \bar{\xi}_T(\eta)) \\ &\leq T(\xi - \bar{\xi}_T(\eta)) \left(\frac{\partial W}{\partial \eta}(\eta^\diamond) - \frac{\partial W}{\partial \eta}(\bar{\eta}_0^+)\right)^\top g(\eta) + cT^2\tilde{M}^3 \\ &\leq (c\tilde{M} + \tilde{M}^2)T^2\tilde{M}^2. \end{aligned} \quad (3.44)$$

En utilisant la Définition 3.5.1, on peut voir que

$$(1 - cT)(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))T(\hat{d}_2 + d_2) \leq 2T^2\tilde{M}\varepsilon, \quad (3.45)$$

et, en majorant  $\Lambda^2$  par  $T^2\tilde{M}^2(3\tilde{M} + 2)^2$  (à l'aide du théorème de la valeur moyenne),

$$\begin{aligned} \Delta V_T &\leq \Delta W_T - cT(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))^2 + (1 - cT)(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))\left(\bar{\xi}_T(\eta_0^+) - \bar{\xi}_T(\eta^+)\right) \\ &\quad - T\left(\frac{\partial \bar{\xi}_T}{\partial \eta}(\eta_0^+)\right)^T \hat{d}_1 + T^2\tilde{M}\left(\tilde{M}(3\tilde{M} + 2)^2 + (c\tilde{M} + \tilde{M}^2)\tilde{M} + 2\varepsilon\right). \end{aligned} \quad (3.46)$$

L'expression  $(1 - cT)(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))(\bar{\xi}_T(\eta_0^+) - \bar{\xi}_T(\eta^+))$  peut être écrit, toujours à l'aide du théorème de la valeur moyenne, sous la forme :

$$(1 - cT)(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))(\bar{\xi}_T(\eta_0^+) - \bar{\xi}_T(\eta^+)) = -(1 - cT)(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))T\left(\frac{\partial \bar{\xi}_T}{\partial \eta}(\eta^*)\right)^T d_1, \quad (3.47)$$

avec  $\eta^* = \eta + T(f(\eta) + g(\eta)\xi) + T\theta_2 d_1$ , et  $\theta_2 \in (0,1)$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} \Delta V_T &\leq \Delta W_T - cT(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))^2 + (1 - cT)T(\xi - \bar{\xi}_T(\eta)) \\ &\quad \times \left(-\left(\frac{\partial \bar{\xi}_T}{\partial \eta}(\eta^*)\right)^T d_1 - \left(\frac{\partial \bar{\xi}_T}{\partial \eta}(\eta_0^+)\right)^T \hat{d}_1\right) \\ &\quad + T^2\left(\tilde{M}(3\tilde{M} + 2)^2 + (c\tilde{M} + \tilde{M}^2)\tilde{M} + 2\varepsilon\right) \\ &\leq \Delta W_T - cT(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))^2 + (1 - cT)T(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))\left(-\left(\frac{\partial \bar{\xi}_T}{\partial \eta}(\eta^*)\right)^T d_1 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial \bar{\xi}_T}{\partial \eta}(\eta_0^+)\right)^T d_1 - \left(\frac{\partial \bar{\xi}_T}{\partial \eta}(\eta_0^+)\right)^T \hat{d}_1\right) \\ &\quad + T^2\tilde{M}\left(\tilde{M}(3\tilde{M} + 2)^2 + (c\tilde{M} + \tilde{M}^2)\tilde{M} + 2\varepsilon\right) \\ &\leq \Delta W_T - cT(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))^2 + T^2(1 - cT)|\xi - \bar{\xi}_T(\eta)|\left|\frac{\partial^2 \bar{\xi}_T}{\partial \eta^2}(\eta^{**})\right|\theta_2\rho_1^2(\eta) \\ &\quad + (1 - cT)T(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))\left[\left(\frac{\partial \bar{\xi}_T}{\partial \eta}(\eta_0^+)\right)^T (d_1 - \hat{d}_1)\right] \\ &\quad + T^2\tilde{M}\left(\tilde{M}(3\tilde{M} + 2)^2 + (c\tilde{M} + \tilde{M}^2)\tilde{M} + 2\varepsilon\right), \end{aligned} \quad (3.48)$$

avec  $\eta^{**} = \eta + T(f(\eta) + g(\eta)\xi) + T\theta_2\theta_3 d_1$ ,  $\theta_3 \in (0,1)$  sachant que, par définition de  $\hat{d}_1$  :

$$\begin{aligned} (1 - cT)T(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))\left(\frac{\partial \bar{\xi}_T}{\partial \eta}(\eta_0^+)\right)^T (-d_1 - \hat{d}_1) &\leq (1 - cT)T|\xi - \bar{\xi}_T(\eta)|\left|\frac{\partial \bar{\xi}_T}{\partial \eta}(\eta_0^+)\right| \\ \times \rho_1(\eta) - (1 - cT)T(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))\left(\frac{\partial \bar{\xi}_T}{\partial \eta}(\eta_0^+)\right)^T \rho_1(\eta) \text{sat}_{T\varepsilon,n}\left\{(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))\left(\frac{\partial \bar{\xi}_T}{\partial \eta}(\eta_0^+)\right)^T\right\} \\ &\leq 2T^2\tilde{M}\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.49)$$

En utilisant l'Hypothèse 3.5.2 et la définition de  $\hat{M}$ ,

$$\Delta V_T \leq -T\alpha_3(|\eta|) - cT(\xi - \bar{\xi}_T(\eta))^2 + T\delta.$$

D'après la Proposition 1 de [153], il existe  $\bar{\alpha}_3 \in \mathcal{K}_\infty$ , telle que :

$$\Delta V_T \leq -T\bar{\alpha}_3(|x|) + T\delta. \quad (3.50)$$

En utilisant le théorème de la valeur moyenne, on peut montrer qu'il existe  $\bar{L} \in \mathbb{R}_{>0}$ , tel que pour tout  $x, z \in \mathbb{R}^{n+1}$  avec  $\max\{|x|, |z|\} \leq \Delta$ ,  $|V_T(x) - V_T(z)| \leq \bar{L}|x - z|$ . Finalement,

$$\begin{aligned} |u_T| &\leq c|\xi - \bar{\xi}_T(\eta)| + |\hat{d}_2| + \left| \frac{\bar{\xi}_T(\eta_0^+) - \bar{\xi}_T(\eta)}{T} \right| \\ &\quad + \left( \frac{\partial W}{\partial \eta}(\bar{\eta}_0^+) \right)^T \|g(\eta)\| + \left( \frac{\partial \bar{\xi}_T}{\partial \eta}(\eta_0^+) \right)^T \|\hat{d}_1\| \\ &\leq 3\tilde{M}^2 + \tilde{M}(c+1) = \bar{M}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

La commande  $u_T$  est donc localement uniformément bornée. Ainsi, la paire  $(u_T, V_T)$  est SP-A stabilisante pour le système (3.34)-(3.35) d'après la Définition 3.2.2, par conséquent le système discrétisé exact de (3.14)-(3.15) contrôlé par (3.38) est SP-AS d'après le Théorème 3.2.1, en notant que (3.34)-(3.35) est une approximation fortement consistante.  $\square$

A l'instar de §3.4, les contrôleurs (3.38) sont reconstruits comparés à l'émulation. Néanmoins, la période d'échantillonnage n'apparaît pas uniquement linéairement dans l'expression de la commande puisqu'elle intervient également non linéairement dans la définition des fonctions sat.

**Remarque 3.5.3** *Le contrôleur virtuel  $\bar{\xi}_T$  ne peut être composé de fonctions sat paramétrés en  $T$  (comme dans la Définition 3.5.1) car leurs dérivées ne sont pas uniformément bornées par rapport à  $T$ . Prenons l'exemple suivant où la fonction  $p_{T\varepsilon}$  est, pour  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  :*

$$p_{T\varepsilon} : z_i \mapsto -\frac{1}{2} \left( \frac{z_i}{T\varepsilon} \right)^3 + \frac{3}{2} \frac{z_i}{T\varepsilon}. \quad (3.52)$$

*On peut vérifier que la fonction sat obtenue est bien localement uniformément bornée, puisque pour tout  $T \in \mathbb{R}_{>0}$  et  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $|\text{sat}_{T\varepsilon, n}(z)| \leq 1$  (bien que  $p_{T\varepsilon}(z) \rightarrow \infty$  quand  $T$  tend vers 0, de par la définition la fonction sat, celle-ci n'explose pas). On ne peut en dire autant de sa dérivée, puisqu'en notant que :*

$$\frac{\partial p_{T\varepsilon}(z_i)}{\partial_i} = -\frac{3}{2} \frac{z_i^2}{(T\varepsilon)^3} + \frac{3}{2} \frac{1}{T\varepsilon}, \quad (3.53)$$

*on voit que  $\max_{z \in \mathbb{R}^n, T \in \mathbb{R}_{>0}} \{|\text{sat}_{T\varepsilon, n}(z)|\} = \frac{3}{2} \frac{1}{T\varepsilon}$  qui converge vers l'infini lorsque  $T$  tend vers zéro.*

**Remarque 3.5.4** *Si la perturbation  $d_1$  ne s'annule pas en zéro, en supposant des conditions légèrement différentes de celles de l'Hypothèse 3.5.2, un résultat de type  $\delta$ -régulation pourrait être obtenue, voir [55].*

## 3.6 Discussions

### 3.6.1 Application aux systèmes de la forme (3.1)

Bien que présentées pour la classe de systèmes (3.14)-(3.15), les méthodes de ce chapitre peuvent s'appliquer aux systèmes de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) + d_1 \\ \dot{x}_2 &= x_3 + f_2(x_1, x_2) + d_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= u + f_n(x) + d_n. \end{cases} \quad (3.54)$$

En effet, pour le cas de la stabilisation entrée-état, il suffit de s'assurer qu'il existe une paire commande virtuelle/fonction de Lyapunov SP-SEE suffisamment dérivable pour l'approximation d'Euler du premier sous-système. Ainsi, l'Hypothèse 3.4.1 est vérifiée et une paire commande/fonction de Lyapunov SP-SEE est obtenue, d'après le Théorème 3.4.1, pour l'approximé d'Euler du système ayant pour état  $(x_1, x_2)$ . Cette dernière permettra ensuite de valider l'Hypothèse 3.4.1 dans le but d'en déterminer une pour l'approximé d'Euler du système ayant pour état  $(x_1, x_2, x_3)$ . En procédant par récurrence, un retour d'état est obtenu pour l'approximé d'Euler de (3.54).

Pour la compensation des perturbations, des conditions supplémentaires sont requises comme le fait que les  $d_i$ 's,  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , doivent s'annuler à l'origine, être suffisamment dérivables ou qu'aucune fonction sat ne soit utilisée avant la dernière étape afin d'obtenir un contrôleur localement uniformément borné.

### 3.6.2 Cas des approximations d'ordre supérieur

L'extension aux approximations d'ordre supérieur est loin d'être triviale. Que l'on aborde la question à l'aide du développement en série de Fliess tronquée de l'équation aux différences de la fonction de Lyapunov du premier sous-système, comme dans [29], ou par des approximations du type de celles de [65], la perte de structure originelle du système continu est à l'origine de difficultés majeures.

Pour le cas de la compensation des incertitudes, on pourrait imaginer une solution similaire à celle développée dans §3.5, en supposant que les termes incertains soient suffisamment dérivables et que des bornes de chacune de leurs dérivées successives soient connues. Ce cas de figure semble toutefois peu réaliste en pratique, c'est pourquoi nous avons choisi de ne pas poursuivre cette voie. De la même manière, la stabilisation entrée-état nécessiterait ou du moins, serait facilitée par l'application de conditions additionnelles sur les signaux comme, par exemple, le fait qu'ils restent constants entre deux instants d'échantillonnage.

Puisque de telles extensions requièrent une analyse complexe et des hypothèses restrictives, nous nous contentons de la synthèse de contrôleurs pour des approximations d'Euler. Il est montré, dans la section suivante, que ceux-ci fournissent des résultats très satisfaisants.

### 3.7 Exemple numérique

Dans cette section, nous illustrons les résultats de §3.5 à l'aide d'un exemple numérique. Soit le système non linéaire suivant :

$$\dot{\eta} = \eta^2 + \xi + d_1(\eta, \xi) \quad (3.55)$$

$$\dot{\xi} = u + d_2(\eta, \xi), \quad (3.56)$$

où  $d_1 : (\eta, \xi) \mapsto (1 + \sin(\xi))\eta^3$  est majorée par  $\rho_1 : (\eta, \xi) \mapsto 2|\eta|^3$  et  $d_2 : (\eta, \xi) \mapsto 1 + \cos(\eta)\xi^2$  par  $\rho_2 : (\eta, \xi) \mapsto 1 + \xi^2$  : l'Hypothèse 3.5.1 est satisfaite. Considérons  $\bar{\xi} = -\eta - \eta^2 - 2\eta^3$  et  $W_T(\eta) = \frac{1}{2}\eta^2$  ( $\eta \in \mathbb{R}$ ), l'Hypothèse 3.5.2 est garantie puisque ces fonctions sont bien deux fois dérivables pour tout  $T$ , la condition (2) est vérifiée avec  $\phi : s \mapsto s + s^2 + 2s^3$  ( $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ) et les différentes dérivées partielles de  $\bar{\xi}$  et  $W_T$ , considérées dans la condition (3), sont bien localement bornées. Par conséquent, le Théorème 3.5.1 peut être appliqué. Un contrôleur de la forme (3.38) est synthétisé avec  $c = 1$ ,  $\varepsilon = 0.01$  et la fonction  $p$  de sat est :

$$p_{T\varepsilon} : z \mapsto -\frac{3}{2(T\varepsilon)^5}z^5 + \frac{5}{2(T\varepsilon)^3}z^3. \quad (3.57)$$

Des simulations ont été réalisées afin de comparer les performances fournies par le contrôleur (3.38) et l'émulation d'une loi continue du type *hard* développée dans [55]. Les paramètres suivants ont été pris :  $T = 0.005$ ,  $\eta(0) = \xi(0) = 3$ . La Figure 3.1 montre que les deux contrôleurs discrets garantissent la convergence des états vers un voisinage de l'origine, mais plus rapidement pour (3.38). Le tracé des signaux de commande, Figure 3.2, nous indique que des phénomènes de grand gain apparaissent, typiques des contrôleurs de type *hard* [55]. La commande reconstruite présente toutefois l'avantage d'avoir généralement une amplitude plus faible que l'émulation. En prenant une nouvelle valeur de période d'échantillonnage  $T = 0.015$  (et  $\eta(0) = \xi(0) = 2$ ) on constate Figure 3.3 que le blocage de la loi continue n'assure plus la stabilisation du système contrairement à (3.38) : ce dernier permet d'élargir le bassin d'attraction. Les signaux de commande sont présentés dans la Figure 3.4 et de nouveau, des amplitudes élevées sont atteintes.

### 3.8 Conclusion

Rares sont les techniques de commande robuste non linéaire disponibles en temps échantillonné. Dans ce chapitre, nous avons étudié le cas d'une des méthodes de commande non linéaire les plus célèbres : le *backstepping*. Considérant une classe de systèmes sous forme *strict-feedback* affectés par des perturbations, des lois de commande ont été proposées pour la stabilisation entrée-état et asymptotique (lorsque les incertitudes vérifient des propriétés de majoration) du système à données échantillonnées. A partir de l'approximé d'Euler discret, les contrôleurs obtenus sont reconstruits par rapport au blocage de la loi continue afin d'améliorer certaines performances, comme nous le montrons sur un exemple. Simples à déterminer et à

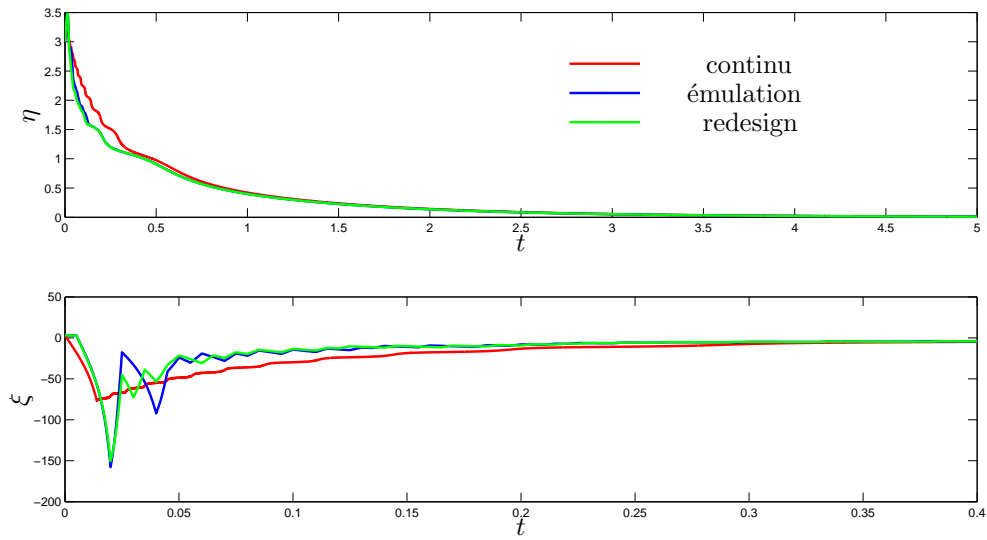


FIG. 3.1 – Simulations pour  $\eta(0) = \xi(0) = 3$  et  $T = 0.005$

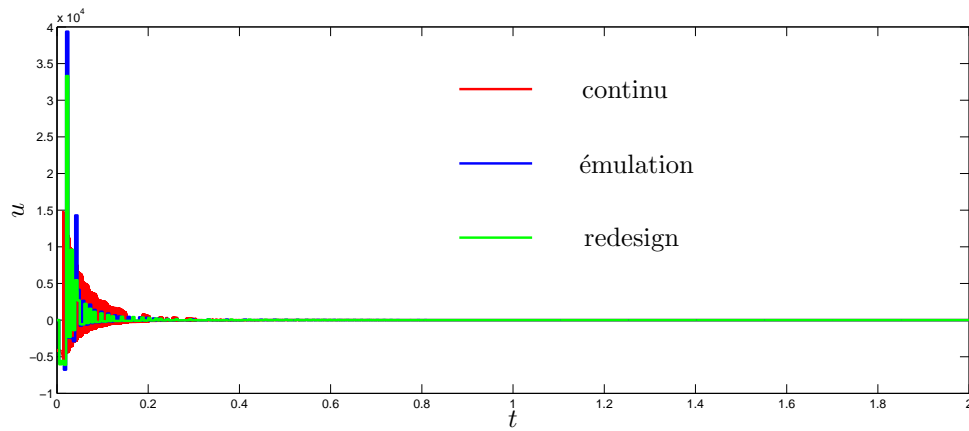
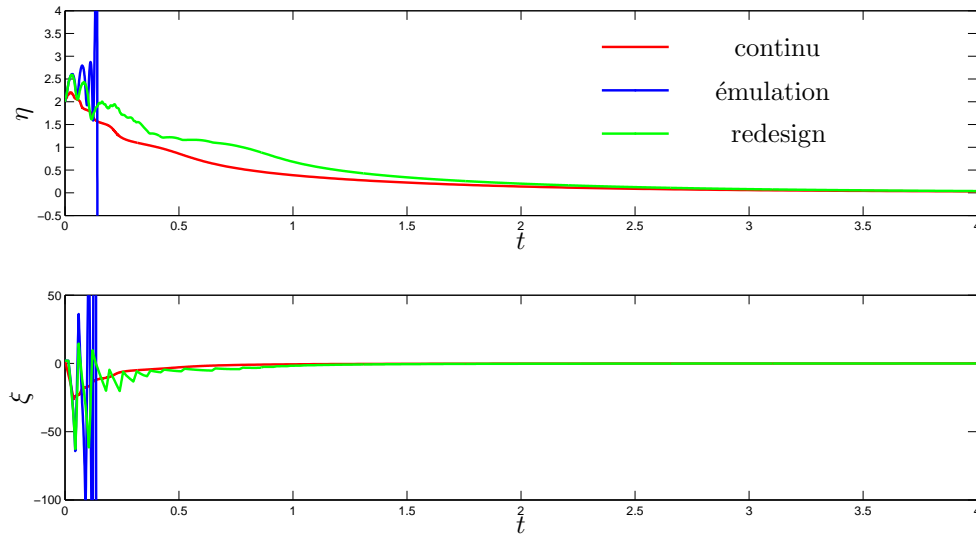
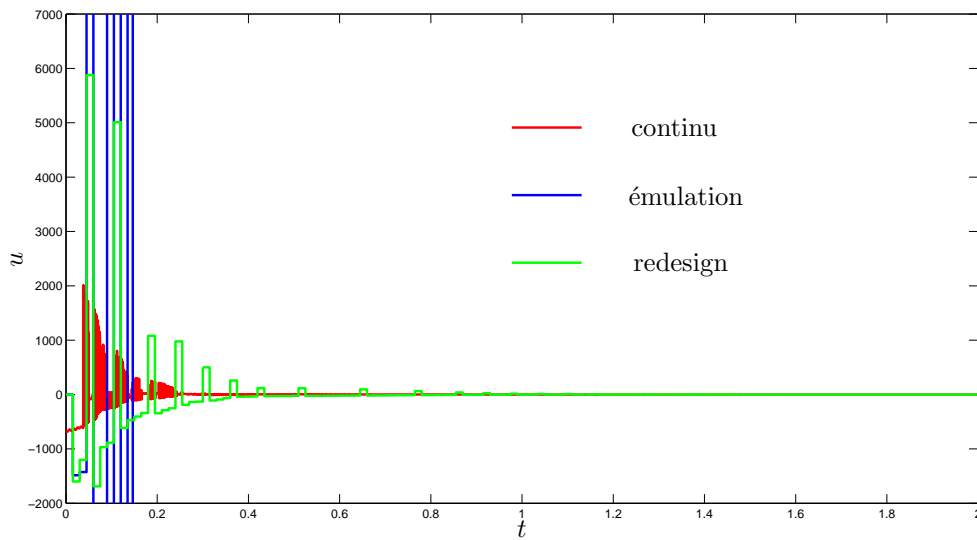


FIG. 3.2 – Signaux de commande pour  $\eta(0) = \xi(0) = 3$  et  $T = 0.005$

FIG. 3.3 – Simulations pour  $\eta(0) = \xi(0) = 2$  et  $T = 0.015$ FIG. 3.4 – Signaux de commande pour  $\eta(0) = \xi(0) = 2$  et  $T = 0.015$

---

implémenter, ces contrôleurs sont à privilégier en pratique par rapport à la simple émulation. L'application des méthodes proposées à une classe plus générale de systèmes sous forme *strict-feedback* a été expliquée en indiquant comment les hypothèses et contrôleurs étudiés peuvent être utilisés à cette fin. Il serait intéressant à l'avenir d'étudier le *redesign* de lois de commande par *backstepping* de type *soft* ([55]) afin d'atténuer les phénomènes de grand gain constatés en simulation.





## Seconde partie

# Observateurs pour les systèmes en réseau



## Chapitre 4

# Introduction

Dans ce chapitre, la problématique des systèmes commandés par réseau (en anglais *networked control systems* d'où l'acronyme NCS) est présentée. Offrant de nombreux avantages en termes de coût, de flexibilité et de simplicité d'installation, les NCS requièrent le développement de méthodes de commande et d'observation adaptées à cause des contraintes de communication induites par le réseau. Alors que le problème de la commande est aujourd'hui largement étudié, rares sont les études à proposer des solutions pour l'observation. Cette seconde partie de thèse a ainsi pour but de développer de nouvelles méthodes d'analyse et de synthèse d'observateurs déterministes pour les NCS dits *ordonnés*. Après avoir rappelé les principales approches de stabilisation, la problématique de la conception d'observateurs est introduite et les résultats existants revus. Un cadre d'étude est ensuite développé avant de présenter nos contributions.

### 4.1 Systèmes commandés par réseau

On appelle *systèmes commandés par réseau* (NCS), les systèmes pour lesquels les transmissions de données entre les capteurs, le contrôleur et les actionneurs sont assurées par des canaux de communication série numériques. La Figure 4.1 représente l'architecture typique ; à noter que le réseau, qui assure le multiplexage des signaux des capteurs au contrôleur et/ou du contrôleur aux actionneurs, peut également être le support de communication d'autres tâches. Ce type de configuration présente l'avantage d'être moins coûteux, plus flexible et plus aisé à installer et entretenir qu'une architecture de commande classique par câblage point-à-point [25, 166, 167, 200]. Pour ces raisons, les NCS sont de nos jours communément employés dans de nombreux domaines d'application comme la télé-chirurgie [131], les drones ou la coordination de véhicules [170, 171], les systèmes de chauffage et de climatisation ou encore, de manière générale, les secteurs aérien et automobile. Ainsi, les véhicules automobiles les plus récents comportent généralement deux bus CAN (*controller area network*), l'un de fréquence élevée, à l'avant du véhicule qui gère le moteur, la transmission et la traction, l'autre, à transmission

plus lente, pour la commande des systèmes de verrouillage, des fenêtres et autres dispositifs électriques. Outre les bus de terrain (CAN), d'autres types de réseaux, comme les LAN (*local area network*) ou ceux à longue distance WAN (*wide area network*), permettent d'assurer la transmission d'information entre les différentes composantes de la structure de commande. Pour plus d'informations voir le Chapitre 1 dans [203].

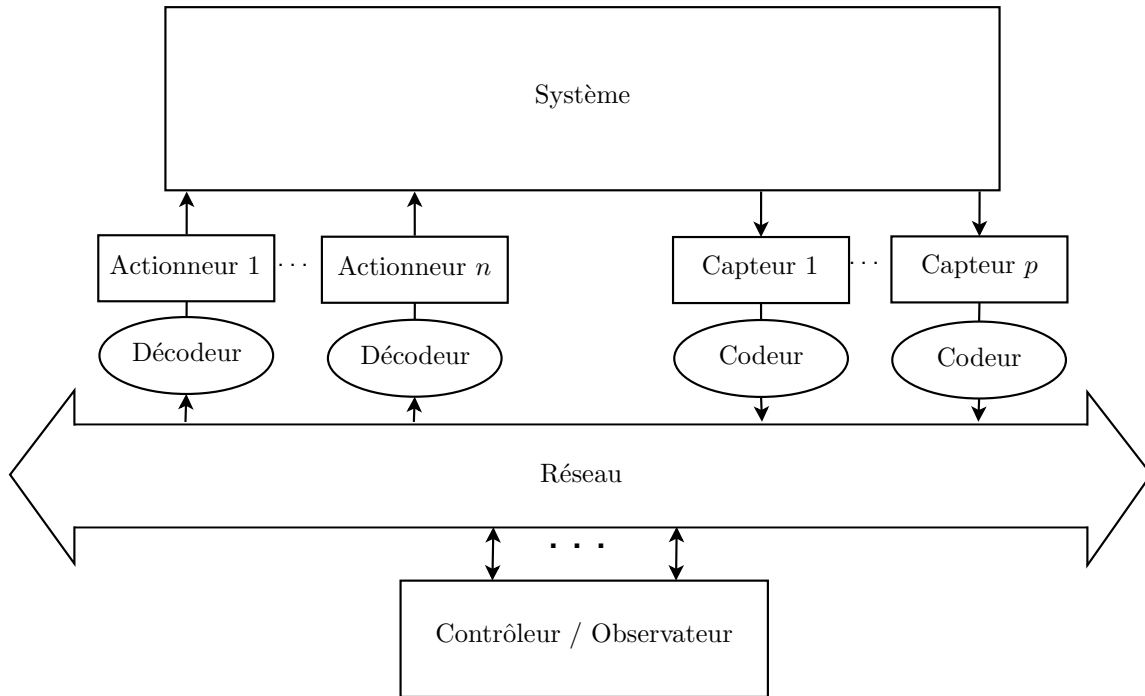


FIG. 4.1 – Architecture de NCS

La mise en place d'un réseau implique des difficultés supplémentaires par rapport aux schémas de commande classiques. En effet, le partage des canaux de communication, les limitations de la bande passante du réseau, l'échantillonnage des signaux, les retards de transmission et les possibles pertes d'informations sont autant de phénomènes à prendre en compte lors de l'analyse des NCS puisqu'ils peuvent avoir un impact significatif sur les performances du système. Les NCS présentent ainsi la particularité de pouvoir relever à la fois de la théorie de la commande et de celle de l'information. En effet, l'objectif premier demeure la stabilisation ou/et l'observation du système, cependant les imperfections des transmissions doivent être considérées, c'est pourquoi des outils relatifs à la théorie de l'information sont parfois nécessaires à leur analyse.

Les contraintes et imperfections de communication peuvent être classées en trois catégories que nous détaillons.

## Ordonnement

Tout élément de la boucle de commande directement relié au réseau constitue un *nœud*. On distinguera les *nœuds de capteurs* de ceux *d'actionneurs* ; à noter que plusieurs capteurs et actionneurs peuvent être regroupés en un même nœud selon leur localisation. Le bus CAN de fréquence élevée d'une automobile possède ainsi une cinquantaine de nœuds mais seulement une demi-douzaine sont généralement connectés. Le réseau peut également contenir un nombre arbitraire de *nœuds passifs* qui ne sont aptes qu'à recevoir des paquets. Ils peuvent être utilisés pour recueillir des observateurs distants ou des actionneurs pour les systèmes munis d'entrées.

La procédure de communication est la suivante. A chaque instant de transmission, un unique nœud est autorisé à envoyer ses données sur le réseau. Cet accès est régi par une loi appelée *protocole*. On parle de *protocole statique*, lorsque l'ordre d'accès est préalablement fixé, comme c'est le cas pour le protocole *round-robin* (RR) également nommé *token ring* ou *token bus* pour lequel chaque nœud transmet ses données à une période égale au nombre de nœuds [78, 84, 113], et de *protocole dynamique* lorsque le choix du nœud répond à un critère dépendant de l'état du système, comme le *try-once-discard* (TOD) [199] pour lequel l'accès est donné au nœud ayant l'erreur la plus grande entre les valeurs des variables actuelles et celles dernièrement transmises (les protocoles RR et TOD sont explicitement définis dans la suite). Ce partage du réseau entre les différents nœuds implique plusieurs difficultés pour la commande et l'observation du système. Tout d'abord les données sont échantillonnées, comme dans la Partie I, ainsi, entre deux instants de transmission, aucune information n'est disponible. De plus, pour le cas des capteurs, seul un nœud (i.e. un sous-groupe de capteurs) transmet ses données au réseau : le vecteur de sortie du système n'est pas complètement connu. La disponibilité partielle et périodique des informations du système est à prendre en considération lors de l'analyse de stabilité. Ces contraintes sont caractérisées par l'*intervalle maximal de transmission admissible* (en anglais *maximum allowable transmission interval* d'où l'acronyme MATI) et le protocole, tous deux jouant un rôle clef.

## Quantification et codage

Les canaux de communication numériques ne peuvent transmettre qu'une quantité finie d'information par unité de temps. Considérons la Figure 4.1. Les mesures du système réalisées par les capteurs sont quantifiées au niveau du codeur : aux grandeurs physiques du système sont associées des valeurs parmi un ensemble fini qui sont ensuite codées sous forme de bits. Ces données sont alors incluses dans un paquet, également constitué d'informations caractéristiques du réseau (*overhead*), qui est envoyé au contrôleur. Ce dernier décode les bits reçus afin de générer des signaux de commande qui sont ensuite eux-mêmes codés sous forme de bits afin d'être transmis aux actionneurs. Les données du contrôleur sont finalement converties en signaux de commande physique au niveau des actionneurs. On parle dans ce cas de commande avec information limitée puisque le réseau ne permet de transmettre qu'un nombre donné de paquets de longueurs restreintes par unité de temps. Cette problématique est

fondamentale pour de nombreuses applications comme les drones, les planeurs sous-marins, de manière générale les systèmes à longue autonomie pour lesquels les communications sont soumises à de fortes contraintes par souci d'économie d'énergie.

La quantification est caractérisée par le nombre d'éléments finis auxquels sont associés les mesures du système et leur répartition dans l'espace. A l'instar des protocoles d'ordonnement, cette dernière peut être statique (les éléments sont préalablement fixés et ne varient pas) ou dynamique (lorsqu'ils dépendent de l'évolution des états [26, 115, 116]). Les limitations de communication du réseau sont elles ramenées au taux de bit minimum nécessaire à la stabilisation, problématique qui relève de la théorie de l'information. L'évaluation de ce taux pour les systèmes linéaires a été notamment traitée dans [48, 142, 143, 192, 204] et pour les systèmes non linéaires dans [118, 144].

### Retard et perte de paquets

La communication par réseau est à l'origine de retards qui peuvent perturber voire déstabiliser le système. Alors que le temps de transmission le long du canal de communication peut souvent être ignoré (pour un bus CAN, il est de l'ordre de  $100 \mu s$ ), les effets des files d'attente et des congestions doivent généralement être pris en compte. La valeur des retards dépend alors du protocole de communication considéré. Pour les protocoles à accès direct ou aléatoire, que nous n'avons pas évoqué jusqu'à présent, les retards peuvent prendre des valeurs arbitraires. Un exemple typique sont les *Carrier Sense Multiple Access* (CSMA), qui incluent Ethernet et DeviceNet, où tous les nœuds sont libres de communiquer leurs paquets à n'importe quel instant. Lorsque le réseau n'est pas occupé et que seul un nœud transmet, aucun retard n'est à constater. Par contre, lorsqu'ils sont plusieurs à vouloir communiquer, des collisions se produisent. Celles-ci sont gérées différemment selon le protocole. Dans le cas de DeviceNet, les paquets sont hiérarchisés : le message prioritaire sera transmis tandis que les autres attendront que le réseau soit libre. Ethernet lui renvoie tous les paquets et les retransmet ultérieurement après un intervalle de temps arbitraire. On devine que les retards induits par de tels protocoles sont fortement variables et peuvent prendre des valeurs aléatoires. C'est la raison pour laquelle, les réseaux CSMA sont analysés à l'aide d'outils stochastiques. Pour ce qui est des protocoles ordonnancés puisque l'accès au réseau est clairement établi selon un ordre prédéterminé (protocole statique) ou un critère dépendant des états du système (protocole dynamique), les retards apparaissent lorsque les nœuds attendent l'autorisation pour transmettre. Dans ce cas, ils sont souvent bornés voire parfois même constant lorsque l'accès au réseau est périodique. A noter que les données transmises puissent être *time-stamped*, ce qui signifie que le receveur est capable d'estimer le retard avec lequel le message arrive afin d'éventuellement effectuer les corrections nécessaires.

Les collisions ne sont pas uniquement la cause de retards mais également de possibles pertes de paquets, tout comme les défaillances des nœuds. Bien que la plupart des protocoles aient un mécanisme de retransmission, celui-ci n'est valable que pour un intervalle de temps

limité. En effet, il est parfois avantageux de ne pas retransmettre un message si le retard est trop important afin de fournir des données récentes plus utiles à la structure de commande [200].

Les retards pour les protocoles ordonnancés sont souvent caractérisés par le retard maximal admissible (en anglais *maximum allowable delay* MAD) (parallèlement au MATI), tandis que les pertes de paquets sont modélisées par des distributions de probabilités (voir [75] et les références qui y sont citées) ou satisfont des conditions déterministes données (voir [151] par exemple).

Dans cette thèse, nous nous concentrons sur la synthèse d'observateurs déterministes pour les NCS ordonnancés et négligeons donc les effets de quantification et de codage ainsi que les éventuels retards et pertes de paquets. Ce choix se justifie par le fait que, bien que tous les phénomènes cités soient généralement présents, tous n'ont pas le même impact sur les performances du système selon l'implémentation étudiée. En effet, certains protocoles ont un ordonnancement tel que la collision et donc la perte de paquets est peu probable. D'autre part, les retards peuvent être infimes par rapport aux dynamiques du système et le canal de communication et l'encodeur peuvent être suffisamment rapides et précis pour ne pas avoir à se soucier des effets de quantification et de codage.

Avant de présenter les études relatives à l'estimation et l'observation des NCS, nous rappelons brièvement les principaux résultats de commande de NCS ordonnancés en prêtant une attention particulière aux travaux de D. Nešić et A.R. Teel [151] puisqu'ils ont été la source d'inspiration principale de plusieurs chapitres de cette partie.

## 4.2 Commande des NCS

Il existe deux approches de synthèse de contrôleurs pour les NCS. La première est de répondre au problème en ignorant, dans un premier temps, les contraintes de communication puis d'étudier la robustesse du contrôleur aux effets de l'ordonnancement. On parle dans ce cas d'*émulation*. L'autre approche consiste à synthétiser une loi de commande et certains mécanismes du réseau, comme le protocole, en prenant en compte les contraintes de communication. Nous utiliserons le terme de *co-synthèse* pour désigner ces méthodes.

**Remarque 4.2.1** *La distinction émulation / co-synthèse rappelle les différences entre approches CTD d'une part et DTD et SDD de l'autre, pour les systèmes à données échantillonnées vues au Chapitre 1.*



### 4.2.1 Émulation

L'approche par émulation présente l'avantage d'être simple à appliquer puisque le contrôleur relève de la théorie de la commande au sens classique du terme, i.e. sans avoir à se soucier des contraintes de communication. Pour les systèmes linéaires, une multitude de techniques sont connues, quant aux systèmes non linéaires de nombreuses méthodes sont disponibles dans la littérature en fonction de la classe de systèmes étudiée. La question est alors de savoir si le contrôleur fournira des performances satisfaisantes lorsqu'il sera implémenté par réseau. Cela se traduit ici par l'obtention d'une borne sur le MATI qui garantit la stabilisation du système bouclé pour un protocole donné.

La commande de NCS ordonnancés par émulation de contrôleurs de sortie dynamiques a été pour la première fois traitée dans [198] pour les systèmes linéaires et [199] pour les systèmes globalement Lipschitziens. Dans ces deux études, une nouvelle variable est introduite afin de modéliser l'erreur entre les valeurs en temps continu des signaux de commande et de sortie et celles effectivement transmises via le réseau. A l'aide d'une analyse basée sur les théorèmes de Lyapunov, des conditions suffisantes pour la stabilité du système bouclé sont déduites et des bornes explicites sur le MATI sont données pour deux types de protocoles : RR et TOD qui fut pour la première fois introduit dans [199]. Ces résultats ont ensuite été étendus et améliorés dans [151], où un véritable cadre méthodologique pour l'étude de la stabilité entrée-sortie est développé. Celui-ci présente l'avantage de couvrir de nombreuses classes de systèmes non linéaires et configurations de réseau en termes de protocoles notamment. Nous en rappelons le principe. Nous ne traitons qu'un cas particulier des travaux de [151] afin d'insister sur les grandes étapes de l'analyse.

Considérons le système non linéaire :

$$\begin{aligned} \dot{x}_P &= f_P(t, x_P, u) \\ y &= h_P(t, x_P), \end{aligned} \quad (4.1)$$

où  $x_P \in \mathbb{R}^{n_{x_P}}$  est l'état,  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  l'entrée et  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  la sortie. Un contrôleur dynamique est dans un premier temps synthétisé en ignorant les contraintes de communication :

$$\begin{aligned} \dot{x}_C &= f_C(t, x_C, y) \\ u &= h_C(t, x_C), \end{aligned} \quad (4.2)$$

où  $x_C \in \mathbb{R}^{n_{x_C}}$  est l'état. Lorsque le contrôleur (4.2) est implémenté via un réseau, les vecteurs de sortie et d'entrée sont décomposés en sous-groupes formant ainsi  $l$  nœuds. La séquence de transmission  $\{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{>0}}$  est telle que :

$$v \leq t_i - t_{i-1} \leq \tau \quad \forall i \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad (4.3)$$

avec  $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  l'instant initial,  $\tau \in [v, \infty)$  le MATI et  $v \in \mathbb{R}_{>0}$  une constante arbitraire introduite afin d'éviter le paradoxe de Zénon (un nombre infini de transmissions en un temps fini). Les vecteurs  $u$  et  $y$  ne sont plus disponibles mais  $\hat{u}$  et  $\hat{y}$ , les valeurs des vecteurs de sortie

et d'entrée les plus récemment transmises via le réseau. Le système en boucle fermée s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{x}_P &= f_P(t, x_P, \hat{u}) & \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \\ y &= h_P(t, x_P) \\ \dot{x}_C &= f_C(t, x_C, \hat{y}) & \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \\ u &= h_C(t, x_C) \\ \dot{\hat{y}} &= \hat{f}_P(t, x_P, x_C, \hat{y}, \hat{u}) & \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \\ \dot{\hat{u}} &= \hat{f}_C(t, x_P, x_C, \hat{y}, \hat{u}) & \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \\ \hat{y}(t_i^+) &= \hat{y}(t_i) + h_y(i, e(t_i)) \\ \hat{u}(t_i^+) &= \hat{u}(t_i) + h_u(i, e(t_i)), \end{cases} \quad (4.4)$$

où  $e \in \mathbb{R}^{n_e}$  est l'erreur induite par le réseau :

$$e(t) = \begin{bmatrix} \hat{y}(t) - y(t) \\ \hat{u}(t) - u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_y(t) \\ e_u(t) \end{bmatrix},$$

$\hat{f}_P$  et  $\hat{f}_C$  sont des fonctions de blocage : elles définissent la façon dont les signaux  $\hat{y}$  et  $\hat{u}$  sont générés au niveau du contrôleur et des actionneurs entre deux instants de transmission. L'exemple classique est le blocage d'ordre zéro ( $\hat{f}_P = 0$  et  $\hat{f}_C = 0$ ), nous verrons par la suite que d'autres fonctions plus sophistiquées sont envisageables. Les fonctions  $h_y$  et  $h_u$  sont quant à elles définies par le protocole et sont généralement telles que si le nœud  $j \in \{1, \dots, l\}$  a accès au réseau à l'instant  $t_i$ , la composante de  $\hat{y}$  ou  $\hat{u}$  correspondante est réinitialisée à sa nouvelle valeur : le signal fait un saut. En introduisant la variable  $x = (x_P, x_C) \in \mathbb{R}^{n_x}$ , le système (4.4) peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{x} = f(t, x, e) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (4.5)$$

$$\dot{e} = g(t, x, e) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (4.6)$$

$$e(t_i^+) = h(i, e(t_i)). \quad (4.7)$$

On remarque que lorsque  $e = 0$ , la situation initiale, où aucune contrainte de communication n'affecte la transmission des données, est retrouvée et la stabilité du système garantie.

Considérant le système (4.5)-(4.7) comme l'interconnexion des sous-systèmes en  $x$  et en  $e$ , le théorème du petit gain de [86] est utilisé pour garantir la stabilité. Il est ainsi, par exemple, supposé que le premier sous-système est stable entrée-état vis-à-vis de  $e$  avec un gain linéaire, i.e. il existe  $\beta_1 \in \mathcal{KL}$  et  $\gamma_1 \in \mathbb{R}_{>0}$  telles que pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$  et  $e \in \mathcal{L}_{\infty}^{n_e}$  :

$$|x(t)| \leq \beta_1(|x(t_0)|, t - t_0) + \gamma_1 \|e\|_{[t_0, t]} \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (4.8)$$

La dynamique continue de  $e$ , (4.6), est par essence instable entre deux instants  $t_i$  et  $t_{i+1}$ , ou du moins, pas asymptotiquement stable. Elle doit sa stabilité aux sauts, à chaque  $t_i$ , dictés par le protocole (4.7). Les auteurs de [151] ont été les premiers à caractériser la stabilité des protocoles afin d'assurer une réinitialisation convenable à chaque instant de transmission. Ils

ont ainsi introduit la notion de protocole uniformément globalement exponentiellement stable (UGES) qui se définit en ces termes :

**Définition 4.2.1 (Protocole UGES)** *Le protocole (4.7) est UGES s'il existe une fonction de Lyapunov  $W : \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n_e} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  telle que pour tout  $e \in \mathbb{R}^{n_e}$  et  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  :*

$$a_1|e| \leq W(i,e) \leq a_2|e| \quad (4.9)$$

$$W(i+1, h(i,e)) \leq \rho W(i,e), \quad (4.10)$$

où  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_{>0}$  et  $\rho \in [0,1)$ .

**Remarque 4.2.2** *Des bornes linéaires sont utilisées dans (4.9) afin de faciliter les calculs. Pour une fonction typique aux bornes quadratiques données, il suffit de prendre sa racine carrée pour obtenir une fonction satisfaisant (4.9).*

De cette manière, lorsque le protocole considéré est UGES, comme cela est le cas pour le RR et le TOD comme nous le verrons par la suite, et lorsque, pour  $W$  localement Lipschitzienne en  $e$  et uniformément en  $i$ , il existe  $L, \gamma_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  tels que pour tout  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  et presque tout  $e \in \mathbb{R}^{n_e}$  :

$$\left| \frac{\partial W(i,e)}{\partial i} + \frac{\partial W(i,e)}{\partial e} g(t,x,e) \right| \leq L|W(e)| + \gamma_2|x|, \quad (4.11)$$

il est possible de montrer, d'après la Proposition 6 dans [151], que l'erreur due au réseau de communication suit elle aussi un comportement stable entrée-état, i.e. il existe  $\beta_2 \in \mathcal{KL}$  et  $\gamma_2 \in \mathcal{K}$  telles que pour tout  $e_0 \in \mathbb{R}^{n_e}$  et  $x \in \mathcal{L}_{\infty}^{n_x}$  :

$$|e(t)| \leq \beta_2(|e(t_0)|, t - t_0) + \gamma_2(\tau) \|x\|_{[t, t_0)}. \quad (4.12)$$

D'après le théorème du petit gain [86], il est alors aisé de montrer que  $(x,e) = (0,0)$  est uniformément globalement asymptotiquement stable pour le système (4.5)-(4.7) si

$$\gamma_1 \gamma_2(\tau) < 1. \quad (4.13)$$

En choisissant  $\tau$  suffisamment petit, la condition (4.13) est garantie. Il est évident que (4.13) ne fournit qu'un estimé du MATI. Toutefois il est montré sur un exemple que celui-ci est plus précis que ceux de [199]. De plus, contrairement à [199], les bornes dépendent du protocole considéré. On attend en effet qu'un protocole dynamique (comme le TOD) permette d'avoir des MATI plus élevés par rapport à un protocole statique puisqu'il est censé donner accès au noeud ayant, en quelque sorte, l'information la plus importante.

**Remarque 4.2.3** *Dans l'étude originale, des perturbations affectent les dynamiques du système, les propriétés de stabilité sont beaucoup plus générales et les pertes de paquets sont également traitées à l'aide d'outils déterministes.*

Une analyse similaire est proposée dans [31] à l'aide de fonctions de Lyapunov hybrides cette fois. En réécrivant le système (4.5)-(4.7) d'après le cadre d'étude [62], une fonction de Lyapunov complète pour le système considéré est construite sous des hypothèses similaires et des bornes sur le MATI sont obtenues. Dans [152] il est prouvé que la stabilité *uniforme globale asymptotique* (UGAS) de l'origine du système, garantie par un contrôleur sans contrainte de communication, est maintenue semiglobalement et pratiquement sous de légères conditions, lorsque les données sont transmises du système au contrôleur par l'intermédiaire d'un réseau. Les protocoles considérés ne sont plus UGES mais UGAS (notion que nous définirons ultérieurement). Les techniques utilisées lors de l'analyse sont différentes de celles de [151] et ne permettent pas de déterminer aussi facilement une borne sur le MATI. Ce résultat est en quelque sorte le pendant des précédents travaux des mêmes auteurs sur l'émulation de contrôleurs pour les systèmes à données échantillonnées.

Les réseaux sans fil présentent des difficultés technologiques supplémentaires [190] qui ne permettent pas l'implémentation de tous les protocoles habituellement étudiés, comme le TOD. Prenant en compte les spécificités d'une telle configuration, la commande par émulation de NCS a été étudiée dans [189] dans un contexte stochastique et [190] en déterministe toujours à l'aide d'une formulation similaire à celle de [151]. Il est intéressant de remarquer que le formalisme de [151] est l'un des rares à permettre l'étude de tous les phénomènes présentés dans §4.1, puisque le lien avec les procédures de quantification et de codage est établi dans [148] et avec les retards dans [32, 73].

En résumé, la commande des NCS par émulation présente l'avantage d'être simple à utiliser mais nécessite une bande passante élevée puisque les conditions sur le MATI sont généralement restrictives. Une alternative consiste à synthétiser le contrôleur et le protocole conjointement afin de véritablement prendre en compte les caractéristiques des NCS et de considérer de plus grands MATI : on parle de co-synthèse du contrôleur et du protocole.

### 4.2.2 Co-synthèse du contrôleur et du protocole

Une méthodologie pour la détermination d'une paire contrôleur de sortie dynamique / protocole est proposée pour les systèmes linéaires dans [41]. Les protocoles étudiés sont du type TOD mais pondérées, les poids étant des paramètres de la conception. Après avoir déduit des conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilisation quadratique, des conditions suffisantes solubles numériquement sont obtenues sous forme d'inégalités matricielles. Les résultats sont appliqués à la commande par réseau d'un réacteur chimique et il est montré que les bornes sur le MATI sont beaucoup plus grandes que celles données par l'émulation. Lorsque plusieurs NCS, ayant chacun leur contrôleur directement connecté, transmettent leurs mesures via un canal commun, les travaux de [24] proposent des techniques de conception mutuelle, inspiré des résultats existants pour l'ordonnancement des processeurs (voir [11] par

exemple), permettant également de considérer retards et pertes des paquets. Une étude similaire est faite dans [206]. Dans [23], un cadre d'étude est développée pour la modélisation, l'analyse et la simulation de tels NCS.

## 4.3 Synthèse d'observateurs pour les NCS

### 4.3.1 Problématique et état de l'art

La plupart des techniques de stabilisation nécessitent la connaissance globale de l'état du système, or dans de nombreuses situations certaines variables ne sont pas mesurées (pour des raisons technologiques ou économiques) : les lois de commande par retour d'état ne sont dès lors pas applicables. Il est aujourd'hui reconnu que les observateurs peuvent fournir une réponse adaptée à ce problème. A partir d'un modèle dynamique du système et des mesures disponibles, ils permettent de reconstruire toutes les variables d'état. Les variables estimées peuvent ensuite être utilisées à des fins de stabilisation par couplage retour d'état/observateur, sous certaines conditions. Les observateurs ont également prouvé leur efficacité pour des problèmes de détection de pannes et de diagnostic dans des domaines d'application variées où l'objectif est d'estimer les variables afin de surveiller leur évolution. Pour les mêmes raisons que la commande des NCS, lorsque les données du système sont échangées via un réseau, les contraintes de communication doivent être prises en compte lors de la synthèse de l'observateur. La problématique est alors la suivante. Considérons un système multisortie pour lequel les capteurs transmettent leurs données via un réseau ordonnancé. Les mesures du système ne sont disponibles qu'à certains instants de transmission et de manière partielle puisque seul un nœud, c'est-à-dire un groupe de capteurs, communique ses données, voir Figure 4.2. L'objectif est de développer des observateurs sous de telles contraintes de communication.

Il n'existe aujourd'hui que quelques méthodes de synthèse d'observateurs pour les NCS. L'essentiel de ces travaux se concentre sur les systèmes linéaires stochastiques affectés par des pertes de paquets ou des retards modélisés par des distributions de probabilité données [75, 88, 128, 176, 209, 213]. Le cas des NCS ordonnancés est abordé dans [79], où un algorithme pour la synthèse d'un protocole de type RR est développé afin de préserver l'observabilité des systèmes linéaires discrets. Un observateur est ensuite obtenu à partir des techniques disponibles pour les systèmes à temps variant périodiques. Dans [69], des observateurs et protocoles stochastiques sont proposés pour des NCS ordonnancés afin de minimiser l'erreur de covariance de l'estimation pour des systèmes linéaires discrets. Récemment, le dual du problème de synthèse mutuelle du protocole et du contrôleur de [41] a été proposé pour l'observation des NCS linéaires dans [42]. Considérant des protocoles de type TOD pondérés, des conditions suffisantes sur les gains de l'observateur linéaire et les poids du protocole sont dérivées pour un MATI donné. Celles-ci sont exprimées sous forme d'inégalités matricielles qui permettent de déduire une paire protocole/observateur garantissant la reconstruction asymptotique des

états. A noter que récemment l'émulation de contrôleurs de sortie par bouclage avec un observateur a été étudiée pour les NCS quantifiés dans [117, 174] et la synthèse d'observateurs hybrides pour des NCS quantifiés dans [53].

Il n'existe donc pas aujourd'hui de méthode d'analyse générale des observateurs émulsés pour les NCS. L'objectif de cette deuxième partie de thèse est de combler ce manque pour les NCS ordonnancés. Dans ce but, nous avons développé un nouveau cadre d'étude inspiré de celui de [151].

### 4.3.2 Cadre d'étude

#### Présentation

L'analyse suit l'approche par émulation adoptée pour la commande des NCS dans [151, 199]. Considérons le système non linéaire continu suivant :

$$\dot{x} = f_P(t, x, w) \quad (4.14)$$

$$y = h_P(t, x), \quad (4.15)$$

où  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  représente l'état,  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  la sortie,  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  un vecteur de perturbations,  $n_x, n_y, n_w \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Dans un premier temps, un observateur est synthétisé en ignorant les contraintes de communication :

$$\dot{z} = f_O(t, z, y, w) \quad (4.16)$$

$$\bar{x} = h_O(t, z), \quad (4.17)$$

où  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  est l'état de l'observateur et  $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$  l'estimé de l'état du système. En règle générale  $n_z = n_x$ , le cas où  $n_z > n_x$  correspond aux observateurs par immersion qui ont par définition une dimension plus élevée que celle du système.

**Remarque 4.3.1** *Pour modéliser les observateurs d'ordre réduit (il s'agit des observateurs pour lesquels les états mesurés ne sont pas reconstruits), nous devons modifier (4.16)-(4.17) de la façon suivante :*

$$\dot{z} = f_O(t, z, y, w) \quad (4.18)$$

$$\bar{x} = h_O(t, z, y). \quad (4.19)$$

*Dans ce cas, le problème n'aura pas de formulation finie dans les nouvelles coordonnées  $(\xi, e, z)$ , que nous allons introduire. Toutefois si les conditions des chapitres suivants sont vérifiées, les résultats pourront être appliqués.*

**Remarque 4.3.2** *Bien qu'en pratique, la sortie du système est souvent bruitée, (4.15) ne considère pas de perturbations. Cette modélisation se justifie par la possible utilisation préalable d'un filtre dont les dynamiques sont incluses dans (4.14).*

Les contraintes de communication sont dans un second temps prises en compte. L'observateur n'a plus à disposition le vecteur  $y$  mais  $\hat{y}$ , le vecteur de mesures le plus récemment transmis via le réseau. Le problème s'écrit alors :

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f_P(t,x,w) & \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \\ y &= h_P(t,x) \\ \dot{z} &= f_O(t,z,\hat{y},w) & \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \\ \bar{x} &= h_O(t,z) \\ \dot{\hat{y}} &= \hat{f}_P(t,\hat{y},z,w) & \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \\ \hat{y}(t_i^+) &= \hat{y}(t_i) + h(i,e(t_i),z(t_i)) \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

où la séquence de transmission  $\{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{>0}}$  satisfait, pour  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  :

$$v \leq t_i - t_{i-1} \leq \tau \quad \forall i \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad (4.21)$$

pour  $v, \tau \in \mathbb{R}_{>0}$  fixés et  $t_0$  l'instant initial. La constante  $\tau$  correspond au MATI.

Les mesures étant réalisées par différents capteurs répartis dans l'espace, ceux-ci sont regroupés en  $l$  nœuds de capteurs,  $l \in \{1, \dots, n_y\}$ . Le vecteur de sortie,  $y$ , est décomposé comme suit  $y = (y_1, y_2, \dots, y_l)$  ( $y_j \in \mathbb{R}^{n_j}$  et  $\sum_{j \in \{1, \dots, l\}} n_j = n_y$ ) (après avoir réordonner le vecteur de sortie si nécessaire) où les sous-vecteurs  $y_j$  correspondent aux mesures envoyées par le même nœud  $j$ . Nous supposons, sans perte de généralité, que le réseau ne comporte qu'un seul nœud passif où un observateur est placé. A chaque instant de transmission, un unique nœud est autorisé par le protocole à transmettre ses données, voir Figure 4.2. Entre deux instants de transmission,  $\hat{y}$  est définie par la fonction de blocage  $\hat{f}_P$  considérée.

**Remarque 4.3.3** *En pratique, l'observateur est implémenté numériquement, une modélisation en temps discret semble donc appropriée. Cependant, compte tenu des constantes de temps du système et du réseau ainsi que des vitesses de calculs des ordinateurs disponibles de nos jours, un modélisation en temps continu est souvent tout à fait raisonnable.*

**Remarque 4.3.4** *Il est implicitement supposé dans tout cette seconde partie de thèse que les observateurs émuloés ont besoin de connaître le vecteur  $y$  complet pour fonctionner : aucun nœud ne peut être ignoré. Dans le cas des observateurs linéaires par exemple, le système ne sera pas observable à partir de chaque nœud ou groupes de nœuds pris séparément, mais de tous réunis.*

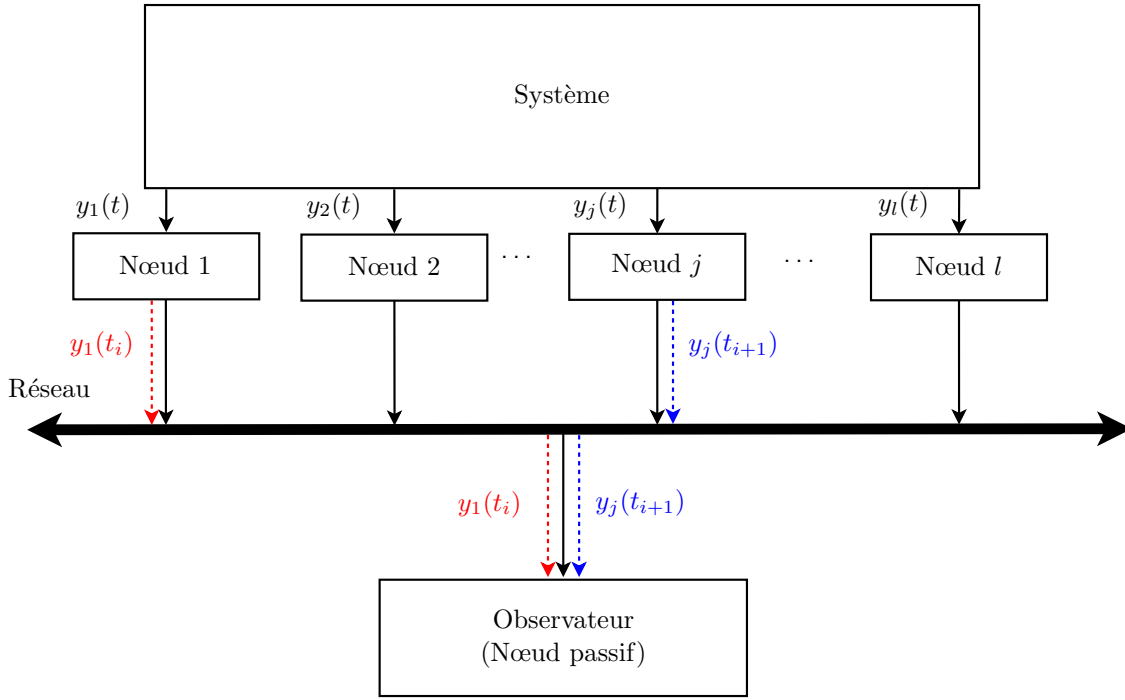


FIG. 4.2 – Observation des NCS

La formulation suivante sera celle utilisée pour l'analyse :

$$\dot{\xi} = f_{\xi}(t, \xi, e, z, w) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (4.22)$$

$$\dot{z} = f_z(t, \xi, e, z, w) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (4.23)$$

$$\dot{e} = g(t, \xi, e, z, w) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (4.24)$$

$$\xi(t_i^+) = \xi(t_i) \quad (4.25)$$

$$z(t_i^+) = z(t_i) \quad (4.26)$$

$$e(t_i^+) = h(i, e(t_i), z(t_i)), \quad (4.27)$$

où  $\xi = x - \bar{x} \in \mathbb{R}^{n_{\xi}}$  ( $n_{\xi} = n_x$ ) est le vecteur d'erreur d'observation,  $e = \hat{y} - y \in \mathbb{R}^{n_e}$  ( $n_e = n_y$ ) l'erreur induite par le réseau et

$$\begin{aligned} f_{\xi}(t, \xi, e, z, w) &= f_P(t, \xi + h_O(t, z), w) - \frac{\partial h_O}{\partial t}(t, z) - \frac{\partial h_O}{\partial z}(t, z) f_O(t, z, e + h_P(t, \xi + h_O(t, z)), w) \\ g(t, \xi, e, z, w) &= \hat{f}_P(t, e + h_P(t, \xi + h_O(t, z)), z, w) - \frac{\partial h_P}{\partial t}(t, \xi + h_O(t, z)) \\ &\quad - \frac{\partial h_P}{\partial x}(t, \xi + h_O(t, z)) f_P(t, \xi + h_O(t, z), w) \\ f_z(t, \xi, e, z, w) &= f_O(t, z, e + h_P(t, \xi + h_O(t, z)), w). \end{aligned} \quad (4.28)$$

L'équation (4.22) représente les dynamiques de l'erreur d'observation et (4.23) celles de l'état de l'observateur  $z$  dans les nouvelles coordonnées. Les variables  $\xi$  et  $z$  auraient pu être réunies en un même vecteur (comme dans [151]), toutefois nous devons les distinguer car nous ne



sommes pas intéressés par les même propriétés. En effet, contrairement à  $\xi$ , aucune propriété de convergence n'est désirée pour  $z$  mais seulement son existence ou sa bornitude.

On remarque qu'en prenant  $e = 0$ , la première étape de l'approche est retrouvée i.e. l'observation du système sans contrainte de communication.

Comme dans §4.2.1, la fonction  $h$ , qui définit le protocole, est typiquement telle que, si le nœud  $j \in \{1, \dots, l\}$  a accès au réseau, le sous-vecteur de l'erreur associée est initialisée à zéro. Les fonctions de blocage et les protocoles joueront un rôle clef dans l'analyse.

## Protocoles

Plusieurs exemples de protocoles d'ordonnement communément rencontrés sont définis.

**Round-Robin (RR).** Le protocole RR est donc la configuration la plus simple puisque chaque nœud transmet ses données avec une période  $l$ , l'ordre étant préalablement fixé. Ce type d'ordonnement a été largement étudié, cf. [78, 84, 113] par exemple, et sa stabilité a été analysée pour la première fois dans [151]. En décomposant le vecteur  $e$  en  $(e_1, \dots, e_l)$ , où  $e_j = \hat{y}_j - y_j \in \mathbb{R}^{n_j}$ , la fonction  $h$  est définie, pour  $i \in \mathbb{Z}_{>0}$  et  $e \in \mathbb{R}^{n_e}$ , par :

$$h(i, e) = (\mathbb{I} - \Delta(i))e, \quad (4.29)$$

où  $\Delta(i) = \text{diag}(\Delta_1(i), \dots, \Delta_l(i))$ ,  $\Delta_j(i) = \delta_j(i)\mathbb{I}_{n_j}$ ,  $j \in \{1, \dots, l\}$ , avec

$$\delta_j(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j + kl, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \quad (4.30)$$

Il est montré dans [151] que le protocole RR est UGES (Proposition 4). Pour voir cela, définissons la fonction

$$W(i, e) = \sqrt{\sum_{j=i}^{\infty} |\phi(j, i, e)|^2} \quad (4.31)$$

où  $\phi(j, i, e)$  est la solution du système discret (4.27) à l'instant  $j$ , avec pour condition initiale  $e$  au temps  $i$ . La fonction  $V = W^2$  est introduite. On remarque que pour tout  $e \in \mathbb{R}^{n_e}$ ,  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $|e|^2 = \phi^2(i, i, e) \leq V(i, e)$ . De plus, puisque  $\phi(t + i, i, e) = 0$  pour tout  $t \geq l$  et  $|h(i, e)| \leq |e|$ , on constate que  $V(i, e) \leq l|e|^2$ . D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} V(i+1, h(i, e)) &= V(i, e) + \sum_{k=i+1}^{\infty} |\phi(k, i, e)|^2 - \sum_{k=i}^{\infty} |\phi(k, i, e)|^2 \\ &= V(i, e) + \sum_{k=i+1}^{\infty} |\phi(k, i, e)|^2 - \sum_{k=i+1}^{\infty} |\phi(k, i, e)|^2 - |e|^2 \\ &= V(i, e) - |e|^2 \\ &= \frac{l-1}{l} V(i, e). \end{aligned} \quad (4.32)$$

On déduit que le protocole RR est UGES avec  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = \sqrt{l}$  et  $\rho = \sqrt{\frac{l-1}{l}}$ .

**RR modifié.** Ce protocole a été proposé dans [152] et est, comme son nom l'indique, une alternative au RR « classique ». Son intérêt réside dans le fait que, lorsque l'erreur  $e$  devient faible, la fréquence des transmissions est réduite afin de diminuer le transfert d'information. La fonction est définie par :

$$h(i,e) = (\mathbb{I} - \Delta(i,e))e, \quad (4.33)$$

où  $\Delta(i,e) = \text{diag}(\Delta_1(i,e), \dots, \Delta_l(i,e))$ ,  $\Delta_j(i,e) = \delta_j(i,e)\mathbb{I}_{n_j}$ ,  $j \in \{1, \dots, l\}$ , avec,  $(i,e) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n_e}$ ,

$$\delta_j(i,e) = \begin{cases} 1 & \text{si } |e| > 0, i = \lfloor \frac{1}{\text{sat}(|e|)} \rfloor (j + il), \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \quad (4.34)$$

pour tout  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$   $\text{sat}(s) = \min(s, 1)$  et  $\lfloor \cdot \rfloor$  représente la fonction partie entière par défaut. Pour  $|e| > 1$  le protocole se comporte exactement comme le RR et pour de plus faibles valeurs de  $|e|$  il transmet beaucoup moins fréquemment. Par exemple, lorsque  $|e| \in (\frac{1}{11}, \frac{1}{10}]$  la fréquence de transmission est dix fois plus petite que celle du RR classique. Ce ralentissement des transferts des données a une conséquence importante sur les propriétés de stabilité du protocole puisque celui-ci n'est pas UGES mais UGAS ([152]) :

**Définition 4.3.1 (Protocole UGAS)** *Le protocole (4.27) est UGAS s'il existe une fonction de Lyapunov  $W : \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n_e} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_{\infty}$  et  $\rho \in [0, 1)$  tels que, pour tout  $e \in \mathbb{R}^{n_e}$  et  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  :*

$$\alpha_1(|e|) \leq W(i,e) \leq \alpha_2(|e|) \quad (4.35)$$

$$W(i+1, h(i,e)) \leq \rho W(i,e). \quad (4.36)$$

Pour montrer qu'un protocole est UGAS, il est souvent plus aisé de prouver l'inégalité suivante plutôt que (4.36) :

$$W(i+1, h(i,e)) \leq W(i,e) - \alpha_3(W(i,e)), \quad (4.37)$$

où  $\alpha_3 \in \mathcal{K}$  telle que  $\alpha_3(s) \leq s$ ,  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . La proposition suivante nous indique que (4.35) et (4.37) suffisent à prouver que le protocole est UGAS.

**Proposition 4.3.1** *Supposons qu'il existe  $W : \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n_e} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  continue en  $e$  et uniformément en  $i$  telle que (4.35) et (4.37) soient vérifiées, alors il existe  $\rho \in \mathcal{K}_{\infty} \cap C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\geq 0})$  telle que  $U = \rho \circ W$  satisfait les conditions de la Définition 4.3.1.*

La preuve de la Proposition 4.3.1 est fournie dans l'Annexe C. Cette proposition est la version discrète d'un cas particulier de la Proposition 13 dans [165].

**Remarque 4.3.5** *De toute évidence, si le protocole est UGAS alors il est UGES, la réciproque étant fautive puisque les dynamiques du système sont non linéaires.*

**Try-Once-Discard (TOD).** Le protocole TOD a été utilisé pour la première fois dans [199]. Ce protocole garantit l'accès au nœud  $j \in \{1, \dots, l\}$ , pour lequel l'erreur  $|e_j|$  est la plus grande, ainsi pour  $e \in \mathbb{R}^{n_e}$ :

$$h(e) = (\mathbb{I} - \Psi(e)) e, \quad (4.38)$$

et  $\Psi(e) = \text{diag}(\Psi_1(e)\mathbb{I}_{n_1}, \dots, \Psi_l(e)\mathbb{I}_{n_l})$  avec :

$$\Psi_j(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = \arg \max_{i \in \{1, \dots, l\}} |e_i| \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \quad (4.39)$$

A chaque instant de transmission, tous les nœuds de capteurs tentent de transmettre leur paquet composé de l'indice de priorité et des données. La partie hardware du réseau choisit le nœud présentant l'erreur la plus importante et transmet ces données à tous les nœuds de capteurs ainsi qu'au nœud passif. Si plusieurs nœuds ont la même erreur, un ordre préétabli est respecté afin d'éviter les collisions.

La procédure décrite nécessite des dispositifs d'hardware implémentables sur les CAN, voir [199], ainsi que sur d'autres réseaux câblés après certaines modifications. Le protocole TOD n'est toutefois pas utilisable sur les réseaux sans fil [190].

Contrairement au RR, le TOD requiert l'emploi de *capteurs intelligents* ayant suffisamment de capacités de calculs pour accueillir une copie de l'observateur placé au nœud passif lorsque les fonctions de blocage Pred sont implémentées notamment. De cette manière, à chaque nœud  $j \in \{1, \dots, l+1\}$  (où l'indice  $l+1$  correspond au nœud passif), l'observateur ci-dessous est implémenté :

$$\dot{z}^j = f_O(t, z^j, \hat{y}, w) \quad (4.40)$$

$$\bar{x}^j = h_O(t, z^j). \quad (4.41)$$

Les  $l+1$  observateurs sont synchronisés ( $z^j(t) = z^k(t)$  pour tout  $t$  et  $(j, k) \in \{1, \dots, l+1\}^2$ ) en supposant qu'ils soient initialisés avec les mêmes valeurs et grâce à la procédure d'ordonnement (cf. Figure 4.3). La désignation du nœud émetteur est modélisé par une fonction constante par morceaux  $\sigma : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \{1, \dots, l\}$ , ainsi, lorsque le nœud  $k$  a été choisi à l'instant  $t_i$ ,  $\sigma(t) = k$  pour  $t \in [t_i, t_{i+1})$ , et  $y_{\sigma(t_i)}(t_i) = y_k(t_i)$ . De cette manière, au temps  $t \in [t_i, t_{i+1})$ , les signaux suivants sont disponibles pour :

- le nœud de capteurs  $j \in \{1, \dots, l\}$ :  $\sigma(t_i)$ ,  $y_{\sigma(t_i)}(t_i)$ ,  $y_j(t)$  et  $z^j(t)$ ;
- le nœud passif:  $\sigma(t_i)$ ,  $y_{\sigma(t_i)}(t_i)$ ,  $z^{l+1}(t)$ .

Puisque tous les observateurs reçoivent  $y_{\sigma(t_i)}(t_i)$ , ils ont tous à disposition le même vecteur d'entrée  $\hat{y}(t)$  et sont ainsi synchronisés (à moins qu'une défaillance numérique ou électronique n'apparaisse). L'indice  $j$  dans (4.40)-(4.41) peut par conséquent être omis.

