



HAL
open science

Approche informationnelle pour la navigation autonome tolérante aux défauts : Application aux systèmes robotiques mobiles

Boussad Abci

► **To cite this version:**

Boussad Abci. Approche informationnelle pour la navigation autonome tolérante aux défauts : Application aux systèmes robotiques mobiles. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université de Lille (2018-..), 2019. Français. NNT: . tel-04398591

HAL Id: tel-04398591

<https://hal.science/tel-04398591>

Submitted on 16 Jan 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LILLE
ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR
Unité de Recherche CRISTAL UMR 9189

Thèse présentée par

Boussad ABCI

En vue de l'obtention du grade de docteur de l'Université de Lille

Discipline : **Automatique et informatique industrielle**

**Approche informationnelle pour la navigation
autonome tolérante aux défauts
Application aux systèmes robotiques mobiles**

Soutenance le 06/12/2019 devant le jury composé de :

Rapporteurs

| | |
|----------------|--|
| Roland Chapuis | Professeur à l'Université Blaise Pascal |
| Jérôme Cieslak | Maître de Conférences HDR à l'Université de Bordeaux |

Examineurs

| | |
|------------------|--|
| Dominique Sauter | Professeur à l'Université de Lorraine |
| Juliette Marais | Chargé de Recherche à Ifsttar |
| Cindy Cappelle | MCF à l'Université de Technologie de Belfort-Montbéliard |
| Julien Marzat | Chargé de Recherche à ONERA |

Directeurs de thèse

| | |
|---------------------------|------------------------------------|
| Maan El Badaoui El Najjar | Professeur à l'Université de Lille |
| Vincent Cocquempot | Professeur à l'Université de Lille |

Résumé

La navigation autonome des systèmes robotiques mobiles a suscité un grand intérêt dans la communauté scientifique ces dernières années. Cela est principalement dû à la diversité de ses secteurs d'applications et les différents challenges qu'elle représente. En raison de l'absence d'une intervention humaine, la navigation autonome doit être sûre, fiable et précise. Néanmoins, elle peut être sujet à différentes dégradations qui peuvent compromettre son objectif. En effet, les perturbations externes, tout comme les défauts capteurs et actionneurs, affectent les différents aspects de la navigation autonome que sont la localisation, la planification et le suivi de trajectoire. C'est pourquoi nous consacrons cette thèse à l'étude et à la conception de nouveaux algorithmes qui contribuent à rendre le système de navigation robuste et tolérant aux défauts. Nous avons fait le choix d'utiliser des algorithmes de diagnostic de défauts capteurs et actionneurs à base de résidus, et une commande robuste par modes glissants permettant d'assurer une tolérance passive contre une classe plus large de perturbations externes, qui ne sont pas forcément bornées d'une manière uniforme.

La couche de diagnostic proposée est purement informationnelle. Elle se base sur l'utilisation de deux filtres informationnels avec différents modèles d'évolution, et les divergences de Bhattacharyya et de Kullback-Leibler pour la conception des résidus. Ces résidus sont évalués via des méthodes statistiques pour permettre la détection, la localisation et l'exclusion de défauts capteurs et actionneurs.

L'approche proposée est appliquée sur des systèmes robotiques mobiles à roues avec entraînement différentiel. Les résultats expérimentaux obtenus sur la plate-forme robotique PRETIL de CRISTAL sont présentés et discutés.

Mots clés : Navigation autonome, localisation, fusion de données, filtre informationnel, suivi de trajectoire, commande par modes glissants, tolérance aux fautes, diagnostic de défauts, divergence de Bhattacharyya, divergence de Kullback-Leibler, théorie de l'information, système multi-robots, robots mobiles à entraînement différentiel

Abstract

Over the last years, autonomous navigation for mobile robot systems has known an increasing interest from the scientific community. This is mainly due to the diversity of its applications and the different challenges that it represents. Without any human intervention, autonomous navigation must be safe, reliable and accurate. Nevertheless, it may be subject to various degradations that could compromise its objective. Indeed, external disturbances, as well as sensor and actuator faults, may affect the different aspects of autonomous navigation, which are localization, path planning and trajectory tracking. This is why we are devoting this thesis to the design of new algorithms that contribute to make the navigation system robust against external disturbances and tolerant to sensor and actuator faults. We have adopted a residual generation based fault-diagnosis strategy combined with a robust sliding mode controller that is robust against a certain class of perturbations that are not necessary uniformly bounded.

The proposed diagnostic layer is purely informational. It is based on the use of two information filters with different evolution models, and the divergences of Bhattacharyya and Kullback-Leibler for residual design. These residuals are evaluated using statistical methods, in order to detect, isolate then exclude sensor and actuator faults from the navigation system.

The proposed approach is applied to different differential drive mobile-robot systems. Experimental results obtained by using the CRISAL robotic platform, so-called PRETIL, are presented and discussed.

Keywords : Autonomous navigation, localization, data fusion, information filter, trajectory tracking, sliding mode control, fault tolerance, fault-diagnosis, Bhattacharyya divergence, Kullback-Leibler divergence, information theory, multi-robot systems, differential drive mobile robots

Remerciements

Comme disait *Hans Christian Andersen* : "*La reconnaissance est la mémoire du coeur*". Je tiens donc à remercier toutes les personnes qui m'ont aidé, de près ou de loin, à atteindre mon objectif de devenir docteur en automatique.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude à mes directeurs de thèse, Maan El Badaoui El Najjar, Professeur à l'Université de Lille, et directeur de l'équipe DiCOT (Diagnostic, Commande et Observations pour des systèmes Tolérants aux fautes), et Vincent Cocquempot, Professeur à l'Université de Lille, pour leur soutien, leur confiance, leurs précieux conseils et pour toutes les discussions instructives et fructueuses que nous avons eues durant ces trois années de thèse. Au delà du plan professionnel, Je remercie très sincèrement Maan El Badaoui El Najjar d'avoir cru en moi, de m'avoir motivé et encouragé et cela depuis mon premier jour au laboratoire.

Mes remerciements vont également à Monsieur Roland Chapuis et Monsieur Jérôme Cieslak qui m'ont fait l'honneur de rapporter mon travail. Je remercie également, Madame Juliette Marais, Madame Cindy Cappelle, Monsieur Julien Marzat et Monsieur Dominique Sauter d'avoir accepté d'être examinateurs de cette thèse.

Je remercie le personnel de l'IUT A de Lille pour leur accueil et leur aide dans mon insertion professionnelle en tant que doctorant enseignant, et j'exprime aussi ma gratitude au personnel de la faculté des sciences et technologies de l'université de Lille pour la confiance qu'ils m'ont accordée en m'accueillant en tant qu'Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche.

Je remercie également mes enseignants de l'université de Lille, pour leur accueil chaleureux et pour tout le savoir qu'ils m'ont transmis, comme étant étudiant et doctorant.

Je remercie également mes amis et mes collègues avec qui j'ai passé trois années inoubliables, en particulier, Bilal, Solène Houria, Nourdine, Joelle, Ayad, Joudy, Gerlad, Imene, Sumit et Riad.

Un immense merci à mes parents, ainsi que toute ma petite famille, en particulier : Liza, Salah, Rafik, Imane, Anis et Fella, pour leur soutien et leur amour inconditionnel. Je vous en suis profondément et éternellement reconnaissant.

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introduction générale | 3 |
| 1.1 | Contexte du travail et motivation | 5 |
| 1.2 | Généralités et état de l'art | 6 |
| 1.2.1 | Robots mobiles à roues | 6 |
| 1.2.2 | Navigation autonome | 7 |
| 1.2.3 | Diagnostic et tolérance aux fautes | 10 |
| 1.2.4 | Méthodes de diagnostic à base de modèle | 11 |
| 1.2.5 | Approche informationnelle pour le diagnostic | 12 |
| 1.2.6 | Commande tolérante aux fautes | 15 |
| 1.2.7 | Fusion de données tolérante aux fautes | 16 |
| 1.3 | Positionnement et objectifs de la thèse | 18 |
| 1.4 | Contributions de la thèse | 19 |
| 1.5 | Organisation du reste du manuscrit | 23 |
| 1.6 | Liste des publications | 23 |
| 2 | Navigation autonome des systèmes robotiques mobiles | 25 |
| 2.1 | Introduction | 27 |
| 2.2 | Modélisation des robots mobiles différentiels | 28 |
| 2.2.1 | Modélisation cinématique | 29 |
| 2.2.2 | Modélisation dynamique | 32 |
| 2.2.3 | Modélisation odométrique | 35 |
| 2.2.4 | Modélisation des roues et des défauts | 37 |
| 2.3 | Localisation et fusion de données | 39 |
| 2.3.1 | Filtre de Kalman | 39 |
| 2.3.2 | Filtre informationnel | 40 |
| 2.3.3 | Filtre informationnel étendu | 41 |
| 2.4 | Commande pour le suivi de trajectoire | 42 |
| 2.4.1 | Commande cinématique | 44 |
| 2.4.2 | Commande dynamique par modes glissants | 45 |
| 2.4.3 | Commande par modes glissants améliorée | 49 |
| 2.5 | Conclusion | 51 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3 | Outils et diagnostic informationnels | 53 |
| 3.1 | Introduction | 55 |
| 3.2 | Divergences informationnelles | 56 |
| 3.2.1 | Divergence de Rényi | 56 |
| 3.2.2 | Divergence de Kullback-Leibler | 57 |
| 3.2.3 | Divergence de Bhattacharyya et de Chernoff | 61 |
| 3.3 | Conception du résidu et localisation des défauts | 64 |
| 3.3.1 | Distributions des divergences de Bhattacharyya et de Kullback-Leibler dans le cas gaussien | 64 |
| 3.3.2 | Conception du résidu | 70 |
| 3.3.3 | Localisation des défauts | 71 |
| 3.4 | Évaluation du résidu et seuillage | 74 |
| 3.4.1 | Critère de Neyman-Pearson | 75 |
| 3.4.2 | Critère de Bayes | 76 |
| 3.4.3 | Critère entropique | 77 |
| 3.4.4 | Critère de Kullback-Leibler | 79 |
| 3.4.5 | Critère de Bhattacharyya | 80 |
| 3.5 | Conclusion | 83 |
| 4 | Approche proposée et résultats | 85 |
| 4.1 | Introduction | 87 |
| 4.2 | Approche proposée pour le diagnostic informationnel des défauts capteurs et actionneurs | 87 |
| 4.3 | Matériels utilisés | 93 |
| 4.3.1 | Système d'exploitation pour la robotique ROS | 93 |
| 4.3.2 | Robots mobiles | 94 |
| 4.3.3 | Capteurs extéroceptifs | 95 |
| 4.3.4 | Organisation des applications | 98 |
| 4.4 | Application à un RMD2R en utilisant la divergence de Kullback-Leibler | 98 |
| 4.4.1 | Développement des deux filtres informationnels | 99 |
| 4.4.2 | Approche proposée pour un RMD2R | 102 |
| 4.4.3 | Résultats de simulation | 106 |
| 4.4.4 | Résultats de l'application en temps réel | 111 |
| 4.5 | Application à un système multi-robots en se basant sur la divergence de Bhattacharyya | 114 |
| 4.5.1 | Développement des deux filtres informationnels pour le système multi-robot | 117 |
| 4.5.2 | Approche proposée pour un système multi-robot | 122 |
| 4.5.3 | Résultats de simulation pour un système multi-robot | 126 |
| 4.5.4 | Résultats de l'application en temps réel pour un système multi-robot | 136 |
| 4.6 | Application sur des robots RMD4R | 138 |
| 4.6.1 | Simulation de la commande par mode glissant classique | 141 |
| 4.6.2 | Simulation de la commande par mode glissants proposée | 144 |
| 4.6.3 | Simulation de l'approche de diagnostic pour un RMD4R | 145 |

| | |
|--|------------|
| 4.7 Conclusion | 150 |
| 5 Conclusion et Perspectives | 151 |
| 5.1 Conclusion | 151 |
| 5.2 Perspectives | 152 |
| Annexes | 155 |
| A Filtrage bayésien | 157 |
| A.1 Passage du filtre de Kalman au filtre informationnel | 157 |
| A.2 Dérivation de la matrice de covariance du modèle d'observation pour le système multi-robots | 158 |
| A.3 Filtre de Kalman à deux étages | 159 |
| B Divergences informationnelles | 161 |
| B.1 Passage de la divergence de Rényi à la divergence de Kullback- Leibler | 161 |
| B.2 Divergence de Kullback-Leibler dans le cas gaussien | 162 |

Table des figures

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | Robots mobiles autonomes | 5 |
| 1.2 | Description d'un robot mobile différentiel à deux roues | 7 |
| 1.3 | Classification des méthodes de diagnostic roues | 10 |
| 1.4 | Générateur de résidus à base d'observateur (UIO) | 12 |
| 1.5 | Générateur de résidus à base du filtre de Kalman | 12 |
| 1.6 | Schéma général d'une commande tolérante aux fautes active | 16 |
| 1.7 | Schéma global d'une approche FDE | 17 |
| 1.8 | Navigation autonome tolérante aux fautes en informationnel | 19 |
| | | |
| 2.1 | Navigation autonome pour les systèmes robotiques mobiles | 27 |
| 2.2 | Descriptif des robots différentiels et de l'environnement | 29 |
| 2.3 | Cinématique et diagramme d'un RMD2R | 30 |
| 2.4 | Cinématique et diagramme d'un RMD4R | 32 |
| 2.5 | Diagramme des dynamiques d'un RMD4R | 33 |
| 2.6 | Diagramme de l'odométrie d'un robot mobile | 36 |
| 2.7 | Défauts affectant la navigation autonome | 37 |
| 2.8 | Commande pour le suivi de trajectoire | 43 |
| | | |
| 3.1 | Schéma d'observateur généralisé | 73 |
| 3.2 | Schéma d'observateur dédié | 73 |
| 3.3 | Modélisation des probabilités de fausse alarme et des détections manquées | 75 |
| | | |
| 4.1 | Schéma global de l'approche proposée | 88 |
| 4.2 | Approche informationnelle pour le diagnostic des capteurs et des actionneurs | 91 |
| 4.3 | Modèles de prédiction odométrique et identifié | 92 |
| 4.4 | Turtlebot3 et son repère | 94 |
| 4.5 | Carte embarquée OpenCR | 94 |
| 4.6 | Robotnik Summit XL | 95 |
| 4.7 | Carte embarquée du Robotnik Summit XL | 96 |
| 4.8 | Système MarvelMind : Balises et modem | 96 |
| 4.9 | Système OptiTrack | 97 |
| 4.10 | Capteur Rplidar | 98 |

| | | |
|------|---|-----|
| 4.11 | Schéma de l'approche proposée pour un RMD2R | 103 |
| 4.12 | Suivi de trajectoire en utilisant la commande développée | 107 |
| 4.13 | Signaux de commande pour le suivi de trajectoire | 107 |
| 4.14 | Résidus obtenus dans le cas sans défaut | 107 |
| 4.15 | Trajectoire avant et après la FDE avec défaut sur le Marvelmind | 108 |
| 4.16 | Résidus basés sur la DKL avec un défaut sur le Marvelmind | 109 |
| 4.17 | Résidus obtenus avec le scénario choisi | 110 |
| 4.18 | Trajectoire avec et sans FDE avec un défaut sur le Marvelmind | 110 |
| 4.19 | Turtlebot3 sous le scénario réel choisi | 111 |
| 4.20 | Signaux de commande pour le suivi de trajectoire | 111 |
| 4.21 | Suivi de trajectoire du Turtlebot3 sans défauts | 112 |
| 4.22 | GKLD et KLC avec le scénario sans défauts | 112 |
| 4.23 | Résidus dans le cas sans défauts | 113 |
| 4.24 | Trajectoire du Turtlebot3 avec défauts et sans diagnostic | 113 |
| 4.25 | Navigation du Turtlebot3 réel avec défauts en utilisant l'ap- proche proposée | 115 |
| 4.26 | GKLD pour le scénario de défauts choisi pour le Turtlebot3 | 115 |
| 4.27 | KLC pour le scénario de défauts choisi pour le Turtlebot3 | 115 |
| 4.28 | Résidus du scénario de défauts choisi pour un RMD2R réel | 116 |
| 4.29 | Observations relatives entre robot i et robot j | 119 |
| 4.30 | Schéma de l'approche proposée pour un système multi-robot | 123 |
| 4.31 | Architecture de génération de résidus pour la détection et la localisation des défauts | 127 |
| 4.32 | Signaux de commande pour le système multi-robot | 128 |
| 4.33 | Suivi de trajectoire en utilisant la commande développée | 128 |
| 4.34 | Résidu global GBD_O pour le système multi-robots en simulation | 129 |
| 4.35 | Résidu global GBD_O pour le système multi-robots en simulation | 129 |
| 4.36 | Résidus BD_i pour le système multi-robots en simulation | 130 |
| 4.37 | Distribution du Résidu GBD_O dans le cas avec ou sans défaut avec des données simulées | 130 |
| 4.38 | Estimation MLE de la probabilité P_0 | 131 |
| 4.39 | Résidu optimal en se basant sur le critère de Bhattacharyya pour le système multi-robots en simulation | 131 |
| 4.40 | Fonction BS pour le calcul du seuil optimal | 132 |
| 4.41 | Ensemble de résidus BD_I^{ji} et BD_O^{ji} pour la simulation d'un sys- tème multi-robots | 133 |
| 4.42 | Résidus BD_I^{ji} et BD_O^{ji} pour la simulation d'un système multi- robots | 134 |
| 4.43 | Calcul du seuil pour le résidu BD_1 | 135 |
| 4.44 | Navigation du système multi-robots avec et sans la couche de diagnostic | 135 |
| 4.45 | Système multi-robots (trois Turtlebot3) | 136 |
| 4.46 | Signaux de commande pour le système multi-robots réel | 137 |
| 4.47 | Suivi de trajectoire du système multi-robots réel | 137 |
| 4.48 | Résidus globaux pour le système multi-robots réel | 138 |
| 4.49 | Résidus BD_i pour le système multi-robots réel | 139 |

| | | |
|------|---|-----|
| 4.50 | Résidus $BD_I^{j_i}$ et $BD_O^{j_i}$ pour le scénario de défauts du système multi-robots réel | 140 |
| 4.51 | Navigation du système multi-robots avant et après l'exclusion des défauts | 141 |
| 4.52 | Distributions des différents résidus | 142 |
| 4.53 | Commande par modes glissants classique | 143 |
| 4.54 | Commande par modes glissants classique avec une perturbation bornée en forme de biais | 143 |
| 4.55 | Application d'une perturbation non-bornée d'une manière uniforme aux deux SMC | 144 |
| 4.56 | Approche informationnelle pour le diagnostic de défauts capteurs et actionneurs pour un RMD4R | 146 |
| 4.57 | Localisation et exclusion des défauts actionneurs | 149 |

Liste des tableaux

| | | |
|-----|---|-----|
| 1.1 | Navigation autonome tolérante aux fautes proposée | 22 |
| 3.1 | Quelques distributions non gaussiennes continues | 60 |
| 3.2 | Divergence de Kullback-Leibler pour des distributions non-gaussiennes | 60 |
| 3.3 | Relation entre la divergence de Bhattacharyya et le reste des divergences | 62 |
| 3.4 | Divergence de Bhattacharyya pour des distributions non-gaussiennes | 64 |
| 3.5 | Exemple de matrices de signature de fautes | 72 |
| 4.1 | Matrice d'incidence dans le cas de deux capteurs supplémentaires | 105 |
| 4.2 | Matrice d'incidence (différentes combinaisons) | 105 |
| 4.3 | Matrice d'incidence pour un système à trois robots | 125 |
| 4.4 | Matrice d'incidence pour un système à trois robots (suite) . . . | 125 |

Liste des abréviations

| | |
|-----------------------|---------------------------------------|
| FDI | Fault Detection and Isolation |
| SMC | Sliding Mode Control |
| GNSS | Global Navigation Satellite System |
| GPS | Global Positioning System |
| FDE | Fault Detection and Exclusion |
| FTC | Fault Tolerant Control |
| AFTC | Active Fault Tolerant Control |
| PFTC | Passive Fault Tolerant Control |
| UIO | Unknown Input Observers |
| EIF | Extended Information Filter |
| IF | Information Filter |
| KF | Kalman Filter |
| EKF | Extended Kalman Filter |
| EIF | Extended Information Filter |
| BD | Bhattacharyya Divergence |
| B_C | Bhattacharyya Criterion |
| BC | Bhattacharyya Coefficients |
| KLD | Kullback-Leibler Divergence |
| MI | Mutual Information |
| GKLD | Global de Kullback-Leibler Divergence |
| GBD | Global Bhattacharyya Divergence |

Chapitre 1

Introduction générale

«Pour pouvoir contempler un arc-en-ciel, il faut d'abord endurer la pluie.»

Proverbe chinois

Résumé du chapitre :

L'objectif de ce chapitre est de souligner les contributions principales de la thèse. Pour cela, le contexte général est proposé afin de poser la problématique traitée par cette thèse. De ce fait, un bref état de l'art qui traite cette problématique est donné, dans le but de positionner et justifier les travaux développés et les contributions apportées.

Plan du chapitre

| | | |
|------------|--|-----------|
| 1.1 | Contexte du travail et motivation | 5 |
| 1.2 | Généralités et état de l'art | 6 |
| 1.2.1 | Robots mobiles à roues | 6 |
| 1.2.2 | Navigation autonome | 7 |
| 1.2.3 | Diagnostic et tolérance aux fautes | 10 |
| 1.2.4 | Méthodes de diagnostic à base de modèle | 11 |
| 1.2.5 | Approche informationnelle pour le diagnostic | 12 |
| 1.2.6 | Commande tolérante aux fautes | 15 |
| 1.2.7 | Fusion de données tolérante aux fautes | 16 |
| 1.3 | Positionnement et objectifs de la thèse | 18 |
| 1.4 | Contributions de la thèse | 19 |
| 1.5 | Organisation du reste du manuscrit | 23 |
| 1.6 | Liste des publications | 23 |

1.1 Contexte du travail et motivation

L'étude des systèmes robotiques mobiles autonomes et intelligents a connu un grand essor lors des dernières décennies (CUESTA et al., 2010). Cet intérêt est principalement dû à la diversité de ses secteurs d'applications, plus particulièrement les fauteuils roulants intelligents pour les personnes à mobilité réduite, et l'exploration des zones à risque où l'intervention humaine est impossible (Figure 1.1).



(a) Robot mobile militaire



(b) Fauteuil roulant

FIGURE 1.1 – . Robots mobiles autonomes¹.

La navigation autonome est un axe de recherche récent qui étudie les méthodes qui permettent aux systèmes robotiques mobiles de pouvoir se déplacer et réaliser des objectifs précis et sûrs, sans aucune assistance ni intervention humaine (LATOMBE, 1991). D'un point de vue théorique, la navigation autonome consiste à résoudre trois problèmes fondamentaux, qui sont la localisation, le suivi de trajectoire et la planification de trajectoire. En effet, le robot mobile interagit avec son environnement à travers ses composants de perception (capteurs) et d'action (moteurs), qui lui permettent d'obtenir des sources d'information suffisantes pour résoudre le problème de navigation autonome.

Cependant, l'environnement peut perturber les informations collectées par le robot mobile. De la même façon, les actionneurs et les capteurs peuvent être défectueux, ce qui affecte d'une manière directe la sûreté de la navigation et l'accomplissement de l'objectif (VERMA et al., 2004). Par conséquent, il est primordial d'ajouter une couche de diagnostic de défauts capteurs et actionneurs avec une robustesse contre les perturbations externes, afin d'assurer les meilleures performances d'un point de vue navigation autonome.

La couche de diagnostic se base sur la génération d'indicateurs de fautes, appelés résidus. Ces indicateurs sont comparés à des seuils afin de prendre des décisions sur l'état de fonctionnement des capteurs et des actionneurs.

D'un point de vue général, l'objectif de ces travaux de thèse est de proposer une méthode de navigation autonome sûre et robuste pour les systèmes robotiques mobiles à roues, en milieu clos ou ouvert avec une tolérance aux défauts capteurs et actionneurs et une robustesse contre les perturbations externes. La couche de diagnostic proposée

1. Les figures utilisées sont sous licence libre avec réutilisation autorisée.

traite le système de navigation d'un point de vue informationnel, où le résidu et le seuil sont développés à partir d'outils issus de la théorie de l'information.

1.2 Généralités et état de l'art

Dans cette section, une introduction théorique et un bref état de l'art avec les méthodes utilisées dans la littérature pour traiter les problèmes mentionnés dans la section 1.1 sont proposés.

1.2.1 Robots mobiles à roues

Bref aperçu historique

Le premier robot mobile autonome à trois roues, est connu sous le nom de *tortue de Grey Walter*. Il a été créé en 1950 par l'université de *Cristol*. Cependant, le robot *Shakey* proposé dans (NILSSON, 1969) est considéré comme étant le premier robot mobile utilisant l'intelligence artificielle et contrôlé par ordinateur. En France, le robot *Hilare* (KHATIB et al., 1997) est le premier robot construit au laboratoire *LAAS* en 1977 à Toulouse. Grâce au boom technologique qu'a connu les domaines de l'informatique, des capteurs et de l'intelligence artificielle début 1990, la robotique mobile a connu une étape importante, notamment grâce aux travaux de *Rodney Brooks* (BROOKS, 1986) qui sont considérés comme une référence de la robotique réactive. Lors de ces trois dernières décennies, énormément de scientifiques se sont intéressés à l'étude des robots mobiles à roues (LEROY et al., 1999), et plusieurs robots mobiles ont été créés dans un but éducatif et de recherche scientifique, comme les très connus *Pioneer P3-DX* et le *SR4*. Aujourd'hui, les robots mobiles à roues sont utilisés dans divers domaines, des missions de sauvetage (VASILYEV et al., 2015), l'exploration (ALBINA et al., 2019), l'aide à la mobilité (CARLSON et al., 2012), le loisir et le divertissement (RABELO et al., 2018), et bien plein d'autres applications.

Systèmes non-holonomes

Les systèmes robotiques mobiles sont soumis à des contraintes cinématiques, qui sont représentées par des relations entre les positions et les vitesses des différents points du système. Ces relations doivent être satisfaites tout au long du mouvement du robot. Un système robotique est dit holonome si les contraintes peuvent s'écrire, après intégrations, sous forme de relations algébriques. Dans le cas contraire, le système est dit non-holonome (KOLMANOVSKY et al., 1995). Une illustration simple peut être proposée (Figure 1.2), en considérant un robot mobile différentiel à deux roues se déplaçant avec une vitesse linéaire v et une vitesse angulaire ω , sur un plan horizontal avec trois degrés de liberté (deux variables de translations (x, y) et une variable de rotation θ) par rapport à un repère globale (o, X, Y) .

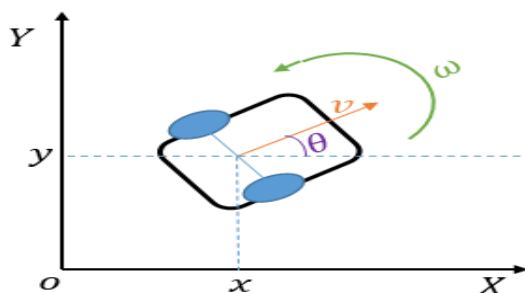


FIGURE 1.2 – Description d'un robot mobile différentiel à deux roues.

Le modèle cinématique de ce type de robot est donné comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta \\ \dot{y} = v \sin \theta \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \quad (1.1)$$

La contrainte non-holonome peut être obtenue facilement comme suit :

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0 \quad (1.2)$$

Cela implique qu'on ne peut avoir que deux mouvements pour chaque configuration (déplacement vers l'avant ou vers l'arrière et rotation dans l'espace). En d'autres termes, les robots mobile différentiels sont des systèmes non-holonomes et cela est dû au fait que ces robots ne peuvent pas se déplacer latéralement.

Systemes multi-robots

Comme il est mentionné dans la section 1.1, les systèmes robotiques mobiles sont très sensibles aux défauts capteurs et actionneurs. Les systèmes multi-robots ramènent d'une manière intrinsèque une redondance de ces composants, ce qui rend la navigation autonome plus sûre et plus fiable. Il existe deux types de systèmes multi-robot : les systèmes avec des robots liés physiquement (MA, COCQUEMPOU et al., 2018), et les systèmes avec des robots non liés et connectés virtuellement via une communication sans fil (ROUMELIOTIS et al., 2002). Chacune de ces deux configurations a ses propres avantages et ses inconvénients. Alors que les robots liés physiquement apportent une redondance d'actionneurs et de capteurs et peuvent porter des charges plus lourdes, les robots non liés physiquement n'apportent qu'une redondance capteurs mais le système est très flexible.

1.2.2 Navigation autonome

Les trois axes majeurs de la navigation autonome sont la localisation, la génération de trajectoire et la commande pour le suivi de trajectoire. Étant donné que dans les travaux de cette thèse, la trajectoire à suivre est supposée fixe et connue, seules la localisation et la commande sont étudiées.

Localisation

La localisation consiste à estimer la position d'un système robotique par rapport à un repère bien défini dans l'environnement. En effet, pour résoudre le problème de la localisation, il suffit de répondre à la question "Où suis-je ?", comme mentionné dans l'article (BORENSTEIN, EVERETT et al., 1996). Pour les systèmes robotiques mobiles, une localisation précise est d'une importance primordiale pour la navigation autonome.

Le problème de la localisation peut être reformulé comme un problème d'observation, d'estimation et de fusion de données capteurs. Due à l'incertitude des mesures issues de la perception, le problème de la localisation est généralement traité sous un cadre probabiliste, le livre (THRUN et al., 2005) représente un inventaire riche des techniques utilisées dans ce cadre.

Les méthodes de localisation peuvent être divisées en deux catégories : localisation relative et localisation absolue. La localisation relative repose sur les mesures fournies par des capteurs proprioceptifs. Due à sa rentabilité et la simplicité de son implémentation, l'odométrie est considérée comme étant la technique la plus utilisée pour les systèmes robotiques mobiles à roues. La position du robot est obtenue en intégrant les données obtenues à partir des encodeurs incrémentaux, en partant d'une position initiale connue. L'inconvénient de cette technique est une accumulation non-bornée des erreurs (BORENSTEIN et LIQIANG FENG, 1996). D'autre part, la localisation absolue se repose sur l'extraction de certaines caractéristiques de l'environnement. Deux méthodes sont très souvent utilisées : le système de positionnement par satellites (GNSS : *Global Navigation Satellite System*), dont le GPS (*Global Positioning System*) fait partie (PARK et al., 2019), et la localisation par extraction de balises, où le robot doit détecter des balises fixées dans son environnement pour pouvoir se localiser (HAN et al., 2013).

Les filtres bayésiens sont largement utilisés comme observateurs stochastiques dans la communauté robotique mobile, plus particulièrement la communauté fusion de données. *Le filtre de Kalman* (KALMAN, 1960), est considéré comme étant le plus connu des filtres bayésiens sous l'hypothèse gaussienne et modèles linéaires. Des extensions du filtre de Kalman ont été développées pour traiter les systèmes non-linéaires. À titre d'exemple, *le filtre de Kalman étendu* (REIF et al., 1999) pour les non-linéarités légères, et *le filtre de Kalman non parfumé* (WAN et al., 2000) pour les non-linéarités élevées. Pour faire face à l'hypothèse gaussienne, divers filtres ont été proposés, comme *le filtre particulière* (ARULAMPALAM et al., 2002) et *le filtre de Kalman à correntropie maximale* (LIU et al., 2017).

Suivi de trajectoire

La commande du mouvement d'un système robotique mobile, consiste à calculer des signaux de commande qui permettent au robot de réaliser un mouvement planifié. En d'autres termes, pour résoudre le problème de commande il faut répondre à la question "Comment dois-je bouger?". Théoriquement, le suivi de trajectoire consiste à calculer les signaux de commande qui font en

sorte que l'erreur entre la position du robot et la trajectoire désirée converge asymptotiquement vers zéro.

La conception de la commande pour le suivi de trajectoire peut être classifié en trois catégories :

- Commande en boucle ouverte et commande en boucle fermée.
- Commande linéaire et commande non-linéaire.
- Commande à base de modèle et commande sans modèle.

Pour la commande en boucle ouverte, les signaux de commande sont calculés directement à partir de la trajectoire désirée, comme exemple la commande basée sur la platitude proposée par FLIESS, LÉVINE et al., 1995. L'inconvénient de ce type de commande est sa haute sensibilité aux perturbations et aux erreurs de modélisation, d'où l'avantage de la boucle fermée avec un retour d'information sur l'état du robot pour la conception du contrôleur.

Pour la commande linéaire, le modèle du robot mobile est linéarisé, ensuite une loi de commande simple (proportionnel, intégral, dérivée) peut être appliquée (NORMEY-RICO et al., 2001). Mais comparée aux commandes non-linéaires, la robustesse de ces commandes reste limitée. Les commandes non-linéaires en boucle fermée pour les systèmes robotiques mobiles ont été largement étudiées, à titre d'exemple ; la commande linéarisante (D'ANDREA-NOVEL et al., 1992, la commande par mode glissant (*SMC : Sliding Mode Control*) STOTSKY et al., 1999), la commande basée sur les réseaux de neurones (YAMAGUCHI et al., 1999), la commande backstepping (FIERRO et al., 1995), et plein d'autres ...

En se basant sur le type de modèle utilisé pour décrire le système robotique, deux familles de commandes pour le suivi de trajectoire peuvent être établies : la commande cinématique issue d'un modèle cinématique et la commande dynamique issue d'un modèle dynamique. En utilisant le modèle cinématique (équation 1.1) des robots mobiles non-holonomes, différentes approches peuvent être considérées pour la conception de la commande, comme la logique floue (DAS et al., 2006), la commande linéaire quadratique (CORNEJO et al., 2018) et les réseaux de neurones (DIERKS et al., 2013). Néanmoins, ce type de commandes assument qu'en donnant des signaux de vitesses au système, les actionneurs fournissent d'une manière simultanée les couples adéquats. En revanche la commande dynamique se base sur un modèle plus détaillé qui décrit mieux le comportement du système, en prenant en compte des effets dynamiques (masse, inertie, frottement..) qui sont négligés par la commande cinématique. Comme pour la commande cinématique, différentes approches ont été proposées pour la conception de la commande dynamique. À titre d'exemple : les modes glissant (JONG-MIN YANG et al., 1999), commande H_∞ (RIGATOS et al., 2015) et le retour d'état linéarisant (CHWA, 2010). D'autre part, la commande sans modèle pour le suivi de trajectoire a aussi été investiguée (FLIESS et JOIN, 2008).

1.2.3 Diagnostic et tolérance aux fautes

Comme il est mentionné dans la section 1.1, une couche de diagnostic pour les systèmes robotiques mobiles s'avère primordiale pour une navigation autonome sûre et fiable. D'un point de vue général, le diagnostic repose sur la comparaison entre le comportement réel d'un système et un comportement nominal représentant le fonctionnement sans défaut.

Le diagnostic comporte trois fonctions :

- Détection des défauts : détecter une anomalie au sein du système.
- Localisation des défauts : localiser et isoler le défaut.
- Identification et caractérisation des défauts : déterminer le type et la grandeur du défaut, voire la cause première du défaut.

Les deux premières fonctions sont nécessaires. On parle alors de FDI pour Fault Detection and Isolation. La troisième fonction est plus délicate et consiste à fournir des informations complémentaires sur les défauts.

La tolérance aux fautes signifie l'aptitude d'un système à accomplir sa fonction malgré la présence ou l'occurrence d'une faute, qu'il s'agisse de dégradations physiques du matériel, de défauts logiciels ou des perturbations environnementales.

Les approches de diagnostic trouvées dans la littérature peuvent être classifiées comme il est montré sur la figure 1.3 (DING, 2008).

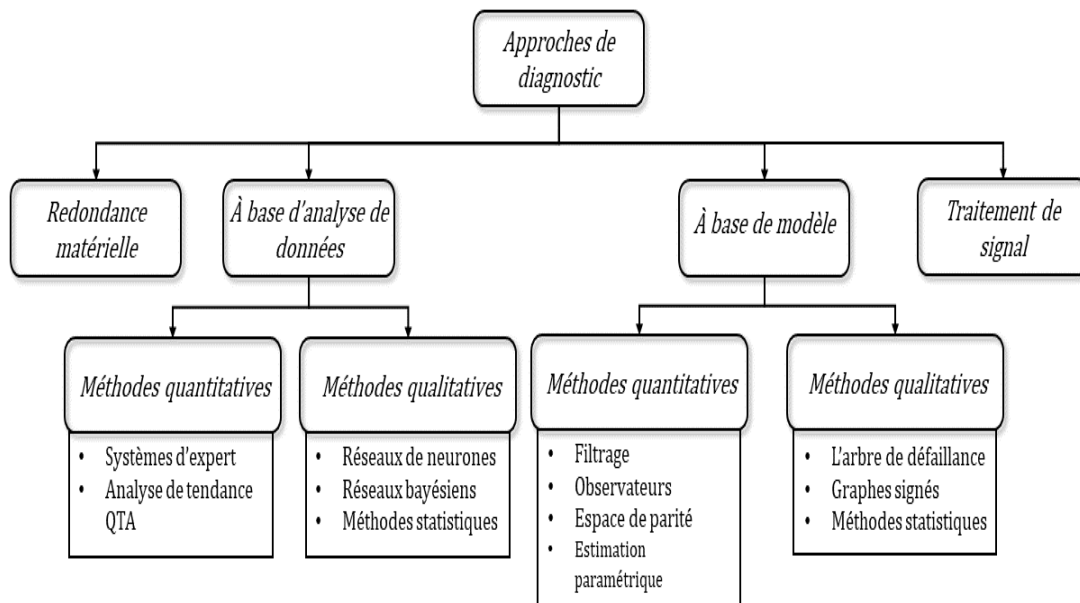


FIGURE 1.3 – Classification des méthodes de diagnostic

La redondance matérielle se base sur l'incorporation de matériels supplémentaires ayant la même fonction (e.g plusieurs capteurs mesurant la même variable) dans la conception du système, afin de détecter et annuler les effets d'un composant défaillant en étudiant la cohérence des données obtenues à

partir de ces matériels (KOREN et al., 2007). Bien que cette méthode soit fiable et très simple à implémenter, elle reste très coûteuse.

Pour les méthodes à base de traitement de signal, le signal qui est supposé porter des informations sur le défaut sous forme de symptômes, est traité dans les domaines temporel et fréquentiel afin d'extraire ces informations et réaliser le diagnostic (GERMÁN-SALLÓ et al., 2018).

Les méthodes à base de modèle utilisent la redondance analytique. Cette dernière signifie une reconstruction analytique des variables mesurées conduisant à une modélisation du système. Les algorithmes basés sur cette approche se base sur la génération des indicateurs de fautes appelés résidus, obtenus à partir d'une comparaison entre la sortie du modèle mathématique du système et les mesures réelles.

Pour les méthodes à base d'analyse de données, une représentation approfondie du système n'est pas nécessaire, car elles se basent sur les informations issues d'expériences préalables et des règles heuristiques pour déterminer l'état de fonctionnement du système.

Les travaux de cette thèse se basent sur une approche de diagnostic quantitative à base de modèle.

1.2.4 Méthodes de diagnostic à base de modèle

Méthodes à base d'observateurs

Dans le contexte de ce travail, les méthodes de diagnostic quantitatives pour la génération de résidus sont utilisées. Ces méthodes se basent sur l'hypothèse d'un modèle mathématique parfait représentant le comportement du système. L'une des méthodes les plus utilisées est la génération de résidus à base d'observateurs (DING, 2008). Une attention particulière est donnée aux générateurs de résidus à base d'observateurs à entrées inconnues (UIO : *Unknown Input Observers*), où les signaux des résidus sont découplés avec les perturbations (entrées inconnues). Dans cette situation, le résidu n'est affecté que par le défaut. Le schéma de la figure 1.4 représente la description du diagnostic à base d'observateur à entrées inconnues.

En cas de défaut, le résidu sensible à ce défaut diverge de sa valeur nominale qui égale zéro dans le cas idéal. Si cette divergence dépasse un seuil prédéfini, le défaut est détecté. La localisation de défauts se fait grâce à une matrice de signatures de fautes, contenant les sensibilités des résidus pour chaque défaut.

Méthodes à base de filtrage bayésien

Une approche similaire peut être utilisée en utilisant les filtres bayésiens, à titre d'exemple le filtre de Kalman qui est lui même un observateur à entrées inconnues (ABCI, EL BADAoui EL NAJJAR et al., 2019). Le résidu est obtenu à partir d'une comparaison des signaux aléatoires obtenus à l'étape de prédiction (prédicteur) et à l'étape de correction (estimateur) (figure 1.5).

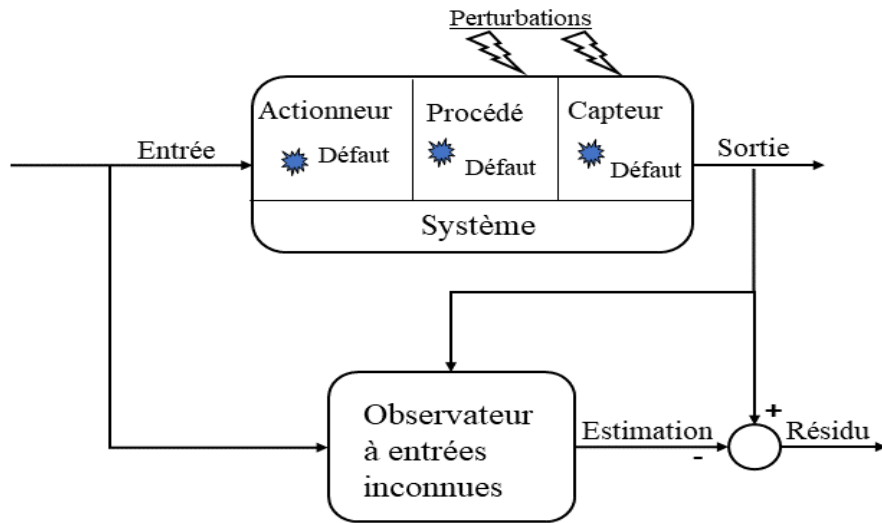


FIGURE 1.4 – Générateur de résidus à base d'observateur (UIO)

1.2.5 Approche informationnelle pour le diagnostic

Afin d'optimiser la couche de diagnostic, et éviter les fausses alarmes et les détections manquées, la conception du résidu et du seuil doit prendre en compte l'aspect stochastique imposé par la nature des systèmes robotiques. En effet, dû à l'incertitude liée aux systèmes robotiques mobiles et leur environnement, la navigation autonome doit être traitée sous un cadre probabiliste.

Étant donné que les différentes variables mesurées et estimées sont de nature aléatoire, avec des densités de probabilité, il est plus judicieux d'utiliser des outils de la théorie de l'information, qui peuvent prendre en compte toute la forme de la distribution de probabilité d'une variable aléatoire, afin d'élaborer un résidu et un seuil plus robuste aux incertitudes.

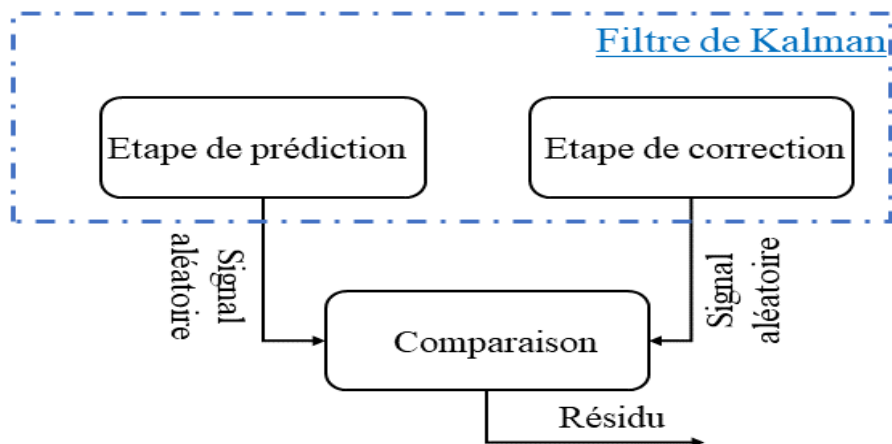


FIGURE 1.5 – Générateur de résidus à base du filtre de Kalman

Outils de la théorie de l'information

La théorie de l'information fournit des outils et des métriques en forme de distance ou de divergence qui ont la capacité de calculer la similarité ou la dissemblance entre deux distributions de probabilité. En d'autres termes, il est possible de concevoir des résidus qui prennent en compte l'incertitude d'une variable en utilisant des métriques informationnelles. L'entropie de Shannon introduite dans (SHANNON, 1948), représente le concept le plus fondamental de la théorie de l'information. Elle correspond à la quantité d'information délivrée par une source de données, car elle calcule l'incertitude associée à cette information. Diverses mesures sont reliées à l'entropie de Shannon, à titre d'exemple l'information mutuelle (KRASKOV et al., 2004) et la divergence de Kullback-Leibler (JOYCE, 2011).

L'article de Michèle Basseville (BASSEVILLE, 2013) représente une bibliographie générale des différentes divergences et mesures informationnelles utilisées dans la littérature. Pour rappel, une divergence en statistique est une mesure de dissemblance (ou similarité) entre deux distributions de probabilités (ou plus). Principalement, il y a deux grandes classes de divergences : les *f-divergences* (VAJDA, 1972) et les *divergences de Bregman* (BREGMAN, 1967). Au sein de chacune des deux classes, on trouve différentes familles de divergences. À titre d'exemple : α -divergence³, distance de Hellinger et la divergence de χ^2 sont toutes des instances de la *f-divergence*, alors que la β -divergence et la γ -divergence font partie de la classe de la *divergence de Bregman*. Chacune de ces deux classes a ses propres propriétés, mais une attention particulière est donnée aux α -divergences.

Plusieurs divergences paramétrées par α existent dans la littérature. Les plus utiles ont été introduites dans (CHERNOFF, 1952) et (RAO, 1992), mais on s'intéresse particulièrement à la α -divergence de Rényi (RÉNYI, 1961) pour deux valeurs de α : $\alpha = 1$ (la divergence de Kullback-Leibler) et $\alpha = 0.5$ (la divergence de Bhattacharyya).

Observateur informationnel

Dans le cadre des systèmes robotiques mobiles, les observateurs à entrées inconnues sont à privilégier pour leur robustesse contre les incertitudes. Comme il a été mentionné dans la section 1.2.2, les filtres bayésiens sont très utilisés et le filtre de Kalman reste l'observateur à entrées inconnues de référence pour la fusion de données multi-capteur et l'estimation d'état. Dans la littérature, il existe une forme informationnelle du filtre de Kalman intitulé *le Filtre Informationnel (FI)*. Mis en avant par Durrant-Whyte (DURRANT-WHYTE, 2002) pour la fusion de données multi-capteur et le diagnostic, il traite le système d'un point de vue informationnel en calculant l'apport informationnel de chaque observation. À l'encontre du filtre de Kalman, le filtre informationnel utilise la forme informationnelle du vecteur d'état et de la matrice de covariance. Cette forme canonique apporte plusieurs avantages, à titre d'exemples :

3. Il a été prouvé par (AMARI, 2009) que la α -divergence est la seule famille de divergences appartenant aux deux classes de divergences (*f-divergence* et la divergence de Bregman).

- Elle est plus adaptée pour les architectures de fusion distribuées.
- L'étape de mise à jour n'est que la somme des contributions informationnelles des observations, donc très adaptée pour le diagnostic.
- Le coût calculatoire réduit.

Évaluation du résidu et seuillage dans la littérature

Le résidu est souvent affecté par des perturbations et des incertitudes. Concevoir un résidu informationnel n'est pas suffisant. Il est donc important d'évaluer l'information apportée par le résidu afin de générer un seuil qui maximise la probabilité de détection et minimise la probabilité de fausse alarme. La décision se fait sur une simple comparaison entre la valeur du résidu et celle du seuil. Si la valeur du résidu est supérieure à la valeur du seuil, un défaut est détecté. Dans le cas contraire le système n'est pas défaillant.

Dans la littérature, il existe deux classes de méthodes pour l'évaluation des résidus (DING, 2008) : Les méthodes basées sur les normes traitées sous le cadre de la théorie de la commande robuste (RANK et al., 1999), et les méthodes basées sur les tests statistiques traitées sous le cadre de tests d'hypothèses statistiques. Pour les méthodes basées sur la commande robuste, des optimisations en utilisant des inégalités matricielles linéaires (*LMI : linear matrix inequality*) sont souvent utilisées (SCHERER et al., 1997). Pour les méthodes statistiques, des méthodes de détection de changement de certains paramètres des fonctions de densité de probabilité sont utilisées, et ceci est généralement fait avec des tests d'hypothèse statistiques (l'hypothèse H_0 est synonyme d'absence de défaut et l'hypothèse H_1 correspond à un fonctionnement défaillant), en l'occurrence en calculant des rapports de vraisemblance.

La sélection d'un seuil robuste se base sur le choix d'un critère adéquat, de sorte que le taux admissible de fausses alarmes et de détections manquées soit le minimum possible, contre un taux élevé de bonnes détections. Dans la littérature, les critères de *Neyman-Pearson* et *Bayes* (VARSHNEY, 1996) sont très utilisés pour optimiser les solutions aux problèmes de détection. Le critère de *Neyman-Pearson* consiste à rechercher la meilleure probabilité de détection étant donné que la probabilité de fausse alarme ne dépasse pas une valeur de tolérance (POOR, 1994). Pour le critère de *Bayes*, un coût est attribué à chaque situation (décision H_i sachant que H_j est correcte), et la moyenne d'une fonction risque (risque de Bayes) est minimisée. D'autres critères existent dans la littérature, comme *le critère de la probabilité a posteriori maximale* (DING, 2008), et le critère basé sur les courbes *ROC* (Receiver Operating Characteristic) (WUNDERLICH et al., 2016).

Dans le cadre de cette thèse, on s'intéresse tout particulièrement aux critères basés sur la théorie de l'information, où la quantité d'information est évaluée afin de réduire l'ambiguïté entre l'hypothèse et la décision. À titre d'exemple, il est proposé dans (HOBALLAH et al., 1989) de maximiser l'information mutuelle et dans (AL HAGE et al., 2017) de maximiser la divergence de Kullback-Leibler. On s'intéressera par la suite à un nouveau critère basé sur minimisation de la divergence de Bhattacharyya.

1.2.6 Commande tolérante aux fautes

La commande tolérante aux fautes (*FTC : Fault Tolerant Control*) a comme objectif de permettre au système d'accomplir sa mission même en présence de composants défectueux qui pourraient dégrader ses performances. En d'autres termes, une commande tolérante aux fautes est une commande qui en présence de défaut, peut maintenir le système en boucle fermée stable avec des performances acceptables. Dans la littérature, il existe deux catégories de commandes tolérantes aux fautes :

- Les commandes tolérantes aux fautes actives (BLANKE et al., 2006).
- Les commandes tolérantes aux fautes passives (BENOSMAN, 2011).

Commandes tolérantes aux fautes passives

La commande tolérante aux fautes passive, dont la notation anglaise est PFTC (*Passive Fault Tolerant Control*), se réfère à la théorie de la commande robuste. La PFTC consiste à utiliser une commande robuste qui assure (d'une manière intrinsèque) l'insensibilité du système à certaines classes de défauts et de perturbations sans besoin d'une couche de diagnostic. La robustesse est obtenue lors de la conception de la loi de commande, où certains défauts et incertitudes sont pris en compte. En effet, la conception de la commande robuste se fait hors-ligne, et aucune reconfiguration ne se fait en temps réel pour compenser le défaut. Cette robustesse intrinsèque est très avantageuse, car elle évite le temps de retard (latence) due à la reconfiguration de la commande et l'utilisation d'une couche de diagnostic, ce qui est très pratique pour les applications réelles. Par contre, il est impossible de concevoir une loi de commande qui soit robuste à toutes les classes de défauts possibles.

Dans la littérature, différentes méthodes de la PFTC ont été proposées : la commande par modes glissants intégrale (DEFOORT et al., 2008), la commande H_∞ (G.-H. YANG et al., 2001) et la commande basée sur le concept de la passivité (BENOSMAN et LUM, 2009). Pour une bibliographie plus approfondie, le lecteur est invité à consulter l'article (BENOSMAN, 2011).

Commandes tolérantes aux fautes actives

La commande tolérante aux fautes active, dont la notation anglaise est AFTC (*Active Fault Tolerant Control*), consiste à modifier la loi de commande et/ou ses paramètres une fois le défaut détecté et localisé par la couche de diagnostic, et cela pour assurer la stabilité du système avec les performances requises. Un schéma représentatif de la AFTC est proposé par la figure 1.6 :

Il existe principalement deux approches pour la conception d'une AFTC : l'accommodation et la reconfiguration (HADDAD, 2014). L'accommodation consiste à modifier la loi de commande en temps réel, étant donné un défaut identifié par la couche de diagnostic. La reconfiguration peut être divisée en deux méthodes : la reconfiguration de la structure interne du système en fonction du défaut en gardant uniquement les composants fonctionnels, et

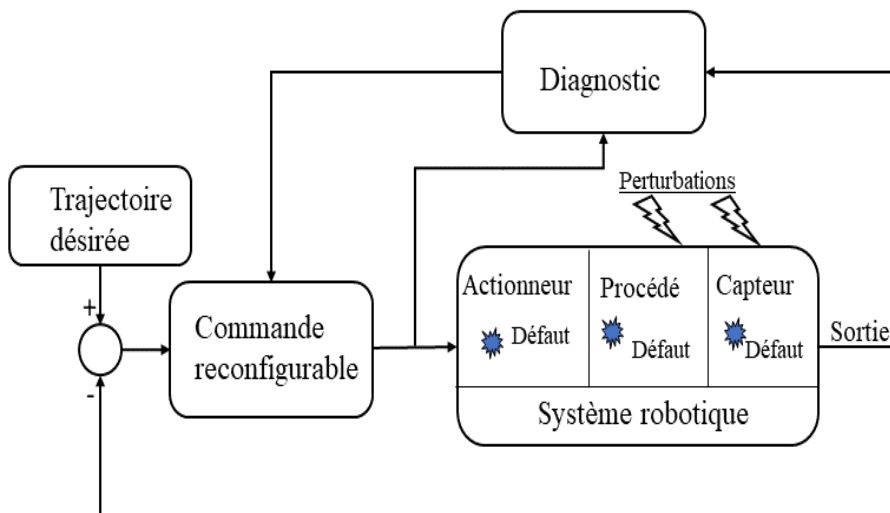


FIGURE 1.6 – Schéma général d'une commande tolérante aux fautes active

la commutation entre plusieurs commandes établies hors-ligne en prenant en compte le défaut détecté.

L'article proposé par (Y. ZHANG et al., 2008) représente une étude bibliographique riche des méthodes utilisées pour la conception des commandes tolérantes aux fautes actives. On trouve à titre d'exemple des approches comme le placement des valeurs propres (Y. M. ZHANG et al., 2002) et la pseudo-inverse (STAROSWIECKI, 2005) pour l'accommodation, et la réallocation (SADDEGHZADEH et al., 2012) ou la commutation (ALLERHAND et al., 2015) pour la reconfiguration.

Il est à noter que chacune de ces deux approches a des avantages et des inconvénients. La reconfiguration qui se base sur la redondances des commandes ou du système, ne modifie pas les lois de commande établis hors-ligne, ce qui la rend idéale pour les applications industrielles, par contre le changement brusque des lois de commandes peut s'avérer délicat à gérer (H. YANG et al., 2013). D'autre part, l'accommodation n'a pas besoin de redondance, ni au niveau de la commande ni celle du système. Une nouvelle loi de commande est calculée en ligne en prenant en compte le défaut identifié. En d'autres termes, sans identification du défaut, l'objectif de la commande ne peut être assuré. Par ailleurs, une stratégie basée sur le changement des lois de commandes déjà établie et certifiée par les industriels est souvent rejetée.

1.2.7 Fusion de données tolérante aux fautes

La fusion de données tolérante aux fautes (*FTF : Fault Tolerant Fusion*) consiste à mettre en place une stratégie de fusion de données multi-sources qui assure une estimation d'état insensible aux défauts capteurs. Pour les systèmes robotique mobiles, une FTF est synonyme d'une localisation intègre, fiable et tolérante aux défauts capteurs.

Comme avec la commande tolérante aux fautes, deux approches existent

pour la fusion de données tolérante aux fautes. La première approche est passive, elle se base sur l'utilisation d'observateurs robustes contre une certaine classe de défauts. La deuxième approche est active, elle utilise une couche de diagnostic pour détecter, localiser et/ou identifier le défaut afin de le compenser ou de l'exclure de la procédure de fusion.

Les observateurs robustes traitent les défauts et les incertitudes durant la conception des lois d'observation. Des méthodes basées sur les modes glissants, H_∞ et les LMIs (HUR et al., 2014) (ALAEI et al., 2016) sont largement utilisées. Mais vue la nature des systèmes robotique mobiles, l'utilisation d'observateurs probabilistes (e.g filtres bayésiens) avec une couche de diagnostic est plus adaptée. Cela est avantageux pour différentes raisons :

- La redondance des capteurs des systèmes robotiques mobiles permet d'opter pour une stratégie d'exclusion, facile à implémenter sur des applications réelles.
- La possibilité de gérer n'importe quel type de défaut en temps réel, au lieu de se limiter à une classe précise.

L'approche la plus utilisée dans la littérature est intitulée *Détection de Fautes et Exclusion*, dont l'annotation anglaise est *FDE : Fault Detection and Exclusion*. Le schéma global de cette approche est représenté par la figure 1.7. La FDE consiste à utiliser une couche de diagnostic pour localiser le capteur défaillant, afin d'exclure sa mesure de la procédure de fusion, et ainsi avoir une estimation d'état (localisation) qui ne prend pas en compte la mesure aberrante.

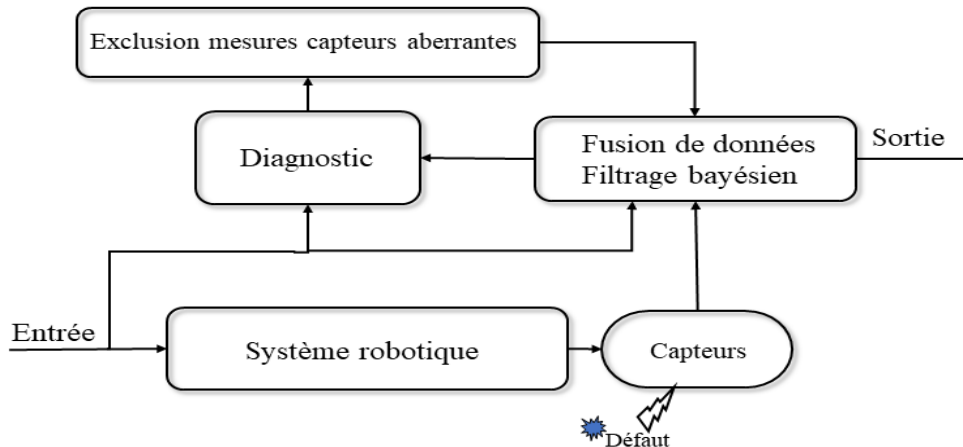


FIGURE 1.7 – Schéma global d'une approche FDE

Néanmoins, deux points sont à souligner pour la fusion de données tolérante aux fautes :

- La commande en boucle fermée et l'information issue du retour d'état ne sont pas étudiées. En effet, la communauté fusion de données s'intéresse uniquement au bloc d'estimation et fusion de données, ou tout simplement la localisation pour la communauté robotique. Donc, seuls les défauts capteurs sont d'actualité.
- Vu la nature incertaine des mesures des capteurs, les filtres bayésiens sont les observateurs classiques dans la communauté robotique mobile.

L'approche informationnelle discutée dans la section 1.2.5, a connu un grand intérêt par les scientifiques qui travaillent sur le diagnostic pour la fusion de données capteurs.

Diverses approches pour le diagnostic (détection, localisation) et l'exclusion des défauts capteurs ont été proposées dans la littérature. Les bancs d'observateurs à entrées inconnues, notamment les bancs de filtres bayésiens, sont utilisés pour la localisation des défauts. Les bancs de filtres de Kalman sont développés de sorte que chaque filtre est sensible à un seul défaut capteur (XUE et al., 2007). D'autres approches ont été développées, à titre d'exemple : le filtre particulaire (DUAN et al., 2009), le filtre informationnel (FERNANDEZ et al., 1994), les réseaux bayésiens (IBARGUENGOYTIA et al., 2001), la logique floue (ESCAMILLA-AMBROSIO et al., 2001) et la redondance matérielle (RICQUEBOURG et al., 2007).

Hugh Durrant-Whyte est considéré comme étant l'un des pionniers à promouvoir l'approche informationnelle pour la fusion de données tolérante aux fautes. Il utilisait l'information mutuelle pour calculer la quantité d'information obtenue entre une mesure capteur et la distribution a priori du filtre informationnel (DURRANT-WHYTE et HENDERSON, 2008).

L'utilisation de la divergence de Kullback-Leibler pour la fusion de données tolérante aux fautes a connu un grand succès et pour différentes applications : à titre d'exemple : la localisation d'un système robotique mobile en minimisant la divergence de Kullback-Leibler entre la mesure et l'estimation (MARTÍN et al., 2014), et la localisation d'un système multi-robots et l'intégrité d'un système GNSS, en développant des résidus et des seuils basés sur la divergence de Kullback-Leibler (AL HAGE, 2016).

1.3 Positionnement et objectifs de la thèse

L'objectif majeur de ces travaux de thèse est de proposer une stratégie de navigation autonome, sûre et fiable pour les systèmes robotiques mobiles, avec une tolérance aux défauts capteurs, actionneurs et une robustesse contre les perturbations externes, le tout sous un cadre informationnel.

Afin de positionner la thèse, le schéma global de la figure 1.8 est proposé :

La commande tolérante aux fautes nécessite soit une redondance des lois de commandes (commutation) soit un recalcul de la loi de commande (accommodation), alors que dans les applications industrielles, la commande est certifiée, et une modification au niveau de la commande interne est souvent impossible. D'autre part, la fusion de données tolérante aux fautes bénéficie des outils probabilistes mais elle se limite au problème de la localisation et ne traite pas la navigation autonome.

