



HAL
open science

Transparence des savoirs dans l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique scolaire, raisonnements multiplicatifs. Apports d'une perspective mathématique sur les grandeurs et les unités

Christine Chambris

► To cite this version:

Christine Chambris. Transparence des savoirs dans l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique scolaire, raisonnements multiplicatifs. Apports d'une perspective mathématique sur les grandeurs et les unités. Histoire et perspectives sur les mathématiques [math.HO]. CY Cergy Paris Université, 2022. <tel-04391867>

HAL Id: tel-04391867

<https://hal.science/tel-04391867v1>

Submitted on 17 Jan 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC BY-NC-SA 4.0 - Attribution - Non-commercial use - ShareAlike - International License

Christine Chambris

Maîtresse de conférences, HC

Laboratoire de didactique André Revuz

CY Cergy Paris Université

Transparence des savoirs dans l'enseignement et
l'apprentissage de l'arithmétique scolaire,
raisonnements multiplicatifs
Apports d'une perspective mathématique sur les
grandeurs et les unités

Note de synthèse

Habilitation à diriger des recherches

CY Cergy Paris Université

soutenue le **vendredi 4 mars 2022**

devant le jury composé de :

Maha Abboud	CY Cergy Paris Université	Examinatrice
Marianna Bosch Casabò	Universitat de Barcelona (Espagne)	Rapporteuse
Aurélie Chesnais	Université de Montpellier	Rapporteuse
Lalina Coulange	Université de Bordeaux	Examinatrice
Jean-Luc Dorier	Université de Genève (Suisse)	Rapporteur
Etienne Ghys	ENS de Lyon	Président
Marc Moyon	Université de Limoges	Examinateur

... le continu géométrique est l'être premier. Car avoir conscience, c'est avoir conscience du temps et de l'espace, le continu géométrique est en quelque sorte adhérent à toute pensée consciente.

René Thom, 1970

The problem is not specific defects, but rather that divorcing mathematical concepts from their origins, in teaching, results in a course with a complete absence of principles and with defective logic.

Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov, 1938 / 1960

Table des matières

Un point préliminaire sur le lexique.....	5
Introduction.....	6
Chapitre 0. Une approche théorique privilégiée La théorie de la transposition didactique et la théorie anthropologique du didactique.....	13
Chapitre 1. Rapports épistémologiques entre grandeurs et nombres.....	15
1. Double rupture épistémologique au 19 ^e siècle.....	15
2. Le rapport au réel dans l'apprentissage des mathématiques – la question du « sens ».....	17
3. Axiomatisations et complexité conceptuelle des notions mathématiques: Le cas de l'enseignement de la proportionnalité.....	26
4. Savoirs savants sur les grandeurs.....	34
Chapitre 2. La numération décimale des entiers.....	42
1. Évolutions de l'enseignement de la numération au 20 ^e siècle : praxéologies à enseigner, ostensifs et savoir savant.....	43
2. La numération dans les années 2010 : solutions ou problèmes ?.....	52
3. Ostensifs de la numération.....	60
4. Une filiation incertaine : l'aspect décimal de la numération.....	62
5. La stabilité de la praxéologie rénovée de la numération décimale : vers un nouveau savoir savant du second ordre ?.....	68
6. Faire évoluer les praxéologies enseignées en numération ?.....	72
Chapitre 3. Le lien entre addition et ordre.....	74
1. Ordre et soustraction : idéalisation de la réalité et tâches.....	75
2. Interpréter des raisonnements d'élèves.....	80
3. Interpréter les difficultés des élèves et identifier leur origine.....	82
4. Raisonnement additif et raisonnement multiplicatif.....	88
5. Conclusions.....	89
Chapitre 4. Les unités, les raisonnements multiplicatifs.....	91
1. La notion d'unité dans la littérature en mathematics education.....	92
2. Trois moments de classe qui interrogent.....	96
3. Le traité de Bézout - une organisation mathématique des savoirs de l'arithmétique pour la notion d'unité.....	101
4. Potentialités des unités relatives : une relecture de travaux en didactique des mathématiques.....	108
5. Des savoirs transparents.....	112
6. Conclusions.....	116
Chapitre 5. Conclusions et perspectives.....	120
1. Les savoirs sur les grandeurs.....	120
2. L'arithmétique comme science des quantités quand elles sont exprimées en nombres.....	125
3. La transparence des savoirs de l'arithmétique scolaire.....	129
4. Transparence des savoirs dans l'enseignement de la proportionnalité.....	133
5. Vers un texte pour le savoir à enseigner en arithmétique scolaire.....	141
Références.....	142

Un point préliminaire sur le lexique

Nombre de textes de didactique des mathématiques, et certains de didactique de la physique, sur les grandeurs s'ils ne commencent pas par une section sur le lexique en contiennent en général une. Après toutes ces années de travail sur la question des grandeurs, j'ai renoncé à cette discussion dans cette note (il y en avait une dans ma thèse). Les acceptions des mots grandeurs et quantités ont en effet énormément varié au fil de l'histoire, sans que les usages ont jamais été stabilisés me semble-t-il. Il est toutefois probable que dans mes travaux, si j'ai initialement utilisé le mot *grandeur* de façon exclusive, le mot *quantité* soit de plus en plus présent, voire se substitue progressivement au premier.

Par ailleurs, et c'est peut-être ce qui explique toute cette difficulté, l'historien des mathématiques, Dhombres (1997) écrit : « Il faut interpréter une surprise, le fait que dans les *Eléments* d'Euclide ne figure aucune définition de la grandeur [...] Si l'on peut discerner les raisons d'une telle absence dans l'ordre philosophique, me paraît essentielle une raison que je qualifie d'épistémologique. Il s'agit de la volonté de préserver l'avenir : sera *ipso facto* conçue comme grandeur celle qui satisfera les requis de la théorie construite ». (p. 5)

Disons cependant que les grandeurs ou les quantités sont à la fois des objets mathématiques *théoriques* que nous allons explorer – et l'objet théorique se construira au fil du texte – et des objets, *empiriques*, « concrets » « qui se mesurent » ou « qui se comptent », les longueurs, des mètres, les masses, des grammes, les quantités de timbres, etc. supposés *plus ou moins* connus du lecteur.

Il faut par ailleurs être vigilant sur la polysémie du mot *grandeur* dans la langue courante, y compris celle des scientifiques. La grandeur d'un objet renvoie à sa taille selon une certaine qualité. À la fois la taille et la qualité sont désignées par le mot *grandeur*. Pour la qualité, on précise parfois « espèce de grandeur ». Par exemple, à propos d'un triangle, on peut s'intéresser à la taille de son contour, disons 12 cm. Cette taille, 12 cm, est la *longueur* du contour. Le type de qualité, à savoir être long, est aussi la *longueur*. Le périmètre, la longueur du plus grand des côtés sont deux grandeurs attachées au triangle, de l'espèce longueur. On pourrait considérer une autre taille attachée au triangle, 15 cm^2 , son aire, grandeur de l'espèce aire.

Introduction

« For him [Davydov], the primitive notion is quantity (understood as a collection of objects endowed with a total order relation). He wrote:

the concept of number arises within the context of measurement of a continuous quantity so that a multiple relationship is established between that quantity and a part of it that is used as a unit of measure. According to this it is possible to consider counting as the measurement of a set of discrete objects. (Davydov, 1982, p. 228)

Thus, in this view, the origin of arithmetic thinking is not to be found in cardinality. Cardinality is here a derivative concept. Given the evanescence of a Bourbakist approach to mathematics today, we can imagine that if Davydov were to engage in the same archeological digging, he would come up with a different result—and, likely, with a different curriculum proposal as well. » (Radford, 2021, p. 338)

Cette citation de Radford pourrait résumer nombre des questions et des tensions qui habitent cette note de synthèse. En effet, le didacticien des mathématiques soviétique Davydov a conçu et déployé, à partir des années 1960, une ingénierie pour l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique scolaire, en y mettant la notion de quantité comme fondement. Ce choix est argumenté par une diversité d'analyses d'ordres mathématique, historique, politique, psychologique, épistémologique, philosophique que Radford synthétise avant de tirer cette conclusion. En France et dans d'autres pays du monde, la réforme des mathématiques modernes des années 1955-1975 a mis en avant la théorie des ensembles comme socle pour l'enseignement des nombres. La réorganisation des savoirs par Bourbaki a assurément donné une légitimité sur la durée à ce choix, semblant être considéré aujourd'hui comme allant de soi. Ces éléments rendent peut-être l'approche ensembliste évanescence aujourd'hui, dans l'enseignement.

Pour autant, au regard des évolutions de l'enseignement et de la situation actuelle de l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique scolaire et en dépit de la pénétration de la théorie des ensembles tant au plan des mathématiques que de leur enseignement, est-ce qu'une nouvelle fouille visant à préciser des choix de fondements de l'arithmétique scolaire, réalisée aujourd'hui, conduirait à des résultats différents de ceux de Davidov ?

Le projet de cette note n'est pas d'élaborer un curriculum. Cinquante ans après la réforme des mathématiques modernes, cette note se propose de présenter parallèlement deux enquêtes sur l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique scolaire, aujourd'hui. L'une porte sur des données de natures variées. Elle repère et tente de comprendre des difficultés d'enseignement ou d'apprentissage. Elle est conduite soit directement dans la classe ou dans des productions d'élèves, soit indirectement dans l'étude d'évolutions curriculaires, soit dans la littérature de recherche en didactique des mathématiques et de psychologie cognitive en donnant une large place à la littérature anglo-saxonne. L'autre est de nature mathématique et épistémologique. Elle est ancrée dans les mathématiques du présent ou du passé sur les grandeurs et leurs rapports aux nombres. Des textes relevant de l'épistémologie des mathématiques éclairent à la fois les textes mathématiques produits par des mathématiciens d'aujourd'hui ou d'hier et le rapport au réel de ces mathématiques. Cette double enquête permet de poser la question de la possibilité d'un

éclairage de phénomènes curriculaires en arithmétique scolaire par les savoirs mathématiques sur les grandeurs.

Des approches didactiques ancrées dans la discipline mathématique

Dans la littérature américaine de recherche sur l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique scolaire (e.g., Harel & Confrey, 1994, Thompson et al., 2014), souvent les fondations mathématiques ne sont pas questionnées. La théorie des ensembles constitue le fondement des mathématiques et les fondements de l'enseignement sont recherchés davantage du côté de la psychologie que des mathématiques.

La didactique *à la française* s'est en partie construite *contre* la psychologie : « One of the main features of the French paradigm of research in the didactics of mathematics is to give voice to basic research in this domain, which is not considered as a field of applied psychology or pedagogy » (Margolinas & Drijvers, 2015, p. 896). Ainsi, par contraste, d'autres approches, souvent développées en Europe continentale, prennent la discipline mathématique comme principale discipline de référence. Bergsten (2014) précise par exemple à l'entrée *Mathematical approaches* de l'*Encyclopaedia of Mathematics Education* :

Mathematical approaches in mathematics education take the characteristics and inner structures of mathematics as a discipline (i.e., the logic of the subject) as its main reference point in curriculum and research studies. (p. 376)

Pour autant, dans les travaux qui se situent dans ces dernières approches, le rapport aux mathématiques académiques n'est pas unique. Par exemple, Brousseau et Brousseau (1987) (*Théorie des situations didactique*, en France) inscrivent leur ingénierie Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire 'dans' le savoir savant actuel des mathématiciens :

« L'objet de la phase I est donc de construire un tel ensemble $[Q^+]$: les enfants créent et expérimentent des nombres nouveaux pour mesurer diverses grandeurs.

a) La phase I.1. permet aux élèves d'inventer d'abord les « rationnels » (act. 1 séance) par une méthode de *passage au quotient sur l'ensemble des couples de rationnels* (activité 1, 4 séances). Nous analyserons longuement cette première activité : « mesure de l'épaisseur d'une feuille de papier » pour bien montrer l'évolution du statut de ces rationnels. (Paragraphe 4.). (Brousseau, 1981, p.58, je souligne)

De leur côté, Steiner et coll. (Steiner, 1969) (*Stoffdidaktik en Allemagne*) élaborent une axiomatique *ad hoc* des grandeurs qui permet de définir les rationnels comme composition d'opérateurs sur les grandeurs, avec l'image de machines qui agrandissent et réduisent. Dans sa phénoménologie des structures mathématiques, Freudenthal (1983) (*Realistic Mathematics Education au Pays-Bas*), par des analyses approfondies des concepts et méthodes mathématiques, introduit des structures mathématiques spécifiques pour mettre au jour le travail de mathématisation qui constitue selon lui le cœur de l'apprentissage des mathématiques. Il enracine la signification de ces structures dans les expériences et le langage quotidiens.

De son côté, la théorie de la transposition didactique, développée par Chevallard (1985), en France, a permis de mettre en évidence, au début des années 1980, des phénomènes de modifications de savoirs pris dans la sphère savante pour être enseignés dans le secondaire, s'attachant à l'époque en partie à éclairer certains phénomènes curriculaires qui s'était produits dans les années toutes proches de la réforme des mathématiques modernes. Les travaux ultérieurs

ont montré que les processus de transposition didactique sont à l'œuvre dès lors qu'un nouveau contenu d'enseignement est introduit. Une conséquence de la transposition didactique est alors la *relativité institutionnelle des savoirs*. La Théorie anthropologique du didactique qui prolonge la théorie de la transposition didactique inclut dans ses analyses le savoir mathématique sans le fixer a priori puisqu'il s'agit de décrire les choix des institutions, qui peuvent donc être divers, et leur fonctionnement, ce qui permet d'intégrer des dynamiques au niveau même des savoirs.

La plupart des travaux que j'ai menés depuis une quinzaine d'années s'inscrivent dans ce dernier cadre et donc dans cette culture des « approches mathématiques » et contribuent à la compréhension des relations entre les mathématiques originellement transposées qui fondent l'arithmétique scolaire et les savoirs à enseigner, enseignés et appris dans ce domaine. Comme on le verra, ces relations ont une certaine complexité et sont le siège de phénomènes didactiques qui peuvent surprendre.

Savoirs transparents et raisons d'être

Les grandeurs, comme objets théoriques, ont donc quitté le curriculum primaire de l'arithmétique (et probablement de la géométrie également) aux alentours de 1970, en France et dans d'autres parties du monde. Elles demeurent évidemment comme objets *concrets* ou *empiriques* au sein de ces curricula. Est-ce à dire que les savoirs théoriques impliquant les grandeurs ne sont plus nécessaires et ne se manifestent plus ? Sans répondre à la question, on pressent que, dans la mesure où elles sont censées n'être plus là, si les grandeurs théoriques se manifestent dans l'arithmétique, cela risque d'être sous la forme de phénomènes atypiques ou inattendus, dans les classes.

Parmi les phénomènes observés, l'un d'entre eux, récurrent, impliquera des « savoirs transparents » (Margolinas & Lappara, 2011). Comme leur nom l'indique ce sont des savoirs qui *interviennent* dans les situations d'enseignement mais qui ne sont *pas visibles* pour tout ou partie des acteurs des institutions d'enseignement. Selon les contextes où ils interviennent, il est possible de préciser différentes facettes de cette transparence.

1. Il peut s'agir de connaissances identifiées par le professeur comme potentiellement convoquées voire nécessaires dans l'investissement de situations didactiques (perspective de la théorie des situations didactiques) par les élèves mais « de savoirs non institutionnalisés ». Ce peut être par exemple parce que l'institutionnalisation des savoirs est une phase délicate de la gestion des situations par les enseignants (Coulange, 2011)
2. Ce terme peut « désigner des savoirs qui ne sont pas « visibles » pour le professeur à un moment donné, parce qu'ils vivent dans des institutions qui ne sont pas celles que fréquente le professeur à ce moment-là. » (Margolinas, 2021, p. 42). Ces savoirs ne « vivent » pas ou vivent *mal* dans ces institutions, mais ils ne sont pas « transparents » par « essence » pouvant vivre *bien* dans d'autres institutions. Cette transparence institutionnelle est possiblement liée à un défaut dans la transposition didactique, qui n'a pas permis d'inclure (correctement) ce savoir dans le savoir à enseigner.
3. Il peut s'agir enfin de savoirs non « visibles » pour le professeur à un moment donné qui n'identifie pas les connaissances mises en fonctionnement par certains élèves dans les situations ou qui seraient manquantes pour d'autres élèves (Lappara & Margolinas, 2011). Il

s'agit alors d'un défaut dans l'analyse du professeur, qui peut être dû par exemple à un manque de formation, sur les savoirs en jeu dans une situation.

Chesnais montre que « [l]a transparence (Margolinas et Laparra, 2011) ou l'invisibilité (Bautier et al., 2011) de certains éléments dans les classes apparaît comme un des facteurs majeurs de la différenciation des apprentissages. » (p. 38) En effet, seuls les élèves qui ont déjà les connaissances peuvent s'engager dans les tâches (transparence de type 2) ou encore ceux qui savent repérer les implicites du travail scolaire et notamment repérer les objets de savoir sont avantagés (transparences de type 1 ou 3). Ainsi la transparence des savoirs est une source importante d'inégalités scolaires (voir aussi, Laparra & Margolinas, 2011).

En contrepoint de la transparence institutionnelle d'un savoir se trouve peut-être parfois ce que la théorie anthropologique du didactique appelle les raisons d'être des œuvres (Chevallard, 1998, 2003). En effet, une première acception des raisons d'être est d'ordre épistémologique : les raisons d'être sont des questions. Ces questions vont pouvoir être posées aux élèves et les savoirs à l'étude apparaîtront comme des réponses à ces questions. Cette acception renvoie au *sens* des savoirs (Chevallard, 1998). Chercher les raisons d'être des objets curriculaires ne se limite pas à ce type de questionnement épistémologique. Un autre type de raison d'être réside en effet dans la légitimation des objets d'enseignement : pourquoi il serait pertinent de donner droit de cité¹ à un objet dans l'activité de la classe mathématique (Chevallard, 2003). Ces deux entrées sont complémentaires au regard de l'activité de la classe : la première centrée sur l'épistémologie et la seconde, sans doute plus générale, sur la pertinence, voire la nécessité, de donner droit de cité aux objets. Quand un objet n'a pas (ou plus) de raisons d'être dans un curriculum, il n'est plus possible de problématiser son enseignement. Identifier des raisons d'être de savoirs transparents constitue alors une préoccupation paradoxale des recherches présentées dans cette note.

Questions et méthodes – quelques précisions

Trois types de questions à l'étude qui s'entrecroisent

Les travaux présentés dans cette note procèdent de méthodologies diverses, étudient des types de corpus de natures différentes et répondent à des questions elles-aussi variées. Au regard de ce qui précède, trois grands types de questions s'entrecroiseront pour étudier les rapports entre les mathématiques de l'arithmétique scolaire et les apprentissages des élèves.

- Un premier type de questions qui apparaît dans mes travaux relève plutôt de l'**enquête mathématique**, avec souvent une dimension épistémologique ou historique, sur les 'savoirs mathématiques savants' qui pourraient être transposés ou qui l'ont été pour 'fonder' l'arithmétique scolaire. La finalité de ce premier type d'enquête n'est pas tant d'imaginer ce que pourraient être des fondements savants pour l'arithmétique avec le projet de les transposer dans l'enseignement (comme par exemple dans la Stoffdidaktik) mais plutôt d'étudier les phénomènes évoqués ci-avant avec les questions suivent.

- Un deuxième type de question est descendant au plan de la transposition. Il s'agit en effet d'identifier les choix de fondations mathématiques faits dans certaines institutions et de mettre en évidence certains effets de ces choix, aussi bien dans les premiers temps de la transposition du savoir savant qu'à plus long terme. Ainsi, une série de questions se posent. Quelles sont les

¹ Au sens d'accorder l'entrée dans la cité.

fondations mathématiques retenues pour l'arithmétique scolaire, en différents lieux et différents temps ? Quelles adaptations ou transformations sont-elles faites 'sur' ce savoir -qu'elles semblent délibérées ou incidentes- au cours du processus de transposition didactique, en particulier d'abord pour constituer le savoir à enseigner, puis pour qu'il soit enseigné, et qu'en apprennent les élèves ? Au niveau du savoir à enseigner, les transformations peuvent être étayées par des considérations relevant par exemple de la psychologie cognitive ou encore des travaux de didactique ; elles peuvent aussi être le produit de la transposition didactique interne (transformations réalisées par l'enseignant dans la classe) et éventuellement avoir été intégrées a posteriori dans des manuels dont les auteurs sont des praticiens. Que résulte-t-il de ces transformations, dans les manuels ou la classe, notamment au niveau des tâches prescrites aux élèves et des façons enseignées ou apprises pour les accomplir ?

- Un troisième type de questions est ascendant au plan de la transposition. Il s'agit, à partir d'une observation de l'existant, dans des classes, dans des manuels ou les programmes, voire dans des travaux de recherche, de se poser la question d'une 'théorie mathématique' dans laquelle les éléments observés pourraient s'inscrire. En d'autres termes, il s'agit d'identifier *a posteriori* un texte de savoir déjà existant ou de construire un tel texte, mathématique, cohérent, qui soit *au plus près* de ce qu'on observe. Cette cohérence est forcément locale, au moins au départ. De telles questions se posent notamment du fait du processus de transposition didactique évoqué ci-avant. En effet, pour répondre à la nécessité de l'enseignement, dans les transformations qui conduisent au savoir à enseigner, de nouvelles relations logiques apparaissent parfois au sein des objets à enseigner. Il s'agit donc d'explorer ces créations, afin de repérer leurs potentialités en termes de raisonnement mais aussi des propriétés qui seraient éventuellement manquantes ou encore de caractériser une cohérence locale ou consistance relative pour prédire la stabilité de ce qui résulte de la transposition. Autrement dit, d'une part dans quel type d'organisation logique ces nouveaux savoirs trouvent-ils une place, d'autre part quels sont leurs fondements épistémologiques ? Par ailleurs, de telles questions se posent pour une autre raison. En effet, la logique ascendante permet de faire un pas de côté par rapport à la transposition didactique et d'envisager l'éventualité de savoirs transparents (de l'arithmétique) qui seraient très *primaires*, tels ceux liés à la littératie (Margolinas & Laparra, 2019), désignés ainsi par Goody (1979), au sens d'essentiels et très anciens. De tels savoirs pourraient *apparaître* incidemment et correspondre à des *besoins fondamentaux* d'apprentissage des élèves. Se pose alors également la question de la possibilité de leur inscription logique dans le savoir à enseigner de l'arithmétique.

Méthodes : observer, comparer pour voir l'invisible

Les corpus à l'étude dans cette note sont de natures variées, des textes mathématiques ou scolaires, des séances de classes. Toutefois la visée des travaux présentés a été compréhensive plutôt que transformative. Comprendre l'arrière-plan épistémologique de l'arithmétique scolaire m'a pris plus de dix ans. Et j'ai sans doute considéré que c'était une condition préliminaire à réaliser pour pouvoir envisager d'intervenir ensuite, éventuellement.

Au plan des méthodologies, on le verra, nombre des recherches présentées dans cette note s'appuient sur des comparaisons. En cela rien de très original car la comparaison est une méthode inhérente à quasiment toute démarche scientifique (cf. Vigour, 2005). On peut cependant identifier des motifs récurrents dans ces comparaisons. Le cadre fourni par la théorie anthropologique du

didactique permet de situer ces comparaisons théoriquement : il s'agit d'enquêter sur un 'même objet' dans des institutions différentes et de comparer ce qu'y passe, essentiellement les différentes composantes des praxéologies et l'organisation relative de ces praxéologies. La notion d'institution étant suffisamment souple, de nombreux types de comparaisons sont envisageables. Ainsi, après d'autres collègues (Hersant, 2005, Bronner, 2008, Neyret, 1995, par exemple), j'ai conduit plusieurs enquêtes sur l'évolution du curriculum français sur une période longue, chaque période stable déterminant une institution dans laquelle les pratiques se développent. J'ai aussi conduit une enquête qui s'inscrit dans une comparaison internationale, qui plus est, à des époques différentes, l'enseignement de l'arithmétique dans chaque pays à l'époque considérée est alors une institution, et encore j'ai comparé l'enseignement de deux 'objets proches' tout en étant différents dans la même classe, avec le même professeur, dans ce dernier cas c'est la pratique qui se développe avec chaque objet qui détermine l'institution. Bessot et Comiti (2008) ont produit une analyse des types d'étude et de résultats obtenus dans les thèses à l'encadrement desquelles elles ont participé impliquant des comparaisons entre la France et le Vietnam. Ce que permettent d'abord ces comparaisons, pour le chercheur, c'est une dénaturalisation des objets de savoir dans les institutions qui lui sont familières : prendre conscience qu'*ailleurs* est différent permet de prendre conscience qu'un *autre* est possible et en retour de questionner ses objets familiers. Elles permettent donc par la suite d'enrichir le répertoire praxéologique, en tant qu'autre possible. Donner aux élèves une même tâche à résoudre dans chacune des institutions fournit un moyen pour étudier les effets de ce qui est enseigné sur ce qui est appris et de mettre en évidence des implicites de l'une ou l'autre institution. A une échelle plus large, la mise en place d'une ingénierie, en important un objet qui existe dans l'autre institution uniquement, permet de spécifier certains ressorts de l'ingénierie qui ne sont forcément pas visibles dans l'institution d'origine, d'identifier des chaînes trophiques. Ces différentes dimensions seront éclairantes pour caractériser certains de mes résultats.

L'organisation globale du propos

La présentation de mes travaux est organisée en quatre temps dans lesquels les trois types de questions évoquées précédemment s'entrecroisent. Dans le premier chapitre, je reviendrais sur des préoccupations anciennes, les rapports épistémologiques entre grandeurs et nombres, à la lumière de mes travaux récents sur la proportionnalité et ce qu'ils m'ont permis de clarifier à la fois sur le rapport au réel dans l'enseignement des mathématiques et sur le processus de transposition didactique. Deux premières raisons d'être des grandeurs au regard de l'apprentissage de la proportionnalité en émergeront également. Ce premier chapitre à la dimension historique forte, aussi bien au plan de l'histoire des mathématiques que de l'histoire de l'enseignement, permettra aussi de situer les horizons épistémologiques et mathématiques qui seront à l'arrière-plan des chapitres suivants. Le deuxième chapitre sera consacré à l'enseignement et l'apprentissage d'une notion particulière de l'arithmétique : la numération décimale. Cette notion est au cœur de toute l'arithmétique élémentaire parce qu'elle intervient dans la désignation des nombres dès qu'ils sont un peu grands (au-delà de dix). Par suite, elle permet de mémoriser les grandes quantités et fournit les techniques de calcul sur les nombres un peu grands quelles que soient probablement les techniques retenues. Dans mes travaux, l'étude de cette notion a émergé à la fin de ma thèse. J'avais mis en évidence la disparition de la « numération en unités » et l'apparition de nouveaux objets. J'avais également introduit l'expression générique « unités de la numération » pour

désigner les unités, dizaines, centaines... Je reviendrai sur mes principaux résultats dans ce domaine. Ils sont relatifs d'une part à la caractérisation d'évolutions du savoir à enseigner et à l'étude de phénomènes didactiques liés à la transposition didactique. Je reviendrai aussi sur la question de la diffusion de mes travaux dans le domaine de la numération. Les évolutions du savoir à enseigner dans le domaine de la numération s'inscrivent dans le cadre plus global de la modification du bloc de savoir savant transposé pour l'arithmétique mais j'ai mis longtemps à comprendre précisément la nature de ce lien. Il sera seulement évoqué dans le chapitre 2, puis clarifié progressivement dans les chapitres 3 et 4. Le troisième chapitre s'attaquera à ce qui me semble être *la* propriété caractéristique des grandeurs théoriques. Il s'agit du lien entre ordre et addition. Diverses facettes de cette propriété et ses manifestations dans des contextes didactiques variés seront à l'étude, qui permettront d'interroger à la fois sa transparence et de revenir aux raisons d'être des grandeurs. Le quatrième chapitre explorera la question des unités sous plusieurs angles, dans des épisodes de classe où elles apparaissent dans une sorte de présence absente, dans la littérature didactique, dans leur habitat du 18^e siècle -l'arithmétique de Bézout-. Ce voyage dans le temps me permettra d'introduire un nouvel objet mathématique les « unités relatives » qui éclairera les chapitre 2 et 3 et une propriété de la mesure des grandeurs, dite propriété M, sera identifiée, peut-être caractéristique des grandeurs en arithmétique. Ces « unités relatives » et la propriété M permettent de renouveler le questionnement sur les épisodes de classe, notamment en termes de savoirs transparents et de raisons d'être des grandeurs. Quelques travaux didactiques seront discutés au filtre des unités relatives. Le cinquième chapitre présentera des conclusions et des perspectives de recherche, en articulation avec les chapitres précédents.

Avant d'entrer dans le premier chapitre je donne des éléments sur le cadre théorique dans lequel s'inscrivent les travaux présentés. Il s'agit à la fois de quelques grands principes qui sous-tendent ce cadre et de concepts clés de la théorie qui seront utilisés dans la suite.

Chapitre 0. Une approche théorique privilégiée

La théorie de la transposition didactique et la théorie anthropologique du didactique

Une dimension fondamentale de l'approche anthropologique est son caractère institutionnel. Une institution est une organisation sociale qui a une certaine stabilité, ce peut être une classe, une famille, un système éducatif donné, etc., en ce sens que des manières de faire et de penser y sont instituées.

Le processus de transposition didactique (Chevallard, 1985; Chevallard & Bosch, 2020 enc. TD) renvoie aux transformations auquel est soumis un objet ou un bloc de savoir à partir du moment où il est sélectionné, transformé en un savoir à enseigner (c'est-à-dire *enseignable* et s'inscrivant dans un contexte où il acquiert éventuellement une nouvelle signification et où il apparaît utile), puis enseigné et *in fine* appris. La théorie de la transposition didactique considère ainsi que les savoirs enseignés trouvent leur origine dans d'autres institutions dites *savantes* (*scholar* en anglais), dont lesquelles ils ont une vie et une organisation propres et qui contribuent aussi à leur légitimité dans le système d'enseignement.

Dans ce processus, l'étape intermédiaire qui consiste en une élaboration du savoir à enseigner est une étape clé de la modélisation. Essentiellement réalisée par la « noosphère » (littéralement la sphère de ceux qui pensent sur le système éducatif), cette étape consiste en la sélection de blocs de savoirs savants et en la préparation d'un texte de savoir « à enseigner » prenant en compte ces blocs et diverses prescriptions formulées par d'autres agents noosphériens. Le savoir à enseigner est ensuite à nouveau transformé (transposition didactique interne) par l'enseignant, afin d'être enseigné et finalement ce que les élèves apprendront constituera le savoir appris.

Par ailleurs, une facette essentielle, voire une dynamique fondamentale, de l'approche anthropologique et de la transposition didactique est la métaphore de « l'écologie des savoirs » (Artaud, 1998). Il s'agit d'étudier des questions comme : Avec qui les objets vivent-ils ? Comment naissent-ils ? Comment meurent-ils ? La notion d'habitat indique le « lieu » dans lequel vit un objet, celle de niche ce que fait l'objet dans cet habitat (en d'autres termes, 'les services qu'il rend' dans cet habitat). La notion de chaîne trophique permet aussi d'outiller les analyses : « Selon une image empruntée à l'écologie biologique, se créent – et se rompent, au cours notamment des mouvements transpositifs – des chaînes trophiques, où une praxéologie « se nourrit d'une autre » – et, paradoxalement, par cela, la fait exister dans l'institution qui lui sert d'habitat. » (Chevallard, 2007, p. 714). Les besoins trophiques sont donc les besoins nutritionnels d'un organisme vivant, ce qu'il a besoin de manger pour vivre. En ce qui concerne les objets mathématiques, il s'agit des objets dont un objet mathématique a besoin pour vivre dans l'écosystème considéré.

La théorie de la transposition didactique et les analyses en termes d'écologie des savoirs ont donné naissance à la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1992) qui considère les mathématiques comme une activité humaine, institutionnellement située et qui cherche à élucider le rapport des sociétés humaines au "didactique", c'est-à-dire à tous les "facteurs" possibles de l'apprentissage (Chevallard & Bosch, 2020 ATD). La TAD postule donc la relativité

institutionnelle des savoirs. Elle fait l'hypothèse que les savoirs sont des constructions institutionnelles et que les activités des sujets des institutions, en particulier l'enseignement et l'apprentissage, ce qui est enseigné et ce qui est appris, sont contraints par les institutions. Dans l'extension de la théorie de la transposition didactique qu'a permis la Théorie Anthropologique du didactique (TAD), l'enseignement et l'apprentissage ne sont donc pas des processus individuels mais anthropologiques, au sens où les activités des sujets (institutionnels) reflètent les activités des institutions auxquelles ils sont assujettis. Un système d'enseignement donné est une institution, pourvu que des pratiques relativement stables s'y soient développées.

La notion de praxéologie s'est développée à la fin des années 1990 afin de décrire les activités humaines (e.g., Chevallard & Bosch, 2020, ATD, Bosch, Gascon, & Trigueros, 2017) en termes de praxis (composante pratique) et logos (composante théorique). La pratique ou *praxis* (savoir-faire) s'exprime en tâches - types de tâches (un ensemble de problèmes similaires) et techniques (une façon de traiter les tâches d'un type). Le *logos* décrit, organise, justifie, explique les techniques. Il contient deux niveaux de discours : le discours technologique (ou technologie) relatif à la technique (description, explication, justification des techniques existantes et production de nouvelles techniques), la théorie est un second niveau de discours relatif au discours technologique mais qui permet aussi de donner du sens aux problèmes et d'interpréter les techniques. Il fournit les principales notions, axiomes et aussi les principes non questionnés des mathématiques enseignées dans l'institution. Pour les praxéologies mathématiques, celles que nous étudierons, je fais l'hypothèse qu'il inclut donc les 'blocs de savoirs savants sélectionnés pour être transposés'. La TAD postule que toute activité humaine peut être découpée en types de tâches et qu'aux types tâches sont associées des praxéologies.

Pour décrire les praxéologies mathématiques, nous utilisons aussi les notions dialectiques d'ostensif et non-ostensif (Bosch & Chevallard, 1999). Un objet perceptible intervenant dans une praxéologie mathématique est appelé ostensif. L'ensemble des praxéologies qui impliquent un ostensif donné est appelé sa valence (ou valeur) instrumentale, la 'signification' créée par l'ostensif est appelée sa valence (ou valeur) sémiotique. Les ostensifs constituent la partie perceptible de l'activité. Dans l'analyse de l'activité mathématique, les éléments ostensifs font partie du réel empirique, accessible aux sens. Les non-ostensifs sont alors les 'notions' évoquées **explicitement** en relation avec ces manipulations d'ostensifs.

Ainsi dans l'étude de trois types de questions présentées précédemment, les réponses sont de nature praxéologique ou de nature écologique. Il arrive aussi que les interactions entre ces deux dimensions soient à l'étude.

Chapitre 1. Rapports épistémologiques entre grandeurs et nombres

Les mathématiques ont connu de profonds changements épistémologiques dans la seconde moitié du 19^e siècle et au début du 20^e siècle. Otte (2007) décrit un double mouvement : d'une part la mise en avant des relations et structures comme objets mathématiques, d'autre part la recherche d'objets de base. *In fine*, les évolutions ont abouti à un changement de paradigme pour l'axiomatisation. Le paradigme d'idéalisation de la réalité a été remplacé par le paradigme de non contradiction. Le rapport au réel des mathématiques des mathématiciens s'en est trouvé modifié. Dans ces évolutions au niveau des savoirs savants, les rapports épistémologiques entre grandeurs et nombres ont fortement varié. Depuis près d'un siècle, mais avec des manifestations de natures variées, ces évolutions ont eu et ont encore des effets dans l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique scolaire.

Le but de ce chapitre est de comprendre ces évolutions dans le savoir savant et de commencer à caractériser à la fois leur impact au niveau du savoir à enseigner et des aspects du processus de transposition didactique. Il s'agit aussi d'amorcer l'exploration d'un autre possible, par des considérations d'ordres épistémologique et mathématique. Dans un premier temps, en appui sur la littérature du champ de l'histoire et de la philosophie des mathématiques, je donnerai quelques éléments sur cette modification du rapport au réel et de la place des grandeurs dans la sphère savante. Dans un deuxième temps, je présenterai des résultats anciens relatifs aux évolutions de la place des grandeurs dans le savoir à enseigner de l'arithmétique scolaire, qui font écho à ces transformations du savoir savant. Dans un troisième temps, je présenterai les conclusions d'un travail récent sur les évolutions de l'enseignement d'un objet particulier, la proportionnalité, en relation avec son apprentissage, interprétées avec le filtre constitué par ces changements de paradigmes épistémologiques. Dans un quatrième temps, je questionnerai le processus de la transposition et la modélisation de l'élaboration du savoir à enseigner en appui à la fois sur ces conclusions sur la proportionnalité, mes travaux antérieurs sur la transposition didactique et l'étude de quelques textes de mathématiciens et de didacticiens sur le rapport au réel dans les mathématiques et leur enseignement. Ce questionnement justifiera le dernier temps du chapitre, dans lequel je discuterai des constructions savantes des nombres en appui sur les grandeurs, dans l'histoire récente des mathématiques.

1. Double rupture épistémologique au 19^e siècle²

Les modifications d'ordre épistémologique du 19^e siècle peuvent être décrites comme la transformation de l'axiomatique euclidienne en théorie des ensembles et axiomatique formelle (Otte, 2007). Cette section décrit des éléments de cette transformation.

2 Cette partie s'appuie sur plusieurs textes d'histoire ou de philosophie des mathématiques, plus particulièrement sur un article d'Otte (2007), le mémoire de Gandon (2009) en vue de l'HDR, intitulé *Relations et quantités chez Russell (1897-1913)*, et dans une moindre mesure l'ouvrage d'histoire des mathématiques de Bourbaki (1984).

1.1. Deux paradigmes d'axiomatisation

Dans le premier paradigme (ancien), le réel est idéalisé et les idéalizations constituent les objets mathématiques sur puis à partir desquels le mathématicien travaille et raisonne. Les axiomes sont constitués par ce qui va de soi (des évidences). L'existence des objets mathématiques est d'abord la conséquence de leur idéalisation comme éléments ou *actions* (Otte, 2007) de la réalité. Au 19^e siècle, les mathématiques deviennent la « science qui tire les conclusions nécessaires » (Peirce, 3.558, cité par Otte, 2007, p.245). Elles se libèrent de contraintes existentielles liées à ses objets. Des structures définies de façon axiomatique et sans référence à la réalité sont introduites dans les mathématiques avec l'axiomatisation de l'algèbre (notamment les travaux de Grassmann), qui de langage devient science des structures (Otte, 2007). Avec les approches axiomatiques formelles (Grassmann, Peano ou Hilbert) les axiomatisations s'inscrivent dans un nouveau paradigme : l'axiomatique euclidienne est remplacée par une axiomatique de relations où les axiomes définissent des concepts qui ont des attributs (les axiomes deviennent des hypothèses). Les objets mathématiques sont décrits par leurs propriétés et c'est la non contradiction des propriétés qui assure la consistance de la théorie.

1.2. Les objets de base

Concernant les objets de base, jusqu'au milieu du 19^e siècle, les grandeurs sont le socle des mathématiques des savants (Boniface, 2002, Bourbaki, 1984, Gandon, 2009) : les mathématiques sont une science de la quantité. Jusqu'au 17^e siècle, ce qui est appelé nombre est une accumulation d'unités entières, le nombre apparaît ainsi comme ce qui mesure le discret. Les rapports (de grandeurs de même espèce) décrivent les relations quantitatives entre les grandeurs continues, ce ne sont pas des nombres. A la fin du 17^e siècle en occident, les progrès ont unifié les points de vue sur nombre et rapports en appui sur la mesure des grandeurs dans la sphère des mathématiciens. Ces progrès sont liés notamment aux travaux de Stevin (notamment sur l'introduction de l'écriture décimale) (Malet, 2006), mais aussi aux travaux de Newton (1707) qui affirme que le rapport de deux grandeurs de même nature est un nombre. Par exemple, l'Encyclopédie indique à l'entrée Nombre (La Chapelle, 1765), « M. Newton définit plus précisément le nombre, non pas une multitude d'unités, comme Euclide, mais le rapport abstrait d'une quantité à une autre de la même espèce, que l'on prend pour l'unité ». Quant aux grandeurs, « les Mathématiciens définissent ordinairement la grandeur, ce qui est susceptible d'augmentation & de diminution » (d'Alembert, 1757, Encyclopédie, à l'entrée Grandeur).

Parallèlement à l'émergence des structures formelles, mais relativement indépendamment de ce questionnement semble-t-il, après le choc de la découverte des géométries non euclidiennes (notamment par Bolyai en 1829), les fondements de la géométrie sont interrogés et les grandeurs qui fondent la géométrie, mais aussi le nombre, deviennent suspects (Bourbaki, 1984). La découverte des géométries non euclidiennes amène à un premier mouvement de refondation, le mouvement d'arithmétisation de l'analyse, voire de l'arithmétisation des mathématiques (Otte & Jahnke, 1981), où les nouveaux objets de base sont les *nombres entiers* dont l'objectivité n'est pas discutée à l'époque. Un des enjeux, en éliminant les grandeurs, est d'éliminer l'intuition sensible dans la définition des objets mathématiques. Les grandeurs sont ainsi exclues des premières constructions axiomatisées des réels. Ces constructions, celles de Dedekind (1858, publiée en

1872), Méray (la première publiée, en 1869) et Cantor reposent sur les entiers. Le changement de paradigme permet par ailleurs l'abandon des grandeurs pour la définition des nombres.

Nombre de mathématiciens revendiquent leur liberté 'nouvelle' :

la mathématique est entièrement libre dans son développement, et ses concepts ne sont liés que par la nécessité d'être non contradictoires, et coordonnés aux concepts antérieurement introduits par des définitions précises (Cantor, 1883, p. 182, cité par Bourbaki, 1984, p.34).

Certains mathématiciens semblent toutefois préoccupés par ces changements, tels Burali-Forti par l'abandon du rapport au concret dans le développement des mathématiques (Gandon, 2009) ou Lebesgue par l'abandon du paradigme d'idéalisation de la réalité (Otte, 2007).

Quoi qu'il en soit, la construction des nombres réels, dans le savoir savant, aujourd'hui, est fondée sur les classes d'équivalence de couples d'entiers naturels, eux mêmes fondés sur les ensembles, et non sur les grandeurs. Par ailleurs, le nouveau paradigme n'a peut-être évacué l'ancien qu'en apparence (en tout cas, chez certains mathématiciens) et Otte (2007) cite le logicien et philosophe des sciences, Casari :

whereas the new axiomatics, the axiomatics that arose from nineteenth century geometry and algebra, can really be seen only as a tool, although a very powerful one, of set-theoretical thinking, which grew out of nineteenth century analysis, axiomatics in the sense of Euclid, i.e. logical reduction, analysis and organization of intelligible concepts and meaningful sentences, seems to remain an irreducible, fundamental tool of our thinking (1974, p. 61 cité par Otte, 2007, p. 254).

Otte (2007) voit le paradigme de l'axiomatisation relationnelle comme un produit de la réflexion des mathématiciens sur leur propre activité mathématique qui pourrait se dérouler, au moins pour certains d'entre eux et en partie, dans un paradigme d'idéalisation de la réalité. Le rapport au réel des mathématiques et des nombres en particulier s'est modifié dans ce double processus et ce bouleversement est fondamental, dans les mathématiques, en termes des contraintes formelles qui pèsent sur l'existence des constructions mathématiques. Toutefois, la citation de Casari permet de continuer à interroger le rapport au réel dans le développement d'une pensée qui serait mathématique, y compris dans le travail des mathématiciens professionnels (en tout cas, au moins pour certains d'entre eux).

