



**HAL**  
open science

# Marches interagissantes et Systèmes de particules

Anne-Laure Basdevant

► **To cite this version:**

Anne-Laure Basdevant. Marches interagissantes et Systèmes de particules. Probabilités [math.PR].  
Université Paris Nanterre, 2019. tel-04398842

**HAL Id: tel-04398842**

**<https://hal.science/tel-04398842v1>**

Submitted on 16 Jan 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ PARIS NANTERRE

Laboratoire Modal'X

École doctorale Connaissance, Langage, Modélisation (ED 139)

Marches interagissantes et Systèmes de particules

Anne-Laure Basdevant

**Mémoire d'habilitation à diriger des recherches**

Discipline : Mathématiques

Soutenue le 29 novembre 2019 devant le jury composé de

VINCENT BEFFARA (Rapporteur)  
OLIVIER RAIMOND (Rapporteur)  
CYRIL ROBERTO (Examineur)  
CHRISTOPHE SABOT (Examineur)  
MARIE THERET (Examinatrice)  
STANISLAV VOLKOV (Rapporteur)



# Remerciements

*Je remercie tout d'abord Olivier Raimond qui, en sus d'être le directeur irréprochable de l'équipe Modal'X et pendant plusieurs années un co-bureau bienveillant, a accepté d'être également garant de mon HDR. Merci à Vincent Beffara d'avoir accepté la pénible tâche de rapporteur. Les posters de ses simulations exposés dans la salle café du laboratoire Modal'X nous rappellent tous les jours la beauté (et la difficulté) de certains modèles probabilistes. Les travaux de Stanislav Volkov sur les marches aléatoires ont bien souvent beaucoup inspiré les miens, je suis donc honorée qu'il ait accepté d'être aussi rapporteur de mon HDR et je suis touchée qu'il fasse le déplacement pour assister à ma soutenance. Je remercie aussi Cyril Roberto, Christophe Sabot et Marie Théret pour avoir accepté de faire partie de mon jury de soutenance. Christophe m'a initiée aux marches aléatoires lors de mon mémoire de maîtrise (il y a fort longtemps maintenant !) et je suis donc contente de le compter parmi les membres du jury aujourd'hui.*

*Je remercie bien sûr aussi mes collaborateurs sans qui ces travaux n'existeraient pas : Nathanaël Enriquez, Lucas Gerin, Christina Goldschmidt, Jean-Baptiste Gouéré, Philippe Laurençot, James Norris, Clément Rau, Bruno Schapira et Arvind Singh. Les discussions que j'ai pu avoir avec chacun d'entre vous ont toujours été enrichissantes et m'ont permis de m'ouvrir à de nouvelles thématiques. J'espère pouvoir encore longtemps collaborer avec vous.*

*Je voudrais ensuite remercier tous mes collègues du laboratoire Modal'X, sans qui "venir au boulot" serait quand même bien moins sympathique. La bonne humeur qui règne tous les jours en salle framboise n'est pas étrangère à l'aboutissement de ce mémoire.*

*Sur un plan plus personnel, je voudrais témoigner toute ma reconnaissance à mes amis et ma famille et en particulier à Arvind qui, en plus d'être un formidable co-auteur, m'a soutenue tout au long de ces années. Pour terminer, je remercie Elora et Naël pour m'avoir laissé, de temps en temps, quelques minutes de calme afin que je puisse terminer de rédiger ce mémoire.*

## Articles publiés

- [1] A-L. BASDEVANT. Ruelle's probability cascades seen as a fragmentation process. *Markov process. and related fields*, 12(3) :447-474, 2006.
- [2] A-L. BASDEVANT. Fragmentation of ordered partitions and intervals. *Electron. J. Probab.*,11 :no 16, 394-417, 2006.
- [3] A-L. BASDEVANT. On the equivalence of some eternal additive coalescents. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 44(6) :1020-1037, 2008.
- [4] A-L. BASDEVANT ET A. SINGH. On the speed of a cookie random walk. *Probab. Theory Relat. Fields*, 141(3-4) :625-645, 2008.
- [5] A-L. BASDEVANT ET A. SINGH. Rate of growth of a transient cookie random walk. *Electron. J. Probab.*,13 :no 26, 811-851, 2008.
- [6] A-L. BASDEVANT ET C. GOLDSCHMIDT. Asymptotics of the allele frequency spectrum associated with the Bolthausen-Sznitman coalescent. *Electron. J. Probab.*,13 :no 17, 486-512, 2008.
- [7] A-L. BASDEVANT ET A. SINGH. Recurrence and transience of a multi-excited random walk on a regular tree. *Electron. J. Probab.*,14 :no 55, 1628-1669, 2009.
- [8] A-L. BASDEVANT, PH. LAURENÇOT, J. NORRIS ET C. RAU A stochastic min-driven coalescence process and its hydrodynamical limit. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 47(2) :329-357, 2011.
- [9] A-L. BASDEVANT ET A. SINGH. Continuous time vertex reinforced jump processes on Galton-Watson trees. *Ann. Appl. Probab. Volume 22, no 4*, 1728-1743, 2012.

- [10] A-L. BASDEVANT, N. ENRIQUEZ ET L. GERIN. Distances in the highly supercritical percolation cluster. *Ann Probab.* 41 (2013), no. 6, 4342-4358.
- [11] A-L. BASDEVANT, B. SCHAPIRA ET A. SINGH. Localization on 4 sites for Vertex-reinforced random walks on  $\mathbb{Z}$ . *Ann. Probab.* 42 (2014), no. 2, 527-558.
- [12] A-L. BASDEVANT, N. ENRIQUEZ, L. GERIN ET J-B. GOUÉRE. The shape of large balls in highly supercritical percolation. *Electron. J. Probab.*,19 :no 26, 1-14, 2014.
- [13] A-L. BASDEVANT, B. SCHAPIRA ET A. SINGH. Localization of a vertex reinforced random walks on  $\mathbb{Z}$  with sub-linear weights. *Probab. Theory Related Fields* 159 (2014), no 1-2, 75-115.
- [14] A-L. BASDEVANT, N. ENRIQUEZ, L. GERIN ET J-B. GOUÉRE. Discrete Hammersley's Lines with sources and sinks. *ALEA*, vol.13 (2016), n.1, p.33-52.
- [15] A-L. BASDEVANT, L. GERIN, J-B. GOUÉRE ET A. SINGH. From Hammersley's Lines to Hammersley's trees. *Probab. Theory Related Fields*, 171 (2018), no 1-2, pp 1-51.
- [16] A-L. BASDEVANT ET A. SINGH. Almost-sure asymptotic for the number of heaps inside a random sequence. *Electron. Commun. Probab.*, 23 (2018), paper no. 17, 8 pp.

## Prépublications

- [17] A-L. BASDEVANT ET L. GERIN. Longest increasing paths with gaps. *Soumis*, 2018. Disponible sur <https://arxiv.org/abs/1805.09136>

## En préparation

- [18] A-L. BASDEVANT ET L. GERIN. Longest increasing paths with Lipschitz constraint.

## Thèse

- [19] A-L. BASDEVANT. Trois études sur la fragmentation et la coalescence stochastiques. *Thèse de doctorat de l'Université Paris 6*, 2006.

---

# Table des Matières

<b>Liste des travaux</b>	<b>3</b>
<b>Introduction</b>	<b>8</b>
<b>1 Marches excitées [4,5,7]</b>	<b>10</b>
1.1 Introduction . . . . .	10
1.2 Vitesse de la marche multi-excitée sur $\mathbb{Z}$ [4,5] . . . . .	11
1.3 Marches multi-excitées sur un arbre [7]. . . . .	14
1.4 Quelques perspectives . . . . .	17
<b>2 Marches renforcées [9,11,13]</b>	<b>19</b>
2.1 Introduction . . . . .	19
2.2 Processus de saut renforcé par sites [9] . . . . .	22
2.3 Renforcements sur-linéaires par sites [11] . . . . .	25
2.4 Renforcements sous-linéaires par sites [13] . . . . .	27
2.5 Quelques perspectives . . . . .	30
<b>3 Percolation de premier passage [10,12]</b>	<b>32</b>
3.1 Introduction . . . . .	32
3.2 Forme limite d'une percolation très surcritique[10,12] . . . . .	35
3.3 Quelques perspectives . . . . .	38
<b>4 Processus d'Hammersley [14,15,16,17,18]</b>	<b>40</b>
4.1 Introduction . . . . .	40
4.2 Processus d'Hammersley discret avec sources et puits [14] . . . . .	42
4.3 Variantes du problème d'Hammersley [17,18] . . . . .	45
4.4 Arbres d'Hammersley [15,16] . . . . .	51
4.5 Quelques perspectives . . . . .	56
<b>Bibliographie</b>	<b>57</b>



---

# Introduction

Ce document présente la majorité de mes travaux de recherche réalisés depuis mon doctorat. Ces travaux sont classés selon quatre chapitres, le regroupement étant thématique mais aussi, à quelques légères exceptions, chronologique. Dans cette introduction je présente brièvement chacun d'entre eux.

## Les marches excitées

La marche excitée est une marche aléatoire au plus proche voisin où à la première visite en un site, le marcheur se déplace avec un biais dans une direction donnée puis se déplace selon une marche simple aux visites suivantes. Ce modèle, introduit il y a une quinzaine d'années est maintenant assez bien compris. Dans le premier chapitre, j'expose les résultats que j'ai obtenu en collaboration avec Arvind Singh dans [4,5] sur une généralisation de ce modèle, *la marche multi-excitée*, en dimension 1. Nous donnons en particulier un critère pour qu'une telle marche admette une vitesse strictement positive et nous décrivons, dans le cas sous-diffusif, les différents régimes de transience. Enfin, j'expose aussi des résultats obtenus lorsque le graphe sous-jacent est un arbre [7].

## Les marches renforcées

Le deuxième chapitre de ce mémoire porte sur un autre modèle de marche non-markovienne : *la marche renforcée*. À chaque visite en un site/arête, la marche augmente sa probabilité de repasser dans le futur par ce site/arête. Ce modèle est plus ancien que celui de la marche excitée mais est en fait moins bien compris. L'absence de direction privilégiée rend en effet son étude bien plus délicate. Le comportement du processus est d'ailleurs bien différent en fonction que le renforcement ait lieu *par site* ou *par arête*. L'objet de ce chapitre est d'y exposer les résultats de trois articles. Dans [9], j'étudie avec Arvind Singh un modèle à temps continu sur un arbre qui correspond en un certain sens à un renforcement par arête. Nous donnons alors un critère pour la transience/récurrence du processus. Dans [11,13], nous étudions, avec Bruno Schapira et Arvind Singh, un renforcement par sites sur  $\mathbb{Z}$  et donnons des critères pour que la marche se localise sur un nombre fini de sites.

## La percolation de premier passage

Le troisième chapitre de ce mémoire porte sur une thématique assez différente des deux premiers et expose des résultats que j'ai obtenus en collaboration avec Lucas Gerin, Nathanaël Enriquez et Jean-Baptiste Gouéré [10,12]. Nous nous sommes intéressés à une percolation par arête sur  $\mathbb{Z}^2$  où la probabilité  $p$  de garder chaque arête est très proche de 1. Nous étudions alors comment cette légère perturbation de  $\mathbb{Z}^2$  change la distance de graphe entre deux points. Pour résoudre cette question, nous relierons ce problème à une fonctionnelle simple du processus d'exclusion.

## Le processus d'Hammersley

L'étude effectuée précédemment sur un modèle de percolation de premier passage et ses liens avec un modèle exactement soluble, nous a naturellement amené, mes coauteurs et moi-même à étudier un autre modèle exactement soluble : *le processus des lignes d'Hammersley*. Celui-ci est un système de particules permettant d'estimer le nombre de points maximum d'un nuage de points poissonien par lequel un chemin croissant peut passer. Il s'agit donc cette fois d'un modèle de percolation de dernier passage. Avec les mêmes auteurs que dans le chapitre précédent, nous étudions dans [14] un analogue discret de ce problème où le nuage de point poissonien est remplacé par un champ de Bernoulli sur  $\mathbb{N}^2$ . Notre approche permet de retrouver dans un cadre unifié et avec une approche plus probabiliste des résultats de Seppäläinen [Sep97, Sep98]. Avec Lucas Gerin, nous étudions alors dans [17,18] plusieurs variantes du problème initial où l'on impose des contraintes sur le chemin : les points du nuage pris par le chemin doivent satisfaire une certaine contrainte d'espacement ou de type Lipschitz. Dans chacun de ces cas, nous effectuons des transformations (aléatoires) du plan qui nous permettent de relier le problème étudié au modèle originel d'Hammersley. Enfin, motivés par un problème soulevé par des informaticiens, dans un article [15] écrit en collaboration avec Lucas Gerin, Jean-Baptiste Gouéré et Arvind Singh nous étudions un processus d'Hammersley où les lignes originelles ont été remplacés par des arbres. Nous obtenons alors sous certaines conditions sur la loi de reproduction un modèle exactement soluble où des calculs peuvent être menés à leur terme.

Chacun des quatre chapitres de ce mémoire est rédigé de la même manière, je présente dans une introduction les modèles qui seront étudiés par la suite et les résultats existant sur le sujet. Puis, dans les sections suivantes, j'expose les contributions que j'ai pu apporter sur le domaine. Enfin, je conclus en faisant quelques remarques et en donnant quelques perspectives de recherche.

Les travaux [1,2,3] issus de ma thèse de doctorat et portant sur les processus de fragmentation ou coalescence ne sont pas traités ici. Les articles [6,8], réalisés lors de mes premières années en tant que maître de conférences et portant sur des thématiques similaires sortent également du cadre de ce mémoire et ne sont donc pas non plus exposés dans ce document.

# CHAPITRE 1

## Marches excitées [4,5,7]

### 1.1 Introduction

Introduit en 2003 par Benjamini et Wilson [BW03], la marche excitée (de biais  $\varepsilon/d$ ) est une marche sur  $\mathbb{Z}^d$  au plus proche voisin qui, lors de la première visite en un site, se déplace avec une probabilité  $(1 + \varepsilon)/2d$  vers la droite,  $(1 - \varepsilon)/2d$  vers la gauche, et avec probabilité  $1/2d$  dans toutes les autres directions. Ce modèle fait partie de la classe plus large "des marches inter-agissantes" dont font aussi partie les marches renforcées par exemple, sujet du chapitre suivant de ce mémoire. Bien que les marches excitées aient été introduites plus récemment que les marches renforcées, les résultats obtenus sur ce modèle sont néanmoins beaucoup plus précis. En effet, le caractère dirigé du modèle permet de le coupler de façon naturelle avec la marche simple de manière à ce que la marche excitée soit toujours à droite de la marche simple. De plus la projection de la marche excitée sur l'hyperplan orthogonal à la direction du biais est, à un changement de temps près, une marche simple sur  $\mathbb{Z}^{d-1}$ . En utilisant cela et des résultats fins sur la marche simple, Benjamini et Wilson prouvent assez simplement qu'une marche excitée est récurrente sur  $\mathbb{Z}$  et transiente vers la droite sur  $\mathbb{Z}^d$  pour  $d \geq 2$  quelle que soit la force (non triviale) du biais. La stricte positivité de la vitesse de transience sur  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 4$  est aussi une conséquence directe du fait que la marche simple est transiente en dimension 3 et visite un nombre linéaire de sites avec le temps. Montrer que la vitesse reste non nulle en dimension 2 et 3 nécessite une étude plus précise mais cette propriété fut tout de même démontrée par Kozma [Koz03, Koz05] et Berard et Ramirez [BR07]. Ces derniers montrent même que les fluctuations sont gaussiennes et que le processus renormalisé converge vers un mouvement Brownien.

En dimension 1, le modèle est assez pauvre puisque le calcul explicite de la probabilité de toucher  $x + 1$  avant de toucher 0 en partant de  $x$  prouve la récurrence de la marche. Zerner [Zer05] proposa alors en 2005 d'enrichir ce modèle en introduisant le modèle de la *marche multi-excitée*. La marche n'est alors plus biaisée vers la droite seulement à la première visite en un site, mais lors des  $M$  premières visites en un site pour un certain  $M$  fixé. Formellement, on se donne un vecteur  $\mathbf{p} := (p_1, \dots, p_M) \in [1/2, 1)$  et on considère la marche  $\mathbf{p}$ -excitée sur  $\mathbb{Z}$  au plus proche voisin définie par

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = X_n + 1 | X_0, \dots, X_n) = p_i \quad \text{où} \quad i = \#\{j \leq n, X_j = X_n\},$$

avec comme convention  $p_i = 1/2$  pour  $i > M$ . Ce modèle est aussi cité dans la littérature

sous le nom de *cookie random walk*. L'image est la suivante : en chaque site, on dépose initialement un tas de  $M$  cookies de force respective  $(p_1, \dots, p_M)$ . Lorsque le marcheur arrive en un site, il mange le premier cookie disponible à ce site et se déplace au coup suivant la force de ce cookie.

Zerner démontre qu'une transition de phase apparaît en fonction de la force des excitations. Plus précisément, le comportement de la marche dépend principalement du biais total en chaque site donné par l'ensemble des cookies

$$\delta(\mathbf{p}) := \sum_{i \geq 1} (2p_i - 1).$$

**Théorème 1.1** (Zerner [Zer05]). *La marche  $\mathbf{p}$ -excitée sur  $\mathbb{Z}$  est récurrente ssi  $\delta(\mathbf{p}) \leq 1$ .*

En fait, le résultat de Zerner est énoncé plus généralement lorsque la force des excitations est elle-même aléatoire mais la distribution en chaque site est stationnaire et ergodique. L'idée pour montrer ce résultat consiste à établir, à l'aide d'une martingale, que lorsque la marche atteint le site  $k \geq 0$ , la somme des forces de toutes les excitations subies jusqu'à là par la marche doit en moyenne être égale à  $k$ . Ainsi, pour satisfaire cette égalité, si  $\delta(\mathbf{p}) < 1$ , la marche doit nécessairement visiter des points d'abscisse négative et donc être récurrente, alors qu'au contraire, si  $\delta(\mathbf{p}) > 1$ , la marche ne peut pas manger tous les cookies entre 0 et  $k$  et donc ne retourne qu'un nombre fini de fois en 0.

La question naturelle suivante est de savoir si, lorsque la marche est transiente, la vitesse est strictement positive. Zerner répond partiellement à cette question en montrant que lorsqu'il n'y a que deux cookies par site, la marche a nécessairement une vitesse nulle. Mountford, Pimentel et Valle [MPV06] complètent alors ce résultat en montrant le théorème suivant.

**Théorème 1.2** (Mountford, Pimentel et Valle [MPV06]). *Soit  $(X_n)$  une marche multi-excitée dans un environnement avec  $M$  cookies de force  $p \in (1/2, 1)$ .*

- (i) *Si  $M(2p - 1) \in (1, 2)$ , la marche est transiente à vitesse nulle.*
- (ii) *Pour tout  $p \in (1/2, 1)$ , il existe un  $M_0$  tel que si  $M \geq M_0$ , la marche a une vitesse strictement positive.*

## 1.2 Vitesse de la marche multi-excitée sur $\mathbb{Z}$ [4,5]

Avec Arvind Singh, nous avons complété le résultat de Mountford, Pimentel et Valle en montrant l'équivalence suivante.

**Théorème 1.3** (B., Singh [4]). *La marche  $\mathbf{p}$ -excitée sur  $\mathbb{Z}$  possède une vitesse asymptotique strictement positive ssi  $\delta(\mathbf{p}) > 2$ .*

Ainsi, comme conjecturé dans [MPV06], il suffit de trois excitations par site pour que la marche excitée puisse avoir une vitesse strictement positive. Nous donnons aussi une expression de la vitesse de la marche qui, loin de permettre de calculer explicitement celle-ci, permet tout de même d'en déduire la continuité de la vitesse en fonction du vecteur d'excitation ainsi que sa dérivabilité à droite aux points critiques.

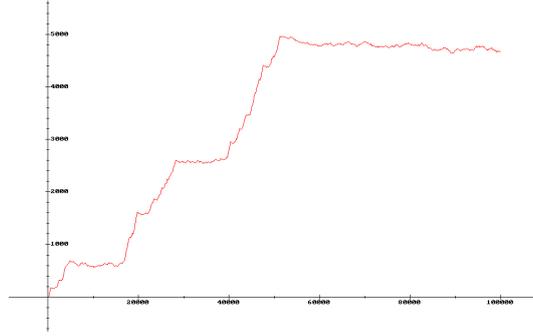


FIGURE 1 – Simulation des  $10^6$  premiers pas d'une marche excitée ayant trois cookies de force  $\frac{3}{4}$  ( $\delta = \frac{3}{2}$ ).

**Théorème 1.4** (B., Singh [4]). *Soit  $v(\mathbf{p})$  la vitesse asymptotique d'une marche  $\mathbf{p}$ -excitée. Alors  $v(\mathbf{p})$  est une fonction continue croissante de  $\mathbf{p}$ . De plus, pour tout environnement critique  $\mathbf{p}_c$  i.e. tel que  $\delta(\mathbf{p}_c) = 2$ , il existe une constant  $C(\mathbf{p}_c) > 0$  telle que*

$$\lim_{\substack{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}_c \\ \delta(\mathbf{p}) > 2}} \frac{v(\mathbf{p})}{\delta(\mathbf{p}) - 1} = C(\mathbf{p}_c).$$

Dans [5], nous complétons ces résultats en étudiant le régime de transience de la marche dans le cas sous-balistique.

**Théorème 1.5** (B., Singh [5]). *Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une marche  $\mathbf{p}$ -excitée sur  $\mathbb{Z}$  transiente et sous-balistique, c'est-à-dire telle que son biais total vérifie  $\delta \in (1, 2]$ . Alors*

(i) *Si  $\delta \in (1, 2)$ , on a la convergence en loi*

$$\frac{X_n}{n^{\delta/2}} \xrightarrow{\text{loi}} (\mathcal{S}_{\delta/2})^{-\delta/2}$$

*où  $\mathcal{S}_{\delta/2}$  est une variable stable d'indice  $\delta/2$ .*

(i) *Si  $\delta = 2$  alors il existe une constante  $c > 0$  telle que*

$$\frac{\log n}{n} X_n \xrightarrow{\text{prob.}} c.$$

Les différents types de comportements d'une marche multi-excitée ressemblent beaucoup aux types de comportement que l'on retrouve pour les marches aléatoires en milieu aléatoires. Pour prouver ces résultats, nous adoptons d'ailleurs une méthode similaire à celle utilisée par Kesten, Kozlov et Spitzer [KKS75] dans le cadre des marches aléatoires en milieu aléatoire. Plus précisément, pour  $n \geq 0$ , notons  $T_n$  le premier temps d'atteinte de la marche au niveau  $n$  et  $U_i^n$  le nombre de passages de la marche du site  $i$  au site  $i - 1$  avant le temps  $T_n$ . Par inversion, une estimé de  $T_n$  permet facilement d'en déduire une estimé pour  $X_n$ . D'autre part, si la marche est transiente vers la droite, en négligeant le temps passé sur des sites négatifs, on obtient que

$$T_n \sim n + 2 \sum_{i=0}^n U_i^n. \quad (1)$$

Comme dans le cas de la marche simple ou bien de la marche aléatoire en milieu aléatoire, pour une marche multi-excitée, le processus retourné  $(U_n^n, U_{n-1}^n, \dots, U_0^n)$  est un processus markovien. Pour une marche simple  $(U_n^n, U_{n-1}^n, \dots, U_0^n)$  suit la loi d'un processus de branchement de loi reproduction géométrique  $1/2$  ayant un immigrant à chaque génération; dans le cadre des marches aléatoires en milieux aléatoires, Kesten, Kozlov et Spitzer obtenaient alors un processus de branchement en environnement aléatoire. Ici, nous obtenons que  $(U_n^n, U_{n-1}^n, \dots, U_0^n)$  suit la loi des  $n+1$  premiers pas d'un processus de branchement  $Z$  critique mais avec migration aléatoire : les " $M$  premiers individus" ne se reproduisent pas selon une loi géométrique  $1/2$ . Un calcul montre alors que la différence entre l'immigration et l'émigration moyenne est égale à  $1 - \delta(\mathbf{p})$ .