Dans le cadre de cette thèse, nous proposons de traiter la navigation autonome pour les systèmes robotiques, avec une tolérance aux défauts capteurs et actionneurs, en utilisant une stratégie de diagnostic à base d'estimation d'état sous un cadre informationnel, où les résidus et les seuils sont développés en utilisant des outils de la théorie

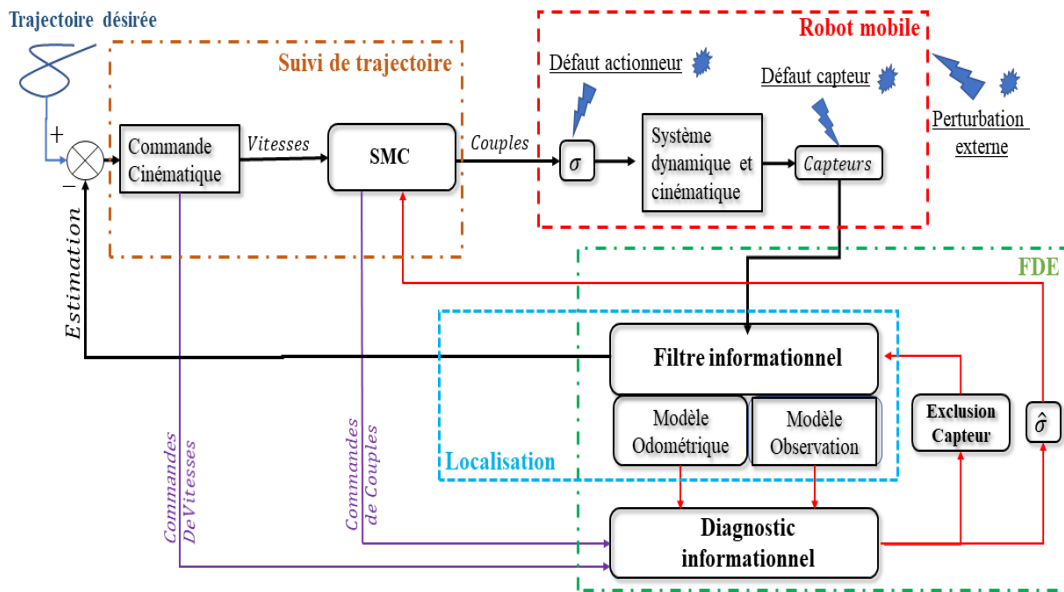


FIGURE 1.8 – Navigation autonome tolérante aux fautes en informationnel

de l'information, en l'occurrence la divergence de Bhattacharyya, sans pour autant modifier la commande initiale, ni se limiter à une classe de défauts. La couche de diagnostic proposée s'alimente de toutes les informations qui circulent au sein de la boucle de régulation (signaux de commande en boucle fermée, mesures capteurs, estimation d'état), afin de détecter et de localiser les défauts capteurs et actionneurs ou leur combinaison.

L'utilisation des filtres bayésiens et de l'approche informationnelle pour la détection et la localisation des défauts capteurs et actionneurs, semble être une solution judicieuse pour robustifier le diagnostic. L'utilisation des outils probabilistes représente une solution optimale pour gérer l'incertitude des mesures et des estimations due à la nature stochastique des systèmes robotiques mobiles. De ce fait, la manipulation des distributions de probabilité (toute la forme de la distribution et pas seulement la moyenne), permet de générer un résidu robuste contre les incertitudes des variables aléatoires. De la même façon, évaluer le résidu en se basant sur des critères informationnels, mène à des seuils adaptatifs optimaux qui maximisent la probabilité de détection et minimise les probabilités de fausses alarmes et des détections manquées.

Avant de lister les contributions de la thèse, et afin de justifier le choix des outils utilisés par rapport à ceux proposés par la littérature, le tableau 1.1 résume les différentes approches utilisées pour la stratégie de navigation autonome tolérante aux fautes (présentée par la figure 1.8).

1.4 Contributions de la thèse

Les principales contributions de cette thèse sont les suivantes :

- **Développement d'une couche de diagnostic informationnelle pour la navigation autonome des systèmes robotiques mobiles :**

Généralisation de l'approche informationnelle initialement utilisée pour traiter les problèmes de fusion de données, à la navigation autonome des systèmes robotiques mobiles. Les résidus et les seuils sont conçus en utilisant des métriques issues de la théorie de l'information pour détecter et localiser les défauts capteurs et actionneurs.

- **Développement de résidus basés sur la divergence de Bhattacharyya :**

Des résidus robustes sont conçus en calculant la divergence de Bhattacharyya entre la distribution a priori (basée sur la prédiction) et la distribution a posteriori (basée sur les apports informationnels des mesures). Le résidu conçu à partir de la divergence de Bhattacharyya contient trois termes : le premier est lié à la distance de Mahalanobis. Le deuxième terme représente l'information mutuelle entre la distribution de probabilité de la prédiction et la moyenne entre les distributions de probabilité de la prédiction et la correction. Le troisième terme représente l'information mutuelle entre la distribution de probabilité de la correction et la moyenne entre les distributions de probabilité de la prédiction et la correction. La moyenne du résidu dans le cas sans défaut et bruit gaussien suit une loi Fisher, par contre la distribution globale est obtenue à partir d'une inférence à travers une relation avec la distance de Hellinger. Il sera prouvé que la fonction de cette inférence suit une loi Gamma.

- **Développement d'un seuil optimal basé sur un critère obtenu à partir de la divergence de Bhattacharyya :**

Un seuil optimal est obtenu en utilisant le critère de Bhattacharyya. Ce critère permet d'obtenir le seuil optimal, et correspond au minimum d'une fonction qui minimise la divergence entre l'hypothèse réelle et la décision.

- **Utilisation de plusieurs modèles de prédiction pour améliorer la localisation de défauts :**

Pour les méthodes de diagnostic de défaut à base de modèle (observateurs, filtrage), un modèle nominal de prédiction est primordial. Pour les systèmes robotiques mobiles, le modèle odométrique basé sur les données encodeurs est le plus souvent utilisé. Néanmoins, si les encodeurs sont défectueux, la localisation du défaut devient impossible, car la quantité d'information produite par la divergence de Kullback-Leibler ou la divergence de Bhattacharyya devient aberrante. Dans le cadre de cette thèse, on propose d'utiliser deux filtres informationnels, où chaque filtre a son propre modèle de prédiction : le premier est basé sur le modèle odométrique qui prend comme entrées les mesures des encodeurs, et le deuxième est basé sur un modèle mathématique (dynamique ou cinématique), qui prend comme entrées les signaux de commandes (vitesses ou

couples). En utilisant ces deux filtres en parallèles, on allège la condition d'un modèle nominal, et on amplifie le nombre de résidus générés par les deux bancs de filtres liés aux deux filtres informationnels. De cette façon, la localisation des défauts est améliorée, et l'isolation entre les défauts odomètres et actionneurs devient possible.

- **Suivi de trajectoire robuste contre les perturbations externes pas nécessairement bornées d'une manière uniforme :**

Pour le suivi de trajectoire on propose une commande cinématique qui fait converger asymptotiquement l'erreur entre la pose du robot et la trajectoire désirée vers zéro. Tout en limitant les variations de l'angle d'orientation du robot, et en utilisant la technique Backstepping, on propose une commande dynamique par modes glissant (*SMC : Sliding Mode Control*) qui donne accès à la dynamique du système et aux défauts actionneurs. Une nouvelle loi de commande est proposée, contenant le défaut actionneur et en prenant en compte une certaine classe de perturbations externes additives qui font diverger les commandes par modes glissants classiques. On démontrera par la théorie de *Lyapunov*, que la loi de commande proposée est robuste passivement contre cette classe de perturbation. L'allocation des couples en cas de défauts actionneurs, dépendra de la configuration des actionneurs fonctionnels.

- **Tolérance aux défauts capteurs, actionneurs et une certaine classe de perturbations externes sans pour autant modifier la loi de commande initiale :**

Dans cette approche proposée, aucune modification de la commande initiale n'est faite, ni accommodation ni commutation. On s'intéresse principalement aux informations qui alimentent la couche de diagnostic informationnelle. Une stratégie *FDE* est adoptée : Une fois que le capteur défectueux est localisé, il est exclu de la procédure de fusion avant l'estimation d'état. Si un actionneur défaillant est localisé et que la commandabilité est préservée, l'information est donnée à la commande par modes glissants afin de s'adapter et de générer les signaux de commandes nécessaires pour garantir la stabilité et les performances requises. De plus la commande proposée est tolérante à une grande classe de perturbations externes qui affectent le système en s'introduisant par le canal des entrées.

- **Implémentation de l'approche proposée sur des systèmes robotiques mobiles :**

Les algorithmes de commande, estimation et diagnostic informationnel sont implémentés sur des robots mobiles réels avec différentes configurations : Un seul robot mobile différentiel (deux roues et quatre roues), et un système multi-robots composé de trois robots mobiles différentiels.

| Fonction | Descriptif |
|------------------------------|---|
| Classe de défauts | Défauts actionneurs (perte d'efficacité σ), défaut capteurs (biais, dérive, bruit) et perturbations externes (addition à l'entrée). |
| Applications | Robots mobiles différentiels à deux roues et à quatre roues : un seul robot et système multi-robot. |
| Planification de trajectoire | Trajectoire désirée prédéfinie hors-ligne. |
| Suivi de trajectoire | Deux commandes utilisées : Une commande cinématique qui fait converger l'erreur entre la position du robot et la trajectoire désirée asymptotiquement vers zéro, augmentée vers une commande dynamique par mode glissant pour une robustesse contre des perturbations externes d'une certaine classe (pas forcément bornée uniformément), avec une allocation des signaux de commande selon les défauts des actionneurs. |
| Localisation | Utilisation de la forme canonique du filtre de Kalman (filtre informationnel) pour la fusion de données multi-capteur et l'estimation d'état, avec un modèle odométrique pour l'étape de prédiction. |
| FDI | Détection à base d'estimation d'état et génération de résidus en comparant les distributions de probabilités des étapes de prédiction et de correction du filtre informationnel. La localisation des défauts se fait avec un banc de filtres informationnels. Un modèle mathématique supplémentaire qui prend les signaux de commande comme entrées, est utilisé pour la localisation des défauts des odomètres et des actionneurs. |
| Approche informationnelle | Conception du résidu en calculant la divergence de Bhattacharyya entre les distributions de probabilité de la prédiction et la correction du filtre informationnel. Évaluation du seuil en calculant un critère issu de la divergence de Bhattacharyya et qui minimise une fonction coût. |
| Tolérance aux fautes | Après la localisation des défauts capteurs et actionneurs, une stratégie d'exclusion de défaut est adoptée. Les capteurs défectueux sont exclus de la procédure de fusion. Une information sur l'état des actionneurs est donnée à la commande pour une allocation adéquate. Les perturbations externes sont gérées d'une manière passive avec la SMC proposée. |

Tableau 1.1 – Navigation autonome tolérante aux fautes proposée

1.5 Organisation du reste du manuscrit

Le reste du manuscrit se divise en cinq chapitres comme suit :

- **Chapitre 2** : Dans ce chapitre, la navigation autonome sans tolérance aux fautes est traitée. Pour cela les développements théoriques pour répondre aux deux questions (où suis-je? = localisation) et (Comment dois-je bouger?" = suivi de trajectoire) de la section 1.2.2 sont proposés. On commencera par les modélisations cinématique et dynamique des robots mobiles différentiels à deux roues et à quatre roues. Ces modèles vont nous permettre de développer les commandes cinématiques et dynamiques (SMC) pour le suivi de trajectoire. On développera par la suite le filtre informationnel pour traiter le problème de la localisation et on montrera ses avantages pour le diagnostic et la fusion de données multi-capteurs.
- **Chapitre 3** : Dans ce chapitre, on va s'intéresser à l'approche informationnelle pour la conception du résidu et du seuil. On introduira la *divergence α de Rényi* et on étudiera deux cas spéciaux de cette divergence qui sont la *divergence de Bhattacharyya* ($\alpha = 0.5$) et la *divergence de Kullback-Leibler* ($\alpha = 1$). Une fois terminé, on évaluera le résidu conçu avec ces métriques en proposant un seuillage optimisé basé sur la *divergence de Bhattacharyya* tout en rappelant le seuillage basé sur la *divergence de Kullback-Leibler*
- **Chapitre 4** : Ce chapitre est divisé en deux parties. Dans la première partie, l'approche proposée pour la navigation autonome tolérante aux fautes des systèmes robotiques mobiles est détaillée. On développera le schéma de la figure 1.8, et on établira les algorithmes pour un seul robot comme pour un système multi-robot. Dans la deuxième partie, les résultats expérimentaux et une discussion seront proposés.
- **Chapitre 5** : Dans ce chapitre, la conclusion et nos perspectives sont établies.

1.6 Liste des publications

Les travaux de recherches reliés à cette thèse ont été publiés dans les articles suivants :

Revue internationale

B. Abci, M. El Badaoui El Najjar, V. Cocquempot and G. Dherbomez, "*An informational approach for sensor and actuator fault diagnosis for autonomous mobile robots*", Journal of Intelligent and Robotic Systems (JINT), Springer, 2019.

Conférences internationales

B. Abci, J. Nader, M. El Badaoui El Najjar and V. Cocquempot, *Fault-tolerant multi-sensor fusion and thresholding based on the Bahattachryya distance with application to a multi-robot system*, in 15th European Workshop on Advanced Control and Diagnosis (ACD), Bologna, Italy, november 21-22, 2019.

B. Abci, M. El Badaoui El Najjar and V. Cocquempot, *Sensor and Actuator Fault Diagnosis for a Multi-Robot System Based on the Kullback-Leibler Divergence*, in 4th International Conference on Control and Fault-Tolerant Systems (SysToL), Casablanca, Morocco, september 18-20, 2019.

B. Abci, M. El Badaoui El Najjar, V. Cocquempot, and G. Dherbomez, *"Sensor fault tolerant sliding mode control using information filters with application to a two-wheeled mobile robot"*, in 6th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT), Paris, France, april 23-26, 2019.

B. Abci, J. A.Hage, M. E.Badaoui El Najjar and V.Cocquempot. *" Multi-Robot Autonomous Navigation System Using Informatio-nal Fault Tolerant Multi-Sensor Fusion with Robust Closed Loop SlidingMode Control"*, in 21st International Conference on Information Fusion (FUSION), Cambridge, UK, july 10-13, 2018.

B. Abci, G.Zheng, D.Efimov and M. El Badaoui El Najjar *"Robust Altitude and Attitude Sliding Mode Controllers for Quadrotors"*, in the 20th World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC), Toulouse, France, July 9-14, 2017.

Navigation autonome des systèmes robotiques mobiles

« Cela paraît toujours impossible jusqu'à ce que ce soit fait. »

Nelson Mandela

Résumé du chapitre :

Ce chapitre traite la navigation autonome des systèmes robotiques mobiles différentiels contenant uniquement des roues fixes, plus particulièrement deux et quatre roues motrices. Dans un premier temps, les différents modèles décrivant le comportement de ces systèmes sont présentés : 1) Deux modèles cinématiques ; le premier se base sur les signaux issus de la commande et le deuxième appelé le modèle odométrique, se base sur les mesures issues des encodeurs. 2) Modèle dynamique qui prend en considération les dynamiques du système (masse, frottement,...). 3) Modèle de la roue qui décrit le comportement de la roue en contact avec la surface. 4) Modèle des défauts et des perturbations externes : Les différents modèles des défauts capteurs et actionneurs traités dans le cadre de cette thèse sont présentés, ainsi que le modèle d'une certaine classe de perturbation externe qui n'est pas forcément bornée d'une manière uniforme.

Une fois les modèles établis, la localisation et le suivi de trajectoire pour la navigation autonome sont étudiés. Pour la localisation, les filtres bayésiens sont introduits, et plus particulièrement le filtre informationnel et sa forme étendue pour les systèmes non-linéaires. Pour le suivi de trajectoire, deux commandes sont proposées : 1) Une commande cinématique qui génère des signaux de vitesse qui font converger asymptotiquement l'erreur de suivi de la position vers zéro. 2) Une commande dynamique qui génère des consignes de couples tout en prenant en considération la dynamique du système, les perturbations et les défauts actionneurs. Pour

la commande dynamique, la commande par modes glissants est adoptée pour sa robustesse passive contre les perturbations externes. Une version améliorée de cette commande qui prend en compte la classe de perturbation avec la forme particulière mentionnée avant, est aussi proposée.

Plan du chapitre

| | | |
|------------|--|-----------|
| 2.1 | Introduction | 27 |
| 2.2 | Modélisation des robots mobiles différentiels | 28 |
| 2.2.1 | Modélisation cinématique | 29 |
| 2.2.2 | Modélisation dynamique | 32 |
| 2.2.3 | Modélisation odométrique | 35 |
| 2.2.4 | Modélisation des roues et des défauts | 37 |
| 2.3 | Localisation et fusion de données | 39 |
| 2.3.1 | Filtre de Kalman | 39 |
| 2.3.2 | Filtre informationnel | 40 |
| 2.3.3 | Filtre informationnel étendu | 41 |
| 2.4 | Commande pour le suivi de trajectoire | 42 |
| 2.4.1 | Commande cinématique | 44 |
| 2.4.2 | Commande dynamique par modes glissants | 45 |
| 2.4.3 | Commande par modes glissants améliorée | 49 |
| 2.5 | Conclusion | 51 |

2.1 Introduction

L'autonomie des robots mobiles devient de plus en plus répandue dans nos sociétés. Divertissements, tâches ménagères, transports, missions à risque ou plate-formes industrielles, tout le monde y trouve son compte. La diversité de ses applications encourage de plus en plus de scientifiques de différents domaines à s'intéresser au phénomène de l'autonomie en robotique. Intelligence artificielle, robotique, mécatronique ou automatique, tout le monde y participe.

La navigation autonome d'un système robotique mobile, consiste à résoudre deux problèmes majeurs : l'estimation d'état pour la localisation et la commande pour le suivi de trajectoire. Un robot mobile autonome est donc capable de se localiser et de se déplacer sans aucune intervention humaine. Le schéma de la figure 2.1 représente la boucle de régulation classique d'un système robotique mobile autonome.

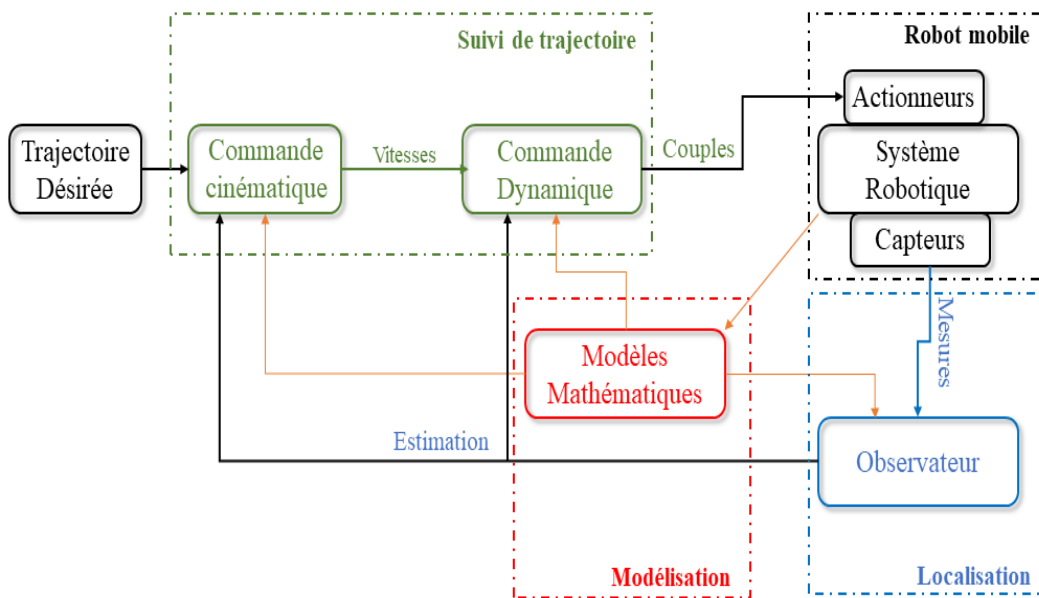


FIGURE 2.1 – Navigation autonome pour les systèmes robotiques mobiles.

Le bloc **Robot mobile** représente le système réel avec toutes ses dynamiques et ses contraintes. Les robots mobiles à roues peuvent être classifiés selon le nombre et le type de roues qui les composent. D'ailleurs, c'est la configuration des roues qui fixe les contraintes d'un système. À titre d'exemple, un robot mobile qui contient des roues fixes et motrices sont des robots mobiles à entraînement différentiel non-holonomes. Le robot mobile est aussi constitué d'actionneurs qui lui permettent de se déplacer, et de capteurs qui lui permettent de percevoir son environnement.

Le bloc **Modélisation** représente les différents modèles mathématiques (cinématiques ou dynamiques) qui décrivent au mieux le comportement du système. Ces modèles sont utilisés dans le développement des algorithmes de commande et d'estimation. Cette utilisation est schématisée dans la figure 2.1 par des flèches rouges.

Le bloc **Suivi de trajectoire** représente l'objectif de la commande qui consiste à suivre une trajectoire de référence tout en respectant certaines performances. La commande cinématique basée sur la relation entre la configuration du système et les vitesses, est suffisante pour réaliser cet objectif. Par contre une commande dynamique qui prend en compte l'aspect dynamique du robot peut être plus précise et surtout plus robuste quand elle prend en considération les perturbations et les dynamiques non modélisées, spécialement en robotique mobile où beaucoup d'hypothèses sont faites pour la modélisation du système.

Le bloc **localisation** représente la partie estimation d'état et fusion de données multi-capteur en utilisant des observateurs. Dans le cadre de la robotique mobile, des observateurs à entrées inconnues sont souvent utilisés et tout particulièrement des filtres bayésiens. Tout comme la commande, ces observateurs utilisent le modèle du robot et les mesures issues des capteurs pour fournir une estimation de la pose et donc localiser le robot.

Ces quatre blocs sont étudiés tout au long du chapitre.

2.2 Modélisation des robots mobiles différentiels

La modélisation des robots mobiles différentiels consiste à établir les différents modèles (cinématique, dynamique, roues et défauts) qui décrivent au mieux le comportement du système. La modélisation cinématique consiste à trouver les relations géométriques qui régissent le système en étudiant son mouvement indépendamment des causes qui les produisent. D'autre part, la modélisation dynamique étudie le mouvement du robot mobile sous l'influence des forces qui lui sont appliquées. La modélisation des roues motrices consiste à étudier les forces résultantes de l'interaction des roues avec la surface. La modélisation des défauts consiste à donner une forme mathématique des défauts capteurs, actionneurs et aussi des perturbations externes.

Les travaux de (THUILLOT, 1995) classifient les robots mobiles à roues en cinq types. On s'intéresse au type (2,0) qui correspond aux robots mobiles composés de roues fixes ayant le même axe sans aucune roue directrice. Deux configurations sont investiguées : La première configuration représente les robots mobiles à deux roues et la deuxième représente les robots mobiles à quatre roues motrices et fixes. Vu que ces robots mobiles différentiels ne possèdent pas de roues directrices, la rotation se fait en variant les vitesses des roues de chaque côté du châssis.

Avant de proposer les différents modèles, quelques hypothèses et un descriptif des robots mobiles différentiels sont proposés.

Descriptif des robots mobiles différentiels et leur environnement

En ce référant à la figure 2.2 qui représente un robot mobile différentiel qui appartient à l'une des deux configurations, deux repères sont identifiés : un repère global (o, X, Y) fixé dans l'environnement et un repère local (p, X_l, Y_l)

attaché au centre de masse P du robot. Les différentes variables qui décrivent le robot sont listées comme suit :

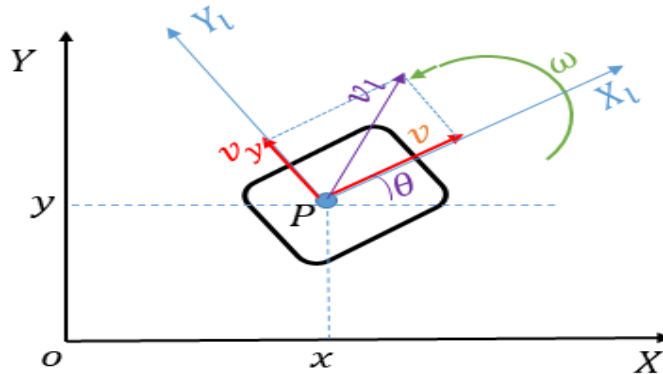


FIGURE 2.2 – Descriptif des robots différentiels et de l'environnement.

- (x, y) : Les coordonnées du point p par rapport au repère global, et qui décrivent la position du robot.
- θ : L'orientation de l'axe (p, X_l) du repère local par rapport au repère global.
- (v, v_y, v_l) : correspondent aux vitesses linéaire, latérale et longitudinale (respectivement), définies dans le repère local.
- (ω) : correspond à la vitesse angulaire du robot mobile définie dans le repère local.

Ces variables seront dans la suite regroupées dans deux vecteurs : le vecteur de la pose $q = [x, y, \theta]^T$ et le vecteur de vitesses $\eta = [v, \omega]^T$.

Hypothèses

Une modélisation complète qui décrit parfaitement le comportement des robots mobiles à roues est une tâche ardue. Par conséquent, certaines hypothèses doivent être faites :

- Le robot mobile est supposé être un bloc rigide sans aucune suspension.
- La surface est supposée horizontale, dure, homogène et parfaitement plane.
- La déformation des roues, patinage et les forces aérodynamiques sont négligés.
- Les vitesses de déplacement sont supposées très basses.

2.2.1 Modélisation cinématique

Les robots mobiles différentiels sont des systèmes non-holonomes (1.2.1). Les contraintes sont utilisées pour développer le modèle de chaque configuration. Les modèles cinématiques des Robots Mobiles Différentiels à deux Roues (RMD2R) et à quatre Roues (RMD4R) sont pratiquement identiques.

La figure 2.3 représente le schéma de la cinématique d'un RMD2R, où le point p représente le Centre de Masse (CdM) du robot, qui est à une distance d

du point A (le centre de l'essieu). Le CIR qui correspond au Centre Instantané de Rotation du robot mobile, est un point de vitesse nulle autour duquel le robot tourne. Il est le point d'intersection des lignes joignant les axes de rotation des roues.

Le vecteur de la pose q et le vecteur de vitesse ζ du RMD2R sont définis comme suit :

$$q = [x, y, \theta]^T, \quad \zeta = [v, v_y, \omega]^T \quad (2.1)$$

Ces variables et les repères sont définis dans la section précédente. De plus, chaque roue comprend deux vitesses, une vitesse longitudinale ($v_{g/d}$) et une vitesse latérale ($v_{y_{g/d}}$) (g fait référence à gauche et d fait référence à droite). Chaque roue est à une distance l du centre de l'essieu A . La vitesse linéaire v et angulaire ω sont données comme suit (MAC THI et al., 2016) :

$$v = \frac{v_d + v_g}{2}, \quad \omega = \frac{v_d - v_g}{2l} \quad (2.2)$$

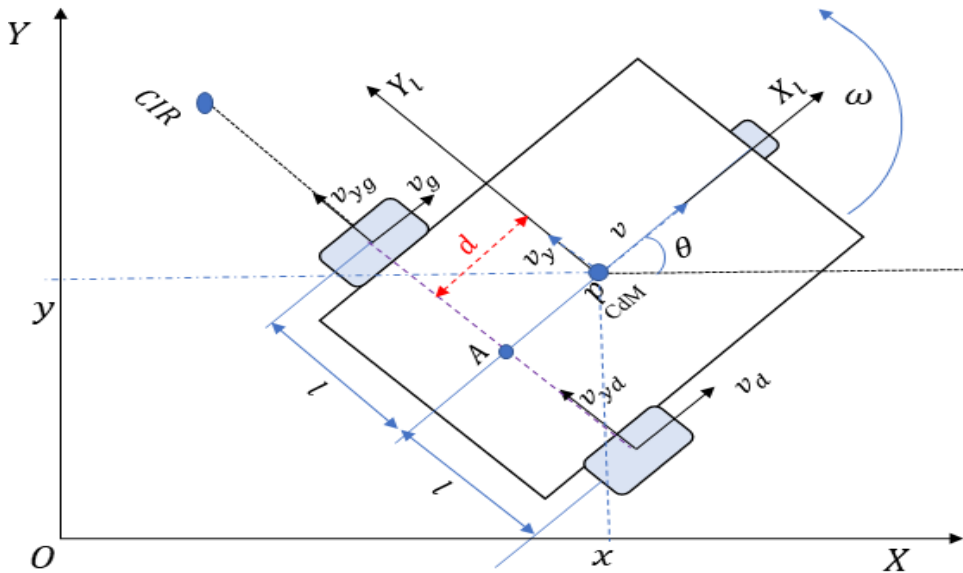


FIGURE 2.3 – Cinématique et diagramme d'un RMD2R.

L'équation cinématique du mouvement est obtenue grâce à la matrice de rotation orthogonale (R) :

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} v \\ v_y \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ v_y \\ \omega \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Ce type de robot ne peut se déplacer que dans la direction normale à l'axe des roues motrices. En d'autres termes, le robot doit satisfaire la contrainte de pur roulement et non glissement qui correspond à (FIERRO et al., 1998) :

$$v_y - d\omega = 0 \quad (2.4)$$

Cette contrainte est développée en exprimant v_y par rapport au repère global :

$$[-\sin \theta \quad \cos \theta \quad -d] \dot{q} = A(q) \dot{q} = 0 \quad (2.5)$$

Le modèle cinématique d'un RMD2R est décrit par les équations suivantes :

$$\dot{q} = S(q)\eta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -d \sin \theta \\ \sin \theta & d \cos \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$\eta = [v, \omega]^T$ est le vecteur d'entrée correspondant aux vitesses linéaire et angulaire. Il est aussi facile à vérifier que :

$$S^T(q)A^T(q) = 0 \quad (2.7)$$

Dans le cas où le centre de masse du robot coïncide avec le point A , l'équation (2.6) devient :

$$\dot{q} = S(q)\eta = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Prenons maintenant le cas d'un Robot Mobile Différentiel à quatre Roues (RMD4R) dont le schéma est représenté par la figure 2.4. Le modèle cinématique d'un RMD4R est exactement le même que celui d'un RMD2R (équation 2.6), car comme mentionné avant, ils font partie du même type (2,0). Par contre, vue la structure mécanique du RMD4R, il ne peut changer d'orientation qu'en glissant, et la vitesse latérale de chaque roue (v_{y_i}) n'égale zéro que dans le cas d'un déplacement droit (KOZŁOWSKI et al., 2004). La description de la vitesse latérale v_y et la conception de sa commande peuvent s'avérer une tâche difficile. Dans le cadre de cette thèse, les robots mobiles se déplacent avec de très basses vitesses (vitesse linéaire max = 0.1 m/sec, vitesse angulaire max = 1 rad/sec). De ce fait, le modèle du RMD4R est supposé être le même que celui du RMD2R et le glissement est négligé, et cela pour simplifier la conception de la commande.

En se basant sur la géométrie du RMD4R, les équations des vitesses longitudinales et latérales de chaque roue sont obtenues (PAZDERSKI et al., 2008) :

$$\begin{aligned} v_g &= v_1 = v_2 = v - l\omega \\ v_d &= v_3 = v_4 = v + l\omega \\ v_{y1} &= v_{y3} = v_y + b\omega \\ v_{y2} &= v_{y4} = v_y - a\omega \end{aligned} \quad (2.9)$$

v_g et v_d correspondent respectivement aux vitesses du côté gauche et du côté droit du robot. L'équation 2.2 est aussi valide pour le RMD4R. Il est aussi à noter que la vitesse angulaire d'une roue ω_i peut être calculée en divisant la vitesse linéaire v_i par le rayon r .

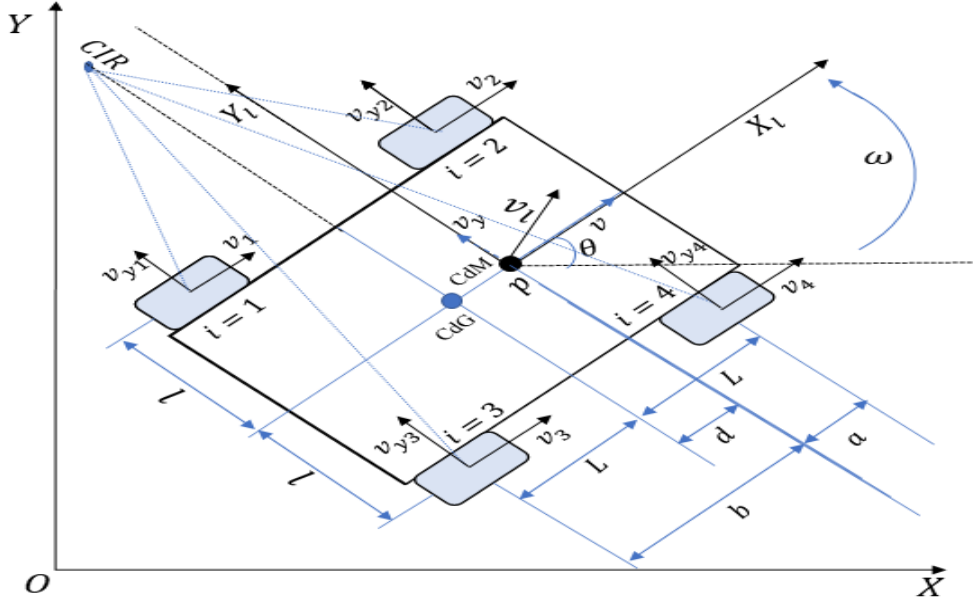


FIGURE 2.4 – Cinématique et diagramme d'un RMD4R.

2.2.2 Modélisation dynamique

Les équations dynamiques d'un robot mobile différentiel de type (2,0) (RMD4R/RMD2R), peuvent être obtenues en utilisant la méthode de Lagrange (SARKAR et al., 1994), comme suit :

$$M(q)\ddot{q} + \Upsilon(\dot{q}, q)\dot{q} + E(\dot{q}, q) + G(q) + \Lambda(\dot{q}, q) = B(q)\tau + A^T(q)\lambda \quad (2.10)$$

$M(q) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ est la matrice d'inertie, symétrique et définie positive. $\Upsilon(\dot{q}, q) \in \mathbb{R}^3$ est le vecteur des forces centripètes et forces de Coriolis. $E(\dot{q}, q) \in \mathbb{R}^3$ est le vecteur des forces résultantes du frottement avec la surface. $\Lambda \in \mathbb{R}^3$ décrit les dynamiques non-modélisées et les perturbations externes. $G(q) \in \mathbb{R}^3$ est le vecteur contenant les forces de gravité. $B \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ pour un RMD2R et $\in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ pour un RMD4R), est la matrice d'injection des entrées. $\tau \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ pour un RMD2R et $\in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ pour un RMD4R) est le vecteur d'entrées qui contient les couples générés par les actionneurs. $A(q) \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ est le vecteur des contraintes du système. $\lambda \in \mathbb{R}$ est le vecteur des forces de contrainte.

Avant de définir ces différents vecteurs et matrices pour les deux configurations des robots, prenons l'exemple des dynamiques d'un RMD4R représentées par la figure 2.5 :

Les couples générés par les actionneurs, développent des forces de traction F_{xi} avec $i \in (1, 2, 3, 4)$. Le contact avec la surface génère également des forces de résistance F_{ri} . Le glissement du RMD4R génère aussi des forces latérales F_{yi} . F_x est la force de traction longitudinale globale. F_y est la force latérale globale. F_r est la force de résistance longitudinale globale. τ_T est le couple actif global et τ_{Res} est le couple résistant.

Définissons maintenant les différentes matrices de l'équation 2.10 pour les deux configurations (KOLMANOVSKY et al., 1995, CARACCILO et al., 1999) :

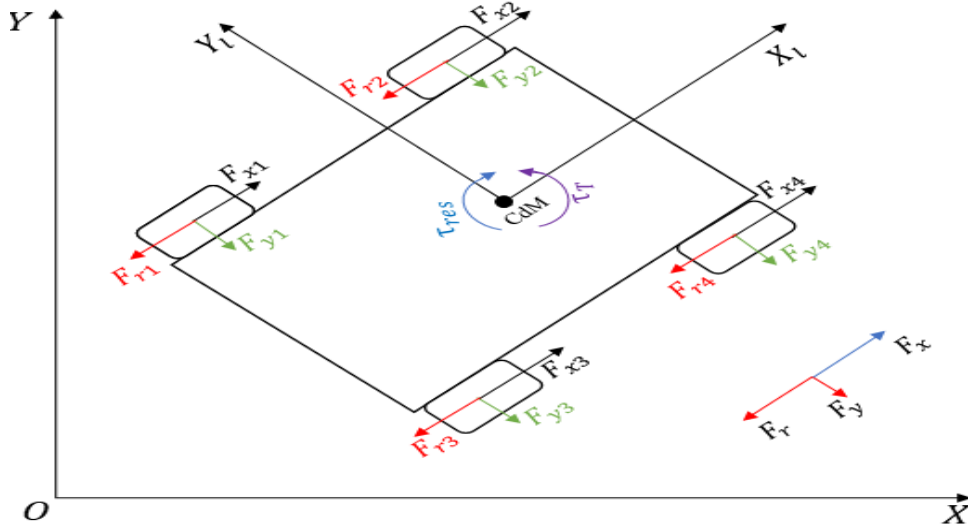


FIGURE 2.5 – Diagramme des dynamiques d'un RMD4R

$$M(q) = \begin{bmatrix} m & 0 & md \sin \theta \\ 0 & m & -md \cos \theta \\ md \sin \theta & -md \cos \theta & J \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

m est la masse du robot, J son inertie et d une grandeur géométrique définie par la figure 2.4.

$$B(q) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos \theta & \cos \theta & \cos \theta \\ \sin \theta & \sin \theta & \sin \theta & \sin \theta \\ -l & -l & l & l \end{bmatrix} \quad \text{pour un RMD4R} \quad (2.12)$$

$$B(q) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos \theta \\ \sin \theta & \sin \theta \\ -l & l \end{bmatrix} \quad \text{pour un RMD2R} \quad (2.13)$$

r est le rayon de la roue et l est défini par la figure 2.4.

$$\Upsilon(\dot{q}, q) = \begin{bmatrix} \frac{m(a+b)}{2} \dot{\theta}^2 \cos \theta \\ \frac{m(a+b)}{2} \dot{\theta}^2 \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{pour un RMD4R} \quad (2.14)$$

$$\Upsilon(\dot{q}, q) = \begin{bmatrix} md\dot{\theta}^2 \cos \theta \\ md\dot{\theta}^2 \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{pour un RMD2R} \quad (2.15)$$

a et b sont définis par la figure 2.4.

$$\lambda = -m(\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta)\dot{\theta} \quad (2.16)$$

$A(q)$ est défini par l'équation 2.5.

$$E(\dot{q}, q) = \begin{bmatrix} \cos \theta F_r(\dot{q}) - \sin(\theta) F_y(\dot{q}) \\ \sin \theta F_r(\dot{q}) + \cos(\theta) F_y(\dot{q}) \\ \tau_{Res} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$E(\dot{q}, q)$ est exprimé par rapport au repère inertiel, sachant que pour un RMD4R on a :

$$\begin{aligned} F_r(\dot{q}) &= F_{r1}(\dot{q}) + F_{r2}(\dot{q}) + F_{r3}(\dot{q}) + F_{r4}(\dot{q}) \\ F_y(\dot{q}) &= F_{y1}(\dot{q}) + F_{y2}(\dot{q}) + F_{y3}(\dot{q}) + F_{y4}(\dot{q}) \\ \tau_{Res}(\dot{q}) &= a [F_{y2}(\dot{q}) + F_{y3}(\dot{q})] - b [F_{y1}(\dot{q}) + F_{y4}(\dot{q})] \\ &\quad + l[F_{r1}(\dot{q}) + F_{r2}(\dot{q}) - F_{r3}(\dot{q}) - F_{r4}(\dot{q})] \end{aligned} \quad (2.18)$$

Et pour un RMD2R on obtient :

$$\begin{aligned} F_r(\dot{q}) &= F_{rg}(\dot{q}) + F_{rd}(\dot{q}) \\ F_y(\dot{q}) &= 0 \\ \tau_{Res}(\dot{q}) &= l[F_{rg}(\dot{q}) - F_{rd}(\dot{q})] \end{aligned} \quad (2.19)$$

F_{rg} est la force résistante de la roue gauche et F_{rd} est la force résistante de la roue droite.

Pour développer la force résistante longitudinale F_r , la force résistante latérale F_y et le couple résistant τ_{res} , il faut déterminer comment la charge gravitationnelle mg est partagée entre les différentes roues (F_{zi}) et introduire un modèle de frottement de Coulomb qui est dû au contact entre la roue et la surface (CARACCILO et al., 1999) :

$$\begin{aligned} F_{z1} = F_{z3} &= \frac{b \times m \times g}{2(a + b)} \\ F_{z2} = F_{z4} &= \frac{a \times m \times g}{2(a + b)} \end{aligned} \quad (2.20)$$

g est l'accélération gravitationnelle.

Le contact entre la roue et la surface dure est supposé avoir une forme rectangulaire, et la force verticale de la roue produit une distribution de pression uniforme. Dans ces conditions on obtient :

$$F_{ri} = \zeta_d F_{zi} \operatorname{sgn}(\dot{x}_i), \quad F_{yi} = \zeta_y F_{zi} \operatorname{sgn}(\dot{y}_i) \quad (2.21)$$

ζ_d et ζ_y sont les coefficients du frottement sec dans les directions longitudinale et latérale. Ces coefficients sont supposés être indépendants des vitesses du robot (WONG, 2008).

Il est à noter que le couple de chaque roue τ_i , le couple total τ_T , la force active F_x et la force latérale F_y peuvent facilement être obtenus par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \tau_i &= r F_{x_i} \\
 F_x &= \frac{\cos \theta}{r} \left(\sum_{i=1}^4 \tau_i \right) \\
 F_y &= \frac{\sin \theta}{r} \left(\sum_{i=1}^4 \tau_i \right) \\
 \tau_T &= l(-F_{x_1} - F_{x_2} + F_{x_3} + F_{x_4})
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Vu que la surface est supposée être horizontale, l'énergie potentielle est constante. Par conséquent le vecteur contenant les forces de gravité est nul :

$$G(q) = 0 \tag{2.23}$$

Ces résultats sont aussi valables pour un RMD2R, sachant que le couple gauche τ_g d'un RMD2R est équivalent à la somme des deux couples gauches ($\tau_1 + \tau_2$) d'un RMD4R, et d'une manière similaire avec le côté droit.

En dérivant le modèle cinématique de l'équation 2.6 :

$$\ddot{q} = \dot{S}(q)\dot{\eta} + S(q)\ddot{\eta} \tag{2.24}$$

et en substituant les équations 2.6 et 2.24 dans l'équation 2.10, on obtient :

$$M(q)\dot{S}(q)\dot{\eta} + S(q)\ddot{\eta} + \Upsilon(\dot{q}, q)S(q)\dot{\eta} + E(\dot{q}, q) + \Lambda(\dot{q}, q) = B(q)\tau + A^T(q)\lambda \tag{2.25}$$

En multipliant les deux cotés de l'équation 2.25 par $S^T(q)$, afin d'éliminer le terme $S^t(q)A^T(q)$ (équation 2.7), on obtient :

$$\bar{M}_1(q)\dot{\eta} + \bar{M}_2(q)\ddot{\eta} + \bar{\Upsilon}(\dot{q}, q) + \bar{E}(\dot{q}, q) + \bar{\Lambda} = \bar{B}(q)\tau \tag{2.26}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \bar{M}_1 &= S^T(q)M(q)S(q) \in R^{2 \times 2} \\
 \bar{M}_2 &= S^T(q)[M(q)\dot{S}(q) + \Upsilon(\dot{q}, q)S(q)] \in R^{2 \times 2} \\
 \bar{E} &= S^T(q)E(\dot{q}, q) \in R^2 \\
 \bar{B} &= S^T(q)B(q) \in R^{2 \times 4} / R^{2 \times 2} \\
 \bar{\Upsilon} &= S^T(q)\Upsilon(\dot{q}, q) \in R^2 \\
 \bar{\Lambda} &= S^T(q)\Lambda \in R^2
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

2.2.3 Modélisation odométrique

L'odométrie est l'une des solutions les plus populaires pour l'estimation de la position et l'orientation des robots mobiles à roues. Les encodeurs attachés à chaque roue, fournissent des informations sur le déplacement du robot, qui permettent la reconstitution du mouvement global du robot. En effet, en partant d'une pose initiale connue et en intégrant les déplacements mesurés, on

peut ainsi calculer à chaque instant la pose courante du robot. Considérons le vecteur d'état q_k à un instant k :

$$q_k = [x, y, \theta]_k^T \quad (2.28)$$

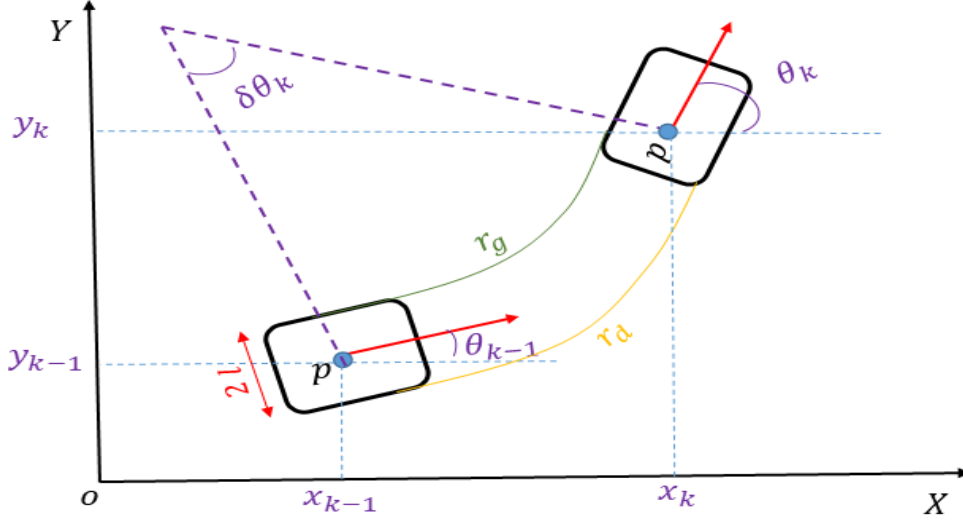


FIGURE 2.6 – Diagramme de l'odométrie d'un robot mobile.

D'après la figure 2.6, la rotation élémentaire $\delta\theta_k$ et la translation élémentaire δd_k parcourue par le point p de l'instant $k-1$ à l'instant k , sont données par les équations suivantes :

$$\delta\theta_k = \frac{r_g - r_d}{2l} \quad (2.29)$$

$$\delta d_k = \frac{r_g + r_d}{2} \quad (2.30)$$

r_g et r_d représentent les distances parcourues par la roue gauche et la roue droite respectivement, obtenues à partir des mesures des encodeurs.

À partir de la géométrie de la figure 2.6, le déplacement du robot mobile pour un instant d'échantillonnage k est obtenu (GANGANATH et al., 2012) :

$$\begin{aligned} \delta x_k &= \frac{\delta d_k}{\delta\theta_k} [\sin(\theta_{k-1} + \delta\theta_k) - \sin(\theta_{k-1})] \\ \delta y_k &= \frac{\delta d_k}{\delta\theta_k} [\cos(\theta_{k-1} + \delta\theta_k) - \cos(\theta_{k-1})] \end{aligned} \quad (2.31)$$

En définissant un nouveau vecteur d'entrée $\bar{\eta}_k$ contenant la translation et la rotation élémentaires :

$$\bar{\eta}_k = [\delta d_k \ \delta\theta_k]^T \quad (2.32)$$

Pour une petite valeur de $\delta\theta_k$, le modèle odométrique suivant est obtenu :

$$q_k = q_{k-1} + F_k \bar{\eta}_k \quad (2.33)$$

avec

$$F_k = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{k-1} + \frac{\delta\theta_k}{2}) & 0 \\ \sin(\theta_{k-1} + \frac{\delta\theta_k}{2}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

En négligeant le glissement pour les basses vitesses, le modèle odométrique de l'équation 2.34 est aussi valable pour un RMD4R, sachant que :

$$\begin{aligned} r_g &= \frac{r_1 + r_2}{2} \\ r_d &= \frac{r_3 + r_4}{2} \end{aligned} \quad (2.35)$$

r_i est la distance parcourue par la roue i .

2.2.4 Modélisation des roues et des défauts

D'après la figure 2.5, la dynamique d'une roue motrice i est donnée par l'équation suivante (LIAO et al., 2017) :

$$J_i \dot{\omega}_i + C_{r_i} \omega_i = \tau_i - r F_{r_i} \quad (2.36)$$

ω_i est la vitesse angulaire de la roue i , J_i est l'inertie de la roue i au tours de son axe de rotation, C_{r_i} est la constante de frottement visqueuse et F_{r_i} est la force de résistance définie par l'équation 2.21.

Comme il est montré par la figure 2.7, trois classes de défauts et de perturbations sont prises en compte dans le cadre de cette thèse :

- Perturbation externes.
- Défauts actionneurs.
- Défauts capteurs.

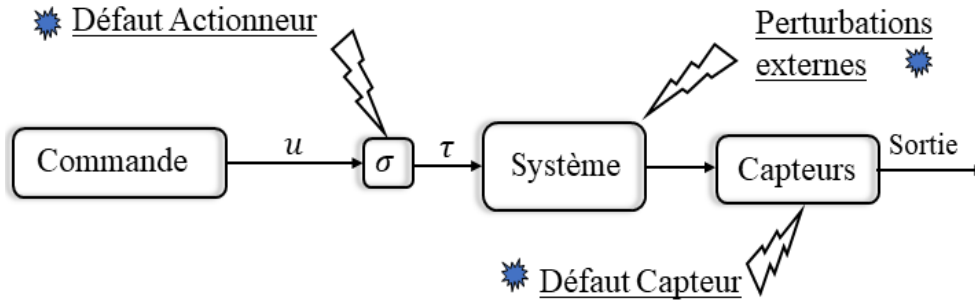


FIGURE 2.7 – Défauts affectant la navigation autonome.

Considérons le système nonlinéaire suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f(q, \dot{q}, \eta) + \bar{B}(q)\tau + \bar{\Lambda} \\ z &= h(q) \end{aligned} \quad (2.37)$$

f et h sont des fonctions nonlinéaires. z est le vecteur des mesures capteurs, $\bar{\Lambda}$ englobe les perturbations externes et les dynamiques non modélisées et τ est le vecteur de commande (couples).

Perturbations externes

Les perturbations externes traitées dans le cadre de cette thèse sont de type additif. $\bar{\Lambda}$ de l'équation 2.26 englobe les perturbations externes et les dynamiques non modélisées. $\bar{\Lambda}$ se divise en deux termes : les perturbations qui accèdent au système à travers le canal des entrées, connues sous l'appellation "*Matched External Disturbances*" (MED), et les perturbations qui affectent directement le système sans passer par le canal des entrées "*Unmatched External Disturbances*" (UED) :

$$\bar{\Lambda} = \bar{B}\psi + \Lambda_0 \quad (2.38)$$

ψ (MED) et Λ_0 (UED) sont supposées être uniformément bornées : $\|\psi\|_\infty < \epsilon$ et $\|\Lambda_0\|_\infty < \epsilon$. pour la modélisation dynamique des systèmes robotiques mobiles, plusieurs forces externes (dont les forces aérodynamiques) sont négligées. Une telle hypothèse sur une borne uniforme des dynamiques non modélisées et des perturbations externes est plutôt restrictive et ne peut être toujours garantie. Par conséquent, des MED avec une borne supérieure inconnue et proportionnelle aux signaux de commandes sont envisagées :

$$\psi^i = \rho_1 (f_1(\eta_e^i))^{\rho_2} (|\bar{B}^i \tau|)^{\rho_3} + \psi_0^i \quad (2.39)$$

η_e^i est l'erreur entre l'état ' i ' estimé et l'état désiré. $\rho_1 > 0$, $0 < \rho_2 < 1$ et $0 < \rho_3 < 1$. $\|\psi_0\|_\infty < \epsilon$ est une perturbation uniformément bornée. f_1 est une fonction et \bar{B}^i représente la ligne i de la matrice d'injection des entrées.

Défauts actionneurs

Un actionneur défaillant est un actionneur qui n'est plus en mesure de générer les couples de commande développés, cela se traduit par une perte d'efficacité (totale ou partielle). Le modèle de ce défaut est donné par l'équation suivante :

$$\tau = \sigma u \quad (2.40)$$

τ est le couple appliqué au système, u est le signal de commande développé. $\sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ est la matrice d'efficacité. Si $\sigma_i = 0$, l'actionneur est complètement défaillant. Si $\sigma_i = 1$ alors l'actionneur est fonctionnel. D'autres part, si $0 < \sigma_i < 1$, l'actionneur perd de son efficacité mais il reste partiellement fonctionnel. Dans le cadre de cette thèse, on considère uniquement la perte totale de l'efficacité des actionneurs.

Remarque sur la commandabilité du système :

Afin de s'assurer de la compensation des défauts actionneurs, une condition sur la commandabilité du système est donnée par l'équation suivante :

$$\text{Rang}(\bar{B} \sigma) \geq 2 \quad (2.41)$$

Il est clair que pour les RMD2R, cette condition n'est pas satisfaite dans le cas où l'actionneur perd toute son efficacité. Si $\sigma_i = 0$ pour un RM2DR, il doit être arrêté, car le système n'est plus commandable.

Pour les RMD4R, 8 configurations de défauts actionneurs préservent la commandabilité du système (rang=2) : Un seul actionneur défectueux (quatre possibilités) et deux actionneurs défectueux à condition qu'ils soient pas du même côté (quatre possibilités).

Défauts capteurs

Un défaut capteur peut être divisé en plusieurs classes (SOBHANI TEHRANI et al., 2009) :

- Un biais : $z = z_n + b$ avec $b \neq 0$
- Une dérive : $z = z_n + \bar{b} t$ avec $0 < \bar{b} < \epsilon$ et $\forall t > t_f$
- Un bruit : $z = z_n + \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ avec $|\sigma^2| > 0$
- Un blocage : $z = z_n(t_f)$ $\forall t > t_f$
- Une erreur de calibrage : $z = \hat{b} z_n$ avec $0 < \hat{b} < 1$

Où z_n est la mesure capteur nominale sans défaut, z est la mesure capteur, t_f l'instant d'apparition du défaut, $\epsilon \ll 1$ et $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ est une loi normale, avec une moyenne nulle et une variance σ^2 .

2.3 Localisation et fusion de données

Dans cette section, les filtres bayésiens pour la fusion de données multi-capteur sont proposés. Le filtre de Kalman et sa forme canonique (le filtre informationnel) sont introduits, ainsi que leurs formes étendues pour le cas non linéaire.

2.3.1 Filtre de Kalman

Le filtre de Kalman est un filtre bayésien sous l'hypothèse gaussienne et modèles linéaires. C'est un estimateur récursif qui estime les états du système à partir des mesures bruitées tout en minimisant l'erreur quadratique moyenne (AL HAGE, 2016).

Considérons le système linéaire discret suivant :

$$q_{k+1} = A_k q_k + B_k \eta_k + \rho_k \quad (2.42)$$

$$z_k = C_k q_k + \phi_k \quad (2.43)$$

Où $q_k \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $\eta_k \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur d'entrée, $z_k \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'observation, $A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice d'état, $B_k \in \mathbb{R}^{n \times r}$ est la matrice d'injection des entrées, $C_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est la matrice d'observation, $\rho_k \in \mathbb{R}^n$ est le bruit du modèle considéré comme étant un bruit blanc gaussien de valeur moyenne nulle et de matrice de covariance $Q_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Phi_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est le bruit associé aux observations, considéré comme étant un bruit blanc gaussien de valeur moyenne nulle et de matrice de covariance $R_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Sachant que les deux bruits sont indépendants :

$$E \left[\begin{pmatrix} \rho_k \\ \Phi_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_k^T & \Phi_k^T \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} Q_k & 0 \\ 0 & R_k \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

Où E est l'espérance.

L'algorithme du filtre de Kalman se divise en deux étapes, une étape de prédiction basée sur un modèle nominal d'évolution, et une étape de correction qui prend en compte les observations des capteurs.

Étape de prédiction :

$$q_{k/k-1} = A_{k-1}q_{k-1/k-1} + B_{k-1}\eta_{k-1} \quad (2.45)$$

$$P_{k/k-1} = A_{k/k-1}P_{k-1/k-1}A_{k/k-1}^T + Q_{k-1} \quad (2.46)$$

Étape de correction :

$$K_k = P_{k/k-1}C_k^T [C_kP_{k/k-1}C_k^T + R_k]^{-1} \quad (2.47)$$

$$q_{k/k} = q_{k/k-1} + K_k (z_k - C_kq_{k/k-1}) \quad (2.48)$$

$$P_{k/k} = P_{k/k-1} - P_{k/k-1}C_k^T K_k^T \quad (2.49)$$

Où : $K_k \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est le gain de Kalman et $P_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice de covariance de l'erreur d'estimation.

2.3.2 Filtre informationnel

Le gain de Kalman nécessite l'inversion du terme $[C_kP_{k/k-1}C_k^T + R_k]$ ayant la dimension du vecteur d'observation, ce qui peut devenir très coûteux pour les applications avec un grand nombre de capteurs. Une solution est d'utiliser la forme canonique du filtre de Kalman, connue sous le nom du Filtre Informationnel (FI) (BOZORG et al., 1998). (voir annexe A.1)

Le filtre informationnel se caractérise par l'utilisation des formes informationnelles du vecteur d'état q_k et de la matrice de covariance P_k , intitulées :

— La matrice informationnelle Y_k

$$Y_k = P_k^{-1} \quad (2.50)$$

— Et le vecteur informationnel y_k

$$y_k = Y_k q_k \quad (2.51)$$

Y_k est aussi appelée la matrice de Fisher, contrairement à la matrice de covariance, elle mesure la certitude de l'estimation. Par conséquent, une incertitude globale équivaut à une valeur nulle de la matrice informationnelle, au lieu de mettre une valeur infinie pour la matrice de covariance.

Comme avec le filtre de Kalman, le filtre informationnel se décompose en deux étapes : étape de prédiction et étape de correction (ABCI, AL HAGE et al., 2018).

Étape de prédiction :

$$Y_{k/k-1} = [A_{k/k-1} Y_{k-1/k-1}^{-1} A_{k/k-1}^T + Q_{k-1}]^{-1} \quad (2.52)$$

$$y_{k/k-1} = Y_{k/k-1} [A_{k-1} Y_{k-1/k-1}^{-1} y_{k-1/k-1} + B_{k-1} \eta_{k-1}] \quad (2.53)$$

Étape de correction :

$$Y_{k/k} = Y_{k/k-1} + \sum_{c=1}^m I_c(k) \quad (2.54)$$

$$y_{k/k} = y_{k/k-1} + \sum_{c=1}^m i_c(k) \quad (2.55)$$

Où m est le nombre observations z_k^c qui composent le vecteur d'observation z_k , $I_c(k)$ and $i_c(k)$ sont la matrice et le vecteur des contributions informationnelles associées à l'observation z_k^c , avec :

$$I_c(k) = (C_k^c)^T (R_k^c)^{-1} C_k^c \quad (2.56)$$

$$i_c(k) = (C_k^c)^T (R_k^c)^{-1} z_k^c \quad (2.57)$$

où C_k^c est la matrice d'observation reliée à la mesure z_k^c et R_k^c est la matrice de covariance reliée à la mesure z_k^c .

D'après les équations 2.56 et 2.57, l'étape de correction du filtre informationnel est une somme des informations provenant des observations capteurs, ce qui n'est pas le cas du filtre de Kalman. Cette forme est idéale pour une architecture de fusion de données distribuée. Elle est aussi très intéressante pour le diagnostic à base de bancs de filtres. En effet, en cas d'exclusion d'un défaut capteur, il suffit juste de supprimer ses innovations des vecteur et matrice informationnels.

2.3.3 Filtre informationnel étendu

Pour les systèmes non-linéaires comme les robots mobiles à roues, une extension du filtre informationnel nommée *filtre informationnel étendu* est utilisée. Une linéarisation autour de la trajectoire estimée est faite en calculant les jacobiennes des fonctions non-linéaires.

Considérons le système non-linéaire suivant :

$$q_{k+1} = f(q_k, \eta_k) + \rho_k \quad (2.58)$$

$$z_k = h(q_k) + \Phi_k \quad (2.59)$$

où f et h sont deux fonctions non-linéaires.

Comme pour le cas du filtre informationnel, l'algorithme du filtre informationnel étendu est composée de deux étapes :

Étape de prédiction :

$$Y_{k/k-1} = [A_{k-1} Y_{k-1/k-1} A_{k-1}^T + B_{k-1} Q_k^\eta B_{k-1}^T + Q_{k-1}]^{-1} \quad (2.60)$$

$$y_{k/k-1} = Y_{k/k-1} f(q_{k-1/k-1}, u_{k-1}) \quad (2.61)$$

$$A_k = \left. \frac{\partial f}{\partial q} \right|_{q=q_{k/k-1}}, \quad B_k = \left. \frac{\partial f}{\partial \eta} \right|_{\eta=\eta_k} \quad (2.62)$$

Étape de correction :

$$Y_{k/k} = Y_{k/k-1} + \sum_{c=1}^m I_c(k) \quad (2.63)$$

$$y_{k/k} = y_{k/k-1} + \sum_{c=1}^m i_c(k) \quad (2.64)$$

$$C_k = \left. \frac{\partial h}{\partial q} \right|_{q=q_{k/k-1}} \quad (2.65)$$

Où Q_k^η est la matrice de covariance associée au bruit de l'entrée, et :

$$I_c(k) = (C_k^c)^T (R_k^c)^{-1} C_k^c \quad (2.66)$$

$$i_c(k) = (C_k^c)^T (R_k^c)^{-1} [(z_k^c - h^c(q_{k/k-1})) + C_k^c q_{k/k-1}] \quad (2.67)$$

2.4 Commande pour le suivi de trajectoire

Pour le suivi de trajectoire, une cascade de commande cinématique et commande dynamique par modes glissants est proposée (figure 2.8). Les signaux de commande en vitesse η_c (équation 2.6) sont convertis en signaux de commande en couple u (équation 2.26) afin de prendre en considération les dynamiques du robot, y compris les défauts actionneurs et les perturbations externes discutés dans la section 2.2.4.

Quelques notations :

Considérons un signal continu $x \in \mathbb{R}^n$, alors :

$$\|x(\cdot)\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty \sum_{i=1}^n x_i^2(t) dt} \quad (2.68)$$

$$\|x(\cdot)\|_\infty = \sup_{t \geq 0} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i(t)| \quad (2.69)$$

$$\mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x(\cdot)\|_2 < \infty\} \quad (2.70)$$

$$\mathbb{L}_\infty = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x(\cdot)\|_\infty < \infty\} \quad (2.71)$$

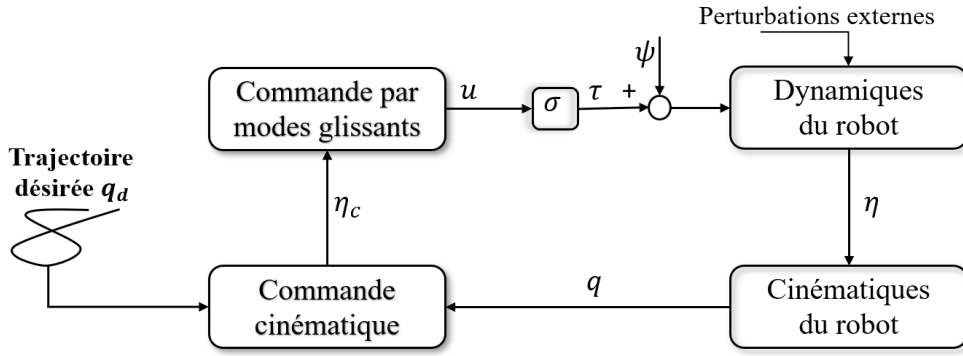


FIGURE 2.8 – Commande pour le suivi de trajectoire

L'objectif de la loi de commande proposée :

L'objectif de la commande est de développer une loi de commande robuste pour les systèmes robotiques mobiles différentiels, qui force l'état $q(t)$ à asymptotiquement suivre une trajectoire de référence q_d , tout en prenant en considération les défauts actionneurs de l'équation 2.40 et les perturbations externes introduites par l'équation 2.39.