2. Le rapport au réel dans l'apprentissage des mathématiques – la question du « sens »

Cette histoire de la discipline académique et cette organisation nouvelle qui modifie au moins en partie le rapport des mathématiques (des savants) au réel pourraient sembler *a priori* bien éloignées des enjeux de l'apprentissage de l'arithmétique pour des enfants de 3 à 12 ans et plus généralement de l'apprentissage des mathématiques à l'école. Dans les années 1970 avec la réforme des mathématiques modernes dans de nombreux pays, voire dès les années 1940 en France, cette révolution épistémologique résonnera pourtant dans les mathématiques de l'école. L'écho sera retentissant en 1970.

Les grandeurs empiriques interviennent naturellement dans des tâches de l'arithmétique scolaire, et ceci à toutes les époques. Même si toutes les grandeurs n'interviennent pas à toutes les époques, il y a toujours des grandeurs, discrètes et/ou continues, pour étudier l'arithmétique scolaire. Elles

constituent des indices de la présence du réel. L'abandon du paradigme d'idéalisation de la réalité a cependant modifié la façon de considérer la question du rapport des mathématiques au réel à l'école car ce qui était auparavant pris en charge *jusqu'à un certain point* par la théorie mathématique (les grandeurs comme réalité mise en idée et des raisonnements en appui sur ces idées) ne l'est plus. Cette section, en trois parties, va considérer les questions suivantes. Après ces bouleversements dans la sphère savante, comment des mathématiciens envisagent-ils l'articulation entre les mathématiques des savants et les mathématiques de l'école ? Comment des didacticiens des mathématiques voient-ils d'une part la place du réel dans l'enseignement des mathématiques et comment l'articule-t-il avec les mathématiques savantes ? Quelles répercussions sur la place des grandeurs dans les programmes scolaires ces modifications savantes ont-elles ?

2.1. Point de vue de mathématiciens

Le mot célèbre de Jean Dieudonné, un des fondateurs de Bourbaki, dans les discussions préliminaires à la réforme des mathématiques modernes « A bas Euclide, à bas les triangles » est emblématique des changements introduits dans le temps de cette réforme. Pour autant, depuis l'invention des mathématiques modernes à la fin du 19^e siècle et jusqu'aux années 1970 au moins, des mathématiciens éminents ont affirmé la nécessité d'un appui sur le réel, voire sur les grandeurs, pour l'enseignement des mathématiques ou des nombres.

Dedekind, dans son texte *Continuité et nombres irrationnels* (1872) où il présente sa construction des réels écrit, « En concevant qu'une grandeur variable s'approche d'une valeur limite fixe, et notamment en prouvant la proposition que chaque grandeur qui croît constamment, mais non au-delà de toute limite, doit de façon certaine s'approcher d'une valeur limite, je me réfugiais dans les évidences géométriques. Maintenant aussi, je considère l'appel à l'intuition géométrique dans le premier enseignement du calcul différentiel comme extrêmement utile du point de vue didactique, et même indispensable si l'on ne veut pas perdre trop de temps. Mais que cette manière d'introduire au calcul différentiel ne puisse aucunement prétendre à la scientificité, personne sans doute ne le niera. » (Dedekind, 1872, cité par Boniface, 2002, p. 101). Dans cet extrait, le recours au géométrique appuie l'intuition mais le recours au géométrique n'a pas de scientificité. D'ailleurs Dedekind fait ensuite précéder sa construction des réels d'un point de vue géométrique mais la construction des réels se fait sans la mesure des grandeurs. Il n'y a pas de projet de théoriser les grandeurs puisqu'il s'agit de fonder les réels sur les entiers.

D'autres auteurs ont sans doute une conception différente de la nécessité d'un appui sur les grandeurs pour l'enseignement. Par exemple, dans plusieurs textes, Burali-Forti (1899, 1901) indique que sa construction axiomatique des nombres réels en appui sur les grandeurs (cf. section 6, ce chapitre) a à la fois une importance scientifique et une « importance didactique due à sa grande simplicité » (1901, p.19) et il précise que grâce à sa construction « la théorie des nombres réels peut s'obtenir rapidement [...] et de manière tellement simple qu'elle peut, immédiatement, être applicable dans l'enseignement secondaire supérieur » (ibid.). Concernant l'importance scientifique de sa construction, Burali-Forti précise : « un autre résultat bien plus important [de ma méthode] est celui de pouvoir obtenir l'idée générale de nombre sous forme *concrète* en le déduisant de l'idée *concrète*, usuelle, de grandeur, qui est aussi indispensable pour les propriétés métriques de la géométrie » (Burali-Forti, 1899, p.141, je souligne, cité par Gandon, 2009, p.30).

Gandon considère que la motivation de Burali-Forti est de nature fondationnelle et qu'elle va à l'encontre du projet d'arithmétisation de l'analyse.

Au début des années 1930, Henri Lebesgue consacre une série d'articles à la mesure des grandeurs dans la revue *L'Enseignement mathématique* (rassemblés ultérieurement en un volume : La mesure des grandeurs). Ces articles de Lebesgue ont une visée de formation des enseignants. Il s'agit de réhabiliter les grandeurs pour fonder le nombre au plan de l'enseignement :

Il n'y a pas de sujet plus fondamental: la mesure des grandeurs est le point de départ de toutes les applications des mathématiques et comme les mathématiques appliquées ont évidemment précédé les mathématiques pures, la logique mathématique, on imagine d'ordinaire que la mesure des aires et des volumes est à l'origine de la Géométrie; d'autre part, cette mesure fournit le nombre, c'est-à-dire l'objet même de l'Analyse. (Lebesgue, 1932, p. 174)

La première partie de l'ouvrage propose une construction des réels en appui sur la mesure des segments géométriques. Étant donné un premier segment considéré comme unité, Lebesgue construit une suite de segments unités dont la longueur est de dix en dix fois plus petite. La longueur d'un segment donné est alors encadrée par deux suites d'entiers, ayant un chiffre de plus à chaque itération. Le nombre est le compte-rendu de l'opération de mesurage et la longueur du segment est alors la suite inférieure des nombres entiers.

Le mathématicien soviétique Kolmogorov, qui connaissait bien les travaux de Lebesgue et est venu à Paris en 1930 (wikipedia english), a préfacé la traduction en russe, publiée dès 1938, de La mesure des grandeurs. De nombreux extraits de cette préface sont cités par Davydov dans un article fondateur pour la présentation de son ingénierie qui articule apprentissage de la mesure et des nombres et du calcul. Kolmogorov écrit : « The problem is [...] that divorcing mathematics concepts from their origins, in teaching, results in a course with a complete absence of principles and with defective logic » (1938 / 1960, p. 10, cité par Davydov, 1975, p.120). Kolmogorov (1951 / 1979) a par ailleurs publié une théorie des grandeurs dans la Grande Encyclopédie Soviétique à laquelle réfère Davydov (1975) dans la présentation de son ingénierie.

La préoccupation de ces trois mathématiciens, Burali-Forti, Kolmogorov, Lebesgue, n'est donc plus simplement d'illustrer les raisonnements sur les nombres en appui sur l'intuition géométrique comme c'était le cas pour Dedekind. Puisqu'ils fournissent des outils théoriques dans lesquels les grandeurs sont des objets mathématiques qui ont des propriétés, Kolmogorov et Burali-Forti semblent considérer qu'il est nécessaire de disposer de telles constructions pour que des raisonnements puissent être soutenus par des principes mathématiques logiques au cours du premier enseignement et jusqu'aux débuts de l'université. La proposition de Lebesgue -qui n'est pas axiomatisée- est davantage tournée vers les enseignants. Leurs motivations semblent par ailleurs de natures diverses. Si Burali-Forti se positionne dans la problématique des fondements des mathématiques (il écrit par ailleurs sa théorie dans le formalisme de Peano), Lebesgue et Kolmogorov -qui arrivent par ailleurs plus tard- se positionnent exclusivement au niveau des enjeux didactiques.

Dans un registre un peu différent, le mathématicien, médaillé Fields, René Thom, a publié deux textes (au moins) pendant la réforme des mathématiques modernes, extrêmement critiques sur les choix curriculaires réalisés, notamment l'introduction des structures algébriques et du formalisme

mathématique et l'élimination de la géométrie euclidienne. Dans son intervention au 2^e congrès de l'ICME intitulée non sans ironie « Modern mathematics : does it exist ? », Thom (1973) indique :

The real problem which confronts mathematics teaching is not that of rigour, but the problem of the development of 'meaning', of the 'existence' of mathematical objects (Ibid., p. 202)

Thom met ainsi sur le même plan *l'existence* des objets mathématiques pour les sujets (incluant les élèves) et leur *sens* (meaning). Ce sens est nécessairement ancré dans le réel. Thom développe un grand nombre d'arguments d'ordres épistémologique, sémiotique voire didactique en ce sens. Il écrit notamment : « mathematical thought is born of the spirit's need to simulate external reality » (Thom, 1973, p. 198), ce qui lie irréductiblement les mathématiques et la réalité extérieure, au moins au début de l'apprentissage si l'on admet que la pensée mathématique qui doit se développer chez l'enfant est du même ordre que celle qui a fait émerger les mathématiques. Thom est ainsi un fervent défenseur de l'enseignement de la géométrie euclidienne, « in a more supple and less axiomatic presentation » (1973, p. 208). Il la présente comme un intermédiaire naturel (et peut-être irremplaçable) entre le langage naturel et le langage de l'algèbre formelle, car sa syntaxe est riche (comme celle de l'algèbre formelle et contrairement au langage naturel) et qu'elle permet de maintenir le sens des concepts (comme le langage naturel et contrairement au langage formalisé) grâce l'intuition visuelle (1973, p. 207), autrement dit le réel. Il affirme par ailleurs que la géométrie fournit le continu qu'il considère comme premier car « avoir conscience, c'est avoir conscience du temps et de l'espace » (Thom, 1970, p. 232). Il développe aussi, concernant la rigueur, des arguments liés au *travail du mathématicien* réfutant l'idée que la préoccupation de la rigueur est centrale : « in practice, a mathematician's thought is never a formalised one » (1973, p. 202).

Thom accorde ainsi un rôle majeur à *l'intuition*, non seulement dans le travail du mathématicien mais aussi dans la validation des travaux. « Dans cette confiance en l'existence d'un univers idéal, le mathématicien ne s'inquiétera pas outre mesure des limites des procédés formels, il pourra oublier le problème de la non-contradiction. [...] est rigoureuse toute démonstration, qui, chez tout lecteur suffisamment instruit et préparé, suscite un état d'évidence qui entraîne l'adhésion. [...] Un tel point de vue conduit à prendre un certain recul vis-à-vis de l'axiomatisation. Formaliser une théorie, c'est, à partir du matériel intuitif présenté par la théorie, et qu'on supposera constitué en une "morphologie" T, donner un système de règles formelles engendrant une combinatoire symbolique (S) isomorphe à la morphologie (T) : l'isomorphisme $(S) \rightarrow (T)$ étant précisément induit par la correspondance qui attache à tout symbole (s) de (S) son "sens", son contenu intuitif dans (T) (sa *réalisation sémantique*, diraient les logiciens) » (p. 6). Thom n'envisage ainsi que des axiomatisations locales. « Ainsi pour toute théorie intuitive (T), on peut s'attendre à devoir se servir, non pas d'une, mais de plusieurs axiomatisations » (p. 6), chacune d'elle étant adéquate dans un contexte restreint.

Comme chez Burali-Forti, Lebesgue et Kolmogorov, la dimension « génétique » est essentielle dans le propos de Thom. Cette genèse est celle de la *signification* des objets mathématiques, nécessairement ancrée dans une réalité externe et des notions concrètes. Cette genèse est peut-être aussi celle d'une pensée mathématique qui s'appuie nécessairement sur *du* réel, pensée à l'œuvre chez les mathématiciens professionnels selon Thom ou Casari. Cette pensée et ces significations, se construisent alors dans des raisonnements logiques qui s'appuient sur un concret, idéalisé, i.e.,

constitué en idées, des notions de base et aussi quelques propriétés de ces notions, des axiomes, « pour préciser les données de l'intuition » (Thom, 1970, p. 231).

Il apparaît ainsi que pour de grands mathématiciens du 20^e siècle l'absence des grandeurs ou du continu dans les fondements des nombres dans l'enseignement constitue potentiellement un empêchement de construire des significations au début de l'apprentissage, mais aussi peut-être, plus profondément un empêchement de penser mathématiquement. Ils considèrent alors qu'il s'agit d'un problème majeur au plan de l'enseignement et plusieurs d'entre eux ont proposé des théorisations des grandeurs au service de l'enseignement ou qui peuvent être mises à son service.

Comment ces pensées de mathématiciens sur les mathématiques ou leur apprentissage résonnent-elles avec celles de chercheurs en didactique des mathématiques, spécialistes des questions d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques en contexte d'enseignement ?

2.2. Point de vue de la recherche en didactique

Depuis les années 1970, la plupart des ingénieries didactiques, si ce n'est toutes, s'accordent sur la nécessité de prendre appui sur les grandeurs pour construire les nombres rationnels (e.g., Kieren, 1980, pp. 134-136, Brousseau & Brousseau, 1987, Douady & Perrin, 1986, Adjage, 1999, Cortina, Visnovska & Zuniga, 2014) et Adjage (2007) cite Vergnaud (1983, p. 142) « Most procedures used by students [...] had a physical meaning ». Elles empruntent cependant des trajectoires d'enseignement variées et l'articulation entre nombre et grandeur n'est pas uniforme. Je ne développerai cependant pas ces éléments. En revanche, pour poursuivre sur la question du sens et des significations, il me semble d'une part utile d'approfondir l'étude des conditions dans lesquelles les situations en appui sur les grandeurs sont susceptibles de *faire sens* pour les élèves les plus fragiles en particulier. Il ne suffit pas en effet, de proposer des tâches impliquant des grandeurs, pour que les mathématiques enseignées fassent sens et que les élèves apprennent les nombres (e.g., Perrin-Glorian, 1993) et je vais d'abord considérer la question plus large du rapport au réel des élèves dans l'apprentissage des mathématiques. Il me semble d'autre part utile d'interroger le rapport à l'axiomatisation quand elle est envisagée par les didacticiens.

La question du rapport au réel des élèves et ses interférences avec l'apprentissage des mathématiques est complexe. Perrin-Glorian (1993) rappelle que chez les élèves de l'école élémentaire, en particulier, la logique du quotidien peut entrer en conflit avec la logique mathématique et que des élèves ne parviennent pas à se détacher de certaines solutions « pratiques » qu'ils envisagent. Peltier-Barbier (2004) et Perrin-Glorian (1993) suggèrent que ces difficultés peuvent se poser de façon plus ardue chez des élèves de milieu populaire. Faut-il en conclure que l'introduction du « réel » dans les problèmes posés aux élèves peut nuire à l'appropriation des enjeux de l'apprentissage des mathématiques ? Perrin et d'autres chercheurs répondent par la négative :

Cela ne veut pas dire que la logique du quotidien ne peut pas être ou même ne doit pas être un point de départ, mais il y aura parfois des oppositions entre les deux ce qui amènera la nécessité de distinguer ce qu'on peut dire en se servant des mathématiques et ce qu'on dirait ou ferait dans la vie. Cela demande de bâtir, comme le font certains chercheurs italiens autour de P. Boero (voir par exemple Boero 1989), des situations qui s'appuient sur la réalité familière et permettent de la dépasser en posant aux enfants de véritables problèmes théoriques. (Perrin-Glorian, 1993, p. 42)

Quand Perrin-Glorian (1993) revient sur les obstacles rencontrés lors d'une reprise, dans des classes faibles, d'une ingénierie qui avait fonctionné de façon remarquable dans des classes de niveau plus standard, elle analyse notamment les quelques réussites de cette reprise. Elle constate en particulier que les rares moments de l'ingénierie qui ont bien fonctionné concernent des situations impliquant certain type de réel (« la comparaison de tarifs de taxis, particulièrement en utilisant des représentations graphiques », voir aussi Perrin-Glorian, 1992, p.198, p.267). Cortina et Visnovska (e.g., Visnovska, Cortina, Vale & Graven, 2018) considèrent que les élèves doivent être confrontés à des situations *experientially real*. Ils élaborent des fictions dans lesquelles les personnages, auxquels les élèves peuvent s'identifier, rencontrent des problèmes qui peuvent être résolus par des moyens mathématiques.

Stories are spaces in which children can come to relate to problems that can be addressed by mathematical means. When children engage with the virtual world of stories (Gee, 2007), identify and connect with the characters, and come to see the world from their perspective, the storyteller can motivate the classroom to the actions of mathematising and problem solving. In this way, the story becomes a means of presenting the listeners with the purpose and need for mathematical actions. (p. 718)

Ces derniers chercheurs situent leurs travaux dans le cadre théorique de la *Realistic mathematics education* et la *mathématisation* (Freudenthal, 1991). Ces éléments contribuent à alimenter la réflexion sur le « contexte extérieur » (Boero, 1989) qui permet d'ancrer la pensée des élèves. Les auteurs semblent ainsi s'accorder sur la nécessité de proposer aux élèves, surtout les plus fragiles, des problèmes qui s'appuient sur la réalité familière, un contexte extérieur devenu réaliste, pour ancrer la pensée des élèves, et par suite leur permettre de développer des raisonnements logiques ancrés dans cette réalité.

Si l'on observe certaines similitudes sur la place du réel pour ancrer la réflexion, la place des grandeurs dans ces propos de didacticiens n'est peut-être pas la même que dans ceux des mathématiciens. Chez les premiers, les grandeurs semblent être des objets empiriques, localisés dans un contexte réaliste, sur lesquels vont pouvoir se déployer des raisonnements d'ordre théorique, alors que, me semble-t-il, chez les seconds les grandeurs sont des objets idéalisés qui, dans leur organisation et dans leur fonctionnement pouvant être décrits jusqu'à un certain point par des axiomes, simulent la réalité -pour reprendre les mots de Thom.

Est-ce dû à la sélection de travaux ? Disons tout d'abord que les travaux mentionnés n'évoquent pas les axiomatisations des grandeurs ou plus modestement les théorisations des grandeurs. Dans d'autres travaux, Perrin-Glorian (2002) envisage des axiomatisations des grandeurs dans le souci « du rapport entre théorie et réalité » (p. 6) et « pour assurer les professeurs de la possibilité de rendre tout à fait rigoureux un discours sur les grandeurs » (p. 19). Douady (1981) est de son côté préoccupée par la question de l'axiomatisation de l'action des élèves. Elle indique : « Nous voulions [...] [a]xiomatiser leurs actions [celles des élèves], leurs discours et ainsi déterminer les modèles implicites [de nombres] utilisés en situation scolaire d'apprentissage » (p. 81). La recherche montre alors que *lorsqu'ils sont mis dans des bonnes conditions* -reposant sur des situations concrètes de mesurage- les élèves (de 8 à 10 ans) sont capables de *rencontrer les axiomes des réels*, densité, axiome d'Archimède, continuité notamment. La longueur est dotée de propriétés au regard de manipulations de baguettes (par passage au quotient) : c'est « un demi-

groupe commutatif totalement ordonné »³ (p. 86). Les grandeurs sont en fait du côté de la physique et ce sont les nombres qui sont du côté des mathématiques, et qui sont axiomatisés.

Ainsi, dans ces travaux, même s'il existe une préoccupation de mathématisation des grandeurs, l'enjeu est d'en faire des objets mathématiques dans le but qu'ils soient des objets mathématiques légitimes qui modélisent les objets grandeurs empiriques, mais leurs propriétés précises nécessaires pour soutenir l'enseignement et le raisonnement en arithmétique ne sont pas l'objet de questionnement. La perspective n'est pas celle du questionnement des propriétés des grandeurs, comme objets mathématiques, qui interviennent au regard de la simulation du réel.

Il me semble alors possible d'interpréter cette différence en termes de paradigme. La légitimité théorique des objets pour Douady et Perrin se situe dans le paradigme formaliste. Les mathématiciens Thom et Kolmogorov (mais il y a peu d'indices) (re)connaissent ce paradigme (ce que ne fait pas Lebesgue d'après Otte, 2007) mais ils sont préoccupés par l'idéalisation de la réalité, en termes d'objets et de leurs propriétés qui interviennent dans des raisonnements avec ces objets. Cette différence éclaire possiblement la différence précédemment relevée entre grandeurs comme objets empiriques, auxquels des modèles peuvent être associés, et grandeurs comme objets concrets idéalisés simulant la réalité.

2.3. Histoire des grandeurs dans l'arithmétique scolaire : disparition et retours

Plusieurs chercheurs ont enquêté sur les évolutions curriculaires en France, pour l'arithmétique sur le temps long. Ils avaient mis en évidence la disparition des grandeurs dans 'l'arithmétique' (Hersant, 2005, dans le traitement des tâches de proportionnalité ; Bronner, 2008 dans le savoir savant transposé pour le 'numérique' dans *l'enseignement secondaire* qu'il a étudié de façon détaillée sur la période 1850-2000, Chevillard & Bosch, 2001, sur la disparition des mathématiques mixtes liée à celle des grandeurs en 1970). Au-delà du contenu étudié, l'originalité de mes travaux a été d'inclure les grandeurs dans l'analyse de l'évolution du curriculum en France, les considérant *a priori* comme des *constituants* de l'étude des nombres et du calcul.

Dans mes premiers travaux (Chambris, 2007, 2008, 2010), j'ai réalisé une étude des programmes de mathématiques de l'école sur plus d'un siècle (1882-2002) pour repérer le rôle joué par les grandeurs dans l'arithmétique scolaire. Un résultat important est la naissance du domaine mesure comme témoin de l'élimination du continu des fondations des nombres (entiers et non entiers) en 1970. Ce résultat est important et déroutant car, d'une certaine façon, pour la première fois, les grandeurs deviennent visibles dans le programme -elles ont *leur* domaine- mais cette visibilité est le signe de leur disparition des fondations de l'arithmétique scolaire. Dans ce nouveau programme, les grandeurs reflètent la dimension pratique de l'enseignement des mathématiques par opposition à la dimension conceptuelle attachée au nombre.

L'étude du programme de 1970 permet de mieux cerner la rupture entre les grandeurs et les nombres lorsqu'elle est introduite (Chambris 2008, pp.64–91). Avant 1970, il y a l'arithmétique. En 1970, en remplacement de l'arithmétique, on crée deux domaines : la mesure et le numérique, qui apparaissent ainsi comme les deux faces d'une même pièce⁴. En

3 Douady n'inclut donc pas la propriété P que nous considérerons au chapitre 3.

4 Plus précisément, le domaine « mesures » de 1970 est constitué par ce qui relevait du continu dans l'« ancienne arithmétique » et des grandeurs géométriques (aire et volume) de l'« ancienne géométrie ».

1970, dans le numérique, les nombres, même non entiers, mesurent le discret. Dans le domaine « mesure », ils mesurent le continu. Par exemple⁵, le programme propose une approche des décimaux, identique dans le « numérique » et « mesure », en mesurant les grandeurs (respectivement discrètes et continues) mais sans les fractionner. La « définition » est donnée avec la mesure des grandeurs discrètes :

Une ville compte 10 850 habitants. Le *millier* étant choisi comme unité, la population s'exprime par le nombre décimal 10,850. (Instructions officielles de 1970)

Elle est reprise dans le continu :

Prenons comme unité le carreau (...) aire $A = 28$ (...). Si on choisit comme unité de surface un rectangle de dix carreaux, l'aire de A est le nombre 2,8. (Ibid.)

Cette construction n'est pas satisfaisante sur le plan mathématique, nous y reviendrons. On a essayé toutefois, par ce moyen, de créer une étude des nombres non entiers qui ne s'appuyait pas sur le fractionnement, un peu comme dans la théorie savante où les réels sont construits à partir des entiers. (Chambris, 2010, p. 327-328)

À partir des programmes suivants (1980), les grandeurs reviendront dans l'étude de l'arithmétique. Toutefois, l'élimination des unités en numération en 1980 (chapitre 2) constitue une forme de poursuite (voire d'achèvement) du projet de 1970 de l'élimination des grandeurs (chapitre 4) alors que dans le même temps elles sont réintroduites pour d'autres objets de l'arithmétique. Ce retour prend des formes variées. Le continu revient au niveau *des tâches* pour l'étude des nombres « non entiers », il s'agit de proposer des situations où les nombres entiers ne suffisent pas. Le continu revient aussi sous la forme de problèmes de repérage sur la droite graduée introduite à cette occasion dans le domaine numérique, que ces nombres soient entiers, rationnels ou décimaux. La droite graduée a ainsi une *fonction de représentation des nombres*. Le fait que les nombres soient, sur la droite graduée, représentés par des longueurs (la distance à l'origine) et que le nombre est la mesure de cette longueur quand l'unité est la distance entre 0 et 1 reste implicite jusqu'à la publication des programmes de 2015. C'est bien pour des raisons didactiques, pour l'apprentissage des élèves, que les grandeurs reviennent.

Dans ces contextes, les grandeurs continues permettent de faire exister les tâches. Ces retours sont progressifs et confirmés de programme en programme. Au fil des programmes, le lexique qui permet de donner aux objets un statut d'objet mathématique et non seulement didactique, devient plus explicite quant au fait que les problèmes portent sur des mesures de grandeurs : *mesure de longueur ou d'aire* remplace *situation*, *longueur* est associé à *représenter sur la droite graduée*.

Pour ce qui concerne la proportionnalité, le continu n'a jamais été véritablement exclu des tâches scolaires. En 2002, ce sont les unités dans les calculs qui reviennent, avec l'idée que les raisonnements des élèves pour résoudre des problèmes de proportionnalité s'appuient sur les quantités. Le savoir mathématique légitimant les calculs apparaît quelques années plus tard, vers 2005 puis 2007 dans les textes du ministère (Chambris & Visnovska, 2021), reflétant ainsi probablement l'activité de la noosphère depuis le début des années 2000 (sections 4 Et 5, dans ce chapitre).

Cette section pointe donc que les grandeurs sont réintroduites dans l'étude des nombres, à partir des années 1980, d'abord au niveau des tâches : elles permettent de *poser des problèmes* aux

5 Pour une présentation exhaustive, se référer à (Chambris 2008, pp.64-73).

élèves pour motiver l'apprentissage. Lorsqu'elles sont réintroduites initialement ce n'est pas au titre de grandeurs, mais au titre de situations ou de représentations. C'est la première raison d'être des grandeurs que j'ai identifiée : fournir des raisons d'être à certains objets de l'arithmétique. Ce n'est qu'au fil des programmes qu'elles sont identifiées comme grandeurs et que de nouveaux savoirs leurs sont attachés. Plus tardivement, elles apparaissent au niveau des technologies, pour l'apprentissage de la proportionnalité, et l'unité de longueur pour le repérage sur la droite graduée.

Cette première étude amène plusieurs commentaires et questions. Certes, le changement de bloc de savoir transposé en 1970 correspond à la volonté d'inscrire les mathématiques enseignées à l'école dans le savoir académique. L'étude des programmes de 1970 montre que l'option d'élimination des grandeurs n'est pas tenue et qu'elles sont réintroduites plus ou moins rapidement de plus en plus explicitement au sein de l'arithmétique, pour des raisons didactiques, au fil des programmes. La motivation première est au niveau des tâches. D'autres motivations apparaissent ultérieurement au plan technologique, pour produire des raisonnements notamment dans le domaine de la proportionnalité.

De mon point de vue, ces retours des grandeurs permettent de poser les questions suivantes. Est-ce qu'il faut voir dans ces retours de grandeurs la conséquence de défauts dans la transposition du bloc de savoir savant retenu ou plutôt une inadéquation des savoirs savants sur le nombre et le calcul pour l'apprentissage de base de ce contenu ? En faveur de la première option, se trouvent les travaux de Brousseau. Brousseau se positionne en effet sans ambiguïté dans une transposition du savoir académique (cf. Introduction). Lui et son équipe ont mis au point des transpositions d'une partie des contenus de l'arithmétique élémentaire, depuis la maternelle. Les enseignants qui travaillaient dans son équipe, au COREM⁶, ont bénéficié de conditions de formation continue exceptionnelles.

Ce que montre ce travail expérimental, c'est que dans ces conditions, les situations construites permettent l'enseignement de certains savoirs et que les élèves y acquièrent des connaissances. Les conditions expérimentales ne sont jamais oubliées; il ne s'agit pas de faire croire que les mathématiques sont enseignables de cette manière dans toutes les écoles et par tous les professeurs. (Margolinas, 2005, p. 347)

Au COREM, les élèves apprenaient. Pour autant, l'implémentation des ingénieries développées n'a pas été réalisée dans l'enseignement ordinaire et l'intention de Brousseau n'était pas leur transfert aux classes ordinaires (Margolinas & Drijvers, 2015).

Une façon d'étudier la deuxième option est de tenter de caractériser les apports spécifiques des grandeurs dans l'apprentissage de l'arithmétique scolaire. En particulier, deux questions peuvent être mises à l'étude dans cette perspective. D'une part, bien que la transposition didactique du bloc savant puisse laisser penser le contraire, y a-t-il des savoirs mathématiques (i.e., par exemples des propriétés mathématiques ou des théorèmes) impliquant les grandeurs qui sont nécessaires pour l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique ? Pour ne pas risquer d'entrer en conflit avec les résultats de Brousseau et coll., je précise d'emblée qu'on peut imaginer que ces savoirs soient pris en charge dans les ingénieries sans éventuellement y avoir été identifiés comme critiques ou comme relevant des mathématiques. D'autre part, quelles sont les raisons d'être des

6 Le COREM est le Centre pour l'Observation et la Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques. C'est structure mise en place par Brousseau au sein d'une école primaire de la région bordelaise qui a fonctionné de 1972 à 1999 pour permettre l'expérimentation et l'observation dans des conditions adéquates (Margolinas, 2005).

grandeurs en arithmétique ? Par exemple, le bloc savant retenu pour la transposition a-t-il pour conséquences la disparition de certaines raisons d'être des grandeurs, critiques pour l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique ?

3. Axiomatisations et complexité conceptuelle des notions mathématiques: Le cas de l'enseignement de la proportionnalité

La perspective axiomatique moderne a été introduite dans l'enseignement en France, et des blocs du savoir savant ont été transformés, transposés, afin d'élaborer, avec le nouvel arrière-plan théorique, un nouveau *savoir à enseigner* pour l'arithmétique élémentaire, puis de l'actualiser en fonction de prescriptions variées (Wijayanti & Bosch, 2018). Cette section présente d'abord les résultats de (Chambris & Visnovska, 2021)⁷. Dans cet article, nous mettons d'abord en évidence comment les grandeurs comme objets mathématiques rendent mathématiquement visibles différents degrés de complexité conceptuelle dans la proportionnalité. Nous montrons ensuite comment le changement de paradigme, en dispensant de la nécessité de l'idéalisation de la réalité rend alors possible -par le processus de transposition didactique- la disparition de la distinction de ces degrés de complexité dans l'institution d'enseignement. Je reviens ensuite sur ces résultats afin de préciser d'une part quelques éléments relatifs à ces différents degrés de complexité, d'autre part de caractériser le processus de transposition didactique dans cette étude sur la proportionnalité.

3.1. Perte de distinction de degrés de complexité conceptuelle

Dans (Chambris & Visnovska, 2021), nous effectuons une relecture de travaux sur les évolutions de l'enseignement de l'arithmétique au 20^e siècle (1880-2005), ceux d'Hersant (2005) sur la proportionnalité et les liens sur les relations entre grandeurs et nombres (Chambris, 2008, 2010) (section 2, ce chapitre). Nous nous appuyons sur l'analyse phénoménologique de Freudenthal (1983, p. 182-184) pour identifier des degrés de complexité conceptuelle relatifs à la notion de proportionnalité qui apparaissent lorsque la notion est modélisée mathématiquement par les grandeurs (Chambris & Visnovska, 2021, p. 5-6) :

- postulat d'uniformité : dans des durées égales sont parcourues des distances égales,
- co-variation des *rappports internes* : en a fois plus (resp. fois moins) de temps, a fois plus (resp. fois moins) de distance parcourue (a étant successivement n , $1/n$, k/n , puis réel positif par continuité) et la classe d'équivalence des rapports externes (120 km en 2 h) ou (60 km en 1 h)⁸,
- le taux comme grandeur, avec une *unité quotient* : considérer la vitesse comme grandeur qui peut être mesurée nécessite d'avoir choisi une unité de cette grandeur qui est donc une classe d'équivalence de rapports externes, et d'exprimer les autres vitesses relativement à cette unité. Un représentant de la classe peut être choisi : par exemple (1 km/1 h) noté habituellement (km/h).

7 Ces réflexions ont par ailleurs été impulsées puis alimentées par plusieurs invitations et échanges avec les historiens du laboratoire SPHERE (notamment Christine Proust) sur la thématique des unités de mesure, incluant par ailleurs le projet d'alimenter la réflexion sur les rapports réciproques entre histoire et didactique.

8 La nécessité ou non de distinguer ici deux niveaux doit être étudiée plus avant.

Ces *degrés de complexité conceptuelle* ne sont pas ce que Chesnais (2018) nomme des *degrés de conceptualisation* qui correspondent à la mobilisation d'un savoir donné avec une autonomie de l'élève de plus en plus grande. Ici, à chaque étape, il s'agit d'un nouvel élément technologique qui s'appuie sur un nouvel objet mathématique, qui pourrait donc être conceptualisé en des degrés croissants (au sens de Chesnais). D'ailleurs, si le postulat d'uniformité constitue une caractérisation de la proportionnalité qui traduit une idéalisation de la réalité qui pourrait relever d'un *concept quotidien* au sens de Vygotski (e.g., Brossard, 2008), les formalisations ultérieures successives pourraient davantage relever de *concepts scientifiques* (ibid.). Ces degrés de complexité ont été traduits en termes d'étapes dans un processus expérimental relevant de l'ingénierie didactique dont les effets sur les apprentissages mathématiques des élèves sur la notion visée sont avérés (Cortina, 2006).

Nous croisons ensuite ces degrés de complexité avec les évolutions curriculaires en France, et en particulier avec les blocs de savoirs savants qui sont transposés aux différentes époques. Les analyses et la discussion mettent en évidence que l'introduction du paradigme de non contradiction dans le processus de transposition didactique (et son corollaire de l'époque, la disparition du paradigme d'idéalisation de la réalité) conduit à une perte de distinction de ces degrés de complexité (plus précisément, il la permet et elle se réalise) et que les évolutions curriculaires depuis le début des années 2000 tendent à rendre visibles ces éléments de différenciation de la complexité mais de façon non systématique.

Compte-tenu de ce qui précède, un fait d'importance est que ces distinctions sont repérées à la fois par différents travaux de psychologie cognitive (e.g., Lamon, 2007) et dans la formalisation mathématique de la proportionnalité, telle qu'elle est possible dans les mathématiques d'aujourd'hui à *condition d'explicitement les grandeurs dans la mathématisation*. Elle est résumée dans le tableau (Fig. 4). Par ailleurs, si les deux colonnes de gauche ont pu apparaître dans le savoir à enseigner à différentes époques, il est possible que les trois colonnes soient apparues subrepticement dans les années 1930 (comme une progressivité du cours moyen au cours supérieur) mais qu'elles aient ensuite progressivement disparu au profit de la seule troisième.

La caractérisation de situations ou de phénomènes où deux grandeurs co-varient de façon proportionnelle apparaît alors comme une raison d'être des grandeurs, non seulement pour qu'elles mathématisent la situation, mais aussi pour rendre visible, dans les mathématiques, des degrés différents dans la complexité conceptuelle.

Je reprends ci-après la discussion conclusive de (Chambris & Visnovska, 2021) qui revient sur le divorce et les conditions de sa réalisation entre mathématiques pour l'école et réalité.

The documented changes in syllabi and textbooks may appear chaotic, even disorganized: different techniques appear to fall out of favor at different times, only to re-appear again later. A different picture emerges when we take the profound change in the scholarly mathematics knowledge in this historical period into account, and interpret the subsequent syllabi changes as attempts at making scholarly knowledge teachable (see Figure 1).

	Scholarly knowledge	Knowledge to be taught			
		Magnitudes	Units	Numbers	Proportionality
1882	<i>Magnitudes</i> part of academic knowledge for numbers, measurement of magnitudes is a source of numbers Axiomatization: idealization of reality Absence of external ratios (division of different magnitudes contested)	Reference text: Bézout ⁹ 's and Reynaud's treatises			
1938		‘Concrete’ (theorized) magnitudes (continuous and discrete) ‘Abstract’ (theorized) number magnitude + Intensive magnitudes	MU (SU/RU) NU (SU/RU) + QU	Concrete and abstract numbers	Internal ratio Rate as external ratio of magnitudes of the same kind + External ratio + Rate (with QU)
1945	<i>Measurement of segments</i> appears in geometric axioms Axiomatization: idealization of reality Absence of definition by abstraction (Lebesgue's view) (Otte, 2007)	Reference text: Lebesgue's book			
		‘Concrete’ magnitudes (continuous and discrete)	MU (SU/RU) QU	Concrete numbers Abstract numbers in ‘fractions of’	Rate (with QU)
1970	<i>Magnitudes</i> not part of academic knowledge for numbers Axiomatization for no contradiction	Discrete magnitudes for numbers Discrete & continuous magnitudes for proportionality	NU (SU/RU)	Numbers	Rate (without unit) Additive and multiplicative property of linear function + Rate (as a magnitude, with QU) + Additive & multiplicative relations within measure spaces (with MU)
1980		+ Continuous magnitudes for numbers (in tasks)	NU		
2002		+ Measurement units in informal calculation (in proportional tasks)	+ MU		
2005		+ Measurement units in formal calculation	+ QU		
2007		+ Proportionality defined as a relationship between magnitudes			

Figure 1. – Summary of changes in arithmetic/numerical domain of syllabi and textbooks and their relation to changes in scholarly knowledge [(MU = measurement units, NU = number units, QU = quotient units, (SU/RU) units were organized as simple and related units)].

9 L'accentuation ou non du nom du mathématicien, Bezout ou Bézout, est fréquemment discutée. D'après Alfonsi (2011), il semble que le mathématicien ait opté pour Bézout, à partir de 1765. Je suivrai ce choix dans cette note, même si cela m'amène à des modifications, que je ne signalerai pas, dans les citations des textes que j'ai publiés.

At the beginning of our analysis, the mathematics in the reference texts for teaching was axiomatized as an idealization of reality (Otte, 2007), and numbers were generated from measurement of magnitudes. This explicit connection between reality and mathematics inconspicuously also provided novice learners with a convincing, intuitive rationale for learning numbers, including the ways of multiplicatively organizing continuous magnitudes, which became essential in proportionality.

However, the mathematicians' quest for coherence of the discipline was resolved by its initially gradual, and later determined departure from reality as a source of, or reference for, mathematical objects. While the change towards set theoretical abstraction benefited scholarly mathematics, it no longer provided a compelling reason for learning number in classrooms, and it removed previously essential reasoning tools in the form of magnitudes and units from the learner's, and the teacher's, repertoire. It soon became apparent to teachers and curriculum designers alike that the new syllabi did not support students' learning well. Units and magnitudes, which allow learners to connect mathematics to reality, were reintroduced to provide both the need and meaning for mathematics.

With respect to improvements of teaching in the first period (before 1945), proportionality was initially based on the strong foundation of multiplicative relationships for magnitudes and units. Syllabus revisions introduced more sophisticated tools (external ratio and rate), when some of the complexities related to external ratios of magnitudes, intensive magnitudes, and quotient units were (even tentatively) resolved.

The project of building academic mathematics without contradictions saw the syllabus start anew. This time, it started with the most encompassing, sophisticated, but also conceptually dense notion in proportionality, the notion of rate. The less sophisticated notions (additive comparisons, and internal and external ratios), which previously derived their meaning from magnitudes and units, and provided stepping stones for the conceptual idea of rate, were left out. While 1945 syllabus attempted to keep, at the level of theory, a connection to magnitudes as a source of concrete numbers, the subsequent syllabus parted with the connection of numbers to magnitudes altogether.

Having magnitudes at the center of academic mathematical work had two major advantages. First, mathematical theory itself provided the primary model for the process by which the experiential world could be *mathematized*. 'Concrete' magnitudes, as attributes recognized in everyday objects, provided measurement units from which the first layer of mathematical abstraction—the number magnitude and number units—could be built. The difference between a concrete magnitude and the number magnitude is at the core of the distinction between concrete and abstract numbers, which, at the time, co-constituted the meaning of 'doing mathematics'.

The second advantage relates to the tools for reasoning *multiplicatively*. The treatment of units within a mathematics theory (i.e., within a magnitude, anything can be a unit) allowed for flexibility in working with numbers. Specifically, by bringing explicit attention to the process by which related units are created from simple units, it allowed to define multiplication, fraction, and internal ratio. Because these definitions were constructive, they supported the imagery of how these mathematical notions related to learners' prior experiences. The same tools that were used to define mathematics could be deployed to make sense of it.

Across all the periods, quotient units presented a problem. Dividing kilometers by minutes did not seem correct, and the realization that the relationship of distance and time constitutes a

new, *intensive* magnitude was required. Not surprisingly, the inclusion of the external ratio was problematic. But even more problematic, we suggest, was—and continues to be—the lack of attention to the differences in complexity of multiplicative reasoning involved in the different ways in which ratios and rates are constructed. Ratio comparisons within magnitudes, across quantities of the same magnitude, across different magnitudes, and even rates, were all treated as simply exchangeable calculation methods. Freudenthal pointed this out in 1983, stating that “since no-one today is conscious of the mental jump from internal to external ratios, nobody raises the question as to whether it could not be too big for the learner” (184).

The return to leveraging students’ experiences with magnitudes is a promising start of a more viable teaching of proportionality. It allows to develop the need and ability to reason about magnitude values quantitatively. Yet, we suggest that more attention needs to be paid to the role of units and how they make the process of mathematizing multiplicative relationships possible (cf. Freudenthal, 1973). The internal ratio might need to reappear as a tool for understanding external ratios and rate. (Chambris & Visnovska, 2021, p. 16-18)

Le tableau (fig. 1) permet de repérer en particulier que l’approche des nombres par les grandeurs apporte notamment les unités, dans la première période. Il s’agit notamment des unités simples (SU), par exemple le centimètre, mais aussi de ce que j’ai appelé les unités relatives (RU) par exemple le fait qu’une grandeur (une taille) comme 4 cm, puisse être considérée comme une unité (cf. chapitre 4). Ces dernières unités jouent un rôle essentiel dans toute l’arithmétique¹⁰. Ensuite, d’une part la disparition des grandeurs du bloc savant transposé fait disparaître les unités relatives du savoir à enseigner pour l’arithmétique. Une raison probable est que la théorie des ensembles - ou sa transposition- ne fournit qu’une seule unité. D’autre part, l’abandon du paradigme d’idéalisations de la réalité permet d’introduire puis de faire vivre dans le savoir à enseigner des objets mathématiques conceptuellement complexes auxquels il est très difficile d’accéder à partir de raisonnements ancrés dans une réalité idéalisée, tel le coefficient de proportionnalité. La disparition de l’écriture des unités dans les calculs rend par ailleurs invisible cette complexité. Les programmes et autres textes de cadrage depuis les années 2000 dans le domaine de la proportionnalité font revenir des raisonnements élémentaires, qui peuvent s’interpréter dans le paradigme d’idéalisations de la réalité (« des raisonnements personnels appropriés »), pour pallier cette difficulté. L’outillage théorique nécessaire au niveau de l’institution pour dépasser les *raisonnements personnels*, notamment les rapports internes qui sont des rapports d’unités relatives (8 cm c’est 2 fois plus que 4 cm et surtout 8 cm c’est $\frac{4}{3}$ de 6 cm), continue à manquer dans les praxéologies de l’arithmétique.