Par définition,  $Z_n$  ayant même loi que  $U_0^n$ , la transience de la marche excitée est équivalente à la convergence en loi de  $Z_n$  vers une loi stationnaire  $Z_\infty$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. Ainsi, de l'équation (1), nous déduisons que la marche possède une vitesse strictement positive si et seulement si  $\mathbb{E}(Z_\infty) < \infty$  et nous avons d'ailleurs

$$v(\mathbf{p}) = \frac{1}{1 + 2\mathbb{E}(Z_\infty)}.$$

Pour étudier la finitude de l'espérance de  $Z_\infty$ , nous montrons que sa fonction génératrice satisfait une certaine équation fonctionnelle et nous déduisons alors le comportement de celle-ci au voisinage de 1. Nous obtenons alors la queue de distribution de  $Z_\infty$  à l'aide d'un théorème Taubérien. La formule implicite pour la vitesse qui nous permet d'obtenir le théorème 1.4 vient de la forme implicite que l'on obtient pour  $\mathbb{E}(Z_\infty)$  via l'équation fonctionnelle satisfaite par sa fonction génératrice. Cette forme implicite a aussi été utilisée très récemment par Madden *et al.* [MKL<sup>+</sup>19] pour déterminer des minoration et majoration de la vitesse lorsque la marche ne possède que 3 cookies. Dans le pire des cas, la majoration et la minoration obtenues diffèrent alors de moins de 0.02.

Le théorème 1.5 nécessite une analyse plus fine du processus  $Z$ . Il faut alors comprendre le comportement de  $Z$  lors d'une excursion en dehors de 0. Plus précisément, si on note  $\sigma$  le premier temps de retour en 0 de  $Z$ , nous montrons d'abord que

$$\mathbb{P}_0(\sigma \geq x) \sim Cx^{-\delta}.$$

Des simulations numériques montrent alors que, comme dans le cas d'un processus de branchement classique, si on note  $H$  la hauteur d'une excursion, on a  $H \approx \sigma$  et la population totale  $\sum_{i=0}^{\sigma} Z_i$  lors d'une excursion est de l'ordre de  $H\sigma$ . Ainsi, on aurait

$$\mathbb{P}_0\left(\sum_{i=0}^{\sigma} Z_i \geq x\right) \sim C'x^{-\delta/2}. \quad (2)$$

Pour établir rigoureusement cet équivalent, nous introduisons une martingale construite à l'aide de fonctions de Bessel. Cette idée s'inspire des méthodes développées pour calculer des intégrales de volume pour les carrés de Bessel. Malheureusement, le caractère discret de notre modèle rend les calculs assez fastidieux. Une fois (2) établie, en regroupant les termes dans (1) selon les différentes excursions de  $Z$ , on en déduit directement que  $T_n$  est dans le domaine d'attraction d'une loi stable d'indice  $\delta/2$ .

Depuis nos travaux, un grand nombre de résultats ont été obtenus sur le sujet. En particulier, Kosygina et Zerner [KZ08] et Kosygina et Mountford [KM11] ont étendu nos résultats à des cookies pouvant aussi engendrer un biais vers la gauche et ont montré qu'une nouvelle transition de phase apparaissait à  $\delta = 4$  : pour  $\delta \in (2, 4)$  les fluctuations de la marche autour de sa vitesse asymptotique sont dans le domaine d'attraction d'une loi stable d'indice  $\delta/2$  alors que pour  $\delta > 4$ , la marche satisfait un théorème central limite. Des propriétés plus fines du processus ont aussi été étudiées : Dolgopyat et Kosygina [Dol11, DK12] ont montré la convergence d'une marche excitée récurrente vers un mouvement brownien perturbé aux extremums. Réciproquement, Raimond et Schapira [RS12] ont montré que tout mouvement brownien excité par son temps local peut être vu comme la limite d'une marche discrète multi-excitée. Peterson [Pet12, Pet15] quant à lui s'est intéressé aux grandes déviations d'une marche multi-excitée, Kosygina, en collaboration avec Zerner puis Dolgopyat a étudié les excursions de la marche [KZ14, DK15]. Ce modèle a aussi été généralisé en permettant par exemple des environnements de cookies markoviens [KP17] ou périodiques [KOS14, KP16] ou bien en permettant des sauts non bornés [DP17]. Nous renvoyons à [KZ13] pour un aperçu plus détaillé des résultats sur le sujet.

### 1.3 Marches multi-excitées sur un arbre [7].

Après nos travaux sur la marche multi-excitée sur  $\mathbb{Z}$ , une généralisation naturelle était d'étudier un processus similaire sur un arbre. On considère ainsi un arbre régulier  $\mathcal{T}_b$  à  $b$  enfants et sur chaque sommet on met initialement  $M$  cookies de force respective  $\mathbf{p} := (p_1, \dots, p_M) \in [0, 1]^M$ . On se donne aussi un paramètre  $q \in (0, 1)$  qui déterminera le biais de la marche après-excitation. Une  $(\mathbf{p}; q)$  marche excitée sur  $\mathcal{T}_b$  part de la racine et se déplace de la manière suivante :

- Si la marche  $X_n$  est à un site visité pour la  $i$ -ième fois avec  $i \leq M$ , elle se déplace à l'instant suivant vers chacun de ses enfants avec probabilité  $p_i/b$  et vers son père avec probabilité  $1 - p_i$ .
- Si la marche  $X_n$  est à un site visité pour la  $i$ -ième fois avec  $i > M$ , elle se déplace à l'instant suivant vers chacun de ses enfants avec probabilité  $q/b$  et vers son père avec probabilité  $1 - q$ .

(On considère que la racine est son propre père). Avec ce paramétrage, un cookie de force  $p$  entraîne donc un biais vers la racine si  $p < 1/2$  et vers l'infini si  $p > 1/2$ . L'étude de la transience/réurrence de la marche est donc triviale dès que tous les paramètres du modèle sont plus grands que  $1/2$  ou respectivement tous plus petits que  $1/2$ .

Volkov [Vol03] s'intéressa le premier à ce modèle dans deux cas particuliers

- (i)  $M = 1$  et  $q = b/(b + 1)$  ("marche 1-excitée").
- (ii)  $M = 2$ ,  $p_1 = p_2 = 0$  et  $q = b/(b + 1)$  ("marche creusante").

Remarquons que le choix de  $q = b/(b + 1)$  correspond à considérer que, après excitation, la marche se déplace comme une marche simple sur l'arbre. Dans les deux cas, Volkov montre que la marche est transiente vers l'infini et se déplace avec une vitesse strictement positive. Il conjecture d'ailleurs que quel que soit le vecteur d'excitation  $\mathbf{p}$ , une  $(\mathbf{p}; b/(b + 1))$ -marche excitée sur  $\mathcal{T}_b$  est transiente. Nous montrons que c'est en effet le cas

et nous caractérisons de manière implicite la transition de phase récurrence/transience en fonction du vecteur d'excitation.

**Théorème 1.6** (B., Singh [7]). *Soit  $X$  une  $(\mathbf{p}; q)$  marche excitée sur l'arbre  $\mathcal{T}_b$ .*

- (i) *Si  $q \geq \frac{b}{b+1}$ , alors  $X$  est transiente vers l'infini quel que soit le vecteur  $\mathbf{p}$ .*
- (ii) *Si  $q < \frac{b}{b+1}$ , il existe une matrice  $\mathcal{P}$  de taille infinie et dont les coefficients peuvent être explicitement calculés en fonction de  $(\mathbf{p}; q)$ , telle que, si on note  $\lambda(\mathcal{P})$  son rayon spectral, on a*

$$\lambda(\mathcal{P}) \leq 1/b \iff \text{la marche } X \text{ est récurrente.}$$

Le point (i) répond donc à la conjecture de Volkov. Formellement, le point (ii) permet de caractériser exactement la transition de phase, mais en pratique, nous parvenons à calculer le rayon spectral de la matrice uniquement dans quelques cas particuliers. Nous citons ici les deux plus simples qui généralisent les cas étudiés par Volkov.

**Proposition 1.7** (B., Singh [7]). *Considérons une marche  $M$ -creusante, c'est-à-dire avec  $M$ -cookies de force 0. Alors la  $(\mathbf{0}_M, q)$ -marche excitée est récurrente ssi*

$$\left( \frac{q}{b(1-q)} \right)^{M+1} \leq \frac{1}{b}.$$

Le théorème 1.6 montre que  $q \geq \frac{b}{b+1}$  implique la transience quel que soit le vecteur  $\mathbf{p}$ . La proposition ci-dessus montre qu'au contraire, si  $q < \frac{b}{b+1}$ , on peut trouver un vecteur d'excitation qui rend la marche récurrente. Ainsi,  $b/(b+1)$  apparaît bien comme une valeur critique pour le modèle.

L'autre exemple où nous calculons la valeur explicite du rayon spectrale est le cas de la marche 1-excitée *i.e.*  $M = 1$ .

**Proposition 1.8** (B., Singh [7]). *Considérons une marche 1-excitée de force  $(p; q)$ . Alors la marche est récurrente ssi*

$$(1-p) \left( \frac{q}{b(1-q)} \right)^2 + \frac{(b-1)pq}{b^2(1-q)} + \frac{p}{b} \leq \frac{1}{b}.$$

La figure 2 représente la transition de phase obtenue grâce à cette formule sur l'arbre binaire. Remarquons que dans les deux cas non triviaux  $p < 1/2 < q$  ou  $q < 1/2 < p$ , on peut trouver des environnements récurrents ou transients.

Dans le cas unidimensionnel, le caractère transient/récurrent de la marche ne dépendait pas de l'ordre des cookies. On montre, encore grâce au théorème 1.6 que ce n'est plus le cas ici. Par exemple, sur un arbre binaire, une marche  $(1/2, 4/5, 0, 0; 1/2)$  est récurrente alors que l'inversion des deux premiers cookies la rendrait transiente.

Nous nous sommes aussi intéressés à la question de la balisticité de la marche et nous obtenons le théorème suivant.

**Théorème 1.9** (B., Singh [7]). *Soit  $X$  une  $(\mathbf{p}; q)$ -marche excitée sur un arbre régulier. On suppose que pour tout  $i$ ,  $p_i > 0$ . Alors  $X$  se déplace avec une vitesse strictement positive et satisfait un théorème central limite.*

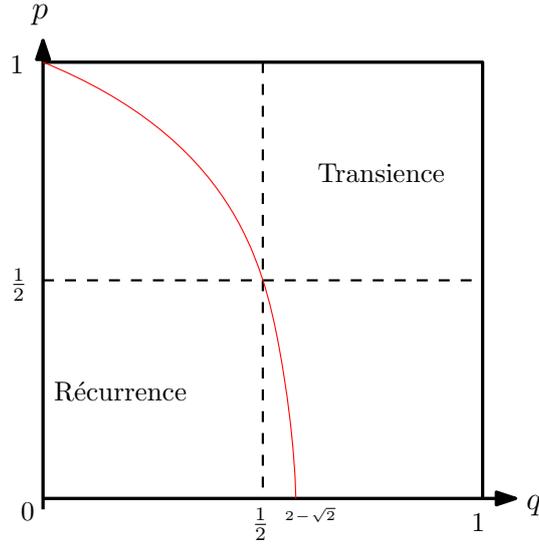


FIGURE 2 – Transition d’une marche  $(p; q)$ -excitée sur un arbre binaire.

La situation est donc moins riche que dans le cas unidimensionnel. Cependant, remarquons que l’hypothèse  $p_i > 0$  pour tout  $i$  ne peut pas être supprimée. Par exemple, si on pose  $p_1 = 3/4, p_2 = -2 + 2\sqrt{15}/3$ , sur un arbre binaire une marche  $(p_1, p_2, 0, 0 ; 2/3)$  est transiente mais a une vitesse nulle. En effet, elle est nécessairement transiente puisque  $q = b/(b + 1)$ . Mais, les valeurs de  $p_1$  et  $p_2$  ont été choisies de telle sorte qu’une marche ayant deux cookies de force respective  $p_1$  et  $p_2$  et qui, à partir de la troisième visite en un site, se déplace de façon déterministe vers son père (*i.e.*  $q = 0$ ), reviennent à la racine p.s. mais en un temps non intégrable (remarquons que la condition  $q = 0$  implique alors que la marche reste bloquée à la racine). Or jusqu’à ce premier temps de retour en 0, cette marche est indistinguable de la  $(p_1, p_2, 0, 0 ; 2/3)$ -marche excitée car la présence de deux cookies de force nulle implique qu’une telle marche ne peut visiter 5 fois un site avant de revenir en 0.

Les techniques employées pour montrer ces résultats ressemblent à celles employées dans nos articles précédents dans le cadre du modèle unidimensionnel. Nous étudions encore le processus des temps locaux associé à cette marche, *i.e.* le nombre de traversée de chaque arête avant un certain temps d’arrêt. L’absence de cycle dans le graphe sous-jacent implique toujours une structure markovienne pour ce processus. Cependant, le chemin vers l’infini n’étant plus unique, il est maintenant nécessaire de considérer le nombre de traversées jusqu’au premier temps  $T_0$  de retour en la racine. Pour s’assurer que celui-ci est fini presque sûrement, on considère d’abord la marche excitée sur l’arbre tronqué à la hauteur  $n$ . On obtient alors que le processus des temps locaux ainsi défini a même loi que les  $n$  premiers pas d’une chaîne de Markov branchante. La loi de reproduction de cette chaîne de Markov branchante est simplement donnée par le nombre d’enfants de chaque sommet de l’arbre, c’est donc le dirac en  $b$  puisqu’on considère ici des arbres réguliers. Le déplacement de la chaîne est quand à lui lié au mécanisme de la marche excitée et ses transitions sont celles données par la matrice (infinie)  $\mathcal{P}$  mentionnée au théorème 1.6. Comme dans le cas unidimensionnel, la matrice  $\mathcal{P}$  peut

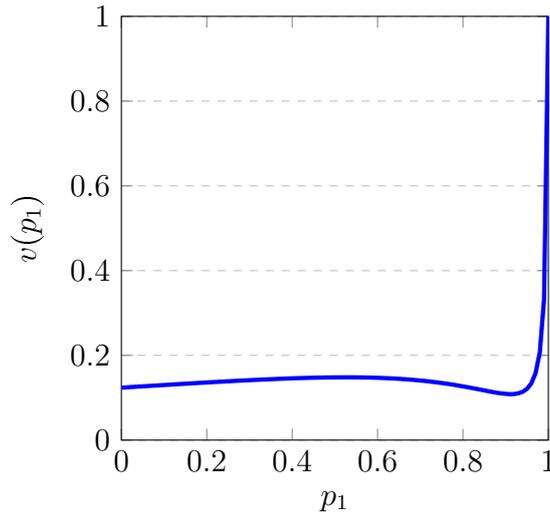


FIGURE 3 – Simulation de la vitesse d’une marche  $(p_1, 0.01; 0.95)$ -excitée sur un arbre binaire (par Monte-Carlo). La vitesse minimum est obtenue pour  $p_1 \approx 0.91$ .

être vue comme la matrice de transition d’un processus de branchement avec migration. En particulier, l’état 0 est un état absorbant. La marche multi-excitée est récurrente si, presque sûrement, au bout d’un certain temps, toutes les particules de la marche branchante sont en 0. La théorie de Vere-Jones [VJ67] sur les matrices positives nous permet de prouver que ceci survient si et seulement si le rayon spectral de la matrice  $\mathcal{P}$  est plus petit que  $1/b$  comme annoncé dans le théorème 1.6. Les propositions 1.7 et 1.8 sont obtenues en trouvant explicitement un vecteur propre associé au rayon spectral de la matrice  $\mathcal{P}$ .

Le théorème 1.9 est montré de manière assez classique en utilisant des propriétés d’intégrabilité des temps de coupure de la marche, c’est-à-dire des temps où la trajectoire passée et future de la marche ne se recoupent pas. Cela provient principalement du fait qu’un processus de branchement sur-critique conditionné à mourir s’éteint forcément exponentiellement vite.

Finalement, mentionnons que le théorème 1.6 reste valide dans le cas d’une marche multi-excitée sur un arbre de Galton-Watson sans feuilles. La marche est alors récurrente ssi le rayon spectral de la matrice  $\mathcal{P}$  vérifie  $\lambda(\mathcal{P}) \leq 1/\mathbb{E}(B)$  où  $B$  est la loi de reproduction de l’arbre. Récemment, des travaux de Collevocchio, Huynh et Kious [CHK18] et Huynh [Huy18] complètent ces résultats en caractérisant la transience/réurrence de la marche 1-excitée et de la marche creusante sur des arbres à croissance polynomiale.

## 1.4 Quelques perspectives

Hormis le calcul exact de la valeur de la vitesse (qui semble inaccessible), le cas de la dimension 1 semble maintenant bien compris. Par contre, il reste plusieurs questions sur un arbre ou en dimension supérieure qu’ils m’intéresseraient d’étudier même si ce n’est pas mon thème de recherche le plus actif actuellement.

- Le théorème 1.9 dit qu'une marche excitée transiente sur un arbre se déplace avec une vitesse strictement positive dès que tous les cookies sont de force non nulle. Un contre-exemple montre que si on enlève cette hypothèse, la vitesse peut devenir nulle. Mais est-il possible de caractériser les environnements qui rendent la vitesse nulle? Le contre-exemple correspond à ce que la matrice de transition  $\mathcal{P}$  possède une classe d'irréductibilité finie ayant comme rayon spectral exactement  $1/b$ . Est-ce la seule manière d'obtenir une vitesse nulle?
- La monotonie de la vitesse en fonction des paramètres du modèle est connue en dimension 1 (*c.f.* théorème 1.5, voir aussi [Pet13] pour la stricte monotonie) et a été montrée en dimension plus grande que 9 par des techniques de *lace expansion* [vdHH10, Pha15]. Peut-on compléter ces résultats pour les dimensions plus petites. Cette question se pose aussi sur un arbre. Cependant, des simulations laissent penser que ce n'est pas le cas (*c.f.* figure 3). Est-il alors possible d'exhiber un contre-exemple?
- En dimension 1, réordonner les cookies d'une marche transiente de façon décroissante, augmente la vitesse de la marche. Est-ce encore le cas sur un arbre? Rappelons que, contrairement au cas unidimensionnel, la transition de phase entre la récurrence et la transience sur un arbre dépend de l'ordre des excitations. Il faudrait donc déjà vérifier que ce réordonnement décroissant ne peut pas rendre la marche récurrente. Si cette première étape est probablement vérifiée, la monotonie de la vitesse est par contre moins claire.
- En dimension supérieure, nous savons qu'une marche 1-excitée est transiente quelle que soit la valeur de l'excitation. Mais que se passe-t-il pour une marche 2-excitée dans deux directions opposées? Ou bien une marche 1-excitée qui est, après excitation biaisée dans l'autre direction? Y a-t-il une transition de phase et si oui, peut-on la caractériser?

## CHAPITRE 2

# Marches renforcées [9,11,13]

### 2.1 Introduction

Comme les marches excitées exposées au chapitre précédent, les marches renforcées constituent un exemple de marches aléatoires non markoviennes. Il s'agit d'étudier le comportement de marches qui ont tendance à repasser par les *endroits* qu'elles ont déjà visités par le passé. Cette phrase est intentionnellement vague et nous allons voir que le comportement de la marche dépend fortement du type de renforcement considéré, en particulier des deux points suivants :

- (i) la force du renforcement : comment précisément augmente la probabilité de passer à un endroit déjà visité en fonction du nombre de visites précédentes ?
- (ii) le renforcement a-t-il lieu par site ou par arête : sur un graphe discret, le marcheur a-t-il tendance à revenir aux sites qu'il a déjà visités précédemment ou bien a-t-il tendance à repasser par les arêtes qu'il a souvent empruntées dans le passé ?

S'il est assez naturel que la force du renforcement puisse changer la nature de la marche, nous verrons que, suivant que le renforcement ait lieu par site ou par arête, le comportement du processus change aussi drastiquement.

#### Marches linéairement renforcée par arête

Historiquement, le premier modèle de marche renforcée fut introduit en 1986 par Coppersmith et Diaconis [CD86, Dia88]. Il s'agissait de la *marche linéairement renforcée par arête*. Formellement, on se donne un graphe  $G = (V, E)$ , et on considère une marche sur  $G$  se déplaçant le long des arêtes de  $G$  avec les probabilités suivantes

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_0, \dots, X_n = x) = \frac{c + L_n(x, y)}{\sum_{z \sim x} c + L_n(x, z)} \quad \text{pour tout } y \sim x,$$

où  $c > 0$  est une constante donnée et  $L_n(x, y)$  est le nombre de fois où la marche a emprunté l'arête (non orientée)  $\{x, y\}$  avant le temps  $n$ . Ainsi, à une constante initiale près, on se déplace vers un de ses voisins avec une probabilité proportionnelle au nombre de traversées précédentes de cette arête. Remarquons que plus  $c$  est petit, plus le renforcement est fort. Dans un graphe sans cycle, il est assez facile de voir qu'une telle marche

est équivalente à une marche aléatoire en environnement aléatoire et où l'environnement en chaque site est indépendant et donné par une loi de Dirichlet. En effet, pour simplifier les notations, prenons le cas de  $G = \mathbb{Z}$ . Considérons un  $x \in \mathbb{Z}$  et regardons comment augmente le temps local des deux arêtes adjacentes à  $x$  entre deux visites successives à ce sommet. Si la marche quitte  $x$  en allant vers la droite, comme  $\mathbb{Z}$  est sans cycle, quand elle y reviendra pour la première fois, le temps local de  $\{x - 1, x\}$  sera forcément resté constant, alors que celui de  $\{x, x + 1\}$  aura nécessairement augmenté de 2. Notons que la probabilité que la marche ait quitté  $x$  par la droite ne dépend aussi que du temps local en  $\{x - 1, x\}$  et  $\{x, x + 1\}$  et ceci de façon linéaire. On voit donc que la suite des temps locaux en  $\{x - 1, x\}$  et  $\{x, x + 1\}$  aux temps de visite du sommet  $x$  se comporte comme une urne de Polya, et ceci indépendamment en chaque point  $x$  de  $\mathbb{Z}$ . Une urne de Polya pouvant être construite à partir d'une variable de loi bêta (ou plus généralement de loi de Dirichlet pour les urnes multidimensionnelles), on comprend pourquoi une marche renforcée sur un arbre peut être vue comme une marche aléatoire en milieu aléatoire (MAMA) dans un environnement de Dirichlet.

Après avoir démontré un critère de transience/réurrence général sur les MAMA sur les arbres, Pemantle [Pem88] utilisa donc cette correspondance pour montrer que la marche linéairement renforcée sur un arbre admettait une transition de phase en fonction du paramètre  $c$  de renforcement. Plus précisément, il obtient le résultat suivant :

**Théorème 2.1** (Pemantle [Pem88], Lyons, Pemantle [LP92]). *Soit  $A(c) := \Gamma_1/\Gamma_2$  où  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont deux variables indépendantes de loi respective  $\gamma(\frac{c}{2}, 1)$  et  $\gamma(\frac{c+1}{2}, 1)$ . Soit*

$$p(c) := \min_{0 \leq a \leq 1} \mathbb{E}(A(c)^a).$$

*Alors une marche linéairement renforcée de paramètre  $c$  sur un arbre de Galton-Watson infini de moyenne  $b$  est récurrente ssi  $bp(c) \leq 1$ .*

Le cas des graphes avec cycles est bien plus compliqué. Il existe pourtant un résultat général qui dit qu'une marche renforcée sur un graphe fini peut encore être vue comme une marche aléatoire en conductance aléatoire. Mais, lorsqu'il y a des cycles, les lois des conductances pour chaque arête ne sont plus indépendantes. Cette loi reste explicite, mais la formule la donnant, annoncée par Coppersmith Diaconis [CD86] et démontrée par Keane et Rolles [KR00], appelée d'ailleurs *magic formula*, est difficilement exploitable. Ce n'est d'ailleurs qu'assez récemment que la récurrence de la marche linéairement renforcée sur  $\mathbb{Z}^d$  pour des renforcements assez forts a été démontrée, et ceci indépendamment par deux équipes de chercheurs : Angel, Crawford et Kozma [ACK14] d'une part, Sabot et Tarrès [ST15] d'autre part. Les deux méthodes employées sont très différentes. Angel, Crawford et Kozma utilisent que la marche renforcée peut être vue comme une marche en conductance aléatoire et arrivent, d'une manière astucieuse, à montrer une décroissance exponentielle des conductances. Alors que Sabot et Tarrès font le lien entre ce modèle à temps discret et un processus de saut renforcé par sites qui fera d'ailleurs l'objet du chapitre suivant. Cette dernière approche, plus puissante, a permis aussi de montrer la transience de la marche renforcée sur  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 3$  pour des renforcements suffisamment faibles [DST15] et la récurrence sur  $\mathbb{Z}^2$  pour tout renforcement [SZ19].