Définissons l'erreur du suivi de trajectoire q_e :

$$q_e = q - q_d = [x_e \ y_e \ \theta_e]^T \quad (2.72)$$

Sachant que la trajectoire désirée q_d est obtenue à partir de l'équation 2.6 :

$$\dot{q}_d = S(q_d) \eta_d \quad (2.73)$$

où

$$q_d = [x_d \ y_d \ \theta_d]^T \quad (2.74)$$

$$\eta_d = [v_d \ \omega_d]^T \quad (2.75)$$

Hypothèses :

- Le vecteur de la trajectoire désirée q_d , le vecteur de vitesse désirée correspondant η_d et leurs dérivées sont tous supposés continus et uniformément bornés. En d'autres termes, $q_d, \dot{q}_d, \eta_d, \dot{\eta}_d \in \mathbb{L}_\infty$.
- La vitesse désirée linéaire v_d est strictement positive ; $v_d > 0$.

L'objectif de commande est reformulé comme suit :

À chaque instant t , et en présence de perturbations externes ϕ (équation 2.39) et/ou des défauts actionneurs σ (équation 2.40), une commande cinématique est développée, qui génère un signal de commande lisse η_c (équation 2.6), de sorte que : $\lim_{t \rightarrow \infty} (q_e(t)) = 0$. Ensuite, une commande dynamique par modes glissants est développée, par laquelle un signal de commande dynamique u (équations 2.26 et 2.40) est calculé, tout en satisfaisant : $\lim_{t \rightarrow \infty} (\eta_e = \eta(t) - \eta_c(t)) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} (q_e(t)) = 0$, $(q_e, \dot{q}_e, \eta_e, \dot{\eta}_e) \in \mathbb{L}_\infty$ ou \mathbb{L}_2 , et en prenant en considération les défauts et perturbations mentionnés.

2.4.1 Commande cinématique

L'objectif de la commande cinématique est de calculer un signal de commande $\eta_c = [v_c \ \omega_c]^T$ qui assure une convergence asymptotique de l'erreur de suivi q_e vers zéro. Supposons qu'on mesure seulement la position du robot $\bar{q} = [x \ y]^T$, et que le centre de masse du robot coïncide avec son centre de géométrie ($d = 0$). Par conséquent, d'après l'équation 2.6 on obtient :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ \omega_c \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

La matrice d'injection est singulière. Une solution est d'ajouter un intégrateur (MA, ZHENG et al., 2014). En dérivant l'équation 2.76, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -v_c \sin \theta \\ \sin \theta & v_c \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_c \\ \omega_c \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

Le nouveau vecteur d'entrée est :

$$\bar{\eta}_c = [\dot{v}_c \ \omega_c]^T \quad (2.78)$$

La matrice d'injection est inversible si et seulement si $v_c \neq 0$.

L'équation 2.77 peut être réécrite sous cette forme :

$$\ddot{\bar{q}} = G \bar{\eta}_c \quad (2.79)$$

où \bar{q} est la position du robot et G est la matrice d'injection.

Considérons l'erreur de suivi $\bar{q}_e = \bar{q} - \bar{q}_d$, entre la position réelle du robot \bar{q} et la position désirée \bar{q}_d . Sa deuxième dérivée est donnée par :

$$\ddot{\bar{q}}_e = \ddot{\bar{q}} - \ddot{\bar{q}}_d = G \bar{\eta}_c - \ddot{\bar{q}}_d \quad (2.80)$$

Le signal de commande modifié suivant est proposé :

$$\bar{\eta}_c = G^{-1}(\ddot{\bar{q}}_d - \alpha_1 \dot{\bar{q}}_e - \alpha_2 \bar{q}_e) \quad (2.81)$$

où $\alpha_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ et $\alpha_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ sont deux matrices définies positives.

Analyse de stabilité :

En substituant 2.81 dans 2.80, on obtient :

$$\ddot{\bar{q}}_e + \alpha_1 \dot{\bar{q}}_e + \alpha_2 \bar{q}_e = 0 \quad (2.82)$$

Par un simple placement de pôles, α_1 et α_2 sont choisis pour garantir la stabilité du système. En d'autres termes, le polynôme $s^2 + \alpha_1^i s + \alpha_2^i$ doit être Hurwitz. Par conséquent, une solution particulière est donnée comme suit :

$$\alpha_1^i = 2\sqrt{\alpha_2^i} \quad (2.83)$$

ou i est un élément de la diagonale des deux matrices et s est la variable de Laplace.

La loi de commande développée dépend de la matrice d'injection G . L'état θ n'est pas commandé, et son estimation varie avec le temps, ce qui va engendrer des déplacements en forme de zigzag autour de la trajectoire désirée pour les applications en temps réel. Les variations de θ sont limitées en fixant G selon des intervalles de θ . Cela est fait en utilisant le signe de G . Considérons l'équation 2.84 :

$$\text{sign}(G) = \begin{bmatrix} \text{sign}(\cos \theta) & -\text{sign}(\sin \theta)v_c \\ \text{sign}(\sin \theta) & \text{sign}(\cos \theta)v_c \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

La matrice d'injection $\text{sign}(G)$ peut prendre les quatre formes suivantes :

$$\begin{aligned} \text{sign}(G_1) &= \begin{bmatrix} 1 & -v_c \\ 1 & v_c \end{bmatrix} & \text{sign}(G_2) &= \begin{bmatrix} -1 & -v_c \\ 1 & -v_c \end{bmatrix} \\ \text{sign}(G_3) &= \begin{bmatrix} -1 & v_c \\ -1 & -v_c \end{bmatrix} & \text{sign}(G_4) &= \begin{bmatrix} 1 & v_c \\ -1 & v_c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{avec} \begin{cases} \text{sign}(G_1) & \text{si } \theta \in [2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}[\\ \text{sign}(G_2) & \text{si } \theta \in [2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \pi[\\ \text{sign}(G_3) & \text{si } \theta \in [2k\pi + \pi, 2k\pi + 3\frac{\pi}{2}[\\ \text{sign}(G_4) & \text{si } \theta \in [2k\pi + 3\frac{\pi}{2}, 2(k+1)\pi[\end{cases}$$

où $k \in \mathbb{Z}$

Par conséquent, le signal de commande modifié est donné par l'équation suivante :

$$\bar{\eta}_c = \text{sign}(G)^{-1}(\ddot{q}_d - \alpha_1 \dot{q}_e - \alpha_2 \bar{q}_e) \quad (2.85)$$

Et le signal de commande pour le modèle de l'équation 2.6 est donné par :

$$\eta_c = \begin{bmatrix} v_c \\ \omega_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int \bar{\eta}_c(1) dt \\ \bar{\eta}_c(2) \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

2.4.2 Commande dynamique par modes glissants

Introduction à la commande par modes glissants

La notion de modes glissants a été introduite dans le contexte des systèmes de commande à relais dans l'article de G. Nikol'skii (NIKOL'SKII, 1934) début du 20^{ème} siècle. La commande par modes glissants est une loi de commande de commutation à grande vitesse, qui force les trajectoires du système à suivre un comportement établi par un espace contraint appelé la surface de glissement S , tout en les maintenant sur cette surface. Une fois la contrainte satisfaite, le système rentre dans un régime de glissement et devient insensible aux incertitudes et à une certaine classe de perturbations.

La conception de la commande par modes glissants se décompose en deux étapes (BERNUAU et al., 2014) :

- La synthèse de la fonction de la surface de glissement S , qui fournit les performances désirées.
- La conception de la commande qui assure que toutes les trajectoires du système glissent sur la surface S .

La commande par modes glissants a une structure variable qui varie d'une manière continue selon la position du vecteur d'état q par rapport à la surface de glissement S . Si q est en dehors de la surface, le système est défini par des équations différentielles ordinaires. Dans le cas contraire (sur la surface), le système est défini par des équations différentielles à second membre discontinu. Les approches classiques pour résoudre ce genre d'équations différentielles ne sont plus valables quand le système est discontinu, et l'unicité des solutions n'est plus garantie (théorème de Cauchy–Lipschitz). (BRAIKIA, 2011)

Par conséquent, différentes approches ont été proposées pour remédier au problèmes des équations différentielles à termes discontinus. Parmi ces approches ; on trouve celle de Phillipov et celle d'Utkin.

Approche de Phillipov :

Phillipov (FILIPPOV, 1988) a proposé le théorème suivant :

Considérons le système suivant :

$$\dot{q} = f(q) \quad (2.87)$$

où la fonction f est continue dans l'espace sauf sur l'ensemble de glissement \bar{S} avec :

$$\bar{S} = (q \in \mathbb{R}^n / S(q) = 0) \quad (2.88)$$

Ayant la dynamique du système :

$$\dot{q} = \begin{cases} f^+, & \text{si } q \in \Omega^+ = \{q \in \mathbb{R}^n / S(q) > 0\} \\ f^-, & \text{si } q \in \Omega^- = \{q \in \mathbb{R}^n / S(q) < 0\} \end{cases} \quad (2.89)$$

et

$$\begin{cases} f_0^+ = \lim_{s \rightarrow 0^+} f^+ \\ f_0^- = \lim_{s \rightarrow 0^-} f^- \end{cases} \quad (2.90)$$

alors :

$$\dot{q} = \bar{\alpha} f_0^+ + (1 - \bar{\alpha}) f_0^- \quad (2.91)$$

avec :

$$\bar{\alpha} = \frac{\nabla S \cdot f^-}{\nabla S \cdot (f^- - f^+)} \quad (2.92)$$

Selon le théorème de Fillipov, la condition d'attractivité du vecteur q vers l'ensemble de la surface de glissement \bar{S} est donnée par l'équation suivante :

$$S \cdot \dot{S} < 0 \quad (2.93)$$

Cette condition garantit une convergence asymptotique du vecteur d'état vers \bar{S} , mais pas une convergence en temps fini. Afin de garantir une convergence en temps fini la condition de l'équation 2.93 est remplacée par l'équation suivante (SLOTINE et al., 1991) :

$$S \cdot \dot{S} < \mu |S| \quad (2.94)$$

Cette condition garantit un temps de convergence borné par $\frac{S(t=0)}{\mu}$.

Approche d'Utkin :

Utkin a proposé une approche où la commande discontinue est remplacée par une commande continue appelée la commande équivalente u^{eq} , de sorte que la commande par modes glissants u soit composée de deux termes (SINGH et al., 2004). Le premier terme est u^{eq} qui assure que les trajectoires du système atteignent la surface de glissement et y restent, et le deuxième terme est la commande correctrice u^c qui compense les variations autour de la surface S :

$$u = u^{eq} + u^c \quad (2.95)$$

La différence entre l'approche de Fillopov et l'approche d'Utkin, est que Fillopov considère que le système est discontinu par nature, alors que Utkin considère que c'est la commande qui est discontinue et que le système est continu.

Considérons le système affine en entrée suivant :

$$\dot{q} = f(q) + g(q)u \quad (2.96)$$

La commande équivalente est obtenue en résolvant l'équation suivante :

$$\dot{S}(q) = 0 \quad (2.97)$$

La commande équivalente peut être écrite sous la forme suivante (BRAIKIA, 2011) :

$$u^{eq} = -(\nabla S g(q))^{-1} \nabla S f(q) \quad (2.98)$$

La commande correctrice u^c prend sa robustesse de la fonction signe (*sign*). Elle est donnée par l'équation suivante (ABCI, ZHENG et al., 2017) :

$$u^c = g(q)^{-1} [-f(q) - P_1 \text{sign}(S) - P_2 S] \quad (2.99)$$

où P_1 et P_2 sont deux matrices définies positives.

Conception de la commande par modes glissants pour les systèmes robotiques mobiles

En substituant l'équation 2.40 dans l'équation 2.26, on obtient :

$$\bar{M}_1(q)\dot{\eta} + \bar{M}_2(q)\eta + \bar{\Upsilon}(\dot{q}, q) + \bar{E}(\dot{q}, q) + \bar{\Lambda} = \bar{B}(q)\sigma u \quad (2.100)$$

où u est le signal de commande par modes glissants, sachant que $u = [u_1, u_2, u_3, u_4]^T$ pour un RMD4R, et $u = [u_g, u_d]^T$ pour un RMD2R.

L'équation 2.100 peut être réarrangée comme suit :

$$\dot{\eta} = \bar{M}_1^{-1}\bar{B}\sigma u - \bar{M}_1^{-1}\bar{M}_2\eta - \bar{M}_1^{-1}\bar{\Upsilon} - \bar{M}_1^{-1}\bar{E} - \bar{\Lambda} \quad (2.101)$$

L'erreur de vitesse η_e est donnée par l'équation suivante :

$$\eta_e = \eta - \eta_c \quad (2.102)$$

où η_c est le signal de commande généré par la commande cinématique.

En dérivant l'équation 2.102, on obtient :

$$\dot{\eta}_e = \bar{M}_1^{-1}\bar{B}\sigma u - \bar{M}_1^{-1}\bar{M}_2\eta - \bar{M}_1^{-1}\bar{\Upsilon} - \bar{M}_1^{-1}\bar{E} - \bar{\Lambda} - \dot{\eta}_c \quad (2.103)$$

Considérons maintenant la surface de glissement suivante :

$$S = \begin{bmatrix} S_v \\ S_\omega \end{bmatrix} = \eta_e + P_1 \int \eta_e dt \quad (2.104)$$

où $P_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ est une matrice définie positive.

La dérivée de la surface de glissement est :

$$\dot{S} = \dot{\eta}_e + P_1\eta_e \quad (2.105)$$

La commande par modes glissants suivante est proposée :

$$u = \left(\bar{M}_1^{-1}\bar{B}\hat{\sigma} \right)^+ \left[\bar{M}_1^{-1}\bar{M}_2\eta + \bar{M}_1^{-1}\bar{\Upsilon} + \bar{M}_1^{-1}\bar{E} + \dot{\eta}_c - P_1\eta_e - P_2 S - P_3 \text{sign}(S) \right] \quad (2.106)$$

où $\hat{\sigma}$ est l'estimation de σ , $P_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ et $P_3 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ sont deux matrices définies positives. $(\bar{M}_1^{-1}\bar{B}\hat{\sigma})^+$ est une matrice pseudo inverse satisfaisant $(\bar{M}_1^{-1}\bar{B}\hat{\sigma})^+(\bar{M}_1^{-1}\bar{B}\hat{\sigma}) = I_2$ avec I_2 une matrice identité de dimension (2×2) et $\text{sign}(S) = [\text{sign}(S_v) \text{sign}(S_\omega)]^T$.

Analyse de stabilité

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{1}{2} \bar{q}_e^T \alpha_2 \bar{q}_e + \frac{1}{2} \dot{\bar{q}}_e^T \dot{\bar{q}}_e + \frac{1}{2} S^T S \quad (2.107)$$

En dérivant la fonction de Lyapunov on obtient :

$$\dot{V} = \bar{q}_e^T \alpha_2 \dot{\bar{q}}_e + \dot{\bar{q}}_e^T \dot{\bar{q}}_e + S^T \dot{S} \quad (2.108)$$

En remplaçant $\ddot{\bar{q}}_e$, $\dot{\eta}_e$ et \dot{S} par leurs équations 2.80, 2.103 et 2.105, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V} = \bar{q}_e^T \dot{\bar{q}}_e + \dot{\bar{q}}_e^T [G \bar{\eta}_c - \ddot{\bar{q}}_d] + S^T [& \bar{M}_1^{-1} \bar{B} \sigma u - \bar{M}_1^{-1} \bar{M}_2 \eta - \\ & \bar{M}_1^{-1} \bar{\Upsilon} - \bar{M}_1^{-1} \bar{E} - \bar{\Lambda} - \dot{\eta}_c + P_1 \eta_e] \end{aligned} \quad (2.109)$$

En substituant les signaux de commandes développés $\bar{\eta}_c$ de l'équation 2.81, et u de l'équation 2.105 dans l'équation 2.108, on obtient :

$$\dot{V} = \bar{q}_e^T \alpha_2 \dot{\bar{q}}_e + \dot{\bar{q}}_e^T [-\alpha_1 \dot{\bar{q}}_e - \alpha_2 \bar{q}_e] + S^T [-P_2 S - P_3 \text{sign}(S) - \bar{\Lambda}] \quad (2.110)$$

Étant donné deux vecteurs a et b et une matrice définie positive C , sachant que $[a^T \cdot C \cdot b = b^T \cdot C \cdot a]$, l'équation 2.109 devient :

$$\dot{V} = -\dot{\bar{q}}_e^T \alpha_1 \dot{\bar{q}}_e + S^T [-P_2 S - P_3 \text{sign}(S) - \bar{\Lambda}] \quad (2.111)$$

Il est clair que :

$$\text{si } P_3^i > \|(\bar{\Lambda}^i)\|_\infty \text{ alors } \dot{V} \leq 0 \quad (2.112)$$

avec $i = 1, 2$ correspond à un élément du vecteur et $\|(\bar{\Lambda}^i)\|$ est bornée.

Dans ce cas le système est stable et complètement insensible aux dynamiques non modélisées et aux perturbations externes ($\bar{\Lambda}$). De plus, à partir de l'équation 2.111, on peut conclure $\dot{\bar{q}}_e$, et $(\eta_e + \int \eta_e) \in L_2$. Donc d'après les équations 2.6, 2.72, 2.80, 2.82 et 2.102, on conclut que $q_e, q, \dot{\eta}_c, \eta, \dot{q}, \dot{\eta}_e, \dot{q}, \dot{q}_e, u \in L_\infty$, ce qui veut dire que tous les signaux au sein de la boucle fermée sont bornés.

2.4.3 Commande par modes glissants améliorée

Dans la section précédente, la stabilité du système dépend de la borne uniforme établie par l'équation 2.112, alors que dans la section 2.2.4, une certaine classe de perturbations externes qui n'est pas forcément bornée est à envisager.

Les équations 2.38 et 2.39, sous certaines conditions (absence de défauts actionneurs), peuvent être réécrites de cette façon pour un seul état v :

$$\psi^v = \rho_1 |S_v|^{\rho_2} (|\bar{B}^v u|)^{\rho_3} + \psi_0^v \quad (2.113)$$

où S_v est la surface de glissement pour un état v . $\rho_1 > 0$, $0 < \rho_2 < 1$ et $0 < \rho_3 < 1$. ψ_0 est une perturbation uniformément bornée. \bar{B}^v correspond à

la ligne v de la matrice d'injection \bar{B} , et ψ^v est une perturbation externe pas forcément bornée d'une manière uniforme.

Afin d'éviter des calculs très exhaustifs, supposons que la dérivée de la surface est directement définie par la commande :

$$\dot{S}_v = \bar{B}^v u = -p_2 S_v - p_3 \text{sign}(S_v) \quad (2.114)$$

où p_2 et p_3 sont deux scalaires positifs.

Introduisons la MED ψ^v dans l'équation 2.114 :

$$\dot{S}_v = \bar{B}^v u + \psi^v \quad (2.115)$$

En substituant la partie MED de l'équation 2.113 dans l'équation 2.115 on obtient :

$$\dot{S}_v = \bar{B}^v u + \rho_1 |S_v|^{\rho_2} (|\bar{B}^v u|)^{\rho_3} + \psi_0^v \quad (2.116)$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov est ensuite obtenue :

$$\dot{V} = -p_2 S_v^2 - p_3 |S_v| + \rho_1 S_v |S_v|^{\rho_2} - p_2 S_v - p_3 \text{sign}(S_v) \Big| ^{\rho_3} + \psi_0^v S_v \quad (2.117)$$

Il est clair que la stabilité du système n'est plus assurée. Pour cela on propose la modification suivante de loi de commande par modes glissants :

$$\bar{B}^v u = (-p_2 |S_v|^m - p_3) \text{sign}(S_v) \quad (2.118)$$

En substituant l'équation 2.118 dans l'équation 2.116, on obtient :

$$\dot{V} = -p_2 S_v^{m+1} - p_3 |S_v| + \rho_1 S_v |S_v|^{\rho_2} - p_2 |S_v|^m \text{sign}(S_v) - p_3 \text{sign}(S_v) \Big| ^{\rho_3} + \psi_0^v S_v \quad (2.119)$$

Sachant que si $0 < \rho < 1$ alors $|a + b|^\rho < |a|^\rho + |b|^\rho$, on obtient donc :

$$\dot{V} \leq -p_2 S_v^{m+1} - p_3 |S_v| + \rho_1 S_v p_2^{\rho_3} |S_v|^{m\rho_3 + \rho_2 + 1} + \rho_1 p_3^m |S_v|^{\rho_3 + 1} + \psi_0^v \quad (2.120)$$

Pour assurer la stabilité du système, m doit être choisi comme suit :

$$m = \frac{\rho_2 + 1 - \rho_3}{1 - \rho_3} \quad (2.121)$$

Par conséquent, la commande par modes glissants proposée par l'équation 2.106 est remplacée par l'algorithme suivant :

$$u = \left(\bar{M}_1^{-1} \bar{B} \hat{\sigma} \right)^+ \left[\bar{M}_1^{-1} \bar{M}_2 \eta + \bar{M}_1^{-1} \bar{\Upsilon} + \bar{M}_1^{-1} \bar{E} + \dot{\eta}_c - P_1 \eta_e - P_2 S S^T \text{sign}(S) - P_3 \text{sign}(S) \right] \quad (2.122)$$

Remarque :

En cas d'exclusion d'un actionneur défaillant $\hat{\sigma}_i = 0$, la roue attachée devient une roue libre. L'estimation de σ ($\hat{\sigma}$) suffit pour compenser le défaut actionneur. Car nous nous intéressons à la somme des couples générés de chaque côté du châssis du robot.

$$\begin{aligned}\tau_g &= \tau_1 + \tau_2 \\ \tau_d &= \tau_3 + \tau_4\end{aligned}\tag{2.123}$$

où τ_g et τ_d sont les couples gauche et droit respectivement.

2.5 Conclusion

La navigation autonome des systèmes robotiques mobiles est un domaine de recherche très actif. La navigation autonome nécessite deux algorithmes principaux qui sont l'estimation et la commande. Ces deux algorithmes dépendent d'une bonne modélisation du système. Par conséquent les différents modèles qui décrivent le comportement des robots mobiles différentiels à deux roues et à quatre roues ont été introduits. Vue la nature incertaine des systèmes robotiques mobiles, des observateurs à entrées inconnues ont été proposés, avec un accent sur le filtre informationnel étendu (filtre bayésien récursif). Pour le suivi de trajectoire, deux commandes ont été développées. Une commande cinématique qui fait converger asymptotiquement l'erreur du suivi vers zéro, et une commande dynamique robuste aux dynamiques non modélisées (eg. les forces aérodynamiques) et aux perturbations externes. La commande par mode glissant a été adoptée pour sa robustesse intrinsèque et sa convergence en temps fini. Une amélioration de la commande par modes glissants a été proposée, de sorte qu'elle prenne en compte une certaine classe de perturbations externes qui ne sont pas forcément bornées d'une manière uniforme et qui font diverger les commandes glissantes classiques.

Dans ce chapitre, le système de navigation autonome est robuste contre les incertitudes et les perturbations externes. Par contre, les défauts capteurs et actionneurs (estimation de σ) seront abordés dans les prochains chapitres.

Outils et diagnostic informationnels

« Si vous voulez trouver les secrets de l'univers, pensez en termes d'énergie, de fréquence, d'information et de vibration. »

Nikola Tesla

Résumé du chapitre :

Ce chapitre traite l'approche informationnelle pour le diagnostic des défauts capteurs et actionneurs. Le résidu est conçu en comparant la distribution a priori et la distribution a posteriori des estimations du filtre informationnel. Pour pouvoir comparer ces distributions de probabilité, on utilisera des outils issus de la théorie de l'information. Par conséquent, après une brève introduction de la théorie de l'information et de l'entropie de Shannon et sa notion de l'information mutuelle, on introduira la divergence α de Rényi qui fait partie des f -divergences et qui généralise plusieurs divergences existantes dans la littérature. On s'intéressera tout particulièrement à deux valeurs de α : la divergence de Bhattacharyya ($\alpha = \frac{1}{2}$) qui est une mesure de la quantité de chevauchement entre deux distributions de probabilité et la divergence de Kullback-Leibler ($\alpha = 1$) qui représente le gain informationnel obtenu en estimant une distribution a posteriori à partir d'une distribution a priori. Les propriétés de ces divergences seront introduites et leurs distributions seront développées dans les cas avec ou sans défaut. On introduira aussi les méthodes de localisation de défauts utilisées dans le cadre de ces travaux. Ensuite, un état de l'art sur les méthodes statistiques de seuillage est fourni. Le critère de Bhattacharyya sera enfin proposé pour optimiser le seuil de détection.

Plan du chapitre

| | | |
|------------|--|-----------|
| 3.1 | Introduction | 55 |
| 3.2 | Divergences informationnelles | 56 |
| 3.2.1 | Divergence de Rényi | 56 |
| 3.2.2 | Divergence de Kullback-Leibler | 57 |
| 3.2.3 | Divergence de Bhattacharyya et de Chernoff | 61 |
| 3.3 | Conception du résidu et localisation des défauts | 64 |
| 3.3.1 | Distributions des divergences de Bhattacharyya et de Kullback-Leibler dans le cas gaussien | 64 |
| 3.3.2 | Conception du résidu | 70 |
| 3.3.3 | Localisation des défauts | 71 |
| 3.4 | Évaluation du résidu et seuillage | 74 |
| 3.4.1 | Critère de Neyman-Pearson | 75 |
| 3.4.2 | Critère de Bayes | 76 |
| 3.4.3 | Critère entropique | 77 |
| 3.4.4 | Critère de Kullback-Leibler | 79 |
| 3.4.5 | Critère de Bhattacharyya | 80 |
| 3.5 | Conclusion | 83 |

3.1 Introduction

La méthode de diagnostic utilisée dans le cadre de cette thèse se base sur l'estimation d'état en utilisant des bancs de filtres informationnels étendus (figure 1.5). Les indicateurs de fautes appelés résidus sont générés en comparant les estimations des étapes de prédiction et de correction du filtre bayésien. Habituellement cette comparaison se fait par une simple soustraction entre les moyennes des deux estimations. Mais vue la nature stochastique des mesures, les estimations sont entachées d'incertitude et elles sont représentées par des fonctions de densité de probabilité. Par conséquent, il est très intéressant de développer et d'évaluer le résidu en prenant en considération toute la forme des distributions de probabilité des mesures et des estimations.

La théorie de l'information offre un large panel d'outils qui ont la capacité de calculer la similarité ou la dissemblance entre deux distributions de probabilité. Comme les estimations et les mesures sont stochastiques, le résidu peut être conçu en calculant la quantité d'information générée en comparant deux distributions de probabilité en utilisant des outils issus de la théorie de l'information.

L'entropie de Shannon introduite dans le papier "*A mathematical theory of communication*" par l'ingénieur américain *Claude Elwood Shannon* (SHANNON, 1948), représente le concept le plus fondamental de la théorie de l'information. Cette entropie, largement utilisée dans le domaine des télécommunications et du codage, est considérée comme étant une mesure de l'incertitude associée à l'information provenant d'une source (AL HAGE, 2016).

Dans le cas d'une distribution discrète avec une fonction de masse (*probability mass function* pmf) $p(x)$, l'entropie de Shannon est définie par l'équation suivante :

$$H(p) = - \sum_x p(x) \log p(x) = -E_p[\log p(x)] \quad (3.1)$$

où $H(p)$ est l'entropie de Shannon, \log représente le logarithme népérien et E_p est l'espérance de p .

Dans le cas d'une distribution continue avec une fonction de densité de probabilité $f(x)$, l'entropie de de Shannon est définie comme étant l'entropie différentielle (LAZO et al., 1978) :

$$H(f) = - \int_x f(x) \log f(x) dx = -E_f[\log f(x)] \quad (3.2)$$

Dérivée de l'entropie de Shannon, l'information mutuelle est une mesure qui permet de quantifier l'information partagée par deux distributions de probabilité $p(x)$ et $\xi(x)$ (COVER et al., 2006) :

$$I(p, \xi) = H(p) - H(p/\xi) \quad (3.3)$$

où $I(p, \xi)$ est l'information mutuelle et $H(p/\xi)$ est l'entropie conditionnelle :

$$H(p/\xi) = H(p, \xi) - H(\xi) \quad (3.4)$$

avec $H(p, \xi)$ est l'entropie conjointe des variables p et ξ .

Inspirés de l'information mutuelle, Kullback et Leibler (KULLBACK et al., 1951) ont proposé une mesure informationnelle intitulée *la Divergence de Kullback-Leibler* (DKL). Cette métrique qui est aussi reliée à l'entropie de Shannon, généralise la notion d'information mutuelle.

En terme de mesure de divergence entre deux distributions de probabilité ou deux groupes de populations, différentes métriques ont été proposées avant même l'introduction de la notion d'information mutuelle par Shannon. On trouve à titre d'exemple le *coefficient de ressemblance raciale* introduit dans l'article de Tildesley "*A first study of the burmese skull*" (TILDESLEY, 1921), repris ensuite par Karl Pearson sous l'appellation *test χ^2* pour évaluer l'écart entre deux populations pour résoudre le problème de classification. D'autres test d'homogénéité ou de distance entre deux populations ont été proposées, à l'instar du test T^2 de Hotelling (HOTELLING, 1929), la distance de Mahalanobis (MAHALANOBIS, 1930) et la divergence de Bhattacharyya (BHATTACHARYYA, 1946).

Plusieurs chercheurs ont proposé des divergences sous forme de fonctions paramétrées, et qui généralisent la plupart des divergences trouvées dans la littérature. On trouve à titre d'exemple les travaux de Chernoff (CHERNOFF, 1952), de Rényi (RÉNYI, 1961) et de Csiszar (CSISZÁR, 1972).

Au cours de ce chapitre, ces métriques sont utilisées pour la conception du résidu en comparant les distributions de probabilité des estimations des deux étapes du filtre informationnel, avant de l'évaluer en développant un seuil dérivé à partir d'un critère informationnel.

3.2 Divergences informationnelles

3.2.1 Divergence de Rényi

L'entropie de Rényi d'ordre $\alpha \in \mathbf{R}^+$ d'une distribution de probabilité $p = (p_1, p_1, \dots, p_n)$ est donnée par l'équation suivante (VAN ERVEN et al., 2014) :

$$H_\alpha(p) = \frac{1}{1 - \alpha} \log \sum_{i=1}^n p_i^\alpha \quad (3.5)$$

Comme pour l'entropie de Shannon dans le cas d'une distribution continue p avec une fonction de densité $p(x)$, l'entropie différentielle de Rényi est donnée par l'équation suivante :

$$H_\alpha(p) = \frac{1}{1 - \alpha} \log \int_x p(x)^\alpha dx \quad (3.6)$$

Il est à noter que si α tend vers 1, l'entropie de Rényi tend vers l'entropie de Shannon.

La divergence de Rényi d'ordre α ($D_\alpha(p||\xi)$) entre la distribution p et la distribution $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ est donnée par l'équation suivante :

$$D_\alpha(p||\xi) = \frac{1}{\alpha - 1} \log \sum_{i=1}^n p_i^\alpha \xi_i^{1-\alpha} \quad (3.7)$$

Dans le cas de distributions continues, la divergence de Rényi est donnée comme suit :

$$D_\alpha(p||\xi) = \frac{1}{\alpha - 1} \log \int_x p(x)^\alpha \xi(x)^{1-\alpha} dx \quad (3.8)$$

Le cas de distributions gaussiennes :

La divergence de Rényi entre deux distributions gaussiennes $p(x)$ et $\xi(x)$, de dimension n , de moyennes q_1 et q_2 , et de matrices de covariance P_1 et P_2 respectivement est définie comme suit (GIL et al., 2013) :

$$D_\alpha(p||\xi) = \frac{\alpha}{2} (q_1 - q_2)^T \bar{P} (q_1 - q_2) - \frac{1}{2(\alpha - 1)} \log \left(\frac{|\bar{P}|}{|P_1|^{1-\alpha} |P_2|^\alpha} \right) \quad (3.9)$$

où :

$$\bar{P} = \alpha P_2 + (1 - \alpha) P_1 \quad (3.10)$$

avec la condition :

$$\alpha Y_1 + (1 - \alpha) Y_2 \geq 0 \quad (3.11)$$

où Y_1 et Y_2 sont les matrices informationnelles de P_1 et P_2 respectivement.

Rappelons que la distribution gaussienne $p(x)$ est définie par l'équation suivante :

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |P_1|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} (x - q_1)^T P_1^{-1} (x - q_1)} \quad (3.12)$$

avec $q_1, x \in \mathbf{R}^n$

On s'intéresse tout particulièrement à un cas particulier de la divergence de Rényi, qui est la divergence de Kullback-Leibler, correspondant à $\alpha = 1$.

3.2.2 Divergence de Kullback-Leibler

La divergence de Kullback-Leibler (KL) entre deux distributions $p(x)$ et $\xi(x)$, dénotée $KL(p||\xi)$, est définie par l'équation suivante (KULLBACK et al., 1951) :

— Dans le cas continu :

$$KL(p||\xi) = \int_x p(x) \log \left(\frac{p(x)}{\xi(x)} \right) dx \quad (3.13)$$

— Dans le cas discret :

$$KL(p||\xi) = \sum_{i=1}^n p_i \log\left(\frac{p_i}{\xi_i}\right) \quad (3.14)$$

La divergence de Kullback-Leibler est donc une mesure qui quantifie la différence entre deux distributions. Elle peut être interprétée de différentes manières :

- La divergence de ξ à p .
- L'information perdue en approximant p à partir de ξ .
- La qualité de l'approximation de p à partir de ξ .
- Le gain informationnel en allant de la distribution a priori ξ à la distribution a posteriori p .

Dans la littérature, la divergence de Kullback-Leibler est parfois considérée comme étant l'entropie relative de ξ par rapport à p . Comme pour l'entropie de Shannon, la divergence de Kullback-Leibler est aussi définie comme étant l'espérance d'un rapport de vraisemblance logarithmique (LEXA, 2004) :

$$KL(p||\xi) = E_p\left(\frac{p(x)}{\xi(x)}\right) \quad (3.15)$$

Propriétés de la divergence de Kullback-Leibler :

1. La divergence de Kullback-Leibler est finie uniquement quand $supp(p) \subseteq supp(\xi)$, en d'autres termes : $p \ll \xi$.
2. $KL(p||\xi) \geq 0$, avec égalité seulement et seulement si $p = \xi$.
3. $KL(p||\xi)$ est convexe dans la paire (p, ξ) , et pour n'importe quelle valeur de p , $KL(p||\xi)$ est strictement convexe dans ξ .
4. $KL(p||\xi)$ n'est pas symétrique et ne satisfait pas l'inégalité triangulaire :

$$KL(p||\xi) \neq KL(\xi||p) \quad (3.16)$$

$$KL(p||\xi) \not\leq KL(p||w) + KL(w||\xi) \quad (3.17)$$

5. La divergence de Kullback-Leibler est un cas spécial de la divergence de Rényi. En effet, elle correspond à la divergence de Rényi avec $\alpha = 1$: (voir annexe B.1)

$$D_1(p||\xi) = KL(p||\xi) = \int_x p(x) \log \frac{p(x)}{\xi(x)} dx \quad (3.18)$$

Le cas de distributions gaussiennes :

La divergence de Kullback-Leibler entre deux distributions gaussiennes $p(x)$ et $\xi(x)$, de moyennes q_1 et q_2 et de matrices de covariance P_1 et P_2 respectivement est donnée comme suit (GIL, 2011) :

$$KL(p||\xi) = \frac{1}{2} \left[\log\left(\frac{|P_2|}{|P_1|}\right) + \text{trace}(P_2^{-1}P_1) - n \right] + \frac{1}{2} \left[(q_1 - q_2)^T P_2^{-1} (q_1 - q_2) \right] \quad (3.19)$$

où n est la dimension des distributions : $(q_1/q_2 \in \mathbf{R}^n)$ et $(P_1/P_2 \in \mathbf{R}^{n \times n})$.

Dans la littérature, la distribution de $KL(p||\xi)$ sous certaines hypothèses est souvent associée à une loi χ^2 non centrée (BELOV et al., 2011).

D'après l'équation 3.19, la divergence de Kullback-Leibler est divisée en deux termes T_1 et T_2 , définis par les équations suivantes :

$$T_1 = \frac{1}{2} \left[\log\left(\frac{|P_2|}{|P_1|}\right) + \text{trace}(P_2^{-1}P_1) - n \right] \quad (3.20)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \left[(q_1 - q_2)^T P_2^{-1} (q_1 - q_2) \right] \quad (3.21)$$

- Le terme T_1 est associé à la divergence de Bregman matricielle (WAN et al., 2000), qui représente une distance entre deux matrices. Elle est composée de l'information mutuelle I qui représente la compacité des distributions (la différence en volume entre les deux matrices de covariance) et la trace qui représente l'orientation d'une distribution de probabilité par rapport à l'autre, sachant que :

$$I = \frac{1}{2} \log\left(\frac{|P_2|}{|P_1|}\right) \quad (3.22)$$

- Le terme T_2 représente la distance au carré de Mahalanobis qui est une mesure de similarité entre une série de données tout en prenant en compte leurs corrélations (contrairement à la distance Euclidienne). La distance de Mahalanobis peut aussi être considérée comme étant une distance entre un point et une distribution.

Ces deux termes permettent de faire deux tests d'hypothèses. Un test sur les matrices de covariance (pour T_1) et un test sur les moyennes (pour T_2) (AL HAGE, 2016).

Le cas de certaines distributions non-gaussiennes :

Considérons les distributions continues données par le tableau 3.1 (GIL, 2011).

Dans le cas où p et ξ ont une des distributions définies par le tableau 3.1, la divergence de Kullback-Leibler entre ces deux distributions est donnée par le tableau 3.2.

3.2. DIVERGENCES INFORMATIONNELLES

| <i>Distribution :</i> | <i>Fonction :</i> | <i>Contraintes :</i> |
|-----------------------|--|------------------------------------|
| Exponentielle | $\lambda e^{-\lambda q}$ | $\lambda > 0, q > 0$ |
| Beta | $q^{a-1}(1-q)^{b-1}$ | $q \in [0, 1], a, b > 0$ |
| Gumbel | $\frac{e^{-(q-\mu)/\beta} e^{-e^{-(q-\mu)/\beta}}}{\beta}$ | $q, \mu \in \mathbf{R}, \beta > 0$ |
| Gamma | $\frac{q^{k-1} e^{-q/\theta}}{\theta^k \Gamma(k)}$ | $q, k > 0, \theta > 0$ |
| Uniforme | $\frac{1}{a-b}$ | $a < q < b$ |
| Maxwell-Boltzmann | $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q^2 e^{-\frac{q^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^3}$ | $\sigma, q > 0$ |
| Pareto | $ab^a q^{-(a+1)}$ | $a, b > 0, q > m$ |

Tableau 3.1 – Quelques distributions non gaussiennes continues

| <i>Distribution :</i> | $KL(p \xi) =$ |
|-----------------------|---|
| Exponentielle | $\log\left(\frac{\lambda_p}{\lambda_\xi}\right) + \frac{\lambda_p + \lambda_\xi}{\lambda_p}$ |
| Beta | $\log\left(\frac{B(a_\xi, b_\xi)}{B(a_p, b_p)} + \psi(b_p)(b_p - b_\xi)\right) + [a_\xi + b_\xi - (a_p + b_p)]\psi(a_p + b_p)$ |
| Gumbel | $\log\left(\frac{\beta_\xi}{\beta_p}\right) + \gamma\left(\frac{\beta_p}{\beta_\xi} - 1\right) + e^{(\mu_\xi - \mu_p)/\beta_\xi} \Gamma\left(\frac{\beta_p}{\beta_\xi + 1}\right) - 1$ |
| Gamma | $\left(\frac{\theta_p - \theta_\xi}{\theta_\xi}\right) k_p + \log\left(\frac{\Gamma(k_\xi) \theta_\xi^{k_\xi}}{\Gamma(k_p) \theta_p^{k_p}}\right) + (k_p - k_\xi)(\log \theta_p + \psi(k_p))$ |
| Uniforme | $\log\left(\frac{b_\xi - a_\xi}{b_p - a_p}\right)$ |
| Maxwell-Boltzmann | $3\log\left(\frac{\sigma_\xi}{\sigma_p}\right) + 3\left(\frac{\sigma_p^2 - \sigma_\xi^2}{2\sigma_\xi^2}\right)$ |
| Pareto | $\log\left(\frac{b_p}{b_\xi}\right)^{a_\xi} + \log\left(\frac{a_p}{a_\xi}\right) + \frac{a_\xi - a_p}{a_p}$ |

Tableau 3.2 – Divergence de Kullback-Leibler pour des distributions non-gaussiennes

3.2.3 Divergence de Bhattacharyya et de Chernoff

La Divergence de Bhattacharyya (DB) aussi appelée la distance de Bhattacharyya est une métrique qui mesure la similarité entre deux distributions discrètes ou continues.

Considérons deux distributions de probabilité p et ξ , la distance de Bhattacharyya entre ces deux distributions est donnée par l'équation suivante (HUSSEIN et al., 2015) :

$$DB(p||\xi) = -\log(BC(p||\xi)) \quad (3.23)$$

où \log est le logarithme népérien et $BC(p||\xi)$ est le coefficient de Bhattacharyya :

$$BC(p||\xi) = \int_x \sqrt{p(x)\xi(x)} dx \quad \text{cas continu} \quad (3.24)$$

$$BC(p||\xi) = \sum_{i=1}^n \sqrt{p_i \xi_i} \quad \text{cas discret} \quad (3.25)$$

Le coefficient de Bhattacharyya mesure la quantité de chevauchement des deux distributions. DB généralise la distance de Mahalanobis qui considère que la déviation standard des deux distributions est identique. En effet, quand les deux distributions ont la même moyenne mais différentes variances la distance de Mahalanobis tend systématiquement vers zéro, alors que la DB mesure la divergence issue de la différence entre les variances. Il est aussi à noter que la DB n'a pas besoin d'une distribution de référence, ce qui n'est pas le cas de la divergence de Kullback-Leibler.

La divergence de Bhattacharyya est un ordre spécial de la divergence α de Chernoff (D_α^{ch}). Considérons deux distributions de probabilité p et ξ , la divergence de Chernoff est donnée par les équations suivantes (RAUBER et al., 2008) :

$$D_\alpha^{ch}(p||\xi) = -\log \int_x p(x)^\alpha \xi(x)^{1-\alpha} dx \quad \text{cas continu} \quad (3.26)$$

$$D_\alpha^{ch}(p||\xi) = -\log \sum_{i=1}^n p_i^\alpha \xi_i^{1-\alpha} \quad \text{cas discret} \quad (3.27)$$

où $\alpha \in]0, 1[$.

Il est clair que si $\alpha = \frac{1}{2}$, la divergence de Chernoff devient la divergence de Bhattacharyya :

$$D_{\frac{1}{2}}^{ch}(p||\xi) = DB(p||\xi) \quad (3.28)$$

La divergence de Chernoff est aussi reliée à la divergence de Rényi :

$$D_\alpha^{ch}(p||\xi) = (1 - \alpha)D_\alpha(p||\xi) \quad \alpha \in]0, 1[\quad (3.29)$$

La divergence de Chernoff fait partie de la famille des f -divergences, elle partage donc les mêmes propriétés générales de cette classe.

Quelques propriétés de la divergence de Bhattacharyya :

1. $DB(p||\xi) \geq 0$ et $0 \leq BC(p||\xi) \leq 1$, égale zéro seulement et seulement si $p = \xi$,
2. La divergence de Bhattacharyya est symétrique :

$$DB(p||\xi) = DB(\xi||p) \quad (3.30)$$

3. La divergence de Bhattacharyya ne satisfait pas l'inégalité triangulaire donc elle n'est pas une réelle métrique :

$$DB(p||\xi) \not\leq DB(p||w) + DB(w||\xi) \quad (3.31)$$

4. La divergence de Bhattacharyya est reliée à la distance au carré de Hellinger H^2 (SENGAR et al., 2008) :

$$BD(p||\xi) = -\log \left[1 - \frac{H^2(p, \xi)}{2} \right] \quad (3.32)$$

avec :

$$H^2(p, \xi) = \sum_{i=1}^n (\sqrt{p_i} \sqrt{\xi_i})^2 \quad (3.33)$$

5. La relation de la divergence de Bhattacharyya avec le reste des divergences mentionnées dans cette section est résumée par le tableau 3.3 :

| | |
|---------------------|---------------------------------------|
| Divergence : | $DB(p \xi) =$ |
| Chernoff | $D_{\frac{1}{2}}^{ch}(p \xi)$ |
| Rényi | $\frac{1}{2} D_{\frac{1}{2}}(p \xi)$ |
| Hellinger | $-\log(1 - \frac{H^2(p, \xi)}{2})$ |

Tableau 3.3 – Relation entre la divergence de Bhattacharyya et le reste des divergences

Cas de distributions gaussiennes :

Dans le cas où p et ξ sont deux distributions gaussiennes ayant respectivement les moyennes q_1 et q_2 , et les matrices de covariance P_1 et P_2 , alors la divergence de Bhattacharyya est donnée par l'équation suivante (JANSE, 2017) :

$$DB(p||\xi) = \frac{1}{8} (q_1 - q_2)^T \bar{P}^{-1} (q_1 - q_2) + \frac{1}{2} \log \left(\frac{|\bar{P}|}{\sqrt{|P_1||P_2|}} \right) \quad (3.34)$$

où $p \sim \mathcal{N}(q_1, P_1)$, $\xi \sim \mathcal{N}(q_2, P_2)$, $|\cdot|$ est le déterminant et :

$$\bar{P} = \frac{P_1 + P_2}{2} \quad (3.35)$$

D'après l'équation 3.34, $DB(p|\xi)$ se compose de deux termes T_1 et T_2 avec :

$$T_1 = \frac{1}{8} (q_1 - q_2)^T \bar{P}^{-1} (q_1 - q_2) \quad (3.36)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \log\left(\frac{|\bar{P}|}{\sqrt{|P_1||P_2|}}\right) \quad (3.37)$$

Le terme T_1 mesure la distance entre les deux distributions, alors que le terme T_2 calcule la différence en volume et en orientation entre les deux distributions.

L'équation 3.34 peut être réécrite sous la forme suivante :

$$DB(p|\xi) = \frac{1}{8} (q_1 - q_2)^T \bar{P}^{-1} (q_1 - q_2) + \frac{1}{4} \log\left(\frac{|\bar{P}|}{|P_1|}\right) + \frac{1}{4} \log\left(\frac{|\bar{P}|}{|P_2|}\right) \quad (3.38)$$

La dernière équation est divisée en trois termes T_1 , T_2 et T_3 :

$$T_1 = \frac{1}{8} (q_1 - q_2)^T \bar{P}^{-1} (q_1 - q_2) \quad (3.39)$$

$$T_2 = \frac{1}{4} \log\left(\frac{|\bar{P}|}{|P_1|}\right) \quad (3.40)$$

$$T_3 = \frac{1}{4} \log\left(\frac{|\bar{P}|}{|P_2|}\right) \quad (3.41)$$

- Le terme T_1 est relié à la distance de Mahalanobis.
- le terme T_2 est relié à l'information mutuelle entre la distribution a posteriori p et la distribution moyenne localisée entre les distributions p et ξ .
- le terme T_3 est relié à l'information mutuelle entre la distribution a priori ξ et la distribution moyenne localisée entre les distributions p et ξ .

Cela permet de faire trois tests, un test sur les moyennes (terme T_1) et deux tests sur les matrices de covariance (termes T_2 et T_3).

Cas de certaines distributions non-gaussiennes :

Dans le cas où p et ξ ont une des distributions définies par le tableau 3.1, la divergence de Bhattacharyya entre ces deux distributions est donnée par le tableau 3.4 :

| <i>Distribution :</i> | $DB(p \xi) =$ |
|-----------------------|---|
| Exponentielle | $0.5 \log\left(\frac{\lambda_p}{\lambda_\xi}\right) - \frac{\lambda_p}{\lambda}$ où $\lambda = 0.5\lambda_p - 0.5\lambda_x i$ |
| Beta | $0.5 \log\left(\frac{B(a_\xi, b_\xi)}{B(a_p, b_p)}\right) + \log\left(\frac{B(a_p, b_p)}{B(0.5a_p + 0.5, 0.5b_p + 0.5b_\xi)}\right)$ |
| Gumbel | $0.5 \log\left(\frac{\beta_\xi}{\beta_p}\right) + 0.5\gamma\left(\frac{\beta_p}{\beta_\xi} - 1\right) + 0.5e^{(\mu_\xi - \mu_p)/\beta_\xi}\Gamma\left(\frac{\beta_p}{\beta_\xi + 1}\right) - 0.5$ |
| Gamma | $\left(\frac{\theta_p - \theta_\xi}{2\theta_\xi}\right)k_p + \log\left(\frac{\Gamma(k_\xi)\theta_\xi^{k_\xi}}{\Gamma(k_p)\theta_p^{k_p}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{k_p - k_\xi}{2}\right)(\log\theta_p + \psi(k_p))$ |
| Uniforme | $\log\left(\frac{b_\xi - a_\xi}{b_p - a_p}\right)^{\frac{1}{2}}$ |
| Maxwell-Boltzmann | $\frac{3}{2} \log\left(\frac{\sigma_\xi}{\sigma_p}\right) - \left(\frac{\sigma_\xi^2}{2\sigma^2}\right)$ où $\sigma = 0.5\sigma_\xi^2 + 0.5\sigma_p^2$ |

Tableau 3.4 – Divergence de Bhattacharyya pour des distributions non-gaussiennes

3.3 Conception du résidu et localisation des défauts

3.3.1 Distributions des divergences de Bhattacharyya et de Kullback-Leibler dans le cas gaussien

Divergence de Bhattacharyya :

Pour l'étude statistique de la divergence de Bhattacharyya, les propriétés et définitions introduites dans les articles (RENCHER et al., 2012), (JANSE, 2017) et (RAVISHANKER et al., 2002) sont utilisées.

Dans cette section, on suppose que les distributions contiennent le même nombre d'échantillons m .

Distribution sachant que les matrices de covariance sont connues et égales :

Dans ce cas, la divergence de Bhattacharyya devient :

$$DB(p||\xi) = \frac{1}{8} (q_1 - q_2)^T \bar{P}^{-1} (q_1 - q_2) \quad (3.42)$$

L'estimation du maximum de vraisemblance \hat{q}_i de q_i (MONTGOMERY et al., 2003) est donnée par l'équation suivante :

$$\hat{q}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (q_i)_j \quad (3.43)$$

où m est le nombre d'échantillons. On obtient l'estimation $\hat{D}B$ de DB (ou échantillon de DB) comme suit :

$$\hat{D}B(p|\xi) = \frac{1}{8}(\hat{q}_1 - \hat{q}_2)^T \bar{P}^{-1}(\hat{q}_1 - \hat{q}_2) \quad (3.44)$$

avec

$$\hat{q}_i \sim \mathcal{N}_n(q_i, \frac{\bar{P}}{m}) \quad (3.45)$$

où m est le nombre d'échantillons, alors :

$$(\hat{q}_1 - \hat{q}_2) \sim \mathcal{N}(q_1 - q_2, \frac{2}{m}\bar{P}) \quad (3.46)$$

Étant donnée une loi gaussienne de dimension n : $X = \mathcal{N}_n(\mu, P)$ alors :

$$X^T P^{-1} X \sim \chi_n^2(\mu^T P^{-1} \mu) \quad (3.47)$$

où $\mu^T P^{-1} \mu$ correspond au paramètre de non-centralité de la distribution.

En utilisant l'équation 3.46, on obtient :

$$\frac{m}{2}(\hat{q}_1 - \hat{q}_2)^T \bar{P}^{-1}(\hat{q}_1 - \hat{q}_2) \sim \chi_n^2((q_1 - q_2)^T \bar{P}^{-1}(q_1 - q_2)) \quad (3.48)$$

Et finalement :

$$4m\hat{D}B \sim \chi_n^2((q_1 - q_2)^T \bar{P}^{-1}(q_1 - q_2)) \quad (3.49)$$

Pour un test d'hypothèse H_0 (absence de défaut) : $\hat{q}_1 = \hat{q}_2$ contre l'hypothèse H_1 (présence de défaut) : $\hat{q}_1 \neq \hat{q}_2$, Il est clair que :

- Dans le cas sans défaut, la divergence de Bhattacharyya suit une loi χ^2 centrée ayant n comme degré de libertés
- Dans le cas avec défaut, la divergence de Bhattacharyya suit une loi χ^2 non-centrée avec un paramètre de non-centralité qui dépend de l'écart entre les moyennes.

Distribution avec des matrices de covariance inconnues mais égales :

Sous cette hypothèse, l'équation 3.42 devient :

$$\hat{D}B(p|\xi) = \frac{1}{8}(\hat{q}_1 - \hat{q}_2)^T \hat{P}^{-1}(\hat{q}_1 - \hat{q}_2) \quad (3.50)$$

Les estimations non biaisées \hat{P}_1, \hat{P}_2 de P_1 et P_2 suivent une distribution de Wishart (\mathcal{W}) (RENCHER et al., 2012) :

$$\hat{P}_i \sim \mathcal{W}_n(m - 1, \frac{1}{m - 1}P_i) \quad (3.51)$$

où

$$\hat{P}_i = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m ((q_i)_j - \hat{q}_i) ((q_i)_j - \hat{q}_i)^T \quad (3.52)$$

Ce qui donne :

$$\hat{\hat{P}} = \frac{\hat{P}_1 + \hat{P}_2}{2} \sim \mathcal{W}_n(2(m-1), \frac{1}{2(m-1)} \bar{P}) \quad (3.53)$$

où $\hat{\hat{P}}$ est l'estimation non biaisée de \bar{P} .

Sachant que :

$$\frac{(2m-n-1)m}{4n(m-1)} (\hat{q}_1 - \hat{q}_2)^T \hat{\hat{P}}^{-1} (\hat{q}_1 - \hat{q}_2) \sim \mathcal{F}_{n, 2m-n-1}(\lambda) \quad (3.54)$$

où \mathcal{F} est une loi de Fisher, et λ est le paramètre de non-centralité :

$$\lambda = (q_1 - q_2)^T \bar{P}^{-1} (q_1 - q_2) \quad (3.55)$$

Et donc, la distribution de la divergence de Bhattacharyya avec des matrices de covariance inconnues mais égales est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{2(2m-n-1)m}{n(m-1)} \hat{D}B(p||\xi) \sim \mathcal{F}_{n, 2m-n-1}(\lambda) \quad (3.56)$$

Ainsi :

- Dans le cas sans défaut, $\hat{D}B(p||\xi)$ suit une loi Fisher centrée ayant $(n, 2m-n-1)$ comme degrés de liberté.
- Dans le cas avec défaut, $\hat{D}B(p||\xi)$ suit une loi Fisher non-centrée ayant $(n, 2m-n-1)$ comme degrés de liberté, avec un paramètre de non-centralité qui dépend de l'écart entre les moyennes.

Distribution avec des moyennes égales :

Dans ce cas $DB(p||\xi)$ est donnée par l'équation suivante :

$$DB(p||\xi) = \frac{1}{4} \log\left(\frac{|\bar{P}|}{|P_1|}\right) + \frac{1}{4} \log\left(\frac{|\bar{P}|}{|P_2|}\right) \quad (3.57)$$

Et l'estimation $\hat{D}B$ de DB est donnée comme suit :

$$\hat{D}B(p||\xi) = \frac{1}{2} \log(|\hat{P}|) - \frac{1}{4} \log(|\hat{P}_1|) - \frac{1}{4} \log(|\hat{P}_2|) \quad (3.58)$$

Dans (CAI et al., 2015) le théorème central limite est utilisé pour déduire la distribution du logarithme de \hat{P} suivant une loi Wishart (Corollary 1/ équation 8) :

$$T = \frac{\log|\hat{P}| - \frac{n(n+1)}{2m} - \log|P|}{\sqrt{\frac{2n}{m}}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (3.59)$$

Il est clair que la somme de trois distributions normales est une distribution normale. Néanmoins, il faut calculer la moyenne et la matrice de covariance pour établir la distribution globale. Vu que P_i et \bar{P} sont dépendants avec des variances corrélées qui ne peuvent pas être additionnées, il faut calculer les covariance entre P_i et \bar{P} . Dans (JANSE, 2017), il est démontré que $E[\log(\hat{P})\log(\hat{P}_i)]$ ne peut être calculée analytiquement et donc la distribution de la partie des informations mutuelles de la divergence de Bhattacharyya ne peut être dérivée. Néanmoins, l'auteur a proposé une distribution d'une fonction de $\hat{D}B$ qui peut être utilisée pour le test d'hypothèse, et c'est ce qu'on recherche pour l'évaluation du résidu.

Sachant que la distribution asymptotique de la distance de Hellinger (équation 3.33) est connue dans le cas sans défaut, la relation entre cette distance et la divergence de Bhattacharyya (tableau 3.3) peut être utilisée pour déterminer la distribution de la divergence de Bhattacharyya.

Ayant l'estimation de la distance de Hellinger \hat{H} , la relation suivante est correcte (ALBA-FERNÁNDEZ et al., 2005) :

$$X_m = 2m\hat{H}^2 \sim \chi_t^2 \quad (3.60)$$

où m est le nombre d'échantillon et t est le nombre de paramètres à estimer pour les deux fonctions de densité de probabilité et " \sim " exprime la convergence.

Sachant que la relation entre la divergence de Bhattacharyya et la distance de Hellinger est donnée par l'équation suivante :

$$DB(p||\xi) = -\log\left(1 - \frac{H^2(p, \xi)}{2}\right) \quad (3.61)$$

on introduit la fonction suivante :

$$f(\hat{D}B) = 2m(1 - e^{-\hat{D}B}) \quad (3.62)$$

D'après les équations 3.61 et 3.62, on peut déduire la relation suivante :

$$f(\hat{D}B) = \frac{X_m}{2} \quad (3.63)$$

Sachant qu'une distribution χ_t^2 est un cas spécial d'une distribution $\Gamma(k, \theta)$ quand $k = \frac{t}{2}$ et $\theta = 2$:

$$\chi_t^2 = \Gamma\left(\frac{t}{2}, 2\right) \quad (3.64)$$

et sachant que si X suit une loi Γ et $c \in R^+$ alors :

$$cX \sim \Gamma(k, c\theta) \quad (3.65)$$

Par conséquent, la distribution de cette fonction ($f(\hat{D}B)$) suit une distribution Γ ayant comme paramètres $k = \frac{t}{2}$ et $\theta = 1$:

$$f(\hat{D}B) \sim \Gamma\left(\frac{t}{2}, 1\right) \quad (3.66)$$

Divergence de Kullback-Leibler :

La divergence de Kullback-Leibler dans le cas gaussien est composée de deux termes : T_1 (équation 3.20) et T_2 (équation 3.21). Le premier terme permet de faire un test sur les matrices de covariance et le deuxième sur les moyennes.

Considérons l'échantillon de la divergence de Kullback-Leiber $\hat{K}L$:

$$\hat{K}L(p||\xi) = \frac{1}{2} \left[\log\left(\frac{|\hat{P}_2|}{|\hat{P}_1|}\right) + \text{trace}(\hat{P}_2^{-1}\hat{P}_1) - n \right] + \frac{1}{2} \left[(\hat{q}_1 - \hat{q}_2)^T \hat{P}_2^{-1} (\hat{q}_1 - \hat{q}_2) \right] \quad (3.67)$$

où les estimations sont définies comme suit :

$$\begin{cases} \hat{q}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (q_i)_j \sim \mathcal{N}\left(q_i, \frac{P_i}{m}\right) \\ \hat{P}_i = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m \left((q_i)_j - \hat{q}_i \right) \left((q_i)_j - \hat{q}_i \right)^T \sim \mathcal{W}_n(m-1, \frac{1}{m-1} P_i) \end{cases} \quad (3.68)$$

où m est le nombre d'échantillons.

Distribution de $\hat{K}L$ dans le cas des matrices de covariance connues et égales

Dans ce cas $\hat{K}L$ est donnée par l'équation suivante :

$$\hat{K}L(p||\xi) = \frac{1}{2} \left[(\hat{q}_1 - \hat{q}_2)^T P_2^{-1} (\hat{q}_1 - \hat{q}_2) \right] \quad (3.69)$$

Sachant que :

$$(\hat{q}_1 - \hat{q}_2) \sim \mathcal{N}\left(q_1 - q_2, \frac{2}{m} P_2\right) \quad (3.70)$$

d'après l'équation 3.47 on a :

$$\frac{m}{2} (\hat{q}_1 - \hat{q}_2)^T P_2^{-1} (\hat{q}_1 - \hat{q}_2) \sim \chi_n^2(\lambda) \quad (3.71)$$

où $\lambda = (q_1 - q_2)^T P_2^{-1} (q_1 - q_2)$ est le paramètre de non-centralité.

Finalement :

$$m \hat{K}L \sim \chi_n^2(\lambda) \quad (3.72)$$

Pour un test d'hypothèse H_0 (absence de défaut) : $\hat{q}_1 = \hat{q}_2$ contre l'hypothèse H_1 (présence de défaut) : $\hat{q}_1 \neq \hat{q}_2$, Il est clair que :

- Dans le cas sans défaut, la divergence de Kullback-Leibler suit une loi χ^2 centrée ayant n comme degré de libertés.
- Dans le cas avec défaut, la divergence de Kullback-Leibler suit une loi χ^2 non-centrée avec un paramètre de non-centralité qui dépend de l'écart entre les moyennes.