3.2. Retour sur la transposition didactique et le savoir savant

Ces travaux sur la proportionnalité m’amènent à revisiter la transposition didactique et à réinterroger les rapports entre savoir savant et savoir à enseigner.

Le retour des grandeurs dans l’étude de la proportionnalité est concomitant à la publication de plusieurs textes noosphériens que je présente rapidement et dont je discute le statut maintenant. Au tout début des années 2000, Chevallard et Bosch publient deux articles dans la revue *Petit x* sur les grandeurs. Le second propose une mathématisation des grandeurs, en appui sur plusieurs textes de mathématiciens. En particulier, le texte légitime le calcul avec unités en appui sur la

¹⁰ Ces unités seront une des préoccupations centrales du chapitre 4.

deuxième partie du texte de Whitney (1968b). Un peu plus tard, en 2007, un texte d'accompagnement des programmes (MEN, 2007) reprend des éléments de cette justification et intègre le coefficient de proportionnalité comme grandeur quotient.

Dans ma thèse, j'avais distingué deux types de savoirs savants, « le savoir savant utile à la sphère productrice des savoirs et le savoir savant, mathématiquement correct, mais adapté aux besoins de l'enseignement. Nous les appelons savoirs savants respectivement du premier et du second ordre. » (Chambris, 2010) Dans le modèle de la transposition didactique, j'avais situé ces deux types de savoirs dans le savoir savant.

Le processus de transposition didactique est souvent présenté comme une légitimation descendante du savoir à enseigner par le savoir savant, même si une flèche retour est présente dans les textes récents sur le sujet (e.g., Chevallard & Bosch, 2020). Il me semble que ce que ce travail noosphérique sur la proportionnalité donne à voir est une production de textes intermédiaires par des mathématiciens, puis des didacticiens, puis des auteurs de textes officiels / programmes qui trouvent leur place au sein du savoir à enseigner afin d'une part de le légitimer mathématiquement et d'autre part de le rendre enseignable (il s'agit principalement de réintroduire les grandeurs quotient).

Il me semble aujourd'hui plus adapté pour le second type de préciser qu'il s'agit de blocs de savoirs mathématiques, élaborés dans le paradigme axiomatique dominant dans le monde savant, par des mathématiciens, qu'ils soient professionnels ou didacticiens ou autres, dont la finalité affichée est de *contribuer à la constitution d'une référence pour le savoir à enseigner*. Les textes mathématiques élaborés par la Stoffdidaktik entrent dans ce cadre. Ce type de production n'est cependant pas nouveau et est aussi avéré dans le paradigme d'idéalisation de la réalité. C'est ainsi me semble-t-il qu'on peut interpréter la série d'articles de Lebesgue publiée au début des années 1930 et rassemblée dans l'ouvrage *La mesure des grandeurs* (cf. section 6, ce chapitre). D'autres ouvrages peuvent acquérir un statut du même ordre. Il en va par exemple ainsi du traité d'arithmétique du mathématicien Bézout (cf. chapitre 4), publié en 1764, qui, même si le projet de l'auteur est de produire un manuel scolaire pour une école particulière (les écoles militaires pour les jeunes adultes), était devenu un texte de référence pour le savoir à enseigner à l'école à la fin du 19^e siècle (Neyret, 1995, Harlé, 1987).

Ce retour m'amène à situer ce type de textes mathématiques au niveau du *savoir à enseigner* et non du savoir savant même si, lorsque formulé dans le paradigme axiomatique de non contradiction, on est encore loin de formulations adaptées pour l'école. Une partie de ce qui crée la distance est le paradigme même de l'axiomatisation, qui est inaccessible à l'école. Néanmoins, en considérant les différentes positions existant dans le système d'enseignement, on conçoit que ce type de textes de savoir pourrait apparaître légitime et utile par exemple à des mathématiciens, actifs vis-à-vis des questions posées par l'enseignement dans le premier degré, incluant ceux chargés de la formation des formateurs –spécialisés en mathématiques –d'enseignants du premier degré, voire du second degré mais cette perspective n'entre pas dans le cadre de cette note de synthèse. Ces remarques m'amènent au tableau (Figure 2) pour décrire ce phénomène.

Savoir savant SS1 (paradigme dominant dans la sphère savante : axiomatique Non Contradictoire NC)	Savoir savant SS1 (paradigme dominant dans la sphère savante : axiomatique Idéalisation de la Réalité IR)
Savoir à enseigner : - <i>connecté au savoir savant (par la nature de l'axiomatique NC) (SS2)</i> - 'formulations adaptées pour l'école'	Savoir à enseigner - 'traité' classique (Neyret, 1995) (SS2)
Savoir enseigné	Savoir enseigné
Savoir appris	Savoir appris

Figure 2. – *Élaboration du savoir à enseigner : savoirs savants des premier et second ordres*

Le point précédent concernant la proportionnalité est décliné avec ce modèle dans le tableau (figure 3).

Savoir savant SS1 (paradigme dominant dans la sphère savante : axiomatique NC)	Savoir savant SS1 (paradigme dominant dans la sphère savante : axiomatique IR) - théorie des proportions (SS1)
Savoir à enseigner : - Whitney (1968b) (SS2, NC) - Chevallard & Bosch (2002) (SS2, NC) - Document d'accompagnement des programmes (2007) (le paradigme axiomatique NC est peu visible dans ce texte « Il est possible de mathématiser cette notion de grandeur quotient ») - 'formulations adaptées pour l'école' : effectif pour les rapports internes mais le principe d'uniformité et le passage des classes d'équivalence de rapports externe aux taux ne sont pas gérés.	Savoir à enseigner (période ... - 1940) - théorie des proportions (Bézout) (SS2) - théorie des proportions (faible, avec seulement la proportionnalité par la variation des grandeurs dans le même rapport), substitution des quatre opérations (Reynaud) à la notion de proportion (SS2)
Savoir enseigné	Savoir enseigné
Savoir appris	Savoir appris

Figure 3. – *Transposition didactique pour la proportionnalité et types de savoirs à enseigner*

Dans les transpositions actuelles, en France, héritées de Whitney les changements d'unités ne sont pas interprétés comme des équivalences de rapports externes. Ce constat amène à faire apparaître la question de l'adéquation entre les textes mathématiques qui servent de référence pour le savoir à enseigner sur la proportionnalité et les besoins de l'enseignement, en particulier prendre en compte la nécessité de la possibilité d'un « retour au réel » dans le développement des idées mathématiques dans la classe. Une conséquence de l'absence de ce discours justificatif est l'absence d'une technologie pour le professeur qui s'appuierait sur des raisonnements d'élèves et qui voudrait introduire les grandeurs quotient puis la technique avec le taux (coefficient avec unité).

Pour finir signalons que le Tableau (figure 3) ne donne qu'une vision parcellaire de la transposition didactique. Il ne fait apparaître que les variations dans le savoir mathématique liées à des évolutions du savoir validées par les savants. Wijayanti et Bosch (2018) montrent que les évolutions du savoir à enseigner sont le fruit de multiples influences qui n'apparaissent pas dans ce tableau et qui mériteraient d'être articulées. Par exemple, les tâches peuvent évoluer sans

toujours que les technologies nécessaires soient rendues disponibles par exemple, comme en témoigne à mon avis l'introduction des « raisonnements personnels » pour la proportionnalité en 2002.

Même si la situation actuelle n'est pas satisfaisante pour la proportionnalité, mon travail montre qu'un levier pour l'action réside dans la constitution du savoir à enseigner, par l'intermédiaire d'un corpus de textes mathématiques de formalisations graduées qui pourrait être considéré comme une référence, validée par un ensemble d'agents de la noosphère (des mathématiciens aux professeurs, des chercheurs en didactique aux inspecteurs, des formateurs aux associations professionnelles). Ce corpus devrait, selon moi, prendre en compte un « démarrage » en appui sur le réel et la possibilité de formuler des raisonnements de complexité progressive afin d'aboutir aux formalisations plus abstraites requises dans l'enseignement secondaire voire à l'entrée à l'université.

3.3. Changements d'unités

Le travail réalisé fait apparaître trois conceptualisations de la proportionnalité (identifiées par Freudenthal, 1983). Une relecture de ce travail permet de préciser les éléments suivants. Les textes curriculaires français actuels justifient le calcul avec les unités, ce qui permet de le réintroduire « par décret » dans les programmes. Les grandeurs quotient réintroduites à cette occasion apparaissent alors dans les techniques de calcul à enseigner pour la proportionnalité (au collège).

La technologie proposée pour un changement d'unité lié à une grandeur quotient est la suivante :

7,2 km/h à convertir en min/s : $7,2 \text{ km} / \text{h} = 7200 \text{ m} / 3600 \text{ s}$ (conversion simple de km en m, h en s) = $7200/3600 \text{ m/s}$ (création de l'unité quotient m/s comme abréviation de 1m/1s et du nombre d'unités quotient, on va à la vitesse $7200/3600 \text{ m/s}$ ou 2 fois plus grande que 1m/1s) = 2 m/s . Ces éléments sont ensuite utilisés pour l'étude de la proportionnalité : « Le passage par l'unité rend inutile l'emploi de la technique du « coefficient » : il suffit d'utiliser ensuite la propriété d'homogénéité. $17 \text{ kg} = 17 \times 1 \text{ kg}$, donc [...] $50,4 : 2,4 = 21$. Donc $50,4\text{€} = 21 \times 2,4\text{€}$. Donc 50,4€ est le prix de 21 kg. Cette situation *familière* permet d'introduire la grandeur quotient 2,4 €/kg, prix par kilogramme. (...) On peut alors écrire les résultats obtenus précédemment avec une écriture du type : $2,4\text{€/kg} \times 17 \text{ kg} = 40,8\text{€}$. » (MEN 2007, je souligne)

Une autre technologie pour la conversion, en appui sur un calcul avec unités, est la suivante :

$7,2 \text{ km/h}$ (écriture formelle) = $7,2 \text{ km en } 1\text{h} = 7200 \text{ m en } 3600 \text{ s}$ (conversion simple de km en m et d'heure en s) = $7200\text{m} : 3600$ en $3600\text{s}:3600$ (raisonnement proportionnel, 3600 fois moins) $7200\text{m} : 3600$ en $3600\text{s}:3600 = 2 \text{ m en } 1 \text{ s}$ (division d'une grandeur par un entier) = 2 m/s (écriture formelle d'une unité quotient). Dans l'approche de Freudenthal, cette technologie apparaît comme une étape pour constituer 2 m par s en grandeur. La grandeur se constitue lorsque 1m/1s est vu comme une unité *en soi*. Comme il y a deux fois plus d'unités dans 2 m/s que dans 1 m/s, la vitesse (comme grandeur) 2 m/s est une vitesse qui est deux fois plus *rapide* que ne l'est la vitesse de 1 m/s. Ainsi cette technologie ne permet pas de multiplier $2,4 \text{ €/kg} \times 17 \text{ kg}$ car 2,4 € par kg n'est pas constitué en grandeur. Il me semble qu'il y a un malentendu¹¹ entre la situation

11 Je reviens dans la section suivante sur ce *malentendu* que j'interprète comme un effet de la transposition du texte de Whitney (1968b) qui définit formellement les grandeurs quotients et donne la proportionnalité en exemple

qui peut être *familière* (supra) et la grandeur quotient qui est une construction conceptuelle complexe, le rapport externe 2,4 € par kg (ou pour 1 kg) l'étant moins.

Ces éléments montrent que la technologie introduite pour le changement d'unité nécessite que la vitesse soit conceptualisée en tant que grandeur -une grandeur quotient, donc- qui se mesure en m/s (point de vue taux). Les différentes caractérisations et cette discussion sont résumées dans le tableau (figure 4). Ce tableau sera par ailleurs repris dans les perspectives.

	Point de vue : uniformité	Point de vue : co-variation des rapports internes (raisonnement proportionnel) / équivalence des rapports externes	Point de vue : taux
Comparaison de l'invariant de la situation		En appui sur une valeur de grandeur commune comme référent <i>3 cm en 4 min</i> et <u>3,5 cm</u> en 4,5 min <u>3,5 cm en 4/3 x 3,5 min</u> et <u>3,5 cm</u> en 4,5 min	Comparaison des taux Comparer des nombres d'unités quotient : 3/4 cm/min et 3,5/4,5 cm/min
Descripteur des classes d'équivalence d'objets Caractérisation de la co- variation	Uniformité comme caractéristique de la situation : des distances égales parcourues en des durées égales (présent dans Freudenthal, 1983)	Variation dans les mêmes rapports internes : Si 2, 3, 4 fois plus / moins alors 2, 3, 4 fois plus / moins Transformer un rapport externe en un autre : 3 cm en 4 min c'est comme 1 cm en 4 min/3, c'est comme 3,5 cm en [3,5 x (4 min/3)] Changement d'unité : 27 km/h = (27x1000 m) / 3600 s = (27x1000:3600 m) / 1 s = ... (rais. prop)	Taux (un nombre sans unité et une unité quotient), quotient des mesures 3 cm / 4 min = 3/4 cm/min 3,5 cm en ? 3,5 cm x 4/3 min/cm Changement d'unité : 27 km/h = 27x [(1000/3600) m/s] = [27x (1000/3600)] m/s

Figure 4. – Degrés de complexité conceptuelle (provisoires) pour la proportionnalité – en gras les points aveugles dans les programmes aujourd'hui

Le point de vue uniformité, peut-être le plus élémentaire, permet déjà de constituer des classes d'équivalence pour chaque « rapidité » particulière (un mouvement uniforme) ou, dans certains cas, de comparer deux mouvements uniformes particuliers (observés sur des distances égales ou des durées égales par exemple). Ce point de vue semble peu pris en charge dans le savoir à enseigner, aujourd'hui. Un raisonnement plus avancé qui s'appuie sur la co-variation dans les mêmes rapports entre distance et durée permet de constituer des classes d'équivalence de rapports externes (si 3 fois moins de distance et une durée 3 fois plus courte, alors même « rapidité ») et de les ordonner (point de vue co-variation). En choisissant une classe particulière comme référence, envisagée alors comme une unité, il devient possible de donner une mesure avec un nombre et une unité à chaque classe d'équivalence (à chaque « rapidité »), un nombre de fois cette unité. Il s'agit alors de la « mesure » des différentes rapidités (par exemple dans la perspective de comparer plusieurs mouvement uniformes), c'est la vitesse comme grandeur quotient (point de vue taux).

4. Savoirs savants sur les grandeurs

Les grandeurs ont ainsi disparu des mathématiques savantes dans le tournant du 20^e siècle et depuis les années 1970, le point de vue qui prévaut dans l'enseignement des nombres à l'école élémentaire en France est la transposition de la théorie ensembliste. Notamment dans ces deux moments charnières, des mathématiciens, apparemment préoccupés par les questions d'enseignement et pour certains attachés à l'articulation entre mathématiques et physique, ont

d'application.

développé des axiomatiques alternatives pour les constructions des ensembles de nombres qui sont fondées sur une théorie des grandeurs. Au-delà de l'identification d'une contribution savante à un savoir à enseigner éventuellement à venir, les sections qui suivent constituent des repères qui seront utiles pour les chapitres suivants, en particulier le chapitre 4.

4.1. Éléments d'histoire sur les définitions (axiomatiques) des grandeurs

Il semble qu'on peut distinguer trois grandes périodes dans l'histoire des définitions des grandeurs. Une longue période pendant laquelle les notions communes d'Euclide (Livre I) donne des propriétés vérifiées par les grandeurs (géométriques), sans le souci de l'exhaustivité qu'on trouve pour les axiomes de la géométrie (Vitrac, 1995), d'autres propriétés étaient d'ailleurs présumées dans le Livre V.

À la fin du 19^e siècle¹², paradoxalement au moment où les mathématiques ne sont plus conçues comme science de la quantité, les discussions mathématico-logico-philosophiques présentent d'intenses débats sur les grandeurs et leurs définitions. Plusieurs mathématiciens, parmi lesquels Frege, Burali-Forti, Hölder, Russell élaborent des axiomatiques des grandeurs. Même si cette période fait suite à l'élaboration des définitions des réels construites à partir des entiers, ces débats ne visent pas à restaurer la place des grandeurs, sauf probablement pour Burali-Forti qui construit les ensemble de nombres et qui affiche aussi des préoccupations didactiques. Gandon (2009) indique plusieurs raisons pour expliquer cet intérêt vis-à-vis des grandeurs. L'un d'eux est que les grandeurs constituent la structure commune qui permet d'articuler les nombres (nouvellement créés) et les entités géométriques, et qu'aucune autre structure n'est identifiée à l'époque. Un autre moteur, en mathématiques, du développement des grandeurs à l'époque est les discussions vives, voire oppositions, entre Cantor qui développe la théorie des ensembles et les tenants des grandeurs non-archimédiennes qui ont obligé les uns et les autres à mieux théoriser leurs objets. Les sciences empiriques s'intéressent aussi aux grandeurs, avec la préoccupation de théoriser de nouvelles mesures, la physique avec la température qui n'est pas une grandeur extensive, la psychophysique (mesure des sensations en relation avec le stimulus). Les grandeurs jouent aussi un rôle clé en métaphysique.

Ensuite, au cours du 20^e siècle, dans une perspective pédagogique, semble-t-il, des mathématiciens, puis à partir des années 1970 également des didacticiens, proposent des définitions ou des approches des grandeurs plus ou moins formalisées qui visent à articuler les relations entre grandeurs et nombres, voire à proposer des fondements alternatifs pour l'étude des entiers (Whitney, 1968a). Dans cette perspective, j'ai identifié les travaux de Lebesgue (1932), Kolmogorov (entre 1938 et 1951), Rouche (1992, 1994), Steiner et coll. (Steiner, 1970).

On peut ajouter, dans une perspective qui vise à réorganiser les savoirs mathématiques au 20^e siècle, la section sur les grandeurs de Bourbaki. Inutile de préciser que dans l'ouvrage les grandeurs n'apparaissent pas au socle du processus de réorganisation.

4.2. Point de vue de Lebesgue

Neyret (1995) avait identifié le choix de l'ouvrage *La mesure des grandeurs* comme traité pour la formation des enseignants du premier degré en France, à partir des années 1940 et jusqu'à la réforme, pour la formation sur les nombres décimaux, tout en indiquant que son influence avait

12 Ce paragraphe prend appui sur l'HDR de Gandon (2009).

été modeste jusqu'aux années 1960. Cet ouvrage revient à deux reprises dans mes travaux (Chambris, 2010, Chambris & Visnovska, 2021).

Notons d'abord que, en didactique des mathématiques, en France, l'ouvrage de Lebesgue est souvent cité (e.g., Mercier, 2012, Ligozat, 2012, Brousseau, 2002, Quilio, 2017, Perrin-Glorian, 1992, Chevallard, 1992b). Ce n'est cependant pas toujours les mêmes aspects qui retiennent l'intérêt des chercheurs. Ainsi Perrin-Glorian le cite à propos des aires, Mercier et Ligozat pour l'épistémologie expérimentale du nombre qu'il porte, « le nombre comme compte-rendu » complet d'une opération de mesurage, Brousseau et Chevallard voient en Lebesgue un promoteur d'une réforme de l'enseignement des mathématiques qui n'aurait pas eu lieu, la réforme devant avoir pour but le rapprochement entre les mathématiques savantes et les mathématiques à enseigner et en particulier l'élimination des grandeurs car « Ce sont ces nombres qui, seuls, servent en mathématiques ; libre à chacun de surajouter à ces notions mathématiques des notions métaphysiques, mais celles-ci ne doivent pas intervenir dans l'enseignement. » (Lebesgue, 1933, p. 44, cité par Brousseau, 2002).

Mes travaux sur les théories des réels, la proportionnalité et les programmes (Chambris, 2008, 2010, Chambris & Visnovska, 2021) m'ont amenée à considérer plus avant l'épistémologie des mathématiques de Lebesgue et quelques débats de l'époque. Ainsi, le philosophe et historien des mathématiques, Otte (2007) indique :

Lebesgue, considering applied mathematics the basis of pure mathematics, was in general critical of the axiomatic method, because it lacks constructive existence proofs and is thus incomplete. (p. 253)

Avec Visnovska, nous indiquons alors :

Lebesgue's book *La mesure des grandeurs* (Lebesgue, 1975), published serially from 1931, became progressively a reference book for elementary teacher education (Neyret, 1995). A disruption with regard to arithmetic was the inclusion of the set of real numbers, where prior treatises were limited to fractions. It included a construction of real numbers based on measurement with sequences of decimal length subunits, without including either a theory of fractions or Euclidian ratios. The replacement of fractions with decimals was motivated by an attempt to avoid definitions by abstraction (Author, 2010) that were, at the time, mathematically problematic (Griesel, 2007; Otte, 2007). Despite a presentation different to prior treatises, multiplication was again based on the change of units of measurement and general rules for calculations with real numbers were developed. This resulted in the algebraization of numbers. Neither internal, nor external ratios were used in the presentation of proportionality, but Lebesgue proposed a rationale for developing proportionality from a postulate of uniformity to the existence of a rate. (Chambris & Visnovska, 2021, p. 11)

Griesel (2007) souligne les difficultés théoriques posées par les définitions par abstraction aux environs de 1900¹³. Mon interprétation de la phrase de Lebesgue sur la métaphysique diffère ainsi de celle de Brousseau. Je l'interprète comme un rejet non pas des grandeurs, mais comme un rejet,

13 Griesel (2007, p.33) indique en substance : si \sim est une relation d'équivalence, il est possible de procéder à cette abstraction que tous les éléments d'une classe ont en commun et d'agir mentalement avec cette propriété $E(x)$ de l'élément x comme objet mathématique. Il est valide d'écrire : $E(x) = E(y) \Leftrightarrow x \sim y$. Cette réhabilitation, par les néo-fregéens, date de 1998. Ce qui pose problème 'métaphysiquement' est donc la possibilité de considérer la propriété commune à plusieurs objets comme un objet mathématique à part entière. La légitimation des définitions par abstraction permet donc, étant donnée par exemple la relation « avoir la même longueur que », de considérer la propriété de « longueur » et de parler de « la longueur de l'objet ». (Chambris, 2010, p. 327)

beaucoup plus large, des objets définis par classes d'équivalence. Entrent dans cette catégorie, centrale en mathématiques, bien sûr les grandeurs considérées comme classe d'équivalence d'objets (en particulier la longueur comme classe d'équivalence de segments isométriques) mais aussi les réels conçus comme classes d'équivalence de fractions -ou de couples d'entiers-, les classes d'équivalence de rapports externes qui amènent le taux dans les situations de proportionnalité. De fait, dans son ouvrage, Lebesgue propose des approches alternatives pour chacun des objets, qui permettent de les définir mathématiquement en contournant les classes d'équivalences.

Les travaux de didactique ultérieurs à la publication de l'ouvrage permettent de douter de la pertinence didactique de certaines de ces reconstructions. On pourra se reporter à Perrin-Glorian (1992) pour des difficultés induites par les aires qui n'apparaissent plus comme une classe d'équivalence d'objets géométriques mais comme un nombre. L'approche de la proportionnalité proposée par Lebesgue fait disparaître une partie des couches de complexité conceptuelle (il reste néanmoins le postulat d'uniformité dans le livre de Lebesgue). Les ingénieries de Brousseau et Brousseau (1987) et de Douady et Perrin (1986) posent l'étude des fractions comme un préalable à l'enseignement des décimaux. Remarquons que ces dernières ingénieries n'apportent pas de preuve d'inapplicabilité du projet du 'programme de Lebesgue' mais plutôt la preuve qu'un passage par les classes d'équivalence a une pertinence didactique.

Nous montrons dans (Chambris, 2010) et (Chambris & Visnovska, 2021) que ces choix mathématiques théoriques ont eu une influence profonde sur les programmes de l'école de 1945, programmes dont j'interprète alors certaines parties comme la transposition de l'ouvrage de Lebesgue. L'approche des décimaux et des fractions est conforme au 'programme de Lebesgue', de même l'approche de la proportionnalité.

Neyret (1995) a identifié à la fois dans le programme de 1945 et dans le livre de Lebesgue le rabattement des décimaux sur les entiers et la vision des fractions comme opérateurs sur des grandeurs. Il n'attribue pourtant pas cette modification du programme à la transposition du livre. Ces similitudes entre le programme de 1945 et ce livre (et d'autres éléments) constituent, selon nos analyses (Chambris 2008, pp.113–117), des indices sérieux en faveur d'une transposition. La première partie du livre semble avoir très largement inspiré les modifications du programme de 1945 concernant le rabattement des décimaux et les fractions comme opérateurs. (Chambris, 2010, p. 326)

Pour ce qui concerne la proportionnalité ils influencent aussi les manuels, c'est ainsi que nous réinterprétons les observations d'Hersant (2005) « Par ailleurs, vers la fin de la période le petit discours technologique est quelquefois remplacé par des ostensifs qui illustrent la correspondance entre les mesures des grandeurs proportionnelles (flèches ...) » (p.16) dans les manuels scolaires dans les années 1945-1969. Avec Visnovska, nous écrivons :

The influence of Lebesgue's book motivated the decrease of the use of fractions (in the syllabus and textbooks). Decimals, introduced through the metric system, provided an alternative for expanding beyond whole numbers. The discourses (technologies) for proportionality also changed, where expressions such as *times more*, *times less*, and *two thirds of* were now avoided, and exclusively spatial and symbolic multiplicative expressions were preferred. Algebraic rules, not rooted in sense making, progressively became the only means of providing coherent justification, even though concrete numbers remained in use. The

situation was ripe for removing magnitude values from mathematical consideration altogether. (Chambris & Visnovska, 2021, p. 12)

L'hypothèse de transposition du 'programme de Lebesgue' dans le programme de 1945 (pour l'école) s'inscrit donc en faux au regard des remarques de Chevallard et Brousseau à propos d'une réforme qui n'aurait pas eu lieu, et le texte de Lebesgue constitue une sorte de mise en conformité avec le savoir savant. Une conséquence de cette transposition dès 1945 est qu'il est possible qu'au cours des débats de la réforme des mathématiques modernes, une partie de la culture arithmétique classique est peut-être déjà oubliée.

J'ai déjà indiqué que cet ouvrage a été traduit en russe (en 1938) préfacé par Kolmogorov. Contrairement à Lebesgue, le mathématicien soviétique a produit une définition des grandeurs. Elle sert de support à l'ingénierie de Davydov, dont l'ancrage théorique comporte par ailleurs de nombreuses références au livre de Lebesgue (Davydov, 1975). Boulet (1998) indique que la remarque de Lebesgue sur la multiplication¹⁴ constitue le fil conducteur de la multiplication dans l'ingénierie de Davydov. Ceci confirme aussi que plusieurs transpositions d'un même texte sont possibles et qu'elles peuvent conduire à des résultats très différents.

4.3. Le nombre comme opération sur les grandeurs

Dans mon mémoire de DEA et ma thèse je m'étais intéressée aux propriétés des grandeurs dans leurs différentes axiomatisations, quand elles permettent de construire les nombres non entiers (rationnels ou réels). En relation avec mes travaux plus récents spécifiquement sur la question des unités dans le traité de Bézout (Chambris & Visnovska, 2021 et chapitre 4), j'ai été amenée à reconsidérer cette étude des théories des grandeurs et à la problématiser différemment.

En particulier, j'ai cherché à identifier si l'histoire des mathématiques avait fourni des constructions des nombres entiers en appui sur les grandeurs -car en général elles apparaissent pour traiter le continu- et à comprendre les grandes articulations de telles constructions, le cas échéant. Je cherchais à savoir s'il était possible, au moins théoriquement, de fonder les savoirs de l'arithmétique scolaire, largement irriguée par les grandeurs, sur une construction mathématique des grandeurs validée par la sphère savante. J'ai repéré deux constructions déjà citées. Une troisième, axiomatisée dans le paradigme d'idéalisation de la réalité, limitée aux rationnels est celle de Bézout (1764) et sera évoquée dans le chapitre 4. Ainsi, à 70 ans de distance, aussi bien Burali-Forti que Whitney énoncent des motivations pédagogiques à leurs constructions. Ces deux constructions partagent une logique commune.

Burali-Forti introduit l'idée de grandeur multiple à partir de l'itération d'une grandeur donnée. Il considère ensuite le processus d'itération et définit les entiers naturels comme l'opération générale d'itération des éléments d'un ensemble U doté d'une loi de composition interne régulière.

N_0 est la classe [l'ensemble] d'opérations telles que, quels que soient l'élément x et l'opération semblable [régulière] $+$ pour des couples, la classe [l'ensemble] N_{0x} (c'est-à-dire la classe [l'ensemble] qu'on obtient en appliquant à x à toutes opérations de la classe [l'ensemble] N_0) est la classe [l'ensemble] qui a les propriétés suivantes :

1° N_{0x} est homogène par rapport à [stable par] $+$;

14 « Toute question qui conduit à une multiplication est un problème de changement d'unité, ou d'objets: 5 sacs de 300 pommes; 3m.75 d'étoffe à 28fr.45le mètre » (Lebesgue, 1932, p.185, cité par Boulet, 1998, p.13)

2° $0(N_{0x}, +)$ et x sont des éléments de N_{0x} ;

3° Tout N_{0x} qui n'est pas égal à $0(N_{0x}, +)$ est de la forme $y+x$, où y est un N_{0x} »

Il résulte de cette définition que la classe [l'ensemble] N_{0x} (les multiples de x) est formée [formé] par les éléments $0(N_{0x}, +)$, x , $x+x$, $x+x+x$, [...] et seulement par ces éléments. (Burali-Forti, 1901, p. 298)

Burali-Forti indique qu'il a prouvé que N_0 existe et est univoquement déterminée. Il précise alors que N_0 vérifie une série de propriétés : il s'agit des axiomes de Peano. « [L'ensemble N_0] a toutes les propriétés attribuées habituellement aux éléments qu'on appelle nombres entiers. » (p. 300)

En imposant des propriétés supplémentaires à l'ensemble sur lequel est définie la loi de composition interne, Burali-Forti définit les rationnels puis les réels, comme ensembles d'opérations sur l'ensemble de grandeurs. Les propriétés des grandeurs imposées par Burali-Forti sont en filiation avec les notions communes d'Euclide (j'y reviendrai au chapitre 3)¹⁵. La définition des grandeurs contient les axiomes suivants (formulés par moi-même dans un langage plus actuel que celui de Burali-Forti mais non formalisé) :

Une grandeur G est un ensemble doté d'une addition

- 1) l'addition est commutative,
- 2) l'addition est associative,
- 3) il existe un élément neutre 0 pour l'addition
- 4) l'ensemble n'est pas réduit à cet élément neutre
- 5) Si x et y sont des éléments de G , et si x est non nul, alors $x+y$ est non nul
- (6) Si x, y sont des éléments G , alors $y = x$ ou $x > y$ ou $x < y$. L'ensemble est totalement ordonné (c'est la trichotomie).

[par définition « $x > y$ » signifie qu'il existe z non nul dans G , tel que : $x = y + z$].

(7) Si x est dans G , et si x est non nul, alors il existe au moins un élément de G inférieur à x .

(8) Si A est une partie non vide majorée de G , alors il existe x dans G tel que $\{y \text{ dans } G / y < x\} = \{y \text{ dans } G / (\text{il existe } z \text{ dans } A) y < z\}$

Cet élément x est unique ; on l'appelle « limite supérieure de A ». Il est noté $l'A$.

D'après Burali-Forti (1901)

Burali-Forti précise que par exemple, si A est la classe formée par les longueurs des périmètres des polygones convexes inscrits dans une circonférence, $l'A$ est la longueur de la circonférence.

Les nombres rationnels sont définis comme opération sur les grandeurs. Si m et n sont deux entiers naturels, m non nul, $n/m x$ désigne la grandeur telle que : $m [(n/m)x] = nx$

Burali-Forti indique alors un premier exemple : « $1/5 x$ est la grandeur qui multipliée par 5 donne x » (p. 305). Autrement dit, $1/5 x$ est la grandeur z telle que $5 z = x$. L'opération sur x est le nombre rationnel $1/5$. Le deuxième exemple fournit les multiples des quantités : « $4/5 x$ c'est 4 fois la grandeur $1/5 x$ » (p.305) et le rationnel est tiré de l'opération sur les grandeurs.

15 Gandon indique d'abord en référence à la construction de Burali-Forti, par comparaison à l'approche du livre V des Éléments « le cœur de la construction, stable malgré les variations, est constitué par la combinaison de la structure d'ordre et de l'additivité. » (Gandon, 2009, p. 30). Il précise « Au XIX^{ème} siècle, on appelle grandeurs extensives les quantités qui sont ordonnées et additives » (*ibid.*).

Les *opérations* réelles sur les grandeurs, puis les réels sont définis d'abord par les bornes sup des coupures inférieures du type : $\{(n/m)x\}$ majorés, dont est ensuite extraite une opération à savoir un réel.

Cette construction permet de définir les réels comme rapports de grandeurs. En effet, étant y une grandeur et x une grandeur non nulle (que j'appelle unité), les axiomes assurent la possibilité de mesurer x avec y , autrement l'existence d'un réel m tel que $y = m x$.

Signalons que Peano, maître de Burali-Forti, reprochera, à Burali-Forti, que ses axiomes sur les grandeurs, sont du même ordre que ceux qui donnent la complétude des réels, le postulat de Dedekind (Gandon, 2009).

En 1968, le mathématicien Whitney a publié un article en deux parties « The Mathematics of Physical Quantities ». Chevallard et Bosch (2002) citent par exemple la deuxième partie pour justifier le calcul avec les unités. Le projet de la première partie, intitulée « Mathematical models for measurement », est différent. D'une part Whitney propose un modèle mathématique pour la mesure des grandeurs. Il précise qu'habituellement les applications mesure privilégient une valeur de grandeur et lui attribuent la valeur 1 alors que ce choix n'a pas de raison physique. Dans sa construction, c'est à l'opérateur qu'il attribue la valeur 1, à l'action. Il propose ainsi une construction des ensembles de nombres reposant sur ce modèle.

2. Numbers as operators on the models. If we choose a stick of length 1, and wish to use it to measure another stick, we lay out the first stick along the second several times; we thus form $1+1$, $1+1+1$, and so on. We also call these lengths $2l$, $3l$, [...] . Thus N appears as a natural set of operators on our model. For masses, there is a different physical process of addition; but again we may use $2m = m + m$ and so on, with the same set N of numbers. (Whitney, 1968a, p. 115)

Les entiers sont ainsi définis comme opération d'itération sur un ensemble, doté d'une addition commutative et associative mais pas nécessairement régulière, ce qui est un peu différent de ce que fait Bural-Forti, mais les ensembles de grandeurs discrètes vérifient ces propriétés. Il construit les ensembles Q^+ et R^+ , comme opération sur des ensembles. Sans surprise, les axiomes des grandeurs retenus par Whitney pour assurer la complétude sont du même ordre que ceux de Burali-Forti.

Hassler Whitney est un mathématicien important du 20^e siècle (Thom, 1990). Il a consacré une bonne partie des vingt dernières années de sa vie à la question de l'enseignement des mathématiques. Il a été président de l'ICMI de 1979 à 1982 (Kilpatrick, 2008). Il a publié ces textes en 1968, autrement dit, pendant la réforme des mathématiques modernes. Le premier texte est émaillé de quelques formules qui renvoient avec une certaine ironie aux débats de l'époque sur la transposition de la théorie des ensembles à l'école et le rejet des grandeurs.¹⁶ Ainsi, Whitney écrit : « thus N appears as a *natural set of operators* on our models » (je souligne), plus loin « The fact that "2 yd" and "6 ft" name the same element of the model enables us to say they are equal; *there is no need for such mysterious phrases* as "2 yd measures the same as 6 ft." » (Whitney, 1968a, p. 116, je souligne). Il prend aussi appui sur une situation extrêmement naïve, l'histoire d'une famille qui met la table, des invités arrivent à l'improviste, il manque des cuillères, etc. pour produire un exemple de semi-groupe commutatif avec une loi de composition non triviale. Ces éléments ne laissent planer aucun doute sur le caractère noosphérique du texte. Ce texte pourrait

16 Ces textes ont à l'époque été récompensés par un prix de la Mathematical Association of America.

avoir eu l'ambition non seulement de montrer qu'il était possible de faire des mathématiques avec les grandeurs mais aussi d'alimenter théoriquement la possibilité de construire les entiers sans la théorie des ensembles mais comme itération, par conséquent de contribuer à l'élaboration d'un savoir à enseigner encore en devenir.

Chapitre 2. La numération décimale des entiers

La numération décimale des entiers est une notion centrale des mathématiques de l'école primaire. Elle inclut deux facettes principales : la numération orale (les noms des nombres, trois-cent-quatre-vingt-sept), la numération écrite (écriture positionnelle chiffrée, 387). Sous sa forme positionnelle, elle est sans doute enseignée dans toutes les écoles du monde, qui plus est utilisée par tous les mathématiciens du monde, au moins de temps en temps. Deux grandes fonctions sont attribuées à la numération : moyen utilisé pour la mesure des quantités, leur mémorisation ou encore leur communication et mode de désignation des quantités pour effectuer les calculs. À l'écrit, les civilisations n'ont pas toutes retenu le même moyen pour accomplir ces deux fonctions. (voir par exemple, Proust, 2008, pour la Mésopotamie). Néanmoins, aujourd'hui, en France et sans doute dans nombre de pays du monde, à l'écrit, c'est un moyen unique qui est retenu pour ces deux fonctions, la numération décimale positionnelle. Cet objet semble stabilisé depuis plusieurs siècles. Même si son apprentissage pose de nombreuses difficultés (e.g., Fuson, 1992), on ne voit pas *a priori* comment la nature même des nombres telle qu'envisagée dans le chapitre 1 pourrait avoir une incidence sur leurs désignations. D'ailleurs, les changements épistémologiques majeurs en mathématiques au 19^e siècle ne semblent pas avoir affecté l'écriture décimale.

De fait, mes premiers résultats sur la numération (chapitre 6 de ma thèse) ont été établis par un questionnement d'ordre écologique (motivé initialement par l'étude de l'articulation entre l'enseignement du système métrique et celui de la numération), par conséquent non motivé par les évolutions des fondements mathématiques de l'arithmétique scolaire. Ils ont consisté en une description, la plus complète possible, des praxéologies de la numération avant la réforme des mathématiques modernes et après. J'ai affiné cette description dans des travaux postérieurs à ma thèse, pour la période récente essentiellement. Élucider en quoi le paradigme savant de construction des nombres (théorie ensembliste vs théorie des grandeurs) détermine au moins en partie ces praxéologies m'a pris plus de dix ans et m'a permis de revenir notamment sur la période ancienne (travaux présentés dans le chapitre 4).

Ce chapitre est organisé en 5 parties. Dans une première partie, je présente mes résultats sur les praxéologies à enseigner, en numération. Même si les travaux correspondant ne s'inscrivent pas dans le champ de l'histoire de l'enseignement, ils s'attachent à décrire le savoir à enseigner sur une période qui va environ de 1900 à 2005 (voire plus tardivement). En reprenant les outils présentés dans la première partie, la deuxième partie rapporte des observations dans le domaine de la numération et dans le domaine du calcul mental sur les nombres à plusieurs chiffres relatives au savoir enseigné et appris dans les années 2010. Ce sera l'occasion de s'interroger sur l'émergence d'un nouvel objet : les écritures courtes. La troisième partie, en appui sur les deux précédentes, raffine la caractérisation des deux ostensifs de la numération que j'ai introduits (pendant ma thèse) dans la détermination des praxéologies, les *écritures chiffrées des puissances de dix* (ECPD) et les *unités de la numération*. Dans la quatrième partie, je présenterai un savoir savant du second ordre pour la numération que j'ai élaboré (d'abord dans ma thèse, raffiné ensuite) qui permet selon moi d'expliquer la grande stabilité de la praxéologie actuelle malgré un certain nombre de « défauts ». La cinquième partie discute les travaux réalisés par Tempier d'une part et des travaux réalisés d'autres chercheurs sur la base des travaux de Tempier d'autre part. Je les réinterprète à la lumière

de mes propres résultats. En conclusion du chapitre, les différents apports permettent d'envisager des leviers pour faire évoluer la situation.

1. Évolutions de l'enseignement de la numération au 20^e siècle : praxéologies à enseigner, ostensifs et savoir savant

Mes résultats sur la numération sont d'ordres écologique et praxéologique. Dans ma thèse, j'ai d'abord caractérisé le savoir à enseigner pour le système métrique pour la période 1930-1970 ce qui passe par l'identification de son articulation avec l'enseignement de la numération et des éléments de la transition 1882-1930 qui conduit à cette articulation (Chambris, 2009). Ce travail m'a amenée à amorcer la caractérisation du savoir à enseigner de la numération pour la période 1900-1970, en termes praxéologiques. Dans la foulée de cette étude du savoir à enseigner (réalisée à partir de l'étude de textes curriculaires : programmes et manuels scolaires), j'ai réalisé une étude des connaissances des élèves actuels (savoir appris) sur l'articulation entre numération et système métrique. En voulant étendre l'étude du savoir à enseigner pour le système métrique et son articulation avec la numération à la période récente, j'ai repéré des modifications très importantes pour la numération (qui se désarticulait du système métrique) et j'ai été amenée à préciser les éléments sur le savoir à enseigner en numération pour la période ancienne et à déterminer certaines caractéristiques majeures du savoir à enseigner en numération pour les périodes 1970-1980, puis 1980-2005 (en appui sur d'autres textes curriculaires ou les mêmes : traités d'arithmétique, guides pédagogiques, manuels scolaires).

Outre la mise en évidence, dans le passé, de praxéologies articulées (ou amalgamées) entre numération et système métrique, l'identification d'un savoir à enseigner de référence et une description des praxéologies de la numération, éléments qui contribuent à l'élaboration d'une praxéologie de référence (1.1), le résultat principal réside dans l'identification de deux phénomènes didactiques. Il s'agit d'une part de la mise en évidence de deux ostensifs qui jouent un rôle central dans l'enseignement-apprentissage de la numération dont les valences instrumentales et sémiotiques sont fortement modifiées dans les années 1970-1980 (1.2). Il s'agit d'autre part de la modification du bloc de savoir savant transposé pour la numération, modification qui permet d'expliquer, jusqu'à un certain point, les évolutions des valences sémiotiques et instrumentales des deux ostensifs (1.3).

1.1. Construire une praxéologie mathématique de référence pour la numération

Je précise d'emblée que la « praxéologie de référence » que j'ai construite pour la numération et que je vais évoquer dans cette section n'est pas stabilisée¹⁷ (Chambris, 2008, 2012 LDAR). C'est parce que je ne parvenais pas à comprendre la logique de l'enseignement de la numération au début des années 2000 que j'ai été amenée à produire une praxéologie qui me serve de référence pour répondre à la question « Qu'est-ce qu'étudier la numération de position des entiers ? » (Chambris, 2008, p. 412). Cette construction, bien qu'inaboutie, m'a permis de répondre aux questions que je me posais et en particulier d'éclairer la logique du début des années 2000 par la caractérisation de *l'évolution des praxéologies sur près d'un siècle* en appui sur un modèle de référence, commun aux différentes périodes. Comme par ailleurs la question des praxéologies de

¹⁷ D'ailleurs, Nadine Grapin a retravaillé cette praxéologie dans sa thèse (Grapin, 2015) mais je ne l'ai pas étudiée.

référence est une question importante et relativement ouverte en TAD (e.g., génératrice de l'axe 2 du 4^e congrès de la TAD, Cirade et al. (eds.), 2017)), il me semble intéressant d'indiquer quelques lignes directrices qui ont conduit à son élaboration. Plusieurs études l'ont en effet alimentée :

- une étude bibliographique dans le champ de la recherche en didactique des mathématiques sur l'enseignement-apprentissage de la numération pour repérer les enjeux de l'enseignement et l'apprentissage de la numération, au plan international, (non évoquée ci-après),
- une étude sur la contribution du système métrique à la numération, dans les années 1900-1970 dans les programmes et les manuels (1.1.1),
- une étude du texte de référence pour le savoir à enseigner pour la numération dans les traités de Bézout et Reynaud (1821) (Neyret, 1995) (1.1.2). Ces textes présentent une construction logique de la numération décimale des entiers. L'étude permet de repérer cinq discours technologiques clés. Leur cadre mathématique est celui de l'arithmétique classique. Cette construction logique prend place au sein de la strate théorique de la praxéologie pour la période que j'ai appelée classique (1900-1970) mais cette strate ne s'y réduit pas car d'autres éléments doivent y être ajoutés (chapitre 4).