**Remarque 4.3.6** Dans [42], le protocole TOD est différent puisque l'erreur considérée est celle entre la copie de la sortie de l'observateur,  $\bar{y}_j = h_P^j(t, \bar{x})$  ( $h_P = (h_P^1, \dots, h_P^l)$ ), et celle

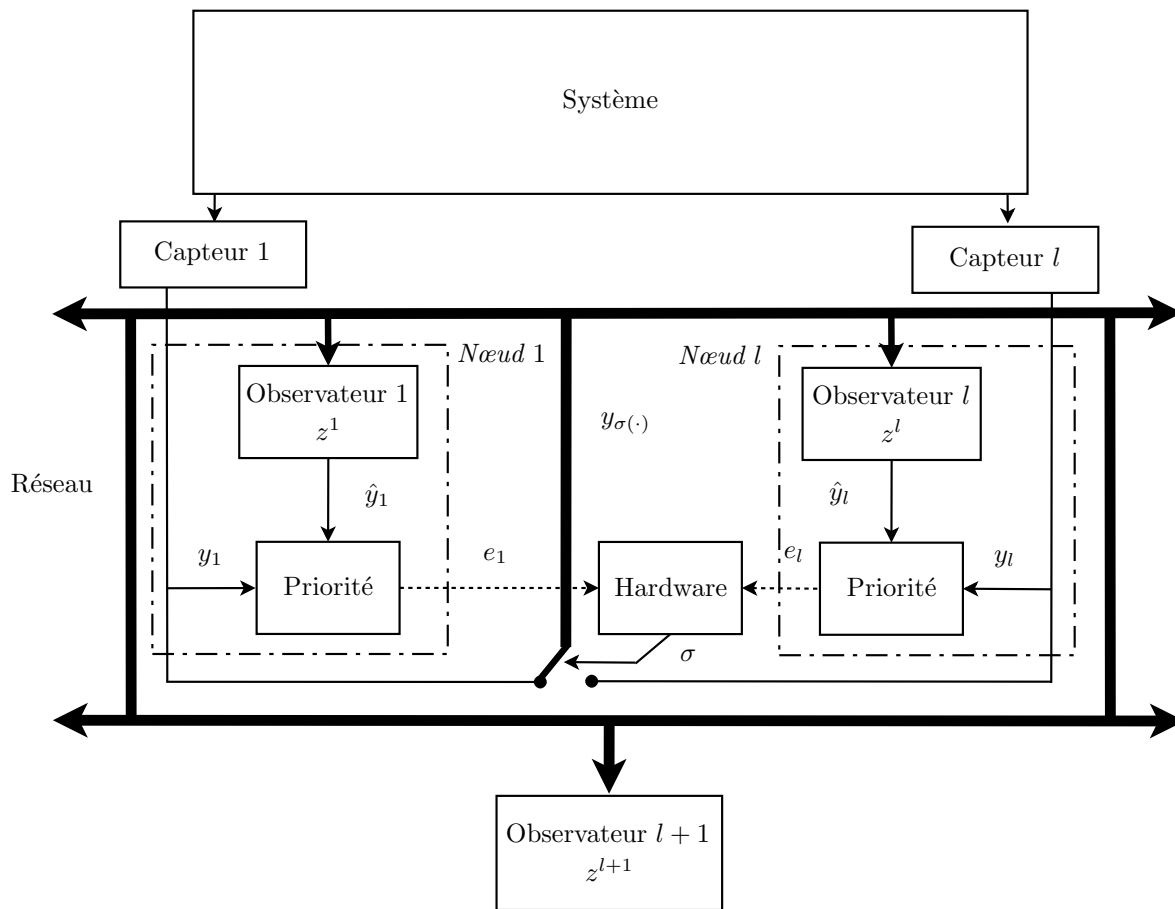


FIG. 4.3 – Implémentation du protocole TOD pour l'observation des NCS avec des bloqueurs *Pred*

mesurée. Nous n'étudierons pas ce protocole dans cette thèse, mais c'est une possibilité d'extension.

Nous allons montrer que le protocole TOD est UGES, d'après la Proposition 5 dans [151]. Soit la fonction

$$W(e) = |e|, \quad (4.42)$$

l'équation (4.9) est satisfaite avec  $a_1 = a_2 = 1$ . Prenons  $e \in \mathbb{R}^{n_e}$  quelconque et supposons, sans perte de généralité, que  $|e_1| \geq \max_{j \in \{2, \dots, l\}} |e_j|$  et  $h_1(i, e) = 0$ . On a :

$$|e_1|^2 = \max_{j \in \{1, \dots, l\}} |e_j|^2 \geq \frac{1}{l} \sum_{j \in \{1, \dots, l\}} |e_j|^2 = \frac{1}{l} |e|^2. \quad (4.43)$$

D'autre part,

$$|h(i, e)|^2 = \sum_{j \in \{2, \dots, l\}} |h_j(i, e)|^2 = \sum_{j \in \{2, \dots, l\}} |e_j|^2 = |e|^2 - |e_1|^2. \quad (4.44)$$

Par conséquent, d'après (4.43) et (4.44),

$$W(i+1, h(i, e)) = |h(i, e)| \leq \sqrt{|e|^2 - \frac{1}{l}|e|^2} = \sqrt{\frac{l-1}{l}} |e| = \sqrt{\frac{l-1}{l}} W(i, e).$$

Le protocole TOD est donc bien UGES, d'après la Définition 4.2.1, avec  $\rho = \sqrt{\frac{l-1}{l}}$ .

**TOD modifié.** A l'instar du RR modifié, il est possible de changer la procédure de communication du TOD afin de réduire dans ce cas les quantités de données transmises lorsque l'erreur  $e$  est faible. Des protocoles dits *TOD modifiés* peuvent alors être proposés, comme dans [152]. Un nouveau TOD modifié est ici introduit, pour lequel les fonctions  $\Psi_j$ 's sont définies par :

$$\Psi_j(e) = \begin{cases} \text{sat}(\sqrt{l}|e_j|) & \text{si } j = \min(\arg \max_{i \in \{1, \dots, l\}} |e_i|) \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \quad (4.45)$$

Protocoles TOD classique et modifié se confondent pour de larges valeurs de  $|e|$ , tandis que lorsque l'erreur approche de zéro, l'amplitude des sauts est réduite. Pour ces raisons, le TOD modifié n'est pas UGES mais UGAS comme nous le montrons dans l'Annexe E.

### Fonctions de blocage

Deux exemples de fonctions de blocage sont donnés, mais de nombreuses autres bloqueurs peuvent être considérés comme ceux d'ordre multiple par exemple.

**Bloqueur d'ordre zéro** (en anglais *zero-order-hold (ZOH)*). Les ZOH maintiennent constant le vecteur  $\hat{y}$  entre deux instants de transmission successifs. Ces bloqueurs sont largement utilisés pour les systèmes à données échantillonnées. Dans ce cas :

$$\hat{f}_P(t, \hat{y}, z, w) = 0. \quad (4.46)$$

Lorsqu'un nœud envoie son paquet, le sous-vecteur de  $\hat{y}$  correspondant prend ses nouvelles valeurs jusqu'à ce que ce nœud transmette de nouveau, i.e. s'il s'agit du nœud  $j$  à l'instant  $t_i$  :

$$\hat{y}_k(t_i^+) = \begin{cases} \hat{y}_k(t_i) & \text{si } k \neq j \\ y_j(t_i) & \text{si } k = j \end{cases} \quad \forall k \in \{1, \dots, l\}. \quad (4.47)$$

**Bloqueur prédictif (Pred).** Plus complexes que les bloqueurs couramment utilisés, le Pred consiste à prédire le vecteur de sortie du système à l'aide de la variable  $\hat{y}$  qui évolue le long des mêmes champs de vecteur que  $y$ . Ainsi, une sorte de copie de la sortie du système est utilisée par l'observateur entre deux instants de transmission. Ce qui se traduit par :

$$\hat{f}_P(t, \hat{y}, z, w) = \frac{\partial h_P}{\partial t}(t, h_O(t, z)) + \frac{\partial h_P}{\partial x}(t, h_O(t, z)) f_P(t, h_O(t, z), w). \quad (4.48)$$

La condition initiale  $\hat{y}(t_0)$  est arbitraire et, à chaque instant de transmission  $t_i$  ( $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ ), l'équation différentielle ordinaire (4.48) est réinitialisée avec les nouvelles mesures reçues. Cette technique a été développée pour la synthèse d'observateurs à données échantillonnées dans [92] pour les systèmes monosorties. Des idées similaires sont utilisées pour la conception de protocoles de quantification dynamiques dans [116, 118] et la compensation de retards dans [32].

### Observateurs pour les systèmes à données échantillonnées

Il est important de remarquer que le modèle (4.22)-(4.27) recouvre le cas des observateurs de systèmes à données échantillonnées. Il suffit pour cela de réduire le nombre de capteurs  $l$  à 1 : tous les capteurs communiquent leurs données en même temps. La fonction  $h$  est alors :

$$h = 0, \quad (4.49)$$

puisque les erreurs induites par le réseau sont annulées à chaque instant de transmission. Par conséquent, la fonction de Lyapunov  $W(e) = |e|$  permet de montrer que ce protocole particulier est UGES avec  $a_1 = a_2 = 1$  et  $\rho = 0$ .

Nous proposons ainsi un nouveau cadre d'étude pour les observateurs par émulation de systèmes pour lesquels les mesures sont échantillonnées, qui peut être vu comme une alternative à celui proposé dans [9] basé sur des modèles approximatifs discrets. Le problème est ici traité d'un point de vue hybride : les dynamiques continues de l'observateur sont affectées par des sauts aux instants d'échantillonnage (comme dans [44, 92, 138] par exemple). Les deux approches sont différentes et fournissent des résultats complémentaires.

Les observateurs développés dans [92] entrent dans notre cadre si l'on interprète la variable auxiliaire introduite comme un cas particulier de fonction de blocage : le Pred. Les travaux présentés dans la suite de cette partie permettent d'étendre cette étude aux systèmes

multisorties ainsi qu'à d'autres types de fonctions de blocage, le tout à l'aide de conditions différentes.

**Remarque 4.3.7** *Notons que lorsque la structure de l'observateur est modifié, afin de prendre en compte l'effet de l'échantillonnage, par rapport à une structure continue connue (comme dans [44, 138] et [3] pour les observateurs adaptatifs), notre modèle devra être adapté pour pouvoir analyser les propriétés de convergence.*

### 4.3.3 Travaux de thèse

Soulignons que le cadre d'étude présenté est une contribution en soi puisqu'il offre pour la première fois une modélisation générale pour l'étude des observateurs de NCS par émulation. On peut imaginer étudier d'autres constructions d'observateurs et protocoles d'ordonnement à partir de celui-ci ou de variations si nécessaires.

Dans cette seconde partie de thèse, une série d'outils pour l'analyse de stabilité des observateurs déterministes émulés est présentée.

### Conditions suffisantes pour l'émulation d'observateurs pour les NCS

Au Chapitre 5, à partir de la modélisation proposée dans §4.3.2, un ensemble de conditions suffisantes est donné qui garantit la convergence de l'erreur d'observation lorsque les mesures du système sont transmises via le réseau. L'observateur connu satisfait des propriétés de stabilité entrée-état ou entrée-sortie par rapport aux perturbations de mesures avec des gains linéaires. Cette hypothèse signifie en quelque sorte que la structure disponible est suffisamment robuste aux erreurs induites par le réseau. Nous verrons que les observateurs linéaires et à grand gain vérifient ces hypothèses. Nous supposons dans ce chapitre que les protocoles étudiés sont UGES. Considérant le problème comme l'interconnexion de trois sous-systèmes ayant pour variable d'état respective l'erreur d'observation, l'état de l'observateur et le vecteur d'erreurs induites par le réseau, une version atypique du théorème du petit gain inspirée de [86] est invoquée afin de garantir la convergence de l'erreur d'observation et le bon comportement du système global. Les résultats obtenus permettront ensuite de déduire des bornes explicites sur le MATI pour les observateurs linéaires et à grand gain pour différentes configurations du réseau. Le cas des observateurs de systèmes à données échantillonnées est également traité. Rarement étudié pour la commande des NCS, nous verrons au travers d'exemples que les fonctions de blocage peuvent avoir un impact important sur les performances des observateurs.

### Extension des observateurs de Karafyllis-Kravaris

Dans [92], une nouvelle méthode de synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires à données échantillonnées est développée. La synthèse repose sur la connaissance d'un observateur continu satisfaisant des propriétés de robustesse vis-à-vis des perturbations de mesure.

L'idée principale consiste à remplacer la sortie du système, indisponible entre deux instants d'échantillonnage, par une variable qui évolue le long des même champs de vecteurs et dont la trajectoire est corrigée lorsque des mesures sont reçues. Nous avons montré dans §4.3.2 qu'il s'agit en fait d'un type particulier de fonction de blocage. Au Chapitre 6, nous étendrons ces résultats aux NCS. Cette étude peut au premier abord paraître redondante avec le Chapitre 5, toutefois les hypothèses considérées ainsi que les outils d'analyse sont différents. A partir de l'analyse des trajectoires, un théorème du petit gain initialement développé pour les systèmes hybrides ne vérifiant pas la propriété de semi-groupe (ce qui n'est pas le cas ici) est utilisé. Il nous permettra de conclure quant à la convergence de l'observateur et de déduire des bornes sur le MATI différentes de celles du Chapitre 5. En résumé, lorsque la fonction de blocage choisie est *Pred*, nous offrons deux méthodes d'analyse, l'une au Chapitre 5, l'autre au 6 permettant de déduire des bornes sur le MATI à partir d'hypothèses différentes, qui sont comparées pour divers exemples. A noter que le Chapitre 6 permet l'étude d'une nouvelle classe de protocoles dits à excitation persistante contrairement au précédent.

### **Convergence semiglobale pratique d'observateurs émulsés pour les NCS**

Il est supposé au Chapitre 5 que toutes les hypothèses de type stabilité entrée-état/entrée-sortie soient vérifiées avec des gains linéaires. Bien que ces conditions soient assurées par les observateurs linéaires et à grand gain, c'est-à-dire les observateurs globalement Lipschitziens, ce n'est pas le cas d'autres conceptions comme les observateurs par injection de sortie ou critère du cercle [8, 50]. En effet, il est possible de prouver que pour ces derniers, ces conditions sont satisfaites mais avec des gains non linéaires (sous certaines conditions). Au Chapitre 7, nous étendrons les hypothèses du Chapitre 5 afin de pouvoir analyser de plus larges classes de systèmes. De plus, nous étudierons des protocoles UGAS et non plus exclusivement UGES. Ces hypothèses auront pour conséquence de ne plus garantir des propriétés de convergence globale de l'observateur mais semiglobale (la borne sur le MATI dépend de la région où se situent les conditions initiales) et pratique. Toujours à partir de l'analyse des trajectoires, un nouveau théorème du petit gain est utilisé, cf. Annexe D. Ce théorème est différent de celui employé au Chapitre 5, puisqu'il permet de prouver la convergence semiglobale pratique de l'erreur d'observation. Cette étude présente l'avantage d'être plus générale que celle du Chapitre 5 mais soulève des difficultés techniques supplémentaires.





## Chapitre 5

# Conditions suffisantes pour l'émulation d'observateurs pour les NCS

### 5.1 Introduction

Au chapitre précédent, un premier pas pour l'étude des observateurs émulsés pour les NCS a été fait puisque le cadre d'étude développé offre pour la première fois une formulation générale du problème. Reste alors à savoir sous quelles conditions l'observateur convergera effectivement, lorsque les mesures du système sont transmises par l'intermédiaire d'un réseau. Dans ce chapitre, un ensemble de conditions suffisantes sur l'observateur continu et le protocole d'ordonnement sont établies afin d'assurer la convergence globale de l'erreur d'observation. Il est ainsi supposé que l'observateur continu vérifie des propriétés de stabilité entrée-état ou entrée-sortie vis-à-vis des perturbations de mesures comme dans [92, 117, 174]. Cette condition assure que l'observateur est suffisamment robuste aux erreurs induites par le réseau. Les protocoles d'ordonnement étudiés seront exclusivement UGES, voir Chapitre 4, où nous avons vu des exemples satisfaisant cette propriété de stabilité. Nous insisterons également sur le rôle des fonctions de blocage. Rarement étudiées pour la commande des NCS, nous verrons en quelle mesure elles influent sur les propriétés de stabilité.

La stabilité est analysée à l'aide de bornes sur les trajectoires et repose sur l'utilisation d'un théorème du petit gain atypique. En effet, nous considérons le problème comme l'interconnexion de trois sous-systèmes dont les variables d'état sont respectivement l'erreur d'observation, l'état de l'observateur et l'erreur induite par le réseau. Puisque l'état de l'observateur n'a a priori aucune raison de converger, le théorème du petit gain classique [86] ne permet pas de conclure dans le cas général. Nous verrons en quelle mesure nous sommes capables de quantifier l'évolution de l'erreur d'observation.

Cette étude peut être considérée comme le dual de [151], où un cadre pour la commande

par émulation des NCS est développé. Comme dans [151], toutes les conditions de type stable entrée-état ou entrée-sortie sont supposées vérifiées avec des gains linéaires. De telles hypothèses nous permettrons de déduire des propriétés de stabilité globale et des bornes sur le MATI explicites facilement calculables. Nous verrons que les observateurs linéaires et à grand gain vérifient ces conditions. Le cas plus général où les gains sont non linéaires est traité au Chapitre 7. Les propriétés ne seront alors plus globales mais semiglobales : le MATI dépend de la boule où se situent les conditions initiales.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Dans un premier temps, les hypothèses sont présentées et les résultats de stabilité donnés dans §5.2. Nous montrerons ensuite que ces conditions sont satisfaites par les observateurs linéaires et à grand gain dans §5.3. Enfin nous concluons.

## 5.2 Hypothèses et analyse de stabilité

Cette section est divisée en deux parties. Dans un premier temps, les conditions les plus générales sont considérées qui nous permettent d'affirmer que l'erreur d'observation converge pratiquement vers l'origine lorsque le MATI satisfait certaines conditions. Puis, lorsque des hypothèses plus fortes sont respectées, la convergence asymptotique est assurée. Le lien entre ces hypothèses et les configurations du réseau (protocole et fonction de blocage) est réalisé à la section suivante sur des classes particulières de systèmes.

### 5.2.1 Convergence pratique

Le système étudié est donc de la forme :

$$\dot{\xi} = f_{\xi}(t, \xi, e, z, w) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (5.1)$$

$$\dot{z} = f_z(t, \xi, e, z, w) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (5.2)$$

$$\dot{e} = g(t, \xi, e, z, w) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (5.3)$$

$$\xi(t_i^+) = \xi(t_i) \quad (5.4)$$

$$z(t_i^+) = z(t_i) \quad (5.5)$$

$$e(t_i^+) = h(i, e(t_j), z(t_i)), \quad (5.6)$$

où  $\xi \in \mathbb{R}^{n_{\xi}}$  représente l'erreur d'observation,  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  l'état de l'observateur,  $e \in \mathbb{R}^{n_e}$  l'erreur induite par le réseau et  $w \in \mathcal{L}_{\infty}^{n_w}$  un vecteur de signaux de perturbations. La séquence d'instantanés de transmission  $\{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{>0}}$  vérifie :

$$v \leq t_i - t_{i-1} \leq \tau \quad \forall i \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad (5.7)$$

avec  $\tau \in [v, \infty)$  et  $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  l'instant initial.

L'observateur continu est supposé robuste aux perturbations de mesures d'après l'hypothèse ci-dessous.

**Hypothèse 5.2.1** *Le système (5.1)-(5.2) est stable entrée-sortie de  $(e,w)$  à  $\xi$  avec des gains linéaires, i.e. il existe  $\beta_1 \in \mathcal{KL}$ ,  $\gamma_1^e, \gamma_1^w \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  tels que, pour tout  $(\xi_0, z_0) \in \mathbb{R}^{n_\xi + n_z}$ ,  $(e, w) \in \mathcal{L}_\infty^{n_e + n_w}$ , les solutions de (5.1)-(5.2) vérifient :*

$$|\xi(t)| \leq \beta_1(|(\xi_0, z_0)|, t - t_0) + \gamma_1^e \|e\|_{[t_0, t]} + \gamma_1^w \|w\|_{[t_0, t]} \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (5.8)$$

Plusieurs études ont déjà eu recours à ce type de conditions pour la synthèse d'observateurs pour les systèmes à données échantillonnées, en réseau ou quantifiés [92, 117] qui sont similaires aux hypothèses invoquées pour la commande des NCS dans [151] (condition 2 du Théorème 7) et des NCS avec quantification dans [148] (condition (i) du Théorème 1). Cette hypothèse peut être vérifiée à l'aide de la Proposition B.2.1.

Nous concentrons notre attention sur la classe de protocoles UGES suivante.

**Hypothèse 5.2.2** *Le protocole (5.6) est UGES avec une fonction de Lyapunov  $W : \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n_e} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  qui est localement Lipschitzienne en  $e$  et uniformément en  $i$ .*

La condition suivante rappelle (27) dans [151] et (12) dans [148]. En la combinant avec l'Hypothèse 5.2.2, on montrera que le système (5.3) est stable entrée-état vis-à-vis de  $(\xi, z, w)$  avec des gains linéaires.

**Hypothèse 5.2.3** *Il existe  $L, \gamma_2^\xi, \gamma_2^z, \gamma_2^w \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  tels que pour tout  $(i, t, \xi, z, w) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^{n_\xi + n_z + n_w}$  et presque tout  $e \in \mathbb{R}^{n_e}$  :*

$$\left\langle \frac{\partial W(i, e)}{\partial e}, g(t, \xi, e, z, w) \right\rangle \leq LW(i, e) + \gamma_2^\xi |\xi| + \gamma_2^z |z| + \gamma_2^w |w|. \quad (5.9)$$

L'Hypothèse 5.2.3 est souvent vérifiée à l'aide des conditions suivantes :

(i) il existe  $L_1 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  tel que, pour presque tout  $e \in \mathbb{R}^{n_e}$  et tout  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , on a :

$$\left| \frac{\partial W(i, e)}{\partial e} \right| \leq L_1, \quad (5.10)$$

(ii) il existe  $L_2, \tilde{\gamma}_2^\xi, \tilde{\gamma}_2^z, \tilde{\gamma}_2^w \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  tels que pour tout  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ ,  $(\xi, e, z, w) \in \mathbb{R}^{n_\xi + n_e + n_z + n_w}$  :

$$|g(t, \xi, e, z, w)| \leq L_2 |e| + \tilde{\gamma}_2^\xi |\xi| + \tilde{\gamma}_2^z |z| + \tilde{\gamma}_2^w |w|. \quad (5.11)$$

Ainsi, (5.9) est satisfait avec  $L = L_1 L_2$ ,  $\gamma_2^\xi = L_1 \tilde{\gamma}_2^\xi$ ,  $\gamma_2^z = L_1 \tilde{\gamma}_2^z$  et  $\gamma_2^w = L_1 \tilde{\gamma}_2^w$ . La condition (i) est équivalente au fait que  $W$  est globalement Lipschitzienne en  $e$  et uniformément en  $i$ , d'après le théorème de la valeur moyenne de Lebourg (cf. Théorème 2.3.7 dans [36]). Nous verrons que les fonctions de Lyapunov des protocoles étudiés vérifient de telles propriétés.

Le résultat ci-dessous est une conséquence de la Proposition 6 dans [151].

**Proposition 5.2.1** *Si les Hypothèses 5.2.2 et 5.2.3 sont vérifiées et  $\tau \in [v, \tau_0)$  où*

$$\tau_0 = \frac{1}{L} \ln\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (5.12)$$

si  $L = 0$ ,

$$\tau_0 = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{1}{L} \ln\left(\frac{1}{\rho}\right) = \infty, \quad (5.13)$$

alors, il existe  $\beta_2 \in \exp -\mathcal{KL}$  tel que pour tout  $e_0 \in \mathbb{R}^{n_e}$ ,  $(\xi, z, w) \in \mathcal{L}_\infty^{n_\xi + n_z + n_w}$ , le long des solutions de (5.3) et (5.6) :

$$|e(t)| \leq \beta_2(|e_0|, t - t_0) + \zeta(\tau) \left( \gamma_2^\xi \|\xi\|_{[t_0, t]} + \gamma_2^z \|z\|_{[t_0, t]} + \gamma_2^w \|w\|_{[t_0, t]} \right) \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad (5.14)$$

où  $\zeta(\tau) = \frac{\exp(L\tau) - 1}{a_1 L(1 - \rho \exp(L\tau))}$  et  $a_1 \in \mathbb{R}_{>0}$  est défini dans (4.9).

**Preuve.** Soient  $e_0 \in \mathbb{R}^{n_e}$ ,  $(\xi, z, w) \in \mathcal{L}_\infty^{n_\xi + n_z + n_w}$  et  $\tau \in [v, \tau_0)$ . Dans un premier temps, nous allons montrer par récurrence que pour tout  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ , le long des solutions de (5.3) et (5.6) :

$$\begin{aligned} |W(i, e(t))| &\leq \rho^i \exp((i+1)L\tau) W(0, e(t_0)) \\ &\quad + \left( \gamma_2^\xi \|\xi\|_{[t_0, t]} + \gamma_2^z \|z\|_{[t_0, t]} + \gamma_2^w \|w\|_{[t_0, t]} \right) \frac{1}{L} [\exp(L\tau) - 1] \\ &\quad \times \sum_{j \in \{0, \dots, i\}} (\rho \exp(L\tau))^j. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Cas  $i = 0$ . Afin de lever toute ambiguïté à propos de la non-dérivabilité potentielle de  $W$ , il est préférable de rappeler les explications fournies dans [151]. Puisque  $W$  est localement Lipschitzienne en  $e$ ,  $\dot{W}$  existe et est égale pour presque tout  $t$  à la dérivée directionnelle. De plus, on sait que la dérivée directionnelle généralisée de Clarke,  $W^\circ(e; g(t, \xi, e, z, w))$ , majore la dérivée directionnelle. Ainsi, d'après la condition 5 page 100 dans [194], si  $\frac{\partial W(i, e)}{\partial i} + \frac{\partial W(i, e)}{\partial e} g(t, \xi, e, z, w) \leq LW(i, e) + \gamma_2^\xi |\xi| + \gamma_2^z \|z\| + \gamma_2^w |w|$  pour tout  $t, \xi, z, w$  et presque tout  $e$ , alors, pour tout  $i$  et presque tout  $t$  on a  $\dot{W}(i, e(t)) \leq W^\circ(e; g(t, \xi, e, z, w)) \leq LW(i, e(t)) + \gamma_2^\xi |\xi| + \gamma_2^z \|z\| + \gamma_2^w |w|$ . Par conséquent, d'après le principe de comparaison, en vu de l'Hypothèse 5.2.3, on obtient, pour tout  $t \in [t_0, t_1]$  :

$$\begin{aligned} |W(0, e(t))| &\leq \exp(L\tau) W(0, e(t_0)) \\ &\quad + \left( \gamma_2^\xi \|\xi\|_{[t_0, t]} + \gamma_2^z \|z\|_{[t_0, t]} + \gamma_2^w \|w\|_{[t_0, t]} \right) \frac{1}{L} [\exp(L\tau) - 1]. \end{aligned} \quad (5.16)$$

L'inégalité (5.15) est donc vérifiée pour  $i = 0$ .

$i \Rightarrow i+1$ . On suppose que (5.15) soit vérifiée pour  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . D'après le principe de comparaison et l'Hypothèse 5.2.3, pour tout  $t \in [t_{i+1}, t_{i+2}]$  :

$$\begin{aligned} |W(i+1, e(t))| &\leq \exp(L\tau) W(i+1, e(t_{i+1}^+)) \\ &\quad + \left( \gamma_2^\xi \|\xi\|_{[t_{i+1}, t]} + \gamma_2^z \|z\|_{[t_{i+1}, t]} + \gamma_2^w \|w\|_{[t_{i+1}, t]} \right) \frac{1}{L} [\exp(L\tau) - 1]. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Puisque (5.15) est satisfaite pour  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , que le protocole est UGES et que la condition (4.10) est vérifiée, pour tout  $t \in [t_{i+1}, t_{i+2}]$ :

$$\begin{aligned}
|W(i+1, e(t))| &\leq \rho \exp(L\tau) W(i, e(t_{i+1})) \\
&\quad + \left( \gamma_2^\xi \|\xi\|_{[t_i, t]} + \gamma_2^z \|z\|_{[t_i, t]} + \gamma_2^w \|w\|_{[t_i, t]} \right) \frac{1}{L} [\exp(L\tau) - 1] \\
&\leq \rho \exp(L\tau) \left[ \rho^i \exp((i+1)L\tau) W(0, e(t_0)) \right. \\
&\quad + \left. \left( \gamma_2^\xi \|\xi\|_{[t_0, t]} + \gamma_2^z \|z\|_{[t_0, t]} + \gamma_2^w \|w\|_{[t_0, t]} \right) \frac{1}{L} [\exp(L\tau) - 1] \right. \\
&\quad \times \left. \sum_{j \in \{0, \dots, i\}} (\rho \exp(L\tau))^j \right] \\
&\quad + \left( \gamma_2^\xi \|\xi\|_{[t_0, t]} + \gamma_2^z \|z\|_{[t_0, t]} + \gamma_2^w \|w\|_{[t_0, t]} \right) \frac{1}{L} [\exp(L\tau) - 1] \\
&\leq \rho^{i+1} \exp((i+2)L\tau) W(0, e(t_0)) \\
&\quad + \left( \gamma_2^\xi \|\xi\|_{[t_0, t]} + \gamma_2^z \|z\|_{[t_0, t]} + \gamma_2^w \|w\|_{[t_0, t]} \right) \frac{1}{L} [\exp(L\tau) - 1] \\
&\quad \times \sum_{j \in \{0, \dots, i+1\}} (\rho \exp(L\tau))^j.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

L'inégalité (5.15) est bien vérifiée pour  $i+1$ , ainsi elle l'est pour tout  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . On en déduit que pour tout  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ :

$$\begin{aligned}
|W(i, e(t))| &= \rho^i \exp((i+1)L\tau) W(0, e(t_0)) \\
&\quad + \left( \gamma_2^\xi \|\xi\|_{[t_0, t]} + \gamma_2^z \|z\|_{[t_0, t]} + \gamma_2^w \|w\|_{[t_0, t]} \right) a_1 \zeta(\tau),
\end{aligned} \tag{5.19}$$

avec  $\zeta(\tau) = \frac{\exp(L\tau) - 1}{a_1 L (1 - \rho \exp(L\tau))}$ . Si  $\rho = 0$ , d'après (4.9), (5.14) est satisfaite avec n'importe quelle fonction  $\beta_2 \in \exp - \mathcal{KL}$ . Dans le cas où  $\rho \neq 0$ , pour tout  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ , puisque  $\tau < \tau_0$  et que donc  $\ln(\rho \exp(L\tau)) < 0$ , et que  $\frac{t-t_0}{\tau} \leq i+1$ :

$$\begin{aligned}
\rho^i \exp((i+1)L\tau) &= \frac{1}{\rho} \exp(\ln(\rho \exp(L\tau))(i+1)) \\
&\leq \frac{1}{\rho} \exp(\ln(\rho \exp(L\tau)) \frac{t-t_0}{\tau}).
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
|W(i, e(t))| &\leq \frac{1}{\rho} \exp(\ln(\rho \exp(L\tau)) \frac{t-t_0}{\tau}) W(0, e(t_0)) \\
&\quad + \left( \gamma_2^\xi \|\xi\|_{[t_0, t]} + \gamma_2^z \|z\|_{[t_0, t]} + \gamma_2^w \|w\|_{[t_0, t]} \right) \frac{1}{L} [\exp(L\tau) - 1] a_1 \zeta(\tau),
\end{aligned} \tag{5.21}$$

d'après (4.9),

$$\begin{aligned}
|e(t)| &\leq \frac{a_2}{a_1 \rho} \exp(\ln(\rho \exp(L\tau)) \frac{t-t_0}{\tau}) |e(t_0)| \\
&\quad + \zeta(\tau) \left( \gamma_2^\xi \|\xi\|_{[t_0, t]} + \gamma_2^z \|z\|_{[t_0, t]} + \gamma_2^w \|w\|_{[t_0, t]} \right) \frac{1}{L} [\exp(L\tau) - 1].
\end{aligned} \tag{5.22}$$

En nommant  $\beta_2 : (s, t) \mapsto \frac{a_2}{a_1 \rho} \exp(\ln(\rho \exp(L\tau)) \frac{t}{\tau}) s$  qui est une fonction de classe  $\exp - \mathcal{KL}$  le résultat désiré est obtenu.  $\square$

**Remarque 5.2.1** *En réalité, la fonction  $\beta_2$  est de classe  $\mathcal{K}$  en  $\tau$ . Ainsi lorsque  $\tau$  tend vers 0 (oublions momentanément le paradoxe de Zénon), on obtient  $W = 0$  puisque  $\zeta(0) = 0$ , ce qui*

est en accord avec le fait que le problème est résolu lorsque les contraintes de communication sont ignorées ( $e = 0$ ). Afin de soulager les notations, nous avons choisi d'omettre cette dépendance. Dans la suite de l'analyse, nous prendrons implicitement  $\beta_2$  qui dépend, non pas de  $\tau$ , mais des bornes sur  $\tau$  indiquées dans les énoncés des théorèmes et corollaires.

**Remarque 5.2.2** On remarque que  $\zeta \in \mathcal{K}$ , puisque cette fonction continue est strictement croissante sur  $[0, \frac{1}{L} \ln(\frac{1}{\rho})]$  et  $\zeta(0) = 0$ .

L'hypothèse de stabilité suivante sur le système (5.2) garantira la bornitude des états du système (5.1)-(5.6).

**Hypothèse 5.2.4** Le système (5.2) est UEBEB avec pour entrée  $(\xi, e, w)$  et des gains linéaires, i.e. il existe  $\alpha \in \mathcal{K}$  et  $\gamma_3^\xi, \gamma_3^e, \gamma_3^w \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  tels que, pour tout  $z_0 \in \mathbb{R}^{n_z}$ ,  $(\xi, e, w) \in \mathcal{L}_\infty^{n_\xi + n_e + n_w}$ , les propriétés suivantes sont satisfaites par les solutions de (5.2) :

$$|z(t)| \leq \alpha(|z_0|) + \gamma_3^\xi \|\xi\|_{[t_0, t]} + \gamma_3^e \|e\|_{[t_0, t]} + \gamma_3^w \|w\|_{[t_0, t]} \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (5.23)$$

**Remarque 5.2.3** Tout au long de cette étude, les gains des perturbations exogènes,  $\gamma_i^w$  où  $i \in \{1, 2, 3\}$ , sont supposés linéaires uniquement afin de simplifier l'exposé. En effet, tous les résultats s'appliquent immédiatement pour des gains non linéaires  $\gamma_i^w \in \mathcal{K}$ .

Le théorème principal peut maintenant être énoncé.

**Théorème 5.2.1** Supposons que les Hypothèses 5.2.1- 5.2.4 soient vérifiées, si  $\tau \in [v, \tau_1)$  où

$$\tau_1 = \frac{1}{L} \ln \left( \frac{La_1 + [\gamma_1^e(\gamma_2^\xi + \gamma_2^z \gamma_3^\xi) + \gamma_2^z \gamma_3^e]}{L\rho a_1 + [\gamma_1^e(\gamma_2^\xi + \gamma_2^z \gamma_3^\xi) + \gamma_2^z \gamma_3^e]} \right), \quad (5.24)$$

si  $L = 0$ ,

$$\tau_1 = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{1}{L} \ln \left( \frac{La_1 + [\gamma_1^e(\gamma_2^\xi + \gamma_2^z \gamma_3^\xi) + \gamma_2^z \gamma_3^e]}{L\rho a_1 + [\gamma_1^e(\gamma_2^\xi + \gamma_2^z \gamma_3^\xi) + \gamma_2^z \gamma_3^e]} \right) = \frac{a_1(1-\rho)}{\gamma_1^e(\gamma_2^\xi + \gamma_2^z \gamma_3^\xi) + \gamma_2^z \gamma_3^e}, \quad (5.25)$$

alors le système (5.1)-(5.6) est UEBEB avec  $w$  comme entrée et il existe  $\beta \in \mathcal{KL}$ ,  $\sigma \in \mathcal{K}$ ,  $\bar{\sigma}, \varepsilon \in \mathcal{KK}$  tels que, pour tout  $\Delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $(\xi_0, e_0, z_0) \in \mathbb{R}^{n_\xi + n_e + n_z}$  avec  $|(\xi_0, e_0, z_0)| < \Delta$ ,  $w \in \mathcal{L}_\infty^{n_w}$  :

$$|(\xi(t), e(t))| \leq \beta(|(\xi_0, e_0, z_0)|, t - t_0) + \sigma(\|w\|_\infty) + \bar{\sigma}(\tau, \|w\|_\infty) + \varepsilon(\tau, \Delta) \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (5.26)$$

**Preuve.** Dans un premier temps, il est prouvé que le système (5.1)-(5.6) est positivement complet pour toute perturbation  $w \in \mathcal{L}_\infty^{n_w}$ . La bornitude des variables  $\xi$ ,  $e$  et  $z$  est ensuite déduite. Finalement, la propriété de convergence désirée (5.26) est obtenue.

*Etape 1: Complétude positive.*

Soient  $(\xi_0, e_0, z_0) \in \mathbb{R}^{n_\xi + n_e + n_z}$ ,  $w \in \mathcal{L}_\infty^{n_w}$  et  $\tau \in [v, \tau_1)$ . Soit  $[t_0, t_{\max})$  l'intervalle d'existence maximal du système (5.1)-(5.6), où  $t_{\max} \in (t_0, \infty]$ . Notons que la Proposition 5.2.1 peut

bien être invoquée puisque  $\tau_1 \leq \tau_0$  (il suffit, pour le voir, d'utiliser le fait que  $\rho < 1$ ). Soit  $t \in [t_0, t_{\max})$ , d'après les Hypothèses 5.2.1, 5.2.4 et la Proposition 5.2.1, on a :

$$\begin{aligned} \|e\|_{[t_0, t]} &\leq \beta_2(|e_0|, 0) + \zeta(\tau) \left( \gamma_2^\xi \|\xi\|_{[t_0, t]} + \gamma_2^z \|z\|_{[t_0, t]} + \gamma_2^w \|w\|_\infty \right) \\ &\leq \beta_2(|e_0|, 0) + \zeta(\tau) \left[ \left[ \gamma_1^e (\gamma_2^\xi + \gamma_2^z \gamma_3^\xi) + \gamma_2^z \gamma_3^e \right] \|e\|_{[t_0, t]} + (\gamma_2^\xi + \gamma_2^z \gamma_3^\xi) \beta_1(|(\xi_0, z_0)|, 0) \right. \\ &\quad \left. + \gamma_2^z \alpha(|z_0|) + [(\gamma_2^\xi + \gamma_2^z \gamma_3^\xi) \gamma_1^w + \gamma_2^w + \gamma_2^z \gamma_3^w] \|w\|_\infty \right]. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Définissons  $d(\tau) = 1 - \zeta(\tau) \left[ \gamma_1^e (\gamma_2^\xi + \gamma_2^z \gamma_3^\xi) + \gamma_2^z \gamma_3^e \right]$  qui satisfait  $d(\tau) > 0$  puisque  $\tau \in [\nu, \tau_1)$ ,

$$\begin{aligned} \|e\|_{[t_0, t]} &\leq \frac{1}{d(\tau)} \beta_2(|e_0|, 0) + \frac{\zeta(\tau)}{d(\tau)} \left[ (\gamma_2^\xi + \gamma_2^z \gamma_3^\xi) \beta_1(|(\xi_0, z_0)|, 0) + \gamma_2^z \alpha(|z_0|) \right. \\ &\quad \left. + [(\gamma_2^\xi + \gamma_2^z \gamma_3^\xi) \gamma_1^w + \gamma_2^w + \gamma_2^z \gamma_3^w] \|w\|_\infty \right]. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Puisque les termes de droite de (5.28) sont indépendants du temps,  $e(t)$  est borné sur  $[t_0, t_{\max})$  et tel est  $\xi(t)$ , d'après l'Hypothèse 5.2.1. Par conséquent, en vu de l'Hypothèse 5.2.4, on peut montrer par l'absurde que  $t_{\max} = \infty$ .

*Etape 2 : Stabilité UE BEB.*

Pour tout  $t \in [t_0, \infty)$ , d'après (5.28) et les Hypothèses 5.2.1, 5.2.4, on a :

$$|e(t)| \leq M_e(\tau, \xi_0, e_0, z_0, \|w\|_\infty) \quad (5.29)$$

$$|\xi(t)| \leq M_\xi(\tau, \xi_0, e_0, z_0, \|w\|_\infty) \quad (5.30)$$

$$|z(t)| \leq M_z(\tau, \xi_0, e_0, z_0, \|w\|_\infty), \quad (5.31)$$

où

$$\begin{aligned} M_e(\tau, \xi_0, e_0, z_0, \|w\|_\infty) &= \frac{1}{d(\tau)} \beta_2(|e_0|, 0) + \frac{\zeta(\tau)}{d(\tau)} \left[ (\gamma_2^\xi + \gamma_2^z \gamma_3^\xi) \beta_1(|(\xi_0, z_0)|, 0) + \gamma_2^z \alpha(|z_0|) \right. \\ &\quad \left. + [(\gamma_2^\xi + \gamma_2^z \gamma_3^\xi) \gamma_1^w + \gamma_2^w + \gamma_2^z \gamma_3^w] \|w\|_\infty \right] \\ M_\xi(\tau, \xi_0, e_0, z_0, \|w\|_\infty) &= \beta_1(|(\xi_0, z_0)|, 0) + \gamma_1^e M_e(\tau, \xi_0, e_0, z_0, \|w\|_\infty) + \gamma_1^w \|w\|_\infty \\ M_z(\tau, \xi_0, e_0, z_0, \|w\|_\infty) &= \alpha(|z_0|) + \gamma_3^\xi M_\xi(\tau, \xi_0, e_0, z_0, \|w\|_\infty) + \gamma_3^e M_e(\tau, \xi_0, e_0, z_0, \|w\|_\infty) \\ &\quad + \gamma_3^w \|w\|_\infty. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Nous noterons les fonctions  $M_\xi$ ,  $M_e$  et  $M_z$  sans préciser leurs dépendances dans la suite de la preuve. Il s'en suit, pour tout  $t \in [t_0, \infty)$  :

$$\begin{aligned} |(\xi(t), e(t), z(t))| &\leq M_\xi + M_e + M_z \\ &\leq \bar{\alpha}(|(\xi_0, e_0, z_0)|) + \bar{\sigma}(\tau) \|w\|_\infty, \end{aligned} \quad (5.33)$$

où, pour  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  :

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(s) &= \left[ 1 + \gamma_1^e + \gamma_3^e + \gamma_3^\xi \gamma_1^e \right] \left[ \frac{1}{d(\tau)} \beta_2(s, 0) + \frac{\zeta(\tau)}{d(\tau)} \left( (\gamma_2^\xi + \gamma_2^z \gamma_3^\xi) \beta_1(s, 0) + \gamma_2^z \alpha(s) \right) \right] \\ &\quad + (1 + \gamma_3^\xi) \beta_1(s, 0) + \alpha(s) \\ \bar{\sigma}(\tau) &= \left[ 1 + \gamma_1^e + \gamma_3^e + \gamma_3^\xi \gamma_1^e \right] \frac{\zeta(\tau)}{d(\tau)} \left[ (\gamma_2^\xi + \gamma_2^z \gamma_3^\xi) \gamma_1^w + \gamma_2^w + \gamma_2^z \gamma_3^w \right] + (1 + \gamma_3^\xi) \gamma_1^w + \gamma_3^w, \end{aligned}$$



ainsi, puisque  $\bar{\alpha}, \bar{\sigma} \in \mathcal{K}$ , le système (5.1)-(5.6) est UE $\bar{E}$ BEB avec  $w$  comme entrée et un gain linéaire d'après la Définition B.2.1.

*Etape 3: Propriété (5.26).*

Pour tout  $t_0 \leq t_{10} \leq t_{20} \leq t_{11} \leq t_{21}$ , en utilisant l'invariance et la causalité des inégalités (5.8) et (5.14), on obtient :

$$\begin{aligned} |\xi(t_{11})| &\leq \beta_1(|(\xi(t_{10}), z(t_{10}))|, t_{11} - t_{10}) + \gamma_1^e \|e\|_{[t_{10}, t_{11}]} + \gamma_1^w \|w\|_\infty, \\ |e(t_{21})| &\leq \beta_2(|e(t_{20})|, t_{21} - t_{20}) + \zeta(\tau) \left( \gamma_2^\xi \|\xi\|_{[t_{20}, t_{21}]} + \gamma_2^z \|z\|_\infty + \gamma_2^w \|w\|_\infty \right). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Soit  $t \in [t_0, \infty)$ , prenons  $t_{10} = \frac{t-t_0}{4} + t_0$ ,  $t_{20} = \frac{t-t_0}{2} + t_0$ ,  $t_{21} = t$ ,  $t_{11} \in [\frac{t-t_0}{2} + t_0, t]$ , d'après (5.29), (5.30), (5.31) et (5.34) :

$$\begin{aligned} |e(t)| &\leq \beta_2(M_e, \frac{t-t_0}{2}) + \zeta(\tau) \left( \gamma_2^z \|z\|_\infty + \gamma_2^w \|w\|_\infty + \gamma_2^\xi \beta_1(M_\xi + M_z, \frac{t-t_0}{4}) \right. \\ &\quad \left. + \gamma_2^\xi \gamma_1^e \|e\|_{[\frac{t-t_0}{4} + t_0, \infty)} + \gamma_2^\xi \gamma_1^w \|w\|_\infty \right) \\ &\leq \beta_2(M_e + M_\xi + M_z, \frac{t-t_0}{2}) + \zeta(\tau^*) \gamma_2^\xi \beta_1(M_e + M_\xi + M_z, \frac{t-t_0}{4}) \\ &\quad + \zeta(\tau) \left( \gamma_2^\xi \gamma_1^e \|e\|_{[\frac{t-t_0}{4} + t_0, \infty)} + \gamma_2^z \|z\|_\infty + [\gamma_2^\xi \gamma_1^w + \gamma_2^w] \|w\|_\infty \right). \end{aligned} \quad (5.35)$$

En remarquant que  $\zeta(\tau) \gamma_1^e \gamma_2^\xi < 1$  (puisque  $\tau_1 \leq \tau_0$  et  $\rho < 1$ ), le Lemme A.1 dans [86] peut être utilisé pour (5.35) (avec  $z(t) = |e(t)|$ ,  $\beta = \beta_2(s, \frac{t}{2}) + \zeta(\tau^*) \gamma_2^\xi \beta_1(s, \frac{t}{4})$ ,  $s = M_e + M_\xi + M_z$ ,  $\rho(s) = \zeta(\tau) \gamma_1^e \gamma_2^\xi s$ ,  $d = \zeta(\tau) \left( \gamma_2^z \|z\|_\infty + \gamma_2^\xi [\gamma_1^w + \gamma_2^w] \|w\|_\infty \right)$  et  $\mu = \frac{1}{4}$ ,  $(s, t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2$ ) pour montrer qu'il existe  $\tilde{\beta}_2 \in \mathcal{KL}$  et  $\lambda_2 \in (1, \infty)$  tels que :

$$|e(t)| \leq \tilde{\beta}_2(M_e + M_\xi + M_z, t - t_0) + \frac{\lambda_2 \zeta(\tau)}{1 - \zeta(\tau) \gamma_1^e \gamma_2^\xi} \left( \gamma_2^z \|z\|_\infty + [\gamma_2^\xi \gamma_1^w + \gamma_2^w] \|w\|_\infty \right). \quad (5.36)$$

Parallèlement, d'après l'Hypothèse 5.2.1 et la Proposition 5.2.1, on peut montrer qu'il existe  $\tilde{\beta}_1 \in \mathcal{KL}$  et  $\lambda_1 \in (1, \infty)$  tels que

$$\begin{aligned} |\xi(t)| &\leq \tilde{\beta}_1(M_e + M_\xi + M_z, t - t_0) + \frac{\lambda_1}{1 - \zeta(\tau) \gamma_1^e \gamma_2^\xi} \left( \zeta(\tau) \gamma_1^e \gamma_2^z \|z\|_\infty \right. \\ &\quad \left. + [\gamma_1^w + \zeta(\tau) \gamma_1^e \gamma_2^w] \|w\|_\infty \right). \end{aligned} \quad (5.37)$$

En combinant (5.36) et (5.37), avec  $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2$ , il s'en suit :

$$\begin{aligned} |(\xi(t), e(t))| &\leq \tilde{\beta}(M_e + M_\xi + M_z, t - t_0) + \frac{\gamma_2^z \zeta(\tau)}{1 - \zeta(\tau) \gamma_1^e \gamma_2^\xi} \left[ \lambda_1 \gamma_1^e + \lambda_2 \right] \|z\|_\infty + \frac{1}{1 - \zeta(\tau) \gamma_1^e \gamma_2^\xi} \\ &\quad \times \left( [\lambda_1 + \lambda_2 \gamma_2^\xi \zeta(\tau)] \gamma_1^w + [\lambda_2 + \lambda_1 \gamma_1^e] \zeta(\tau) \gamma_2^w \right) \|w\|_\infty. \end{aligned} \quad (5.38)$$

D'après (5.32),

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}(M_e + M_\xi + M_z, t - t_0) &\leq \tilde{\beta}\left(\left[1 + \gamma_3^e + \gamma_1^e + \gamma_1^e \gamma_3^\xi\right] M_e + (1 + \gamma_3^\xi) \beta_1(|(\xi_0, z_0)|, 0) + \alpha(|z_0|)\right. \\
&\quad \left.+ [\gamma_1^w + \gamma_3^w + \gamma_3^\xi \gamma_1^w] \|w\|_\infty, t - t_0\right) \\
&\leq \tilde{\beta}\left(\left[1 + \gamma_3^e + \gamma_1^e + \gamma_1^e \gamma_3^\xi\right] \frac{1}{d(\tau)} [\beta_2(|e_0|, 0) + \zeta(\tau)(\gamma_2^\xi + \gamma_2^z \gamma_3^\xi)]\right. \\
&\quad \times \beta_1(|(\xi_0, z_0)|, 0) + \zeta(\tau) \gamma_2^z \alpha(|z_0|)] + \left[1 + \gamma_3^e + \gamma_1^e + \gamma_1^e \gamma_3^\xi\right] \frac{\zeta(\tau)}{d(\tau)} \\
&\quad \times [(\gamma_2^\xi + \gamma_2^z \gamma_3^\xi) \gamma_1^w + \gamma_2^w + \gamma_2^z \gamma_3^w] \|w\|_\infty \\
&\quad \left.+ (1 + \gamma_3^\xi) \beta_1(|(\xi_0, z_0)|, 0) + \alpha(|z_0|)\right. \\
&\quad \left.+ [\gamma_1^w + \gamma_3^w + \gamma_3^\xi \gamma_1^w] \|w\|_\infty, t - t_0\right),
\end{aligned} \tag{5.39}$$

en utilisant le Lemme A.1.2,

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}(M_e + M_\xi + M_z, t - t_0) &\leq \tilde{\beta}\left(2 \left[1 + \gamma_3^e + \gamma_1^e + \gamma_1^e \gamma_3^\xi\right]\right. \\
&\quad \times \frac{1}{d(\tau)} [\beta_2(|e_0|, 0) + \zeta(\tau)(\gamma_2^\xi + \gamma_2^z \gamma_3^\xi) \beta_1(|(\xi_0, z_0)|, 0) \\
&\quad \left.+ \zeta(\tau) \gamma_2^z \alpha(|z_0|)] + 2(1 + \gamma_3^\xi) \beta_1(|(\xi_0, z_0)|, 0) + 2\alpha(|z_0|), t - t_0\right) \\
&\quad + \tilde{\beta}\left(\left(2 \left[1 + \gamma_3^e + \gamma_1^e + \gamma_1^e \gamma_3^\xi\right] \frac{\zeta(\tau)}{d(\tau)} [(\gamma_2^\xi + \gamma_2^z \gamma_3^\xi) \gamma_1^w\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+ \gamma_2^w + \gamma_2^z \gamma_3^w\right] + 2\gamma_1^w + 2\gamma_3^w + 2\gamma_3^\xi \gamma_1^w\right) \|w\|_\infty, 0\right).
\end{aligned} \tag{5.40}$$

D'autre part, en invoquant (5.31), (5.32),

$$\begin{aligned}
\|z\|_\infty &\leq \alpha(|z_0|) + \gamma_3^\xi M_\xi + \gamma_3^e M_e + \gamma_3^w \|w\|_\infty \\
&\leq \left[ (\gamma_3^\xi \gamma_1^e + \gamma_3^e) (\gamma_2^\xi + \gamma_2^z \gamma_3^\xi) \frac{\zeta(\tau)}{d(\tau)} + \gamma_3^\xi \right] \beta_1(|(\xi_0, z_0)|, 0) \\
&\quad + (\gamma_3^\xi \gamma_1^e + \gamma_3^e) \frac{1}{d(\tau)} \beta_2(|e_0|, 0) + \left[ 1 + (\gamma_3^\xi \gamma_1^e + \gamma_3^e) \frac{\zeta(\tau)}{d(\tau)} \gamma_2^z \right] \alpha(|z_0|) \\
&\quad + \left[ \gamma_3^\xi + (\gamma_3^\xi \gamma_1^e + \gamma_3^e) (\gamma_2^\xi + \gamma_2^z \gamma_3^\xi) \frac{\zeta(\tau)}{d(\tau)} \right] \gamma_1^w + (\gamma_3^\xi \gamma_1^e + \gamma_3^e) \frac{\zeta(\tau)}{d(\tau)} \gamma_2^w \\
&\quad + \left[ 1 + (\gamma_3^\xi \gamma_1^e + \gamma_3^e) \frac{\zeta(\tau)}{d(\tau)} \gamma_2^z \right] \gamma_3^w \|w\|_\infty.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Par conséquent, en utilisant (5.38), (5.40) et (5.41), on déduit qu'il existe  $\beta \in \mathcal{KL}$  tel que, pour tout  $|(\xi_0, e_0, z_0)| < \Delta$ ,  $t \in [t_0, \infty)$ :

$$|(\xi(t), e(t))| \leq \beta(|(\xi_0, e_0, z_0)|, t - t_0) + \sigma(\|w\|_\infty) + \bar{\sigma}(\tau, \|w\|_\infty) + \varepsilon(\tau, \Delta),$$

où, pour  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , selon le Lemme A.1.2, en écrivant  $\frac{1}{1-\zeta(\tau)\gamma_1^e\gamma_2^\xi} = 1 + \frac{\zeta(\tau)\gamma_1^e\gamma_2^\xi}{1-\zeta(\tau)\gamma_1^e\gamma_2^\xi}$ ,

$$\begin{aligned}
\sigma(s) &= \lambda_1\gamma_1^w s + \tilde{\beta}(4\gamma_1^w s + 4\gamma_3^w s + 4\gamma_3^\xi\gamma_1^w s, 0) \\
\bar{\sigma}(\tau, s) &= \frac{\zeta(\tau)\gamma_1^e\gamma_2^\xi}{1-\zeta(\tau)\gamma_1^e\gamma_2^\xi}\lambda_1\gamma_1^w s + \frac{\zeta(\tau)}{1-\zeta(\tau)\gamma_1^e\gamma_2^\xi}\left(\lambda_2\gamma_2^\xi\gamma_1^w s + (\lambda_2 + \lambda_1\gamma_1^e)\gamma_2^w s\right) \\
&\quad + \frac{\gamma_2^\xi\zeta(\tau)}{1-\zeta(\tau)\gamma_1^e\gamma_2^\xi}[\lambda_1\gamma_1^e + \lambda_2]\left(\left[\gamma_3^\xi + (\gamma_3^\xi\gamma_1^e + \gamma_3^e)(\gamma_2^\xi + \gamma_2^\xi\gamma_3^\xi)\frac{\zeta(\tau)}{d(\tau)}\right]\gamma_1^w s\right. \\
&\quad \left.+ (\gamma_3^\xi\gamma_1^e + \gamma_3^e)\frac{\zeta(\tau)}{d(\tau)}\gamma_2^w s + \left[1 + (\gamma_3^\xi\gamma_1^e + \gamma_3^e)\frac{\zeta(\tau)}{d(\tau)}\gamma_2^\xi\right]\gamma_3^w s\right) \\
&\quad + \tilde{\beta}\left(4\left[1 + \gamma_3^e + \gamma_1^e + \gamma_1^e\gamma_3^\xi\right]\frac{\zeta(\tau)}{d(\tau)}\left[(\gamma_2^\xi + \gamma_2^\xi\gamma_3^\xi)\gamma_1^w s + \gamma_2^w s + \gamma_2^\xi\gamma_3^w s\right], 0\right) \\
\varepsilon(\tau, \Delta) &= \frac{\gamma_2^\xi\zeta(\tau)}{1-\zeta(\tau)\gamma_1^e\gamma_2^\xi}[\lambda_1\gamma_1^e + \lambda_2]\left(\left[(\gamma_3^\xi\gamma_1^e + \gamma_3^e)(\gamma_2^\xi + \gamma_2^\xi\gamma_3^\xi)\frac{\zeta(\tau)}{d(\tau)} + \gamma_3^\xi\right]\beta_1(s, 0)\right. \\
&\quad \left.+ (\gamma_3^\xi\gamma_1^e + \gamma_3^e)\frac{1}{d(\tau)}\beta_2(s, 0) + \left[1 + (\gamma_3^\xi\gamma_1^e + \gamma_3^e)\frac{\zeta(\tau)}{d(\tau)}\gamma_2^\xi\right]\alpha(s)\right).
\end{aligned} \tag{5.42}$$

On constate que  $\sigma \in \mathcal{K}$  et, en fixant  $\tau \in [0, \tau_1)$ , que  $\bar{\sigma}(\tau, \cdot) \in \mathcal{K}$ . En effet, soit  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $\bar{\sigma}(\cdot, s)$  est continue sur  $[0, \tau_1)$  et égale à 0 en 0 (puisque  $\zeta$  et  $d$  sont continues sur  $[0, \tau_1)$  et  $\zeta(0) = 0$ ,  $d(0) = 1$ ). De plus, puisque  $\zeta$  est strictement croissante sur  $[0, \tau_1)$ , telles sont  $\tau \mapsto \frac{\zeta(\tau)}{1-\zeta(\tau)\gamma_1^e\gamma_2^\xi}$ ,  $\tau \mapsto \frac{\zeta(\tau)}{d(\tau)}$  et  $\tau \mapsto \frac{1}{d(\tau)}$ , on en déduit que  $\bar{\sigma}(\cdot, s), \varepsilon(\cdot, s) \in \mathcal{K}$ .  $\square$

**Remarque 5.2.4** *Les conditions initiales sont bornées par  $\Delta$  dans l'énoncé du Théorème 5.2.1 uniquement afin d'obtenir une dépendance de la fonction  $\varepsilon$  uniforme et croissante en le rayon de la boule de conditions initiales étudiée. Le MATI ne dépend pas de  $\Delta$ .*

D'après le Théorème 5.2.1, lorsque  $w = 0$ , l'erreur d'observation ne converge pas asymptotiquement vers l'origine mais la boule centrée en 0 de rayon  $\varepsilon(\tau, \Delta)$ . Il est montré dans §5.2.2 que la convergence asymptotique vers l'origine est garantie lorsque  $\gamma_2^\xi = 0$  (et l'Hypothèse 5.2.4 peut être relaxée). Le cas où  $\gamma_2^\xi \neq 0$  apparaît typiquement lorsque qu'un bloqueur d'ordre zéro est employé, comme nous le montrerons dans §5.3. En effet, dans ce cas, l'observateur reçoit les mesures avec un retard à temps variant,  $t - t_i$ , qui affecte périodiquement sa convergence. On remarque également que l'on retrouve les propriétés du continu lorsque  $\tau$  tend vers zéro.

En pratique, l'Hypothèse 5.2.4 peut être difficile à vérifier. Bien qu'une caractérisation de Lyapunov soit disponible pour la stabilité UEBEB [14], dans certains cas, il est plus avantageux de tirer parti de la stabilité supposée du système à observer (4.14)-(4.15) afin d'obtenir des conditions similaires sur  $|z(t)|$ . Supposons que le système (4.14) soit UEBEB avec  $w$  comme entrée et un gain linéaire, i.e. il existe  $\alpha_0 \in \mathcal{K}$ ,  $\sigma_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  tels que pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$  et  $w \in \mathcal{L}_{\infty}^{n_w}$ ,

$$|x(t)| \leq \alpha_0(|x_0|) + \sigma_0 \|w\|_{[t_0, t]} \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \tag{5.43}$$

et supposons qu'il existe  $\beta_3 \in \mathcal{KL}$ ,  $\gamma_3^x, \gamma_3^e, \tilde{\gamma}_3^w \in \mathbb{R}_{>0}$  tels que, le long des solutions de (5.2), pour tout  $z_0 \in \mathbb{R}^{n_z}$ ,  $(x, e, w) \in \mathcal{L}_{\infty}^{n_x + n_e + n_w}$  :

$$|z(t)| \leq \beta_3(|z_0|, t - t_0) + \gamma_3^x \|x\|_{[t_0, t]} + \gamma_3^e \|e\|_{[t_0, t]} + \tilde{\gamma}_3^w \|w\|_{[t_0, t]} \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \tag{5.44}$$

**Remarque 5.2.5** *La condition (5.44) est satisfaite dans de nombreux cas, cf. §5.3, elle peut être vérifiée à l'aide de l'Hypothèse 5.2.1 et du fait que  $\xi = x - h_O(t, z)$ .*

Ainsi, combinant (5.43) et (5.44), pour tout  $(x_0, z_0) \in \mathbb{R}^{n_x+n_z}$ ,  $(e, w) \in \mathcal{L}_\infty^{n_e+n_w}$ , le long des solutions de (5.2), on a, pour tout  $t \geq t_0 \geq 0$ :

$$|z(t)| \leq \beta_3(|z_0|, t - t_0) + \gamma_3^x \alpha_0(|x_0|) + \gamma_3^x \sigma_0 \|w\|_{[t_0, t]} + \gamma_3^e \|e\|_{[t_0, t]} + \tilde{\gamma}_3^w \|w\|_{[t_0, t]}. \quad (5.45)$$

En écrivant  $\xi = x - h_O(t, z)$  et en invoquant la Lemme A.1.2, nous obtenons que, pour tout  $(\xi_0, z_0) \in \mathbb{R}^{n_\xi+n_z}$ :

$$\begin{aligned} \alpha_0(|x_0|) &= \alpha_0(|\xi_0 + h_O(t, z_0)|) \\ &\leq \alpha_0(2|\xi_0|) + \alpha_0(2|h_O(t, z_0)|). \end{aligned} \quad (5.46)$$

De plus, supposons qu'il existe  $\varsigma \in \mathcal{K}$  tel que  $|h_O(t, z)| \leq \varsigma(|z|)$  pour tout  $(t, z) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n_z}$ , on a:

$$\alpha_0(2|h_O(t, z_0)|) \leq \alpha_0(2\varsigma(|z_0|)) = \tilde{\alpha}_0(|z_0|). \quad (5.47)$$

De cette manière, définissons  $\alpha(s) = \beta_3(s, 0) + \gamma_3^x [\alpha_0(2s) + \tilde{\alpha}_0(s)]$  pour  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  et  $\gamma_3^w = \tilde{\gamma}_3^w + \gamma_3^x \sigma_0$ , pour tout  $(x_0, z_0) \in \mathbb{R}^{n_x+n_z}$ ,  $(e, w) \in \mathcal{L}_\infty^{n_e+n_w}$ , le long des solutions de (5.2):

$$|z(t)| \leq \alpha(|(\xi_0, z_0)|, 0) + \gamma_3^e \|e\|_{[t_0, t]} + \gamma_3^w \|w\|_{[t_0, t]} \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (5.48)$$

La condition (5.48) ne nous permet pas de conclure quant à la stabilité UE<sub>BEB</sub> de (5.2) avec comme entrée  $\xi, e, w$  au sens de la Définition B.2.1, toutefois, elle est suffisante pour déduire des propriétés de convergence pour l'erreur d'observation comme nous le montrons dans le corollaire ci-dessous dont la preuve rejoint celle du Théorème 5.2.1.

**Corollaire 5.2.1** *Supposons que les Hypothèses 5.2.1-5.2.3 soient vérifiées, si la condition (5.48) est satisfaite et si  $\tau \in [v, \tilde{\tau}_1)$  où*

$$\tilde{\tau}_1 = \frac{1}{L} \ln \left( \frac{La_1 + \gamma_1^e \gamma_2^\xi + \gamma_2^z \gamma_3^e}{L\rho a_1 + \gamma_1^e \gamma_2^\xi + \gamma_2^z \gamma_3^e} \right), \quad (5.49)$$

si  $L = 0$ ,

$$\tilde{\tau}_1 = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{1}{L} \ln \left( \frac{La_1 + \gamma_1^e \gamma_2^\xi + \gamma_2^z \gamma_3^e}{L\rho a_1 + \gamma_1^e \gamma_2^\xi + \gamma_2^z \gamma_3^e} \right) = \frac{a_1(1-\rho)}{\gamma_1^e \gamma_2^\xi + \gamma_2^z \gamma_3^e}, \quad (5.50)$$

alors le système (5.1)-(5.6) est UE<sub>BEB</sub> avec  $w$  comme entrée et il existe  $\beta \in \mathcal{KL}$ ,  $\sigma \in \mathcal{K}$ ,  $\bar{\sigma}, \varepsilon \in \mathcal{KK}$  tels que, pour tout  $\Delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $(\xi_0, e_0, z_0) \in \mathbb{R}^{n_\xi+n_e+n_z}$  avec  $|(\xi_0, e_0, z_0)| < \Delta$ ,  $w \in \mathcal{L}_\infty^{n_w}$ :

$$|(\xi(t), e(t))| \leq \beta(|(\xi_0, e_0, z_0)|, t - t_0) + \sigma(\|w\|_\infty) + \bar{\sigma}(\tau, \|w\|_\infty) + \varepsilon(\tau, \Delta) \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (5.51)$$

**Remarque 5.2.6** *Les fonctions  $\alpha_0, \alpha$  et la constante  $\sigma_0$  n'ont pas besoin d'être connues pour pouvoir appliquer le Corollaire 5.2.1.*

### 5.2.2 Convergence asymptotique

Dans certains cas, une propriété de robustesse plus forte que l'Hypothèse 5.2.1 est garantie par l'observateur.

**Hypothèse 5.2.5** *Il existe  $\beta_1 \in \mathcal{KL}$ ,  $\gamma_1^e, \gamma_1^w \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  tels que, pour tout  $\xi_0 \in \mathbb{R}^{n_\xi}$ ,  $(e, w) \in \mathcal{L}_\infty^{n_e+n_w}$  et  $z(t)$  défini pour tout  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , les solutions de (5.1) vérifient :*

$$|\xi(t)| \leq \beta_1(|\xi_0|, t - t_0) + \gamma_1^e \|e\|_{[t_0, t)} + \gamma_1^w \|w\|_{[t_0, t)} \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (5.52)$$

**Remarque 5.2.7** *L'Hypothèse 5.2.5 implique que le système (5.1) est stable entrée-état vis-à-vis de  $(z, e, w)$  et peut être vérifiée à l'aide de la Proposition B.2.2. La condition «  $z(t)$  défini pour tout  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  » signifie que la variable  $z$  n'a pas besoin d'être globalement bornée mais simplement définie pour tout  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ .*

Lorsque l'Hypothèse 5.2.3 est satisfaite avec  $\gamma_2^z = 0$ , la stabilité des systèmes (5.1),(5.4) d'une part et (5.3),(5.6) de l'autre, peut être analysée séparément du système global (5.1)-(5.6) à l'aide du théorème du petit gain classique de [86]. De cette manière, aucune condition de bornitude n'est désormais nécessaire pour étudier le système (5.1)-(5.6), l'Hypothèse 5.2.4 est alors relaxée comme suit.

**Hypothèse 5.2.6** *Le système (5.2) est uniformément positivement complet pour les entrées  $(\xi, e, w) \in \mathcal{L}_\infty^{n_\xi+n_e+n_w}$  i.e. il existe  $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \in \mathcal{K}$  et  $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  tels que, pour tout  $z_0 \in \mathbb{R}^{n_z}$ ,  $(\xi, e, w) \in \mathcal{L}_\infty^{n_e+n_\xi+n_w}$ , les solutions de (5.2) satisfont :*

$$|z(t)| \leq \nu_1(t - t_0) + \nu_2(|z_0|) + \nu_3(\|(\xi, e, w)\|_{[t_0, t)}) + c \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (5.53)$$

Le théorème suivant peut alors être énoncé.

**Théorème 5.2.2** *Supposons que les Hypothèses 5.2.2, 5.2.5, 5.2.6 soient satisfaites et que l'Hypothèse 5.2.3 soit garantie avec  $\gamma_2^z = 0$ , si  $\tau \in [v, \tau_2)$  où :*

$$\tau_2 = \frac{1}{L} \ln \left( \frac{La_1 + \gamma_2^\xi \gamma_1^e}{L\rho a_1 + \gamma_2^\xi \gamma_1^e} \right), \quad (5.54)$$

si  $L = 0$ ,

$$\tau_2 = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{1}{L} \ln \left( \frac{La_1 + \gamma_2^\xi \gamma_1^e}{L\rho a_1 + \gamma_2^\xi \gamma_1^e} \right) = \frac{a_1(1-\rho)}{\gamma_1^e \gamma_2^\xi}, \quad (5.55)$$

alors le système (5.1)-(5.6) est uniformément positivement complet avec  $w \in \mathcal{L}_\infty^{n_w}$  comme entrée et il existe  $\beta \in \mathcal{KL}$ ,  $\sigma \in \mathcal{K}$ ,  $\bar{\sigma} \in \mathcal{KK}$  tels que, pour tout  $(\xi_0, e_0) \in \mathbb{R}^{n_\xi+n_e}$ ,  $w \in \mathcal{L}_\infty^{n_w}$  :

$$|(\xi(t), e(t))| \leq \beta(|(\xi_0, e_0)|, t - t_0) + \sigma(\|w\|_\infty) + \bar{\sigma}(\tau, \|w\|_\infty) \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (5.56)$$

**Preuve.** La preuve suit les mêmes lignes que celles du Théorème 5.2.1. La complétude positive est prouvée en invoquant la Proposition 5.2.1, les Hypothèses 5.2.5 et 5.2.6, en exploitant le fait que  $\gamma_2^z = 0$  et que  $\beta_1$  dépende uniquement de  $|\xi_0|$  et en appliquant la condition de petit gain induite par  $\tau < \tau_2$ . La propriété de convergence (5.56) est démontrée de la même manière que (5.26) avec ici  $\gamma_2^z = 0$ . Ainsi  $\varepsilon$  dans (5.42) est égal à 0 ici et  $\bar{\sigma}$  et  $\sigma$  sont obtenus en remplaçant  $\gamma_2^z$  par 0 dans (5.42).

### 5.3 Applications

Dans cette section, plusieurs classes d'observateurs émulsés pour les NCS combinés avec les protocoles RR, TOD et les fonctions de blocage ZOH et Pred sont étudiés (voir §4.3.2). Il est prouvé que les hypothèses de §5.2 sont vérifiées. Des bornes explicites sur le MATI sont obtenues et des résultats de convergence déduits. Le cas où les mesures sont simplement échantillonnées est également traité.

#### 5.3.1 Observateurs linéaires

Considérons les systèmes linéaires de la forme :

$$\dot{x} = Ax \tag{5.57}$$

$$y = Cx, \tag{5.58}$$

où  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ ,  $A$  et  $C$  sont des matrices réelles de dimensions appropriées telles que  $(A, C)$  est détectable. L'observateur de Luenberger suivant est étudié :

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + \Lambda(y - \bar{y}) \tag{5.59}$$

$$\bar{y} = C\bar{x}, \tag{5.60}$$

où  $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $\bar{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$  et  $\Lambda$  est une matrice réelle telle que  $(A - \Lambda C)$  est Hurwitz. Considérons la séquence d'instant de transmission  $\{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{>0}}$  telle que  $v \leq t_i - t_{i-1} \leq \tau$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}_{>0}$  et  $v, \tau \in \mathbb{R}_{>0}$  ( $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  est l'instant initial). D'après le modèle (5.1)-(5.6), le système (5.57)-(5.60) s'écrit

$$\dot{\xi} = (A - \Lambda C)\xi - \Lambda e \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \tag{5.61}$$

$$\dot{z} = Az + \Lambda(e + C\xi) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \tag{5.62}$$

$$\dot{e} = \hat{f}_P(z) - CA(\xi + z) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \tag{5.63}$$

$$\xi(t_i^+) = \xi(t_i) \tag{5.64}$$

$$z(t_i^+) = z(t_i) \tag{5.65}$$

$$e(t_i^+) = h(i, e(t_i)), \tag{5.66}$$

où  $z = \bar{x}$ ,  $\hat{f}_P$  est définie par (4.46) ou (4.48) et  $h$  par (4.29), (4.38) ou (4.49).