## Marche renforcée par arête généralisée

Ainsi, bien qu'introduit il y a plus de trente ans, ce premier modèle de renforcement constitue toujours un domaine de recherche très actif. Entre-temps, d'autres modèles de renforcement ont tout de même été étudiés. Une première généralisation a été de considérer des renforcements non linéaires. On se donne donc une fonction de poids  $\omega : \mathbb{N} \mapsto (0, \infty)$  et on considère la marche aléatoire sur  $G$  ayant les probabilités de transition :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_0, \dots, X_n = x) = \frac{\omega(L_n(x, y))}{\sum_{z \sim x} \omega(L_n(x, z))} \quad \text{pour tout } y \sim x,$$

où, comme précédemment,  $L_n(x, y)$  désigne le temps local de l'arête non orientée  $\{x, y\}$ . Remarquons que la marche est effectivement *renforcée* si la fonction  $\omega$  est croissante, hypothèse que nous ferons dans toute cette présentation. Davis [Dav90] étudia ce modèle sur  $\mathbb{Z}$  et montra qu'un nouveau phénomène pouvait apparaître.

**Théorème 2.2** (Davis [Dav90]). *Soit  $X$  une marche renforcée sur  $\mathbb{Z}$  de fonction de poids croissante  $\omega$ . Alors*

- (i) *Si  $\sum_{k \geq 0} \omega(k)^{-1} = \infty$ , la marche est récurrente p.s.*
- (ii) *Si  $\sum_{k \geq 0} \omega(k)^{-1} < \infty$ , au bout d'un certain temps, la marche reste p.s. bloquée sur une unique arête.*

Dans le cas (ii), on parle de renforcement fort et de phénomène de *localisation*. Même si ce phénomène de localisation est assez surprenant et inhabituel, remarquons que le fait que la marche ne visite qu'un nombre fini de sites repose juste sur l'utilisation d'un lemme de Borel-Cantelli. Une série de travaux ont d'ailleurs permis de montrer que ce phénomène de localisation sur une unique arête se produit sous la même condition de sommabilité sur tout graphe de degré borné [Sel94, Lim03, LT07, CT17].

Hormis dans le cas des graphes sans cycle, le comportement de la marche dans le cas (i) reste par contre très mal compris. Un des exemples le plus simple mais qui reste mystérieux est celui de la marche 1-renforcée, c'est-à-dire de fonction de poids

$$\omega(0) = 1 \quad \text{et} \quad \omega(k) = a > 1 \quad \text{pour } k \geq 1.$$

Pour une telle marche, on ne sait pas montrer qu'elle est récurrente pour tout renforcement sur  $G = \mathbb{Z} \times \{0, 1, 2\}$  i.e. une échelle de hauteur 3! (des résultats partiels existent tout de même sur l'échelle cf. [Sel06, Ver02, KSS18]). Et aucun résultat n'existe sur  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 2$ .

## Marche renforcée par sites

La deuxième modification possible pour définir une marche renforcée, est de considérer une marche renforcée non plus par arête, mais par site. On se donne toujours une fonction de poids (croissante)  $\omega : \mathbb{N} \mapsto (0, \infty)$  et on considère une marche sur un graphe  $G$  de transition

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_0, \dots, X_n = x) = \frac{\omega(Z_n(y))}{\sum_{z \sim x} \omega(Z_n(z))} \quad \text{pour tout } y \sim x,$$

où  $Z_n(y)$  est le nombre de visites au site  $y$  avant le temps  $n$ . On parle alors de *marche aléatoire renforcée par site* ou VRRW en anglais. D'apparence très proche du modèle renforcé par arête, ce processus est en fait bien plus complexe à étudier même sur des graphes sans cycle. Sur  $\mathbb{Z}$ , entre deux visites successives en un site, le temps local sur les arêtes adjacentes à ce site augmente de 2 pour l'une d'entre elles et de 0 pour l'autre. C'est cette propriété qui permet d'en déduire le comportement de la marche renforcée par arête. Par contre, l'augmentation du temps local aux sites voisins ne peut pas être contrôlée de façon déterministe, d'où la difficulté dans le cas d'un renforcement par site.

Dans le cas où la fonction de poids vérifie la condition de sommabilité (i) du théorème 2.2,  $\sum_{k \geq 0} \omega(k)^{-1} < \infty$ , un calcul direct montre encore que la marche a une probabilité positive de se bloquer sur une unique arête. Sur  $\mathbb{Z}$ , Volkov [Vol06] montre d'ailleurs que cet évènement arrive bien presque sûrement. Mais sur d'autres graphes, la situation est plus compliquée. Par exemple, Benaim, Raimond et Schapira [BRS13] montrent que sur un triangle, si  $\omega(k) = (k + 1)^{3/2}$ , la marche se bloque avec probabilité positive sur 2 sites mais aussi avec probabilité positive sur 3 sites ! En fait, on peut voir que cette condition de sommabilité implique bien la localisation presque sûre de la marche, mais sur des ensembles qui peuvent être de taille aléatoire. Récemment, Cotar et Thacker [CT17] montre que pour avoir localisation presque sûre sur deux sites sur tout graphe de degré borné, il suffit que la série  $k\omega(k)^{-1}$  soit sommable et ils conjecturent que cette condition est aussi nécessaire.

Le cas du renforcement linéaire a bien sûr reçu une attention particulière et les résultats obtenus sont très différents de ceux obtenus pour le renforcement par arête. Pemantle et Volkov [PV99] étudient d'abord le cas de  $\mathbb{Z}$  et prouvent le résultat surprenant suivant : la marche se localise presque sûrement sur un nombre fini de sites et, avec probabilité positive, cette localisation a lieu sur 5 sites consécutifs. La technique consiste à partir d'une bonne configuration de temps local pour la marche et de montrer, qu'avec grande probabilité, cette configuration se propage dans le temps. Le fait que cette localisation sur 5 sites se produit en fait presque sûrement ne fut démontré par Tarrès [Tar04] que quelques années après. Le cas de l'arbre n'est lui pas entièrement résolu : Volkov [Vol01] montre qu'il y a localisation presque sûre mais ne donne pas la forme de l'ensemble de localisation. Sur  $\mathbb{Z}^d$ , les résultats sont encore moins précis, cette fois-ci, Volkov [Vol01] donne plusieurs ensembles de formes distinctes sur lesquels la marche se localise avec probabilité positive, mais on ne sait toujours pas montrer que la marche se localise sur un ensemble fini de sites presque sûrement.

## 2.2 Processus de saut renforcé par sites [9]

Dans [9] écrit en collaboration avec A. Singh, nous étudions un modèle de marche renforcée par arête en temps continu, *le processus de saut renforcé par site*, introduit par Davis et Volkov [DV02]. On se place sur un graphe  $G = (V, E)$  localement fini et on se donne un paramètre  $c > 0$ . Le processus de saut renforcé par site de paramètre  $c$ , abrégé VRJP( $c$ ) est une marche à temps continu  $(X(t), t \geq 0)$  sur  $G$  au plus proche voisin qui lorsqu'elle est à un sommet  $v \in V$  au temps  $t$ , conditionnellement à sa trajectoire passée

$(X(s), s \leq t)$ , saute vers un voisin  $u$  au taux

$$L_c(t, u) := c + \int_0^t \mathbf{1}_{\{X(s)=u\}} ds. \quad (3)$$

Ainsi, la marche reste en  $v$  un temps exponentiel de paramètre  $\sum_{u \sim v} L_c(t, u)$  et saute vers un de ses voisins  $u$  avec une probabilité proportionnelle à  $L_c(t, u)$ . Notons que, à la constante  $c$  près,  $L_c(t, u)$  représente le temps local au sommet  $u$  au temps  $t$ . Ce processus pourrait donc être vu, au premier abord, comme l'analogie continue de la marche linéairement renforcée par site. Remarquons que  $c$  petit correspond encore à un fort renforcement.

Dans [DV02], Davis et Volkov étudient ce modèle sur  $\mathbb{Z}$  et montrent la récurrence du processus quelque soit  $c$  et même que la proportion de temps passé en chaque site converge vers un vecteur non dégénéré. Dans un autre article [DV04], ils complètent leurs résultats en étudiant le modèle sur l'arbre et ils prouvent qu'il existe deux constantes  $c_1 \leq c_2$  (dépendant de l'arbre) telles que pour  $c < c_1$  la marche est récurrente alors qu'elle reste transiente pour  $c > c_2$ . Le modèle n'étant pas trivialement monotone en  $c$ , leur technique ne permet par contre pas d'obtenir une véritable transition de phase entre ces deux comportements, *i.e.* de montrer que  $c_1 = c_2$ . Ils obtiennent tout de même, dans le cas des arbres réguliers, des bornes sur ces constantes, bornes améliorées par la suite par Collecchio [Col06]. Dans un second article [Col09], Collecchio étudie en particulier le cas où  $c$  est égal à 1 et où l'arbre est régulier avec  $b \geq 3$  enfants par sommet. Il montre alors, grâce à une minoration stochastique, la stricte positivité de la vitesse de la VRJP et un théorème central limite. Mais ses arguments ne permettaient par contre toujours pas de déterminer si pour  $c = 1$ , la VRJP sur l'arbre binaire est récurrente ou transiente.

Dans [9], nous démontrons qu'une véritable transition de phase existe et nous donnons la valeur exacte de cette transition.

**Théorème 2.3** (B., Singh [9]). *Pour  $c > 0$ , soit  $m_c(\infty)$  une variable aléatoire sur  $(0, \infty)$  de densité :*

$$\mathbb{P}\{m_c(\infty) \in dx\} := \frac{c \exp\left(-\frac{(c(x-1))^2}{2x}\right)}{\sqrt{2\pi x^3}} dx.$$

Soit

$$\mu(c) := \inf_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[m_c(\infty)^a] = \mathbb{E}[m_c(\infty)^{1/2}]$$

Alors la VRJP de paramètre  $c$  sur un arbre de Galton-Watson infini de moyenne  $b$  est récurrente ssi  $b\mu(c) \leq 1$ .

Il est assez facile de voir que la fonction  $\mu(c)$  est strictement croissante en  $c$ , ce théorème permet donc d'en déduire qu'il existe bien une unique transition de phase entre la récurrence et la transience du processus. On a par exemple que la VRJP( $c$ ) sur l'arbre binaire est récurrente ssi  $c \leq \mu^{-1}(0.5) \sim 0.16$  (*cf.* Figure 4 pour un graphe de la fonction  $\mu$ .)

L'analogie avec le théorème 2.2 est bien sûr frappante. Lors de la rédaction de cet article, nous ne disposions pas d'argument convaincant reliant la transition de phase

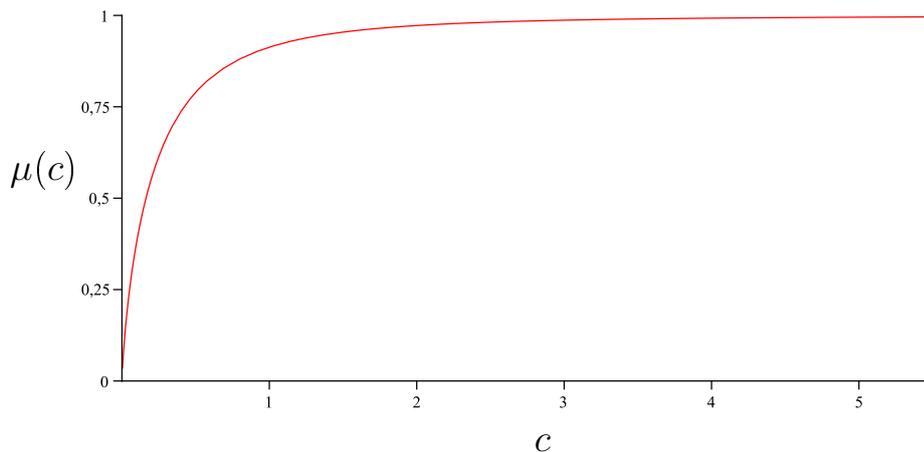


FIGURE 4 – Graphe de la fonction  $\mu$ .

de la VRJP avec la transition de phase d'une marche aléatoire en milieu aléatoire. Le lien entre ces deux types de modèles n'a été élucidé que quelques années après par Sabot et Tarrès [ST15] qui montrèrent qu'une VRJP peut être vue, à un changement de temps près, comme un mélange de processus de saut markoviens, et exprimèrent la loi du mélange en fonction d'un modèle déjà connu en physique, *le supersymmetric hyperbolic sigma model*. Ils montrèrent aussi que la marche linéairement renforcée par arête a même loi que la trace d'une VRJP où les poids initiaux des arêtes suivent des lois gamma. Ce sont ces deux résultats qui leur permirent de faire de nets progrès sur le comportement de la marche linéairement renforcée par arête sur  $\mathbb{Z}^d$ .

N'ayant pas remarqué ces différents liens, la preuve exposée dans [9] repose sur des arguments complètement différents. La preuve de la récurrence lorsque  $\mu(c)b < 1$  était déjà presque contenue dans [DV04]. Davis et Volkov y montrent que la VRJP(1) est récurrente pour  $b \leq 1,04$  (alors que la valeur critique pour  $b$  est en fait  $\mu(1)^{-1} \sim 1.095$ ) mais de légers ajustements des paramètres dans les différentes équations donnent en fait la bonne transition. La preuve repose sur deux choses. D'une part, ils notent un principe de restriction : la VRJP sur un sous-arbre  $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$  a même loi que la VRJP sur  $\mathcal{T}$  regardée aux instants où elle est sur  $\mathcal{T}'$ . D'autre part, pour la VRJP(1) sur  $\mathbb{N}$ , on a, grâce à un argument de martingale, un contrôle du temps local  $L_1^{\mathbb{N}}(0, T_n)$  au point 0 lorsqu'elle atteint le site  $n$  pour la première fois :

$$\mathbb{P}(L_1^{\mathbb{N}}(0, T_n) < a^n) \leq (\mu(1)a^{1/2})^n.$$

Combinant ces deux remarques, si on note  $G_n$  le temps local en 0 de la VRJP(1) sur l'arbre  $b$ -régulier lorsque la marche atteint la hauteur  $n$ , on obtient directement que

$$\mathbb{P}(G_n < a^n) \leq (\mu(1)a^{1/2})^n \times b^n.$$

Donc  $G_n$  tend vers l'infini (et donc la marche est récurrente) dès que  $\mu(1)b < 1$ . On généralise facilement ce résultat pour  $c \neq 1$ .

La preuve de la transience nécessite plus de travail. Comme pour les marches excitées, nous remarquons que si l'on arrête le processus lorsque le temps local en la racine vaut une certaine valeur donnée, alors le processus des temps locaux possède encore une fois une structure markovienne. Il s'agit cette fois d'une marche branchante à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  où 0 est un point absorbant. La transience de la VRJP équivaut à la survie de cette marche branchante. La loi de reproduction de la marche est donnée par la loi de reproduction de l'arbre sur lequel vit la VRJP. Par le principe de restriction, le déplacement spatial suit les mêmes transitions que le processus des temps locaux d'une VRJP sur  $\mathbb{N}$ . Il suffit donc de contrôler avec quelle vitesse le processus des temps locaux de la VRJP sur  $\mathbb{N}$  atteint 0. Pour cela, on montre qu'il peut être approximé par l'exponentielle d'une marche aléatoire classique. Enfin, la récurrence dans le cas critique  $b\mu(c) = 1$  est obtenu par un argument percolatif : si la VRJP est transiente sur un arbre de moyenne  $b$ , on peut trouver une  $\varepsilon$ -percolation de cet arbre telle que la marche reste transiente.

## 2.3 Renforcements sur-linéaires par sites [11]

Comme rappelé dans l'introduction, la marche linéairement renforcée par site sur  $\mathbb{Z}$  a un comportement très surprenant : presque sûrement, elle se localise sur 5 sites consécutifs. Au contraire, si on choisit une fonction de poids d'inverse sommable, la marche se localise presque sûrement sur 2 sites. Avec Bruno Schapira et Arvind Singh [11], nous nous sommes demandé qu'elles étaient les autres formes de localisation possibles, en particulier, que se passe-t-il si on autorise un renforcement sous-linéaire mais d'inverse non sommable ?

On se donne donc une fonction  $\omega : \mathbb{R}_+ \mapsto (0, \infty)$ , croissante et on considère la marche aléatoire  $X$  sur  $\mathbb{Z}$  issue de 0 et de transition

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x \pm 1 \mid X_0, \dots, X_n = x) = \frac{\omega(Z_n(x \pm 1))}{\omega(Z_n(x - 1)) + \omega(Z_n(x + 1))},$$

où  $Z_n(x)$  est le nombre de visites au site  $x$  avant le temps  $n$ . On pose de plus

$$W(x) = \int_0^x \frac{du}{\omega(u)}.$$

On suppose donc que  $W(x)$  n'est pas borné de telle sorte que la marche ne se bloque pas sur 2 sites. On peut donc définir son inverse  $W^{-1}$ . Soit

$$I_\alpha(\omega) := \int_0^\infty \frac{dx}{\omega(W^{-1}(W(x) + \alpha))} \in (0, \infty]$$

et  $\alpha_c(\omega)$  le plus petit  $\alpha \geq 0$  tel que  $I_\alpha(\omega)$  soit fini

$$\alpha_c(\omega) := \inf\{\alpha \geq 0, I_\alpha(\omega) < \infty\} \in [0, \infty].$$

On montre alors le théorème suivant.

**Théorème 2.4** (B., Schapira, Singh [11]). Soit  $X$  une marche renforcée par sites sur  $\mathbb{Z}$  de fonction de poids  $\omega$  croissante et d'inverse non sommable. Alors

$$\begin{aligned} \alpha_c(w) < \infty &\iff \text{la marche se localise sur 4 sites avec probabilité positive.} \\ \alpha_c(w) = 0 &\iff \text{la marche se localise sur 4 sites presque sûrement.} \\ \alpha_c(w) \in (0, \infty) &\iff \text{la marche se localise sur 4 ou 5 sites presque sûrement} \\ &\quad \text{et les deux événements arrivent avec probabilité non nulle.} \end{aligned}$$

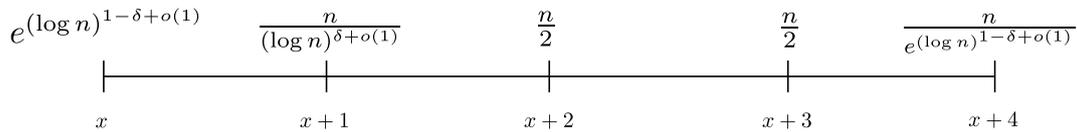
Ce théorème donne ainsi un critère nécessaire et suffisant pour que la marche se localise sur 4 sites avec probabilité positive ou avec probabilité 1. De plus, il donne un nouvel exemple de marche dont la taille de l'ensemble de localisation est aléatoire. Il est de plus assez facile de voir qu'avec une fonction de poids croissante, une marche renforcée par site ne peut jamais se localiser sur 3 sites. Ainsi, ce théorème combiné avec le théorème de Volkov sur la localisation sur 2 sites permet de décrire tous les cas où la marche se localise sur moins de 5 sites.

Le paramètre  $\alpha_c(w)$  possède des propriétés de monotonie vis-à-vis de  $\omega$  et peut être calculé explicitement pour une large classe de fonction. En particulier, si  $\omega(n) \sim n \log \log n$ , alors  $\alpha_c(w) = 1$ . On en déduit le corollaire suivant

**Corollaire 2.5.** Sous les mêmes conditions sur  $\omega$  que dans le théorème précédent, on a si

$$\begin{aligned} w(n) \gg^1 n \log \log n &\implies \text{la marche se localise sur 4 sites presque sûrement.} \\ w(n) \asymp^2 n \log \log n &\implies \text{la marche se localise sur 4 ou 5 sites presque sûrement} \\ &\quad \text{et les deux événements arrivent avec probabilité non nulle.} \\ w(n) \ll n \log \log n &\implies \text{la marche a probabilité nulle de se localiser sur strictement} \\ &\quad \text{moins de 5 sites.} \end{aligned}$$

Dans le cas d'un renforcement linéaire, non seulement on sait que la marche se localise sur 5 sites, mais on connaît aussi le profil asymptotique des temps locaux [PV99, Tar04] : la marche passe la moitié de son temps sur le site central, une proportion positive du temps sur le deuxième et quatrième sites et une proportion de temps négligeable (d'ordre polynomial) sur les deux sites du bord. Nous arrivons aussi ici à déterminer le profil des temps locaux et nous montrons en particulier que, dans le cas  $\alpha_c(w) < \infty$  et si  $\omega$  varie régulièrement, la marche ne visite que deux sites avec une proportion non négligeable du temps et ceci, même lorsque la localisation se fait sur 5 sites. Par exemple, pour  $\omega(n) = n \log \log n$ , nous obtenons le profil de temps locaux suivant



1. On utilise la notation  $f \gg g$ , quand  $f(n)/g(n) \rightarrow \infty$ .
2. On note  $f \asymp g$  quand il existe une constante  $c > 0$  telle que  $c^{-1} f(n) \leq g(n) \leq c f(n)$ , pour tout  $n$  assez grand.

pour un certain  $\delta \in (0, 1)$  aléatoire.

La preuve du théorème 2.4 repose sur deux outils principaux, déjà utilisés par Tarès [Tar11] pour l'étude du cas linéaire. D'une part l'introduction de martingales qui permettent de prendre en compte, qu'en chaque site, le comportement de la marche est relié à une urne de Polya généralisée de fonction de poids  $\omega$  mais aussi le fait que les urnes en différents sites sont corrélées. Plus précisément, si on note

$$Y_n^\pm(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathbf{1}_{\{X_k=x \text{ et } X_{k+1}=x\pm 1\}}}{\omega(Z_k(x \pm 1))},$$

on voit que  $Y_n^+(x) - Y_n^-(x)$  est une martingale convergente. De plus,

$$Y_n^+(x-1) + Y_n^-(x+1) = \sum_{k=0}^{Z_n(x)} \frac{1}{\omega(k)} \sim W(Z_n(x)).$$

On montre alors que la localisation de la marche renforcée peut s'exprimer en fonction du fait que les quantités  $Y_n^\pm(x)$  tendent vers une limite finie ou infinie lorsque  $n$  tend vers l'infini. Expliquons juste brièvement pourquoi le paramètre  $\alpha_c(\omega)$  apparaît naturellement. Considérons une unique urne  $(R_n, B_n)$  à deux couleurs, rouge et bleue, où à chaque temps, on tire une boule de la couleur rouge (resp. bleue) avec une probabilité proportionnelle à  $\omega(R_n)$  (resp.  $\omega(B_n)$ ) et on rajoute alors une boule supplémentaire de la couleur tirée. Si on note

$$Y^B := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{1}_{\{\text{le } k+1\text{-ième tirage est bleu}\}}}{\omega(k)} \quad Y^R := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{1}_{\{\text{le } k+1\text{-ième tirage est rouge}\}}}{\omega(k)}$$

Alors (modulo certaines conditions de sommabilité de  $\omega(k)$ ), on a que, si  $\alpha_c(\omega) = 0$ , alors le minimum de  $Y^B$  et  $Y^R$  est fini p.s. alors que si  $\alpha_c(\omega) = \infty$  alors le minimum de  $Y^B$  et  $Y^R$  est infini p.s. Et, entre ces deux conditions, le minimum a une probabilité positive d'être fini et infini. Les trois comportements possibles sont ainsi en correspondance avec les trois formes de localisation possibles pour la marche renforcée par site.

L'autre outil fondamental utilisé dans cet article est une construction en temps continu de la marche renforcée par arête, appelée *construction de Rubin*, outil déjà introduit pour l'étude de marche renforcée par arête. Ceci nous permet en particulier de montrer que les équilibres instables de certaines urnes arrivent avec probabilité 0 et donc d'en déduire la localisation presque sûre sur 4 sites de la marche dans le cas  $\alpha_c(\omega) = 0$ .