Ma praxéologie « de référence » est construite en partant de tâches que j'ai identifiées et considérées comme emblématiques ou cruciales pour le travail en numération (1.1.3), indépendamment de la période, en appui sur deux études préalables : la contribution à la numération dans les leçons de système métrique, les enjeux de l'enseignement de la numération. Puis, un type de tâches est reconstruit autour de chacune des tâches clés repérées (en identifiant grossièrement les variables possibles dans les tâches).

J'ai ensuite élaboré une praxéologie pour décrire le savoir à enseigner dans des manuels anciens (15 manuels du CE1 et/ou CE2) (période 1920-1970) dans le domaine de la numération en intégrant les leçons de système métrique. Pour chaque tâche clé, une technique est ébauchée qui permet de traiter la tâche en appui sur les technologies repérées au préalable dans le traité de Reynaud. J'ai ensuite repéré et caractérisé les types de tâches.

J'ai utilisé cette première praxéologie pour interpréter le savoir à enseigner dans les périodes suivantes. J'ai identifié au fil de l'analyse des nouvelles technologies, pour chaque tâche clé (section 1.2). Comme on le verra, les technologies évoluent à partir de 1970 mais la caractérisation des techniques et technologies antérieures à 1970, plus facile à réaliser car les briques de discours élémentaires étaient repérées, permet de reconstruire un ensemble de technologies pour les périodes ultérieures. Les premières servent de référence et permettent d'éclairer la transposition du savoir savant (Section 1.3).

1.1.1. Élément sur l'articulation entre numération et système métrique 1900-1970

La progression sur le système métrique dans les manuels est structurée par les étapes de construction de la numération, les unités, les dizaines, les centaines, etc., qui sont aussi associées aux tailles d'unités métriques à partir des années 1920 quand numération et système métrique sont articulés : l'unité - le mètre, la dizaine - le décimètre, etc. L'étude de cette articulation (Chambris, 2008, 2009) m'a permis notamment de repérer l'importance des unités, dizaines, centaines dans les discours sur le système métrique et d'identifier progressivement une numération (on pourrait

discuter le nom de *numération*) qui jouait un rôle majeur. Il s'agit d'exprimer les nombres en appui sur les unités, dizaines, centaines, etc. Dans l'étude du système métrique, cette numération permet de déployer des discours tels que 1 hectomètre c'est dix décimètres et 1 hectomètre c'est cent mètres, discours associés à des tâches prescrites dans les manuels (porter dix fois le décimètre, citer un lieu situé à 1 hectomètre, etc.) et correspondant dans le champ de la numération pour l'un à 1 centaine c'est dix dizaines et pour l'autre à 1 centaine c'est cent unités.

Quand ils étaient utilisés à propos de matériel de numération, dans les textes curriculaires du début des années 2000 que je fréquentais en particulier comme formatrice, les mots dizaine ou centaine décrivaient des groupes ou groupements d'objets (sans qualification par ailleurs de ce qui est groupé). Un tel point de vue sur les dizaines et les centaines m'a semblé inadapté pour décrire des *quantités*. En effet, si un paquet de cent pommes contient forcément 1 centaine de pommes, il n'est pas nécessaire que 100 pommes soient en paquet de 100 pour être une centaine : 100 pommes sont toujours une centaine de pommes¹⁸. Par ailleurs, il est clair que $3\text{ m} = 30\text{ dm}$ car 3 m et 30 dm sont deux expressions de la même longueur. Ces deux expressions n'indiquent pas une constitution particulière de la longueur ou la façon dont elle a été mesurée. On peut avoir mesuré une longueur en reportant 30 fois une bande d'un décimètre de long et indiquer que la longueur de la bande est 3 m. De la même façon, pour qu'elles indiquent des quantités de pommes, les expressions 3 centaines de pommes, 30 dizaines de pommes et 300 pommes ne peuvent traduire des organisations matérielles de la collection. J'ai donc considéré que les centaines de pommes, dizaines de pommes étaient des *unités* pour mesurer une grandeur qui est la « quantité de pommes ». Par conséquent, considérant la relation $32 = 3\text{ dizaines} + 2\text{ unités}$, il était nécessaire que les *unités*, *dizaines*, *centaines* soient des unités. Sans trop comprendre ce que pouvaient être *mathématiquement* ces unités, je les appelées *unités de la numération* et j'ai appelé cette numération qui les mobilisait : *numération en unités*. Ces explications sont largement implicites dans ma thèse et j'ai progressivement formulé ces éléments dans mes textes de 2012 (Grand N) et 2014.

1.1.2. Référence pour le savoir à enseigner avant la réforme des mathématiques modernes

The period 1900–1970 saw few changes in mathematical numeration theory. *Classical theory* (ΘUnit) was presented in the treatises by Bézout and Reynaud (1821) and closely adapted for textbooks, where it was used to support numeration and the rationale for calculation. It is based on five main rules:

- R1: Tens, hundreds, etc. can be counted as ones.
- R2: 10 units of a given order are equal to 1 unit of the upper order.
- R3: The amounts of units (less than ten) of each order are juxtaposed from right to left: Each place represents a unit that is ten times bigger than its right-hand neighbor. Places that are not represented are marked with the sign 0.
- R4: Relations between unit names and number names. For example, as *three tens* are *thirty* and *four ones* are *four*, then *three tens* and *four ones* are *thirty-four*.

18 Ceci étant, la perception de la quantité, qui est donc commune, ne va pas de soi pour les élèves et donc l'utilisation de l'égalité par l'enseignant ne garantit pas sa compréhension par les élèves (Chapitre 4). L'enseignement doit prendre en charge l'apprentissage de la notion de quantité par les élèves.

- R5: Numbers can be added, forming new numbers.

The algorithm used to build numbers provides implicit proof for the existence and uniqueness of the decomposition of a number in base ten:

- 1 The first ten numbers are built in sequence, starting with the unit one, then adding one to the previous number, forming the numbers one, two, etc. (R5);
- 2 A set of ten ones forms a new order of units: the ten (R2);
- 3 The tens are numbered like the ones, beginning with one ten and ending with ten tens (R1);
- 4 Then, the first nine numbers are added to the first nine tens: one ten, one ten and one, one ten and two [...] two tens, two tens and one, etc., forming the first ninety-nine numbers (R5);
- 5 The set of ten tens forms a new order of units: the hundred (R2);
- 6 The hundreds are numbered like the tens and the ones; from one hundred to ten hundred: one hundred, two hundred, etc. (R1);
- 7 Then the first ninety-nine numbers are added to the first nine hundreds forming the first nine hundred and ninety-nine numbers (R5).

Number names are presented as a literal translation (R4). Rules are stated and any exceptions are given, such as the usual name given to *ten-two* (*dix-deux* in French) is *twelve* (*douze*), the name given to *nine-ten* is *four-twenty-ten*. Last, once the numbers have been built, their positional notation is stated using (R3). (Chambris, 2018, p.10-11)

Conséquemment, la numération en unité joue un rôle absolument central avant 1970. C'est notamment un pivot entre les différentes numérations : orale, chiffrée, métrique. Grâce aux différents discours technologiques, la numération en unités permet l'articulation entre les différentes numérations (Figure 5).

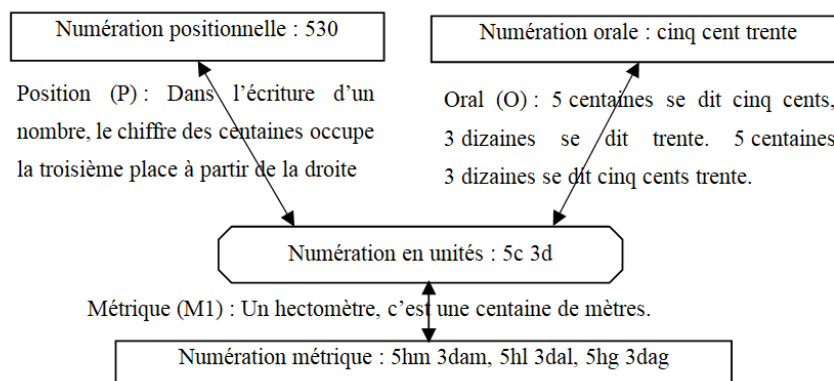


Figure 5. – Correspondance entre les numérations en unités et métrique, positionnelle et orale. (Chambris, 2012 LDAR, p. 59)

1.1.3. Les types de tâches (Chambris, 2008, p. 433-434)

Les deux premiers types que nous présentons nous semblent incontournables. Le premier consiste à relier les nombres et les objets : étant donnée une collection, combien d'objets contient-elle ? (et réciproquement, faire une collection dont on connaît le nombre). Nous parlerons du type de tâches « **dénombrer** ».

Le deuxième type est représenté par la tâche emblématique qui relie numérations orale et écrite : étant donné un nombre écrit en chiffres, donner sa désignation orale et

réciroquement. Rappelons que nous n'avons pas étudié cette question pour les grands nombres. Nous parlerons du type de tâches « **dire écrire un nombre** » Nous incluons ensuite deux autres types de tâches dans cette première catégorie : **le rangement de nombres** et la **connaissance des suites orales et écrites**¹⁹ (le pas entre deux nombres étant une puissance de dix, en montant, en descendant).

On peut penser que ces quatre types de tâches sont emblématiques pour l'institution école primaire. Elles correspondent probablement à des pratiques extrêmement répandues dans les sociétés qui ont des pratiques numériques.

Vient ensuite un cinquième type que nous désignons ici par une tâche : « Combien faut-il de billets de 100 francs pour avoir 4500 francs ? ». Nous appelons « **nombre de** » la catégorie de tâches à laquelle elle appartient. Même si cette tâche est intéressante dans différentes numérations (à l'oral par exemple), nous considérons qu'elle est emblématique de la numération de position à cause de la propriété forte de la numération positionnelle qui permet de la traiter. Cette propriété n'est pas énoncée dans nos manuels de CE2, ni hier ni aujourd'hui. Dans (Reynaud, 1821, §2), elle est énoncée sous la forme :

En général, d'après notre système de numération, pour qu'un nombre exprime des dizaines ou des centaines ou etc., il suffit que son premier chiffre à droite représente des unités de cet ordre,

Reynaud poursuit :

ce qui revient à placer sur la droite de ce nombre un zéro, ou deux zéros, ou etc. Il en résulte que le nombre 327429 peut être considéré comme formé de 327 mille et 429 unités, ou de 3274 centaines et 29 unités, ou de 32742 dizaines et 9 unités, ou etc. Cette manière de décomposer les nombres servira par la suite.

Un sixième type de tâches emblématique est « **le changement de base** ». Il n'apparaît à l'école que lorsqu'on travaille dans plusieurs bases, c'est à dire au moment de la réforme [des mathématiques modernes].

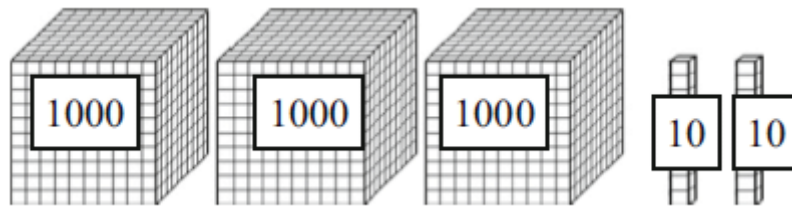
Le dernier type que nous avons qualifié de « technologique » consiste à **décomposer et recomposer un nombre à l'aide de la numération**. Ce type est très sensible aux ostensifs qui vivent dans l'institution. En effet, nous avons écrit dans notre relecture du travail d'Harlé [thèse sur l'histoire de l'enseignement des nombres et du calcul à la fin du 19^e siècle et au début du 20^e siècle] qu'il cherche des décompositions du nombre 268 et qu'il n'en trouve pas car il ne reconnaît que la forme $2 \times 100 + 6 \times 10 + 8$ alors que nous en trouvons mais sous la forme 2 centaines 6 dizaines 8 unités. (p.433-434, je souligne)

1.2. Evolution des praxéologies et ostensifs de la numération

L'étude de la numération dans des manuels scolaires de différentes époques (entre 1900 et 2005) montre des transformations importantes dans les praxéologies à enseigner. J'ai décrit ces transformations dans (Chambris, 2008, chapitre 6, 2012 LDAR, 2018). Je vais m'appuyer sur un exemple présenté dans (Chambris, 2018) pour rendre visible quelques caractéristiques de ces transformations dans les praxéologies à deux époques : avant la réforme des mathématiques modernes et les années 2000.

Tâche : Écrire le nombre de cubes

¹⁹ À la relecture, je constate que j'ai oublié d'inclure ce « type de tâches » dans mon analyse de la période actuelle dans ma thèse.



Dans les manuels antérieurs à la réforme :

Sous-tâche 1 :

Un bloc de 1000 cubes contient 1000 cubes, donc 1 millier de cubes (1 en 4^e position) (R3). On compte les milliers (comme on comptait les unités) : 1, 2, 3, donc 3 milliers (R1). Un bloc de 10 cubes contient 1 dizaine de cubes (1 en 2^e position) (R3). On compte les dizaines (comme on comptait les unités) : 1, 2 donc deux dizaines. (R1) Il y a donc : 3 milliers 2 dizaines de cubes (R3)

Sous-tâche 2 :

Les dizaines s'écrivent en 2^e position à partir de la droite, les milliers en 4^e position à partir de la droite. Les rangs non occupés sont marqués par des zéros. Donc, le nombre de cubes s'écrit : 3020. (R3)

Dans les manuels des années 2000 :

Sous-tâche 1 :

Méthode a) On compte les cubes dans les groupes de 1000 (ou mille) : 1000, 2000, 3000 (ou mille, deux-mille, trois-mille). On compte les cubes dans les groupes de 10 (ou dix) : 10, 20 (ou dix, vingt). Dans le cas d'un traitement par la numération orale : trois mille s'écrit 3000, vingt s'écrit 20.

Il faut alors transformer la somme $3000+20$ en une écriture chiffrée.

Méthode b) On compte les groupes : il y a 3 groupes de 1000 cubes et 2 groupes de 10 cubes.

Le nombre de cubes est : $(3 \times 1000) + (2 \times 10)$. Expression à transformer en une écriture chiffrée.

Sous-tâche 2 : Pour les deux méthodes, c'est un calcul qui permet de réduire les expressions.

Méthode b) Pour $(3 \times 1000) + (2 \times 10)$, un calcul multiplicatif permet d'obtenir : $3000+20$.

Pour les méthodes a et b, il faut ensuite calculer la somme $3000+20$. Ce calcul s'effectue principalement de deux façons :

- par lecture « trois-mille et vingt » donc « trois-mille vingt » qui s'écrit 3020.
- par une addition posée en colonne qui conduit à 3020.

L'étude réalisée permet de mettre en évidence un nouveau système de signes utilisé pour la numération à partir des années 1980. Il s'agit des écritures chiffrées des puissances de dix (ECPD), 1, 10, 100, etc. Bien sûr, les écritures chiffrées des puissances de dix existent avant la

réforme. Elles interviennent abondamment dans les calculs et dans les désignations chiffrées des quantités concrètes, des boîtes de 10 plumes ou des billets de 100 francs par exemple. Comme dans l'exemple qui précède elles doivent être interprétées en termes de dizaines centaines ou milliers pour être traitées par la numération (avant la réforme).

À partir des années 1980, les ECPD viennent en quelque sorte remplacer les dizaines, centaines, milliers. Simultanément, les mots dizaines centaines milliers disparaissent quasiment des leçons de numération dans les manuels. Ils restent cependant présents dans certains manuels où ils indiquent les *noms* des colonnes du tableau de numération (ce qui est utile pour la lecture en mots des nombres écrits en chiffres et inversement), parfois ce sont les noms des composants des matériels de numération, *la barre-dizaine*. À partir des années 1995, les dizaines centaines milliers reviennent progressivement.

Parallèlement des tâches évoluent, en particulier les recombinaisons des nombres qui interviennent dans les sous-tâches 2 sont des tâches importantes de numération. Elles permettent en effet, en principe, d'associer à chaque chiffre un poids (représenté ici par un type de bloc de cubes). Avant la réforme, les unités, dizaines, centaines sont des moyens d'exprimer les nombres. L'expression « 3 milliers 2 centaines » renvoie à trois unités de taille un millier et deux unités de taille une dizaine. Dans la période 1980-1995, ces tâches de décomposition-recombinaison en unités disparaissent complètement et sont remplacées par les décompositions-recombinaison correspondant à la sous-tâche 2 de l'époque, des *décompositions multiplicatives* et des *décompositions additives*.

Quand les unités, dizaines, centaines reviennent dans des décompositions à partir des années 1995, la technique n'est plus celle qui existait avant la réforme. En effet, *écrire en chiffres 3 milliers 2 dizaines* se traite de la façon suivante : 3 milliers = 3000, 2 dizaines = 20. Donc 3 milliers 2 dizaines = 3000+20 (Chambris, 2008, p. 521-522). On retrouve alors, pour réduire la somme, la sous-tâche 2 des années 2000. Tout se passe comme si « 3 milliers » désignait une *écriture courte* (Chambris, 2012 EMF, p. 1155) pour le « nombre qui a le chiffre 3 dans la colonne des milliers », autrement dit pour 3000. La valence sémiotique de l'ostensif unité de la numération a été modifiée. À partir de 1995, dans des textes curriculaires, les mots dizaines, centaines, milliers ne renvoient plus à des unités qui ne seraient pas « 1 ». Quand ils renvoient à un nombre, il s'agit d'un nombre d'unités simples. Parfois, voire le plus souvent, ils renvoient uniquement à une colonne du tableau.

Dans la dernière période, des décompositions en unités de numération reviennent, en complément de celles en ECPD (Figure 6). La technique pour recomposer 6 centaines 5 dizaines 4 unités en 654 semble être en ce moment : 6 centaines = 600, 5 dizaines = 50, 4 unités = 4 puis 600 + 50 + 4 = 654.

1) Observe l'exemple, puis décompose les nombres.

$$648 = 600 + 40 + 8$$

472 586 908 759 390

2) Décompose les nombres en centaines, dizaines et unités selon l'exemple.

$$543 \text{ c'est } 5 \text{ centaines } 4 \text{ dizaines } 3 \text{ unités}$$

856 450 624 302 718

Figure 6. – Les nombres jusqu'à 999 (2) (extrait) (Pour comprendre les mathématiques CE2, Blanc et al. 2002, p.17)

Le type de tâches classique semble être en train de se recomposer mais la technologie a changé, elle repose sur les ECPD. Ceci redonne un peu de légitimité aux unités de numération mais *elles sont assujetties aux ECPD*. (Chambris, 2012 LDAR, p. 69, je souligne)

Une autre facette de ces transformations est l'interprétation des technologies qui consistent en des *calculs*. Ces calculs reposent sur des règles positionnelles (pour multiplier par 10^n , on écrit n zéros à droite ; pour additionner on aligne les chiffres les uns en dessous des autres en ferrant à droite ; quand on augmente de 1 une colonne qui est à 9, elle passe à zéro et celle d'à côté est augmentée de 1 – c'est le principe de la retenue). Ces règles, partiellement explicites, constituent les technologies de la praxéologie rénovée. Elles permettent de traiter de nombreuses (à défaut de toutes) tâches scolaires de numération, notamment les calculs en nombres entiers. Elles fonctionnent avec pour seule unité le nombre 1 car $4 \times 100 + 6 \times 10$ se réduit en $400 + 60$ qui se réduit en 460, par calcul.

Ces deux dimensions permettent de conclure que non seulement « [l]a valence instrumentale des unités de la numération dans l'institution actuelle des mathématiques de l'école primaire semble être assez éloignée de celle de la période classique. » (Chambris, 2008, p. 529) mais que « [f]ondamentalement, la seule unité présente dans l'enseignement de la numération semble être le « nombre 1 » » (Chambris, 2012 Grand N, p. 47). Elles signifient que l'institution n'a probablement pas de ressource pour que les enseignants les enseignent. Elles suggèrent aussi que parmi les élèves qui les connaîtraient, une bonne partie d'entre eux les auraient apprises dans un contexte qui n'est pas celui de la classe, autrement dit, tout seul, dans leur famille, par la fréquentation de personnes fréquentant d'autres institutions scolaires où elles seraient enseignées, etc. Des enseignants qui les connaîtraient peuvent bien sûr les enseigner, volontairement, ou les utiliser, incidemment, mais ils ne seraient probablement pas soutenus par des ressources de leur institution dans cette activité.

L'autre aspect important de ces résultats sur la numération consiste en la détermination de leurs causes. Peut-on identifier dans l'évolution de l'enseignement un phénomène qui conduirait à l'élimination des unités autres que 1 de l'enseignement de la numération ?

1.3. Bloc de savoir savant transposé à partir de la réforme des mathématiques modernes

Le savoir de référence pour la numération avant la réforme a été présenté précédemment. L'étude du savoir à enseigner des années 1970-1980 -des textes pour les enseignants et les formateurs, des guides pédagogiques- permet d'apporter une première réponse à cette question. (Chambris, 2008)

New Math introduced bases, a change that, a priori, has no link with scholarly knowledge. In some teachers' guides, academic theory (Θ Polynomial) appears. Its explicit components are as follows:

- Θ Poly: Existence and uniqueness of the polynomial decomposition of a number n in a given base a (i.e., $n = \sum_{i=0}^p r_i a^i$, $0 \leq r_i < a$)
- Θ Coeff: Juxtaposition of coefficients of the polynomial forms positional notation: $(a_p a_{p-1} \dots a_1 a_0)$.

Elements that involve [scholarly] knowledge vary, depending on teacher's guide in question, as follows:

- 1 Most often, classical theory was adapted: as there are no tens or hundreds in bases, unit names become generic (e.g., 'first-order unit', 'second-order unit'). Specific unit names only reappear in base ten.
- 2 Sometimes θ Poly is stated and formally proven using Euclidean division.
- 3 Base ten unit names are always present in relation to the number names, with the classical correspondence (R4).

Beginning in the 1980s, classical theory is no longer found in textbooks and teachers' guides, while at the same time θ Poly is explicitly stated. Positional notation is obtained with θ Coeff. Nowadays, θ Poly is typically implicit in teachers' guides. The 'new' mathematics (θ Polynomial) really became established as the mathematical foundation for the teaching of place value during the so-called counter-reform, while there are no visible changes after this period. (Chambris, 2018, p. 11)

[Les technologies savantes θ Poly et θ Coeff ne sont pas probablement pas enseignables car il me semble qu'elles relèvent de l'algèbre avancée.] In the mid-1970s, there was a huge transposition of academic theory [θ Polynomial], which was largely developed and disseminated by ERMEL (1978). The process was as follows: $\sum r_i a^i$ became $\sum r_i 10^i$, then $b \times 1000 + c \times 100 + d \times 10 + e$ or $b000 + c00 + d0 + e$. Our interpretation is as follows: the positional notation of powers of ten requires 0 and 1 as multiplicative coefficients (e.g., $100 = 1.a^2 + 0.a^1 + 0.a^0$); as this is predictably difficult for early graders, these notations are given. The counter-reform syllabus shares many similarities with ERMEL (1978), and was based on writings; numeration units appeared only once (in 4th and 5th grades): "In 7024, there are 70 hundreds because $7024 = (70 \times 100) + 24$ "; and bases disappeared beginning in second grade.

Among the various writings, the 'powers-of-ten written in figures' (PTWF hereafter) notation (1; 10; 100; 1000, etc.) played an increasingly important role. Within a few years, standard PTWF tasks emerged that appear to be a literal translation of existing tasks from numeration unit language [...] (e.g., 'with units' decomposition into additive decomposition). The old ostensive object numeration unit was replaced by PTWF. (Chambris, 2018, p.16-17)

La strate théorique est la composante la plus stable d'une praxéologie, souvent tacitement partagée et non questionnée (Bosch, Gascon & Trigueros, 2017). Situer les causes de la modification de la valence sémiotique de l'ostensif unités de la numération au niveau de la strate théorique de la praxéologie de la numération laisse présager d'une grande complexité pour faire évoluer cette valence sémiotique au plan institutionnel -si un tel projet advenait-, y compris dans un contexte expérimental où une classe est suivie par un.e chercheur.e. Par ailleurs, jusqu'en 2019 (Chambris, 2021), je ne suis pas parvenue à articuler ce changement de valence sémiotique des unités de la numération au changement presque concomitant de savoir savant en arithmétique. Autrement dit, je ne parvenais pas à savoir si les modifications curriculaires sur la numération étaient une sorte de conséquence de la disparition des grandeurs au socle de l'arithmétique (chapitre 1), ni a fortiori, le cas échéant, comment ces phénomènes étaient liés. L'articulation avec le système métrique me semblait une condition externe favorable pour que la valence sémiotique des unités de la numération soit celle d'unité. C'est un argument d'ordre écologique. C'est dans cette perspective que j'ai répondu à la commande institutionnelle qui m'était faite d'un texte pour

les enseignants ou les formateurs sur les « grandeurs et mesures au cycle 3 » (Chambris 2012 MEN, grand N, Petit x).

Au plan de la recherche, j'ai poursuivi l'étude et la caractérisation de l'existant, afin de mieux comprendre son fonctionnement. J'ai ainsi d'une part cherché à documenter davantage les praxéologies enseignées et apprises impliquant la numération, d'autre part à mieux caractériser l'écologie des unités de la numération.

2. La numération dans les années 2010 : solutions ou problèmes ?

2.1. En numération : vers l'enseignement des écritures courtes ?

Au tout début des années 2000, dans le savoir à enseigner, la comptine numérique et la retenue semblent constituer les clés des justifications, les unités de la numération semblent revenir assujetties aux ECPD. Compte-tenu de ce cadrage porté par l'institution, comment les enseignants enseignent-ils et que les élèves apprennent-ils, effectivement ? Quelles solutions sont-elles proposées par les enseignants ? Dans quelle mesure constituent-elles des solutions satisfaisantes aux problèmes rencontrés ?

2.1.1. L'enveloppe des nombres (Chambris, 2014b CSP, p.7-11)

[ce texte est un extrait d'une contribution pour le conseil supérieur des programmes]

Je vais illustrer ce qui me semble constituer une conséquence majeure de ces choix institutionnels avec l'exemple d'une situation de classe présentée (vidéo et analyse) dans une ressource pour la formation parue en 2008 (Fénichel & Taveau, 2008).

Description rapide de la situation de l'enveloppe des nombres.

Il s'agit de la même enseignante qui est filmée à un ou deux ans d'intervalle. La première fois en CM1 avec les entiers, la seconde en CM2 avec les décimaux.

Les élèves ont une enveloppe dans laquelle se trouvent des étiquettes en papier (beaucoup d'étiquettes : 98 au CM1, 83 au CM2). Sur chaque étiquette est inscrit un nombre. A chaque niveau de classe, les étiquettes se répartissent comme suit.

CM1 (98 étiquettes)	CM2 (83 étiquettes)
32 étiquettes marquées « 1 ».	32 étiquettes marquées « 1/1000 ».
28 étiquettes marquées « 10 ».	28 étiquettes marquées « 1/100 ».
19 étiquettes marquées « 100 ».	19 étiquettes marquées « 1/10 ».
16 étiquettes marquées « 1 000 ».	4 étiquettes marquées « 1 ».
3 étiquettes marquées « 10 000 ».	

La consigne est la même dans les deux cas :

- Je vais vous demander de me dire combien il y a en tout dans l'enveloppe.
- Vous n'avez pas le droit d'utiliser le cahier d'essais ni la calculatrice ; tout se fait de tête.
- Quand vous aurez terminé de compter, vous écrirez sur votre enveloppe, au crayon à papier, le résultat.

En séance 2, les élèves disposent d'une boîte et de quelques étiquettes supplémentaires de chaque sorte pour faire des échanges.

[...]

Que se passe-t-il avec les entiers ?

[D]e façon massive, les élèves récitent les diverses comptines numériques qu'ils maîtrisent bien (de un en un, de dix en dix, de cent en cent, de mille en mille, de dix-mille en dix-mille) pour trouver le nombre. Beaucoup d'élèves organisent leurs étiquettes : tous les 1 ensemble, tous les 10 ensemble, etc. mais pas tous les élèves. De toute façon, ce n'est pas vraiment un obstacle puisqu'ils trouvent le nombre en récitant la comptine, ce qui est indépendant de l'ordre dans lequel on énumère les étiquettes. Certains élèves font des groupes d'étiquettes pour faire apparaître les nombres dix-mille (en comptant les étiquettes 1000 : mille, deux mille, ... dix-mille ou bien un, deux, trois quatre..., dix), mille (en comptant les étiquettes 100 : cent, deux cents, ...ou bien un, deux...), etc. Ceci étant fait, ils utilisent les comptines pour trouver le nombre « oralement » puis l'écrire en chiffres.

Que se passe-t-il en séance 2 ? Les élèves sont contraints de faire des échanges : dix étiquettes 1 contre une étiquette 10, etc. Ils les font. Comment trouvent-ils le nombre ? En récitant les comptines, comme en séance 1, à partir d'un nombre d'étiquettes plus réduit, ou avec d'autres stratégies de calcul mental mais aucun élève n'utilise le nombre d'étiquettes de chaque sorte – après échange – pour donner l'écriture chiffrée. L'enseignante cherche alors une stratégie pour aider les élèves à faire le lien entre nombre d'étiquettes et chiffres. [il reste 4 étiquettes 10 000, 8 étiquettes 1000, 2 étiquettes 100, 1 étiquette 10 et 2 étiquettes 1]

Elle demande à Nicolas de venir « faire le résultat ». Nicolas dit : quatre dix-mille, ça fait quarante-mille/.../ alors six mille plus deux mille ça fait huit mille / plus huit mille / .../ j'ai fait quarante-huit mille / .../ j'ai fait cent fois deux / ça fait deux cents / .../ après j'ai fait quarante huit mille deux cent / deux cent plus un dix / un fois dix / ça fait euh / ça fait dix / .../ Et après ça fait quarante huit mille euh / deux cent dix /.../ Et après j'ai fait euh / un fois deux / ça fait deux / ça fait quarante huit mille deux cent douze

La maîtresse écrit simultanément une décomposition multiplicative, une autre additive, et le résultat chiffre par chiffre pour accompagner le discours de l'élève et faire apparaître des écritures ($4 \times 10\,000 + 2 \times 1\,000 + 6 \times 1\,000 + 2 \times 100 + 1 \times 10 + 2 \times 1$, $40\,000 + 8\,000 + 200 + 10 + 2$, 48 212) mais c'est un calcul oral, reposant sur les noms des nombres, que fait l'élève. C'est l'oral qui lui permet de trouver le nombre. Ainsi, malgré ce calcul, les nombres d'étiquettes ne sont pas des indicateurs des chiffres du nombre : à ce moment-là, Nicolas – comme les autres élèves de la classe - ne fait pas le lien entre le nombre d'étiquettes et l'écriture chiffrée. La maîtresse le remarque. Elle cherche un autre moyen. Elle fait compter aux élèves les nombres d'étiquettes de chaque sorte et écrit ces nombres dans les colonnes du tableau de numération. Finalement Nicolas voit un lien : le 4 dans la colonne des dix-mille signifie 40 000 : quatre (dans la colonne des dix-mille) zéro (dans la colonne des mille) zéro (dans la colonne des centaines) zéro (dans la colonne des dizaines) zéro (dans la colonne des unités), soit quarante mille, le 8 dans la colonne des mille signifie 8000, le 2 dans la colonne des centaines signifie 200, etc. Et ensuite, ces différents nombres s'ajoutent en respectant la règle de la position (c'est le principe des étiquettes Montessori). Cette conception -écritures courtes- est d'ailleurs présente dans des manuels scolaires français. (figure 7)

Tableau de décomposition des nombres

mille (milliers)			unités			
c	d	u	c	d	u	
3	5	7	4	8	9	→ 357 489
3	0	0	0	0	0	→ 300 000
	5	0	0	0	0	→ 50 000
		7	0	0	0	→ 7 000
			4	0	0	→ 400
				8	0	→ 80
					9	→ 9
357 489						=
300 000						+
50 000						+
7 000						+
400						+
80						+
9						
$(3 \times 100\,000) + (5 \times 10\,000) + (7 \times 1\,000) + (4 \times 100) + (8 \times 10) + (9 \times 1)$						

Figure 7. – Extrait de manuel scolaire du CE2

Toutefois, ce n'est pas la conception visée par la maîtresse et elle ne la comprend visiblement pas.

Ces observations sur l'utilisation massive de la comptine orale par les élèves qui vient se substituer à l'interprétation des chiffres rejoignent les observations de Mounier au CP où la comptine est la stratégie utilisée par les enseignants pour obtenir les écritures chiffrées dans les décompositions additives du type $10+10+10+10+3$ (écrit) dix, vingt, trente, quarante, quarante-trois (oral) 43 (écrit). [Alors que d'une part les élèves ont au préalable trouvé qu'il fallait 4 boîtes de dix jetons et 3 jetons seuls pour obtenir l'écriture chiffrée « 43 », et que d'autre part les sommes $10+10+10+10+3$ sont écrites, dans les deux classes observées l'enseignante ne parvient à faire faire le lien entre les chiffres du nombre et les nombres de paquets et se replie en quelque sorte sur la comptine de dix en dix.]

Pourquoi toute cette difficulté avec les entiers ? Quelles conséquences sur les apprentissages de la numération décimale ?

[...]

2) A l'école, à cause de la trop grande complexité de la théorie des polynômes, pour donner une signification aux chiffres on est contraint de référer à du matériel. Les nombres de paquets (de bâchettes par exemple) ou d'étiquettes sont censés être des indicateurs des chiffres du nombre. Pourtant ils ne suffisent pas à constituer le nombre. En effet, c'est ce qu'il y a *dans* le paquet ou *sur* l'étiquette qui doit constituer le nombre. « 2 paquets » ou « 2 étiquettes » ne sont pas un nombre de bâchettes ou un nombre "sans unité". La seule unité possible pour un 2, chiffre d'un nombre, est l'unité de numération qu'il représente : par exemple la centaine. Il y a 2 centaines (de bâchettes dans le paquet). C'est justement le concept qui n'est pas enseigné depuis 1970.

Il existe néanmoins une autre interprétation élémentaire pour ce 2. Ce 2 peut être *suivi de zéros*. Le chiffre 2 représente alors : 2×100 (bâchettes), soit 200 (bâchettes). C'est ce qu'explique Nicolas au tableau. Finalement, la signification des « écritures courtes » -2 dans la colonne des centaines, c'est 2 suivi de deux zéros (principe des étiquettes Montessori)- est un moyen de donner un poids aux chiffres et de leur donner une signification, sans disposer du concept d'unité de numération, on retrouve avec cette signification une unité qui est l'unité simple, ici la bâchette (Thanheiser 2009 parle de « group of ones »). Ce n'est donc pas la signification chiffre par chiffre en unités de numération qui se construit mais une autre en somme d'unités simples avec des zéros, de plus en plus nombreux.

3) Dans le meilleur des cas, les élèves semblent pouvoir construire seulement cette interprétation des unités de la numération comme des écritures courtes. Qu'en penser ? Tout d'abord, comme elle n'est pas enseignée explicitement, elle risque de ne pas être enseignée du

tout. C'est un apprentissage incident. En outre, même si elle est correcte elle est moins puissante que celle des unités : si on connaît la signification en unités [de la numération] on peut construire l'autre mais la réciproque est généralement fautive. Enfin, se pose le problème de l'articulation avec les décimaux.

Quelques remarques sur ce texte

Ce texte de 2014 comporte plusieurs éléments d'importance. Tout d'abord, il rappelle que ces observations sur l'omniprésence technologique de la comptine numérique et l'impossibilité de lier le nombre de « paquets de dix » et le chiffre des dizaines avaient été documentées par Mounier en 2010 dans des classes de CP (2010, 2013), ce qui constituait une première confirmation de mes analyses « théoriques », i.e., dans les manuels. Cependant Mounier (2010, 2013) n'a pas interprété cette double difficulté comme résultant de l'absence d'unités en numération mais comme résultant d'un parcours d'enseignement inadapté. La source des difficultés n'est donc pas attribuée au savoir à enseigner mais aux pratiques enseignantes. Ensuite, ce texte mentionne l'article de Thanheiser paru en 2009. Cet article confirmait l'existence de cette conception écriture courte dans les conceptions d'enseignants américains sur la numération (p.264-266), conception que j'avais repérée dans les manuels. Enfin, dans la situation de l'enveloppe des nombres, voir un élève « en train d'apprendre de façon spontanée » la conception « écriture courte » de la numération chiffrée a été à la fois une confirmation et une surprise : je ne pensais pas que ce que j'avais vu dans les livres était possible, ça l'était. C'est un autre point de vue sur le même phénomène. Cet épisode suggère par ailleurs qu'il est possible de concevoir des situations d'apprentissage pour enseigner ces écritures courtes et fournit des pistes dans cette perspective, une possible praxéologie apprise qui pourrait devenir une praxéologie à enseigner, même si ce n'est pas ce que l'on souhaite pour le système d'enseignement.

2.1.2. La troncature : un manuel scolaire de 2014

Des travaux plus récents m'ont amenée à revenir sur ces écritures courtes, plus précisément sur la « troncature ». J'ai travaillé à la fois sur ses théorisations mathématiques (savoir savant classique ou actuel) (Chambris, 2021), sur le savoir à enseigner et réalisé une brève analyse d'une séance de classe (Chambris, Coulangue, Rinaldi & Train, 2021).

Une propriété fondamentale de la numération positionnelle qui découle des propriétés élémentaires de la numération est ce que j'ai appelé la propriété de la *troncature* (Chambris, 2008, p. 404).

De même que « 1,41 », c'est-à-dire 141 centièmes, est la troncature de $\sqrt{2}$ au centième, je dis que 38 centaines (ou encore 3800) est la troncature de 3842 à la centaine. En mathématiques, le mot troncature est utilisé pour exprimer qu'on tronque le développement décimal d'un réel r en ne retenant que ses n premières décimales. La troncature d'un réel après sa n -ième décimale est donc un moyen de produire sa valeur approchée décimale dans D_n à 10^{-n} près par défaut, t_n . Les propriétés de la numération positionnelle sont telles que, si l'on enlève la virgule de l'écriture de t_n , on obtient un nombre entier k_n tel que $k_n \times 10^{-n} = t_n$. La problématique de l'approximation d'un réel à 10^{-n} près s'étend à n'importe quelle précision, y compris pour n négatif. Dans ce cas, k_n est le nombre obtenu en coupant r et en ne retenant que ses chiffres à gauche du « -n »-ième chiffre avant la virgule et on a encore $t_n = k_n \times 10^{-n}$.] Je dis que 38 centaines est la *troncature à la centaine* de 3 842. Ainsi, il suffit de « couper » 3 842 à droite de la 3^e position et

de retenir les chiffres situés à gauche, pour déterminer combien il contient de centaines. (Chambris, 2021, p. 183)

Cette troncature a pour propriété principale de fournir une décomposition du nombre, $3\ 842 = 38$ centaines 42 unités, la « partie gauche » fournit donc une approximation du nombre à l'unité choisie près. La preuve en unités de la numération repose sur le fait que 1 millier = 10 centaines²⁰. Que trouve-t-on dans les textes pour l'école à propos de la troncature ?

(Chambris, Coulange, Rinaldi & Train, 2021, p. 377 et suiv.) Les programmes de 1980 mentionnent : « des questions du type : “combien de dizaines, de centaines, dans un nombre donné ?” Exemple : dans 7 024, il y a 70 centaines car $7\ 024 = (70 \times 100) + 24$ » (Ministère de l'Éducation nationale, 1980, p. 44). Avec la transposition de la théorie savante, l'écriture chiffrée découle de la multiplication des nombres, de même la propriété de la troncature se déduit du calcul d'une multiplication par les puissances de dix. Une conséquence est que les unités décrivent principalement les rangs de l'écriture chiffrée. Pour connaître le nombre de dizaines, la technique consiste à repérer le chiffre des dizaines, puis à couper le nombre au rang des dizaines en ne conservant que la partie de l'écriture du nombre qui est à gauche.

Ce que serait une technologie pour la propriété de la troncature ne va pas de soi du fait de la disparition des unités au niveau de la théorie de référence et il semble bien que dans certains cas il n'y en ait pas (cf. l'enseignant partie 1 [section 2.2]). Pour repérer le chiffre des dizaines, la technique consiste à énumérer les chiffres de façon synchrone avec la récitation des « colonnes du tableau » ou des « noms des chiffres » (unité, dizaine, centaine). Le manuel *Tous en maths* (Duquesne-Belfais & Girodet, 2014) (annexe 1) décrit l'enjeu de l'apprentissage comme suit :

Ce que les élèves doivent avoir construit en fin d'apprentissage

[...] L'enjeu le plus crucial est d'acquérir la compétence de différencier *chiffre des* et *nombre de*.

Ce que les élèves doivent surmonter comme difficultés

[...] La notion de *chiffre des* est liée à une compétence de repérage (position d'un chiffre dans un nombre). La notion de *nombre de* est liée à la compétence de donner l'ordre de grandeur d'un nombre. (*Ibid.* p. 67)

On le voit, « le chiffre des » n'est pas considéré comme ayant une contribution quantitative, ce qui est conforme à la signification des mots dizaines, centaines, etc. comme rang de l'écriture chiffrée. Signalons aussi que cette section du manuel (pp. 40-43) introduit le nombre « un million ». Il apparaît comme le suivant de 999 999, ce qui justifie la nécessité d'un chiffre supplémentaire [probablement justifié tacitement par la retenue]. Comme c'est souvent le cas dans les manuels à partir des années 1980 (Chambris, 2008, 2012c LDAR), les relations entre unités (ici entre millier et million et entre centaine de milliers et million) ne sont pas mentionnées. Deux types de tâches sont travaillés successivement et des mises en œuvre proposées. Dans un premier temps, il s'agit d'écrire en chiffres, dans un tableau de numération, des nombres dictés « en numération orale » (c'est implicite dans le manuel). Les élèves de la classe écrivent le nombre sur leur ardoise (tâche non problématique) à l'exception de six élèves (pour les nombres jusqu'à 999 999), puis de neuf (pour les nombres jusqu'à 999 999 999), debout, côte à côte et visibles de tous (annexe 1). Ces derniers n'écrivent qu'un chiffre du nombre (u, d, c, unité de mille, dizaine de mille, etc.). Les autres valident alors le résultat. On peut penser que cette tâche permet de lier chaque position de chiffre (et son « nom ») à une partie du nom du nombre. Il pourrait en résulter par exemple pour 542 367 981

20 Certaines versions de la preuve implique aussi la propriété M du chapitre 4.

que le 4, inscrit dans le segment cinq-cent-quarante-deux-millions, « correspond à » quarante millions et s'écrit 4 dans la colonne des dizaines de millions. Dans un second temps, les tâches « chiffre des » et « nombre de » sont introduites, comme suit.