Le lemme suivant nous permet d'affirmer que l'Hypothèse 5.2.5 (et de manière équivalente l'Hypothèse 5.2.1) est garantie.

**Lemme 5.3.1** *Le système (5.61) est stable entrée-état vis-à-vis de  $e$  avec un gain linéaire  $\gamma_1^e \in \mathbb{R}_{>0}$ .*

Il existe plusieurs approches pour prouver ce lemme, nous en présentons deux : l'une basée sur l'utilisation de fonctions de Lyapunov, l'autre sur la solution analytique du système. Le gain

$\gamma_1^e \in \mathbb{R}_{>0}$  obtenu est différent selon la méthode employée, or celui-ci a une grande influence sur le MATI. Puisqu'il est difficile d'affirmer que l'une ou l'autre méthode fournit l'estimé le plus précis, nous préférons laisser le choix à l'utilisateur.

**Preuve.** Soient  $\xi_0 \in \mathbb{R}^{n_\xi}$  et  $e \in \mathcal{L}_\infty^{n_e}$ .

1. *Analyse à l'aide de fonctions de Lyapunov*

Puisque  $(A - \Lambda C)$  est Hurwitz, pour toute matrice  $Q$  réelle symétrique et définie positive, il existe une matrice  $P$  ayant les mêmes propriétés telle que :  $(A - \Lambda C)^T P + P(A - \Lambda C) = -Q$  (cf. Théorème 4.6 dans [98]). Dérivons  $V(\xi) = \xi^T P \xi$  le long de (5.61) :

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\lambda_{\min}(Q)|\xi|^2 + 2|\xi||P\Lambda||e| \\ &\leq -\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}V + 2\frac{|P\Lambda|}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}|e|\sqrt{V}. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Soit  $\tilde{V} = \sqrt{V}$ , (5.67) donne :

$$\dot{\tilde{V}} \leq -\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)}\tilde{V} + \frac{|P\Lambda|}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}|e|,$$

ainsi, en invoquant le principe de comparaison (Lemme 3.4 dans [98]), on peut montrer que, pour tout  $t \geq t_0 \geq 0$  :

$$\tilde{V}(t) = \sqrt{V(t)} \leq \exp\left(-\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)}(t - t_0)\right) \sqrt{V(t_0)} + \frac{2\lambda_{\max}(P)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)\lambda_{\min}(Q)}}|P\Lambda| \|e\|_{[t_0, t]},$$

ainsi,

$$|\xi(t)| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \exp\left(-\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)}(t - t_0)\right) |\xi_0| + 2\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)\lambda_{\min}(Q)}|P\Lambda| \|e\|_{[t_0, t]}. \quad (5.68)$$

Le résultat désiré est obtenu avec :

$$\gamma_1^e = 2\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)\lambda_{\min}(Q)}|P\Lambda|. \quad (5.69)$$

2. *Analyse basée sur la solution analytique*

On peut directement obtenir la propriété de stabilité entrée-état en intégrant le système (5.61). En effet, lorsque la condition initiale est  $\xi_0 \in \mathbb{R}^{n_\xi}$ , la solution de (5.61) est :

$$\xi(t) = \exp(t(A - \Lambda C)) \xi_0 - \int_0^t \exp((t-s)(A - \Lambda C)) \Lambda e(s) ds. \quad (5.70)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} |\xi(t)| &\leq |\exp(t(A - \Lambda C)) \xi_0| + \left| \int_0^t \exp((t-s)(A - \Lambda C)) \Lambda e(s) ds \right| \\ &\leq |\exp(t(A - \Lambda C)) \xi_0| + \left( \int_0^t |\exp((t-s)(A - \Lambda C)) \Lambda| ds \right) \|e\|_{[0, t]}. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Il suffit alors de borner  $\int_0^t |\exp((t-s)(A - \Lambda C)) \Lambda| ds$  pour obtenir  $\gamma_1^e$ .  $\square$

On peut vérifier que les fonctions de Lyapunov données dans §4.3.2 pour les protocoles RR, TOD et le cas échantillonné satisfont les conditions de l'Hypothèse 5.2.2.

Nous nous intéressons maintenant à l'Hypothèse 5.2.3. Seul le protocole RR est considéré : les résultats pour le TOD et le cas échantillonné suivent directement en utilisant  $W(e) = |e|$ , pour  $e \in \mathbb{R}^{n_e}$ . Notons que, puisque le protocole RR est *dead-beat* stable en  $l$  pas, la fonction  $W$  de §4.3.2 peut être écrit, pour  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  et  $e \in \mathbb{R}^{n_e}$ ,

$$W(i,e) = \sqrt{\sum_{j \in \{1, \dots, l\}} a_j^2(i) |e_j|^2} = |D(i)e|, \quad (5.72)$$

où  $D(i) = \text{diag}(a_1(i)\mathbb{I}_{n_1}, \dots, a_l(i)\mathbb{I}_{n_l})$  avec  $a_j(i)$  des coefficients à temps variant tels que pour tout  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  et  $j \in \{1, \dots, l\}$  il existe un unique  $k \in \{1, \dots, l\}$  tel que  $a_j^2(i) = k$ . On en déduit alors que  $|D(i)| = \sqrt{l}$ , ainsi, pour  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  et  $e \in \mathbb{R}^{n_e}$ ,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial W(i,e)}{\partial e}, g(t,\xi,e,z) \right\rangle &\leq |D(i)\dot{e}| \\ &= \left| D(i) \left( \hat{f}_P(z) - CA(\xi + z) \right) \right|, \end{aligned}$$

pour le bloqueur d'ordre zéro, on a :

$$\left\langle \frac{\partial W(i,e)}{\partial e}, g(t,\xi,e,z) \right\rangle \leq \sqrt{l}|CA|(|\xi| + |z|),$$

pour la fonction de blocage de type Pred, i.e.  $\hat{f}_P(z) = CAz$ , le terme en  $z$  est éliminé :

$$\left\langle \frac{\partial W(i,e)}{\partial e}, g(t,\xi,e,z) \right\rangle \leq \sqrt{l}|CA||\xi|.$$

Nous constatons que l'Hypothèse 5.2.3 est satisfaite pour le protocole RR avec les bloqueurs ZOH et Pred. Les coefficients obtenus pour les différentes configurations de réseau sont résumés dans le Tableau 5.1. Il faut ajouter que dans certains cas spécifiques, des coefficients plus précis peuvent être déduits en tirant parti des possibles particularités de la structure de  $CA$  (cf. discussion dans l'Exemple 3 dans [151]).

Puisque nous supposons, dans un premier temps, que le système (5.57) est stable, la dernière condition à vérifier avant de pouvoir appliquer le Corollaire 5.2.1 est (5.48). En écrivant  $\xi = x - z$ , il est montré que le système (5.62) est stable entrée-état vis-à-vis de  $(x,e)$  avec des gains linéaires, l'équation (5.48) sera alors obtenue d'après §5.2. Le système (5.62) peut être écrit sous la forme :

$$\dot{z} = (A - \Lambda C)z + \Lambda(e + Cx). \quad (5.73)$$

On en déduit, parallèlement au Lemme 5.3.1, qu'il existe  $\beta_3 \in \mathcal{KL}$  tel que, pour tout  $z_0 \in \mathbb{R}^{n_z}$ ,  $(x,e) \in \mathcal{L}_{\infty}^{n_x+n_e}$  :

$$|z(t)| \leq \beta_3(|z_0|, t - t_0) + \gamma_1^e \|e\|_{[t_0, t]} + \gamma_1^e \|C\| \|x\|_{[t_0, t]} \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad (5.74)$$



	ZOH	Pred
RR	$L = 0, \gamma_2^\xi = \sqrt{l} CA ,$ $\gamma_2^z = \sqrt{l} CA $	$L = 0, \gamma_2^\xi = \sqrt{l} CA ,$ $\gamma_2^z = 0$
TOD	$L = 0, \gamma_2^\xi =  CA ,$ $\gamma_2^z =  CA $	$L = 0, \gamma_2^\xi =  CA ,$ $\gamma_2^z = 0$
Echantillonné	$L = 0, \gamma_2^\xi =  CA ,$ $\gamma_2^z =  CA $	$L = 0, \gamma_2^\xi =  CA ,$ $\gamma_2^z = 0$

TAB. 5.1 – Coefficients de l'Hypothèse 5.2.3 pour le système (5.63)

par conséquent la condition (5.44) est vérifiée. Il suffit alors de suivre §5.2 pour obtenir (5.48).

Nous sommes prêts pour appliquer les résultats de §5.2. La première proposition est une conséquence directe du Corollaire 5.2.1.

**Proposition 5.3.1** *Supposons que le système (5.57) soit stable, considérons (5.61)-(5.66) avec un bloqueur d'ordre zéro, pour le :*

(i) *protocole RR, si  $\tau \in [v, \tilde{\tau}_{1,RR})$  où*

$$\tilde{\tau}_{1,RR} = \frac{\sqrt{l}-\sqrt{l-1}}{2l\gamma_1^\xi|CA|}; \quad (5.75)$$

(ii) *protocole TOD, si  $\tau \in [v, \tilde{\tau}_{1,TOD})$  où*

$$\tilde{\tau}_{1,TOD} = \frac{\sqrt{l}-\sqrt{l-1}}{2\sqrt{l}\gamma_1^\xi|CA|}; \quad (5.76)$$

(iii) *le cas échantillonné, si  $\tau \in [v, \tilde{\tau}_{1,SD})$  où*

$$\tilde{\tau}_{1,SD} = \frac{1}{2\gamma_1^\xi|CA|}; \quad (5.77)$$

alors le système (5.61)-(5.66) est UGS et la propriété de convergence (5.51) est vérifiée.

Puisque le système (5.63) est linéaire, l'Hypothèse 5.2.6 est toujours satisfaite. La proposition suivante découle du Théorème 5.2.2.

**Proposition 5.3.2** *Considérons le système (5.61)-(5.66) avec le bloqueur Pred, pour le*

(i) *protocole RR, si  $\tau \in [v, \tau_{2,RR})$  où*

$$\tau_{2,RR} = \frac{\sqrt{l}-\sqrt{l-1}}{l\gamma_1^\xi|CA|}; \quad (5.78)$$

(ii) *protocole TOD, si  $\tau \in [v, \tau_{2,TOD})$  où*

$$\tau_{2,TOD} = \frac{\sqrt{l}-\sqrt{l-1}}{\sqrt{l}\gamma_1^\xi|CA|}; \quad (5.79)$$

(iii) le cas échantillonné, si  $\tau \in [v, \tau_{2,SD})$  où

$$\tau_{2,SD} = \frac{1}{\gamma_1^e |CA|}; \quad (5.80)$$

alors le système (5.61)-(5.66) est positivement complet et la propriété de convergence (5.56) est garantie.

Les Propositions 5.3.1 et 5.3.2 nous indiquent qu'en fonction du bloqueur implémenté, la nature de la convergence de l'observateur est différente puisque dans un cas elle est de type pratique et dans l'autre asymptotique. Ce constat demande toutefois à être nuancé, sachant que l'analyse repose sur des conditions suffisantes, rien ne nous permet d'affirmer que le bloqueur ZOH ne garantisse la convergence asymptotique. Nous verrons cependant que les simulations dans §6.6 confirment cette différence (le retard induit affecte bien la précision de l'observateur), justifiant ainsi l'intérêt pour les fonctions de blocage complexes de type Pred.

**Remarque 5.3.1** *Pour le cas échantillonné, les MATI des Propositions 5.3.1 et 5.3.2 correspondent à ceux des protocoles RR et TOD en prenant  $l = 1$ .*

**Remarque 5.3.2** *Pour les deux types de fonctions de blocage, le MATI est strictement plus grand lorsque l'on considère le protocole TOD (pour  $l > 1$ ). Même si ces faits sont généralement confirmés en simulation, nous ne pouvons affirmer formellement que le TOD fournira de meilleures performances pour de grands MATI puisque l'analyse est basée sur l'utilisation de fonctions de Lyapunov. Par conséquent, un autre choix de fonctions nous donnerait des expressions différentes du MATI. Les mêmes remarques s'appliquent lorsque l'on constate que, pour  $l \geq 4$ , TOD et ZOH fournissent de plus grands MATI que RR et Pred.*

### 5.3.2 Observateurs à grand gain

Nous montrons ici qu'une classe générale d'observateurs à grand gain pour des systèmes multisorties satisfait les conditions du Corollaire 5.2.1 ou du Théorème 5.2.2 pour les mêmes configurations de réseau que dans §5.3.1. Des résultats similaires peuvent être déduits pour d'autres types d'observateurs à grand gain ou globalement Lipschitziens comme ceux dans [1, 46, 49, 99, 160, 210], comme nous le verrons sur un exemple dans §6.6.2 pour [160].

Les observateurs continus développés dans [51] sont considérés pour la classe de systèmes suivante :

$$\dot{x} = Ax + \phi(x) \quad (5.81)$$

$$y = Cx, \quad (5.82)$$

où  $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^{pn}$ ,  $x_i \in \mathbb{R}^n$  et

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I}_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \mathbb{I}_n & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & \mathbb{I}_n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$C = [\mathbb{I}_n \ 0 \ \dots \ 0] \in \mathbb{R}^{n \times np}$ ,  $\phi(x) = (\phi_1(x_1), \phi_2(x_1, x_2), \dots, \phi_p(x))$  avec  $\phi_i$  globalement Lipschitzienne de constante  $k_{\phi_i} \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,  $p \in \mathbb{Z}_{>0}$ .

**Remarque 5.3.3** Dans [51], il est expliqué sous quelles conditions une classe de systèmes non linéaires peut être transformée en (5.81)-(5.82), à l'aide de changements de coordonnées appropriés.

L'observateur continu est de la forme :

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + \phi(\bar{x}) + \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T (y - \bar{y}) \quad (5.83)$$

$$\bar{y} = C\bar{x}, \quad (5.84)$$

où  $\Delta_\theta = \text{diag}(\mathbb{I}_n, \frac{1}{\theta} \mathbb{I}_n, \dots, \frac{1}{\theta^{p-1}} \mathbb{I}_n)$ ,  $\theta \in \mathbb{R}_{>0}$ , la matrice  $S$  est l'unique solution de l'équation algébrique de Lyapunov :

$$S + A^T S + SA - C^T C = 0. \quad (5.85)$$

Considérons la séquence d'instantants de transmission  $\{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{>0}}$  telle que  $v \leq t_i - t_{i-1} \leq \tau$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ ,  $v, \tau \in \mathbb{R}_{>0}$  et  $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  est l'instant initial. Le système (5.81)-(5.84) est écrit dans les coordonnées  $(\xi, z, e)$  :

$$\dot{\xi} = (A - \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C) \xi - \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T e + \phi(\xi + z) - \phi(z) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (5.86)$$

$$\dot{z} = Az + \phi(z) + \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T (C\xi + e) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (5.87)$$

$$\dot{e} = \hat{f}_P(z) - CA(\xi + z) - C\phi(\xi + z) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (5.88)$$

$$\xi(t_i^+) = \xi(t_i) \quad (5.89)$$

$$z(t_i^+) = z(t_i) \quad (5.90)$$

$$e(t_i^+) = h(i, e(t_i)), \quad (5.91)$$

où  $z = \bar{x}$ ,  $\hat{f}_P$  est soit défini par (4.46) soit (4.48) et  $h$  par (4.29), (4.38) ou (4.49).

**Remarque 5.3.4** Le système (5.86)-(5.91) est en réalité une famille paramétrée de systèmes en le gain  $\theta$ . Bien que les résultats de §5.2 ne soient pas énoncés pour de tels systèmes, nous verrons que l'on peut bien les appliquer.

Les conditions du Corollaire 5.2.1 et du Théorème 5.2.2 sont maintenant vérifiées. Le lemme suivant prouve que l'Hypothèse 5.2.5 est assurée (de manière équivalente l'Hypothèse 5.2.1) pour le système (5.86), sous certaines conditions sur  $\theta$ .

**Lemme 5.3.2** *Il existe  $\theta_0, \lambda_1 \in [1, \infty)$  tel que, pour tout  $\theta > \theta_0$ ,  $\xi_0 \in \mathbb{R}^{n_\xi}$ ,  $e \in \mathcal{L}_\infty^{n_e}$ , le long des solutions de (5.86),*

$$|\xi(t)| \leq \lambda_1 \exp\left(-\frac{\theta - \theta_0}{2}(t - t_0)\right) |\xi_0| + \gamma_1(\theta) \|e\|_{[t_0, t]} \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad (5.92)$$

avec  $\gamma_1(\theta) = \frac{2\theta^p}{\lambda_{\min}(S)(\theta - \theta_0)}$ .

**Preuve.** Soit  $\theta \in \mathbb{R}_{>0}$ , définissons  $\bar{\xi} = \Delta_\theta \xi$ , d'après (5.86) et le fait que  $A = \theta \Delta_\theta^{-1} A \Delta_\theta$ ,  $C^T C = C^T C \Delta_\theta$ , on peut montrer que :

$$\dot{\bar{\xi}} = \theta (A - S^{-1} C^T C) \bar{\xi} + \Delta_\theta (\phi(\xi + z) - \phi(z)) - \theta S^{-1} C^T e. \quad (5.93)$$

Considérons  $V(\bar{\xi}) = \bar{\xi}^T S \bar{\xi}$ , le long des solutions de (5.93), et d'après (5.85),

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \theta (2\bar{\xi}^T S A \bar{\xi} - 2\bar{\xi}^T C^T C \bar{\xi}) + 2\bar{\xi}^T S \Delta_\theta (\phi(\xi + z) - \phi(z)) - 2\theta \bar{\xi}^T C^T e \\ &= -\theta V - \bar{\xi}^T C^T C \bar{\xi} + 2\bar{\xi}^T S \Delta_\theta (\phi(\xi + z) - \phi(z)) - 2\theta \bar{\xi}^T C^T e. \end{aligned}$$

Sachant que  $\theta \geq 1$ , que  $\phi$  est globalement Lipschitzienne et possède une structure triangulaire :

$$\|\Delta_\theta (\phi(\xi + z) - \phi(z))\| \leq c |\bar{\xi}|, \quad (5.94)$$

où  $c = \max_{i \in \{1, \dots, p\}} \{k_{\phi_i}\} \sqrt{p}$ , par conséquent, d'après (5.94),

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\theta V + 2c |\bar{\xi}|^2 \lambda_{\max}(S) + 2\theta |\bar{\xi}| |e| \\ &\leq -\theta V + 2c \frac{\lambda_{\max}(S)}{\lambda_{\min}(S)} V + \frac{2}{\sqrt{\lambda_{\min}(S)}} \theta |e| \sqrt{V}. \end{aligned}$$

Soit  $\theta > \theta_0$  avec  $\theta_0 = \max\left\{1, 2c \frac{\lambda_{\max}(S)}{\lambda_{\min}(S)}\right\}$  et  $W = \sqrt{V}$ , grâce à (5.95) on obtient :

$$\dot{W} \leq -\frac{\theta - \theta_0}{2} W + \frac{\theta}{\sqrt{\lambda_{\min}(S)}} |e|,$$

en invoquant le principe de comparaison (Lemme 3.4 dans [98]), on a, pour tout  $t \geq t_0 \geq 0$  :

$$\sqrt{V(t)} \leq \exp\left(-\frac{\theta - \theta_0}{2}(t - t_0)\right) \sqrt{V(t_0)} + \frac{2\theta}{\sqrt{\lambda_{\min}(S)(\theta - \theta_0)}} \|e\|_{[t_0, t]}.$$

Ainsi,

$$|\bar{\xi}(t)| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(S)}{\lambda_{\min}(S)}} \exp\left(-\frac{\theta - \theta_0}{2}(t - t_0)\right) |\bar{\xi}(t_0)| + \frac{2\theta}{\lambda_{\min}(S)(\theta - \theta_0)} \|e\|_{[t_0, t]}.$$

En remarquant que  $|\bar{\xi}(t)| \leq |\xi(t)| \leq \theta^{p-1} |\bar{\xi}(t)|$ ,

$$|\xi(t)| \leq \theta^{p-1} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(S)}{\lambda_{\min}(S)}} \exp\left(-\frac{\theta - \theta_0}{2}(t - t_0)\right) |\xi(t_0)| + \frac{2\theta^p}{\lambda_{\min}(S)(\theta - \theta_0)} \|e\|_{[t_0, t]}.$$

	ZOH	Pred
RR	$L = 0, \gamma_2^\xi = \sqrt{l}(1 + k_{\phi_1}),$ $\gamma_2^z = \sqrt{l}(1 + k_{\phi_1})$	$L = 0, \gamma_2^\xi = \sqrt{l}(1 + k_{\phi_1}),$ $\gamma_2^z = 0$
TOD	$L = 0, \gamma_2^\xi = 1 + k_{\phi_1},$ $\gamma_2^z = 1 + k_{\phi_1}$	$L = 0, \gamma_2^\xi = 1 + k_{\phi_1},$ $\gamma_2^z = 0$
Echantillonné	$L = 0, \gamma_2^\xi = 1 + k_{\phi_1},$ $\gamma_2^z = 1 + k_{\phi_1}$	$L = 0, \gamma_2^\xi = 1 + k_{\phi_1},$ $\gamma_2^z = 0$

TAB. 5.2 – Coefficients de l'Hypothèse 5.2.3 pour le système (5.88)

En notant  $\lambda_1 = \theta^{p-1} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(S)}{\lambda_{\min}(S)}}$  et  $\gamma_1(\theta) = \frac{2\theta^p}{\lambda_{\min}(S)(\theta - \theta_0)}$ , le résultat désiré est obtenu.  $\square$

On peut montrer que l'Hypothèse 5.2.3 est vérifiée pour les différentes configurations de réseau pour tout  $\theta \in \mathbb{R}_{>0}$  de la même manière que dans §5.3.1. Les coefficients correspondants sont donnés dans le Tableau 5.2.

Parallèlement au Lemme 5.3.2, il peut être déduit que le système (5.88) est stable entrée-état vis-à-vis de  $(x, e)$  avec des gains linéaires, en écrivant  $z = x - \xi$ , i.e. pour tout  $\theta > \theta_0$  le long des solutions de (5.88), pour tout  $(e, x) \in \mathcal{L}_\infty^{n_e + n_x}$ ,

$$|z(t)| \leq \lambda_1 \exp\left(-\frac{\theta - \theta_0}{2}(t - t_0)\right) |z_0| + \gamma_1(\theta) \|e\|_{[t_0, t]} + \gamma_1(\theta) |C| \|x\|_{[t_0, t]} \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad (5.95)$$

ainsi, la condition (5.44) est satisfaite et lorsque le système (5.81) est UGS, (5.48) peut être déduite. Les propriétés de convergence de l'erreur d'observation ainsi que les bornes sur le MATI sont obtenues à l'aide du Corollaire 5.2.1. En effet, puisque le seul gain affecté par la paramétrisation en  $\theta$  est  $\gamma_1(\theta)$  et que celui-ci est continu et strictement croissant en  $\theta$  pour  $\theta > \theta_0$ , les résultats de §5.2 sont valides.

**Proposition 5.3.3** *Supposons que le système (5.81) soit UGS, soit  $\theta > \theta_0$  (où  $\theta_0$  est défini dans le Lemme 5.3.2), lorsqu'un bloqueur ZOH est implémenté, pour*

(i) *le protocole RR, si  $\tau \in [v, \tilde{\tau}_{1,RR}(\theta))$  où*

$$\tilde{\tau}_{1,RR}(\theta) = \frac{(\sqrt{l} - \sqrt{l-1}) \lambda_{\min}(S) \theta - \theta_0}{4l(1+k_{\phi_1}) \theta^p}, \quad (5.96)$$

(ii) *le protocole TOD, si  $\tau \in [v, \tilde{\tau}_{1,TOD}(\theta))$  où*

$$\tilde{\tau}_{1,TOD}(\theta) = \frac{(\sqrt{l} - \sqrt{l-1}) \lambda_{\min}(S) \theta - \theta_0}{4\sqrt{l}(1+k_{\phi_1}) \theta^p}, \quad (5.97)$$

(iii) *le cas échantillonné, si  $\tau \in [v, \tilde{\tau}_{1,SD}(\theta))$  où*

$$\tilde{\tau}_{1,SD}(\theta) = \frac{\lambda_{\min}(S) \theta - \theta_0}{4(1+k_{\phi_1}) \theta^p}, \quad (5.98)$$

alors le système (5.86)-(5.91) est UGS et la propriété de convergence (5.51) est vérifiée.

Les dynamiques du système (5.88) sont composées d'un terme linéaire et d'un autre globalement Lipschitzien par conséquent l'Hypothèse 5.2.6 est satisfaite pour tout  $\theta \in \mathbb{R}_{>0}$  (cf. Théorème 3.2 dans [98]), la proposition suivante découle du Théorème 5.2.2.

**Proposition 5.3.4** *Soit  $\theta > \theta_0$ , considérons le système (5.86)-(5.91) avec le bloqueur Pred ( $\hat{f}_P(z) = CAz + C\phi(z)$ ), pour*

(i) *le protocole RR, si  $\tau \in [v, \tau_{2,RR}(\theta))$  où*

$$\tau_{2,RR}(\theta) = \frac{(\sqrt{l}-\sqrt{l-1})\lambda_{\min}(S)}{2l(1+k_{\phi_1})} \frac{\theta-\theta_0}{\theta^p}; \quad (5.99)$$

(ii) *le protocole TOD, si  $\tau \in [v, \tau_{2,TOD}(\theta))$  où*

$$\tau_{2,TOD}(\theta) = \frac{(\sqrt{l}-\sqrt{l-1})\lambda_{\min}(S)}{2\sqrt{l}(1+k_{\phi_1})} \frac{\theta-\theta_0}{\theta^p}; \quad (5.100)$$

(iii) *le cas échantillonné, si  $\tau \in [v, \tau_{2,SD}(\theta))$  où*

$$\tau_{2,SD}(\theta) = \frac{\lambda_{\min}(S)}{2(1+k_{\phi_1})} \frac{\theta-\theta_0}{\theta^p}; \quad (5.101)$$

alors le système (5.86)-(5.91) est positivement complet et (5.56) est garanti.

Nous retrouvons la même situation que pour les observateurs linéaires : la fonction de blocage Pred assure a priori des propriétés de convergence plus fortes que le ZOH.

**Remarque 5.3.5** *Pour ce qui est des bornes sur le MATI, les mêmes remarques que dans §5.3.1 s'appliquent, on constate, de plus, que celles-ci sont maximisées pour  $\theta = \frac{p}{p-1}\theta_0 > \theta_0$  ( $p > 1$ ).*

## 5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vu comment le cadre d'étude de §4.3.2 peut être utilisé pour déduire des conditions suffisantes garantissant le bon fonctionnement de l'observateur lorsque les données du système sont transmises par l'intermédiaire d'un réseau ordonnancé. Les hypothèses développées sont vérifiées par les observateurs linéaires et à grand gain pour différentes configurations de réseau usuelles. Pour la première fois, des bornes sur le MATI explicites ont ainsi pu être établies. Nous avons montré que le choix des fonctions de blocage peut se révéler primordiale : le Pred permet de déduire des propriétés de stabilité plus fortes qu'un simple bloqueur d'ordre zéro. Des simulations sont proposées au chapitre suivant afin de vérifier les résultats théoriques obtenus. La linéarité des gains considérés dans ce chapitre sera relaxée au Chapitre 7 afin d'étudier de plus larges classes de systèmes.



## Chapitre 6

# Extension des observateurs de Karafyllis-Kravaris aux NCS

### 6.1 Introduction

La synthèse d'observateurs pour les systèmes à données échantillonnées non linéaires a été l'objet de nombreuses publications. L'essentiel des travaux repose sur une approche discrète : un observateur est synthétisé pour le modèle discrétisé exact ou approximé du système continu, voir par exemple [19, 22, 30, 35, 39, 110, 157, 207]. Un cadre méthodologique est d'ailleurs proposé dans [9] pour la conception d'observateurs à partir de modèles approximatés discrets. Un des inconvénients de ces méthodes est de ne pas prendre en compte le comportement du système entre deux instants d'échantillonnage. D'autre part, puisque l'expression analytique du discrétisé exact n'est généralement pas disponible, les schémas d'approximations utilisés sont souvent à l'origine d'incertitudes qui peuvent affecter la convergence de l'observateur. Une autre approche consiste à utiliser des techniques d'optimisation [2, 21, 137, 168, 214]. Ces méthodes dépendent grandement des mesures disponibles et de leur qualité. Sensibles donc aux bruits de mesures, elles requièrent la manipulation de grandes quantités de données et donc d'importantes capacités de mémoire et de calculs.

Lorsque les vitesses de calculs disponibles sont suffisamment rapides par rapport aux constantes de temps du système ou de la fréquence d'échantillonnage des capteurs, il peut être raisonnable et judicieux de répondre au problème d'un point de vue hybride : les dynamiques de l'observateur sont continues entre deux instants d'échantillonnage et affectées par des sauts lorsque les mesures sont reçues. Dans [44], un observateur à grand gain dit *continu-discret* est proposé. Il ne s'agit pas d'émuler un observateur continu mais de modifier sa structure en fonction de l'échantillonnage. De nombreuses études ont par la suite contribué à améliorer ou élargir cette méthode toujours pour des observateurs de type grand gain ou pour des systèmes affines en l'état, voir [71, 72, 138, 139] et [3] pour une extension à l'adaptatif. Récemment, un nouveau type d'observateurs hybrides fut développé pour une classe plus



générale de systèmes [92]. Le principe est le suivant. Considérant un observateur continu, une variable auxiliaire est introduite afin de remplacer le vecteur de mesures indisponible entre deux instants d'échantillonnage. Celle-ci évoluera le long des mêmes champs de vecteurs que la sortie du système et sera réinitialisée lorsque les mesures sont reçues. On nommera ces structures *observateurs de Karafyllis-Kravaris*.

L'objectif de cette étude est d'étendre les observateurs de Karafyllis-Kravaris aux NCS. Nous avons vu au Chapitre 4, que cette construction correspond à l'émulation d'un observateur continu associé à une fonction de blocage particulière, Pred. Ce chapitre offre ainsi une alternative au Chapitre 5 pour l'utilisation de bloqueurs Pred, puisque d'autres conditions sont considérées et que la convergence de l'observateur est analysée à l'aide d'outils différents. Nous en déduisons par conséquent de nouvelles bornes sur le MATI. Nous montrerons que les conditions requises sont également satisfaites par les observateurs linéaires et à grand gain. Des comparaisons des MATI obtenus à l'aide des deux méthodes sont présentées sur deux exemples.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Après avoir rappelé quelques définitions et résultats de stabilité dans §6.2, le principe des observateurs de Karafyllis-Kravaris est rappelé dans §6.3 pour les systèmes à données échantillonnées. Dans §6.4, le problème est réécrit dans les mêmes coordonnées qu'aux Chapitres 4 et 5 pour les NCS, afin de comparer les hypothèses avec celles précédemment considérées. L'extension aux NCS est ensuite présentée pour un nouvelle classe de protocoles dite à *excitation persistante* qui inclut le protocole RR et les protocoles dynamiques TOD. Il est montré que les observateurs linéaires et à grand gain satisfont les hypothèses requises dans §6.5. Ces résultats sont ensuite appliqués à un exemple numérique et étendu à un observateur pour un robot flexible dans §6.6.

## 6.2 Préliminaires

Dans son livre [181], Eduardo Sontag définit un système comme un objet mathématique qui satisfait notamment la propriété de semi-groupe (Définition 2.1.2), i.e. pour un système décrit par une équation différentielle ordinaire, toute solution  $x(\cdot, t_0, x_0)$  coïncide avec celle ayant pour condition initiale  $x(t_1, t_0, x_0)$  pour tout  $t \geq t_1 > t_0$  (que l'on note  $\tilde{x}(\cdot, t_1, x(t_1, t_0, x_0))$ ). L'intérêt grandissant pour les systèmes hybrides a amené les automaticiens à rencontrer des « systèmes » qui ne vérifient plus cette propriété (voir Exemple 2.7 dans [91]). Afin de combler ce vide, un cadre théorique a été développé dans [89, 90] pour l'analyse des systèmes vérifiant une propriété de semi-groupe dite faible, qui fut par la suite le point de départ de plusieurs études dont [91] où un théorème du petit gain est proposé. Celui-ci présente notamment la particularité de ne pas nécessiter la bornitude des états du système contrairement aux formulations classiques [86, 184]. C'est ce théorème qui est utilisé dans [92] pour prouver la convergence des observateurs à données échantillonnées et que nous utiliserons dans ce chapitre.

La classe de systèmes considérée dans cette étude vérifie bien la propriété de semi-groupe. Nous rappelons tout de même quelques notions introduites dans [89] afin de présenter le théorème du petit gain de [91] qui nous permettra d'étendre certaines hypothèses par rapport au chapitre précédent.

Considérons la classe de systèmes hybrides suivante :

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (6.1)$$

$$y = h(t, x, u) \quad (6.2)$$

$$x(t_i^+) = \tilde{f}(t_i, x(t_i), u(t_i)), \quad (6.3)$$

où  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ ,  $u \in \mathcal{L}_\infty^{n_u}$ ,  $f, \tilde{f} : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ ,  $n_x, n_u, n_y \in \mathbb{Z}_{>0}$ . L'instant initial est noté  $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  et la condition initiale  $x_0 = x(t_0) \in \mathbb{R}^{n_x}$ . La séquence de sauts  $\{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{>0}}$  vérifie :

$$v \leq t_i - t_{i-1} \leq \tau \quad \forall i \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad (6.4)$$

avec  $v, \tau \in \mathbb{R}_{>0}$  fixés indépendamment des états du système ( $v$  est toujours introduit afin d'éviter le paradoxe de Zénon),  $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  est l'instant initial.

**Remarque 6.2.1** *Nous avons choisi de considérer une classe de systèmes moins vaste que celle étudiée dans [89, 90], qui inclut les systèmes de la forme (4.22)-(4.27) afin de simplifier l'énoncé des définitions et résultats suivants.*

**Définition 6.2.1 (Complétude robuste positive)** *Le système (6.1)-(6.3) est robustement positivement complet (RFC) vis-à-vis de  $u$ , s'il existe  $\mu \in C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\geq 0})$ ,  $a \in \mathcal{K}_\infty$  et  $\gamma \in \mathcal{K}$ , tels que pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $u \in \mathcal{L}_\infty^{n_u}$ , les solutions de (6.1)-(6.3) vérifient, pour tout  $t \geq t_0 \geq 0$  :*

$$|x(t)| \leq \mu(t - t_0) (a(|x_0|) + \gamma(\|u\|_{[t_0, t]})). \quad (6.5)$$

**Remarque 6.2.2** *Pour les systèmes décrits par des équations différentielles ordinaires, la complétude robuste positive est très similaire à la complétude positive uniforme d'après la Définition A.2.3 et l'équivalence des bornes sous forme d'addition et de maximum (cf. Proposition A.1.2), à la différence près que  $a$  doit être non bornée ici.*

**Définition 6.2.2 (Bornitude-Implique-Continuation (BIC))** *Le système (6.1)-(6.3) est BIC, si pour tout  $(t_0, x_0, u) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathcal{L}_\infty^{n_u}$  il existe  $t_{\max} \in (t_0, \infty]$  (l'intervalle maximal d'existence des solutions) tel que les solutions de (6.1)-(6.3),  $x(\cdot, t_0, x_0, u)$  existent sur  $[t_0, t_{\max})$ . De plus, si  $t_{\max} < \infty$ , alors pour tout  $c \in \mathbb{R}_{>0}$ , il existe  $t \in [t_0, t_{\max})$  tel que  $|x(t, t_0, x_0, u)| > c$ .*

**Remarque 6.2.3** *Si le système (6.1)-(6.3) est robustement positivement complet, on peut alors montrer, compte tenu de sa régularité, d'après [89], qu'il a la propriété BIC ([92]).*

Un cas particulier et simplifié du Théorème 3.1 de [91] est énoncé pour le système (6.1)-(6.3).

**Théorème 6.2.1** *Supposons que le système (6.1)-(6.3) satisfasse bien la propriété BIC et qu'il existe  $V_i : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  tels que  $V_i(t,0,0) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $i \in \{1,2\}$ , et :*

(H1) *pour tout  $i \in \{1,2\}$  il existe  $\sigma_i \in \mathcal{KL}$ ,  $\mu_i \in C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\geq 0})$ ,  $\gamma_i, \gamma_i^u, a_i, p_i, p_i^u \in \mathcal{K}$ ,  $L_i : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  avec  $L_i(t,0) = 0$  pour tout  $t \geq 0$ , tel que pour tout  $(t_0, x_0, u) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathcal{L}_{\infty}^{n_u}$ ,  $t \mapsto V_i(t, \phi(t, t_0, x_0, u), u(t))$  est localement bornée sur  $[t_0, t_{\max})$  (l'intervalle d'existence maximal) et pour tout  $t \in [t_0, t_{\max})$ , avec  $j \in \{1,2\} \setminus \{i\}$ , les solutions de (6.1)-(6.3) :*

$$\begin{aligned} V_i(t, x(t, t_0, x_0, u), u(t)) &\leq \sigma_i(L_i(t_0, x_0), t - t_0) + \gamma_i(\|V_j\|_{[t_0, t]}) + \gamma_i^u(\|u\|_{[t_0, t]}) \\ L_i(t, x(t, t_0, x_0, u)) &\leq \max \left\{ \mu_i(t - t_0), a_i(|x_0|), p_i(\|V_j\|_{[t_0, t]}), p_i^u(\|u\|_{[t_0, t]}) \right\} ; \end{aligned} \quad (6.6)$$

(H2) *il existe  $\rho \in \mathcal{K}_{\infty}$  tel que :*

$$g_1 \circ g_2(s) \leq s \quad \forall s \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad (6.7)$$

où  $g_i(s) = \gamma_i(s) + \rho(\gamma_i(s))$ ,  $i \in \{1,2\}$  ;

(H3) *il existe  $a \in \mathcal{K}$  tel que, pour tout  $(t, x, u) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathcal{L}_{\infty}^{n_u}$  :*

$$|h(t, x, u)| \leq a(V_1(t, x, u) + \gamma_1(V_2(t, x, u))) ; \quad (6.8)$$

(H4) *il existe  $b \in \mathcal{K}$  tel que, pour tout  $(t, x) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n_x}$  :*

$$\begin{aligned} |x| &\leq b(L_1(t, x) + L_2(t, x)) \\ \max \{L_1(t, x), L_2(t, x)\} &\leq b(|x|) ; \end{aligned} \quad (6.9)$$

alors, le système (6.1)-(6.3) est RFC et stable entrée-sortie de  $u$  à  $y$ .

Comme nous l'avons déjà évoqué, l'intérêt de ce théorème du petit gain, par rapport aux précédentes formulations, réside notamment dans le fait qu'il ne repose pas sur la bornitude des états du système, grâce notamment aux conditions (H4).

**Remarque 6.2.4** *Dans [91], les auteurs n'utilisent pas de fonctions de classe  $\mathcal{K}$  mais de classe  $\mathcal{N}$  (définie positive, continue et non-décroissante de  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  dans  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ). Nous avons choisi de ne pas considérer la nuance entre ces deux classes et de ne parler que de fonctions de classe  $\mathcal{K}$  dans les énoncés (sans en affecter la validité) dans un souci de consistance avec l'ensemble des travaux de cette partie.*

### 6.3 Observateurs pour les systèmes à données échantillonnées

Nous rappelons dans cette section les grandes lignes de [92] de manière informelle. Soit le système :

$$\dot{x} = f_P(x) \quad (6.10)$$

$$y = h_P(x) + \varepsilon, \quad (6.11)$$

où  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  est l'état du système,  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  la sortie,  $\varepsilon \in \mathcal{L}_\infty^{n_y}$  le vecteur des perturbations de mesure,  $f_P \in C^1(\mathbb{R}^{n_x}, \mathbb{R}^{n_x})$ ,  $h \in C^1(\mathbb{R}^{n_x}, \mathbb{R}^{n_y})$  avec  $f_P(0,0) = 0$  et  $h_P(0) = 0$ ,  $n_x, n_y \in \mathbb{Z}_{>0}$ . L'instant initial est  $t_0 = 0$ , sans perte de généralité, et le vecteur d'état initial est noté  $x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$ . Afin d'éviter tout phénomène d'explosion en temps fini, le système (6.10)-(6.11) est supposé RFC.

**Remarque 6.3.1** *Bien que [92] traite uniquement de systèmes monosorties, l'extension au cas multisortie est immédiate.*

Un observateur continu est disponible :

$$\dot{z} = f_O(z, y) \quad (6.12)$$

$$\bar{x} = h_O(z), \quad (6.13)$$

où  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  est l'état de l'observateur,  $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$  l'estimé du vecteur d'état  $x$ ,  $f_O \in C^1(\mathbb{R}^{n_z+n_y}, \mathbb{R}^{n_z})$ ,  $h_O \in C^1(\mathbb{R}^{n_z}, \mathbb{R}^{n_x})$  avec  $f_O(0,0) = 0$  et  $h_O(0) = 0$ . L'observateur (6.12)-(6.13) est supposé suffisamment robuste aux perturbations de mesures,  $\varepsilon$ , en ce sens que l'erreur d'observation,  $\xi = x - \bar{x}$ , vérifie le long des solutions de (6.10)-(6.11), (6.12)-(6.13) :

$$|\xi(t)| \leq \sigma(|x_0| + |z_0|, t) + \gamma(\|\varepsilon\|_{[0,t]}), \quad (6.14)$$

où  $\sigma \in \mathcal{KL}$  et  $\gamma \in \mathcal{K}$ . De plus, il est supposé que :

$$|z(t)| \leq \mu(t) \left( a(|x_0| + |z_0|) + p(\|\varepsilon\|_{[0,t]}) \right), \quad (6.15)$$

où  $\mu \in C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\geq 0})$ ,  $a \in \mathcal{K}_\infty$  et  $p \in \mathcal{K}$ . On remarque que (6.14) ne permet a priori pas de déduire une des caractéristiques habituelles des observateurs : pour toute condition initiale du système  $x_0$ , il existe  $z_0$  qui garantit la synchronisation de l'observateur et du système, c'est-à-dire :

$$\bar{x}(t) = x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \quad (6.16)$$

C'est la raison pour laquelle cette propriété est supposée directement vérifiée par (6.12)-(6.13) dans [92].

Considérons désormais le cas où les mesures du système sont échantillonnées. Soit la séquence d'instant de transmission strictement croissante et non bornée  $\{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{>0}} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$  qui vérifie :

$$v \leq t_i - t_{i-1} \leq \tau \quad \forall i \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad (6.17)$$

où  $\tau \in [v, \infty)$  représente la période d'échantillonnage maximale admissible,  $v \in \mathbb{R}_{>0}$  et  $t_0 = 0$ . D'éventuelles perturbations sur l'échantillonnage sont considérées :

$$t_i = t_{i-1} + \tau \exp(-d(t_{i-1})) \quad \forall i \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad (6.18)$$

où  $d \in \mathcal{L}_\infty^1$  est inconnue et  $d(t) \geq 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . La structure d'observation proposée est la suivante :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f_O(z, \hat{y}) & \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \\ \bar{x} &= h_O(z) \\ \dot{\hat{y}} &= L_{f_P} h_P(\bar{x}) & \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \\ \hat{y}(t_i^+) &= y(t_i), \end{aligned} \quad (6.19)$$

où  $\hat{y}$  est une variable auxiliaire qui remplace la sortie du système (qui correspond à la fonction de blocage Pred). La dernière condition requise sur l'observateur continu, qui sera le point de départ de l'analyse de stabilité, est que le long des solutions de (6.10)-(6.11) et (6.12)-(6.13) pour tout  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  :

$$|L_{f_P} h_P(\bar{x}) - L_{f_P} h_P(x)| \leq \bar{\sigma}(|x_0| + |z_0|, t) + K \|\varepsilon\|_{[0, t]}, \quad (6.20)$$

où  $\bar{\sigma} \in \mathcal{KL}$  et  $K \in \mathbb{R}_{>0}$ . Il est important de souligner que (6.20) est une propriété de l'observateur continu et non de (6.19). A l'aide du Théorème 6.2.1, il est montré que si la période d'échantillonnage maximale satisfait :

$$\tau K < 1, \quad (6.21)$$

alors, les solutions de l'observateur (6.19) sont bien définies pour tout  $t \in [0, \infty)$ , il existe bien des conditions initiales assurant la synchronisation de l'estimé avec le vecteur d'état pour tout instant et il existe  $\tilde{\sigma} \in \mathcal{KL}$  et  $\gamma \in \mathcal{K}$  tels que, le long des solutions de (6.10)-(6.11) et (6.19), pour tout  $t \in [0, \infty)$ ,  $(x_0, z_0, w_0) \in \mathbb{R}^{n_x + n_z + n_y}$  :

$$|\xi(t)| \leq \tilde{\sigma}(|x_0| + |z_0| + |w_0|, t) + \gamma(\|\varepsilon\|_{[0, t]}). \quad (6.22)$$

Par conséquent, l'observateur (6.19) permet bien de reconstruire asymptotiquement l'état du système lorsque les mesures sont échantillonnées et que la période d'échantillonnage maximale vérifie (6.21).

## 6.4 Observateurs pour les NCS

### 6.4.1 Modélisation et hypothèses

Tout d'abord le problème est réécrit à l'aide du formalisme proposé au Chapitre 4, puis les hypothèses sont présentées et comparées à celles du chapitre précédent.

Lorsque les données du système sont transmises via un réseau ordonnancé, d'après le Chapitre 4, le problème peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{\xi} = f_{\xi}(\xi, e, z) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (6.23)$$

$$\dot{z} = f_z(\xi, e, z) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (6.24)$$

$$\dot{e} = g(\xi, e, z) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (6.25)$$

$$\xi(t_i^+) = \xi(t_i) \quad (6.26)$$

$$z(t_i^+) = z(t_i) \quad (6.27)$$

$$e(t_i^+) = h(i, e(t_i), z(t_i)), \quad (6.28)$$

où  $\xi \in \mathbb{R}^{n_{\xi}}$  représente l'erreur d'observation,  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  l'état de l'observateur,  $e \in \mathbb{R}^{n_e}$  l'erreur induite par le réseau et  $g$  est défini par (4.28) et (4.48). La séquence d'instantanés de transmission  $\{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{>0}}$  vérifie :

$$v \leq t_i - t_{i-1} \leq \tau \quad \forall i \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad (6.29)$$

avec  $\tau \in [v, \infty)$  et  $t_0 = 0$ . Les perturbations sur les instantanés de transmission considérées dans (6.18) peuvent toujours être prises en compte du moment que (6.29) est satisfait. Les perturbations de mesures,  $\varepsilon$ , sont ignorées dans (6.23)-(6.28) puisqu'elles sont uniquement introduites dans §6.3 afin de quantifier la robustesse de l'observateur aux incertitudes de mesures, ce que nous ferons ici à l'aide de la variable  $e$ .

**Remarque 6.4.1** *Les dépendances au temps et aux perturbations  $w$  sont omises dans ce chapitre, uniquement afin de simplifier l'exposé.*

**Hypothèse 6.4.1** *Le système (6.23)-(6.24) est RFC vis-à-vis de  $e$ , i.e. il existe  $\tilde{\mu} \in C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\geq 0})$ ,  $\tilde{\alpha} \in \mathcal{K}_{\infty}$ ,  $\tilde{\gamma} \in \mathcal{K}$  telles que pour tout  $(\xi_0, z_0) \in \mathbb{R}^{n_{\xi} + n_z}$  et  $e \in \mathcal{L}_{\infty}^{n_e}$ , le long des solutions de (6.24), pour tout  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  :*

$$|z(t)| \leq \tilde{\mu}(t) \left( \tilde{\alpha}(|\xi_0| + |z_0|) + \tilde{\gamma}(\|e\|_{[0,t]}) \right). \quad (6.30)$$

Lorsque le problème est écrit dans les coordonnées  $(\xi, z, e)$ , il n'est plus nécessaire de supposer que le système (6.10) soit positivement complet : l'hypothèse ci-dessus et la suivante l'impliquent. On remarque que l'Hypothèse 6.4.1 permet de considérer des gains non linéaires contrairement à l'Hypothèse 5.2.6.

**Hypothèse 6.4.2** *Le système (6.23)-(6.24) est stable entrée-sortie de  $e$  à  $\xi$ , i.e. il existe  $\sigma \in \mathcal{KL}$  et  $\gamma \in \mathcal{K}$  telles que, les solutions de (6.23)-(6.24) vérifient, pour tout  $(\xi_0, z_0) \in \mathbb{R}^{n_{\xi} + n_z}$ ,  $e \in \mathcal{L}_{\infty}^{n_e}$  et  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  :*

$$|\xi(t)| \leq \sigma(|\xi_0| + |z_0|, t) + \gamma(\|e\|_{[0,t]}). \quad (6.31)$$

Cette hypothèse, qui correspond à l'Hypothèse 5.2.1 mais avec des gains non linéaires, est équivalente à (6.14). En effet, supposons que l'Hypothèse 6.4.2 soit vérifiée, sachant que  $\xi = x - \bar{x} = x - h_O(z)$ , alors pour tout  $(\xi_0, z_0) \in \mathbb{R}^{n_\xi + n_z}$ ,  $e \in \mathcal{L}_\infty^{n_e}$  et  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  :

$$\begin{aligned} |\xi(t)| &\leq \sigma(|\xi_0| + |z_0|, t) + \gamma(\|e\|_{[0,t]}) \\ &\leq \sigma(|x_0| + |h_O(z_0)| + |z_0|, t) + \gamma(\|e\|_{[0,t]}). \end{aligned} \quad (6.32)$$

Puisque  $h_O(0) = 0$  et que  $h_O$  est continue, il existe  $\alpha \in \mathcal{K}$  telle que  $|h_O(z)| \leq \alpha(|z|)$  pour  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  (par exemple  $\alpha(s) = \sup_{|x| \leq s} |h_O(x)| + s$ ), par conséquent :

$$\begin{aligned} |\xi(t)| &\leq \sigma(|x_0| + \alpha(|z_0|) + |z_0|, t) + \gamma(\|e\|_{[0,t]}) \\ &\leq \sigma((\mathbb{I} + \alpha)(|x_0| + |z_0|), t) + \gamma(\|e\|_{[0,t]}). \end{aligned} \quad (6.33)$$

En rappelant que  $\varepsilon$  correspond à  $e$  ici, (6.14) est bien satisfaite. A l'inverse, on peut montrer que (6.14) implique l'Hypothèse 6.4.2. Ainsi, il n'est plus nécessaire de supposer séparément qu'il existe des conditions initiales assurant la synchronisation pour tout temps de  $x$  et  $\bar{x}$  comme dans §6.3 : l'Hypothèse 6.4.2 le garantit.

Revenons au cas des NCS. Le vecteur de sortie,  $y$ , est décomposé en  $l$  sous-vecteurs ( $y = (y_1, \dots, y_l)$ ), où  $l$  est le nombre de nœuds, ainsi  $h_p = (h_p^1, \dots, h_p^l)$ . L'hypothèse suivante jouera le rôle de (6.20).

**Hypothèse 6.4.3** *Il existe  $\bar{\sigma}_j \in \mathcal{KL}$  et  $K_j \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  tels que le long des solutions de (6.23)-(6.24), pour tout  $j \in \{1, \dots, l\}$ ,  $(\xi_0, z_0) \in \mathbb{R}^{n_x + n_z}$  et  $e \in \mathcal{L}_\infty^{n_e}$  :*

$$|L_{f_P} h_P^j(h_O(z)) - L_{f_P} h_P^j(h_O(z) + \xi)| \leq \bar{\sigma}_j(|\xi_0| + |z_0|, t) + K_j \|e\|_{[t_0, t]}. \quad (6.34)$$

**Remarque 6.4.2** *On note que  $|\dot{e}_j| = |L_{f_P} h_P^j(h_O(z)) - L_{f_P} h_P^j(h_O(z) + \xi)|$ ,  $j \in \{1, \dots, l\}$  ( $e = (e_1, \dots, e_l)$ ).*

Cette hypothèse peut être interprétée comme une propriété de stabilité entrée-sortie du système (6.23)-(6.24) avec  $e$  comme entrée et  $\tilde{y} = L_{f_P} h_P^i(h_O(z)) - L_{f_P} h_P^i(h_O(z) + \xi)$  comme sortie. Contrairement au Chapitre 5, l'interconnexion ne repose plus sur les variables  $(\xi, z, e)$  mais  $(\tilde{y}, z, e)$ . Cette différence n'est pas la seule entre les deux études, comme nous le constaterons lors de l'analyse de stabilité.

**Remarque 6.4.3** *Il est possible d'adapter les résultats du Chapitre 5 à ce type d'interconnexion sous des hypothèses supplémentaires. De nouvelles bornes sur le MATI sont alors obtenues. Nous avons choisi de présenter différents types d'interconnexion dans ce mémoire afin de souligner la maléabilité des résultats exposés. Nous considérerons ultérieurement ce type d'interconnexion dans l'article de revue correspondant au Chapitre 5.*

**Remarque 6.4.4** *De la même manière que (6.14) et l'Hypothèse 6.4.2 sont équivalentes, on peut montrer que (6.34) l'est avec :*

$$|L_{f_P} h_P^i(h_O(z)) - L_{f_P} h_P^i(h_O(z) + \xi)| \leq \bar{\sigma}_i(|x_0| + |z_0|, t) + K_i \|e\|_{[t_0, t]}, \quad (6.35)$$

ce qui permet de faire le lien entre l'Hypothèse 6.4.3 et (6.20).

## 6.4.2 Pour des protocoles à excitation persistante

On se concentre dans cette sous-section sur les protocoles définis ci-dessous. La séquence de transmission  $\{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{>0}} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$  est définie comme dans §6.3. On nomme  $\{t_i^j\}_{i \in \mathbb{Z}_{>0}} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$  la sous-séquence d'instantan aux quels le nœud  $j \in \{1, \dots, l\}$  a accès au réseau.

**Définition 6.4.1** *On appelle protocole à excitation persistante tout protocole qui satisfait les propriétés suivantes :*

- (i) *chaque séquence  $\{t_i^j\}_{i \in \mathbb{Z}_{>0}}$  est non bornée ;*
- (ii) *pour tout  $j \in \{1, \dots, l\}$  il existe  $v_j \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $\tau_j \in [v, \infty)$  tels que  $v_j \leq t_{i+1}^j - t_i^j \leq \tau_j$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .*

Les instants de transmission d'un même nœud ne sont donc plus périodiques. La condition (i) assure qu'aucun nœud n'est ignoré après un temps donné, tandis que (ii) garantit l'existence d'une borne supérieure sur l'intervalle de temps séparant deux instants de transmission d'un même nœud. Ces deux propriétés évitent que l'information d'un nœud soit ou tende à être oubliée avec le temps. Ce type de protocoles a été étudié dans [190]. On constate que le protocole RR est bien à excitation persistante tandis que rien ne garantit a priori que le TOD le soit. Concernant la stabilité éventuelle de tels protocoles, il est difficile de statuer de manière générale puisqu'ils ne sont pas définis par leur comportement à chaque instant de transmission mais sur un intervalle de temps, à la différence des Définitions 4.2.1 et 4.3.1. De plus, dans ce chapitre contrairement au précédent, l'analyse ne repose pas sur la stabilité du protocole.

**Théorème 6.4.1** *Supposons que les Hypothèses 6.4.1-6.4.3 soient vérifiées, pour les protocoles à excitation persistante, si*

$$\sum_{j=1}^l \tau_j K_j < 1 \quad (6.36)$$

alors le système (6.23)-(6.28) est RFC et il existe  $\beta \in \mathcal{KL}$  tel que, pour tout  $(\xi_0, z_0, e_0) \in \mathbb{R}^{n_\xi + n_z + n_e}$  :

$$|(\xi(t), e(t))| \leq \beta(|\xi_0| + |z_0| + |e_0|, t). \quad (6.37)$$



**Preuve.** Soit  $(\xi_0, z_0, e_0) \in \mathbb{R}^{n_\xi + n_z + n_e}$ . D'après (6.34), soit  $j \in \{1, \dots, l\}$ , pour tout  $t \in [0, t_{\max})$  (où  $[0, t_{\max})$  est l'intervalle d'existence maximal de (6.23)-(6.28),  $t_{\max} \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\}$ ):

$$|L_{f_P} h_P^j(h_O(z)) - L_{f_P} h_P^j(h_O(z) + \xi)| \leq \bar{\sigma}_j(|\xi_0| + |z_0|, t) + K_j \|e\|_{[0, t)}. \quad (6.38)$$

Soit  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , pour tout  $t \in [\tau_i^j, \tau_{i+1}^j) \cap [0, t_{\max})$ , de par (6.38) on a :

$$\begin{aligned} |e_j(t)| &= \left| \int_{\tau_i^j}^t \left( L_{f_P} h_P^j(h_O(z(s))) - L_{f_P} h_P^j(h_O(z(s)) + \xi(s)) \right) ds \right| \\ &\leq \tau_j \bar{\sigma}_j(|\xi_0| + |z_0|, \tau_i^j) + \tau_j K_j \|e\|_{[0, t)}. \end{aligned}$$

Considérons  $t \in [0, \tau_0^j) \cap [0, t_{\max})$ :

$$\begin{aligned} |e_j(t)| &= \left| e_j(0) + \int_0^t \left( L_{f_P} h_P^j(h_O(z(s))) - L_{f_P} h_P^j(h_O(z(s)) + \xi(s)) \right) ds \right| \\ &\leq |e_j(0)| + \tau_0^j \bar{\sigma}_j(|\xi_0| + |z_0|, 0) + \tau_0^j K_j \|e\|_{[0, t)}. \end{aligned}$$

Définissons la fonction de classe  $\mathcal{KL}$ :

$$\hat{\sigma}_j(s, t) = \begin{cases} (\tau_j \bar{\sigma}_j(s, 0) + s) e^{\tau_j - t} & \text{si } t < \tau_j \\ \tau_j \bar{\sigma}_j(s, t - \tau_j) + s e^{\tau_j - t} & \text{si } t \geq \tau_j. \end{cases} \quad (6.39)$$

Pour tout  $t \in [0, t_{\max})$ ,

$$|e_j(t)| \leq \hat{\sigma}_j(|\xi_0| + |z_0| + |e_0|, t) + \tau_j K_j \|e\|_{[0, t)}. \quad (6.40)$$

Sachant que  $|e| \leq \sum_{j=1}^l |e_j|$ , on déduit de (6.40) que, pour tout  $t \in [0, t_{\max})$ :

$$|e(t)| \leq \hat{\sigma}(|\xi_0| + |z_0| + |e_0|, t) + \sum_{j=1}^l \tau_j K_j \|e\|_{[0, t)}, \quad (6.41)$$

où  $\hat{\sigma} = \sum_{j=1}^l \hat{\sigma}_j \in \mathcal{KL}$ . Ainsi, puisque  $\sum_{j=1}^l \tau_j K_j < 1$ ,

$$\|e\|_{[0, t)} \leq \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^l \tau_j K_j} \hat{\sigma}(|\xi_0| + |z_0| + |e_0|, 0). \quad (6.42)$$

D'autre part, pour tout  $t \in [0, t_{\max})$ , d'après l'Hypothèse 6.4.2:

$$|\xi(t)| \leq \sigma(|\xi_0| + |z_0|, t) + \gamma(\|e\|_{[0, t)}), \quad (6.43)$$

en conséquence, selon l'Hypothèse 6.4.1 et les Propositions A.1.1 et A.1.2, pour  $t \in [0, t_{\max})$ :

$$|\xi(t)| + |z(t)| + |e(t)| \leq \sigma(|\xi_0| + |z_0|, 0) + \tilde{\mu}(t)\tilde{\alpha}(|\xi_0| + |z_0|) + \check{\sigma} \left( t, \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^l \tau_j K_j} \hat{\sigma}(|\xi_0| + |z_0| + |e_0|, 0) \right) \quad (6.44)$$

$$|(\xi(t), z(t), e(t))| \leq \sigma(2|(\xi_0, z_0, e_0)|, 0) + \tilde{\mu}(t)\tilde{\alpha}(2|(\xi_0, z_0, e_0)|) + \check{\sigma} \left( t, \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^l \tau_j K_j} \hat{\sigma}(3|(\xi_0, z_0, e_0)|, 0) \right), \quad (6.45)$$

où  $\check{\sigma}(t, s) = s + \gamma(s) + \tilde{\mu}(t)\tilde{\gamma}(s)$ , pour  $s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . En majorant la fonction  $\vartheta : s \mapsto \sigma(2s, 0) + \tilde{\mu}(t)\tilde{\alpha}(2s) + \check{\sigma} \left( t, \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^l \tau_j K_j} \hat{\sigma}(3s, 0) \right) \in \mathcal{K}$  par une fonction  $\mathcal{K}_{\infty}$  (par exemple  $s \mapsto s + \vartheta(s)$ ), on déduit que le système (6.23)-(6.28) est RFC d'après la Définition 6.2.1 ( $a = \vartheta + \mathbb{I}$  et  $\mu = \tilde{\mu} + 1$ ). De plus, d'après (6.44),

$$|\xi(t)| + |z(t)| + |e(t)| \leq \sigma(|\xi_0| + |z_0|, 0) + \tilde{\mu}^2(t) + \frac{1}{2}\tilde{\alpha}^2(|\xi_0| + |z_0|) + \check{\sigma} \left( \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^l \tau_j K_j} \hat{\sigma}(|\xi_0| + |z_0| + |e_0|, 0) \right) \leq \max \left\{ 2\sigma(|\xi_0| + |z_0|, 0) + \tilde{\alpha}^2(|\xi_0| + |z_0|) + 2\check{\sigma} \left( \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^l \tau_j K_j} \hat{\sigma}(|\xi_0| + |z_0| + |e_0|, 0) \right), 2\tilde{\mu}^2(t) \right\}, \quad (6.46)$$

où  $\check{\sigma}(t, s) = s + \gamma(s) + \frac{1}{2}\tilde{\gamma}(s)^2$ . Tous les éléments sont désormais réunis pour pouvoir appliquer le Théorème 6.2.1. Grâce à la régularité des champs de vecteurs considérés et l'occurrence des sauts indépendante des états du système, on peut montrer que le système (6.23)-(6.28) est BIC [89, 92]. D'après le Théorème 6.2.1, on identifie pour  $i \in \{1, 2\}$  et  $j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}$ ,  $V_i(t, \phi(t, t_0, x_0, u), u(t)) = |e|$ ,  $\sigma_i = \hat{\sigma}$ ,  $L_i(t, x) = |\xi| + |z| + |e|$ ,  $\gamma_i = \sum_{\iota=1}^l \tau_{\iota} K_{\iota} \mathbb{I}$ ,  $V_j = V_i$ ,  $\gamma_i^u = 0$ ,  $\mu_i = 2\tilde{\mu}^2$ ,  $a_i(s) = 2\sigma(2s, 0) + \tilde{\alpha}^2(2s) + 2\check{\sigma} \left( \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^l \tau_i K_i} \hat{\sigma}(3s, 0) \right)$  ( $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ),  $p_i = 0$ ,  $p_i^u = 0$ ,  $\rho = \eta \mathbb{I}$  où  $\eta$  est une constante arbitrairement petite,  $y = e$ ,  $a = \mathbb{I}$ ,  $b = 3\mathbb{I}$ . Ainsi, (6.6) est vérifiée d'après (6.41) et (6.46), (6.7) puisque  $\sum_{j=1}^l \tau_j K_j < 1$ , (6.8) et (6.9) d'après les fonctions

identifiées. Par conséquent, le Théorème 6.2.1 nous informe qu'il existe  $\tilde{\sigma} \in \mathcal{KL}$  telle que, pour tout  $(\xi_0, z_0, e_0) \in \mathbb{R}^{n_\xi + n_z + n_e}$ , le long des solutions de (6.23)-(6.28), pour tout  $t \in [0, \infty)$  :

$$|e(t)| \leq \tilde{\sigma}(|\xi_0| + |z_0| + |e_0|, t). \quad (6.47)$$

Finalement, toujours à l'aide du Théorème 6.2.1 et d'arguments similaires, d'après (6.43), (6.46), (6.47), on montre qu'il existe  $\check{\sigma} \in \mathcal{KL}$  telle que pour tout  $(\xi_0, z_0, e_0) \in \mathbb{R}^{n_\xi + n_z + n_e}$ , le long des solutions de (6.23)-(6.28), pour tout  $t \in [0, \infty)$  :

$$|\xi(t)| \leq \check{\sigma}(|\xi_0| + |z_0| + |e_0|, t). \quad (6.48)$$

Le résultat désiré est obtenu.  $\square$

Alors que les analyses conduites au Chapitre 5 reposent sur les propriétés de stabilité intrinsèques des protocoles, le problème est ici traité différemment, au cas par cas. Des hypothèses similaires à celles utilisées au Théorème 5.2.2 permettent d'assurer la convergence asymptotique de l'erreur d'observation (ainsi que de l'erreur induite par le réseau) vers l'origine, lorsqu'aucune perturbation n'affecte le système. Les différences entre les conditions requises sont de deux ordres. Premièrement, il n'est pas nécessaire que le système (6.23) soit stable entrée-état vis-à-vis de  $e$  avec un gain linéaire mais que (6.23)-(6.24) soit stable entrée-sortie de  $e$  à  $\xi$  avec des gains non linéaires, ce qui est moins restrictif. On doit cette extension au fait que le théorème du petit gain de [91] ne requiert pas la bornitude des états du système (on rappelle que lorsque la stabilité est entrée-sortie au Chapitre 5, il est nécessaire de supposer le système (6.24) soit UE<sub>BEB</sub>, tandis que la complétude robuste positive suffit ici). D'autre part, la stabilité du sous-système (6.25)-(6.28) est analysée différemment, en intégrant (6.34) ce qui permet de le considérer comme étant en interconnexion avec lui-même, et non pas avec (6.23), (6.26), (6.24), (6.27) comme au Chapitre 5. Les bornes sur le MATI de cette étude sont en conséquence différentes des précédentes et ne dépendent que des gains de l'Hypothèse 6.4.3.

Il est difficile d'affirmer qu'une méthode est plus précise que l'autre puisque les conditions sur les trajectoires et donc les gains sont différents. Nous ferons ce travail numériquement sur des exemples à la fin du chapitre.

Les deux résultats suivants sont des conséquences directes du Théorème 6.4.1.

**Corollaire 6.4.1** *Supposons que les Hypothèses 6.4.1-6.4.3 soient vérifiées, pour le protocole RR, si*

$$\sum_{j=1}^l \tau K_j < 1 \quad (6.49)$$

*alors le système (6.23)-(6.28) est RFC et (6.37) est garanti.*

**Corollaire 6.4.2** *Supposons que les Hypothèses 6.4.1-6.4.2 soient vérifiées et qu'il existe  $\bar{\sigma}_j \in \mathcal{KL}$  et  $K_j \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  tels que le long des solutions de (6.23)-(6.24), pour tout  $j \in \{1, \dots, l\}$ ,  $(\xi_0, z_0) \in \mathbb{R}^{n_\xi + n_z}$  et  $e \in \mathcal{L}_\infty^{n_e}$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  :*

$$|L_{f_P} h_P^j(h_O(z)) - L_{f_P} h_P^j(h_O(z) + \xi)| \leq \bar{\sigma}_j(|\xi_0| + |z_0|, t) + K_j \|e_j\|_{[t_0, t]}, \quad (6.50)$$

pour tout protocole à excitation persistante, si pour tout  $j \in \{1, \dots, l\}$

$$\tau_j K_j < 1, \quad (6.51)$$

alors le système (6.23)-(6.28) est RFC et (6.37) est garanti.

**Remarque 6.4.5** *La condition (6.50) est moins générale que (6.34) puisque le terme de droite ne dépend que du sous-vecteur  $e_j$ . Cela signifie, en général, que le système est composé de  $l$  sous-systèmes indépendants les uns des autres, correspondant à chaque nœud. Dans de tels cas, les bornes sur le MATI obtenues sont moins restrictives que celle du Théorème 6.4.1.*

### 6.4.3 Pour des protocoles TOD

L'ordonnement du réseau par un protocole TOD est maintenant étudié. On nomme  $\varsigma$  la fonction qui attribue l'accès au réseau à un nœud,  $\varsigma : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n_e} \rightarrow \{1, \dots, l\}$  constante par morceaux, lorsque le nœud  $j$  a été choisi à l'instant  $t_i$ ,  $\varsigma(t, e) = j$  pour  $t \in [t_i, t_{i+1})$ , et  $e_j(t_i) = 0$ .

Un résultat technique préliminaire est nécessaire à l'analyse.

**Lemme 6.4.1** *Supposons que les Hypothèses 6.4.1-6.4.3 soient vérifiées, pour le protocole TOD, pour tout  $(\xi_0, z_0, e_0) \in \mathbb{R}^{n_\xi + n_z + n_e}$ ,  $e \in \mathcal{L}_\infty^{n_e}$ ,  $j \in \{1, \dots, l\}$ ,  $i \geq l-1$ ,  $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \cap [0, t_{\max})$  ( $[0, t_{\max})$  est l'intervalle maximal d'existence des solutions,  $t_{\max} \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\}$ ), les solutions de (6.23)-(6.28) vérifient :*

$$|e_j(t)| \leq l\tau \sum_{k=1}^l \bar{\sigma}_k(|\xi_0| + |z_0|, \tau_{i-l+1}) + l\tau \max_{k \in \{1, \dots, l\}} \{K_k\} \|e\|_{[0, t)}. \quad (6.52)$$

**Preuve.** Soient  $(\xi_0, z_0, e_0) \in \mathbb{R}^{n_\xi + n_z + n_e}$ ,  $e \in \mathcal{L}_\infty^{n_e}$ ,  $j \in \{1, \dots, l\}$  et  $i \geq l-1$ . Si  $\varsigma_j(\tau_i, e(\tau_i^-)) = j$ , (6.52) est vérifié. Concentrons-nous sur le cas où  $\varsigma_j(\tau_i, e(\tau_i^-)) \neq j$ . Pour tout  $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \cap [0, t_{\max})$ , d'après (6.34) :

$$|e_j(t)| \leq \tau \bar{\sigma}_j(|\xi_0| + |z_0|, \tau_i) + \tau K_j \|e\|_{[0, t)} + |e_j(\tau_i)|. \quad (6.53)$$

Deux cas doivent être distingués.