## 2.4 Renforcements sous-linéaires par sites [13]

Le prolongement naturel de l'article présenté dans le paragraphe précédent est de se demander si au contraire, il existe des marches renforcées par site sur  $\mathbb{Z}$  qui se localisent sur strictement plus de 5 sites. A priori, une telle localisation devrait pouvoir se produire pour une fonction de poids sous-linéaire. Hors, Volkov [Vol06] a déjà montré que si la fonction de poids varie régulièrement avec un indice strictement plus petit que 1, la marche ne peut se localiser sur un nombre fini de sites. Les candidats possibles

pour une localisation sur un nombre de sites fini mais plus grand que 5 sont donc les fonctions de poids *légèrement sous-linéaire*. Dans [13], on fait ainsi l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 2.6.** *La fonction de poids  $\omega$  peut s'écrire sous la forme*

$$\omega(n) = \frac{n}{\ell(n)}$$

où  $\ell(n)$  est une fonction croissante à variation lente.

Cette hypothèse est certes un peu restrictive mais elle nous permet en contrepartie de contourner certaines difficultés techniques. Elle n'est probablement pas nécessaire pour que notre résultat reste valide. Étant donné  $\omega$ , on définit un opérateur  $G$  sur l'ensemble des fonctions mesurables  $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$  par

$$G(f)(x) := \int_0^x \frac{\omega(W^{-1}(f(u)))}{\omega(W^{-1}(u))} du$$

On considère alors la composée  $n$ -ième de  $G$ , notée  $G^{(n)}$  et, pour  $\eta \in (0, 1)$ , on définit le paramètre

$$i_\eta(\omega) := \inf\{n \geq 2, G^{(n-1)}(\eta Id) \text{ est borné}\} \in [2, \infty].$$

La fonction  $i_\eta(\omega)$  étant croissante en  $\eta$ , on peut définir sa limite à gauche et à droite en  $\eta = 1/2$ , que l'on note  $i_\pm(\omega)$ . On peut montrer que  $i_+(\omega) - i_-(\omega) \in \{0, 1\}$ , et que les fonctions de poids qui vérifie  $i_+(\omega) \neq i_-(\omega)$  sont, dans un certain sens, *exceptionnelles* et vont correspondre à des cas critiques pour la localisation de la marche renforcée par site. Notre résultat est le suivant.

**Théorème 2.7** (B., Schapira, Singh [13]). *Soit  $X$  une marche renforcée par sites sur  $\mathbb{Z}$  de fonction de poids  $\omega$  vérifiant l'hypothèse 2.6. On a l'équivalence :*

$$i_\pm(\omega) < \infty \iff X \text{ se localise avec probabilité positive} \iff X \text{ se localise p.s.}$$

De plus, lorsqu'il y a localisation, si on note  $R$  l'ensemble des sites visités infiniment souvent, on a

- (i)  $|R| > i_-(\omega)$  p.s.
- (ii)  $2i_-(\omega) + 1 \leq |R| \leq 2i_+(\omega) + 1$  avec probabilité positive.

La première partie de ce théorème donne donc un critère nécessaire et suffisant pour la localisation de la marche. En pratique, il n'est pas toujours simple de montrer la finitude de  $i_c(\omega)$ , il serait donc intéressant d'obtenir un critère plus facile à vérifier. La deuxième partie permet de trouver des fonctions de poids pour lesquelles la marche se localise avec probabilité positive sur des ensembles arbitrairement grands. On conjecture que, dans le cas  $i_+(\omega) = i_-(\omega)$ , la marche se localise en fait avec probabilité 1 sur un ensemble de taille  $2i_\pm(\omega) + 1$ . En particulier, le point (i) du théorème ne semble pas être optimal. Comme dans le cas sur-linéaire, notre approche permet de décrire aussi le profil asymptotique des temps locaux lorsque la marche se localise sur  $2i_\pm(\omega) + 1$  sites. On montre que la marche passe alors la moitié de son temps sur un site central, le quart de son temps sur les deux sites voisins et un temps négligeable sur les autres

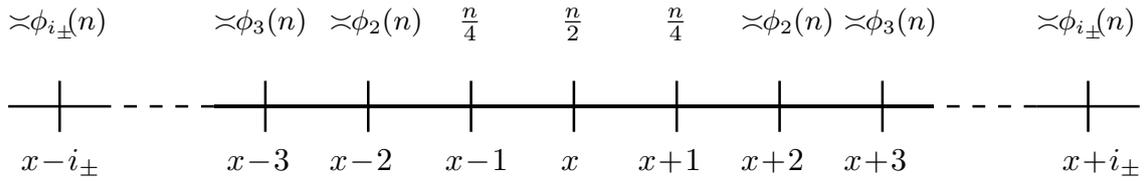


FIGURE 5 – Profil des temps locaux au temps  $n$  lors d’une localisation sur  $2i_{\pm} + 1$  sites. Les fonctions  $\phi_i$  peuvent être calculées par récurrence. On a en particulier  $n \gg \phi_2(n) \gg \phi_3(n) \dots \gg \phi_{i_{\pm}}(n) \gg 1$ . De plus si  $\omega(n) \sim n \exp(-\log^{\alpha} n)$  alors  $\phi_i(n) \sim n \exp(-(\log n)^{(1-\alpha)(i-1)+o(1)})$ .

sites (cf. figure 5). Ceci contraste avec un modèle précédemment étudié par Erschler, Toth et Werner, [ETW12b, ETW12a], les *stuck walks*, mêlant en même temps attraction et répulsion, où la marche se localise sur un ensemble de taille arbitrairement grande mais en passant une proportion positive du temps en chaque site.

L’indice  $i_{\pm}(\omega)$  est de façon générale délicat à calculer mais, pour tout  $n \geq 2$ , il est tout de même possible de trouver un exemple de poids tel que  $i_{\pm}(\omega) = n$ . Il suffit par exemple de considérer une fonction  $\omega$  croissante telle que

$$\omega(n) \sim n \exp(-\log^{\alpha} n) \text{ avec } \alpha \in \left( \frac{n-2}{n-1}, \frac{n-1}{n} \right).$$

Ceci donne ainsi un exemple de marche renforcée par sites qui se localise avec probabilité positive sur  $2n + 1$  sites. Au contraire, si on choisit

$$\omega(n) \sim n \exp\left(-\frac{\log n}{\log \log n}\right)$$

alors  $i_{\pm}(\omega) = \infty$  et donc la marche ne se localise pas. On conjecture par contre que cette marche a un comportement très surprenant : elle serait récurrente sur  $\mathbb{Z}$  mais seul trois sites seraient visités une proportion positive du temps !

Pour montrer le théorème 2.7, nous étudions d’abord la localisation de la marche renforcée sur  $\{-1, 0, \dots\}$  réfléchi en  $-1$ . Pour cela, nous la couplons avec deux autres marches qui mêlent un renforcement par site à gauche et un renforcement par arête à droite et qui, en un certain sens, encadrent la marche initiale. Remarquons que si le profil asymptotique des temps locaux présenté dans la figure 5 est vrai, changer le renforcement par site à droite par un renforcement par arête ne modifie pas fondamentalement le processus. En effet, si  $Z_n(y) \gg Z_n(y + 1)$ , alors le temps local de l’arête  $\{y - 1, y\}$  est environ égal au temps local au site  $y$ . Ces deux marches mêlant renforcements par site et par arête sont alors bien plus simples à étudier. Le renforcement par arête à droite crée une certaine indépendance : la loi de ces marches sur un ensemble fini  $[-1, a]$  ne dépend pas de leur trajectoire sur  $[a, \infty)$ . On peut alors étudier récursivement ces marches réfléchies en  $-1$  pour montrer, que sous de bonnes conditions initiales, elles se localisent avec grande probabilité sur l’intervalle  $[-1, i_{\pm}(\omega)]$ . On obtient alors un résultat analogue pour la marche renforcée par site réfléchi en  $-1$ . La dernière étape consiste à transférer ce résultat pour la marche sur  $\mathbb{Z}$ . On montre alors que les marches sur  $\{-1, 0, \dots\}$  mêlant renforcement par site et arête, passent respectivement un quart

de leur temps en  $-1$  et  $1$ , i.e. l'urne en  $0$  est *équilibrée*. Avec des arguments de symétrie, on montre alors, qu'avec probabilité positive, la localisation de la marche renforcée par site sur  $\mathbb{Z}$  se produit sur l'intervalle  $[-i_{\pm}(\omega), i_{\pm}(\omega)]$ .

Notons que très récemment, Bruno Schapira [Sch19] a complété les résultats de [11,13] en donnant une première caractérisation des fonctions de poids  $\omega$  qui permettent une localisation de la marche sur 5 sites avec probabilité positive. Il définit deux quantités,  $\beta_c(\omega)$  et  $\tilde{\beta}_c(\omega)$  (de manière un peu analogue à  $\alpha_c(\omega)$ ) et qui coïncident sur une large classe de fonctions et montre que

$$\mathbb{P}(|R| = 5) > 0 \implies \beta_c(\omega) < \infty$$

alors que

$$\tilde{\beta}_c(\omega) < \infty \implies \mathbb{P}(|R| \in \{5, 6\}) > 0).$$

Il conjecture que la deuxième implication n'est pas optimale et que la première implication est en fait une équivalence (et que cela implique même la localisation presque sûre sur 5 sites).

## 2.5 Quelques perspectives

Comme nous l'avons dit, nos résultats dans [13] dans le cas sous-linéaire restent partiels, voici deux questions qu'il est naturel de se poser.

- La première consiste à améliorer le point (i) du théorème 2.7. Cette minoration vient du fait que la marche réfléchie en  $-1$  ne peut pas se localiser sur moins de  $i_-(\omega)$  sites. Si cette minoration est optimale pour la marche réfléchie, ce n'est sûrement pas le cas pour la marche sur  $\mathbb{Z}$ . Pour améliorer cette minoration, il faudrait donc améliorer notre couplage entre la marche réfléchie et la marche sur  $\mathbb{Z}$ .
- L'article [13] montre que pour tout nombre impair  $n$  plus grand que 5, il existe une fonction de poids telle que la marche se localise avec une probabilité positive sur un ensemble de taille  $n$ . Mais est-il possible de se localiser sur un ensemble de taille paire autre que 2 et 4? Cela devrait alors correspondre à des fonctions de poids *critiques* pour lesquelles  $i_-(\omega) \neq i_+(\omega)$ . La taille de la localisation dans ce cas devrait probablement être aléatoire et prendre ses valeurs dans  $2i_+(\omega) - 1$ ,  $2i_+(\omega)$  et  $2i_+(\omega) + 1$ .

J'aimerais aussi étudier d'autres graphes que  $\mathbb{Z}$ , en particulier via les questions suivantes.

- Sur l'arbre, Volkov [Vol01] montre que la marche linéairement renforcée se localise presque sûrement et donne une forme de localisation possible. Est-ce la seule forme de localisation possible? On pourrait aussi essayer de voir si en adaptant les arguments de [11,13] au cas de l'arbre, on peut déterminer la taille de l'ensemble de localisation pour des poids légèrement sur ou sous-linéaires.
- On sait que la marche linéairement renforcée sur  $\mathbb{Z}$  et sur un arbre se localise presque sûrement. On sait d'autre part que la marche linéairement renforcée sur

un graphe de degré uniformément borné (en particulier  $\mathbb{Z}^d$ ) se localise avec probabilité positive (*c.f.* [Vol01]). Mais y a-t-il aussi localisation presque sûre dans ce cas-là ? On aurait envie d'appliquer l'argument percolatif utilisé par Volkov dans le cas de l'arbre au cas de  $\mathbb{Z}^d$ , mais la présence de cycles rend son utilisation nettement plus délicate.

- Enfin, comme dit précédemment, le problème de la marche 1-renforcée par arête sur  $\mathbb{Z}^d$  reste encore complètement ouvert. Sur une échelle, la récurrence du processus est connu pour les grands renforcements [Ver02, KSS18] et les petits renforcements [Sel06], mais il reste une zone d'ombre entre ces deux résultats dès que la hauteur de l'échelle est strictement supérieure à 2. Pour montrer la récurrence pour de petits renforcements, Selke couple la marche 1-renforcée avec une marche se déplaçant avec les mêmes transitions horizontalement mais qui, à chaque étape, choisit son ordonnée de façon à maximiser ses chances d'aller vers l'infini. Ce couplage ne paraît bien sûr pas optimal. En prenant mieux en compte les déplacements verticaux de la marche 1-renforcée, on peut améliorer les bornes données par Selke. Cependant, l'amélioration que j'arrive à obtenir pour l'instant reste faible au regard des calculs demandés et ne permet toujours pas d'obtenir la récurrence pour tout paramètre de renforcement pour une échelle de hauteur 3. L'étape suivante serait d'étudier la même marche sur  $\mathbb{Z}^2$  où, même pour de très grands renforcements, la question reste ouverte. Dans son habilitation à diriger les recherches, Beffara [Bef11] conjecture que, pour de grands renforcements, la trace d'une telle marche avant le temps  $n$  renormalisée par  $n^{1/3}$  converge vers une forme limite. Ceci impliquerait la récurrence de la marche. L'idée est de considérer la trace de la marche comme un processus de croissance. Cependant, aucune preuve de cette conjecture n'a encore été trouvée. Notons que dans des travaux récents, Collevocchio, Kioussis et Sidoravicius [KS18, CKS17] étudient la marche 1-renforcée sur des arbres à croissance polynomiale et déterminent exactement le paramètre critique entre la récurrence et la transience. Cependant, ce modèle sans cycle ne permet pas de prendre en compte les pièges que peuvent créer une trajectoire atypique dans un graphe avec cycle. Ils ne reflètent donc peut-être pas le comportement sur  $\mathbb{Z}^d$ .

## CHAPITRE 3

# Percolation de premier passage [10,12]

### 3.1 Introduction

Si les deux premiers chapitres de ce mémoire traitent de sujets assez proches, ce troisième chapitre s'intéresse à un modèle assez différent : *la percolation et la percolation de premier passage*. La percolation, introduite en 1957 par Broadbent et Hammersley [BH57] est un modèle mathématique permettant de modéliser l'écoulement d'un liquide à travers un milieu poreux. D'un point de vue mathématique, on se donne un graphe  $G = (V, E)$  où chaque arête  $e \in E$  est ouverte (resp. fermée) indépendamment les unes des autres avec probabilité  $p$  (resp.  $1 - p$ ). On cherche alors à savoir s'il existe un chemin d'un sommet  $x \in V$  à un autre sommet  $y \in V$  n'empruntant que des arêtes ouvertes. Lorsque le graphe est  $\mathbb{Z}^d$ , Broadbent et Hammersley montrent qu'au-dessus d'un paramètre  $p_c(d)$ , il existe une composante connexe infinie d'arêtes ouvertes, alors qu'au contraire pour  $p < p_c(d)$ , toutes les composantes connexes d'arêtes ouvertes sont finies. Pour  $d = 2$ , grâce aux travaux de Kesten [Kes80], on sait que  $p_2(2) = 1/2$ . Ce résultat provient d'une propriété de dualité de  $\mathbb{Z}^2$  qui n'est pas vérifiée pour les dimensions supérieures. Pour  $d \geq 3$ , la valeur de  $p_c(d)$  reste inconnue et il n'existe pas de conjecture sur la valeur exacte de cette constante. Beaucoup de travaux ont été faits sur ce modèle, et beaucoup de questions restent encore irrésolues, je ne développerai pourtant pas plus ce sujet car mes travaux sont surtout liés à un modèle voisin : *la percolation de premier passage*.

La percolation de premier passage, introduite par Hammersley et Welsh [HW65], ne cherche pas juste à déterminer si un fluide peut circuler entre un point  $x$  et un point  $y$  mais à quelle vitesse il s'écoule entre ces deux points. Pour une référence assez complète et récente sur le sujet, on peut consulter le papier de Auffinger, Damron et Hanson [ADH17]. De façon générale, ce modèle peut être défini sur tout graphe  $G = (V, E)$ , mais nous nous restreindrons dans ce mémoire au cas de  $\mathbb{Z}^d$ . On se donne une loi  $\tau$  sur  $[0, \infty)$  et on considère une famille  $\{t(e), e \text{ arêtes de } \mathbb{Z}^d\}$  de variables aléatoires positives i.i.d. de loi  $\tau$ , où  $t(e)$  représente le temps nécessaire au fluide pour traverser l'arête  $e$ . De façon naturelle, on définit un chemin  $\gamma := (v_0, v_1, \dots, v_n)$  comme une suite de sommets de  $\mathbb{Z}^d$  tels que pour tout  $i$ ,  $\{v_i, v_{i+1}\}$  soit une arête de  $\mathbb{Z}^d$ . Le temps de passage le long du chemin  $\gamma$  est alors

$$T(\gamma) := \sum_{i=1}^n t(\{v_{i-1}, v_i\}).$$

et le temps de passage entre deux sommets  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{Z}^d$  est donné par

$$D(x, y) := \inf \{T(\gamma), \gamma \text{ chemin de } x \text{ à } y\}.$$

Ainsi,  $D(x, y)$  représente le temps qu'il faut au fluide pour aller du sommet  $x$  au sommet  $y$ . On vérifie facilement que ceci définit une pseudo-distance sur  $\mathbb{Z}^d$  (et c'est une distance si  $\mathbb{P}(t(e) = 0) = 0$ ). Les premières questions qu'on se pose sont alors les suivantes :

- Combien de temps met le fluide pour aller de l'origine à un sommet  $x$  très éloigné? De façon plus mathématique, que vaut asymptotiquement  $D(0, x)$  lorsque  $\|x\|$  tend vers l'infini?
- Lorsque l'on injecte de l'eau à l'origine, quel est l'ensemble des points mouillés au temps  $t$ ? De façon plus mathématique, que peut-on dire de l'ensemble aléatoire  $B(0, t) := \{x \in \mathbb{Z}^d, D(0, x) \leq t\}$ ?

Les premières réponses à ces questions furent obtenues par Hammersley et Welsh [HW65] et Kingman [Kin68] dans le cas  $d = 2$  et  $\tau$  de moyenne finie. Depuis, les résultats ont été généralisés par plusieurs personnes pour obtenir un théorème sous les hypothèses optimales.

**Théorème 3.1** (cf. Kesten [Kes86]). *On suppose que la loi  $\tau$  vérifie  $\mathbb{E}(\min(\tau_1, \dots, \tau_{2d})) < \infty$  pour  $(\tau_1, \dots, \tau_{2d})$  i.i.d. de loi  $\tau$ . Alors, pour tout  $x \in \mathbb{Z}^d$ , il existe une constante  $\mu(x) \geq 0$  telle que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D(0, nx)}{n} = \mu(x),$$

la convergence ayant lieu p.s. et dans  $L^1$ . De plus, on a

$$\mu(x) = \inf_{n \geq 1} \frac{\mathbb{E}(D(0, nx))}{n}.$$

Notons que la quantité  $\mathbb{E}(\min(\tau_1, \dots, \tau_{2d})) < \infty$  est égale au temps moyen pour que le fluide issu de 0 se répande sur un autre point de  $\mathbb{Z}^d$ . Sans cette condition, on a donc clairement  $\mathbb{E}(D(0, x)) = \infty$  pour tout  $x$ . Les hypothèses du théorème sont donc bien optimales. La constante  $\mu(x)$  apparaissant dans le théorème est appelée *constante de temps dans la direction  $x$* . Ce résultat est une conséquence du théorème ergodique sous-additif de Kingman. En effet, pour tout  $n, m \geq 0$ , on a

$$D(0, (n + m)x) \leq D(0, nx) + D(nx, (n + m)x).$$

Le théorème précédent peut être étendu pour  $x$  à coordonnées rationnelles et par continuité, on peut alors prolonger la fonction  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^d$  (cf. [Kes86]). Notons que  $\mu(x)$  peut a priori être nul. Ceci se produit dès que la loi de  $\tau$  charge beaucoup 0. Plus précisément, on peut montrer que soit  $\mu(x)$  est nul pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ , soit au contraire, on a  $\mu(x) > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ . De plus, on a l'équivalence

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad \mu(x) > 0 \iff \mathbb{P}(\tau = 0) < p_c(d).$$

Dans ce cas,  $\mu$  définit une norme sur  $\mathbb{R}^d$  et on peut considérer sa boule unité

$$\mathcal{B}_\mu := \{x \in \mathbb{R}^d, \mu(x) \leq 1\},$$

qui est donc un ensemble convexe, compact. Dans [CD81] Cox et Durrett montrent une uniformité de la convergence du théorème 3.1 dans toutes les directions. Plus précisément, si on note

$$\bar{B}(0, t) = \{x + u \mid x \in \mathbb{Z}^d, D(0, x) \leq t, u \in [-1/2, 1/2]^d\},$$

alors on a :

**Théorème 3.2** (Cox et Durrett [CD81]). *On suppose que la loi  $\tau$  vérifie  $\mathbb{E}(\min(\tau_1^d, \dots, \tau_{2d}^d)) < \infty$  pour  $(\tau_1, \dots, \tau_{2d})$  i.i.d. de loi  $\tau$ . On suppose de plus que  $\mathbb{P}(\tau = 0) < p_c(d)$ . Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a*

$$\mathbb{P}\left(\left((1 - \varepsilon)\mathcal{B}_\mu \subset \frac{1}{t}\bar{B}(0, t) \subset (1 + \varepsilon)\mathcal{B}_\mu \text{ pour } t \text{ assez grand}\right)\right) = 1.$$

Renormalisé par  $t$ ,  $\bar{B}(0, t)$  converge donc vers une forme asymptotique donnée par la boule unité de  $\mu$ . La valeur de la fonction  $\mu$  n'est par contre connue pour aucune loi  $\tau$ , hormis bien sûr pour les lois constantes ou les lois telles que  $\mu \equiv 0$ . Il existe tout de même certaines lois pour lesquelles  $\mu$  est connue dans certaines directions, proche des diagonales de  $\mathbb{Z}^d$ . Il s'agit en fait de loi pour lesquelles, autour de ces directions, la distance  $D$  coïncide avec la distance  $L^1$ . Pour cela, plaçons-nous sur  $\mathbb{Z}^2$  et considérons des temps de passage à support dans  $[1, \infty)$  et tels que  $\mathbb{P}(\tau = 1) > \vec{p}_c$  où  $\vec{p}_c$  est le paramètre critique de la percolation orientée sur  $\mathbb{Z}^2$ . Durrett et Liggett [DL81] montrent que la boule  $\mathcal{B}_\mu$  possède alors des arêtes plates où elle coïncide avec la boule de la norme  $L^1$  et Marchand [Mar02] détermine exactement la taille de ces arêtes plates en fonction de la vitesse asymptotique de la percolation orientée.

Initialement, le modèle de percolation de premier passage supposait que les temps de passage étaient à valeurs dans  $[0, \infty)$ . Or il est naturel d'accepter des temps de passage infinis, ce qui correspond à dire que certaines arêtes de  $\mathbb{Z}^d$  sont fermées, comme dans la percolation classique. La généralisation des théorèmes 3.1 et 3.2 à ce cas n'est pas évidente car il faut se placer sur l'évènement où 0 est dans la composante connexe infinie  $\mathcal{C}_\infty$ , ce qui ôte la propriété de sous additivité à la suite  $(D(0, nx), n \geq 0)$ . Garet et Marchand [GM04] arrivent tout de même à surmonter cette difficulté et montrent, sous une condition technique d'intégrabilité de  $\tau \mathbf{1}_{\tau < \infty}$  et si  $\mathbb{P}(\tau < \infty) > p_c(d)$ , pour tout  $x \in \mathbb{Z}^d$ , l'existence d'une constante  $\mu(x)$  telle que sur l'évènement  $\{0 \in \mathcal{C}_\infty\}$ , on ait la limite presque sûre suivante :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ nx \in \mathcal{C}_\infty}} \frac{D(0, nx)}{n} = \mu(x).$$

Ils obtiennent aussi un théorème de forme asymptotique analogue au théorème 3.2 (hormis que des "trous" subsistent puisque  $\mathcal{C}_\infty$  n'est pas connexe). Des travaux plus récents de Cerf et Theret [CT16] permettent d'ailleurs d'ôter toute condition d'intégrabilité sur  $\tau$ . Un cas particulier est aussi de considérer des temps de passage prenant uniquement les valeurs 1 et  $+\infty$ . Dans ce cas,  $D(x, y)$  représente la longueur du plus court chemin entre  $x$  et  $y$  dans un amas de percolation. On parle alors de *distance chimique* entre  $x$  et  $y$  (qui peut être infinie si  $x$  et  $y$  ne sont pas reliés). Notons que les résultats de Marchand [Mar02] sur l'existence et la localisation des arêtes plates pour la forme asymptotique restent valables dans ce cadre-là.