Distribution de $\hat{K}L$ dans le cas de matrices de covariance inconnues mais égales :

Sous cette hypothèse, l'équation 3.67 devient :

$$\hat{K}L(p||\xi) = \frac{1}{8}(\hat{q}_1 - \hat{q}_2)^T \hat{P}_2^{-1}(\hat{q}_1 - \hat{q}_2) \quad (3.73)$$

L'estimation non biaisée \hat{P}_2 de P_2 suit une distribution de Wishart (\mathcal{W}) :

$$\hat{P}_2 \sim \mathcal{W}_n(m-1, \frac{1}{m-1}P_2) \quad (3.74)$$

Sachant que (RENCHER et al., 2012) :

$$\frac{(m-n-1)m}{n(m-1)}(\hat{q}_1 - \hat{q}_2)^T \hat{P}_2^{-1}(\hat{q}_1 - \hat{q}_2) \sim \mathcal{F}_{n, m-n-1}(\lambda) \quad (3.75)$$

où \mathcal{F} est une loi de Fisher, et λ est le paramètre de non-centralité :

$$\lambda = (q_1 - q_2)^T \bar{P}^{-1}(q_1 - q_2)^T \quad (3.76)$$

Et donc, la distribution de l'échantillon de la divergence de Kullback-Leibler avec des matrices de covariance inconnues mais égales est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{2(m-n-1)m}{n(m-1)}\hat{K}L(p||\xi) \sim \mathcal{F}_{n, m-n-1}(\lambda) \quad (3.77)$$

Distribution du terme correspondant à la divergence de Bregman matricielle (Test sur les matrices de covariance) :

On vise donc à tester l'hypothèse $H_0 : P_1 = P_2$ contre l'hypothèse $H_1 : P_1 \neq P_2$, avec P_2 connu a priori et des moyennes égales $q_1 = q_2$.

À partir de l'équation 3.67, on obtient :

$$\hat{K}L(p||\xi) = \frac{1}{2} \left[\log\left(\frac{|P_2|}{|\hat{P}_1|}\right) + \text{trace}(P_2^{-1}\hat{P}_1) - n \right] \quad (3.78)$$

Si H_0 est correct, $\hat{K}L(p||\xi)$ suit une loi χ^2 avec $\frac{n}{2}(n+1)$ comme degré de liberté (RENCHER et al., 2012).

$$\left[1 - \frac{1}{6(m-1)-1} \left(2n+1 + \frac{2}{2n+1} \right) \right] \hat{K}L(p||\xi) \sim \chi_{\frac{n}{2}(n+1)}^2 \quad (3.79)$$

3.3.2 Conception du résidu

Le résidu est généré en comparant les distributions de probabilité issues des deux étapes du filtre informationnel (section 2.3.3). Considérons les deux distributions gaussiennes suivantes :

$$f_{k/k-1} \sim \mathcal{N}(q_{k/k-1}, Y_{k/k-1}) \quad \text{prédiction} \quad (3.80)$$

$$f_{k/k} \sim \mathcal{N}(q_{k/k}, Y_{k/k}) \quad \text{correction} \quad (3.81)$$

où $q_{k/k-1}$ et $q_{k/k}$ correspondent aux moyennes des distributions des estimations de la prédiction et de la correction respectivement. $Y_{k/k-1}$ et $Y_{k/k}$ correspondent aux matrices informationnelles des distributions des estimations de la prédiction et de la correction respectivement.

La conception du résidu est donc basée sur l'utilisation des divergences informationnelles qui ont la capacité de comparer deux distributions gaussiennes, en prenant en compte la moyenne et la matrice des covariance. Dans le cadre de cette thèse, on s'intéresse aux résidus conçus à partir des divergences de Kullback-Leibler et de Bhattacharyya.

Résidu basé sur la divergence de Kullback Leibler :

Le résidu (*KLD*) basé sur la divergence de Kullback-Leibler *KL* entre la distribution a priori $f_{k/k-1}$ et la distribution a posteriori $f_{k/k}$ est défini comme $KL(f_{k/k-1} || f_{k/k})$. À partir de l'équation 3.19, le résidu *KLD* est donné par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} KLD = KL(f_{k/k-1} || f_{k/k}) = & \frac{1}{2} \left[\log \left(\frac{|Y_{k/k-1}|}{|Y_{k/k}|} \right) + \text{trace} \left(Y_{k/k} Y_{k/k-1}^{-1} \right) - n \right] \\ & + \frac{1}{2} \left[\left(q_{k/k} - q_{k/k-1} \right)^T Y_{k/k}^{-1} \left(q_{k/k} - q_{k/k-1} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.82)$$

La distribution de la divergence de Kullback-Leibler dans le cas sans défaut est donnée comme suit :

$$KLD \sim \frac{1}{2} \frac{n(m-1)}{(m-n)m} F_{n, m-n} + \frac{1}{2} \frac{1}{m-1} \frac{1}{1 - \frac{1}{6(m-1)-1}} \left(2n + 1 - \frac{2}{n+1} \right) \chi_{\frac{1}{2}(n(n+1))}^2 \quad (3.83)$$

où m est le nombre d'échantillons et n la dimension des distributions.

Résidu basé sur la divergence de Bhattacharyya :

Le résidu (*BD* : Bhattacharyya Divergence) basée sur la divergence de Bhattacharyya (*DB*) entre la distribution a priori $f_{k/k-1}$ et la distribution a posteriori $f_{k/k}$ est définie comme $DB(f_{k/k-1} || f_{k/k})$. À partir de l'équation 3.38, le résidu *BD* est donné par l'équation suivante :

$$BD = DB(f_{k/k-1} || f_{k/k}) = \frac{1}{8} (q_{k/k} - q_{k/k-1})^T \bar{Y}_{k/k} (q_{k/k} - q_{k/k-1}) + \frac{1}{4} \log\left(\frac{|Y_{k/k}|}{|\bar{Y}_{k/k}|}\right) + \frac{1}{4} \log\left(\frac{|Y_{k/k-1}|}{|\bar{Y}_{k/k}|}\right) \quad (3.84)$$

où

$$\bar{Y}_{k/k} = \frac{2Y_{k/k} Y_{k/k-1}}{Y_{k/k} + Y_{k/k-1}} \quad (3.85)$$

La distribution de la divergence de Bhattacharyya dans le cas sans défaut est donnée comme suit :

— Pour un test sur les moyennes uniquement :

$$\hat{BD}(p || \xi) \sim \frac{n(m-1)}{2(2m-n-1)m} \mathcal{F}_{n, 2m-n-1}(\lambda) \quad (3.86)$$

— Pour un test sur les moyennes et la matrice de covariance, une inférence avec la distance de Hellinger est utilisée, et la distribution de la fonction $f(BD)$ est proposée :

$$f(BD) = mH^2 \sim \Gamma\left(\frac{t}{2}, 1\right) \quad (3.87)$$

où H est la distance de Hellinger, m est le nombre d'échantillons et t est le nombre de paramètres à estimer pour la distribution Gamma.

3.3.3 Localisation des défauts

Une fois le défaut détecté, sa localisation devient nécessaire pour pouvoir le compenser. Par conséquent, la génération d'un ensemble de résidus structurés où chacun est sensible à un ensemble de défauts capteurs et actionneurs, est établie. Ces résidus " r_i " structurés sont représentés d'une façon Booléenne :

$$\begin{cases} \text{Si } r_i > th & r_i^* = 1 \\ \text{Si } r_i < th & r_i^* = 0 \end{cases} \quad (3.88)$$

où th est le seuil de détection.

L'évaluation de chaque résidu constitue un vecteur de signature de défauts f_i composé des valeurs 0 et 1, qui peut être comparé à une matrice de signatures de défauts (table d'incidence), qui contient a priori la sensibilité de chaque résidu aux défauts.

Dans la littérature, il existe plusieurs types de matrices de signatures de défauts (GERTLER, 1998) :

- La matrice non-localisante : le rang de la matrice n'est pas entier, en d'autres termes, deux vecteurs de signatures de deux défauts sont identiques.
- La matrice faiblement localisante : Le rang de la matrice est entier, mais une forte corrélation des sensibilités aux défauts. La matrice devient non-localisante par un simple changement $r_i = (0, 1) \rightarrow (1, 0)$.
- La matrice fortement localisante : le rang est entier et chaque vecteur de signatures de défauts est distinct.

| | f_1 | f_2 | f_3 |
|-------|-------|-------|-------|
| r_1 | 1 | 1 | 1 |
| r_1 | 1 | 1 | 0 |
| r_1 | 0 | 0 | 0 |

(a) non-localisante

| | f_1 | f_2 | f_3 |
|-------|-------|-------|-------|
| r_1 | 1 | 1 | 1 |
| r_1 | 1 | 0 | 0 |
| r_1 | 0 | 0 | 1 |

(b) faiblement localisante

| | f_1 | f_2 | f_3 |
|-------|-------|-------|-------|
| r_1 | 1 | 0 | 0 |
| r_1 | 0 | 1 | 0 |
| r_1 | 0 | 0 | 1 |

(c) fortement localisante

Tableau 3.5 – Exemple de matrices de signature de fautes

Pour la génération de l'ensemble de résidus, des bancs d'observateurs sont utilisés. Les bancs d'observateurs peuvent être classifiés en deux schémas (FRANK, 1992) :

- Schéma d'observateur généralisé.
- Schéma d'observateur dédié.

Schéma d'observateur généralisé :

Représenté par la figure 3.1 , le $i^{\text{ème}}$ observateur prend comme entrée la commande u et toutes les observations z à l'exception de l'observation z_i . Dans ce cas l'observateur est sensible à tous les défauts capteurs sauf le capteur non utilisé.

Schéma d'observateur dédié :

Représenté par la figure 3.2, chaque observateur i prend comme entrée la commande u et uniquement l'observation z_i . L'observateur est donc sensible uniquement au défaut capteur dont l'observation est utilisée comme entrée. Une condition nécessaire est l'observabilité du système avec une seule mesure. Pour faire face à ce problème, des approches similaires où chaque observateur

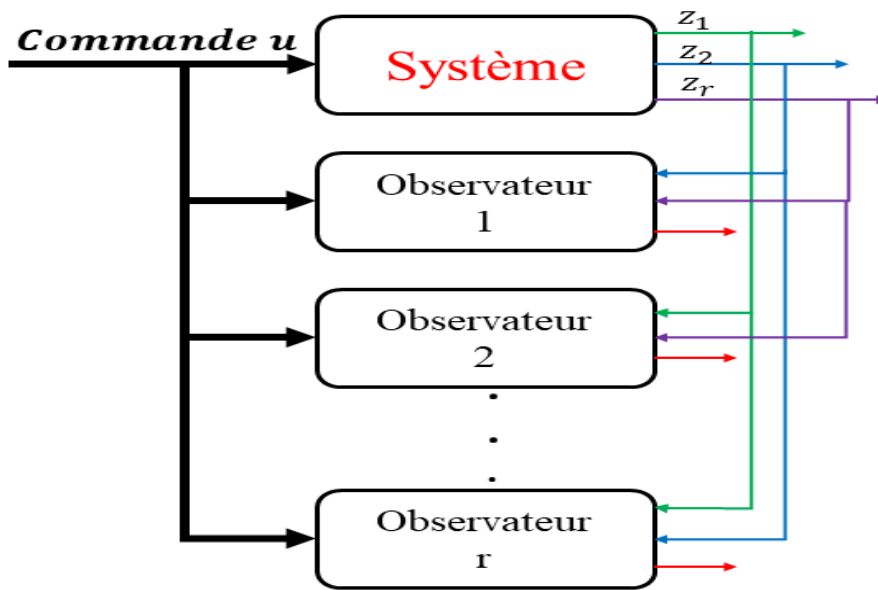


FIGURE 3.1 – Schéma d'observateur généralisé

prend comme entrées un groupe de mesures pour maintenir l'observabilité du système, sont introduites dans la littérature.

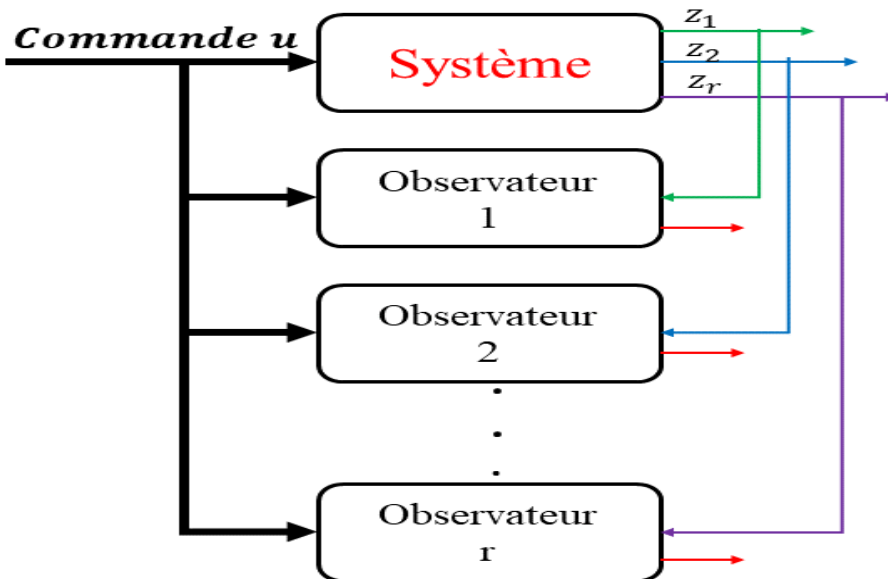


FIGURE 3.2 – Schéma d'observateur dédié

3.4 Évaluation du résidu et seuillage

L'évaluation du résidu et la prise de décision se fait par des méthodes statistiques qui se basent sur des tests d'hypothèses. En effet, deux décisions u_i sont à envisager :

1. u_1 est la décision qui correspond à une présence de défaut.
2. u_0 est la décision qui correspond à une absence de défaut.

Ces décisions sont obtenues à partir de deux hypothèses H_i :

1. H_1 est l'hypothèse qui correspond à une présence de défaut.
2. H_0 est l'hypothèse qui correspond à une absence de défaut.

On peut donc définir les probabilités suivantes :

— *Probabilité de détection* P_D :

$$P_D = p(u_1/H_1) \quad (3.89)$$

— *Probabilité de fausse alarme* P_F

$$P_F = p(u_1/H_0) \quad (3.90)$$

— *Probabilité des détections manquées* P_M :

$$P_M = p(u_0/H_1) \quad (3.91)$$

Considérons la figure 3.3 avec un résidu sous l'hypothèse H_0 et l'hypothèse H_1 , ayant les distributions suivantes :

$$BD/H_0 \sim \chi_6^2 \quad (3.92)$$

$$BD/H_1 \sim \chi_6^2(\lambda) \quad \lambda > 0 \quad (3.93)$$

À partir de la figure 3.3, les probabilités P_D , P_F et P_M sont calculées comme suit :

$$P_D = \int_{th}^{\infty} p(BD/H_1) dBD \quad (3.94)$$

$$P_F = \int_{th}^{\infty} p(BD/H_0) dBD \quad (3.95)$$

$$P_M = \int_0^{th} p(BD/H_1) dBD \quad (3.96)$$

Différents critères peuvent être trouvés dans la littérature pour le calcul du seuil (WHALEN, 1971). Un résumé est donné dans cette section.

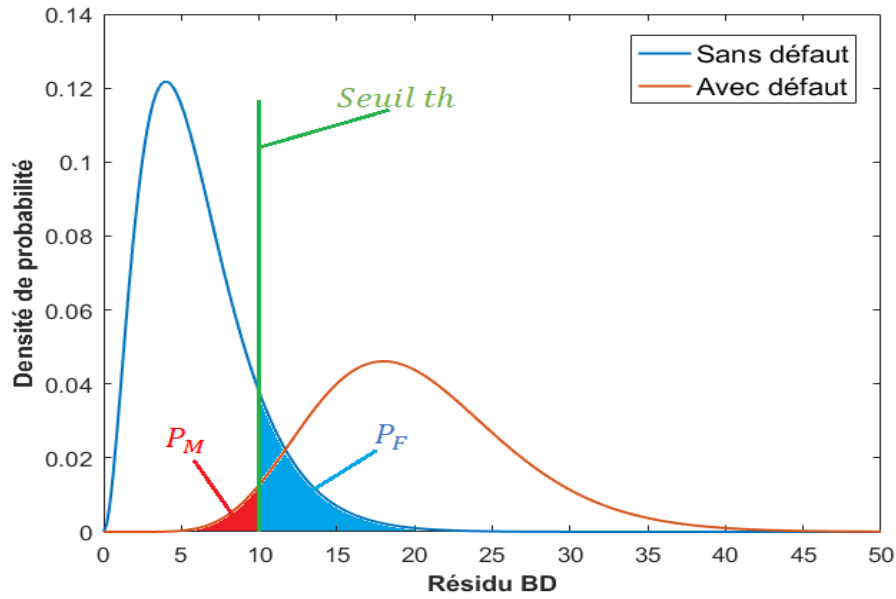


FIGURE 3.3 – Modélisation des probabilités de fausse alarme et des détections manquées

3.4.1 Critère de Neyman-Pearson

Étant donné une probabilité de fausse alarme P_F fixe qui ne dépasse pas un taux admissible α . Le seuil est choisi en résolvant le problème d'optimisation suivant (DING, 2008) :

$$\max(P_D) \quad \text{de sorte que} \quad P_F \leq \alpha \quad (3.97)$$

Le problème d'optimisation de l'équation 3.97 représente le critère de Neyman-Pearson. Une condition nécessaire est la connaissance a priori des probabilités conditionnelles :

$$P_0(x) = p(H_0/x) \quad (3.98)$$

$$P_1(x) = p(H_1/x) \quad (3.99)$$

où x est une variable de test.

La solution au problème d'optimisation est donnée comme suit (DING, 2008) :

- Si $\frac{P_1(x)}{P_0(x)} < th$, H_0 est choisie.
- Si $\frac{P_1(x)}{P_0(x)} > th$, H_1 est choisie.

où th est obtenu en résolvant l'équation suivante :

$$p\left(\frac{P_1(x)}{P_0(x)} > th/H_0\right) = \alpha \quad (3.100)$$

3.4.2 Critère de Bayes

Étant donné l'équation 3.101 qui classe l'observation x selon les hypothèses H_0 et H_1 :

$$p(H_1/x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} p(H_0/x) \quad (3.101)$$

L'équation 3.101 peut être interprétée comme suit :

- Si $p(H_1/x) > p(H_0/x)$, alors H_1 est choisie.
- Si $p(H_1/x) < p(H_0/x)$, alors H_0 est choisie.

En utilisant la règle de Bayes, on obtient :

$$\frac{p(H_1)p(x/H_1)}{p(x)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{p(H_0)p(x/H_0)}{p(x)} \quad (3.102)$$

Ce qui mène au rapport de vraisemblance suivant :

$$\Delta = \frac{p(x/H_1)}{p(x/H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{p(H_0)}{p(H_1)} \quad (3.103)$$

L'intuition derrière le critère de Bayes est d'introduire un coût $C_{ij}/i, j = (0, 1)$ pour chaque décision u_i sachant que H_j est correct. Pour cela, une fonction de coût J appelée le risque de Bayes est à minimiser (VARSHNEY, 1996) :

$$J = C_{00}P_0 + C_{01}P_1 + \int [P_0(C_{10} - C_{00})P_0(x) + P_1(C_{11} - C_{01})P_1(x)] dx \quad (3.104)$$

où P_0 et P_1 sont les probabilités a priori des hypothèses H_0 et H_1 respectivement :

$$P_0 = p(H_0) \quad (3.105)$$

$$P_1 = p(H_1) \quad (3.106)$$

Il est raisonnable d'attribuer un coût plus élevé à une décision juste, donc :

$$C_{ij, i \neq j} > C_{ii} \quad (3.107)$$

Sachant que $C_{00}P_0 + C_{01}P_1$ est constant, minimiser le risque de Bayes revient à résoudre l'équation suivante (DING, 2008) :

$$P_0(C_{10} - C_{00})P_0(x) + P_1(C_{11} - C_{01})P_1(x) < 0 \quad (3.108)$$

Ce qui donne :

$$\frac{P_1(x)}{P_0(x)} > \frac{P_0(C_{10} - C_{00})P_0(x)}{P_1(C_{11} - C_{01})P_1(x)} \quad (3.109)$$

Et le seuil est donné par l'équation suivante :

$$th = \log\left(\frac{P_0}{P_1}\right) + \log\left(\frac{C_{10} - C_{00}}{C_{01} - C_{11}}\right) \quad (3.110)$$

où \log est le logarithme népérien et :

$$P_1 = 1 - P_0 \quad (3.111)$$

Le test pour la décision de l'équation 3.101 est reformulé comme suit :

$$\log\left(\frac{P_1(x)}{P_0(x)}\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} th \quad (3.112)$$

Il est à noter que pour le critère de Bayes, les probabilités a priori doivent être connues.

3.4.3 Critère entropique

Avec le critère de Bayes, la connaissance des probabilités a priori des hypothèses est nécessaire. Or, pour certaines applications, il pourrait être intéressant d'utiliser un critère qui se base sur la quantité d'information afin de minimiser l'ambiguïté entre l'hypothèse et la décision. Considérons l'entropie conditionnelle $h(H/u)$ entre l'hypothèse est la décision (VARSHNEY, 1996) :

$$h(H/u) = E_p\left[\log\left(\frac{1}{p(H/u)}\right)\right] \quad (3.113)$$

$$= - \sum_{i,j \in (0,1)} p(u_i/H_j)P_j \log\left(\frac{p(u_i/H_j)P_j}{p(u_i/H_0)P_0 + p(u_i/H_1)P_1}\right) \quad (3.114)$$

$$= - \sum_{i \in (0,1)} \left[\alpha_i \log\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i}\right) + \beta_i \log\left(\frac{\beta_i}{\alpha_i + \beta_i}\right) \right] \quad (3.115)$$

où

$$\begin{cases} \alpha_0 = P_0(1 - P_F) \\ \alpha_1 = P_0 P_F \\ \beta_0 = (1 - P_0)(1 - P_D) \\ \beta_1 = (1 - P_0)P_D \end{cases} \quad (3.116)$$

La dérivée de $h(H/u)$ par rapport à une variable v est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{\partial h(H/u)}{\partial v} = - \sum_{i \in (0,1)} \left[\frac{\partial \alpha_i}{\partial v} \log\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i}\right) + \frac{\partial \beta_i}{\partial v} \log\left(\frac{\beta_i}{\alpha_i + \beta_i}\right) \right] \quad (3.117)$$

Sachant que P_0 est constant on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(H/u)}{\partial v} = & P_0 \frac{\partial P_f}{\partial v} \log\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \beta_0}\right) + (1 - P_0) \frac{\partial P_D}{\partial v} \log\left(\frac{\beta_0}{\alpha_0 + \beta_0}\right) \\ & - P_0 \frac{\partial P_f}{\partial v} \log\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \beta_1}\right) - (1 - P_0) \frac{\partial P_D}{\partial v} \log\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1}\right) \end{aligned} \quad (3.118)$$

Équation 3.118 peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\frac{\partial h(H/u)}{\partial v} = P_0(C_{10} - C_{00}) \frac{\partial P_F}{\partial v} - (1 - P_0)(C_{01} - C_{11}) \frac{\partial P_D}{\partial v} \quad (3.119)$$

avec

$$\begin{cases} C_{00} = \log \frac{\alpha_0 + \beta_0}{\alpha_0} \\ C_{01} = \log \frac{\alpha_0 + \beta_0}{\beta_0} \\ C_{10} = \log \frac{\alpha_1 + \beta_1}{\alpha_1} \\ C_{11} = \log \frac{\alpha_1 + \beta_1}{\beta_1} \end{cases} \quad (3.120)$$

La décision optimale qui minimise l'entropie conditionnelle consiste à résoudre le test suivant :

$$\Delta = \frac{p(x/H_1)}{p(x/H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} th^{opt} \quad (3.121)$$

où th^{opt} est le seuil optimal qui minimise l'entropie conditionnelle. En mettant $th = \frac{\partial P_d}{\partial P_F}$ et en annulant l'équation 3.119 on obtient :

$$th^{opt} = \frac{\partial P_d}{\partial P_F} = \frac{P_0}{1 - P_0} \frac{(C_{10} - C_{00})}{(C_{01} - C_{11})} \quad (3.122)$$

Contrairement au critère de Bayes ou de Neyman-Pearson, les coûts C_{ij} ne sont plus constants. La méthode d'optimisation du seuil en utilisant le critère entropique est résumée par l'algorithme 1 :

Algorithm 1 Optimisation du seuil en utilisant le critère entropique

1. Fixer P_0
 2. Initialiser $h_{min} \leftarrow +\infty$
 3. **Pour** $th = th_{min}$ à th_{max}
 4. Calculer P_D et P_F
 5. Calculer $h(u/H)$
 6. **Si** $h(u/H) < h_{min}$
 7. $h_{min} = h(u/H)$
 8. $th^{opt} = th$
 9. **fin Si**
 10. **fin Pour**
 11. $th = th^{opt}$
-

3.4.4 Critère de Kullback-Leibler

Le critère basé sur la divergence de Kullback-Leibler introduit par (AL HAGE, 2016) s'inspire du critère entropique. Un résumé de ce critère est donné dans cette section.

La divergence de Kullback-Leibler entre la distribution a priori ($p(H)$) et la distribution a posteriori ($p(H/u)$) sachant qu'une décision est prise, est donnée par l'équation suivante :

$$KL = KL(p(H/u)||p(H)) = \sum_{i \in (0,1)} p(H_i/u_j) \log\left(\frac{p(H_i/u_j)}{p(H_i)}\right) \quad (3.123)$$

$$= \sum_{i \in (0,1)} \sum_{j \in (0,1)} \frac{p(u_j/H_j)p(H_i)}{p(u_j)} \log\left(\frac{p(u_j/H_j)p(H_i)}{p(u_j)}\right) \quad (3.124)$$

KL peut être réécrit sous la forme suivante :

$$KL = \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \beta_0} \log\left(\frac{\alpha_0}{P_0(\alpha_0 + \beta_0)}\right) + \frac{\beta_0}{\alpha_0 + \beta_0} \log\left(\frac{\beta_0}{(1 - P_0)(\alpha_0 + \beta_0)}\right) \\ + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \beta_1} \log\left(\frac{\alpha_1}{P_0(\alpha_1 + \beta_1)}\right) + \frac{\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1} \log\left(\frac{\beta_1}{(1 - P_0)(\alpha_1 + \beta_1)}\right) \quad (3.125)$$

avec :

$$\begin{cases} \alpha_0 = P_0(1 - P_F) \\ \alpha_1 = P_0 P_F \\ \beta_0 = (1 - P_0)(1 - P_D) \\ \beta_1 = (1 - P_0)P_D \\ p(u_0) = \alpha_0 + \beta_0 \\ p(u_1) = \alpha_1 + \beta_1 \\ P_0 = p(H_0) \end{cases} \quad (3.126)$$

Il est démontré dans (AL HAGE, 2016) que minimiser la probabilité de fausse alarme et maximiser la probabilité de détection consiste à maximiser KL . De ce fait, le critère de Kullback-Leibler KL_c est donné par l'équation suivante :

$$KL_c = \max(KL) \quad (3.127)$$

Maximiser KL consiste donc à annuler sa dérivée par rapport à une variable v :

$$\frac{\partial KL}{\partial v} = \sum_{i \in (0,1)} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial v} \left[\frac{\beta_i}{(\alpha_i + \beta_i)^2} \log\left(\frac{(1 - P_0)\alpha_i}{P_0\beta_i}\right) \right] \right. \\ \left. + \frac{\partial \beta_i}{\partial v} \left[\frac{\alpha_i}{(\alpha_i + \beta_i)^2} \log\left(\frac{P_0\beta_i}{(1 - P_0)\alpha_i}\right) \right] \right) \quad (3.128)$$

À partir de $th = \frac{\partial P_d}{\partial P_f}$, le test du rapport de vraisemblance de ce problème d'optimisation est :

$$\Delta = \frac{p(x/H_1)}{p(x/H_0)} \underset{H_0}{\underset{H_1}{\gtrless}} th^{opt} = \frac{P_0}{1 - P_0} \frac{A_0 - A_1}{B_1 - B_0} \quad (3.129)$$

avec :

$$\begin{cases} A_i = \frac{\beta_i}{(\alpha_i + \beta_i)^2} \log\left(\frac{(1-P_0)\alpha_i}{P_0\beta_i}\right) \\ B_i = \frac{\alpha_i}{(\alpha_i + \beta_i)^2} \log\left(\frac{P_0\beta_i}{(1-P_0)\alpha_i}\right) \end{cases} \quad (3.130)$$

D'autre part, l'auteur a opté pour une estimation du maximum de vraisemblance pour le calcul de P_0 (W. SCHOLZ, 2006), en prenant en compte l'historique des décisions. Ce qui donne \hat{P}_0 variable au lieu de le fixer comme avec le critère entropique.

$$\hat{P}_0 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^m h^i}{m} \quad (3.131)$$

où m est le nombre des échantillons des hypothèses et :

$$\begin{cases} h^i = 0 & \text{si l'hypothèse } H_0 \text{ est sélectionnée} \\ h^i = 1 & \text{si l'hypothèse } H_1 \text{ est sélectionnée} \end{cases} \quad (3.132)$$

La méthode d'optimisation du seuil en utilisant le critère de Kullback-Leibler est résumée par l'algorithme 2 :

Algorithm 2 Optimisation du seuil en utilisant le critère de Kullback-Leibler

1. Estimer \hat{P}_0 en utilisant le maximum de vraisemblance
 2. Initialiser $KL_{max} \leftarrow 0$
 3. **Pour** $th = th_{min}$ à th_{max}
 4. Calculer P_D et P_F
 5. Calculer KL
 6. **Si** $KL > KL_{max}$
 7. $KL_{max} = KL$
 8. $th^{opt} = th$
 9. **fin Si**
 10. **fin Pour**
 11. $th = th^{opt}$
-

3.4.5 Critère de Bhattacharyya

En s'inspirant des critères entropique et de Kullback-Leibler, nous proposons de formuler le problème d'optimisation du seuil en calculant la divergence de Bhattacharyya entre la distribution a priori ($p(H)$) et la distribution a posteriori ($p(H/u)$).

$$DB(p(H/u_j)||p(H)) = -\log \sum_{i \in (0,1)} p(H_i/u_j)^{\frac{1}{2}} p(H_i)^{\frac{1}{2}} \quad (3.133)$$

La somme des divergences de Bhattacharyya (BS : Bhattacharyya Somme) associées aux décisions u_0 et u_1 , est donnée par l'équation suivante :

$$BS = DB(p(H/u_0) || p(H)) + DB(p(H/u_1) || p(H)) \quad (3.134)$$

Le critère de Bhattacharyya B_c est un critère d'optimisation du seuil, qui consiste à minimiser BS :

$$B_c = \min(BS) \quad (3.135)$$

BS peut être développée comme suit :

$$\begin{aligned} BS &= \sum_{j \in (0,1)} B_D(p(H/u_j) || p(H)) \\ &= - \sum_j \log \sum_i p(H_i/u_j)^{\frac{1}{2}} p(H_i)^{\frac{1}{2}} \\ &= - \left[\log \sum_i p(H_i/u_0)^{\frac{1}{2}} p(H_i)^{\frac{1}{2}} + \log \sum_i p(H_i/u_1)^{\frac{1}{2}} p(H_i)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= - \left[\log \left[p(H_0/u_0)^{\frac{1}{2}} p(H_0)^{\frac{1}{2}} + p(H_1/u_0)^{\frac{1}{2}} p(H_1)^{\frac{1}{2}} \right] \right. \\ &\quad \left. + \log \left[p(H_0/u_1)^{\frac{1}{2}} p(H_0)^{\frac{1}{2}} + p(H_1/u_1)^{\frac{1}{2}} p(H_1)^{\frac{1}{2}} \right] \right] \end{aligned} \quad (3.136)$$

avec

$$p(u_0) = p(u = 0) = P_0(1 - P_F) + (1 - P_0)(1 - P_D) \quad (3.137)$$

$$p(u_1) = p(u = 1) = P_0 P_F + (1 - P_0) P_D \quad (3.138)$$

En utilisant la règle de Bayes, on obtient :

$$\begin{aligned}
 BS &= - \left[\log \left[p(H_0) \sqrt{\frac{p(u_0/H_0)}{p(u_0)}} + p(H_1) \sqrt{\frac{p(u_0/H_1)}{p(u_0)}} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \log \left[p(H_0) \sqrt{\frac{p(u_1/H_0)}{p(u_1)}} + p(H_1) \sqrt{\frac{p(u_1/H_1)}{p(u_1)}} \right] \right] \\
 &= - \left[\log \left[P_0 \sqrt{\frac{1 - P_F}{P_0(1 - P_F) + (1 - P_0)(1 - P_D)}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (1 - P_0) \sqrt{\frac{1 - P_D}{P_0(1 - P_F) + (1 - P_0)(1 - P_D)}} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \log \left[P_0 \sqrt{\frac{P_F}{P_0 P_F + (1 - P_0) P_D}} + (1 - P_0) \sqrt{\frac{P_D}{P_0 P_F + (1 - P_0) P_D}} \right] \right] \\
 &= - \left[\log \left[P_0 \sqrt{1 - P_F} + (1 - P_0) \sqrt{1 - P_D} \right] - \frac{1}{2} \log \left[P_0(1 - P_F) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (1 - P_0)(1 - P_D) \right] + \log \left[P_0 \sqrt{P_F} + (1 - P_0) \sqrt{P_D} \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \log \left[P_0 P_F + (1 - P_0) P_D \right] \right]
 \end{aligned} \tag{3.139}$$

posant :

$$\alpha_0 = P_0 \sqrt{1 - P_F} \quad \beta_0 = (1 - P_0) \sqrt{1 - P_D} \tag{3.140}$$

$$\alpha_1 = P_0 \sqrt{P_F} \quad \beta_1 = (1 - P_0) \sqrt{P_D} \tag{3.141}$$

l'équation 3.139 devient :

$$\begin{aligned}
 BS &= - \left[\log(\alpha_0 + \beta_0) + \log(\alpha_1 + \beta_1) - \frac{1}{2} \log \left(\frac{\alpha_0^2}{P_0} + \frac{\beta_0^2}{1 - P_0} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \log \left(\frac{\alpha_1^2}{P_0} + \frac{\beta_1^2}{1 - P_0} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{3.142}$$

posant

$$\begin{cases} \gamma_0 = \frac{\alpha_0^2}{P_0} + \frac{\beta_0^2}{1 - P_0} \\ \gamma_1 = \frac{\alpha_1^2}{P_0} + \frac{\beta_1^2}{1 - P_0} \end{cases} \tag{3.143}$$

BS est donnée par l'équation suivante :

$$BS = - \left[\log(\alpha_0 + \beta_0) + \log(\alpha_1 + \beta_1) - \frac{1}{2} \log(\gamma_0) - \frac{1}{2} \log(\gamma_1) \right] \tag{3.144}$$

La méthode d'optimisation du seuil en utilisant le critère de Bhattacharyya est résumée par l'algorithme 3 :

Algorithm 3 Optimisation du seuil en utilisant le critère de Bhattacharyya

1. Estimer \hat{P}_0 en utilisant le maximum de vraisemblance
 2. Initialiser $BS_{min} \leftarrow +\infty$
 3. **Pour** $th = th_{min}$ à th_{max}
 4. Calculer P_D et P_F
 5. Calculer BS
 6. **Si** $BS < BS_{min}$
 7. $BS_{min} = BS$
 8. $th^{opt} = th$
 9. **fin Si**
 10. **fin Pour**
 11. $th = th^{opt}$
-

3.5 Conclusion

En raison de la nature stochastique des applications en systèmes robotiques mobiles, elles sont souvent traitées sous un cadre probabiliste. En effet, les filtres bayésiens récursifs sont les observateurs à entrées inconnues de référence pour l'estimation d'état et le diagnostic. Ces filtres ont la capacité de gérer l'incertitude des mesures pour fournir une estimation d'état sous forme de distribution de probabilité ayant une moyenne et une forme (variance dans le cas gaussien), qui définit la probabilité de l'estimation sur un intervalle qui correspond au support la fonction de densité de probabilité représentant l'estimation.

Afin de détecter les défauts capteurs et actionneurs affectant le système, une couche de diagnostic est nécessaire. Cette couche se décompose en deux étapes : La conception du résidu et l'évaluation du résidu pour la décision. Les méthodes classiques de génération de résidus pour la navigation autonome des robots mobiles, se basent sur la différence entre l'estimation et la mesure. Or une telle conception du résidu ne prend pas en compte l'aspect probabiliste de la distribution de probabilité. Concevoir un résidu robuste contre les incertitudes des mesures équivaut à comparer d'une manière optimale la distribution de probabilité de la mesure et de l'estimation.

La théorie de l'information propose une large gamme d'outils en forme de divergences ou de distances qui peuvent comparer deux distributions de probabilité. Dans notre cas, on cherche à comparer les distributions a priori et a posteriori au sein du filtre informationnel. On a proposé d'utiliser deux divergences spéciales de la divergence α de Rényi pour la conception du résidu, et qui sont : la divergence de Kullback-Leibler ($\alpha = 1$) et la divergence de Bhattacharyya (reliée à $\alpha = \frac{1}{2}$).

La divergence de Kullback-Leibler dans le cas gaussien est composée de deux termes :

- La distance de Mahalanobis qui suit une loi de Fisher dans le cas sans défaut et qui permet de réaliser un test sur les moyennes.

- La divergence de Bregman matricielle qui suit une loi χ^2 dans le cas sans défaut et qui permet de réaliser un test sur les matrices de covariance.

La divergence de Bhattacharya est composée de trois termes dans le cas bayésien :

- Le premier terme est une transformation de la distance de Mahalanobis avec une matrice de covariance qui est une moyenne des matrices de covariance des distributions a priori et a posteriori. L'estimation de ce terme suit une loi de Fisher (centrée dans le cas sans défaut et non-centrée dans le cas avec défaut), et permet de faire un test sur les moyennes.
- Le deuxième et le troisième termes sont des informations mutuelles entre la matrices de covariance moyenne et la matrice de covariance a priori ou a posteriori. Vue la corrélation des deux matrices de covariance, une dérivation analytique de la distribution de l'échantillon de ce terme est impossible.

Afin de trouver la distribution de la divergence de Bhattacharyya pour réaliser un test d'hypothèse, une inférence est utilisée. En effet, vue la relation entre la distance de Hellinger (distribution dans le cas sans défaut connue) et la divergence de Bhattacharyya, une fonction de l'échantillon de la divergence de Bhattacharyya est utilisée dont la distribution suit une loi Gamma.

Une fois le résidu conçu et les distributions établies, l'évaluation est faite en calculant un seuil optimal qui maximise la probabilité de détection et minimise les probabilité de fausse alarme et de détection manquée. Pour cela, des méthodes statistiques basées sur l'utilisation de critères informationnels sont adoptées. Le critère de Kullback-Leibler KL_c qui maximise le gain informationnel apporté par la décision sur l'hypothèse réelle et le critère de Bhattacharyya B_c qui minimise l'ambiguïté entre l'hypothèse et la décision.

Dans le chapitre suivant, ces outils informationnels sont utilisés par la couche de diagnostic pour assurer une navigation autonome tolérante aux défauts capteurs et actionneurs pour les systèmes robotiques mobiles.

Chapitre 4

Approche proposée et résultats

« La théorie, c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne. La pratique, c'est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi »

Albert Einstein

Résumé du chapitre :

Ce chapitre est divisé en deux parties. La première partie est consacrée au développement d'une approche informationnelle pour le diagnostic des défauts capteurs et actionneurs, en se basant sur les notions théoriques vues dans les trois premiers chapitres. L'approche doit être capable de détecter et de localiser des défauts capteurs et actionneurs en temps réel sur des systèmes robotiques mobiles réels. Pour la deuxième partie, les performances de l'approche sont analysées et discutées, en proposant différentes applications et simulations : une application et une simulation pour un seul robot mobile différentiel à deux roues, une application et une simulation pour un système multi-robots composé de trois robots mobiles différentiels à deux roues et finalement une simulation de la partie commande par modes glissants et la partie exclusion des défauts actionneurs pour un robot mobile différentiel à quatre roues.

Plan du chapitre

| | | |
|------------|--|------------|
| 4.1 | Introduction | 87 |
| 4.2 | Approche proposée pour le diagnostic informationnel des défauts capteurs et actionneurs | 87 |
| 4.3 | Matériels utilisés | 93 |
| 4.3.1 | Système d'exploitation pour la robotique ROS | 93 |
| 4.3.2 | Robots mobiles | 94 |
| 4.3.3 | Capteurs extéroceptifs | 95 |
| 4.3.4 | Organisation des applications | 98 |
| 4.4 | Application à un RMD2R en utilisant la divergence de Kullback-Leibler | 98 |
| 4.4.1 | Développement des deux filtres informationnels | 99 |
| 4.4.2 | Approche proposée pour un RMD2R | 102 |
| 4.4.3 | Résultats de simulation | 106 |
| 4.4.4 | Résultats de l'application en temps réel | 111 |
| 4.5 | Application à un système multi-robots en se basant sur la divergence de Bhattacharyya | 114 |
| 4.5.1 | Développement des deux filtres informationnels pour le système multi-robot | 117 |
| 4.5.2 | Approche proposée pour un système multi-robot | 122 |
| 4.5.3 | Résultats de simulation pour un système multi-robot | 126 |
| 4.5.4 | Résultats de l'application en temps réel pour un système multi-robot | 136 |
| 4.6 | Application sur des robots RMD4R | 138 |
| 4.6.1 | Simulation de la commande par mode glissant classique | 141 |
| 4.6.2 | Simulation de la commande par mode glissants proposée | 144 |
| 4.6.3 | Simulation de l'approche de diagnostic pour un RMD4R | 145 |
| 4.7 | Conclusion | 150 |

4.1 Introduction

Le but principal des travaux de cette thèse est de proposer une approche de diagnostic de défauts capteurs et actionneurs afin d'assurer une navigation autonome sûre et fiable pour des systèmes robotiques mobiles à roues, et cela en utilisant des capteurs de base comme les encodeurs et les télémètres. Les objectifs de l'approche proposée peuvent être listés comme suit :

- L'approche proposée doit avoir la capacité de s'exécuter en temps réel, dans une boucle interne au sein de la boucle de régulation globale qui contient les algorithmes de commande et d'estimation d'état.
- La génération des indicateurs de fautes (résidus) se fait d'une manière informationnelle, en comparant la distribution de probabilité de la prédiction du filtre informationnel, avec la distribution de probabilité de l'estimation, après la prise en compte des contributions informationnelles des différentes mesures capteurs dans l'étape de correction du filtre informationnel. Par conséquent, des outils issus de la théorie de l'information sont utilisés pour la conception du résidu, plus particulièrement les divergences de Kullback-Leibler et de Bhattacharyya.
- L'algorithme de diagnostic prend en considération les informations issues des deux blocs de commande et de fusion de données multi-capteur pour pouvoir générer un ensemble de résidus qui permet de localiser les défauts capteurs et actionneurs.
- Afin de gérer les incertitudes liées aux mesures, un résidu informationnel, la forme informationnelle du filtre de Kalman et un critère informationnel pour le seuillage, sont utilisés pour découpler les incertitudes des défauts capteurs et actionneurs.
- La navigation autonome doit être assurée en cas de défaut en utilisant une approche d'exclusion des composants défectueux.
- L'approche proposée doit être capable de compenser les perturbations externes en utilisant la commande robuste développée dans la section [2.4.2](#).
- L'algorithme proposé doit être évolutif et adaptatif. En d'autres termes, il doit s'adapter à la variation du type et du nombre de robots et de capteurs.

L'algorithme sera détaillé et expliqué, puis il sera appliqué sur des robots réels en temps réel.

4.2 Approche proposée pour le diagnostic informationnel des défauts capteurs et actionneurs

Pour une navigation autonome, l'objectif est de développer une loi de commande qui force le robot mobile à suivre une trajectoire désirée. Pour cela, une estimation fiable et précise de l'état du robot est nécessaire. Cependant, le système robotique peut être sujet à différents défauts, capteurs ou actionneurs. Un

capteur défaillant peut considérablement détériorer l'intégrité de l'estimation ou de la localisation, alors qu'un actionneur défectueux peut entraver l'objectif de la commande. L'objectif des travaux de cette thèse est de développer une stratégie de diagnostic sous un cadre informationnel, qui peut détecter et localiser d'une manière efficace et précise les défauts capteurs et actionneurs, y compris les défauts multiples et simultanés.

L'approche proposée est illustrée par la figure 4.1. Étant donné une trajectoire désirée q_d et l'estimation d'état \hat{q} obtenue en utilisant le filtre informationnel étendu (section 2.3.3), un contrôleur en boucle fermée, cinématique (équation 2.85) et/ou dynamique (équation 2.122), est conçu afin de générer des signaux de commande pour les actionneurs du robot, attachés à des contrôleurs PI (Proportionnel Intégral) de bas niveau. Ces signaux de commande permettent au robot de suivre asymptotiquement sa trajectoire désirée.

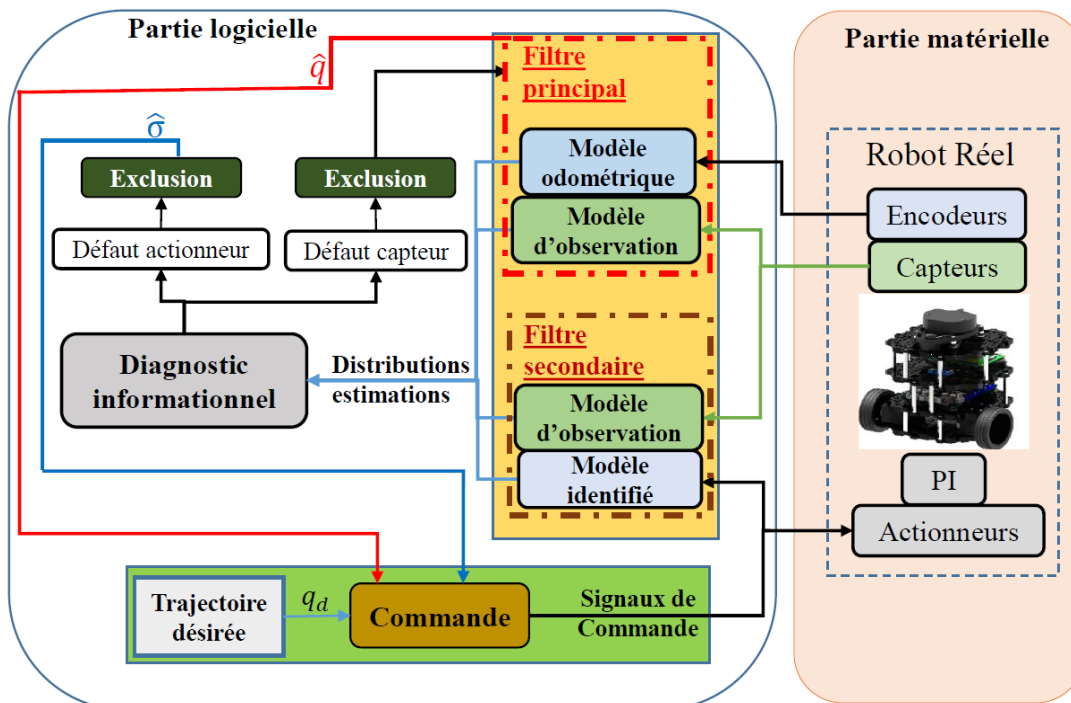


FIGURE 4.1 – Schéma global de l'approche proposée

Le robot mobile contient des actionneurs et des capteurs tels que des encodeurs. Néanmoins, tout au long de cette section, les encodeurs ne sont pas appelés capteurs, et cela pour les différencier du reste des capteurs.

Deux modèles de prédiction pour le filtre informationnel peuvent être obtenus : le modèle odométrique et le modèle identifié.

- Le modèle odométrique correspond au modèle présenté dans la section 2.2.3. Il prend comme entrées les données encodeurs et fournit une estimation de l'état du robot après le déplacement de ce dernier.
- Le modèle identifié correspond aux modèles mathématiques du robot mobile, il peut être cinématique (section 2.2.1) ou dynamique (section

2.2.2). Le modèle identifié prend donc les signaux de commande comme entrées et fournit une estimation (ou prédiction) de l'état avant le déplacement du robot.

En utilisant le modèle d'observation obtenu à partir de la relation entre les mesures des capteurs et l'état du système, deux filtres informationnels étendus peuvent être développés : un filtre principal et un filtre secondaire.

- Le filtre principal utilise le modèle odométrique dans l'étape de prédiction. La distribution de probabilité de l'état du robot est ensuite mise à jour grâce aux contributions informationnelles des mesures capteurs. La sortie de ce filtre alimente le contrôleur.
- Le filtre secondaire utilise le modèle identifié dans l'étape de prédiction. Tandis que le filtre principal alimente le contrôleur, ce filtre est utilisé uniquement pour le diagnostic.

En utilisant les deux filtres informationnels, les distributions de probabilité de l'estimation (moyennes et matrices de covariances) des deux étapes des filtres informationnels sont injectées dans la couche de diagnostic. Ces distributions sont ensuite comparées en utilisant des divergences informationnelles (divergence de Kullback-Leibler, divergence de Bhattacharyya), afin de détecter et de localiser les anomalies qui pourraient affecter les capteurs et les actionneurs. Si un capteur est défaillant, sa mesure est exclue de la procédure de fusion de données du filtre informationnel. Dans le cas où l'actionneur est défaillant, une réallocation des signaux de commande est faite, en estimant $\hat{\sigma}$ qui alimente la commande (équation 2.106). Un actionneur i défectueux équivaut à $\hat{\sigma}_i = 0$ alors qu'un actionneur i fonctionnel est représenté par $\hat{\sigma}_i = 1$. Il est donc important de vérifier la commandabilité du système.

Une illustration plus détaillée de la couche de diagnostic informationnel est donnée par la figure 4.2. Une fois que les deux filtres informationnels convergent, deux résidus globaux $GR1$ (Global Residual 1) et $GR2$ (Global Residual 2) sont générés pour la détection de défaut :

1. Le résidu $GR1$ est généré en calculant la divergence entre les distributions de probabilité a priori et a posteriori du filtre informationnel principal, sachant que la distribution a priori se base sur le modèle odométrique.
2. Le résidu $GR2$ est obtenu en calculant la divergence entre la distribution de probabilité de l'étape de prédiction du filtre principal, qui se base sur le modèle odométrique et la distribution de probabilité de l'étape de prédiction du filtre secondaire qui se base lui sur le modèle identifié.

Une fois les résidus générés, leur évaluation se fait avec des méthodes statistiques basées sur la dérivation de critères informationnels qui maximisent la probabilité de détection et minimisent la probabilité de fausse alarme (section 3.4). Cela se fait grâce à des tests d'hypothèses et une connaissance des distributions des résidus dans le cas avec et sans défaut.

Dans le cas où la valeur de l'un des résidus est supérieure à la valeur du

seuil, un défaut est détecté. Pour localiser ou isoler le défaut, deux bancs de filtres informationnels étendus (EIF_O^i et EIF_I^i) sont développés :

- Chaque filtre i du banc de filtre EIF_O^i utilise le modèle odométrique dans l'étape de prédiction, et une seule mesure capteur (distincte pour chaque filtre) dans l'étape de mise à jour.
- Chaque filtre i du banc de filtre EIF_I^i utilise le modèle identifié dans l'étape de prédiction, et une seule mesure capteur (distincte pour chaque filtre) dans l'étape de mise à jour.

Dans le cas où l'observabilité du système est perdue, l'utilisation d'un sous-groupe de mesures par filtre peut être envisagée.

En utilisant les deux bancs de filtres, deux ensembles de résidus informationnels R_O^i (de EIF_O^i) et R_I^i (EIF_I^i) sont générés en comparant les distributions de probabilité a priori et a posteriori de chaque filtre. Une fois le résidu généré, il est évalué en se basant sur des critères informationnels, afin de déduire des seuils optimaux. Il est à noter que chaque résidu est sensible à un défaut capteur et/ou actionneur ou à une combinaison de défauts. Par conséquent, l'objectif est de prendre une décision sur la valeur du résidu en la comparant avec la valeur du seuil :

- La variable de décision r^* égale 0 dans le cas où la valeur du résidu r est inférieure à la valeur du seuil th (cas sans défaut).
- La variable de décision r^* égale 1 dans le cas où la valeur du résidu r est supérieure à la valeur du seuil th (cas avec défaut).

De cette façon, un vecteur de signatures de défauts est comparé à la matrice d'incidence (propre à l'application) (tableau 3.5), pour localiser d'une manière précise le composant défaillant.

Dans le cas où les encodeurs (odomètres) sont défaillants, le filtre secondaire devient le filtre principal et alimente le contrôleur avec l'estimation d'état. Dans le cas où un capteur est défaillant, sa mesure est exclue de la procédure de fusion de données. Dans le cas où un actionneur est défaillant, cela dépend du type du robot et de la redondance de ses actionneurs. Sachant que dans le cadre de cette thèse, la stratégie adoptée est une stratégie d'exclusion, dans le cas d'un RMD2R, la commandabilité du système est perdue avec un actionneur défaillant. Par conséquent, pour une question de sûreté et de sécurité, le robot mobile doit être arrêté et des informations sur son état sont transmises à un opérateur humain. Dans le cas d'un RMD4R, une stratégie d'exclusion peut être envisagée, en estimant la valeur σ ($\hat{\sigma}$) pour une réallocation des signaux de commande.

Le modèle identifié et le modèle odométrique sont des modèles mathématiques pratiquement identiques. En effet, les deux modèles donnent une prédiction (distribution de probabilité) caractérisant le vecteur d'état du robot. Néanmoins, ils diffèrent sur le vecteur des entrées. Tandis que le modèle identifié prend comme entrées les signaux de la commande développée, le modèle odométrique prend les données (mesures) encodeurs comme entrées. Il est à noter que la prédiction du modèle odométrique ne dépend pas de la commande, et donc ne peut pas être affectée par un défaut actionneur.

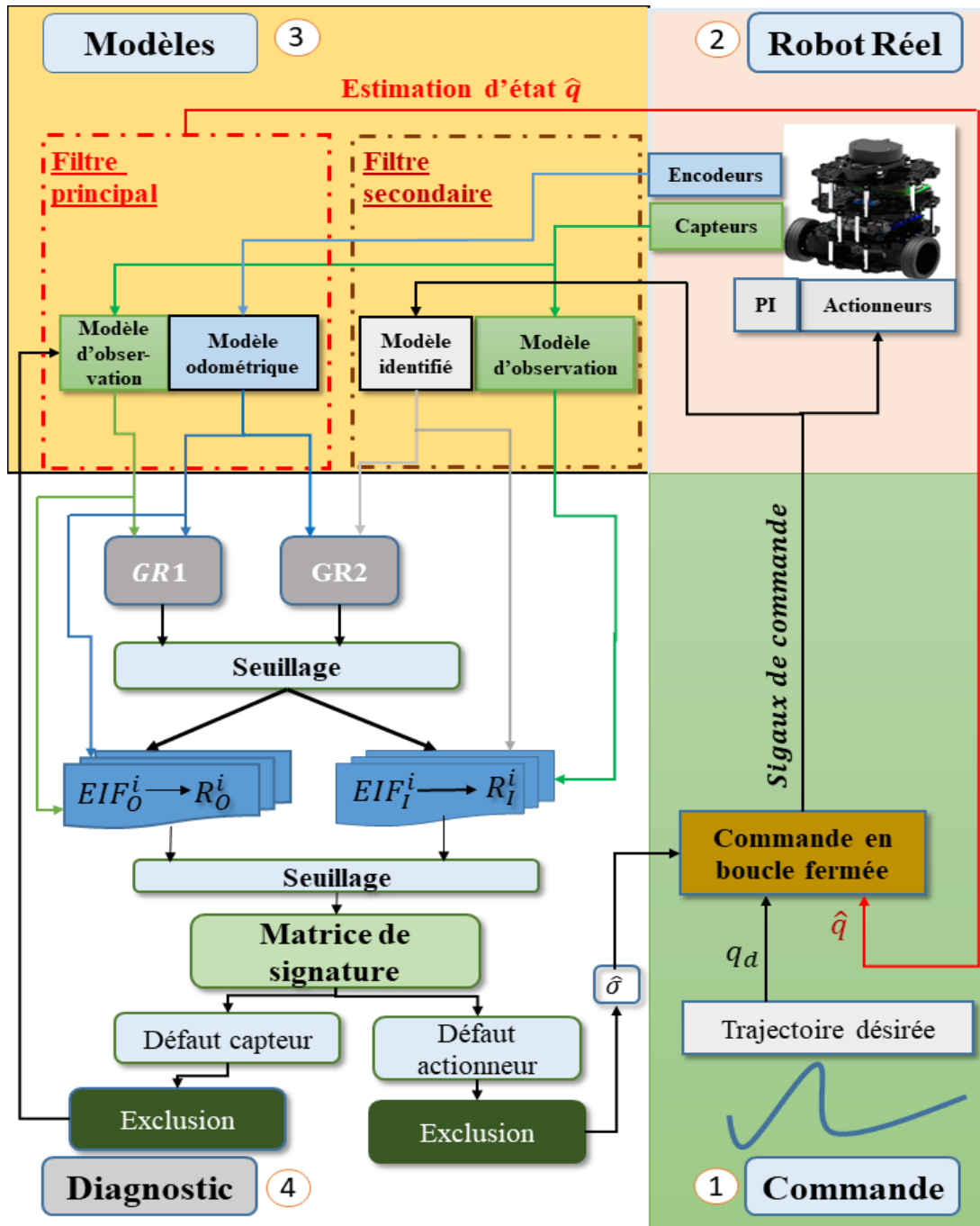


FIGURE 4.2 – Approche informationnelle pour le diagnostic des capteurs et des actionneurs

Considérons la figure 4.3. La distribution de probabilité en rouge correspond à la prédiction de l'état x_k (instant k) du modèle odométrique. La distribution de probabilité en bleu correspond à la prédiction de l'état x_k du modèle identifié. Il est clair que les deux modèles donnent une prédiction du même état x au même instant k . Par contre, le modèle identifié prédit l'état x_k à l'instant $(k - 1)$, ce qui veut dire que la prédiction est fournie avant le déplacement du robot, alors qu'avec le modèle odométrique, la même prédiction est donnée une fois que le robot se déplace à l'instant k . Sachant que le modèle odométrique n'est pas affecté par les défauts actionneurs, et que le modèle identifié n'est pas affecté par les défauts encodeurs, cette propriété peut être utilisée pour localiser les défauts encodeurs des défauts actionneurs.

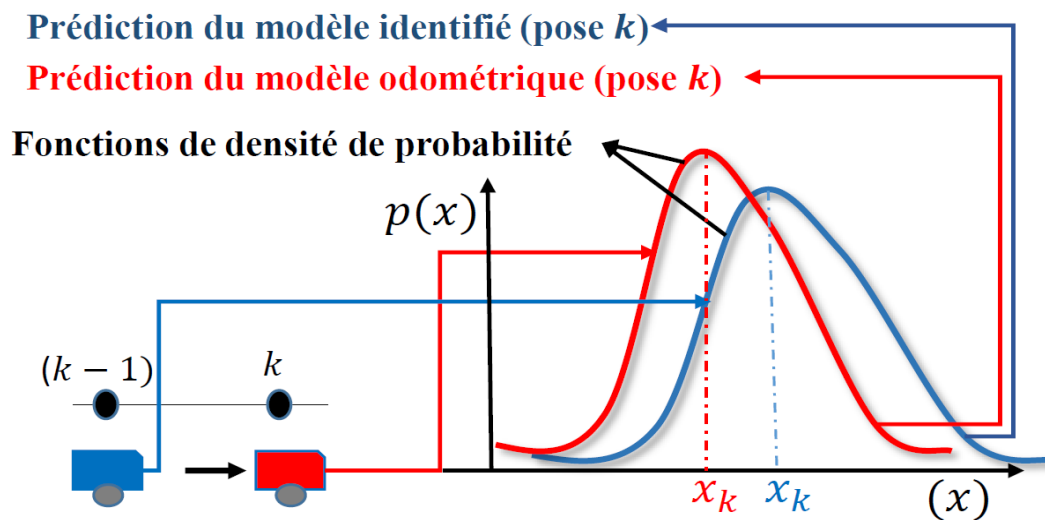


FIGURE 4.3 – Modèles de prédiction odométrique et identifié

Considérons maintenant le filtre principal uniquement. Dans le cas où les encodeurs sont défaillants, la localisation du défaut devient impossible, car les divergences ne sont plus cohérentes. En ajoutant le filtre secondaire, la variable de décision pour le résidu $GR2$ prend la valeur normalisée 1, et en générant les ensembles de résidus R_O^i et R_I^i , la localisation des défauts capteurs et actionneurs devient possible. La combinaison des deux filtres permet donc de générer plusieurs résidus à partir de deux modèles de prédictions différents avec des sensibilités différentes, et qui offrent une meilleure localisation de défauts.

Une stratégie d'exclusion de défauts capteurs et actionneurs est efficace pour une navigation autonome qui n'est pas affectée par des perturbations externes. Cela justifie l'ajout de la commande robuste à modes glissants au sein de la stratégie proposée. Avec une couche de diagnostic informationnel et une commande robuste par modes glissants, le système de navigation autonome est robuste à pratiquement tous les défauts et perturbations.

Cette stratégie peut être facilement généralisée pour les systèmes multi-robots et les RMD4R, ce qui sera détaillé dans les prochaines sections.

4.3 Matériels utilisés

4.3.1 Système d'exploitation pour la robotique ROS

Afin d'implémenter les différents programmes sur les cartes embarquées des robots mobiles, le système d'exploitation *ROS* (*Robot Operating System*) est utilisé. L'idée principale de ROS est d'éviter de reprogrammer les mêmes fonctions pour chaque robot (ne pas réinventer la roue) et donc de proposer des fonctionnalités standardisées faisant de l'abstraction matérielle, tout comme n'importe quel système d'exploitation classique pour ordinateur.

ROS est aussi un middleware qui fournit un bus logiciel qui permet à des objets localisés sur différents ordinateurs d'interagir, en transmettant des données sous une forme normalisée appelée les *messages*, via des systèmes de transport nommés les *topics*. Le noeud (*node*) représentant un processus de calcul ou un programme de base (e.g. algorithme de commande), peut être écrit en utilisant des bibliothèques clientes basées sur différents langages de programmation (Roscpp, Rospypy...). Le noeud peut publier ses messages dans des topics spécifiques, et il peut accéder aux messages publiés par les autres noeuds en s'inscrivant aux topics correspondants. La communication directe et synchrone entre les différents noeuds se fait via un mécanisme de demande de service. Le *master* (maître) est le service de gestion des noeuds. Il relie tous les noeuds ensemble et leur permet d'interagir et d'échanger des messages via les topics ou les services. ROS fournit aussi des outils ou un ensemble de logiciels permettant d'analyser, d'afficher, de déboguer et d'organiser une application. À titre d'exemple, *catkin* qui est un système de gestion de paquets, de génération de code automatique et de compilation, *rviz* qui est une interface graphique permettant d'afficher les modèles des robots et les applications dans un univers 2D, *roslaunch* qui est un programme permettant d'enregistrer et de rejouer des séquences topics, et plein d'autres outils qui représentent l'atout majeur de ce système d'exploitation. Sans oublier les différentes bibliothèques conçues par la communauté robotique et qui vise à faciliter le développement en robotique, en fournissant des fonctionnalités de base, à titre d'exemple : *OpenCV* pour la vision et *MoveIt* pour la planification du mouvement.

Ceci est une très brève introduction de ROS, pour une documentation plus détaillée, le lecteur est invité à consulter l'ouvrage (Koubaa, 2018).