(a) Pour tout  $k \in \{i-l+1, \dots, i\}$ ,  $\varsigma_j(\tau_k, e(\tau_k^-)) \neq j$ , alors, puisque  $i \geq l-1$ , au moins un

nœud  $j_0$  a eu accès au réseau au moins deux fois sur  $[\tau_{i-l+1}, \tau_i]$  aux instants notés  $k_1 < k_2$ . Par conséquent, pour  $t \in [\tau_{k_2}, \tau_{k_2+1}) \cap [0, t_{\max})$ ,

$$\begin{aligned} |e_j(t)| &\leq |e_j(\tau_{k_2})| + \tau \bar{\sigma}_j(|\xi_0| + |z_0|, \tau_{k_2}) + \tau K_j \|e\|_{[0,t)} \\ &\leq |e_{j_0}(\tau_{k_2}^-)| + \tau \bar{\sigma}_j(|\xi_0| + |z_0|, \tau_{k_2}) + \tau K_j \|e\|_{[0,t)}. \end{aligned} \quad (6.54)$$

D'autre part, pour  $t \in [\tau_{k_2-1}, \tau_{k_2}) \cap [0, t_{\max})$ ,

$$|e_{j_0}(t)| \leq \tau \sum_{q=k_1}^{k_2-1} \bar{\sigma}_{j_0}(|\xi_0| + |z_0|, \tau_q) + (k_2 - k_1) \tau K_{j_0} \|e\|_{[0,t)}, \quad (6.55)$$

en conséquence, pour  $t \in [\tau_{k_2}, \tau_{k_2+1}) \cap [0, t_{\max})$ ,

$$\begin{aligned} |e_j(t)| &\leq \tau \sum_{q=k_1}^{k_2-1} \bar{\sigma}_{j_0}(|\xi_0| + |z_0|, \tau_q) + (k_2 - k_1) \tau K_{j_0} \|e\|_{[0,t)} + \tau \bar{\sigma}_j(|\xi_0| + |z_0|, \tau_{k_2}) \\ &\quad + \tau K_j \|e\|_{[0,t)}. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Soit  $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \cap [0, t_{\max})$ , d'après (6.53), si  $k_2 < i$ ,

$$\begin{aligned} |e_j(t)| &\leq \tau \bar{\sigma}_j(|\xi_0| + |z_0|, \tau_i) + \tau K_j \|e\|_{[0,t)} + \tau \sum_{q=k_1}^{k_2-1} \bar{\sigma}_{j_0}(|\xi_0| + |z_0|, \tau_q) \\ &\quad + (k_2 - k_1) \tau K_{j_0} \|e\|_{[0,t)} + \tau \sum_{q=k_2}^{i-1} \bar{\sigma}_j(|\xi_0| + |z_0|, \tau_q) + \tau K_j (i - k_2) \|e\|_{[0,t)} \\ &\leq l \tau \sum_{k=1}^l \bar{\sigma}_k(|\xi_0| + |z_0|, \tau_{i-l+1}) + l \tau \max_{k \in \{1, \dots, l\}} \{K_k\} \|e\|_{[0,t)}. \end{aligned} \quad (6.57)$$

Si  $k_2 = i$ ,

$$\begin{aligned} |e_j(t)| &\leq \tau \bar{\sigma}_j(|\xi_0| + |z_0|, \tau_i) + \tau K_j \|e\|_{[0,t)} + \tau \sum_{q=k_1}^{i-1} \bar{\sigma}_{j_0}(|\xi_0| + |z_0|, \tau_q) \\ &\quad + (i - k_1) \tau K_{j_0} \|e\|_{[0,t)}. \end{aligned}$$

Dans les deux cas, le résultat désiré est satisfait.

(b) Il existe  $k \in \{i-l+1, \dots, i-1\}$  tel que  $\varsigma_j(\tau_k, e(\tau_k^-)) = j$  pour tout  $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}) \cap [0, t_{\max})$ ,

$$|e_j(t)| \leq \tau \bar{\sigma}_j(|\xi_0| + |z_0|, \tau_k) + \tau K_j \|e\|_{[0,t)},$$

alors, pour  $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \cap [0, t_{\max})$ ,

$$|e_j(t)| \leq \sum_{q=k}^{i-1} \tau \bar{\sigma}_j(|\xi_0| + |z_0|, \tau_q) + (i - k) \tau \|e\|_{[0,t)}. \quad (6.58)$$

Tous les cas possibles ont été étudiés, (6.52) est bien satisfait.  $\square$

**Théorème 6.4.2** *Supposons que les Hypothèses 6.4.1-6.4.3 soient vérifiées, pour le protocole TOD, si*

$$\tau l^{\frac{3}{2}} \max_{j \in \{1, \dots, l\}} \{K_j\} < 1 \quad (6.59)$$

alors le système (6.23)-(6.28) est RFC et (6.37) est garanti.

**Preuve.** Soit  $(\xi_0, z_0, e_0) \in \mathbb{R}^{n_\xi + n_z + n_e}$ . D'après le Lemme 6.4.1, pour tout  $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \cap [0, t_{\max})$ ,  $i \geq l - 1$ , on peut montrer que :

$$|e(t)| \leq l^{\frac{3}{2}} \tau \sum_{k=1}^l \bar{\sigma}_k(|\xi_0| + |z_0|, \tau_{i-l+1}) + l^{\frac{3}{2}} \tau \max_{k \in \{1, \dots, l\}} \{K_k\} \|e\|_{[0, t)}. \quad (6.60)$$

Pour  $t \in [0, \tau_{l-1}) \cap [0, t_{\max})$ , la borne suivante est déduite pour tout  $j \in \{1, \dots, l\}$  :

$$|e_j(t)| \leq l\tau \bar{\sigma}_j(|\xi_0| + |z_0|, 0) + l\tau K_j \|e\|_{[0, t)} + |e_j(0)|. \quad (6.61)$$

Ainsi, pour tout  $t \in [0, \tau_{l-1}) \cap [0, t_{\max})$ ,

$$|e(t)| \leq l^{\frac{3}{2}} \tau \sum_{k=1}^l \bar{\sigma}_k(|\xi_0| + |z_0|, 0) + l^{\frac{3}{2}} \tau \max_{k \in \{1, \dots, l\}} \{K_k\} \|e\|_{[0, t)} + \sqrt{l} |e_0|, \quad (6.62)$$

où

$$\check{\sigma}(s, t) = \begin{cases} \sqrt{l} \left( l\tau \sum_{j=1}^l \bar{\sigma}_j(s, 0) + s \right) e^{l\tau - t} & \text{si } t < l\tau \\ \sqrt{l} \left( l\tau \sum_{j=1}^l \bar{\sigma}_j(s, t - l\tau) + s e^{l\tau - t} \right) & \text{si } t \geq l\tau. \end{cases} \quad (6.63)$$

Pour tout  $t \in [0, t_{\max})$  :

$$|e(t)| \leq \check{\sigma}(|\xi_0| + |z_0| + |e_0|, t) + l^{\frac{3}{2}} \tau \max_{k \in \{1, \dots, l\}} \{K_k\} \|e\|_{[0, t)}. \quad (6.64)$$

La preuve se conclut de la même façon que celle du Théorème 6.4.1 en invoquant à plusieurs reprises le Théorème 6.2.1, sachant que  $\tau l^{\frac{3}{2}} \max_{j \in \{1, \dots, l\}} K_j < 1$   $\square$

Il est intéressant de remarquer que les bornes sur le MATI pour le RR généralisé et le TOD ne diffèrent pas en terme de gain, comme c'est le cas au Chapitre 5, mais en terme de formulation. L'analyse étant adaptée au protocole, la borne sur le MATI obtenue est caractéristique de la méthode suivie. Il est par conséquent difficile d'affirmer que l'un ou l'autre des protocoles permet de considérer de plus grands MATI à partir des expressions présentées. Nous verrons en simulation que le TOD confirme le plus souvent nos attentes en prouvant sa supériorité pour de grands MATI.

Le résultat suivant est une conséquence directe du Théorème 6.4.2.

**Corollaire 6.4.3** *Supposons que les Hypothèses 6.4.1-6.4.2 et que (6.50) soient vérifiées pour le protocole TOD, si*

$$\tau \max_{j \in \{1, \dots, l\}} \{K_j\} < 1 \quad (6.65)$$

alors le système (6.23)-(6.28) est RFC et (6.37) est garanti.

**Preuve.** La preuve suit le même cheminement que celle du Théorème 6.4.2 mais en appliquant le théorème du petit gain non pas à  $|e|$  mais  $\max_{j \in \{1, \dots, l\}} |e_j|$ .  $\square$

**Remarque 6.4.6** *D'après la Remarque 6.4.5, lorsque (6.50) est satisfait et que le système à observer est effectivement composé de  $l$  sous-systèmes indépendants, l'implémentation décrite dans §4.3.2 peut être allégée en plaçant uniquement l'observateur correspondant au sous-système à chaque nœud.*

## 6.5 Applications

Comme au Chapitre 5, nous montrons que les observateurs linéaires et à grand gain satisfont les hypothèses considérées et des bornes explicites sur le MATI sont données lorsque la fonction de blocage Pred est couplée aux protocoles RR, TOD ainsi qu'au cas échantillonné.

### 6.5.1 Observateurs linéaires

Soit le système linéaire :

$$\dot{x} = Ax \quad (6.66)$$

$$y = Cx, \quad (6.67)$$

où  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ ,  $A$  et  $C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$  sont des matrices réelles de dimensions appropriées

telles que  $(A, C)$  est détectable. L'observateur de Luenberger suivant est étudié :

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + \Lambda(y - \bar{y}) \quad (6.68)$$

$$\bar{y} = C\bar{x}. \quad (6.69)$$

Nous avons vu au Chapitre 5 que le problème peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{\xi} = (A - \Lambda C)\xi - \Lambda e \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (6.70)$$

$$\dot{z} = Az + \Lambda(e + C\xi) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (6.71)$$

$$\dot{e} = -CA\xi \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (6.72)$$

$$\xi(t_i^+) = \xi(t_i) \quad (6.73)$$

$$z(t_i^+) = z(t_i) \quad (6.74)$$

$$e(t_i^+) = h(i, e(t_i)), \quad (6.75)$$

où  $z = \bar{x}$ ,  $h$  est défini par (4.29), (4.38) ou (4.49) et où la séquence d'instants de transmission  $\{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{>0}}$  est telle que  $v \leq t_i - t_{i-1} \leq \tau$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ ,  $v \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $\tau \in [v, \infty)$  et  $t_0 = 0$ . L'Hypothèse 6.4.1 est satisfaite puisque le système est linéaire. Le Lemme 5.3.1 permet d'affirmer que l'Hypothèse 6.4.2 est vérifiée. La seule condition à étudier est celle de l'Hypothèse 6.4.3. De la même manière qu'au Lemme 5.3.1, sachant que  $|L_{f_P} h_P^j(\bar{x}) - L_{f_P} h_P^j(x)| = |C_j A \xi|$ , on peut montrer qu'il existe  $\bar{\sigma}_j \in \mathcal{KL}$  et  $K_j \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$ , tels que, pour tout  $(\xi_0, z_0) \in \mathbb{R}^{n_\xi + n_z}$  et  $e \in \mathcal{L}_\infty^{n_e}$  :

$$|C_j A \xi(t)| \leq \bar{\sigma}_j(|x_0| + |z_0|, t) + K_j \|e\|_{[0, t)}. \quad (6.76)$$

Deux expressions possibles des  $K_j$  se déduisent de la preuve du Lemme 5.3.1 :  $|C_j A| \gamma_1^e$  ou à l'aide d'une borne de  $\int_0^t |C_j A \exp((t-s)(A - \Lambda C)) \Lambda| ds$ . On notera  $K$  le gain correspondant pour l'inégalité (6.20) qui s'obtient en remplaçant  $C_j$  par  $C$ .

La proposition ci-dessous est une application du Corollaire 6.4.1, du Théorème 6.4.2 et de §6.3.

**Proposition 6.5.1** *Considérons le système (6.70)-(6.75), pour*

(i) *le protocole RR, si  $\tau \in [v, \bar{\tau}_{RR})$  où*

$$\bar{\tau}_{RR} = \frac{1}{3(K_1 + K_2 + K_3)}; \quad (6.77)$$

(ii) *le protocole TOD, si  $\tau \in [v, \bar{\tau}_{TOD})$  où*

$$\bar{\tau}_{TOD} = \frac{1}{3^{\frac{3}{2}} \max_{j \in \{1, \dots, 3\}} \{K_j\}}; \quad (6.78)$$

(iii) *le cas échantillonné, si  $\tau \in [v, \bar{\tau}_{SD})$  où*

$$\bar{\tau}_{SD} = \frac{1}{K}; \quad (6.79)$$

alors le système est RFC et (6.37) est satisfait.

Nous retrouvons donc la même propriété de stabilité qu'au Chapitre 5 lorsque le bloqueur Pred est implémenté, mais sous des conditions sur le MATI différentes.

## 6.5.2 Observateurs à grand gain

A l'instar du Chapitre 5, les observateurs à grand gain pour des systèmes multisorties de [51] sont étudiés. Des résultats similaires sont vérifiées pour d'autres observateurs globalement Lipschitziens, comme nous le verrons sur un exemple dans §6.6.2.

Soit le système :

$$\dot{x} = Ax + \phi(x) \quad (6.80)$$

$$y = Cx, \quad (6.81)$$



où  $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^{pn}$ ,  $x_i \in \mathbb{R}^n$  et

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I}_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \mathbb{I}_n & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & \mathbb{I}_n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$C = [\mathbb{I}_n \ 0 \ \dots \ 0] \in \mathbb{R}^{n \times np}$ ,  $\phi(x) = (\phi_1(x_1), \phi_2(x_1, x_2), \dots, \phi_p(x))$  avec  $\phi_i$  globalement Lipschitzienne de constante  $k_{\phi_i} \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,  $p \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Lorsque les mesures du système sont transmises par l'intermédiaire d'un réseau, le problème s'écrit :

$$\dot{\xi} = (A - \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C) \xi - \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T e + \phi(\xi + z) - \phi(z) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (6.82)$$

$$\dot{z} = Az + \phi(z) + \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T (C\xi + e) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (6.83)$$

$$\dot{e} = -CA\xi + C(\phi(z) - \phi(\xi + z)) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (6.84)$$

$$\xi(t_i^+) = \xi(t_i) \quad (6.85)$$

$$z(t_i^+) = z(t_i) \quad (6.86)$$

$$e(t_i^+) = h(i, e(t_i)), \quad (6.87)$$

où  $z = \bar{x}$ ,  $h$  est défini par (4.29), (4.38) ou (4.49), où la séquence d'instants de transmission  $\{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{>0}}$  est telle que  $v \leq t_i - t_{i-1} \leq \tau$ ,  $v \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $\tau \in [v, \infty)$ ,  $t_0 = 0$ . Pour les mêmes raisons qu'au Chapitre 5, nos résultats s'appliquent à cette classe de systèmes paramétrés en  $\theta$ . Les Hypothèses 6.4.1 et 6.4.2 sont vérifiées d'après §5.3.2. Le Lemme 5.3.2 nous indique que l'Hypothèse 6.4.3 est également satisfaite avec  $K_j(\theta) = (|C_j A| + k_{\phi_j}) \gamma_1(\theta)$  et  $K(\theta) = (|CA| + k_\phi) \gamma_1(\theta)$  pour (6.20). La proposition suivante est une application du Corollaire 6.4.1, du Théorème 6.4.2 et de §6.3.

**Proposition 6.5.2** *Considérons le système (6.82)-(6.87), pour tout  $\theta > \theta_0$  (où  $\theta_0$  est défini dans le Lemme 5.3.2) pour*

(i) *le protocole RR, si  $\tau \in [v, \hat{\tau}_{RR}(\theta))$  où*

$$\hat{\tau}_{RR}(\theta) = \frac{1}{3(K_1(\theta) + K_2(\theta) + K_3(\theta))}; \quad (6.88)$$

(ii) *le protocole TOD, si  $\tau \in [v, \hat{\tau}_{TOD}(\theta))$  où*

$$\hat{\tau}_{TOD}(\theta) = \frac{1}{3^{\frac{3}{2}} \max_{j \in \{1, \dots, 3\}} \{K_j(\theta)\}}; \quad (6.89)$$

(iii) *le cas échantillonné, si  $\tau \in [v, \hat{\tau}_{SD}(\theta))$  où*

$$\hat{\tau}_{SD}(\theta) = \frac{1}{K(\theta)}; \quad (6.90)$$

alors le système est RFC et (6.37) est satisfait.

La même remarque que pour les observateurs linéaires s'applique : on retrouve les mêmes propriétés de stabilité qu'au chapitre précédent mais avec des bornes nouvelles sur le MATI.

## 6.6 Simulations

Dans cette section, différents exemples d'émulation d'observateurs sont étudiés. Les configurations du réseau sont celles évoquées au Chapitre 5 : les protocoles RR, TOD et le cas échantillonné, ainsi que les bloqueurs ZOH et Pred. On rappelle que les travaux de ce chapitre ne permettent pas d'étudier les bloqueurs ZOH. Nous comparerons les bornes sur le MATI déduites aux Chapitres 5 et 6 et commenterons certaines hypothèses.

### 6.6.1 Exemple numérique

Soit le système :

$$\dot{x} = Ax \tag{6.91}$$

$$y = Cx, \tag{6.92}$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

L'origine  $x = 0$  est stable pour le système (6.91), puisque les pôles de  $A$  sont  $\{-1, -1, -1, -i, i\}$ . La paire  $(A, C)$  est observable. Un observateur continu est synthétisé :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \Lambda(y - C\hat{x}), \tag{6.93}$$

où  $\Lambda \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$  est telle que les pôles de  $(A - \Lambda C)$  sont  $(-1.4, -1.4, -1.4, -1.4, -1.4)$ . Lorsque le système transmet ses mesures par l'intermédiaire d'un réseau ordonnancé, le vecteur de sortie est décomposé en trois nœuds :  $y = (y_1, y_2, y_3)$ , où

$$\begin{aligned} y_1 &= x_2 + x_3 = C_1 x \\ y_2 &= x_3 + x_4 = C_2 x \\ y_3 &= x_4 + x_5 = C_3 x. \end{aligned}$$

On remarque que les informations des trois nœuds sont indispensables à l'estimation du vecteur d'état puisque aucune paire  $(A, C_i)$  ou  $(A, \begin{bmatrix} C_i \\ C_j \end{bmatrix})$ ,  $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$  n'est observable.

Les bornes sur le MATI obtenues à l'aide des Propositions 5.3.1 (pour le bloqueur ZOH), 5.3.2 et 6.5.1 (pour le Pred), pour les différentes configurations de réseau, sont résumées dans le Tableau 6.1 (le système (6.91) étant stable, la Proposition 5.3.1 peut bien être appliquée). Les MATI constatés en simulation y sont également indiqués, mais uniquement pour le Pred : la convergence étant pratique avec le ZOH, il est difficile de déterminer une valeur limite

		RR	TOD	Echantillonné
ZOH	Proposition 5.3.1 (Lyapunov)	0.0014	0.0024	0.013
	Proposition 5.3.1 (solution analytique)	0.0022	0.0038	0.021
Pred	Proposition 5.3.1 (Lyapunov)	0.0028	0.0049	0.027
	Proposition 6.5.1 (Lyapunov)	0.0038	0.0066	0.027
	Proposition 5.3.1 (solution analytique)	0.0043	0.0075	0.041
	Proposition 6.5.1 (solution analytique)	0.0253	0.0347	0.128
	Simulation	0.65	2.48	très grand

TAB. 6.1 – Bornes sur le MATI pour l’observation de (6.91)-(6.92) via le réseau

compte tenu de la stabilité de l’observateur. Nous distinguons dans ce tableau les bornes pour lesquelles les coefficients du Lemme 5.3.1 sont dérivées à l’aide de fonctions de Lyapunov ou de la solution analytique (cf. preuve dudit lemme). Pour l’analyse de Lyapunov, le coefficient dépend évidemment de la fonction choisie. Afin de maximiser le MATI, une procédure d’optimisation sous contraintes a été utilisée. Nous ne pouvons prétendre avoir obtenu les valeurs minimales puisque rien ne nous indique que celles-ci existent. C’est la raison pour laquelle, l’optimisation a été lancée pour un millier de conditions initiales différentes afin d’obtenir un MATI aussi grand que possible.

On constate, dans un premier temps, que les bornes obtenues à l’aide des solutions analytiques sont plus grandes et donc plus précises que celles faisant appel à des fonctions de Lyapunov. Les différentes majorations nécessaires pour cette dernière approche peuvent justifier cet écart. Nous devons cependant nuancer ce constat car seul un échantillon (bien qu’issu de procédures d’optimisation) de fonctions de Lyapunov a été testé. D’autre part, la Proposition 6.5.1 fournit des estimations généralement plus larges que la Proposition 5.3.1. On peut l’expliquer par le fait que les travaux de ce chapitre sont adaptés à chaque protocole, contrairement au Chapitre 5 qui se veut plus universel. Ainsi, il est plausible que les analyses proposées offrent une meilleure description du problème et permettent d’obtenir de meilleurs MATI pour le bloqueur Pred. Il faut également remarquer que les hiérarchies entre ZOH/Pred et RR/TOD/échantillonné s’avèrent respecter aussi bien par les bornes estimées que constatées. En effet, pour un même protocole, le bloqueur Pred permet d’élargir le MATI par rapport au ZOH. Cela semble logique puisque le Pred a pour but de compenser, en quelque sorte, l’absence d’information sur les mesures du système tandis que le ZOH se contente de fournir des données retardées. De même, pour une fonction de blocage donnée, le protocole TOD se révèle supérieur au RR pour de grands MATI. Le cas échantillonné est bien sûr à part, puisque tous les capteurs communiquent aux mêmes instants, le MATI est donc beaucoup plus grand. On peut noter que le meilleur rapport MATI en simulation sur MATI estimé est de 25 pour le protocole RR combiné au bloqueur Pred. D’autre part, on remarque que le bloqueur Pred s’avère très stable puisqu’il permet de considérer de larges MATI, en particulier pour le

cas échantillonné.

Des simulations ont été réalisées avec les conditions initiales suivantes :  $x_0 = (10,10,10,10, 10)$ ,  $\bar{x}_0 = (0,0,0,0,0)$  et  $\hat{y}_0 = (0,0,0)$ . L'évolution des états du système est représentée Figure 6.1. Les tracés des erreurs d'observation sont proposés aux Figures 6.2, 6.4, 6.6 pour, respectivement, les protocoles RR, TOD et l'échantillonné, pour des périodes de transmission inférieures aux bornes estimées. Il est important de constater que lorsque le bloqueur est de type ZOH, la convergence de l'erreur d'observation n'est pas asymptotique vers l'origine mais pratique, comme l'indique les résultats du Chapitre 5, voir Figures 6.3, 6.5 et 6.7. Notre analyse est donc fidèle au comportement réel du système dans ce cas.

**Remarque 6.6.1** *Nous avons choisi un système oscillant afin de mettre en évidence la non convergence vers l'origine à l'aide du bloqueur ZOH. Pour des systèmes dont les états convergent vers une valeur constante, on devine que ces écarts pourront disparaître : l'effet du retard induit par le bloqueur diminuant au fil du temps.*

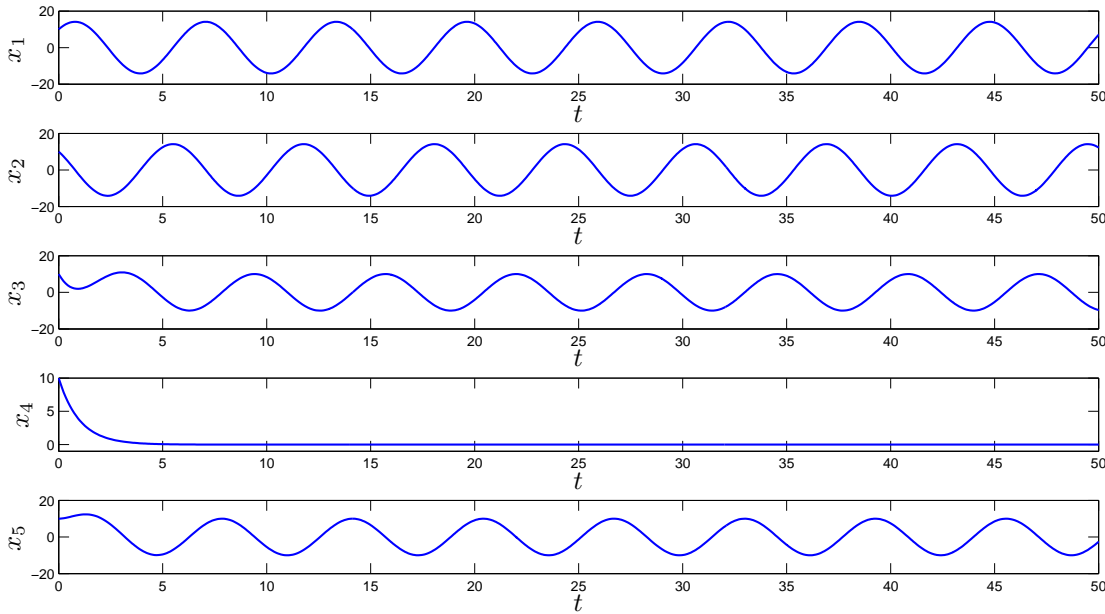


FIG. 6.1 – *Etats du système (6.91)-(6.92)*

### Cas d'un système linéaire instable

Avant de passer à l'observation de robots flexibles, nous nous intéressons brièvement au cas où le système linéaire à observer n'est pas stable afin de vérifier si l'Hypothèse 5.2.4 et la

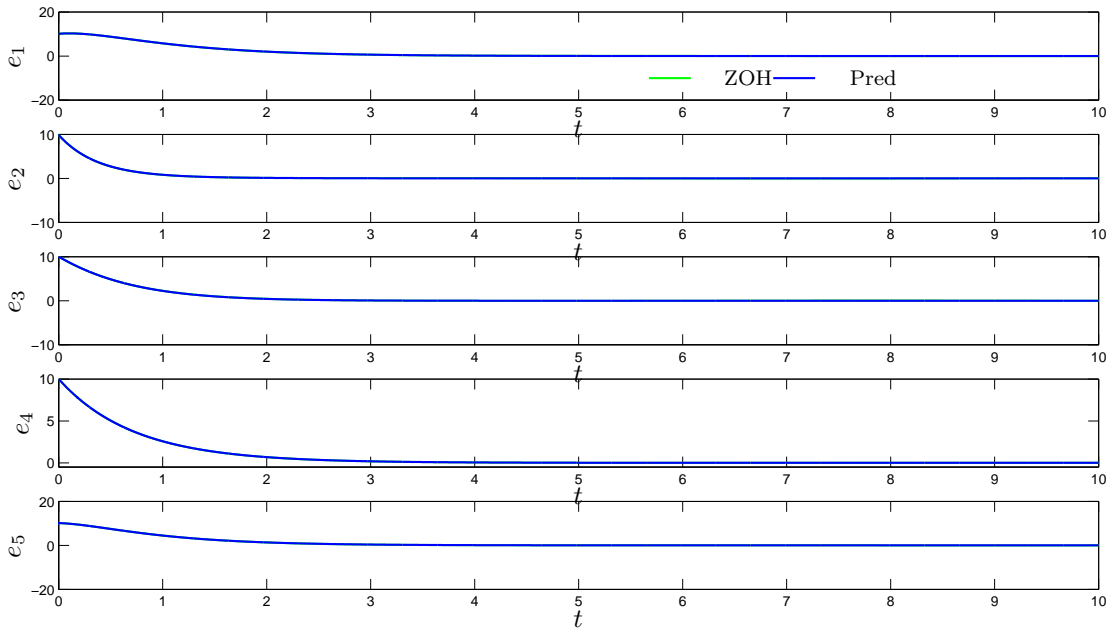


FIG. 6.2 – Erreurs d'observation pour le protocole RR avec  $\tau = 0.0022$

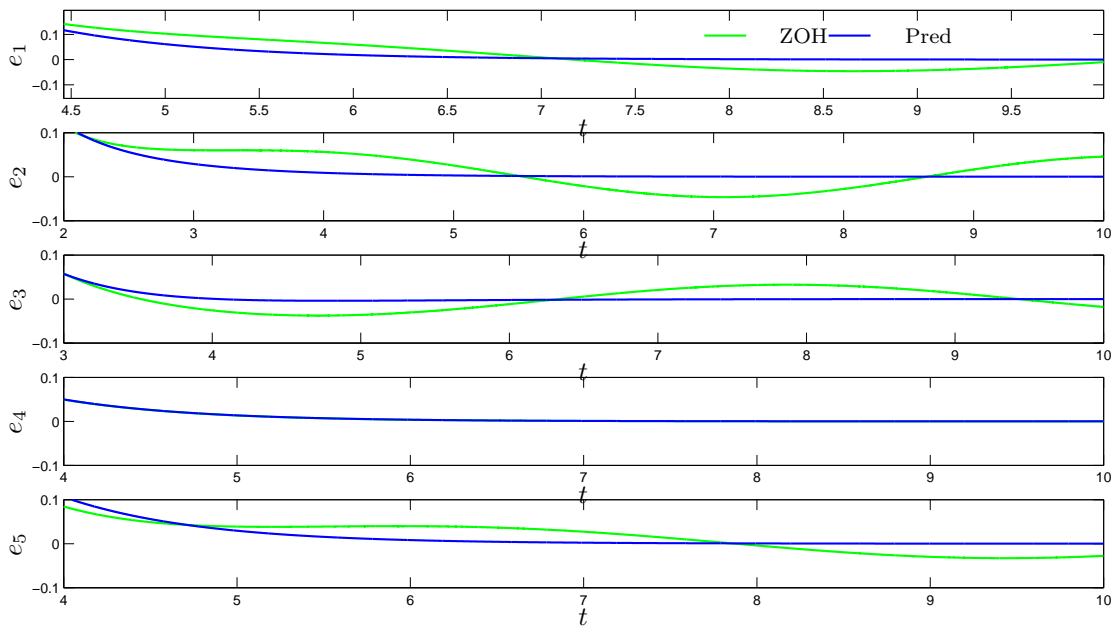


FIG. 6.3 – Zoom sur les erreurs d'observation pour le protocole RR avec  $\tau = 0.0022$

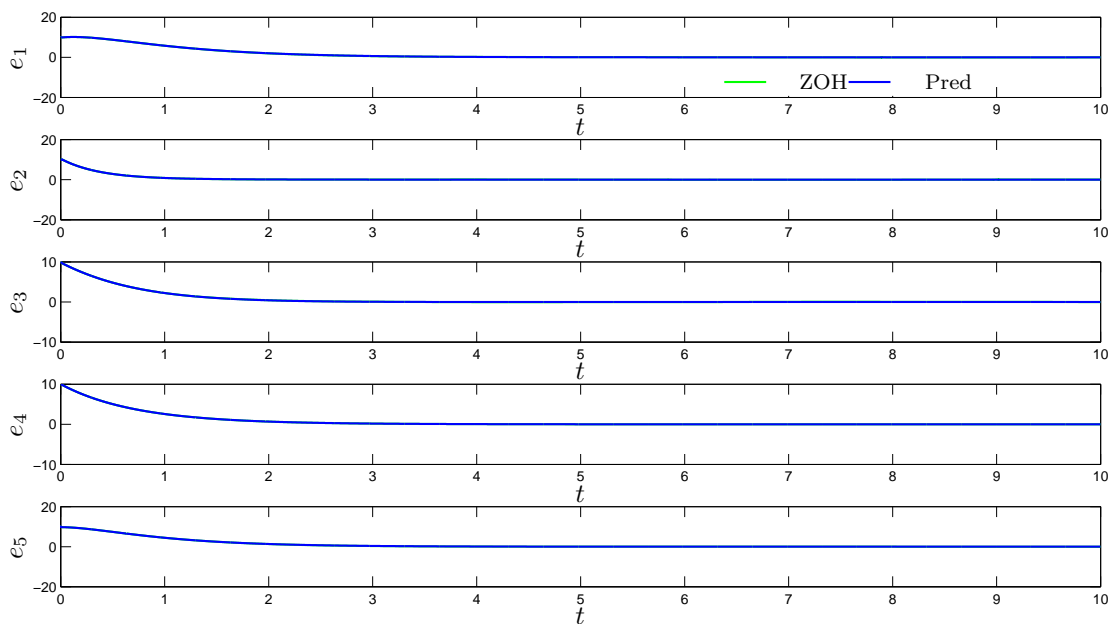


FIG. 6.4 – Erreurs d'observation pour le protocole TOD avec  $\tau = 0.0038$

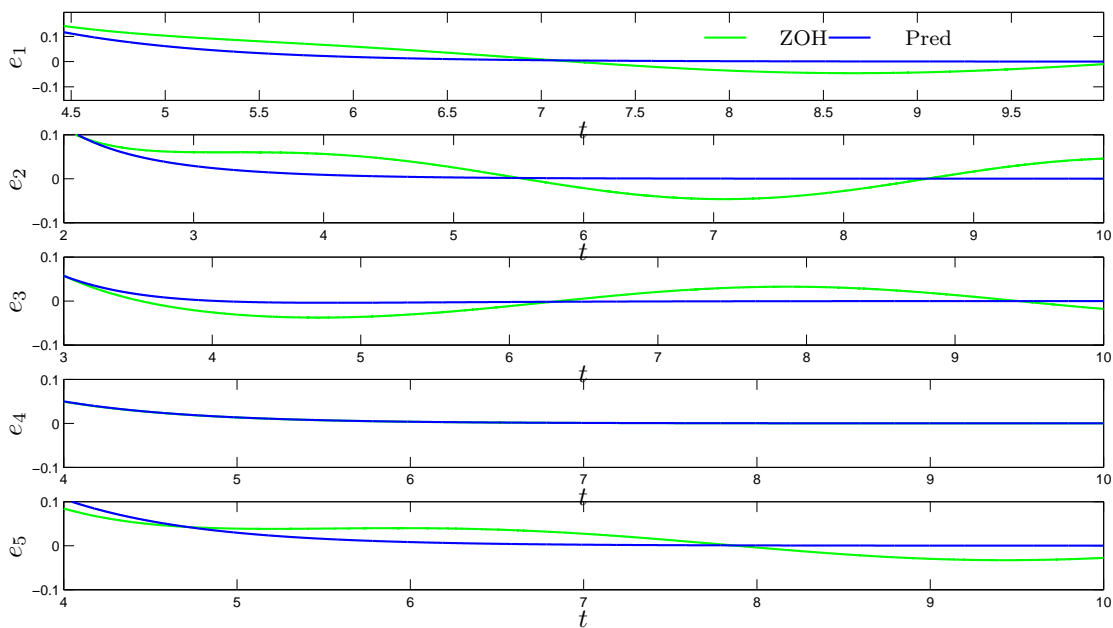


FIG. 6.5 – Zoom sur les erreurs d'observation pour le protocole TOD avec  $\tau = 0.0038$

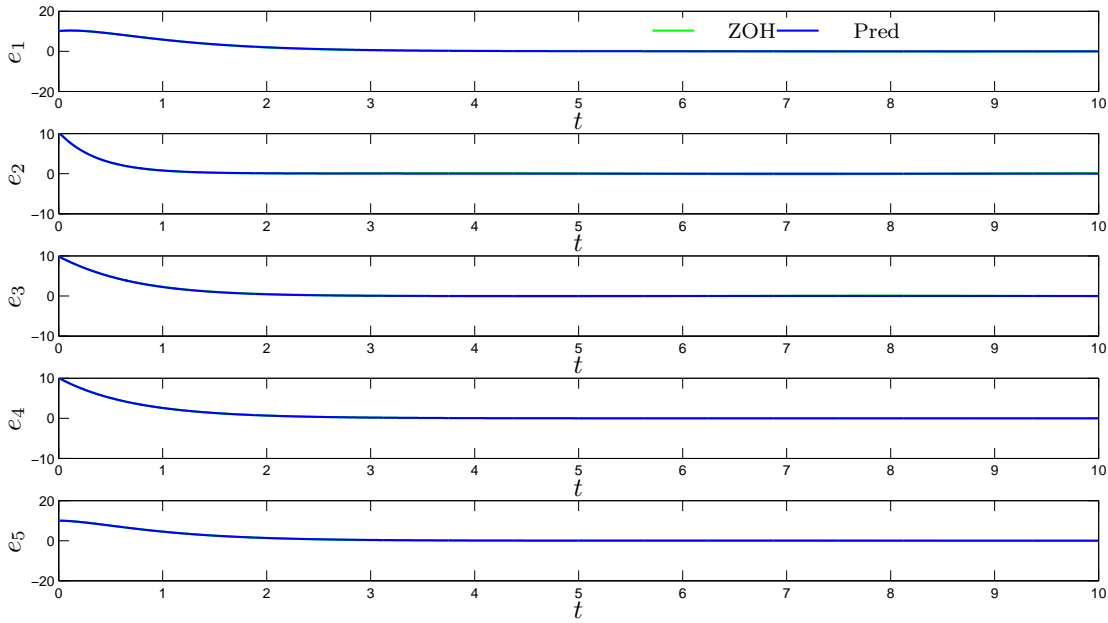


FIG. 6.6 – Erreurs d'observation pour le cas échantillonné avec  $\tau = 0.021$

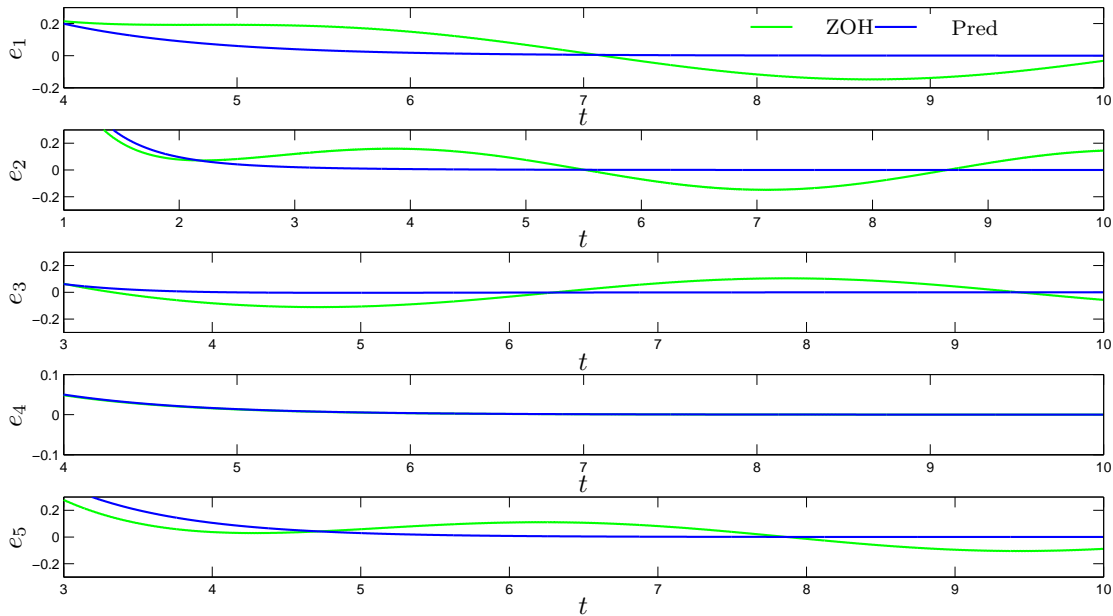


FIG. 6.7 – Zoom sur les erreurs d'observation pour le cas échantillonné avec  $\tau = 0.021$

		RR	TOD	Echantillonné
Pred	Proposition 5.3.1 (Lyapunov)	0.0001	0.0002	0.001
	Proposition 6.5.1 (Lyapunov)	0.0002	0.0004	0.001
	Proposition 5.3.1 (solution analytique)	0.0003	0.0006	0.003
	Proposition 6.5.1 (solution analytique)	0.0006	0.0007	0.002
	Simulation	0.2	0.3	0.7

TAB. 6.2 – Bornes sur le MATI pour l'observation de (6.94)-(6.95) via le réseau

condition (5.48) s'avèrent justifiées. Soit le système instable suivant :

$$\dot{x} = Ax \quad (6.94)$$

$$y = Cx, \quad (6.95)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Les pôles de  $A$  sont  $\{1, 1, 1, i, -i\}$  et la paire  $(A, C)$  est bien observable. Un observateur du type (6.93) est synthétisé. Les bornes sur le MATI obtenues pour le bloqueur Pred sont données dans le Tableau 6.2 (aucun de nos résultats ne permet d'en calculer pour le ZOH puisqu'une des hypothèses est violée).

Des simulations sont réalisées pour les mêmes conditions initiales que précédemment. On constate, d'après la Figure 6.8, que pour un intervalle de transmission petit ( $\tau = 0.002$ ), l'émulation de l'observateur à l'aide de bloqueurs ZOH diverge, alors qu'avec le Pred la convergence de l'erreur d'observation est assurée. L'hypothèse de stabilité du système à observer, lorsque le bloqueur est d'ordre zéro, semble donc justifier pour ce système linéaire. Nous ne pouvons être catégorique car il faudrait pour cela étudier le comportement du système pour  $\tau$  qui tend vers 0.

## 6.6.2 Robot flexible

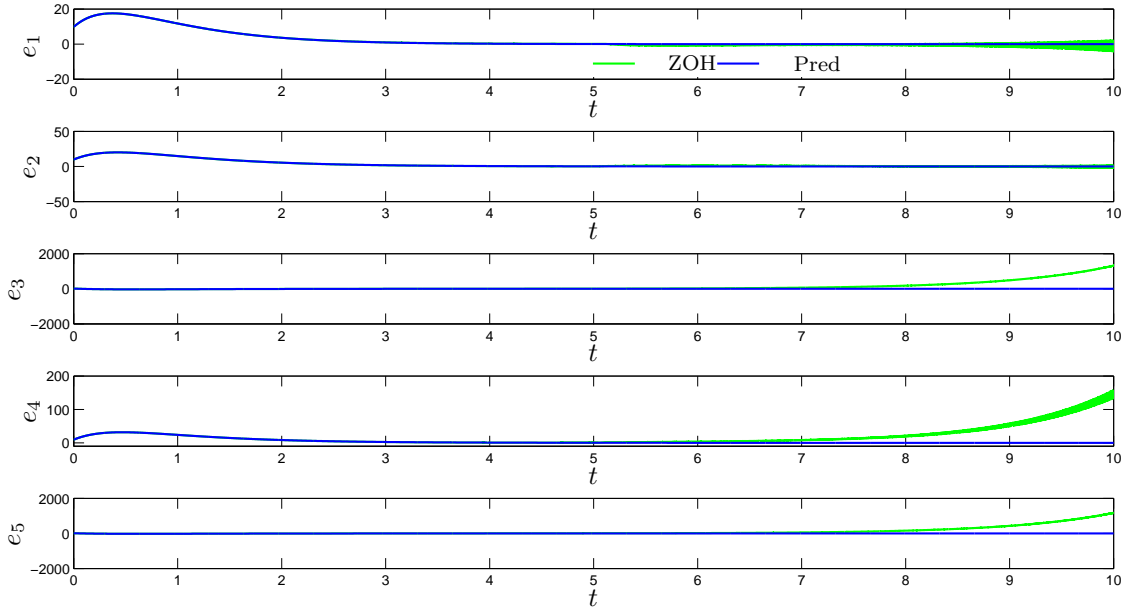
Nous étudions les observateurs pour robots flexibles développés dans [160], qui sont une extension de [1]. Le modèle du système sans entrée de [187] est :

$$\dot{x} = Ax + \phi(x) \quad (6.96)$$

$$y = Cx, \quad (6.97)$$

où  $x = (\theta_m, \omega_m, \theta_1, \omega_1)$ ,  $\theta_m, \omega_m$  sont respectivement la position et la vitesse angulaire et du moteur,  $\theta_1, \omega_1$  la position et la vitesse de la liaison,  $\phi(x) = (0, 0, 0, -3.33 \sin(x_3))$  est donc



FIG. 6.8 – Erreurs d'observation pour le protocole TOD avec  $\tau = 0.002$ 

globalement Lipschitzienne de constante  $k_\phi = 3.33$ ,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -48.6 & -1.25 & 48.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 19.5 & 0 & -19.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'observateur suivant est synthétisé :

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + \phi(\bar{x}) + \Lambda(y - \bar{y}) \quad (6.98)$$

$$\bar{y} = C\bar{x} \quad (6.99)$$

$$\Lambda = \Lambda_1 + \frac{\tilde{k}_\phi^2 + \varepsilon}{|CT|^2} T\Lambda_2, \quad (6.100)$$

où  $\Lambda_1 \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$  est tel que  $A - \Lambda_1 C$  est Hurwitz :

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 9.3275 & 1 \\ -48.7804 & 22.1136 \\ -0.0524 & 3.1994 \\ 19.4066 & -0.9032 \end{bmatrix}. \quad (6.101)$$

La matrice  $\Lambda_2 \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$  est un autre gain d'observation défini par

$$\Lambda_2 = \frac{1}{2} P^{-1} T C^T, \quad (6.102)$$

où  $P$  est la matrice réelle définie positive symétrique :

$$P = \begin{bmatrix} 18.6546 & -0.0234 & 0.0396 & 0.0012 \\ -0.0234 & 5.9522 & -12.5731 & 1.9503 \\ 0.0396 & -12.5731 & 30.8320 & -8.8656 \\ 0.0012 & 1.9503 & -8.8656 & 9.7302 \end{bmatrix}$$

qui satisfait l'équation de Riccati algébrique :

$$(T^{-1}(A - \Lambda_1 C)T)^T P + P (T^{-1}(A - \Lambda_1 C)T) + P^2 + (\tilde{k}_\phi^2 + \eta)\mathbb{I} - \frac{\tilde{k}_\phi^2 + \varepsilon}{|CT|^2} TC^T CT = 0, \quad (6.103)$$

où  $T = \text{diag}(1,1,1,10)$  est une matrice de changement de coordonnées et  $\varepsilon \geq -k_\phi^2$ ,  $\varepsilon = 0.1111$ ,  $\tilde{k}_\phi = 0.333$ ,  $\eta = 0.1211$ , ainsi

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} 0.0268 & 0.0003 \\ 0.0003 & 1.1392 \\ 0.0001 & 0.5405 \\ 0 & 0.2641 \end{bmatrix}.$$

L'observateur (6.98)-(6.100) est développé en deux étapes dans [160]. Dans un premier temps, le gain  $\Lambda_1$  est déterminé, puis un changement de coordonnées est opéré afin de satisfaire certaines conditions non-présentées ici (en rapport avec la distance à l'inobservabilité du système notamment) d'où la matrice  $T$ . Afin d'obtenir des bornes sur le MATI les plus grandes possibles, nous choisissons de réécrire le problème de l'observation lorsque les capteurs transmettent leurs données par l'intermédiaire d'un réseau partagé, dans les coordonnées  $\tilde{\xi}, \tilde{z}, e$  où  $\tilde{\xi} = T^{-1}\xi$  et  $\tilde{z} = T^{-1}z$  (puisque les sorties du système sont  $x_1$  et  $x_2$ , le changement de coordonnées n'affecte pas  $e = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 - y_1 \\ \hat{y}_2 - y_2 \end{bmatrix}$  compte tenu de la définition de  $T$ ). Un nœud est associé à chaque composante du vecteur de sortie,  $l = 2$ . Le problème devient dans les coordonnées  $(\tilde{\xi}, \tilde{z}, e)$  :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\xi}} &= T^{-1}(A - \Lambda C)T\tilde{\xi} - T^{-1}\Lambda e + T^{-1}\phi(T\tilde{\xi} + T\tilde{z}) \\ &\quad - T^{-1}\phi(T\tilde{z}) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (6.104) \end{aligned}$$

$$\dot{\tilde{z}} = T^{-1}AT\tilde{z} + T^{-1}\phi(T\tilde{z}) + T^{-1}\Lambda e + T^{-1}\Lambda CT\tilde{\xi} \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (6.105)$$

$$\dot{e} = \hat{f}_P(z) - CA(T\tilde{\xi} + T\tilde{z}) - C\phi(T\tilde{\xi} + T\tilde{z}) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (6.106)$$

$$\tilde{\xi}(t_i^+) = \tilde{\xi}(t_i) \quad (6.107)$$

$$\tilde{z}(t_i^+) = \tilde{z}(t_i) \quad (6.108)$$

$$e(t_i^+) = h(i, e(t_i)). \quad (6.109)$$

On peut montrer de la même manière qu'au Lemme 5.3.2 en utilisant (6.103), que pour tout  $\tilde{\xi}_0 \in \mathbb{R}^4$  and  $e \in \mathcal{L}_\infty^2$ , les solutions de (6.104) vérifient :

$$|\tilde{\xi}(t)| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \exp\left(-\frac{\eta}{2\lambda_{\max}(P)}(t - t_0)\right) |\tilde{\xi}(0)| + 2\frac{\lambda_{\max}(P)}{\eta\lambda_{\min}(P)} |PT^{-1}\Lambda| \|e\|_{[t_0, t]}. \quad (6.110)$$

		RR	TOD	Echantillonné
ZOH	Proposition 5.3.1	$1.12 \times 10^{-9}$	$1.58 \times 10^{-9}$	$5.39 \times 10^{-9}$
Pred	Proposition 5.3.2	$2.73 \times 10^{-9}$	$3.16 \times 10^{-9}$	$1.08 \times 10^{-8}$
	Théorème 6.4.2	$5.34 \times 10^{-9}$	$3.83 \times 10^{-9}$	$1.08 \times 10^{-8}$
	Simulation	0.30	0.28	1.2

TAB. 6.3 – Bornes sur le MATI pour le système (6.104)-(6.109)

Par conséquent, les Hypothèses 5.2.5 et 6.4.2 sont satisfaites. L'Hypothèse 5.2.3 est vérifiée pour les protocoles RR, TOD et le cas échantillonné et les bloqueurs ZOH et Pred, comme nous l'avons vu dans §5.3.2. Parallèlement à (6.110) on a, pour tout  $\tilde{z}_0 \in \mathbb{R}^4$  et  $(x, e) \in \mathcal{L}_\infty^6$ ,

$$|\tilde{z}(t)| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \exp\left(-\frac{\eta}{2\lambda_{\max}(P)}(t-t_0)\right) |\tilde{z}(0)| + 2\frac{\lambda_{\max}(P)}{\eta\lambda_{\min}(P)} [|PT^{-1}\Lambda C| \|x\|_{[t_0,t]} + |PT^{-1}\Lambda| \|e\|_{[t_0,t]}]. \quad (6.111)$$

En remarquant que le système (6.96) est stable ([187]), (5.48) est garantie d'après (6.111). Le Corollaire 5.2.1 peut ainsi être appliqué, (5.51) est par conséquent assurée lorsque le bloqueur ZOH est implémenté et pour des périodes de transmission inférieures à celles données dans le Tableau 6.3. Les conditions du Théorème 5.2.2 sont également vérifiées, (5.56) est donc garantie. On peut montrer, de la même manière que dans §6.5.2, que l'Hypothèse 6.4.3 est bien vérifiée avec  $K_i = 2|C_i A| \frac{\lambda_{\max}(P)}{\eta\lambda_{\min}(P)} |PT^{-1}\Lambda|$  et (6.20) avec  $K = 2|CA| \frac{\lambda_{\max}(P)}{\eta\lambda_{\min}(P)} |PT^{-1}\Lambda|$ . Par conséquent, (6.37) est assurée d'après le Corollaire 6.4.1 et le Théorème 6.4.2, selon le protocole considéré. Les bornes sur le MATI sont résumées dans le Tableau 6.3.

Contrairement à §6.6.1, les gains sont uniquement calculés à l'aide de fonctions de Lyapunov. Nous pensons que c'est la une des raisons principales des faibles valeurs de MATI obtenues. Nous constatons en effet une très grande différence entre MATI estimés et obtenus en simulation. Une des pistes pour améliorer ces résultats serait de faire varier la fonction de Lyapunov, i.e.  $P$ , et le gain d'observation  $\Lambda_1$  afin de maximiser le MATI. Cette procédure d'optimisation s'avère beaucoup plus délicate que pour les observateurs linéaires, puisque  $P$  doit garantir des conditions supplémentaires en termes de matrice de changement de coordonnées et de distance à l'inobservabilité en fonction de  $\Lambda_1$  (cf. [1, 160]) qui nécessitent des développements supplémentaires. Nous retrouvons la même hiérarchie entre bloqueurs ZOH/Pred et protocoles RR/TOD/échantillonné pour les MATI estimés, qui n'est toutefois pas toujours fidèle au comportement réel du système puisque l'on constate que le protocole RR est plus efficace que le TOD, pour les bloqueurs Pred, pour de larges MATI. Cette différence inattendue se justifie par le faible nombre de nœuds du réseau qui ne permet visiblement pas de tirer profit des capacités du TOD.

## 6.7 Conclusion

Une analyse différente de celle du Chapitre 5 a été proposée pour l'étude d'observateurs émulsés pour les NCS avec des bloqueurs Pred et des protocoles à excitation persistante et TOD. A partir des travaux de [92], d'autres hypothèses sont déduites et de nouvelles bornes sur le MATI obtenues. Il est montré, tout comme au chapitre précédent, que les résultats s'appliquent aux observateurs linéaires et à grand gain. La stabilité du problème fait appel à un récent théorème du petit gain [91] qui permet d'étendre certaines conditions de bornitude évoquées au chapitre précédent. Les deux approches ont été comparées sur deux exemples et nous avons pu constater que les bornes sur le MATI dérivées dans ce chapitre sont généralement plus précises que celles du chapitre précédent.



## Chapitre 7

# Convergence semiglobale pratique d'observateurs émulés pour les NCS

### 7.1 Introduction

Nous avons vu aux Chapitres 5 et 6 qu'il est possible d'analyser la convergence des observateurs émulés linéaires et à grand gain pour les NCS ordonnancés. Les méthodes développées reposent grandement sur la linéarité de certains voire de tous les gains des hypothèses. Lorsque les observateurs ne sont plus globalement Lipschitziens, il y a peu de chances que de telles conditions soient respectées, en particulier pour ceux par injection de sortie [20, 102] ou par critère du cercle [8, 50]. L'objectif de ce chapitre est d'étendre les hypothèses du Chapitre 5 à l'aide de gains non linéaires, afin d'étudier de plus grandes classes de systèmes et de protocoles. Cet élargissement a pour conséquence de ne plus garantir de propriétés de stabilité globale pour l'erreur d'observation mais semi-globale : le MATI dépend (notamment) de la zone où se situent les conditions initiales. D'un point de vue technique, la méthode est la même qu'au Chapitre 5 : le système est décomposé en sous-systèmes interconnectés, puis la stabilité est analysée à l'aide du théorème du petit gain. La différence majeure provient ici de la nature de ce théorème, puisqu'il permet de déduire des propriétés de stabilité semiglobale (et pratique). L'obtention d'une borne sur le MATI étant un nos objectifs, il est nécessaire de déterminer explicitement les relations entre boules de conditions initiales et de convergence et les bornes de l'intervalle sur lequel la condition du petit gain est satisfaite. Aucune formulation du théorème du petit gain disponible dans la littérature n'offre une telle expression. C'est la raison pour laquelle nous avons été amenés à développer de nouveaux théorèmes pour les systèmes paramétrés (en le MATI), cf. Annexe D. Le fait que l'émulation ne garantisse plus de propriétés de stabilité globale (et asymptotique) est bien connu pour la commande par émulation des systèmes non linéaires à données échantillonnées [150] et des NCS [152]. Intuitivement, si les gradients des champs de vecteurs ne sont pas bornées uniformément dans l'espace d'état, on ne peut imaginer obtenir une borne sur le MATI qui assure la convergence

de l'erreur d'observation pour n'importe quelle condition initiale grâce à l'émulation : celle-ci devra s'adapter aux régions de l'espace d'état visitées.

L'observateur continu connu sera donc supposé stable entrée-sortie ou entrée-état vis-à-vis des perturbations de mesures. Nous montrerons que les observateurs par critère du cercle et par extension par injection de sortie vérifient cette propriété sous de légères conditions. Les protocoles d'ordonnancement considérés ne seront plus exclusivement UGES mais UGAS (cf. Définition 4.3.1), permettant ainsi de réduire le flux de données ou la fréquence de transmission lorsque l'erreur induite par le réseau approche de zéro (cf §4.3.2). Nous écrirons toutes les bornes sur les trajectoires sous forme de maximum et non de somme afin de soulager l'analyse (cf. Annexe B). On note que les résultats du Chapitre 5 peuvent être considérés comme un cas particulier de ceux présentés.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Les hypothèses et l'analyse de stabilité sont présentées dans §7.2. L'application aux observateurs par critère du cercle est ensuite proposée dans §7.3. Dans §7.4, les hypothèses sur la robustesse de l'observateur vis-à-vis des perturbations sur les sorties sont commentées.

## 7.2 Hypothèses et analyse de stabilité

Dans cette section, les hypothèses du Chapitre 5 sont relaxées en considérant des gains non linéaires. Pour rappel, le problème peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{\xi} = f_{\xi}(t, \xi, e, z, w) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (7.1)$$

$$\dot{z} = f_z(t, \xi, e, z, w) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (7.2)$$

$$\dot{e} = g(t, \xi, e, z, w) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (7.3)$$

$$\xi(t_i^+) = \xi(t_i) \quad (7.4)$$

$$z(t_i^+) = z(t_i) \quad (7.5)$$

$$e(t_i^+) = h(i, e(t_j), z(t_i)), \quad (7.6)$$

où  $\xi \in \mathbb{R}^{n_{\xi}}$  représente l'erreur d'observation,  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  l'état de l'observateur,  $e \in \mathbb{R}^{n_e}$  l'erreur induite par le réseau et  $w \in \mathcal{L}_{\infty}^{n_w}$  un vecteur de signaux de perturbations. La séquence d'instantanés de transmission  $\{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{>0}}$  vérifie :

$$v \leq t_i - t_{i-1} \leq \tau \quad \forall i \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad (7.7)$$

avec  $\tau \in [v, \infty)$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  l'instant initial.

Nous nous concentrerons sur les protocoles UGAS qui satisfont l'hypothèse ci-dessous.

**Hypothèse 7.2.1** *Le protocole (7.6) est UGAS avec une fonction de Lyapunov  $W : \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n_e} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  localement Lipschitzienne en  $e$  et uniformément en  $i$ .*

L'Hypothèse 5.2.3 est étendue de la façon suivante.

**Hypothèse 7.2.2** *Il existe  $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $\gamma_1^\xi, \gamma_1^z, \gamma_1^w \in \mathcal{K}$  tels que, pour tout  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $t \in [t_0, \infty)$ ,  $(\xi, z, w) \in \mathbb{R}^{n_\xi + n_z + n_w}$  et presque tout  $e \in \mathbb{R}^{n_e}$ :*

$$\left\langle \frac{\partial W(i, e)}{\partial e}, g(t, e, \xi, z) \right\rangle \leq LW(i, e) + \gamma_1^\xi(|\xi|) + \gamma_1^z(|z|) + \gamma_1^w(|w|). \quad (7.8)$$

On remarque que seul le gain  $L$  n'a pas été « non linéarisé ». Il se trouve que pour tous les exemples étudiés dans cette thèse, il est égal à zéro. Nous n'avons ainsi pas jugé nécessaire de relaxer cette condition qui serait à l'origine de difficultés techniques majeures.

L'Hypothèse 7.2.2 est souvent vérifiée à l'aide des conditions suivantes :

(i) il existe  $L_1 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  tel que, pour presque tout  $e \in \mathbb{R}^{n_e}$  et tout  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , on a :

$$\left| \frac{\partial W(i, e)}{\partial e} \right| \leq L_1, \quad (7.9)$$

(ii) il existe  $L_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $\tilde{\gamma}_1^\xi, \tilde{\gamma}_1^z, \tilde{\gamma}_1^w \in \mathcal{K}$  tels que pour tout  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ ,  $(\xi, e, z, w) \in \mathbb{R}^{n_\xi + n_e + n_z + n_w}$  :

$$|g(t, \xi, e, z, w)| \leq L_2 |W(i, e)| + \tilde{\gamma}_1^\xi(|\xi|) + \tilde{\gamma}_1^z(|z|) + \tilde{\gamma}_1^w(|w|). \quad (7.10)$$

Ainsi, (7.8) est satisfait avec  $L = L_1 L_2$ ,  $\gamma_1^\xi = L_1 \tilde{\gamma}_1^\xi$ ,  $\gamma_1^z = L_1 \tilde{\gamma}_1^z$  et  $\gamma_1^w = L_1 \tilde{\gamma}_1^w$ . La condition (i) est équivalente au fait que  $W$  est globalement Lipschitzienne en  $e$  et uniformément en  $i$ , d'après le théorème de la valeur moyenne de Lebourg (cf. Théorème 2.3.7 dans [36]).

Lorsque les Hypothèses 7.2.1 et 7.2.2 sont vérifiées, la propriété suivante peut être établie. Elle est l'équivalente de la Propriété 5.2.1 avec des gains non linéaires et une borne sous forme de maximum.

**Remarque 7.2.1** *Dans la suite  $W(t)$  correspond à  $W(i, e(t))$  pour tout  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ ,  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .*

**Proposition 7.2.1** *Si les Hypothèses 7.2.1 et 7.2.2 sont vérifiées et  $\tau \in [v, \tau_0)$  où*

$$\tau_0 = \frac{1}{L} \ln\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (7.11)$$

si  $L = 0$ ,

$$\tau_0 = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{1}{L} \ln\left(\frac{1}{\rho}\right) = \infty, \quad (7.12)$$

alors, il existe  $\beta_1 \in \mathcal{KL}$  telle que pour tout  $e_0 \in \mathbb{R}^{n_e}$ ,  $(\xi, z, w) \in \mathcal{L}_\infty^{n_\xi + n_z + n_w}$ , les solutions de (7.3) et (7.6) vérifient, pour tout  $t \geq t_0 \geq 0$ :

$$W(t) \leq \max \left\{ \beta_1(|W(t_0)|, t - t_0), \zeta(\tau) \tilde{\gamma}_1^\xi(\|\xi\|_{[t_0, t]}), \zeta(\tau) \tilde{\gamma}_1^z(\|z\|_{[t_0, t]}), \zeta(\tau) \tilde{\gamma}_1^w(\|w\|_{[t_0, t]}) \right\}, \quad (7.13)$$



où, pour  $(\tau, s, t) \in [0, \tau_0) \times \mathbb{R}_{\geq 0}^2$ , avec  $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$ ,

$$\begin{aligned}\zeta(\tau) &= \frac{\exp(L\tau) - 1}{L(1 - \rho \exp(L\tau))} \\ \tilde{\gamma}_1^\xi(s) &= (1 + \mu)\gamma_1^\xi(s) \\ \tilde{\gamma}_1^z(s) &= (2 + \mu + \mu^{-1})\gamma_1^z(s) \\ \tilde{\gamma}_1^w(s) &= (3 + \mu + 3\mu^{-1} + \mu^{-2})\gamma_1^w(s).\end{aligned}$$

**Preuve.** Soient  $e_0 \in \mathbb{R}^{n_e}$ ,  $(\xi, z, w) \in \mathcal{L}_\infty^{n_\xi + n_z + n_w}$  et  $\tau \in [v, \tau_0)$ . D'après la preuve de la Proposition 5.2.1, pour tout  $t \geq t_0 \geq 0$ :

$$|W(t)| \leq \tilde{\beta}_1(\tau, |W(t_0)|, t - t_0) + \zeta(\tau)(\gamma_1^\xi(\|\xi\|_{[t_0, t]}) + \gamma_1^z(\|z\|_{[t_0, t]}) + \gamma_1^w(\|w\|_{[t_0, t]})), \quad (7.14)$$

où  $\tilde{\beta}_1(\tau, \cdot, \cdot) \in \mathcal{KL}$ . Il suffit pour conclure d'appliquer à plusieurs reprises la Proposition A.1.2 à (7.14).  $\square$

**Remarque 7.2.2** On remarque que  $\zeta \in \mathcal{K}$ , puisque cette fonction continue est strictement croissante sur  $[0, \frac{1}{L} \ln(\frac{1}{\rho}))$  et  $\zeta(0) = 0$ . Pour la dépendance de  $\beta_1$  en  $\tau$ , voir Remarque 5.2.1.

La robustesse de l'observateur continu aux perturbations sur la sortie est supposée telle que la condition suivante est vérifiée.

**Hypothèse 7.2.3** Le système (7.1)-(7.2) est stable entrée-sortie de  $(e, w)$  à  $\xi$ , i.e. il existe  $\beta_2 \in \mathcal{KL}$ ,  $\gamma_2^e, \gamma_2^w \in \mathcal{K}$  tels que, pour tout  $(\xi_0, z_0) \in \mathbb{R}^{n_\xi + n_z}$ ,  $(e, w) \in \mathcal{L}_\infty^{n_e + n_w}$ , les solutions de (7.1)-(7.2) satisfont :

$$|\xi(t)| \leq \max \left\{ \beta_2(\|(\xi_0, z_0)\|, t - t_0), \gamma_2^e(\|e\|_{[t_0, t]}), \gamma_2^w(\|w\|_{[t_0, t]}) \right\} \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (7.15)$$

Il est montré dans l'Annexe B (cf. Propositions B.2.1 et B.2.2) que la stabilité entrée-sortie ou entrée-état formulée sous la forme « max » est équivalente à la forme « + » mais avec des gains différents. Cette hypothèse peut ainsi être vérifiée à l'aide de la Proposition B.2.1.

La condition suivante assurera la bornitude des états du système global (7.1)-(7.6).

**Hypothèse 7.2.4** Le système (7.2) est UEBEB avec pour entrée  $(\xi, e, w)$ , i.e. il existe  $\alpha_2, \eta_2^\xi, \eta_2^e, \eta_2^w \in \mathcal{K}$  tels que, pour tout  $z_0 \in \mathbb{R}^{n_z}$ ,  $(\xi, e, w) \in \mathcal{L}_\infty^{n_\xi + n_e + n_w}$ , les solutions de (7.2) vérifient :

$$|z(t)| \leq \max \left\{ \alpha_2(\|z_0\|), \eta_2^\xi(\|\xi\|_{[t_0, t]}), \eta_2^e(\|e\|_{[t_0, t]}), \eta_2^w(\|w\|_{[t_0, t]}) \right\} \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (7.16)$$

Considérant le problème comme étant paramétré en  $\tau$ , (l'intervalle de temps entre deux transmissions) il est montré que les conditions du Théorème D.3.2 sont satisfaites pour le système (7.1)-(7.6). Les propriétés de stabilité pour l'erreur d'observation sont alors immédiatement déduites. L'analyse repose sur les variables  $\xi$ ,  $z$  et  $W$  (et non  $\xi, z, e$  comme au Chapitre 5), ainsi, d'après (4.35), (7.15) devient pour tout  $(\xi_0, z_0) \in \mathbb{R}^{n_\xi + n_z}$  et  $(W, w) \in \mathcal{L}_\infty^{1+n_w}$  :

$$|\xi(t)| \leq \max \left\{ \beta_2(\|(\xi_0, z_0)\|, t - t_0), \gamma_2^W(\|W\|_{[t_0, t]}), \gamma_2^w(\|w\|_{[t_0, t]}) \right\} \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad (7.17)$$

avec  $\gamma_2^W = \gamma_2^e \circ \alpha_1^{-1}$  où  $\alpha_1$  provient de (4.35) dans la Définition 4.3.1. De même (7.16) permet d'obtenir pour tout  $z_0 \in \mathbb{R}^{n_z}$  et  $(\xi, W, w) \in \mathcal{L}_\infty^{n_\xi+1+n_w}$ :

$$|z(t)| \leq \max \left\{ \alpha_2(|z_0|), \eta_2^\xi(\|\xi\|_{[t_0, t]}), \eta_2^W(\|W\|_{[t_0, t]}), \eta_2^w(\|w\|_{[t_0, t]}) \right\} \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad (7.18)$$

avec  $\eta_2^W = \eta_2^e \circ \alpha_1^{-1}$ .

**Théorème 7.2.1** *Supposons que les Hypothèses 7.2.1-7.2.4 soient vérifiées, pour tout  $\Delta, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  il existe  $\tau^*(\varepsilon, \Delta) \in [v, \tau_0)$  (défini dans (7.22)) tel que :*

1. *pour tout  $\tau \in [v, \tau^*(\varepsilon, \Delta))$ ,  $(\xi_0, e_0, z_0) \in \mathbb{R}^{n_\xi+n_e+n_z}$  et  $w \in \mathcal{L}_\infty^{n_w}$  avec  $\max \{ |\xi_0|, |e_0|, |z_0|, \|w\|_\infty \} < \Delta$ , il existe  $\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  tel que, le long des solutions de (7.1)-(7.6) :*

$$|(\xi(t), z(t), e(t))| \leq \mu \quad \forall t \geq t_0 \geq 0; \quad (7.19)$$

2. *il existe  $\beta \in \mathcal{KL}$ ,  $\sigma \in \mathcal{K}$ ,  $\bar{\sigma}, \delta \in \mathcal{KK}$ , tels que pour tout  $\tau \in [v, \tau^*(\varepsilon, \Delta))$ ,  $(\xi_0, e_0, z_0) \in \mathbb{R}^{n_\xi+n_e+n_z}$  et  $w \in \mathcal{L}_\infty^{n_w}$  avec  $\max \{ |\xi_0|, |e_0|, |z_0|, \|w\|_\infty \} < \Delta$ , les solutions de (7.1)-(7.6) satisfont, pour tout  $t \geq t_0 \geq 0$ ,*

$$|(\xi(t), e(t))| \leq \max \left\{ \beta(|(\xi_0, e_0, z_0)|, t - t_0), \sigma(\|w\|_{[t_0, \infty)}), \bar{\sigma}(\tau^*, \|w\|_{[t_0, \infty)}), \delta(\tau^*, \Delta), \varepsilon \right\}. \quad (7.20)$$

**Preuve.** Il suffit de montrer que le système (7.1)-(7.6) satisfait les conditions du Théorème D.3.2. On identifie  $x_1 = e$ ,  $x_2 = (\xi, z)$ ,  $\omega_1(x_1) = W$ ,  $\omega_2^a(x_2) = \xi$ ,  $\omega_2^b(x_2) = z$ . On peut voir que (D.50) et (D.51) sont assurées avec  $\rho_1(s) = \alpha_2(s)$  (où  $\alpha_2 \in \mathcal{K}$  provient de (4.35)),  $\rho_2(s) = \bar{\rho}_2(s) = s$ , pour  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

Soit  $\bar{\tau} \in [v, \tau_0)$ , les inégalités (D.159), (D.160), (D.161), (D.162) sont vérifiées pour tout  $(\xi_0, e_0, z_0) \in \mathbb{R}^{n_\xi+n_e+n_z}$ ,  $w \in \mathcal{L}_\infty^{n_w}$  et  $\tau \in [v, \bar{\tau})$ , en identifiant  $u_1 = u_2 = w$ , d'après (7.13), (7.17) et (7.18) en identifiant, pour  $(\tau, s) \in [v, \bar{\tau}) \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  (les fonctions ayant la même notation

que dans le Théorème D.3.2 ne sont pas précisées) :

$$\begin{aligned}
\gamma_1^{\omega_2^a}(\tau, s) &= \zeta(\tau) \tilde{\gamma}_1^\xi(s) \\
\gamma_1^{\omega_2^b}(\tau, s) &= \zeta(\tau) \tilde{\gamma}_1^z(s) \\
\gamma_1^u(\tau, s) &= \zeta(\tau) \tilde{\gamma}_1^w(s) \\
\gamma_2^{\omega_1}(\tau, s) &= \gamma_2^W(s) \\
\gamma_2^u(\tau, s) &= \gamma_2^w(s) \\
\eta_2^{\omega_1}(\tau, s) &= \eta_2^W(s) \\
\eta_2^{\omega_2^a}(\tau, s) &= \eta_2^\xi(s) \\
\eta_2^u(\tau, s) &= \eta_2^w(s) \\
\alpha_1(s) &= \alpha_1^{-1}(\beta_1(\alpha_2(s), 0)) \\
\eta_1^{\omega_1}(\tau, s) &= 0 \\
\eta_1^{\omega_2^a}(\tau, s) &= \alpha_1^{-1}(\zeta(\tau) \tilde{\gamma}_1^\xi(s)) \\
\eta_1^{\omega_2^b}(\tau, s) &= \alpha_1^{-1}(\zeta(\tau) \tilde{\gamma}_1^z(s)) \\
\eta_1^u(\tau, s) &= \alpha_1^{-1}(\zeta(\tau) \tilde{\gamma}_1^w(s)).
\end{aligned}$$

Soient  $\Delta, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ , on définit  $m, M$  (qui dépendent de  $\Delta$  et  $\varepsilon$ ) tels que (D.163) est satisfait, et  $\bar{\gamma} \in \mathcal{KK}$  comme, pour  $(\tau, s) \in [v, \bar{\tau}) \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}(\tau, s) &= \max \left\{ \zeta(\tau) \tilde{\gamma}_1^\xi \circ \gamma_2^W(s), \zeta(\tau) \tilde{\gamma}_1^z \circ \eta_2^\xi \circ \gamma_2^W(s), \zeta(\tau) \tilde{\gamma}_1^z \circ \eta_2^W(s), \gamma_2^W(\zeta(\tau) \tilde{\gamma}_1^\xi(s)), \right. \\
&\quad \left. \gamma_2^W(\zeta(\tau) \tilde{\gamma}_1^z(\eta_2^\xi(s))), \gamma_2^W(\zeta(\tau) \tilde{\gamma}_1^z(\eta_2^W(s))) \right\}. \tag{7.21}
\end{aligned}$$

Soit  $\bar{\gamma}^{-1}$  l'inverse de  $\bar{\gamma}$  par rapport à sa première variable avec la convention  $\bar{\gamma}^{-1}(s) = \infty$  si  $s \geq \tau_0$ . En prenant :

$$\tau^* = \min \left\{ \bar{\tau}, \min_{s \in [m, M]} \bar{\gamma}^{-1}(s) \right\}, \tag{7.22}$$

on a

$$\bar{\gamma}(\tau^*, s) < s \quad \forall s \in [m, M], \tag{7.23}$$

et la condition (D.164) est assurée. Finalement, en invoquant le Théorème D.3.2, les résultats désirés sont obtenus.  $\square$

**Remarque 7.2.3** *La constante  $\bar{\tau}$  définit en quelque sorte un dépassement maximal pour les variables du système. Elle est nécessaire à l'obtention de  $\tau^*$  qui garantit les propriétés de stabilité établies (pour plus de détails voir Annexe D). La détermination de la paire  $(\bar{\tau}, \tau^*)$  qui permet de considérer le plus large MATI reste un problème ouvert.*

La propriété de stabilité obtenue (7.20) est similaire à celle du Théorème 5.2.1, à la précision de convergence  $\varepsilon$  près, avec un MATI qui dépend de  $\Delta$ .