## 3.2 Forme limite d'une percolation très surcritique [10,12]

Dans un article en commun écrit avec Nathanaël Enriquez et Lucas Gerin [10] nous étudions justement la distance chimique sur  $\mathbb{Z}^2$  le long des axes dans un amas de percolation très surcritique. On considère ainsi des temps de passage sur les arêtes de  $\mathbb{Z}^2$  i.i.d. de loi

$$\mathbb{P}(\tau = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\tau = \infty) = 1 - p$$

avec  $p$  proche de 1 et on s'intéresse à l'asymptotique de  $D(0, (n, 0))$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. On dira donc qu'une arête est fermée (resp. ouverte) si son temps de passage est infini (resp. égal à 1). On montre le résultat suivant.

**Théorème 3.3** (B., Enriquez, Gerin [10]). *Sur l'évènement  $0 \in \mathcal{C}_\infty$ , on a la limite presque sûre*

$$\mu_p(1, 0) := \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (n,0) \in \mathcal{C}_\infty}} \frac{D(0, (n, 0))}{n} = 1 + \frac{1-p}{2} + \mathcal{O}((1-p)^2).$$

Notons que l'existence de  $\mu_p(0, 1)$  était assurée par les travaux de Garet et Marchand [GM04]. Avec les mêmes auteurs et Jean Baptiste Gouéré [12], nous avons complété ce résultat en calculant une asymptotique similaire dans les autres directions. Remarquons que les résultats combinés de Durrett [Dur84] sur la vitesse de la percolation orientée et de Marchand [Mar02] sur la localisation de l'arête plate, montraient que au-dessus de la droite  $y = t_p x$  avec  $t_p = 1 - p + o(1 - p)$ , la forme asymptotique  $\mathcal{B}_\mu$  coïncidait avec la boule  $L^1$ . La zone d'ombre était donc les directions à l'intérieur du cône  $|y| \leq (1 - p)x$ .

**Théorème 3.4** (B., Enriquez, Gerin, Gouéré [12]). *Pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ , sur l'évènement  $0 \in \mathcal{C}_\infty$ , on a la limite presque sûre*

$$\mu_p(1, \lambda(1-p)) := \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (n, \lfloor n\lambda(1-p) \rfloor) \in \mathcal{C}_\infty}} \frac{D(0, (n, \lfloor n\lambda(1-p) \rfloor))}{n} = 1 + (1-p) \frac{1 + \lambda^2}{2} + \mathcal{O}((1-p)^2).$$

La figure 6 donne une vue schématique de la boule  $\mathcal{B}_\mu$  lorsque  $p$  est proche de 1 si on néglige le terme en  $\mathcal{O}((1-p)^2)$ . Elle ressemble donc à la boule  $L^1$  où les quatre coins auraient été remplacés par des arcs de cercle.

Nous obtenons aussi une minoration non asymptotique pour  $\mu_p(1, \lambda(1-p))$  qui est optimale lorsque  $p$  tend vers 1 :

**Proposition 3.5** (B., Enriquez, Gerin, Gouéré [12]). *Pour tout  $p \geq 1/2$  et  $0 \leq \lambda \leq 1$ , on a*

$$\mu_p(1, \lambda(1-p)) \geq 2 - \sqrt{1 - (1-p)(1 + \lambda^2) + \lambda^2(1-p)^2}.$$

La stratégie pour montrer ces résultats est d'introduire un graphe où le problème de percolation de premier passage est exactement soluble et de montrer que, lorsque  $p$  est proche de 1, la distance chimique dans un amas de percolation est proche du temps de premier passage dans ce nouveau modèle. Ce nouveau graphe, noté  $\mathbb{Z}^\times$ , est le graphe  $\mathbb{Z}^2$  où l'on a rajouté les arêtes "diagonales", c'est-à-dire ses sommets sont les points de  $\mathbb{Z}^2$  et il possède trois types d'arête :

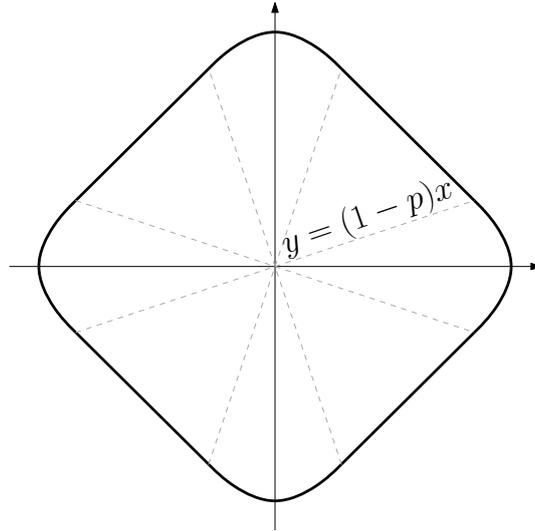


FIGURE 6 – Illustration schématique de  $\mathcal{B}_\mu$  lorsque  $p$  est proche de 1. Si on néglige le reste en  $\mathcal{O}((1-p)^2)$ , l'équation de la boule est  $y^2 = (1-p)|x|(2 - |x|(3-p))$  pour  $\frac{1}{2-p} \leq |x| \leq \frac{2}{3-p}$ . Loin des axes, elle coïncide avec la boule  $L^1$ .

- Les arêtes verticales de  $\mathbb{Z}^2 : \{(i, j) \rightarrow (i, j + 1), i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}\}$
- Les arêtes horizontales de  $\mathbb{Z}^2 : \{(i, j) \rightarrow (i + 1, j), i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}\}$
- Les arêtes "diagonales" de  $\mathbb{Z}^2 : \{(i, j) \rightarrow (i + 1, j + 1) \text{ et } (i, j) \rightarrow (i + 1, j - 1)\}$ .

On étudie alors une percolation de premier passage sur  $\mathbb{Z}^\times$  avec les règles suivantes pour les temps de passage sur chaque type d'arête :

- Les arêtes verticales ont toutes longueur 1.
- Les arêtes "diagonales" ont toutes longueur 2 (et pas  $\sqrt{2}$ ).
- Chaque arête horizontale  $e$  a longueur  $\tau_e$  où les  $\{\tau_e, e \text{ arête horizontale}\}$  forment une famille des variables aléatoires i.i.d. de même loi que  $\tau$  :

$$\mathbb{P}(\tau_e = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\tau_e = \infty) = 1 - p.$$

Autrement dit, dans ce graphe, les arêtes verticales et diagonales sont toutes ouvertes (et de longueur resp. 1 et 2), seules les arêtes horizontales peuvent être fermées ou ouvertes.

Il est assez intuitif que le temps de premier passage sur ce graphe devrait être proche de celui sur l'amas de percolation de paramètre  $p$  lorsque  $p$  est proche de 1. En effet, par un couplage évident, il est déjà clairement plus petit puisque l'on rajoute des arêtes par rapport au modèle de départ (les arêtes diagonales et les arêtes verticales originellement fermées). De plus, comme les arêtes diagonales ont longueur 2, leur ajout ne fait gagner du temps que si au moins deux arêtes du carré unité correspondant sont fermées dans l'amas de percolation. Or ceci se produit pour chaque carré avec une probabilité de l'ordre de  $(1-p)^2$ . Enfin, comme nous regardons les temps de passage dans des directions  $(n, \lambda(1-p)n)$  proches de l'axe des abscisses, on peut montrer qu'une géodésique typique dans le modèle  $\mathbb{Z}^\times$  prendra de l'ordre de  $(1-p)n$  arêtes verticales. Une proportion  $(1-p)$  d'entre elles seront fermées dans le modèle originel et ne modifieront donc la distance que d'un facteur  $(1-p)^2 n$ .

Comme dit précédemment, l'intérêt du modèle  $\mathbb{Z}^\times$  est qu'il est exactement soluble, c'est-à-dire on peut calculer exactement sa constante de temps  $\mu_p^\times$ .

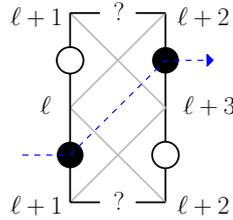
**Proposition 3.6** (B., Enriquez, Gerin, Gouéré [12]). *Pour tout  $\lambda, p \in (0, 1)$ , on a*

$$\mu_p^\times(1, \lambda(1-p)) = 2 - \sqrt{1 - (1-p)(1+\lambda^2) + \lambda^2(1-p)^2}.$$

Pour montrer ce résultat, nous remarquons déjà que dans le modèle  $\mathbb{Z}^\times$ , tous les points sont reliés les uns aux autres. Ainsi, en notant  $D^\times(i, j)$  la distance entre l'origine et le point  $(i, j)$  dans  $\mathbb{Z}^\times$ , cette quantité est bien finie pour tout  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ . De plus, il est facile de voir qu'entre les deux extrémités d'une arête verticale, cette distance diffère forcément de 1. Nous introduisons alors un système de particules sur les arêtes verticales de  $\mathbb{Z}^2$  avec la règle suivante :

"soit  $(i, j) \rightarrow (i, j+1)$  une arête verticale. Une particule est présente sur cette arête si et seulement si  $D^\times(i, j) = D^\times(i, j+1) + 1$ ."

Un exemple du système de particules associé à cette distance est donné dans la figure 7. Considérons maintenant que le temps va de gauche à droite et que chaque colonne correspond à la position sur  $\mathbb{Z}$  d'un système de particules à un instant donné. Comme une géodésique entre l'origine du repère et un point  $(i, j)$  avec  $i \geq 0$  est nécessaire incluse dans le cylindre  $[0, i] \times \mathbb{Z}$ , on voit que ce système de particules est markovien. De plus, il est assez facile de voir qu'entre deux instants successifs, chaque particule peut soit rester au même endroit, soit se déplacer d'un site vers le haut. Cette dernière possibilité se produira seulement si la configuration suivante se présente :



C'est-à-dire, à l'instant considéré, le site situé juste au-dessus de la particule regardée est vide et l'arête horizontale située entre ces deux sites est fermée. On remarque donc que les particules suivent exactement la même dynamique que le TASEP (Totally Asymmetric Simple Exclusion Process) à temps discret où initialement toutes les particules sont situées en dessous de zéro. Si on note  $J_{n,j}$  le courant du TASEP au temps  $n$  et à la hauteur  $j$ , c'est-à-dire le nombre de particules situées au temps  $n$  à une hauteur plus grande que  $j$ , on a alors la relation suivante :

$$D^\times(n, j) = n + j + 2J_{n,j}. \quad (4)$$

Ceci découle du fait que la différence entre  $D^\times(n+1, j)$  et  $D^\times(n, j)$  vaut 1 sauf si une particule a franchi la hauteur  $j$  entre le temps  $n$  et  $n+1$  et dans ce cas, cette différence vaut 3. La loi des grands nombres pour  $J_{n,j}$  démontrée par Jockusch Propp et Shor [JPS98] (voir aussi [Sep08]) nous permet alors d'en déduire la proposition 3.6<sup>1</sup>

1. Dans notre premier article [10], nous obtenions juste l'asymptotique de la distance  $D$  sur l'axe des abscisses car nous regardions la percolation dans une bande de hauteur fixée et nous couplions notre modèle avec un TASEP à l'équilibre sur cette bande. C'est le couplage avec un TASEP hors équilibre sur  $\mathbb{Z}$  entier qui nous a permis d'obtenir l'asymptotique de  $D$  dans les autres directions.

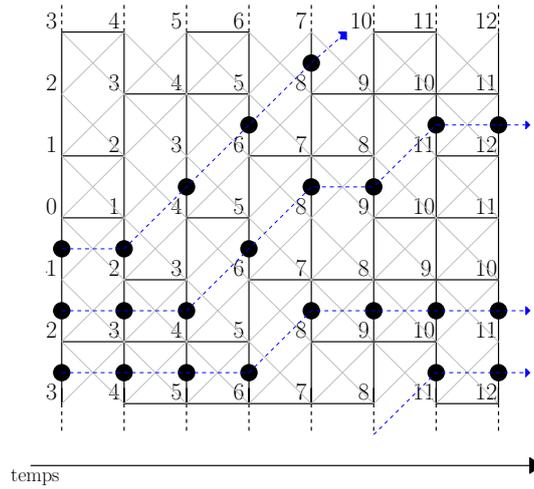


FIGURE 7 – Exemple du système de particules associé. Le temps s’écoule de gauche vers la droite. La trajectoire de chaque particule est représentée par les lignes pointillées bleues.

### 3.3 Quelques perspectives

- En percolation de premier passage, très peu de choses sont connues sur l’ordre de grandeur des fluctuations du temps d’atteinte d’un point. Il est conjecturé que pour des lois sur les temps de passage très générales, on aurait

$$\text{Var}(D(n, 0)) \sim n^{2/3}.$$

Mais les seules bornes existant pour l’instant sont

$$c \log n \leq \text{Var}(D(n, 0)) \leq c' \frac{n}{\log n}$$

(c.f. [NP95, BKS03, BR08]). Connaître l’ordre de grandeur de la variance devrait aussi permettre d’estimer à quelle distance la géodésique reliant l’origine à  $(n, 0)$  s’éloigne de la ligne droite. Notons que pour notre modèle jouet  $D^\times(n, 0)$ , l’équation (4) nous donne exactement l’ordre de grandeur de la variance de  $D^\times(n, 0)$ . En effet, en utilisant les résultats sur les fluctuations du courant du TASEP [BDM<sup>+</sup>01], on a que

$$cn^{2/3} \leq \text{Var}(D^\times(n, 0)) \leq c'n^{2/3}.$$

Pourrait-on en déduire une asymptotique équivalente pour  $\text{Var}(D(n, 0))$  (sous le conditionnement  $0, (n, 0) \in \mathcal{C}_\infty$ ) ?

- On pourrait chercher s’il existe d’autres perturbations de la distance  $L^1$  pour lesquelles on peut calculer l’asymptotique du temps de premier passage. Nous pensons en particulier aux deux lois sur les temps de passage suivantes, pour  $\varepsilon$  petit :

- (i)  $\mathbb{P}(\tau = 1 + \varepsilon) = \mathbb{P}(\tau = 1 - \varepsilon) = 1/2$ ,
- (ii)  $\mathbb{P}(\tau = 1) = 1 - \varepsilon$  et  $\mathbb{P}(\tau = 0) = \varepsilon$ .

Une des principales propriétés de ces perturbations est qu'elles sont presque *dirigées*, dans le sens que pour aller de l'origine au point  $(n, 0)$ , il est très rarement rentable de faire des pas vers la gauche. En première approximation, on peut donc interdire de tels chemins ce qui rend la suite  $\{D(n, j), j \in \mathbb{Z}\}_{n \geq 0}$  markovienne. Comprendre comment évolue cette chaîne de Markov permettrait d'en déduire la limite de  $D(n, 0)/n$ .

## CHAPITRE 4

# Processus d'Hammersley [14,15,16,17,18]

### 4.1 Introduction

En 1961, dans un papier sur des méthodes de Monte Carlo, Ulam [Ula61] proposa d'étudier la distribution de la plus longue sous-suite croissante d'une permutation aléatoire, c'est-à-dire pour une permutation aléatoire  $\sigma$ , que peut-on dire du plus grand entier  $k$  tel qu'il existe une suite croissante d'indices  $i_1 < \dots < i_k$  vérifiant  $\sigma(i_1) < \dots < \sigma(i_k)$ . Dans la suite, on notera  $\ell(\sigma)$  cette longueur maximale et  $\ell(n)$  la variable aléatoire ayant la loi de  $\ell(\sigma)$  lorsque  $\sigma$  est tiré uniformément parmi toutes les permutations de taille  $n$ .

Dix ans plus tard, Hammersley [Ham72] fut le premier à apporter une réponse partielle à cette question, appelée depuis dans la littérature *problème d'Ulam* ou *problème d'Ulam-Hammersley*. Pour cela, il étudie une version *poissonisée* du problème :

Soit,  $\Xi$  un processus ponctuel de Poisson (PPP) d'intensité 1 sur le quart de plan  $(\mathbb{R}_+)^2$ . Soit  $L_t$  le nombre maximal de points de  $\Xi$  par lesquels un chemin croissant de  $[0, t]^2$  peut passer *i.e.*

$$L_t = \max \{k, (x_1, t_1), \dots, (x_k, t_k) \in \Xi, 0 < x_1 < \dots < x_k < t, 0 < t_1 < \dots < t_k < t\}.$$

Quelle est l'asymptotique de  $L_t$  ? Contrairement au chapitre précédent, il s'agit donc ici d'un problème de percolation de dernier passage.

Comme tout ensemble de  $n$  points uniformément répartis dans  $[0, t]^2$  définissent une permutation uniforme de taille  $n$ , on a l'égalité en loi

$$L_t \stackrel{\text{loi}}{=} \ell(X).$$

où  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $t^2$ . Des arguments de dépoissonisation montrent alors que  $L_t$  et  $\ell(t^2)$  ont même asymptotique. L'intérêt de  $L_t$  est que cette variable satisfait une propriété de sur-additivité :

$$L_{t+s} \geq L_t + L'_s$$

où  $L'_s$  a même loi que  $L_s$  et est indépendante de  $L_t$ . En effet, le nombre maximal de points de  $\Xi$  pris par un chemin croissant de  $[0, t + s]^2$  est plus grand que la somme du

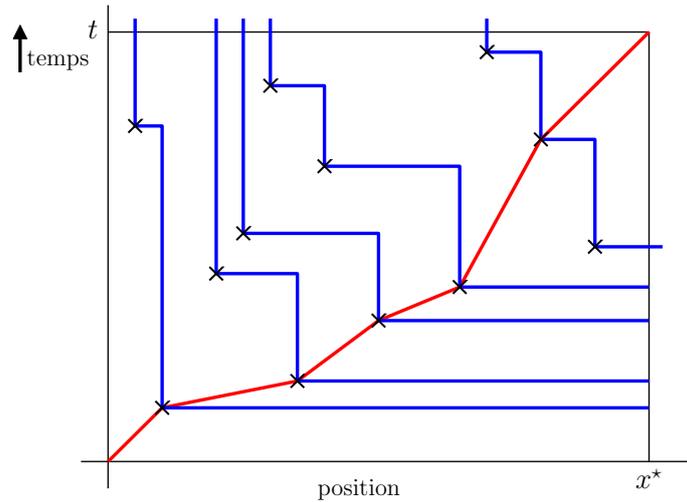


FIGURE 8 – Exemple de réalisation du processus d’Hammersley. Les points de  $\Xi$  sont représentés par les croix. En bleu figurent les trajectoires de particules en fonction du temps. En rouge est dessiné un chemin croissant optimisant le nombre de points de  $\Xi$ . Un tel chemin croise nécessairement chaque ligne d’Hammersley une et une seule fois.

nombre maximal de points de  $\Xi$  pris par un chemin croissant de  $[0, t]^2$  et de celui d’un chemin croissant de  $[t, t + s]^2$ . Comme dans le cas de la percolation de premier passage, le théorème ergodique sous-additif de Kingman permet d’en déduire que  $L_t/t$  converge presque sûrement et dans  $L^1$  vers une constante  $c$ . Dans [Ham72], Hammersley montre que  $\pi/2 < c < e$  et conjecture que  $c = 2$ . La preuve de ce résultat fut donnée par Logan et Shepp [LS77] et Veršik et Kerov [VK77] avec des arguments de nature algébrique à l’aide de tableaux de Young. En ce qui concerne le problème originel d’Ulam, on a ainsi, pour  $n$  grand,

$$\ell(n) \sim 2\sqrt{n}.$$

Dans [AD95], Aldous et Diaconis proposent une preuve de nature plus probabiliste de ce résultat en introduisant un système de particules (qui était déjà implicitement présent dans les travaux d’Hammersley). Ce processus  $(X_t)_{t \geq 0}$ , appelé *processus d’Hammersley*, est défini de la manière suivante sur  $[0, x^*]$  pour  $x^* > 0$  :

- Au temps 0, aucune particule n’est présente *i.e.*  $X_0 = \emptyset$ .
- Soit  $(x, s)$  un point de  $\Xi$  avec  $x \in [0, x^*]$ . Alors, au temps  $s$ , la particule située immédiatement à droite de  $x$  dans  $X_{s^-}$  saute en  $x$  (si il n’y a aucune particule à droite de  $x$  au temps  $s^-$ , une particule est créée en temps  $s$  au site  $x$ .)

Si on trace les trajectoires des différentes particules au cours du temps (on considère que les particules créées arrivent *par la droite*), on obtient un ensemble de lignes brisées faisant des pas nord et ouest, nommées *ligne d’Hammersley*. On peut alors vérifier que le nombre de lignes obtenues avant le temps  $t$  (et donc le nombre de particules dans le système à cet instant) correspond exactement au nombre maximal de points de  $\Xi$  pris par un chemin croissant de  $[0, x^*] \times [0, t]$  (voir figure 8 pour un exemple). Ce processus peut directement se généraliser sur  $\mathbb{R}^+$  au lieu de  $[0, x^*]$ , par contre la généralisation sur  $\mathbb{R}$  est plus délicate et nécessite de partir d’une configuration initiale de particules de

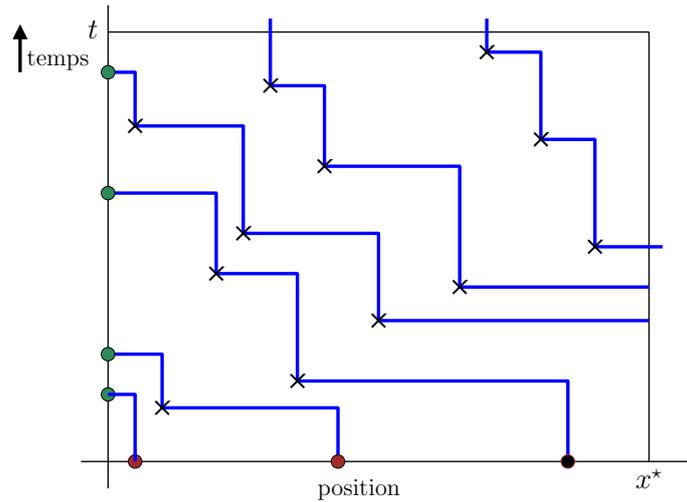


FIGURE 9 – Exemple de réalisation du processus d’Hammersley avec puits. Les puits sont représentés par les points verts le long de l’axe des ordonnées. Les points rouges sur l’axe des abscisses représentent la configuration initiale du système de particules.

densité positive. Notons que sur  $\mathbb{R}^+$ , ce processus n’admet pas de distribution stationnaire puisque de plus en plus de particules s’amassent autour de zéro. Pour pallier cette difficulté Cator et Groeneboom [CG05] ont proposé une modification de ce processus défini sur  $[0, x^*]$  afin qu’il admette une mesure stationnaire. Pour cela, ils considèrent un ensemble de *puits* le long de l’axe des ordonnées distribué selon un processus de poisson d’intensité  $\lambda$  et ils rajoutent la règle suivante à la dynamique du processus :

- Si un puits apparaît au temps  $s$ , la particule au temps  $s^-$  située la plus à gauche disparaît du système.

Ils montrent qu’avec cette règle supplémentaire, une mesure de Poisson sur  $[0, x^*]$  d’intensité  $1/\lambda$  est une mesure stationnaire pour le processus. Cette propriété permet alors d’en déduire très facilement que la limite de  $L_t/t$  est nécessairement plus petite que 2, l’inégalité inverse demandant par contre d’avantage de travail.

Entre-temps, des liens profonds entre ce modèle et des processus déterminantaux ont été découverts, en particulier par Baik, Deift et Johansson [BDJ99], leur permettant d’en déduire aussi les fluctuations de ce processus :

$$\frac{L_t - 2t}{t^{1/3}} \xrightarrow{\text{loi}} TW$$

où  $TW$  désigne une loi de Tracy-Widom (les fluctuations de  $\ell(n)$  pour le problème d’Ulam originel sont donc de l’ordre de  $n^{1/6}$ ).