Pour l'implémentation des algorithmes de commande, d'estimation et de diagnostic traités dans le cadre de cette thèse, une toolbox sous Matlab appelée *ROS toolbox* est utilisée. Cette toolbox contient une bibliothèque de fonctions qui permet d'échanger les messages entre Matlab et les différents noeuds du robot réel opérant sous ROS qui est installé sur son ordinateur mono-carte. La communication entre l'ordinateur contenant Matlab et l'ordinateur mono-carte du robot se fait par wifi, via un mécanisme de maître-esclave. Néanmoins, toute la partie physique (e.g. installation de nouveaux capteurs, fonctions des différents composants du robot,...), et certaines fonctions de nos algorithmes (commande bas niveau, création de topics,...) sont directement programmées sur les robots en utilisant la bibliothèque Roscpp (en C++).

4.3.2 Robots mobiles

Deux robots mobiles sont utilisés pour la validation de l'approche proposée : un RMD2R (Turtlebot3) et un RMD4R (Robotnik).

Turtlebot3

Le Turtlebot3 (figure 4.4) est un petit robot mobile différentiel à deux roues basé sur ROS. Il est composé de deux actionneurs de type servomoteurs Dynamixel, d'une Raspberry Pi 3 Model B pour le fonctionnement de ROS, d'une carte embarquée OpenCR (Open-source Control Module for ROS) utilisée comme contrôleur et d'une batterie trois cellules lithium-poly.

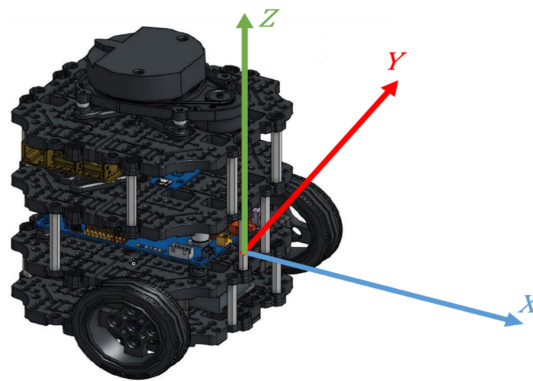


FIGURE 4.4 – Turtlebot3 et son repère

La carte embarquée OpenCR (figure 4.5) contient le micro-contrôleur haute performance STM32F7466 de STMicroelectronics, avec un noyau Cortex-M7 fonctionnant jusqu'à 216 MHz. Il peut également être utilisé pour traiter de grandes quantités de données issues d'algorithmes volumineux et des divers périphériques opérants à haute fréquence. La carte OpenCR inclut aussi une centrale à inertie IMU (Inertial Measurement Unit), qui est une puce MPU9250 de InvenSense, composée d'un accéléromètre/gyroscope et d'un capteur magnéto-métrique à trois axes.

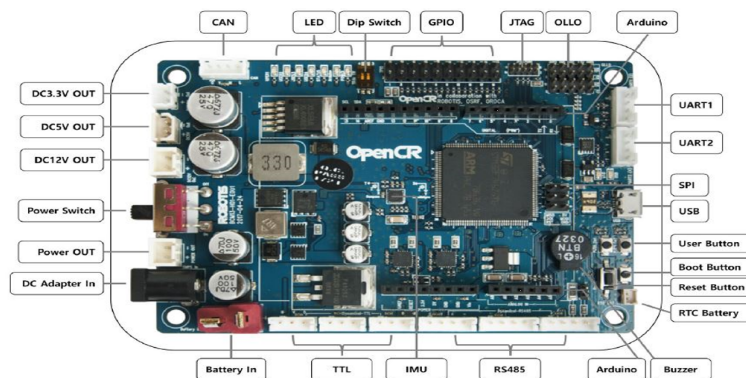


FIGURE 4.5 – Carte embarquée OpenCR

La carte OpenCR a une entrée d'alimentation de 7V/24V, et des sorties 3.3V (800mA), 5V (4A) et 12V (1A). Elle est utilisée dans le Turtlebot3 comme source d'alimentation pour le Raspberry Pi et les capteurs opérants à 5V (4A).

Robotnik Summit-XL

Le Robotnik Summit-XL (figure 4.6) est un robot mobile différentiel à quatre roues basé sur ROS. C'est un robot mobile tout-terrain à mobilité très élevée.



FIGURE 4.6 – Robotnik Summit XL

Le Summit XL est doté d'une cinématique à glissement basée sur quatre roues motrices haute puissance. Chaque roue est composée d'un bloc moteur et d'une roue amovible. Le bloc moteur est équipé d'un moteur 250W 8 pôles sans balais (brushless) avec un capteur à effet Hall et d'un réducteur, le tout maintenu par un couvercle en aluminium. Les roues intègrent aussi des encodeurs. L'odométrie est calculée à l'aide des quatre codeurs et d'un capteur angulaire de haute précision monté à l'intérieur du châssis.

La carte principale du Robotnik Summit XL (figure 4.7) est une Jetway NF9QU se composant d'un processeur Intel Bay Trail J1900 Quad-core, de 4 Go de RAM et d'un disque dur mSATA de 2,5". Initialement le Summit XL contient un scanner laser Hokuyo et une gamme de kits RTK-DGPS. Il dispose également d'une connectivité interne (USB, RS232 et GPIO) et externe (USB, RJ45 et alimentation 12 VDC).

4.3.3 Capteurs extéroceptifs

Afin d'obtenir une bonne estimation de l'état, les mesures issues des capteurs proprioceptifs (encodeurs, IMU) doivent être fusionnées avec d'autres mesures issues principalement de capteurs extéroceptifs.

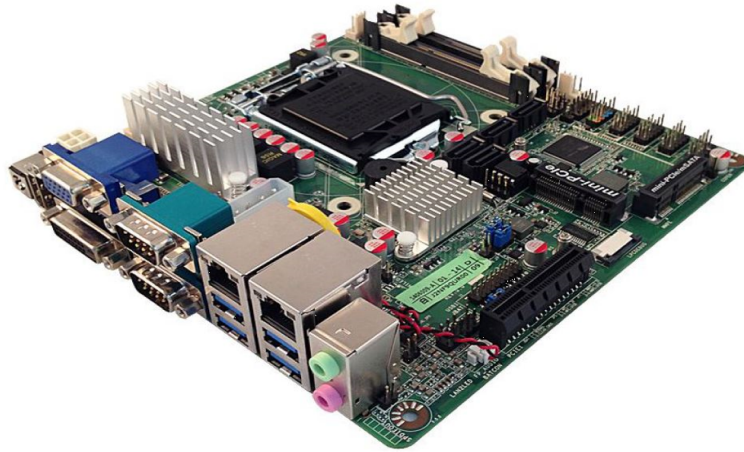


FIGURE 4.7 – Carte embarquée du Robotnik Summit XL

Système de navigation intérieure *MarvelMind*

Marvelmind (figure 4.8) est un système de navigation intérieure prêt à l'emploi, conçu pour fournir des données de localisation précises ($\pm 2cm$). Ce système se compose de balises ultra-sonores stationnaires inter-connectées par interface radio. Une des balises est mobile car elle est installée sur le robot mobile à localiser. Un modem est aussi utilisé pour avoir accès au système depuis une station de travail (ordinateur). La localisation de la balise mobile se fait par triangulation, en calculant le retard de propagation d'impulsions ultra-sonores (temps de vol) entre cette balise et les balises fixes. Pour une localisation en trois dimensions, une ligne de visée non obstruée (ouïe) entre une balise mobile et 3 balises fixes ou plus dans un rayon de 30 mètres doit être assurée. Pour une localisation en 2D, il faut au minimum deux balises fixes.



FIGURE 4.8 – Système MarvelMind : Balises et modem

Système *OptiTrack* pour la capture de mouvement

Le système *OptiTrack* (figure 4.9) est un système optique pour la capture des mouvements d'un objet se déplaçant dans une zone couverte par les caméras du système. Le fonctionnement est basé sur la photogrammétrie stéréoscopique où les coordonnées tridimensionnelles des points de l'objet sont à détecter. Ces points sont produits à partir de plusieurs images photographiques prises pour différentes positions. Ce système se compose de caméras, de marqueurs et d'un logiciel de traitement. Notre configuration contient plusieurs caméras Prime 13 qui communiquent via Ethernet. Pour identifier les robots, des marqueurs détectables par les caméras sont utilisés, ainsi une configuration géométrique est donnée pour chaque robot en utilisant le logiciel *Motive*. Afin d'obtenir la position du robot à partir du logiciel sous ROS, le paquet *vrpn-client-ros* (Virtual Reality Peripheral Network) est utilisé.



FIGURE 4.9 – Système OptiTrack

RpLidar

RpLidar (figure 4.10) est un capteur Lidar à balayage 360 degrés avec une fréquence de rotation de 5.5hz/10hz sur une distance maximale de huit mètres. Par conséquent, RpLidar crée un nuage de point correspondant aux obstacles de l'environnement. Si la résolution du capteur est de 1° , 360 points sont générés. Pour un robot mobile qui se déplace entre deux instants d'échantillonnage, deux nuages de points sont obtenus. Afin de déterminer la position du robot en se basant sur les nuages de points à chaque instant d'échantillonnage, un algorithme ICP (iterative closest point -X. ZHANG et al., 2015-) est utilisé. L'ICP compare les deux nuages de points et donne comme sortie des matrices de translation T et de rotation R qui superposeraient les deux nuages de points. Les deux matrices R et T sont utilisées avec le modèle cinématique du robot mobile différentiel pour déduire la nouvelle observation de la pose du robot.



FIGURE 4.10 – Capteur RpLidar

4.3.4 Organisation des applications

La validation de l'approche se fera sur trois applications :

Turtlebot3 et la divergence de Kullback-Leibler

L'objectif de cette application est de valider l'approche proposée, en faisant du diagnostic capteur et actionneur pour les Turtlebot3. La procédure d'exclusion des composants erronés s'effectue uniquement pour les capteurs vu la non redondance des actionneurs. Dans cette partie, uniquement la commande cinématique est utilisée, et le seuillage est choisi d'une manière heuristique suivant les distributions de probabilité du résidu de Kullback-Leibler dans le cas avec et sans défaut.

Système multi-Turtlebot3 avec la divergence de Bhattacharyya

Dans cette partie, l'approche est validée pour un système multi-robots se composant de Turtlebot3 en se basant sur la divergence de Bhattacharyya. Dans cette partie, on s'intéressera au seuillage optimal, plus particulièrement en utilisant le critère de Bhattacharyya.

Robotnik et la divergence de Bhattacharyya

Dans cette dernière application, l'approche est validée pour un robot mobile différentiel à quatre roues (Robotnik) qui offre une certaine redondance des actionneurs. La partie détection et localisation des défauts capteurs et actionneurs est faite sur le robot réel en temps réel, par contre, la partie commande par modes glissants développée et l'exclusion des actionneurs défaillants, est simulée.

4.4 Application à un RMD2R en utilisant la divergence de Kullback-Leibler

Le matériel utilisé pour cette application est le suivant :

- Turtlebot3 équipé d'encodeurs et d'une centrale à inertie.

- Système Marvelmind.
- RPLidar et algorithme ICP.
- Système Optitrack pour avoir une vérité terrain (une localisation fiable de référence).

4.4.1 Développement des deux filtres informationnels

Filtre informationnel étendu principal

1. *Étape de prédiction en utilisant le modèle odométrique :*

On définit q_k^o le vecteur d'état obtenu à partir du modèle odométrique à un instant k :

$$q_k^o = \begin{bmatrix} x & y & \theta \end{bmatrix}_k^T \quad (4.1)$$

En utilisant le modèle odométrique de l'équation 2.33 et la section 2.3.3, l'étape de prédiction est développée comme suit :

$$q_{k+1/k}^o = q_{k/k}^o + F_k^o \bar{\eta}_k^o + \rho_k^o \quad (4.2)$$

$$= f(q_{k/k}^o, \bar{\eta}_k^o) + \rho_k^o \quad (4.3)$$

où ρ_k^o est un bruit blanc gaussien avec une matrice de covariance Q_k^o . $\bar{\eta}_k^o$ est l'entrée du modèle odométrique défini par l'équation 2.32, et F_k^o est défini par l'équation 2.34.

Vu que le modèle est non linéaire, les matrices jacobiniennes A_k^o et B_k^o (équation 2.62) sont calculées :

$$A_k^o = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\delta d_k \sin(\theta_{k/k} + \frac{\delta \theta_k}{2}) \\ 0 & 1 & \delta d_k \cos(\theta_{k/k} + \frac{\delta \theta_k}{2}) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

$$B_k^o = \begin{pmatrix} \cos(\theta_{k/k} + \frac{\delta \theta_k}{2}) & -\frac{1}{2} \delta d_k \sin(\theta_{k/k} + \frac{\delta \theta_k}{2}) \\ \sin(\theta_{k/k} + \frac{\delta \theta_k}{2}) & +\frac{1}{2} \delta d_k \cos(\theta_{k/k} + \frac{\delta \theta_k}{2}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

La matrice de covariance de l'erreur de prédiction est donnée comme suit :

$$P_{k+1/k}^o = A_k^o P_{k/k}^o (A_k^o)^T + B_k^o (Q_k^u)^o (B_k^o)^T + Q_k^o \quad (4.6)$$

où $(Q_k^u)^o$ est la matrice de covariance associée aux bruits des mesures des encodeurs, définie par l'équation suivante (BONNIFAIT, 1997) :

$$(Q_k^u)^o = T_e Q_{\Delta k}^o J J^T \quad (4.7)$$

Où Q_{Δ}^o correspond aux variances reliées aux encodeurs, T_e est le temps d'échantillonnage et :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{r}{4} & \frac{r}{4} \\ \frac{r}{2l} & -\frac{r}{2l} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

où r est le rayon de la roue et $2l$ est la distance entre les deux roues.

La matrice informationnelle est l'inverse de la matrice de covariance :

$$Y_{k+1/k}^o = P_{k+1/k}^o{}^{-1} \quad (4.9)$$

et le vecteur informationnel prédit est donné par l'équation suivante :

$$y_{k+1/k}^o = Y_{k+1/k}^o q_{k+1/k}^o \quad (4.10)$$

2. *Étape de mise à jour* :

Afin de limiter l'incertitude du modèle odométrique, deux capteurs extéroceptifs sont utilisés dans l'étape de mise à jour : Le RpLidar avec l'algorithme ICP et le système Marvelmind couplé avec une centrale inertielle. Les deux capteurs donnent une information complète sur l'état du robot, ce qui signifie que le système d'observation est dans ce cas linéaire.

D'après l'équation 2.43, on a :

$$z_k = C q_k^o + \Phi_k \quad (4.11)$$

où z_k est le vecteur d'observation, Φ_k est le bruit associé aux observations des deux capteurs avec une matrice de covariance R_k et C est la matrice d'observation.

$$z_k = \begin{bmatrix} z^1 \\ z^2 \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} x^1 \\ y^1 \\ \theta^1 \\ x^2 \\ y^2 \\ \theta^2 \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} I_3 \\ I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}_k + \Phi_k \quad (4.12)$$

où I_3 est une matrice identité 3×3 et $z^1 = [x^1, y^1, \theta^1]^T$, $z^2 = [x^2, y^2, \theta^2]^T$ sont les mesures du capteur Marvelmind et du capteur RpLidar respectivement.

Sachant que le modèle d'observation est linéaire, les contributions informationnelles sont obtenues à partir des équations 2.56 et 2.57 :

$$I_c(k) = (R_k^c)^{-1} \quad (4.13)$$

$$i_c(k) = (R_k^c)^{-1} z_k^c \quad (4.14)$$

où R_k^c est la matrice de covariance reliée à la mesure du capteur c . Par conséquent, la mise à jour du vecteur informationnel et de la matrice informationnelle est donnée comme suit (équations 2.54 et 2.55) :

$$Y_{k+1/k+1}^o = Y_{k+1/k}^o + \sum_{c=1}^2 I_c(k) \quad (4.15)$$

$$y_{k+1/k+1}^o = y_{k+1/k}^o + \sum_{c=1}^2 i_c(k) \quad (4.16)$$

Et finalement, le vecteur d'état et la matrice de covariance de l'erreur d'estimation sont obtenus comme suit :

$$\begin{aligned} q_{k+1/k+1}^o &= (Y^o)_{k+1/k+1}^{-1} y_{k+1/k+1}^o \\ P_{k+1/k+1}^o &= (Y^o)_{k+1/k+1}^{-1} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Filtre informationnel étendu secondaire

1. *Étape de prédiction en utilisant le modèle identifié :*

Pour le modèle odométrique, les entrées correspondent à la translation élémentaire δd_k et à la rotation élémentaire $\delta \theta_k$. Elles peuvent être considérées comme étant les vitesses linéaire et angulaire pour un temps d'échantillonnage T_e . Le modèle identifié correspond au modèle cinématique de la section 2.2.1, dont les entrées sont les signaux de commande donnés par l'équation 2.85. On peut considérer que la commande en boucle fermée fournit la translation et la rotation élémentaires voulues par le robot pour atteindre son objectif, avant même qu'elles soient calculées par les encodeurs.

Le modèle d'évolution est donné par l'équation suivante :

$$q_{k+1/k}^I = q_{k/k}^o + F_k^I \eta_k^I + \rho_k^I \quad (4.18)$$

$$= f(q_{k/k}^o, \eta_k^I) + \rho_k^I \quad (4.19)$$

où l'indice I fait référence à "Identifié", $\eta_k^I = [v_k, \omega_k]^T$, correspond au signal de commande $(\eta_c)_k$ fourni par le contrôleur. ρ_k^I est le bruit associé au modèle mathématique considéré comme étant un bruit blanc gaussien avec une matrice de covariance Q_k^I et :

$$F_k^I = \begin{pmatrix} T_e \cos(\theta_{k/k}) & 0 \\ T_e \sin(\theta_{k/k}) & 0 \\ 0 & T_e \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

Comme pour le modèle odométrique, ce modèle est non linéaire. Par conséquent, les jacobiniennes A_k^I et B_k^I sont calculées :

$$A_k^I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -T_e v_k \sin(\theta_{k/k}) \\ 0 & 1 & T_e v_k \cos(\theta_{k/k}) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

$$B_k^I = \begin{pmatrix} T_e \cos(\theta_{k/k}) & 0 \\ T_e \sin(\theta_{k/k}) & 0 \\ 0 & T_e \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

La matrice de covariance de l'erreur de la prédiction est donnée comme suit :

$$P_{k+1/k}^I = A_k P_{k/k}^o (A_k^I)^T + B_k^I (Q_u^I)_k (B_k^I)^T + Q_k^I \quad (4.23)$$

où $(Q_u^I)_k$ est la matrice de covariance associée aux bruits des actionneurs.

On peut observer que le modèle identifié dépend de l'estimation du filtre principal. En effet, la sortie du filtre principal est considérée comme étant

l'estimation d'état, tandis que la sortie du filtre secondaire est utilisée pour le diagnostic.

La matrice informationnelle est l'inverse de la matrice de covariance :

$$Y_{k+1/k}^I = (P_{k+1/k}^I)^{-1} \quad (4.24)$$

Et le vecteur informationnel de l'étape de prédiction est donné par l'équation suivante :

$$y_{k+1/k}^I = Y_{k+1/k}^I q_{k+1/k}^I \quad (4.25)$$

2. *Étape de mise à jour :*

Le modèle d'observation est identique à celui du filtre principal (équation 4.12). Le vecteur informationnel et la matrice informationnelle corrigés sont donnés par les équations suivantes :

$$Y_{k+1/k+1}^I = Y_{k+1/k}^I + \sum_{c=1}^2 I_c(k) \quad (4.26)$$

$$y_{k+1/k+1}^I = y_{k+1/k}^I + \sum_{c=1}^2 i_c(k) \quad (4.27)$$

où $I_c(k)$ et $i_c(k)$ sont définies respectivement par l'équation 4.13 et l'équation 4.14.

On peut facilement déduire le vecteur d'état et la matrice de covariance comme suit :

$$\begin{aligned} q_{k+1/k+1}^I &= (Y_{k+1/k+1}^I)^{-1} y_{k+1/k+1}^I \\ P_{k+1/k+1}^I &= (Y_{k+1/k+1}^I)^{-1} \end{aligned} \quad (4.28)$$

4.4.2 Approche proposée pour un RMD2R

Le schéma global de l'approche est représenté par la figure 4.11. Il s'inspire de l'approche détaillée dans la section 4.2.

Étant donné une trajectoire désirée q_d , une commande cinématique est développée, avec comme sorties les signaux de vitesses linéaire v et angulaire ω qui forcent l'état du robot \hat{q} à suivre asymptotiquement cette trajectoire désirée. Ayant les mesures des capteurs Marvelmind et RpLidar, les deux filtres principal et secondaire sont développés avec comme sorties les distributions de probabilité a priori et a posteriori de chaque filtre.

Afin que le robot mobile puisse naviguer d'une manière sûre et précise, les mesures erronées et les défauts actionneurs doivent être détectés. Par conséquent, deux résidus globaux basés sur la divergence de Kullback-Leibler sont générés pour la détection de défauts.

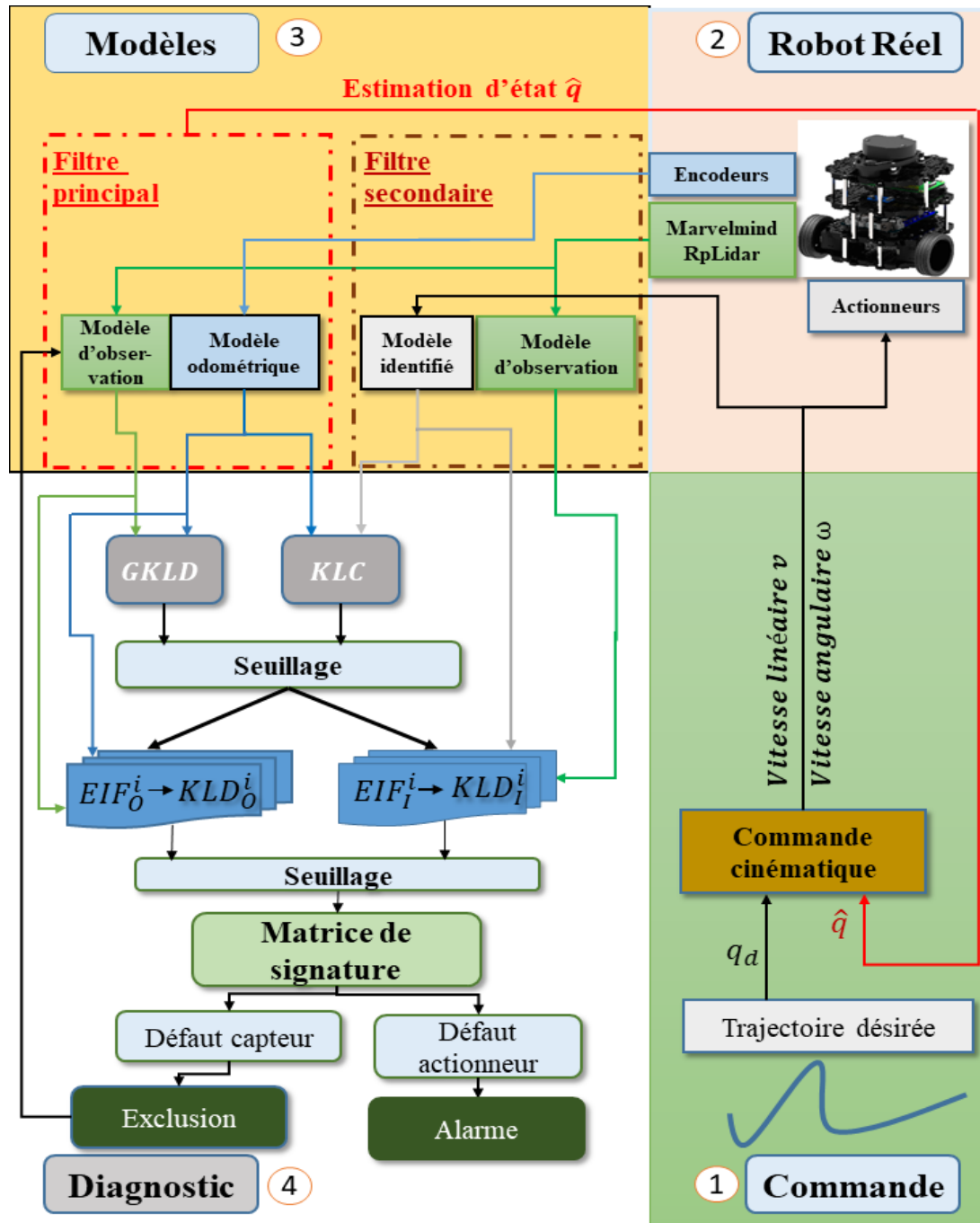


FIGURE 4.11 – Schéma de l'approche proposée pour un RMD2R

Le premier résidu est nommé *GKLD* (Global Kullback Leibler Divergence). Il est obtenu en comparant les distributions de probabilité *a priori* et *a posteriori* du filtre informationnel étendu principal :

$$\begin{aligned}
 GKLD = & \frac{1}{2} \text{trace} \left(Y_{k/k}^o (Y_{k/k-1}^o)^{-1} \right) + \frac{1}{2} \log \frac{|Y_{k/k-1}^o|}{|Y_{k/k}^o|} - \frac{n}{2} \\
 & + \frac{1}{2} (q_{k/k}^o - q_{k/k-1}^o)^T Y_{k/k}^o (q_{k/k}^o - q_{k/k-1}^o)
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Le deuxième résidu est nommé *KLC* (Kullback-Leibler en utilisant la Commande). Il est obtenu en calculant la divergence de Kullback-Leibler entre les distributions *a priori* des deux filtres informationnels ; principal et secondaire :

$$\begin{aligned}
 KLC = & \frac{1}{2} \text{trace} \left(Y_{k/k-1}^o (Y_{k/k-1}^I)^{-1} \right) + \frac{1}{2} \log \frac{|Y_{k/k-1}^I|}{|Y_{k/k-1}^o|} - \frac{n}{2} \\
 & + \frac{1}{2} (q_{k/k-1}^o - q_{k/k-1}^I)^T Y_{k/k-1}^o (q_{k/k-1}^o - q_{k/k-1}^I)
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Sachant que la distribution de ces deux résidus dans le cas sans défaut est définie par l'équation 3.83. n dans ce cas est égale à 3.

Pour l'évaluation des résidus et la prise de décision, la mise en place d'un seuil est nécessaire. Pour cette application, un seuil heuristique est adopté, en prenant en compte les distributions avec et sans défauts de ces deux résidus. Le seuil est choisi de sorte que la probabilité de détection est maximale ($P_D = 1$), mais cela engendre une probabilité de fausse alarme assez élevée ($P_F > 0$). Par conséquent, il faut être vigilant pour le choix du seuil. Dans le cas où P_F est très élevé, on peut diminuer P_D de sorte que la paire (P_D, P_F) soit optimale. La sélection du seuil optimal peut se faire en utilisant des méthodes statistiques (application suivante).

Dans le cas où la valeur de l'un des deux résidus globaux est supérieure au seuil, un défaut est détecté, et deux bancs de filtres informationnels sont utilisés.

Pour le premier banc de filtres EIF_O^i (Extended Information Filter with Odometric model), les résidus KL_O^i sont obtenus en calculant la divergence de Kullback-Leibler entre la distribution *a priori* basée sur le modèle odométrique et la distribution *a posteriori* basée sur une seule contribution informationnelle du capteur i (Marvelmind ou RpLidar) :

$$\begin{aligned}
 KL_O^i = & \frac{1}{2} \text{trace} \left(Y_{k/k}^{oi} ((Y_{k/k-1}^o))^{-1} \right) + \frac{1}{2} \log \frac{|Y_{k/k-1}^o|}{|Y_{k/k}^{oi}|} - \frac{n}{2} \\
 & + \frac{1}{2} (q_{k/k}^{oi} - q_{k/k-1}^o)^T Y_{k/k}^{oi} (q_{k/k}^{oi} - q_{k/k-1}^o)
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Pour le deuxième banc de filtres EIF_I^i (Extended Information Filter with Identified model), les résidus KL_I^i sont obtenus en calculant la divergence de

Kullback-Leibler entre la distribution *a priori* basée sur le modèle identifié et la distribution *a posteriori* basée sur une seule contribution informationnelle du capteur i (Marvelmind ou RpLidar) :

$$KL_I^i = \frac{1}{2} \text{trace} \left(Y_{k/k}^{Ii} \left((Y_{k/k-1}^I) \right)^{-1} \right) + \frac{1}{2} \log \frac{|Y_{k/k-1}^I|}{|Y_{k/k}^{Ii}|} - \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \left(q_{k/k}^{Ii} - q_{k/k-1}^I \right)^T Y_{k/k}^{Ii} \left(q_{k/k}^{Ii} - q_{k/k-1}^I \right) \quad (4.32)$$

$Y_{k/k}^{oi}$ et $Y_{k/k}^{Ii}$ sont obtenus en utilisant une seule contribution informationnelle liée à l'observation z^i dans l'étape de mise à jour :

$$Y_{k/k}^{oi} = Y_{k/k-1}^o + I_i(k) \quad (4.33)$$

$$y_{k/k}^{oi} = y_{k/k-1}^o + I_i(k) \quad (4.34)$$

où $I_i(k)$ et $i_i(k)$ sont les contributions informationnelles liées à l'observation du capteur i .

En prenant en considération la sensibilité des résidus aux défauts capteurs et actionneurs, des vecteurs de signatures de défauts pour chaque capteur et actionneur peuvent être établis. Ces vecteurs sont ensuite comparés à une matrice d'incidence (tableaux 4.1 et 4.2) afin de localiser le(s) défaut(s). Pour simplifier l'écriture de la matrice de signatures, considérons les acronymes suivants : Mm pour le capteur Marvelmind, RL pour le capteur RpLidar, Ac pour les actionneurs et Od pour les odomètres.

| Résidus | Ac | Od | Mm | RL | Od/Mm | Od/RL |
|----------|----|----|----|----|-------|-------|
| KLC | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| KL_O^1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| KL_O^2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| KL_I^1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| KL_I^2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Tableau 4.1 – Matrice d'incidence dans le cas de deux capteurs supplémentaires

| Résidus | Mm/RL | Ac/Mm | Ac/RL | D'autres combinaisons |
|----------|-------|-------|-------|-----------------------|
| KLC | 0 | 1 | 1 | 1 |
| KL_O^1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| KL_O^2 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| KL_I^1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| KL_I^2 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Tableau 4.2 – Matrice d'incidence (différentes combinaisons)

Chaque colonne de la matrice d'incidence représente les signatures de défaillance d'un capteur, des actionneurs ou une combinaison entre eux. L'objectif

est de décider si $KL = 0$ (absence de défaut) ou $KL = 1$ (présence de défaut), après une comparaison avec un seuil bien défini. Dans le cas où le vecteur de résidus est $[10011]^T$: les actionneurs sont défectueux, $[11100]^T$: les odomètres sont défectueux, $[11011]^T$: les actionneurs et le capteur Marvelmind sont défectueux, etc...

Dans le cas où les actionneurs et les odomètres sont défectueux en même temps, ou les odomètres et tous les capteurs sont défectueux, le vecteur de signatures prend la valeur $[11111]^T$ et la localisation des défauts devient impossible. En effet, pour que l'approche soit effective, on a besoin de deux informations correctes au minimum, dont une doit être l'information issue d'un des deux modèles d'évolution.

Si un des capteurs est défectueux, il est exclu de la procédure de fusion. Le filtre informationnel étendu prend uniquement le capteur fonctionnel pour l'estimation d'état, qui alimentera le contrôleur. Si les odomètres sont défectueux, la sortie du filtre secondaire remplace celle du filtre principal. Si les actionneurs sont défectueux, le robot est arrêté car l'exclusion d'un actionneur mène à une perte de commandabilité.

4.4.3 Résultats de simulation

Pour la partie simulation, on suppose deux capteurs (S_1 et S_2), qui donnent une information complète du vecteur d'état q . Les signaux de ces deux capteurs sont bruités avec deux bruits blancs gaussiens. On suppose aussi qu'on a accès aux données encodeurs et gyromètre. La trajectoire désirée est : $x_d = \sin(t)$ et $y_d = \cos(0.5t)$, avec un temps d'échantillonnage : $T_e = 0.05sec$ et un temps de simulation $t = 23sec$. Les gains du contrôleur sont : $\alpha_1 = 8$ et $\alpha_2 = 16$.

Les défauts sont introduits sous ces formes :

- Un biais pour les capteurs : $z_f = z + b'$ où b' est le biais, z est l'observation capteur et z_f est la mesure erronée.
- Défaut actionneur $\eta_f^I : \eta_f^I = \bar{\sigma} \eta^I + \beta$ où $(\bar{\sigma}, \beta) \in \mathbb{Z}$.

En premier lieu, la commande est testée sans aucun défaut sur les capteurs ou les actionneurs. La figure 4.12 montre les résultats obtenus.

Il est clair qu'en cas d'absence de défauts, la commande développée permet à l'estimation de position du robot (rouge + -real robot-) de suivre la trajectoire désirée (bleu -desired trajectory-). Les signaux de commandes v_c et ω_c sont donnés par la figure 4.13.

Par conséquent, aucun défaut n'est détecté, et les résidus globaux $GKLD$ et KLC sont pratiquement nuls (figure 4.14).

Dans un deuxième temps, un défaut est injecté au capteur 1 (Marvelmind), sous forme de biais à l'instant 60 et enlevé à l'instant 80. La figure 4.15a montre la trajectoire du robot sans la couche de diagnostic. On peut observer l'effet du biais sur l'estimation d'état. En effet, avec une mauvaise estimation de la position du robot, la commande ne peut assurer une convergence précise vers l'objectif.

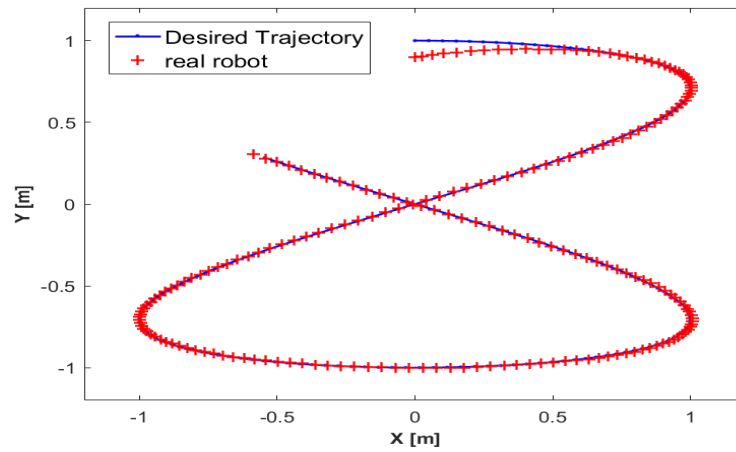


FIGURE 4.12 – Suivi de trajectoire en utilisant la commande développée

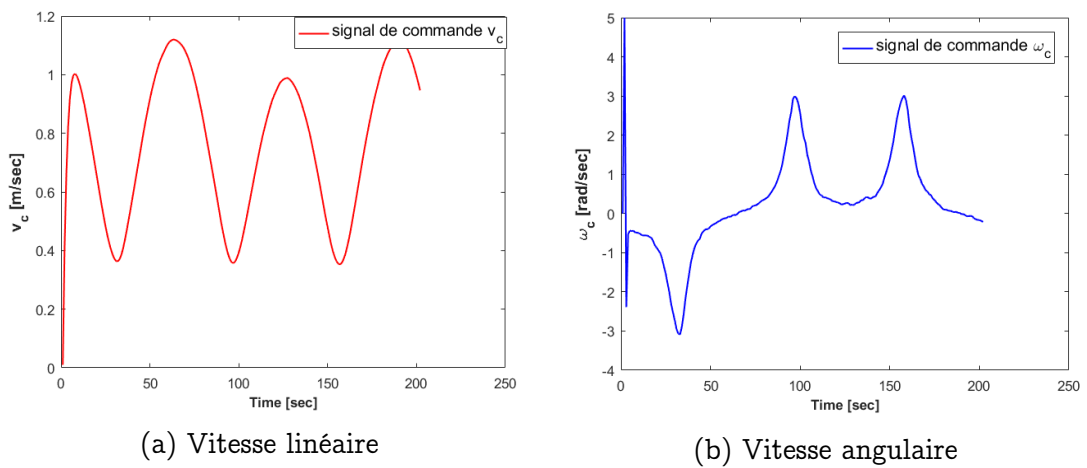


FIGURE 4.13 – Signaux de commande pour le suivi de trajectoire

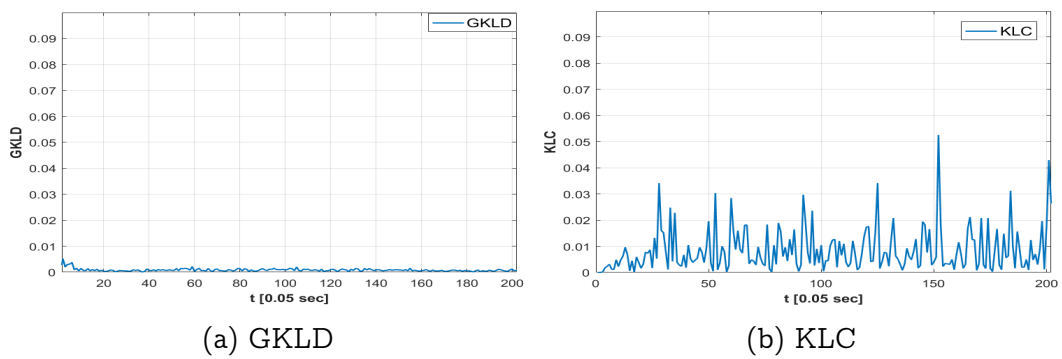


FIGURE 4.14 – Résidus obtenus dans le cas sans défaut

En ajoutant une couche de diagnostic avec un seuil (threshold) $th = 0.5$, on obtient les résidus (basés sur la divergence de Kullback-Leibler) montrés par la figure 4.16. Le vecteur de signatures (des résidus) est $[0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0]^T$.

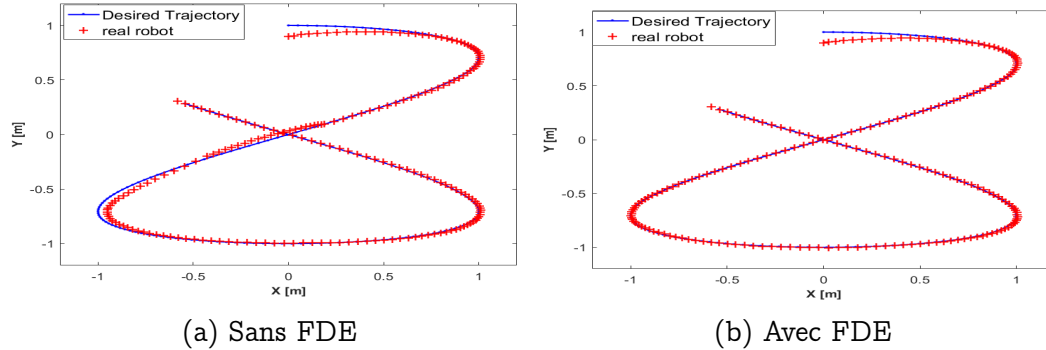


FIGURE 4.15 – Trajectoire avant et après la FDE avec défaut sur le Marvelmind

En comparant ce vecteur avec les colonnes de la matrice d'incidence (tableau 4.1), le défaut sur le capteur Marvelmind est localisé, ensuite exclu de la procédure de fusion au sein du filtre informationnel étendu principal. La figure 4.15b, montre la trajectoire du suivi après l'exclusion du défaut.

Afin de tester les différentes combinaisons de défauts capteurs et actionneurs, le scénario suivant est considéré :

- De l'itération 20 à l'itération 30, un défaut actionneur est introduit.
- De l'itération 70 à l'itération 80, un défaut odomètre est introduit.
- De l'itération 110 à l'itération 130, des défauts sur le Marvelmind et le RpLidar sont introduits.
- De l'itération 180 à l'itération 190, des défauts sur l'odomètre et le Marvelmind sont introduits.
- De l'itération 195 à l'itération 205, des défauts sur l'actionneur et le Marvelmind sont introduits.

Les résidus informationnels générés suivant ce scénario sont donnés par la figure 4.17. Les vecteurs de résidus obtenus sont les suivants :

- De $i = 20$ à $i = 30$, vecteur = $[10011]^T$, défaut actionneur localisé.
- De $i = 70$ à $i = 80$, vecteur = $[11100]^T$, défaut odomètre localisé.
- De $i = 110$ à $i = 130$, vecteur = $[01111]^T$, défauts Marvelmind et RpLidar localisés.
- De $i = 180$ à $i = 190$, vecteur = $[11110]^T$, défauts odomètre et Marvelmind localisés.
- De $i = 195$ à $i = 205$, vecteur = $[11011]^T$, défauts actionneur et Marvelmind localisés.

La figure 4.18 montre les trajectoires du robot mobile avec et sans diagnostic informationnel. Les défauts actionneurs ne sont pas compensés (pas d'exclusion). En effet, le défaut est juste enlevé après un certain temps, car l'exclusion d'un actionneur engendre une perte de commandabilité du système. Le robot mobile est capable de reconverger vers sa trajectoire désirée avec une bonne estimation et des actionneurs fonctionnels.

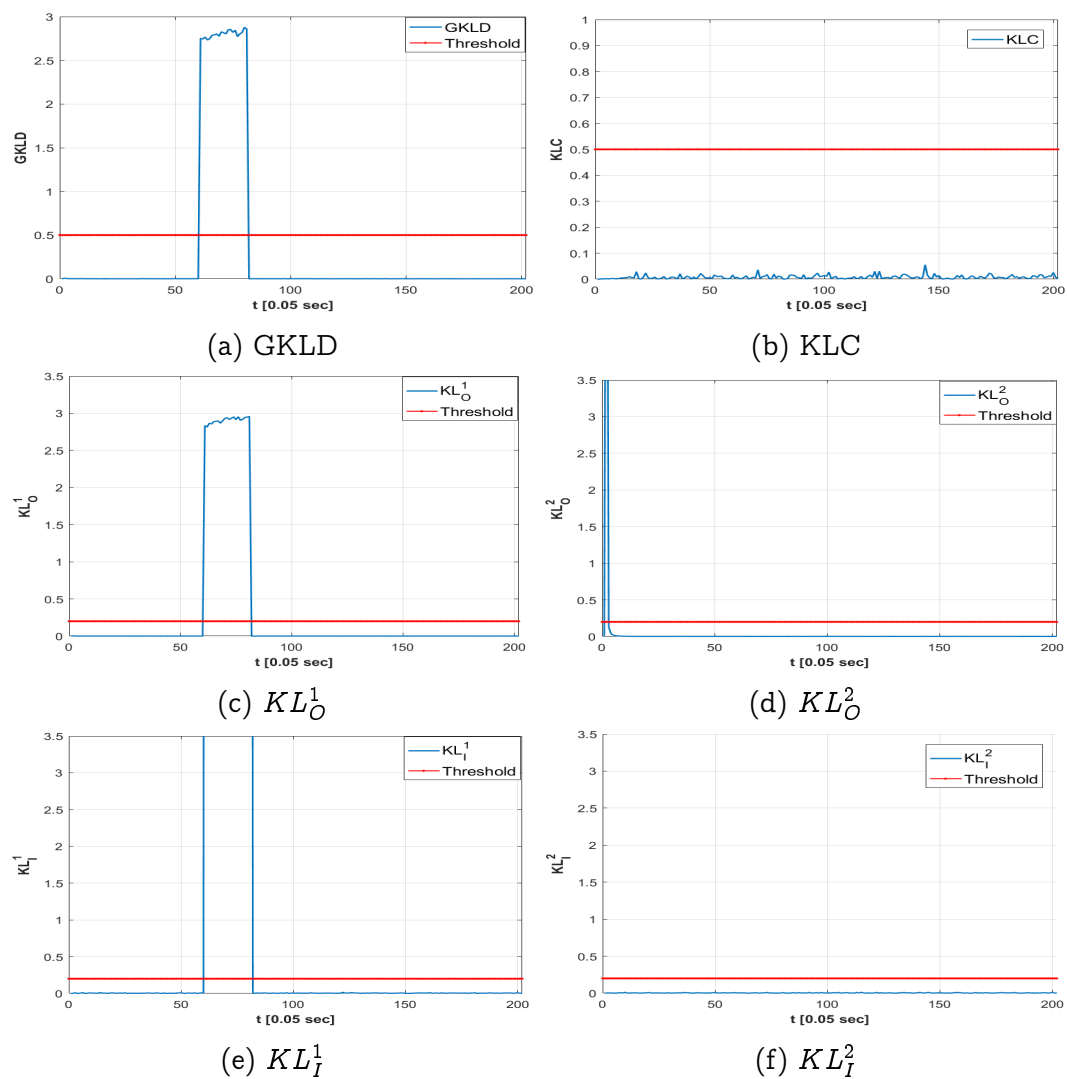


FIGURE 4.16 – Résidus basés sur la DKL avec un défaut sur le Marvelmind

4.4. APPLICATION À UN RMD2R EN UTILISANT LA DIVERGENCE DE KULLBACK-LEIBLER

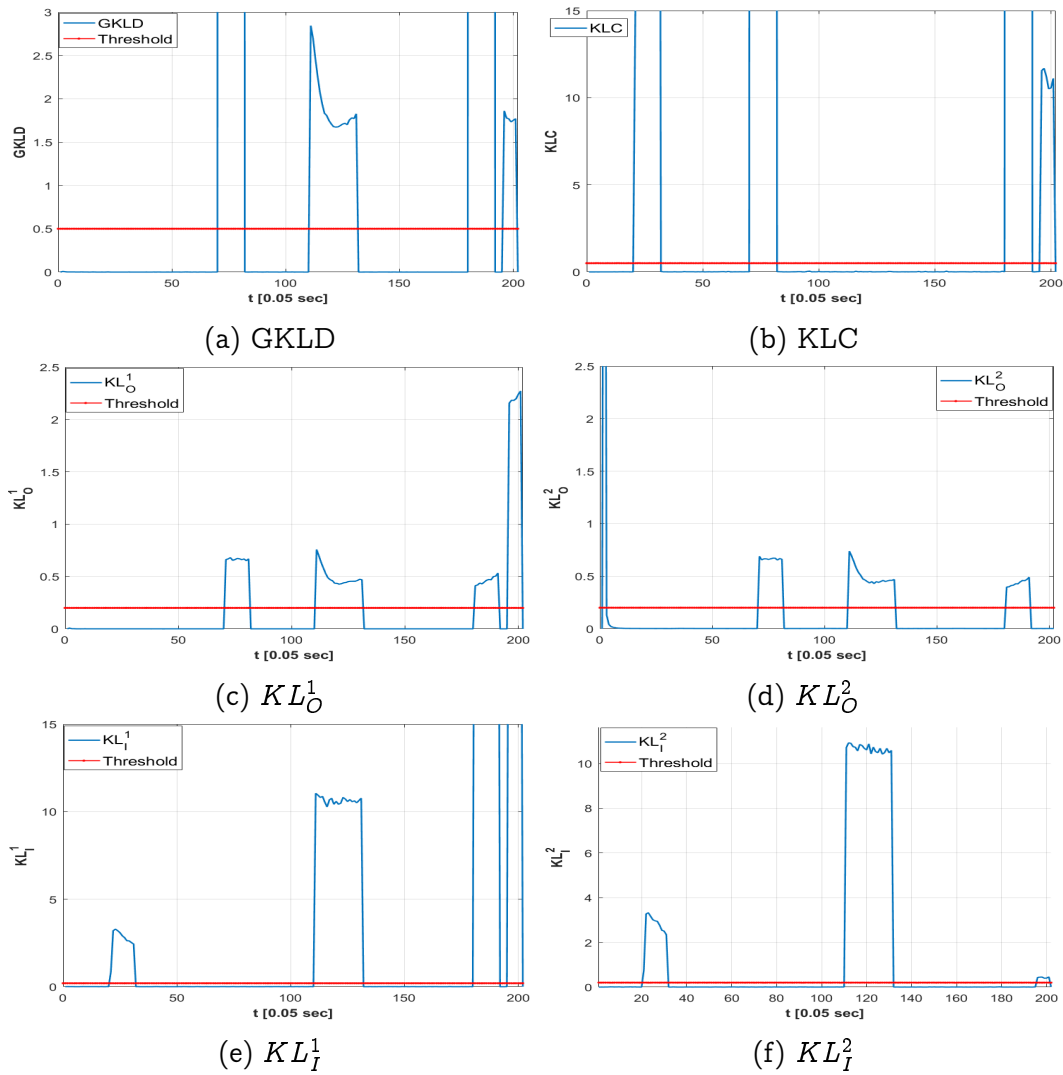


FIGURE 4.17 – Résidus obtenus avec le scénario choisi

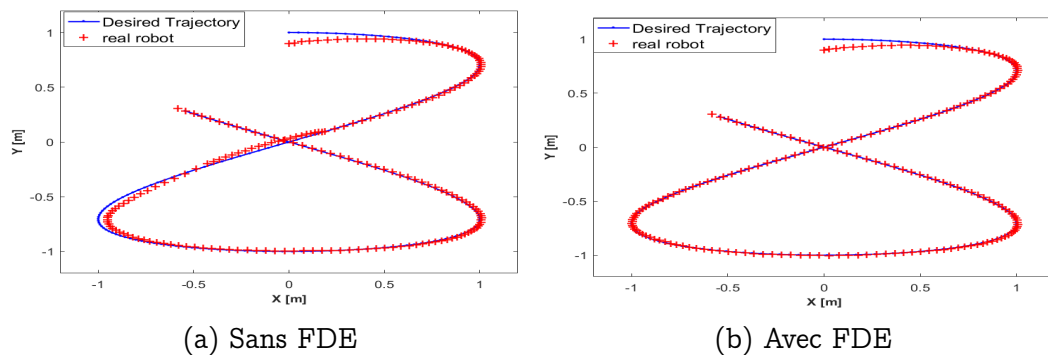


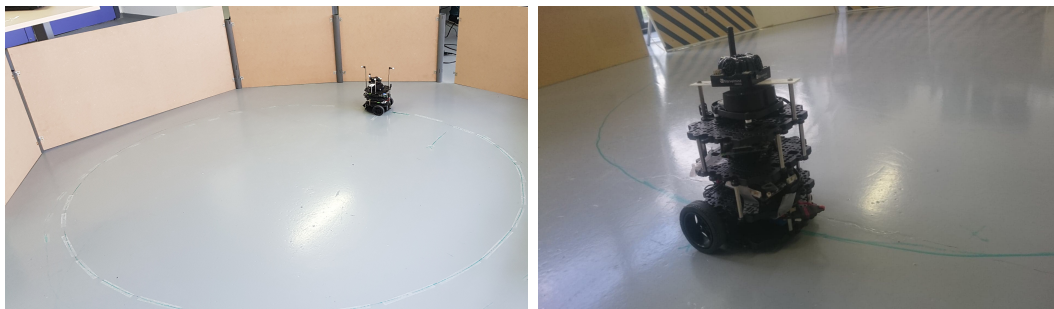
FIGURE 4.18 – Trajectoire avec et sans FDE avec un défaut sur le Marvelmind

4.4.4 Résultats de l'application en temps réel

Le robot mobile différentiel à deux roues Turtlebot3 (figure 4.19b) équipé d'encodeurs, d'une centrale inertielle, d'un Rplidar et du Marvelmind, est utilisé pour tester l'approche proposée. Le système Optitrack est aussi utilisé pour avoir la position réelle du robot, et ainsi la comparer avec l'estimation obtenue grâce au filtre informationnel étendu.

Le système d'exploitation pour la robotique (ROS) est utilisé pour le développement. Les algorithmes principaux (commande, estimation et diagnostic) sont développés sur Matlab. L'interaction avec le robot réel (échange de données via wifi), se fait en utilisant la toolbox "ROS Matlab". Les développements de la partie physique et bas niveau sont codés en C++ sous Linux.

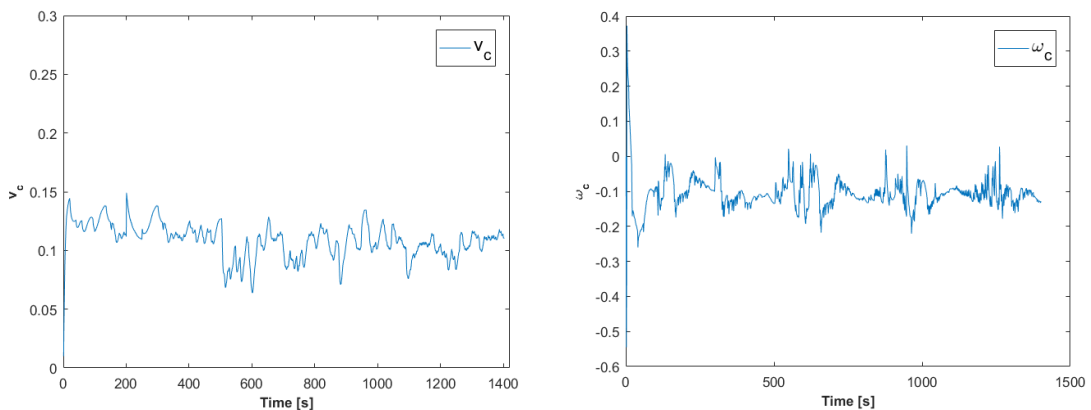
Comme chaque capteur a son propre repère, toutes les données sont transformées vers le repère global (initial), qui est celui attaché à la base du robot à l'instant $t = 0$. La période d'échantillonnage de la boucle principale est $T_e = 0.05sec$. La trajectoire désirée est choisie comme étant un cercle (figure 4.19a), avec : $x_d = \sin(0.1t)$ et $y_d = \cos(0.1t)$. Les gains du contrôleur de l'équation 2.85 sont $\alpha_1 = 12$ et $\alpha_2 = 36$. Les signaux de commande générés par le contrôleur sont donnés par la figure 4.20.



(a) Trajectoire désirée

(b) Turtlebot3

FIGURE 4.19 – Turtlebot3 sous le scénario réel choisi



(a) Vitesse linéaire

(b) Vitesse angulaire

FIGURE 4.20 – Signaux de commande pour le suivi de trajectoire (robot réel)

4.4. APPLICATION À UN RMD2R EN UTILISANT LA DIVERGENCE DE KULLBACK-LEIBLER

Dans un premier temps, l'algorithme principal est implémenté sur le robot sans aucun défaut. La figure 4.21 montre qu'avec une bonne estimation et une loi de commande efficace, le robot réel (tirets verts pour la trajectoire réelle et tirets rouges pour la trajectoire estimée) est capable de suivre sa trajectoire désirée (tirets bleus). Les résidus globaux $GKLD$ et KLC sont donnés par la figure 4.22, et les résidus $(KL_O^1, KL_O^2, KL_I^1, KL_I^2)$ sont donnés par la figure 4.23.

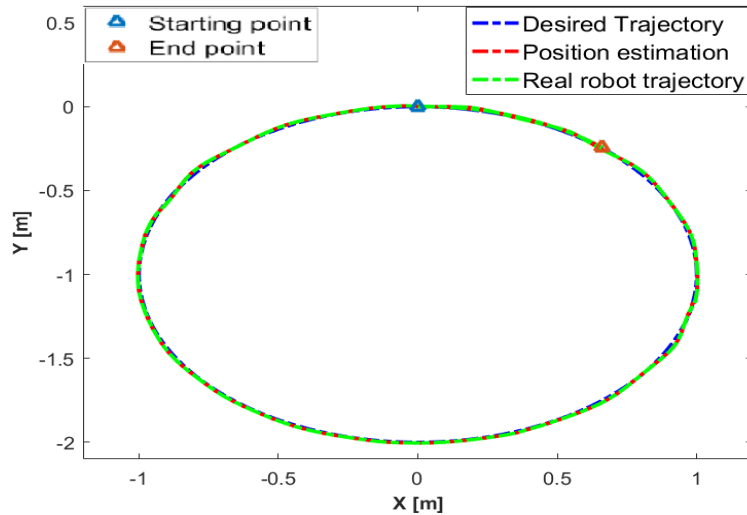


FIGURE 4.21 – Suivi de trajectoire du Turtlebot3 sans défauts

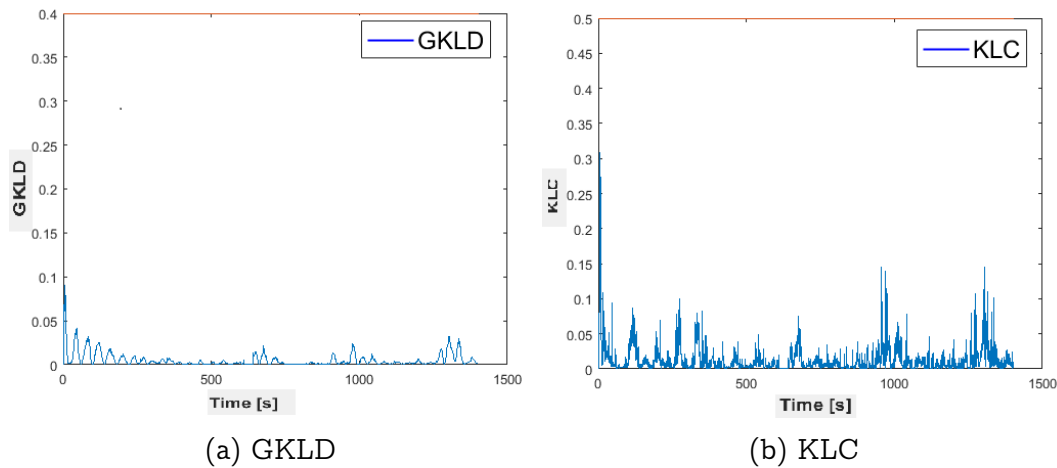


FIGURE 4.22 – GKLD et KLC avec le scénario sans défauts

Comme pour la partie simulation, les défauts capteurs et actionneurs sont introduits en utilisant Matlab sous la forme :

- Un biais pour les capteurs : $z_f = z + b'$ où b' est le biais, z est l'observation capteur et z_f est la mesure erronée.
- Un défaut actionneur η_f^I : $\eta_f^I = \bar{\sigma} \eta^I + \beta$ où $(\bar{\sigma}, \beta) \in \mathbb{Z}$

Afin de montrer l'efficacité de l'approche, le scénario de défauts suivant est pris en compte pour le Turtlebot3 :

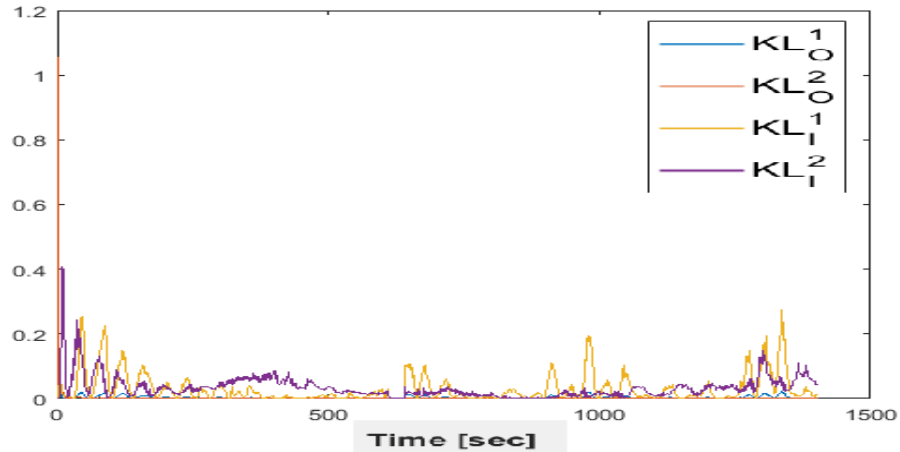


FIGURE 4.23 – Résidus dans le cas sans défauts

- Un défaut actionneur ($\beta = [0.2; 2]$) est introduit de l'itération 110 à l'itération 170. Durant cet intervalle, un biais ($b' = [1; 2; 0]$) est introduit au Marvelmind de l'itération 115 à l'itération 145.
- Un défaut odomètre ($b' = [1; 0.5; 0]$) est introduit de l'itération 500 à l'itération 600. Durant cet intervalle, un défaut ($b' = [2; 1; 0]$) est introduit au RpLidar, de l'itération 550 à l'itération 560.
- Un défaut est introduit au Marvelmind ($b' = [0.5; 1.5; 0]$) de l'itération 700 à l'itération 750.
- Les défauts ($b' = [2; 2; 0]$) sont introduits pour le Marvelmind et le RpLidar ensemble, de l'itération 1200 à l'itération 1250

Les résultats obtenus sans la couche de diagnostic sont montrés par la figure 4.24.

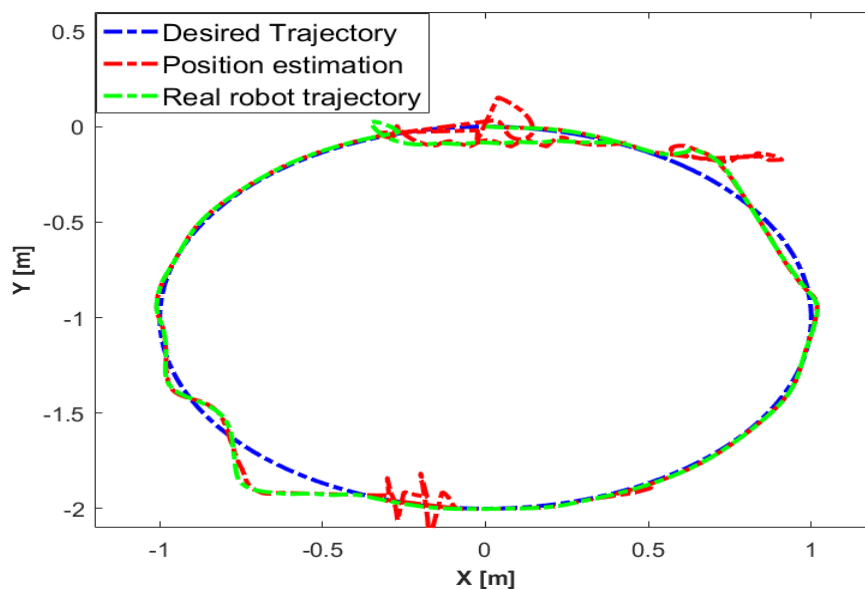


FIGURE 4.24 – Trajectoire du Turtlebot3 avec défauts et sans diagnostic

Quand les capteurs ou les actionneurs sont défaillants, le Turtlebot3 n'est pas capable d'avoir une bonne estimation de sa position, ni de suivre sa trajectoire désirée. En effet, l'estimation de la position (tirets rouges) est différente de la position réelle du robot (tirets verts) quand le défaut est introduit. Il est clair que cette divergence de la trajectoire désirée est causée par un défaut capteur, actionneur ou les deux ensemble.

En ajoutant la couche de diagnostic proposée, l'estimation est améliorée et l'objectif de la commande est plus précis. Les résidus globaux $GKLD$ et KLC du scénario choisi sont donnés par les figures 4.26 et 4.27. Les résidus $KL_{\mathcal{O}}^i$ et KL_T^i obtenus à partir des bancs de filtres informationnels étendus sont donnés par la figure 4.28.