[...] poser maintenant des questions telles que : *Quel est le chiffre de... ? Quel est le nombre de... ?*

Exemple : Quel est le chiffre des dizaines de mille ? Demander à l'élève concerné d'avancer d'un pas. Poser maintenant la question : *Quel est le nombre de dizaines de mille ?* Demander à tous les élèves à sa droite d'avancer d'un pas. (Duquesne-Belfais & Girodet, 2014, p. 67)

Si les techniques reposent sur des arguments de repérage dans « l'espace constitué par l'écriture du nombre en chiffres », le travail préliminaire devrait permettre de lier le « nombre de dizaines de millions », à savoir pour l'exemple précédent 54 dizaines de millions au « plan spatial » à cinq-cent-millions et quarante-millions, soit cinq-cent-quarante-millions, 540 000 000 constituant alors « l'ordre de grandeur » (et la troncature) « à la dizaine de millions » de 542 367 981. Cet ordre de grandeur s'exprime en unités simples (540 000 000 est un nombre d'unités simples), la « dizaine de millions » indique une position.

On voit que l'explication retenue par les auteurs du manuel pour « le nombre de » est en réalité celle d'une écriture courte (ou peu s'en faut) : 54 dizaines de millions, c'est cinq-cent-quarante-millions. Elle ne s'appuie pas sur le fait que la dizaine de millions serait une unité dont on aurait un certain nombre d'exemplaires mais sur l'oralisation du nombre qui semble porter le « sens du nombre ». Il me semble que c'est une solution que trouvent les auteurs du manuel pour répondre à la double contrainte d'enseigner « un nombre d'unités » alors que les « unités » ne sont pas à enseigner. Cette solution n'est pas réellement satisfaisante mais elle est de la même nature que celle de Nicolas dans l'enveloppe des nombres me semble-t-il, elle fournit une certaine interprétation de la quantité. Cette interprétation est-elle adaptée pour les techniques de calcul ?

2.2. En calcul : les techniques efficaces de calcul mental non disponibles

Alors que la numération a une fonction essentielle dans l'élaboration et la mise en œuvre des techniques de calcul (qu'elles soient posées ou mentales), cette question du calcul n'a été évoquée que marginalement dans les pages qui précèdent. Afin, éventuellement, de mettre en évidence des effets de la disparition des unités en numération dans le domaine de l'apprentissage du calcul, nous avons mené une enquête avec Anne-Marie Rinaldi (Rinaldi & Chambris, 2019, Chambris, Coulange, Rinaldi & Train, 2021), à partir des données récoltées pour sa thèse (Rinaldi, 2016).

(Chambris, Coulange, Rinaldi & Train, 2021, p.375 et suiv.) Le choix de nous intéresser à l'enseignement du calcul pour étudier le rapport institutionnel à la troncature remonte à des travaux antérieurs (Rinaldi & Chambris, 2019). Nous avons montré que, dans un dispositif d'enseignement du calcul soustractif en CE2, à la fin d'une séquence consacrée à « soustraire un multiple de dix » pour effectuer par exemple un calcul comme $137 - 50$, les élèves les plus fragiles n'utilisent pas la technique de calcul par troncature ($13\text{ d} - 5\text{ d} = 8\text{ d}$) ; dans la phase de restitution, cette technique n'apparaît pas et l'enseignant met en avant un décomptage de 10 en 10 en appui sur la comptine numérique. [D'autres techniques efficaces sont néanmoins possibles qui s'appuient sur une décomposition de 137 en $107+30$ ou en $100+30+7$, qui conduiraient ensuite au calcul de $107-20$ ou $100-20$ par $10-8$ en appui sur 1 centaine = 10 dizaines n'apparaissent pas non plus dans cette phase collective]. Ce résultat constituait la première mise en évidence de l'effet de l'affaiblissement des unités de numération sur les praxéologies du calcul mental. Nous allons poursuivre l'investigation en revenant sur le

déroulement de la première séance de cette séquence consacrée à soustraire des multiples de dix et analyser comment la propriété de la troncature vit côté élève et côté enseignant.

2.2.1. Présentation du projet de recherche (Rinaldi, 2016)

Dans le dispositif conçu par la chercheuse (Rinaldi, 2016) et expérimenté dans deux classes de CE2, les objectifs sont d'associer à un travail d'effectuation de calculs, un travail sur la réécriture de calculs qui va permettre de limiter, voire de mettre en défaut l'utilisation d'une technique basée sur le comptage ainsi que de décrire, expliquer et justifier la mise en œuvre de chaque technique au moyen des ostensifs suivants : droite numérique vide (DNV), écritures chiffrées (EC) et unités de numération (UN). La première séquence (trois séances) a pour objet de soustraire un nombre inférieur à dix. Elle a permis d'instituer deux techniques basées sur une décomposition du nombre duquel on soustrait (τ_{1010}) et (τ_{1010})' et une technique séquentielle basée sur une décomposition du nombre que l'on soustrait (τ_{A10})²¹. Ces techniques et leurs notations sont présentées dans la thèse de Rinaldi (2016, p. 58, p. 100).

La seconde séquence, qui nous intéresse plus particulièrement, a pour objet de soustraire un multiple de dix. Ce type de tâches mobilise éventuellement les trois techniques précédentes et une technique supplémentaire (τ_{CONV} : *ibid.*, p. 265) basée sur la propriété de la troncature, que nous appellerons technique de calcul par troncature. Les modalités de mise en œuvre de cette séquence sont identiques à celles expérimentées lors de la première séquence. Pour chaque séance, trois séries de quatre calculs sont données à chercher individuellement. Entre deux séries, un temps de restitution face au groupe classe est programmé. Pour chaque série, la consigne donnée aux élèves doit les amener à trouver le résultat du calcul et à décrire la technique qu'ils choisissent de mettre en œuvre.

Afin d'avoir une vision globale du déroulement de la première séance de la deuxième séquence, qui sert d'appui pour interroger la manière dont vivent la technique de calcul par troncature et sa technologie, nous recensons dans le tableau 1 les calculs donnés oralement pour chaque série et nous indiquons pour chacun d'entre eux le nombre de fois où la troncature a été utilisée, en précisant le nombre d'élèves interrogés au moment de la restitution correspondant au calcul.

1 ^{re} série donnée oralement	50 – 10	100 – 10	310 – 10	240 – 10
	troncature / total 1 / 6	troncature / total 0 / 1	troncature / total 1 / 3	troncature / total 1 / 2
2 ^e série donnée oralement	520 – 20	70 – 50	180 – 50	130 – 40
	troncature / total 1 / 3	troncature / total 0 / 1	troncature / total 1 / 1	troncature / total 1 / 2
3 ^e série donnée oralement	210 – 60	740 – 50	350 – 70	500 – 70
	troncature / total 0 / 2	troncature / total 0 / 1	troncature / total 0 / 1	troncature / total 0 / 1

Figure 8. – – Présence de la procédure par troncature dans les phases de restitution.

Le tableau (figure 8) permet de voir que la technique de calcul par troncature est présente sur les deux premières séries de calculs alors que cette technique disparaît entièrement au niveau de la troisième série, au profit d'autres techniques de calculs²². Cette absence est peut-être due

21 Exemples de calcul : avec (τ_{1010}) $37 - 5 = 30 + 7 - 5 = 32$, avec (τ_{1010})' $32 - 7 = 20 + 12 - 7 = 25$, avec (τ_{A10}) $32 - 7 = 32 - 2 - 5 = 25$.

22 Les élèves reprennent les techniques de calculs instituées dans la séquence précédente. Ils s'appuient souvent sur un schéma avec comme support la droite numérique vide. Par exemple, pour $210 - 60$, certains « partent » du nombre 210 et « marquent » un premier bond de 10 qui leur permet d'« arriver » à 200 puis un second bond qui leur permet d'arriver à 150. D'autres vont choisir également de « partir » de 210 mais « marquent » un premier bond de 30 pour arriver à 180 puis un second bond de 30 à partir de 180 pour « arriver » à 150. Une autre technique basée sur la

à un effet de circonstance au regard du peu d'élèves interrogés en fin de séance. Elle questionne cependant sur le rapport de l'enseignant à l'objet « troncature ». Pour attraper quelques éléments de réponse nous revenons chronologiquement sur les discours produits pendant la phase de restitution de la première série de calcul.

2.2.2. À propos du calcul de cinquante moins dix (puis de deux-cent-quarante moins dix)

Élève : J'ai enlevé une dizaine et ça fait quarante.

Enseignant : Tu savais que cinquante c'est cinq dizaines, moins une dizaine, cela fait quatre dizaines.

Le discours de l'élève permet d'identifier que celui-ci sait que soustraire dix, c'est soustraire une dizaine. En revanche le discours de l'enseignant sous-entend que l'élève a réellement effectué la troncature de cinquante à la dizaine pour conduire son calcul sur un nombre de dizaines. Dans un calcul ultérieur, *deux-cent-quarante moins dix*, une technique proposée par un autre élève consiste à « faire vingt-quatre moins un. Cela fait vingt-trois et j'ai ajouté un zéro ». Ce discours montre que l'élève calcule « avec la partie gauche des nombres ». Interpellé par l'enseignant, « vingt-quatre moins une banane », il formule ce qui est peut-être une autre technique « vingt-quatre dizaines moins une dizaine, ça fait vingt-trois dizaines et j'ai ajouté un zéro ».

2.2.3. À propos du calcul de cent moins dix (puis de cinq-cents moins soixante-dix)

Le fait que la propriété de la troncature ne soit pas explicitée dans le cas où le nombre auquel on soustrait est un nombre de centaines entières ($100 - 10$; $500 - 70$), alors que ce cas serait favorable pour expliciter $1c = 10d$, constitue un indice pour penser que la technique de l'enseignant n'est pas dotée d'une technologie qui intègre cet ingrédient. Pour le calcul (additif ou soustractif), la troncature n'est pas une fin en soi, l'enjeu est que les élèves disposent de décompositions variées afin d'envisager une adaptation de leur technique aux nombres. Sans cette propriété, produire des décompositions variées semble difficile. Une technologie, en appui sur les relations entre dizaines et centaines, n'est pas apportée par l'enseignant. Quelques bons élèves semblent en revanche s'appuyer sur les relations multiplicatives et additives qu'ils repèrent éventuellement dans la désignation verbale d'un nombre. C'est le cas de Léa qui produit un discours efficace pour réaliser le calcul $180 - 50$.

2.2.4. À propos du calcul de cent-quatre-vingts moins cinquante

Léa : J'ai fait huit dizaines moins cinq dizaines plus cent, c'est cent-trente.

Enseignant : Léa a converti cent-quatre-vingts en dix-huit dizaines et comme dix-huit dizaines égalent dix dizaines plus huit dizaines, elle calcule huit moins cinq. Elle trouve cent-trente.

La stratégie de Léa s'appuie probablement :

- sur une décomposition de cent-quatre-vingts en cent et 8 dizaines,
- puis sur un calcul sur une partie du nombre, à savoir 8 dizaines auxquelles elle retranche 5 dizaines ce qui donne 3 dizaines qu'elle convertit en trente,
- puis sur une recomposition du nombre avec cent et trente.

L'enseignant, volontairement ou non, fait comme si Léa avait utilisé la troncature. Il reproduit le même type de discours que précédemment sans justifier pourquoi cent-quatre-vingts est égal à 18 dizaines. Plusieurs « explications » peuvent co-exister dans la classe :

- (1) « le nombre de dizaines de 180 c'est ce qu'on obtient quand on coupe le nombre 180 au rang des dizaines » ;

compensation est également présente et donne les calculs suivants : $350 - 70 = 350 - 100 + 30$. Les élèves soustraient 100 au lieu de 70 au nombre 350 et compensent le manque.

- (2) faire référence au fait que cent c'est dix dizaines et quatre-vingts c'est huit dizaines, donc cent-quatre-vingts c'est dix plus huit dizaines soit dix-huit dizaines ;
- ou encore (3) en appui sur l'écriture chiffrée $180 = 1 c + 8 d = 10 d + 8 d$.

Contrairement aux deux dernières, la première explication prend appui sur l'écriture chiffrée du nombre. C'est une technique qui n'engage pas (de façon explicite, au moins) les relations entre les unités.

Il me semble que, de ces travaux sur la numération et le calcul, il ressort finalement que la valence sémiotique nombre d'unités simples des unités de la numération pourrait être en train de s'installer dans l'institution d'enseignement. Avec cette valence sémiotique, 13 dizaines indique un nombre d'unités simples, cette conceptualisation est confortée par la numération orale conceptualisée par ailleurs dans des récitations de la comptine numérique de 1 en 1 (abrégée en des comptines de 10^n en 10^n). Pour l'étude du calcul mental en particulier, cette conceptualisation pourrait peut-être fournir des techniques, peu flexibles cependant, dans le domaine additif bien qu'elle repose sur l'écriture chiffrée et des arguments spatiaux et qu'on ne compte rien.

3. Ostensifs de la numération

Dans le tableau ci-après, je synthétise les éléments sur les ostensifs unités de la numération et Écritures Chiffrées des Puissances de Dix (ECPD), construits au fil des diverses études. Ces éléments intègrent par ailleurs les résultats du chapitre 4, sur la *nature* des unités de la numération. Par souci d'organisation du texte, je les ai inclus dans ce chapitre.

Période	1900-1970 (et 1970-1980, dans une moindre mesure du fait de l'introduction des bases). Affaiblissement possible vers après 1950 (transposition de La mesure des grandeurs – Lebesgue)	1980-2020	
Ostensif	Unité, dizaine, centaine	Unité, dizaine, centaine	10, 100, 1000 oralisés en dix, cent, mille
Non ostensif	Unités (de grandeurs) (cf. chapitre 4) avec plusieurs qualificatifs possibles : unité des différents ordres, les différents ordres d'unité, les unités	- les colonnes (du tableau de numération), le chiffre , - les décompositions en centaines, dizaines, unités (après 1995) Les unités de (la) numération (après 2010-2015) Le matériel de numération (pour représenter les nombres)	- les décompositions multiplicatives , voire les décompositions additives
Valence instrumentale	- Exprime l'unité (y compris taille de collection et nombres) : une dizaine de pommes, une dizaine de mètres, une dizaine - Exprime les nombres et les valeurs de grandeurs non numériques : 3 dizaines, 3 dizaines de pommes, 3 dizaines de mètres. - Exprime une quantité avec un petit nombre d'unités et une grosse unité (ou l'inverse) : 3 milliers vs 3000 unités - Dans le lien avec la numération orale (pour permettre une traduction mot à mot), dans le lien avec la numération chiffrée (pour exprimer que chaque place correspond à un ordre d'unité), dans les liens avec le système métrique (comme traduction des préfixes métriques). - Intervient dans de très nombreuses manipulations des nombres en particulier pour exprimer un nombre de plusieurs façons (grâce aux conversions) : 3 centaines = 30 dizaines (1c=10d), en particulier dans la justification des techniques de calcul. - Le calcul dans une unité permet de transformer des calculs sur les nombres en calcul, voire en comptage sur des petits nombres : 1300+400 en 13c+4c (ou 13+4, ce sont des centaines)	Position : - Lien écriture chiffrée / noms des nombres grâce au tableau - décompositions 3c2d (pour le nombre qui s'écrit avec 3 dans la colonne des centaines, 2 dans la colonne des dizaines), d'où 320 Écritures courtes -3c pour 300 (le nombre qui s'écrit avec 3 dans la colonne des centaines), 12c pour 1200 (le nombre qui a 12 pour « nombre de centaines ») 2c=200, 200=20d, donc 2c=20d Chiffre des / Nombre de Objet matériel : - Désigne les groupes de dix, cent objets. Ces groupes s'échangent les uns contre les autres (une plaque centaine contre dix barres dizaine) (1c=10d). Ces techniques sont utilisées notamment dans la « justification des techniques opératoires »	- lien entre collections (groupées) et nombre en écritures chiffrée via des décompositions multiplicatives et le dénombrement par comptine orale - (théorisation peu diffusée de) la traduction entre écriture chiffrée et numération orale - manipulations techniques des écritures chiffrées Règles de calcul positionnelles (addition posée, retenue, règle des zéros – multiplication par 10 ⁿ), qui transforment tous les calculs en unités simples et permettent de produire des écritures chiffrées. Comptines orales (sans ou avec « passage de dizaine, centaine, etc. ») pour produire les noms des nombres et leur codage en écriture chiffrée
Valence sémiotique	Unités de grandeurs : - pour la grandeur nombre - pour les grandeurs discrètes et continues (dizaines de pommes, dizaines de mètres) Unités particulières de grandeurs variées (y compris taille de collections et nombres)	Position dans l'écriture chiffrée : dans 300, 3 est le chiffre des centaines. Nombre d'unités simples : écritures courtes 3 c, 12c, pour 300, 1200 (années 2000) Objet (groupe) pour représenter les nombres	Nombre d'unités simples La seule unité est le nombre 1 (unité simple) Expressions numériques qui expriment des nombres d'unités simples

Figure 9. – Les ostensifs de la numération : unités de la numération et écritures chiffrées des puissances de dix

Le tableau (Fig. 9) recense les propriétés des deux ostensifs symboliques de la numération, les unités de la numération et les écritures chiffrées des puissances de dix (ECPD) dans la période actuelle et celles de l'ostensif unités de la numération dans la période ancienne²³. Le choix de la désignation « unités de la numération » qui n'avait pas forcément vocation être diffusée dans la sphère enseignante puisqu'elle était produite dans le *cadre d'une recherche* et n'avait pas été mise à l'épreuve à l'extérieur n'aide malheureusement pas à clarifier la différence fondamentale qui existe entre ces deux périodes au plan des valences sémiotiques. En effet, en dépit de leur nom, les *unités de la numération* ne désignent pas des unités dans l'institution d'enseignement dans la période actuelle. Elles désignent soit une position, soit un nombre d'unités simples, soit un groupe d'objet. L'émergence des écritures courtes permet un rapprochement langagier entre les noms des nombres, les positions dans l'écriture chiffrée et les ECPD mais tant que l'institution ne sait pas enseigner et faire apprendre les unités (en général et les unités de nombre en particulier – chapitre 4) il me semble impossible que les « unités de la numération » désignent des unités de grandeurs de tailles variées.

Au plan du raisonnement, le groupe désigne un paquet d'objets obtenu par comptage dans le meilleur des cas, un certain type de paquet ou simplement un paquet à défaut. Si « centaine » est le nom d'un groupe, 3 centaines renverra bien à 3 groupes, c'est-à-dire à 3 objets d'un certain type. En revanche, il est peu probable comme on le voit dans (Chambris, 2014b CSP) que ce 3 centaines renvoie à 3 unités de type centaines comme quantité contenue. C'est une interprétation différente, cent objets dans chaque groupe, 100 (fois 3) qui font 300 qui peut permettre de produire a posteriori 3 c comme « nombre » en coupant 300.

Le raisonnement suivant avec les unités permet d'articuler groupe, unité, nombre : un groupe contient cent objet ou une centaine d'objets. Donc 3 groupes contiennent 3 centaines d'objets. Dans ce raisonnement, le nombre de groupes est directement en relation avec le nombre d'unités (qui sont des centaines). Le groupe n'est pas une unité pour la grandeur qu'il contient. Il me semble nécessaire que, pour être *reconnues* dans ces groupes, ces unités soient apprises avant que les groupes ne soient constitués. Cette discussion sera reprise au chapitre 4.

4. Une filiation incertaine : l'aspect décimal de la numération

Dans le cadre de cette note de synthèse, j'ai choisi de discuter d'une part les travaux réalisés par Tempier en numération et d'autre part d'autres travaux réalisés sur la base de ses travaux. En effet, bon nombre des résultats qui précèdent ont été utilisés et publiés par Tempier en 2010, sans toutefois que la référence à mes travaux ne soient explicitement mentionnée par l'auteur.

4.1. L'aspect décimal, selon Tempier

L'article de Tempier (2010) introduit ainsi l'« aspect décimal de la numération (ou relations entre unités) : 10 unités d'un certain rang sont égales à une unité du rang supérieur. » (p. 62)

23 Le tableau (Fig. 9) ne présente pas d'étude de l'ostensif ECPD dans la période ancienne. Mon intérêt ne s'est en effet pas porté sur lui car il ne joue pas de rôle dans les technologies de la numération (il intervient pour le calcul). Ceci étant dit, il semble raisonnable d'affirmer que sa valence sémiotique, avant la réforme, est aussi bien celle d'unités simples que non-simples : 100 est aussi bien cent unités simples, que dix dizaines qu'une centaine. De la même façon, un mathématicien, d'aujourd'hui, qui voit $324=3\times 100+2\times 10+4\times 1$ est probablement capable d'interpréter les nombres 1, 10, 100 en termes d'unités de tailles 1, 10 ou 100, en fonction de ses besoins (voir aussi chapitre 4).

Parallèlement, il introduit l'« aspect position de la numération : dans l'écriture d'un nombre, la valeur des chiffres dépend de leur position. » (p. 61).

L'auteur utilise la plupart des outils conceptuels que j'ai développés. Il reprend l'expression *unités de la numération*, souvent transformée en *unité* ou *unités de numération* et aussi *unités de numération (unités, dizaines, centaines ...* . Le centre de ses préoccupations est les *relations entre unités* ou *relations entre les unités* et il recense les cinq types de tâches indiqués dans ma thèse pour la période récente pour la numération : *dénombrer, nombre de, comparer, lire/écrire et décomposer / recomposer*. Il ne mentionne pas la connaissance des suites écrites chiffrées de 10^n en 10^n , à l'écrit et à l'oral.

En appui sur deux exemples de tâches (pour les types de tâches *dénombrer* et *nombre de*), il propose deux types de technologies. L'une est en ECPD, correspondant à la pratique actuelle, qu'il appelle simplement « écritures avec les puissances de 10 (10, 100, 1000) » (p.69) et pour l'utilisation desquelles il signale des *règles de calcul*. L'autre est avec les *unités de la numération*, correspondant à une adaptation d'une technologie utilisée avant la réforme des mathématiques modernes, sans que l'historicité soit mentionnée par l'auteur.

Dans une étude de trois manuels scolaires des années 2000, l'auteur étudie les discours associés aux types de tâches susceptibles de « faire apparaître le principe décimal », il retient les trois autres types qu'il a cités au préalable : *dénombrer, nombre de* et *décomposer / recomposer*.

En utilisant la plupart des outils que j'ai développés, mais sans référer à leur épistémologie ou à leur historicité, ses analyses amènent Tempier à conclure que « l'institution actuelle privilégie un seul savoir de la numération, l'aspect position » (p. 78) et aussi que « l'aspect décimal est minoré » (p.72). Cette conclusion est presque contraire à la mienne.

En effet, mes travaux, présentés dans les sections précédentes et qui prennent en compte, le savoir à enseigner à plusieurs époques, la transposition *du* savoir savant *en* savoir à enseigner et l'historicité des notions, conduisent à une lecture différente de la situation. La modification du savoir savant avec la disparition des ordres d'unités amène à la disparition des unités de la numération du savoir à enseigner avec leur valence sémiotique unités. Cette disparition se répercute sur toutes les technologies de la praxéologie à enseigner : en particulier, impossibilité de la formulation des relations entre unités, impossibilité de la formulation des relations entre position et unité. Ces deux savoirs sont plus ou moins pris en charge par des règles de calcul positionnelles (incluant la retenue) et/ou les suites orales associées au transcodage des noms des nombres et/ou les suites écrites chiffrées associées au compteur. Dans les années 1980-1990, les noms des unités désignent (quand elles sont utilisées) uniquement les places des chiffres, un peu plus tard au début des années 2000, une nouvelle valence sémiotique, celle de nombre en unités simples, semble apparaître ici ou là avec l'apparition des écritures courtes comme interprétation des unités de la numération. Avant la réforme ces places étaient numérotées et renvoyaient à un ordre d'unité. Ainsi, au début des années 2000, selon mes analyses de 2008, de 2012, de 2018 ou de 2021 (chapitre 4), l'aspect position, au sens d'*un nombre d'unités d'un type donné à un rang donné*, est aussi peu privilégié que l'aspect décimal : il n'y a pas *d'unités* pour décrire la position, ni conséquemment d'expressions de relations entre les unités.²⁴

24 Les analyses détaillées présentées dans cette section, réalisées pour cette note de synthèse, me conduisent à faire le choix de ne pas évoquer plus avant mes propres travaux avec Tempier (Chambris & Tempier, 2017, Tempier &

4.2. Des travaux pour faire apprendre l'aspect décimal

Tempier a donc établi que « l'aspect décimal est minoré » (2010, p. 72). Ses travaux qui suivent (e.g., Tempier, 2013, Houdement & Tempier, 2019) visent alors à réintroduire cet « aspect » (parfois appelé principe par d'autres auteurs ou le même) en s'appuyant sur ce résultat rappelé d'ailleurs dans la revue internationale ZDM « the decimal principle is neglected » (Houdement & Tempier, 2019, p. 26). Ces revues font autorité dans leur domaine (formation des maîtres pour Grand N, recherche pour ZDM). D'autres auteurs, dans des travaux récents, s'appuient sur ces publications pour ancrer leur travail.

En Suisse Romande (canton de Vaud), Batteau et Clivaz (2016) engagent un « travail du groupe LS [lesson study] sur l'aspect décimal de la numération » (Batteau & Clivaz, 2016, p. 30, je souligne). Le travail avec les enseignants comprend 7 séances d'une 1h30, échelonnées toutes les deux semaines. L'outillage conceptuel est celui de Tempier (« travail à partir du site internet développé par Tempier et de l'un de ses articles (2010) », p. 31). La première mise en œuvre de leçon (qui fait suite à quatre séances de travail du groupe) conduit les auteurs à écrire :

Par un cours dialogué, elle [Anaïs, l'enseignante] utilise le raisonnement suivant : comme **dix dizaines égalent cent et que cent c'est une centaine, alors dix dizaines égalent une centaine**. Or pour travailler l'aspect décimal, il est nécessaire d'effectuer des échanges directement de dix unités d'un certain rang pour une unité du rang supérieur, sans repasser par le nombre lui-même, sous peine d'un cercle vicieux (il faudrait connaître la numération décimale pour travailler la numération décimale). (p.37, je souligne)

À propos de la seconde mise en œuvre de leçon (après six séances de travail du groupe), les auteurs rapportent que :

« Dans ses interventions, Édith [l'enseignante] s'exprime en nombre naturalisé et demande à l'élève de traduire les nombres exprimés en unités de numération en nombre naturalisé, par exemple lorsqu'elle demande à Julie « deux centaines ça fait combien ? » [nombre naturalisé : deux cents]. Pour sa part, l'élève s'exprime directement en unités de numération (sans repasser par le nombre en unités simples, par exemple lorsqu'elle dit « dix dizaines » [pour une centaine]). » (p.39-40)

Ainsi, en appui sur les travaux de Tempier et en dépit de plus de 10 heures de formation en petit groupe, les enseignants ne parviennent pas à faire fonctionner « l'aspect décimal de numération ». La raison me semble être qu'ils ne mobilisent pas la valence sémiotique « unités » des unités de la numération à l'issue de la formation. Les discours des chercheurs attestent en revanche qu'eux-mêmes la mobilisent. Ils ne sont toutefois pas capables de reconnaître les connaissances dont disposent les enseignants : ils voient un « cercle vicieux » dans le raisonnement. Selon mes analyses des sections précédentes, les raisonnements des enseignants s'inscrivent dans la transposition en ECPD de la théorie savante qui assujettit les unités de la numération aux ECPD (cf. Section 5. pour plus de détails). On voit, par ailleurs, le rôle joué par les *écritures courtes* dans ces raisonnements : 2 centaines = 200 (ou deux cents), 10 dizaines = 100 (ou cent) = 1 centaine. On retrouve les éléments de la section 2.1.2. Ces écritures courtes sont l'outil pour transformer une expression d'une unité de la numération en une autre. Comme Batteau et Clivaz, je ne pense pas possible de parler ici de conversion de dizaine en centaine ou de centaine en unités simples

Chambris, 2017, Chambris, Tempier & Allard, 2017).

car les dizaines et centaines ne sont probablement pas des unités pour les enseignants. Pour certains élèves elles en sont. Et paradoxalement, le type de tâches « convertir des dizaines en centaines » pourrait s'être trouvé une technique et une technologie, sans valence sémiotique unité mais avec la valence sémiotique nombre en unité simple pour les dizaines et centaines.

En France, Soury-Lavergne et coll. (2020a RmÉ, 2020b COPI) ont développé le jeu du Chiffroscope. Ce jeu est d'ailleurs proposé dans les exemples de jeu du guide « Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP » (ressource publiée par le ministère en 2020 en compléments d'autres ressources institutionnelles tels les programmes et autres textes de cadrage). Tout comme Batteau et Clivaz, Soury-Lavergne et coll. (2020a, 2020b) s'appuient sur les travaux de Tempier (Houdement & Tempier, 2019) pour justifier le projet de travail : « Le principe décimal renvoie au fait que deux chiffres adjacents dans l'écriture d'un nombre désignent des valeurs ayant un rapport de dix. Ce principe constitue l'une des principales difficultés d'apprentissage pour les élèves (Houdement & Tempier, 2019) » (Soury-Lavergne, et coll., 2020, RMÉ, p. 128).

Dans une partie (un tirage), plusieurs nombres sont donnés aux élèves, chacun sous la forme de deux cartes, l'une indiquant un nombre entier de 1 ou 2 chiffres, l'autre indiquant une unité de numération. Un tirage pourrait être *32 / dizaines de milliers, 5 / dizaines, 46 / milliers*. Les élèves doivent trouver le nombre correspondant à tous les nombres. La réponse correcte est alors 366050. Ils disposent pour leur travail d'un tableau de numération « partiellement informé » à sept colonnes (autrement dit, le nom d'une *seule* colonne correspondant à l'une des cartes unités de numération tirées est indiqué mais ce ne sont pas élèves qui choisissent la colonne -c'est un robot !-). Par exemple, la carte *milliers* pourrait être posée dans la 2^e colonne à partir de la droite et la carte *46* posée dans la même colonne. Les élèves ont alors à réfléchir sur les emplacements relatifs des autres cartes et à effectuer la somme compte-tenu des places des cartes.

Pour les auteurs, ce jeu vise à développer chez les élèves la capacité à apprendre les relations entre les unités de la numération (et à les faire fonctionner) dans l'élaboration de relations du type 32 dizaines de milliers = 3 centaines de milliers 2 dizaines de milliers. Les raisonnements attendus sont du type suivant : 32 dizaines de milliers = 30 dizaines de milliers + 2 dizaines de milliers, puis en utilisant la relation intermédiaire 10 dizaines de milliers = 1 centaine de milliers, déduire 30 dizaines de milliers = 3 centaines de milliers. Finalement, 32 dizaines de milliers = 3 centaines de milliers + 2 dizaines de milliers.

Deux méthodologies de recherche ont été mises en œuvre : l'une est un essai randomisé avec groupe de contrôle, l'autre est une recherche sur la conception de situations d'apprentissage (qui s'inscrit dans un travail sur le temps long avec les enseignants). Les résultats de l'essai randomisé sont présentés dans les actes du colloque de la COPIRELEM pour les formateurs. Les auteurs indiquent dans le résumé :

Avec des diagnostics passés en début et fin d'année scolaire ou en avant et après usage du jeu, nous avons pu observer la mobilisation ou non des invariants opératoires par les élèves et l'évolution des connaissances.

Les résultats ne permettent pas d'attribuer les apprentissages à l'utilisation du jeu du Chiffroscope. » (Soury-Lavergne et al., 2020, COPI, résumé, p. 457)

Il s'agit donc d'un résultat nul (i.e., qui ne produit pas l'effet prévu). Toutefois, les enseignants ont le sentiment que leurs élèves ont progressé alors que les chercheurs ne parviennent pas à identifier les progrès dans les taux de réponses globaux des élèves. Ils repèrent toutefois l'émergence d'une stratégie qui a une certaine efficacité qu'ils appellent « retour à l'unité ».

Dans l'autre dispositif (travail sur la conception de situations), les chercheurs étudient les évolutions des conceptions des élèves. Ils affinent la description des principes décimal et de position, en appui sur le modèle des conceptions de Balacheff (Balacheff & Margolinas, 2005) (ce travail est l'objet de la publication de la revue RMé). D'une part, les élèves semblent progresser en atteignant une conception plus avancée de la « position ». D'autre part, l'analyse des productions de certains élèves amènent les chercheurs à introduire un invariant opératoire pour l'aspect décimal qui est le « Retour à l'unité : cet invariant opératoire rend compte de la conversion des unités de numération en unités simples (1 centaine = 100 unités ou 1 millier = 1000 unités). » (RMé, p. 128). Les auteurs infèrent cet invariant de la stratégie qui consiste par exemple à transformer 3 millions en 3 000 000 (ce qui est correct) ou 57 centaines de mille en 570 000 (ce qui est incorrect). J'interprète la mobilisation de cet invariant opératoire *retour à l'unité* non pas comme une conversion en unités simples (qui supposerait que la centaine de mille ou le million soient considérés comme des unités) mais comme une interprétation des unités de la numération comme des écritures courtes dont la valence sémiotique est alors celle d'unités simples. Plus précisément, cette stratégie me semble tout à fait possible avec une interprétation de type écriture courte qui, donc, ne nécessite pas de penser en termes d'unités, voire avec une interprétation un peu moins avancée reposant sur les longueurs des nombres, *centaines de milliers, c'est 6 chiffres donc 57 centaines de milliers c'est 570 000, millions c'est 7 chiffres, donc 3 millions c'est 3 000 000.*

La lecture de l'article et les hypothèses des chercheurs pour interpréter les stratégies laissent penser que les chercheurs ignorent que la valence sémiotique unité ne vit pas dans le savoir à enseigner dans l'institution. Ils donnent l'exemple suivant relatif à l'exercice 4 : « Un nombre est égal à 28 centaines, 54 unités de mille et 7 unités. Quel est ce nombre ? » (2020a, p. 133, Rmé)

Dans l'exercice 4 la réponse attendue est 56 807. Dans la réponse incorrecte 5687, la présence du 56 à gauche signale l'ajout de 54 unités de mille et de 2 unités de mille, donc une conversion de 20 centaines (Fig. 6). L'invariant opératoire conversion entre unités adjacentes a pu être mobilisé pour produire cette réponse bien qu'elle soit erronée. (p. 133)

Pour ma part, faisant l'hypothèse de l'absence d'unités dans l'institution, cette interprétation me semble peu probable. J'attribuerais plutôt la réponse incorrecte au raisonnement évoqué précédemment : *ce sont des centaines, il y a 3 chiffres, ce sont des unités de mille, il y a 4 chiffres.* Cette interprétation amène au calcul de $5400+280+7$, donc à 5687. Les invariants opératoires retenus pourraient ne pas être adaptés pour caractériser les conceptions qui se développent et donc pour identifier les progrès des élèves, progrès qui peuvent être advenus non pas en termes d'interprétation des mots dizaines, centaines comme des unités mais en termes d'unités simples en appui sur une interprétation de type écriture courte (pouvant d'ailleurs s'appuyer sur l'oralisation des unités et des noms des nombres). Un saut technique et/ou conceptuel est susceptible d'apparaître pour un « nombre d'unité » à deux chiffres ou plus.

Si ce sont bien les unités qui manquent dans l'institution, le Chiffroscope n'en permet probablement pas l'apprentissage, sauf peut-être si l'enseignant déploie une activité particulière (qui n'est pas prescrite, ni envisagée par les chercheurs). Cependant, il semble tout à fait possible que la pratique encadrée du jeu puisse faire progresser les élèves dans une interprétation écrites courtes des unités de la numération. La part importante des réponses « retour à l'unité », selon les auteurs, pourrait en témoigner en particulier si elle est associée à une oralisation du nombre avec ses zéros (cf. 2.1.2). Le passage par une interprétation des unités, dizaines, centaines comme des écritures courtes indiquant des nombres d'unités simples n'est pas nécessaire pour atteindre une bonne conceptualisation de la numération mais cette interprétation manifeste néanmoins davantage de connaissances sur les nombres et la numération que leur interprétation comme position, valence sémiotique des unités de la numération dans laquelle les chiffres ne renvoient pas à des quantités. Il est également possible que des élèves développent des habiletés techniques qui leur permettent de réussir en mobilisant la valence sémiotique position. Par exemple une technique pourrait s'appuyer sur des règles (enseignées ou apprises par observation) comme « R0 – les noms des colonnes du tableau sont, dans l'ordre, unité, dizaine, centaines, unités de mille, etc. ; R1 - quand il y a deux chiffres dans une colonne, on ne peut pas, je fais glisser le chiffre de gauche dans la colonne de gauche ; R2 - quand deux chiffres de deux nombres différents sont la même colonne, je les additionne » De telles règles permettent de réussir. Si elles sont enseignées, il peut s'agir d'un glissement metadidactique (quand le but devient de réussir à utiliser outil et n'est plus l'apprentissage de la notion). Toutes ces habiletés, si les élèves les acquièrent au moins en partie, peuvent être perçues comme des progrès par les enseignants car elles dotent les élèves de connaissances sur les nombres, éventuellement seulement sur les *noms* des positions qui font partie des connaissances sur les nombres.

L'étude de ces travaux me semble confirmer l'absence d'unités autres que 1 (absence de la valence sémiotique unité pour les unités de la numération) dans le savoir enseigné et appris dans les années 2010 (dans le Canton de Vaud et en France). C'est une confirmation importante de mes résultats de thèse sur la numération. L'étude des évolutions de la valence instrumentale de l'ostensif que j'avais appelé « unité de la numération » m'avait permis de repérer que la valence instrumentale de la numération en unités avait été très réduite à partir des années 1970-1980. Un peu après ma thèse, en 2012, j'ai établi que cela impliquait que la seule unité enseignée, en numération, était le nombre 1. Ces travaux confirment que, malgré un travail sur la valence instrumentale de cet ostensif, sa valence sémiotique unité n'est pas restaurée et que la seule unité enseignée reste le nombre 1. Dans cette dernière hypothèse, cette étude montre par ailleurs que :

- l'expression « unités de numération » s'est très largement diffusée depuis ma thèse, notamment dans le système d'enseignement et dans la recherche, mais l'arrière-plan épistémologique et les problèmes didactiques qui constituent les raisons d'être de cette invention – pourquoi unités ? –, qui l'ont à la fois permise et justifiée, n'ont pas diffusé,
- focaliser un enseignement sur les relations entre unités de numération quand leur valence sémiotique n'est pas celle d'unité ne permet pas de faire apprendre cette valence sémiotique (ce n'est pas surprenant). Dans ces ingénieries, finalement, il y a deux marches à franchir pour les élèves : une première marche qui serait « apprendre la valence sémiotique unité des unités de la numération » (non prise en charge par l'ingénierie), une deuxième marche qui serait « apprendre

ou faire fonctionner les relations entre ces unités ». La deuxième ne peut pas être franchie si la première ne l'est pas. Toutefois la valence sémiotique nombre d'unités simples qui est à l'œuvre dans une interprétation écrite courte des dizaines, centaines (7 centaines c'est 7 dans la colonne des centaines, c'est 700 ; par « extension »²⁵ 73 centaines, c'est 7300) permet des réussites et vraisemblablement des progrès réels -sous certaines conditions- car elle dispense de la première marche tout en ayant une connaissance plus avancée des valeurs des différents chiffres (en termes d'unités simples) d'un nombre en écriture chiffrée,

- la valence sémiotique nombre d'unités simples des unités de la numération semble être apprise (et possiblement enseignée), dans l'institution d'enseignement, du fait de leur interprétation comme écritures courtes. En l'absence de la valence sémiotique unité dans le système d'enseignement, les tâches qui font intervenir un nombre à deux chiffres (ou plus) pour une unité de numération donnée pourraient contribuer à sa diffusion,

- les chercheurs ne connaissent pas cette valence sémiotique nombres en unités simples, ce qui semble créer dans certains cas des malentendus dans les échanges avec les enseignants (Batteau et Clivaz), dans d'autres cas des interprétations de productions ou stratégies des élèves qui me semblent erronées car ces interprétations présument l'utilisation d'unités alors que les stratégies avec des écritures courtes me semblent plus probables (Soury-Lavergne, et coll.),

- la question des conditions et contraintes pour enseigner la valence sémiotique unité reste posée.

Finalement, cette étude questionne aussi la pertinence d'utiliser le domaine de la numération positionnelle pour enseigner les unités de la numération. Pourquoi faudrait-il des dizaines, des centaines, des milliers et des positions pour apprendre que « dix » est une unité ? La notion d'unités utile en numération ne pourrait-elle pas être enseignée sans référence à la position voire sans référence à la numération ? Pourrait-on par exemple enseigner des petits nombres, tels 2, 3 ou 7 comme unités²⁶ ?

5. La stabilité de la praxéologie rénovée de la numération décimale : vers un nouveau savoir savant du second ordre ?

Les ingénieries expérimentales qui visent à faire apprendre le *principe* ou *l'aspect* décimal de la numération » semblent achopper notamment sur l'interprétation des unités de la numération. Elles sont interprétées comme des écritures courtes, avec conséquemment une valence sémiotique *nombre d'unités simples* (cf. section 4.2) et non comme des unités. Dans ces ingénieries, ce qui est fondamentalement visé n'est pas l'enseignement d'unités mais celui de la numération positionnelle qui est un objet différent. Ce travail s'effectue soit en référence à des manipulations d'objets (grouper / échanger) et au dénombrement de ces objets, soit aux mots unités, dizaines, centaines, etc. qui renvoient à des colonnes du tableau de numération. Ainsi, il est probable aussi qu'elles achoppent parce que la valence sémiotique *unité* des unités de la numération est un savoir transparent dans l'institution d'enseignement, et également dans l'institution de recherche, soit que les chercheurs qui cherchent à les faire enseigner n'ont pas perçu qu'il s'agissait d'unités pour

25 Les modalités de cette extension restent à préciser, même si Duquesne-Belfais et al. (2014) proposent une piste didactique consistante avec cette valence (Chambris, Coulange, Rinaldi & Train, 2021) (section 2.1.2).

26 Nous reviendrons sur ce point au chapitre 4 et dans les perspectives. Toutefois, le lecteur ne doit pas se méprendre, il ne s'agit pas d'enseigner la numération en bases.

les nombres -objet inconnu d'eux-, soit qu'ils ne voient pas que ce qui vit ne sont pas des unités pour les nombres (amalgame entre le *nom d'un groupe* désigné par une unité de la numération et le nombre d'objets dans le groupe, en unités simples, exprimé par une unité de la numération interprétée comme une *écriture courte*). Pour autant, il me semble possible de donner une explication complémentaire au succès des ECPD dans la numération des entiers depuis les années 1980.

La numération positionnelle est un objet à la fois très sophistiqué et très épuré. Elle fonctionne dans plusieurs cadres conceptuels des mathématiques : il y a au moins la théorie classique de la numération (avec ses différents ordres d'unités) et la théorie savante polynomiale des mathématiciens. Une fonction essentielle des institutions (dans le modèle de la TAD) est qu'elles sont censées fournir à leur sujets les praxéologies dont ils ont besoin. Les institutions sont ainsi de grandes créatrices de praxéologies. L'école primaire ne fait pas exception. Nous l'avons d'ailleurs vu au 2.1.2 avec la troncature interprétée comme écriture courte. La valence sémiotique des unités de la numération dans l'institution n'est pas celle d'unités. La théorie savante est inaccessible conceptuellement aux élèves. Peut-on disposer néanmoins d'un cadre d'interprétation consistant de la numération positionnelle ?