## 4.2 Processus d’Hammersley discret avec sources et puits [14]

Avec Nathanaël Enriquez, Lucas Gerin et Jean-Baptiste Gouéré [14], nous nous sommes intéressés à l’analogie discret du problème d’Hammersley *i.e.* au problème suivant :

soit  $p \in (0, 1)$ . En chaque site de  $\mathbb{N}^2$  on place indépendamment une croix avec probabilité  $p$ . Quel est le nombre maximal de croix par lesquelles un chemin croissant peut passer ?

Par analogie avec le cas continu, on notera encore  $\Xi$  l'ensemble des sites de  $\mathbb{N}^2$  où il y a une croix. Remarquons que dans le cas du nuage poissonien, deux points distincts du nuage avaient forcément des ordonnées (et des abscisses) distinctes. Dans le cas discret, cette propriété n'est plus vérifiée, il est donc naturel de considérer plusieurs quantités :

- Le plus long chemin strictement croissant :

$$\mathcal{L}_{(n,m)}^{(1)} = \max \{k, (i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k) \in \Xi, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n, 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq m\}.$$

- Le plus long chemin croissant au sens large :

$$\mathcal{L}_{(n,m)}^{(2)} = \max \{k, (i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k) \in \Xi, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n, 1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m\}.$$

Notons qu'à chaque fois, on n'autorise au chemin de prendre qu'un unique point sur une même abscisse. Nous cherchons donc finalement *une fonction* qui optimise le nombre de points pris. Il serait donc aussi naturel d'introduire la famille suivant

$$\mathcal{L}_{(n,m)}^{(3)} = \max \{k, (i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k) \in \Xi, 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n, 1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m\}$$

mais malheureusement nos techniques ne s'adaptent pas à ce cas-là (et l'asymptotique de  $\mathcal{L}_{(n,m)}^{(3)}$  est encore inconnue à ce jour).

Les asymptotiques de  $\mathcal{L}_{(n,m)}^{(1)}$  et  $\mathcal{L}_{(n,m)}^{(2)}$  ont été trouvées par Seppäläinen dans deux papiers indépendants [Sep97, Sep98]. Les techniques utilisées par Seppäläinen sont assez proches de celles utilisées par Aldous et Diaconis [AD95] dans le cas continu : il considère un système de particules sur  $\mathbb{Z}$  et il exprime les limites de  $\mathcal{L}_{(n,n)}^{(1)}/n$  et  $\mathcal{L}_{(n,n)}^{(2)}/n$  comme solution d'un problème variationnel. Dans [14], nous retrouvons ses résultats en utilisant une stratégie proche de celle de Cator et Groeneboom [CG05], c'est-à-dire en considérant un système de particules sur un domaine borné et en exhibant une mesure stationnaire. On obtient le résultat suivant.

**Théorème 4.1** (Seppäläinen [Sep97, Sep98], B., Enriquez, Gerin, Gouéré [14]). *Pour tout  $p \in (0, 1)$  et  $a, b > 0$ , on a, lorsque  $n$  tend vers l'infini*

$$\frac{\mathcal{L}_{(an,bn)}^{(1)}}{n} \xrightarrow{p.s.} \begin{cases} \frac{\sqrt{p}(2\sqrt{ab} - (a+b)\sqrt{p})}{1-p} & \text{si } p < \min\{a/b, b/a\}, \\ \min\{a, b\} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5)$$

$$\frac{\mathcal{L}_{(an,bn)}^{(2)}}{n} \xrightarrow{p.s.} \begin{cases} 2\sqrt{abp(1-p)} + (a-b)p & \text{si } p < a/(a+b), \\ a & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6)$$

Expliquons plus précisément comment nous établissons l'asymptotique de  $\mathcal{L}_{(an,bn)}^{(1)}$ . Comme dans le cas du problème d'Hammersley, on considère un système de particules sur  $\{1, \dots, n\}$  construit à partir de  $\Xi$  de la manière suivante :

- Initialement, il n'y a aucune particule dans le système.

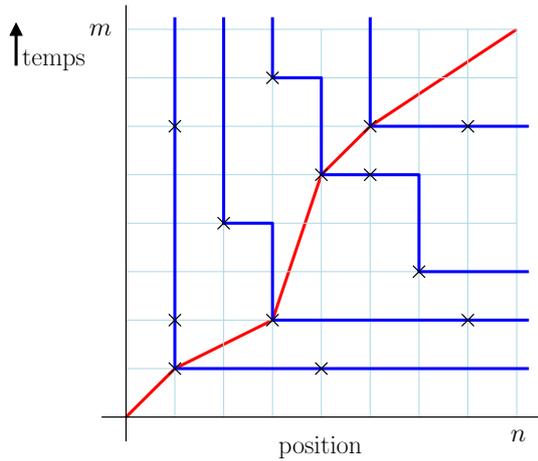


FIGURE 10 – Exemple de réalisation du processus d’Hammersley discret. Les points de  $\Xi$  sont représentés par les croix. En bleu figurent les trajectoires de particules en fonction du temps. En rouge est dessiné un chemin strictement croissant optimisant le nombre de points de  $\Xi$ .

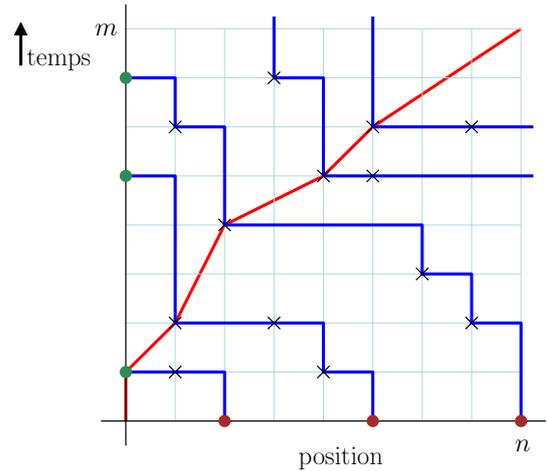


FIGURE 11 – Exemple de réalisation du processus d’Hammersley discret avec puits stationnaire. Les puits sont représentés par les points verts. Les points rouges représentent la configuration initiale.

- Supposons qu’au temps  $k - 1$ , il y ait  $N$  particules dans le système situées respectivement aux positions  $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ . Alors la particule située en  $x_i$  saute au temps  $k$  à la position de la croix de  $\Xi$  de hauteur  $k$  située la plus gauche dans l’intervalle  $(x_{i-1}, x_i)$  (avec comme convention  $x_0 = 0$ ). Si  $\Xi$  ne possède pas de croix de hauteur  $k$  dans l’intervalle  $(x_{i-1}, x_i)$ , la particule située en  $x_i$  ne bouge pas.
- S’il existe une croix de  $\Xi$  à la hauteur  $k$  dans l’intervalle  $(x_N, N]$  alors une nouvelle particule apparaît au temps  $k$  à la position  $\min \{x, \Xi \cap ((x_N, x] \times \{k\}) \neq \emptyset\}$ .

La dynamique de ce système de particules est donc très proche de la dynamique du processus d’Hammersley hormis que le temps étant maintenant discret, plusieurs particules peuvent sauter au même instant. Si on trace les trajectoires des particules au cours du temps, on obtient encore un ensemble de lignes brisées faisant des pas nord et ouest et l’on vérifie que le nombre de lignes obtenues avant la hauteur  $m$  est égal à  $\mathcal{L}_{(n,m)}^{(1)}$ . Un exemple de réalisation est donné dans la figure 10.

Pour rendre ce processus stationnaire, nous employons la même stratégie que Cator et Groeneboom : nous rajoutons indépendamment sur chaque site de l’axe des ordonnées *un puits* avec une probabilité  $\alpha \in (0, 1)$ . Nous considérons alors le système de particules  $(X_t)_{t \geq 0}$  sur  $\{1, \dots, n\}$  construit à partir de  $\Xi$  et de notre ensemble de puits avec la règle supplémentaire :

- S’il y a un puits à la hauteur  $k$ , la particule située à la position la plus à gauche du système disparaît au temps  $k$ .

On montre alors très simplement que la mesure produit de Bernoulli sur  $\{1, \dots, n\}$  de paramètre  $\alpha^*$  est stationnaire pour cette dynamique si la relation suivante est vérifiée :

$$\alpha^* = \frac{p(1 - \alpha)}{\alpha + p(1 - \alpha)}$$

Cela se prouve en regardant les lignes d’Hammersley et en montrant qu’autour de chaque point de  $\mathbb{N}^2$ , si on note  $X, X', Y, Y'$  les indicatrices respectives qu’une ligne d’Hammersley soit présente au sud, nord, ouest et est de ce point, alors si  $(X, Y)$  est distribué selon un produit indépendant de lois de Bernoulli de paramètre  $\alpha$  et  $\alpha^*$ , alors  $(X', Y')$  a la même distribution.

Si note  $\tilde{\mathcal{L}}_{(n,m)}^{(1)}$  le nombre de lignes d’Hammersley dans le système avec puits et partant de la distribution stationnaire, on a alors, par couplage,

$$\mathcal{L}_{(n,m)}^{(1)} \leq \tilde{\mathcal{L}}_{(n,m)}^{(1)}$$

et par stationnarité

$$\mathbb{E}(\tilde{\mathcal{L}}_{(n,m)}^{(1)}) = \mathbb{E}(\text{nbre lignes sortant par la gauche ou par le haut}) = \alpha^* n + \alpha m.$$

Une optimisation en  $\alpha, \alpha^*$  permet d’en déduire une majoration optimale de  $\mathcal{L}_{(an,bn)}^{(1)}$ . La minoration est un peu plus délicate et nécessite de montrer que l’ajout de puits et d’une configuration initiale ne change pas l’ordre de grandeur du nombre de lignes d’Hammersley.

La stratégie pour calculer l’asymptotique de  $\mathcal{L}_{(an,bn)}^{(2)}$  est très proche, il suffit de changer un peu la définition du système de particules initial pour que les lignes d’Hammersley comptent effectivement le nombre de maximal de points de  $\Xi$  pris par un chemin croissant au sens large. Deux lignes d’Hammersley peuvent alors se superposer sur leurs parties horizontales. Pour rendre le processus stationnaire dans ce cas-là, on montre qu’il suffit de mettre en chaque point de l’axe des ordonnées un nombre de puits suivant une loi géométrique. Une distribution initiale de particules suivant un produit indépendant de Bernoulli de paramètre bien choisi rend le processus stationnaire. Notons qu’une stratégie assez proche de la nôtre avait aussi été utilisée par Rolla, Sidoravicius, Surgailis, Vares [RSSV10] dans le cadre de la percolation de dernier passage avec poids géométrique.

Notre approche permet aussi de retrouver le résultat pour le problème initial d’Ulam. Intuitivement, il suffit de considérer le problème discret dans un carré de taille  $n \times n$  avec une probabilité  $p = 1/n$  afin qu’il y ait en moyenne un seul point par ligne et par colonne. Ainsi, après renormalisation, le nuage de points discret ressemble à un nuage poissonien ayant approximativement  $n$  points. Informellement, avec  $p = 1/n$  et  $a = b = 1$  dans le théorème 4.1, on retrouve bien la bonne asymptotique pour  $\ell(n)$  :

$$\ell(n) \sim n \times \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}(2 - 2\frac{1}{\sqrt{n}})}{1 - \frac{1}{n}} \sim 2\sqrt{n}.$$

Nous rendons rigoureuse cette idée grâce des résultats non asymptotiques que notre preuve nous permet d’obtenir pour  $\mathcal{L}_{(n,n)}^{(1)}$ .

### 4.3 Variantes du problème d’Hammersley [17,18]

Dans deux articles écrits avec Lucas Gerin, nous étudions deux variantes du problème d’Hammersley où, en plus de sa croissance, nous imposons des contraintes sup-

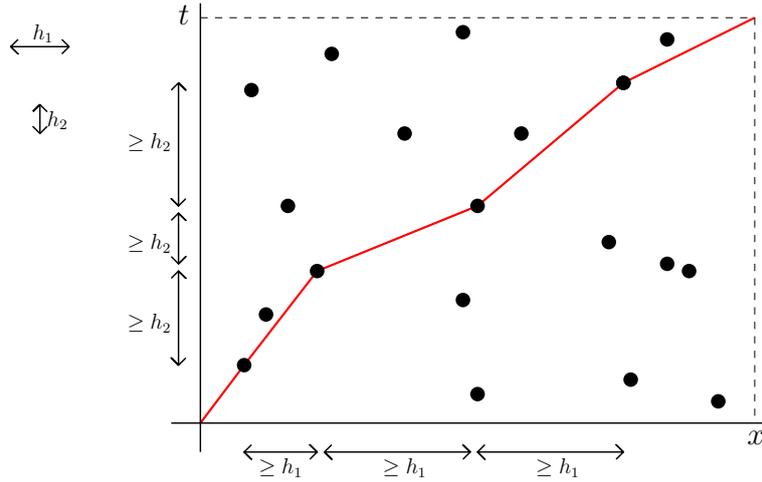


FIGURE 12 – Exemple de chemin optimisant pour une valeur de  $\mathbf{h}$  donné.

plémentaires au chemin recherché. Plus précisément, dans [17], nous considérons un nuage de point poissonien  $\Xi$  d'intensité 1 sur  $\mathbb{R}_+^2$  et nous nous donnons un paramètre  $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \in [0, \infty)^2$ . On étudie alors la quantité suivante :

$$L_{(x,t)}^{\mathbf{h}} = \max \{k, (x_1, t_1), \dots, (x_k, t_k) \in \Xi \cap ([0, x] \times [0, t]), \forall i, x_i + h_1 < x_{i+1}, t_i + h_2 < t_{i+1}\}.$$

C'est-à-dire, on cherche un chemin croissant passant par un maximum de points de  $\Xi$  avec en plus la contrainte que deux points de  $\Xi$  doivent être espacés en abscisse d'une distance au moins égale à  $h_1$  et en ordonnée d'au moins  $h_2$  (voir figure 12 pour un exemple). Il est facile de voir grâce à un argument de sous-additivité que pour tout  $a, b > 0$ ,  $L_{(at, bt)}^{\mathbf{h}}/t$  converge presque sûrement et dans  $L^1$  vers une constante  $f(a, b)$ . Nous obtenons la valeur explicite de cette constante.

**Théorème 4.2** (B., Gerin [17]). *Pour tout  $h_1, h_2 \geq 0$ , on :*

$$f^{\mathbf{h}}(a, b) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L_{(at, bt)}^{\mathbf{h}}}{t} = \begin{cases} \frac{2(ah_2 + bh_1) - 2\sqrt{(ah_2 - bh_1)^2 + ab}}{4h_1h_2 - 1} & \text{si } h_1h_2 \neq 1/4, \\ \frac{ab}{h_1b + h_2a} & \text{si } h_1h_2 = 1/4. \end{cases}$$

Nous obtenons aussi que les fluctuations de  $L_{(at, bt)}^{\mathbf{h}}$  sont de l'ordre de  $t^{1/3}$  et qu'elles convergent, après renormalisation, vers une loi de Tracy-Widom.

La preuve de ces résultats repose sur un couplage avec le problème classique d'Hammerley. En effet, considérons un nuage poissonien  $\Xi = (\Xi_{y,s})_{y,s \geq 0} \in \{0, 1\}^{\mathbb{R}_+^2}$  sur le quart de plan et notons comme dans l'introduction simplement  $L_{(x,t)}$  la quantité étudiée à l'origine par Hammersley associée à ce nuage (ce qui correspond avec nos notations à  $L_{(x,t)}^{\mathbf{h}}$  avec  $\mathbf{h} = (0, 0)$ ). Nous introduisons alors la fonction (aléatoire) suivante :

$$\phi^{\mathbf{h}} : (0, +\infty)^2 \rightarrow (0, +\infty)^2 \\ (y, s) \mapsto (y + h_1L_{(y,s)^-}, s + h_2L_{(y,s)^-}),$$

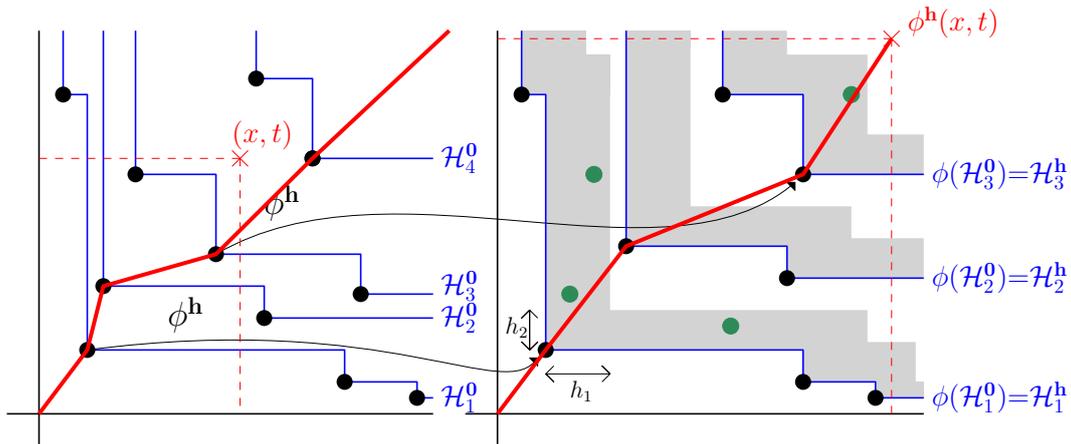


FIGURE 13 – Exemple de fonction  $\phi^h$ . À gauche, une réalisation de  $\Xi$  et les lignes d’Hammersley correspondantes. À droite, l’image de  $\Xi$  par  $\phi^h$ . Les points supplémentaires sont dessinés en vert. Un chemin optimal sans contrainte à gauche donne un chemin optimal avec contrainte à droite.

Notons que  $\phi^h$  n’est pas surjective. Soit  $Y$  un autre nuage poissonien sur le quart de plan indépendant de  $\Xi$  et considérons  $\tilde{\Xi} = (\tilde{\Xi}_{y,s})_{y,s \geq 0} \in \{0, 1\}^{\mathbb{R}_+^2}$  défini par

$$\begin{cases} \tilde{\Xi}_{y',s'} = \Xi_{y,s} & \text{si } (y', s') \in \text{Image}(\phi^h) \text{ et } \phi^h(y, s) = (y', s'), \\ \tilde{\Xi}_{y',s'} = Y_{y',s'} & \text{si } (y', s') \notin \text{Image}(\phi^h). \end{cases}$$

C’est-à-dire,  $\tilde{\Xi}$  est l’image de  $\Xi$  par  $\phi^h$  sauf qu’on rajoute des points de manière poissonienne dans le complémentaire de l’image de  $\phi^h$ . On peut alors voir que  $\tilde{\Xi}$  est aussi distribué selon un processus de Poisson d’intensité 1 sur le quart de plan et on en déduit l’égalité presque sûre :

$$L_{(x,t)}(\Xi) = L_{(x',t')}^h(\tilde{\Xi})$$

où  $(x', t') = \phi^h(x, t)$ . Une illustration de ce couplage est donnée en figure 13. Ceci nous permet d’obtenir le théorème suivant reliant  $L$  et  $L^h$ .

**Théorème 4.3** (B., Gerin [17]). *Pour tout  $x, t > 0$  et tout  $k \geq 0$ ,*

$$\mathbb{P}(L_{(x,t)}^h \leq k) = \mathbb{P}(L_{(x-h_1k, t-h_2k)} \leq k).$$

L’asymptotique  $L_{(at, bt)}^h$  ainsi que ses fluctuations découlent alors directement de ce théorème et des résultats connus pour  $L_{(at, bt)}$ .

Nous utilisons aussi la même approche dans le cas discret, c’est-à-dire quand le nuage poissonien est remplacé par un champ de Bernoulli sur  $\mathbb{N}^2$  comme dans notre article précédent [14]. On peut encore exactement calculer l’asymptotique du nombre  $\mathcal{L}_{(n,m)}^h$  maximal de points de  $\Xi$  que peut prendre un chemin si on impose une contrainte d’écart  $h$  entre les différents points. Plus précisément, on obtient cette fois la relation suivante

$$\mathbb{P}(\mathcal{L}_{(n,m)}^h \leq k) = \mathbb{P}(T_{(n-h_1k, m-h_2k)} \leq k) \tag{7}$$

où  $T_{(n,m)}$  est le dernier temps de passage dans un champ géométrique, *i.e.*

$$T_{(n,m)} = \max \left\{ \sum_{(i,j) \in \pi} \omega(i,j), \pi \in \mathcal{P}_{n,m} \right\}$$

où  $(\omega(i,j))_{i,j \geq 1}$  sont i.i.d. de loi géométrique de paramètre  $1-p$  issue de 0 et  $\mathcal{P}_{n,m}$  est l'ensemble des chemins croissants allant de  $(1,1)$  à  $(n,m)$ . En reprenant les notations du paragraphe précédent, ceci exhibe en particulier un couplage entre  $T_{(n,m)}$ , le nombre maximal de points pris par une fonction strictement croissante  $\mathcal{L}_{(n,m)}^{(1)}$  et le nombre maximal de points pris par une fonction croissante au sens large  $\mathcal{L}_{(n,m)}^{(2)}$ . Lors de la rédaction de notre article, nous nous sommes aperçus que le couplage entre  $\mathcal{L}_{(n,m)}^{(1)}$  et  $T_{(n,m)}$  apparaissait déjà dans un article de physique de Rajesh et Dhar [RD98] (voir aussi [GO18, MN05]). Certains autres articles [Geo10, PMS08] mentionnaient aussi un couplage entre  $\mathcal{L}_{(n,m)}^{(1)}$  et le modèle du TASEP asynchrone (qui est lui-même relié avec la percolation de dernier passage de poids géométrique).

La relation (7) combinée avec l'asymptotique connue de  $T_{(an,bn)}/n$  permet d'en déduire la limite de  $\mathcal{L}_{(an,bn)}^h/n$ . Cependant, contrairement à un nuage poissonien, un champ de Bernoulli n'a pas de propriété d'invariance par scaling du temps et de l'espace. Ceci a pour conséquence que les fluctuations de  $\mathcal{L}_{(an,bn)}^h$  ne découlent pas directement de celles de  $T_{(an,bn)}$ . Nous parvenons à montrer qu'elles sont de l'ordre de  $n^{1/3}$  mais nous ne prouvons pas qu'elles convergent vers une loi de Tracy-Widom (hormis dans certains cas particuliers)<sup>1</sup>.

Encore avec Lucas Gerin, nous étudions dans [18] le même problème mais en imposant maintenant une condition de Lipschitz sur les chemins. C'est-à-dire, on considère un nuage de point poissonien  $\Xi$  sur  $\mathbb{R}_+^2$ , on se donne deux paramètres  $0 \leq \alpha < \beta \leq +\infty$  et on considère l'ordre partiel  $\preceq^{\alpha,\beta}$  suivant sur  $[0, +\infty)^2$  :

$$(x, y) \preceq^{\alpha,\beta} (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq x', \\ \alpha \leq \frac{y'-y}{x'-x} \leq \beta. \end{cases}$$

Pour tout domaine  $D \subset [0, +\infty)^2$ , on considère la variable aléatoire  $L^{\alpha,\beta}(D)$  définie par la longueur de la plus longue chaîne croissante de points de  $\Xi \cap D$  pour la relation d'ordre  $\preceq^{\alpha,\beta}$  :

$$L^{\alpha,\beta}(D) = \max \left\{ k ; \exists (u_1, v_1), \dots, (u_k, v_k) \in \Xi \cap D \text{ tels que } (u_1, v_1) \preceq^{\alpha,\beta} (u_2, v_2) \preceq^{\alpha,\beta} \dots \preceq^{\alpha,\beta} (u_k, v_k) \right\}.$$

Dans le cas  $\alpha = 0, \beta = +\infty, \preceq^{\alpha,\beta} = \preceq^{0,+\infty}$ , on retrouve l'ordre classique sur  $[0, +\infty)^2$  défini par  $\{x \leq x', y \leq y'\}$  et donc si  $D$  est le rectangle  $[0, x] \times [0, t]$ , on retrouve la quantité  $L_{(x,t)}$

1. Dans [MN05], les auteurs affirment sans le justifier en détail que le couplage permet de déduire des fluctuations de  $T_{(an,bn)}$  celles de  $\mathcal{L}_{(an,bn)}^{(1)}$ . Cependant, nous n'avons pas réussi à rendre rigoureux leurs arguments.