Les résidus obtenus dans la figure 4.28, permettent une localisation des défauts en utilisant la matrice de signatures de fautes représentée par les tableaux 4.1 et 4.2.

- De $i = 110$ à $i = 115$, vecteur = $[10011]T$, défaut actionneur localisé.
- De $i = 115$ à $i = 145$, vecteur = $[11011]T$, défauts actionneur et Marvelmind localisés.
- De $i = 145$ à $i = 170$, vecteur = $[10011]T$, défaut actionneur localisé.
- De $i = 500$ à $i = 550$, vecteur = $[11100]T$, défaut odomètre localisé.
- De $i = 550$ à $i = 560$, vecteur = $[11101]T$, défauts odomètre et RpLidar localisé.
- De $i = 560$ à $i = 600$, vecteur = $[11100]T$, défaut odomètre localisé.
- De $i = 700$ à $i = 750$, vecteur = $[01010]T$, défaut Marvelmind localisé.
- De $i = 1200$ à $i = 1250$, vecteur = $[01111]T$, défauts Marvelmind et RpLidar localisé.

L'estimation de la position et le suivi de trajectoire du Turtlebot3 sont donnés par la figure 4.25. Les défauts actionneurs sont localisés mais pas compensés. Ceci explique la divergence du robot de sa trajectoire désirée entre l'itération $i = 145$ à $i = 170$, même en utilisant la couche de diagnostic. Cela est dû à l'impossibilité d'utiliser une stratégie d'exclusion de défauts actionneurs pour un RMD2R, qui est synonyme d'une perte de commandabilité.

4.5 Application à un système multi-robots en se basant sur la divergence de Bhattacharyya

Dans cette section, on s'intéresse à la validation de l'approche proposée pour un système multi-robot, en utilisant la divergence de Bhattacharyya pour la conception et l'évaluation du résidu. Le système multi-robots est composé de trois Turtlebot3 équipés d'encodeurs et de gyroscopes. Chaque Turtlebot3 est capable de calculer la distance et l'orientation des deux autres robots par rapport à son repère. Pour cela, le système Optitrack est utilisé. La communication entre les Turtlebot3 est assurée via un réseau wifi.

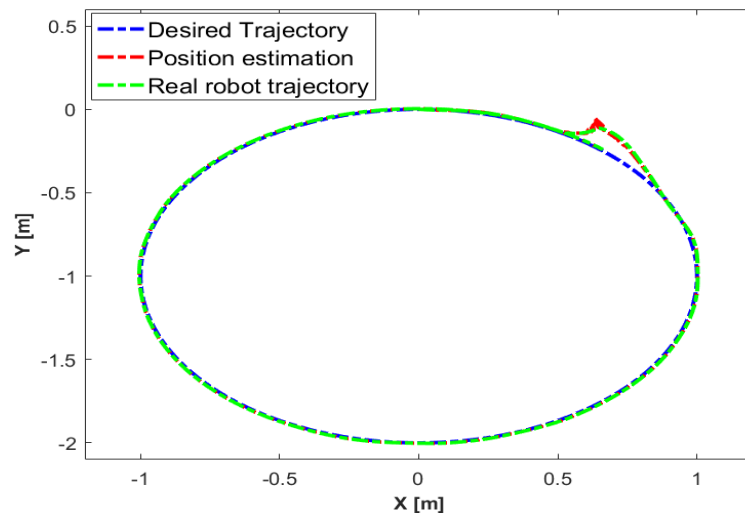


FIGURE 4.25 – Navigation du Turtlebot3 réel avec défauts en utilisant l'approche proposée

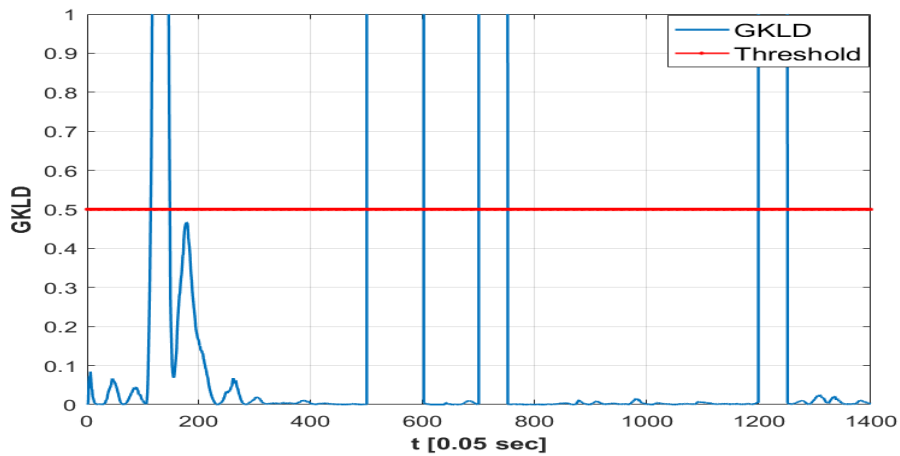


FIGURE 4.26 – GKLD pour le scénario de défauts choisi pour le Turtlebot3

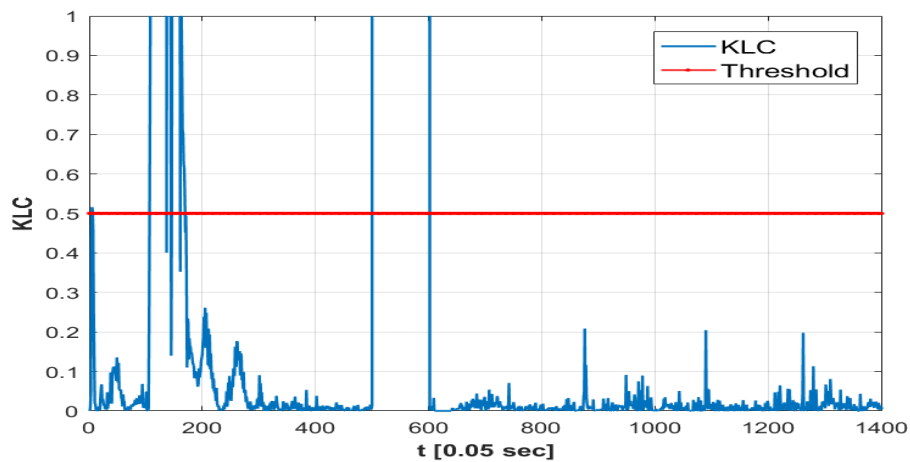
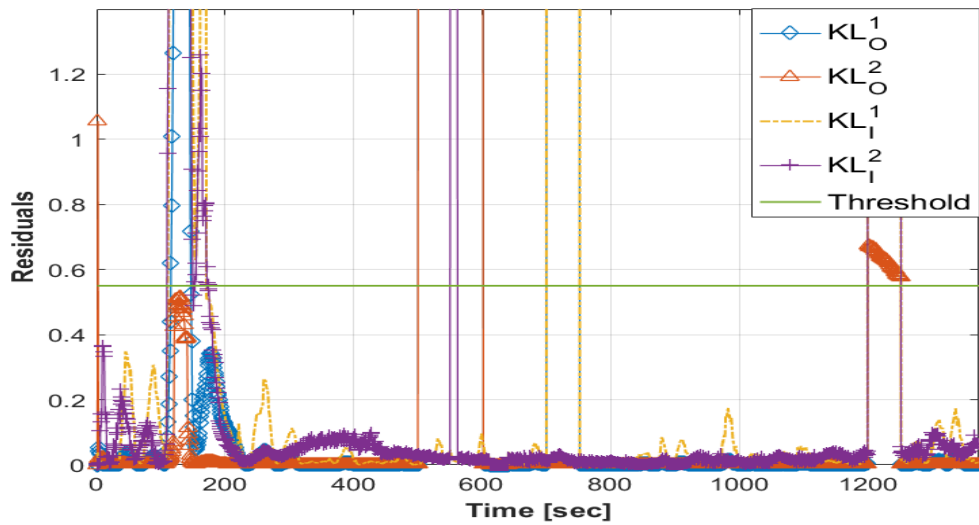
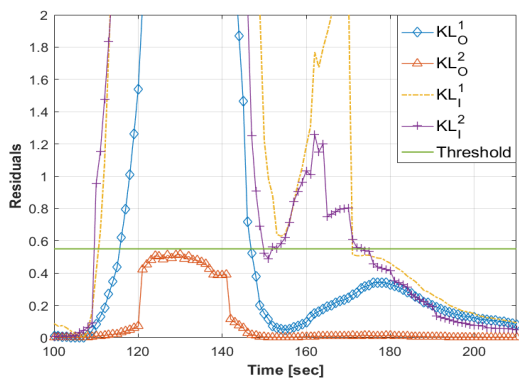


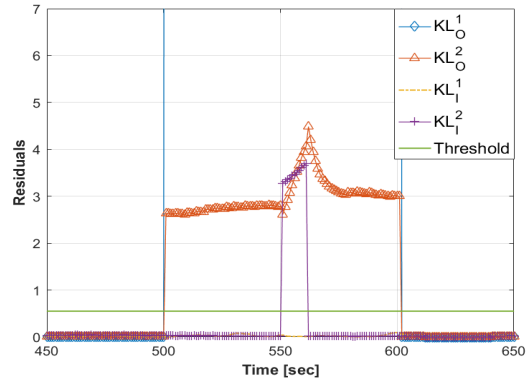
FIGURE 4.27 – KLC pour le scénario de défauts choisi pour le Turtlebot3



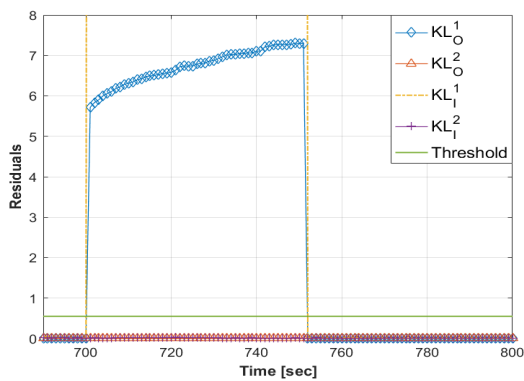
(a) Résidus des bancs de filtres informationnels



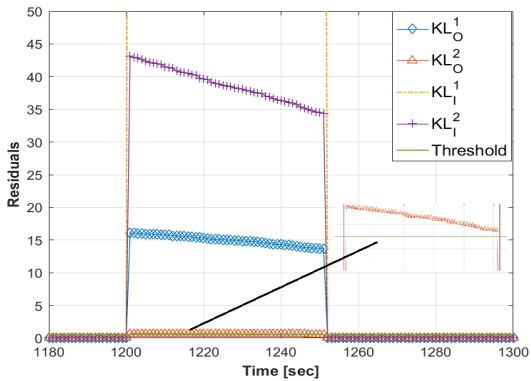
(b) Zoom sur le premier intervalle



(c) Zoom sur le deuxième intervalle



(d) Zoom sur le troisième intervalle



(e) Zoom sur le quatrième intervalle

FIGURE 4.28 – Résidus du scénario de défauts choisi pour un RMD2R réel

4.5.1 Développement des deux filtres informationnels pour le système multi-robot

À l'instant d'échantillonnage k , le vecteur d'état de chaque robot i du système est donné comme suit :

$$q_k^i = [x^i \ y^i \ \theta^i]^T_k \quad (4.35)$$

Filtre informationnel principal

1. *Étape de prédiction en utilisant le modèle odométrique :*

Le modèle d'évolution est obtenu en utilisant les données des encodeurs :

$$q_{k/k-1}^{o,i} = q_{k-1/k-1}^{o,i} + F_{k-1}^{o,i} \bar{\eta}_k^{o,i} + \rho_k^{o,i} \quad (4.36)$$

$$= f(q_{k-1/k-1}^{o,i}, \bar{\eta}_k^{o,i}) + \rho_k^{o,i} \quad (4.37)$$

Ce modèle est identique au modèle défini par l'équation 4.3, sauf qu'ici l'indice i fait référence au robot i (indice o fait référence au modèle odométrique). $F_{k-1}^{o,i}$ est défini par l'équation 2.34, $\bar{\eta}_k^{o,i}$ est défini par l'équation 2.32. Afin de calculer la matrice de covariance associée à chaque robot i , les jacobiniennes $A_{k-1}^{o,i}$ (équation 4.4) et $B_{k-1}^{o,i}$ (équation 4.5) sont calculées.

La matrice de covariance de l'erreur d'estimation de chaque robot i est définie comme suit (équation 4.6) :

$$P_{k/k-1}^{o,ii} = A_{k-1}^{o,i} P_{k-1/k-1}^{o,ii} (A_{k-1}^{o,i})^T + B_{k-1}^{o,i} (Q_k^u)^{o,i} (B_{k-1}^{o,i})^T + Q_k^{o,i} \quad (4.38)$$

La propagation de l'état du système multi-robots composé de trois Turtlebot3 est donnée par l'équation suivante :

$$q_{k/k-1}^o = \begin{pmatrix} q^{o,1} \\ q^{o,2} \\ q^{o,3} \end{pmatrix}_{k/k-1} = \begin{pmatrix} q^{o,1} \\ q^{o,2} \\ q^{o,3} \end{pmatrix}_{k-1/k-1} + \begin{pmatrix} F^{o,1} & 0 & 0 \\ 0 & F^{o,2} & 0 \\ 0 & 0 & F^{o,3} \end{pmatrix}_{k-1} \begin{pmatrix} \bar{\eta}^{o,1} \\ \bar{\eta}^{o,2} \\ \bar{\eta}^{o,3} \end{pmatrix}_k + \begin{pmatrix} \rho^{o,1} \\ \rho^{o,2} \\ \rho^{o,3} \end{pmatrix}_k \quad (4.39)$$

Avant toute mise à jour, les robots ne se partagent aucune information et la matrice de covariance du système est diagonale par blocs. Après la première mise à jour, des corrélations croisées $P^{o,ij}$ apparaissent dans la matrice de covariance. La forme générale de la matrice de covariance est donnée comme suit :

$$P_{k/k-1}^o = \begin{pmatrix} P^{o,11} & P^{o,12} & P^{o,13} \\ P^{o,21} & P^{o,22} & P^{o,23} \\ P^{o,31} & P^{o,32} & P^{o,33} \end{pmatrix}_{k/k-1} \quad (4.40)$$

où :

$$P_{k/k-1}^{o,ij} = A_{k-1}^{o,i} P_{k-1/k-1}^{o,ij} (A_{k-1}^{o,j})^T \quad (4.41)$$

Par conséquent, la matrice informationnelle $Y_{k/k-1}^o$ et le vecteur informationnel $y_{k/k-1}^o$ du système multi-robots de l'étape de prédiction basée sur le modèle odométrique, sont :

$$Y_{k/k-1}^o = (P_{k/k-1}^o)^{-1} \quad (4.42)$$

$$y_{k/k-1}^o = Y_{k/k-1}^o q_{k/k-1}^o \quad (4.43)$$

2. *Étape de mise à jour :*

Pour le modèle d'observation, on considère le cas où chaque robot peut se localiser par rapport aux autres robots, en utilisant des capteurs extéroceptifs (Optitrack). Quand le robot i observe le robot j , la position et l'orientation du robot j par rapport au repère du robot i sont connues. Étant donnée la figure 4.29, la position relative du robot j par rapport au robot i (z^{ji}), au niveau du robot i est donnée par les équations suivantes :

$$z_k^{ji} = \begin{bmatrix} x_k^{ji} & y_k^{ji} & \theta_k^{ji} \end{bmatrix}^T \quad (4.44)$$

$$= \gamma^T(\theta_k^i)(q_k^j - q_k^i) \quad (4.45)$$

Le bruit associé à la mesure z_k^{ji} est supposé être un bruit blanc gaussien avec une matrice de covariance R^{ji} .

Le vecteur d'observation global est donné comme suit :

$$z_k = \begin{pmatrix} \vdots \\ z^{ji} \\ \vdots \\ z^{ij} \\ \vdots \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} \vdots \\ x^{ji} \\ y^{ji} \\ \theta^{ji} \\ \vdots \\ x^{ij} \\ y^{ij} \\ \theta^{ij} \\ \vdots \end{pmatrix}_k \quad (4.46)$$

z_k^{ji} représente la position relative du robot j par rapport au robot i , et γ est la matrice de rotation :

$$\gamma(\theta_k^i) = \begin{pmatrix} \cos\theta_k^i & -\sin\theta_k^i & 0 \\ \sin\theta_k^i & \cos\theta_k^i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

Le modèle d'observation est non linéaire. Une linéarisation autour de la valeur prédite est exprimée par l'équation suivante :

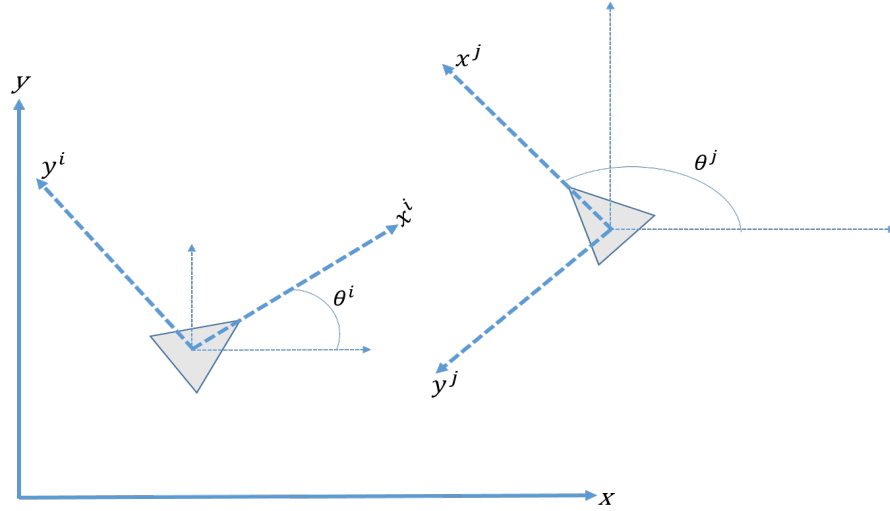


FIGURE 4.29 – Observations relatives entre robot i et robot j

$$z_k^{j^i} - \hat{z}_k^{j^i} = C_k^{j^i} \Delta q_k + \Gamma_k^{j^i} \Phi_k^{j^i} \quad (4.48)$$

où $\Phi_k^{j^i}$ est le bruit blanc gaussien associé aux mesures relatives, Δq_k est l'erreur de l'estimation de la pose et $\hat{z}_k^{j^i}$ est l'estimation de la mesure, donnée par l'équation suivante :

$$\hat{z}_k^{j^i} = \gamma^T \left(\theta_{k/k-1}^i \right) \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} \dots - I_{3 \times 3} \dots I_{3 \times 3} \dots 0_{3 \times 3} \\ \vdots \\ x^i \\ y^i \\ \theta^i \\ \vdots \\ x^j \\ y^j \\ \theta^j \\ \vdots \end{pmatrix}_{k/k-1} \quad (4.49)$$

Et $C_k^{j^i}$ est la matrice Jacobienne, donnée comme suit :

$$C_k^{j^i} = \frac{\partial z_k^{j^i}}{\partial q} \Big|_{q_{k/k-1}} = \gamma^T \left(\theta_{k/k-1}^i \right) c_k^{j^i} \quad (4.50)$$

avec :

$$c_k^{j^i} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & y_{k/k-1}^j - y_{k/k-1}^i \\ 0_{3 \times 3} \dots 0 & -1 & -x_{k/k-1}^j + x_{k/k-1}^i \dots I_{3 \times 3} \dots 0_{3 \times 3} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

Et sachant que :

$$\Gamma_k^{ji} = \frac{\partial z_k^{ji}}{\partial \Phi_k^{ji}} \quad (4.52)$$

La matrice de covariance associée à chaque mesure z_k^{ji} est donnée comme suit :

$$R_k^{ji} = \Gamma_k^{ji} E \left(\Phi_k^{ji} (\Phi_k^{ji})^T \right) (\Gamma_k^{ji})^T \quad (4.53)$$

où E est l'espérance. (Pour plus de détails, voir annexe A.2)

La mise à jour de la matrice informationnelle et du vecteur informationnel est donnée comme suit :

$$Y_{k/k}^o = Y_{k/k-1}^o + \sum_{c=1}^m I_c(k) \quad (4.54)$$

$$y_{k/k}^o = y_{k/k-1}^o + \sum_{c=1}^m i_c(k) \quad (4.55)$$

où m est le nombre d'observations z^{ji} (dans ce cas $m = 6$), et $I_c(k)$, $i_c(k)$ sont les contributions informationnelles associées à l'observation z^{ij} .

$$I_c(k) = I^{ij}(k) = (C_k^{ij})^T (R_k^{ij})^{-1} C_k^{ij} \quad (4.56)$$

$$i_c(k) = i^{ij}(k) = (C_k^{ij})^T (R_k^{ij})^{-1} [(z_k^{ij} - \hat{z}_k^{ij}) + C_k^{ij} q_{k/k-1}] \quad (4.57)$$

Filtre informationnel secondaire

Le développement du filtre informationnel secondaire se fait de la même manière que pour le filtre principal. En effet, les deux filtres ont le même modèle d'observation. Ils diffèrent seulement du modèle d'évolution utilisé dans l'étape de prédiction. Tandis que le filtre principal utilise un modèle cinématique qui prend les mesures encodeurs comme entrées, le filtre secondaire se base sur un modèle cinématique avec comme entrées les signaux de la commande en boucle fermée développée. Il n'est donc pas nécessaire de tout développer de nouveau. Une brève explication des deux étapes est donnée comme suit :

1. Étape de prédiction en utilisant le modèle identifié :

Le modèle d'évolution pour chaque robot i , est obtenu en utilisant les signaux de commande comme suit :

$$q_{k/k-1}^{I,i} = q_{k-1/k-1}^{o,i} + F_{k-1}^{I,i} \eta_k^{I,i} + \rho_k^{I,i} \quad (4.58)$$

$$= f(q_{k-1/k-1}^{o,i}, \eta_k^{I,i}) + \rho_k^{I,i} \quad (4.59)$$

Ce modèle est identique au modèle défini par l'équation 4.19, sauf qu'ici l'indice i fait référence au robot i (indice I fait référence au modèle identifié). $F_{k-1}^{I,i}$ est défini par l'équation 4.20 et $\eta_k^{I,i}$ est défini par l'équation 2.85. Afin de calculer la matrice de covariance associée à chaque robot i , les jacobiniennes $A_{k-1}^{I,i}$ (équation 4.21) et $B_{k-1}^{I,i}$ (équation 4.22) sont calculées.

La matrice de covariance de l'erreur d'estimation de chaque robot i est définie comme suit (équation 4.23) :

$$P_{k/k-1}^{I,ii} = A_{k-1}^{I,i} P_{k-1/k-1}^{o,ii} (A_{k-1}^{I,i})^T + B_{k-1}^{I,i} (Q_k^u)^{I,i} (B_{k-1}^{I,i})^T + Q_k^{I,i} \quad (4.60)$$

La propagation de l'état du système multi-robots composé de trois Turtlebot3 est donnée par l'équation suivante :

$$q_{k/k-1}^I = \begin{pmatrix} q^{I,1} \\ q^{I,2} \\ q^{I,3} \end{pmatrix}_{k/k-1} = \begin{pmatrix} q^{o,1} \\ q^{o,2} \\ q^{o,3} \end{pmatrix}_{k-1/k-1} + \begin{pmatrix} F^{I,1} & 0 & 0 \\ 0 & F^{I,2} & 0 \\ 0 & 0 & F^{I,3} \end{pmatrix}_{k-1} \begin{pmatrix} \eta^{I,1} \\ \eta^{I,2} \\ \eta^{I,3} \end{pmatrix}_k + \begin{pmatrix} \rho^{o,1} \\ \rho^{o,2} \\ \rho^{o,3} \end{pmatrix}_k \quad (4.61)$$

où i et j font référence aux robots i et j respectivement.

La forme générale de la matrice de covariance est donnée par l'équation suivante :

$$P_{k/k-1}^I = \begin{pmatrix} P^{I,11} & P^{I,12} & P^{I,13} \\ P^{I,21} & P^{I,22} & P^{I,23} \\ P^{I,31} & P^{I,32} & P^{I,33} \end{pmatrix}_{k/k-1} \quad (4.62)$$

où :

$$P_{k/k-1}^{I,ij} = A_{k-1}^{I,i} P_{k-1/k-1}^{o,ij} (A_{k-1}^{I,j})^T \quad (4.63)$$

La matrice informationnelle $Y_{k/k-1}^I$ et le vecteur informationnel $y_{k/k-1}^I$ sont donnés comme suit :

$$Y_{k/k-1}^I = (P_{k/k-1}^I)^{-1} \quad (4.64)$$

$$y_{k/k-1}^I = Y_{k/k-1}^I q_{k/k-1}^I \quad (4.65)$$

2. *Étape de mise à jour :*

L'étape de mise à jour du filtre secondaire est identique à celle du filtre principal. Les distributions corrigées sont données par les équations suivantes :

$$Y_{k/k}^I = Y_{k/k-1}^I + \sum_{c=1}^m I_c(k) \quad (4.66)$$

$$y_{k/k}^I = y_{k/k-1}^I + \sum_{c=1}^m i_c(k) \quad (4.67)$$

où $I_c(k)$ et $i_c(k)$ sont définis par les équations 4.56 et 4.57 respectivement.

4.5.2 Approche proposée pour un système multi-robot

L'approche proposée dans la section 4.2 est généralisée pour un système multi-robots (figure 4.30). Après les étapes de modélisation, de conception des commandes et d'estimation d'état pour le système multi-robots (détaillées dans la section 4.5), une couche de diagnostic qui comporte deux étapes est ajoutée. La première étape est la détection de défauts et la deuxième est la localisation des défauts.

Pour la détection de défaut, deux résidus globaux (GBD_I et GBD_O) sont conçus en se basant sur la divergence de Bhattacharyya (équation 3.84). Sachant que GBD_O est obtenu à partir du filtre principal et GBD_I est obtenu à partir du filtre secondaire, les équations suivantes sont obtenues :

$$GBD_O = \frac{1}{8} (q_{k/k}^o - q_{k/k-1}^o)^T \bar{Y}_{k/k}^o (q_{k/k}^o - q_{k/k-1}^o) + \frac{1}{4} \log \left(\frac{|Y_{k/k}^o|}{|\bar{Y}_{k/k}^o|} \right) + \frac{1}{4} \log \left(\frac{|Y_{k/k-1}^o|}{|\bar{Y}_{k/k-1}^o|} \right) \quad (4.68)$$

$$GBD_I = \frac{1}{8} (q_{k/k}^I - q_{k/k-1}^I)^T \bar{Y}_{k/k}^I (q_{k/k}^I - q_{k/k-1}^I) + \frac{1}{4} \log \left(\frac{|Y_{k/k}^I|}{|\bar{Y}_{k/k}^I|} \right) + \frac{1}{4} \log \left(\frac{|Y_{k/k-1}^I|}{|\bar{Y}_{k/k-1}^I|} \right) \quad (4.69)$$

où \bar{Y} est défini par l'équation 3.85.

Donc GBD_O et GBD_I sont les divergences de Bhattacharyya entre la distribution obtenue dans l'étape de prédiction et celle obtenue dans l'étape de correction des filtres informationnels principal et secondaire respectivement. La distribution de ces résidus dans le cas sans défaut est définie dans la section 3.3.

L'évaluation de ces résidus se fait par une comparaison avec un seuil optimal qui est une étape primordiale pour la prise de décision sur la présence ou l'absence de défauts. Ce seuil optimal est obtenu à partir d'un critère basé sur la divergence de Bhattacharyya (section 3.4.5).

Après avoir détecté la présence d'un défaut, ce dernier doit être localisé et identifié afin de générer les actions nécessaires pour une navigation sûre et fiable. De ce fait, pour chaque observation entre deux robots, un test utilisant le vecteur d'état du robot observé est réalisé. Quand le robot i observe le robot j , le résidu nommé BD^{ji} est obtenu à partir d'un filtre EIF^{ji} , conçu de telle sorte que seulement l'observation z^{ji} est utilisée dans l'étape de correction du filtre informationnel. En d'autres termes, à partir des deux filtres principal et secondaire, deux bancs de filtres sont développés EIF^{O,j^i} , EIF^{I,j^i} . Pour chaque filtre du banc de filtres, un résidu BD^{ji} est conçu, en se basant sur l'estimation d'état du robot j (q^j) et sur la matrice de covariance associée P^{jj} . Les équations des deux sets de résidus obtenus à partir de ces deux bancs de filtres sont données comme suit :

$$BD^{ji} = \frac{1}{8} (q_{k/k}^{o,j} - q_{k/k-1}^{o,j})^T \bar{Y}^o (q_{k/k}^{o,j} - q_{k/k-1}^{o,j}) + \frac{1}{2} \log \left(\frac{\det(\bar{Y}_{k/K}^o)^{-1}}{\sqrt{(\det(Y_{k/k-1}^{o,j})^{-1})(\det(Y_{k/k}^{o,j})^{-1})}} \right) \quad (4.70)$$

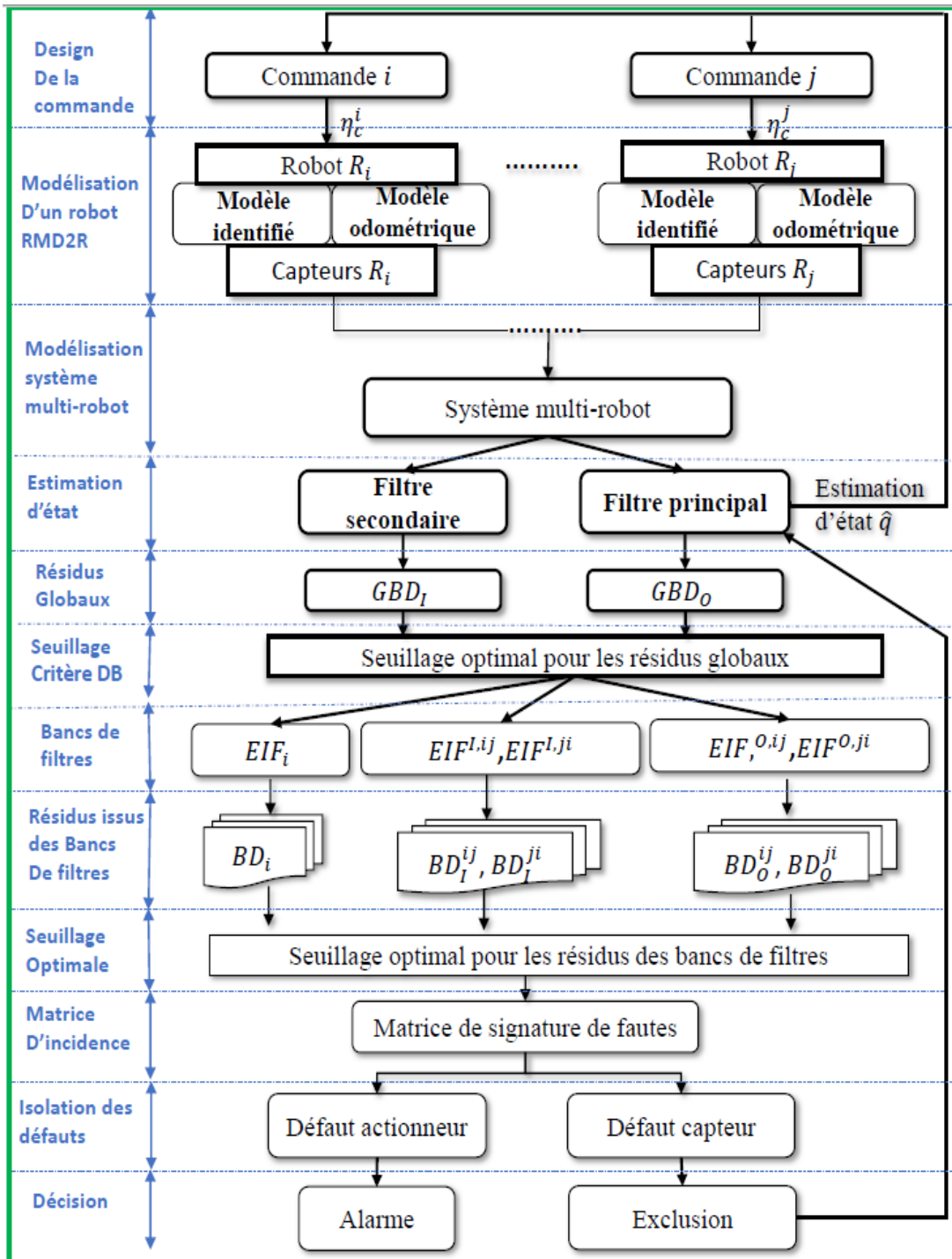


FIGURE 4.30 – Schéma de l'approche proposée pour un système multi-robot

$$BD_I^{ji} = \frac{1}{8} (q_{k/k}^{I,j} - q_{k/k-1}^{I,j})^T \bar{Y}^I (q_{k/k-1}^{I,j} - q_{k/k}^{I,j}) + \frac{1}{2} \log \left(\frac{\det(\bar{Y}_{k/K}^I)^{-1}}{\sqrt{(\det(Y_{k/k-1}^{I,j})^{-1})(\det(Y_{k/k}^{I,j})^{-1})}} \right) \quad (4.71)$$

où

$$Y^j = P^{jj^{-1}} \quad (4.72)$$

Il est à noter que :

- BD_O^{ji} dépend des encodeurs des robots j et i , et des mesures de distances et d'orientations (par rapport aux autres robots) du robot i (obtenus à partir du système Optitrack).
- BD_I^{ji} dépend des actionneurs des robots j et i , et des mesures de distances et d'orientations du robot i .

Afin d'améliorer la localisation des défauts, un banc de filtre EIF_i supplémentaire est conçu, en calculant la divergence de Bhattacharyya entre les deux distributions a priori des deux filtres informationnels (principal et secondaire). Par conséquent, un ensemble de résidus supplémentaire BD_i est obtenu comme suit :

$$BD_i = \frac{1}{8} (q_{k/k-1}^o - q_{k/k-1}^I)^T \bar{Y}_{k/k-1}^o (q_{k/k-1}^o - q_{k/k-1}^I) + \frac{1}{4} \log \left(\frac{|Y_{k/k-1}^o|}{|\bar{Y}_{k/k-1}^o|} \right) + \frac{1}{4} \log \left(\frac{|Y_{k/k-1}^I|}{|\bar{Y}_{k/k-1}^I|} \right) \quad (4.73)$$

Il est à noter que BD_i dépend des actionneurs et des encodeurs du robot i .

L'étape de localisation de défauts consiste à utiliser les trois ensembles de résidus BD_O^{ji} , BD_I^{ji} et BD_i . Chaque résidu est évalué en le comparant à un seuil optimal obtenu à partir d'un critère dérivé de la divergence de Bhattacharyya (section 3.4.5). L'algorithme d'optimisation du seuil est identique à celui des résidus globaux (algorithme 3), sauf que dans ce cas, les distributions de probabilités (sans et avec défaut) des résidus issus des trois bancs de filtres sont prises en compte.

L'objectif est donc de décider d'une manière optimale si $BD_O^{ji} = 0$, $BD_I^{ji} = 0$ et $BD_i = 0$ (absence de défaut) ou $BD_O^{ji} = 1$, $BD_I^{ji} = 1$ et $BD_i = 1$ (présence de défaut). Le vecteur composé de valeurs normalisées des résidus, est ensuite comparé à une matrice de signatures de défauts potentiels du système multi-robots (tableaux 4.3 et 4.4). Les deux tableaux 4.3 et 4.4, ne représentent qu'une partie des combinaisons des défauts possibles. Afin de simplifier l'écriture de la matrice d'incidence, des abréviations sont adoptées : A_i = actionneurs du robot i , O_i = odomètres du robot i et C_i mesure de distance et d'orientation du robot i . L'indice (i, j) fait référence à une combinaison de défauts des deux robots i et j (ou plus). Par conséquent, chaque colonne de la matrice d'incidence représente le vecteur de signatures d'une défaillance capteur, actionneurs, odomètres ou une combinaison de défaillances de ces composants. À titre d'exemple, un défaut sur les odomètres du robot 1 influence les résidus GBD_0 , BD_1 , BD_O^{12} , BD_O^{13} , BD_O^{21} , et BD_O^{31} .

Dans le cas où une mesure capteur z^{ji} est erronée, elle est exclue de l'étape de mise à jour du filtre informationnel en enlevant sa contribution informationnelle. Dans le cas d'un défaut odomètre du robot i , le modèle identifié du robot i basé sur la commande en boucle fermée remplace le modèle odométrique du robot i dans l'étape de prédiction. Par contre, dans le cas d'un défaut actionneur, une alarme est générée

4.5. APPLICATION À UN SYSTÈME MULTI-ROBOTS EN SE BASANT SUR LA DIVERGENCE DE BHATTACHARYYA

| Résidu | C_1 | C_2 | C_3 | O_1 | O_2 | O_3 | A_1 | A_2 | A_3 | $C_{1,2}$ | A_1/C_2 | O_2/C_3 |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------|-----------|-----------|
| GBD_0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| GBD_I | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| BD_1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| BD_2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| BD_3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| BD_O^{12} | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| BD_O^{13} | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| BD_O^{21} | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| BD_O^{23} | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| BD_O^{31} | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| BD_O^{32} | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| BD_I^{12} | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| BD_I^{13} | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| BD_I^{21} | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| BD_I^{23} | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| BD_I^{31} | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| BD_I^{32} | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Tableau 4.3 – Matrice d'incidence pour un système à trois robots

| Résidu | $C_{1,3}$ | $C_{1,2,3}$ | A_1/O_2 | $O_{1,2}$ | $A_{1,3}$ | $A_{2,3}$ | $A_{1,2,3}$ | $O_{1,2,3}$ | $C_1/O_2/A_3$ |
|-------------|-----------|-------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------------|-------------|---------------|
| GBD_0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| GBD_I | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| BD_1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| BD_2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| BD_3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| BD_O^{12} | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| BD_O^{13} | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| BD_O^{21} | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| BD_O^{23} | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| BD_O^{31} | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| BD_O^{32} | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| BD_I^{12} | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| BD_I^{13} | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| BD_I^{21} | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| BD_I^{23} | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| BD_I^{31} | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| BD_I^{32} | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

Tableau 4.4 – Matrice d'incidence pour un système à trois robots (suite)

sans pour autant exclure l'actionneur défaillant (perte de commandabilité du RMD2R). Une stratégie d'exclusion sera traitée dans l'application avec le RMD4R.

Un résumé de l'architecture de génération des différents résidus est proposé par la figure 4.31. Sur cette figure, on peut observer la manipulation des contributions informationnelles pour la génération des résidus en utilisant la divergence de Bhattacharyya.

4.5.3 Résultats de simulation pour un système multi-robot

Pour la partie simulation, le système multi-robots se compose de trois robots RMD2R. Les trajectoires désirées pour les trois robots sont données comme suit :

- Robot 1 : $x_r = \sin(t)$ et $y_r = \cos(0.5 t)$.
- Robot 2 : $x_r = \sin(t) + 1$ et $y_r = \cos(0.5 t)$.
- Robot 3 : $x_r = \sin(t) + 3$ et $y_r = \cos(0.5 t)$.

La figure 4.32 montre les signaux de commandes η_c^i (vitesse linéaire) et ω_c^i (vitesse angulaire) pour chaque robot i . La figure 4.33 montre le suivi de trajectoire des trois robots dans le cas idéal (sans défaut).

Pour différents instants d'échantillonnage k , des défauts capteurs et actionneurs sont introduits en forme de biais comme suit :

- $k \in [40 \ 69]$: défaut capteur de distance du robot 1.
- $k \in [82 \ 91]$: défaut des odomètres du robot 2.
- $k \in [100 \ 112]$: défaut des capteurs des trois robots.
- $k \in [130 \ 160]$: défaut des odomètres du robot 1 et capteur du robot 2.
- $k \in [170 \ 195]$: défaut des actionneurs du robot 1.

Les résidus globaux GBD_O et GBD_I sont donnés respectivement par les figures 4.34 et 4.35. À partir de ces figures, on peut observer que dans le cas d'un fonctionnement normal, et après la convergence des différentes distributions *a posteriori* vers les distributions *a priori*, ces différents résidus s'approchent de la valeur 0 ($GBD_O \sim 0.02$, $GBD_I \sim 0.02$). Dans le cas de présence de défauts, ces résidus subissent des sauts plus ou moins sévères, proportionnels aux amplitudes des défauts. Ces sauts sont la conséquence de la dissemblance entre les distributions de probabilité des deux étapes des filtres informationnels étendus.

Pour la détermination du seuil, les distributions des différents résidus basés sur la divergence de Bhattacharyya, dans le cas avec ou sans défauts, sont obtenues à partir d'une étude statistique des estimateurs de ces résidus. La figure 4.37 montre l'histogramme de la distribution du résidu GBD_O dans le cas avec ou sans défaut. Pour avoir ces deux distributions, les scénarios sans et avec défaut sont réalisés plusieurs fois pour avoir le nombre d'échantillons nécessaire pour déterminer les deux courbes. Afin de faciliter la dérivation de ces résidus, on s'intéresse aux plus petits défauts détectables et qui font chevaucher les deux distributions. Dans notre cas, on a fait varier les défauts en forme de biais entre 10cm et 28cm.

Une fois les distributions des résidus établies, le seuil peut être dérivé en se basant sur l'algorithme 3. Les probabilités de fausse alarme et de détection sont obtenues à partir des distributions de probabilités (à titre d'exemple la figure 4.37 pour le résidu GBD_O), et cela pour chaque valeur du seuil choisi sur le support des distributions. La probabilité P_0 de l'hypothèse sans défaut (H_0) est obtenue à partir de l'estimation de maximum de vraisemblance. La probabilité P_0 prend en considération l'historique des

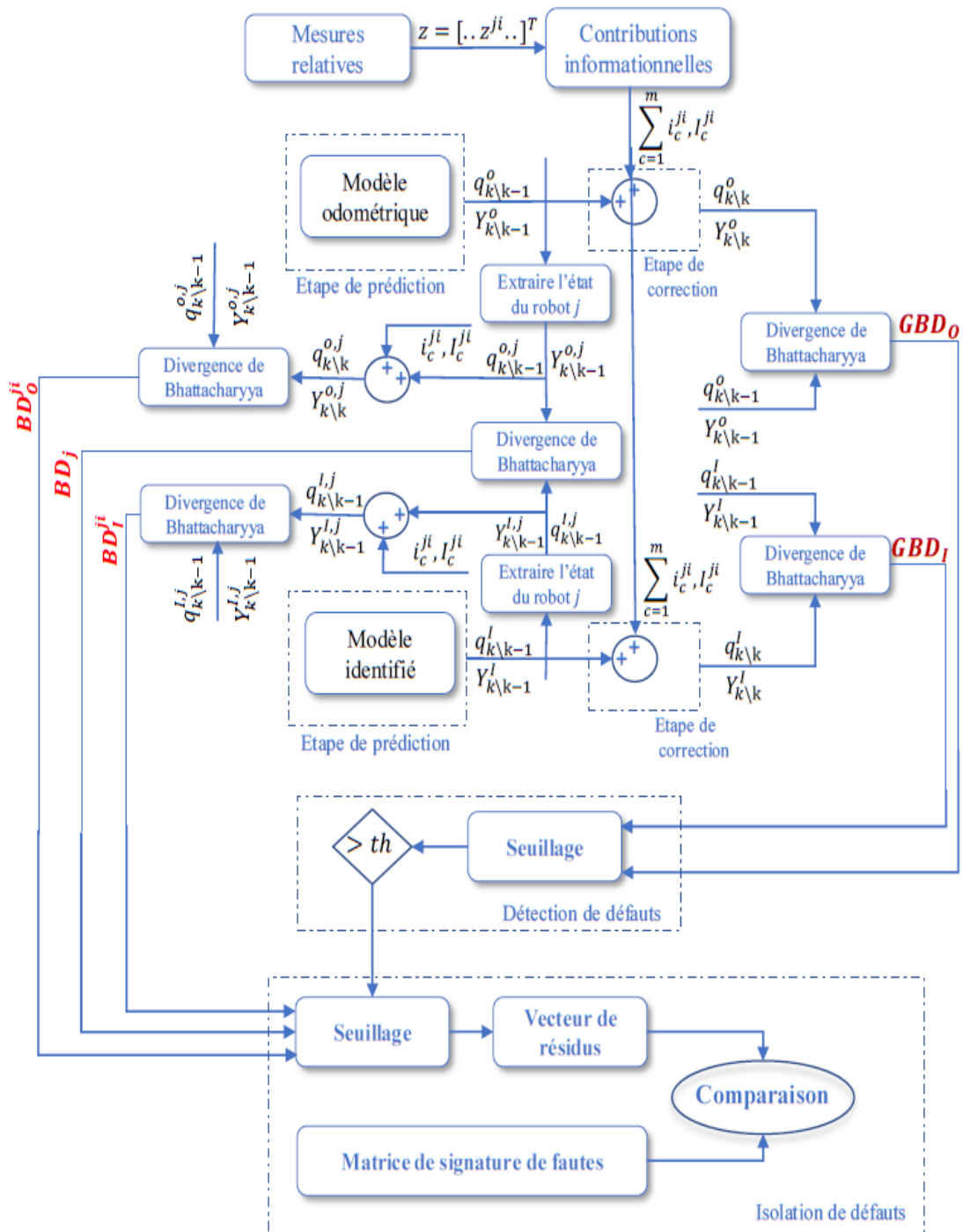


FIGURE 4.31 – Architecture de générations de résidus pour la détection et la localisation des défauts

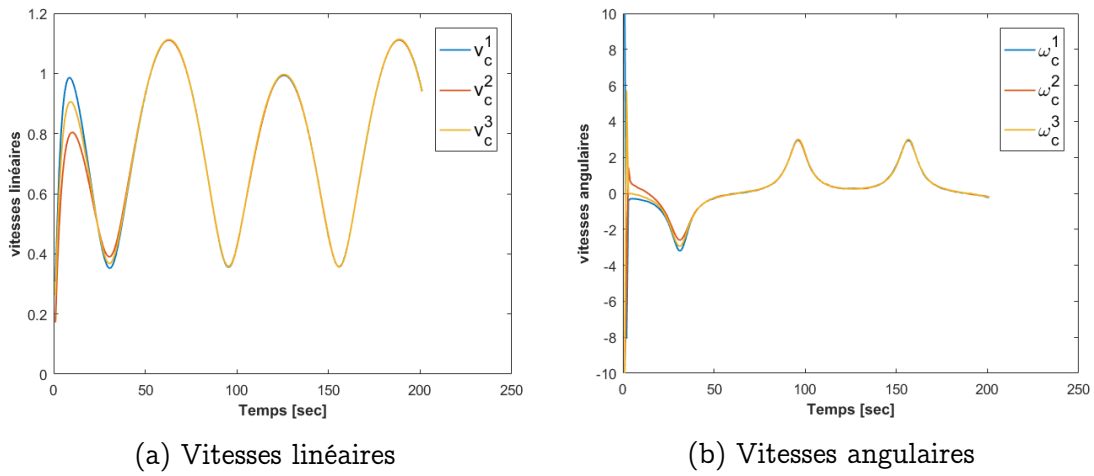


FIGURE 4.32 – Signaux de commande pour le système multi-robot

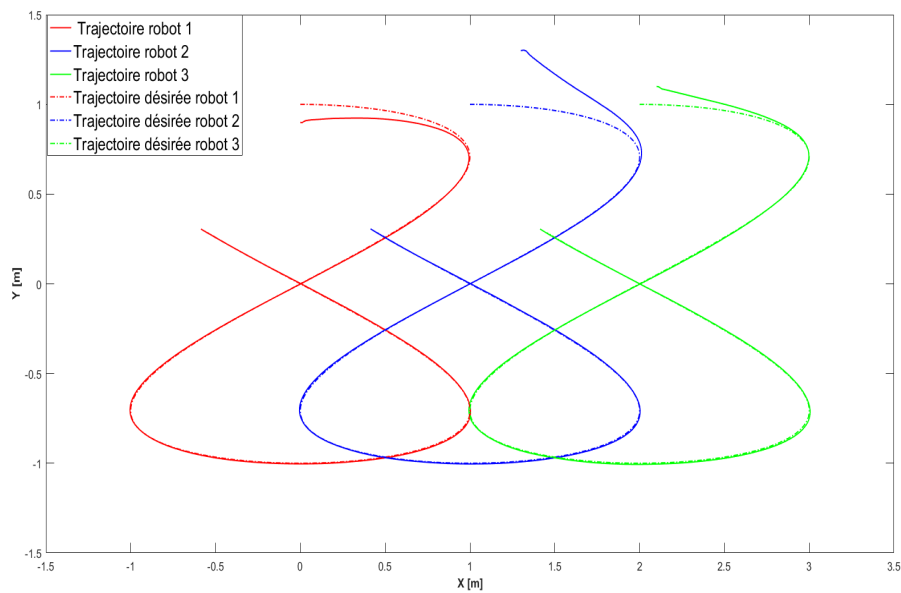


FIGURE 4.33 – Suivi de trajectoire pour le système multi-robots en utilisant les commandes développées

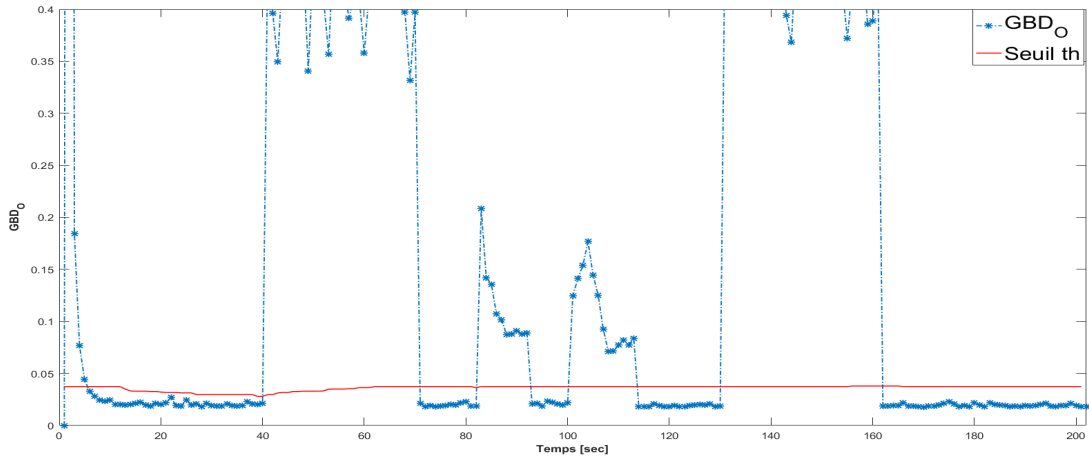


FIGURE 4.34 – Résidu global GBD_O pour le système multi-robots en simulation

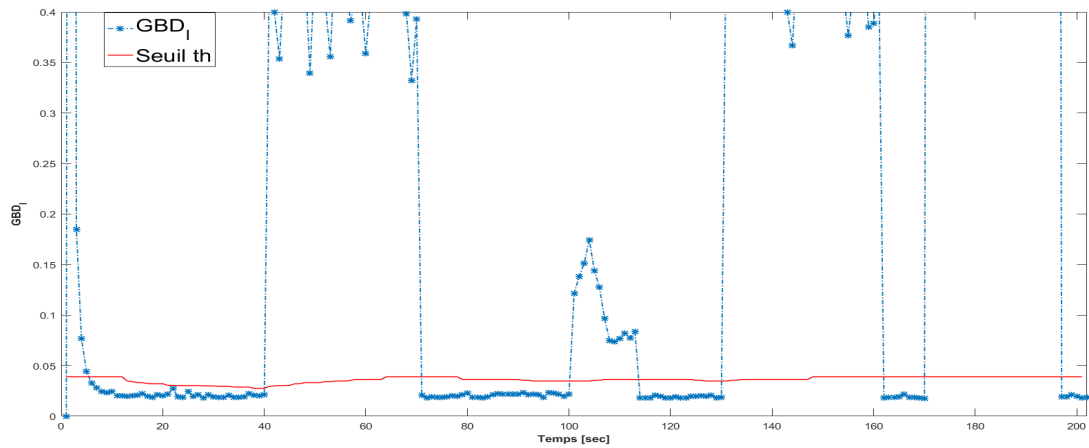


FIGURE 4.35 – Résidu global GBD_I pour le système multi-robots en simulation

4.5. APPLICATION À UN SYSTÈME MULTI-ROBOTS EN SE BASANT SUR LA DIVERGENCE DE BHATTACHARYYA

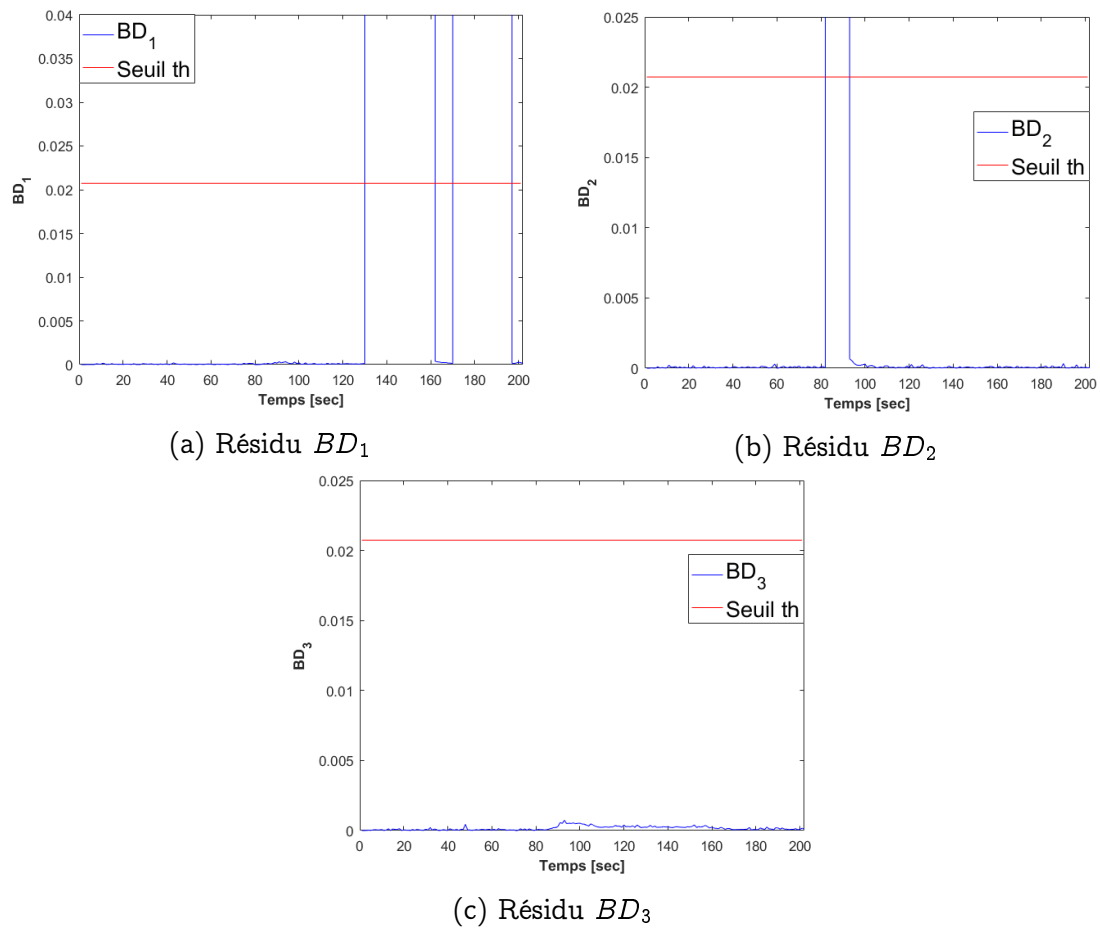


FIGURE 4.36 – Résidus BD_i pour le système multi-robots en simulation

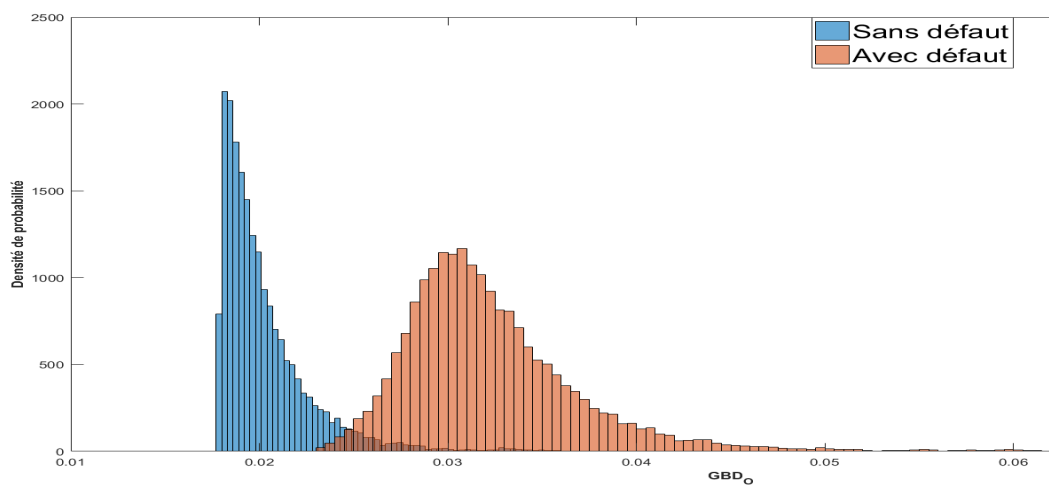


FIGURE 4.37 – Distribution du Résidu GBD_0 dans le cas avec ou sans défaut avec des données simulées

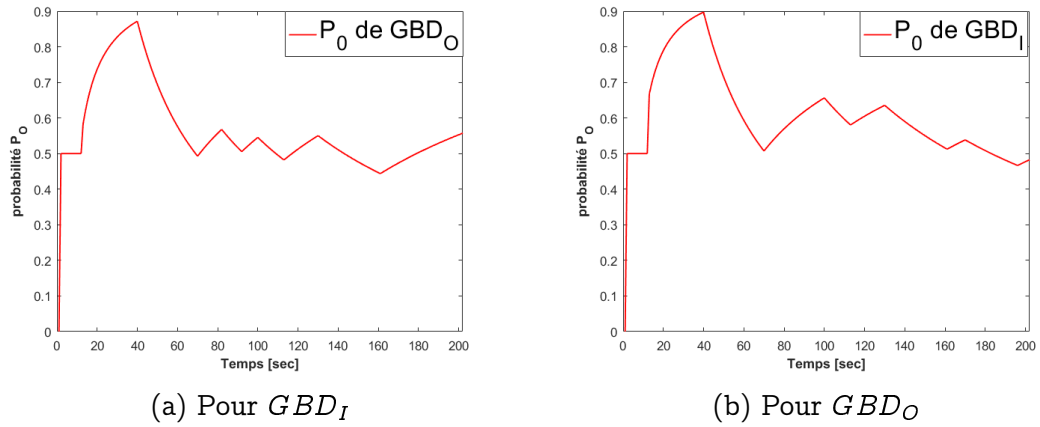


FIGURE 4.38 – Estimation MLE de la probabilité P_0

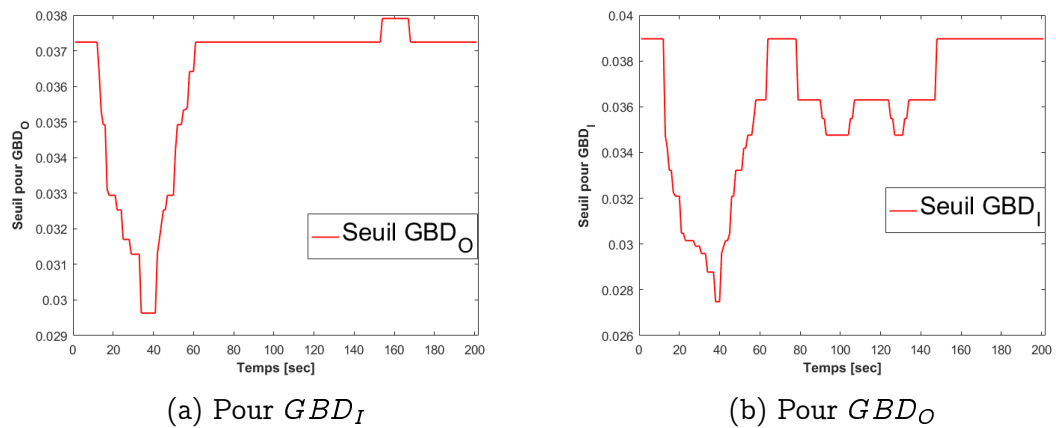


FIGURE 4.39 – Résidu optimal en se basant sur le critère de Bhattacharyya pour le système multi-robots en simulation

décisions u_0 et u_1 , ce qui mène à des seuils qui varient avec le temps en correspondance avec les décisions prises préalablement. La figure 4.38 montre l'évolution de P_0 pour les résidus GBD_I et GBD_O suivant le scénario de défauts choisi. La figure 4.39 montre l'évolution des seuils par rapport au temps, pour les deux résidus GBD_I et GBD_O .

Les seuils montrés dans la figure 4.39 représentent les valeurs correspondantes au critère de Bhattacharyya B_c (algorithme 3) pour les résidus GBD_I et GBD_O . La figure 4.40 montre la fonction BS (équation 3.139), qui représente l'évolution de BS par rapport au seuil th pour les résidus GBD_I et GBD_O . Le seuil th pour ces deux cas, varie de 0 à 0.035, et contient 1000 valeurs (un pas de 35×10^{-6}). Le critère de Bhattacharyya B_c représente la valeur qui minimise la fonction BS . Pour le résidu GBD_O à l'instant $k = 40$, la valeur qui minimise BS est $BC = 0.045$. Cela correspond au seuil $th = 0.029$. En utilisant l'équation 3.96, les probabilités $P_D = 0.817$ et $P_F = 0.0035$ sont obtenues. Pour le résidu GBD_O à l'instant $k = 50$, on obtient les valeurs suivantes : $B_C = 0.035$, $th = 0.033$, $P_D = 7.972$ et $P_F = 0.0029$.