À partir de l'étude des praxéologies qui se sont développées depuis les années 1980, j'ai amorcé la formulation d'un autre cadre d'interprétation de la numération positionnelle (Chambris, 2008, p. 503-506). Des éléments complémentaires dans (Chambris, 2018) permettent de le raffiner. Il y a par ailleurs des alternatives. Bien qu'insatisfaisant probablement au plan de ce qu'est une numération positionnelle, ce cadre permet effectivement de mettre en cohérence nombre des praxéologies qui vivent à l'école primaire française, pour les nombres entiers. Il a une certaine consistance mathématique, ce qui semble pouvoir expliquer sa stabilité et aussi finalement la difficulté à faire évoluer les praxéologies enseignées. Cette section présente ce cadre et la conclusion amorce des réflexions sur des moyens, malgré tout, de faire évoluer les praxéologies en numération.

Même si l'histoire de l'apparition de l'ostensif ECPD n'est pas celle du remplacement des unités de la numération par ce nouvel ostensif, une comparaison entre les années 2000 et la période antérieure à la réforme peut donner l'impression d'un tel remplacement. Afin d'éprouver la consistance du système des ECPD, j'ai reformulé la théorie en unités (théorie classique, *C*) de la numération dans les termes des ECPD (approche rénovée, *R*). En particulier, j'ai traduit dans ce système les cinq technologies que j'ai identifiées. J'ai envisagé ce qui pouvait en résulter au niveau de technologies en ECPD (Chambris, 2008, p. 503-506), en considérant que 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 100, 1000, etc. sont des objets premiers.

Dans son texte pour l'étude ICMI 23, le mathématicien Howe fait une proposition, un peu du même type, que j'ai discutée dans (Chambris, 2018). Il inclut la justification des techniques opératoires, qui vise à la rendre efficace. Il s'appuie sur un pré-construit tacite et non questionné : des unités de plusieurs tailles (« the digit for each base ten piece [les nombres de la forme $X0\dots0$, donc les ECPDG] records the number of copies of a *base ten unit* that is used to create that number », Howe, 2015, p.108, souligné dans l'original).

Par contraste, ce qui est intéressant pour comprendre ce qui se passe dans l'institution actuelle est de ne pas supposer que le pré-construit *unité non simple* existe dans l'institution (ce point n'était pas clair dans ma proposition de 2008).

Dans (Chambris, 2018), j'ai mis en évidence de *nouvelles* technologies. En effet, à l'école, la numération chiffrée est liée aux calculs, notamment posés pour lesquels des algorithmes existent (et sont enseignés), qui ne s'appuient pas, de façon explicite, sur les unités de la numération. Elle est liée, aussi, à la numération orale et en particulier aux comptines orales. Tant dans le domaine de la numération orale que de celui du calcul posé, les élèves développent des habiletés, techniques. Ces habiletés sont en particulier les suivantes :

- la récitation des comptines orales de un en un, dix en dix, cent en cent, en montant, en descendant, à partir de n'importe quel nombre,
- alignement strict des chiffres pour poser des additions,
- la « retenue » de l'addition posée (dont une version alternative est : « on écrit un seul chiffre par colonne »),
- le transcodage des nombres (passage de la numération positionnelle à la numération orale et inversement) (324 se dit trois-cent-vingt-quatre et 1000 se dit mille, voire on assiste parfois à une inversion : 324 s'écrit trois-cent-vingt-quatre et 1000 s'écrit mille),

Ces habiletés constituent des pratiques sociales et culturelles probablement véhiculées par l'école mais qui vivent aussi *hors* de l'école et y ont une légitimité *per se*. L'analyse des évolutions des praxéologies dans les années 2000 conduit au constat que ces pratiques sociales jouent un rôle croissant dans les technologies des techniques de numération (Chambris, 2018). Comme on l'observe dans Chambris, Coulange, Rinaldi & Train, 2021 (voir aussi chapitre 4, section 2.2), le principe de la retenue permet de justifier ou d'expliquer pourquoi 10 centaines = 1 millier « en fait y'a deux chiffres et qu'on n'a pas le droit », ou encore pourquoi le suivant de 999 999 est 1 000 000 (section 2.1.2). Au sens de la théorie de la transposition didactique, ces pratiques sociales peuvent être considérées comme des *savoirs savants* (puisqu'ils ont été produits et sont utilisés à l'extérieur de l'école). Au plan des mathématiques de la classe, la technique opératoire de l'addition posée, avec sa retenue, devient un objet crucial. Une alternative à l'addition posée est l'appui sur les comptines orales. Les suites sans ou avec changements de dizaine, de centaine, douze, treize ... dix-neuf, vingt mais aussi quatre-vingt-douze, quatre-vingt-treize ... quatre-vingt-dix-neuf, cent (pour le comptage de un en un), ou encore vingt, trente ... quatre-vingt-dix, cent et vingt-deux, trente-deux ... quatre-vingt-douze, cent-deux (pour le comptage de dix en dix) correspondent à l'addition sans ou avec retenues.

Ainsi, en l'absence d'unités de la numération et en l'absence d'algèbre avancée (théorie des polynômes), il est possible de s'appuyer sur une autre logique de fonctionnement de la numération décimale. De façon schématique, les règles sont les suivantes :

- R0 : $1+1=2, 2+1=3, 4+1=5, 5+1=6, 6+1=7, 7+1=8, 8+1=9$
- R1 : $X+0=X$ (pour $X = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0$)

- R2 : $9+1 = 10$ (cette règle peut être étendue, grâce à la connaissance de la comptine numérique)
- R3 : Pour additionner les nombres (ce qui signifie aussi, pour compter ensemble des nombres d'objets), on écrit les nombres les uns en dessous des autres, alignés à partir de la droite.
- R4 : Pour effectuer une somme, on effectue la somme dans chaque colonne (compte-tenu des règles R0-1-2)
- R5 : on écrit un seul chiffre par colonne. S'il y a plusieurs chiffres (*on ne peut pas*), c'est le *principe de la retenue*. On écrit les chiffres de gauche dans la colonne d'à côté (à gauche!). Une conséquence de R5 est la règle de multiplication par dix : on écrit un zéro à droite.
- R6 : les colonnes ont des noms, introduits successivement d'après la numération orale, unité, dizaine (quand on arrive au nombre *dix* après avoir compté de un en un, le suivant de 9 qui s'écrit *10*, qui est aussi $9+1$), centaine (quand on arrive au nombre cent après avoir compté de un en un depuis un jusqu'à cent, comptage résumé par un comptage de dix en dix depuis dix jusqu'à cent)
- R7 : Étant désignées les colonnes du tableau de numération par les mots unités, dizaines, centaines, milliers, etc., les nombres de la forme $X0..0$, que j'appelle aussi ECPD généralisées, peuvent s'obtenir par une désignation, formelle, Xu_p est le nombre qui a X dans la colonne appelée u_p et des zéros dans les colonnes à droite, ainsi : X unités = X, X dizaines=X0, X centaines=X00, X milliers=X000, etc. (4 centaines, c'est 4 dans la colonne des centaines, c'est 400)
- R8 : Dans cette perspective, les écritures courtes à deux (ou plus) chiffres non nuls peuvent être introduites : $X..Yu_p$ c'est le nombre qui se termine par Y dans la colonne des u_p , soit $X..Y0...0$. On l'appelle « le nombre de u_p ». Les règles de l'addition (sans retenue) permettent d'établir formellement que $ABu_p=AB0...0=A00...0+B0...0=Au_{p+1}+Bu_p$.

Ces éléments montrent que, à défaut de fournir des technologies pour tous les besoins de l'enseignement de la numération, ces technologies rénovées, soutenues le plus souvent par les comptines orales, permettent de satisfaire un grand nombre de besoins de la numération des entiers de l'école avec des méthodes rudimentaires. Quel que soit l'outil mobilisé (addition posée ou comptines), ces technologies conduisent à des résultats de calculs théoriquement justes ou à des mesures de quantités théoriquement justes, la compatibilité totale entre les deux outils permet l'utilisation alternative de l'un ou l'autre.

Par exemple, l'utilisation de la numération orale fournit une alternative au calcul posé sans retenue pour certaines sommes d'ECPD généralisées, par exemple $300+40+5$, c'est « trois cent » « quarante » « cinq », « trois-cent-quarante-cinq » qui s'écrit 345. Par exemple, 243 centaines, s'écrit avec 3 dans la colonne des centaines, 4 dans la colonne située à gauche (donc les milliers) et 2 dans la colonne située encore à gauche (donc les dizaines de milliers). Le nombre se lit « vingt-quatre-mille-trois-cents », 2 correspond à « vingt (mille) », le 4 à « quatre mille », le 3 à « trois cents ». (Alternative à R8 proposée par Duquesne-Belfais & Girodet, 2014). La multiplicité

des moyens, en particulier en lien avec la numération orale, pour traiter une même tâche conduit à créer des significations supplémentaires, même sans disposer du concept d'unité de nombre.

L'ensemble constitué par l'écriture chiffrée et sa correspondance avec les noms des nombres, les comptines orales et l'addition posée forme un *tout* consistant mathématiquement qui peut s'interpréter en termes d'unités simples. Ces éléments apportent selon moi une explication essentielle à la stabilité de la praxéologie rénovée de la numération des entiers, interprétée en unités simples, même si elle présente des inversions déroutantes (« il faudrait connaître la numération décimale pour travailler la numération décimale », Batteau & Clivaz, 2019) par rapport au savoir mathématique savant, même si elle n'est pas très efficace, même si son fonctionnement n'est pas celui d'une numération positionnelle. Cette interprétation de l'écriture positionnelle suggère donc que le cercle vicieux relevé par Batteau et Clivaz (supra) n'est pas un cercle vicieux mais bien un autre point de vue sur la numération chiffrée.

Cette proposition constitue ainsi un cadre conceptuel dans lequel il est possible d'interpréter la numération positionnelle. Les règles positionnelles de calcul permettent de traiter et d'interpréter toutes les techniques de calcul qui s'appuient sur la position des chiffres comme des calculs en unités simples. Deux regards différents peuvent donc être posés sur les ECPD (et ECPDG) et sur la théorie rénovée (le mot théorie est peut-être employé abusivement) : soit on *voit* 200 comme 2 unités de tailles chacune 100 (ce qui revient de fait à intégrer des unités *en* numération, ce que fait Howe, 2015), soit on *voit* 200 comme un « nombre d'unités simples » (ce qui est proposé ci-avant avec les règles R1-R8). Il est nécessaire pour *voir* des unités de taille 100 (ou cent ou une centaine) que des unités d'une telle taille existent dans l'institution (ou pour la personne qui *voit*).

6. Faire évoluer les praxéologies enseignées en numération ?

Contrairement à la numération chiffrée et à la numération orale, l'ostensif « numération en unités » n'est pas un objet du quotidien. Ce fait contribue peut-être aussi en partie à expliquer pourquoi il a pu disparaître si facilement. Dans les praxéologies classiques de la numération, il apparaît principalement au niveau des technologies, autrement dit dans les explications ou les justifications. Il apparaît aussi dans des tâches spécifiques (des décompositions) qui permettent justement d'établir les technologies. Comme ce n'est pas un objet du quotidien, les tâches dans lesquelles il est impliqué *directement* ou *visiblement* peuvent ne pas apparaître comme essentielles. Les enseignants savent que c'est important que les élèves distinguent chiffre des et nombre de donc ils le font travailler, le plus souvent en *coupant* le nombre ce qui ne permet pas d'adopter un point de vue flexible sur les nombres. L'enquête réalisée dans ma thèse montrait que 22 % des élèves étaient capables de déterminer le nombre de centaines de 8734 alors que 75 % d'entre eux donnaient le chiffre des dizaines de 6529 et l'analyse des réponses erronées laissait supposer que 90 % d'entre eux savaient où se trouvait le chiffre des centaines et 85 % le chiffre des dizaines.

En réalité comme on l'a vu avec la théorie rénovée, l'institution a développé des praxéologies alternatives qui sont consistantes et qui permettent *grosso modo* de traiter les tâches du quotidien de la classe de numération par des techniques positionnelles de calcul ou par l'utilisation de la comptine numérique. Par exemple, seuls 10 % des élèves donnent une réponse directe (éventuellement fautive, 85 ou 86) à la tâche « Pour faire les photocopies de l'école, il faut 8564

feuilles de papier. Les feuilles sont vendues par paquets de 100. Combien de paquets faut-il acheter ? » En revanche, 20 % posent une division ou en écrivent une en ligne et près de 10 % écrivent une multiplication de 85 ou 86 par 100 ce qui montre qu'ils ont travaillé *sur* l'écriture chiffrée pour produire leur calcul. Au-delà de l'interprétation du « reste », ces dernières techniques ne garantissent néanmoins pas la réussite car beaucoup posent ces divisions ou multiplications et font des erreurs de calcul ou d'alignement des chiffres liées aux zéros ! Pour l'étude de la numération, beaucoup d'enseignants ne voient probablement pas de nécessité impérieuse de faire évoluer leur enseignement s'ils rencontrent les praxéologies avec unités, réintroduites. Ils peuvent considérer qu'ils ont déjà ce qu'il faut même si les élèves rencontrent des difficultés.

La question de la numération des décimaux serait sans doute différente car les désignations orales (35 centièmes) intègrent les unités de la numération mais les professeurs de CP-CE1 sont peu préoccupés par les nombres décimaux enseignés au CM1-CM2. Ainsi, à supposer que l'institution leur fournissent des praxéologies efficaces, ils peuvent être difficiles à convaincre de faire un investissement, coûteux, dans les unités de la numération pour un gain différé (Roditi, 2009).

La situation du calcul mental est différente. Même si l'enseignement du calcul posé est un peu la marque de fabrique de l'école primaire, les discours institutionnels récurrents ces dernières années font fortement pression sur les enseignants pour qu'ils enseignent le calcul mental. Dans ce contexte institutionnel, un calcul comme $137 - 50$ souvent initialement envisagé uniquement comme un calcul posé (car vu comme *très compliqué*) se trouve singulièrement simplifié lorsqu'il est réduit au calcul de $13 - 5$ (en dizaines). Ainsi, il est bien possible que le calcul mental constitue un habitat essentiel pour motiver les enseignants (ou les formateurs) à utiliser les unités. Les techniques avec unités apparaissent redoutablement efficaces dans cet habitat au regard des techniques dominantes en ECPD, pour lesquelles en l'absence de calcul posé il ne reste bien souvent que les comptines de 10^n en 10^n comme on le voit dans le travail avec Rinaldi. Dans le dispositif de formation de formateurs au calcul mental que nous déployons avec Agnès Batton et Isabelle Melon, dans le cadre de l'IREM de Paris (le défi calcul, Chambris et al., 2018, Batton et al., 2020), nous avons introduit de telles techniques de calcul mental. En formation, les enseignants ou les formateurs disent qu'ils voient dans ces techniques une bonne raison pour enseigner « le nombre de ». Ces nouvelles techniques de calcul offrent en outre une nouvelle niche pour exercer le répertoire additif du calcul sous vingt (les tables) alors que cet exercice est souvent cantonné au calcul posé.

Cette motivation ne fournit néanmoins pas de praxéologie pour l'enseignement des unités de la numération. Il est probable que certains formateurs ou enseignants comprennent et apprennent tout seul ce que sont les unités en envisageant ces techniques. Il est tout autant probable que ce n'est pas le cas de tous. Que font alors les enseignants de ces nouvelles techniques de calcul ?

Chapitre 3. Le lien entre addition et ordre

Ce chapitre poursuit l'étude de la question des raisons d'être des grandeurs. Le propos n'est pas tant ici de chercher des nouvelles raisons qui pourraient légitimer qu'on enseigne des savoirs liés aux grandeurs mais plutôt d'explorer le système actuel d'enseignement en se demandant si certaines difficultés d'enseignement ou d'apprentissage ne pourraient pas être directement liées à l'absence des grandeurs. Par exemple, dans l'introduction du numéro spécial 43 de ZDM « Teaching and learning of measurement » (Smith III, van den Heuvel-Panhuizen, & Teppo, 2011) indiquent :

Moreover, [the students] are also ill-prepared to draw on continuous quantities, especially spatial quantities, when more advanced mathematical topics, such as multiplication and division of rational numbers, call for them. Similarly, the coordination of discrete and continuous quantity necessary to achieve a deep understanding of calculus is difficult to navigate when students' knowledge of continuous quantities and measurement is weak. (p. 618)

Sans préciser quelles sont les notions précisément en jeu, la citation qui précède suggère qu'un apprentissage déficient de certains savoirs sur les grandeurs devient problématique de façon 'visible' pour les apprentissages 'avancés'. Cette affirmation n'est pas étayée par des références et les savoirs en jeu sur les grandeurs continues dans la multiplication et la division des rationnels ne sont pas explicités. Nous avons par ailleurs déjà vu que Kolmogorov affirme que « divorcing mathematics concepts from their origins, in teaching, results in a course with a complete absence of principles and with defective logic » (déjà cité, p. 19). Le mathématicien soviétique affirme donc que l'absence de grandeurs comme origine du concept de nombre, dans l'enseignement, est susceptible de conduire à un enseignement où le raisonnement logique est défaillant et où les bases du raisonnement sont indisponibles.

Avec cette perspective, les raisons d'être des grandeurs sont susceptibles d'apparaître comme des éléments clés du raisonnement des élèves. Il s'agit donc de mettre au jour d'éventuelles nécessités de l'enseignement des grandeurs du fait de leur impact sur le raisonnement mathématique des élèves et, tant que faire se peut, de formuler précisément au moins une partie des savoirs mathématiques liés aux grandeurs qui interviennent dans les raisonnements de l'arithmétique et qui pourraient donc être *manquants* et conséquemment *transparents* s'il leur arrive d'émerger incidemment dans le système d'enseignement.

Le travail, sur les liens entre ordre et addition, présenté ci-après a été formalisé pour cette note rassemblant à la fois des travaux antérieurs épars (Chambris, 2004, 2008, 2014a APMEP), des éléments de la littérature didactique et des travaux récents présentés dans des communications orales (Chambris coord., 2021d, Chambris, 2021c EP21).

Dans les mathématiques savantes, aujourd'hui, l'articulation entre ordre et addition dans un ensemble se formule de façon usuelle sous la forme d'un ensemble ordonné doté d'une addition, compatible avec l'ordre (si $a > b$ et $c > d$, alors $a + c > b + d$). Dans un ensemble de grandeurs, au moins historiquement, ce n'est pas cette articulation qui était retenue le plus souvent.

1. Ordre et soustraction : idéalisation de la réalité et tâches

De nombreux travaux sur les grandeurs, inspirés notamment par les travaux de psychologie cognitive de Piaget (e.g., Smith III & Barrett, 2017), considèrent que l'apprentissage des grandeurs spatiales se développe en commençant par la comparaison et que vient ensuite l'apprentissage de la notion d'unité, puis la prise de conscience de la nécessité de « remplir l'espace » en le pavant avec des unités (ibid.). De façon curieuse au plan mathématique, l'addition des grandeurs n'apparaît pas en tant que telle dans cette progression.

Examinons ce qui se passe au plan spatial. Imaginons une portion (finie) A de l'espace et une partie B de cette portion d'espace (une autre portion d'espace, donc). Cette configuration spatiale détermine une troisième portion d'espace C : la partie de A qui *dépasse* de B . Pour décrire la situation, je vais parler d'inclusion géométrique et de complémentaire de B dans A mais il n'y a pas d'ensemble, ni d'ensemble de points dans ces portions d'espace. Considérons une espèce de grandeur attachée aux portions de l'espace. Pour fixer les idées, supposons par exemple que les portions d'espace sont planes et considérons l'étendue des portions planes. On observe que 1) déterminer qui de B ou de A est le plus grand (relativement à l'étendue) se déduit de l'inclusion géométrique (étendue de $B <$ étendue de A car B est une partie de A) et que 2) la grandeur du complémentaire de B dans A détermine la différence des grandeurs de A et B (étendue de $C =$ étendue de $A -$ étendue de B). Ainsi, la somme s'articule géométriquement avec l'ordre, dans les cas où un objet est une partie de l'autre. Comme l'inclusion géométrique (stricte) assure *l'existence* du complémentaire, elle assure aussi *l'existence* de la différence des étendues.

La figure 10 (d'après Chambris, 2014a APMEP) éclaire ce point de vue pour des objets allongés, des secteurs angulaires et des collections finies, qui ne seraient pas inclus l'un dans l'autre mais pour lesquels on se « ramènerait » à une inclusion par déplacement. La visualisation des objets géométriques suggère que : étant donnée une procédure de comparaison de grandeurs (selon la longueur, l'angle, etc.) en considérant l'« inclusion » des objets, *l'ajout d'une grandeur à une autre* peut se voir comme suit. Comme B est plus grand que A de la grandeur de ce qui dépasse de A pour faire B , ce qui dépasse de A pour faire B est ce qui doit être ajouté à A pour obtenir B . Choisir une manière de comparer deux *objets* détermine la manière de les additionner (ou l'inverse).


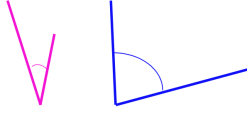
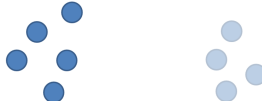
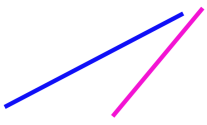
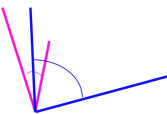
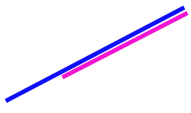
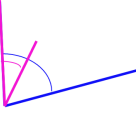

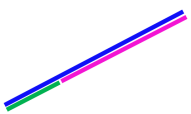
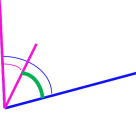
Pour la longueur	Pour l'angle géométrique	Pour les collections finies
 <small>JN APMEP - 19 octobre 2014 - Toulouse</small>		
 <small>JN APMEP - 19 octobre 2014 - Toulouse</small>		
 <small>JN APMEP - 19 octobre 2014 - Toulouse</small>		
 <small>JN APMEP - 19 octobre 2014 - Toulouse</small>		

Figure 10. – Lien entre ordre et addition – (D'après Chambris, 2014a APMEP, diapos 36-39)

Cette caractérisation de la relation entre ordre et addition pour les grandeurs est présente dans les notions communes d'Euclide (Livre I) : le tout est plus grand que la partie. On le sait, dans le passage aux grandeurs, les axiomes de la géométrie euclidienne révèlent des surprises (e.g., Pressiat, 2002). Je vais néanmoins donner des idées intuitives de ce qui donne une addition et une relation d'ordre. Étant donné un objet géométrique (une ligne, une surface, un secteur angulaire, un solide), et une partition de cet objet (en deux lignes, deux surfaces, deux secteurs angulaires, deux solides), selon la grandeur considérée (respectivement la longueur, l'aire, l'angle géométrique, le volume) et le type d'objets considéré (respectivement une ligne, une surface, un secteur angulaire, un solide), la grandeur attachée à une partie est plus grande que la grandeur attachée au tout. Les grandeurs s'additionnent selon la réunion disjointe.

Ainsi, la partition géométrique détermine l'ordre, l'aire du tout est plus grande que l'aire de la partie, mais aussi la soustraction car de la comparaison d'une partie à un tout émerge l'autre partie (et sa grandeur), qui est ce qu'il faut adjoindre à la partie pour former le tout.

De façon consistante avec ces observations, la plupart des axiomatiques des grandeurs affirment ainsi que : (Propriété P) « L'ordre et l'addition sont reliés : Pour tout a , pour tout b , $a < b$ si et seulement si il existe c tel que $a + c = b$ ». Dans ces axiomatiques, l'addition est toujours commutative et associative et l'ordre est total.

Les axiomes ne sont en revanche pas toujours énoncés dans le même ordre, ce qui peut créer des différences entre ce qui est choisi comme axiome et ce qui est une définition notamment. Par exemple, Kolmogorov (1979) indique qu'une espèce de grandeur est un ensemble doté d'un ordre total, d'une addition commutative et associative. Il indique ensuite deux axiomes supplémentaires :

1) $a + b > a$ (monotonie de l'addition),

2) si $a > b$, alors il existe une et une seule quantité c pour laquelle $b + c = a$ (possibilité de soustraction).

Rouche (1994) introduit les axiomes sensiblement dans le même ordre que Kolmogorov²⁷.

L'autre option suivie par Whitney (1968a) et Burali-Forti (1901), est de déduire l'ordre de l'addition mais cela suppose de prendre quelques précautions sur l'addition qui sont peut-être moins « naturelles » que de poser la propriété P. comme axiome.

Par exemple Whitney dote l'espèce de grandeurs d'une addition commutative et associative. Il indique ensuite que :

3) l'addition doit être telle que : pour tout a et pour tout b , $a + b \neq a$

4) pour tout a et pour tout b , $a \neq b$ il existe c tel que $a = b + c$ ou $b = a + c$.

L'ordre est ensuite défini par $a > b$, si il existe c tel que $a = b + c$. Grâce à (4) l'ordre est total.

Burali-Forti procède à peu près de la même façon que Whitney mais il introduit un élément neutre pour l'addition (qui sera le plus petit élément de l'ensemble) et l'existence d'éléments non nuls. Chez Burali-Forti, l'axiome (3) de Whitney est alors « remplacé » par si $a \neq b$ et $a \neq 0$ alors $a + b \neq 0$.

Quelques remarques :

- Chez Whitney, l'ordre est bien défini : supposons qu'on ait, $x > y$ et $y < x$, alors grâce à (4), on aurait $x = y + u$ et $y = x + v$, en sommant, on aurait $x + y = x + y + u + v$ (ce qui est impossible d'après (3))

- La propriété P « assure » la régularité de l'addition. En effet, supposons qu'il existe a, b, c et e, c et e distincts, tels que $a = b + c$ et $a = b + e$. Comme l'ordre est total, alors soit $c > e$, soit $c < e$. Si $c > e$, il existe h , tel que $c = e + h$ (d'après P, sens \Rightarrow). Par suite, $a = b + e = b + e + h$ (commutativité et associativité de l'addition). Or, $b + e < b + e + h$ (d'après P, sens \Leftarrow). Donc $c > e$ est faux. Donc $c < e$. De la même façon, on prouve que $c < e$ est faux. Donc, l'hypothèse est absurde.

- Kolmogorov impose l'unicité dans son axiome (2) qu'il appelle possibility of subtraction. Vu ce qui précède, il me semble qu'il suffit d'assurer par un axiome l'existence d'un complément. La régularité de l'addition assure ensuite l'unicité du complément et l'existence de la soustraction.

²⁷ Les auteurs introduisent en général d'autres axiomes : pour assurer la divisibilité (Rouche, Kolmogorov) ou à défaut pour assurer l'existence d'éléments non nuls aussi petits qu'on veut (Whitney, Burali-Forti). Certains auteurs introduisent l'axiome d'Archimède et un axiome de continuité (borne supérieure, souvent) (Kolmogorov, Burali-Forti, Whitney). Ceux qui n'introduisent la divisibilité la déduisent de l'existence de petits éléments et de la continuité (Whitney, Burali-Forti). (Chambris, 2004)

- On remarque la technique qui consiste pour prouver que deux quantités sont égales, a) à supposer que l'une est plus grande que l'autre (ordre total), puis b) à compléter la petite par une quantité de façon à obtenir la grande ($P \Rightarrow$).

Cette approche géométrique d'une propriété fondamentale des grandeurs appelle quelques commentaires. La propriété est formulée sur les grandeurs, la formulation géométrique (par inclusion) porte sur les objets (la relation de partie à tout est une relation entre objets et non entre grandeurs) et n'a de sens matériellement que sur les objets (les grandeurs, lorsqu'elles sont définies à partir des objets, ce qui n'est pas le cas dans toutes les théories, sont les quotients des classes d'objets de « même taille »). Ainsi, il est toujours possible d'additionner des vitesses, des concentrations, des températures, mais ces additions ne sont pas associées de façon 'naturelle' à une inclusion ou des actions sur des objets. Par exemple, la température du mélange du contenu de deux récipients contenant un même liquide n'est pas supérieure à la température de chacun d'eux mais intermédiaire. On retrouve pour partie des spécificités liées à la distinction qui a existé entre grandeurs extensives (attachées à l'étendue) et grandeurs intensives (vitesse, concentration). Burali-Forti situe son axiomatic au niveau des grandeurs et non des objets (contrairement au projet de Frege, par exemple (e.g., Griesel, 2007).

Dans (Chambris, 2008), en appui sur une première analyse des théories des grandeurs, j'avais conçu et proposé à des élèves ($n = 273$) en fin de scolarité élémentaire (grade 5, élèves de 10-11 ans) une tâche qui met en jeu ce lien entre addition et ordre (fig. 11). Les élèves disposaient d'une bande cartonnée de longueur intermédiaire entre celles des deux traits et supérieure à celle de l'écart entre elles, de façon à ce qu'ils ne puissent pas reporter les deux traits sur la bande mais puissent reporter la longueur du trait noir et reporter celle de l'écart (analyse de la tâche p. 298 et suiv.).

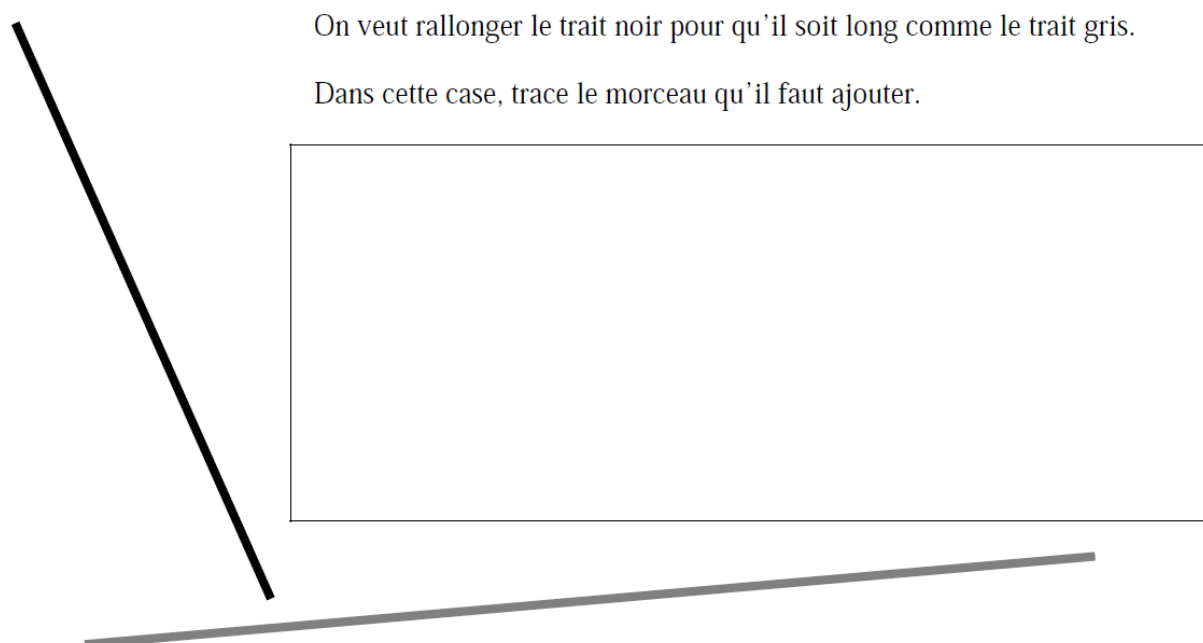


Figure 11. – Une tâche pour évaluer la construction du complément, par report

La moitié des élèves réussissent (52%) (analyse détaillée des réponses p. 369 et suiv.). Il faut bien sûr être prudent sur l'interprétation car la tâche est isolée. Ce résultat ne permet pas de conclure

qu'il existe des lacunes conceptuelles massives mais ne l'exclut pas non plus. Pour autant, il suggère a minima que la moitié des élèves sont peu familiers des problèmes dans lesquels ils sont amenés à produire des grandeurs sans utiliser le nombre pour mesurer.

Appuyer la construction des nombres non entiers sur les grandeurs exclut d'utiliser une théorie des grandeurs qui suppose les réels construits, plus encore, une caractérisation des grandeurs qui utilise l'additivité de leur mesure (fonction « mesure »). Toutes les théories des grandeurs qui n'utilisent pas les fonctions « mesure » pour caractériser les grandeurs relient l'addition et l'ordre des grandeurs en utilisant : soit l'axiome d'Archimède et la compatibilité de l'ordre de l'addition [il faudrait préciser les choses], soit un axiome plus faible (du type : $a > b$ si et seulement si il existe c tel que $b + c = a$) que nous appelons « axiome de l'addition qui agrandit et d'existence de la soustraction ». À notre connaissance, il n'y a pas de tâche qui corresponde à cet axiome qui soit habituellement enseignée. On pourrait en inventer [en introduire, plutôt, car la tâche de la figure 11 est une tâche de ce type]. Qu'est-ce que cela apporterait aux élèves ? (Chambris, 2010, p. 340)

Le soviétique Davydov a mis au point une ingénierie au début des années 1960. Dans (Davydov, 1975), il présente les choix qui y sont faits. Il appuie les différentes étapes de son ingénierie sur la théorie des grandeurs développée par Kolmogorov (1951 / 1979) (qui inclut la propriété P) mais cette ingénierie est davantage connue parce qu'elle propose une introduction précoce à l'algèbre que pour la prise en compte des propriétés des grandeurs. Cette ingénierie s'est inscrite dans la réforme des mathématiques modernes soviétique (dirigée par Kolmogorov) dans les années 1960 et 1970 (Abramov, 2010). Ce curriculum a été implémenté dans environ 10 % des écoles en Russie depuis l'effondrement de l'URSS en 1991 (Dougherty & Simon, 2014)²⁸. Aux Etats-Unis, le déploiement de ce curriculum est étudié par au moins deux équipes (e.g., Dougherty & Venenciano, 2007 ; Schmittau, 2005). En 2021, un numéro spécial de la revue *Educational Studies in Mathematics* a été consacré aux perspectives de l'approche de Davydov. Dans la description de l'ingénierie par Davydov (1975) (enfants de 7 ans), les trois premiers thèmes portent sur l'ordre et l'égalité, le 4^e thème introduit l'addition (et la soustraction) en lien avec l'ordre (ajouter fait grandir, retrancher fait diminuer), et le 5^e étudie la possibilité de « transformer une inégalité du type $A < B$ en une égalité par l'addition (ou la soustraction) » (p. 137, ma traduction). Dougherty et Venenciano (2007) mentionnent des aspects critiques de l'ingénierie (Measure Up) au grade 1 (6-7 ans) :

The question of how much larger or smaller the measure of one object is compared with the measure of another object arises quite naturally. *While justifying why quantities are not equal*, the students articulate what it is about their methods of comparison that reveals the difference between the quantities in question. Although they can easily point to the difference on a physical model, they have to decide how to describe the difference in words and symbols. Early on, they describe the differences by saying that, for example, volume W is greater than volume T by volume L . In this case, volume L is the difference (the amount by which volume W is greater than volume T) between volume W and volume T . The physical model can be used to illustrate volumes T , L , W , $W-L$, and $T+L$. (Dougherty & Venenciano, 2007, p. 454, je souligne)

28 Des chercheurs comme Ma (2013) et Polotskaia (2017) font état de l'influence des grandeurs ou d'une théorie de l'arithmétique dans des curricula en Russie, aujourd'hui. Ces éléments sont cependant trop parcellaire pour permettre de conclure à une influence de la théorie des grandeurs développée par Kolmogorov sur le curriculum soviétique, puis russe, au-delà de l'implémentation de l'ingénierie de Davydov.

Ainsi, les élèves sont d'abord amenés à comparer (égal, plus petit, plus grand) des objets de divers points de vue (longueur, masse, etc.) mais c'est la *justification* de pourquoi un objet est plus grand que l'autre qui les amène à considérer la différence dans une comparaison.

Cette première section s'est attachée à décrire une propriété particulière, très élémentaire, des grandeurs : le lien entre addition et ordre, l'addition « agrandit » et la soustraction existe. Elle a décrit comment cette propriété se manifeste lors de comparaisons spatiales (mais les éléments restent valables pour la comparaison de durées par exemple). En ce sens, cette propriété peut être idéalisée à partir de la réalité. Les élèves français de fin d'école semblent peu familiers de cette relation (en 2008). Cette propriété est présente dans les axiomes de définitions des grandeurs (qui visent à construire le nombre). Cette propriété semble jouer un rôle important dans l'ingénierie de Davydov.

2. Interpréter des raisonnements d'élèves

Après un détour, cette section revient sur l'articulation de l'addition et de l'ordre. Elle s'appuie sur une analyse d'un extrait de corpus proposé par (Cortina, Visnovska & Zuniga, 2014). Je présente d'abord le point de vue des auteurs, puis les analyses complémentaires que j'en fait.

Concernant les questions liées à l'apprentissage de l'arithmétique élémentaire, par nécessité, les problèmes ancrés dans la réalité dans lesquels les nombres interviennent impliquent des grandeurs. Cortina et al. (2014) donnent des exemples de raisonnements produits par les élèves. Même s'ils s'appuient sur les travaux de Freudenthal, Cortina et al. ne mentionnent pas d'appui sur une approche théorique des grandeurs. Ils s'inscrivent néanmoins dans la perspective des *mathematical practices* introduites par Cobb (2003). Leur but, établi d'après une revue de littérature dans différents domaines, est de faire apprendre aux élèves *l'ordre inverse des fractions unitaires*, notion qu'ils ont repérée comme constituant une difficulté majeure dans l'apprentissage des fractions. Pour cela il introduisent les fractions unitaires comme des unités. Dans l'exemple qui suit, les élèves ont au préalable été amenés à mesurer des distances variées avec leur propre *main* comme unité de longueur, ils ont été amenés à observer les mesurages réalisés par d'autres élèves pour la même longueur.

After recording their measures of the paper strip, students were presented with a problem in which they were told that, when visiting the historical landmark building, two of the research assistants, Miss Claudia and Miss Renata, had measured the window [de la même taille que le « paper strip »] using their hand spans. The measure obtained by Miss Claudia was of exactly five hand spans, and the one obtained by Miss Renata was of exactly six hand spans. Students were asked to think about which of the two persons had the longer hand span. Only Miss Claudia was in the classroom at that time.

As the conversation unfolded, it was noticeable that at least half of the students relied on the whole-number-dominance strategy to interpret the situation. The following excerpt is representative of this way of reasoning:

Teacher: Ah, look, some of you think that Miss Renata and others that Miss Claudia. Lourdes, why do you think that Miss Renata has the bigger hand?

Lourdes: Because she got six hand-spans [“seis cuartas”]?

Teacher: Because she measured six? Because six is a bigger number than five? Is that why?

Lourdes: The thing is that Miss Renata, her hand is bigger and that is why she gets six hand-spans.

The extract illustrates how some of the students directly associated the bigger unit to the bigger number. Hence, they regarded Miss Renata as the person having the longer hand span.

The teacher then asked a student who concluded that Miss Claudia had the bigger hand to explain her reasoning:

Marisol: Because Miss Claudia has the bigger hand and she has to get fewer [hands as a result], because Miss Renata has the smaller hand and she gets more [hands].

Marisol's explanation was significant [...] because it seemed to have a strong quantitative grounding. It is noticeable how she repeatedly referred to sizes: "bigger" (más grande), "gets fewer" (salirle menos), "smaller" (más chica), and "gets more" (le sale más). This explanation illustrates how the instructional activities that consisted of measuring lengths using parts of the body allowed some students to readily conceive the relation between the size of units of measure and the number of iterations they required to cover a given length in ways that were consistent with the inverse order relationship.

When the teacher asked the class about Marisol's reasoning, it became apparent that several of the students were experiencing difficulties in making sense of it. The following conversation seemed to help most of the students to reason in ways consistent with the inverse order relationship in this session:

Teacher: So who do you think has the bigger hand, Miss Claudia or myself?

[Both adults show their hands to the students. It is clear that the classroom teacher has a bigger hand.]

Teacher: So let's see. If I measure it. A question. Let's see, let's think about this question. If I have a bigger hand than Miss Claudia, when I measure the strip will I get more or less than six, more or less than five hand-spans?

Some students: Less than five.

Teacher: Who thinks that more? [Nobody raises his/her hand]. Who thinks that less? [Several of the students raise their hands. Some do not.] Should we try?

Student: OK.

[The teacher measures and obtains three hand-spans and a bit more.]

Teacher: So let's see. What if somebody uses ten hand-spans to measure this [pointing at the paper strip]. Will he have a very big hand or a very small one?

Student A: Small.

Student B: Very tiny.

Student C: A baby. (p. 91-92)

Cortina et Visnovska affirment qu'il s'agit de raisonnements mathématiques. Je défends l'idée que la perspective de l'axiomatisation comme idéalisation de la réalité permet de préciser cette affirmation et qu'il est possible d'interpréter ces raisonnements d'élèves comme des raisonnements produits dans ce paradigme. Tout d'abord, les élèves mettent en œuvre des tâches de mesurage, avec des étalons corporels de tailles variées (des mains plus ou moins grandes), certains observent des effets de la taille sur le nombre d'unités pour mesurer une longueur donnée. Ensuite, ils sont invités à produire un raisonnement qui permette de prédire le résultat d'une comparaison de la taille de deux unités différentes utilisées dans un même mesurage (produisant donc des nombres d'unités différents). Le raisonnement des élèves porte sur « la taille » des mains, leur longueur.

Dans l'extrait ci-dessus, l'enseignante et Claudia permettent aux élèves de comparer les tailles de leurs mains : l'enseignante a des mains plus grandes que Claudia. Ensuite, elle fait entrer les élèves dans un raisonnement : « si / comme j'ai une main plus grande que Claudia, est-ce qu'il va me falloir plus ou moins d'itérations qu'elle pour couvrir la même longueur ? » Il semble clair à la plupart des élèves qu'il va lui falloir moins de mains que Claudia. Un raisonnement élémentaire (implicite) est qu'à chaque étape la distance couverte par l'enseignante est plus grande que celle couverte par Claudia. Quand Claudia aura couvert la distance avec 5 mains, l'enseignante aura terminé depuis « longtemps ». Ensuite, l'enseignante valide le raisonnement par une expérimentation en montrant qu'avec seulement 3 mains (u) elle couvre effectivement la longueur demandée.

Formellement, soit m et k entiers, $k u_k = \text{strip}$, $m u_m = \text{strip}$, l'implication à prouver est : si $m < k$ alors $u_k < u_m$. Soit m et k entiers tq $m < k$. Supposons en vue d'une contradiction que $u_k \geq u_m$, il existe r tq : $k = m + r$, d'où $k u_k = m u_k + r u_k$, c'est aussi $m u_m = m u_k + r u_k$. Or, $u_k \geq u_m$, donc $m u_k \geq m u_m$ (et $r u_k \geq r u_m$) $m u_m > m u_m$. Absurde.

Considérer la longueur comme objet mathématique en amont du nombre permet d'inclure ces raisonnements dans le travail mathématique. Prendre en compte les grandeurs dans l'enseignement du nombre éclaire alors les propos de Kolmogorov (déjà cité p. 19) :

divorcing mathematics concepts from their origins, in teaching, results in a course with a complete absence of principles and with defective logic

Les connaissances qui circulent dans ces raisonnements sont notamment essentielles dans l'apprentissage ultérieur des fractions. Ils impliquent la longueur (ou plus précisément la grandeur en jeu dans le raisonnement, l'aire s'il s'agit d'un raisonnement sur l'aire). Il me semble qu'il est nécessaire de considérer que la longueur est un objet mathématique qui intervient dans l'apprentissage du nombre pour pouvoir inclure ces raisonnements dans les mathématiques. Par ailleurs, ils sont nécessairement produits dans le paradigme d'idéalisation de la réalité (jeu entre le réel, les bandes effectivement recouvertes, et les bandes dont on imagine qu'elles sont recouvertes), qui apparaît ainsi comme un paradigme dans lequel les élèves peuvent faire des mathématiques.