**Remarque 7.2.4** *Nous aurions pu regroupé  $\delta(\tau^*, \Delta)$  et  $\varepsilon$  en un seul terme, cependant nous avons choisi de les distinguer afin de souligner les similitudes avec le Théorème 5.2.1.*

Parallèlement au Chapitre 5, l'Hypothèse 7.2.4 peut être difficile à vérifier. Supposons que le système (4.14) soit UEBEB avec  $w$  comme entrée, i.e. il existe  $\alpha_0, \sigma_0 \in \mathcal{K}$ , tels que pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$  et  $w \in \mathcal{L}_\infty^{n_w}$ ,

$$|x(t)| \leq \max\{\alpha_0(|x_0|), \sigma_0(\|w\|_{[t_0, t]})\} \quad t \geq t_0 \geq 0, \quad (7.24)$$

et supposons qu'il existe  $\beta_3 \in \mathcal{KL}$ ,  $\gamma_3^x, \gamma_3^e, \gamma_3^w \in \mathcal{K}$  tels que, le long des solutions de (7.2), pour tout  $z_0 \in \mathbb{R}^{n_z}$ ,  $(x, e, w) \in \mathcal{L}_\infty^{n_x + n_e + n_w}$  :

$$|z(t)| \leq \max\{\beta_3(|z_0|, t - t_0), \gamma_3^x(\|x\|_{[t_0, t]}), \gamma_3^e(\|e\|_{[t_0, t]}), \gamma_3^w(\|w\|_{[t_0, t]})\} \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (7.25)$$

**Remarque 7.2.5** *La condition (7.25) est satisfaite dans de nombreux cas, cf. §7.3, elle peut être vérifiée à l'aide de l'Hypothèse 7.2.3 et du fait que  $\xi = x - h_O(t, z)$ .*

Ainsi, en combinant (7.24) et (7.25), pour tout  $(x_0, z_0) \in \mathbb{R}^{n_x + n_z}$ ,  $(e, w) \in \mathcal{L}_\infty^{n_e + n_w}$ , le long des solutions de (4.16), on a, pour tout  $t \geq t_0 \geq 0$  :

$$|z(t)| \leq \max\{\beta_3(|z_0|, t - t_0), \gamma_3^x \circ \alpha_0(|x_0|), \gamma_3^x \circ \sigma_0(\|w\|_{[t_0, t]}), \gamma_3^e(\|e\|_{[t_0, t]}), \gamma_3^w(\|w\|_{[t_0, t]})\}. \quad (7.26)$$

En écrivant  $\xi = x - h_O(t, z)$ , puis en utilisant la Proposition A.1.2 (avec  $\mu = 1$ ), nous obtenons, pour  $(\xi_0, z_0) \in \mathbb{R}^{n_\xi + n_z}$  :

$$\begin{aligned} \alpha_0(|x_0|) &= \alpha_0(|\xi_0 + h_O(t, z_0)|) \\ &\leq \max\{\alpha_0(2|\xi_0|), \alpha_0(2|h_O(t, z_0)|)\}. \end{aligned} \quad (7.27)$$

De plus, supposons qu'il existe  $\varsigma \in \mathcal{K}$  tel que  $|h_O(t, z)| \leq \varsigma(|z|)$  pour tout  $(t, z) \in \mathbb{R}^{1+n_z}$ , on a :

$$\alpha_0(2|h_O(t, z_0)|) \leq \alpha_0(2\varsigma(|z_0|)) = \tilde{\alpha}_0(|z_0|). \quad (7.28)$$

De cette manière, définissons, pour  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $\alpha_2(s) = \max\{\beta_3(s, 0), \gamma_3^x \circ \alpha_0(2s), \gamma_3^x \circ \tilde{\alpha}_0(s)\}$ ,  $\eta_2^w(s) = \max\{\gamma_3^w(s), \gamma_3^x \circ \sigma_0(s)\}$  et  $\eta_2^e(s) = \gamma_3^e(s)$ , pour tout  $(x_0, z_0) \in \mathbb{R}^{n_x + n_z}$ ,  $(e, w) \in \mathcal{L}_\infty^{n_e + n_w}$ , le long des solutions de (7.2), pour tout  $t \geq t_0 \geq 0$  :

$$\begin{aligned} |z(t)| &\leq \max\{\alpha_2(|(\xi_0, z_0)|, 0), \eta_2^e(\|e\|_{[t_0, t]}), \eta_2^w(\|w\|_{[t_0, t]})\} \\ &\leq \max\{\alpha_2(|(\xi_0, z_0)|, 0), \eta_2^W(\|W\|_{[t_0, t]}), \eta_2^w(\|w\|_{[t_0, t]})\}, \end{aligned} \quad (7.29)$$

où  $\eta_2^W = \eta_2^e \circ \alpha_1^{-1}$ . La condition (7.29) ne nous permet pas de conclure quant à la stabilité UEBEB de (7.2) avec comme entrée  $\xi, e, w$ , toutefois, elle est suffisante pour déduire des propriétés de convergence pour l'erreur d'observation comme nous le montrons dans le corollaire ci-dessous dont la preuve rejoint celle du Théorème 7.2.1.

**Corollaire 7.2.1** *Supposons que les Hypothèses 7.2.1-7.2.3 et (7.29) soient vérifiées, pour tout  $\Delta, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  il existe  $\tau^*(\varepsilon, \Delta) \in [v, \tau_0)$  tel que :*

1. *pour tout  $\tau \in [v, \tau^*(\varepsilon, \Delta))$ ,  $(\xi_0, e_0, z_0) \in \mathbb{R}^{n_\xi + n_e + n_z}$  et  $w \in \mathcal{L}_\infty^{n_w}$  avec  $\max\{|\xi_0|, |e_0|, |z_0|, \|w\|_\infty\} < \Delta$ , il existe  $\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  tel que, le long des solutions de (7.1)-(7.6), pour tout  $t \in [t_0, \infty)$  :*

$$|(\xi(t), z(t), e(t))| \leq \mu; \quad (7.30)$$

2. il existe  $\beta \in \mathcal{KL}$ ,  $\sigma \in \mathcal{K}$ ,  $\bar{\sigma}, \delta \in \mathcal{KK}$ , tel que pour tout  $\tau \in [v, \tau^*(\varepsilon, \Delta))$ ,  $(\xi_0, e_0, z_0) \in \mathbb{R}^{n_\xi + n_e + n_z}$  et  $w \in \mathcal{L}_\infty^{n_w}$  avec  $\max \{|\xi_0|, |e_0|, |z_0|, \|w\|_\infty\} < \Delta$ , les solutions de (7.1)-(7.6) satisfont, pour tout  $t \geq t_0 \geq 0$ ,

$$|(\xi(t), e(t))| \leq \max \{ \beta(|(\xi_0, e_0, z_0)|, t - t_0), \sigma(\|w\|_{[t_0, \infty)}), \bar{\sigma}(\tau^*, \|w\|_{[t_0, \infty)}), \delta(\tau^*, \Delta), \varepsilon \}. \quad (7.31)$$

D'après le Théorème D.3.2, la fonction  $\delta$  dans (7.20) et (7.31) s'annule lorsque  $\gamma_2^z = 0$ . Nous nous intéressons à ce cas dans la suite de cette section. L'hypothèse suivante est plus restrictive que l'Hypothèse 7.2.3.

**Hypothèse 7.2.5** Il existe  $\beta_2 \in \mathcal{KL}$ ,  $\gamma_2^e, \gamma_2^w \in \mathcal{K}$  tels que, pour tout  $\xi_0 \in \mathbb{R}^{n_\xi}$ ,  $(e, w) \in \mathcal{L}_\infty^{n_e + n_w}$  et  $z(t)$  défini pour tout  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , les solutions de (7.1) satisfont :

$$|\xi(t)| \leq \max \left\{ \beta_2(|\xi_0|, t - t_0), \gamma_2^e(\|e\|_{[t_0, t)}), \gamma_2^w(\|w\|_{[t_0, t)}) \right\} \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad (7.32)$$

que l'on réécrit

$$|\xi(t)| \leq \max \left\{ \beta_2(|\xi_0|, t - t_0), \gamma_2^W(\|W\|_{[t_0, t)}), \gamma_2^w(\|w\|_{[t_0, t)}) \right\} \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad (7.33)$$

avec  $\gamma_2^W = \gamma_2^e \circ \alpha_1^{-1}$ .

**Remarque 7.2.6** L'Hypothèse 7.2.5 implique que le système (7.1) est stable entrée-état vis-à-vis de  $(z, e, w)$  et peut donc être vérifiée à l'aide de la Proposition B.2.2. Pour reprendre la Remarque 5.2.7,  $z$  doit juste être défini pour tout  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

Lorsque l'Hypothèse 7.2.2 est satisfaite avec  $\gamma_2^z = 0$ , il n'est plus nécessaire de supposer le système (7.2) UE<sub>BEB</sub> vis-à-vis de  $(\xi, e, w)$ , mais simplement uniformément positivement complet par rapport à ces entrées.

**Hypothèse 7.2.6** Le système (7.2) est uniformément positivement complet pour les entrées  $(\xi, e, w) \in \mathcal{L}_\infty^{n_\xi + n_e + n_w}$ , i.e. il existe  $\alpha_2, \eta_2^t, \eta_2^\xi, \eta_2^e, \eta_2^w \in \mathcal{K}$  tels que, pour tout  $z_0 \in \mathbb{R}^{n_z}$ ,  $(\xi, e, w) \in \mathcal{L}_\infty^{n_\xi + n_e + n_w}$ , les solutions de (7.2) vérifient, pour tout  $t \geq t_0 \geq 0$  :

$$|z(t)| \leq \max \left\{ \alpha_2(|z_0|), \eta_2^t(t - t_0), \eta_2^\xi(\|\xi\|_{[t_0, t)}), \eta_2^e(\|e\|_{[t_0, t)}), \eta_2^w(\|w\|_{[t_0, t)}) \right\}, \quad (7.34)$$

que l'on réécrit

$$|z(t)| \leq \max \left\{ \alpha_2(|z_0|), \eta_2^t(t - t_0), \eta_2^\xi(\|\xi\|_{[t_0, t)}), \eta_2^W(\|W\|_{[t_0, t)}), \eta_2^w(\|w\|_{[t_0, t)}) \right\}, \quad (7.35)$$

avec  $\eta_2^W = \eta_2^\xi \circ \alpha_1^{-1}$ .

**Théorème 7.2.2** Supposons que les Hypothèses 7.2.1, 7.2.5, 7.2.6 soient vérifiées et que l'Hypothèse 7.2.2 soit garantie avec  $\gamma_1^z = 0$ , pour tout  $\Delta, \varepsilon \in \mathbb{R}_{> 0}$ , il existe  $\tau^*(\varepsilon, \Delta) \in [v, \tau_0)$  (défini dans (7.38)) tel que :

1. pour tout  $\tau \in [v, \tau^*(\varepsilon, \Delta))$ ,  $(\xi_0, e_0, z_0) \in \mathbb{R}^{n_\xi + n_e + n_z}$  et  $w \in \mathcal{L}_\infty^{n_w}$  avec  $\max \{|\xi_0|, |e_0|, \|w\|_\infty\} < \Delta$ , le système (7.1)-(7.6) est uniformément positivement complet ;

2. il existe  $\beta \in \mathcal{KL}$ ,  $\sigma \in \mathcal{K}$ ,  $\bar{\sigma} \in \mathcal{KK}$ , tels que pour tout  $\tau \in [v, \tau^*(\varepsilon, \Delta))$ ,  $(\xi_0, e_0, z_0) \in \mathbb{R}^{n_\xi + n_e + n_z}$  et  $w \in \mathcal{L}_\infty^{n_w}$  avec  $\max\{|\xi_0|, |e_0|, \|w\|_\infty\} < \Delta$ , les solutions de (7.1)-(7.6) satisfont, pour tout  $t \geq t_0 \geq 0$ :

$$|(\xi(t), e(t))| \leq \max\{\beta(|(\xi_0, e_0)|, t - t_0), \sigma(\|w\|_{[t_0, \infty)}), \bar{\sigma}(\tau^*, \|w\|_{[t_0, \infty)}), \varepsilon\}. \quad (7.36)$$

**Preuve.** Il suffit de montrer que le (7.1)-(7.6) satisfait les conditions du Théorème D.3.1. On identifie  $x_1 = e$ ,  $x_2 = (\xi, z)$ ,  $\omega_1(x_1) = W$ ,  $\omega_2^a(x_2) = \xi$ ,  $\omega_2^b(x_2) = z$ , on peut voir que (D.50) et (D.51) sont assurées avec  $\rho_1(s) = \alpha_2(s)$ ,  $\rho_2(s) = \bar{\rho}_2(s) = s$ , pour  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

Soit  $\bar{\tau} \in [v, \tau_0)$ , les inégalités (D.127), (D.128), (D.129), (D.130) sont vérifiées pour tout  $(\xi_0, e_0, z_0) \in \mathbb{R}^{n_\xi + n_e + n_z}$ ,  $w \in \mathcal{L}_\infty^{n_w}$  et  $\tau \in [v, \bar{\tau})$ , en identifiant  $u_1 = u_2 = w$ , d'après (7.13), (7.33) et (7.35) en identifiant, pour  $(\tau, s) \in [v, \bar{\tau}) \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  (les fonctions ayant la même notation que dans le Théorème D.3.1 ne sont pas précisées) :

$$\begin{aligned} \gamma_1^{\omega_2^a}(\tau, s) &= \zeta(\tau) \tilde{\gamma}_1^\xi(s) \\ \gamma_1^u(\tau, s) &= \zeta(\tau) \tilde{\gamma}_1^w(s) \\ \gamma_2^{\omega_1}(\tau, s) &= \gamma_2^W(s) \\ \gamma_2^u(\tau, s) &= \gamma_2^w(s) \\ \eta_2^{\omega_1}(\tau, s) &= \eta_2^W(s) \\ \eta_2^{\omega_2^a}(\tau, s) &= \eta_2^\xi(s) \\ \eta_2^u(\tau, s) &= \eta_2^w(s) \\ \alpha_1(s) &= \alpha_1^{-1}(\beta_1(\alpha_2(s), 0)) \\ \eta_1^{\omega_1}(\tau, s) &= 0 \\ \eta_1^{\omega_2^a}(\tau, s) &= \alpha_1^{-1}(\zeta(\tau) \tilde{\gamma}_1^\xi(s)) \\ \eta_1^{\omega_2^b}(\tau, s) &= 0 \\ \eta_1^u(\tau, s) &= \alpha_1^{-1}(\zeta(\tau) \tilde{\gamma}_1^w(s)). \end{aligned}$$

Soient  $\Delta, \varepsilon \in \mathbb{R}_{> 0}$ , on définit  $m, M$  (qui dépendent de  $\Delta$  et  $\varepsilon$ ) tels que (D.163), et  $\bar{\gamma} \in \mathcal{KK}$  comme, pour  $(\tau, s) \in [v, \bar{\tau}) \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,

$$\bar{\gamma}(\tau, s) = \max\{\gamma_1^\xi(\tau, \gamma_2^W(s)), \gamma_2^W(\gamma_1^\xi(\tau, s))\}. \quad (7.37)$$

Soit  $\bar{\gamma}^{-1}$  l'inverse de  $\bar{\gamma}$  par rapport à sa première variable avec la convention  $\bar{\gamma}^{-1}(s) = \infty$  si  $s \geq \tau_0$ . En prenant :

$$\tau^* = \min\left\{\bar{\tau}, \min_{s \in [m, M]} \bar{\gamma}^{-1}(s)\right\}, \quad (7.38)$$

on a

$$\bar{\gamma}(\tau^*, s) < s \quad \forall s \in [m, M], \quad (7.39)$$

et la condition (D.132) est assurée. Finalement, en invoquant le Théorème D.3.1, les résultats désirés sont obtenus.  $\square$

Alors que le Théorème 5.2.2 assure la convergence globale et asymptotique de l'erreur d'observation en l'absence de perturbations, le Théorème 7.2.2 garantit la convergence semi-globale et pratique. On remarque que contrairement au Théorème 7.2.1 et au Corollaire 7.2.1, aucune condition sur  $z_0$  n'est requise dans le Théorème 7.2.2.

**Remarque 7.2.7** *Il est important de constater que différents résultats peuvent être déduits des Théorèmes 7.2.2, 7.2.1 et du Corollaire 7.2.1. Par exemple,*

- si  $\min_{s \in [0, M]} \bar{\gamma}^{-1}(s) \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\}$  (où  $\bar{\gamma}$  est défini dans la preuve correspondante), alors on peut prendre  $\varepsilon = 0$  ;
- si  $\min_{s \in [m, \infty]} \bar{\gamma}^{-1}(s) \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\}$ , alors on peut choisir  $\Delta = \infty$  ;

la combinaison de ces deux cas particuliers ( $\min_{s \in [0, \infty]} \bar{\gamma}^{-1}(s) \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\}$ ) permet de retrouver les résultats du Chapitre 5 mais des gains différents.

### 7.3 Applications aux observateurs par critère du cercle

Les observateurs par critère du cercle développés dans [50] (qui sont une extension de ceux de [8]) sont étudiés lorsque les mesures du système sont transmises via un réseau ordonnancé par un protocole RR, TOD ou TOD modifié (défini dans §4.3.2) et avec des bloqueurs ZOH ou Pred. Le cas du simple échantillonnage des sorties est également traité.

Considérons les systèmes de la forme :

$$\dot{x} = Ax + G\gamma(Hx) + \phi(y) \tag{7.40}$$

$$y = Cx, \tag{7.41}$$

où  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ ,  $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_H}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{n_H \times n_x}$ ,  $\gamma \in C^1(\mathbb{R}^{n_H}, \mathbb{R}^{n_H})$  et  $\phi : \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ .

**Remarque 7.3.1** *Lorsque  $\gamma = 0$ , on retrouve les systèmes linéaires à une injection de sortie près.*

La non-linéarité  $\gamma$  satisfait, pour tout  $s \in \mathbb{R}^{n_H}$  :

$$\frac{\partial \gamma}{\partial s} + \left( \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right)^T \geq 0. \tag{7.42}$$

**Hypothèse 7.3.1** *Les fonctions  $\phi$  et  $\gamma$  sont uniformément continues respectivement sur  $\mathbb{R}^{n_y}$  et  $\mathbb{R}^{n_H}$  c'est-à-dire, d'après la Proposition A.2.1, qu'il existe  $\theta_\phi, \theta_\gamma \in \mathcal{K}$  tels que pour tout  $a, b$  de dimensions appropriées :*

$$|\phi(a) - \phi(b)| \leq \theta_\phi(|a - b|) \tag{7.43}$$

$$|\gamma(a) - \gamma(b)| \leq \theta_\gamma(|a - b|). \tag{7.44}$$

Dans [50], l'observateur ci-dessous est développé :

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + \Lambda(y - \bar{y}) + G\gamma(H\bar{x} + K(y - \bar{y})) + \phi(y) \quad (7.45)$$

$$\bar{y} = C\bar{x}, \quad (7.46)$$

où  $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $\bar{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$ ,  $\Lambda$  est une matrice réelle de dimensions appropriées. Il est supposé qu'il existe une matrice réelle symétrique définie positive  $P$  et  $\nu \in \mathbb{R}_{>0}$  tels que :

$$\begin{bmatrix} (A - \Lambda C)^T P + P(A - \Lambda C) + \nu \mathbb{I} & PG + (H - KC)^T \\ G^T P + (H - KC) & 0 \end{bmatrix} \leq 0. \quad (7.47)$$

Lorsque les mesures du système sont transmises via un réseau ordonnancé avec comme séquence d'instants de transmission  $\{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{>0}}$  telle que  $v \leq t_i - t_{i-1} \leq \tau$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ ,  $v, \tau \in \mathbb{R}_{>0}$  et  $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  l'instant initial. Le système (7.40)-(7.46) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= (A - \Lambda C)\xi - \Lambda e + G\gamma(H(\xi + z)) - G\gamma(Hz + K(C\xi + e)) \\ &\quad + \phi(C(\xi + z)) - \phi(e + C(\xi + z)) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \end{aligned} \quad (7.48)$$

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + \Lambda(e + C\xi) + G\gamma(Hz + K(e + C\xi)) \\ &\quad + \phi(e + C(\xi + z)) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \end{aligned} \quad (7.49)$$

$$\dot{e} = \hat{f}_P(z) - CA(\xi + z) - CG\gamma(H(\xi + z)) - C\phi(C(\xi + z)) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (7.50)$$

$$\xi^+ = \xi \quad (7.51)$$

$$z^+ = z \quad (7.52)$$

$$e^+ = h(i, e), \quad (7.53)$$

où  $z = \bar{x}$ ,  $\hat{f}_P$  est défini par (4.46) ou (4.48) et  $h$  par (4.29), (4.38), (E.1) ou (4.49). L'Hypothèse 7.2.3 est satisfaite d'après le lemme suivant.

**Lemme 7.3.1** *Pour tout  $\xi_0 \in \mathbb{R}^{n_\xi}$ ,  $e \in \mathcal{L}_\infty^{n_e}$ , les solutions de (7.48) vérifient, pour tout  $t \geq t_0 \geq 0$  :*

$$|\xi(t)| \leq \max \left\{ \beta_2(|\xi_0|, t - t_0), \gamma_2^e(\|e\|_{[t_0, t]}) \right\}, \quad (7.54)$$

avec, pour  $s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,

$$\begin{aligned} \beta_2(s, t) &= \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} s \exp\left(-\frac{\nu}{4\lambda_{\max}(P)} t\right), \\ \gamma_2^e(s) &= \frac{4}{\nu} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \left[ |PG|\theta_\gamma(|K|s) + |P\Lambda|s + |P|\theta_\phi(s) \right]. \end{aligned}$$

**Preuve.** Soient  $\xi_0 \in \mathbb{R}^{n_\xi}$  et  $e \in \mathcal{L}_\infty^{n_e}$ . Considérons  $V(\xi) = \xi^T P \xi$ , le long des solutions de (7.48) :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \xi^T \left[ (A - \Lambda C)^T P + P(A - \Lambda C) \right] \xi + 2\xi^T PG [\gamma(H(\xi + z)) - \gamma(Hz + K(C\xi + e))] \\ &\quad - 2\xi^T P \Lambda e + 2\xi^T P [\phi(C(\xi + z)) - \phi(e + C(\xi + z))]. \end{aligned}$$



D'après (7.47),

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -\nu|\xi|^2 - 2\xi^T [PG + (H - KC)^T] [\gamma(H(\xi + z)) - \gamma(Hz + KC\xi)] \\ &\quad + 2\xi^T PG [\gamma(H(\xi + z)) - \gamma(Hz + K(C\xi + e))] - 2\xi^T P\Lambda e \\ &\quad + 2\xi^T P [\phi(C(\xi + z)) - \phi(e + C(\xi + z))].\end{aligned}$$

On remarque que, d'après (7.42) :

$$\begin{aligned}\xi^T (H - KC)^T [\gamma(H(\xi + z)) - \gamma(Hz + KC\xi)] &= \\ \frac{1}{2}\xi^T (H - KC)^T \int_0^1 \left( \frac{\partial \gamma}{\partial s} + \left( \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right)^T \right)_{s=H(\xi+z)-\lambda(H-KC)\xi} d\lambda (H - KC)\xi &\geq 0,\end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -\nu|\xi|^2 - 2\xi^T [PG + (H - KC)^T] [\gamma(H(\xi + z)) - \gamma(Hz + KC\xi)] \\ &\quad + 2\xi^T PG [\gamma(H(\xi + z)) - \gamma(Hz + KC\xi)] \\ &\quad + 2\xi^T PG [\gamma(Hz + KC\xi) - \gamma(Hz + K(C\xi + e))] \\ &\quad - 2\xi^T P\Lambda e + 2\xi^T P [\phi(C(\xi + z)) - \phi(e + C(\xi + z))] \\ &\leq -\nu|\xi|^2 + 2\xi^T PG [\gamma(Hz + KC\xi) - \gamma(Hz + K(C\xi + e))] - 2\xi^T P\Lambda e \\ &\quad + 2\xi^T P [\phi(C(\xi + z)) - \phi(e + C(\xi + z))].\end{aligned}\tag{7.55}$$

En invoquant (7.43) et (7.44), on a :

$$\dot{V} \leq -\nu|\xi|^2 + 2|\xi| \left[ |PG|\theta_\gamma(|K||e|) + |P\Lambda||e| + |P|\theta_\phi(|e|) \right].\tag{7.56}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\left( |\xi| \geq \frac{4}{\nu} \left[ |PG|\theta_\gamma(|K||e|) + |P\Lambda||e| + |P|\theta_\phi(|e|) \right] \right) &\Rightarrow \left( \dot{V} \leq -\frac{\nu}{2}|\xi|^2 \right) \\ &\Rightarrow \left( \dot{V} \leq -\frac{\nu}{2\lambda_{\max}(P)}V \right).\end{aligned}\tag{7.57}$$

De cette manière, d'après (7.57), le principe de comparaison (cf. Lemme 3.4 dans [98]) et le fait que  $\lambda_{\min}(P)|\xi|^2 \leq V(\xi) \leq \lambda_{\max}(P)|\xi|^2$  pour  $\xi \in \mathbb{R}^{n_x}$ , on peut montrer que les solutions de (7.48) satisfont :

$$\begin{aligned}|\xi(t)| &\leq \max \left\{ \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} |\xi_0| \exp \left( -\frac{\nu}{4\lambda_{\max}(P)} (t - t_0) \right), \right. \\ &\quad \left. \frac{4}{\nu} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \left[ |PG|\theta_\gamma(|K| \|e\|_{[t_0, t]}) + |P\Lambda| \|e\|_{[t_0, t]} + |P|\theta_\phi(\|e\|_{[t_0, t]}) \right] \right\},\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve.  $\square$

La condition (7.17) est donc vérifiée avec, pour  $(s, t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2$ ,

$$\beta_2(s, t) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} s \exp\left(-\frac{\nu}{4\lambda_{\max}(P)} t\right) \quad (7.58)$$

$$\gamma_2^W(s) = \frac{4}{\nu} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \left[ |PG|\theta_\gamma(|K|\alpha_1^{-1}(s)) + |P\Lambda|\alpha_1^{-1}(s) + |P|\theta_\phi \circ \alpha_1^{-1}(s) \right], \quad (7.59)$$

où  $\alpha_1$  est défini selon le protocole d'après (4.9) ou (4.35).

Nous montrons maintenant que l'Hypothèse 7.2.2 est satisfaite pour le TOD modifié combiné aux bloqueurs. Considérons  $\tilde{W}$  défini par (E.11), pour  $\tilde{W}(e) \geq 1$ ,

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{W}(i, e)}{\partial e}, g(t, \xi, e, z) \right\rangle \leq \left| \hat{f}_P(z) - CA(\xi + z) - CG\gamma(H(\xi + z)) - C\phi(C(\xi + z)) \right|,$$

pour  $\tilde{W}(e) \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \tilde{W}(i, e)}{\partial e}, g(t, \xi, e, z) \right\rangle &\leq \varrho'(W(e)) \left| \hat{f}_P(z) - CA(\xi + z) - CG\gamma(H(\xi + z)) \right. \\ &\quad \left. - C\phi(C(\xi + z)) \right|. \end{aligned} \quad (7.60)$$

D'après la construction de  $\tilde{W}$  proposée dans l'Annexe E, la preuve de la Proposition 4.3.1 (cf. Annexe C) et puisque  $\varrho'$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \tilde{W}(i, e)}{\partial e}, g(t, \xi, e, z) \right\rangle &\leq \varrho'(1) \left| \hat{f}_P(z) - CA(\xi + z) - CG\gamma(H(\xi + z)) \right. \\ &\quad \left. - C\phi(C(\xi + z)) \right|. \end{aligned} \quad (7.61)$$

A l'aide de (7.60) et (7.61), on obtient, avec  $\vartheta = \max\{1, \varrho'(1)\}$  :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \tilde{W}(i, e)}{\partial e}, g(t, \xi, e, z) \right\rangle &\leq \vartheta \left| \hat{f}_P(z) - CA(\xi + z) - CG\gamma(H(\xi + z)) \right. \\ &\quad \left. - C\phi(C(\xi + z)) \right|. \end{aligned} \quad (7.62)$$

Ainsi, pour le bloqueur d'ordre zéro, d'après (7.43) et (7.44),

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \tilde{W}(i, e)}{\partial e}, g(t, \xi, e, z) \right\rangle &\leq \vartheta \left[ |CA|(|\xi| + |z|) + |CG|\theta_\gamma(|H|(|\xi| + |z|)) \right. \\ &\quad \left. + |C|\theta_\phi(|C|(|\xi| + |z|)) \right], \end{aligned}$$

d'après l'inégalité triangulaire faible (cf. Lemme A.1.2),

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \tilde{W}(i, e)}{\partial e}, g(t, \xi, e, z) \right\rangle &\leq \vartheta \left[ |CA|(|\xi| + |z|) + |CG|(\theta_\gamma(2|H||\xi|) + \theta_\gamma(2|H||z|)) \right. \\ &\quad \left. + |C|(\theta_\phi(2|C||\xi|) + \theta_\phi(2|C||z|)) \right], \end{aligned}$$

	ZOH	Pred
RR	$L = 0, \gamma_1^\xi(s) = \sqrt{l}\bar{\gamma}(s),$ $\gamma_1^z(s) = \sqrt{l}\bar{\gamma}(s)$	$L = 0, \gamma_1^\xi(s) = \sqrt{l}\tilde{\gamma}(s),$ $\gamma_1^z(s) = 0$
TOD	$L = 0, \gamma_1^\xi(s) = \bar{\gamma}(s),$ $\gamma_1^z(s) = \bar{\gamma}(s)$	$L = 0, \gamma_1^\xi(s) = \tilde{\gamma}(s),$ $\gamma_1^z(s) = 0$
TOD modifié	$L = 0, \gamma_1^\xi(s) = \vartheta\bar{\gamma}(s),$ $\gamma_1^z(s) = \vartheta\bar{\gamma}(s)$	$L = 0, \gamma_1^\xi(s) = \vartheta\tilde{\gamma}(s),$ $\gamma_1^z(s) = 0$
Echantillonné	$L = 0, \gamma_1^\xi(s) = \bar{\gamma}(s),$ $\gamma_1^z(s) = \bar{\gamma}(s)$	$L = 0, \gamma_1^\xi(s) = \tilde{\gamma}(s),$ $\gamma_1^z(s) = 0$

TAB. 7.1 – Coefficients et fonctions de l'Hypothèse 7.2.2 pour le système (7.50)

que l'on écrit,

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{W}(i,e)}{\partial e}, g(t,\xi,e,z) \right\rangle \leq \vartheta[\bar{\gamma}(|\xi|) + \bar{\gamma}(|z|)],$$

où  $\bar{\gamma}(s) = |CA|s + |CG|\theta_\gamma(2|H|s) + |C|\theta_\phi(2|C|s)$ ,  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Pour le Pred,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \tilde{W}(i,e)}{\partial e}, g(t,\xi,e,z) \right\rangle &\leq \vartheta \left[ |CA||\xi| + |CG|\theta_\gamma(|H||\xi|) + |C|\theta_\phi(|C||\xi|) \right] \\ &= \vartheta\tilde{\gamma}(|\xi|), \end{aligned} \quad (7.63)$$

avec  $\tilde{\gamma}(s) = |CA|s + |CG|\theta_\gamma(|H|s) + |C|\theta_\phi(|C|s)$ ,  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . L'Hypothèse 7.2.2 est donc satisfaite pour le protocole TOD modifié avec les bloqueurs ZOH et Pred. On montre de la même manière que c'est le cas avec les protocoles RR, TOD et le cas échantillonné. Les coefficients et fonctions obtenus sont résumés dans le Tableau 7.1. Puisque  $L = 0$ ,  $\tau_0 = \infty$  (défini dans la Proposition 7.2.1), ainsi on choisit  $\bar{\tau} \in [v, \infty)$  quelconque. La fonction  $\beta_1$  de la Proposition 7.2.1 est quant à elle obtenue en considérant les coefficients  $a_1, a_2, \rho$  de chaque protocole et en prenant  $\tau = \bar{\tau}$ .

Sachant que  $z = x - \xi$ , on peut montrer, de la même manière que pour le Lemme 7.3.1, que le système (7.49) est stable entrée-état vis-à-vis de  $(x,e)$ . Ainsi pour tout  $\xi_0 \in \mathbb{R}^{n_\xi}$ ,  $z(t)$  défini pour tout  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $(e,x) \in \mathcal{L}_\infty^{n_e+n_x}$ , d'après le Lemme 7.3.1, les solutions de (7.50) vérifient :

$$|z(t)| \leq \max \{ \beta_3(|\xi_0|, t - t_0), \gamma_3^e(\|e\|_{[t_0,t]}), \gamma_3^x(\|x\|_{[t_0,t]}) \}, \quad (7.64)$$

où, pour  $(s,t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2$  :

$$\begin{aligned}\beta_3(s,t) &= \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} s \exp\left(-\frac{\nu}{4\lambda_{\max}(P)} t\right) \\ \gamma_3^e(s) &= \frac{4}{\nu} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \left[ |PG|\theta_\gamma(|K|s) + |P\Lambda|s + |P|\theta_\phi(s) \right] \\ \gamma_3^x(s) &= \frac{4}{\nu} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \left[ |PG|\theta_\gamma(|KC|s) + |P\Lambda C|s + |P|\theta_\phi(|C|s) \right],\end{aligned}$$

ce qui nous permet d'appliquer le Corollaire 7.2.1 lorsque (7.40) est UGS, d'où la proposition suivante.

**Proposition 7.3.1** *Supposons que le système (7.40) soit UGS, pour tout  $\Delta, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ , lorsque des bloqueurs ZOH sont implémentés, pour chaque protocole (RR, TOD, TOD modifié, échantillonné) il existe un MATI approprié  $\tau_1(\varepsilon, \Delta) \in [\nu, \infty)$  tel que :*

(i) *pour tout  $\tau^* \in [\nu, \tau_1(\varepsilon, \Delta))$ ,  $\max\{|\xi_0|, |e_0|, |z_0|\} < \Delta$ , il existe  $\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  tel que, le long des solutions de (7.48)-(7.53) :*

$$|(\xi(t), z(t), e(t))| \leq \mu \quad \forall t \geq t_0 \geq 0; \quad (7.65)$$

(ii) *il existe  $\beta \in \mathcal{KL}$ ,  $\delta \in \mathcal{KK}$ , tels que pour tout  $\tau \in [\nu, \tau^*(\varepsilon, \Delta))$ ,  $(\xi_0, e_0, z_0) \in \mathbb{R}^{n_\xi + n_e + n_z}$  avec  $\max\{|\xi_0|, |e_0|, |z_0|\} < \Delta$ , les solutions de (7.48)-(7.53) satisfont, pour tout  $t \geq t_0 \geq 0$ ,*

$$|(\xi(t), e(t))| \leq \max\{\beta(|(\xi_0, e_0)|, t - t_0), \delta(\tau^*, \Delta), \varepsilon\} \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (7.66)$$

La proposition suivante est une conséquence du Théorème 7.2.2.

**Proposition 7.3.2** *Considérons le système (7.48)-(7.53) avec des bloqueurs Pred, pour tout  $\Delta, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ , pour chaque protocole (RR, TOD, TOD modifié, échantillonné) il existe un MATI approprié  $\tau_2(\varepsilon, \Delta) \in [\nu, \infty)$  tel que :*

(i) *pour tout  $\tau^* \in [\nu, \tau_2(\varepsilon, \Delta))$ , le système (7.48)-(7.53) est (uniformément) positivement complet pour tout  $\max\{|\xi_0|, |e_0|\} < \Delta$  ;*

(ii) *il existe  $\beta \in \mathcal{KL}$  tel que pour tout  $\tau \in [\nu, \tau^*(\varepsilon, \Delta))$ ,  $(\xi_0, e_0, z_0) \in \mathbb{R}^{n_\xi + n_e + n_z}$  avec  $\max\{|\xi_0|, |e_0|\} < \Delta$ , les solutions de (7.48)-(7.53) satisfont, pour tout  $t \geq t_0 \geq 0$ ,*

$$|(\xi(t), e(t))| \leq \max\{\beta(|(\xi_0, e_0)|, t - t_0), \varepsilon\} \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (7.67)$$

**Remarque 7.3.2** *Les bornes sur le MATI des Propositions 7.3.1 et 7.3.2 sont données respectivement dans les preuves des Théorèmes 7.2.1 et 7.2.2 en remplaçant les fonctions considérées par celles données dans cette sous-section.*

Comme au Chapitre 5, l'analyse nous indique le bloqueur Pred assure a priori une convergence plus précise de l'erreur d'observation que le ZOH. En effet, celui-ci nous garantit que l'erreur représentée par le terme  $\delta$  dans la Proposition 7.3.1 n'est plus, lorsque la fonction de blocage est de type Pred.

Etant donné les fonctions données dans le Tableau 7.1 et les expressions des MATI obtenues dans le Corollaire 7.2.1 et le Théorème 7.2.2, on peut constater que les protocoles TOD classique et modifié permettent de considérer de plus larges MATI que le RR. Il serait intéressant à l'avenir d'étudier la relation entre  $\bar{\tau}$  et  $\tau^*$  afin d'augmenter autant que possible le MATI.

## 7.4 Commentaires

Il est important de souligner que tous les observateurs ne garantissent pas les propriétés de stabilité requises vis-à-vis des perturbations sur la sortie, que ce soit celles de ce chapitre ou des précédents. De manière générale, contrairement à la commande (cf. [182] par exemple), la robustesse aux perturbations de mesures des observateurs a été peu étudiée ou du moins quantifiée dans la littérature. Une première piste pour étendre la validité de nos résultats consistent à supposer que les hypothèses soient valables localement. Les gains des propriétés de stabilité entrée-sortie et entrée-état dépendront alors du sous-ensemble de l'espace d'état étudié. En prêtant attention aux conditions initiales et à l'amplitude maximale des signaux de perturbations considérés, nos résultats demeurent applicables. Une autre possibilité consiste à s'intéresser à des propriétés de stabilité dérivées de la stabilité entrée-sortie ou entrée-état. Par exemple, dans [174], la notion de quasi-stabilité entrée-état est introduite. Elle signifie que le système, dont la variable d'état est l'erreur d'observation, est stable entrée-état vis-à-vis des perturbations sur la sortie, à condition que les états et entrées du système soient uniformément bornés. Il serait intéressant à l'avenir d'étudier ce type de propriétés.

## 7.5 Conclusion

Dans ce chapitre, les travaux du Chapitre 5 ont été étendus à de plus larges classes de protocoles et de systèmes. L'extension des hypothèses a pour conséquence de ne plus garantir de propriétés de stabilité globale pour l'erreur d'observation mais semiglobale (et pratique): pour n'importe quelles boules de conditions initiales et de convergence désirée, il existe une borne sur le MATI appropriée. L'analyse de stabilité repose sur les théorèmes du petit gain pour les systèmes paramétrés présentés dans l'Annexe D. Nous avons ensuite montré que les observateurs par critère du cercle, et par conséquent ceux par injection de sortie, vérifient les hypothèses requises sous certaines conditions. Leur implémentation sous différentes configurations de réseau a ensuite été étudiée et des propriétés de stabilité ont été dérivées pour l'erreur d'observation.

# Annexes



## Annexe A

# Rappels mathématiques

Quelques résultats d'algèbre et d'analyse utilisés dans cette thèse sont rappelés.

### A.1 Formules algébriques

**Proposition A.1.1** Pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ,

$$2ab \leq \frac{1}{\varepsilon}a^2 + \varepsilon b^2. \quad (\text{A.1})$$

*Preuve.* Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}a - \sqrt{\varepsilon}b\right)^2 = \frac{1}{\varepsilon}a^2 + \varepsilon b^2 - 2ab, \quad (\text{A.2})$$

la preuve se conclut en notant que  $\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}a - \sqrt{\varepsilon}b\right)^2 \geq 0$ .  $\square$

**Proposition A.1.2** Pour tout  $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  et  $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$ ,

$$\begin{aligned} a + b &\leq \max\{(1 + \mu)a, (1 + \mu^{-1})b\} \\ \max\{a, b\} &\leq a + b. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

*Preuve.* Soient  $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  et  $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$ , supposons, sans perte de généralité, que  $(1 + \mu^{-1})b \leq (1 + \mu)a$  ce qui est équivalent à  $b \leq \mu a$ , alors

$$a + b \leq a + \mu a = \max\{(1 + \mu)a, (1 + \mu^{-1})b\}. \quad (\text{A.4})$$

D'autre part, si  $\max\{a, b\} = a$ , on a bien  $\max\{a, b\} \leq a + b$  (le même résultat est obtenu avec  $\max\{a, b\} = b$ ).  $\square$

Le résultat suivant correspond au Lemme 4.2 dans [98].

**Lemme A.1.1** Soient  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}$  sur  $[0, a)$ ,  $\alpha_3, \alpha_4 \in \mathcal{K}_\infty$  et  $\beta \in \mathcal{KL}$ . On a :

-  $\alpha_1^{-1}$  est définie sur  $[0, \alpha_1(a))$  et est de classe de  $\mathcal{K}$  ;



- $\alpha_3^{-1} \in \mathcal{K}_\infty$  ;
- $\alpha_1 \circ \alpha_2 \in \mathcal{K}$  ;
- $\alpha_3 \circ \alpha_4 \in \mathcal{K}_\infty$  ;
- $\sigma(r,s) = \alpha_1(\beta(\alpha_2(r),s)) \in \mathcal{KL}$ .

**Lemme A.1.2 (Inégalité triangulaire faible [86])** *Pour tout  $\gamma \in \mathcal{K}$  et toute fonction  $\rho \in \mathcal{K}_\infty$  telle que  $\rho - \mathbb{I} \in \mathcal{K}_\infty$ , pour tout  $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  on a :*

$$\gamma(a+b) \leq \gamma \circ \rho(a) + \gamma \circ \rho \circ (\rho - \mathbb{I})^{-1}(b). \quad (\text{A.5})$$

**Remarque A.1.1** *L'inégalité triangulaire faible est généralement utilisée dans cette thèse en prenant  $\rho = 2\mathbb{I}$ .*

**Proposition A.1.3 (Formule du multinôme de Newton)**

$$\left( \sum_{i=0}^r a_i \right)^n = \sum_{\tilde{I}_r=n} \binom{n}{i_0 \ i_1 \ \dots \ i_r} a_0^{i_0} \dots a_r^{i_r} = \sum_{\tilde{I}_r=n} \frac{n!}{i_0! \dots i_r!} a_0^{i_0} \dots a_r^{i_r}, \quad (\text{A.6})$$

on rappelle que  $\tilde{I}_r = \sum_{j \in \{0, \dots, r\}} i_j$ .

## A.2 Rappels d'analyse

**Définition A.2.1** *Soit  $D \subset \mathbb{R}^n$ , on dit que la fonction  $f : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$  est globalement / uniformément ( $k$ -)Lipschitzienne par rapport à  $x$  sur  $[t_0, t_1) \times D$  ( $t_0 \leq t_1 \in \mathbb{R}$ ,  $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$ ), s'il existe  $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  tel que, pour tout  $(t, x, y) \in [t_0, t_1) \times D^2$*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq k|x - y|. \quad (\text{A.7})$$

*On dit que la fonction  $f$  est localement Lipschitzienne par rapport à  $x$  sur  $[t_0, t_1) \times D$ ,  $t_1 \in (t_0, \infty]$ , si, pour tout compact  $M \subset D$ , il existe  $k_M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  tel que, pour tout  $(t, x, y) \in [t_0, t_1) \times M^2$ ,*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq k_M|x - y|. \quad (\text{A.8})$$

**Remarque A.2.1** *Dans ce mémoire, on dit que  $f$  est globalement/localement Lipschitzienne en  $x$  sans préciser d'ensemble lorsque  $f$  l'est sur son ensemble de définition.*

La proposition suivante fournit une caractérisation de type « Lipschitzienne non linéaire » de la continuité uniforme<sup>1</sup>.

**Proposition A.2.1** *Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i)  *$f$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}^n$ , i.e.*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \quad \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \quad (|x - y| \leq \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon); \quad (\text{A.9})$$

1. Je remercie Paolo Mason, Moussa Balde et Petri Kokkonen pour leur aide précieuse.

(ii) il existe  $\phi \in \mathcal{K}$  telle que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $|f(x) - f(y)| \leq \phi(|x - y|)$  (on appelle  $\phi$  le module de continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$ ).

**Preuve.** (ii)  $\Rightarrow$  (i). Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ , en définissant  $\delta = \phi^{-1}(\varepsilon)$ , on constate que (A.9) est bien vérifiée.

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Définissons  $\psi(s) = \sup_{|x-y| \leq s} |f(x) - f(y)|$  pour  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . On constate que  $\psi(0) = 0$ .

Montrons dans un premier temps que  $\psi$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ . Soit  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  et  $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$  tels que  $|x - y| \leq s$  et soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  et  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$  qui est défini tel que (A.9) est vérifiée. On définit  $a_i = x + i \frac{y-x}{\delta}$  pour  $i \in \{0, \dots, N\}$  avec  $N = \lfloor \frac{y-x}{\delta} \rfloor$  où  $\lfloor \cdot \rfloor$  représente la partie entière par défaut et  $a_{N+1} = y$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sum_{i \in \{0, \dots, N\}} f(a_i) - f(a_{i+1}) \right| \\ &\leq \sum_{i \in \{0, \dots, N\}} |f(a_i) - f(a_{i+1})|, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

puisque pour tout  $i \in \{0, \dots, N\}$ ,  $|a_i - a_{i+1}| \leq \delta$ , on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq \sum_{i \in \{0, \dots, N\}} |f(a_i) - f(a_{i+1})| \leq \sum_{i \in \{0, \dots, N\}} \varepsilon \leq (N+1)\varepsilon, \quad (\text{A.11})$$

par conséquent,

$$|\psi(s)| \leq (N+1)\varepsilon \quad (\text{A.12})$$

et donc  $\psi$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ . On remarque également que  $\psi$  est croissante sur  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ .

Nous allons maintenant montrer que  $\psi$  est continue sur  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ . Soit  $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$  tel que  $\psi(\delta) \leq \varepsilon$  et  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  tel que  $s = a + \eta$  avec  $\eta \in [0, \delta]$ , on a, puisque  $\psi$  est croissante :

$$\begin{aligned} \psi(s) &= \psi(a + \eta) \\ &\leq \psi(a + \delta) \\ &= \sup_{|x-y| \leq a+\delta} |f(x) - f(y)| \\ &\leq \sup_{(|x-z| \leq a) \text{ et } (|z-y| \leq \delta)} \left\{ |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| \right\} \\ &\leq \sup_{|x-z| \leq a} |f(x) - f(z)| + \sup_{|z-y| \leq \delta} |f(z) - f(y)| \\ &= \psi(a) + \psi(\delta) \\ &\leq \psi(a) + \varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Par conséquent  $\psi$  est continue à droite pour tout  $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . On peut montrer de la même manière que  $\psi$  est continue à gauche pour tout  $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , ainsi  $\psi$  est continue sur  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  tout entier. Seule la croissante stricte de  $\psi$  nous manque pour pouvoir affirmer que  $\psi \in \mathcal{K}$ . Pour cela, il suffit d'introduire la fonction  $\phi : s \mapsto \psi(s) + s$ . La propriété (ii) est ainsi vérifiée.  $\square$

**Théorème A.2.1 (Théorème de la valeur moyenne [158])** Soient  $a, b \in \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  dérivable sur  $\mathbb{R}^n$  ( $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$ ), alors il existe  $c = a + (b - a)t$  où  $t \in (0, 1)$  tel que :

$$f(b) - f(a) = \partial f(c)(b - a). \quad (\text{A.14})$$

Le résultat suivant correspond au Lemme 3.4 dans [98].

**Lemme A.2.1 (Principe de comparaison)** Soit l'équation différentielle scalaire suivante :

$$\dot{y} = g(t, y), \quad y_0 \in \mathbb{R}$$

où  $g$  est continue en  $t$  et localement Lipschitzienne en  $y$ , pour tout  $t \in [t_0, \infty)$  et  $y \in J \subset \mathbb{R}$ . Soit  $t_{\max} \in (t_0, \infty]$  tel que  $[t_0, t_{\max})$  est l'intervalle maximal d'existence des solutions  $y(t)$  et supposons que  $y(t) \in J$  pour tout  $t \in [t_0, t_{\max})$ . Soit  $v$  une fonction dérivable qui satisfait l'inégalité suivante :

$$\dot{v}(t) \leq f(t, v(t)), \quad v_0 \leq y_0$$

et  $v(t) \in J$  pour tout  $t \in [t_0, t_{\max})$ , alors, pour tout  $t \in [t_0, t_{\max})$ ,

$$v(t) \leq u(t). \quad (\text{A.15})$$

Considérons le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u) \\ y &= h(x), \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est localement Lipschitzienne et  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  est continue,  $n, m, p \in \mathbb{Z}_{>0}$ .

**Définition A.2.2 (Complétude positive)** Le système (A.16) est positivement complet si pour tout  $(t_0, x_0, u) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}_{\infty}^m$ ,  $x(\cdot, t_0, x_0, u)$  existe sur  $[t_0, \infty)$ .

**Remarque A.2.2** La complétude positive peut n'être définie que pour un ensemble limité de signaux d'entrée et de conditions initiales.

**Définition A.2.3** Le système (A.16) est uniformément positivement complet s'il existe  $\chi_1, \chi_2, \chi_3 \in \mathcal{K}$  et  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  tels que, pour tout  $(t_0, x_0, u) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}_{\infty}^m$  et  $t \in [t_0, t_{\max})$  (qui représente l'intervalle maximal d'existence de solutions,  $t_{\max} \in [t_0, \infty)$ ):

$$|x(t, t_0, x_0, u)| \leq \chi_1(t - t_0) + \chi_2(|x_0|) + \chi_3(\|u\|_{[t_0, t]}) + c, \quad (\text{A.17})$$

ainsi  $t_{\max} = \infty$ .

Cette définition est inspirée de [6] où il est prouvé que, si le système (A.16) est à temps invariant, complétude positive et (A.17) (avec  $\chi_1 = 0$ ) sont équivalents (voir Corollaire 2.3). La notion de complétude positive uniforme est également utilisée dans [122] (Définition 5).

## Annexe B

# Rappels de stabilité

### B.1 Stabilité des systèmes à temps variant

Soit le système dont les dynamiques sont représentées par l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (\text{B.1})$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que  $f(t, 0) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ .

**Définition B.1.1 (UGAS)** *On dit que l'origine est uniformément globalement asymptotiquement stable (UGAS) pour le système (B.1) s'il existe  $\beta \in \mathcal{KL}$  telle que, pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , les solutions de (B.1) vérifient :*

$$|x(t)| \leq \beta(|x_0|, t - t_0) \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (\text{B.2})$$

*Si le système (B.1) est autonome, on dit que 0 est GAS (l'uniformité est superflue).*

Il est généralement difficile de prouver la stabilité de l'origine de (B.1) à partir de la Définition B.1.1. Les fonctions de Lyapunov offre un moyen pratique d'y arriver. Le théorème suivant se déduit du Théorème 4.9 et du Lemme 4.3 dans [98].

**Théorème B.1.1** *L'origine est UGAS pour (B.1) s'il existe une fonction  $V \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$  et  $\alpha_3 \in \mathcal{K}$  tels que,*

$$(i) \text{ pour tout } (t, x) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n, \alpha_1(|x|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(|x|);$$

$$(ii) \text{ le long des solutions de (B.1), } \dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -\alpha_3(|x|).$$

*On dit dans ce cas que  $V$  est une fonction de Lyapunov (forte) pour le système (B.1).*

**Remarque B.1.1** *La condition (i) est équivalente au fait que  $V$  est définie positive et radialement non bornée et l'inégalité de (ii) revient à dire que  $\dot{V}$  est définie négative (cf. Lemme 4.3 dans [98]).*

Il est souvent difficile de trouver des fonctions de Lyapunov fortes. Parfois, la dérivée de la fonction considérée est seulement définie semi-négative ( $\dot{V} \leq 0$ ), on parle alors de *fonction de Lyapunov faible*. Tout ce que l'on peut conclure, a priori, est que l'origine du système est stable, i.e. il existe  $\alpha \in \mathcal{K}$  telle que pour tout  $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $|x(t)| \leq \alpha(|x_0|)$ . Des outils d'analyse sont disponibles afin de déduire de plus fortes propriétés à partir de fonctions de Lyapunov faibles, comme le principe d'invariance de LaSalle. Le résultat suivant correspond au Théorème 4.4 dans [98].

**Théorème B.1.2 (Principe d'invariance de Krasovskii-LaSalle)** Soient  $D \subset \mathbb{R}^n$  et

- $\Omega \subset D$  un ensemble compact positivement invariant pour le système (B.1);
- $V \in C^1(D; \mathbb{R})$  telle que  $\dot{V}(x) \leq 0$  sur  $\Omega$ ;
- $E$  l'ensemble des points de  $\Omega$  où  $\dot{V}(x) = 0$ ;
- $M$  le plus grand invariant inclus dans  $E$ .

Alors toute solution de (B.1) telle que  $x(0) \in \Omega$  converge asymptotiquement vers  $M$ .

Ce corollaire est une conséquence directe du principe d'invariance de LaSalle-Krasovskii (voir Corollaires 4.1 et 4.2 dans [98]).

**Corollaire B.1.1** Soient  $D \subset \mathbb{R}^n$  tel que  $0 \in D$  et

- $V \in C^1(D; \mathbb{R})$  une fonction définie positive sur  $D$ , telle que  $\dot{V}(x) \leq 0$  sur  $D$ ;
- $S = \{x \in D : \dot{V}(x) = 0\}$  et supposons qu'aucune solution ne puisse rester dans  $S$  identiquement, à part  $x = 0$ ;

Alors  $x = 0$  est asymptotiquement stable. Si  $D = \mathbb{R}^n$  et  $V$  est radialement non bornée,  $x = 0$  est globalement asymptotiquement stable.

## B.2 Stabilité des systèmes munis d'entrées et de sorties

Considérons le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u) \\ y &= h(x), \end{aligned} \tag{B.3}$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$ ,  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que  $f(t, 0, 0) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  et  $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ ,  $n, m, p \in \mathbb{Z}_{>0}$ .

**Définition B.2.1 (UEBEB / UGS)** Le système (B.3) est uniformément-entrée-bornée-état-borné (UEBEB) avec  $u$  comme entrée, s'il existe  $\alpha, \gamma \in \mathcal{K}$  tels que, pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $u \in \mathcal{L}_{\infty}^{n_u}$ :

$$|x(t)| \leq \alpha(|x_0|) + \gamma(\|u\|_{\infty}) \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \tag{B.4}$$

et si  $\gamma$  est une fonction linéaire, le système (B.3) est dit UEBEB avec un gain linéaire. Lorsqu'aucune entrée n'affecte les dynamiques du système (i.e.  $u = 0$ ), on dit que celui-ci est uniformément globalement stable (UGS).

**Définition B.2.2 (Stabilité entrée-sortie / entrée-état)** On dit que le système (B.3) est stable entrée-sortie de l'entrée  $u$  vers la sortie  $y$  s'il existe  $\beta \in \mathcal{KL}$  et un gain  $\gamma \in \mathcal{K}$ , tels que pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $u \in \mathcal{L}_\infty^{n_u}$ :

$$|y(t)| \leq \beta(|x_0|, t - t_0) + \gamma(\|u\|_\infty) \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (\text{B.5})$$

Lorsque (B.5) est vérifiée pour  $y = x$ , le système (B.3) est stable entrée-état vis-à-vis de  $u$ . Si  $\gamma$  est une fonction linéaire, on dit que le système (B.3) est stable entrée-sortie/entrée-état avec un gain linéaire.

Différentes caractérisations des stabilités entrée-sortie et entrée-état sont listées.

**Proposition B.2.1** Le système (B.3) est stable entrée-sortie de l'entrée  $u$  vers la sortie  $y$  si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

(i) il existe  $\beta \in \mathcal{KL}$  et un gain  $\gamma \in \mathcal{K}$  tels que :

$$|y(t)| \leq \max\{\beta(|x_0|, t - t_0), \gamma(\|u\|_\infty)\} \quad \forall t \geq t_0 \geq 0; \quad (\text{B.6})$$

(ii) (si le système (B.3) est UEBEB) il existe  $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_{\geq 0})$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$ ,  $\chi \in \mathcal{K}$  et  $\alpha_3 \in \mathcal{KL}$  tels que :

- pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha_1(|h(x)|) \leq V(x) \leq \alpha_2(|h(x)|)$  ;
- pour tout  $(x, u) \in \mathbb{R}^{n+m}$ ,  $V(x) \geq \chi(|u|) \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u) \leq -\alpha_3(V(x), |x|)$ .

**Preuve.** La propriété (i) est bien équivalente à la Définition B.2.2 d'après la Proposition A.1.2. L'équivalence avec (ii) est obtenue à l'aide du Théorème 1 dans [186].

La proposition suivante est démontrée dans [185] (voir Théorème 1).

**Proposition B.2.2** Le système (B.3) est stable entrée-état vis-à-vis de  $u$  si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

(i) il existe  $\beta \in \mathcal{KL}$  et un gain  $\gamma \in \mathcal{K}$  tels que :

$$|x(t)| \leq \max\{\beta(|x_0|, t - t_0), \gamma(\|u\|_\infty)\} \quad \forall t \geq t_0 \geq 0; \quad (\text{B.7})$$

(ii) il existe  $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_{\geq 0})$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$ ,  $\chi \in \mathcal{K}$  et  $\alpha_3 \in \mathcal{K}$  tels que :

- pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha_1(|x|) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|)$  ;
- pour tout  $(x, u) \in \mathbb{R}^{n+m}$ ,  $\chi(|x|) \geq |u| \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u) \leq -\alpha_3(|x|)$ .

**Remarque B.2.1** Lorsque la stabilité entrée-état est prouvée à l'aide de la condition (ii), on peut prendre  $\gamma = \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 \circ \chi^{-1}$  dans (i).



## Annexe C

# Preuve de la Proposition 4.3.1

La preuve est fortement inspirée de celle du Lemme 11 dans [165]. On peut montrer, d'après (4.37), que pour tout  $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  et  $e \in \mathbb{R}^{n_e}$ , avec  $\tilde{\alpha}_3 = \frac{2}{\mu}\alpha_3$  :

$$\frac{2}{\mu} \left[ W(i+1, h(i, e)) - W(i, e) \right] \leq -\tilde{\alpha}_3(W(i, e)). \quad (\text{C.1})$$

Considérons  $a \in \mathcal{K} \cap C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\geq 0})$  telle que, pour tout  $\tau \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  :

$$a(\tau) \leq \min \{ \tau, \tilde{\alpha}_3(\tau) \} \quad \text{et} \quad a'(\tau) < 1. \quad (\text{C.2})$$

Un exemple de fonction  $a$  est donné par l'équation (140) dans [165] :  $a(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^\tau \frac{\min\{s, \tilde{\alpha}_3(s)\}}{1+s^2} ds$  qui satisfait bien les conditions requises. En effet, on peut prouver que  $a \in \mathcal{K} \cap C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\geq 0})$  et  $a(\tau) \leq \min \{ \tau, \tilde{\alpha}_3(\tau) \}$ , de plus  $a'(\tau) = \frac{2}{\pi} \frac{\min\{\tau, \tilde{\alpha}_3(\tau)\}}{1+\tau^2} \leq \frac{2}{\pi} \frac{\tau}{1+\tau^2} \leq \frac{1}{\pi} < 1$ , pour  $\tau \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

Soit

$$\rho(\tau) = \begin{cases} \exp\left(\int_1^\tau \frac{2}{a(s)} ds\right) & \text{pour } \tau > 0 \\ 0 & \text{pour } \tau = 0. \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Cette fonction est continue et croissante sur  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ . De plus, puisque  $s \mapsto \int_1^\tau \frac{2}{a(s)} ds$  diverge en  $-\infty$  quand  $\tau$  tend vers 0 et vers  $+\infty$  quand  $\tau$  tend vers  $+\infty$ ,  $\rho \in \mathcal{K}_\infty$ . Montrons que  $\rho \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\geq 0})$ . Puisque  $\rho \in C^1(\mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R}_{\geq 0})$ , il suffit de prouver que :

$$\rho'(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \rho'(\tau) = 0. \quad (\text{C.4})$$

Au voisinage de 0,

$$\rho(\tau) = \exp\left(-\int_\tau^1 \frac{2}{a(s)} ds\right) \leq \exp\left(-\int_\tau^1 \frac{2}{s} ds\right) = \exp(\ln \tau^2) = \tau^2. \quad (\text{C.5})$$

Par conséquent,  $\rho'(0)$  existe et est égal à 0. D'autre part, pour  $\tau \in \mathbb{R}_{>0}$  :

$$\rho'(\tau) = \frac{2}{a(\tau)}\rho(\tau) \quad \text{et} \quad \rho''(\tau) = 2(2 - a'(\tau)) \frac{\rho(\tau)}{a^2(\tau)}. \quad (\text{C.6})$$

Puisque  $a'(\tau) < 2$ ,  $\rho''$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}_{>0}$  et  $\rho'$  est donc strictement croissante sur cet espace. Ainsi, sachant que  $\rho'$  est également positive,  $\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \rho'(\tau)$  existe et est positive



ou nulle. Raisonnons par l'absurde et supposons que  $\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \rho'(\tau) > 0$ . Il existe donc  $c, \delta \in \mathbb{R}_{>0}$  tels que, pour tout  $\tau \in (0, \delta)$ ,

$$\rho'(\tau) \geq c, \quad (\text{C.7})$$

ce qui implique, sachant  $\rho''(\tau) \geq \frac{\rho'(\tau)}{a(\tau)}$  d'après (C.6) et le fait que  $a'(\tau) < 1$ , que :

$$\rho''(\tau) \geq \frac{c}{a(\tau)} \geq \frac{c}{\tau}. \quad (\text{C.8})$$

Par conséquent, puisque

$$\rho'(\tau) = \rho'(\delta) - \int_{\tau}^{\delta} \rho''(s) \, ds, \quad (\text{C.9})$$

$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \rho'(\tau) = -\infty$ , ce qui est impossible, par conséquent  $\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \rho'(\tau) = 0$  et  $\rho \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\geq 0})$ .

Considérons maintenant  $U = \rho \circ W$ . Pour tout  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  et  $e \in \mathbb{R}^{n_e}$ , puisque  $\rho \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\geq 0})$ , d'après le théorème de la valeur moyenne, il existe  $W^* \in [W(i+1, h(i, e)), W(i, e)]$  ( $W(i+1, h(i, e)) \leq W(i, e)$ ):

$$U(i+1, h(i, e)) - U(i, e) = \rho'(W^*) [W(i+1, h(i, e)) - W(i, e)], \quad (\text{C.10})$$

en invoquant (C.1) et sachant que  $\rho'$  est positive,

$$U(i+1, h(i, e)) - U(i, e) \leq -\frac{\mu}{2} \rho'(W^*) \tilde{\alpha}_3(W(i, e)), \quad (\text{C.11})$$

sachant que  $\rho'$  est également croissante sur  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  et que  $W(i+1, h(i, e)) \leq W^* \leq W(i, e)$ ,

$$U(i+1, h(i, e)) - U(i, e) \leq -\frac{\mu}{2} \rho'(W(i+1, h(i, e))) \tilde{\alpha}_3(W(i+1, h(i, e))), \quad (\text{C.12})$$

puisque  $\rho'(\tau) = \frac{2}{a(\tau)} \rho(\tau)$  pour  $\tau \in \mathbb{R}_{>0}$  et  $\rho'(0) = 0$ ,

$$U(i+1, h(i, e)) - U(i, e) \leq -\frac{\mu}{a(W(i+1, h(i, e)))} U(i+1, h(i, e)) \tilde{\alpha}_3(W(i+1, h(i, e))),$$

d'après la définition de  $a$ ,  $a(\tau) \leq \tilde{\alpha}_3(\tau)$  pour  $\tau \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , donc

$$U(i+1, h(i, e)) - U(i, e) \leq -\mu U(i+1, h(i, e)).$$

En conséquence, pour  $\lambda = \frac{1}{1+\mu} \in (0, 1)$ ,

$$U(i+1, h(i, e)) \leq \lambda U(i, e).$$

La preuve se conclut en remarquant que, puisque  $\rho \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\geq 0})$ ,  $U$  hérite des propriétés de continuité de  $W$ .  $\square$

## Annexe D

# Théorèmes du petit gain pour des systèmes paramétrés

Dans cette annexe, des théorèmes du petit gain sont développés à partir des travaux de [184]. Deux types d'interconnexions sont étudiés : celles dites « classiques » entre deux sous-systèmes vérifiant des propriétés de type stabilité entrée-état, d'autres plus atypiques puisque trois sous-systèmes sont interconnectés, l'un d'eux ne satisfaisant que des propriétés de type entrée-bornée-état-borné. De plus, pour la première fois à notre connaissance des théorèmes du petit gain sont présentés pour des systèmes paramétrés en temps continu et explicitement prouvés (un théorème est bien proposé sous des conditions différentes des nôtres dans [191] mais sans sa preuve). A noter que l'interconnexion de systèmes paramétrés discrets est analysé à l'aide d'un théorème du petit gain dans [111] basé sur la construction d'une fonction de Lyapunov pour le système global.

Ces résultats sont utilisés dans ce mémoire pour analyser la stabilité des observateurs émuloés pour les NCS. Leur portée s'avère toutefois plus générale. Nous montrons ainsi dans [163] qu'ils peuvent être appliqués pour la stabilisation semiglobale pratique asymptotique de classes de systèmes non linéaires ainsi que pour la commande et la poursuite de trajectoires pour les systèmes à données échantillonnées.

Cette annexe est organisée de la façon suivante. Des définitions et résultats préliminaires sont présentés dans §D.1, fournissant des versions locales de certaines propriétés de [121, 184]. Des théorèmes du petit gain sont ensuite développés et prouvés dans §D.2, puis étendus aux systèmes paramétrés dans §D.3.

## D.1 Définitions et résultats préliminaires

Considérons le système :

$$\dot{x} = f(t,x,u) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (\text{D.1})$$

$$y = h(t,x,u) \quad (\text{D.2})$$

$$x(t_i^+) = g(t_i, x(t_i), u(t_i)), \quad (\text{D.3})$$

où  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  est l'état,  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  la sortie,  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  l'entrée,  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n_x+n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$  est continue en  $x$  et  $u$  et continue par morceaux en  $t$ ,  $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n_x+n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$  est continue,  $n_x, n_u, n_y \in \mathbb{Z}_{>0}$ . La séquence de sauts  $\{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{>0}}$  vérifie :

$$v \leq t_{i+1} - t_i \leq \tau, \quad (\text{D.4})$$

avec  $\tau \in [v, \infty)$  et  $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  est l'instant initial.

**Remarque D.1.1** *Nous avons choisi de considérer une classe de systèmes hybrides qui comprend celles étudiées dans la Partie II. Les résultats de cette annexe s'appliquent directement aux systèmes dont les dynamiques sont uniquement continues [163].*

Cette section a pour but d'obtenir un résultat technique (Proposition D.1.3) qui nous permettra de conclure dans la preuve des théorèmes du petit gain. Une série de définitions, lemmes et propositions nécessaires à l'obtention dudit résultat sont maintenant énoncés.

**Définition D.1.1** *Soient  $\mu \in \mathcal{K}$ ,  $c, \Delta \in \mathbb{R}_{>0}$ , le système (D.1)-(D.3) est dit  $(\mu, c, \Delta)$ -uniformément pratiquement stable entrée-sortie<sup>1</sup> si les conditions suivantes sont vérifiées :*

- (i) [stabilité  $(\mu, c, \Delta)$ -uniforme pratique] *il existe  $\delta \in \mathcal{K}_\infty$  telle que, pour tout  $\varepsilon \in (0, \delta^{-1}(\Delta))$ ,  $x(t_0) \in \mathbb{R}^{n_x}$  et  $u \in \mathcal{L}_\infty^{n_u}$  avec  $\max\{|x(t_0)|, \|u\|_\infty\} < \delta(\varepsilon)$  :*

$$|y(t)| \leq \max\{\varepsilon, \mu(\|u\|_{[t_0, t]}), c\} \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad (\text{D.5})$$

*lorsque  $\Delta = \infty$ , le système (D.1)-(D.3) est  $(\mu, c)$ -uniformément pratiquement stable ;*

- (ii) [attractivité  $(\mu, c, \Delta)$ -uniforme pratique] *pour tout  $r \in (0, \Delta)$ ,  $\varepsilon \in (c, \infty)$ , il existe  $T(r, \varepsilon) \in \mathbb{R}_{>0}$  tel que pour tout  $x(t_0) \in \mathbb{R}^{n_x}$  et  $u \in \mathcal{L}_\infty^{n_u}$  avec  $\max\{|x(t_0)|, \|u\|_\infty\} < r$ , pour tout  $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  :*

$$|y(t)| \leq \max\{\varepsilon, \mu(\|u\|_{[t_0, t]})\} \quad \forall t \in [t_0 + T(r, \varepsilon), \infty), \quad (\text{D.6})$$

*lorsque  $\Delta = \infty$ , le système (D.1)-(D.3) est  $(\mu, c)$ -uniformément pratiquement attractif.*

Le lemme ci-dessous découle directement du Lemme 3.1 dans [121].

**Lemme D.1.1** *Soient  $\Delta \in \mathbb{R}_{>0}$  et  $\Phi : [0, \Delta) \times [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  tels que, pour tout  $r \in (0, \Delta)$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ , il existe  $\bar{T}(r, \varepsilon)$  tel que, pour tout  $s \in [0, r)$ ,  $t \geq t_0 + \bar{T}(r, \varepsilon)$ ,  $\Phi(s, t) < \varepsilon$ . Alors, il existe  $T : (0, \Delta) \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  qui satisfait les propriétés suivantes :*

- (i) *pour tout  $r \in (0, \Delta)$ ,  $T(r, \cdot) : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  est continue, strictement décroissante et bijective de  $\mathbb{R}_{>0}$  dans  $\mathbb{R}_{>0}$  ;*

---

1. L'entrée et la sortie sont respectivement  $u$  et  $y$  dans cette section.

(ii) pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $T(\cdot, \varepsilon)$  est strictement croissante sur  $(0, \Delta)$  ;  
telle que pour tout  $r \in (0, \Delta)$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $s \in [0, r)$  et  $t \geq t_0 + T(r, \varepsilon)$ ,  $\Phi(s, t) < \varepsilon$ .