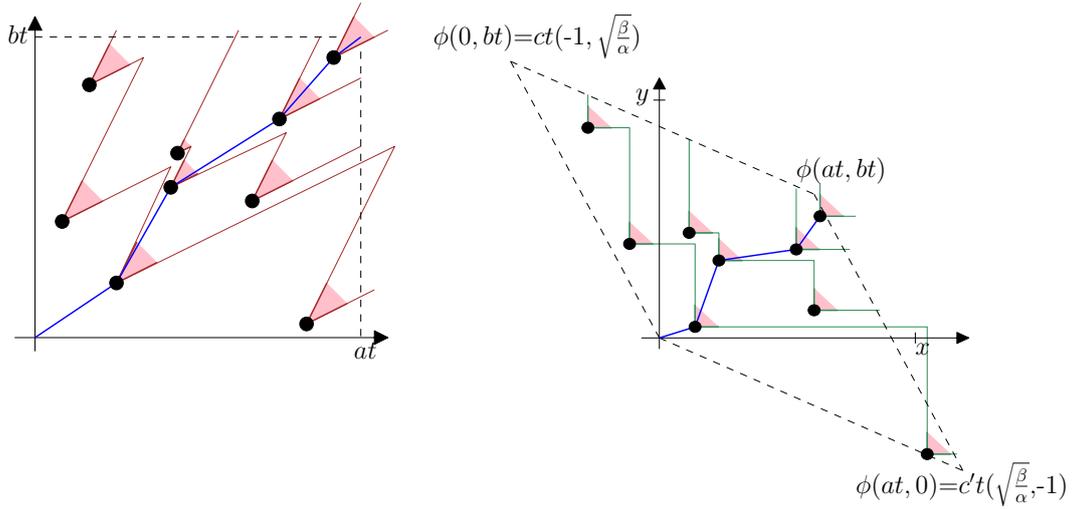


FIGURE 14 – À gauche : chaque point de  $\Xi$  est représenté par un  $\bullet$  avec son ensemble de majorants pour l'ordre  $\leq^{\alpha, \beta}$ . En bleu est dessiné un chemin optimisant pour  $L^{\alpha, \beta}$ . À droite : l'image par  $\phi$  du dessin de gauche.

étudiée par Hammersley. Nous montrons que  $L^{\alpha, \beta}(at, bt)/t := L^{\alpha, \beta}([0, at] \times [0, bt])/t$  admet une limite presque sûre et dans  $L^1$  et nous obtenons la valeur exacte de cette limite.

**Théorème 4.4** (B., Gerin [18]). *Pour tout  $a, b > 0$ , pour tout  $\beta > \alpha \geq 0$ , on a*

$$f^{\alpha, \beta}(a, b) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L^{\alpha, \beta}(at, bt)}{t} = \begin{cases} a\sqrt{\beta - \alpha} & \text{si } \frac{b}{a} \geq \frac{\alpha + \beta}{2}, \\ \frac{2\sqrt{(\beta a - b)(b - a\alpha)}}{\sqrt{\beta - \alpha}} & \text{si } \frac{2}{1/\beta + 1/\alpha} \leq \frac{b}{a} \leq \frac{\alpha + \beta}{2}, \\ b\sqrt{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}} & \text{si } \frac{b}{a} \leq \frac{2}{1/\beta + 1/\alpha}. \end{cases}$$

La preuve de ce résultat repose encore sur un couplage avec le problème classique d'Hammersley. Nous remarquons que pour tout  $x, y \geq 0$ , on a l'égalité en loi

$$L^{\alpha, \beta}([0, x] \times [0, y]) \stackrel{(\text{loi})}{=} L(\phi([0, x] \times [0, y])),$$

où  $\phi(x, y)$  est la transformation du plan définie par

$$\phi(x, y) = \frac{\beta^{1/4}\alpha^{1/4}}{\sqrt{\beta - \alpha}} (\beta^{1/2}x - \beta^{-1/2}y, -\alpha^{1/2}x + \alpha^{-1/2}y). \quad (8)$$

En particulier, l'image par  $\phi$  du rectangle  $[0, at] \times [0, bt]$  est un parallélogramme  $\mathcal{P}_t$  (voir figure 14). Calculer l'asymptotique de  $L^{\alpha, \beta}(at, bt)$  revient donc à étudier le problème d'Hammersley dans ce parallélogramme. Il est alors assez facile de voir qu'au premier ordre,  $L(\mathcal{P}_t)$  est équivalent à  $L(\mathcal{R}_t)$  où  $\mathcal{R}_t$  est le plus grand rectangle parallèle aux axes inclus dans  $\mathcal{P}_t$ . Le calcul de l'aire de ce rectangle combiné avec l'asymptotique pour le problème d'Hammersley classique donne alors le théorème 4.4. Une transition de

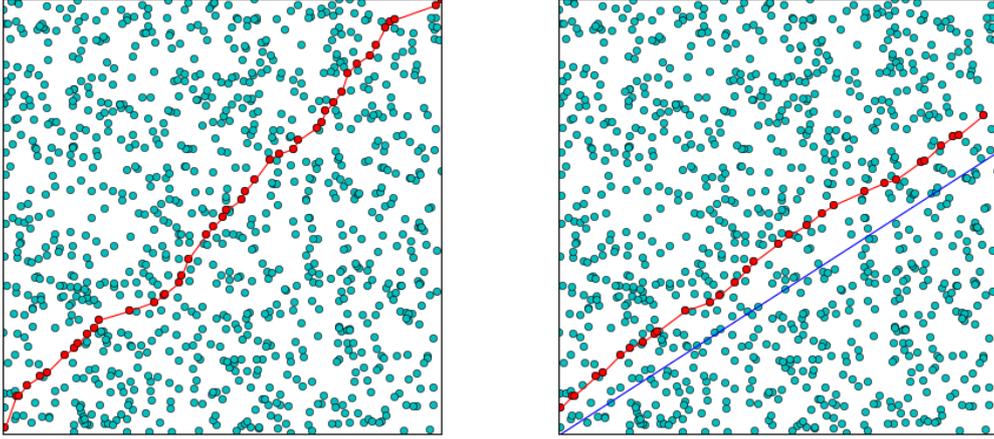


FIGURE 15 – À gauche : un chemin optimal dans un carré à travers  $n = 1000$  points avec  $\alpha = 0.2, \beta = 3$  (cas central). À droite : Un chemin optimal dans le même nuage avec  $\alpha = 0.2, \beta = 1.1$  (cas non central). Le chemin a une pente  $(\alpha + \beta)/2$  (c.f. ligne bleue).

phase apparaît dans la forme de la limite  $f^{\alpha,\beta}(a, b)$  en fonction du fait que le rectangle de diagonale  $[(0, 0), \phi(at, bt)]$  est d'aire maximal ou non.

Nous montrons aussi que dans le cas central  $\frac{2}{1/\beta+1/\alpha} \leq \frac{b}{a} \leq \frac{\alpha+\beta}{2}$ , le chemin optimal se concentre autour de la diagonale du rectangle  $[0, at] \times [0, bt]$  alors que ce n'est plus le cas si cette condition n'est pas satisfaite. Par exemple, dans le cas  $\frac{b}{a} \geq \frac{\alpha+\beta}{2}$ , nous montrons que la pente du chemin optimal sera de  $(\alpha + \beta)/2$ . Remarquons que cette transition de phase apparaît en  $b/a = (\alpha + \beta)/2$  et en  $a/b = (\alpha^{-1} + \beta^{-1})/2$ . Ainsi, il existe des cas intermédiaires (e.g.  $(\alpha + \beta)/2 < b/a < \beta$ ) où la diagonale du rectangle satisfait notre condition de Lipschitz mais où le chemin optimal s'en éloigne (c.f. Figure 15).

Ce couplage nous permet aussi de déterminer les fluctuations de  $L^{\alpha,\beta}(at, bt)$  autour de sa moyenne.

**Théorème 4.5** (B., Gerin [18]).

i). Si  $\frac{2}{1/\beta+1/\alpha} \leq \frac{b}{a} \leq \frac{\alpha+\beta}{2}$ , alors on a la convergence en loi

$$\frac{L^{\alpha,\beta}(at, bt) - t f^{\alpha,\beta}(a, b)}{\sigma_{a,b,\beta,\alpha}^{1/3} \times t^{1/3}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \text{TW},$$

où TW est la distribution de Tracy-Widom et  $\sigma_{a,b,\beta,\alpha} = \frac{1}{2} f^{\alpha,\beta}$ .

ii). Sinon, on a la convergence en probabilité suivante

$$\frac{L^{\alpha,\beta}(at, bt) - t f^{\alpha,\beta}(a, b)}{t^{1/3+\varepsilon}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty & \text{si } \varepsilon = 0, \\ 0 & \text{si } \varepsilon > 0 \end{cases}$$

La preuve de ce résultat nécessite nettement plus de travail que le théorème précédent car elle nécessite de contrôler précisément la différence entre la solution du problème d'Hammerley dans un parallélogramme  $L(\mathcal{P}_t)$  et celle dans le plus grand rectangle inclus dans ce parallélogramme  $L(\mathcal{R}_t)$ . Nous parvenons à cela en utilisant en particulier des méthodes inspirées de Cator et Pimentel [CP15].

## 4.4 Arbres d’Hammersley [15,16]

Dans [15], nous étudions avec Lucas Gerin, Jean-Baptiste Gouéré et Arvind Singh, une variante du processus d’Hammersley pour répondre à un problème combinatoire posé par Byers *et al* [BHMZ11] et Istrate et Bonchis [IB15]. La question initiale était la suivante :

"Soit  $k \geq 1$ . Étant donné une suite  $U := (U_i)_{i \geq 1}$  i.i.d. uniforme sur  $[0, 1]$ , quel est le nombre minimal  $R(n)$  d’arbres  $k$  réguliers nécessaires pour ranger les  $n$  premiers termes la suite  $U$  dans les sommets de ces arbres avec la contrainte suivante : si  $U_i$  est rangé à un sommet qui n’est pas une racine, alors au parent de ce sommet est rangé un terme  $U_j$  tel que  $j < i$  et  $U_j < U_i$ ?"

Dans le cas des arbres unaires (*i.e.*  $k = 1$ ), ceci revient à chercher le nombre minimal de piles croissantes qu’il faut pour ranger les  $U_i$  par ordre d’arrivée. Par dualité, ceci correspond aussi à trouver la plus longue sous-suite décroissante dans la suite  $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$ , ce qui est donc équivalent au problème d’Ulam. L’asymptotique de  $R(n)$  est ainsi de l’ordre de  $2\sqrt{n}$ .

Avant d’étudier l’asymptotique de  $R(n)$ , Istrate et Bonchis ont montré que l’algorithme glouton suivant permet de déterminer  $R(n)$  :

- On range successivement les nombres  $U_i$  de telle manière que  $U_i$  soit le fils du sommet ayant le plus grand label  $U_j < U_i$  et qui n’a pas encore  $k$  fils. Si un tel sommet n’existe pas, on range  $U_i$  à la racine d’un nouvel arbre.

Dans [15], nous généralisons la question d’Istrate et Bonchis au cas d’arbre de Galton-Watson sans feuilles. Plus précisément, nous considérons une loi de reproduction  $\mu$  sur  $\mathbb{N}$  ne chargeant pas 0 et une suite i.i.d.  $(U_i, \nu_i)_{i \geq 1}$  de loi  $\mathcal{U}[0, 1] \times \mu$  et on cherche le nombre minimal d’arbres nécessaires pour ranger les  $U_i$  dans des arbres aux labels croissants avec la contrainte que le sommet où est rangé  $U_i$  a au plus  $\nu_i$  enfants. Ce problème est résolu par la généralisation suivante de l’algorithme d’Istrate et Bonchis :

- Au temps 1, on place  $U_1$  à la racine du premier arbre et  $\nu_1$  désigne alors le nombre maximal d’enfants de ce sommet.
- Supposons que  $R(n)$  arbres aient été créés au temps  $n$ . Alors au temps  $n + 1$ , on place  $U_{n+1}$  de telle manière que  $U_{n+1}$  soit le fils du sommet ayant le plus grand label  $U_j < U_{n+1}$  qui n’a pas encore  $\nu_j$  fils.
- Si un tel sommet n’existe pas, on place  $U_{n+1}$  à la racine d’un nouvel arbre.

Dans la suite, le *nombre de vies* d’un label  $U_j$  au temps  $n$  sera le nombre de fils supplémentaires qu’il peut encore avoir. On dira qu’un label est vivant au temps  $n$  si son nombre de vies n’est pas nul. Un exemple d’application de cet algorithme est donné en figure 16.

Istrate et Bonchis se sont intéressés à l’asymptotique de  $R(n)$  lorsque  $n$  tend vers l’infini et ont conjecturé que, pour l’arbre binaire<sup>2</sup>

$$R(n) \sim \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \log n.$$

---

2. Certaines heuristiques nous font penser que cette conjecture est fautive. Cependant, nos résultats nous permettent pas de la mettre en défaut.

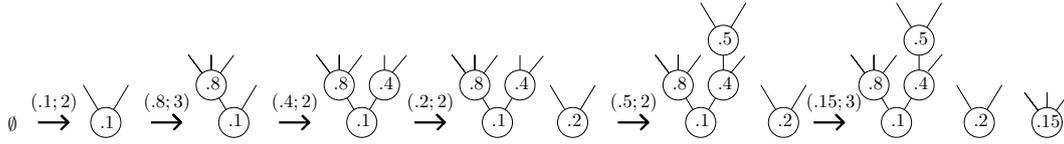


FIGURE 16 – Exemple d’application de l’algorithme glouton pour la suite  $(.1, 2), (.8, 3), (.4, 2), (.2, 2), (.5, 2), (.15, 3)$ . Au temps 6, le label 0.1 est mort, tandis qu’il reste une vie à 0.4.

Ils font remarquer que  $R(n) \geq \log n$  car  $R(n)$  est minoré par un processus de record, mais ils ne parviennent pas à démontrer plus précisément cette conjecture. Dans [15], nous montrons déjà que  $\log n$  est effectivement le bon ordre de grandeur, et ceci pour n’importe quelle loi de reproduction non dégénérée.

**Théorème 4.6** (B., Gerin, Gouéré, Singh [15]). *Pour toute loi de reproduction  $\mu$  sur  $\mathbb{N}^*$  différente de la masse de Dirac en 1, il existe une constante  $c_\mu \in (1, \infty)$  telle que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(R(n))}{\log n} = c_\mu.$$

Il est en fait assez simple de voir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(R(n))}{\log n} = c_\mu \in (1, \infty]$  existe. La partie délicate est de montrer que  $c_\mu < \infty$ . Contrairement au problème d’Ulam, aucun argument de sous-additivité ne s’applique ici et nous parvenons à montrer la finitude de  $c_\mu$  qu’en calculant la valeur exacte de  $c_\mu$  lorsque  $\mu$  est une loi géométrique.

**Théorème 4.7** (B., Gerin, Gouéré, Singh [15]). *Si  $\mu$  est la loi géométrique de moyenne  $1/\alpha$  alors on a la limite presque sûre :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R(n)}{\log n} = c_\mu = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Par un argument de couplage, nous montrons alors que, pour tout  $s > 1$ , si  $\mu_s$  désigne la loi sur  $\mathbb{N}^*$  de moyenne  $s$  et de variance minimale parmi les lois de moyenne  $s$ , on a

$$c_{\mu_s} = \inf\{c_\mu, \mu \text{ loi sur } \mathbb{N}^* \text{ de moyenne } s\}.$$

En particulier, on en déduit grâce au théorème 4.7 que pour un arbre  $k$ -régulier on a

$$c_{\delta_k} \leq \frac{k}{k - 1}.$$

et que pour toute loi  $\mu$  à support dans  $\{1, 2\}$ ,

$$c_\mu \leq \frac{2 - \mu(1)}{1 - \mu(1)}.$$

Un couplage évident implique alors la même borne supérieure pour toute loi de reproduction  $\mu$ .

Dans [16], avec Arvind Singh, nous affinons le théorème 4.7 en montrant la convergence presque sûre de  $R(n)/\log n$ .

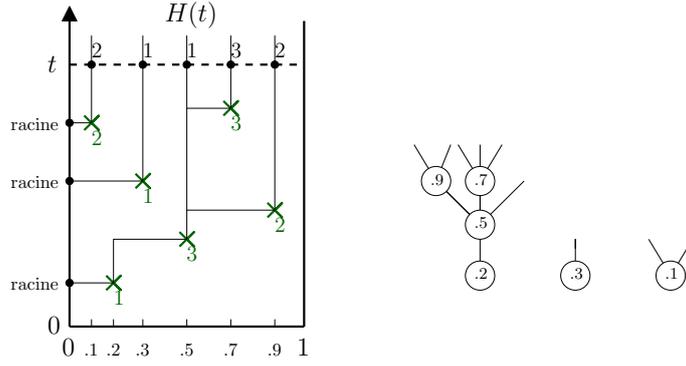


FIGURE 17 – Exemple de représentation du  $\mu$ -processus d’Hammersley. Les croix vertes représentent les points de  $\Xi$  avec leur nombre de vies écrit en dessous. Ici,  $\mathcal{R}(t) = 3$  et  $H(t)$  possède 5 particules aux positions .1; .3; .5; .7; .9 avec un nombre de vies respectif au temps  $t$  de 2; 1; 1; 3; 2. À droite, la forêt correspondante.

**Théorème 4.8** (B., Singh [16]). *Pour toute loi de reproduction  $\mu$  sur  $\mathbb{N}^*$  différente de la masse de Dirac en 1, on a la convergence presque sûre et dans  $L^1$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R(n)}{\log n} = c_\mu.$$

La majeure partie de l’article [15] consiste donc à établir le théorème 4.7. L’idée de la preuve est d’introduire un système de particules proche de celui considéré par Aldous et Diaconis pour le problème d’Ulam-Hammersley. On transforme donc notre problème en un problème en temps continu en considérant un processus ponctuel de Poisson (PPP)

$$\Xi := (U_i, T_i, \nu_i)_{i \geq 1}$$

sur  $[0, 1] \times [0, \infty) \times \mathbb{N}^*$  d’intensité  $du \otimes dt \otimes \mu$ . À l’instant  $T_i$ , on range grâce à l’algorithme décrit précédemment un élément  $(U_i, \nu_i)$  dans notre forêt d’arbre. On note alors  $H(t)$  l’ensemble des labels vivants au temps  $t$  ainsi que leur nombre de vies respectif. Ainsi  $H(t)$  est à valeur dans les mesures sur  $[0, 1] \times \mathbb{N}^*$ . Le processus  $(H(t), t \geq 0)$  ainsi défini est appelé  $\mu$ -processus d’Hammersley. On vérifie aisément que ce processus est markovien et s’identifie au système de particules ayant la dynamique suivante :

- Initialement, aucune particule n’est présente.
- Une nouvelle particule arrive uniformément en un point  $u \in [0, 1]$  avec taux 1. Elle crée alors une particule en  $u$  avec  $\nu$  vies où  $\nu$  est distribué selon la loi  $\mu$ . De plus, elle ôte une vie à la particule située immédiatement à sa gauche (si elle existe). Cette particule est appelée *père* de  $u$ . Si c’est la dernière vie du père, celui-ci disparaît du système.

On associe à cette dynamique un ensemble de lignes verticales et horizontales. Les lignes verticales représentent les positions des particules au cours du temps et les lignes horizontales relient chaque particule à son père ou à l’axe des ordonnées si elle n’a pas de père. On retrouve dans cette représentation graphique la généalogie des arbres de notre problème initial. Notons que le nombre d’arbres  $\mathcal{R}(t)$  créés au temps  $t$  correspond au nombre de lignes horizontales reliées à l’axe des ordonnées. La figure 17 donne une

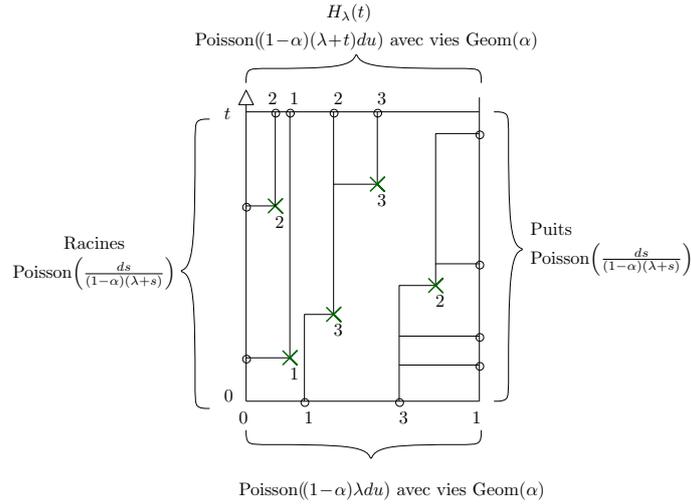


FIGURE 18 – Illustration de la stationnarité du  $\mu$ -processus d'Hammerley avec puits lorsque  $\mu$  géométrique.

réalisation de ce système de particules et le rangement dans des arbres correspondant. Notons que dans le cas  $\mu = \delta_1$ , on retrouve exactement le processus d'Hammerley étudié par Aldous et Diaconis [AD95] et la représentation graphique donnée dans l'introduction de ce chapitre (hormis qu'avec la convention adoptée ici, les lignes vont *vers la droite* au lieu d'aller *vers la gauche*).

### Cas de la loi géométrique.

Si  $\mu$  est la loi géométrique de moyenne  $1/\alpha$ , on peut créer une version presque stationnaire de ce processus à l'aide de puits comme l'on fait Cator et Groeneboom [CG05] dans le cadre du processus d'Hammerley. Plus précisément, fixons  $\lambda > 0$  et plaçons sur la demi-droite verticale  $\{1\} \times [0, \infty)$  des puits selon un PPP inhomogène d'intensité  $\frac{ds}{(1-\alpha)(\lambda+s)}$ . Notons  $H_\lambda(t)$  le processus suivant la même dynamique que le  $\mu$ -processus d'Hammerley hormis qu'un puits de hauteur  $s$  ôte une vie à la particule ayant la plus grande abscisse dans  $H_\lambda(s^-)$ . On a la proposition suivante.

**Théorème 4.9** (B., Gerin, Gouéré, Singh [15]). *Si  $\mu$  est la loi géométrique de moyenne  $1/\alpha$  et si initialement  $H_\lambda(0)$  est distribué selon un PPP sur  $[0, 1] \times \mathbb{N}^*$  d'intensité  $(1-\alpha)\lambda du \otimes \mu$ , alors*

- Pour tout  $t \geq 0$ , le processus  $H_\lambda(t)$  est distribué selon un PPP sur  $[0, 1] \times \mathbb{N}^*$  d'intensité  $(1-\alpha)(\lambda+t)du \otimes \mu$ .
- Les racines des arbres apparaissent sur l'axe des ordonnées selon un PPP inhomogène d'intensité  $\frac{ds}{(1-\alpha)(\lambda+s)}$ .

Cette proposition vient de l'absence de mémoire de la loi géométrique. En effet, grâce à cette propriété des lois géométriques, à chaque fois qu'une particule apparaît, elle ôte la dernière vie de son père (et donc le tue) avec probabilité  $\alpha$ . Ainsi, si on considère le processus  $\tilde{H}$  constitué juste des positions des particules de  $H$  (sans leur nombre

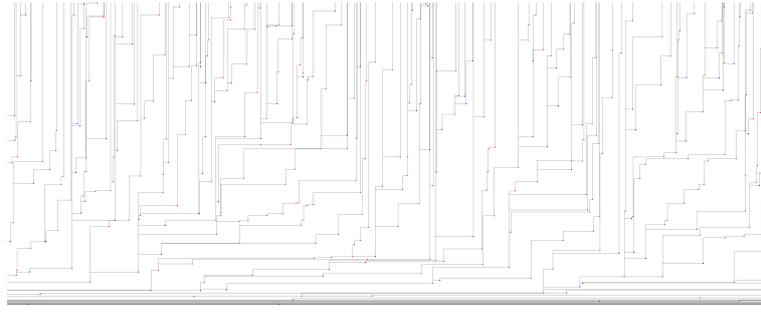


FIGURE 19 – Simulation du processus d’Hammersley sur le demi-plan avec une loi géométrique de moyenne  $3/2$ . La figure représente l’ensemble  $[0, 30] \times [0, 12]$ . Les lignes sortantes par le haut forment donc un PPP d’intensité  $4du$  alors que celles sortant à droite (ou à gauche) forment un PPP inhomogène d’intensité  $3ds/s$ .

de vies), celui-ci reste, lorsque  $\mu$  est géométrique, un processus markovien qui peut être vu comme la superposition de deux processus :

- Avec taux  $1-\alpha$ , de nouvelles particules arrivent uniformément sur  $[0, 1]$  et s’ajoutent au système (ce sont les particules qui ne tuent pas leur père).
- Avec taux  $\alpha$ , de nouvelles particules arrivent uniformément sur  $[0, 1]$ . Chaque particule crée alors une particule à son point d’arrivée et tue sa voisine de gauche (ce sont les particules qui tuent leur père).