De façon plus précise les savoirs mobilisés dans cette section sont soit la compatibilité de l'addition avec l'ordre (l'argument repose sur l'inégalité stricte), soit la propriété P. Il est cependant important de noter, qu'il s'agisse de l'une ou l'autre de ces propriétés, que son utilisation n'est pas dans le cadre le plus simple car plusieurs itérations sont ici nécessaires : si $a > b$ alors $k a > k b$ ainsi qu'un raisonnement par l'absurde.

3. Interpréter les difficultés des élèves et identifier leur origine

Cette partie s'appuie sur une relecture de deux textes que j'ai déjà évoqués (Douady, 1981, Perrin-Glorian, 1993). Elle s'est élaborée dans le cadre d'une réflexion en cours avec Coulange et Train (Chambris coord., 2021). Nous faisons l'hypothèse que les ingénieries pionnières de Brousseau et Brousseau (1987) et de Douady et Perrin (1986) sur les fractions et décimaux sont susceptibles de fournir des traces de savoirs qui seraient transparents aujourd'hui, dans l'institution d'enseignement, et qu'étudier les mises en œuvre originelles de ces ingénieries pourraient aider à identifier des conditions écologiques favorables dans lesquelles ces savoirs pourraient vivre,

aujourd'hui. La réussite de ces ingénieries suggère en effet que les savoirs nécessaires pour l'apprentissage étaient enseignés. Il peut y avoir cependant deux types de traces. Des traces *positives* qui montrent une prise en charge de savoirs que nous aurions identifiés au préalable comme possiblement transparents, il peut s'agir de traces *negatives*, des difficultés rencontrées et documentées par les chercheurs.

3.1. Deux épisodes dans la littérature relatant une difficulté du même ordre

Rappelons brièvement le contexte. Douady, à la fin des années 1970, développe une ingénierie incluant les fractions et les décimaux. La réussite est remarquable. Elle est rapportée notamment dans la thèse d'état de Douady et aussi dans (Douady, 1981). Elle travaille avec Perrin. Quelques années plus tard, Perrin souhaite éprouver l'ingénierie dans des classes faibles. C'est un échec. Perrin l'a documenté dans sa thèse d'état et aussi dans (Perrin-Glorian, 1993).

Parmi les difficultés identifiées par Perrin-Glorian (1993, p.72-74), il y a ce qu'elle appelle la « décontextualisation brutale ». Elle écrit :

Décontextualisation brutale

La décontextualisation des notions rencontrées par les élèves dans des problèmes est sans doute une des questions les plus délicates qui se posent en didactique des mathématiques. [...] Il arrive que l'enseignant se méprenne sur la signification réelle des connaissances en jeu pour les élèves et saute des étapes importantes pour que cette décontextualisation se fasse sans perte de sens excessive. Ce phénomène est à rapprocher de l'effet Jourdain identifié par G. Brousseau.

Nous en donnons ici un exemple: Dans une classe de 6ème, les élèves avaient travaillé sur les fractions à partir d'aires de rectangles. Nous travaillions avec des élèves volontaires hors de la classe à qui nous avons posé la question suivante: « Peux-tu fabriquer des quarts de forme différentes? » Les morceaux de la figure 1, n'étant pas superposables, la question de la validation se posait mais la plupart des élèves concernés ne pouvaient pas fournir d'argument.

Nous leur avons donc demandé, en laissant apparemment tomber le problème des quarts, s'ils pouvaient fabriquer des huitièmes de formes différentes. Nous avons alors eu, entre autres, des productions des types des figures 4 et 5:



Fig.1

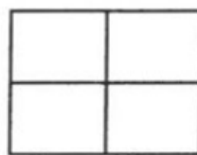


Fig.2



Fig.3

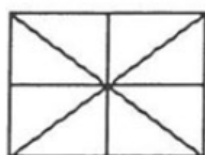


Fig.4

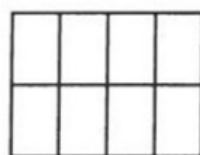


Fig.5

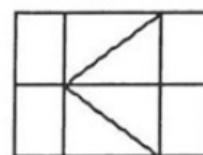


Fig.6

Les élèves pouvaient dire dans chaque cas que $2 \times 1/8 = 1/4$ et conclure à l'égalité des différents quarts de la figure 1. Mais nous leur avons alors demandé ce qu'on trouvait en accolant un huitième du premier type et un huitième du deuxième. Les élèves ne savaient plus, pensaient que ça ne devait pas faire $1/4$ mais que pour le savoir, il fallait paver. Ils n'ont pu conclure qu'après avoir réalisé des pavages du type de la figure 6.

Pour eux la détermination d'une fraction était toujours liée à la possibilité de paver alors que pendant ce temps en classe, on était censé travailler au niveau des nombres. Cela semblait raisonnable puisque des figures de formes différentes étaient codées par une même fraction et que les élèves de cette classe avaient aussi travaillé sur les fractions dans le contexte des longueurs. Mais, dans les deux contextes, il s'agissait d'une problématique de reports. Remarquons que la mesure des aires est en jeu aussi dans cet exemple et que l'existence d'une mesure indépendamment de la possibilité de paver n'est pas une chose facile à concevoir pour des élèves de 6ème.

La trop grande rapidité de la décontextualisation peut s'expliquer par la difficulté pour les enseignants à connaître l'état des connaissances réelles des élèves, et aussi par la nécessité où ils se trouvent de faire avancer le temps didactique. [...]

Il nous paraît donc nécessaire de distinguer différents niveaux dans la décontextualisation:

- si le contexte est matériel, pouvoir prévoir ou conclure sans recourir au matériel, en imaginant seulement la manipulation qui est intériorisée.
- ... (Perrin-Glorian, 1993, p. 72-74)

Parmi les deux exemples de difficultés rapportées par Douady, se trouve l'épisode suivant :

Ces situations vont susciter chez les enfants des actions, des affirmations quelquefois argumentées. En choisissant certaines de ces actions et affirmations et en les prenant pour axiomes, nous obtiendrons une description axiomatique de R. Nous avons vu ce modèle fonctionner avec régularité dans un même type de situation.

Mise en garde

Les manipulations proposées permettront de décrire des situations, poser des problèmes, suggérer des voies de recherche ou des solutions. Elles ne viseront pas à valider des conjectures théoriques sans quelques précautions. Pour qu'un enfant puisse interpréter correctement un écart entre une conjecture et un fait d'expérience, il faudra qu'il ait les moyens — conceptuels et matériels — d'évaluer les erreurs dues à l'expérience. Donnons deux exemples qui se sont effectivement produits :

Exemple 1 :

Un rectangle de dimensions 3 u et 5 u est subdivisé en petits rectangles « pareils » de 2 manières différentes :



Affirmation d'un élève : les parties hachurées n'ont pas la même aire.

Un autre : oui, ils ont la même aire.

Nicolas : oui, dans les deux cas, il y en a 15 pareils (tout bas à son voisin).

Proposition d'un troisième, acceptée par l'ensemble : on découpe le rectangle en petits morceaux et on essaie de recouvrir le carré.

Après manipulation, la classe était aussi partagée qu'avant. Nicolas ne croyait plus à son argument. (Douady, 1981, p. 89)

Il y a des points communs et des différences dans ces deux épisodes. Le point commun principal, documenté de façon très précise par Perrin, est constitué par la difficulté des élèves à admettre des égalités d'aires. Pour dire que les morceaux sont des quarts, les élèves ont besoin de paver. Il se

trouve que c'est précisément ce qu'il est matériellement impossible de faire dans l'épisode rapporté par Douady. Les deux chercheuses attribuent cependant la difficulté à des causes différentes. Perrin l'identifie à un défaut des pratiques enseignantes (les enseignants décontextualisent trop brutalement), alors que Douady l'identifie à une difficulté conceptuelle (l'enseignante était excellente), à savoir que les élèves n'ont pas les moyens d'évaluer les erreurs liées à l'expérience, ce qui rend inaccessible l'égalité de l'aire des parts obtenues dans deux partages en un même nombre de parts égales d'une même surface. Les travaux de Chesnais et Munier (2016) rappellent toutefois que l'erreur est inhérente à l'expérience et que personne ne peut montrer, empiriquement (sauf à proposer deux découpages théoriques qui permettent de recomposer théoriquement l'un en l'autre), que les deux surfaces ont la même aire. Ni Douady, ni Perrin n'envisagent une preuve intellectuelle (Balacheff, 1987) relativement au problème rencontré. Pourtant, il en existe une.

3.2. Un raisonnement

Considérons deux partages (des découpages ou des pliages, par exemple) différents d'une même surface par exemple en 3 parts égales (disons des parts de type A pour l'un et de type B pour l'autre). Pour fixer les idées, je donne une image (figure 12) mais ce n'est pas nécessaire pour conduire le raisonnement.



Figure 12. – Deux découpages, théoriques, différents, d'une même surface en trois parts égales.

Une étape préliminaire est nécessaire : si le découpage est idéal, toutes les parts de type A sont identiques, toutes les parts de type B sont identiques. Imaginons alors que les aires des parts de type A et de type B soient différentes. Deux aires étant toujours comparables (ordre total des aires), supposons, par exemple, que l'aire des parts de type A est plus grande que celle des parts de type B. La petite part peut alors être *complétée* par un petit morceau (disons de type C) pour former la grande part (Propriété P.). Une expérience de pensée permet d'affirmer que la juxtaposition de 3 morceaux de type B reconstitue la feuille et que celle des 3 morceaux de type A est plus grande (l'écart est constitué par la taille des 3 morceaux de type C), ce qui est impossible. Ce raisonnement élémentaire –mais par l'absurde– repose donc sur les propriétés générales des grandeurs (extensives), à savoir l'ordre total, l'addition commutative et associative et la propriété P. Il assure, dans le cas présent, qu'il s'agit bien du *même tiers* (problème de Perrin) ou que les deux surfaces ont la même aire (problème de Douady).

Ce raisonnement n'a pas été mis à l'épreuve auprès d'élèves. Il présente des similitudes avec celui qui est proposé par Cortina et al. (2014) (section 2). Dans ce raisonnement, comme chez Cortina et al. (2014), le matériel –la réalité– joue un rôle important. Il soutient le raisonnement car la preuve est de type « intellectuel » et non « pragmatique » (Balacheff, 1987). La preuve n'est pas une preuve géométrique, elle se situe en quelque sorte en amont de la géométrie. La difficulté des élèves renvoie à la possibilité même de concevoir l'aire, comme grandeur, indépendamment des configurations géométriques. La grandeur aire, dans le raisonnement, perd sa matérialité. Elle devient une *quantité*. Cette quantité est déterminée par une relation avec d'autres quantités. Cette

nouvelle caractéristique de l'aire est rendue accessible grâce au *raisonnement par l'absurde* car il permet de *conclure à l'égalité de deux grandeurs sans nécessité de produire une recombinaison de l'une en l'autre*.

Il me semble par ailleurs que ce raisonnement a une portée très grande. Il permet ici d'établir la régularité de la multiplication par un entier, mais un raisonnement du même type permet d'établir la régularité de l'addition de grandeurs (cf. section 1). Il est généralisable à la multiplication par un rationnel et est aussi valable pour la grandeur nombre.

3.3. Un savoir transparent

Il me semble remarquable d'une part que les deux chercheuses, indépendamment, aient documenté la difficulté, cela pourrait signifier que c'est une difficulté très prégnante, et d'autre part qu'aucune des deux n'ait envisagé cette preuve, cela pourrait constituer un indice de la transparence de la propriété P dans l'institution de recherche. Par ailleurs, le fait que dans un cas la difficulté soit attribuée aux pratiques des enseignants, dans l'autre à l'immaturation intellectuelle des élèves, est aussi un indice de cette transparence. Il est plus facile d'attribuer une difficulté à des acteurs bien identifiés dans une situation, qu'à un savoir qui n'est pas identifié. Cet exemple illustre par ailleurs le propos de Kolmogorov, les grandeurs fournissent des opportunités pour le raisonnement mais sans une identification précise des propriétés, des failles logiques se créent. Bien que les chercheuses aient développé des ingénieries en appui sur la mesure des grandeurs, les propriétés des grandeurs ne semblent pas finement interrogées.

Cette preuve ne vit pas dans l'institution « recherche en didactique des mathématiques » en France, en tout cas, n'y vivait pas dans les années 1980-1990. Des indices suggèrent par ailleurs qu'elle ne vit pas mieux ailleurs, aujourd'hui (cf. section 4 de ce chapitre et chapitre 4).

Cette preuve fait appel aux axiomes généraux de la grandeur. Dans une partie de l'institution recherche en didactique des mathématiques, les grandeurs n'étant pas des objets théoriques mais probablement seulement empiriques (malgré un habillage théorique), leurs propriétés, subtiles, qui traduisent une idéalisation de la réalité, ne sont pas envisagées, éprouvées, utilisées pour produire des raisonnements.

Je reviendrai au chapitre 4 sur ce savoir. Disons, d'ores et déjà il semble important car il permet de donner une signification, non seulement à la quantité, mais aussi « au tiers » (section 3.2) et à ce que peut signifier « être n fois plus petit (n fois plus grand) que ». En effet, tant que n'est pas élaborée une signification de la quantité indépendamment de la configuration géométrique, cela n'a guère de sens, par exemple dans la tâche évoquée par Douady, de dire que le petit rectangle de gauche est 15 fois plus petit que la feuille. Il faut être assuré au préalable que tout partage en 15 parts égales d'une même feuille donne des parts de même taille. Cette relation même exprime une quantité. Au moins, dans l'institution d'enseignement (et de formation des maîtres du primaire) actuelle, ces savoirs sur la « quantité » me semblent largement absents et donc probablement transparents dans certaines situations car il est difficile d'imaginer qu'ils ne se manifestent pas à un moment ou un autre.

Par exemple, Butlen (2018²⁹), chercheur en didactique, cite l'exemple d'un travail avec des élèves et leur enseignante, amenés à plier en 12 une feuille A4 (3 par 4). Cependant tous les élèves n'ont pas effectué la même manipulation : certains ont plié en 4 la longueur, alors que d'autres ont plié en 4 la largeur. Un élève demande alors si c'est le même douzième dans les deux cas. Butlen explique que l'enseignante choisit de réaliser une preuve pragmatique, par découpage et recollement, et qu'elle échoue (même problème que Douady). Elle est amené à conclure que ce n'est pas le même douzième ! Butlen poursuit en indiquant que cet exemple prouve que la manipulation n'est pas toujours un moyen pertinent pour valider et indique que le raisonnement suivant aurait été adapté : c'est le même douzième parce que 12 fois un douzième c'est 1. La solution proposée par Butlen repose sur la régularité de la multiplication des nombres par un entier, propriété dont on peut se demander à quel moment elle aurait été étudiée. Ainsi, même en se situant au niveau des nombres, on peut effectuer le raisonnement suivant. Supposons que ce ne soit pas le même douzième. L'un est plus petit que l'autre, il peut être complété par un petit nombre. Douze fois le « petit » douzième donne déjà 1 (la feuille), quantité à laquelle on doit ajouter douze fois le petit nombre pour obtenir douze fois le « grand » douzième, ce qui est donc plus grand que la feuille et est impossible ! Il est possible que les élèves qui pensent a priori que c'est le même douzième ont effectivement une conception de l'aire comme quantité, ce qui leur permet d'anticiper la régularité de la division par douze (ils peuvent par exemple imaginer des compensations entre des parties de rectangles). L'expérience matérielle met alors en défaut cette conviction. La conviction me semble alors pouvoir être rétablie par l'expérience de pensée évoquée à la section 3.2, accompagnée d'un discours explicatif sur l'incertitude inhérente à la recomposition matérielle.

Même si le problème est plus difficile à imaginer concernant les longueurs car tous les segments de même longueur sont superposables, Perrin décrit la même difficulté des élèves. De fait, on peut concevoir la tâche qui consiste à déterminer si deux baguettes, qu'on ne pourrait pas juxtaposer l'une à l'autre (par exemple parce qu'indéplaçables) mais qu'on pourrait comparer chacune à un même référent (sans y laisser de marques de reports), ont la même longueur. Si par exemple chacune va exactement deux fois dans le référent, le raisonnement du 3.2 peut être adapté et développé. Une solution explicative pour traiter cette tâche est alors la suivante. On peut imaginer que l'une des baguettes, appelons la C, est plus longue que l'autre, appelons la D. Si on les juxtaposait, C dépasserait alors de D d'un petit morceau (appelons le E). En reportant deux fois D, on aurait la taille du référent (appelons le R). Et il faudrait ajouter deux fois E pour avoir deux fois C, ce qui dépasserait. Ce n'est pas possible ! Le raisonnement permet de conclure à l'égalité des longueurs, sans recomposer un objet en l'autre par aucun intermédiaire. Le fait même que le raisonnement puisse être développé montre qu'une connaissance du même ordre qu'avec les aires est en jeu avec les longueurs et confirme par ailleurs la finesse de la compréhension de la situation par Perrin. De la même façon que pour les aires, il semble impossible de donner une signification à l'expression « être deux fois plus petit », « deux fois plus court », si une telle idée de la longueur n'est pas disponible chez le sujet. Ces difficultés sont-elles identifiées dans littérature internationale ?

29 <https://www.academie-sciences.fr/fr/Seances-publiques/enseignement-mathematiques-ecole-primaire.html>

4. Raisonnement additif et raisonnement multiplicatif

Dans leur communication au congrès ICME13, intitulée « Constructing the concept of area measurement in a classroom », Rahaman et Subramaniam (2016) présentaient une situation avec des élèves indiens de 6^e et 7^e année (12-14 ans). Les élèves doivent d'abord produire des surfaces d'aire 15 unités (sur papier quadrillé). Ils doivent ensuite produire un rectangle de 6x5, puis le diviser en deux de plusieurs façons. Les chercheurs observent que la division en deux triangles par la diagonale est problématique pour plusieurs élèves et qu'un malentendu persiste jusqu'à la fin de la séance de travail. De quoi s'agit-il ?

Dans un premier temps, des élèves ne sont pas convaincus de la superposition des deux triangles. L'enseignant apporte une aide, par découpage et pivotement du triangle, pour *faire voir* la congruence des deux triangles. Ces élèves cherchent alors 15 unités dans chaque triangle mais ne les voient pas. Au bout d'un moment, ils remarquent que les unités sur la diagonale sont coupées en deux et que les morceaux permettent de recomposer des unités entières. Les chercheurs repèrent, dans les discussions des élèves et dans le discours du professeur deux argumentations différentes qui se juxtaposent sans se rencontrer.

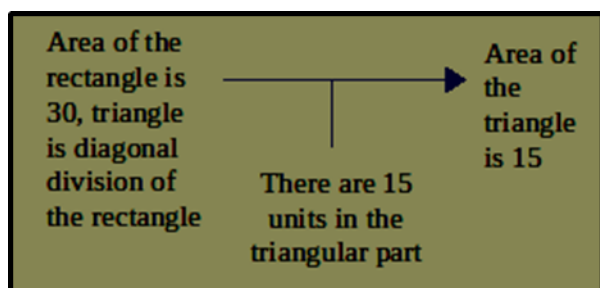


Figure 2: Student's argument structure

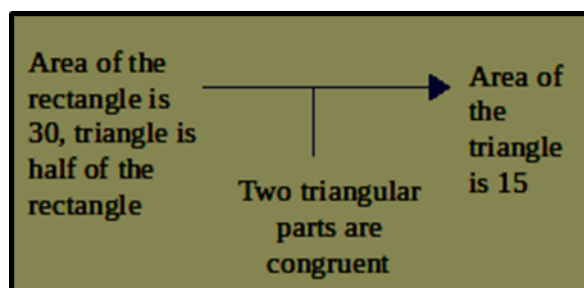


Figure 3: Teacher's argument structure

Figure 13. – Deux argumentations qui se juxtaposent dans la classe (Rahaman & Subramaniam, 2016, p. 4)

Les chercheurs écrivent alors dans la discussion :

Even though the two triangular halves were spatially or geometrically equivalent, students' assurance came from the numerical value of 15 units. This indicates a disconnect between students' spatial and numerical understanding of area-measurement. This also supports Sarama & Clements' (2009) claim that the problems in the learning of area-measurement could be due to difficulty in connecting the spatial and numerical aspects. The basis of students' reasoning was more aligned to the additive thinking of counting units rather than the multiplicative thinking of looking at half units.

Battista (2007) has emphasized that students must be able to extend their reasoning to different forms of units. (ibid., p. 7)

Ces éléments amènent plusieurs commentaires. Tout d'abord, il s'agit encore une fois, fondamentalement, de la même difficulté que celle identifiée par Perrin. Ni les professeurs-chercheurs engagés dans l'expérimentation, ni les auteurs auxquels se réfèrent ces chercheurs n'évoquent un raisonnement particulier qui permette de dépasser la difficulté identifiée. Cette difficulté est rattachée à la différence entre raisonnement additif et raisonnement multiplicatif, qui est un enjeu important de l'enseignement de l'arithmétique au niveau international. La difficulté est localisée, au plan conceptuel, au niveau de l'aire. Autrement dit, elle est considérée comme

une difficulté spécifique de la grandeur aire, alors que nous avons montré (en appui sur les observations de Perrin) qu'elle semble en fait beaucoup plus générale et liée à la notion de quantité. Tous ces éléments confirment la transparence de la propriété P dans les savoirs sur les grandeurs, au plan international, sauf peut-être chez les chercheurs qui travaillent dans la perspective de Davydov. Nous donnerons par ailleurs un éclairage complémentaire sur cette difficulté dans le chapitre 4.

5. Conclusions

Cette section s'est attachée à l'étude d'une propriété spécifique des grandeurs, la propriété P (quels que soient a et b deux grandeurs, $a > b$ si et seulement si il existe une grandeur c , telle que $a = b + c$). Cette propriété intervient dans l'arithmétique. Bien que pouvant paraître très élémentaire, cette propriété qui articule addition et ordre, semble se manifester dans une pluralité de contextes :

- au niveau de la définition des grandeurs, où elle est présente dans les théories des grandeurs qui fondent le nombre (ou permettent son étude). Cette propriété formelle est une idéalisation de la réalité pour le lien génétique entre addition et ordre pour les grandeurs : elle s'interprète simplement, lorsqu'il y a inclusion d'objets,
- au niveau de sa prise en charge dans certaines ingénieries qui prennent en compte les grandeurs, où elle est considérée comme importante, qu'il s'agisse de l'ingénierie de Davydov ou de celle de Cortina et al. (plus indirectement). Elle est seulement explicite dans l'ingénierie de Davydov. Par ailleurs, Douady (1981) signale incidemment que l'enseignante souhaite concentrer l'attention sur la mesure de l'écart. Le savoir pourrait donc n'avoir été transparent (pour la longueur) que pour la chercheuse et non pour l'enseignante. Lorsque les élèves sont mis en situation de traiter des tâches qui mettent en jeu cette propriété, des indices de son apprentissage ou de son utilisation dans des raisonnements semblent exister,
- au niveau de son rôle dans des raisonnements élémentaires qui conduisent à la conceptualisation des nombres notamment rationnels. Elle apparaît alors comme un savoir transparent dans une grande partie de la littérature de recherche en didactique des mathématiques. Les difficultés des élèves sont alors attribuées selon les cas à l'immaturation des élèves, à des défauts de pratiques enseignantes, à une difficulté spécifique de la grandeur aire. Son absence ne permet pas de développer un raisonnement élémentaire complet pour la comparaison des quantités d'une grandeur, et donc constitue possiblement un obstacle pour la conceptualisation des fractions,
- au niveau de la conceptualisation même de la notion de quantité, associée à un raisonnement par l'absurde, elle permet de concevoir l'égalité de deux grandeurs, sans recomposer l'une en l'autre, mais en imaginant que l'une est plus grande que l'autre. Ce dernier point pourrait être en effet crucial. Par exemple, dans les « solutions au problème de la décontextualisation brutale qu'elle envisage, Perrin indique « si le contexte est matériel, pouvoir prévoir ou conclure sans recourir au matériel, en imaginant seulement la manipulation qui est intériorisée ». Mes propres analyses suggèrent qu'il ne s'agirait pas tant d'imaginer une manipulation qu'on aurait déjà faite, mais d'imaginer qu'un objet est plus grand que l'autre et d'en tirer des conséquences, théoriques. Cette dimension pourrait être un élément

constitutif de la différence entre raisonnement additif et raisonnement multiplicatif. Son absence, et surtout sa transparence, dans les curricula pourrait alors contribuer à expliquer un ensemble de difficultés d'élèves repérées par la littérature de recherche en didactique.

Pour finir, l'absence de cette propriété suggère aussi que, dans l'enseignement ordinaire français (et sans doute ailleurs), les grandeurs ne sont pas pensées pour constituer un modèle des nombres positifs. Je vois dans cette absence une perte d'opportunités pour les élèves de mieux comprendre cette propriété fondamentale des nombres positifs, $a > b$ ssi il existe $c > 0$, tel que $a = b + c$, qui transforme une inégalité en une égalité.

Chapitre 4. Les unités, les raisonnements multiplicatifs

Parmi les questions restées en suspens dans ma thèse, on trouve celle de l'articulation entre mes résultats sur la numération et ceux sur les grandeurs. Y a-t-il une relation de nature épistémologique entre la modification du savoir savant transposé pour l'arithmétique -la disparition des grandeurs -et la disparition des « unités de la numération » ? Une autre façon de formuler la question est alors : est-ce que les grandeurs sont au socle de la « théorie classique de la numération » ?³⁰

Mes travaux ne s'inscrivent pas dans le champ académique de l'histoire des mathématiques et cette question n'a pas seulement une portée historique. Elle est importante didactiquement si l'on cherche à disposer d'un texte mathématique de référence pour le savoir à enseigner qui prendrait les grandeurs comme source, pour être au plus près de raisonnements en appui sur la réalité. Par exemple, les « unités de la numération » quand elles ont une valence sémiotique *unité* fournissent des technologies efficaces notamment pour le dénombrement et le calcul. Cette valence sémiotique et, conséquemment, ces technologies ne sont plus disponibles aujourd'hui (chapitre 2)³¹. Par ailleurs, la notion d'unité apparaît dans d'autres contextes que celui de la numération dans les autres chapitres. Elle apparaît au chapitre 1, notamment dans mes travaux sur la proportionnalité, pour décrire différents degrés de conceptualisation de la proportionnalité. Elle revient dans le chapitre 3, avec l'étude de raisonnements produits dans l'ingénierie didactique de Cortina et coll. et l'étude des travaux de Rahaman et Subramaniam qui interrogent des différences entre raisonnement additif et raisonnement multiplicatif. Ma question intègre alors plus largement la relation, génétique, éventuelle, entre les grandeurs et les unités. Cette notion *d'unité* est au cœur du présent chapitre qui revisite par ailleurs la notion de *quantité* dont une théorisation a été proposée au chapitre 3.

L'étude de ma question m'a ainsi amenée à enquêter dans plusieurs directions et à repositionner la notion d'unité dans une pluralité de contextes. Ce dernier chapitre s'appuie largement sur les travaux réalisés pour la 20^e école d'été de didactique des mathématiques, et dans la suite de cette conférence. Il m'avait été demandé de travailler sur les *raisons d'être des grandeurs*, question que j'ai située dans le domaine mathématique de l'arithmétique scolaire. Cette demande a résonné avec les deux questions que j'étais en train d'explorer à ce moment : le lien entre *les unités de la numération* et les unités en psychologie cognitive (unités que j'avais repérées dans un début de travail bibliographique), un travail historique sur les évolutions de l'enseignement de la proportionnalité et le rôle des grandeurs et des unités dans ces évolutions (évoqué au chapitre 1). Elle s'est par ailleurs contextualisée dans l'étude de moments de classe sur l'enseignement et l'apprentissage du nombre à l'école primaire que nous cherchions à élucider avec Coulange, Train et Rinaldi.³²

30 L'expression « théorie classique de la numération » mériterait d'être questionnée, essentiellement le mot théorie. Je l'ai utilisé pendant plusieurs années et il a fait avancer le travail, même s'il apparaîtra à la fin de ce chapitre ou de cette note que la *théorie* de la numération ne prend pleinement son sens que dans le cadre plus vaste de la théorie de l'arithmétique.

31 Le chapitre 2 a d'ailleurs renvoyé au chapitre 4 pour des précisions sur la nature des unités de la numération quand elles ont la valence sémiotique unités.

32 Ces travaux ont été réalisés, avec Coulange et Train et avec Rinaldi dans un moindre mesure. Il sont aussi alimentés par mes travaux avec Visnovska (chapitre 1) et par des travaux en cours avec Batteau.

Ce chapitre est donc structuré par ces trois pôles de questionnement qui se déclinent d'abord en trois études préliminaires : les unités dans la littérature internationale de recherche en didactique, avec deux facettes psychologie cognitive, 1 (partie 1), des moments de classe qui interrogent (partie 2), l'analyse d'un texte mathématique historique (partie 3). De ce dernier pôle émerge deux objets mathématiques : une notion mathématique, « les unités relatives », et une propriété de la mesure des grandeurs associée à ces unités relatives, la « propriété M ». La suite du chapitre vise alors à situer ces résultats dans un contexte didactique élargi : commencer à explorer la portée des *unités relatives* en proposant une relecture de quelques travaux de didactique (partie 5), réinterpréter les éléments précédents en termes de raisons d'être des grandeurs en arithmétique (partie 4), interroger la présence de ces objets mathématiques dans des contextes d'enseignement, des manifestations de leur éventuelle transparence (partie 6). Le chapitre se termine sur une section conclusive portant d'abord sur la transparence des savoirs, ensuite sur une amorce d'articulation des résultats du chapitre avec les niveaux de conceptualisation de Thompson (e.g., Thompson et coll., 2014).

L'expression *raisonnements multiplicatifs*, au pluriel, apparaît dans le titre de cette note et dans celui de ce chapitre, elle sera clarifiée au fil du chapitre.

1. La notion d'unité dans la littérature en mathematics education

Cette section vise à présenter la notion d'unité dans les travaux de recherche sur l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique scolaire.

1.1. Un ancrage ancien dans le champ de la psychologie cognitive

La notion d'unité est largement présente dans l'abondante littérature internationale dans le domaine du raisonnement multiplicatif. L'intitulé même du domaine, le *raisonnement multiplicatif*, ancre les travaux, au moins à leur origine, dans le champ de la psychologie cognitive. Sans être fondateur, *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* est un ouvrage marquant du champ, publié en 1994. Il a été dirigé par Harel et Confrey. Le champ s'est constitué en « Champ Conceptuel Multiplicatif » (Vergnaud, 1983) en repérant des problématiques et concepts communs dans l'apprentissage et pour la maîtrise de plusieurs notions parmi lesquelles, multiplication et division, fonctions linéaires et bilinéaires, proportionnalité, taux, fractions, nombres rationnels, analyse dimensionnelle (ibid.). Les éditeurs écrivent dans l'introduction : « The concept of a unit, an entity that is treated as a whole, is key throughout the book. » (Confrey & Harel, 1994, p. xvii). Cette « définition » de l'unité renvoie à un objet mental et non à un objet mathématique³³. La deuxième partie de l'ouvrage est alors intitulée « The role of the unit ». L'arrière-plan mathématique des travaux est un ancrage explicite dans la théorie des ensembles, voire qui constitue le point de départ de la réflexion. Les mathématiques à enseigner sont une transposition de la théorie des ensembles. Par exemple, les auteurs citent Dienes et Golding (1966) qui distinguent raisonnement multiplicatif et additif : « Every number refers to sets in addition, whereas in multiplication some refer to sets of sets and others refer to sets » (cité par Confrey & Harel, 1994, p. xvii.). Une conséquence est alors que « To create an understanding of a set of sets, one must first be able to treat a set, a collection, as a

33 Seuls deux chapitres de l'ouvrage, celui de Greer et celui de Vergnaud (sur le champ conceptuel multiplicatif) ne font pas référence à la notion d'unité comme objet psychologique.

unit » (Confrey & Harel, 1994, p. xvii). Les chefs de file des études évoquées dans la suite de cette section, Steffe et Thompson, ont des chapitres importants dans cet ouvrage.

Les cadres conceptuels dans lesquels ces travaux se développent sont néanmoins pluriels. Depuis le début des années 1980, Steffe et ses collègues étudient le développement des capacités des élèves à concevoir divers types d'unités (des objets mentaux qui correspondent à des schèmes) et notamment des « composite units » dans la suite des nombres entiers (i.e., la comptine numérique) lorsqu'ils résolvent des problèmes (dans le cadre de teaching experiment, études cliniques réalisées en étroite interaction avec un petit nombre d'élèves pour observer le développement des schèmes). Ce rôle majeur attribué à la suite numérique témoigne du cadre mathématique surplombant (i.e., la théorie des ensembles). Ils identifient des schèmes successifs, de plus en plus sophistiqués, que les élèves déploient pour traiter la chaîne numérique. Ulrich (2015, 2016) a publié récemment une synthèse des travaux de ce champ « Stages in constructing and coordinating units additively and multiplicatively ». Elle y montre que les progrès semblent se déployer relativement simultanément dans 1) la conceptualisation d'unités (objets mentaux consistant en des schèmes) de plus en plus sophistiqués, 2) des degrés croissants de maîtrise ou des usages de plus en plus complexes de la suite numérique des entiers, 3) l'évolution des stratégies multiplicatives incluant les fractions. Elle indique par exemple la nécessité de voir 6 comme une « iterable composite unit » pour déterminer le rapport de 6 à 24 comme étant un quart et l'insuffisance du schème « iterable unit » où seul 1 constitue une unité et qui permet seulement de voir ce rapport comme étant $6/24$.

Thompson est un ancien étudiant de Steffe. Il inscrit également ses travaux dans le domaine de la psychologie cognitive. Depuis la fin des années 1980, il travaille sur l'apprentissage des concepts quantitatifs, initialement pour fonder l'apprentissage de l'arithmétique et de l'algèbre élémentaire. Il donne à ses travaux un arrière-plan lié aux quantités continues. Sa perspective sur les grandeurs est concrète « A quantity is a measurable quality of something » (Thompson, 1988, p.164) même si elle a évolué. Son point de vue est aujourd'hui nettement cognitif :

The *idea* of magnitude, at all levels, is grounded in the *idea* of a quantity's size. A quantity, however, is *not* something in the world. It is a *person's conception* of an object and an attribute of it, and a means by which to measure that attribute. Anyone's understanding of a quantity's size will be colored by *his or her conception of the quantity* being considered and by his or her understanding of how it might be measured » (Thompson et al., 2014, p. 2, je souligne).

Thompson et collègues (2014) proposent cinq types de grandeurs pour une quantité (autrement dit de façons d'envisager la taille de la quantité) qui correspondent à des *niveaux de signification* (« levels of meaning », p. 2) croissants et qui correspondent à presque autant de points de vue sur les unités -presque autant car le premier type n'inclut pas la notion d'unité-. Il n'y a pas de tentative ni même d'intention de rapprocher ces conceptions des grandeurs ou des quantités d'une ou plusieurs définitions, axiomes ou propriétés mathématiques³⁴. Les auteurs décrivent longuement les différents types que je résume comme suit : 1) la capacité à comparer -ordonner- deux quantités de même nature (Awareness of size), 2) la mesure d'une quantité est associée à « un nombre d'unités », sans sensibilité à la taille de l'unité ou à la nécessité que ces unités soient

34 Les *idées* de Thompson et les *idées* de Thom (chapitre 1) ne sont pas de la même nature, mais les deux chercheurs emploient le même mot. Les premières sont des points de vue sur des objets concrets alors que les secondes sont des *idées* manipulées par la pensée, qui simulent la réalité concrète.

toutes de même taille (Measure Magnitude), 3) étant données deux quantités, la capacité à identifier une unité commune pour les comparer et à exprimer cette comparaison en utilisant un ou plusieurs nombres ($A=6/7B$ ou $7A=6B$) (Steffe Magnitude), 4) la capacité à articuler plusieurs comparaisons de deux quantités : $7A=6B$ mais si on prend une unité C 3 fois plus petite que B, le nombre d'unités C dans A sera 3 fois plus grand, qui conduit à $21A=18B$ (Wildi Magnitude), 5) la capacité à concevoir le rapport entre deux quantités d'espèces différentes (avec des unités quotient) comme un invariant indépendant des unités (comprendre que $3 \text{ km} / 2\text{h} = 3/2 \text{ km/h} = 100 \text{ m} / 4 \text{ min}$ et aussi $2\text{h} \times 25\text{m/min} = 3 \text{ km}$ (Relative magnitudes). Ces chercheurs voient donc ces niveaux de significations successifs des grandeurs comme des progrès dans la compréhension mais ne semblent pas les rattacher à des propriétés mathématiques des grandeurs (qui ne sont pas des objets mathématisés). Bien que, contrairement à Steffe et coll., ils s'inscrivent dans le cadre de la mesure des grandeurs, ils articulent le niveau de signification Steffe magnitude avec le schème « unit of units » de Steffe.

Visnovska et Cortina (Cortina, Visnovska & Zuniga, 2014) inscrivent leurs travaux (évoqués au chapitre 3, section 2) dans une perspective de conception de situations pour l'enseignement. Leur ingénierie pour le début de l'apprentissage des rationnels relève de la problématique de la mesure des grandeurs continues (la longueur, exclusivement). Même s'ils se rattachent au cadre de la *Realistic mathematics education* et qu'ils réfèrent largement à Freudenthal, leur ancrage mathématique reste tacitement ensembliste, sans doute évanescent. Leur projet d'enseignement vise à développer une conception de la grandeur qui renvoie à l'idée de tailles relatives, correspondant au niveau Steffe Magnitude de Thompson et coll..

Dans tous ces travaux sur l'apprentissage de l'arithmétique, si la notion d'unité est bien présente, et qu'elle est considérée comme fondamentale, elle est vue avant tout comme une notion relevant de la psychologie cognitive : il s'agit de traiter une entité comme un tout, la nature et la conceptualisation de ce tout étant plus ou moins sophistiquée et évoluant avec le développement des sujets. Chez certains auteurs (Thompson, Cortina et coll.), elle est liée aux quantités continues et à leur mesure, mais les grandeurs comme les unités sont définies par la perception qu'en ont les sujets. Elles ne sont pas considérées comme des objets mathématiques qui auraient des propriétés mathématiques.

À ma connaissance, ces travaux de psychologie cognitive n'ont pas incité leurs auteurs à faire « un pas de côté » par rapport à l'arrière plan mathématique ensembliste, et à envisager la possibilité d'autres arrière-plans en termes de savoirs mathématiques.

Ainsi, mes propres travaux présentés dans cette note pourraient paraître en tension avec les travaux présentés ci-avant dans cette section, mon projet consistant justement à envisager la possibilité d'inscrire les grandeurs et les unités dans les mathématiques pour penser l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique. Par ailleurs, j'ai rappelé en introduction de la note un aspect important de la *didactique à la française* qui se définit comme une recherche fondamentale et non comme un domaine d'application de la psychologie. Son but est en effet de comprendre comment les situations fonctionnent et non de mettre au point des moyens pour atteindre un but pratique (e.g., Margolinas & Drijvers, 2015). Mon projet s'inscrit bien dans cette perspective. Pourtant, le point de vue que je retiens sur les mathématiques et leur rapport au réel (chapitre 1) et en particulier sur l'arithmétique, dont Kolmogorov (1938) considère qu'il est

crucial de considérer les origines, i.e., les grandeurs (selon moi), pour l'enseignement et l'apprentissage, m'amène alors à prendre en compte les travaux de psychologie cognitive dont je fais l'hypothèse, pour certains d'entre eux au moins, qu'ils peuvent contribuer à préciser des éléments d'un rapport originel aux quantités et aux unités.

1.2. Les unités vues comme des objets mathématiques

D'autres travaux, plus dispersés proposent un rapport différent aux unités. Les unités y sont vues, d'emblée, comme des objets mathématiques. Polotskaia inscrit ses travaux dans la perspective de « Davydov's Theory of Developmental Instruction » (Polotskaia & Savard, 2021, p. 447). Même si, comme nous l'avons déjà vu, l'arrière-plan mathématique de Davydov est probablement la théorie des grandeurs de Kolmogorov, la mathématisation des grandeurs ne semble pas questionnée dans les travaux de Polotskaia. Les grandeurs sont rattachées implicitement aux grandeurs concrètes, un peu comme chez Thompson mais sans distinction de leur qualité eu égard aux conceptualisations. Dans une note de bas de page, les auteures écrivent : « Davydov's unit of measurement refers to any unit (such as 2 apples or 1/2 an apple), not only standardized units such as kilometer or hour » (p.452). Et elles précisent : « He [Davydov] argued that the concept of number emerges from the multiplicative comparison of two magnitudes (or unidentified quantities), one playing the role of unit of measurement and the other being measured. » (p. 449) Le nombre est donc conçu comme rapport de grandeurs et intervient dans la conceptualisation du mesurage. La préoccupation de Polotskaia est celle de la résolution des problèmes arithmétiques. Elle considère que la modélisation des relations entre les quantités, est un préliminaire à la modélisation par les opérations arithmétiques : « We take Davydov's position here: multiplication and division can be meaningfully associated with a situation only when it is already understood as a multiplicative relationship between quantities » (p. 449) L'arrière-plan théorique de ses travaux est le « relational thinking paradigm » qu'elle oppose à l' « operational thinking paradigm ». Le premier paradigme traduit une centration sur les relations entre les quantités, plus précisément celui de la relation de mesure, alors que le second traduit une centration sur l'opération du problème, paradigme dont elle indique qu'il est dominant dans l'enseignement de la résolution de problèmes.

La chercheuse chinoise Liping Ma, qui a comparé les connaissances des enseignants chinois et américains en arithmétique (Ma, 1999), indique que l'enseignement de l'arithmétique scolaire en Chine est sous-tendu par une théorie mathématique fondée sur la notion d'unité (Ma, 2013). Dans son texte de 2018 (Ma & Kessel, 2018) où elle présente cette théorie mathématique (qu'elle a *reconstruite* à partir de manuels scolaires, américains du 19^e siècle et chinois du 20^e siècle) uniquement pour les nombres entiers, elle indique que la notion d'unité est abstraite de la notion de « un » ou « une chose » qu'elle considère comme une notion primitive. L'unité est la première définition de la théorie. Les autres notions mathématiques, à savoir nombre, addition, soustraction, multiplication et division sont tirées de cette notion d'unité.

Definition 1 A single thing, or one, is called a *unit* or *unit one*.

A group of things or a group of units, if considered as a single thing or one, is also called a *unit*, a *unit one* or a *one* (Fig. 18.1).

One or one thing is a primitive conception that we are born with. The definition of unit is abstracted from this conception. This is the starting point of the definition system.

In this definition, we see two types of unit. The first type we call ‘one-as-one unit’ and the second ‘many-as-one unit’. (...)

Definition 2 A number is a unit (one) or a collection of units (ones). (Ma & Kessel, 2018, p. 442-443)

Chez Ma, l’unité est située au socle d’une théorie mathématique pour l’arithmétique scolaire. Ma estime que cette théorie s’est formalisée au cours du 19^e siècle. L’unité est un concept mathématique et dans la construction proposée par Ma, il y a plusieurs types d’unités : one-as-one unit et many-as-one unit. Cette théorie n’est pas reliée de façon explicite aux grandeurs.

Ces deux auteures présentent chacune une définition du nombre en relation avec l’unité (mais différemment) qui n’est pas ensembliste mais elles ne questionnent pas pour autant le paradigme ensembliste alors que Radford (cf. Introduction de la note), par exemple, interroge les travaux de Davydov au regard du paradigme ensembliste.

Ces travaux sont, eux-aussi, susceptible d’alimenter la réflexion sur un arrière-plan mathématique pour le savoir à enseigner, susceptible de comporter des unités.