**Preuve abrégée.** La preuve est la même que celle du Lemme 3.1 dans [121]. En effet, en définissant, pour  $r \in (0, \Delta)$  et  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ , l'ensemble :

$$\mathcal{A}(r, \varepsilon) = \{T \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \forall s \in [0, r) \forall t \geq t_0 + T \quad \Phi(s, t) < \varepsilon\}, \quad (\text{D.7})$$

et  $\bar{T}(r, \varepsilon) = \inf \{\mathcal{A}(r, \varepsilon)\}$ ,  $T(r, \varepsilon) = \frac{2}{\varepsilon} \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\varepsilon} \bar{T}(r, s) ds + \frac{r}{\varepsilon}$ , les conditions (i) et (ii) sont satisfaites, en invoquant les mêmes arguments que dans [121].  $\square$

La proposition suivante est une variation de la Proposition A.1 dans [184].

**Proposition D.1.1** Soient  $\Delta \in \mathbb{R}_{>0}$  et  $\Phi : [0, \Delta) \times [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  tels que :

- (i) pour tout  $r \in (0, \Delta)$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ , il existe  $\bar{T}(r, \varepsilon)$  tel que, pour tout  $s \in [0, r)$  et  $t \geq t_0 + \bar{T}(r, \varepsilon)$ ,  $\Phi(s, t) < \varepsilon$  ;
  - (ii) il existe  $\delta \in \mathcal{K}_\infty$  tel que pour tout  $\varepsilon \in (0, \delta^{-1}(\Delta))$ ,  $s \in [0, \delta(\varepsilon))$  et  $t \geq t_0$ ,  $\Phi(s, t) < \varepsilon$  ;
- alors, il existe  $\beta \in \mathcal{KL}$  tel que, pour  $s \in [0, \Delta)$  et  $t \geq t_0$ ,  $\Phi(s, t) < \beta(s, t - t_0)$ .

**Preuve.** La preuve suit les mêmes lignes que la seconde partie de la preuve de la Proposition 2.5 dans [121]. Soit  $\Delta \in \mathbb{R}_{>0}$  et définissons  $\varphi = \delta^{-1} \in \mathcal{K}_\infty$ . Ainsi, d'après (ii), pour tout  $s \in [0, \Delta)$  et  $t \in [t_0, \infty)$ ,

$$\Phi(s, t) < \delta^{-1}(s) = \varphi(s). \quad (\text{D.8})$$

Puisque la condition (i) est vérifiée, le Lemme D.1.1 est utilisé pour construire la fonction  $T$ . Soit  $\psi(r, \cdot) = T^{-1}(r, \cdot)$  pour tout  $r \in (0, \Delta)$ , qui hérite des propriétés suivantes de  $T$  :

- pour tout  $r \in (0, \Delta)$ ,  $\psi(r, \cdot) : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  est continue, bijective de  $\mathbb{R}_{>0}$  dans  $\mathbb{R}_{>0}$ , et strictement décroissante, de plus, on définit  $\psi(r, 0) = \infty$  en accord avec le fait que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \psi(r, t) = \infty$  ;
- $\psi(\cdot, t)$  est strictement croissante sur  $(0, \Delta)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_{>0}$ .

**Fait D.1.1** Pour tout  $r \in (0, \Delta)$ ,  $s \in [0, r)$ ,  $t \geq t_0$ ,  $\Phi(s, t) \leq \psi(r, t - t_0)$ .

*Preuve du fait.* La preuve est la même que dans [121], mais nous avons choisi de la présenter avec nos notations. De par la définition de  $T$ , pour tout  $r \in (0, \Delta)$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $s \in [0, r)$  et  $t \geq t_0 + T(r, \varepsilon)$  :

$$\Phi(s, t) < \varepsilon. \quad (\text{D.9})$$

En remarquant que  $t - t_0 = T(r, \psi(r, t - t_0))$  si  $t - t_0 > 0$ , et que  $\psi(r, \cdot)$  est une bijection de  $\mathbb{R}_{>0}$  dans  $\mathbb{R}_{>0}$ , il s'en suit d'après (D.9) que, pour tout  $r \in (0, \Delta)$  et  $s \in [0, r)$ ,  $t \in (t_0, \infty)$  :

$$\Phi(s, t) < \psi(r, t - t_0). \quad (\text{D.10})$$

En notant que  $\psi(r,0) = \infty$ , l'inégalité désirée est alors assurée pour  $t = t_0$ .  $\square$

Soit  $\tilde{\psi}(r,t) = \min \{\varphi(r), \psi(r,t)\}$  pour  $r \in (0,\Delta)$  et  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . On remarque que  $\tilde{\psi}$  est décroissante en  $t$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\psi}(s,t) = 0$  ( $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(s,t) = 0$  puisque  $\psi(r,\cdot)$  est une bijection strictement décroissante de  $\mathbb{R}_{>0}$  dans  $\mathbb{R}_{>0}$ ). On obtient, d'après (D.8) et le Fait D.1.1, que pour tout  $r \in (0,\Delta)$ ,  $s \in [0,r)$ ,  $t \geq t_0$  :

$$\Phi(s,t) \leq \tilde{\psi}(r,t-t_0), \quad (\text{D.11})$$

par conséquent, d'après (D.8), (D.11) et en prolongeant par continuité  $\tilde{\psi}$  sur  $[0,\Delta] \times [t_0,\infty)$  par  $\tilde{\psi}(\Delta,t-t_0) = \lim_{r \rightarrow \Delta^-} \tilde{\psi}(r,t-t_0) \in \mathbb{R}_{>0}$ , (si  $\psi(\cdot,t)$  tend vers l'infini en  $\Delta$ ,  $\varphi$  prend bien une valeur constante strictement positive puisque elle est de classe  $\mathcal{K}_\infty$ ) et  $\tilde{\psi}(0,t-t_0) = 0$  (puisque  $\psi$  est positive et que  $\varphi(0) = 0$ ) on a :

$$\Phi(s,t) \leq \sqrt{\phi(s)} \sqrt{\tilde{\psi}(r,t-t_0)} \leq \sqrt{\phi(s)} \sqrt{\tilde{\psi}(\Delta,t-t_0)}. \quad (\text{D.12})$$

Soit  $\beta(s,t) = \sqrt{\phi(s)} \sqrt{\tilde{\psi}(\Delta,t)}$ , pour  $s \in [0,\Delta)$  et  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , on peut voir que :

- pour tout  $s \in [0,\Delta)$ ,  $\beta(s,\cdot)$  est continue, décroissante et  $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(s,t) = 0$  (comme  $\tilde{\psi}(s,\cdot)$  est décroissante et  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\psi}(s,t) = 0$ ) ;
- pour tout  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $\beta(\cdot,t)$  est continue, strictement croissante sur  $[0,\Delta)$  et s'annule en l'origine.

De cette manière,  $\beta \in \mathcal{KL}$ , ce qui clôt la preuve.  $\square$

Le résultat suivant provient du Lemma A.2 dans [184].

**Lemme D.1.2** Soient  $\Delta, c \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $\delta \in \mathcal{K}_\infty$ ,  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  et  $T : (0,\Delta) \times (c,\infty) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  qui satisfait :

- (i)  $T(\cdot,\varepsilon)$  est croissante pour tout  $\varepsilon \in (c,\infty)$  ;
- (ii)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow c^-} T(r,\varepsilon) = \infty$ , pour tout  $r \in (0,\Delta)$  ;

alors, pour tout  $\bar{\eta} > 1$ , il existe  $\beta \in \mathcal{KL}$  tel que pour tout  $r \in (0,\Delta)$ ,  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , il existe  $\varepsilon \in A_T(r,t) = \{\eta \in (c,\infty) : T(r,\eta) \leq t\} \cup \{\infty\}$  tel que

$$\min \{\varepsilon - \bar{\eta}c, \delta^{-1}(r)\} \leq \beta(r,t). \quad (\text{D.13})$$

**Preuve abrégée.** La preuve se déduit de celle du Lemma A.2 dans [184]. Soit  $\bar{\eta} > 1$ . On peut montrer que pour tout  $r \in (0,\Delta)$  et  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $\inf\{A_T(r,t)\} > c$ , la fonction suivante est définie, pour  $r \in (0,\Delta)$  et  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,

$$\varphi(r,t) = \min \{\inf\{A_T(r,t)\} - c, \delta^{-1}(r)\}, \quad (\text{D.14})$$

avec  $\varphi(0,t) = 0$  et  $\varphi(r,t) = \delta^{-1}(r)$  tant que  $\inf\{A_T(r,t)\} = \infty$ . On peut alors montrer que  $\varphi$  vérifie les conditions (i) et (ii) de la Proposition D.1.1. Ainsi il existe  $\bar{\beta} \in \mathcal{KL}$  tel que, pour tout  $r \in (0,\Delta)$ ,  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  :

$$\varphi(r,t) \leq \bar{\beta}(r,t). \quad (\text{D.15})$$

Soit  $\beta = \bar{\eta}\bar{\beta}$ , pour  $r \in (0, \Delta)$  et  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $\inf\{A_T(r, t)\} \in (0, \infty]$ .

Si  $\min\{\inf\{A_T(r, t)\} - c, \delta^{-1}(r)\} = \inf\{A_T(r, t)\}$ , alors il existe  $\varepsilon \in A_T(r, t)$  tel que  $\varepsilon < \bar{\eta} \inf\{A_T(r, t)\}$ . D'après le fait suivant

$$\min\{\inf\{A_T(r, t)\} - c, \delta^{-1}(r)\} \leq \bar{\beta}(r, t), \quad (\text{D.16})$$

et puisque  $\varepsilon - \bar{\eta}c < \bar{\eta} \inf\{A_T(r, t)\} - \bar{\eta}c$ , (D.13) est obtenu. D'autre part, si  $\min\{\inf\{A_T(r, t)\} - c, \delta^{-1}(r)\} = \delta^{-1}(r)$ , puisque  $\delta^{-1}(r) \leq \bar{\beta}(r, t)$ , (D.13) est vérifiée.  $\square$

La proposition suivante offre une caractérisation de la stabilité entrée-sortie  $(\mu, c, \Delta)$ -uniforme et pratique à l'aide de fonctions de comparaison.

**Proposition D.1.2** *Si le système (D.1)-(D.3) est  $(\mu, c, \Delta)$ -uniformément pratiquement stable entrée-sortie, alors, pour tout  $\eta > 1$ , il existe  $\beta \in \mathcal{KL}$  tel que pour tout  $x(t_0) \in \mathbb{R}^{n_x}$  et  $u \in \mathcal{L}_{\infty}^{n_u}$  avec  $\max\{|x(t_0)|, \|u\|_{\infty}\} < \Delta$ ,*

$$|y(t)| \leq \max\{\beta(|x(t_0)|, t - t_0), \mu(\|u\|_{[t_0, t]}), \eta c\} \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (\text{D.17})$$

**Preuve abrégée.** La preuve suit celle de la Proposition 2.7 dans [184]. Soit  $\eta > 1$ ,  $\bar{\eta} \in (1, \eta)$ , définissons  $\nu = \frac{\eta}{\bar{\eta}} - 1 \in \mathbb{R}_{>0}$ . Soit  $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $r = |x(t_0)| < \Delta$ ,  $u \in \mathcal{L}_{\infty}^{n_u}$  avec  $\|u\|_{\infty} < \Delta$ , puisque le système (D.1)-(D.3) est  $(\mu, c, \Delta)$ -uniformément pratiquement stable, on a, pour tout  $t \in [t_0, \infty)$ ,

$$|y(t)| \leq \max\{\delta^{-1}(r), \mu(\|u\|_{[t_0, t]}), c\}, \quad (\text{D.18})$$

d'autre part, puisque le système (D.1)-(D.3) est  $(\mu, c, \Delta)$ -uniformément pratiquement attractif, il existe  $\bar{T} : (0, \Delta) \times (c, \infty) \rightarrow [t_0, \infty)$  tel que pour tout  $\varepsilon \in (c, \infty)$ ,  $t \geq t_0 + \bar{T}(r, \varepsilon)$ ,

$$|y(t)| \leq \max\{\varepsilon, \mu(\|u\|_{[t_0, t]})\}. \quad (\text{D.19})$$

Soit, pour  $(r, \varepsilon) \in (0, \Delta) \times (c, \infty)$ ,

$$T(r, \varepsilon) = \frac{r}{\varepsilon - c} + \inf\{\bar{T}(r', \varepsilon') : r' \geq r \text{ et } \varepsilon' \in (c, \varepsilon)\} \quad (\text{D.20})$$

qui est croissante en  $r$  pour tout  $\varepsilon \in (c, \infty)$  et  $\lim_{\varepsilon \rightarrow c^-} T(r, \varepsilon) = \infty$  pour tout  $r \in (0, \Delta)$  qui, ainsi, satisfait les conditions (i) et (ii) du Lemme D.1.2. De cette manière, soit  $t \in [t_0, \infty)$  et prenons  $\varepsilon \in A_T(r, t - t_0)$ , où  $A_T(r, t - t_0)$  est défini au Lemme D.1.2, on a :

$$|y(t)| \leq \max\{\varepsilon, \mu(\|u\|_{[t_0, t]})\}, \quad (\text{D.21})$$

d'après le Lemme D.1.2,

$$\min\{\varepsilon - \bar{\eta}c, \delta^{-1}(r)\} \leq \beta(r, t - t_0). \quad (\text{D.22})$$

Dans le cas où  $\varepsilon - \bar{\eta}c < \delta^{-1}(r)$ , nécessairement  $\varepsilon < \infty$  et d'après (D.21),

$$|y(t)| \leq \max\{\varepsilon, \mu(\|u\|_{[t_0, t]})\} \leq \max\{\bar{\eta}c + \beta(r, t - t_0), \mu(\|u\|_{[t_0, t]})\}. \quad (\text{D.23})$$

D'autre part, si  $\varepsilon - \bar{\eta}c > \delta^{-1}(r)$ , alors  $\delta^{-1}(r) \leq \beta(r, t - t_0)$  et, d'après (D.18),

$$|y(t)| \leq \max \{ \beta(r, t - t_0), \mu(\|u\|_{[t_0, t]}), c \}. \quad (\text{D.24})$$

En combinant (D.23), (D.24), et en invoquant la Proposition A.1.2 :

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \max \{ (1 + \nu^{-1})\beta(r, t - t_0), \mu(\|u\|_{[t_0, t]}), (1 + \nu)\bar{\eta}c \} \\ &= \max \{ \bar{\beta}(|x(t_0)|, t - t_0), \mu(\|u\|_{[t_0, t]}), \eta c \}, \end{aligned}$$

où  $\bar{\beta} = (1 + \nu^{-1})\beta \in \mathcal{KL}$ . □

La proposition ci-dessous est une version locale du Théorème 1 dans [184]. C'est ce résultat qui nous permettra de clore les preuves de la section suivante.

**Proposition D.1.3** *Supposons qu'il existe  $\beta \in \mathcal{KL}$ ,  $\gamma^y, \gamma^u, \sigma^t, \sigma^x, \sigma^y, \sigma^u \in \mathcal{K}$ ,  $c_x, c_y, m, M, \Delta \in \mathbb{R}_{>0}$  tels que, pour tout  $x(t_0) \in \mathbb{R}^{n_x}$  et  $u \in \mathcal{L}_{n_u}^\infty$  avec  $\max \{ |x(t_0)|, \|u\|_\infty \} < \Delta$ , les solutions de (D.1)-(D.3) vérifient, pour tout  $t \geq t_0 \geq 0$  :*

$$|y(t)| \leq \max \{ \beta(|x(t_0)|, t - t_0), \gamma^y(\|y\|_{[t_0, t]}), \gamma^u(\|u\|_{[t_0, t]}), c_y \} \quad (\text{D.25})$$

$$|y(t)| \leq M \quad (\text{D.26})$$

$$|x(t)| \leq \max \{ \sigma^t(t - t_0), \sigma^x(|x(t_0)|), \sigma^y(\|y\|_{[t_0, t]}), \sigma^u(\|u\|_{[t_0, t]}), c_x \}, \quad (\text{D.27})$$

et

$$\gamma^y(s) < s \quad \forall s \in [m, M], \quad (\text{D.28})$$

avec

$$c = \max \{ m, c_y \} < M, \quad (\text{D.29})$$

soient

$$\tilde{\gamma}^u(s) = \max \{ \beta(\sigma^y \circ \gamma^u(s), 0), \beta(\sigma^u(s), 0), \gamma^u(s) \} \quad \forall s \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad (\text{D.30})$$

$$\bar{\Delta} \in (0, \Delta] \text{ avec } \max \{ \beta(\bar{\Delta}, 0), \tilde{\gamma}^u(\bar{\Delta}) \} < M, \quad (\text{D.31})$$

alors, pour tout  $\eta \in (1, \infty)$ , il existe  $\tilde{\beta} \in \mathcal{KL}$  tel que pour tout  $x(t_0) \in \mathbb{R}^{n_x}$  et  $u \in \mathcal{L}_{n_u}^\infty$  avec  $\max \{ |x(t_0)|, \|u\|_\infty \} < \bar{\Delta}$  :

$$|y(t)| \leq \max \{ \tilde{\beta}(|x(t_0)|, t - t_0), \tilde{\gamma}^u(\|u\|_{[t_0, t]}), \eta c \} \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (\text{D.32})$$

**Preuve.** La preuve suit les mêmes étapes que celle du Théorème 1 dans [184]. La propriété de stabilité (D.32) est prouvée en invoquant la Proposition D.1.2. Nous allons donc démontrer que le système (D.1)-(D.3) est  $(\tilde{\gamma}^u, c, \bar{\Delta})$ -uniformément pratiquement stable entrée-sortie.

*Etape 1. Stabilité  $(\tilde{\gamma}^u, c, \bar{\Delta})$ -uniforme pratique.*

Soient  $\vartheta(s) = \beta^{-1}(s, 0)$  et  $\delta(s) = \min \{ \vartheta^{-1}(s), s \}$  pour  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  (avec la convention consistante  $\vartheta^{-1}(s) = \infty$  si  $s \geq \sup_{\varsigma \in [0, \infty)} \beta(\varsigma, 0)$ ), nous savons que  $\delta \in \mathcal{K}_\infty$ . Soient  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,

$\varepsilon \in (0, \delta^{-1}(\Delta))$ ,  $x(t_0) \in \mathbb{R}^{n_x}$  et  $u \in \mathcal{L}_\infty^{n_u}$  avec  $\max\{|x(t_0)|, \|u\|_\infty\} < \delta(\varepsilon)$ . Premièrement, on remarque que, d'après (D.28) et le fait que  $\gamma^y \in \mathcal{K}$ ,

$$\begin{cases} \gamma^y(s) \leq \gamma^y(m) < m & \text{si } s \in [0, m) \\ \gamma^y(s) < s & \text{si } s \in [m, M]. \end{cases} \quad (\text{D.33})$$

On en déduit, d'après (D.25), (D.26), (D.29) et (D.33), que :

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \max\{\beta(|x(t_0)|, 0), \gamma^y(\|y\|_{[t_0, t)}), \gamma^u(\|u\|_{[t_0, t)}), c_y\} \\ \|y\|_{[t_0, t)} &\leq \max\{\beta(\delta(\varepsilon), 0), \gamma^u(\|u\|_{[t_0, t)}), c\}, \end{aligned} \quad (\text{D.34})$$

en remarquant que,

$$\begin{aligned} \left(\varepsilon \in [0, \sup_{\varsigma \in [0, \infty)} \beta(\varsigma, 0))\right) &\Rightarrow \left(\beta(\delta(\varepsilon), 0) \leq \beta(\vartheta^{-1}(\varepsilon), 0) \leq \varepsilon\right) \\ \left(\varepsilon \geq \sup_{\varsigma \in [0, \infty)} \beta(\varsigma, 0)\right) &\Rightarrow \left(\beta(\delta(\varepsilon), 0) \leq \sup_{\varsigma \in [0, \infty)} \beta(\varsigma, 0) \leq \varepsilon\right), \end{aligned}$$

il s'en suit

$$|y(t)| \leq \|y\|_{[t_0, t)} \leq \max\{\varepsilon, \gamma^u(\|u\|_{[t_0, t)}), c\}.$$

Ainsi, le système (D.1)-(D.3) est  $(\tilde{\gamma}^u, c, \Delta)$ -uniformément pratiquement stable et donc  $(\tilde{\gamma}^u, c, \bar{\Delta})$ -uniformément pratiquement stable (puisque  $\bar{\Delta} \leq \Delta$ ) d'après la Définition D.1.1.

*Etape 2. Attractivité  $(\tilde{\gamma}^u, c, \bar{\Delta})$ -uniforme pratique.*

Soient  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $r \in (0, \bar{\Delta})$ ,  $\varepsilon \in (c, \infty)$ ,  $x(t_0) \in \mathbb{R}^{n_x}$  et  $u \in \mathcal{L}_\infty^{n_u}$  avec  $\max\{|x(t_0)|, \|u\|_\infty\} < r$ . Parallèlement à (D.34),

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \max\{\beta(|x(t_0)|, 0), \gamma^y(\|y\|_{[t_0, t)}), \gamma^u(\|u\|_{[t_0, t)}), c_y\} \\ \|y\|_{[t_0, t)} &\leq \max\{\beta(r, 0), \gamma^u(\|u\|_{[t_0, t)}), c\}. \end{aligned} \quad (\text{D.35})$$

Plusieurs suites sont maintenant définies :  $(T_i^r)_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ ,  $(\hat{T}_i^r)_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$  et  $(M_i^r)_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ . Soient  $T_0^r = 0$ ,  $M_0^r = r$ ,  $T_1^r > 0$  est choisi suffisamment grand tel que  $\beta(M_0^r, T_1^r) \leq \gamma^y(\beta(r, 0))$ . Soit  $\hat{\sigma}(s) = \max\{\sigma^x(s), \sigma^y(\beta(s, 0))\}$  pour  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $M_i^r$  est défini par, pour  $i \in \mathbb{Z}_{> 0}$  :

$$M_i^r = \max\{\hat{\sigma}(r), \sigma^t(T_0^r + \dots + T_i^r), \sigma^y(c), c_x\}. \quad (\text{D.36})$$

D'autre part,  $T_{i+1}^r > 0$  est choisi suffisamment grand tel que

$$\beta(M_i^r, T_{i+1}^r) \leq (\gamma^y)^{i+1}(\beta(r, 0)), \quad (\text{D.37})$$

et  $\hat{T}_i^r = T_0^r + \dots + T_i^r$ , pour  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .



De par (D.27) et (D.35), on a, pour tout  $t \in [t_0, \infty)$  :

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \max \left\{ \sigma^t(t - t_0), \sigma^x(r), \sigma^y(\beta(r, 0)), \sigma^y(\gamma^u(\|u\|_{[t_0, t]})), \sigma^y(c), \right. \\ &\quad \left. \sigma^u(\|u\|_{[t_0, t]}), c_x \right\} \\ &\leq \max \left\{ \sigma^t(t - t_0), \hat{\sigma}(r), \sigma^y(\gamma^u(\|u\|_{[t_0, t]})), \sigma^u(\|u\|_{[t_0, t]}), \sigma^y(c), c_x \right\}, \end{aligned} \quad (\text{D.38})$$

par définition des  $M_i^r$  et  $\hat{T}_i^r$ , on déduit que :

$$|x(t_0 + \hat{T}_i^r)| \leq \max \left\{ M_i^r, \sigma^y(\gamma^u(\|u\|_{[t_0, t]})), \sigma^u(\|u\|_{[t_0, t]}) \right\}. \quad (\text{D.39})$$

Le fait ci-dessous nous permet de déduire la propriété d'attractivité désirée.

**Fait D.1.2** *Pour tout  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , les solutions de (D.1)-(D.3) satisfont :*

$$|y(t)| \leq \max \left\{ (\gamma^y)^i(\beta(r, 0)), \tilde{\gamma}^u(\|u\|_{[t_0, t]}), c \right\} \quad \forall t \in [t_0 + \hat{T}_i^r, \infty). \quad (\text{D.40})$$

*Preuve du fait.* La preuve est réalisée par récurrence sur  $i$ . Premièrement, notons que pour  $i = 0$ , (D.40) est assuré d'après (D.35). Supposons que (D.40) soit satisfait pour  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  i.e. pour  $t \in [t_0 + \hat{T}_i^r, \infty)$  :

$$|y(t)| \leq \max \left\{ (\gamma^y)^i(\beta(r, 0)), \tilde{\gamma}^u(\|u\|_{[t_0, t]}), c \right\}. \quad (\text{D.41})$$

Pour  $t \in [t_0 + \hat{T}_{i+1}^r, \infty)$ , d'après (D.25), (D.37) et (D.39),

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \max \left\{ \beta(|x(t_0 + \hat{T}_i^r)|, t - (t_0 + \hat{T}_i^r)), \gamma^y(\|y\|_{[t_0 + \hat{T}_i^r, t]}), \gamma^u(\|u\|_{[t_0 + \hat{T}_i^r, t]}), c_y \right\} \\ &\leq \max \left\{ \beta(M_i^r, t - (t_0 + \hat{T}_i^r)), \tilde{\gamma}^u(\|u\|_{[t_0, t]}), \gamma^y(\|y\|_{[t_0 + \hat{T}_i^r, t]}), c_y \right\} \\ &\leq \max \left\{ (\gamma^y)^{i+1}(\beta(r, 0)), \tilde{\gamma}^u(\|u\|_{[t_0, t]}), \gamma^y(\|y\|_{[t_0 + \hat{T}_i^r, t]}), c_y \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.42})$$

Deux cas doivent être distingués.

$$\text{Cas 1: } \gamma^y(\|y\|_{[t_0 + \hat{T}_i^r, t]}) < \max \left\{ (\gamma^y)^{i+1}(\beta(r, 0)), \tilde{\gamma}^u(\|u\|_{[t_0, t]}), c_y \right\}.$$

Pour  $t \in [t_0 + \hat{T}_{i+1}^r, \infty)$ ,

$$|y(t)| \leq \max \left\{ (\gamma^y)^{i+1}(\beta(r, 0)), \tilde{\gamma}^u(\|u\|_{[t_0, t]}), c_y \right\}$$

et (D.40) est satisfait puisque  $c_y \leq c$ .

$$\text{Cas 2: } \gamma^y(\|y\|_{[t_0 + \hat{T}_i^r, t]}) \geq \max \left\{ (\gamma^y)^{i+1}(\beta(r, 0)), \tilde{\gamma}^u(\|u\|_{[t_0, t]}), c_y \right\}.$$

D'après (D.41) et (D.42), pour  $t \in [t_0 + \hat{T}_{i+1}^r, \infty)$ ,

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \gamma^y(\|y\|_{[t_0 + \hat{T}_i^r, t]}) \\ &\leq \gamma^y \left( \max \left\{ (\gamma^y)^i(\beta(r, 0)), \tilde{\gamma}^u(\|u\|_{[t_0, t]}), c \right\} \right) \\ &= \max \left\{ (\gamma^y)^{i+1}(\beta(r, 0)), \gamma^y \left( \tilde{\gamma}^u(\|u\|_{[t_0, t]}) \right), \gamma^y(c) \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.43})$$

puisque  $\|u\|_{[t_0, \infty)} < \bar{\Delta}$ , on a  $\tilde{\gamma}^u(\|u\|_{[t_0, \infty)}) < M$ , et en invoquant (D.29) et (D.33), on obtient :

$$|y(t)| \leq \|y\|_{[t_0, t)} \leq \max \left\{ (\gamma^y)^{i+1}(\beta(r, 0)), \tilde{\gamma}^u(\|u\|_{[t_0, t)}), c \right\}, \quad (\text{D.44})$$

par conséquent (D.40) est satisfait.  $\square$

On peut voir que  $\limsup_{i \rightarrow \infty} (\gamma^y)^i(\beta(r, 0)) \leq m$ , puisque  $\beta(r, 0) \leq \beta(\bar{\Delta}, 0) < M$  et (D.28), (D.33) sont vérifiés. En conséquence, il existe toujours  $i_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tel que  $(\gamma^y)^{i_0}(\beta(r, 0)) < \varepsilon$ , puisque  $\varepsilon > c \geq m$ . Ainsi, soit  $T(r, \varepsilon) = \hat{T}_{i_0}^r$ , d'après le Fait D.1.2, on obtient pour tout  $t \in [t_0 + T(\varepsilon, r), \infty)$  :

$$|y(t)| \leq \max \left\{ (\gamma^y)^{i_0}(\beta(r, 0)), \tilde{\gamma}^u(\|u\|_{[t_0, t)}), c \right\} \leq \max \left\{ \varepsilon, \tilde{\gamma}^u(\|u\|_{[t_0, t)}), c \right\}. \quad (\text{D.45})$$

Le système (D.1)-(D.3) est  $(\tilde{\gamma}^u, c, \bar{\Delta})$ -uniformément pratiquement attractif d'après la Définition D.1.1.

Puisque le système (D.1)-(D.3) est  $(\tilde{\gamma}^u, c, \Delta)$ -uniformément pratiquement stable et attractif, la preuve se conclut en invoquant la Proposition D.1.2.  $\square$

## D.2 Théorèmes du petit gain pour des systèmes non-paramétrés

Soient les systèmes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, u_1) \\ x_1(t_i^+) = g_1(t_i, x_1(t_i), x_2(t_i), u_1(t_i)) \end{cases} \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (\text{D.46})$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = f_2(t, x_2, x_1, u_2) \\ x_2(t_i^+) = g_2(t_i, x_2(t_i), x_1(t_i), u_2(t_i)), \end{cases} \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (\text{D.47})$$

où  $x_1 \in \mathbb{R}^{n_{x_1}}$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}^{n_{x_2}}$ ,  $f_1 : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n_{x_1} + n_{x_2} + n_{u_1}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{x_1}}$  et  $f_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n_{x_2} + n_{x_1} + n_{u_2}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{x_2}}$  sont continues par morceaux en  $t$  et continues en  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $u_1$  ou  $u_2$ ,  $g_1 : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n_{x_1} + n_{x_2} + n_{u_1}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{x_1}}$  et  $g_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n_{x_2} + n_{x_1} + n_{u_2}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{x_2}}$  sont localement bornées telles que pour tout  $(t, x_1, x_2, u_1, u_2) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n_{x_1} + n_{x_2} + n_{u_1} + n_{u_2}}$  :

$$\begin{aligned} |g_1(t, x_1, x_2, u_1)| &\leq |x_1| \\ |g_2(t, x_2, x_1, u_2)| &\leq |x_2|. \end{aligned} \quad (\text{D.48})$$

**Remarque D.2.1** *Puisque notre analyse se base sur des bornes sur les trajectoires du système et non des fonctions de Lyapunov, on pourrait croire qu'il suffirait d'énoncer nos résultats pour des systèmes continus afin d'obtenir l'équivalent pour les systèmes hybrides à l'instar de [119]. Cependant, puisque la condition du petit gain ne sera vérifiée que sur un ensemble bornée, nos preuves requièrent des propriétés de continuité des variables d'état en fonction du temps. Nous verrons que les conditions (D.48) nous permettent tout de même de conclure. On remarque que les classes de systèmes étudiées dans la Partie II les vérifient.*

Les instants de sauts  $\{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{>0}}$  vérifient, pour tout  $i \in \mathbb{Z}_{>0}$  :

$$v \leq t_i - t_{i-1} \leq \tau, \quad (\text{D.49})$$

où  $v \in \mathbb{R}_{>0}$  est une constante arbitrairement petite uniquement introduite afin d'éviter l'apparition du paradoxe de Zénon,  $\tau \in [v, \infty)$  est fixé et  $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  est l'instant initial. On définit les fonctions suivantes  $\omega_1 \in C(\mathbb{R}^{n_{x_1}}, \mathbb{R}^{n_{\omega_1}})$ ,  $\omega_2 = (\omega_2^a, \omega_2^b)$  où  $\omega_2^a \in C(\mathbb{R}^{n_{x_2}}, \mathbb{R}^{n_{\omega_2^a}})$ ,  $\omega_2^b \in C(\mathbb{R}^{n_{x_2}}, \mathbb{R}^{n_{\omega_2^b}})$  avec  $n_{\omega_1}, n_{\omega_2^a}, n_{\omega_2^b} \in \mathbb{Z}_{>0}$ , telles que

$$|\omega_1(x_1)| \leq \rho_1(|x_1|) \quad (\text{D.50})$$

$$\underline{\rho}_2(|x_2|) \leq |\omega_2(x_2)| \leq \bar{\rho}_2(|x_2|), \quad (\text{D.51})$$

où  $\rho_1, \underline{\rho}_2, \bar{\rho}_2 \in \mathcal{K}_\infty$ .

Le premier théorème considère une interconnexion classique de deux systèmes qui vérifient des propriétés de type stabilité entrée-état pour lesquels la condition du petit gain est vérifiée sur un compact qui ne comprend pas l'origine. En comparaison avec [86, 197], nous proposons des estimés de la boule de conditions initiales et de l'erreur résiduelle obtenue en fonction des bornes de ce compact,

**Théorème D.2.1** *Considérons le système (D.46)-(D.47), supposons qu'il existe  $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{KL}$ ,  $\gamma_1^{\omega_2^a}, \gamma_1^u, \gamma_2^{\omega_1}, \gamma_2^u, \alpha_1, \eta_1^t, \eta_1^{\omega_1}, \eta_1^{\omega_2^a}, \eta_1^{\omega_2^b}, \eta_1^u, \alpha_2, \eta_2^t, \eta_2^{\omega_1}, \eta_2^{\omega_2^a}, \eta_2^u \in \mathcal{K}$  tels que pour tout  $x_1(t_0) \in \mathbb{R}^{n_{x_1}}$ ,  $(x_2, u_1) \in \mathcal{L}_\infty^{n_{x_2} + n_{u_1}}$ ,  $t \geq t_0 \geq 0$ , les solutions de (D.46) vérifient :*

$$|\omega_1(x_1(t))| \leq \max \{ \beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, t - t_0), \gamma_1^{\omega_2^a}(\|\omega_2^a(x_2)\|_{[t_0, t]}), \gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0, t]}) \} \quad (\text{D.52})$$

$$|x_1(t)| \leq \max \{ \alpha_1(|x_1(t_0)|), \eta_1^t(t - t_0), \eta_1^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, t]}), \eta_1^{\omega_2^a}(\|\omega_2^a(x_2)\|_{[t_0, t]}), \eta_1^{\omega_2^b}(\|\omega_2^b(x_2)\|_{[t_0, t]}), \eta_1^u(\|u_1\|_{[t_0, t]}) \}, \quad (\text{D.53})$$

pour tout  $x_2(t_0) \in \mathbb{R}^{n_{x_2}}$ ,  $(x_1, u_2) \in \mathcal{L}_\infty^{n_{x_1} + n_{u_2}}$ ,  $t \geq t_0 \geq 0$ , les solutions de (D.47) vérifient :

$$|\omega_2^a(x_2(t))| \leq \max \{ \beta_2(|\omega_2^a(x_2(t_0))|, t - t_0), \gamma_2^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, t]}), \gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}) \} \quad (\text{D.54})$$

$$|\omega_2^b(x_2(t))| \leq \max \{ \alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|), \eta_2^t(t - t_0), \eta_2^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, t]}), \eta_2^{\omega_2^a}(\|\omega_2^a(x_2)\|_{[t_0, t]}), \eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}) \}, \quad (\text{D.55})$$

et qu'il existe  $0 < m < M$  tels que

$$\max \{ \gamma_1^{\omega_2^a} \circ \gamma_2^{\omega_1}(s), \gamma_2^{\omega_1} \circ \gamma_1^{\omega_2^a}(s) \} < s \text{ pour } s \in [m, M], \quad (\text{D.56})$$

sous la condition suivante

$$\tilde{\sigma}^m(m) < M, \quad (\text{D.57})$$

où

$$\tilde{\sigma}^m(s) = \max \{ \beta_1(s, 0), \gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(s, 0)), \beta_2(s, 0), \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(s, 0)) \}.$$

On définit les fonctions de classe  $\mathcal{K}$   $\nu^x, \nu^u$ , pour  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  :

$$\begin{aligned}\nu^x(s) &= \max \{ \beta_1(\rho_1(s), 0), \gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(\bar{\rho}_2(s), 0)), \rho_1(s), \beta_2(\bar{\rho}_2(s), 0), \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(\rho_1(s), 0)), \\ &\quad \tilde{\beta}(s, 0), s \} \\ \nu^u(s) &= \max \{ \gamma_1^u(s), \gamma_1^{\omega_2^a} \circ \gamma_2^u(s), \gamma_2^u(s), \gamma_2^{\omega_1} \circ \gamma_1^u(s), \tilde{\gamma}^u(s) \},\end{aligned}$$

où  $\tilde{\beta} \in \mathcal{KL}$ ,  $\tilde{\gamma}^u \in \mathcal{K}$  sont définies respectivement par (D.74) et (D.78), et soit  $\Delta \in \mathbb{R}_{>0}$  tel que  $\max \{ \nu^x(\Delta), \nu^u(\Delta) \} < M$ .

Alors, le système (D.46)-(D.47) est uniformément positivement complet pour tout  $(x_1(t_0), x_2(t_0)) \in \mathbb{R}^{n_{x_1} + n_{x_2}}$  et  $(u_1, u_2) \in \mathcal{L}_{\infty}^{n_{u_1} + n_{u_2}}$  avec  $\max \{ |x_1(t_0)|, |\omega_2^a(x_2(t_0))|, \|u_1\|_{\infty}, \|u_2\|_{\infty} \} < \Delta$ . De plus, pour tout  $\eta > 1$ , il existe  $\beta \in \mathcal{KL}$ ,  $\sigma \in \mathcal{K}$  telles que pour tout  $(x_1(t_0), x_2(t_0)) \in \mathbb{R}^{n_{x_1} + n_{x_2}}$  et  $(u_1, u_2) \in \mathcal{L}_{\infty}^{n_{u_1} + n_{u_2}}$  avec  $\max \{ |x_1(t_0)|, |\omega_2^a(x_2(t_0))|, \|u_1\|_{\infty}, \|u_2\|_{\infty} \} < \Delta$ , les solutions de (D.46)-(D.47) satisfont, pour tout  $t \geq t_0 \geq 0$ ,

$$\begin{aligned}\max \{ |\omega_1(x_1(t))|, |\omega_2^a(x_2(t))| \} &\leq \max \left\{ \beta(\max \{ |\omega_1(x_1(t_0))|, |\omega_2^a(x_2(t_0))| \}, t - t_0), \right. \\ &\quad \left. \sigma(\max \{ \|u_1\|_{[t_0, t]}, \|u_2\|_{[t_0, t]} \}), \delta(m) \right\}, \quad (\text{D.58})\end{aligned}$$

où  $\delta(s) = \max \{ \eta \tilde{\sigma}^m(s), \eta s \}$ , pour  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

**Preuve.** Il est tout d'abord prouvé que le système est uniformément positivement complet lorsque les conditions initiales et les entrées  $(u_1, u_2) \in \mathcal{L}_{\infty}^{n_{u_1} + n_{u_2}}$  sont convenablement majorées. La propriété de stabilité désirée est ensuite obtenue en invoquant la Proposition D.1.3.

*Etape 1. Complétude positive et majoration de  $\omega_1(x_1)$  et  $\omega_2^a(x_2)$ .*

Soient  $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $(x_1(t_0), x_2(t_0)) \in \mathbb{R}^{n_{x_1} + n_{x_2}}$  et  $(u_1, u_2) \in \mathcal{L}_{\infty}^{n_{u_1} + n_{u_2}}$  tels que

$$\max \{ |x_1(t_0)|, |\omega_2^a(x_2(t_0))|, \|u_1\|_{\infty}, \|u_2\|_{\infty} \} < \Delta, \quad (\text{D.59})$$

ce qui implique, d'après la définition de  $\Delta$ ,

$$\nu^x(\max \{ |x_1(t_0)|, |\omega_2^a(x_2(t_0))| \}) < M \quad (\text{D.60})$$

$$\nu^u(\max \{ \|u_1\|_{[t_0, \infty)}, \|u_2\|_{[t_0, \infty)} \}) < M. \quad (\text{D.61})$$

Soit  $[t_0, t_{\max})$  l'intervalle maximal d'existence de (D.46)-(D.47), où  $t_{\max} \in (t_0, \infty]$ . De par (D.52) et (D.54), on a, pour tout  $t \in [t_0, t_{\max})$  :

$$\begin{aligned}|\omega_1(x_1(t))| &\leq \max \left\{ \beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, t - t_0), \gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(|\omega_2^a(x_2(t_0))|, 0)), \right. \\ &\quad \gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, t]})), \gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]})), \\ &\quad \left. \gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0, t]}) \right\} \quad (\text{D.62})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, t)} &\leq \max \left\{ \beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, 0), \gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(|\omega_2^a(x_2(t_0))|, 0)), \right. \\ &\quad \gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, t]})), \gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]})), \\ &\quad \left. \gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0, t]}) \right\}. \quad (\text{D.63})\end{aligned}$$

Nous allons montrer par l'absurde que  $|\omega_1(x_1(t))| < M$  pour tout  $t \in [t_0, t_{\max})$ . Dans un premier temps, on remarque que  $|\omega_1(x_1(t_0))| < M$ , d'après (D.50) et (D.60). On suppose qu'il existe  $t_1 \in (t_0, t_{\max})$  tel que  $|\omega_1(x_1(t_1))| = M$ . Soit  $\bar{t} = \inf \{t \in (t_0, t_{\max}) : |\omega_1(x_1(t))| = M\}$ . De par (D.63), on a :

$$\begin{aligned} \|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, \bar{t})} = |\omega_1(x_1(\bar{t}))| &\leq \max \left\{ \beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, 0), \gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(|\omega_2^a(x_2(t_0))|, 0)), \right. \\ &\quad \gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, \bar{t})}), \gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, \bar{t})})), \\ &\quad \left. \gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0, \bar{t})}) \right\} \\ &= \max \left\{ \beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, 0), \gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(|\omega_2^a(x_2(t_0))|, 0)), \right. \\ &\quad \gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(M)), \gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, \bar{t})})), \\ &\quad \left. \gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0, \bar{t})}) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.64})$$

Notons que, d'après (D.60) et (D.61) :

$$\max \left\{ \beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, 0), \gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(|\omega_2^a(x_2(t_0))|, 0)), \gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, \bar{t})})), \gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0, \bar{t})}) \right\} < M, \quad (\text{D.65})$$

de plus, en vu de (D.56) :

$$\gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(M)) < M, \quad (\text{D.66})$$

par conséquent, d'après (D.64), (D.65), (D.66),

$$|\omega_1(x_1(\bar{t}))| < M$$

ce qui contredit le fait que  $|\omega_1(x_1(\bar{t}))| = M$ , ainsi puisque  $\omega_1(x_1)$  est continue entre deux instants de saut et d'après (D.48), pour tout  $t \in [t_0, t_{\max})$  :

$$|\omega_1(x_1(t))| < M. \quad (\text{D.67})$$

Par analogie, on peut montrer que pour tout  $t \in [t_0, t_{\max})$  :

$$|\omega_2^a(x_2(t))| < M. \quad (\text{D.68})$$

En conséquence, en invoquant (D.51), (D.55), (D.53), (D.67) et (D.68), on obtient par que  $t_{\max} = \infty$  par l'absurde et on peut montrer que le système (D.46)-(D.47) est uniformément positivement complet d'après la Définition A.2.3.

*Etape 2. Propriété (D.58).*

Nous allons démontrer que les conditions de la Proposition D.1.3 sont vérifiées. Premièrement, notons que d'après (D.56) et puisque  $\gamma_1^{\omega_2^a} \circ \gamma_2^{\omega_1} \in \mathcal{K}$  :

$$\begin{cases} \gamma_1^{\omega_2^a} \circ \gamma_2^{\omega_1}(s) \leq \gamma_1^{\omega_2^a} \circ \gamma_2^{\omega_1}(m) < m & \text{si } s \in [0, m) \\ \gamma_1^{\omega_2^a} \circ \gamma_2^{\omega_1}(s) < s & \text{si } s \in [m, M]. \end{cases} \quad (\text{D.69})$$

Ainsi, pour  $t \in [t_0, \infty)$ , on a d'après (D.62), (D.67) et (D.69) :

$$\begin{aligned} |\omega_1(x_1(t))| &\leq \max \left\{ \beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, t - t_0), \gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(|\omega_2^a(x_2(t_0))|, 0))), \right. \\ &\quad \left. \gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, t]})), \gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]})), \gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0, t]}) \right\} \\ \|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, t]} &\leq \max \left\{ \beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, 0), \gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(|\omega_2^a(x_2(t_0))|, 0))), \right. \\ &\quad \left. \gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]})), \gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0, t]}), m \right\}, \end{aligned} \quad (\text{D.70})$$

par symétrie,

$$\begin{aligned} \|\omega_2^a(x_2)\|_{[t_0, t]} &\leq \max \left\{ \beta_2(|\omega_2^a(x_2(t_0))|, 0), \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, 0))), \right. \\ &\quad \left. \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0, t]})), \gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}), m \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.71})$$

D'autre part, d'après (D.54) pour tout  $t \in [t_0, t_{\max})$  :

$$|\omega_2^a(x_2(t))| \leq \max \left\{ \beta_2(|\omega_2^a(x_2(\frac{t}{2}))|, \frac{t}{2}), \gamma_2^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[\frac{t}{2}, t]}), \gamma_2^u(\|u_2\|_{[\frac{t}{2}, t]}) \right\}, \quad (\text{D.72})$$

par conséquent d'après (D.52), (D.70), (D.71) et (D.72) :

$$\begin{aligned} |\omega_1(x_1(t))| &\leq \max \left\{ \beta_1(|\omega_1(x_1(\frac{t}{2}))|, \frac{t}{2}), \gamma_1^{\omega_2^a}(\|\omega_2^a(x_2)\|_{[\frac{t}{2}, t]}), \gamma_1^u(\|u_1\|_{[\frac{t}{2}, t]}) \right\} \\ &\leq \max \left\{ \beta_1(\beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, 0), \frac{t}{2}), \beta_1(\gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(|\omega_2^a(x_2(t_0))|, 0))), \frac{t}{2}), \right. \\ &\quad \beta_1(\gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]})), \frac{t}{2}), \beta_1(\gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0, t]}), \frac{t}{2}), \\ &\quad \beta_1(m, \frac{t}{2}), \gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(\beta_2(|\omega_2^a(x_2(t_0))|, 0), \frac{t}{2}))), \\ &\quad \gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(\gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, 0))), \frac{t}{2})), \\ &\quad \gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0, t]})), \frac{t}{2})), \gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}), \frac{t}{2})), \\ &\quad \gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(m, \frac{t}{2})), \gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[\frac{t}{2}, t]})), \gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[\frac{t}{2}, t]})), \\ &\quad \left. \gamma_1^u(\|u_1\|_{[\frac{t}{2}, t]}) \right\}. \end{aligned}$$

Un résultat analogue est vérifié par  $\omega_2^a(x_2)$ , ainsi,

$$\begin{aligned} \max \{ |\omega_1(x_1(t))|, |\omega_2^a(x_2(t))| \} &\leq \max \left\{ \tilde{\beta}(\max \{ |\omega_1(x_1(t_0))|, |\omega_2^a(x_2(t_0))| \}, t - t_0), \right. \\ &\quad \tilde{\sigma}^u(\max \{ \|u_1\|_{[t_0, t]}, \|u_2\|_{[t_0, t]} \}), \tilde{\sigma}^m(m), \\ &\quad \gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[0, t]})), \\ &\quad \left. \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^a}(\|\omega_1(x_1)\|_{[0, t]})) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{D.73})$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}(s,t) = \max \bigg\{ & \beta_1(\beta_1(s,0), \frac{t}{2}), \beta_1(\gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(s,0)), \frac{t}{2}), \gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(\beta_2(s,0), \frac{t}{2})), \\ & \gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(\gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(s,0)), \frac{t}{2})) \\ & \beta_2(\beta_2(s,0), \frac{t}{2}), \beta_2(\gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(s,0)), \frac{t}{2}), \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(\beta_1(s,0), \frac{t}{2})), \\ & \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(\gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(s,0)), \frac{t}{2})) \bigg\}, \end{aligned} \quad (\text{D.74})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^u(s) = \max \bigg\{ & \beta_1(\gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(s)), 0), \beta_1(\gamma_1^u(s), 0), \gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(s)), 0)), \\ & \gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(\gamma_2^u(s), 0)), \gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(s)), \gamma_1^u(s) \\ & \beta_2(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(s)), 0), \beta_2(\gamma_2^u(s), 0), \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(\gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(s)), 0)), \\ & \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(\gamma_1^u(s), 0)), \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(s)), \gamma_2^u(s) \bigg\}, \end{aligned} \quad (\text{D.75})$$

$$\tilde{\sigma}^m(s) = \max \{ \beta_1(s,0), \gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(s,0)), \beta_2(s,0), \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(s,0)) \}. \quad (\text{D.76})$$

Soient, pour  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,

$$\sigma^y(s) = \max \{ \gamma_1^{\omega_2^a} \circ \gamma_2^{\omega_1}(s), \gamma_2^{\omega_1} \circ \gamma_1^{\omega_2^a}(s) \} \quad (\text{D.77})$$

$$\tilde{\gamma}^u(s) = \max \{ \tilde{\beta}(\sigma^y \circ \tilde{\sigma}^u(s), 0), \tilde{\beta}(\tilde{\sigma}^u(s), 0), \tilde{\sigma}^u(s) \}. \quad (\text{D.78})$$

On constate que les conditions de la Proposition D.1.3 sont satisfaites. En effet, on identifie  $x = y = \max \{ |\omega_1(x_1)|, |\omega_2^a(x_2)| \}$ , pour  $(s,t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2$ ,  $\beta(s,t) = \tilde{\beta}(s,t)$ ,  $\gamma^y(s) = \max \{ \gamma_1^{\omega_2^a} \circ \gamma_2^{\omega_1}(s), \gamma_2^{\omega_1} \circ \gamma_1^{\omega_2^a}(s) \}$ ,  $\gamma^u(s) = \tilde{\sigma}^u(s)$ ,  $c_y = \tilde{\sigma}^m(m)$ ,  $\sigma^t(s) = 0$ ,  $\sigma^x(s) = \tilde{\beta}(s,0)$ ,  $\sigma^y$  est défini dans (D.77),  $\sigma^u(s) = \tilde{\sigma}^u(s)$ ,  $c_x = \tilde{\sigma}^m(m)$ ,  $c = \max \{ \tilde{\sigma}^m(m), m \}$ ,  $\tilde{\gamma}^u$  est donné dans (D.78). L'inégalité (D.25) est satisfaite d'après (D.73), (D.26) d'après (D.67) et (D.68), (D.27) d'après (D.73), (D.28) d'après (D.56), (D.29) d'après (D.57), (D.31) avec  $\bar{\Delta} = \Delta$  puisque  $\max \{ \nu^x(\Delta), \nu^u(\Delta) \} < M$ . Par conséquent, puisque (D.59) est vérifiée, en invoquant la Proposition D.1.3, pour  $\eta > 1$ , il existe  $\beta \in \mathcal{KL}$  telle que, pour tout  $t \in [t_0, \infty)$ :

$$\begin{aligned} \max \{ |\omega_1(x_1(t))|, |\omega_2^a(x_2(t))| \} & \leq \max \left\{ \beta(\max \{ |\omega_1(x_1(t_0))|, |\omega_2^a(x_2(t_0))| \}, t - t_0), \right. \\ & \quad \tilde{\gamma}^u(\max \{ \|u_1\|_{[t_0,t]}, \|u_2\|_{[t_0,t]} \}), \\ & \quad \left. \eta \tilde{\sigma}^m(m), \eta m \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.79})$$

La preuve se conclut en notant  $\delta(s) = \max \{ \eta \tilde{\sigma}^m(s), \eta s \}$  pour  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ .  $\square$

**Remarque D.2.2** *La condition (D.57) signifie que les bornes du compact sur lequel la condition du petit gain (D.56) est satisfaite ne peuvent être trop proches. On remarque les auteurs de [191] ont oublié de le préciser dans le Lemme 2.*

Le théorème suivant est atypique puisqu'il s'agit d'une triple interconnexion pour laquelle un des sous-systèmes ne vérifient pas de propriété de stabilité asymptotique mais de type entrée-bornée-état-borné. Dans [40], des théorèmes du petit gain sont proposés pour des interconnexions multiples de systèmes. Il y est montré que la stabilité entrée-état, la propriété de gain asymptotique et la stabilité entrée-bornée-état-borné sont conservées une fois par le système global interconnecté sous de nouvelles conditions du petit gain. Contrairement à [40], les systèmes étudiés ici ont chacun des propriétés de stabilité différentes, de plus leur interconnexion est assurée d'être pratiquement stable et non pas asymptotiquement stable.

**Théorème D.2.2** *Considérons le système (D.46)-(D.47), supposons qu'il existe  $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{KL}$ ,  $\gamma_1^{\omega_2^a}, \gamma_1^{\omega_2^b}, \gamma_1^u, \gamma_2^{\omega_1}, \gamma_2^u, \alpha_1, \eta_1^{\omega_1}, \eta_1^{\omega_2^a}, \eta_1^{\omega_2^b}, \eta_1^u, \alpha_2, \eta_2^{\omega_1}, \eta_2^{\omega_2^a}, \eta_2^u \in \mathcal{K}$  tels que pour tout  $x_1(t_0) \in \mathbb{R}^{n_{x_1}}$ ,  $(u_1, x_2) \in \mathcal{L}_\infty^{n_{u_1} + n_{x_2}}$ ,  $t \geq t_0 \geq 0$ , les solutions de (D.46) vérifient :*

$$|\omega_1(x_1(t))| \leq \max \{ \beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, t - t_0), \gamma_1^{\omega_2^a}(\|\omega_2^a(x_2)\|_{[t_0, t]}), \gamma_1^{\omega_2^b}(\|\omega_2^b(x_2)\|_{[t_0, t]}), \gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0, t]}) \} \quad (\text{D.80})$$

$$|x_1(t)| \leq \max \{ \alpha_1(|x_1(t_0)|), \eta_1^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, t]}), \eta_1^{\omega_2^a}(\|\omega_2^a(x_2)\|_{[t_0, t]}), \eta_1^{\omega_2^b}(\|\omega_2^b(x_2)\|_{[t_0, t]}), \eta_1^u(\|u_1\|_{[t_0, t]}) \}, \quad (\text{D.81})$$

pour tout  $x_2(t_0) \in \mathbb{R}^{n_{x_2}}$ ,  $(x_1, u_2) \in \mathcal{L}_\infty^{n_{x_1} + n_{u_2}}$ , et  $t \geq t_0 \geq 0$ , les solutions de (D.47) vérifient :

$$|\omega_2^a(x_2(t))| \leq \max \{ \beta_2(|\omega_2^a(x_2(t_0))|, t - t_0), \gamma_2^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, t]}), \gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}) \} \quad (\text{D.82})$$

$$|\omega_2^b(x_2(t))| \leq \max \{ \alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|), \eta_2^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, t]}), \eta_2^{\omega_2^a}(\|\omega_2^a(x_2)\|_{[t_0, t]}), \eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}) \}, \quad (\text{D.83})$$

et qu'il existe  $0 < m < M$  tels que

$$\max \left\{ \gamma_1^{\omega_2^a} \circ \gamma_2^{\omega_1}(s), \gamma_1^{\omega_2^b} \circ \eta_2^{\omega_2^a} \circ \gamma_2^{\omega_1}(s), \gamma_1^{\omega_2^b} \circ \eta_2^{\omega_1}(s), \gamma_2^{\omega_1} \circ \gamma_1^{\omega_2^a}(s), \gamma_2^{\omega_1} \circ \gamma_1^{\omega_2^b} \circ \eta_2^{\omega_2^a}(s), \gamma_2^{\omega_1} \circ \gamma_1^{\omega_2^b} \circ \eta_2^{\omega_1}(s) \right\} < s \text{ pour } s \in [m, M], \quad (\text{D.84})$$

avec

$$\tilde{\sigma}^m(m) < M, \quad (\text{D.85})$$

où  $\tilde{\sigma}^m$  est défini par (D.118). On définit les fonctions de classe  $\mathcal{K}$   $\nu^x, \nu^u$ , pour  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  :

$$\begin{aligned} \nu^x(s) &= \max \left\{ \beta_1(\rho_1(s), 0), \gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(\bar{\rho}_2(s), 0)), \gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\bar{\rho}_2(s))), \gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\beta_2(\bar{\rho}_2(s), 0))), \right. \\ &\quad \left. \beta_2(\bar{\rho}_2(s), 0), \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(\rho_1(s), 0)), \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\bar{\rho}_2(s)))), \rho_1(s), \bar{\rho}_2(s), \tilde{\beta}(s, 0), \right. \\ &\quad \left. \tilde{\sigma}^x(s) \right\} \\ \nu^u(s) &= \max \left\{ \gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(s)), \gamma_1^u(s), \gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(s))), \gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^u(s)), \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(s)), \gamma_2^u(s), \right. \\ &\quad \left. \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^u(s))), \tilde{\gamma}^u(s) \right\}, \end{aligned}$$

où  $\tilde{\beta} \in \mathcal{KL}$ ,  $\tilde{\sigma}^x, \tilde{\gamma}^u \in \mathcal{K}$  sont respectivement définies dans (D.116), (D.119) et (D.122). Soit  $\Delta \in \mathbb{R}_{>0}$  tel que  $\max \{ \nu^x(\Delta), \nu^u(\Delta) \} < M$ , alors il existe  $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$  tel que, pour tout  $(x_1(t_0), x_2(t_0)) \in \mathbb{R}^{n_{x_1} + n_{x_2}}$  et  $(u_1, u_2) \in \mathcal{L}_\infty^{n_{u_1} + n_{u_2}}$  avec  $\max \{ |x_1(t_0)|, |x_2(t_0)|, \|u_1\|_\infty, \|u_2\|_\infty \}$



$< \Delta$ , les solutions de (D.46)-(D.47) vérifient :

$$|(x_1(t), x_2(t))| \leq \mu \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (\text{D.86})$$

De plus, pour tout  $\eta > 1$ , il existe  $\beta \in \mathcal{KL}$ ,  $\sigma \in \mathcal{K}$ ,  $(x_1(t_0), x_2(t_0)) \in \mathbb{R}^{n_{x_1} + n_{x_2}}$  et  $(u_1, u_2) \in \mathcal{L}_\infty^{n_{u_1} + n_{u_2}}$  avec  $\max \{|x_1(t_0)|, |x_2(t_0)|, \|u_1\|_\infty, \|u_2\|_\infty\} < \Delta$ , les solutions de (D.46)-(D.47) satisfont, pour tout  $t \geq t_0 \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \max \{|\omega_1(x_1(t))|, |\omega_2^a(x_2(t))|\} &\leq \max \left\{ \beta(\max \{|\omega_1(x_1(t_0))|, |\omega_2(x_2(t_0))|\}), t - t_0), \right. \\ &\quad \left. \sigma(\max \{\|u_1\|_{[t_0, t]}, \|u_2\|_{[t_0, t]}\}), \right. \\ &\quad \left. \delta^m(m), \delta^x(\Delta) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{D.87})$$

où, pour  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $\delta^m(s) = \max \{\eta \tilde{\sigma}^m(s), \eta s\}$  et  $\delta^x(s) = \eta \tilde{\sigma}^x(s)$ .

**Preuve.** Il est tout d'abord démontré que le système est uniformément positivement complet lorsque les conditions initiales et les entrées sont convenablement bornées. La propriété de stabilité désirée est ensuite prouvée à l'aide de la Proposition D.1.3.

*Etape 1. Complétude positive, majoration de  $\omega_1(x_1)$  et  $\omega_2^a(x_2)$  et bornitude des états.*

Soient  $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $\Delta \in \mathbb{R}_{> 0}$  avec  $\max \{\nu^x(\Delta), \nu^u(\Delta)\} < M$ ,  $(x_1(t_0), x_2(t_0)) \in \mathbb{R}^{n_{x_1} + n_{x_2}}$  et  $(u_1, u_2) \in \mathcal{L}_\infty^{n_{u_1} + n_{u_2}}$  tels que

$$\max \{|x_1(t_0)|, |x_2(t_0)|, \|u_1\|_{[t_0, \infty)}, \|u_2\|_{[t_0, \infty)}\} < \Delta. \quad (\text{D.88})$$

Soit  $[t_0, t_{\max})$  l'intervalle maximal d'existence du système (D.46)-(D.47), où  $t_{\max} \in (t_0, \infty]$ . D'après (D.50), (D.51), (D.80), (D.82) et (D.83), pour tout  $t \in [t_0, t_{\max})$  :

$$\begin{aligned} |\omega_1(x_1(t))| &\leq \max \left\{ \beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, t - t_0), \gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|, 0)), \right. \\ &\quad \gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\| \omega_1(x_1) \|_{[t_0, t]})), \gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(\| u_2 \|_{[t_0, t]})), \gamma_1^u(\| u_1 \|_{[t_0, t]}), \\ &\quad \gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|)), \gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|, 0))), \\ &\quad \gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\| \omega_1(x_1) \|_{[t_0, t]}))), \gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(\| u_2 \|_{[t_0, t]}))), \\ &\quad \left. \gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\| \omega_1(x_1) \|_{[t_0, t]})), \gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^u(\| u_2 \|_{[t_0, t]})) \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.89})$$

$$\begin{aligned} \| \omega_1(x_1) \|_{[t_0, t]} &\leq \max \left\{ \beta_1(\rho_1(x_1(t_0)), 0), \gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(\bar{\rho}_2(x_2(t_0)), 0)), \gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(\| u_2 \|_{[t_0, t]})), \right. \\ &\quad \gamma_1^u(\| u_1 \|_{[t_0, t]}), \gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\bar{\rho}_2(x_2(t_0)))), \\ &\quad \gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\beta_2(\bar{\rho}_2(x_2(t_0)), 0))), \\ &\quad \gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(\| u_2 \|_{[t_0, t]}))), \gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^u(\| u_2 \|_{[t_0, t]})), \\ &\quad \gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\| \omega_1(x_1) \|_{[t_0, t]})), \gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\| \omega_1(x_1) \|_{[t_0, t]}))), \\ &\quad \left. \gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\| \omega_1(x_1) \|_{[t_0, t]})) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.90})$$

Nous allons montrer par l'absurde que  $|\omega_1(x_1(t))| < M$  pour tout  $t \in [t_0, t_{\max})$ . Premièrement, on note que  $|\omega_1(x_1(t_0))| < M$ , d'après (D.50) et (D.88). On suppose qu'il existe  $t_1 \in (t_0, t_{\max})$

tel que  $|\omega_1(x_1(t_1))| = M$ . Soit  $\bar{t} = \inf \{t \in (t_0, t_{\max}) : |\omega_1(x_1(t))| = M\}$ . D'après (D.90), on a :

$$\begin{aligned}
\|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, \bar{t}]} = |\omega_1(x_1(\bar{t}))| &\leq \max \left\{ \beta_1(\rho_1(x_1(t_0)), 0), \gamma_1^{\omega_a^2}(\beta_2(\bar{\rho}_2(x_2(t_0))), 0), \right. \\
&\quad \gamma_1^{\omega_a^2}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, \bar{t}]}) ), \gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0, \bar{t}]}) , \\
&\quad \gamma_1^{\omega_b^2}(\alpha_2(\bar{\rho}_2(x_2(t_0)))) , \gamma_1^{\omega_b^2}(\eta_2^{\omega_a^2}(\beta_2(\bar{\rho}_2(x_2(t_0))), 0)), \\
&\quad \gamma_1^{\omega_b^2}(\eta_2^{\omega_a^2}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, \bar{t}]}) )), \gamma_1^{\omega_b^2}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0, \bar{t}]}) ), \\
&\quad \gamma_1^{\omega_a^2}(\gamma_2^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, \bar{t}]}) ), \\
&\quad \gamma_1^{\omega_b^2}(\eta_2^{\omega_a^2}(\gamma_2^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, \bar{t}]}) )), \\
&\quad \left. \gamma_1^{\omega_b^2}(\eta_2^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, \bar{t}]}) ) \right\} \\
&= \max \left\{ \beta_1(\rho_1(x_1(t_0)), 0), \gamma_1^{\omega_a^2}(\beta_2(\bar{\rho}_2(x_2(t_0))), 0), \right. \\
&\quad \gamma_1^{\omega_a^2}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, \bar{t}]}) ), \gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0, \bar{t}]}) , \\
&\quad \gamma_1^{\omega_b^2}(\alpha_2(\bar{\rho}_2(x_2(t_0)))) , \gamma_1^{\omega_b^2}(\eta_2^{\omega_a^2}(\beta_2(\bar{\rho}_2(x_2(t_0))), 0)), \\
&\quad \gamma_1^{\omega_b^2}(\eta_2^{\omega_a^2}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, \bar{t}]}) )), \gamma_1^{\omega_b^2}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0, \bar{t}]}) ), \\
&\quad \gamma_1^{\omega_a^2}(\gamma_2^{\omega_1}(M)), \gamma_1^{\omega_b^2}(\eta_2^{\omega_a^2}(\gamma_2^{\omega_1}(M))), \\
&\quad \left. \gamma_1^{\omega_b^2}(\eta_2^{\omega_1}(M)) \right\}. \tag{D.91}
\end{aligned}$$

On remarque que, d'après (D.88) :

$$\begin{aligned}
\max \left\{ \beta_1(\rho_1(x_1(t_0)), 0), \gamma_1^{\omega_a^2}(\beta_2(\bar{\rho}_2(x_2(t_0))), 0), \gamma_1^{\omega_a^2}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, \bar{t}]}) ), \gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0, \bar{t}]}) , \right. \\
\gamma_1^{\omega_b^2}(\alpha_2(\bar{\rho}_2(x_2(t_0)))) , \gamma_1^{\omega_b^2}(\eta_2^{\omega_a^2}(\beta_2(\bar{\rho}_2(x_2(t_0))), 0)), \gamma_1^{\omega_b^2}(\eta_2^{\omega_a^2}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, \bar{t}]}) )), \\
\left. \gamma_1^{\omega_b^2}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0, \bar{t}]}) ) \right\} < M, \tag{D.92}
\end{aligned}$$

en conséquence, d'après (D.84), (D.91), (D.92),

$$|\omega_1(x_1(\bar{t}))| < M,$$

ce qui contredit le fait que  $|\omega_1(x_1(\bar{t}))| = M$ , par conséquent, puisque  $\omega_1(x_1)$  est continue entre deux instants de saut et d'après (D.48), pour tout  $t \in [t_0, t_{\max})$  :

$$|\omega_1(x_1(t))| < M. \tag{D.93}$$

Un résultat similaire peut être déduit pour  $\omega_2^a(x_2)$ . En effet, d'après (D.50), (D.51), (D.80), (D.82), et (D.93), pour tout  $t \in [t_0, t_{\max})$ :

$$\begin{aligned}
|\omega_2^a(x_2(t))| &\leq \max \left\{ \beta_2(\bar{\rho}_2(x_2(t_0)), 0), \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(\rho_1(x_1(t_0)), 0)), \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^a}(\|\omega_2^a(x_2)\|_{[t_0, t]})), \right. \\
&\quad \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0, t]})), \gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}), \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\bar{\rho}_2(x_2(t_0))))), \\
&\quad \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\|\omega_2^a(x_2)\|_{[t_0, t]}))), \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, t]}))), \\
&\quad \left. \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}))) \right\} \\
&\leq \max \left\{ \beta_2(\bar{\rho}_2(x_2(t_0)), 0), \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(\rho_1(x_1(t_0)), 0)), \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0, t]})), \right. \\
&\quad \gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}), \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\bar{\rho}_2(x_2(t_0))))), \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(M))), \\
&\quad \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}))), \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^a}(\|\omega_2^a(x_2)\|_{[t_0, t]})), \\
&\quad \left. \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\|\omega_2^a(x_2)\|_{[t_0, t]}))) \right\}.
\end{aligned}$$

Alors, en procédant par l'absurde et en utilisant (D.84) et (D.88), on déduit que

$$|\omega_2^a(x_2(t))| \leq M. \tag{D.94}$$

Ainsi, en invoquant (D.51), (D.83), (D.81), (D.93) et (D.94), on peut prouver que  $t_{\max} = \infty$  (par l'absurde), que le système (D.46)-(D.47) est bien uniformément positivement continu et que les états du système (D.46)-(D.47) sont bornés : (D.86) est satisfait.

*Etape 2. Propriété de stabilité (D.87).*

Nous allons démontrer que les conditions de la Proposition D.1.3 sont satisfaites. Premièrement, on remarque, d'après (D.84), que :

$$\begin{cases} \max \left\{ \gamma_1^{\omega_2^a} \circ \gamma_2^{\omega_1}(s), \gamma_1^{\omega_2^b} \circ \eta_2^{\omega_2^a} \circ \gamma_2^{\omega_1}(s), \gamma_1^{\omega_2^b} \circ \eta_2^{\omega_1}(s) \right\} \\ \leq \max \left\{ \gamma_1^{\omega_2^a} \circ \gamma_2^{\omega_1}(m), \gamma_1^{\omega_2^b} \circ \eta_2^{\omega_2^a} \circ \gamma_2^{\omega_1}(m), \gamma_1^{\omega_2^b} \circ \eta_2^{\omega_1}(m) \right\} < m & \text{si } s \in [0, m) \\ \max \left\{ \gamma_1^{\omega_2^a} \circ \gamma_2^{\omega_1}(s), \gamma_1^{\omega_2^b} \circ \eta_2^{\omega_2^a} \circ \gamma_2^{\omega_1}(s), \gamma_1^{\omega_2^b} \circ \eta_2^{\omega_1}(s) \right\} < s & \text{si } s \in [m, M]. \end{cases} \tag{D.95}$$

Ainsi, pour  $t \in [t_0, \infty)$ , on obtient, d'après (D.80), (D.82), (D.83), (D.93) et (D.95) :

$$\begin{aligned}
|\omega_1(x_1(t))| &\leq \max \left\{ \beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, t - t_0), \gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|, 0))), \right. \\
&\quad \gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, t]})), \gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]})), \\
&\quad \gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0, t]}), \gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|)), \\
&\quad \gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|, 0))), \gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, t]}))), \\
&\quad \gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}))), \gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, t]})), \\
&\quad \left. \gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]})) \right\} \\
\|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, t]} &\leq \max \left\{ \beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, 0), \gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|, 0))), \gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]})), \right. \\
&\quad \gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0, t]}), \gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|)), \gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|, 0))), \\
&\quad \left. \gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}))), \gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]})), m \right\}, \tag{D.96}
\end{aligned}$$

par analogie, d'après (D.80), (D.82), (D.83), (D.84) et (D.96),

$$\begin{aligned}
\|\omega_2^a(x_2)\|_{[t_0, t]} &\leq \max \left\{ \beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|, 0), \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, 0))), \right. \\
&\quad \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^a}(\|\omega_2^a(x_2)\|_{[t_0, t]})), \\
&\quad \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0, t]})), \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|))), \\
&\quad \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\|\omega_2^a(x_2)\|_{[t_0, t]}))), \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, t]}))), \\
&\quad \left. \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}))), \gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}) \right\} \\
&\leq \max \left\{ \beta_2(\omega_2(|x_2(t_0)|), 0), \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, 0)), \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0, t]})), \right. \\
&\quad \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|))), \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, 0)))), \\
&\quad \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|, 0))))), \\
&\quad \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}))))), \\
&\quad \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0, t]}))))), \\
&\quad \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|))))), \\
&\quad \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|, 0))))), \\
&\quad \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}))))), \\
&\quad \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}))))), \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(m))), \\
&\quad \left. \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}))), \gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}), m \right\}. \tag{D.97}
\end{aligned}$$

En incorporant les bornes de (D.96) et (D.97) dans (D.83), on déduit :

$$\begin{aligned}
|\omega_2^b(x_2(t))| \leq & \max \left\{ \alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|), \eta_2^{\omega_1}(\beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, 0)), \right. \\
& \eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|, 0))), \eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}))), \\
& \eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0, t]})), \eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|))), \\
& \eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|, 0))), \eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]})))), \\
& \eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}))), \eta_2^{\omega_1}(m), \eta_2^{\omega_2^a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|, 0)), \\
& \eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, 0))), \eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0, t]}))), \\
& \eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|))), \\
& \eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, 0))))), \\
& \eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|, 0))))), \\
& \eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}))))), \\
& \eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0, t]}))))), \\
& \eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|))))), \\
& \eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|, 0))))), \\
& \eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}))))), \\
& \eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}))))), \\
& \eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(m))))), \eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}))), \\
& \left. \eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]})), \eta_2^{\omega_2^a}(m), \eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}) \right\}. \tag{D.98}
\end{aligned}$$

Dans la suite, en remarquant que pour tout  $x_2 \in \mathbb{R}^{n_{x_2}}$ , d'après la Proposition A.1.2,

$$|\omega_2(x_2)| \leq \max \{2\omega_2^a(x_2), 2\omega_2^b(x_2)\}, \tag{D.99}$$

on prouvera que  $\omega_2(x_2)$  est borné en utilisant (D.97) et (D.98).