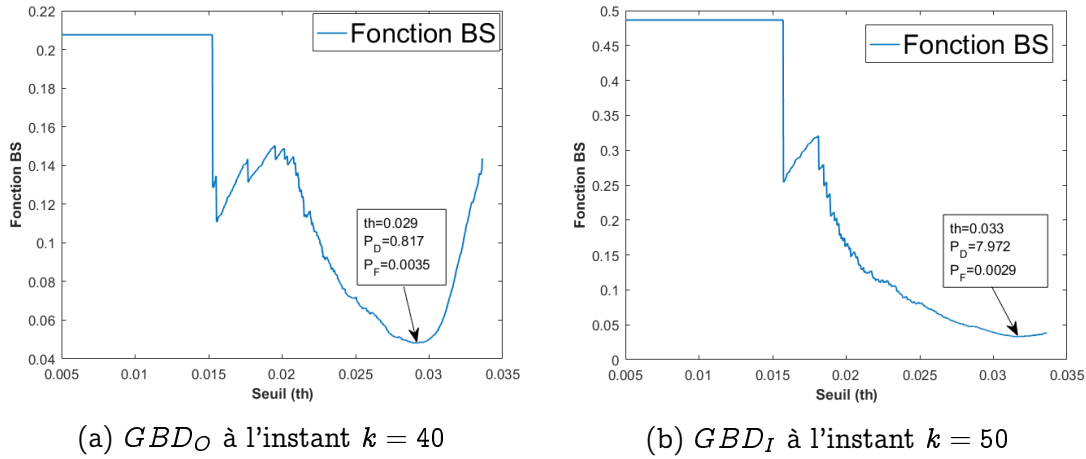


FIGURE 4.40 – Fonction BS pour le calcul du seuil optimal

Une fois qu'un défaut est détecté, une procédure de localisation est déclenchée. Pour cela, les bancs de filtres EIF_i , $EIF^{I,ij}$ et $EIF^{O,ij}$ sont utilisés, et les résidus BD_i , BD_O^{ij} et BD_I^{ij} sont obtenus. La figure 4.37 représente les résidus BD_i suivant le scénario choisi. La figure 4.41 montre l'ensemble des résidus BD_O^{ij} et BD_I^{ij} suivant ce même scénario, alors que la figure 4.42 propose chaque résidu individuellement.

Pour le calcul des seuils de BD_i , BD_I^{ij} et BD_O^{ij} , une étude similaire à celle présentée pour les deux résidus GBD_I et GBD_O est réalisée pour chaque résidu des bancs de filtres. En d'autres termes, pour chaque résidu, les distributions de probabilité dans le cas "sans" et "avec" défaut sont établies. Si on prend l'exemple du résidu BD_1 , la fonction BS , la distribution du résidu et l'estimation de P_0 sont données par la figure 4.43.

Les capteurs et actionneurs défaillants affectent des résidus bien spécifiques. D'après les figures 4.42, 4.41 et 4.36, on peut observer la sensibilité de chaque résidu selon les défauts introduits. Les résidus affectés pour chaque intervalle de défauts sont donnés comme suit :

- $k \in [40 \ 69]$: BD_O^{31} , BD_I^{31} , BD_O^{21} , BD_I^{21} .
- $k \in [82 \ 91]$: BD_O^{12} , BD_O^{31} , BD_O^{23} , BD_O^{31} , BD_O^{32} , BD_O^{21} , BD_2 .

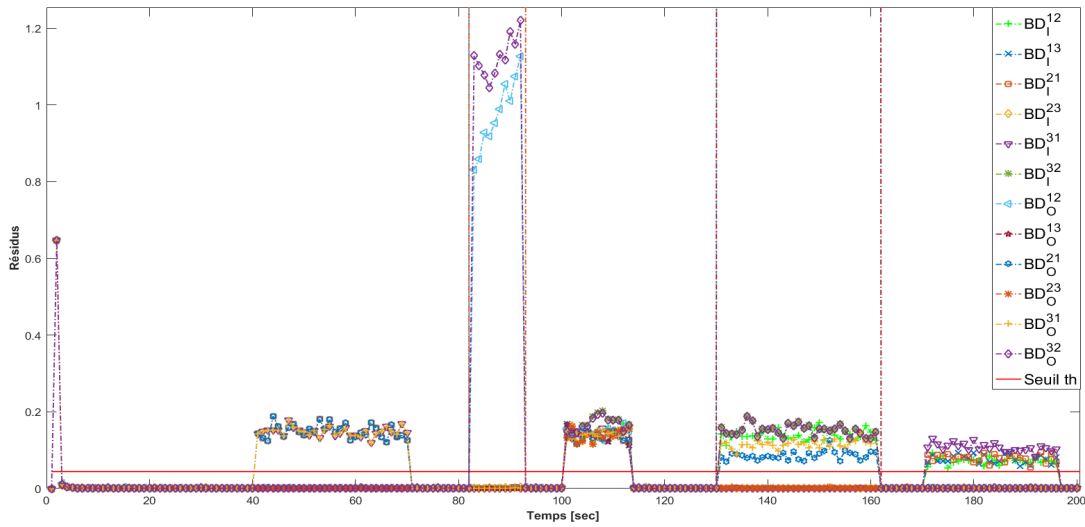


FIGURE 4.41 – Ensemble de résidus BD_I^{ji} et BD_O^{ji} pour la simulation d'un système multi-robot

- $k \in [100 \ 112]$: BD_O^{12} , BD_I^{12} , BD_O^{13} , BD_I^{13} , BD_O^{23} , BD_I^{23} , BD_O^{31} , BD_I^{31} , BD_O^{32} , BD_I^{32} , BD_O^{21} , BD_I^{21} .
- $k \in [130 \ 160]$: BD_O^{12} , BD_I^{12} , BD_O^{13} , BD_I^{13} , BD_O^{23} , BD_I^{23} , BD_O^{31} , BD_I^{31} , BD_O^{32} , BD_I^{32} , BD_O^{21} , BD_I^{21} .
- $k \in [170 \ 195]$: BD_I^{12} , BD_I^{13} , BD_I^{31} , BD_I^{21} , BD_1 .

À chaque temps d'échantillonnage, un vecteur de signatures de défauts est construit, contenant les valeurs normalisées des résidus (0 dans le cas où le résidu n'est pas affecté par un défaut et 1 s'il est affecté). Ce vecteur est ensuite comparé aux colonnes de la matrice d'incidence donnée par les tableaux 4.3 et 4.4. Si une correspondance est trouvée, le composant correspondant est déclaré défaillant.

Dans le cas où un capteur est défaillant, sa mesure est exclue de la procédure de fusion. À titre d'exemple l'intervalle $k \in [100 \ 112]$, tous les capteurs mesurant les distances et les orientations de chaque robot par rapport à l'autre, sont déclarés défaillants. Leurs mesures sont donc exclues de la procédure de fusion (étape de mise à jour du filtre informationnel principal). Les trois robots dans ce cas se basent sur la navigation à l'estime en utilisant l'odométrie. Dans le cas où des odomètres sont défaillants, comme par exemple l'intervalle $k \in [82, 91]$ avec les odomètres du robot 2, le filtre secondaire est utilisé à la place du filtre principal (navigation à l'estime en se basant sur les données de la commande développée). Il est important de mentionner, que la navigation à l'estime n'est pas fiable. Cependant, on se fie à cette méthode pour une courte durée, le temps d'avoir une mesure fiable pour corriger la divergence due à l'accumulation d'erreurs de cette méthode. Le défaut actionneur n'est pas exclu, mais juste localisé. En effet, aucune stratégie de commande tolérante aux fautes n'est adoptée pour cette application, y compris la perte d'efficacité partielle des actionneurs.

La figure 4.44 montre la navigation du système multi-robot, avant et après l'utilisation de la couche de diagnostic informationnel.

D'après la figure 4.44, on peut observer qu'une fois le défaut exclu il n'affecte plus le suivi de trajectoire. En effet, pour que la commande atteigne son objectif, elle a besoin d'une estimation d'état fiable et précise. On peut aussi observer l'absence d'un régime

4.5. APPLICATION À UN SYSTÈME MULTI-ROBOTS EN SE BASANT SUR LA DIVERGENCE DE BHATTACHARYYA

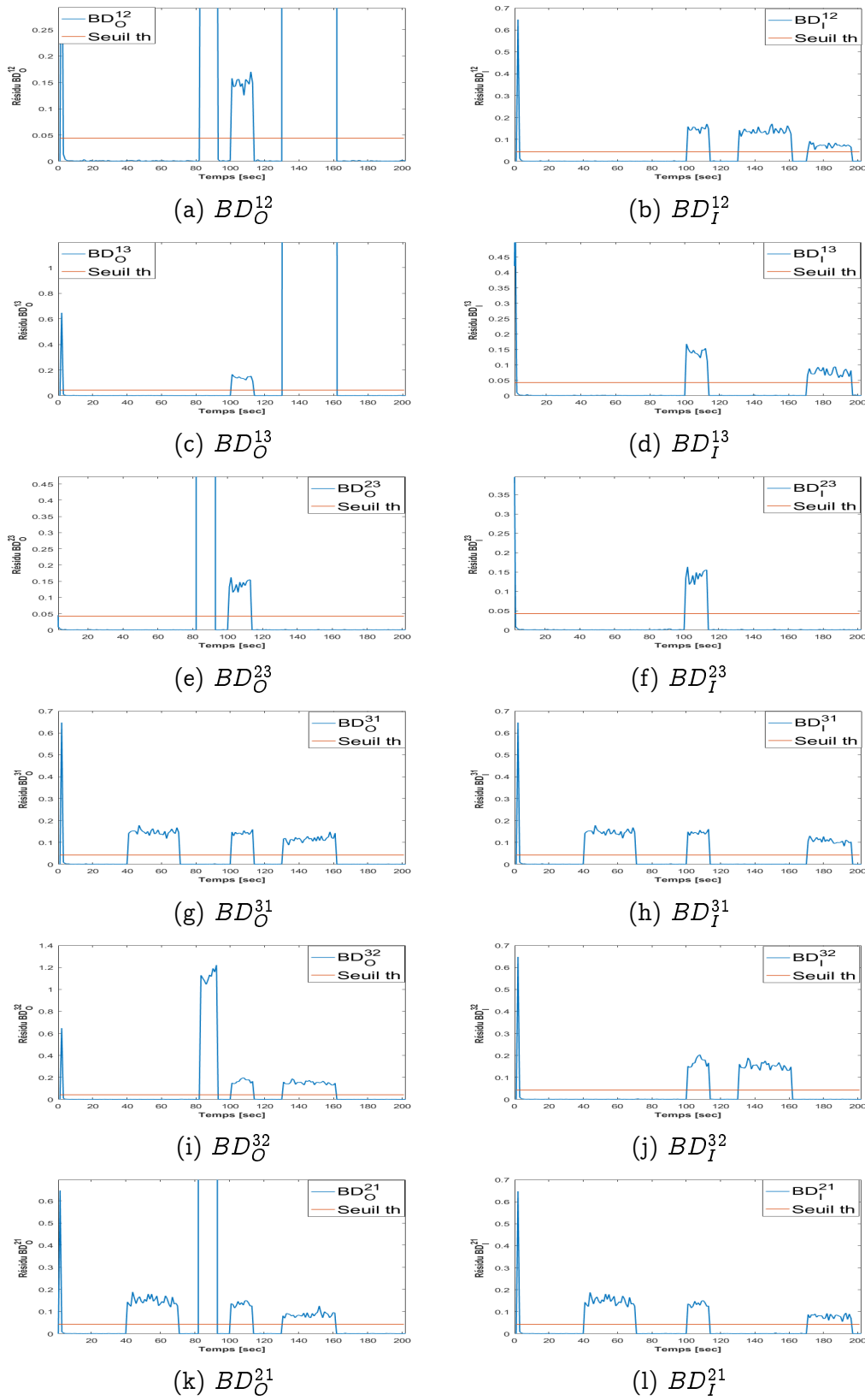


FIGURE 4.42 – Résidus BD_I^{ji} et BD_O^{ji} pour la simulation d'un système multi-robots

4.5. APPLICATION À UN SYSTÈME MULTI-ROBOTS EN SE BASANT SUR LA DIVERGENCE DE BHATTACHARYYA

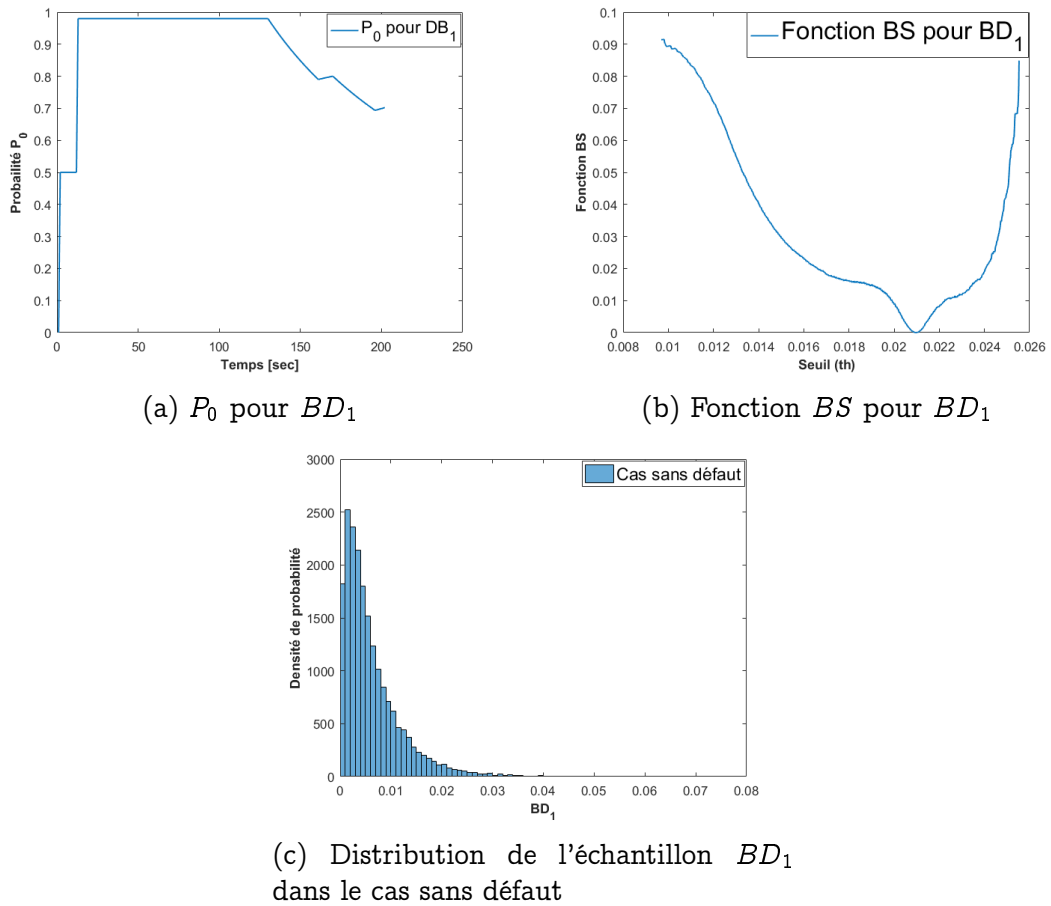


FIGURE 4.43 – Calcul du seuil pour le résidu BD_1

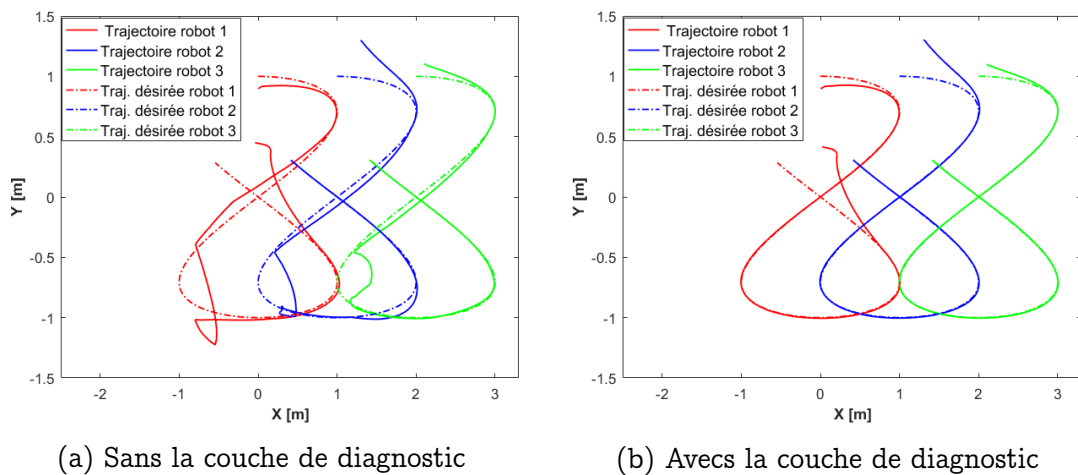


FIGURE 4.44 – Navigation du système multi-robots avec et sans la couche de diagnostic

transitoire après l'exclusion d'un défaut. Cela est justifié par le fait que la couche de diagnostic est exécutée dans une boucle interne au sein de la boucle générale de la commande. À l'instant d'échantillonnage k , si un défaut est détecté, ses contributions informationnelles sont enlevées avant le passage à l'instant $k + 1$. Il faut noter que certaines hypothèses doivent être considérées (e.g. une faible vitesse des robots). On peut aussi observer, que le défaut actionneur n'est pas compensé, et que le robot 1 diverge de sa trajectoire. Cette divergence n'est pas due à une mauvaise estimation, mais à une perte d'efficacité des actionneurs du robot. Comme il a été mentionné avant, aucune stratégie de commande tolérante aux fautes n'est adoptée pour des RMD2R. Afin d'assurer la sécurité de la navigation, en cas de défaut actionneurs, le robot est juste arrêté, et une information sur sa position est envoyée à un opérateur humain.

4.5.4 Résultats de l'application en temps réel pour un système multi-robot

Dans cette section, l'algorithme de l'approche proposée est implémenté sur un système multi-robots composé de trois Turtlebot3 (figure 4.45). Afin de ne pas répéter toutes les étapes et résultats de la section 4.5.3, seuls les résultats importants sont discutés.

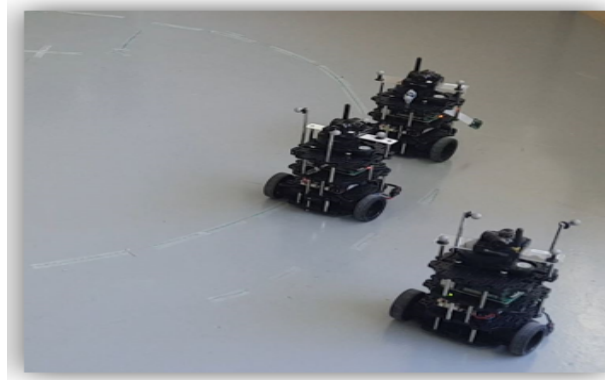


FIGURE 4.45 – Système multi-robots (trois Turtlebot3)

En plus des encodeurs et des gyroscopes, chaque Turtlebot3 utilise le système Optitrack pour calculer la distance et l'orientation des deux autres robots par rapport à son repère.

Les trajectoires désirées pour les trois robots sont données comme suit :

- Robot 1 : $x_r = \sin(0.1 t)$ et $y_r = \cos(0.1 t) - 1$.
- Robot 2 : $x_r = \sin(0.1 t) + 0.202$ et $y_r = \cos(0.1 t) - 0.432$.
- Robot 3 : $x_r = \sin(0.1 t) + 0.176$ et $y_r = \cos(0.1 t) + 0.342$.

Les gains de la commande (équation 2.85) pour chaque robot i sont : $\alpha_1^i = 2$ et $\alpha_2^i = 1$. La figure 4.46 montre les signaux de commandes v_c^i (vitesse linéaire) et ω_c^i (vitesse angulaire) pour chaque robot i . La figure 4.47 montre le suivi de trajectoire des trois robots dans le cas idéal (sans défaut).

Pour différents instants d'échantillonnage k , des défauts capteurs et actionneurs sont introduits en forme de biais comme suit :

- $k \in [40 \ 69]$: défaut capteur de distance du robot 3.
- $k \in [200 \ 250]$: défaut des actionneurs du robot 3.

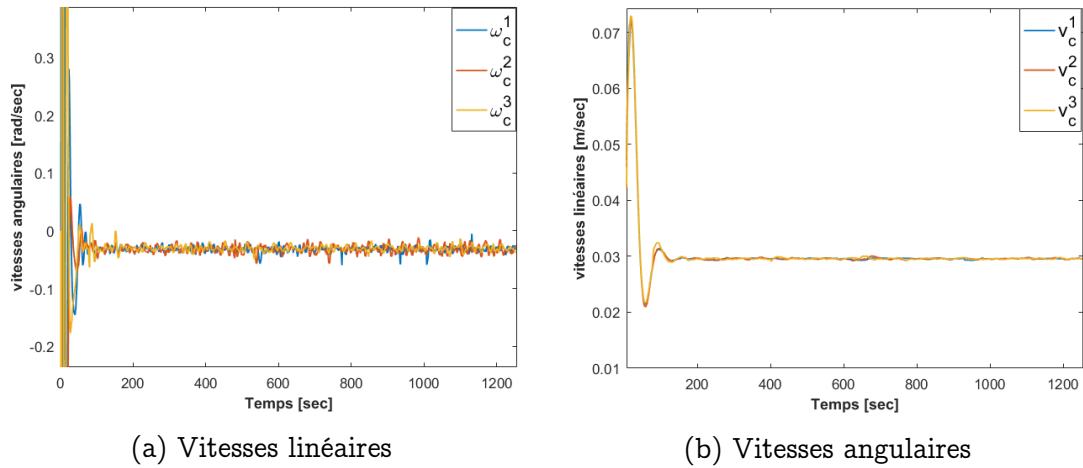


FIGURE 4.46 – Signaux de commande pour le système multi-robots réel

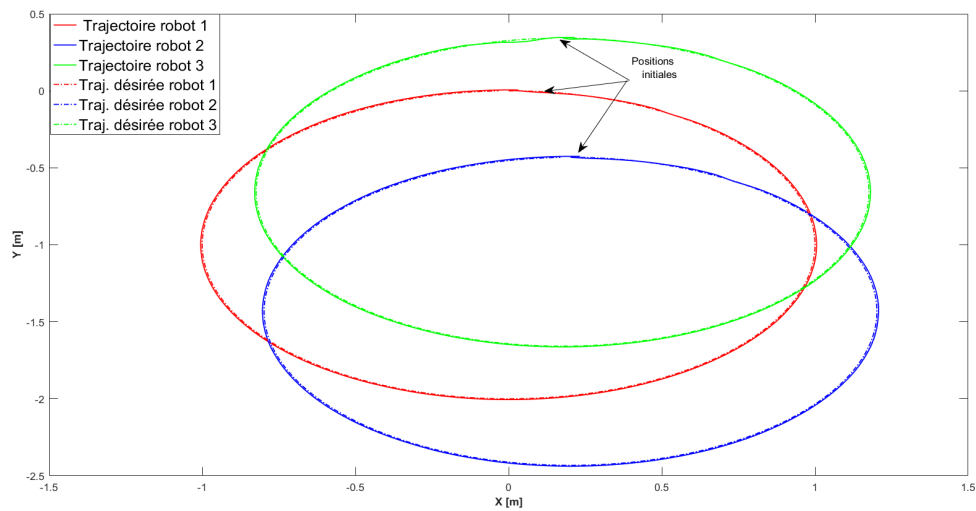


FIGURE 4.47 – Suivi de trajectoire du système multi-robots réel

— $k \in [500 \ 530]$: défaut des odomètres du robot 2.

Les résidus globaux GBD_O et GBD_I sont montrés par la figure 4.48 , les résidus BD_i par la figure 4.49 et les résidus $BD_I^{j^i}/BD_I^{j^i}$ par la figure 4.50.

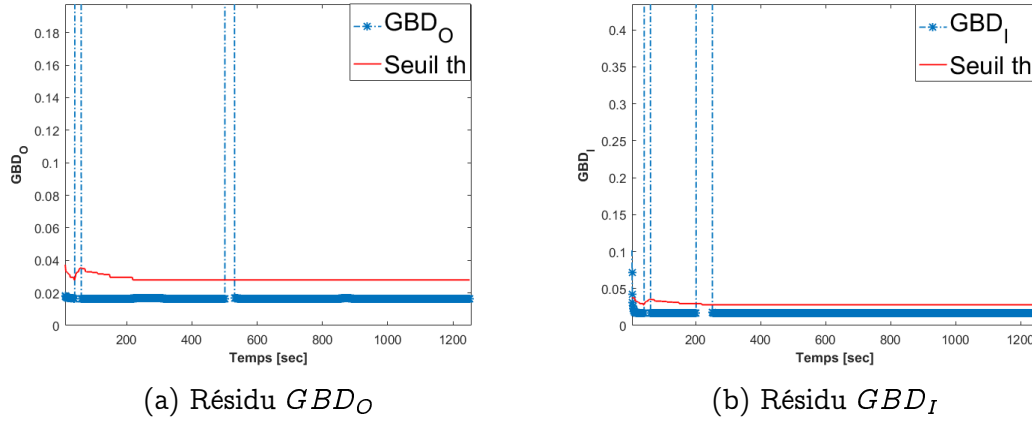


FIGURE 4.48 – Résidus globaux pour le système multi-robots réel

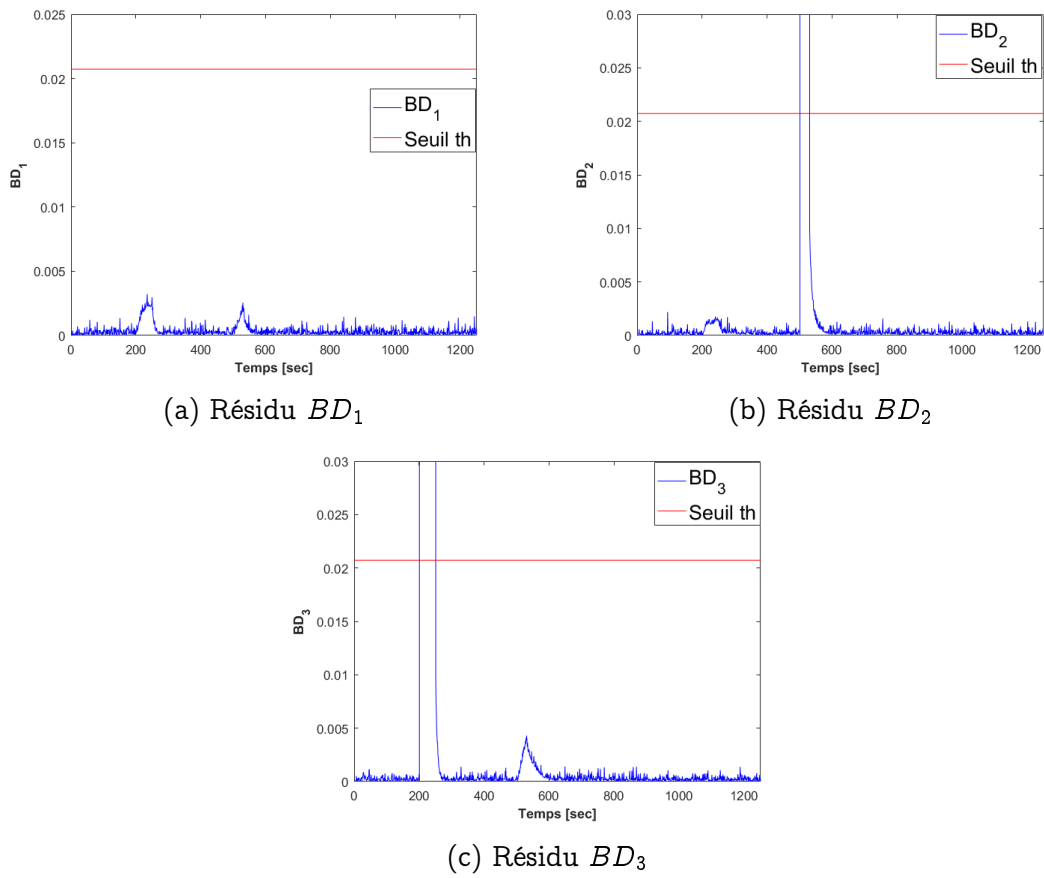
On observe que pour le premier intervalle, les résidus sensibles (dont la valeur dépasse la valeur du seuil) sont : GBD_O , GBD_I , BD_O^{13} , BD_I^{13} , BD_O^{23} et BD_I^{23} . Le vecteur de signature est donc $v = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$. En comparant ce vecteur avec les colonnes de la matrice de signatures de défauts donnée par les tableaux 4.3 et 4.2, on peut déduire que le composant défaillant est le système Optitrack utilisé par le robot 3. De la même façon, on peut localiser le défaut des actionneurs du robot 3 pour le deuxième intervalle, et le défaut des odomètres du robot 2 pour le troisième intervalle.

Une fois le défaut Optitrack est localisé, il est exclu de la procédure de fusion. Le défaut encodeurs mène au changement du filtre principal (passage au filtre secondaire). Le défaut actionneur n'est pas compensé mais une alarme est générée. La figure 4.51 montre la navigation du système multi-robots avant et après l'exclusion des défauts.

Il est à noter que pour l'évaluation des résidus basés sur la divergence de Bhattacharyya, une étude similaire que celle présentée dans la section précédente est à faire. Les distributions de chaque résidu dans le cas "avec" et "sans" défaut doivent être générées, et le critère de Bhattacharyya correspondant au seuil optimal doit être obtenu à partir de l'algorithme 3. La figure 4.52 montre les histogrammes normalisés des distributions de tous ces résidus dans le cas sans défaut. La figure 4.52f montre un exemple de distributions d'un résidu BD_i dans le cas avec et sans défaut. Le seuil est balayé sur le support de ces deux distributions, et celui qui minimise la fonction BS est choisi comme seuil optimal.

4.6 Application sur des robots RMD4R

Pour cette section, on s'intéresse au Robotnik (figure 4.6), qui est un robot mobile différentiel avec quatre roues motrices non-directrices. L'algorithme de l'approche proposée est exactement le même que celui proposé dans la section 4.4.4. Il est donc

FIGURE 4.49 – Résidus BD_i pour le système multi-robots réel

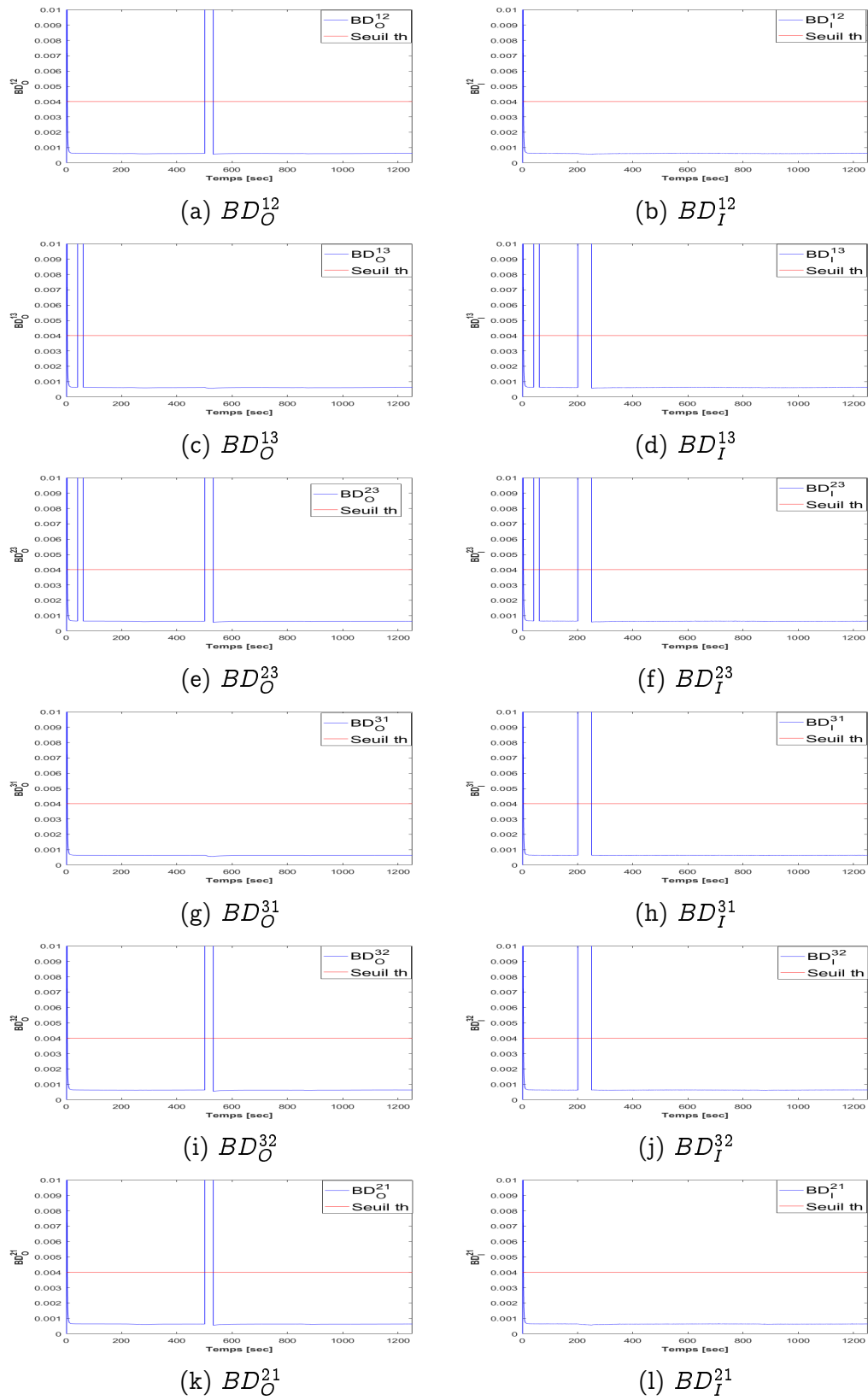


FIGURE 4.50 – Résidus BD_I^{ji} et BD_O^{ji} pour le scénario de défauts du système multi-robots réel

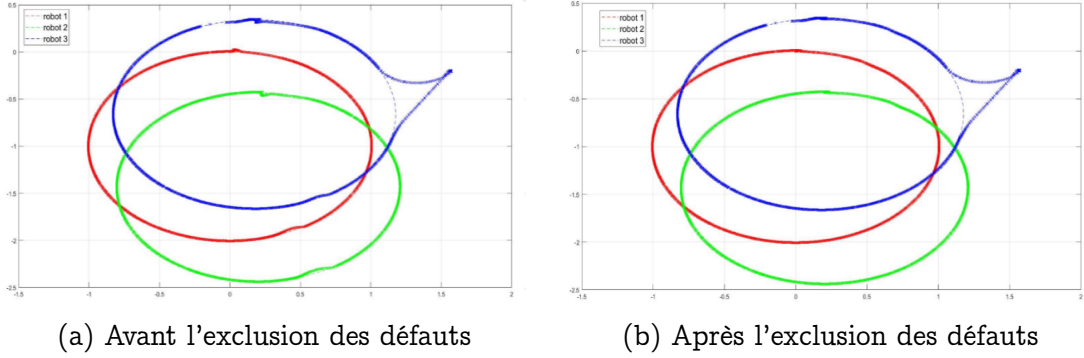


FIGURE 4.51 – Navigation du système multi-robots avant et après l'exclusion des défauts

inutile de remonter tous les résultats de la couche de diagnostic. Néanmoins, on s'intéresse à la redondance des actionneurs apportée par ce type de robot, et à la commande dynamique par mode glissant (standard et proposée).

Les deux commandes par modes glissants sont simulées, par contre l'approche de diagnostic informationnel est appliquée sur le Robotnik réel (identique au Turtlebot3).

4.6.1 Simulation de la commande par mode glissant classique

La trajectoire à suivre est circulaire et donnée par les équations suivantes : $x_r = \sin(0.1 t)$ et $y_r = \cos(0.1 t)$. Les gains de la commande cinématique (équation 2.85) sont : $\alpha_1 = 6$ et $\alpha_2 = 9$. Les gains de la commande dynamique (équation 2.106) sont : $P_1 = \text{diag}(0.1, 0.1)$, $P_2 = \text{diag}(12, 12)$ et $P_3 = \text{diag}(1, 1)$.

Les paramètres du Robotnik utilisés pour la simulation du modèle dynamique (section 2.2.2) sont : $J = 6.125 \text{ kg.m}^2$, $m = 40.1 \text{ kg}$, $d = 0.2 \text{ m}$, $a = 0.2 \text{ m}$; $b = 0.6 \text{ m}$, $l = 0.4 \text{ m}$ et $r = 0.15 \text{ m}$.

La figure 4.53a montre la trajectoire du robot en appliquant la commande par modes glissants définie par l'équation 2.106. Les figures 4.53c et 4.53d représentent les signaux générés par la commande cinématique (vitesse linéaire et vitesse angulaire du robot). La figure 4.53b montre les couples générés par les quatre actionneurs du robot.

La commande par modes glissants est appréciée pour sa robustesse intrinsèque contre les perturbations externes. Afin de tester cela, une perturbation bornée en forme de biais $\Lambda = [2.9, 2.9]^T$ (voir équation 2.38), est ajoutée entre le temps d'échantillonnage $k = 201$ et $k = 299$. La figure 4.54 montre le suivi de trajectoire du robot et les couples générés sous l'influence de cette perturbation.

La stabilité du système est effectivement assurée avec la commande SMC. On peut observer que l'effet sur la trajectoire du robot est complètement caché au niveau de l'état du système (position du robot). Par contre, à partir de la figure 4.54b, on peut voir l'influence de la perturbation sur les signaux de commande. Cette compensation est due au terme $P_3 \text{sign}(S)$ de la loi de commande. Les gains de la diagonale de P_3 détermine un intervalle où une région où le système devient insensible aux divergences par rapport à la surface de glissement. Théoriquement, fixer P_3 à l'infini, revient à dire que le système devient complètement robuste contre toutes les perturbations, peu

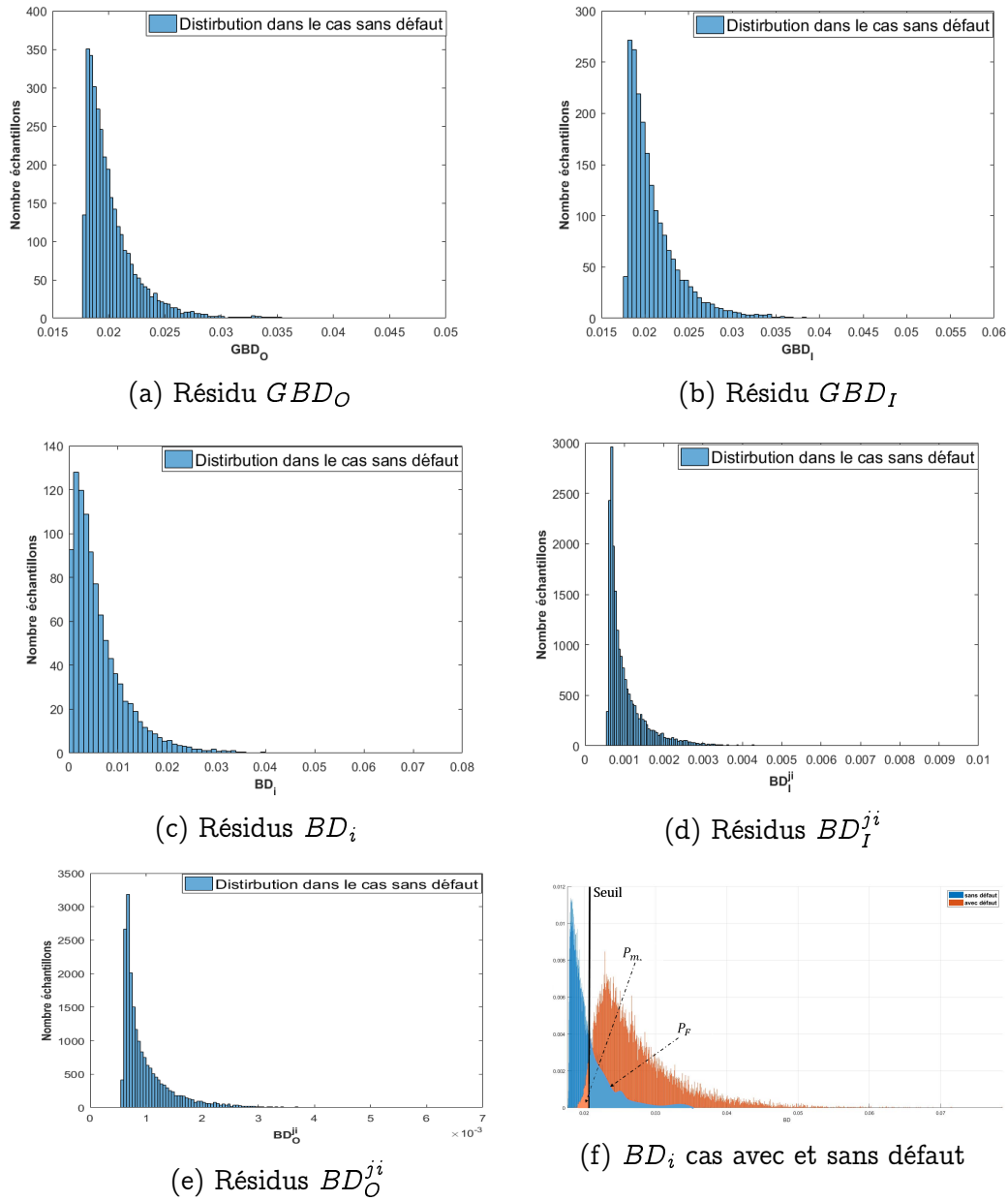
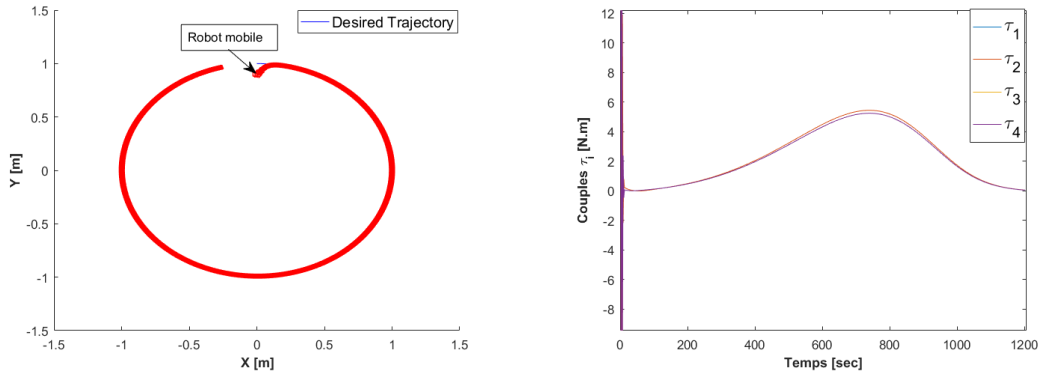
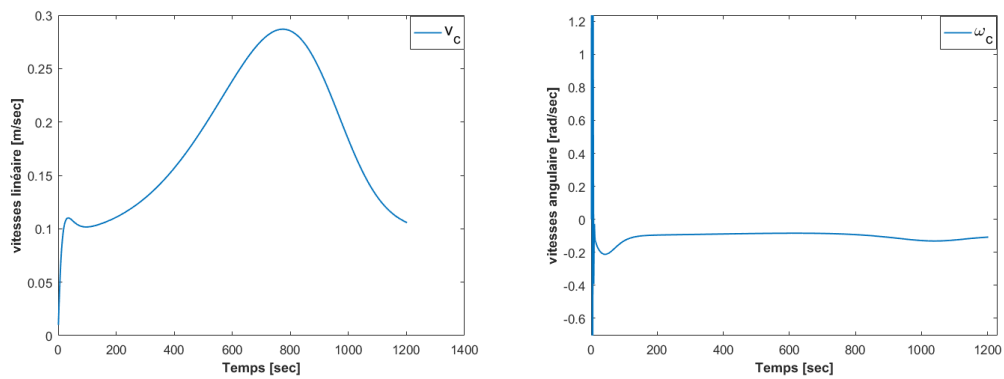


FIGURE 4.52 – Distribution des différents résidus



(a) Trajectoire du robot avec la SMC

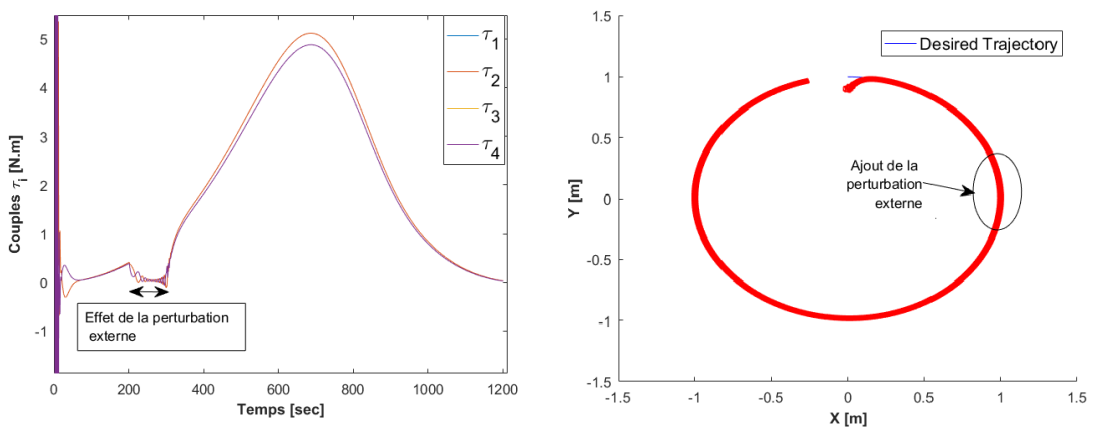
(b) Couples générés par le robot



(c) Vitesse linéaire du robot

(d) Vitesse angulaire du robot

FIGURE 4.53 – Commande par modes glissants classique



(a) Couples générés

(b) Trajectoire du robot

FIGURE 4.54 – Commande par mode glissant classique avec une perturbation bornée en forme de biais

importe leurs amplitudes. Néanmoins, il faut prendre en considération les capacités des actionneurs afin d'éviter les saturations.

4.6.2 Simulation de la commande par mode glissants proposée

Il est clair que la commande par mode glissant proposée par l'équation 2.106 assure une robustesse contre les perturbations externes et les variations des paramètres, tant que ces perturbations bornées ne font pas diverger les trajectoires du système au delà de la région de robustesse imposée par la loi de commande. Néanmoins, une telle hypothèse sur l'uniformité de la borne des perturbations peut s'avérer forte. On a démontré via les méthodes de Lyapunov qu'une perturbation qui prend la forme définie par l'équation 2.39 fait diverger le système commandée par une SMC classique. Cette perturbation $\bar{\Lambda}$ (pas forcément bornée d'une manière uniforme) est proportionnelle à la surface de glissement et à la racine puissance $\frac{1}{\rho^3}$. La figure 4.55 montre l'effet de cette perturbation, et cela pour les deux commandes classiques et proposée.

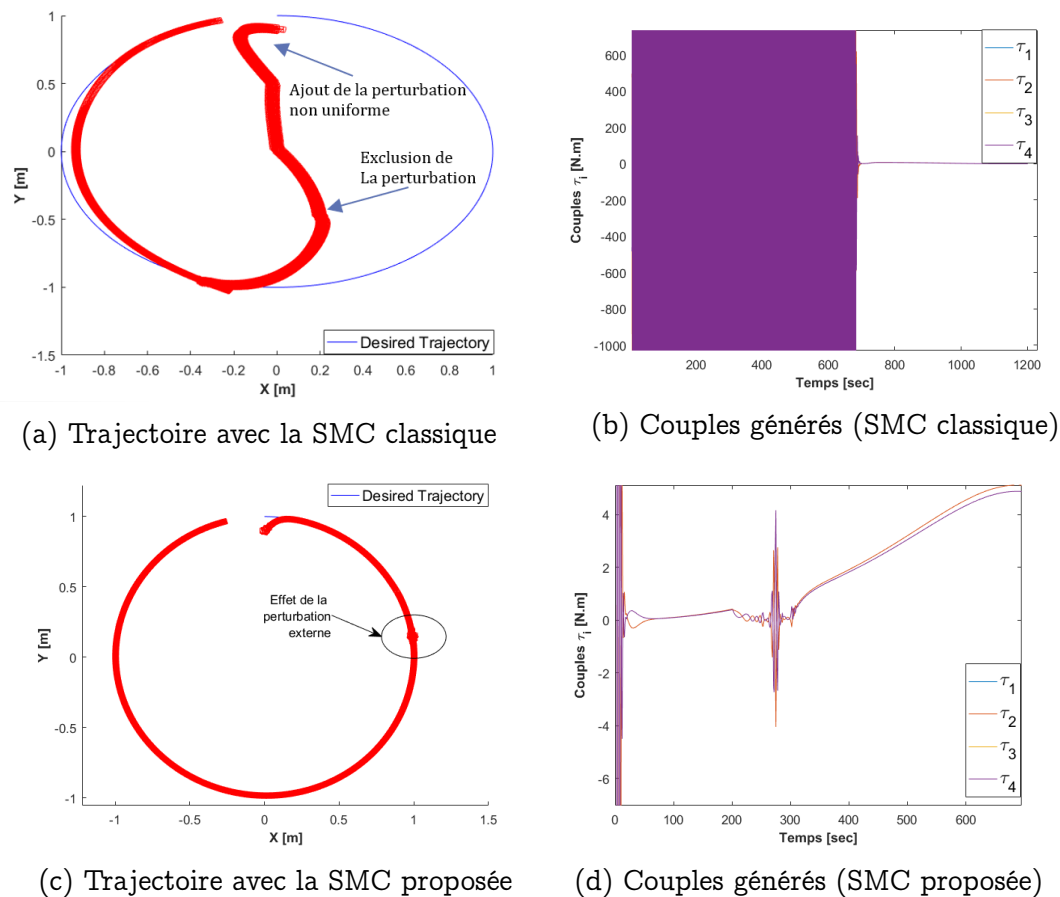


FIGURE 4.55 – Application d'une perturbation non-bornée d'une manière uniforme aux deux SMC

Il est clair qu'une perturbation de cette forme fait diverger la commande par modes glissants classique, alors que la commande SMC proposée a pu compenser et s'adapter à

la forme de la perturbation. Il est toutefois important de souligner la forme des courbes des couples générés par la commande proposée. En effet, les efforts appliqués sont assez brusques et une étude des capacités des actionneurs à supporter ces variations de couples doit être étudiée. Il est aussi important de choisir des gains optimaux pour la commande, chose qui n'est pas facile. Le tâtonnement de la commande dynamique s'est fait d'une manière heuristique, et il n'y a aucune garantie que les gains choisis soient optimaux.

4.6.3 Simulation de l'approche de diagnostic pour un RMD4R

L'application de l'approche de diagnostic informationnel pour la navigation d'un RMD4R est identique à celle du RMD2R (section 4.4.4). Cependant, pour les RMD2R, les défauts actionneurs sont juste détectés d'une manière globale, sans pour autant déterminer quel actionneur parmi les deux est défaillant, et donc aucune action n'a été prise pour une compensation. Dans cette section, on s'intéresse à la localisation de l'actionneur i défaillant, et à l'étude du comportement de la commande par modes glissants proposée en cas d'exclusion d'un actionneur.

D'après la figure 4.56, une fois l'approche de diagnostic informationnel appliquée, les défauts capteurs sont localisés et leurs mesures sont exclues de la procédure de fusion au sein du filtre informationnel étendu principal. D'autre part, si un défaut actionneur est détecté, un banc de filtres informationnels étendus supplémentaire EIF_R^i est développé. Chaque filtre i est utilisé pour estimer la vitesse de la roue i . Le modèle dynamique de la roue i proposé par l'équation 2.36 est utilisé comme modèle d'évolution, alors que les données encodeurs de chaque roue sont utilisées dans l'étape de mise à jour.

Développement du filtre informationnel

Afin d'estimer la vitesse de chaque roue i , quatre filtres informationnels (EIF_R^i) sont développés.

Étape de prédiction :

Le modèle d'évolution de la vitesse de chaque roue i est donné par l'équation 2.36. En utilisant l'approximation d'Euler, on obtient l'équation suivante :

$$(\omega_i)_k = \left(1 - \frac{T_e C_{ri}}{J_i}\right)(\omega_i)_{k-1} + \frac{T_e}{J_i}((\tau_i)_k - r F_{ri,k}) + \epsilon_{ik} \quad (4.74)$$

Les paramètres de l'équation 4.74 sont définis dans la section 2.2.4. ϵ_i est un bruit blanc gaussien associé au modèle d'évolution avec une variance σ_i^2 .

La covariance a priori ($p_{k/k-1}^i$) de l'erreur d'estimation de la vitesse de la roue i est donnée par l'équation suivante :

$$p_{k/k-1}^i = \left(1 - \frac{T_e C_{ri}}{J_i}\right)^2 p_{k-1/k-1}^i + \sigma_{ik}^2 \quad (4.75)$$

La moyenne informationnelle $y_{ik/k-1}$ et la covariance informationnelle $Y_{ik+1/k}$ de l'étape de prédiction sont obtenus comme suit :

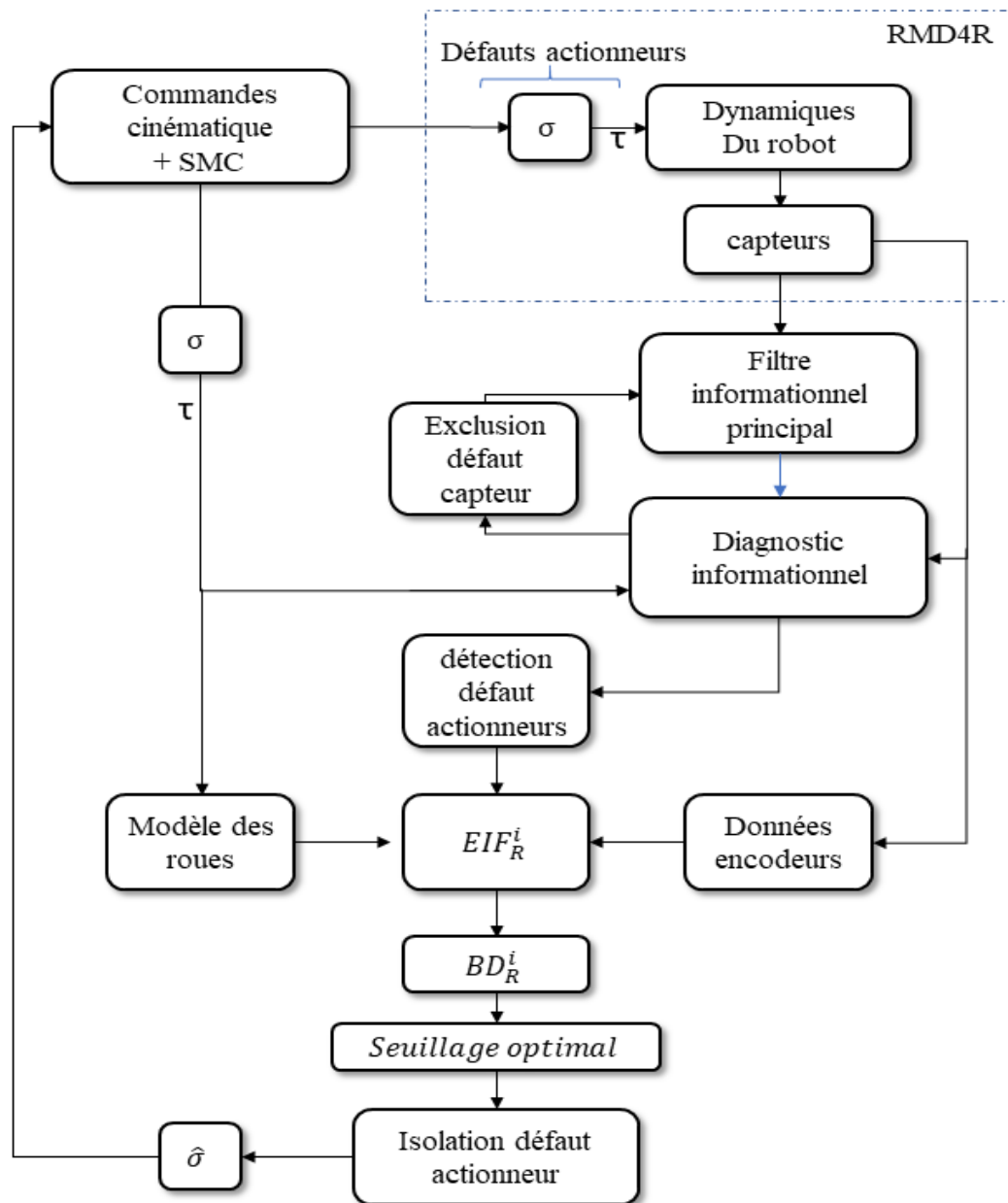


FIGURE 4.56 – Approche informationnelle pour le diagnostic de défauts capteurs et actionneurs pour un RMD4R

$$Y_{i_k/k-1} = \frac{1}{p_{k/k-1}^i} \quad (4.76)$$

$$y_{i_k/k-1} = Y_{i_k/k-1}(\omega_i)_{k/k-1} \quad (4.77)$$

Étape de mise à jour :

Dans l'étape de mise à jour, les mesures des encodeurs sont utilisées pour corriger l'estimation des vitesses des roues. Considérons qu'un encodeur i contient un nombre N_{bi} de changement d'état (code grey), et supposons que l'encodeur détecte N_{ci} changements d'état. Le nombre de révolutions N_{ri} de la roue i est donc donnée par l'équation suivante :

$$N_{ri} = \frac{N_{ci}}{N_{bi}} \quad (4.78)$$

La distance D_{ri} parcourue par une roue i de rayon r est obtenue comme suit :

$$D_{ri} = N_{ri} \times 2\pi r \quad (4.79)$$

Pour un court temps d'échantillonnage T_e , la vitesse angulaire moyenne de la roue i est donnée par l'équation suivante :

$$\omega_{ik} = \frac{D_{ri}}{r \times T_e} \quad (4.80)$$

Par conséquent, le modèle d'observation pour l'étape de mise à jour pour la roue i est donné comme suit :

$$N_{ri_k} = \frac{N_{bi_k} \times T_e}{N_{ci_k} 2\pi} \omega_{i_k/k-1} + \bar{\epsilon}_{i_k} \quad (4.81)$$

où $\bar{\epsilon}_i$ est un bruit blanc gaussien associé au modèle d'observation avec une variance $\bar{\sigma}_i^2$.

La moyenne et la covariance informationnelles corrigées sont données par les deux équations suivantes :

$$Y_{i_k/k} = Y_{i_k/k-1} + \left(\frac{N_{bi_k} \times T_e}{N_{ci_k} 2\pi} \right)^2 (\bar{\sigma}_{i_k}^2)^{-1} \quad (4.82)$$

$$y_{i_k/k} = y_{i_k/k-1} + \frac{N_{bi_k} \times T_e}{N_{ci_k} 2\pi} (\bar{\sigma}_{i_k}^2)^{-1} N_{ri_k} \quad (4.83)$$

Et les moyennes des vitesses des roues sont obtenues comme suit :

$$\omega_{i_k/k} = \left(Y_{i_k/k} \right)^{-1} y_{i_k/k} \quad (4.84)$$

Génération de résidus informationnels

En calculant la divergence de Bhattacharyya entre la distribution *a priori* et la distribution *a posteriori* de chaque filtre EIF_R^i , les résidus BD_R^i pour chaque roue i sont donnés par l'équation suivante :

$$BD_R^i = \frac{1}{8}(\omega_{ik/k} - \omega_{ik/k-1})^2 \bar{Y}_i^r + \frac{1}{2} \log \left(\frac{\det(\bar{Y}_i^r)^{-1}}{\sqrt{(\det(Y_{ik/k-1})^{-1})(\det(Y_{ik/k})^{-1})}} \right) \quad (4.85)$$

Estimation de σ

L'estimation de la matrice d'efficacité des actionneurs ($\hat{\sigma}$) est donnée par la matrice suivante :

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\sigma}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\sigma}_4 \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

où $\hat{\sigma}_i$ est l'estimation de l'efficacité de l'actionneur i , avec $\hat{\sigma}_i = 1$ si l'actionneur fonctionne parfaitement et $\hat{\sigma}_i = 0$ si l'actionneur perd de son efficacité.

Étant donné un résidu informationnel BD_R^i associé au filtre informationnel de la roue i et évalué par comparaison avec un seuil th^i . L'estimation de l'efficacité $\hat{\sigma}_i$ de l'actionneur i , est donnée comme suit :

$$\text{Si } BD_R^i > th^i \text{ alors } \hat{\sigma}_i = 0 \text{ sinon } \hat{\sigma}_i = 1 \quad (4.87)$$

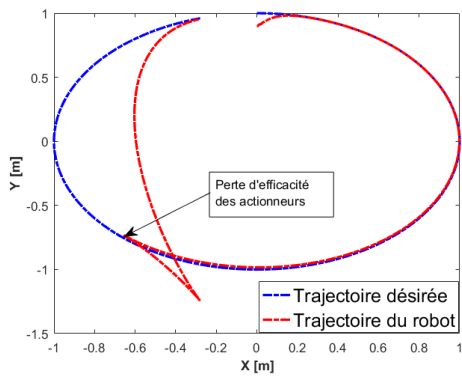
Résultats de la simulation

Pour la simulation, à partir de l'instant $k = 800$, les deux actionneurs 1 et 3 perdent leurs efficacités. Cela est faisable en mettant $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$. La figure 4.57d montre les résidus BD_R^i obtenus. À partir de l'équation 4.87, $\hat{\sigma}$ peut être obtenu ($\hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma}_3 = 0$). La loi de commande (équation 2.122) prend en considération cette information, et ré-alloue les commandes pour les quatre actionneurs.

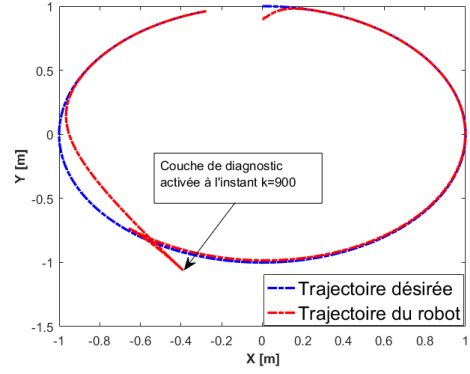
Deux hypothèses sont prises en compte :

- Le système est toujours commandable, en d'autres termes, la relation de l'équation 2.41 doit toujours être satisfaite. La figure 4.57e montre les résultats dans le cas où deux actionneurs du même côté sont défaillants. Cela implique logiquement une perte de la stabilité du système, et le robot n'arrive plus à suivre sa trajectoire désirée.
- Le robot mobile différentiel est de type (2,0) (THUILOT, 1995), et en cas d'exclusion d'un ou deux actionneurs, il le reste tant qu'il est commandable. Par conséquent, une reconfiguration structurelle du modèle du robot n'est pas nécessaire pour une réallocation des signaux de commande.

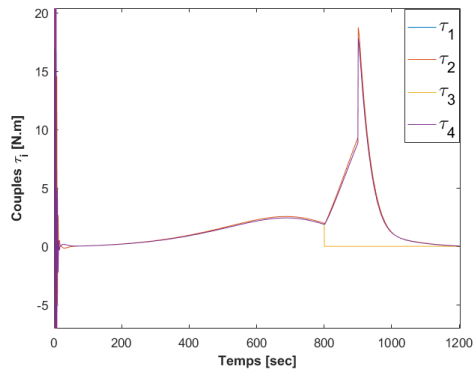
Les figures 4.57a et 4.57b montrent respectivement le suivi de trajectoire du robot avant et après l'exclusion des actionneurs défaillants. Sachant que l'approche de diagnostic proposée est activée à l'instant $k = 900$, la figure 4.57c montre les couples générés après la réallocation des signaux de commande.