Si on part initialement d’une mesure de Poisson, le premier processus ne fait qu’augmenter l’intensité de cette mesure de Poisson. Le deuxième processus étant exactement un processus d’Hammersley classique, on sait d’après Cator et Groenboom [CG05] que l’ajout de puits permet de le rendre stationnaire.

Ce théorème nous montre donc que pour le processus stationnaire, le nombre de racines apparues avant le temps  $t$  est en moyenne égal à

$$\int_0^t \frac{ds}{(1-\alpha)(\lambda+s)} \sim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\alpha} \log t,$$

ce qui correspond à l’asymptotique donnée pour  $R(n)$  dans le théorème 4.7. La dernière partie du travail consiste alors à justifier que l’ajout de puits ne modifie pas, au premier ordre, le nombre de racines. Pour cela, on est en particulier amené à définir le  $\mu$ -processus d’Hammersley sur le demi-plan supérieur. Rappelons que le processus d’Hammersley classique peut se définir sur le demi-plan, mais il faut partir d’une densité positive de particules. Ici, nous montrons que le  $\mu$ -processus d’Hammersley sur le demi-plan partant de la configuration vide  $\mathcal{G}_\infty$  est bien défini. Nous avons par contre une accumulation de lignes horizontales au voisinage de l’axe des abscisses (cf. figure 19). La figure 18 (et le théorème 4.9) correspond juste à regarder le processus  $\mathcal{G}_\infty$  restreint à la boîte  $[0, 1] \times [\lambda, \lambda + t]$ .

Nous montrons aussi que le  $\mu$ -processus d’Hammersley reste bien défini sur le demi-plan lorsque  $\mu$  n’est pas une loi géométrique, par contre, dans ce cas-là, on ne sait pas décrire sa loi. Ce résultat permet tout de même de démontrer le théorème 4.8 obtenu dans [16] sur la convergence presque sûre du nombre de racines. En effet, par propriété d’invariance de  $\mathcal{G}_\infty$  par scaling, on peut voir que si note  $N[e^i, e^{i+1}]$  le nombre

de lignes horizontales de  $\mathcal{G}_\infty$  croisant le segment vertical  $\{0\} \times [e^i, e^{i+1}]$ , alors la suite  $(N[e^i, e^{i+1}])_{i \geq 1}$  est stationnaire et ergodique. Ainsi, un théorème ergodique montre que pour le processus  $\mathcal{G}_\infty$ , le nombre de lignes horizontales croisant l'axe des ordonnées entre les hauteurs 1 et  $t$  divisé par  $\log t$  converge bien presque sûrement. Un argument de couplage permet d'en déduire le même résultat pour  $R(n)$ .

## 4.5 Quelques perspectives

- Dans [14], nous déterminons le nombre de points maximal d'un champ de Bernoulli qu'une fonction strictement croissante ou bien croissante au sens large peut prendre. Il serait bien sûr intéressant de calculer la même asymptotique pour un *chemin* croissant (cf. la définition de  $\mathcal{L}_{(n,m)}^{(3)}$  donnée en section 4.2). Cependant, ceci semble être un problème très délicat, voire impossible. Obtenir la limite exacte de  $\mathcal{L}_{(n,n)}^{(3)}/n$  permettrait en effet d'en déduire le paramètre critique de la percolation orientée par site sur  $\mathbb{Z}^2$  !
- Dans [17], dans le cas discret, nous obtenons l'ordre de grandeur des fluctuations de  $\mathcal{L}_{(an,bn)}^h$  mais pas leur convergence vers une loi de Tracy-Widom. Certains travaux de physiciens suggèrent pourtant que le couplage exposé dans l'article permet aussi d'en déduire les fluctuations de  $\mathcal{L}_{(an,bn)}^h$ . Même si cela ne semble pas aussi direct qu'ils l'affirment, l'utilisation de résultats précis sur le courant du TASEP permettrait quand même peut-être de les obtenir.
- Dans [IB15], Istrate et Bonchis conjecturent que le nombre minimal  $R(n)$  d'arbres binaires nécessaires pour ranger  $n$  labels de façon croissante est de l'ordre de  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \log n$ . Lors de l'élaboration de l'article [15], cette conjecture fut d'ailleurs notre première motivation. Malheureusement, nous sommes juste parvenus à montrer que la limite de  $R(n)/\log n$  se situe dans l'intervalle  $(1, 2]$ . Depuis, nous pensons que la conjecture est fautive. En effet, la constante  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  revient en quelque sorte à supposer que dans le  $\mu$ -processus d'Hammersley, les particules ayant une vie, deux vies ou bien étant déjà mortes sont uniformément réparties sur  $[0, 1]$  et ceci indépendamment de leur nombre de vies. Or cette hypothèse d'indépendance ne paraît pas forcément vraie, même à la limite. Contrôler cette dépendance devrait permettre de montrer que  $R(n) \sim c \log n$  avec  $c < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .
- Dans tous nos articles sur les arbres d'Hammersley, nous avons supposé que les arbres étaient sans feuilles. Un projet de recherche avec L. Gerin et A. Singh est de supprimer cette hypothèse. Le comportement de  $R(n)$  sera alors très différent selon que la loi de reproduction de l'arbre est -sur, sous- critique. Il est clair que si les arbres sont sous-critiques,  $R(n)$  sera linéaire puisque tous les arbres auront une taille intégrable. Au contraire, si les arbres sont sur-critiques, il est probable que  $R(n)$  reste de l'ordre logarithmique même si les arguments développés dans [17] ne s'adaptent pas directement à ce cas. Le cas critique est de loin celui nécessitant le plus de travail. Des simulations laissent penser que  $R(n)$  serait alors de l'ordre de  $\sqrt{n}$ . Nous avons en particulier regardé le cas de la loi géométrique issue de 0 de moyenne 1. Résoudre ce problème revient alors à dé-

terminer l'asymptotique d'un système de particules identique à celui étudié dans l'article [17] sauf qu'en plus chaque particule disparaît du système à un taux qui dépend de sa distance à sa voisine de droite. Cette règle supplémentaire semble créer de gros trous dans la répartition des particules que nous n'avons pas encore réussi à comprendre.

---

# Bibliographie

- [ACK14] O. Angel, N. Crawford, and G. Kozma. Localization for linearly edge reinforced random walks. *Duke Math. J.*, 163(5) :889–921, 2014.
- [AD95] D. Aldous and P. Diaconis. Hammersley’s interacting particle process and longest increasing subsequences. *Probab. Theory Related Fields*, 103(2) :199–213, 1995.
- [ADH17] A. Auffinger, M. Damron, and J. Hanson. *50 years of first-passage percolation*, volume 68 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2017.
- [BDJ99] J. Baik, P. Deift, and K. Johansson. On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations. *J. Amer. Math. Soc.*, 12(4) :1119–1178, 1999.
- [BDM<sup>+</sup>01] J. Baik, P. Deift, K. T.-R. McLaughlin, P. Miller, and X. Zhou. Optimal tail estimates for directed last passage site percolation with geometric random variables. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 5(6) :1207–1250, 2001.
- [Bef11] V. Beffara. Mécanique statistique et criticalité en dimension deux. *mémoire d’habilitation*, 2011.
- [BH57] S. R. Broadbent and J. M. Hammersley. Percolation processes : I. crystals and mazes. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 53(3) :629–641, 1957.
- [BHMZ11] J. Byers, B. Heeringa, M. Mitzenmacher, and G. Zervas. Heapable sequences and subsequences. In *ANALCO11—Workshop on Analytic Algorithmics and Combinatorics*, pages 33–44. SIAM, Philadelphia, PA, 2011.
- [BKS03] I. Benjamini, G. Kalai, and O. Schramm. First passage percolation has sublinear distance variance. *Ann. Probab.*, 31(4) :1970–1978, 2003.
- [BR07] J. Bérard and A. Ramírez. Central limit theorem for the excited random walk in dimension  $D \geq 2$ . *Electron. Comm. Probab.*, 12 :303–314 (electronic), 2007.
- [BR08] M. Benaïm and R. Rossignol. Exponential concentration for first passage percolation through modified Poincaré inequalities. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 44(3) :544–573, 2008.

- [BRS13] M. Benaïm, O. Raimond, and B. Schapira. Strongly vertex-reinforced-random-walk on a complete graph. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 10(2) :767–782, 2013.
- [BW03] I. Benjamini and D. B. Wilson. Excited random walk. *Electron. Comm. Probab.*, 8 :86–92, 2003.
- [CD81] J. Th. Cox and R. Durrett. Some limit theorems for percolation processes with necessary and sufficient conditions. *Ann. Probab.*, 9(4) :583–603, 1981.
- [CD86] D. Coppersmith and P. Diaconis. Random walk with reinforcement. *manuscript non publié*, 1986.
- [CG05] E. Cator and P. Groeneboom. Hammersley’s process with sources and sinks. *Ann. Probab.*, 33(3) :879–903, 2005.
- [CHK18] A. Collecchio, C.B. Huynh, and D. Kious. The branching-ruin number as critical parameter of random processes on trees. *preprint, available via <https://arxiv.org/abs/1811.08058>*, 2018.
- [CKS17] A. Collecchio, D. Kious, and V. Sidoravicius. The branching-ruin number and the critical parameter of once-reinforced random walk on trees. *Preprint, available via <https://arxiv.org/abs/1710.00567>*, 2017.
- [Col06] A. Collecchio. Limit theorems for reinforced random walks on certain trees. *Probab. Theory Related Fields*, 136(1) :81–101, 2006.
- [Col09] A. Collecchio. Limit theorems for vertex-reinforced jump processes on regular trees. *Electron. J. Probab.*, 14 :no. 66, 1936–1962, 2009.
- [CP15] E. Cator and L. P. R. Pimentel. On the local fluctuations of last-passage percolation models. *Stochastic Process. Appl.*, 125(2) :538–551, 2015.
- [CT16] R. Cerf and M. Théret. Weak shape theorem in first passage percolation with infinite passage times. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 52(3) :1351–1381, 2016.
- [CT17] C. Cotar and D. Thacker. Edge- and vertex-reinforced random walks with super-linear reinforcement on infinite graphs. *Ann. Probab.*, 45(4) :2655–2706, 2017.
- [Dav90] B. Davis. Reinforced random walk. *Prob. Theory Related Fields*, 84 :203–229, 1990.
- [Dia88] P. Diaconis. Recent progress on de Finetti’s notions of exchangeability. In *Bayesian statistics, 3 (Valencia, 1987)*, Oxford Sci. Publ., pages 111–125. Oxford Univ. Press, New York, 1988.
- [DK12] D. Dolgopyat and E. Kosygina. Scaling limits of recurrent excited random walks on integers. *Electron. Commun. Probab.*, 17 :no. 35, 14, 2012.
- [DK15] D. Dolgopyat and E. Kosygina. Excursions and occupation times of critical excited random walks. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 12(1) :427–450, 2015.
- [DL81] R. Durrett and Th. M. Liggett. The shape of the limit set in Richardson’s growth model. *Ann. Probab.*, 9(2) :186–193, 1981.

- [Dol11] D. Dolgopyat. Central limit theorem for excited random walk in the recurrent regime. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 8 :259–268, 2011.
- [DP17] B. Davis and J. Peterson. Excited random walks with non-nearest neighbor steps. *J. Theoret. Probab.*, 30(4) :1255–1284, 2017.
- [DST15] M. Disertori, C. Sabot, and P. Tarrès. Transience of edge-reinforced random walk. *Comm. Math. Phys.*, 339(1) :121–148, 2015.
- [Dur84] R. Durrett. Oriented percolation in two dimensions. *Ann. Probab.*, 12(4) :999–1040, 1984.
- [DV02] B. Davis and S. Volkov. Continuous time vertex-reinforced jump processes. *Probab. Theory Related Fields*, 123(2) :281–300, 2002.
- [DV04] B. Davis and S. Volkov. Vertex-reinforced jump processes on trees and finite graphs. *Probab. Theory Related Fields*, 128(1) :42–62, 2004.
- [ETW12a] A. Erschler, B. Tóth, and W. Werner. Some locally self-interacting walks on the integers. In *Probability in complex physical systems*, volume 11 of *Springer Proc. Math.*, pages 313–338. Springer, Heidelberg, 2012.
- [ETW12b] A. Erschler, B. Tóth, and W. Werner. Stuck walks. *Probab. Theory Related Fields*, 154(1-2) :149–163, 2012.
- [Geo10] N. Georgiou. Soft edge results for longest increasing paths on the planar lattice. *Electron. Commun. Probab.*, 15 :1–13, 2010.
- [GM04] O. Garet and R. Marchand. Asymptotic shape for the chemical distance and first-passage percolation on the infinite Bernoulli cluster. *ESAIM Probab. Stat.*, 8 :169–199, 2004.
- [GO18] N. Georgiou and J. Ortmann. Optimality regions and fluctuations for Bernoulli last passage models. *Math. Phys. Anal. Geom.*, 21(3) :Art. 22, 29, 2018.
- [Ham72] J. M. Hammersley. A few seedlings of research. In *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971)*, Vol. I : *Theory of statistics*, pages 345–394. Univ. California Press, Berkeley, Calif., 1972.
- [Huy18] C.B. Huynh. Phase transition for the once-excited random walk on general trees. *preprint, available via <https://arxiv.org/abs/1812.02331>*, 2018.
- [HW65] J. M. Hammersley and D. J. A. Welsh. First-passage percolation, subadditive processes, stochastic networks, and generalized renewal theory. In *Proc. Internat. Res. Semin., Statist. Lab., Univ. California, Berkeley, Calif.*, pages 61–110. Springer-Verlag, New York, 1965.
- [IB15] G. Istrate and C. Bonchiş. Partition into heapable sequences, heap tableaux and a multiset extension of Hammersley’s process. In *Combinatorial pattern matching*, volume 9133 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 261–271. Springer, Cham, 2015.

- [JPS98] W. Jockusch, J. Propp, and P. Shor. Random domino tilings and the arctic circle theorem. *Unpublished, available via <https://arxiv.org/abs/math/9801068>*, 1998.
- [Kes80] H. Kesten. The critical probability of bond percolation on the square lattice equals  $\frac{1}{2}$ . *Comm. Math. Phys.*, 74(1) :41–59, 1980.
- [Kes86] H. Kesten. Aspects of first passage percolation. In *École d’été de probabilités de Saint-Flour, XIV—1984*, volume 1180 of *Lecture Notes in Math.*, pages 125–264. Springer, Berlin, 1986.
- [Kin68] J. F. C. Kingman. The ergodic theory of subadditive stochastic processes. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 30 :499–510, 1968.
- [KKS75] H. Kesten, M. Kozlov, and F. Spitzer. A limit law for random walk in a random environment. *Compositio Math.*, 30 :145–168, 1975.
- [KM11] E. Kosygina and T. Mountford. Limit laws of transient excited random walks on integers. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 47(2) :575–600, 2011.
- [KOS14] G. Kozma, T. Orenshtein, and I. Shinkar. Excited random walk with periodic cookies. *to appear in Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 2014.
- [Koz03] G. Kozma. Excited random walk in three dimensions has positive speed. *unpublished, available via <http://arxiv.org/abs/math/0512535>*, 2003.
- [Koz05] G. Kozma. Excited random walk in two dimensions has linear speed. *unpublished, available via <http://arxiv.org/abs/math/0512535>*, 2005.
- [KP16] E. Kosygina and J. Peterson. Functional limit laws for recurrent excited random walks with periodic cookie stacks. *Electron. J. Probab.*, 21 :1–24, 2016.
- [KP17] E. Kosygina and J. Peterson. Excited random walks with Markovian cookie stacks. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 53(3) :1458–1497, 2017.
- [KR00] M. Keane and S. Rolles. Edge-reinforced random walk on finite graphs. In *Infinite dimensional stochastic analysis (Amsterdam, 1999)*, volume 52 of *Verh. Afd. Natuurkd. 1. Reeks. K. Ned. Akad. Wet.*, pages 217–234. R. Neth. Acad. Arts Sci., Amsterdam, 2000.
- [KS18] D. Kious and V. Sidoravicius. Phase transition for the once-reinforced random walk on  $\mathbb{Z}^d$ -like trees. *Ann. Probab.*, 46(2) :2121–2133, 2018.
- [KSS18] D. Kious, B. Schapira, and A. Singh. Once reinforced random walk on  $\mathbb{Z} \times \Gamma$ . *Preprint, available via <https://arxiv.org/abs/1807.07167>*, 2018.
- [KZ08] E. Kosygina and M. Zerner. Positively and negatively excited random walks on integers, with branching processes. *Electron. J. Probab.*, 13 :no. 64, 1952–1979, 2008.
- [KZ13] E. Kosygina and M. Zerner. Excited random walks : results, methods, open problems. *Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.)*, 8(1) :105–157, 2013.
- [KZ14] E. Kosygina and M. Zerner. Excursions of excited random walks on integers. *Electron. J. Probab.*, 19 :no. 25, 25, 2014.

- [Lim03] V. Limic. Attracting edge property for a class of reinforced random walks. *Ann. Probab.*, 31(3) :1615–1654, 2003.
- [LP92] R. Lyons and R. Pemantle. Random walk in a random environment and first-passage percolation on trees. *Ann. Probab.*, 20(1) :125–136, 1992.
- [LS77] B. F. Logan and L. A. Shepp. A variational problem for random Young tableaux. *Advances in Math.*, 26(2) :206–222, 1977.
- [LT07] V. Limic and P. Tarrès. Attracting edge and strongly edge reinforced walks. *Ann. Probab.*, 35(5) :1783–1806, 2007.
- [Mar02] R. Marchand. Strict inequalities for the time constant in first passage percolation. *Ann. Appl. Probab.*, 12(3) :1001–1038, 2002.
- [MKL<sup>+</sup>19] E. Madden, B. Kidd, O. Levin, J. Peterson, J. Smith, and K. M. Stangl. Upper and lower bounds on the speed of a one-dimensional excited random walk. *Involve*, 12(1) :97–115, 2019.
- [MN05] S. N. Majumdar and S. Nechaev. Exact asymptotic results for the Bernoulli matching model of sequence alignment. *Phys. Rev. E* (3), 72(2) :020901, 4, 2005.
- [MPV06] T. Mountford, L. P. R. Pimentel, and G. Valle. On the speed of the one-dimensional excited random walk in the transient regime. *Alea*, 2 :279–296 (electronic), 2006.
- [NP95] C. M. Newman and M. S. T. Piza. Divergence of shape fluctuations in two dimensions. *Ann. Probab.*, 23(3) :977–1005, 1995.
- [Pem88] R. Pemantle. Phase transition in reinforced random walk and RWRE on trees. *Ann. Probab.*, 16(3) :1229–1241, 1988.
- [Pet12] J. Peterson. Large deviations and slowdown asymptotics for one-dimensional excited random walks. *Electron. J. Probab.*, 17 :no. 48, 24, 2012.
- [Pet13] J. Peterson. Strict monotonicity properties in one-dimensional excited random walks. *Markov Process. Related Fields*, 19(4) :721–734, 2013.
- [Pet15] J. Peterson. Extreme slowdowns for one-dimensional excited random walks. *Stochastic Process. Appl.*, 125(2) :458–481, 2015.
- [Pha15] C. Pham. Monotonicity and regularity of the speed for excited random walks in higher dimensions. *Electron. J. Probab.*, 20 :no. 72, 25, 2015.
- [PMS08] V. Priezzhev and G M. Schutz. Exact solution of the bernoulli matching model of sequence alignment <<http://iopscience.iop.org/1742-5468/2008/09/p09007/>>. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2008, 07 2008.
- [PV99] R. Pemantle and S. Volkov. Vertex-reinforced random walk on  $\mathbf{Z}$  has finite range. *Ann. Probab.*, 27(3) :1368–1388, 1999.
- [RD98] R. Rajesh and D. Dhar. An exactly solvable anisotropic directed percolation model in three dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 81 :1646–1649, Aug 1998.

- [RS12] O. Raimond and B. Schapira. Excited brownian motions as limits of excited random walks. *Probability Theory and Related Fields*, 154(3) :875–909, Dec 2012.
- [RSSV10] L. T. Rolla, V. Sidoravicius, D. Surgailis, and M. E. Vares. The discrete and continuum broken line process. *Markov Process. Related Fields*, 16(1) :79–116, 2010.
- [Sch19] B. Schapira. Localization on 5 sites for vertex reinforced random walks : Towards a characterization. *Preprint, available via <https://arxiv.org/abs/1905.05974>*, 2019.
- [Sel94] T. Sellke. Reinforced random walk on the d-dimensional integer lattice. *Technical report 94-26, Purdue University*, 1994.
- [Sel06] T. Sellke. Recurrence of reinforced random walk on a ladder. *Electron. J. Probab.*, 11 :no. 11, 301–310 (electronic), 2006.
- [Sep97] T. Seppäläinen. Increasing sequences of independent points on the planar lattice. *Ann. Appl. Probab.*, 7(4) :886–898, 1997.
- [Sep98] T. Seppäläinen. Exact limiting shape for a simplified model of first-passage percolation on the plane. *Ann. Probab.*, 26(3) :1232–1250, 1998.
- [Sep08] T. Seppäläinen. Lecture notes on the corner growth model. *Available via <http://www.math.wisc.edu/~seppalai/>*, 2008.
- [ST15] C. Sabot and P. Tarrès. Edge-reinforced random walk, vertex-reinforced jump process and the supersymmetric hyperbolic sigma model. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 17(9) :2353–2378, 2015.
- [SZ19] C. Sabot and X. Zeng. A random schrödinger operator associated with the vertex reinforced jump process on infinite graphs. *J. Amer. Math. Soc.*, 32 :311–349, 2019.
- [Tar04] P. Tarrès. Vertex-reinforced random walk on  $\mathbb{Z}$  eventually gets stuck on five points. *Ann. Probab.*, 32(3B) :2650–2701, 2004.
- [Tar11] P. Tarrès. Localization of reinforced random walks. *Preprint arXiv:1103.5536*, 2011.
- [Ula61] S. M. Ulam. Monte Carlo calculations in problems of mathematical physics. In *Modern mathematics for the engineer : Second series*, pages 261–281. McGraw-Hill, New York, 1961.
- [vdHH10] R. van der Hofstad and M. Holmes. Monotonicity for excited random walk in high dimensions. *Probab. Theory Related Fields*, 147(1-2) :333–348, 2010.
- [Ver02] M. Vervoort. Reinforced random walks. *manuscript non publié*, 2002.
- [VJ67] D. Vere-Jones. Ergodic properties of nonnegative matrices. I. *Pacific J. Math.*, 22 :361–386, 1967.
- [VK77] A. M. Veršik and S. V. Kerov. Asymptotic behavior of the Plancherel measure of the symmetric group and the limit form of Young tableaux. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 233(6) :1024–1027, 1977.

- [Vol01] S. Volkov. Vertex-reinforced random walk on arbitrary graphs. *Ann. Probab.*, 29(1) :66–91, 2001.
- [Vol03] S. Volkov. Excited random walk on trees. *Electron. J. Probab.*, 8 :no. 23, 15 pp., 2003.
- [Vol06] S. Volkov. Phase transition in vertex-reinforced random walks on  $\mathbb{Z}$  with non-linear reinforcement. *J. Theoret. Probab.*, 19 :691–700, 2006.
- [Zer05] M. Zerner. Multi-excited random walks on integers. *Probab. Theory Related Fields*, 133(1) :98–122, 2005.