D'autre part, d'après (D.82) et (D.83), pour tout  $t \in [t_0, t_{\max})$  :

$$|\omega_2^a(x_2(t))| \leq \max \left\{ \beta_2(|\omega_2(x_2(\frac{t}{2}))|, \frac{t}{2}), \gamma_2^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[\frac{t}{2}, t]}), \gamma_2^u(\|u_2\|_{[\frac{t}{2}, t]}) \right\}, \tag{D.100}$$

$$\begin{aligned}
|\omega_2^b(x_2(t))| \leq & \max \left\{ \alpha_2(|\omega_2^b(x_2(\frac{t}{2}))|), \eta_2^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[\frac{t}{2}, t]}), \eta_2^{\omega_2^a}(\|\omega_2^a(x_2)\|_{[\frac{t}{2}, t]}), \right. \\
& \left. \eta_2^u(\|u_2\|_{[\frac{t}{2}, t]}) \right\}. \tag{D.101}
\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après (D.80), (D.97), (D.98), (D.99), (D.100) et (D.101) :

$$\begin{aligned}
|\omega_1(x_1(t))| &\leq \max \left\{ \beta_1(|\omega_1(x_1(\frac{t}{2}))|, \frac{t}{2}), \gamma_1^{\omega_a}(\|\omega_2^a(x_2)\|_{[\frac{t}{2}, t]}), \gamma_1^{\omega_b}(\|\omega_2^b(x_2)\|_{[\frac{t}{2}, t]}), \right. \\
&\quad \left. \gamma_1^u(\|u_1\|_{[\frac{t}{2}, t]}) \right\} \tag{D.102} \\
&\leq \max \left\{ \beta_1(\beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, 0), \frac{t}{2}), \beta_1(\gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|, 0)), \frac{t}{2}), \right. \\
&\quad \beta_1(\gamma_1^{\omega_a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]})), \frac{t}{2}), \beta_1(\gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0, t]}), \frac{t}{2}), \\
&\quad \beta_1(\gamma_1^{\omega_b}(\alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|)), \frac{t}{2}), \\
&\quad \beta_1(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|, 0))), \frac{t}{2}), \\
&\quad \beta_1(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}))), \frac{t}{2}), \\
&\quad \beta_1(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]})), \frac{t}{2}), \beta_1(m, \frac{t}{2}), \\
&\quad \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|, 0)), \frac{t}{2}), \\
&\quad \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, 0)), \frac{t}{2})), \\
&\quad \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0, t]})), \frac{t}{2})), \\
&\quad \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|))), \frac{t}{2})), \\
&\quad \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_1}(\beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, 0))), \frac{t}{2})), \\
&\quad \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|, 0))))), \frac{t}{2})), \\
&\quad \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}))))), \frac{t}{2})), \\
&\quad \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0, t]}))))), \frac{t}{2})), \\
&\quad \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|))))), \frac{t}{2})), \\
&\quad \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|, 0))))), \frac{t}{2})), \\
&\quad \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}))))), \frac{t}{2})), \\
&\quad \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}))))), \frac{t}{2})), \\
&\quad \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_1}(m))), \frac{t}{2})), \\
&\quad \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}))), \frac{t}{2})), \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}), \frac{t}{2})), \\
&\quad \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2m, \frac{t}{2})), \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|), \frac{t}{2})), \\
&\quad \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_1}(\beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, 0)), \frac{t}{2})),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \gamma_1^{\omega_a^2}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_a^2}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|,0))),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega_a^2}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_a^2}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]}))),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega_a^2}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0,t]}))),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega_a^2}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b^2}(\alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|))),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega_a^2}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b^2}(\eta_2^{\omega_a^2}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|,0))),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega_a^2}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b^2}(\eta_2^{\omega_a^2}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]}))),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega_a^2}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b^2}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]}))),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega_a^2}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_1}(m),\frac{t}{2})),\gamma_1^{\omega_a^2}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_a^2}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|,0))),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega_a^2}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_a^2}(\gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|,0))),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega_a^2}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_a^2}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0,t]}))),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega_a^2}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_a^2}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b^2}(\alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|))),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega_a^2}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_a^2}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b^2}(\eta_2^{\omega_1}(\beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|,0))))),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega_a^2}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_a^2}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b^2}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_a^2}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|,0))))),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega_a^2}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_a^2}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b^2}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_a^2}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]}))))),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega_a^2}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_a^2}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b^2}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_a^2}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]}))))),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega_a^2}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_a^2}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b^2}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_a^2}(\alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|))))),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega_a^2}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_a^2}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b^2}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_a^2}(\eta_2^{\omega_a^2}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|,0))))),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega_a^2}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_a^2}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b^2}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_a^2}(\eta_2^{\omega_a^2}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]}))))),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega_a^2}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_a^2}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b^2}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_a^2}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]}))))),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega_a^2}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_a^2}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b^2}(\eta_2^{\omega_1}(m))))),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega_a^2}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_a^2}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b^2}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]}))))),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega_a^2}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_a^2}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]})),\frac{t}{2})),\gamma_1^{\omega_a^2}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_a^2}(m),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega_a^2}(\beta_2(2\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]}),\frac{t}{2})),\gamma_1^{\omega_a^2}(\gamma_2^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[\frac{t}{2},t]})), \\
& \gamma_1^{\omega_a^2}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[\frac{t}{2},t]})),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(\alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega^1}(\beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|,0)))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|,0))))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]})))))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0,t]})))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|))))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|,0)))))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]})))))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]})))))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega^1}(m)), \gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|,0)))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2((\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^{\omega^1}(\beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|,0)))))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0,t]})))))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|)))))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(\beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|,0))))))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|,0))))))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]})))))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0,t]})))))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|))))))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|,0))))))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]})))))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]})))))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(m)))))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]})))))), \gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]})))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega^a}(m)), \gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(\| \omega_1(x_1) \|_{[t_0,t]})), \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\beta_2(\omega_2(|x_2(t_0)|,0), \frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega^1}(\beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|,0), \frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0,t]}), \frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|), \frac{t}{2}))),
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(\beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|,0))),\frac{t}{2}))),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|,0))),\frac{t}{2}))),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]})))))),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0,t]})))))),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|))))),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|,0))))),\frac{t}{2}))),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]})))))),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]})))))),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(m))),\frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]})))))),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]}),\frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2m,\frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|),\frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^1}(\beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|,0)),\frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|,0))),\frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]})))))),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0,t]}),\frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|))))),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|,0))))),\frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]})))))),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]})))))),\frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^1}(m),\frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^1}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|,0)),\frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^1}(\gamma_2^{\omega^1}(\beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|,0))),\frac{t}{2}))),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0,t]}))), \frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|))))), \frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(\beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|,0))))), \frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|,0))))), \frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]}))))), \frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0,t]}))))), \frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|))))), \frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|,0))))), \frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]}))))), \frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]}))))), \frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(m))))), \frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]}))))), \frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]}))), \frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^a}(m), \frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]}), \frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^{\omega^1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[\frac{t}{2},t]}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[\frac{t}{2},t]}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]}), \gamma_1^u(\|u_1\|_{[\frac{t}{2},t]})),
\end{aligned} \tag{D.103}$$

que l'on écrit :

$$\begin{aligned}
|\omega_1(x_1(t))| \leq & \max \left\{ \tilde{\beta}_1(\max \{ |\omega_1(x_1(t_0))|, |\omega_2(x_2(t_0))| \}, t), \right. \\
& \tilde{\sigma}_1^u(\max \{ \|u_1\|_{[t_0,t]}, \|u_2\|_{[t_0,t]} \}), \gamma_1^{\omega^a}(\gamma_2^{\omega^1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[\frac{t}{2},t]})), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[0,t]})), \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^{\omega^1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[t_0,t]}))), \\
& \left. \tilde{\sigma}_1^m(m), \tilde{\sigma}_1^{\omega}(\max \{ |\omega_1(x_1(t_0))|, |\omega_2(x_2(t_0))| \}) \right\},
\end{aligned} \tag{D.104}$$

où, pour  $(s,t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2$ ,

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}_1(s,t) = \max & \left\{ \beta_1(\beta_1(s,0), \frac{t}{2}), \beta_1(\gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(s,0)), \frac{t}{2}), \beta_1(\gamma_1^{\omega_b}(\alpha_2(s)), \frac{t}{2}), \right. \\
& \beta_1(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_a}(\beta_2(s,0))), \frac{t}{2}), \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\beta_2(s,0)), \frac{t}{2}), \\
& \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(s,0))), \frac{t}{2}), \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\alpha_2(s))), \frac{t}{2}), \\
& \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_1}(\beta_1(s,0))))), \frac{t}{2}), \\
& \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(s,0))))), \frac{t}{2}), \\
& \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\alpha_2(s))))), \frac{t}{2}), \\
& \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_a}(\beta_2(s,0))))), \frac{t}{2}), \\
& \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\alpha_2(s), \frac{t}{2})), \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_1}(\beta_1(s,0))), \frac{t}{2}), \\
& \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(s,0))), \frac{t}{2})), \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\alpha_2(s))), \frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_a}(\beta_2(s,0))))), \frac{t}{2}), \\
& \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_a}(\beta_2(s,0))), \frac{t}{2}), \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_a}(\gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(s,0))), \frac{t}{2}), \\
& \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\alpha_2(s))))), \frac{t}{2}), \\
& \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_1}(\beta_1(s,0))))), \frac{t}{2}), \\
& \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(s,0))))), \frac{t}{2}), \\
& \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\alpha_2(s))))), \frac{t}{2}), \\
& \gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_a}(\beta_2(s,0))))), \frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_a}(\beta_2(2\beta_2(\bar{\rho}(s),0)), \frac{t}{2})), \gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(s,0))), \frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\alpha_2(s))), \frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_1}(\beta_1(s,0))))), \frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(s,0))))), \frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\alpha_2(s))))), \frac{t}{2})), \\
& \gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_a}(\beta_2(s,0))))), \frac{t}{2})), \\
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\alpha_2(s), \frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^1}(\beta_1(s,0)), \frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^a}(\beta_2(s,0))), \frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(s))), \frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(s,0))), \frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^2}(\beta_2(s,0)), \frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^2}(\gamma_2^{\omega^1}(\beta_1(s,0))), \frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^2}(\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(s))), \frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^2}(\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(\beta_1(s,0))), \frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^2}(\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^a}(\beta_2(s,0))), \frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^2}(\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\alpha_2(s))), \frac{t}{2}))), \\
& \gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^2}(\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\beta_2(s,0))), \frac{t}{2}))))))\}, \tag{D.105}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_1^u(s) = \max & \left\{ \beta_1(\gamma_1^{\omega^a}(\gamma_2^u(s)), 0), \beta_1(\gamma_1^u(s), 0), \beta_1(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^u(s))), 0), \right. \\
& \beta_1(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^u(s)), 0), \gamma_1^{\omega^a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^u(s))), 0), \\
& \gamma_1^{\omega^a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^a}(\gamma_2^u(s))))), 0), \\
& \gamma_1^{\omega^a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^u(s))))), 0), \\
& \gamma_1^{\omega^a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^u(s))))), 0), \\
& \gamma_1^{\omega^a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^u(s))))), 0), \\
& \gamma_1^{\omega^a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^u(s))), 0), \gamma_1^{\omega^a}(\beta_2(2\gamma_2^u(s), 0), \\
& \gamma_1^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^a}(\gamma_2^u(s))), 0), \gamma_1^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^u(s))), 0), \\
& \gamma_1^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^{\omega^a}(\gamma_2^u(s))))), 0), \\
& \gamma_1^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^1}(\gamma_1^{\omega^b}(\eta_2^u(s))), 0), \\
& \left. \gamma_1^{\omega^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega^2}(\gamma_2^{\omega^1}(\gamma_1^u(s))), 0) \right)
\end{aligned}$$



$$\left. \begin{aligned} & \gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(s))))), \\ & \gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^u(s))), \gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^u(s)), \gamma_1^u(s) \end{aligned} \right\}, \quad (\text{D.106})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_1^m(s) = \max \{ & \beta_1(s,0), \gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(s))),0)), \gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(2s,0)), \\ & \gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_1}(s),0)), \\ & \gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(s))))),0)), \gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_2^a}(s),0)), \\ & \gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(s))),0))), \\ & \gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\beta_2(2s,0))), \\ & \gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_1}(s),0))), \\ & \gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(s))))),0))), \\ & \gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\beta_2(2\eta_2^{\omega_2^a}(s),0))), \\ & \gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_1}(s))), \\ & \gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(s)))))), \\ & \left. \gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_2^a}(s))) \right\}, \quad (\text{D.107}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_1^\omega(s) = \max \{ & \gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\alpha_2(s))), \\ & \gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_1}(\beta_1(s,0)))), \\ & \gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(s,0))))), \\ & \gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(s))))), \\ & \gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\beta_2(s,0)))))), \\ & \gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_2^a}(\beta_2(s,0))), \gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(s,0))))), \\ & \gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(s)))))), \\ & \gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\beta_1(s,0))))))), \\ & \gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(s,0))))))), \\ & \gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(s))))))), \\ & \left. \gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\beta_2(s,0)))))))) \right\}. \quad (\text{D.108}) \end{aligned}$$

De la même manière, d'après (D.96), (D.98), (D.99), (D.100), (D.101) et (D.102),

$$\begin{aligned}
|\omega_2^a(x_2(t))| &\leq \max \left\{ \beta_2(|\omega_2(x_2(\frac{t}{2}))|, \frac{t}{2}), \gamma_2^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[\frac{t}{2}, t]}), \gamma_2^u(\|u_2\|_{[\frac{t}{2}, t]}) \right\}, \\
&\leq \max \left\{ \beta_2(2\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|, 0), \frac{t}{2}), \beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, 0)), \frac{t}{2}), \right. \\
&\quad \beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0, t]})), \frac{t}{2}), \beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|))), \frac{t}{2}), \\
&\quad \beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, 0)))), \frac{t}{2}), \\
&\quad \beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|, 0))))), \frac{t}{2}), \\
&\quad \beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}))))), \frac{t}{2}), \\
&\quad \beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0, t]}))))), \frac{t}{2}), \\
&\quad \beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|))))), \frac{t}{2}), \\
&\quad \beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|, 0))))), \frac{t}{2}), \\
&\quad \beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}))))), \frac{t}{2}), \\
&\quad \beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}))))), \frac{t}{2}), \\
&\quad \beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(m))), \frac{t}{2}), \beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}))), \frac{t}{2}), \\
&\quad \beta_2(2\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}), \frac{t}{2}), \beta_2(2m, \frac{t}{2}), \beta_2(2\alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|), \frac{t}{2}), \\
&\quad \beta_2(2\eta_2^{\omega_1}(\beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, 0)), \frac{t}{2}), \\
&\quad \beta_2(2\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|, 0))), \frac{t}{2}), \\
&\quad \beta_2(2\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}))), \frac{t}{2}), \\
&\quad \beta_2(2\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0, t]})), \frac{t}{2}), \\
&\quad \beta_2(2\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|))), \frac{t}{2}), \\
&\quad \beta_2(2\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|, 0))))), \frac{t}{2}), \\
&\quad \beta_2(2\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}))))), \frac{t}{2}), \\
&\quad \beta_2(2\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}))), \frac{t}{2}), \\
&\quad \beta_2(2\eta_2^{\omega_1}(m), \frac{t}{2}), \beta_2(2\eta_2^{\omega_2^a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|, 0))), \frac{t}{2}), \\
&\quad \beta_2(2\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, 0))), \frac{t}{2}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \beta_2(2\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0,t]}))), \frac{t}{2}), \\
& \beta_2(2\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|))))), \frac{t}{2}), \\
& \beta_2(2\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|,0))))), \frac{t}{2}), \\
& \beta_2(2\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|,0))))), \frac{t}{2}), \\
& \beta_2(2\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]}))))), \frac{t}{2}), \\
& \beta_2(2\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0,t]}))))), \frac{t}{2}), \\
& \beta_2(2\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|))))), \frac{t}{2}), \\
& \beta_2(2\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|,0))))), \frac{t}{2}), \\
& \beta_2(2\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]}))))), \frac{t}{2}), \\
& \beta_2(2\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]}))))), \frac{t}{2}), \\
& \beta_2(2\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(m))))), \frac{t}{2}), \\
& \beta_2(2\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]}))))), \frac{t}{2}), \\
& \beta_2(2\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]})), \frac{t}{2}), \beta_2(2\eta_2^{\omega_2^a}(m), \frac{t}{2}), \\
& \beta_2(2\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]}), \frac{t}{2}), \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(\beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|,0), \frac{t}{2})), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(\gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|,0), \frac{t}{2})), \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(\gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]}), \frac{t}{2}))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(\gamma_1^u(\|u_1\|_{[t_0,t]}), \frac{t}{2})), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|))), \frac{t}{2}), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|,0))), \frac{t}{2}), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]}))), \frac{t}{2}), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]}), \frac{t}{2}))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(m, \frac{t}{2})), \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^a}(\|\omega_2^a(x_2)\|_{[\frac{t}{2},t]})), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|))))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_1}(\beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|,0))))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|,0))))),
\end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]})))))), \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0,t]}))))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(m))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\|\omega_2^a(x_2)\|_{[\frac{t}{2},t]}))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^u(\|u_2\|_{[\frac{t}{2},t]}))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(\|u_1\|_{[\frac{t}{2},t]})), \\
& \gamma_2^u(\|u_2\|_{[\frac{t}{2},t]}) \}. \tag{D.109}
\end{aligned}$$

que l'on écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
|\omega_2^a(x_2(t))| \leq & \max \left\{ \tilde{\beta}_2(\max \{ |\omega_1(x_1(t_0))|, |\omega_2(x_2(t_0))| \}, t), \right. \\
& \tilde{\sigma}_2^u(\max \{ \|u_1\|_{[t_0,t]}, \|u_2\|_{[t_0,t]} \}), \\
& \tilde{\sigma}_2^m(m), \tilde{\sigma}_2^\omega(\max \{ |\omega_1(x_1(t_0))|, |\omega_2(x_2(t_0))| \}), \\
& \left. \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^a}(\|\omega_2^a(x_2)\|_{[\frac{t}{2},t]})), \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\|\omega_2^a(x_2)\|_{[t_0,t]}))) \right\}, \tag{D.110}
\end{aligned}$$

où, pour  $(s,t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2$ ,

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}_2(s,t) = & \max \left\{ \beta_2(2\beta_2(s,0), \frac{t}{2}), \beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(s,0)), \frac{t}{2}), \right. \\
& \beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(s))), \frac{t}{2}), \\
& \beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\beta_1(s,0)))), \frac{t}{2}), \\
& \beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(s,0))))), \frac{t}{2}), \\
& \beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(s))))), \frac{t}{2}), \\
& \beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\beta_2(s,0))))), \frac{t}{2}), \\
& \beta_2(2\alpha_2(s), \frac{t}{2}), \beta_2(2\eta_2^{\omega_1}(\beta_1(s,0)), \frac{t}{2}), \\
& \left. \beta_2(2\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(s,0))), \frac{t}{2}), \beta_2(2\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(s))), \frac{t}{2}), \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \beta_2(2\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_a}(\beta_2(s,0)))), \frac{t}{2}), \\
& \beta_2(2\eta_2^{\omega_a}(\beta_2(s,0)), \frac{t}{2}), \beta_2(2\eta_2^{\omega_a}(\gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(s,0))), \frac{t}{2}), \\
& \beta_2(2\eta_2^{\omega_a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\alpha_2(s)))), \frac{t}{2}), \\
& \beta_2(2\eta_2^{\omega_a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_1}(\beta_1(s,0))))), \frac{t}{2}), \\
& \beta_2(2\eta_2^{\omega_a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(s,0)))))), \frac{t}{2}), \\
& \beta_2(2\eta_2^{\omega_a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\alpha_2(s)))))), \frac{t}{2}), \\
& \beta_2(2\eta_2^{\omega_a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_a}(\beta_2(s,0))))))), \frac{t}{2}), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(\beta_1(s,0)), \frac{t}{2}), \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(\gamma_1^{\omega_a}(\beta_2(s,0))), \frac{t}{2}), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(\gamma_1^{\omega_b}(\alpha_2(s))), \frac{t}{2}), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_a}(\beta_2(s,0))), \frac{t}{2})) \}, \tag{D.111}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_2^u(s) = \max \{ & \beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(s)), 0), \\
& \beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_a}(\gamma_2^u(s))))), 0), \\
& \beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(s))))), 0), \\
& \beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_a}(\gamma_2^u(s)))))), 0), \\
& \beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^u(s))))), 0), \beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^u(s))), 0), \\
& \beta_2(2\gamma_2^u(s), 0), \beta_2(2\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_a}(\gamma_2^u(s))), 0), \\
& \beta_2(2\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(s)), 0), \beta_2(2\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_a}(\gamma_2^u(s))))), 0), \\
& \beta_2(2\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^u(s))), 0), \beta_2(2\eta_2^{\omega_a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(s))), 0), \\
& \beta_2(2\eta_2^{\omega_a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_a}(\gamma_2^u(s)))))), 0), \\
& \beta_2(2\eta_2^{\omega_a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(s))))), 0), \\
& \beta_2(2\eta_2^{\omega_a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_a}(\gamma_2^u(s))))))), 0), \\
& \beta_2(2\eta_2^{\omega_a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^u(s)))))), 0), \\
& \beta_2(2\eta_2^{\omega_a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^u(s))))), 0), \beta_2(2\eta_2^{\omega_a}(\gamma_2^u(s)), 0), \beta_2(2\eta_2^u(s, 0)), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(\gamma_1^{\omega_a}(\gamma_2^u(s))), 0), \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(\gamma_1^u(s)), 0), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^{\omega_a}(\gamma_2^u(s))), 0), \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(\gamma_1^{\omega_b}(\eta_2^u(s))), 0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(s)))))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(s))))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(s))))))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^u(s)))))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(s)))))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(s)))))))))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(s))))))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(s))))))))))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^u(s)))))))))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^u(s))))))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(s))))), \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^u(s)))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(s))))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(s))))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(s)))))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^u(s))))), \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^u(s))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(s)), \gamma_2^u(s) \}, \tag{D.112}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_2^m(s) = \max \{ & \beta_2(2\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(s))), 0), \beta_2(2s, 0), \beta_2(2\eta_2^{\omega_1}(s), 0), \\
& \beta_2(2\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(s))))), 0), \beta_2(2\eta_2^{\omega_2^a}(s), 0), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(s, 0)), \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_1}(s))))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(s))))))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_2^a}(s))), \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(s)))) \}, \tag{D.113}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_2^\omega(s) = \max \{ & \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\alpha_2(s)))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_1}(\beta_1(s, 0))))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(s, 0)))))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(s))))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\beta_2(s, 0))))))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_2^a}(\beta_2(s, 0))))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(s, 0)))))) \},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(s))))))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\beta_1(s,0))))))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(s,0))))))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(s))))))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\beta_2(s,0))))))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\beta_1(s,0)))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^a}(\beta_2(s,0))))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\alpha_2(s))))), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\beta_2(s,0)))))) \}. \tag{D.114}
\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après (D.104) et (D.110),

$$\begin{aligned}
\max \{ |\omega_1(x_1(t))|, |\omega_2^a(x_2(t))| \} & \leq \max \{ \tilde{\beta}(\max \{ |\omega_1(x_1(t_0))|, |\omega_2(x_2(t_0))| \}), t - t_0), \\
& \tilde{\sigma}^u(\max \{ \|u_1\|_{[t_0,t]}, \|u_2\|_{[t_0,t]} \}), \tilde{\sigma}^m(m), \tilde{\sigma}^x(\Delta), \\
& \gamma_1^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\max \{ \|\omega_1(x_1)\|_{[t_0,t]}, \|\omega_2^a(x_2)\|_{[t_0,t]} \})), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^a}(\max \{ \|\omega_1(x_1)\|_{[t_0,t]}, \|\omega_2^a(x_2)\|_{[t_0,t]} \})), \\
& \gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(\max \{ \|\omega_1(x_1)\|_{[t_0,t]}, \|\omega_2^a(x_2)\|_{[t_0,t]} \}))), \\
& \gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_1}(\max \{ \|\omega_1(x_1)\|_{[t_0,t]}, \|\omega_2^a(x_2)\|_{[t_0,t]} \})), \\
& \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\eta_2^{\omega_2^a}(\max \{ \|\omega_1(x_1)\|_{[t_0,t]}, \|\omega_2^a(x_2)\|_{[t_0,t]} \}))) \}. \tag{D.115}
\end{aligned}$$

où

$$\tilde{\beta}(s,t) = \max \{ \tilde{\beta}_1(s,t), \tilde{\beta}_2(s,t) \}, \tag{D.116}$$

$$\tilde{\sigma}^u(s) = \max \{ \tilde{\sigma}_1^u(s), \tilde{\sigma}_2^u(s) \}, \tag{D.117}$$

$$\tilde{\sigma}^m(s) = \max \{ \tilde{\sigma}_1^m(s), \tilde{\sigma}_2^m(s) \}, \tag{D.118}$$

$$\tilde{\sigma}^x(s) = \max \left\{ \tilde{\sigma}_1^{\omega_1}(\max \{ \rho_1(s), \bar{\rho}_2(s) \}), \tilde{\sigma}_2^{\omega_2}(\max \{ \rho_1(s), \bar{\rho}_2(s) \}) \right\}. \tag{D.119}$$

Soient, pour  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,

$$\sigma^y(s) = \max \{ \gamma_1^{\omega_2^a}(s), 2\gamma_2^{\omega_1}(s), 2\eta_2^{\omega_1}(s), 2\eta_2^{\omega_2^a}(s) \} \tag{D.120}$$

$$\sigma^u(s) = \max \{ \gamma_1^u(s), 2\gamma_2^u(s), 2\eta_2^u(s) \} \tag{D.121}$$

$$\tilde{\gamma}^u(s) = \max \{ \tilde{\beta}(\sigma^y(\tilde{\sigma}^u(s)), 0), \tilde{\beta}(\sigma^u(s), 0), \tilde{\sigma}^u(s) \}. \tag{D.122}$$

On peut dès lors voir que les hypothèses de la Proposition D.1.3 sont satisfaites. En effet, en identifiant  $x = \max \{ |\omega_1(x_1)|, |\omega_2(x_2)| \}$ ,  $y = \max \{ |\omega_1(x_1)|, |\omega_2^a(x_2)| \}$ ,  $\beta = \tilde{\beta}$ , pour  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $\gamma^y(s) = \max \{ \gamma_1^{\omega_2^a} \circ \gamma_2^{\omega_1}(s), \gamma_2^{\omega_1} \circ \gamma_1^{\omega_2^a}(s), \gamma_1^{\omega_2^b} \circ \eta_2^{\omega_2^a} \circ \gamma_2^{\omega_1}(s), \gamma_1^{\omega_2^b} \circ \eta_2^{\omega_1}(s), \gamma_2^{\omega_1} \circ \gamma_1^{\omega_2^b} \circ \eta_2^{\omega_2^a}(s) \}$ ,

$\gamma^u(s) = \tilde{\sigma}^u(s)$ ,  $c_y = \max \{ \tilde{\sigma}^m(m), \tilde{\sigma}^x(\Delta) \}$ ,  $\sigma^t = 0$ ,  $\sigma^x = \max \{ \beta_1(s,0), 2\beta_2(s,0), 2\alpha_2(s) \}$ ,  $\sigma^y$  est donnée dans (D.120),  $\sigma^u$  dans (D.121),  $c_x = 0$ ,  $c = \max \{ c_y, m \}$ ,  $\tilde{\gamma}^u$  dans (D.122), (D.25) est vérifiée d'après (D.115), (D.26) d'après (D.93) et (D.94), (D.27) d'après (D.80), (D.82), (D.83) et (D.99), (D.28) d'après (D.84), (D.29) d'après (D.85) et (D.88), (D.31) avec  $\bar{\Delta} = \Delta$  puisque  $\max \{ \nu^x(\Delta), \nu^u(\Delta) \} < M$ . Ainsi, puisque (D.88) est garantie, d'après la Proposition D.1.3, pour  $\eta > 1$ , il existe  $\beta \in \mathcal{KL}$  telle que, pour tout  $t \in [t_0, \infty)$  :

$$\begin{aligned} \max \{ |\omega_1(x_1(t))|, |\omega_2^a(x_2(t))| \} &\leq \max \left\{ \beta(\max \{ |\omega_1(x_1(t_0))|, |\omega_2(x_2(t_0))| \}), t - t_0), \right. \\ &\quad \tilde{\gamma}^u(\max \{ \|u_1\|_{[t_0,t]}, \|u_2\|_{[t_0,t]} \}), \eta \tilde{\sigma}^m(m), \\ &\quad \left. \eta \tilde{\sigma}^x(\Delta), \eta m \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.123})$$

Puisque  $\delta^m(s) = \max \{ \eta \tilde{\sigma}^m(s), \eta s \}$  et  $\delta^x(s) = \eta \tilde{\sigma}^x(s)$  pour  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , le résultat désiré est obtenu.  $\square$

### D.3 Théorèmes du petit gain pour des systèmes paramétrés

Les théorèmes de la section précédente sont étendus à la famille paramétrée de systèmes suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_{\tau,1}(t, x_1, x_2, u_1) & \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \\ x_1(t_i^+) = g_{\tau,1}(t_i, x_1(t_i), x_2(t_i), u_1(t_i)) \end{cases} \quad (\text{D.124})$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = f_{\tau,2}(t, x_2, x_1, u_2) & \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \\ x_2(t_i^+) = g_{\tau,2}(t_i, x_2(t_i), x_1(t_i), u_2(t_i)), \end{cases} \quad (\text{D.125})$$

qui correspondent aux systèmes (D.46)-(D.47) paramétrés en  $\tau \in \mathbb{R}_{>0}$ , aussi bien au niveau des dynamiques que des instants de sauts, puisque pour tout  $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ , on rappelle que :

$$v \leq t_i - t_{i-1} \leq \tau. \quad (\text{D.126})$$

Lorsque la classe de systèmes n'est pas affectée par des sauts, on peut remplacer  $v$  par 0.

**Théorème D.3.1** *On suppose qu'il existe  $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{KL}$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_2^{\omega_1}, \gamma_2^u, \eta_1^t, \eta_2^t, \eta_2^{\omega_1}, \eta_2^{\omega_2^a}, \eta_2^u \in \mathcal{K}$ ,  $\gamma_1^{\omega_2^a}, \gamma_1^u, \eta_1^{\omega_1}, \eta_1^{\omega_2^a}, \eta_1^{\omega_2^b}, \eta_1^u \in \mathcal{KK}$ ,  $\bar{\tau} \in [v, \infty)$ , tels que pour tout  $x_1(t_0) \in \mathbb{R}^{n_{x_1}}$ ,  $(u_1, x_2) \in \mathcal{L}_{\infty}^{n_{u_1} + n_{x_2}}$ ,  $\tau \in [v, \bar{\tau})$ ,  $t \geq t_0 \geq 0$ , les solutions de (D.124) vérifient :*

$$\begin{aligned} |\omega_1(x_1(t))| &\leq \max \left\{ \beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, t - t_0), \gamma_1^{\omega_2^a}(\tau, \|\omega_2^a(x_2)\|_{[t_0,t]}), \right. \\ &\quad \left. \gamma_1^u(\tau, \|u_1\|_{[t_0,t]}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.127})$$

$$\begin{aligned} |x_1(t)| &\leq \max \left\{ \alpha_1(|x_1(t_0)|), \eta_1^t(t - t_0), \eta_1^{\omega_1}(\tau, \|\omega_1(x_1)\|_{[t_0,t]}), \eta_1^{\omega_2^a}(\tau, \|\omega_2^a(x_2)\|_{[t_0,t]}), \right. \\ &\quad \left. \eta_1^{\omega_2^b}(\tau, \|\omega_2^b(x_2)\|_{[t_0,t]}), \eta_1^u(\tau, \|u_1\|_{[t_0,t]}) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{D.128})$$

pour tout  $x_2(t_0) \in \mathbb{R}^{n_{x_2}}$ ,  $(u_2, x_1) \in \mathcal{L}_\infty^{n_{u_2} + n_{x_1}}$ ,  $\tau \in [v, \bar{\tau}]$ ,  $t \geq t_0 \geq 0$ , les solutions de (D.125) vérifient :

$$|\omega_2^a(x_2(t))| \leq \max \{ \beta_2(|\omega_2^a(x_2(t_0))|, t - t_0), \gamma_2^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, t]}), \gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}) \} \quad (D.129)$$

$$|\omega_2^b(x_2(t))| \leq \max \{ \alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|), \eta_2^t(t - t_0), \eta_2^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, t]}), \eta_2^{\omega_2^a}(\|\omega_2^a(x_2)\|_{[t_0, t]}), \eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}) \}, \quad (D.130)$$

et, pour tout  $\Delta, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ , soit  $M \in \mathbb{R}_{>0}$  (suffisamment grand) et  $m \in \mathbb{R}_{>0}$  (suffisamment petit) tels que

$$\begin{cases} \delta^m(\bar{\tau}, m) < \varepsilon \\ \max \{ m, \tilde{\sigma}^m(\bar{\tau}, m), \nu^x(\bar{\tau}, \Delta), \nu^u(\bar{\tau}, \Delta) \} < M, \end{cases} \quad (D.131)$$

où pour  $(\tau, s) \in [v, \bar{\tau}] \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,

$$\begin{aligned} \delta^m(\tau, s) &= \max \{ \eta \tilde{\sigma}^m(\tau, s), \eta s \} \\ \tilde{\sigma}^m(\tau, s) &= \max \{ \beta_1(s, 0), \gamma_1^{\omega_2^a}(\tau, \beta_2(s, 0)), \beta_2(s, 0), \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(s, 0)) \} \\ \nu^x(\tau, s) &= \max \{ \beta_1(\rho_1(s), 0), \gamma_1^{\omega_2^a}(\tau, \beta_2(\bar{\rho}_2(s), 0)), \rho_1(s), \beta_2(\bar{\rho}_2(s), 0), \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(\rho_1(s), 0)), \\ &\quad \tilde{\beta}(s, 0), s \} \\ \nu^u(\tau, s) &= \max \{ \gamma_1^u(\tau, s), \gamma_1^{\omega_2^a}(\tau, \gamma_2^u(s)), \gamma_2^u(s), \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(\tau, s)), \tilde{\gamma}^u(\tau, s) \}, \end{aligned}$$

avec  $\eta > 1$ ,  $\tilde{\beta} \in \mathcal{KL}$ ,  $\tilde{\gamma}^u \in \mathcal{KK}$  sont respectivement définis par (D.151) et (D.156). Il existe  $\tau^*(\varepsilon, \Delta) \in [v, \bar{\tau}]$  (défini dans (D.135)), que l'on note  $\tau^*$ , tel que

$$\max \{ \gamma_1^{\omega_2^a}(\tau^*, \gamma_2^{\omega_1}(s)), \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^a}(\tau^*, s)) \} < s \text{ pour } s \in [m, M], \quad (D.132)$$

alors le système (D.124)-(D.125) est uniformément positivement complet pour tout  $\tau \in [v, \tau^*)$ ,  $(x_1(t_0), x_2(t_0)) \in \mathbb{R}^{n_{x_1} + n_{x_2}}$  et  $(u_1, u_2) \in \mathcal{L}_\infty^{n_{u_1} + n_{u_2}}$  avec  $\max \{ |x_1(t_0)|, |\omega_2^a(x_2(t_0))|, \|u_1\|_\infty, \|u_2\|_\infty \} < \Delta$ . De plus, il existe  $\beta \in \mathcal{KL}$ ,  $\sigma \in \mathcal{K}$ ,  $\bar{\sigma} \in \mathcal{KK}$ , tels que pour tout  $\tau \in [v, \tau^*)$ ,  $(x_1(t_0), x_2(t_0)) \in \mathbb{R}^{n_{x_1} + n_{x_2}}$  et  $(u_1, u_2) \in \mathcal{L}_\infty^{n_{u_1} + n_{u_2}}$  où  $\max \{ |x_1(t_0)|, |\omega_2^a(x_2(t_0))|, \|u_1\|_\infty, \|u_2\|_\infty \} < \Delta$ , les solutions de (D.124)-(D.125) satisfont, pour tout  $t \geq t_0 \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \max \{ |\omega_1(x_1(t))|, |\omega_2^a(x_2(t))| \} &\leq \max \left\{ \beta(\max \{ |\omega_1(x_1(t_0))|, |\omega_2^a(x_2(t_0))| \}, t - t_0), \right. \\ &\quad \left. \sigma(\max \{ \|u_1\|_{[t_0, t]}, \|u_2\|_{[t_0, t]} \}), \right. \\ &\quad \left. \bar{\sigma}(\tau^*, \max \{ \|u_1\|_{[t_0, t]}, \|u_2\|_{[t_0, t]} \}), \varepsilon \right\}. \quad (D.133) \end{aligned}$$

**Preuve.** Après avoir prouvé qu'il existe bien  $\tau^*$  tel que (D.132) est satisfait, il est prouvé que le système est uniformément positivement complet lorsque les conditions initiales et les entrées  $(u_1, u_2) \in \mathcal{L}_\infty^{n_{u_1} + n_{u_2}}$  sont convenablement majorées. La propriété de stabilité désirée est ensuite obtenue en invoquant la Proposition D.1.3.

Soient  $\Delta, \varepsilon, \bar{\theta} \in \mathbb{R}_{>0}$  et considérons  $m, M \in \mathbb{R}_{>0}$  tels que (D.131) soit vérifié. On définit l'application bijective suivante

$$\begin{aligned} \gamma : [0, \tau_1] \times [0, s_1] &\longrightarrow [0, \tau_2] \times [0, s_2] \\ (\tau, s) &\longmapsto \max \{ \gamma_1^2(\tau, \gamma_2^1(s)), \gamma_2^1(\gamma_1^2(\tau, s)) \} \end{aligned} \quad (D.134)$$

où  $\tau_1, \tau_2, s_1, s_2 \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\}$ . Soit  $\gamma^{-1}$  l'inverse de  $\gamma$  par rapport à  $\tau$ . On prend la convention que  $\gamma^{-1}(s) = \infty$  si  $s \geq \tau_2$ . Ainsi, il suffit pour garantir (D.132) de prendre :

$$\tau^* = \min \left\{ \bar{\tau}, \min_{s \in [m, M]} \gamma^{-1}(s) \right\}. \quad (\text{D.135})$$

*Etape 1. Complétude positive et majoration de  $\omega_1(x_1)$  et  $\omega_2^a(x_2)$ .*

Soient  $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $\tau \in [v, \tau^*)$ ,  $(x_1(t_0), x_2(t_0)) \in \mathbb{R}^{n_{x_1} + n_{x_2}}$  et  $(u_1, u_2) \in \mathcal{L}_{\infty}^{n_{u_1} + n_{u_2}}$  tels que

$$\max \{ |x_1(t_0)|, |\omega_2^a(x_2(t_0))|, \|u_1\|_{\infty}, \|u_2\|_{\infty} \} < \Delta, \quad (\text{D.136})$$

ce qui implique, d'après la définition de  $M$ ,

$$\begin{aligned} \nu^x(\tau, \max \{ |x_1(t_0)|, |\omega_2^a(x_2(t_0))| \}) &< \nu^x(\bar{\tau}, \max \{ |x_1(t_0)|, |\omega_2^a(x_2(t_0))| \}) \\ &< M \end{aligned} \quad (\text{D.137})$$

$$\begin{aligned} \nu^u(\tau, \max \{ \|u_1\|_{[t_0, \infty)}, \|u_2\|_{[t_0, \infty)} \}) &< \nu^u(\bar{\tau}, \max \{ \|u_1\|_{[t_0, \infty)}, \|u_2\|_{[t_0, \infty)} \}) \\ &< M. \end{aligned} \quad (\text{D.138})$$

Soit  $[t_0, t_{\max})$  l'intervalle maximal d'existence du système (D.124)-(D.125), où  $t_{\max} \in (t_0, \infty]$ .

De par (D.127) et (D.129), on a, pour tout  $t \in [t_0, t_{\max})$  :

$$\begin{aligned} |\omega_1(x_1(t))| &\leq \max \left\{ \beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, t - t_0), \gamma_1^{\omega_2^a}(\tau, \beta_2(|\omega_2^a(x_2(t_0))|, 0)), \right. \\ &\quad \gamma_1^{\omega_2^a}(\tau, \gamma_2^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, t)})), \gamma_1^{\omega_2^a}(\tau, \gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t)})), \\ &\quad \left. \gamma_1^u(\tau, \|u_1\|_{[t_0, t)}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.139})$$

$$\begin{aligned} \|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, t)} &\leq \max \left\{ \beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, 0), \gamma_1^{\omega_2^a}(\tau, \beta_2(|\omega_2^a(x_2(t_0))|, 0)), \right. \\ &\quad \gamma_1^{\omega_2^a}(\tau, \gamma_2^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, t)})), \gamma_1^{\omega_2^a}(\tau, \gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t)})), \\ &\quad \left. \gamma_1^u(\tau, \|u_1\|_{[t_0, t)}) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.140})$$

Nous allons montrer par l'absurde que  $|\omega_1(x_1(t))| < M$  pour tout  $t \in [t_0, t_{\max})$ . Dans un premier temps, on remarque que  $|\omega_1(x_1(t_0))| < M$ , d'après (D.50) et (D.137). On suppose qu'il existe  $t_1 \in (t_0, t_{\max})$  tel que  $|\omega_1(x_1(t_1))| = M$ . Soit  $\bar{t} = \inf \{ t \in (t_0, t_{\max}) : |\omega_1(x_1(t))| = M \}$ .

De par (D.140), on a :

$$\begin{aligned} \|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, \bar{t})} = |\omega_1(x_1(\bar{t}))| &\leq \max \left\{ \beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, 0), \gamma_1^{\omega_2^a}(\tau, \beta_2(|\omega_2^a(x_2(t_0))|, 0)), \right. \\ &\quad \gamma_1^{\omega_2^a}(\tau, \gamma_2^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, \bar{t})})), \gamma_1^{\omega_2^a}(\tau, \gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, \bar{t})})), \\ &\quad \left. \gamma_1^u(\tau, \|u_1\|_{[t_0, \bar{t})}) \right\} \\ &= \max \left\{ \beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, 0), \gamma_1^{\omega_2^a}(\tau, \beta_2(|\omega_2^a(x_2(t_0))|, 0)), \right. \\ &\quad \gamma_1^{\omega_2^a}(\tau, \gamma_2^{\omega_1}(M)), \gamma_1^{\omega_2^a}(\tau, \gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, \bar{t})})), \\ &\quad \left. \gamma_1^u(\tau, \|u_1\|_{[t_0, \bar{t})}) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.141})$$



Notons que, d'après (D.137) et (D.138) :

$$\max \left\{ \beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, 0), \gamma_1^{\omega_2^a}(\bar{\tau}, \beta_2(|\omega_2^a(x_2(t_0))|, 0)), \gamma_1^{\omega_2^a}(\bar{\tau}, \gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, \bar{t}]}), \gamma_1^u(\bar{\tau}, \|u_1\|_{[t_0, \bar{t}]}) \right\} < M, \quad (\text{D.142})$$

de plus, en vu de (D.132) :

$$\gamma_1^{\omega_2^a}(\tau, \gamma_2^{\omega_1}(M)) < \gamma_1^{\omega_2^a}(\bar{\tau}, \gamma_2^{\omega_1}(M)) < M, \quad (\text{D.143})$$

par conséquent, d'après (D.141), (D.142), (D.143),

$$|\omega_1(x_1(\bar{t}))| < M$$

ce qui contredit le fait que  $|\omega_1(x_1(\bar{t}))| = M$ , ainsi puisque  $\omega_1(x_1)$  est continue entre deux instants de saut et d'après (D.48), pour tout  $t \in [t_0, t_{\max})$  :

$$|\omega_1(x_1(t))| < M. \quad (\text{D.144})$$

Par analogie, on peut montrer que pour tout  $t \in [t_0, t_{\max})$  :

$$|\omega_2^a(x_2(t))| < M. \quad (\text{D.145})$$

En conséquence, en invoquant (D.51), (D.128), (D.130), (D.144) et (D.145), on obtient, par l'absurde, que  $t_{\max} = \infty$  et on peut montrer que le système (D.124)-(D.125) est uniformément positivement complet.

*Etape 2. Propriété (D.133).*

Nous allons démontrer que les conditions de la Proposition D.1.3 sont vérifiées. Premièrement, notons que d'après (D.132) et puisque  $\gamma_1^{\omega_2^a}(\cdot, \gamma_2^{\omega_1}(\cdot)) \in \mathcal{KK}$  :

$$\begin{cases} \gamma_1^{\omega_2^a}(\tau, \gamma_2^{\omega_1}(s)) \leq \gamma_1^{\omega_2^a}(\tau^*, \gamma_2^{\omega_1}(m)) < m & \text{si } s \in [0, m) \\ \gamma_1^{\omega_2^a}(\tau^*, \gamma_2^{\omega_1}(s)) < s & \text{si } s \in [m, M]. \end{cases} \quad (\text{D.146})$$

Ainsi, pour  $t \in [t_0, \infty)$ , on a, d'après (D.139), (D.144) et (D.146) :

$$\begin{aligned} |\omega_1(x_1(t))| &\leq \max \left\{ \beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, t - t_0), \gamma_1^{\omega_2^a}(\tau, \beta_2(|\omega_2^a(x_2(t_0))|, 0)), \right. \\ &\quad \left. \gamma_1^{\omega_2^a}(\tau, \gamma_2^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, t]})), \gamma_1^{\omega_2^a}(\tau, \gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]})), \gamma_1^u(\tau, \|u_1\|_{[t_0, t]}) \right\} \\ \|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, t]} &\leq \max \left\{ \beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, 0), \gamma_1^{\omega_2^a}(\tau, \beta_2(|\omega_2^a(x_2(t_0))|, 0)), \right. \\ &\quad \left. \gamma_1^{\omega_2^a}(\tau, \gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]})), \gamma_1^u(\tau, \|u_1\|_{[t_0, t]}), m \right\}, \end{aligned} \quad (\text{D.147})$$

par symétrie,

$$\begin{aligned} \|\omega_2^a(x_2)\|_{[t_0, t]} &\leq \max \left\{ \beta_2(|\omega_2^a(x_2(t_0))|, 0), \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, 0)), \right. \\ &\quad \left. \gamma_2^u(\gamma_1^u(\tau, \|u_1\|_{[t_0, t]})), \gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}), m \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.148})$$

D'autre part, d'après (D.129), pour tout  $t \in [t_0, t_{\max}]$  :

$$|\omega_2^a(x_2(t))| \leq \max \left\{ \beta_2(|\omega_2^a(x_2(\frac{t}{2}))|, \frac{t}{2}), \gamma_2^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[\frac{t}{2}, t]}), \gamma_2^u(\|u_2\|_{[\frac{t}{2}, t]}) \right\}, \quad (\text{D.149})$$

par conséquent, d'après (D.127), (D.147), (D.148) et (D.149) :

$$\begin{aligned} |\omega_1(x_1(t))| &\leq \max \left\{ \beta_1(|\omega_1(x_1(\frac{t}{2}))|, \frac{t}{2}), \gamma_1^{\omega_2}(\tau, \|\omega_2^a(x_2)\|_{[\frac{t}{2}, t]}), \gamma_1^u(\tau, \|u_1\|_{[\frac{t}{2}, t]}) \right\} \\ &\leq \max \left\{ \beta_1(\beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, 0), \frac{t}{2}), \beta_1(\gamma_1^{\omega_2}(\tau, \beta_2(|\omega_2^a(x_2(t_0))|, 0)), \frac{t}{2}), \right. \\ &\quad \beta_1(\gamma_1^{\omega_2}(\tau, \gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]})), \frac{t}{2}), \beta_1(\gamma_1^u(\tau, \|u_1\|_{[t_0, t]}), \frac{t}{2}), \\ &\quad \beta_1(m, \frac{t}{2}), \gamma_1^{\omega_2}(\tau, \beta_2(\beta_2(|\omega_2^a(x_2(t_0))|, 0), \frac{t}{2})), \\ &\quad \gamma_1^{\omega_2}(\tau, \beta_2(\gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, 0)), \frac{t}{2})), \\ &\quad \gamma_1^{\omega_2}(\tau, \beta_2(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(\tau, \|u_1\|_{[t_0, t]})), \frac{t}{2})), \gamma_1^{\omega_2}(\tau, \beta_2(\gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}), \frac{t}{2})), \\ &\quad \gamma_1^{\omega_2}(\tau, \beta_2(m, \frac{t}{2})), \gamma_1^{\omega_2}(\tau, \gamma_2^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[\frac{t}{2}, t]})), \gamma_1^{\omega_2}(\tau, \gamma_2^u(\|u_2\|_{[\frac{t}{2}, t]})), \\ &\quad \left. \gamma_1^u(\tau, \|u_1\|_{[\frac{t}{2}, t]}) \right\} \end{aligned}$$

un résultat analogue est vérifié par  $\omega_2^a(x_2)$ , ainsi,

$$\begin{aligned} \max \{|\omega_1(x_1(t))|, |\omega_2^a(x_2(t))|\} &\leq \max \left\{ \tilde{\beta}(\max \{|\omega_1(x_1(t_0))|, |\omega_2^a(x_2(t_0))|\}, t - t_0), \right. \\ &\quad \sigma^u(\tau, \max \{ \|u_1\|_{[t_0, t]}, \|u_2\|_{[t_0, t]} \}), \tilde{\sigma}^m(\tau, m), \\ &\quad \gamma_1^{\omega_2}(\tau, \gamma_2^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[0, t]})), \\ &\quad \left. \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2}(\tau, \|\omega_1(x_1)\|_{[0, t]})) \right\}, \quad (\text{D.150}) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}(s, t) &= \max \left\{ \beta_1(\beta_1(s, 0), \frac{t}{2}), \beta_1(\gamma_1^{\omega_2}(\tau^*, \beta_2(s, 0)), \frac{t}{2}), \gamma_1^{\omega_2}(\tau^*, \beta_2(\beta_2(s, 0), \frac{t}{2})), \right. \\ &\quad \gamma_1^{\omega_2}(\tau^*, \beta_2(\gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(s, 0)), \frac{t}{2})) \\ &\quad \beta_2(\beta_2(s, 0), \frac{t}{2}), \beta_2(\gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(s, 0)), \frac{t}{2}), \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(\beta_1(s, 0), \frac{t}{2})), \\ &\quad \left. \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(\gamma_1^{\omega_2}(\tau^*, \beta_2(s, 0)), \frac{t}{2})) \right\}, \quad (\text{D.151}) \end{aligned}$$

$$\sigma^u(\tau, s) = \max \{ \bar{\sigma}^u(\tau, s), \tilde{\sigma}^u(s) \}, \quad (\text{D.152})$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^u(\tau, s) &= \max \left\{ \beta_1(\gamma_1^{\omega_2}(\tau, \gamma_2^u(s)), 0), \beta_1(\gamma_1^u(\tau, s), 0), \gamma_1^{\omega_2}(\tau, \beta_2(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(\tau, s)), 0)), \right. \\ &\quad \gamma_1^{\omega_2}(\tau, \beta_2(\gamma_2^u(s), 0)), \gamma_1^{\omega_2}(\tau, \gamma_2^u(s)), \gamma_1^u(\tau, s), \\ &\quad \beta_2(\gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(\tau, s)), 0), \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(\gamma_1^{\omega_2}(\tau, \gamma_2^u(s)), 0)), \\ &\quad \left. \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(\gamma_1^u(\tau, s), 0)), \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(\tau, s)) \right\}, \end{aligned}$$

$$\tilde{\sigma}^u(s) = \max \left\{ \beta_2(\gamma_2^u(s), 0), \gamma_2^u(s) \right\}, \quad (\text{D.153})$$

$$\tilde{\sigma}^m(\tau, s) = \max \{ \beta_1(s, 0), \gamma_1^{\omega_2^a}(\tau, \beta_2(s, 0)), \beta_2(s, 0), \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(s, 0)) \}. \quad (\text{D.154})$$

Soit, pour  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,

$$\sigma^y(\tau, s) = \max \{ \gamma_1^{\omega_2^a}(\tau, \gamma_2^{\omega_1}(s)), \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^a}(\tau, s)) \} \quad (\text{D.155})$$

$$\tilde{\gamma}^u(\tau, s) = \max \{ \tilde{\beta}(\sigma^y(\tau, \sigma^u(\tau, s), 0)), \tilde{\beta}(\sigma^u(\tau, s), 0), \sigma^u(\tau, s) \}. \quad (\text{D.156})$$

On constate que les conditions de la Proposition D.1.3 sont satisfaites. En effet, on identifie  $x = y = \max \{ |\omega_1(x_1)|, |\omega_2^a(x_2)| \}$ ,  $u = \max \{ |u_1|, |u_2| \}$ , pour  $(s, t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2$ ,  $\beta(s, t) = \tilde{\beta}(s, t)$ ,  $\gamma^y(s) = \max \{ \gamma_1^{\omega_2^a}(\tau^*, \gamma_2^{\omega_1}(s)), \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^a}(\tau^*, s)) \}$ ,  $\gamma^u(s) = \sigma^u(\tau^*, s)$ ,  $c_y = \tilde{\sigma}^m(\tau^*, m)$ ,  $\sigma^t(s) = 0$ ,  $\sigma^x(s) = \tilde{\beta}(s, 0)$ ,  $\sigma^y$  est défini dans (D.155) avec  $\tau = \tau^*$ ,  $\sigma^u(s) = \sigma^u(\tau^*, s)$ ,  $c_x = \tilde{\sigma}^m(\tau^*, m)$ ,  $c = \max \{ \tilde{\sigma}^m(\tau^*, m), m \}$ ,  $\tilde{\gamma}^u$  est donné dans (D.156) avec  $\tau = \tau^*$ . L'inégalité (D.25) est satisfaite d'après (D.150), (D.26) d'après (D.144) et (D.145), (D.27) d'après (D.150), (D.28) d'après (D.132), (D.29) d'après (D.131). Par conséquent, puisque (D.136) est vérifiée, en invoquant la Proposition D.1.3, pour  $\eta > 1$  et  $\bar{\Delta} = \Delta$ , on peut montrer qu'il existe  $\beta \in \mathcal{KL}$ ,  $\sigma \in \mathcal{K}$ ,  $\bar{\sigma} \in \mathcal{KK}$  telles que, pour tout  $t \in [t_0, \infty)$ :

$$\begin{aligned} \max \{ |\omega_1(x_1(t))|, |\omega_2^a(x_2(t))| \} &\leq \max \left\{ \beta(\max \{ |\omega_1(x_1(t_0))|, |\omega_2^a(x_2(t_0))| \}), t - t_0), \right. \\ &\quad \sigma(\max \{ \|u_1\|_{[t_0, t]}, \|u_2\|_{[t_0, t]} \}), \\ &\quad \bar{\sigma}(\tau^*, \max \{ \|u_1\|_{[t_0, t]}, \|u_2\|_{[t_0, t]} \}), \\ &\quad \left. \eta \tilde{\sigma}^m(\tau^*, m), \eta m \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.157})$$

Sachant que  $\delta^m(\tau, s) = \max \{ \eta \tilde{\sigma}^m(\tau, s), \eta s \}$ , pour  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , d'après (D.131) :

$$\begin{aligned} \max \{ |\omega_1(x_1(t))|, |\omega_2^a(x_2(t))| \} &\leq \max \left\{ \beta(\max \{ |\omega_1(x_1(t_0))|, |\omega_2^a(x_2(t_0))| \}), t - t_0), \right. \\ &\quad \sigma(\max \{ \|u_1\|_{[t_0, t]}, \|u_2\|_{[t_0, t]} \}), \\ &\quad \left. \bar{\sigma}(\tau^*, \max \{ \|u_1\|_{[t_0, t]}, \|u_2\|_{[t_0, t]} \}), \varepsilon \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.158})$$

□

De la même manière, on peut déduire du Théorème D.2.2 le résultat suivant qui est utilisé au Chapitre 7. Il est intéressant de souligner que celui-ci peut être appliqué pour l'analyse de problèmes de poursuite de trajectoires ou de synchronisation lorsque les données du contrôleur sont échantillonnées en considérant le système comme étant paramétré en la période d'échantillonnage, cf. [163].

**Théorème D.3.2** *Considérons le système (D.124)-(D.125), supposons qu'il existe  $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{KL}$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_2^{\omega_1}, \gamma_2^u, \eta_2^{\omega_1}, \eta_2^{\omega_2^a}, \eta_2^u \in \mathcal{K}$ ,  $\gamma_1^{\omega_2^a}, \gamma_1^{\omega_1^b}, \gamma_1^u, \eta_1^{\omega_1}, \eta_1^{\omega_2^a}, \eta_1^{\omega_1^b}, \eta_1^u \in \mathcal{KK}$ ,  $\bar{\tau} \in [v, \infty]$ , tels que pour tout  $x_1(t_0) \in \mathbb{R}^{n_{x_1}}$ ,  $(u_1, x_2) \in \mathcal{L}_{\infty}^{n_{u_1} + n_{x_2}}$ ,  $\tau \in [v, \bar{\tau}]$ , et  $t \geq t_0 \geq 0$ , les solutions de (D.124)*

vérifient :

$$|\omega_1(x_1(t))| \leq \max \left\{ \beta_1(|\omega_1(x_1(t_0))|, t - t_0), \gamma_1^{\omega_2^a}(\tau, \|\omega_2^a(x_2)\|_{[t_0, t]}), \right. \\ \left. \gamma_1^{\omega_2^b}(\tau, \|\omega_2^b(x_2)\|_{[t_0, t]}), \gamma_1^u(\tau, \|u_1\|_{[t_0, t]}) \right\} \quad (D.159)$$

$$|x_1(t)| \leq \max \left\{ \alpha_1(|x_1(t_0)|), \eta_1^{\omega_1}(\tau, \|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, t]}), \eta_1^{\omega_2^a}(\tau, \|\omega_2^a(x_2)\|_{[t_0, t]}), \right. \\ \left. \eta_1^{\omega_2^b}(\tau, \|\omega_2^b(x_2)\|_{[t_0, t]}), \eta_1^u(\tau, \|u_1\|_{[t_0, t]}) \right\}, \quad (D.160)$$

pour tout  $x_2(t_0) \in \mathbb{R}^{n_{x_2}}$ ,  $(x_1, u_2) \in \mathcal{L}_\infty^{n_{x_1} + n_{u_2}}$ ,  $\tau \in [v, \bar{\tau}]$ , et  $t \geq t_0 \geq 0$ , les solutions de (D.125)

vérifient :

$$|\omega_2^a(x_2(t))| \leq \max \left\{ \beta_2(|\omega_2(x_2(t_0))|, t - t_0), \gamma_2^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, t]}), \gamma_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}) \right\} \quad (D.161)$$

$$|\omega_2^b(x_2(t))| \leq \max \left\{ \alpha_2(|\omega_2^b(x_2(t_0))|), \eta_2^{\omega_1}(\|\omega_1(x_1)\|_{[t_0, t]}), \eta_2^{\omega_2^a}(\|\omega_2^a(x_2)\|_{[t_0, t]}), \right. \\ \left. \eta_2^u(\|u_2\|_{[t_0, t]}) \right\}, \quad (D.162)$$

et, pour tout  $\Delta, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ , soit  $M \in \mathbb{R}_{>0}$  (suffisamment grand) et  $m \in \mathbb{R}_{>0}$  (suffisamment petit) tels que

$$\begin{cases} \delta^m(\bar{\tau}, m) < \varepsilon \\ \max \{m, \tilde{\sigma}^m(\bar{\tau}, m), \nu^x(\bar{\tau}, \Delta), \nu^u(\bar{\tau}, \Delta)\} < M, \end{cases} \quad (D.163)$$

où, pour  $(\tau, s) \in [v, \bar{\tau}] \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  :

$$\begin{aligned} \delta^m(\tau, s) &= \max \{ \eta \tilde{\sigma}^m(\tau, s), \eta s \} \\ \nu^x(\tau, s) &= \max \left\{ \beta_1(\rho_1(s), 0), \gamma_1^{\omega_2^a}(\tau, \beta_2(\bar{\rho}_2(s), 0)), \gamma_1^{\omega_2^b}(\tau, \alpha_2(\bar{\rho}_2(s))), \right. \\ &\quad \gamma_1^{\omega_2^b}(\tau, \eta_2^{\omega_2^a}(\beta_2(\bar{\rho}_2(s), 0))), \beta_2(\bar{\rho}_2(s), 0), \gamma_2^{\omega_1}(\beta_1(\rho_1(s), 0)), \\ &\quad \left. \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\tau, \alpha_2(\bar{\rho}_2(s))))), \rho_1(s), \bar{\rho}_2(s), \tilde{\beta}(s, 0), \tilde{\sigma}^x(\tau, s) \right\} \\ \nu^u(\tau, s) &= \max \left\{ \gamma_1^{\omega_2^a}(\tau, \gamma_2^u(s)), \gamma_1^u(\tau, s), \gamma_1^{\omega_2^b}(\tau, \eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^u(s))), \gamma_1^{\omega_2^b}(\tau, \eta_2^u(s)), \right. \\ &\quad \left. \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^u(\tau, s)), \gamma_2^u(s), \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\tau, \eta_2^u(s))), \tilde{\gamma}^u(\tau, s) \right\}, \end{aligned}$$

avec  $\eta > 1$ ,  $\tilde{\sigma}^m \in \mathcal{KK}$ ,  $\tilde{\beta} \in \mathcal{KL}$ ,  $\tilde{\sigma}^x \in \mathcal{KK}$  et  $\tilde{\gamma}^u \in \mathcal{KK}$  se déduisent respectivement de (D.118), (D.116), (D.119) et (D.122). Il existe  $\tau^*(\varepsilon, \Delta) \in [v, \bar{\tau}]$  (défini par (D.168)), que l'on note  $\tau^*$ , tel que

$$\max \left\{ \gamma_1^{\omega_2^a}(\tau^*, \gamma_2^{\omega_1}(s)), \gamma_1^{\omega_2^b}(\tau^*, \eta_2^{\omega_2^a}(\gamma_2^{\omega_1}(s))), \gamma_1^{\omega_2^b}(\tau^*, \eta_2^{\omega_1}(s)), \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^a}(\tau^*, s)), \right. \\ \left. \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\tau^*, \eta_2^{\omega_2^a}(s))), \gamma_2^{\omega_1}(\gamma_1^{\omega_2^b}(\tau^*, \eta_2^{\omega_1}(s))) \right\} < s \quad \text{pour } s \in [m, M], \quad (D.164)$$

alors, il existe  $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$  tel que pour tout  $\tau \in [v, \tau^*)$ ,  $(x_1(t_0), x_2(t_0)) \in \mathbb{R}^{n_{x_1} + n_{x_2}}$  et  $(u_1, u_2) \in \mathcal{L}_\infty^{n_{u_1} + n_{u_2}}$  avec  $\max \{|x_1(t_0)|, |x_2(t_0)|, \|u_1\|_\infty, \|u_2\|_\infty\} < \Delta$ , les solutions de (D.124)-(D.125) vérifient :

$$|(x_1(t), x_2(t))| \leq \mu \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (D.165)$$

De plus, il existe  $\beta \in \mathcal{KL}$ ,  $\sigma \in \mathcal{K}$ ,  $\bar{\sigma} \in \mathcal{KK}$  tels que pour tout  $\tau \in [v, \tau^*)$ ,  $(x_1(t_0), x_2(t_0)) \in \mathbb{R}^{n_{x_1} + n_{x_2}}$  et  $(u_1, u_2) \in \mathcal{L}_\infty^{n_{u_1} + n_{u_2}}$  avec  $\max \{|x_1(t_0)|, |x_2(t_0)|, \|u_1\|_\infty, \|u_2\|_\infty\} < \Delta$ , les solutions

de (D.124)-(D.125) satisfont, pour tout  $t \geq t_0 \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \max \{ |\omega_1(x_1(t))|, |\omega_2^a(x_2(t))| \} &\leq \max \left\{ \beta(\max \{ |\omega_1(x_1(t_0))|, |\omega_2(x_2(t_0))| \}), t - t_0), \right. \\ &\quad \sigma(\max \{ \|u_1\|_{[t_0,t]}, \|u_2\|_{[t_0,t]} \}), \\ &\quad \bar{\sigma}(\tau^*, \max \{ \|u_1\|_{[t_0,t]}, \|u_2\|_{[t_0,t]} \}), \\ &\quad \left. \delta^x(\tau^*, \Delta), \varepsilon \right\}, \end{aligned} \quad (\text{D.166})$$

où  $\delta^x(\tau, s) = \eta \tilde{\sigma}^x(\tau, s)$ , pour  $(\tau, s) \in [v, \bar{\tau}] \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

**Preuve abrégée.** De la même manière que la preuve du Théorème D.3.1 suit celle du Théorème D.2.1, on utilise ici le Théorème D.2.2 pour obtenir les résultats désirés. Il suffit pour cela de garantir l'existence d'un  $\tau^* \in [v, \bar{\tau}]$  tel que (D.164) est garantie. On définit pour cela la bijection suivante

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} : [0, \tau_1] \times [0, s_1] &\longrightarrow [0, \tau_2] \times [0, s_2] \\ (\tau, s) &\longmapsto \max \left\{ \gamma_1^{\omega_2^a}(\tau^*, \gamma_2^{\omega_1}(s)), \gamma_1^{\omega_2^b}(\tau^*, \eta_2^{\omega_2^a}(\tau^*, \gamma_2^{\omega_1}(s))), \gamma_1^{\omega_2^b}(\tau^*, \eta_2^{\omega_1}(s)), \right. \\ &\quad \left. \gamma_2^{\omega_1}(\tau^*, \gamma_1^{\omega_2^a}(s)), \gamma_2^{\omega_1}(\tau^*, \gamma_1^{\omega_2^b}(\tau^*, \eta_2^{\omega_2^a}(s))), \gamma_2^{\omega_1}(\tau^*, \gamma_1^{\omega_2^b}(\tau^*, \eta_2^{\omega_1}(s))) \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.167})$$

où  $\tau_1, \tau_2, s_1, s_2 \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\}$ . Soit  $\bar{\gamma}^{-1}$  l'inverse de  $\bar{\gamma}$  par rapport à  $\tau$ . On prend la convention que  $\bar{\gamma}^{-1}(s) = \infty$  si  $s \geq \tau_2$ . En choisissant

$$\tau^* = \min \left\{ \bar{\tau}, \min_{s \in [m, M]} \bar{\gamma}^{-1}(s) \right\}, \quad (\text{D.168})$$

(D.164) est bien satisfaite. La preuve se conclut en suivant celle du Théorème D.2.2 et en prêtant attention aux dépendances de la même manière que pour le Théorème D.3.1.  $\square$

## Annexe E

# Fonction de Lyapunov pour le protocole TOD modifié

Nous rappelons la définition du protocole TOD modifié présenté dans §4.3.2. La fonction  $h$  est définie par, pour  $e = (e_1, \dots, e_l) \in \mathbb{R}^{n_e}$  ( $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ ):

$$h(e) = (\mathbb{I} - \Psi(e))e, \quad (\text{E.1})$$

et  $\Psi(e) = \text{diag}(\Psi_1(e)\mathbb{I}_{n_1}, \dots, \Psi_l(e)\mathbb{I}_{n_l})$  avec, pour  $i \in \{1, \dots, l\}$ :

$$\Psi_i(e) = \begin{cases} \text{sat}(\sqrt{l}|e_i|) & \text{si } i = \min(\arg \max_{j \in \{1, \dots, l\}} |e_j|) \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (\text{E.2})$$

où  $\text{sat}(s) = \min(s, 1)$  pour tout  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Le protocole se comporte comme le protocole TOD pour de grands  $|e|$ , mais produit des sauts plus petit pour de faibles valeurs de  $|e|$ .