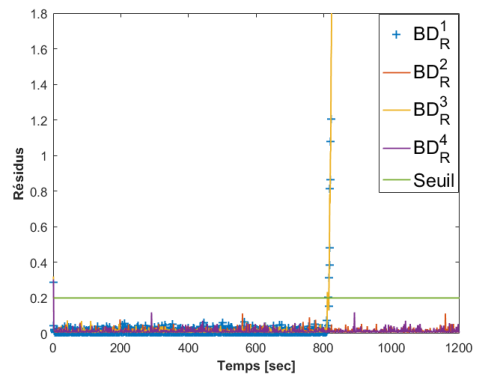
(a) Trajectoire sans couche de diagnostic



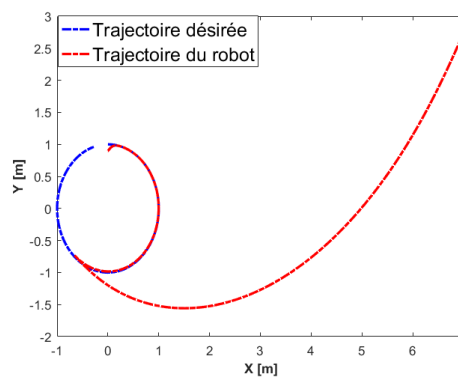
(b) Trajectoire après l'activation du diagnostic



(c) Couples générés après l'activation du diagnostic



(d) Résidus



(e) Perte de commandabilité du système

FIGURE 4.57 – Localisation et exclusion des défauts actionneurs

4.7 Conclusion

En se basant sur les notions théoriques vues dans les trois premiers chapitres, une approche informationnelle pour le diagnostic des défauts capteurs et actionneurs pour les systèmes robotiques mobiles, a été proposée. L'approche proposée se base sur le développement de deux filtres informationnels étendus avec deux modèles d'évolutions différents. Le premier modèle se base sur les signaux de commandes alors que le deuxième est obtenu à partir des mesures encodeurs. Pour la détection des défauts, deux résidus informationnels ont été conçus en se basant sur des divergences issues de la théorie de l'information. On s'est particulièrement intéressé aux divergences de Bhattacharyya et de Kullback-Leibler. La décision sur la présence d'un défaut est prise à travers une évaluation de ces deux résidus, en se basant sur des méthodes statistiques, où un critère minimisant une fonction coût a été adopté. Pour la localisation des défauts, différents bancs de filtres informationnels ont été développés, en prenant en considération la totalité des informations issues de la boucle de commande. Une comparaison avec une matrice de signatures de défauts connue a priori, permet d'isoler et de localiser le défaut. Une fois le défaut localisé, on a opté pour une stratégie d'exclusion, pour assurer une navigation précise et fiable du système robotique mobile.

Pour la validation de l'approche, diverses simulations et applications ont été proposées. Nous avons commencé par simuler et appliquer la méthode sur un seul robot mobile à deux roues (robot réel en temps réel), en se basant sur la divergence de Kullback-Leibler. Nous avons ensuite simulé et appliqué l'approche en temps réel sur un système multi-robots se composant de trois Turtlebot3, en se basant sur la divergence de Bhattacharyya et en déterminant le critère optimal pour le seuillage. Comme dernière application, un mélange de données réelles et de simulations a été proposé pour valider l'approche sur un robot mobile différentiel à quatre roues. Nous avons ainsi testé l'applicabilité des commandes par modes glissants développées avec l'exclusion des défauts actionneurs.

Conclusion et Perspectives

5.1 Conclusion

Dans cette thèse, nous avons traité le problème de la navigation autonome tolérante aux défauts capteurs et actionneurs pour les systèmes robotiques mobiles à entraînement différentiel. Nous avons commencé par introduire la navigation autonome. La navigation autonome des systèmes robotiques mobiles comporte trois fonctions : la localisation, la planification de trajectoire et la commande du mouvement. Des algorithmes efficaces et robustes d'estimation et de commande doivent être conçus et implantés pour garantir une navigation autonome précise en toute situation, et en particulier en présence de perturbations externes et/ou de défauts affectant les capteurs et les actionneurs. Cela nous a mené à ajouter une couche de diagnostic pour détecter et localiser les défauts capteurs et actionneurs, et à adopter une commande robuste par modes glissants pour compenser les perturbations externes affectant le système. Pour l'estimation d'état, nous avons opté pour la forme canonique du filtre de Kalman, appelée le filtre informationnel, qui est un observateur à entrées inconnues très utilisé pour l'estimation d'état et la fusion de données en robotique mobile. Pour la couche de diagnostic, nous avons proposé une méthode de diagnostic à base de modèle pour la génération de résidus. Le résidu est généré en comparant les estimations *a priori* et *a posteriori* du filtre informationnel. Ces estimations étant des distributions gaussiennes, nous avons opté pour une approche informationnelle pour la génération des résidus, en prenant en compte toute les informations des distributions, en particulier les covariances et pas seulement les moyennes. Pour cela, nous avons utilisé des outils de la théorie de l'information, appelés des divergences, qui ont la capacité de calculer la similarité ou la dissemblance entre deux distributions de probabilité. Nous nous sommes intéressés aux divergences de Kullback-Leibler et de Bhattacharyya et nous avons proposé une étude statistique pour obtenir la distribution de l'échantillon du résidu dans le cas "avec" et "sans" défaut. Le résidu développé est plus robuste vis à vis des incertitudes que le résidu classique basé sur la différence entre moyennes. Le résidu est comparé à un seuil optimal obtenu en dérivant un critère informationnel basé sur la divergence de Bhattacharyya et qui minimise une fonction coût. Dans le cas où un défaut est détecté, des bancs de filtres sont utilisés pour localiser le défaut en comparant le vecteur normalisé des résidus à une matrice de signatures de défauts connue *a priori*. Nous avons ensuite proposé une approche qui permet de détecter et de localiser les défauts capteurs et actionneurs ensemble sans utiliser de capteurs spé-

cifiques. En effet, nous avons développé deux filtres informationnels étendus avec deux modèles d'évolution, l'un basé sur les signaux de commande en boucle fermée et l'autre sur les mesures des encodeurs. Nous avons montré qu'en faisant ainsi, on augmente le nombre de résidus générés et on améliore la localisation des défauts. Nous avons aussi démontré qu'en utilisant deux modèles d'évolution pour les robots mobiles, plusieurs bancs de filtres peuvent être proposés, ce qui permet de différencier les défauts encodeurs et les défauts actionneurs. Nous avons ensuite proposé différentes applications et simulations pour illustrer l'utilisation des outils théoriques développés et en montrer les performances. Nous avons commencé par appliquer l'approche sur un seul robot mobile différentiel à deux roues, en utilisant la divergence de Kullback-Leibler, et nous avons montré l'efficacité de l'approche proposée par une simulation et une application en temps réel sur un robot Turtlebot3. Nous avons ensuite démontré l'évolutivité et l'adaptativité de notre algorithme en simulation et sur un système multi-robots, en utilisant la divergence de Bhattacharyya et le seuil optimal. Nous avons terminé avec une application/simulation pour un robot mobile différentiel à quatre roues. La partie diagnostic a été testée en temps réel. Les commandes par modes glissants avec exclusion des défauts actionneurs ont été validées en simulation.

5.2 Perspectives

Les résultats obtenus ont confirmé nos motivations pour le choix des outils théoriques utilisés, en particulier l'approche informationnelle, et de la stratégie de commande robuste aux perturbations externes et aux défauts capteurs et actionneurs. Néanmoins, certaines limitations que nous avons identifiées constituent des pistes pour des travaux futurs :

1. Dans l'approche proposée, $\hat{\sigma}$ prend deux valeurs normalisées 0 et 1, qui sont obtenus à partir des valeurs des résidus BD_R^i . Cela veut dire que uniquement deux états de l'actionneur sont traités (fonctionnement normal et perte totale de l'efficacité). Dans un travail futur, nous souhaitons nous orienter vers une estimation de la valeur réelle de $\hat{\sigma}$. Pour cela, nous envisageons d'utiliser un filtre informationnel à deux étages pour estimer à la fois l'état du système et le défaut actionneur. Dans la littérature, l'article (Q. ZHANG, 2018) propose un filtre de Kalman adaptatif à deux étages (voir annexe A.3). Nous comptons dériver sa forme informationnelle et l'adapter à notre approche.
2. Dans ce mémoire, nous n'avons pas traité la commande tolérante aux fautes active à proprement dit, même si une couche de diagnostic est présente et utilisée. En effet, aucune stratégie d'accommodation ni de reconfiguration n'a été adoptée. La tolérance de la commande aux défauts capteurs est réalisée grâce à l'exclusion du (des) capteur(s) défaillant(s) dans l'algorithme de fusion. Pour les défauts actionneurs, l'allocation des signaux de commandes se fait sur la base de la configuration des actionneurs fonctionnels, tout en prenant des hypothèses sur la commandabilité et le type du robot. La robustesse aux perturbations externes est réalisée en utilisant des commandes robustes. Nous comptons dans un travail futur, intégrer une loi de commande tolérante aux fautes active, en utilisant l'estimation du défaut actionneur obtenue avec le filtre de Kalman à deux étages. De cette façon, nous pourrions traiter la perte d'efficacité partielle des actionneurs, au lieu d'opter pour une stratégie d'exclusion.

3. Nous comptons aussi nous orienter vers l'identification des défauts capteurs, afin d'identifier l'amplitude de ces défauts et de les corriger sans aller jusqu'à une exclusion systématique de la procédure de fusion.
4. La commande par modes glissants est très intéressante pour sa robustesse intrinsèque contre les perturbations externes. Par contre, nous projetons d'utiliser une commande à modes glissants d'ordre supérieur pour supprimer l'effet "zigzag ou chattering" qui accompagne la SMC classique.
5. Afin de déterminer le seuil optimal, les distributions des résidus dans le cas avec et sans défaut doivent être connues a priori. Alors que la distribution sans défaut est facile à obtenir et à utiliser avec une simple hypothèse sur la stationnarité du signal, la distribution dans le cas avec défaut est souvent choisie heuristiquement, en prenant en considération une distribution qui englobe le plus grand nombre de défauts. Dans un travail futur, nous comptons déterminer cette distribution en temps réel, en utilisant la forme mathématique de la distribution, et en calculant ses paramètres sur une fenêtre d'échantillons.
6. Dans le cadre de cette thèse, nous avons pu simuler et appliquer l'approche sur des systèmes réels se composant d'un seul robot (RMD2R et RMD4R) et des systèmes réels multi-robots. Par contre, pour la partie exclusion des défauts actionneurs et la commande glissante, nous avons uniquement simulé les scénarios proposés. Nous sommes actuellement entrain d'implanter et tester l'application temps réel avec l'exclusion des actionneurs.
7. Nous projetons aussi de démontrer que la forme de la perturbation "Matched External Disturbances" (MED), décrite par l'équation 2.39 est un cas envisageable. Cela doit pouvoir se faire en utilisant un modèle dynamique plus détaillé.
8. Nous envisageons aussi de comparer la divergence de Bhattacharyya et celle de Kullback-Leibler, pour déterminer laquelle des deux est plus adéquate à notre application. La symétrie de la divergence de Bhattacharyya est une propriété intéressante, qui pourrait permettre l'identification des défauts. La comparaison se fera sur les taux de fausses alarmes et de détections manquées.

"The end of one journey marks the beginning of another"

Annexes

Filtrage bayésien

A.1 Passage du filtre de Kalman au filtre informationnel

D'après l'équation 2.49, cette relation est vraie :

$$I - K_k C_k = P_{k/k} P_{k/k-1}^{-1} \quad (\text{A.1})$$

D'après l'équation 2.47, le gain de Kalman peut s'écrire de la forme suivante :

$$K_k = P_{k/k} C_k^T R_k^{-1} \quad (\text{A.2})$$

D'après les équations 2.48, A.1 et A.2, on obtient :

$$q_{k/k} = [I - K_k C_k] q_{k/k-1} + K_k z_k \quad (\text{A.3})$$

$$P_{k/k}^{-1} q_{k/k} = P_{k/k-1}^{-1} q_{k/k-1} + C_k^T R_k^{-1} z_k \quad (\text{A.4})$$

Étant donné le lemme sur les inversions des matrices suivant :

$$[A + BCD]^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B [C^{-1} + DA^{-1}B]^{-1} DA^{-1} \quad (\text{A.5})$$

Nous pouvons donc réécrire l'équation 2.49 comme suit :

$$P_{k/k} = P_{k/k-1} - K_k [C_k P_{k/k-1} + R_k] K_k^T \quad (\text{A.6})$$

$$= [P_{k/k-1}^{-1} + C_k^T R_k^{-1} C_k]^{-1} \quad (\text{A.7})$$

D'après les équations A.4 et A.7, on obtient :

$$y_{k/k} = y_{k/k-1} + C_k^T R_k^{-1} z_k \quad (\text{A.8})$$

$$Y_{k/k} = Y_{k/k-1} + C_k^T R_k^{-1} C_k \quad (\text{A.9})$$

A.2 Dérivation de la matrice de covariance du modèle d'observation pour le système multi-robots

En développant les équations 4.52 et 4.53, on obtient (AL HAGE, 2016) :

$$\Gamma_k^{ji} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta_{k/k-1}^i (x_{k/k-1}^j - x_{k/k-1}^i) + \cos \theta_{k/k-1}^i (y_{k/k-1}^j - y_{k/k-1}^i) \\ 0 & 1 & -\cos \theta_{k/k-1}^i (x_{k/k-1}^j - x_{k/k-1}^i) - \sin \theta_{k/k-1}^i (y_{k/k-1}^j - y_{k/k-1}^i) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

$$R_k^{ji} = \Gamma_k^{ji} \begin{pmatrix} \sigma_{x^{ji}}^2 & \sigma_{x^{ji}y^{ji}} & \sigma_{x^{ji}\theta^{ji}} \\ \sigma_{x^{ji}y^{ji}} & \sigma_{y^{ji}}^2 & \sigma_{y^{ji}\theta^{ji}} \\ \sigma_{x^{ji}\theta^{ji}} & \sigma_{y^{ji}\theta^{ji}} & \sigma_{\theta^{ji}}^2 \end{pmatrix} \Gamma_k^{jiT} \quad (\text{A.11})$$

Sachant que x^{ji} et θ^{ji} sont nos corrélés, l'équation A.11 peut s'écrire sous la forme suivante :

$$R_k^{ji} = R_k^{jixy} + R_k^{ji\theta} \quad (\text{A.12})$$

avec :

$$R_k^{ji\theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{x^{ji}\theta^{ji}} \\ 0 & 0 & \sigma_{y^{ji}\theta^{ji}} \\ \sigma_{x^{ji}\theta^{ji}} & \sigma_{y^{ji}\theta^{ji}} & \sigma_{\theta^{ji}}^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})$$

et :

$$R_k^{jixy} = \begin{pmatrix} \sigma_{x^{ji}}^2 & \sigma_{x^{ji}y^{ji}} & 0 \\ \sigma_{x^{ji}y^{ji}} & \sigma_{y^{ji}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

Considérons la propriété suivante :

Si $z = f(x, y)$, sachant que x et y sont non corrélés, alors la propagation de l'erreur s'écrit sous la forme suivante (KU, 1966) :

$$\sigma_z^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \sigma_y^2 \quad (\text{A.15})$$

Sachant que la position relative z^{ji} peut être exprimée en fonction de la distance relative d_r et l'angle de gisement θ_g :

$$z^{ji} = \begin{bmatrix} x^{ji} \\ y^{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_r \cos(\theta_g) \\ d_r \sin(\theta_g) \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

alors en utilisant l'équation A.15 on obtient :

$$\sigma_{x^{ji}}^2 = \sigma_{d_r}^2 (\cos^2 \theta_g) + d_r^2 \sigma_{\theta_g}^2 (\sin^2 \theta_g) \quad (\text{A.17})$$

$$\sigma_{y^{ji}}^2 = \sigma_{d_r}^2 (\sin^2 \theta_g) + d_r^2 \sigma_{\theta_g}^2 (\cos^2 \theta_g) \quad (\text{A.18})$$

Sachant que : si x et y sont deux variables aléatoires de variances σ_x^2 et σ_y^2 respectivement, alors on a (ROUSSAS, 2014) :

$$\sigma_{x+y}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\sigma_{xy} \quad (\text{A.19})$$

En développant l'équation A.19, on obtient :

$$\sigma_{x^j y^i} = (\sigma_{d_r}^2 - d_r^2 \sigma_{\theta_g}^2) \sin(\theta_g) \cos(\theta_g) \quad (\text{A.20})$$

Les équations A.13 et A.14 peuvent donc être exprimées comme suit :

$$R_k^{jixy} = \begin{pmatrix} \sigma_{d_r}^2 \cos^2(\theta_g) + d_r^2 \sigma_{\theta_g}^2 \sin^2(\theta_g) & (\sigma_{d_r}^2 - d_r^2 \sigma_{\theta_g}^2) \sin(\theta_g) \cos(\theta_g) & 0 \\ (\sigma_{d_r}^2 - d_r^2 \sigma_{\theta_g}^2) \sin(\theta_g) \cos(\theta_g) & \sigma_{d_r}^2 \sin^2(\theta_g) + d_r^2 \sigma_{\theta_g}^2 \cos^2(\theta_g) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_k \quad (\text{A.21})$$

$$R_k^{ji\theta} = J J_{k/k-1} \sigma_{\theta}^2 J_{k/k-1}^T \quad (\text{A.22})$$

où

$$J J = \begin{pmatrix} -\sin(\theta^i)(x^j - x^i) + \cos(\theta^i)(y^j - y^i) \\ -\cos(\theta^i)(x^j - x^i) - \sin(\theta^i)(y^j - y^i) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.23})$$

$\sigma_{d_r}^2$, $\sigma_{\theta_g}^2$ et σ_{θ}^2 sont respectivement les incertitudes associées à l'erreur des estimations de la distance relative, de l'angle de gisement et de l'orientation.

A.3 Filtre de Kalman à deux étages

Étant donné le modèle suivant :

$$q_k = A_k q_{k-1} + B_k (I_r - \text{diag}(\bar{\sigma})) u_k + \rho_k \quad (\text{A.24})$$

$$z_k = C_k q_k + \phi_k \quad (\text{A.25})$$

u_k est le vecteur d'entrée de dimension \mathbf{R}^r , I_r est une matrice identité de dimension $r \times r$ et $\bar{\sigma}$ est le complément de σ , en d'autres termes, si $\sigma_i = 0$ alors $\bar{\sigma}_i = 1$. Les autres paramètres et variables sont définis dans la section 2.3.1 après l'équation 2.43.

Le système (A.24), (A.25) peut être réécrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} q_k \\ \bar{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & -B_k \text{diag}(u_k) \\ 0 & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{k-1} \\ \bar{\sigma}_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_k \\ 0 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} \rho_k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

$$z_k = [C_k \ 0] \begin{bmatrix} q_k \\ 0 \end{bmatrix} + \phi_k \quad (\text{A.27})$$

L'algorithme du filtre de Kalman à deux étages est donné par l'algorithme 4.

L'algorithme du filtre de Kalman à deux étages fournit donc à la fois, l'estimation d'état $\hat{q}_{k/k}$ et l'estimation du défaut actionneur $\hat{\sigma}_k$. L'algorithme contient des variables auxiliaires, qui sont : $\Gamma_k \in \mathbf{R}^{n \times r}$, $S_k \in \mathbf{R}^{r \times r}$, $\lambda \in (0, 1)$, $\Omega_k \in \mathbf{R}^{m \times r}$ et $w > 0$.

Algorithm 4 Filtre de Kalman à deux étages

Initialisation :

$$P_{0/0} = P_0 \quad \Gamma_0 = 0 \quad S_0 = wI_r$$

$$\hat{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_0 \quad \hat{q}_{0/0} = q_0$$

$$P_{k/k-1} = A_k P_{k-1/k-1} A_k^T + Q_k$$

$$\Sigma_k = C_k P_{k/k-1} C_k^T + R_k$$

$$K_k = P_{k/k-1} C_k^T \Sigma_k^{-1}$$

$$P_{k/k} = [I_n - K_k C_k] P_{k/k-1}$$

$$\Gamma_k = [I_n - K_k C_k] A_k \Gamma_{k-1} - [I_n - K_k C_k] B_k \text{diag}(u_k)$$

$$\Omega_k = C_k A_k \Gamma_{k-1} - C_k B_k \text{diag}(u_k)$$

$$\Delta_k = [\lambda \Sigma_k + \Omega_k S_{k-1} \Omega_k^T]^{-1}$$

$$\Lambda_k = S_{k-1} \Omega_k^T \Delta_k$$

$$S_k = \frac{1}{\lambda} S_{k-1} - \frac{1}{\lambda} S_{k-1} \Omega_k^T \Delta_k \Omega_k S_{k-1}$$

$$\tilde{z}_k = z_k - C_k [A_k \hat{q}_{k-1/k-1} + B_k (u_k - \text{diag}(u_k) \hat{\sigma}_{k-1})]$$

$$\hat{\sigma}_k = \hat{\sigma}_{k/k-1} + \Lambda_k \tilde{z}_k$$

$$\hat{q}_{k/k} = A_k \hat{q}_{k-1/k-1} + B_k u_k - B_k \text{diag}(u_k) \bar{\sigma}_{k-1} + K_k \tilde{z}_k + \Gamma_k [\hat{\sigma}_k - \hat{\sigma}_{k-1}]$$

Divergences informationnelles

Étant donné une distribution normale p_i , de dimension 1, de moyenne u_i et de variance σ_i^2 . Sa fonction de densité de probabilité est donnée par l'équation suivante :

$$p_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_i^2}(x-u_i)^2} \quad (\text{B.1})$$

Dans le cas d'une distribution p de dimension n , de moyenne u_p et de matrice de covariance P_p . Alors la fonction de densité de probabilité est donnée comme suit :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |P_p|}} e^{-\frac{1}{2}(x-u_p)^T P_p (x-u_p)} \quad (\text{B.2})$$

où $x \in \mathbf{R}^n$.

B.1 Passage de la divergence de Rényi à la divergence de Kullback-Leibler

Rappelons l'équation de la divergence de Rényi (équation 3.8) :

$$D_\alpha(p||\xi) = \frac{1}{\alpha - 1} \log \int_x p(x)^\alpha \xi(x)^{1-\alpha} dx \quad (\text{B.3})$$

En appliquant la limite avec le théorème de l'hôpital, on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 1} D_\alpha(p||\xi) &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1}{\alpha - 1} \log \int_x p(x)^\alpha \xi(x)^{1-\alpha} dx \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \log \int_x p(x)^\alpha \xi(x)^{1-\alpha} dx \\ &= \frac{\int p(x)^\alpha \xi(x)^{1-\alpha} [\log(p(x)) - \log(\xi(x))] dx}{\int p(x)^\alpha \xi(x)^{1-\alpha} dx} \\ &= \frac{\int p(x) \log \left(\frac{p(x)}{\xi(x)} \right) dx}{\int p(x) dx} \\ &= \int p(x) \log \left(\frac{p(x)}{\xi(x)} \right) = KL(p||\xi) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

B.2 Divergence de Kullback-Leibler dans le cas gaussien

D'après l'équation 3.13 on a :

$$KL(p||\xi) = \int_x p(x) \log p(x) dx - p(x) \log \xi(x) dx = -H(p) - E_p(\log \xi(x)) \quad (B.5)$$

Supposons que les distributions p et ξ soient deux gaussiennes avec respectivement les moyennes u_p et u_ξ et les matrices de covariance P_p et P_ξ . Alors on obtient :

$$\begin{aligned} E_p(\log \xi) &= E \left[-\log((2\pi)^{\frac{1}{2}} |P_\xi|^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2}(x - u_\xi)^T P_\xi^{-1} (x - u_\xi) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \log((2\pi)^n |P_\xi|) - \frac{1}{2} E_p \left[(x - u_\xi)^T P_\xi^{-1} (x - u_\xi) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \log((2\pi)^n |P_\xi|) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n P_{\xi_{ij}}^{-1} E_p [(x_i - u_{\xi_i})(x_j - u_{\xi_j})] \end{aligned} \quad (B.6)$$

Sachant que (GIL, 2011) :

$$E_p [(x_i - u_{\xi_i})(x_j - u_{\xi_j})] = P_{ij}^{-1} + (u_{pi} - u_{\xi_i})(u_{pj} - u_{\xi_j}) \quad (B.7)$$

et que :

$$\sum_{i,j=1}^n P_{ij}^{-1} + (u_{pi} - u_{\xi_i})(u_{pj} - u_{\xi_j}) = \text{trace}(P_\xi^{-1} P_p) + (u_p - u_\xi)^T P^{-1} (u_p - u_\xi) \quad (B.8)$$

Par conséquent, l'équation B.6 devient :

$$E_p(\log \xi) = -\frac{1}{2} \left[\log((2\pi)^n |P_\xi|) + \text{trace}(P_\xi^{-1} P_p) + (u_p - u_\xi)^T P^{-1} (u_p - u_\xi) \right] \quad (B.9)$$

Sachant que :

$$H(p) = \frac{1}{2} \log((2\pi e)^n |P_p|) \quad (B.10)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} KL(p||\xi) &= E_p[\log p] E_\xi[\log \xi] \\ &= \frac{1}{2} \left[\log((2\pi)^n |P_\xi|) + \text{trace}(P_\xi^{-1} P_p) + (u_p - u_\xi)^T P^{-1} (u_p - u_\xi) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \log((2\pi e)^n |P_p|) \\ &= \frac{1}{2} \left[\log\left(\frac{|P_\xi|}{|P_p|}\right) + \text{trace}(P_\xi^{-1} P_p) + (u_p - u_\xi)^T P^{-1} (u_p - u_\xi) \right] \end{aligned} \quad (B.11)$$

Bibliographie

- ABCI, B., J. AL HAGE, M. EL BADAoui EL NAJJAR et v. COCQUEMPOT (2018). « Multi-Robot Autonomous Navigation System Using Informational Fault Tolerant Multi-Sensor Fusion with Robust Closed Loop Sliding Mode Control ». In : *2018 21st International Conference on Information Fusion (FUSION)*, p. 1–5. DOI : [10.23919/ICIF.2018.8455787](https://doi.org/10.23919/ICIF.2018.8455787).
- ABCI, B., M. EL BADAoui EL NAJJAR, V. COCQUEMPOT et G. DHERBOMEZ (2019). « An informational approach for sensor and actuator fault diagnosis for autonomous mobile robots ». In : *Journal of Intelligent & Robotic Systems*. DOI : [10.1007/s10846-019-01099-7](https://doi.org/10.1007/s10846-019-01099-7).
- ABCI, B., G. ZHENG, D. EFIMOV et M. EL BADAoui EL NAJJAR (2017). « Robust Altitude and Attitude Sliding Mode Controllers for Quadrotors ». In : *IFAC-PapersOnLine* 50.1. 20th IFAC World Congress, p. 2720–2725. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2017.08.576>.
- AL HAGE, J. (2016). « Fusion de données tolérante aux défaillances : application à la surveillance de l'intégrité d'un système de localisation ». Thèse de doct. Université de Lille, France.
- AL HAGE, J., M. E. EL NAJJAR et D. POMORSKI (2017). « Multi-sensor fusion approach with fault detection and exclusion based on the Kullback–Leibler Divergence : Application on collaborative multi-robot system ». In : *Information Fusion* 37, p. 61–76. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.inffus.2017.01.005>.
- ALAEI, H. et A. YAZDIZADEH (2016). « A new robust H_∞ sliding mode observer-based state estimation and fault reconstruction for nonlinear uncertain boiler system ». In : *Soft Computing*. DOI : [10.1007/s00500-016-2046-9](https://doi.org/10.1007/s00500-016-2046-9).
- ALBA-FERNÁNDEZ, V., J. MUÑOZ-GARCÍA et M. JIMÉNEZ-GAMERO (2005). « Bootstrap estimation of the distribution of Matusita distance in the mixed case ». In : *Statistics and Probability Letters* 73.3, p. 277–285. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.spl.2005.04.001>.
- ALBINA, K. et S. G. LEE (2019). « Hybrid Stochastic Exploration Using Grey Wolf Optimizer and Coordinated Multi-Robot Exploration Algorithms ». In : *IEEE Access* 7, p. 14246–14255. DOI : [10.1109/ACCESS.2019.2894524](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2894524).
- ALLERHAND, L. I. et U. SHAKED (2015). « Robust Switching-Based Fault Tolerant Control ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 60.8, p. 2272–2276. DOI : [10.1109/TAC.2014.2375752](https://doi.org/10.1109/TAC.2014.2375752).

- AMARI, S. (2009). « α -Divergence Is Unique, Belonging to Both f -Divergence and Bregman Divergence Classes ». In : *IEEE Transactions on Information Theory* 55.11, p. 4925–4931. DOI : [10.1109/TIT.2009.2030485](https://doi.org/10.1109/TIT.2009.2030485).
- ARULAMPALAM, M. S., S. MASKELL, N. GORDON et T. CLAPP (2002). « A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking ». In : *IEEE Transactions on Signal Processing* 50.2, p. 174–188. DOI : [10.1109/78.978374](https://doi.org/10.1109/78.978374).
- BASSEVILLE, M. (2013). « Divergence measures for statistical data processing—An annotated bibliography ». In : *Signal Processing* 93.4, p. 621–633. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2012.09.003>.
- BELOV, D. I. et R. D. ARMSTRONG (2011). « Distributions of the Kullback–Leibler divergence with applications ». In : *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology* 64.2, p. 291–309. DOI : [10.1348/000711010X522227](https://doi.org/10.1348/000711010X522227).
- BENOSMAN, M. (2011). « Passive Fault Tolerant Control ». In : *Robust Control*. Sous la dir. d'A. BARTOSZEWICZ. Rijeka : IntechOpen. Chap. 13. DOI : [10.5772/14334](https://doi.org/10.5772/14334).
- BENOSMAN, M. et K.-Y. LUM (2009). « Application of passivity and cascade structure to robust control against loss of actuator effectiveness ». In : *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 20, p. 673–693. DOI : [10.1002/rnc.1461](https://doi.org/10.1002/rnc.1461).
- BERNUAU, E., D. EFIMOV, W. PERRUQUETTI et A. POLYAKOV (2014). « On homogeneity and its application in sliding mode control ». In : *Journal of the Franklin Institute* 351.4. Special Issue on 2010-2012 Advances in Variable Structure Systems and Sliding Mode Algorithms, p. 1866–1901. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2014.01.007>.
- BHATTACHARYYA, A. (1946). « On a Measure of Divergence between Two Multinomial Populations ». In : *Sankhyā : The Indian Journal of Statistics (1933-1960)* 7.4, p. 401–406.
- BLANKE, M., M. KINNAERT, J. LUNZE, M. STAROSWIECKI et J. SCHRÖDER (2006). *Diagnosis and Fault-Tolerant Control*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag.
- BONNIFAIT, P. (1997). « Localisation précise en position et attitude des robots mobiles d'extérieur à évolutions lentes ». Thèse de doct. Ecole centrale de Nantes, France.
- BORENSTEIN, J., H. R. EVERETT et L. FENG (1996). "Where am I?" *Sensors and methods for mobile robot positioning*. Rapp. tech. University of Michigan.
- BORENSTEIN, J. et LIQIANG FENG (1996). « Measurement and correction of systematic odometry errors in mobile robots ». In : *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 12.6, p. 869–880. DOI : [10.1109/70.544770](https://doi.org/10.1109/70.544770).
- BOZORG, M., E. M. NEBOT et H. F. DURRANT-WHYTE (1998). « A decentralised navigation architecture ». In : *Proceedings. 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No.98CH36146)*. T. 4, 3413–3418 vol.4. DOI : [10.1109/ROBOT.1998.680965](https://doi.org/10.1109/ROBOT.1998.680965).

- BRAIKIA, K. (2011). « Asservissement des systèmes incertains par des commandes à mode glissant - Application à un robot flexible ». Thèse de doct. Université de Toulouse, INSA, France.
- BREGMAN, L. (1967). « The relaxation method of finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming ». In : *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* 7.3, p. 200–217. DOI : [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(67\)90040-7](https://doi.org/10.1016/0041-5553(67)90040-7).
- BROOKS, R. (1986). « A robust layered control system for a mobile robot ». In : *IEEE Journal on Robotics and Automation* 2.1, p. 14–23. DOI : [10.1109/JRA.1986.1087032](https://doi.org/10.1109/JRA.1986.1087032).
- CAI, T. T., T. LIANG et H. H. ZHOU (2015). « Law of log determinant of sample covariance matrix and optimal estimation of differential entropy for high-dimensional Gaussian distributions ». In : *Journal of Multivariate Analysis* 137, p. 161–172. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jmva.2015.02.003>.
- CARACCILO, L., A. DE LUCA et S. IANNITTI (1999). « Trajectory tracking control of a four-wheel differentially driven mobile robot ». In : *Proceedings 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No.99CH36288C)*. T. 4, 2632–2638 vol.4. DOI : [10.1109/ROBOT.1999.773994](https://doi.org/10.1109/ROBOT.1999.773994).
- CARLSON, T. et Y. DEMIRIS (2012). « Collaborative Control for a Robotic Wheelchair : Evaluation of Performance, Attention, and Workload ». In : *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)* 42.3, p. 876–888. DOI : [10.1109/TSMCB.2011.2181833](https://doi.org/10.1109/TSMCB.2011.2181833).
- CHERNOFF, H. (1952). « A Measure of Asymptotic Efficiency for Tests of a Hypothesis Based on the sum of Observations ». In : *Ann. Math. Statist.* 23.4, p. 493–507. DOI : [10.1214/aoms/1177729330](https://doi.org/10.1214/aoms/1177729330).
- CHWA, D. (2010). « Tracking Control of Differential-Drive Wheeled Mobile Robots Using a Backstepping-Like Feedback Linearization ». In : *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A : Systems and Humans* 40.6, p. 1285–1295. DOI : [10.1109/TSMCA.2010.2052605](https://doi.org/10.1109/TSMCA.2010.2052605).
- CORNEJO, J., J. MAGALLANES, E. DENEGRI et R. CANAHUIRE (2018). « Trajectory Tracking Control of a Differential Wheeled Mobile Robot : a Polar Coordinates Control and LQR Comparison ». In : *2018 IEEE XXV International Conference on Electronics, Electrical Engineering and Computing (INTERCON)*, p. 1–4. DOI : [10.1109/INTERCON.2018.8526366](https://doi.org/10.1109/INTERCON.2018.8526366).
- COVER, T. M. et J. A. THOMAS (2006). *Elements of Information Theory (Wiley Series in Telecommunications and Signal Processing)*. New York, NY, USA : Wiley-Interscience.
- CSISZÁR, I. (1972). « A class of measures of informativity of observation channels ». In : *Periodica Mathematica Hungarica* 2.1, p. 191–213. DOI : [10.1007/BF02018661](https://doi.org/10.1007/BF02018661).
- CUESTA, F. et A. OLLERO (2010). *Intelligent Mobile Robot Navigation*. 1st. Springer Publishing Company, Incorporated.

- D'ANDREA-NOVEL, B., G. BASTIN et G. CAMPION (1992). « Dynamic feedback linearization of nonholonomic wheeled mobile robots ». In : *Proceedings 1992 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2527–2532 vol.3. DOI : [10.1109/ROBOT.1992.220061](https://doi.org/10.1109/ROBOT.1992.220061).
- DAS, T. et I. N. KAR (2006). « Design and implementation of an adaptive fuzzy logic-based controller for wheeled mobile robots ». In : *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 14.3, p. 501–510. DOI : [10.1109/TCST.2006.872536](https://doi.org/10.1109/TCST.2006.872536).
- DEFOORT, M., T. FLOQUET, A. KOKOSY et W. PERRUQUETTI (2008). « Sliding-Mode Formation Control for Cooperative Autonomous Mobile Robots ». In : *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 55.11, p. 3944–3953. DOI : [10.1109/TIE.2008.2002717](https://doi.org/10.1109/TIE.2008.2002717).
- DIERKS, T., B. BRENNER et S. JAGANNATHAN (2013). « Neural Network-Based Optimal Control of Mobile Robot Formations With Reduced Information Exchange ». In : *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 21.4, p. 1407–1415. DOI : [10.1109/TCST.2012.2200484](https://doi.org/10.1109/TCST.2012.2200484).
- DING, S. X. (2008). *Model-based Fault Diagnosis Techniques : Design Schemes, Algorithms, and Tools*. 1st. Springer Publishing Company, Incorporated.
- DUAN, Z. et Z. CAI (2009). « Particle Filters Based Fault Diagnosis for Internal Sensors of Mobile Robots ». In : *2009 International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation*. T. 1, p. 47–50. DOI : [10.1109/ICMTMA.2009.607](https://doi.org/10.1109/ICMTMA.2009.607).
- DURRANT-WHYTE, H. (2002). « Introduction to Decentralised Data Fusion ». In :
- DURRANT-WHYTE, H. et T. C. HENDERSON (2008). « Multisensor Data Fusion ». In : *Springer Handbook of Robotics*. Sous la dir. de B. SICILIANO et O. KHATIB. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, p. 585–610. DOI : [10.1007/978-3-540-30301-5_26](https://doi.org/10.1007/978-3-540-30301-5_26).
- ESCAMILLA-AMBROSIO, P. J. et N. MORT (2001). « A hybrid Kalman filter-fuzzy logic multisensor data fusion architecture with fault tolerant characteristics ». In :
- FERNANDEZ, M. et H. F. DURRANT-WHYTE (1994). « A failure detection and isolation algorithm for a decentralised multisensor system ». In : *Proceedings of 1994 IEEE International Conference on MFI '94. Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems*, p. 27–33. DOI : [10.1109/MFI.1994.398476](https://doi.org/10.1109/MFI.1994.398476).
- FIERRO, R. et F. L. LEWIS (1995). « Control of a nonholonomic mobile robot : backstepping kinematics into dynamics ». In : *Proceedings of 1995 34th IEEE Conference on Decision and Control*. T. 4, 3805–3810 vol.4. DOI : [10.1109/CDC.1995.479190](https://doi.org/10.1109/CDC.1995.479190).
- (1998). « Control of a nonholonomic mobile robot using neural networks ». In : *IEEE Transactions on Neural Networks* 9.4, p. 589–600. DOI : [10.1109/72.701173](https://doi.org/10.1109/72.701173).
- FILIPPOV, A. (1988). *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides : Control Systems*. Kluwer Academic Publishers.

- FLIESS, M. et C. JOIN (2008). « Commande sans modèle et commande à modèle restreint ». In : *e-STA Sciences et Technologies de l'Automatique* 5.4, p. 1–23.
- FLIESS, M., J. LÉVINE et P. ROUCHON (1995). « Flatness and defect of nonlinear systems : Introductory theory and examples ». In : *International Journal of Control* 61, p. 1327–1361.
- FRANK, P. (1992). « Robust Model-Based Fault Detection in Dynamic Systems ». In : *IFAC Proceedings Volumes* 25.4. IFAC Symposium on Online Fault Detection and Supervision in the Chemical Process Industries, Newark, Delaware, 22-24 April, p. 1–13. DOI : [https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)50209-8](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)50209-8).
- GANGANATH, N. et H. LEUNG (2012). « Mobile robot localization using odometry and kinect sensor ». In : *2012 IEEE International Conference on Emerging Signal Processing Applications*, p. 91–94. DOI : [10.1109/ESPA.2012.6152453](https://doi.org/10.1109/ESPA.2012.6152453).
- GERMÁN-SALLÓ, Z. et G. STRNAD (2018). « Signal processing methods in fault detection in manufacturing systems ». In : *Procedia Manufacturing* 22. 11th International Conference Interdisciplinarity in Engineering, INTER-ENG 2017, 5-6 October 2017, Tirgu Mures, Romania, p. 613–620. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.promfg.2018.03.089>.
- GERTLER, J. (1998). *Fault Detection and Diagnosis in Engineering Systems*. Electrical Engineering. Taylor & Francis.
- GIL, M., F. ALAJAJI et T. LINDER (2013). « Rényi divergence measures for commonly used univariate continuous distributions ». In : *Information Sciences* 249, p. 124–131. DOI : [10.1016/j.ins.2013.06.018](https://doi.org/10.1016/j.ins.2013.06.018).
- GIL, M. (2011). *On Rényi divergence measures for continuous alphabet sources*. Queen's University, Kingston, Ontario, Canada.
- HADDAD, A. (2014). « Stratégie de commande tolérante aux fautes active pour des systèmes suractionnés ». Thèse de doct. Université de Lille, France.
- HAN, S., J. KIM et H. MYUNG (2013). « Landmark-Based Particle Localization Algorithm for Mobile Robots With a Fish-Eye Vision System ». In : *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 18.6, p. 1745–1756. DOI : [10.1109/TMECH.2012.2213263](https://doi.org/10.1109/TMECH.2012.2213263).
- HOBALLAH, I. Y. et P. K. VARSHNEY (1989). « An information theoretic approach to the distributed detection problem ». In : *IEEE Transactions on Information Theory* 35.5, p. 988–994. DOI : [10.1109/18.42216](https://doi.org/10.1109/18.42216).
- HOTELLING, H. (1929). « Stability in Competition ». In : *The Economic Journal* 39.153, p. 41–57.
- HUR, H. et H. AHN (2014). « Unknown Input H_∞ Observer-Based Localization of a Mobile Robot With Sensor Failure ». In : *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 19.6, p. 1830–1838. DOI : [10.1109/TMECH.2014.2298034](https://doi.org/10.1109/TMECH.2014.2298034).
- HUSSEIN, I. I., C. W. T. ROSCOE, M. P. WILKINS et P. W. SCHUMACHER (2015). « Track-to-Track Association Using Bhattacharyya Divergence ». In :
- IBARGUENGOYTIA, P. H., L. E. SUCAR et S. VADERA (2001). « Real time intelligent sensor validation ». In : *IEEE Transactions on Power Systems* 16.4, p. 770–775. DOI : [10.1109/59.962425](https://doi.org/10.1109/59.962425).

- JANSE, S. A. (2017). « Inference using Bhattacharyya distance to model interaction effects when the number of predictors far exceeds the sample size ». Thèse de doct. University of Kentucky, USA.
- JONG-MIN YANG et JONG-HWAN KIM (1999). « Sliding mode control for trajectory tracking of nonholonomic wheeled mobile robots ». In : *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 15.3, p. 578–587. DOI : [10.1109/70.768190](https://doi.org/10.1109/70.768190).
- JOYCE, J. M. (2011). « Kullback-Leibler Divergence ». In : *International Encyclopedia of Statistical Science*. Sous la dir. de M. LOVRIC. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, p. 720–722. DOI : [10.1007/978-3-642-04898-2_327](https://doi.org/10.1007/978-3-642-04898-2_327).
- KALMAN, R. E. (1960). « A New Approach to Linear Filtering And Prediction Problems ». In : *ASME Journal of Basic Engineering*.
- KHATIB, M. et T. SIMEON (1997). « Sensor-based motion planning and control for the HILARE mobile robot ». In : *Proceedings of the 1997 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robot and Systems. Innovative Robotics for Real-World Applications. IROS '97*. T. 3, V8–V9 vol.3. DOI : [10.1109/IROS.1997.656797](https://doi.org/10.1109/IROS.1997.656797).
- KOLMANOVSKY, I. et N. H. McCLAMROCH (1995). « Developments in nonholonomic control problems ». In : *IEEE Control Systems Magazine* 15.6, p. 20–36. DOI : [10.1109/37.476384](https://doi.org/10.1109/37.476384).
- KOREN, I. et C. M. KRISHNA (2007). « CHAPTER 1 - Preliminaries ». In : *Fault-Tolerant Systems*. Sous la dir. d'I. KOREN et C. M. KRISHNA. Burlington : Morgan Kaufmann, p. 1–10. DOI : <https://doi.org/10.1016/B978-012088525-1/50004-3>.
- KOUBAA, A., éd. (2018). *Robot Operating System (ROS) : The Complete Reference (Volume 3)*. T. 778. Studies in Computational Intelligence. Cham : Springer. DOI : [10.1007/978-3-319-91590-6](https://doi.org/10.1007/978-3-319-91590-6).
- KOZŁOWSKI, K. et D. PAZDERSKI (2004). « Modeling and control of a 4-wheel skid-steering mobile robot ». In : *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* 14.
- KRASKOV, A., H. STÖGBAUER et P. GRASSBERGER (2004). « Estimating mutual information ». In : *Phys. Rev. E* 69 (6), p. 066138. DOI : [10.1103/PhysRevE.69.066138](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.69.066138).
- KU, H. H. (1966). « Notes on the use of propagation of error formulas ». In : *Journal of Research of the National Bureau of Standards* 70.
- KULLBACK, S. et R. A. LEIBLER (1951). « On Information and Sufficiency ». In : *Ann. Math. Statist.* 22.1, p. 79–86. DOI : [10.1214/aoms/1177729694](https://doi.org/10.1214/aoms/1177729694).
- LATOMBE, J.-C. (1991). *Robot Motion Planning*. Norwell, MA, USA : Kluwer Academic Publishers.
- LAZO, A. V. et P. RATHIE (1978). « On the entropy of continuous probability distributions (Corresp.) » In : *IEEE Transactions on Information Theory* 24.1, p. 120–122. DOI : [10.1109/TIT.1978.1055832](https://doi.org/10.1109/TIT.1978.1055832).
- LEROY, S., J. P. LAUMOND et T. SIMEON (1999). « Multiple Path Coordination for Mobile Robots : A Geometric Algorithm ». In : *Proceedings of the 16th International Joint Conference on Artificial Intelligence - Volume 2*.

- IJCAI'99. Stockholm, Sweden : Morgan Kaufmann Publishers Inc., p. 1118–1123.
- LEXA, M. (2004). « Useful Facts about the Kullback-Leibler Discrimination Distance ». In : *Technical report*.
- LIAO, J., Z. CHEN et B. YAO (2017). « Performance-Oriented Coordinated Adaptive Robust Control for Four-Wheel Independently Driven Skid Steer Mobile Robot ». In : *IEEE Access* 5, p. 19048–19057. DOI : [10.1109/ACCESS.2017.2754647](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2017.2754647).
- LIU, X., B. CHEN, H. ZHAO, J. QIN et J. CAO (2017). « Maximum Correntropy Kalman Filter With State Constraints ». In : *IEEE Access* 5, p. 25846–25853. DOI : [10.1109/ACCESS.2017.2769965](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2017.2769965).
- MA, Y., G. ZHENG, W. PERRUQUETTI et Z. QIU (2014). « Motion planning for non-holonomic mobile robots using the i-PID controller and potential field ». In : *2014 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, p. 3618–3623. DOI : [10.1109/IROS.2014.6943069](https://doi.org/10.1109/IROS.2014.6943069).
- MA, Y., V. COCQUEMPOT, M. EL BADAoui NAJJAR et B. JIANG (2018). « Adaptive Compensation of Multiple Actuator Faults for Two Physically Linked 2WD Robots ». In : *IEEE Transactions on Robotics* 34.1, p. 248–255. DOI : [10.1109/TR0.2017.2754518](https://doi.org/10.1109/TR0.2017.2754518).
- MAC THI, T., C. COPOT, R. DE KEYSER, T. D. TRAN et T. VU (2016). « MIMO fuzzy control for autonomous mobile robot ». eng. In : *Journal of automation and control engineering* 4.1, p. 65–70.
- MAHALANOBIS, P. C. (1930). « On test and measures of group divergence : theoretical formulae ». In : *Journal and Proceedings of Asiatic Society of Bengal New series* 26.
- MARTÍN, F., L. MORENO, D. BLANCO et M. L. MUÑOZ (2014). « Kullback–Leibler divergence-based global localization for mobile robots ». In : *Robotics and Autonomous Systems* 62.2, p. 120–130. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.robot.2013.11.006>.
- MONTGOMERY, D. C. et G. C. RUNGER (2003). *Applied Statistics and Probability for Engineers*. John Wiley et Sons.
- NIKOLSKII, G. (1934). « On automatic stability of a ship on a given course ». In : *Proceedings of the Central Communication Laboratory*. T. 1, p. 34–75.
- NILSSON, N. J. (1969). « A Mobius Automation : An Application of Artificial Intelligence Techniques ». In : *Proceedings of the 1st International Joint Conference on Artificial Intelligence*. IJCAI'69. Washington, DC : Morgan Kaufmann Publishers Inc., p. 509–520.
- NORMEY-RICO, J. E., I. ALCALÁ, J. GÓMEZ-ORTEGA et E. F. CAMACHO (2001). « Mobile robot path tracking using a robust PID controller ». In : *Control Engineering Practice* 9.11, p. 1209–1214. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0967-0661\(01\)00066-1](https://doi.org/10.1016/S0967-0661(01)00066-1).
- PARK, W. J., J. W. SONG, C. H. KANG, J. H. LEE, M. H. SEO, S. Y. PARK et al. (2019). « MEMS 3D DR/GPS Integrated System for Land Vehicle Application Robust to GPS Outages ». In : *IEEE Access* 7, p. 73336–73348. DOI : [10.1109/ACCESS.2019.2920095](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2920095).

- PAZDERSKI, D. et K. KOZŁOWSKI (2008). « Trajectory tracking control of Skid-Steering Robot – experimental validation ». In : *IFAC Proceedings Volumes* 41.2. 17th IFAC World Congress, p. 5377–5382. DOI : <https://doi.org/10.3182/20080706-5-KR-1001.00906>.
- POOR, H. V. (1994). *An Introduction to Signal Detection and Estimation (2Nd Ed.)* Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag.
- RABELO, R., H. MACEDO et E. FREIRE (2018). « The SimuroSot Strategy Development Kit : a high-level approach to robot soccer coding ». In : *IEEE Latin America Transactions* 16.2, p. 686–693. DOI : [10.1109/TLA.2018.8327430](https://doi.org/10.1109/TLA.2018.8327430).
- RANK, M. L. et H. NIEMANN (1999). « Norm based design of fault detectors ». In : *International Journal of Control* 72.9, p. 773–783. DOI : [10.1080/002071799220704](https://doi.org/10.1080/002071799220704).
- RAO, C. R. (1992). « Information and the Accuracy Attainable in the Estimation of Statistical Parameters ». In : *Breakthroughs in Statistics : Foundations and Basic Theory*. Sous la dir. de S. KOTZ et N. L. JOHNSON. New York, NY : Springer New York, p. 235–247. DOI : [10.1007/978-1-4612-0919-5_16](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0919-5_16).
- RAUBER, T., T. BRAUN et K. BERNS (2008). « Probabilistic distance measures of the Dirichlet and Beta distributions ». In : *Pattern Recognition* 41.2, p. 637–645. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.patcog.2007.06.023>.
- RAVISHANKER, N. et D. K. DEY (2002). « A first course in linear model theory ». In :
- REIF, K. et R. UNBEHAUEN (1999). « The extended Kalman filter as an exponential observer for nonlinear systems ». In : *IEEE Transactions on Signal Processing* 47.8, p. 2324–2328. DOI : [10.1109/78.774779](https://doi.org/10.1109/78.774779).
- RENCHER, A. C. et W. F. CHRISTENSEN (2012). *Methods of multivariate analysis*.
- RÉNYI, A. (1961). « On Measures of Entropy and Information ». In : *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 1 : Contributions to the Theory of Statistics*. Berkeley, Calif. : University of California Press, p. 547–561.
- RICQUEBOURG, V., M. DELAFOSSE, L. DELAHOUCHE, B. MARHIC, A. M. JOLLY-DESODT, D. MENGA et al. (2007). « Fault Detection by Combining Redundant Sensors : a Conflict Approach Within the TBM Framework ». In :
- RIGATOS, G. et P. SIANO (2015). « A New Nonlinear H-infinity Feedback Control Approach to the Problem of Autonomous Robot Navigation ». In : *Intelligent Industrial Systems* 1.3, p. 179–186.
- ROUMELIOTIS, S. I. et G. A. BEKEY (2002). « Distributed multirobot localization ». In : *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 18.5, p. 781–795. DOI : [10.1109/TRA.2002.803461](https://doi.org/10.1109/TRA.2002.803461).
- ROUSSAS, G. G. (2014). *An Introduction to Probability and Statistical Inference*. 2nd. Academic Press.
- SADEGHZADEH, I., A. CHAMSEDDINE, Y. ZHANG et D. THEILLIOL (2012). « Control Allocation and Re-allocation for a Modified Quadrotor Helicopter against Actuator Faults ». In : *IFAC Proceedings Volumes* 45.20. 8th

- IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes, p. 247–252. DOI : <https://doi.org/10.3182/20120829-3-MX-2028.00291>.
- SARKAR, N., X. YUN et V. KUMAR (1994). « Control of Mechanical Systems With Rolling Constraints : Application to Dynamic Control of Mobile Robots ». In : *The International Journal of Robotics Research* 13.1, p. 55–69. DOI : [10.1177/027836499401300104](https://doi.org/10.1177/027836499401300104).
- SCHERER, C., P. GAHINET et M. CHILALI (1997). « Multiobjective output-feedback control via LMI optimization ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 42.7, p. 896–911. DOI : [10.1109/9.599969](https://doi.org/10.1109/9.599969).
- SENGAR, H., H. WANG, D. WIJESEKERA et S. JAJODIA (2008). « Detecting VoIP Floods Using the Hellinger Distance ». In : *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems* 19.6, p. 794–805. DOI : [10.1109/TPDS.2007.70786](https://doi.org/10.1109/TPDS.2007.70786).
- SHANNON, C. E. (1948). « A mathematical theory of communication ». In : *The Bell System Technical Journal* 27.3, p. 379–423. DOI : [10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x](https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x).
- SINGH, G. K. et K. E. HOLE (2004). « Guaranteed performance in reaching mode of sliding mode controlled systems ». In : *Sadhana* 29.1, p. 129–141. DOI : [10.1007/BF02707005](https://doi.org/10.1007/BF02707005).
- SLOTINE, J. et W. LI (1991). *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall.
- SOBHANI TEHRANI, E. et K. KHORASANI (2009). *Fault Diagnosis of Nonlinear Systems Using a Hybrid Approach*. T. 383. DOI : [10.1007/978-0-387-92907-1](https://doi.org/10.1007/978-0-387-92907-1).
- STAROSWIECKI, M. (2005). « Fault tolerant control : the pseudo-inverse method revisited ». In : *IFAC Proceedings Volumes* 38.1. 16th IFAC World Congress, p. 418–423. DOI : <https://doi.org/10.3182/20050703-6-CZ-1902.01872>.
- STOTSKY, A., X. HU et M. EGERSTEDT (1999). « Sliding mode control of a car-like mobile robot using single-track dynamic model ». In : *IFAC Proceedings Volumes* 32.2. 14th IFAC World Congress 1999, Beijing, Chia, 5-9 July, p. 605–610. DOI : [https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)56103-0](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)56103-0).
- THRUN, S., W. BURGARD et D. FOX (2005). *Probabilistic Robotics (Intelligent Robotics and Autonomous Agents)*. The MIT Press.
- THUILOT, B. (1995). « Contribution à la modélisation et à la commande de robots mobiles à roues ». Thèse de doct. France : MINES ParisTech.
- TILDESLEY, M. L. (1921). « A first study of the burmese skull ». In : *Biometrika* 13.2-3, p. 176–262. DOI : [10.1093/biomet/13.2-3.176](https://doi.org/10.1093/biomet/13.2-3.176).
- VAJDA, I. (1972). « On thef-divergence and singularity of probability measures ». In : *Periodica Mathematica Hungarica* 2.1, p. 223–234. DOI : [10.1007/BF02018663](https://doi.org/10.1007/BF02018663).
- VAN ERVEN, T. et P. HARREMOS (2014). « Rényi Divergence and Kullback-Leibler Divergence ». In : *IEEE Transactions on Information Theory* 60.7, p. 3797–3820. DOI : [10.1109/TIT.2014.2320500](https://doi.org/10.1109/TIT.2014.2320500).

- VARSHNEY, P. K. (1996). *Distributed Detection and Data Fusion*. 1st. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag.
- VASILYEV, I., A. KASHOURINA, M. KRASHENINNIKOV et E. SMIRNOVA (2015). « Use of Mobile Robots Groups for Rescue Missions in Extreme Climatic Conditions ». In : *Procedia Engineering* 100. 25th DAAAM International Symposium on Intelligent Manufacturing and Automation, 2014, p. 1242–1246. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.01.489>.
- VERMA, V., G. GORDON, R. SIMMONS et S. THRUN (2004). « Real-time fault diagnosis [robot fault diagnosis] ». In : *IEEE Robotics Automation Magazine* 11.2, p. 56–66. DOI : [10.1109/MRA.2004.1310942](https://doi.org/10.1109/MRA.2004.1310942).
- W. SCHOLZ, F. (2006). « Maximum Likelihood Estimation ». In : DOI : [10.1002/0471667196.ess1571.pub2](https://doi.org/10.1002/0471667196.ess1571.pub2).
- WAN, E. A. et R. VAN DER MERWE (2000). « The unscented Kalman filter for nonlinear estimation ». In : *Proceedings of the IEEE 2000 Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium (Cat. No.00EX373)*, p. 153–158.
- « Front Matter » (1971). In : *Detection of Signals in Noise*. Sous la dir. d'A. D. WHALEN. Academic Press, p. iii. DOI : <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-744850-3.50002-X>.
- WONG, J. (2008). *Theory of Ground Vehicles*. Wiley.
- WUNDERLICH, A., B. GOOSSENS et C. K. ABBEY (2016). « Optimal Joint Detection and Estimation That Maximizes ROC-Type Curves ». In : *IEEE Transactions on Medical Imaging* 35.9, p. 2164–2173. DOI : [10.1109/TMI.2016.2553001](https://doi.org/10.1109/TMI.2016.2553001).
- XUE, W., Y. GUO et X. ZHANG (2007). « A Bank of Kalman Filters and a Robust Kalman Filter Applied in Fault Diagnosis of Aircraft Engine Sensor/Actuator ». In : *Second International Conference on Innovative Computing, Informatio and Control (ICICIC 2007)*, p. 10–10. DOI : [10.1109/ICICIC.2007.3](https://doi.org/10.1109/ICICIC.2007.3).
- YAMAGUCHI, S. et H. ITAKURA (1999). « A modular neural network for control of mobile robots ». In : *ICONIP'99. ANZIIS'99 ANNES'99 ACNN'99. 6th International Conference on Neural Information Processing. Proceedings (Cat. No.99EX378)*. T. 2, 661–666 vol.2. DOI : [10.1109/ICONIP.1999.845674](https://doi.org/10.1109/ICONIP.1999.845674).
- YANG, G.-H., J. L. WANG et Y. C. SOH (2001). « Reliable h_∞ controller design for linear systems ». In : *Automatica* 37.5, p. 717–725. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(01\)00007-3](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(01)00007-3).
- YANG, H., B. JIANG, V. COCQUEMPOT et M. CHEN (2013). « Spacecraft formation stabilization and fault tolerance : A state-varying switched system approach ». In : *Systems and Control Letters* 62.9, p. 715–722. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2013.05.007>.
- ZHANG, Q. (2018). « Adaptive Kalman filter for actuator fault diagnosis ». In : *Automatica* 93, p. 333–342. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2018.03.075>.
- ZHANG, X., C. GLENNIE et A. KUSARI (2015). « Change Detection From Differential Airborne LiDAR Using a Weighted Anisotropic Iterative Closest

- Point Algorithm ». In : *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing* 8.7, p. 3338–3346. DOI : [10.1109/JSTARS.2015.2398317](https://doi.org/10.1109/JSTARS.2015.2398317).
- ZHANG, Y. M. et J. JIANG (2002). « Active fault-tolerant control system against partial actuator failures ». In : *IEE Proceedings - Control Theory and Applications* 149.1, p. 95–104. DOI : [10.1049/ip-cta:20020110](https://doi.org/10.1049/ip-cta:20020110).
- ZHANG, Y. et J. JIANG (2008). « Bibliographical review on reconfigurable fault-tolerant control systems ». In : *Annual Reviews in Control* 32.2, p. 229–252. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2008.03.008>.

Approche informationnelle pour la navigation autonome tolérante aux défauts

Application aux systèmes robotiques mobiles

Résumé

La navigation autonome des systèmes robotiques mobiles a suscité un grand intérêt dans la communauté scientifique. Cela est principalement dû à la diversité de ses secteurs d'applications. En raison de l'absence d'une intervention humaine, la navigation autonome doit être sûre et précise. Néanmoins, elle peut être sujet à différentes dégradations qui peuvent compromettre son objectif. En effet, les perturbations externes, tout comme les défauts capteurs et actionneurs, affectent les différents aspects de la navigation autonome que sont la localisation, la planification et le suivi de trajectoire. C'est pourquoi nous consacrons cette thèse à l'étude et à la conception de nouveaux algorithmes qui contribuent à rendre le système de navigation robuste et tolérant aux défauts. Nous avons fait le choix d'utiliser des algorithmes de diagnostic de défauts capteurs et actionneurs à base de résidus, et une commande robuste par modes glissants permettant d'assurer une tolérance passive contre les perturbations externes. La couche de diagnostic proposée est purement informationnelle. Elle se base sur l'utilisation de deux filtres informationnels avec différents modèles d'évolution, et les divergences de Bhattacharyya et de Kullback-Leibler pour la conception des résidus. Ces résidus sont évalués via des méthodes statistiques pour permettre la détection, la localisation et l'exclusion de défauts capteurs et actionneurs. L'approche proposée est appliquée sur des systèmes robotiques mobiles à roues avec entraînement différentiel. Les résultats expérimentaux obtenus sur la plate-forme robotique PRETIL de CRISAL sont présentés et discutés.

Abstract

Over the last years, autonomous navigation for mobile robot systems has known an increasing interest from the scientific community. This is mainly due to the diversity of its applications and the different challenges that it represents. Without any human intervention, autonomous navigation must be safe, reliable and accurate. Nevertheless, it may be subject to various degradations that could compromise its objective. Indeed, external disturbances, as well as sensor and actuator faults, may affect the different aspects of autonomous navigation, which are localization, path planning and trajectory tracking. This is why we are devoting this thesis to the design of new algorithms that contribute to make the navigation system robust against external disturbances and tolerant to sensor and actuator faults. We have adopted a residual generation based fault-diagnosis strategy combined with a sliding mode controller that is robust against a certain class of perturbations. The proposed diagnostic layer is purely informational. It is based on the use of two information filters with different evolution models, and the divergences of Bhattacharyya and Kullback-Leibler for residual design. These residuals are evaluated using statistical methods, in order to detect, isolate then exclude sensor and actuator faults from the navigation system. The proposed approach is applied to different differential drive mobile-robot systems. Experimental results obtained by using the CRISAL robotic platform, so-called PRETIL, are presented and discussed.