**Proposition E.0.1** *Le protocole TOD modifié défini par (E.1) est UGAS.*

**Preuve.** Soit  $W(e) = |e|$  pour  $e \in \mathbb{R}^{n_e}$  et supposons sans perte de généralité que  $|e_1| \geq \max_{j \in \{2, \dots, l\}} |e_j|$  et  $h_1(e) = (1 - \text{sat}(\sqrt{l}|e_1|))e_1$ . On peut écrire que :

$$|e_1|^2 = \max_{j \in \{1, \dots, l\}} |e_j|^2 \geq \frac{1}{l} \sum_{j \in \{1, \dots, l\}} |e_j|^2 = \frac{1}{l} |e|^2. \quad (\text{E.3})$$

D'après (E.1),

$$\begin{aligned} |h(e)|^2 &= \sum_{j \in \{2, \dots, l\}} |h_j(e)|^2 + h_1(e)^2 \\ &= \sum_{j \in \{2, \dots, l\}} |e_j|^2 + \left(1 - \text{sat}(\sqrt{l}|e_1|)\right)^2 |e_1|^2 \\ &= |e|^2 + \text{sat}(\sqrt{l}|e_1|) \left(\text{sat}(\sqrt{l}|e_1|) - 2\right) |e_1|^2, \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

en appliquant (E.3) et remarquant que

$$\text{sat}(\sqrt{l}|e_1|) \left( \text{sat}(\sqrt{l}|e_1|) - 2 \right) \leq 0 \quad (\text{E.5})$$

et que  $s \mapsto \left| \text{sat}(\sqrt{l}s) \left( \text{sat}(\sqrt{l}s) - 2 \right) \right|$  est croissante sur  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  (puisque  $\text{sat}$  est croissante sur  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ), on a :

$$\begin{aligned} |h(e)|^2 &= |e|^2 - \left| \text{sat}(\sqrt{l}|e_1|) \left( \text{sat}(\sqrt{l}|e_1|) - 2 \right) \right| |e_1|^2 \\ &\leq |e|^2 - \frac{1}{l} \left| \text{sat}(|e|) \left( \text{sat}(|e|) - 2 \right) \right| |e|^2 \\ &= \left[ 1 + \frac{1}{l} \text{sat}(|e|) \left( \text{sat}(|e|) - 2 \right) \right] |e|^2. \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Ainsi, pour tout  $e \in \mathbb{R}^{n_e}$ ,

$$\begin{aligned} W(h(e)) - W(e) &= |h(e)| - |e| \\ &\leq -\alpha_3(W(e)), \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

où  $\alpha_3(s) = \left[ 1 - \sqrt{1 + \frac{1}{l} \text{sat}(s) \left( \text{sat}(s) - 2 \right)} \right] s$  avec  $\alpha_3 \in \mathcal{K}$ . Pour  $W(e) \geq 1$ , on retrouve la même inégalité que pour le TOD :

$$W(h(e)) \leq \sqrt{\frac{l-1}{l}} W(e). \quad (\text{E.8})$$

Considérons le cas où  $W(e) \leq 1$ . Une fonction  $\varrho \in \mathcal{K}_\infty$  est construite, comme dans la preuve de la Proposition 4.3.1, de telle sorte que, pour  $\hat{W} = \varrho \circ W$  et tout  $e \in \mathbb{R}^{n_e}$ ,

$$\hat{W}(h(e)) \leq \sqrt{\frac{l-1}{l}} \hat{W}(e), \quad (\text{E.9})$$

on prend par exemple :

$$\varrho(s) = \begin{cases} \exp \left( \int_1^s \frac{2}{a(\eta)} d\eta \right) & \text{pour } s > 0 \\ 0 & \text{pour } s = 0, \end{cases} \quad (\text{E.10})$$

avec  $a(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^s \frac{\min\{\eta, \frac{2\sqrt{l}}{\sqrt{l-1}} \alpha_3(\eta)\}}{1+\eta^2} d\eta$ . On remarque que, d'après la preuve de la Proposition 4.3.1, les propriétés Lipschitziennes de  $W$  sont également vérifiées par  $\hat{W}$  puisque  $\rho \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\geq 0})$ . Soit

$$\tilde{W}(e) = \begin{cases} W(e) & \text{pour } W(e) \geq 1 \\ \hat{W}(e) & \text{pour } W(e) < 1, \end{cases} \quad (\text{E.11})$$

$\tilde{W}$  est continue sur  $\mathbb{R}^{n_e}$  puisque  $\varrho(1) = 1$ . Le protocole TOD modifié est bien UGAS, d'après la Définition 4.3.1 avec

$$\alpha_1(s) = \alpha_2(s) = \begin{cases} s & \text{pour } s \geq 1 \\ \varrho(s) & \text{pour } s \in [0,1), \end{cases} \quad (\text{E.12})$$

qui sont bien de classe  $\mathcal{K}_\infty$  et  $\rho = \sqrt{\frac{l-1}{l}}$ . De plus on peut montrer que  $\tilde{W}$  est localement Lipschitzienne, sachant que  $W$  et  $\hat{W}$  le sont et que  $\tilde{W}$  est continue sur  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ .  $\square$

## Annexe F

# Observateur adaptatif continu-discret pour des systèmes affines en l'état



# Continuous-discrete adaptive observers for state affine systems

Tarek Ahmed-Ali<sup>a</sup>, Romain Postoyan<sup>b</sup>, Françoise Lamnabhi-Lagarrigue<sup>c</sup>

<sup>a</sup>Univ Caen, GREYC-ENSICAEN, UMR CNRS 6072- 6 Boulevard du Maréchal Juin 14050 Caen Cedex

<sup>b</sup>Univ Paris-Sud, LSS-CNRS Supélec, 3 rue Joliot Curie, 91192 Gif-sur-Yvette, France

<sup>c</sup>EECI, LSS-CNRS Supélec, 3 rue Joliot Curie, 91192 Gif-sur-Yvette, France

---

## Abstract

The observation of a class of multi-input multi-output (MIMO) state affine systems with constant unknown parameters and discrete time output measurements is addressed. Assuming some persistent excitation conditions to hold and the sampling steps to satisfy some boundedness hypotheses, system observability is ensured and a class of global exponential observers is synthesized.

*Key words:* Sampled-data observer, adaptive observer.

---

## 1 Introduction

The synthesis of observers for continuous-time systems with sampled measurements has received much attention over the past decades. A classical solution used to handle the discrete nature of the system output consists either in appropriately discretizing a known continuous time observer [2] or in synthesizing a discrete-time observer for a consistent approximation of the exact discretized system [11,2] for instance. Numerical schemes can also be applied [20,7], but such observers usually require high computational capacities [7] and are only local. An alternative to these approaches is to design a continuous-time observer fed by discrete-time system measures and thus called *continuous-discrete* observer. This approach is particularly interesting when the observer dynamics is much faster than the system one (that is the case when high speed processor computers are used). Therefore, the approximation of having a continuous-time observer, although implemented digitally, is acceptable. Moreover, contrary to the discrete-time approach, obtained stability properties are global and asymptotic (in most cases) [12,13,22] and not semiglobal practical like in the discrete-time formulation [2].

Sampled system measures imply some additional difficulties for the observation compared with the case where outputs are continuously known. Indeed, despite the fact that continuous observation methods have to be adapted to the periodic availability of the output, the system observability also depends on the sampling times. For obvious reasons, if the time interval between two successive measures is too large, the system may lose its observability, as shown in [22]. Furthermore, considering nonlinear systems with inputs, it is well known that there may exist inputs which make the system unobservable. Hence, the notion of *universal input* has been introduced to denote the class of inputs which make considered systems observable. This class of inputs, called *regularly persistent* inputs, has been characterized for some classes of state affine systems in [8,9,14].

Existing continuous-discrete time observers are mostly based on extended Kalman filter techniques. In [12], a class of global exponential observers has been synthesized for multi-input single-output nonlinear systems put into a canonical form. The principle is to divide the observation into two steps: one, called *prediction*, between sampling times, that consists of ‘copying’ system dynamics with no correction term and updating the dynamical observation gain, and another one, at the sampling times, where the error between the system and the observer output is used to correct the estimate state trajectory. Deriving some conditions on the sampling times through the observer stability analysis, the exponential convergence of the observation error is then

---

\* Corresponding author T. Ahmed-Ali. Tel. +33(0)298348856. Fax +33(0)298348746

Email addresses: tarek.ahmed-ali@greyc.ensicaen.fr (Tarek Ahmed-Ali), postoyan@lss.supelec.fr (Romain Postoyan), lamnabhi@lss.supelec.fr (Françoise Lamnabhi-Lagarrigue).

ensured. The work of [12] has been extended to other classes of systems. In [21], observers for a MIMO class of state affine systems where the dynamical matrix depends on the input, have been designed when the inputs are regularly persistent. In [3], a similar method has been used for a larger class of systems and applied to the observation of emulsion copolymerization process. The observation of a class of systems with output injection has been treated in [22]. Recently, in [15], a high gain continuous-discrete observer has been developed but using constant observation gains.

On the other hand, it appears that for a number of physical processes some parameters may not be known, that makes existing results on continuous-discrete time observers non-applicable. In this paper, the observation of the class of systems studied in [21] is extended to the adaptive case. Early developments of adaptive observers were made in [16,17] for linear systems. Adaptive observation of nonlinear systems have been investigated using different techniques that basically rely on linear adaptive algorithms, through coordinate change or output injection for instance, see [4,5,10,19,23]. In [24], a unified interpretation of the latter references has been proposed that emphasizes their characteristics. In [6], adaptive observation for state affine systems in continuous-time is discussed and the work [23] is extended. In this study, the approach developed in [6] on extended Kalman filters for a class of MIMO linear time-variant, is adapted to the sampled measures problem at the difference that, here, the estimation law is based on discrete-time adaptive techniques.

After having defined the class of systems considered and recalled the main objective, a class of adaptive continuous-discrete observers is designed. Assuming some persistent excitation conditions and some hypotheses on the system output sampling times to hold, the global exponential stability of the observation error is proved. Finally, a simulation example is performed which illustrates the design procedure.

## 2 Nomenclature

First some mathematical notation is introduced. Let  $\mathbb{R} \stackrel{\text{def}}{=} (-\infty, \infty)$ ,  $\mathbb{R}_+ \stackrel{\text{def}}{=} (0, \infty)$ ,  $\mathbb{R}_0^+ \stackrel{\text{def}}{=} [0, \infty)$  and defined the Euclidean norm  $\|\cdot\|$ . For  $p, q, n, m \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}^{p \times q}$  represents the set of real matrices of order  $p \times q$  and  $\mathbb{I}_p \in \mathbb{R}^{p \times p}$  stands for the identity matrix of order  $p \times p$ . If  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{p \times q}$  and  $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  denotes the space of all continuous functions mapping  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ . If  $P \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $P > 0$  means that  $P$  is positive definite. The notation  $\|P\|$ , for  $P \in \mathbb{R}^{p \times q}$ , represents the  $L_2$ -norm of  $P$ . For  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{p \times q}$  and  $t \in \mathbb{R}$ , the notation  $A(t^-)$  denotes the left limit of  $A$  at instant  $t$ , if it exists. In all this study, the initial time is called  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

## 3 Problem statement

The following class of systems is considered, for  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $k \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(u)x(t) + b(u) + \phi(u)\theta, \\ y(t_k) &= Cx(t_k), \end{aligned} \quad (1)$$

where  $x \in \mathbb{R}^n$  is the instantaneous *state* vector,  $u \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  the *input* vector ( $\mathcal{D}$  is compact),  $y \in \mathbb{R}^p$  is the *output* vector,  $\theta \in \mathbb{R}^l$  is a vector of *unknown* constant parameters,  $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{n \times n})$ ,  $b \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $\phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{n \times l})$  are known, with  $n, m, p, l \in \mathbb{N}$  and  $x_0 = x(t_0)$ . The notation  $(t_k)_{k \geq 0}$  represents a strictly increasing sequence such that  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$  that models the sampling times. The maximum sampling step is denoted  $\tau = \max_{k \geq 0}(\tau_k)$ , where  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ . Note that the class of systems (1) contains systems of the form, for  $k \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t, u)x(t) + b(t, u) + \phi(t, u)\theta, \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \\ y(t_k) &= Cx(t_k), \quad t = t_{k+1}, \end{aligned} \quad (2)$$

since the dependence on  $u$  can be considered like a time dependence.

The main objective of this paper is to synthesize a global exponential adaptive observer, as defined in Section 4.3, for system (1).

## 4 Observer design and stability study

### 4.1 Observation structure

The proposed observer can be viewed as an extension to the adaptive case of the structure developed in [21]. An auxiliary variable,  $\lambda$ , which plays a key role in the convergence of parameters estimator, is notably introduced like in [23,6].

For  $k \geq 0$ ,  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(u)\hat{x}(t) + b(u) + \phi(u)\hat{\theta}(t_k), \quad (3a)$$

$$\dot{S}(t) = -A(u)^T S(t) - S(t)A(u) - \mu S(t), \quad (3b)$$

$$\dot{\lambda}(t) = A(u)\lambda(t) + \phi(u), \quad (3c)$$

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = 0, \quad (3d)$$

for  $t = t_{k+1}$ ,

$$\begin{aligned} \hat{x}(t_{k+1}) &= \hat{x}(t_{k+1}^-) + \left( \lambda(t_{k+1})\Delta(t_{k+1}) \right. \\ &\quad \left. + \rho\tau_k S^{-1}(t_{k+1})C^T \right) (y(t_{k+1}) - C\hat{x}(t_{k+1}^-)), \end{aligned} \quad (4a)$$

$$S(t_{k+1}) = S(t_{k+1}^-) + \tau_k C^T C, \quad (4b)$$

$$\lambda(t_{k+1}) = M(\tau_k, t_{k+1}) \lambda(t_{k+1}^-), \quad (4c)$$

$$\hat{\theta}(t_{k+1}) = \hat{\theta}(t_k) + \Delta(t_{k+1})(y(t_{k+1}) - C\hat{x}(t_{k+1}^-)), \quad (4d)$$

with,  $\Delta(t_{k+1}) = \frac{\epsilon}{1 + \epsilon \|\lambda(t_{k+1}^-)^T C^T \Sigma(t_{k+1}^-) C \lambda(t_{k+1}^-)\|} \lambda(t_{k+1}^-)^T C^T \times \Sigma(t_{k+1}^-)$ , and  $M(\tau_k, t_{k+1}) = (\mathbb{I}_n - \rho \tau_k S^{-1}(t_{k+1}) C^T C)$ .

The notation  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  and  $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^l$  respectively denote the estimate of the state,  $x$ , and the estimate of the unknown vector parameter  $\theta$ ,  $S(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  is the so-called observation gain,  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Sigma \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{p \times p})$  is symmetric positive definite for all  $t$ , and  $\mu, \epsilon \in \mathbb{R}_+$ ,  $\rho \in [1, \infty)$  are some design parameters. Note that the existence of the inverse of matrix  $S$  will be ensured in the following. The initial conditions are denoted  $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $S_0 > 0$  symmetric,  $\lambda_0 \in \mathbb{R}^n$  and  $\hat{\theta}_0 \in \mathbb{R}^l$ .

The observer (3a-d)-(4a-d) is composed of a predictor part (3a-d) and a correction one (4a-d). During  $[t_k, t_{k+1})$ , the state estimate  $\hat{x}$  has the same dynamics than system (1) but using the estimate of the unknown variable,  $\hat{\theta}$ , that is kept constant (3d). As commonly done for high gain observers, the matrix  $S$  is defined as the solution of the differential equation (3b), except that a term of the form  $C^T C$  is usually added in order to ensure  $S$  to be positive definite, see for example in [21]. At each sampling instants, observer trajectory is corrected taking into account the available measure (4a). Thank to (4b), conditions on the inputs and restriction on  $\tau$ , it will be shown that matrix  $S$  remains positive definite. The dynamics of  $\hat{\theta}$  are defined by a least mean square law (4d), that will guarantee the convergence of the estimate to the true value, under some persistent excitation conditions. The usefulness of variable  $\lambda$  will be shown in the stability analysis, like in [23,6].

**Remark 1** *If the parameter vector  $\theta$  is equal to zero, system (3a-d)-(4a-d) has the same form than in [21].*

The dynamical equation satisfied by the state observation error,  $e = x - \hat{x}$ , is, in view of (1), (3a-d) and (4a-d), for  $k \geq 0$ :

$$\dot{e}(t) = A(u)e(t) + \phi(u)\tilde{\theta}(t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (5a)$$

$$e(t_{k+1}) = (M(\tau_k, t_{k+1}) - \lambda(t_{k+1})\Delta(t_{k+1}C))e(t_{k+1}^-), \quad t = t_{k+1}. \quad (5b)$$

The following persistent excitation condition is assumed to hold for system (1) in order to guarantee the identifiability of vector  $\theta$  [23,6].

**Hypothesis 2** *Let  $\lambda(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times s}$  be the matrix solution of the impulsive ordinary differential equation (3c)-(4c). The matrix  $\lambda(\cdot)$  is persistently excited so that there exist  $k_1 \in \mathbb{N}$ ,  $\delta > 0$  and  $\Sigma(\cdot) \in \mathcal{C}([t_0, \infty), \mathbb{R}^{p \times p})$  a time-dependent bounded symmetric positive definite matrix,*

such that, for all  $k \geq 0$ ,

$$\sum_{j=k}^{k+k_1} \lambda^T(t_j^-) C^T \Sigma(t_j) C \lambda(t_j^-) \geq \delta \mathbb{I}_n. \quad (6)$$

Before stating the main theorem, some preliminary definition and results are required.

**Definition 3** *Consider system, for  $t \in [t_0, \infty)$ :*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(u)x(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (7)$$

and the transition matrix  $\Psi_u(\cdot, t_0)$  associated to system (7), such that  $\Psi_u(t_0, t_0) = \mathbb{I}_n$ , the bounded input  $u$  is said to be regularly persistent if there exist  $t_1, t_2 \in [t_0, \infty)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ , such that, for all  $t \geq t_2$ ,

$$\int_t^{t+t_1} \Psi_u^T(s, t_0) C^T C \Psi_u(s, t_0) ds \geq \alpha \mathbb{I}_n. \quad (8)$$

As mentioned in Introduction, regularly persistent inputs are the class of inputs that guarantee the system to be observable. For more details, see [8,9,14].

**Remark 4** *In practice, condition (8) can be checked off-line, when  $u(t)$  is known for all  $t \in [t_0, \infty)$ , using numerical tools for approximating the integral term. Thus, coefficients  $t_1$  and  $\alpha$  are obtained off-line in order to derive a sampling period that satisfies the bound given in (9).*

#### 4.2 Technical results

The following proposition guarantees that matrix  $S$  is positive definite for any  $t \in [t_0, \infty)$ , under conditions on the types of inputs applied to the system and  $\tau$ .

**Proposition 5** *Let  $u$  be a regularly persistent input for system (1), for all  $\mu \geq \xi$  where  $\xi = 2 \sup_{t \geq t_0} \|A(u(t))\|$ , if  $\tau \leq \bar{\tau}$ , where  $\bar{\tau}$  is the unique positive term such that  $\bar{\tau} = \frac{\alpha e^{-\xi(t_1 + \bar{\tau})}}{2\xi \|C^T C\| (t_1 + \bar{\tau})}$ , then, for all  $S(t_0)$  symmetric positive definite, there exist constants  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}_+$  such that, for  $t \in [t_0, \infty)$ ,*

$$\beta_1 \mathbb{I}_n \leq S(t) \leq \beta_2 \mathbb{I}_n.$$

The proof of Proposition 5 can be found in [21].

**Remark 6** *a) Since considered inputs belong to a compact set  $\mathcal{D}$ , and because  $A$  is continuous,  $\xi$  is well defined. b) There always exists such a  $\bar{\tau}$ ; indeed writing condition  $\bar{\tau} = \frac{\alpha e^{-\xi(t_1 + \bar{\tau})}}{2\xi \|C^T C\| (t_1 + \bar{\tau})}$  as  $2\xi \|C^T C\| (t_1 + \bar{\tau}) \bar{\tau} = \alpha e^{-\xi(t_1 + \bar{\tau})}$ , loosely speaking it is clear that, for positive values of  $\bar{\tau}$ ,*

the polynomial term on the left-hand side will ‘cross’ the exponential on the right-hand side at a unique point.

c) Considering regularly persistent inputs, the positive definition of the solution  $S$  of equations (3b)-(4b) can only be ensured under condition on the sampling steps, otherwise the solution of equation (3b) may become non-positive definite [21].

d) Notice that  $\beta_1, \beta_2$  implicitly depend on the maximum allowable sampling interval  $\bar{\tau}$ .

**Lemma 7** Suppose the following system to be globally exponentially stable,

$$\zeta(t_{k+1}) = F(t_k)\zeta(t_k),$$

and let  $u$  be a bounded and integrable function of time that vanishes exponentially fast, then, system

$$z(t_{k+1}) = F(t_k)z(t_k) + u(t_k), \quad k \geq 0,$$

converges exponentially to 0.

**Remark 8** This lemma is a straight extension of Lemma III.1, in [18], for discrete-time systems.

#### 4.3 Stability analysis

System (3a-d)-(4a-d) is said to be a *global exponential adaptive observer* for system (1) if, along solutions to (1), (3a-d)-(4a-d):

- (i) for all  $(x_0, \hat{x}_0, \lambda_0, \hat{\theta}_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$  and any  $S_0 > 0$  symmetric, there exist  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+$ , such that for all  $t \geq t_0$ ,  $\|e(t)\| \leq a_1 e^{-b_1(t-t_0)} \|e_0\|$  and  $\|\tilde{\theta}(t)\| \leq a_2 e^{-b_2(t-t_0)} \|\tilde{\theta}_0\|$ .
- (ii) there exist  $\bar{\lambda}, \bar{S} \in \mathbb{R}_+$ , such that, for all  $t \geq t_0$ ,  $\|\lambda(t)\| \leq \bar{\lambda}$ ,  $\|S(t)\| \leq \bar{S}$ .

Condition (i) ensure the exponential convergence of the state and variable estimates to the corresponding true value, whereas (ii) ensure that the other observer variables do not explode in (in)finite time.

**Theorem 9** Assuming Hypothesis 2 to hold, the input to be regularly persistent, and choosing  $\mu \geq \xi$  if,

$$\tau \leq \min\left\{\frac{(2\rho-1)\beta_1}{\rho^2\|C\|^2}, \bar{\tau}\right\}, \quad (9)$$

then system (3a-d)-(4a-d) is a global exponential adaptive observer for system (1).

**Proof.** Like in [23,6], the variable  $\eta$  is introduced as  $\eta = e - \lambda\tilde{\theta}$ , where  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ . Firstly, the global exponential convergence of  $\eta$  to zero, along the solutions to dynamical equations to (1) and (3a-d)-(4a-d), is

proved. After having noticed that variables  $\lambda$  and  $S$  remain bounded, invoking Lemma 7, the exponential convergence to the origin of errors  $e$  and  $\tilde{\theta}$  is deduced. The candidate Lyapunov function is defined as, for  $t \geq t_0$ :

$$V(t) = \eta(t)^T S(t)\eta(t).$$

Note that, according to Proposition 5 and since (9) is satisfied, the symmetric matrix  $S$  is positive definite and of bounded norm. Let  $k \geq 0$ .

1. Let  $t \in [t_k, t_{k+1})$ . The variable  $\eta$  satisfies the following dynamical equation, in view of (5a) and because, here,  $\dot{\tilde{\theta}} = 0$  (3d):

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= A(u)e(t) + \phi(u)\tilde{\theta}(t_k) - \dot{\lambda}(t)\tilde{\theta}(t_k) \\ &= A(u)\eta(t) + \left(A(u)\lambda(t) + \phi(u) - \dot{\lambda}(t)\right)\tilde{\theta}(t_k). \end{aligned}$$

Thus, according to (3c),

$$\dot{\eta}(t) = A(u)\eta(t). \quad (10)$$

Consequently, differentiating the Lyapunov function along the solutions of (10),

$$\dot{V}(t) = \eta(t)^T \left(S(t)A(u) + A(u)^T S(t) + \dot{S}(t)\right) \eta(t).$$

From (3b),

$$\dot{V}(t) = -\mu V(t). \quad (11)$$

Integrating (11) over  $[t_k, t]$ ,

$$V(t) = e^{-\mu(t-t_k)} V(t_k), \quad (12)$$

and so,

$$V(t_{k+1}^-) = e^{-\mu\tau_k} V(t_k). \quad (13)$$

2. Consider now  $t = t_{k+1}$ , it can be shown that, in view of (5b),

$$\begin{aligned} \eta(t_{k+1}) &= (M(\tau_k, t_{k+1}) - \lambda(t_{k+1})\Delta(t_{k+1})C)e(t_{k+1}^-) \\ &\quad - \lambda(t_{k+1})\tilde{\theta}(t_{k+1}) \\ &= M(\tau_k, t_{k+1}) \left(\eta(t_{k+1}^-) + \lambda(t_{k+1}^-)\tilde{\theta}(t_{k+1}^-)\right) \\ &\quad - \lambda(t_{k+1}) \left(\Delta(t_{k+1})C e(t_{k+1}^-) + \tilde{\theta}(t_{k+1}^-)\right). \end{aligned}$$

Remarking that  $\tilde{\theta}(t_{k+1}^-) = \tilde{\theta}(t_k)$  in view of (3d), and using (4b-d),

$$\eta(t_{k+1}) = M(\tau_k, t_{k+1})\eta(t_{k+1}^-). \quad (14)$$

According to (4d),

$$\begin{aligned}
V(t_{k+1}) &= \eta(t_{k+1})^T S(t_{k+1}) \eta(t_{k+1}) \\
&= \eta(t_{k+1}^-)^T M(\tau_k, t_{k+1})^T \\
&\quad \times (S(t_{k+1}^-) + \tau_k C^T C) M(\tau_k, t_{k+1}) \eta(t_{k+1}^-) \\
&= V(t_{k+1}^-) - (2\rho - 1) \tau_k \|C\eta(t_{k+1}^-)\|^2 \\
&\quad + \rho^2 \tau_k^2 \eta(t_{k+1}^-) C^T C S^{-1}(t_{k+1}) C^T C \eta(t_{k+1}^-).
\end{aligned}$$

Invoking Proposition 5, the following inequality holds:

$$\begin{aligned}
V(t_{k+1}) &\leq V(t_{k+1}^-) - \tau_k \left( (2\rho - 1) - \frac{\rho^2 \tau_k \|C\|^2}{\beta_1} \right) \\
&\quad \times \|C\eta(t_{k+1}^-)\|^2. \quad (15)
\end{aligned}$$

Using (13) and because (9) holds,

$$V(t_{k+1}) \leq e^{-\mu\tau_k} V(t_k). \quad (16)$$

Consequently, according to (12) and (16), for all  $t \geq t_0$ ,

$$\begin{aligned}
V(t) &\leq e^{-\mu(t-t_0)} V(t_0), \\
\|\eta(t)\| &\leq \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} e^{-\frac{\mu}{2}(t-t_0)} \|\eta(t_0)\|,
\end{aligned}$$

the exponential stability of  $\eta = 0$  for system (10)-(14) is proved. Using similar arguments than for variable  $\eta$ , in view of (3c) and (4c) and since function  $\phi$  is continuous and  $u$  takes values in a compact set, it can be easily shown that there exists  $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}_+$  such that  $\|\lambda(t)\| \leq \bar{\lambda}$ , for  $t \geq t_0$ . On the other hand, according to (4d),

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}(t_{k+1}) &= (\mathbb{I}_n - \Delta(t_{k+1}) C \lambda(t_{k+1}^-)) \tilde{\theta}(t_k) \\
&\quad - \Delta(t_{k+1}) C \eta(t_{k+1}^-). \quad (17)
\end{aligned}$$

Attention is focused on the homogenous part of (17), which is typical of the normalized least mean square algorithm:

$$\tilde{\theta}(t_{k+1}) = (\mathbb{I}_n - \Delta(t_{k+1}) C \lambda(t_{k+1}^-)) \tilde{\theta}(t_k). \quad (18)$$

Using Theorem 2.8 in [1], since Hypothesis 2 holds,  $\tilde{\theta} = 0$  is globally exponentially stable for system (18). The non-homogenous part of equation (17) vanishes exponentially fast, because of the exponential convergence of  $\eta$  to 0 and the boundedness of  $\Delta$ . Therefore, applying Lemma 7,  $\tilde{\theta} = 0$  is globally exponentially stable for system (17). Writing the observation error as  $e = \eta + \lambda \tilde{\theta}$ , the exponential convergence of  $e$  to 0, along the solutions of (5a-b), can be deduced from the facts that  $\tilde{\theta}$  and  $\eta$  converge with an exponential rate to zero and that  $\lambda$  is bounded.  $\square$

**Remark 10** Throughout the paper, no stability assumption is supposed to hold for  $A$ . In view of Theorem 9, even unstable matrices can be considered.

**Remark 11** The sampling interval must satisfy (9). In practice, after having numerically found admissible  $t_1$  and  $\alpha$ , the upper bound in (9) can be determined using parameters values.

#### 4.4 Discussion on parameters choice

The selection of the observer parameters  $\mu$ ,  $\rho$ ,  $\epsilon$  illustrate the logical compromise between convergence speed and bound on  $\tau$ .

As it can be seen through (3b), parameter  $\mu$  (taken bigger than  $\xi$  in view of Theorem 9) acts on the observation gain in such a way that taking big values will increase the convergence speed of the observer at the price of a smaller admissible  $\tau$ . Indeed, this will make the solution of (3b) goes faster to non-positive definite matrices and then decrease the value of  $\beta_1$  (see Remark 6d). Concerning  $\rho$ , a quick analysis could conclude that  $\rho = 1$  is the optimal value to be chosen in view of (9), but a bigger value will help  $\eta$  to converge faster to 0, again, under more severe conditions on  $\tau$  (see (14) and the definition of  $M$ ). On the other hand, parameter  $\epsilon$  allows to modulate the convergence of the parameter estimate.

## 5 Illustrative example

For illustrative purposes, consider a second-order system modeled by, for  $k \geq 0$  and  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \sin(u)x_2, \\
\dot{x}_2 &= -0.1 \sin(u)x_1 - 0.2x_2 + 0.1 \cos(u)\theta, \\
y &= x_1,
\end{aligned} \quad (19)$$

where  $\theta$  is unknown and  $u(t) = 2 - (\cos(0.1t))^2$ . The sampling step is chosen constant at  $\tau = 0.11$ . An observer of the form (3a-d)-(4a-d) is designed for system (19). The design parameters have been fixed at  $\rho = 1$ ,  $\epsilon = 1$ ,  $\mu = 2.1$  and  $\Sigma = 1$ . Using numerical tools, the following values have been found  $\alpha = 0.5$ ,  $t_1 = 0.01$ ,  $\xi = 2.0396$ ,  $\beta_1 \geq 0.1125$ , consequently, condition (9) is satisfied:  $\tau \leq \min\{0.1125, 0.21\}$ . Therefore, since the input is a persistent input for system (19), Theorem 9 applies. The initial conditions are  $t_0 = 0$ ,  $x_1(0) = x_2(0) = 50$ ,  $\hat{x}_1(0) = \hat{x}_2(0) = \hat{\theta}(0) = 0$  and  $\theta = 2$ . For comparative purpose, the Euler discretization of observer (11-15) in [6] has been simulated. Figure 1 shows that, contrary to the continuous-time observer, the state  $\hat{x}_2$  given by the emulation does not converge asymptotically to  $x_2$  but oscillates. As mentioned in the Introduction, this fact is not surprising since only semiglobal practical stability properties can be established when

using the emulation of a continuous-time observer [2]. Moreover, the behaviour of emulation states present a big overshoot by opposite to the results obtained by the observer (3a-d)-(4a-d). Obtained parameter estimates converge slowly asymptotically to the true value for the continuous-discrete observer, and again, practically and with large overshoots for the emulation. Although not presented here, simulation results show that the continuous-time observer still works efficiently for larger values of  $\tau$  like  $\tau = 3$  whereas, for such a value, the emulation states explose.

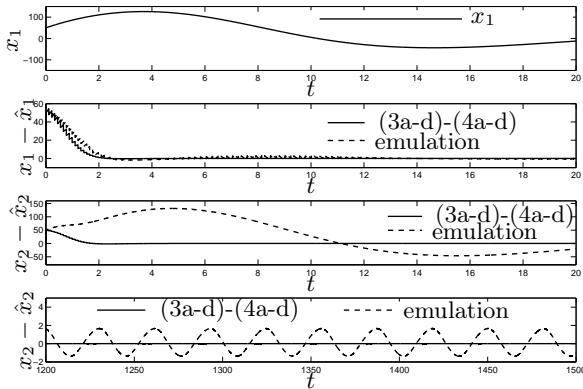


Figure 1. State  $x_1$  and convergence of the state observation errors

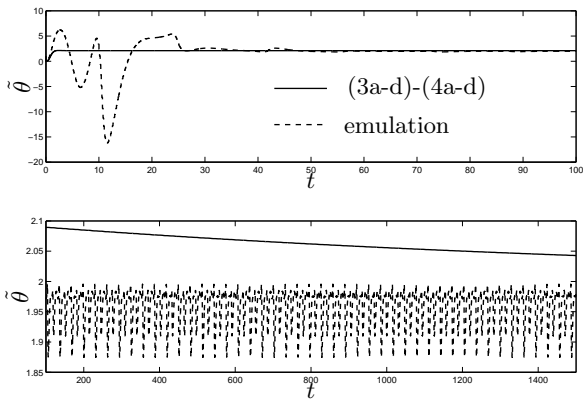


Figure 2. Convergence of the parameter estimate

## 6 Conclusions

The adaptive observation of a class of continuous MIMO systems with sampled measurements has been realized. Assuming the input acting on the system to satisfy some persistent excitation conditions and the sampling steps to respect given bounds, a class of global exponential observers has been developed.

## References

[1] B.D.O. Anderson, R.R. Bitmead, C.R. Johnson, P.V. Kokotović, R.L. Kosut, I.M.Y. Mareels, L. Praly, and

B.D. Riedle. *Stability of Adaptive Systems: Passivity and Averaging Analysis*. Signal Processing, Optimization and Control, MIT Press, Cambridge, U.S.A., 1986.

- [2] M. Arcak and D. Nešić. A framework for nonlinear sampled-data observer design via approximate discrete-time models and emulation. *Automatica*, 40:1931–1938, 2004.
- [3] C.-M. Astorga, N. Othman, S. Othman, H. Hammouri, and T.-F. McKenna. Nonlinear continuous-discrete observers: applications to emulsion polymerization reactors. *Control Eng. Practice*, 10:3–13, 2002.
- [4] G. Bastin and M. Gevers. Stable adaptive observers for nonlinear time varying systems. *IEEE Trans. on Aut. Control*, 33(7):650–658, 1988.
- [5] G. Besançon. Remarks on nonlinear adaptive observer design. *Syst. & Control Lett.*, 41(7):271–280, 2000.
- [6] G. Besançon, J. De León-Morales, and O. Huerta-Guevara. On adaptive observers for state affine systems. *Int. J. of Contr.*, 79(6):581–591, 2006.
- [7] E. Biyik and M. Arcak. A hybrid redesign of newton observers in the absence of an exact discrete-time model. *Systems & Control Letters*, 55:429–436, 2006.
- [8] G. Bornard, F. Celle, and N. Couenne. Regularly persistent observers for bilinear systems. In *Proc. of the 29th International Conference on Nonlinear Systems, New Trends in Nonlinear Systems Theory*, volume 122, pages 130–140, Nantes, France, 1988.
- [9] F. Celle, J.P. Gauthier, D. Kazakos, and G. Sallet. Synthesis of nonlinear observers: a harmonic-analysis approach. *Math. Syst. Theory*, 22:291–322, 1989.
- [10] Y. M. Cho and R. Rajamani. A systematic approach to adaptive observer synthesis for nonlinear systems. *IEEE Trans. on Aut. Control*, 42:534–537, 1997.
- [11] A.M. Dabroom and H.K. Khalil. Output feedback sampled-data control of nonlinear systems using high-gain observers. *IEEE Trans. on Aut. Control*, 46(11):1712–1725, 2001.
- [12] F. Deza, E. Busvelle, J.P. Gauthier, and D. Rakotopora. High gain estimation for nonlinear systems. *Sys. & Control Lett.*, 18:295–299, 1992.
- [13] H. Hammouri, P. Kabore, S. Othman, and J. Biston. Failure diagnosis and nonlinear observer. application to a hydraulic process. *J. of the Franklin Institute*, 339:455–478, 2002.
- [14] H. Hammouri and J. DeLeon Morales. Chapter: Topological properties of observer’s inputs. In *Progress in Syst. and Control Theory*, Birkhauser, Boston, U.S.A., 2002.
- [15] H. Hammouri, M. Nadri, and R. Mota. Constant gain observer for continuous-discrete time uniformly observable systems. In *Proc. of the 45th IEEE Conf. on Dec. & Control*, pages 6240–6244, San Diego, U.S.A., 2006.
- [16] G. Kresselmeier. Adaptive observers with exponential rate of convergence. *IEEE Trans. on Aut. Control*, AC-22:2–8, 1977.
- [17] G. Lüders and K.S. Narendra. An adaptive observer and identifier for a linear system. *IEEE Trans. on Aut. Control*, AC-18:496–499, 1973.
- [18] R. Marino and P. Tomei. Adaptive observers with arbitrary exponential rate of convergence for nonlinear systems. *IEEE Trans. on Aut. Control*, 40:1300–1304, 1995.
- [19] R. Marino and P. Tomei. *Nonlinear control design*. ser. Information and system sciences, Prentice Hall, London, U.K., 1995.
- [20] P.E. Moraal and J.W. Grizzle. Observer design for nonlinear systems with discret-time measurements. *IEEE Trans. on Aut. Control*, 40(3):395–404, 1995.

- [21] M. Nadri and H. Hammouri. Design of a continuous-discrete observer for state affine systems. *Appl. Math. Lett.*, 16:967–974, 2003.
- [22] M. Nadri, H. Hammouri, and C.-M. Astorga. Observer design for continuous-discrete time state affine systems up to output injection. *Eur. J. Control*, 10:252–263, 2004.
- [23] Q. Zhang. Adaptive observer for multi-input-multi-output (mimo) linear time-varying systems. *IEEE Trans. on Aut. Control*, 47(3):525–529, 2002.
- [24] Q. Zhang. Revisiting different adaptive observers through a unified formulation. In *Proc. of the 45th IEEE Conf. on Dec. & Control and Eur. Conf. on Control*, pages 3067–3072, Seville, Spain, 2005.

# Références

- [1] C. Aboky, G. Sallet, and J.-C. Vivalda. Observers for Lipschitz non-linear systems. *International Journal of Control*, 75(3):204–212, 2002.
- [2] M. Alamir. Optimization based nonlinear observers revisited. *International Journal of Control*, 72(13):1204–1217, 1999.
- [3] T. Ahmed Ali, R. Postoyan, and F. Lamnabhi-Lagarrigue. Continuous-discrete adaptive observers for state affine systems. In *CDC'07 (IEEE Conference on Decision and Control) New Orleans, U.S.A.*, pages 1356–1360, 2007.
- [4] B.D.O. Anderson, R.R. Bitmead, C.R. Johnson, P.V. Kokotović, R.L. Kosut, I.M.Y. Mareels, L. Praly, and B.D. Riedle. *Stability of Adaptive Systems: Passivity and Averaging Analysis*. Signal Processing, Optimization and Control, MIT Press, Cambridge, U.S.A., 1986.
- [5] D. Angeli and E. Mosca. Command governors for constrained nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44:816–818, 1999.
- [6] D. Angeli and E.D. Sontag. Forward completeness, unboundedness observability, and their Lyapunov characterizations. *Systems & Control Letters*, 38:209–217, 1999.
- [7] A.M. Annaswamy, F. Skantze, and A.-P. Loh. Adaptive control of continuous-time systems with convex/concave parametrization. *Automatica*, 34(1):33–49, 1998.
- [8] M. Arcak and P. Kokotović. Nonlinear observers: a circle criterion design and robustness analysis. *Automatica*, 37:1923–1930, 2001.
- [9] M. Arcak and D. Nešić. A framework for nonlinear sampled-data observer design via approximate discrete-time models and emulation. *Automatica*, 40:1931–1938, 2004.
- [10] A. Aropostathis, A. Jakubczyk, B. Lee, H.G. Marcus, and E.D. Sontag. The effect of sampling on linear equivalence and feedback linearization. *Systems & Control Letters*, 13:373–381, 1989.
- [11] K. Årzén, A. Cervin, and J. Eker. An introduction to control and scheduling co-design. In *CDC'00 (IEEE Conference on Decision and Control) Sidney, Australia*, pages 4865–4870, 2000.
- [12] A. Astolfi, D. Karagiannis, and R. Ortega. *Nonlinear and Adaptive Control with Applications*. Springer, New York, U.S.A., 2008.



- 
- [13] K. J. Aström and B. Wittenmark. *Computer-controlled systems, theory and design*. Prentice-Hall, New Jersey, U.S.A., 3rd edition, 1996.
  - [14] A. Bacciotti and L. Mazzi. A necessary and sufficient condition for bounded-input bounded-state stability of nonlinear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 39(2):478–491, 2000.
  - [15] J.S. Baras and N.S. Patel. Robust control of set-valued discrete-time dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43:61–75, 1998.
  - [16] J.P. Barbot, S. Monaco, and D. Normand-Cyrot. A sampled normal form for feedback linearization. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 9:162–188, 1996.
  - [17] B.R. Barmish, M.R. Corless, and G. Leitmann. A new class of stabilizing controllers for uncertain dynamical systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 21:246–255, 1983.
  - [18] G. Bastin and G. Campion. Indirect adaptive control of linearly parametrized nonlinear systems. In *3<sup>rd</sup> IFAC Symposium on Adaptive Systems in Control and Signal Processing, Glasgow, U.K.*, pages 657–662, 1989.
  - [19] G. Besançon, H. Hammouri, and S. Benamor. State equivalence of discrete-time nonlinear control systems to state affine form up to input/output injection. *Systems & Control Letters*, 33:1–10, 1998.
  - [20] D. Bestle and M. Zeitz. Canonical form observer design for nonlinear time-variable systems. *International Journal of Control*, 38:419–431, 1983.
  - [21] E. Bıyık and M. Arcaç. A hybrid redesign of Newton observers in the absence of an exact discrete-time model. *Systems & Control Letters*, 55:429–436, 2006.
  - [22] M. Boutayeb and M. Darouach. A reduced-order observer for non-linear discrete-time systems. *Systems & Control Letters*, 39:141–151, 2000.
  - [23] M.S. Branicky, V. Liberatore, and S.M. Phillips. Networked control system co-simulation for co-design. In *ACC'03 (American Control Conference) Denver, U.S.A.*, pages 3341–3346, 2003.
  - [24] M.S. Branicky, S.M. Phillips, and W. Zhang. Scheduling and feedback co-design for networked control systems. In *CDC'02 (IEEE Conference on Decision and Control) Las Vegas, U.S.A.*, pages 1211–1217, 2002.
  - [25] R. Brockett. Stabilization of motor networks. In *CDC'95 (IEEE Conference on Decision and Control) New Orleans, U.S.A.*, pages 1484–1488.
  - [26] R.W. Brockett and D. Liberzon. Quantized feedback stabilization of linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45:1279–1289, 2000.
  - [27] L. Burlion. *Contribution à l'analyse et à la commande de systèmes non linéaires à commande échantillonnée*. PhD thesis, Université Paris-Sud (in French), 2007.
  - [28] L. Burlion, T. Ahmed-Ali, and F. Lamnabhi-Lagarrigue. On the stability of a class of nonlinear hybrid systems. *Nonlinear Analysis*, 65(12):2236–2247, 2006.

- 
- [29] L. Burlion, T. Ahmed-Ali, and F. Lamnabhi-Lagarrigue. On the stabilization of sampled-data nonlinear systems by using backstepping on the higher order approximate models. *International Journal of Control*, 79:1087–1095, 2006.
- [30] C. Califano, S. Monaco, and D. Normand-Cyrot. On the observer design in discrete-time. *Systems & Control Letters*, 49:255–265, 2003.
- [31] D. Carnevale, A.R. Teel, and D. Nešić. A Lyapunov proof of an improved maximum allowable transfer interval for networked control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(5):892–897, 2007.
- [32] A. Chaillet and A. Bicchi. Delay compensation in packet-switching networked controlled systems. In *CDC'08 (IEEE Conference on Decision and Control), Cancun, Mexico*, pages 3620–3625, 2008.
- [33] T. Chen and B.A. Francis. Input-output stability of sampled-data systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36:50–58, 1991.
- [34] T. Chen and B.A. Francis. *Optimal sampled-data control systems*. Springer Verlag, London, U.K., 1995.
- [35] S.-T. Chung and J.W. Grizzle. Sampled-data observer error linearization. *Automatica*, 26(6):997–1007, 1990.
- [36] F. H. Clarke. *Optimization and nonsmooth analysis*. in Classics in Applied Mathematics. Philadelphia, U.S.A.: SIAM, vol. 5, 1990.
- [37] A.R. Comeau and N. Hori. State-space forms for higher-order discrete-time models. *Systems & Control Letters*, 34:23–31, 1998.
- [38] M.J. Corless and G. Leitmann. Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(5):1139–1144, 1981.
- [39] A.M. Dabroom and H.K. Khalil. Output feedback sampled-data control of nonlinear systems using high-gain observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(11):1712–1725, 2001.
- [40] S. Dashkovskiy, B.S. Ruffer, and F.R. Wirth. An ISS small gain theorem for general networks. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 19(2):93–122, 2007.
- [41] D. Dačić and D. Nešić. Quadratic stabilization of linear networked control systems via simultaneous protocol and controller design. *Automatica*, 43(7):1145–1155, 2007.
- [42] D. Dačić and D. Nešić. Observer design for linear networked control systems using matrix inequalities. *Automatica*, 44(1):2840–2848, 2008.
- [43] A.M. de Paor and M. O'Malley. A describing function technique for sampling period selection and controller discretization. *Transactions on Inst. Meas. Control*, 15:207–212, 1993.
- [44] F. Deza, E. Busvelle, J.P. Gauthier, and D. Rakotopora. High gain estimation for nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 18:295–299, 1992.

- [45] D. Dochain and G. Bastin. Adaptive identification and control algorithms for nonlinear bacterial growth systems. *Automatica*, 20:621–634, 1984.
- [46] J.C. Doyle and G. Stein. Robustness with observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24(4):607–611, 1979.
- [47] B. Egardt. *Stability of Adaptive Controllers*. Springer, New York, U.S.A., 1979.
- [48] N. Elia and S.K. Mitter. Stabilization of linear systems with limited information. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(9):1384–1400, 2001.
- [49] F. Esfandiari and H.K. Khalil. Output feedback stabilization of fully linearizable systems. *International Journal of Control*, 56(5):1007–1037, 1992.
- [50] X. Fan and M. Arcak. Observer design for systems with multivariable monotone nonlinearities. *Systems & Control Letters*, 50:319–330, 2003.
- [51] M. Farza, M. M'Saad, and L. Rossignol. Observer design for a class of MIMO nonlinear systems. *Automatica*, 40:135–143, 2004.
- [52] T. Fliegner. *Contributions to the control of nonlinear discrete-time systems*. PhD thesis, Departement of Applied Mathematics, University of Twente, 1995.
- [53] A.L. Fradkov, B. Andrievsky, and R.J. Evans. Hybrid quantised observer for multi-input-multi-output nonlinear systems. In *MSC'08 (IEEE Multi-conference on Systems and Control)*, San Antonio, U.S.A., pages 1195–1200, 2008.
- [54] B.A. Francis and T.T. Georgiou. Stability theory for linear time-invariant plants with periodic digital controller. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33:820–832, 1988.
- [55] R.A. Freeman and P.V. Kokotović. Design of ‘softer’ robust nonlinear control laws. *Automatica*, 29:1425–1437, 1993.
- [56] R.A. Freeman and P.V. Kokotović. *Robust nonlinear control design*. Birkhauser Verlag, Boston, U.S.A., 1996.
- [57] R.A. Freeman, M. Krstić, and P.V. Kokotović. Robustness of adaptive nonlinear control to bounded uncertainties. *Automatica*, 34:1227–1230, 1998.
- [58] E. Fridman, A. Seuret, and J.-P. Richard. Robust sampled-data stabilization of linear systems: an input delay approach. *Automatica*, 40(8):1441–1446, 2004.
- [59] E. Fridman, U. Shaked, and V. Suplin. Input/output delay approach to robust sampled-data  $H_\infty$  control. *Systems & Control Letters*, 54:271–282, 2005.
- [60] G. Georgiou, A. Chelouah, S. Monaco, and D. Normand-Cyrot. Nonlinear multirate adaptive control of a synchronous motor. In *CDC'92 (IEEE Conference on Decision and Control) Tucson, U.S.A.*, 1992.
- [61] J.-M. Godhavn, T.I. Fossen, and S.P. Berge. Adaptive synchronization of uncertain chaotic systems via backstepping design. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 12(8):649–670, 1999.
- [62] R. Goebel and A.R. Teel. Solution to hybrid inclusions via set and graphical convergence with stability theory applications. *Automatica*, 42:573–587, 2006.

- [63] G.C. Goodwin, B. McInnis, and R.S. Long. Adaptive control algorithms for waste water treatment and pH neutralization. *Optimal Contr. Applic. Meth.*, 3:443–459, 1982.
- [64] J.W. Grizzle and P.V. Kokotović. Feedback linearization for sampled-data systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(9):857–859, 1988.
- [65] L. Grüne and P.E. Kloeden. High order numerical schemes for affinely controlled nonlinear systems. *Numerische Mathematik*, 89:669–690, 2001.
- [66] L. Grüne and P.E. Kloeden. Numerical schemes of high order for a class of nonlinear control systems. In *NMA '02 (5<sup>th</sup> International Conference on Numerical Methods and Applications)*, Borovets, Bulgaria, 2002.
- [67] L. Grüne, K. Worthmann, and D. Nešić. Continuous-time controller redesign for digital implementation: a trajectory based approach. *Automatica*, 44(1):225–232, 2007.
- [68] A.M. Guillaume, G. Bastin, and G. Campion. Sampled-data adaptive control of a class of continuous nonlinear systems. *International Journal of Control*, 60:569–594, 1994.
- [69] V. Gupta, T. Chung, B. Hassibi, and R.M. Murray. On a stochastic sensor selection algorithm with applications in sensor scheduling and dynamic sensor coverage. *Automatica*, 42:251–260, 2006.
- [70] T. Hagiwara and M. Araki. FR approach for the  $H_2$  analysis and synthesis of sampled-data systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(8):1411–1421, 1995.
- [71] H. Hammouri, P. Kabore, S. Othman, and J. Biston. Failure diagnosis and nonlinear observer. application to a hydraulic process. *Journal of the Franklin Institute*, 339:455–478, 2002.
- [72] H. Hammouri, M. Nadri, and R. Mota. Constant gain observer for continuous-discrete time uniformly observable systems. In *CDC'06 (IEEE Conference on Decision and Control) San Diego, U.S.A.*, pages 6240–6244, 2006.
- [73] W.P.M.H. Heemels, A.R. Teel, N. van de Wouw, and D. Nešić. On maximum allowable sampling intervals and delays in networked control systems. In *CDC'09 (IEEE Conference on Decision and Control)*, Shanghai, China, 2009.
- [74] G. Hermann, S.K. Spurgeon, and C. Edwards. Discretization of sliding mode based control schemes. In *CDC'99 (IEEE Conference on Decision and Control) Phoenix, U.S.A.*, pages 4257–4262, 1999.
- [75] J. Hespanha, P. Naghshtabrizi, and Y. Xu. A survey of recent results in networked control systems. *IEEE Special Issue on Technology of Networked Control Systems*, 95(1):138–162, 2007.
- [76] L. Hetel. *Stabilité et commande robuste des systèmes à commutation*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine (in French), 2007.
- [77] L. Hou, A.N. Michel, and H. Ye. Some qualitative properties of sampled-data control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42:1721–1725, 1997.

- 
- [78] D. Hristu and K. Morgansen. Limited communication control. *Systems & Control Letters*, 37:193–205, 1999.
- [79] D. Hristu-Varsakelis. Feedback control systems as users of a shared network: communication sequences that guarantee stability. In *CDC'01 (IEEE Conference on Decision and Control)*, Orlando, U.S.A., 2001.
- [80] P. Hsu and S. Sastry. The effect of discretized feedback in a closed loop system. In *CDC'87 (IEEE Control and Decision Conference) Los Angeles, U.S.A.*, pages 1518–1523, 1987.
- [81] B. Hu and A.N. Michel. Some qualitative properties of multirate digital control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44:765–770, 1999.
- [82] T. Ieko, Y. Ochi, and K. Kanai. New design method for pulse-width modulation control systems via digital redesign. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 22(1):123–128, 1999.
- [83] P.A. Ioannou and J. Sun. *Robust Adaptive Control*. Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
- [84] H. Ishii and B. Francis. Stabilization with control networks. *Automatica*, 38:1745–1751, 2002.
- [85] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer Verlag, New York, U.S.A., 3rd edition, 2002.
- [86] Z.-P. Jiang, A.R. Teel, and L. Praly. Small-gain theorem for ISS systems and applications. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 7:95–120, 1994.
- [87] Z.-P. Jiang and Y. Wang. Input-to-state stability for discrete-time nonlinear systems. *Automatica*, 37:857–869, 2001.
- [88] Z. Jin, V. Gupta, and R.M. Murray. State estimation over packet dropping networks using multiple description coding. *Automatica*, 42:1441–1452, 2006.
- [89] I. Karafyllis. A system-theoretic framework for a wide class of systems I: applications to numerical analysis. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 328(2):876–899, 2007.
- [90] I. Karafyllis. A system-theoretic framework for a wide class of systems II: input-to-output stability. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 328(2):466–486, 2007.
- [91] I. Karafyllis and Z.-P. Jiang. A small-gain theorem for a wide class of feedback systems with control applications. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 46(4):1483–1517, 2007.
- [92] I. Karafyllis and C. Kravaris. From continuous-time design to sampled-data design of nonlinear observers. In *CDC'08 (IEEE Conference on Decision and Control)*, Cancun, Mexico, pages 5408–5413, 2008.
- [93] I. Karafyllis and C. Kravaris. Global stability results for systems under sampled-data control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 19(10):1105–1128, 2009.

- 
- [94] I. Karafyllis and C. Kravaris. Robust global stabilizability by means of sampled-data control with positive sampling rate. *International Journal of Control*, 82(4):755–772, 2009.
- [95] J.P. Keller and B.D.O. Anderson. A new approach to the discretization of continuous-time controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(2):214–224, 1992.
- [96] C.M. Kellet. *Advances in converse and control Lyapunov functions*. PhD thesis, The University of California, Santa Barbara, 2002.
- [97] C.M. Kellett, H. Shim, and A.R. Teel. Further results on robustness of (possibly discontinuous) sample and hold feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49:1081–1089, 2004.
- [98] H.K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A., 3rd edition, 2002.
- [99] H.K. Khalil and F. Esfandiari. Semiglobal stabilization of a class of nonlinear systems using output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(9):1412–1415, 1993.
- [100] A. Kojić and A.M. Annaswamy. Adaptive control of nonlinearly parameterized systems with a triangular structure. *Automatica*, 38:115–123, 2002.
- [101] P.V. Kokotović. The joy of feedback: nonlinear and adaptive - 1991 Bode prize lecture. *IEEE Control Systems Magazine*, 12:7–17, 1992.
- [102] A. J. Krener and A. Isidori. Linearization by output injection and nonlinear observers. *Systems & Control Letters*, 3:47–52, 1983.
- [103] G. Kresselmeier and T. Birkholzer. Numerical nonlinear regulator design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39:33–46, 1994.
- [104] M. Krstić, I. Kanellakopoulos, and P.V. Kokotović. Adaptive nonlinear control without overparametrization. *Systems & Control Letters*, 19:177–185, 1992.
- [105] M. Krstić, I. Kanellakopoulos, and P.V. Kokotović. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. John Wiley and Sons, Inc., New York, U.S.A., 1995.
- [106] M. Krstić and P.V. Kokotović. Control Lyapunov functions for adaptive nonlinear stabilization. *Systems & Control Letters*, 26:17–23, 1995.
- [107] D. S. Laila and A. Astolfi. Input-to-state stability for discrete-time time-varying systems with applications to robust stabilization of systems in power form. *Automatica*, 41:1891–1903, 2005.
- [108] D. S. Laila and D. Nešić. A note on input-to-state stabilization for nonlinear sampled-data systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47:1153–1158, 2002.
- [109] D. S. Laila and D. Nešić. Open and closed loop dissipation inequalities under sampling and controller emulation. *European Journal of Control*, 18:109–125, 2002.

- [110] D.S. Laila and A. Astolfi. Sampled-data observer design for a class of nonlinear systems with applications. In *MTNS'06 (International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems) Kyoto, Japan*, pages 715–722, 2006.
- [111] D.S. Laila and D. Nešić. Lyapunov based small-gain theorem for parameterized discrete-time interconnected ISS systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48:1783–1788, 2003.
- [112] D.S. Laila, D. Nešić, and A. Astolfi. "Sampled-data control of nonlinear systems" in *Advanced topics in control systems theory II, Lecture notes from FAP*. Springer Verlag, New York, U.S.A., 2006.
- [113] S. Lall and G. Dullerud. An LMI solution to the robust synthesis problem for multi-rate sampled-data systems. *Automatica*, 37:1909–1922, 2001.
- [114] D.A. Lawrence. Stability analysis of nonlinear sampled-data systems. In *CDC'97 (IEEE Conference on Decision and Control) San Diego, U.S.A.*, pages 365–366.
- [115] D. Liberzon. Hybrid feedback stabilization of systems with quantized signals. *Automatica*, 39:1543–1554, 2003.
- [116] D. Liberzon. On stabilization of linear systems with limited information. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48:304–307, 2003.
- [117] D. Liberzon. Observer-based quantized output feedback control of nonlinear systems. In *17<sup>th</sup> IFAC World Congress'08, Seoul, Korea*, pages 8039–8043, 2008.
- [118] D. Liberzon and J.P. Hespanha. Stabilization of nonlinear systems with limited information feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(6):910–915, 2005.
- [119] D. Liberzon and D. Nešić. Stability analysis of hybrid systems via small-gain theorems. In *9<sup>th</sup> International Workshop on Hybrid Systems: Computation and Control, Santa Barbara: U.S.A., Lecture Notes in Computer Science, vol. 3927 (J. Hespanha and A. Tiwari, Eds.)*, Springer, Berlin: Germany, pages 421–435, 2006.
- [120] W. Lin and C. Qian. Adaptive control of nonlinearly parameterized systems: a nonsmooth feedback framework. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(5):757–774, 2002.
- [121] Y. Lin, E.D. Sontag, and Y. Wang. A smooth converse Lyapunov theorem for robust stability. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 34(1):124–160, 1996.
- [122] A. Loría and D. Nešić. On uniform boundedness of parameterized discrete-time systems with decaying inputs: applications to cascades. *Systems & Control Letters*, 49:163–174, 2003.
- [123] A. Loría, E. Panteley, and A.R. Teel. Relaxed persistency of excitation for uniform asymptotic stability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(12):1874–1886, 2001.
- [124] K. Madani, S. Monaco, and D. Normand-Cyrot. Adaptive control of discrete-time dynamics in strict-feedback form. In *CDC'96 (IEEE Conference on Decision and Control)*, Kobe, Japan, pages 2659–2664, 1996.

- 
- [125] I.M.Y. Mareels, H.B. Penfold, and R.J. Evans. Controlling nonlinear time-varying systems via Euler approximations. *Automatica*, 28:681–696, 1992.
- [126] R. Marino and P. Tomei. *Nonlinear control design*. Prentice Hall, New Jersey, U.S.A., 1995.
- [127] V.M. Matrosov. On the stability of motion. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 26:1337–1353, 1962.
- [128] A. Matveev and A. Savkin. The problem of state estimation via asynchronous communication channels with irregular transmission times. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 48:670–676, 2003.
- [129] F. Mazenc. Strict Lyapunov functions for time-varying systems. *Automatica*, 39:349–353, 2002.
- [130] F. Mazenc and D. Nešić. Lyapunov functions for time varying systems satisfying generalized conditions of Matrosov theorem. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 19(2):151–182, 2007.
- [131] C. Meng, T. Wang, W. Chou, S. Luan, Y. Zhang, and Z. Tian. Remote surgery case: robot-assisted teleneurosurgery. In *ICRA'04 (IEEE International Conference on Robotics and Automation) New Orleans, U.S.A.*, number 1, pages 819–823, 2004.
- [132] S. Monaco and D. Normand-Cyrot. Minimum phase nonlinear discrete-time systems and feedback stabilization. In *CDC'87 (IEEE Conference on Decision and Control) Los Angeles, U.S.A.*, pages 979–986, 1987.
- [133] S. Monaco and D. Normand-Cyrot. Zero dynamics of sampled nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 11:229–234, 1988.
- [134] S. Monaco and D. Normand-Cyrot. Issues on nonlinear digital systems. *European Journal of Control*, 7:160–178, 2001.
- [135] S. Monaco and D. Normand-Cyrot. Advanced tools for nonlinear sampled-data systems: analysis and control. In *ECC'97 (European Control Conference) Kos, Greece*, pages 1155–1158, 2007.
- [136] S. Monaco, D. Normand-Cyrot, and S. Stornelli. On the linearizing feedback in nonlinear sampled data systems. In *CDC'86 (IEEE Conference on Decision and Control) Athens, Greece*, 1986.
- [137] P.E. Moraal and J.W. Grizzle. Observer design for nonlinear systems with discrete-time measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(3):395–404, 1995.
- [138] M. Nadri and H. Hammouri. Design of a continuous-discrete observer for state affine systems. *Applied Mathematics Letters*, 16:967–974, 2003.
- [139] M. Nadri, H. Hammouri, and C.-M. Astorga. Observer design for continuous-discrete time state affine systems up to output injection. *European Journal of Control*, 10:252–263, 2004.



- 
- [140] P. Naghshtabrizi, J. Hespanha, and A.R. Teel. Exponential stability of impulsive systems with application to uncertain sampled-data systems. *Systems & Control Letters*, 57(5):378–385, 2008.
- [141] D.S. Naidu and A.K. Rao. *Singular perturbation analysis of discrete-time control systems*. Springer Verlag, New York, U.S.A., 1985.
- [142] G. N. Nair and R. J. Evans. Stabilizability of stochastic linear systems with finite feedback data rates. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 43(2):413–436, 2004.
- [143] G.N. Nair and R.J. Evans. Exponential stabilisability of finite-dimensional linear systems with limited data rates. *Automatica*, 39(4):585–593, 2003.
- [144] G.N. Nair, R.J. Evans, I.M.Y. Mareels, and W. Moran. Topological feedback entropy and nonlinear stabilization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(9):1585–1597, 2004.
- [145] M. Netto, A. Annaswamy, S. Mammar, and S. Glaser. A new adaptive control algorithm for systems with multilinear parametrization. In *ACC'06 (American Control Conference) Minneapolis, U.S.A.*, 2006.
- [146] M. Netto, A. Annaswamy, S. Mammar, and N. Minoiu. A new adaptive control algorithm for systems with multilinear parametrization:  $n$ -parameters case. In *Taming Heterogeneity and Complexity of Embedded Control: CTS-HYCON Workshop on Nonlinear and Hybrid Control, Paris, Editors: F. Lamnabhi-Lagarrigue, S. Laghrouche, A. Loría and E. Panteley*. ISTE Hermes and Lavoisier, 2006.
- [147] D. Nešić and L. Grüne. Lyapunov based continuous-time nonlinear controller redesign for sampled-data implementation. *Automatica*, 41:1143–1156, 2005.
- [148] D. Nešić and D. Liberzon. A unified framework for design and analysis of networked and quantized control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54:732–747, 2009.
- [149] D. Nešić and A. R. Teel. Matrosov theorem for parameterized families of discrete-time systems. *Automatica*, 40:1025–1034, 2005.
- [150] D. Nešić and A.R. Teel. A framework for stabilization of nonlinear sampled-data systems based on their approximate discrete-time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49:1103–1122, 2004.
- [151] D. Nešić and A.R. Teel. Input-output stability properties of networked control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49:1650–1667, 2004.
- [152] D. Nešić and A.R. Teel. Input-to-state stability of networked control systems. *Automatica*, 40:2121–2128, 2004.
- [153] D. Nešić and A.R. Teel. Stabilization of sampled-data nonlinear systems via backstepping on their Euler approximate model. *Automatica*, 42:1801–1808, 2006.

- 
- [154] D. Nešić, A.R. Teel, and D. Carnevale. Explicit computation of the sampling period in emulation of controllers for nonlinear sampled-data systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(3):619–624, 2008.
- [155] D. Nešić, A.R. Teel, and E.D. Sontag. Formulas relating  $\mathcal{KL}$  stability estimates of discrete-time and sampled-data nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 38(1):49–60, 1999.
- [156] G. De Nicolao, L. Magni, and R. Scattolini. Stabilizing receding horizon control of nonlinear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43:1030–1038, 1998.
- [157] D. Normand-Cyrot and S. Monaco (Guest Editors). Nonlinear discrete-time or sampled-data observers. *European Journal of Control (Special Issue)*, 15(2), 2009.
- [158] J.M. Ortega and W.C. Rheinboldt. *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*. Philadelphia, U.S.A.: SIAM, 2000.
- [159] D.H. Owens, Y. Zheng, and S.A. Billings. Fast sampling and stability of nonlinear sampled-data systems: Part 1. Existence theorems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 7:1–11, 1990.
- [160] P.R. Pagilla and Y. Zhu. Controller and observer design for Lipschitz nonlinear systems. In *ACC'04 (American Control Conference), Boston, U.S.A.*, pages 2379–2384, 2004.
- [161] E. Panteley and R. Postoyan. Semiglobal asymptotic stabilization of a class of nonlinear sampled-data systems using emulated controllers. In *Workshop NESTER, ICINCO (International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics), Milan, Italy*, 2009.
- [162] D.A. Pierre and J.W. Pierre. Digital controller design - alternative emulation approaches. *ISA Transaction*, 34:219–228, 1995.
- [163] R. Postoyan and D. Nešić. Trajectory based small gain theorems for parameterized systems. In *ACC'10 (American Control Conference), Baltimore, U.S.A. (submitted)*, 2010.
- [164] L. Praly and M. Arcak. A relaxed condition for stability of nonlinear observer-based controllers. *Systems & Control Letters*, 53:311–320, 2004.
- [165] L. Praly and Y. Wang. Stabilization in spite of matched unmodelled dynamics and an equivalent definition of input-to-state stability. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 9(1):1–33, 1996.
- [166] D. Radford. Spread-spectrum data leap through AC power wiring. *IEEE Spectrum*, pages 48–53, 1996.
- [167] R.S. Raji. Smart networks for control. *IEEE Spectrum*, pages 49–55, 1994.
- [168] C.V. Rao, J.B. Rawlings, and D.Q. Mayne. Constrained state estimation for nonlinear discrete-time systems: stability and moving-horizon approximations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(2):246–258, 2003.

- [169] S. Sastry and M. Bodson. *Adaptive control: stability, convergence and robustness*. Prentice Hall, New Jersey, U.S.A., 1989.
- [170] P. Seiler and R. Sengupta. Analysis of communication losses in vehicle control problems. In *ACC'01 (American Control Conference) Arlington, U.S.A.*, pages 1491–1496, 2001.
- [171] P. Seiler and R. Sengupta. An  $H_\infty$  approach to networked control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(3):356–364, 2005.
- [172] R. Sepulchre, M. Jankovic, and P.V. Kokotović. *Constructive Nonlinear Control*. Springer-Verlag, London, U.K., 1997.
- [173] K. Shillcutt. Patterned search for planning and testing for the robotic antartic meteorite search. In *International Topical Meeting on Robotics and Remote Systems for the Nuclear Industry, American Nuclear Society, Pittsburgh, U.S.A.*, 1999.
- [174] H. Shim, D. Liberzon, and J.-S. Kim. Quasi-ISS reduced-order observers and quantized output feedback. In *CDC'09 (IEEE Conference on Decision and Control), Shanghai, China*, (submitted), 2009.
- [175] C. Simoes. *On stabilization of discrete-time nonlinear systems*. PhD thesis, Departement of Applied Mathematics, University of Twente, 1996.
- [176] B. Sinopoli, L. Schenato, M. Franchetti, K. Poolla, M.I. Jordan, and S.S. Sastry. Kalman filtering with intermittent observations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49:1453–1464, 2004.
- [177] E. Skafidas, R.J. Evans, I.M. Mareels, and A. Fradkov. Trajectory approximation based adaptive control of nonlinear systems under matching conditions. In *CDC'96 (IEEE Conference on Decision and Control), Kobe, Japan*, pages 4667–4672, 1996.
- [178] F. Skantze, A.-P. Loh, and A.M. Annaswamy. Adaptive estimation of discrete-time systems with nonlinear parameterization. *Automatica*, 36:1879–1887, 2000.
- [179] J.-J. Slotine and W. Li. Adaptive manipulator control: a case study. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33:995–1003, 1988.
- [180] E.D. Sontag. Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34:435–443, 1989.
- [181] E.D. Sontag. *Mathematical Control Theory. Deterministic Finite-Dimensional Systems*. Springer-Verlag, New York, U.S.A., 2nd edition, 1998.
- [182] E.D. Sontag. Clocks and insensitivity to small measurement errors. *ESAIM: control, optimization and calculus of variations*, 4:537–557, 1999.
- [183] E.D. Sontag. Input to state stability: basic concepts and results. In *P. Nistri and G. Stefani, editors, Nonlinear and Optimal Control Theory*, pages 163–220, Berlin, 2007. Springer Verlag.
- [184] E.D. Sontag and B. Ingalls. A small-gain theorem with applications to input/output systems, incremental stability, detectability, and interconnections. *Journal of the Franklin Institute*, 339(2):211–229, 2002.

- [185] E.D. Sontag and Y. Wang. On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems & Control Letters*, 24(5):351–359, 1995.
- [186] E.D. Sontag and Y. Wang. Lyapunov characterizations of input to output stability. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 39(1):226–249, 2000.
- [187] M. Spong. Modeling and control of elastic joint robots. *ASME Journal of Dynamical Systems, Measurements and Control*, 109:310–319, 1987.
- [188] A. M. Stuart and A. R. Humphries. *Dynamical systems and numerical analysis*. Cambridge University Press, New York, U.S.A., 1996.
- [189] M. Tabbara and D. Nešić. Input-output stability of networked control systems with stochastic protocols and channels. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(5):1160–1175, 2008.
- [190] M. Tabbara, D. Nešić, and A.R. Teel. Stability of wireless and wireline networked control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(9):1615–1630, 2007.
- [191] Y. Tan, D. Nešić, and I.M.Y. Mareels. On non-local stability properties of extremum seeking control. *Automatica*, 42:889–903, 2006.
- [192] S. Tatikonda and S. Mitter. Control under communication constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(7):1056–1068, 2004.
- [193] D.G. Taylor. Nonlinear control of electric machines: an overview. *IEEE Control Systems Magazine*, 14(6):41–51, 1994.
- [194] A. R. Teel and L. Praly. On assigning the derivative of a disturbance attenuation control Lyapunov function. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 13:95–124, 2000.
- [195] A.R. Teel, R.R. Kadiyala, P.V. Kokotović, and S.S. Sastry. Indirect techniques for adaptive input output linearization of nonlinear systems. *International Journal of Control*, 53:193–222, 1991.
- [196] A.R. Teel, D. Nešić, and P.V. Kokotović. A note on input-to-state stability of nonlinear sampled-data systems. In *CDC'98 (IEEE Conference on Decision and Control) Tampa, U.S.A.*, pages 2473–2478, 1998.
- [197] A.R. Teel and L. Praly. Tools for semiglobal stabilization by partial state and output feedback. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 33(5):1443–1488, 1995.
- [198] G. C. Walsh, H. Ye, and G. Bushnell. Stability analysis of networked control systems. *IEEE Transactions Control Systems Technology*, 10(3):438–446, 2002.
- [199] G.C. Walsh, O. Beldiman, and L.G. Bushnell. Asymptotic behavior of nonlinear networked control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46:1093–1097, 2001.
- [200] G.C. Walsh and H. Ye. Scheduling of networked control systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 21(1):57–65, 2001.
- [201] C. Wang and S.S. Ge. Adaptive synchronization of uncertain chaotic systems via backstepping design. *Chaos, Solitons & Fractals*, 12(7):1199–1206, 2001.

- [202] G.D. Warshaw and H.M. Schwartz. Sampled-data robot adaptive control with stabilizing compensation. In *ACC'94 (American Control Conference) Baltimore, U.S.A.*, pages 602–608, 1994.
- [203] E. Witrant. *Stabilisation des systèmes commandés par réseaux*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble (in French), 2005.
- [204] W.S. Wong and R.W. Brockett. Systems with finite communication bandwidth constraints - II: stabilization with limited information feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(5):1049–1053, 1999.
- [205] B. Wu and Z. Ding. A sampled-data scheme for adaptive control of nonlinear systems. In *ACC'07 (American Control Conference) New York, U.S.A.*, 2007.
- [206] F. Xia, X. Dai, Z. Wang, and Y. Sun. Feedback based network scheduling of networked control systems. In *ICCA'05 (International Conference on Control and Automation) Budapest, Hungary*, pages 1231–1236, 2005.
- [207] M. Xiao, N. Kazantzis, C. Kravaris, and A.J. Krener. Nonlinear discrete-time observer design with linearizable error dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(4):622–626, 2003.
- [208] N. Yagiz and Y. Hacioglu. Backstepping control of a vehicle with active suspensions. *Control Engineering Practice*, 16:1457–1467, 2008.
- [209] J.K. Yook, D.M. Tilbury, and N.R. Soparkar. Trading computation for bandwidth: reducing communication in distributed control systems using state estimators. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 10(4):503–518, 2002.
- [210] A. Zemouche, M. Boutayeb, and G. Iulia Bara. Observers for a class of Lipschitz systems with extension to  $H_\infty$  performance analysis. *Systems & Control Letters*, 57:18–27, 2008.
- [211] Y. Zheng, D.H. Owens, and S.A. Billings. Fast sampling and stability of nonlinear sampled-data systems: Part 2. Sampling rate estimation. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 7:13–33, 1990.
- [212] Y. Zheng, D.H. Owens, and S.A. Billings. Slow sampling and stability of nonlinear sampled-data systems. *International Journal of Control*, 51:251–265, 1990.
- [213] P.V. Zhivoglyadov and R.H. Middleton. Networked control design for linear systems. *Automatica*, 39:743–750, 2003.
- [214] G. Zimmer. State observation by on-line minimization. *International Journal of Control*, 60(4):595–606, 1994.