2. Trois moments de classe qui interrogent

En contrepoint de ces occurrences de la notion d’unité dans la littérature, je présente maintenant trois moments de classe dans lesquels des élèves et leurs enseignantes apprennent le nombre, à l’école.

2.1. Comparer 3/7 et 9/21

L’extrait qui suit est tiré de (Chambris, Coulange, Rinaldi & Train, 2021, p. 385). Il s’appuie sur des travaux réalisés dans le cadre d’un LéA³⁵, une enseignante collaboratrice, des élèves, dans une école située dans un quartier prioritaire. Confrontés à la comparaison de 9/21 et 3/7, après une phase de recherche individuelle puis en binôme, des élèves de CM2 s’engagent dans un échange conduit par l’enseignante de la classe :

P : si je réécris... Je prends 3 septièmes, est-ce que tout le monde est d’accord ?
P : maintenant, elle nous dit, c’est trois fois plus petits les 21^{es}.
P : elle me dit, c’est trois fois plus petit... Tout le monde les yeux au tableau. Tout le monde les yeux au tableau.
P : je découpe trois fois plus petit pour faire des 21^{es}.
P : je redécoupe tout en trois.
P : un, deux, trois... vingt et un (en énumérant chacune des 21 parts obtenues).
P : ça marche. Tout le monde est d’accord ?
NOA : oui, ça marche.
P : est-ce que j’ai neuf 21^{es} ?
P : un, deux, trois... neuf (en énumérant chacune des 9 parts).
NOA : ah, elle est bien ta technique...
P : j’ai pris trois fois plus de parts, trois fois plus petites, ça fait exactement...
E : la même chose.
NOA : oui, mais enfin, pour moi, ce n’est pas pareil.



P : je découpe trois fois plus petit pour faire des 21^{es}.



P : je redécoupe tout en trois.

³⁵<http://ife.ens-lyon.fr/lea/le-reseau/les-differents-lea/ecole-carle-vernet>

Cet extrait fait suite à la production du raisonnement suivant par une élève CLEM : « Trois fois [trois fois sept ou sept fois trois - indécidable], donc c'est trois fois plus petit et là on met trois fois plus. C'est pareil ». Dans l'extrait rapporté, l'enseignante transforme le raisonnement produit par CLEM impliquant les tailles relatives des septièmes et des vingt-et-unièmes (les vingt-et-unièmes 3 fois plus petits que les septièmes, donc il en faut 3 fois plus) en un raisonnement où des objets, des parts de disques, sont partagés en trois, et où il s'agit de compter ces parts (qui sont d'autres objets). Cet épisode intervient après déjà deux échecs de l'enseignante pour faire diffuser le raisonnement de CLEM.

2.2. Écrire le nombre représenté par des collections d'objets

Dans un autre extrait d'une autre classe de CE1-CE2 (tiré du même texte, p.379-380), aux prises avec la numération décimale, avec une autre enseignante, on observe la scène suivante.

Gal : (*Gal compte les boîtes de cent.*) là y'en a mille.

Ran : on n'est pas dans les milliers on est dans les centaines.

Gal : mille huit cents.

Ran : on est dans les centaines.

Gal : je sais mais des centaines y'en a dans les milliers ++ dix centaines ça fait un millier.

Ran : là t'es dans les boîtes de centaines + t'es pas dans les milliers.

Gal : regarde + (*Gal pointe la première boîte.*)

Ran (*et Gal énumère les boîtes.*) : 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1 000 + 1 001 + mille.

Gal : mille cent.

E : ben oui.

Ran : mais non + on n'est pas dans les milliers + on n'est pas + dans les cents.

Gal : on peut quand même mettre des centaines +.

Ran redit donc que « on n'est pas dans les milliers » mais « dans les cents ». Un élève du groupe fait alors appel à l'enseignante, qui arrive (tableau 2) :

Gal : elle disait que dans les milliers on pouvait pas mettre de centaines.

P : tu as combien de centaines [...]

Ran : 18 ++ [...]

P : bon + tu as 18 + centaines ++ est-ce que tu as u' + des dizaines + pardon.

Ran : non.

P : est-ce que tu as des unités.

Ran : oui.

P : combien.

Ran : 2.

P : est-ce que tu as des milliers.

Ran : non.

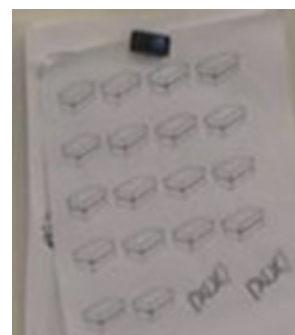
E : si.

P : quand on fait des additions avec le système d'échange et de retenues + est-ce qu'on a le droit d'avoir (*P souligne 18*).

Ran : non + xx droit d'avoir + un chez les milliers.

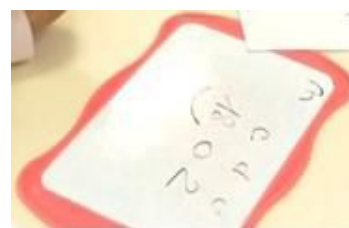
P : dix centaines c'est pareil que ++ dix unités une dizaine ++ dix dizaines une centaine + dix centaines.

Ran : un millier (*P écrit 1 dans colonne des milliers et barre le 1 des centaines et s'en va*).



Le document support de l'activité des élèves.

P complète l'ardoise de Ran au fur et à mesure.



Dans la tâche proposée aux élèves, les nombres *sont représentés par* du matériel (dessiné) et les élèves doivent déterminer le nombre *représenté* sur l'image par 18 boîtes et 2 bonbons. Même s'ils sont censés savoir qu'il y a dix bonbons dans un sachet, dix sachets dans une boîte, dix boîtes dans une caisse, il ne leur est pas demandé de déterminer la quantité totale de bonbons. S'il est possible que Gal envisage la centaine comme une quantité (de bonbons) « dix centaines, ça fait un millier », dans le discours de Ran en revanche, les centaines sont des boîtes qui sont comptées et dont il n'est pas envisageable qu'elles soient comptabilisées dans la colonne qui indique des caisses. Le discours du professeur soutient cette perspective. Il ne dit jamais que 10 centaines c'est un millier mais que « dix centaines, *c'est pareil que* un millier ». Il propose une technique qui évoque une manipulation, un échange, pour, en quelque sorte, faire disparaître une partie des boîtes (appelées centaines) et être ainsi en mesure de respecter le *droit* dans le remplissage du tableau de numération, écrire un seul chiffre par colonne, et indiquer ce qu'il en résulte dans la case qui comptabilise les caisses (appelées milliers).

Pourtant, un raisonnement alternatif serait : dans 18 boîtes il y a 18 centaines de bonbons ; 10 centaines, c'est aussi un millier. En tout, il y a donc, 1 millier, 8 centaines et 2 unités (qui sont des bonbons), nombre qui s'écrit « 1 » « 8 » « 0 » « 2 ». Ce raisonnement n'est jamais produit publiquement dans la classe par un élève ou par le professeur.

2.3. Utiliser un tableau mixte de conversion d'unités métriques et de numération

Dans le même texte (voir aussi Chambris, Coulange & Train, 2021) pour une étude plus approfondie), nous observons la mise en œuvre d'un projet d'enseignement qui vise à articuler système métrique et numération, via l'introduction d'un tableau mixte de numération et de conversion. Le fonctionnement de cet objet repose sur les tailles relatives entre les unités successives qui sont identiques dans les deux systèmes : par exemple, le dixième comme dix fois plus petit que l'unité, le millimètre comme dix fois plus petit que le centimètre, le centimètre comme dix fois plus petit que le décimètre et aussi, le millimètre comme cent fois plus petit que le décimètre. Par ailleurs, une première interprétation de l'écriture décimale a été produite collectivement 18,2 cm comme 1 décimètre (1 dizaine de cm), 8 cm, 2 mm, millimètres qui sont aussi, chacun, dix fois plus petit que 1 cm, donc des dixièmes. Plusieurs tâches sont proposées aux élèves, par exemple Tracer un segment de 5,6 cm, de 1,2 dm et 2,35 dm.

La mise en œuvre du projet témoigne d'un certain nombre de difficultés pour parties étudiées dans (Chambris, Coulange & Train, 2021). En particulier, la mobilisation des relations multiplicatives, par les élèves, apparaît comme une pierre d'achoppement du projet. Il semble que, lorsque le professeur parvient à faire avancer son projet d'enseignement, la difficulté liée à ces relations est contournée par l'introduction d'un discours différent en appui sur « dix dans un » ou sur un « partage en dix », éventuellement matérialisé par un dessin, comme le montre l'extrait suivant.

P : Menahem nous dit + ça va être une fraction puisque c'est plus petit que l'unité + (P écrit « fractions » au dessus de la partie droite du tableau de numération) + ça va être des fractions parce que c'est plus petit que l'unité + (P écrit « plus petit que l'unité ») + mais c'est quelles fractions alors du coup la celle-ci (P montre le mot mm en haut de colonne) + ce sont des quoi ? ++ 2 millimètres ce sont des quoi par rapport au centimètre

E : 2 millimètres ?

E : puisque là y'a

P : un millimètre + c'est ++ un centimètre partagé en 2 ?
 E : non
 E : non
 Lucas : ben c'est un sur +
 P : ben+ le millimètre + c'est quelle fraction par rapport au centimètre
 E : xxx
 P : oui mais + combien de fois plus petit
 E : ben c'est dix fois
 E : mille fois
 E : dix fois
 E : cinq
 P : c'est dix' + ben + prenez votre + y'a combien de millimètres dans un centimètre
 E : c'est dix fois plus petit
 E : parce que déjà 1 milli'
 P (écrit au tableau) : un centimètre
 E : c'est égal à 10 millimètres
 P : y'en a dix dedans ?



P : y'en a dix dedans ?

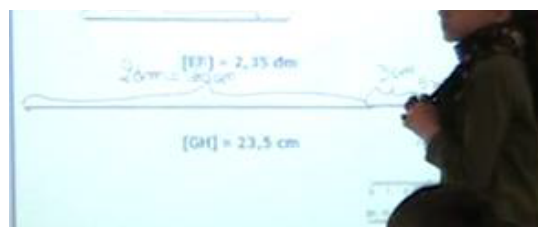
La difficulté semble devenir incontournable et indépassable dans l'extrait suivant où il s'agit de composer les relations multiplicatives, par exemple pour interpréter 2,35 dm.

Episode 2: Draw a 2,35 dm long line (session 2)

In this task, managing with the digit “5” is more complex than with “3”. Indeed, here, “5” is simultaneously the digit in the “hundredths place” and the hundredth of the reference unit (here dm). It also refers to a metric unit (mm) which is ten times as less than the next larger metric unit (cm) – thanks to the systematic multiplicative relations between metric units (one dm is ten times as less than a m, one cm is ten times as less than a dm, etc.).

GAL va au tableau

P : est-ce que tu peux le prouver dans le tableau ? Deux virgule trente cinq décimètres.
 P : l'unité était le quoi ?
 GAL: le décimètre.
 P : l'unité décimètre, on va plutôt l'écrire ci peut-être.
 Vas-y.



GAL comes to the white board

GAL renseigne le tableau de numération

P : est-ce que c'est bon ? Est-ce que si mon unité est le décimètre, le dixième c'est bien le ?

P intervient au tableau

E : le centimètre [...]
 P : et cent fois plus petit que le décimètre, c'est le ?
 E : millimètres.
 P : donc on a bien trois dixièmes, ça fait trois centimètres et cinq millièmes, cinq millimètres... cinq centièmes pardon, cinq millimètres. Excusez-moi.
 E : deux décimètres, trois centimètres et cinq millimètres.
 P : pourquoi n'es-tu toujours pas d'accord ?
 P : le dixième là, c'était bien des centimètres ? Le dixième là, c'est bien des ?
 E : des millimètres



GAL writes in the numeration table

P : voilà. Regarde là, ça c'est un centième, ce n'est pas un dixième, c'est encore plus petit, encore dix fois plus petit. Encore dix fois plus petit que le centimètre, ça va être des....



P intervenes on the board

The multiplicative relation between dm and mm should be built on the two former relations. This requires composing the two multiplicative relations: „ten times smaller than ten times smaller than decimeters are millimeters“. Bridging these kinds of relations in multiplicative terms and in terms of fractions appears to be difficult to obtain from students; this might indicate they have never met this task before. (Chambris, Coulange & Train, 2021, communication en anglais pour ICME 20202/2021, sans acte – la note de synthèse revient aux transcriptions originales en français).

Dans chacun de ces extraits des problèmes de tailles relatives entre des quantités se posent : entre des septièmes et vingt-et-unièmes, entre des centaines et milliers de bonbons, entre des unités, dixièmes et centièmes, entre des décimètres, centimètres et millimètres. Les espèces de grandeurs impliquées dans ces relations sont variées : le nombre, les quantités de bonbons, encore le nombre et la longueur. Les septièmes, centaines de bonbons, décimètres et autres désignent implicitement (ou explicitement) des unités pour ces espèces de grandeurs. Ces relations peuvent s'exprimer notamment en disant par exemple qu'un septième c'est trois fois plus grand qu'un vingt-et-unième ou encore qu'un millimètre c'est dix fois plus petit qu'un centimètre. Et dans ces trois épisodes, la manipulation de ces relations fournit des solutions aux tâches proposées. Pour autant, dans chacun des exemples, ce ne sont pas ces solutions qui émergent, soit qu'elles ne sont même pas envisagées, soit qu'elles ne parviennent pas à diffuser car elles semblent hors de portée des élèves. Les solutions qui sont finalement retenues impliquent des objets groupés : 7 dans un, 21 dans un, 10 dans un. Ce type de solution semble par ailleurs difficilement permettre de traiter la relation imbriquée du millimètre comme dixième du dixième du décimètre. Ainsi, dans les premiers trois extraits, des groupes d'objets - permettant un retour à une certaine matérialité- sont introduits dans les situations d'enseignement et d'apprentissage pour traiter les tâches impliquant les nombres (et ça ne semble pas possible dans le dernier extrait) mais la question des tailles relatives des nombres, des unités métriques ou des collections (de bonbons) ne s'exprime pas ou si elle s'exprime soit semble hors de portée de la plupart des élèves, soit n'est pas abordée par l'enseignante.

Comment ce phénomène qui semble récurrent peut-il s'expliquer ? Dans le chapitre 2, nous avons évoqué des modifications liées à l'enseignement de la numération qui auraient conduit à la disparition des unités *de la* numération. Est-il possible de lier disparition des grandeurs du socle de l'arithmétique et disparition d'unités en numération ? Dans le chapitre 3, nous avons évoqué l'absence d'un point de vue mathématique sur les quantités et des manifestations de cette absence dans des explications données sur les difficultés des élèves ou des enseignants. L'absence d'un point de vue sur les tailles relatives des fractions, des quantités de bonbons et longueurs mesurées en unités métriques pourrait-il être symptomatique de la disparition des grandeurs ? Plus généralement, les phénomènes observés pourraient-ils refléter l'absence de relations

multiplicatives entre les unités d'une même grandeur dans le curriculum, y compris pour les unités métriques ?

3. Le traité de Bézout - une organisation mathématique des savoirs de l'arithmétique pour la notion d'unité

Les éléments apportés par les deux parties précédentes conduisent à poser la question d'une inscription (théorique) des unités dans un savoir mathématique. C'est une nouvelle enquête sur une source historique primaire, le traité d'arithmétique de Bézout, pour étudier la question des « raisons d'être des grandeurs » qui m'a permis de faire une avancée significative sur l'articulation entre grandeurs et unités (Chambris, 2021) et de façon complémentaire le travail sur la proportionnalité avec Visnovska (Chambris & Visnovska, 2021) qui s'inscrivait dans des réflexions partagées avec des historiens des mathématiques (Proust et collègues de SPHERE). Ces réflexions m'ont amenée à mieux prendre en compte le changement de paradigme savant du 19^e siècle dans mes analyses (chapitre 1, section 1). (Les éléments qui suivent sont en partie extraits d'un texte en cours d'écriture avec Valérie Batteau³⁶ sur l'enseignement de l'arithmétique, aujourd'hui, au Japon. Ce texte est en anglais. Je le traduis.)

3.1. Le contexte de production et d'utilisation du texte et sa structure

Après avoir donné des éléments de contexte sur le traité de Bézout, je proposerai une analyse praxéologique d'une partie du texte.

Éléments de contexte

Les documents curriculaires français ont été largement influencés par le traité d'arithmétique de Bézout (Bézout, 1764 / 1821) (Neyret, 1995). Le rôle de ce traité, dans ce contexte a été mis en évidence jusqu'aux années 1940 (Neyret, 1995), et son contenu est resté influent jusqu'aux années 1960 (ibid.). Sa structure, puis celle de l'édition de Reynaud, a cadré les programmées et les manuels scolaires (Neyret, 1995), et d'ailleurs de nombreuses phrases qui étaient dans les manuels étaient semblables à celles des traités (Harlé, 1987, Chambris, 2018).

Étienne Bézout (1730-1783) était un mathématicien français de renom, indubitablement informé des mathématiques de son temps. Son traité d'arithmétique n'est pas un livre académique dans la mesure où il a été publié pour former les élèves ingénieurs dans les écoles militaires. A cette époque, les connexion entre les grandeurs et les nombres n'étaient pas restreintes à l'arithmétique de l'école. En effet, l'approche des nombres et des opérations par les grandeurs était l'approche savante, et ce, jusqu'à la deuxième moitié du 19^e siècle (e.g., Gandon, 2009, Boniface, 2002), et plus largement les mathématiques demeuraient une science des quantités (ibid.).

D'après la théorie de la transposition didactique développée dans les années 1980 (Chevallard & Bosch, 2020) et en considérant l'influence admise du traité dans le contexte français, le traité d'arithmétique de Bézout peut être vu comme une transposition du savoir savant (de l'époque) et il constituait un livre de référence pour le « savoir à enseigner » dans l'institution éducative élémentaire à la fin du 19^e siècle et jusqu'aux années 1940. Les nombreuses rééditions et

36 Les travaux en cours avec V. Batteau (Atelier au colloque SEMT, Chambris & Batteau, 2021) m'ont permis par ailleurs de mieux appréhender la logique globale des « notions préliminaires » du traité de Bézout.

traductions suggèrent que le texte de Bézout était solide mathématiquement parlant et pertinent comme ressource pour l’enseignement ou pour la formation des maîtres.

La structure du texte

La théorie de l’arithmétique reconstruite par Ma (Ma & Kessel, 2018) (section 1.2), le traité d’arithmétique de Bézout (publié en 1764) et les notes de Reynaud sur le traité de Bézout (publié vers 1800) partagent de fortes similitudes structurelles. C’est en les rapprochant qu’une différence importante est devenue visible (Figure 14) (Chambris, 2021).

Theory of school arithmetic (Ma & Kessel, 2018)	Traité de Bézout	Traité de Reynaud
Units	Grandeur - Unité	Grandeur - Unité
Numbers - Number in general - <i>Concrete and abstract numbers</i> - Like numbers	- Nombre en général - <i>Nombres concrets et abstraits</i>	- Nombre en général
Numeration	*Numération ³⁷	Numération <i>Nombres concrets et abstraits</i>
Addition and Subtraction	*Addition *Soustraction	Addition Soustraction
Multiplication and Division	*Multiplication *Division (Fractions, puis opérations)	Multiplication Division (Fractions, puis opérations) (Décimaux, puis opérations)

Figure 14. – Mise en parallèle des structures des traités d’arithmétique de Bézout, Reynaud et de la «Theory of School Arithmetic» de Ma (Ma & Kessel, 2018)

Le texte de Bézout inclut l’unité dans une section intitulée « notions préliminaires » qui ne démarre pas par l’unité mais par des définitions impliquant les grandeurs. Viennent ensuite dans cette section, l’unité, le nombre, les types de nombres (concrets et abstraits).

La section qui suit clarifie l’arrière-plan mathématique du traité d’arithmétique de Bézout et le rôle des grandeurs et des unités, ainsi que la façon dont les nombres et la multiplication sont présentés dans le traité. Dans les termes de la TAD, il enquête sur la composante théorique des praxéologies du traité d’arithmétique de Bézout, les rôles des quantités et des unités, et leurs liens possibles avec les nombres et la multiplication. Il clarifie aussi (une partie) des principes non questionnés dans l’institution.

3.2. Enquête sur l’arithmétique dans le traité de Bézout

Le paradigme

Comme je l’ai indiqué au chapitre 1, le paradigme d’axiomatisation a été modifié au 19^e siècle. Au tournant du 20^e siècle, un axiome, de vérité qui va de soi relative à des objets ou à des actions (axiomatisation comme idéalisation de la réalité) devient une propriété d’un objet mathématique

37 Sections noted * treat the case of whole numbers, then decimals.

défini par le principe de non-contradiction (axiomatisation relationnelle) (Otte, 2007). Un exemple bien connu de mathématiques quand elles étaient axiomatisées comme idéalisation de la réalité est Les Éléments d'Euclide. Ainsi, dans le domaine géométrique, les définitions du point et de la ligne et l'axiome de la ligne droite dans le livre I étaient les suivantes :

Définition 1. Un point est ce qui n'a pas de partie.

Définition 2. une ligne est une longueur sans largeur..

Postulat 1. Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.

L'autre changement s'est produit un peu plus tôt. Comme indiqué précédemment, jusqu'au milieu du 19e siècle, les mathématiques étaient une science des quantités. Ceci étant dit, nous retournons au traité d'arithmétique de Bézout et clarifions le rôle des quantités, unités, et le point de vue sur la multiplication, dans le traité à la fin du 18e siècle.

L'arithmétique comme science des quantités exprimées en nombre

Le traité d'arithmétique de Bézout démarre avec la définition des quantités : « On appelle en général quantité, tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution. L'étendue, la durée, le poids, etc., sont des quantités » (Bézout §1)³⁸. Bézout précise alors le rôle ontologique des quantités dans les mathématiques et spécifiquement en arithmétique : « Tout ce qui est quantité est de l'objet des mathématiques; mais l'arithmétique [...] ne considère ces quantités qu'en tant qu'elles sont exprimées en nombres. (§1) [...] L'arithmétique est donc la science des nombres. » (§2) La brève liste des quantités reste ouverte, et peut notamment être étendue avec ce qui suit.

Unité et nombres

La définition de l'unité est très théorique. « L'unité est une quantité que l'on prend (le plus souvent arbitrairement) » (§4). Le premier rôle de l'unité est de « servir de terme de comparaison à toutes les quantités d'une même espèce » (§4). Ainsi, n'importe quelle quantité de n'importe quelle espèce peut être utilisée comme une unités pour comparer aux autres quantités de la même espèce. De façon importante, Bézout avait précisé au préalable un autre rôle des unités : « Pour se former une idée exacte des nombres, il faut d'abord savoir ce que l'on entend par *unité*. (§3), et plus précisément, « Le nombre exprime de combien d'unités, ou de parties d'unité, une quantité est composée » (§5). De façon connectée à cette définition, Bézout donne deux exemples d'unités de la même espèce utilisées pour comparer, donc pour mesurer, un poids donné : « ainsi lorsqu'on dit un tel corps pèse cinq livres, la livre est l'unité; c'est la quantité à laquelle on compare le poids de ce corps; on aurait pu également prendre l'once pour l'unité, et alors le poids de ce corps eut été marqué par quatre-vingt » (§4).

Commentaire – nombres concrets et nombres abstraits

Premièrement, la définition de l'unité fournit une relation génétique entre les nombres et les quantités : à la fois ce qui résulte de la comparaison de la quantité à l'unité et l'expression de la composition de la quantité avec l'unité sont ce qui est appelé *nombre*. Nous discutons plus tard ce double point de vue sur les nombres. Bézout précise plus loin : « Un nombre qu'on énonce sans désigner l'espèce des unités, comme quand on dit simplement *trois* ou *trois fois*, *quatre* ou *quatre*

38 Au lieu de référer aux pages du traité nous référons aux sections qui sont numérotées de la même façon dans les différentes éditions, y compris dans les traductions que nous avons consultées.

fois, s'appelle un *nombre abstrait*; et lorsqu'on énonce en même temps l'espèce des unités, comme quand on dit *quatre livres, cent tonneaux*³⁹, on l'appelle *nombre concret*. » (§6) Il semble important de noter que, '3 cm', '1/3 cm'⁴⁰, '4 pieds 5 pouces' sont dit être des nombres dans ce cadre mathématique, au même titre que '3', '1/3', '3 fois', 'tiers de'. Les premiers sont des nombres concrets, alors que les seconds sont des nombres abstraits. On peut par ailleurs considérer qu'il peut y avoir une unité implicite qui est le nombre 1 pour les nombres abstraits⁴¹. Nous supposons de façon cohérente qu'en considérant l'unité 1/3, le nombre 1 (1/3) devrait être vu comme un nombre concret. Il a la même valeur que 1/3 (1) mais ce n'est pas le même nombre. Ces éléments ne sont pas bien clarifiés dans le traité de Bézout mais les propriétés utilisées dans le traité suggèrent qu'il devrait en être ainsi. Cette perspective sur les nombres est différente de la perspective actuelle, dominante.

Commentaire – notion d'unité relative

Deuxièmement, comme toute quantité d'une espèce donnée peut être une unité, cela signifie, par exemple, que, considérant que le centimètre est une unité, si une longueur (une quantité) est aussi longue que 21 cm, la taille de 3 cm peut être utilisée comme une autre unité. Ainsi, considérant cette nouvelle taille comme une unité, 7 est la mesure de la même longueur avec 3 cm comme unité. En prenant la quantité de dix centimètres comme unité, la même longueur peut aussi être exprimée comme 2 (unités de taille dix cm) et 1 (unité de taille un cm). Ceci peut être étendu aux nombres abstraits. Comparé au nombre un, le nombre 21 est aussi grand que 21 unités ; considérant la taille du nombre 3 comme unité, le nombre 21 est aussi grande que 7 unités ; considérant les unités de tailles un et dix, le nombre 21 est aussi grand que 2 dix et 1 un.

Plus généralement, étant donnée une unité u d'une certaine espèce de grandeur, la valeur de grandeur v , telle que $v = b u$ ou $u = b v$ peut être considérée comme une unité (a et b , nombre entiers, $b, b \neq 0$). Chambris (2021) a introduit les expressions unité simple pour u et unité relative pour v – dans la mesure où v est une unité relative à l'unité u . Cette vue enrichie sur les unités peut être intégrée dans la plupart des domaines de l'arithmétique. (ibid.).

Les unités via les nombres concrets permettent une diversité d'expressions d'une quantité donnée d'une espèce donnée, ayant une même valeur (qui peut être vue comme une classe d'équivalence). Les nombres concrets sont des représentants de ces valeurs. Les différentes valeurs pour une espèce donnée donnent toutes les quantités de l'espèce.

Troisièmement, cette élaboration implique également que *les nombres abstraits* constituent une autre espèce de grandeur. Les nombres abstraits ressemblent à nos nombres actuels. Les expressions particulières formées par les fractions peuvent être vues comme des nombres concrets 3/5 c'est 3 unités qui sont chacune des cinquièmes, et aussi comme un nombre abstrait 3/5 pour l'unité 1 qui serait le nombre rationnel 3/5. Ou peut-être les nombres rationnels seraient-ils les nombres qui ont un représentant abstrait.

39 La présence d'une unité pour une grandeur discrète est ambiguë. Bézout utilise les mots livre et tonneaux qui sont à la fois des unités de poids, monnaie et pour les quantités d'ouvrages pour le premier et de capacité et quantités de barriques pour le second. La traduction en anglais de Heath publiée aux USA en 1821 retiendra *book* et *dollar* !

40 Dans la mesure où le système métrique a été inventé ultérieurement (1791), ces deux exemples sont anachroniques.

41 L'étude précise de ce qu'est un nombre abstrait reste à faire. Est-ce une classe d'équivalence de certains nombres concrets ?

Commentaire – nature des quantités et nature des nombres

Dans le chapitre 3, j'ai montré comment la propriété P semble permettre, théoriquement, de se détacher de la matérialité des objets pour comparer des tailles. Elle donne un caractère abstrait (une idée) à la notion de quantité.

Dans des réflexions récentes et non publiées, je suis revenue à l'étude du texte de Bézout, en particulier à l'étude des notions préliminaires. Comme indiqué précédemment, Bézout donne en quelque sorte une double définition du nombre. Il définit le nombre comme exprimant à la fois (1) le rapport d'une quantité à une autre de la même espèce prise comme unité et (2) combien d'unités ou de parties d'unités composent une quantité. Sans entrer dans les détails d'une histoire que je n'ai pas étudiée, cette double définition me semble fusionner deux acceptions du nombre, d'une part la définition ancienne euclidienne du nombre (toujours entier) comme collection d'unités (et enrichie progressivement avec les parties d'unités), d'autre part la définition du 18^e siècle introduite par Newton en 1707 (Gandon, 2009) qui affirme que le rapport de deux grandeurs de la même espèce est un nombre.

Soit un objet u de taille \underline{U} et deux objets, x et y , de même taille \underline{Z} , et dont la réunion disjointe est u , j'introduis la notation suivante. Je note $\Pi_+ \underline{Z}$ la somme $\underline{Z} + \underline{Z}$. Dans cette expression, Π_+ désigne l'ajout de \underline{Z} à lui-même et renvoie à la décomposition de u en x et y ; $\Pi_+ \underline{Z}$ indique aussi combien d'unités \underline{Z} forment \underline{U} (c'est, me semble-t-il, l'approche (2) du nombre par la définition de Bézout, c'est une approche que je dis de type additif).

Étant donnés maintenant deux autres objets v et w (supposons v différent de x et y), de même taille \underline{T} et dont la réunion disjointe est u (de taille \underline{U}). Les quatre objets x , y , v et w ont-ils la même taille, autrement dit, \underline{Z} et \underline{T} sont-ils égaux (en termes de quantité ou de taille) ? A-t-on $\underline{Z} + \underline{Z} = \underline{T} + \underline{T}$ implique $\underline{Z} = \underline{T}$? J'ai prouvé dans le chapitre précédent que cette implication est vraie grâce à l'ordre total et à la propriété P (et il me semble peu probable qu'on puisse le faire sans utiliser cette propriété P). La conséquence est que $\underline{U} = \underline{T} + \underline{T} = \underline{T} + \underline{Z}$, il n'est alors plus nécessaire de disposer d'objets physiques réunis pour former un tout, la taille prend un sens indépendamment de l'objet et la somme aussi. La preuve repose sur 1) le fait que les tailles sont totalement ordonnées, 2) la propriété P. Par ailleurs, la preuve 3) mobilise un raisonnement par l'absurde. Je peux alors écrire : $\Pi_+ \underline{Z} = \Pi_+ \underline{T}$ implique $\underline{Z} = \underline{T}$. Pour autant, par exemple x et v et x et w ne constituent pas la réunion disjointe de U . Je désigne alors par $\Pi_x \underline{T}$ l'ajout de la taille \underline{T} à elle-même, indépendamment des objets qui la représentent (voire l'itération d'une taille donnée sans la nécessité d'évoquer ces tailles par des objets). Et dans cette perspective, Π_x est le rapport multiplicatif de \underline{T} à \underline{U} , c'est le nombre de fois.

Pour pouvoir appréhender le nombre comme nombre de fois, dans le traité de Bézout, il semble nécessaire de disposer d'une notion de quantité abstraite, celle apportée par la propriété P. Il semble donc raisonnable de considérer que les quantités du traité de Bézout disposent de la propriété P.

Multiplication

Nous nous concentrons maintenant sur la multiplication. La définition de Bézout de la multiplication était la suivante : « Multiplier un nombre par un autre, c'est prendre le premier de

ces deux nombres autant de fois qu'il y d'unités dans l'autre. Multiplier 4 par 3, c'est prendre trois fois le nombre 4. » (§40) De façon importante, cette définition demeure valide pour les fractions. En effet, « 4/5 de fois » (§106) est un nombre abstrait, un 'nombre de fois' : Ainsi multiplier 2/3 par 4/5 c'est prendre 4/5 de fois la fraction 2/3 ou, plus exactement, c'est prendre 4 fois le cinquième de 2/3 » (§106).

En introduisant les notions d'unités simple et relative, la définition de Bézout précise que : (1) le multiplicateur est un nombre abstrait qui indique un nombre d'unités d'un type non précisé qui doit être pris ; (2) le multiplicande est conçu comme une unité qui doit être prise, formé avec un nombre donné d'*unités simples*, c'est donc une *unité relative*, (3) le produit doit être exprimé comme un nombre d'*unités simples*. En d'autres termes, avec u comme unité simple, le multiplicateur b indique le nombre d'unités relatives $a u$ (où $a u$ est le multiplicande) nécessaires pour former les unités simples du produit $(a [u]) b = b [a u] = P [u]$ ⁴².

Cette égalité signifie – bien que cela ne soit pas explicite dans le traité – que la valeur du produit (exprimée dans les unités simples du multiplicande) est la même que la valeur de b unités de la taille du multiplicande (Chambris & Visnovska, 2021). Cela signifie, en poursuivant avec une notation qui n'est pas utilisée par Bézout, que $4 u \times 3$ (4 unités de taille u multipliées par 3) indique le nombre d'unités u , dans une quantité qui mesure 3 quand on prend la taille de $4 u$ comme unité ($4 u$ est une unité relative).

Effet d'un changement de la taille de l'unité sur la quantité⁴³

L'approche du nombre de Bézout (Newton) permet de choisir toute quantité comme unité. Sans la formuler de façon explicite, Bézout fait intervenir une propriété de façon répétée. J'appelle M cette propriété. Cette propriété consiste à affirmer que :

- avec des unités k fois plus grande (que u), pour le même nombre d'unités (u), la quantité est k fois plus grande,

ou encore,

- pour obtenir une quantité k fois plus grande qu'une quantité donnée (mesurée dans l'unité u), il suffit de prendre le même nombre d'unités chacune k fois plus grande (que u).

Cette propriété se formule également dans l'autre sens de comparaison :

- avec des unités k fois plus petites (que u), le même nombre d'unités (u) est k fois plus petit,

ou encore,

- pour obtenir une quantité k fois plus petite qu'une quantité donnée, il suffit de prendre le même nombre d'unités, mais des unités chacune k fois plus petites.

42 Bézout n'introduit pas le signe \times , ni aucune autre notation arithmétique symbolique à l'exception de pour les rapports. Il n'introduit pas non plus d'explication sous forme algébrique dans son traité d'arithmétique.

43 Les éléments présentés dans cette partie ont été construits pour la plupart conjointement avec Coulange et Train et sont en partie publiés dans (Chambris, Coulange, Rinaldi et Train, 2021) et ont été en grande partie présentés dans (Chambris, 2021a APMEP). Le mémoire de master de Surroca (en cours) porte par ailleurs sur cette propriété.

Cette propriété est une propriété de la mesure des grandeurs. Je n'ai pas élucidé la nature de cette propriété, axiome ou théorème, au regard des hypothèses sur les grandeurs. Dans le traité, elle est souvent appliquée à la grandeur nombre abstrait.

Elle intervient dès l'item §9 du traité de Bézout. En effet, au §8 Bézout indique : « on est convenu que de dix unités, on en ferait une seule à laquelle on donnerait le nom de *dixaines* [...] que pour représenter ces nouvelles unités, on emploierait les mêmes chiffres que pour les unités simples, mais qu'on les en distinguerait par la place qu'on leur ferait occuper, en les mettant à la gauche des unités simples. » Le paragraphe §9 est alors : « Remarquons, en passant, cette propriété de la numération actuelle ; savoir, qu'un chiffre placé à la gauche d'un autre, ou suivi d'un zéro, représente un nombre dix fois plus grand que s'il était seul. » Cette *remarque en passant* n'est pas justifiée dans le texte de Bézout mais il me semble peu discutable qu'elle s'appuie implicitement sur la propriété M.

Un peu plus loin dans le texte de Bézout, la propriété est tout aussi implicitement utilisée pour justifier la propriété de commutativité de la multiplication des nombres abstraits. Au §44, Bézout écrit :

Tant qu'on ne considère les nombres que d'une manière abstraite, c'est-à-dire sans faire attention à la nature de leurs unités, il importe peu lequel des deux nombres proposés pour la multiplication on prenne pour multiplicande ou pour multiplicateur. Par exemple, si l'on a 4 à multiplier par 3, il est indifférent de multiplier 4 par 3, ou 3 par 4 ; le produit sera toujours 12. En effet, 3 fois 4 ne sont autre chose que le triple de 1 fois 4, et **4 fois 3 sont le triple de 4 fois 1**. Or il est évident que 1 fois 4 et 4 fois 1, sont la même chose et on peut appliquer le même raisonnement à tout autre nombre.

En effet, en termes d'unités et d'unités relatives, la partie centrale « 4 fois 3 sont le triple de 4 fois 1 » peut être explicitée et reformulée comme suit : 4 unités chacune de taille 3, c'est 3 fois plus grand que 4 unités chacune de taille 1. Cette nouvelle expression permet de conclure à la commutativité de la multiplication entre nombres abstraits. Relativement à la multiplication, cette propriété intervient à de nombreuses reprises dans le traité pour établir les techniques de calcul multiplicatif, par exemple 6500 multiplié par 350 (§52), le multiplicande est 65 centaines, donc le produit sera des centaines. Comme le multiplicateur est 35 dizaines, soit 10 fois plus grand que 35, le produit sera dix fois plus grand que des centaines, soit des dizaines de centaines, donc des milliers.

Cette propriété est aussi utilisée au §96, tout autant implicitement, dans le domaine des fractions, notamment pour établir le fait que le cinquième de 4 c'est aussi 4 cinquièmes (Surroca, dans son mémoire de master, en cours, Surroca & Chambris, accepté). En effet, on peut dire que le cinquième de 4 (d'une unité de taille 4), c'est aussi le cinquième de 4 unités chacune de taille 1. C'est grand comme 4 unités de taille chacune 5 fois plus petites que 1 (ou grandes comme le cinquième de 1).

Par ailleurs cette propriété est souvent utilisée dans un contexte de compensation. Par exemple, à propos de l'équivalence des fractions, Bézout, comme l'élève CLEM du 2.1, propose la justification suivante :

(§87) « Il est visible que plus on concevra de parties dans l'unité, et plus il faudra de ces parties pour composer une même quantité. »

(§88) Donc, on peut rendre le dénominateur d'une fraction double, triple, quadruple, etc., sans rien changer à la valeur de la fraction, pourvu qu'en même temps on rende aussi le numérateur double, triple, quadruple, etc.

La taille de l'unité est d'abord réduite ou agrandie, le nombre d'unité est alors modifié en fonction.

La propriété M, dans le traité de Bézout, apparaît comme un « couteau suisse ». Le fait est que, sauf erreur, cette propriété permet de produire des raisonnements pour établir à la fois la commutativité et l'associativité de la multiplication. Elle intervient dans les raisonnements qui justifient l'écriture d'un zéro à droite et les déplacements de virgule dans les effets de la multiplication par les puissances de dix sur l'écriture chiffrée. Elle intervient dans les raisonnements pour justifier l'égalité des fractions, et donc l'équivalence des fractions, mais aussi pour établir, par le raisonnement, les règles de calcul pour la multiplication des fractions, etc.

3.3. Conclusions

De ces sections sur l'arithmétique de Bézout nous tirons quelques éléments importants

- Alfonsi (2011) a montré que Bézout avait intégré des résultats de ses travaux de recherche dans son traité de mathématiques (pour les tomes du traité autres que le premier volume consacré à l'arithmétique), sans les publier dans des revues académiques. En revanche, l'intérêt mathématique du traité d'arithmétique de Bézout n'a pas été souligné par les historiens des mathématiques (e.g., « In this work there are no innovations » Saraiva, 2015, p. 25). Pourtant sa longévité, ses qualités remarquées par l'académie des sciences lors de sa publication (Surroca & Chambris, accepté) et des éléments d'analyse apportés ci-avant suggèrent qu'il intègre peut-être quelques nouveautés.
- Plusieurs aspects importants de la théorie (composante praxéologique) du traité d'arithmétique de Bézout ont été mis en évidence: le paradigme pour l'axiomatisation, la présence des quantités aux fondations qui fournissent un moyen pratique – l'unité – qui permet de voir l'arithmétique comme une question de nombre d'unités, donc de mesure de grandeurs. 1) Toute quantité peut être prise comme unité ; 2) le nombre exprime une accumulation d'unités et de parties d'unités et aussi un nombre de fois ; 3) une quantité est un *nombre de fois* une unité (une taille donnée) ; 4) la multiplication peut être interprétée comme un double mesurage, un nombre d'unités simples (le produit) et 'un nombre de' (le multiplicateur) 'unités (relatives) liées à cette unité simple' (le multiplicande) (Chambris & Batteau, en préparation).

4. Potentialités des unités relatives : une relecture de travaux en didactique des mathématiques

Dans quelle mesure cette lecture mathématique du traité de Bézout se reflète-t-elle dans des travaux de didactique ? Plus précisément, la portée des unités relatives apparaît-elle en filigrane dans certains travaux de didactique comme des potentialités pour l'enseignement ou l'apprentissage de l'arithmétique ?

4.1. Dans le domaine de la résolution de problèmes arithmétiques

Comme évoqué précédemment, Polotskaia et coll. s'inscrivent dans le cadre conceptuel de Davydov. Elles précisent que « Davydov's unit of measurement refers to any unit (such as 2 apples or 1/2 an apple), not only standardized units such as kilometer or hour » (2021, p.452). Cette perspective leur permet de considérer non pas les opérations mais la structure relationnelle qu'elles attribuent aux situations. En particulier, dans les relations de *composition* multiplicative, « one quantity plays the role of a unit to measure the second quantity and composes its part. The second element plays the role of the measured total. The third element plays the role of a coefficient (or a number). » (2021, p.454) La première quantité peut donc être vue comme une *unité relative*. Cette unité est relative à ce qui sera l'unité du problème, autrement dit l'unité dans laquelle la deuxième quantité est exprimée.

De façon complémentaire, la relation de *comparaison* multiplicative peut être décrite à partir de trois éléments : « one quantity is the unit that measures the second, which is physically distinct from the first, and the third is the coefficient (or number) » (ibid.) La première quantité est donc là encore une unité relative.

Polotskaia et Savard (2021) discutent l'approche de Izsák and Beckmann (2019). Ces derniers auteurs introduisent une définition de la multiplication qu'ils résument dans la figure 15 suivante.

N	.	M	=	P
How many base units make one group exactly?		How many groups make the product amount exactly?		How many base units make the product amount exactly?

Figure 15. – Summary of a definition for multiplication based in coordinated measurement (ibid., p. 91)

Ces derniers auteurs s'intéressent en effet aux situations qui peuvent être modélisées par une multiplication. Polotskaia et Savard rejettent leur point de vue car elles considèrent que l'opération arithmétique n'est pas le premier outil à mobiliser pour caractériser les situations multiplicatives. Il me semble que cet argument révèle aussi, voire surtout, les arrière-plans mathématiques différents dans lesquels ces deux articles se situent. Pour Polotskaia et Savard, il s'agit d'un ensemble de grandeurs dans lequel les relations quantitatives s'interprètent en termes de mesures d'une grandeur dans une unité alors que pour Izsak et Beckmann il s'agit du paradigme mathématique dominant dans lequel *l'expression* d'une relation quantitative par la mesure dans une unité n'est pas naturellement disponible et se traduit par la multiplication.

Ceci étant dit, il me semble que ce que montrent Izsak et Beckmann est que leur modèle permet de repérer plusieurs relations multiplicatives dans une situation donnée. Ils s'appuient sur un exemple que je vais enrichir en l'étudiant de façon plus systématique qu'ils ne le font en m'appuyant sur les unités relatives : « For example, *in a situation where a potter uses 3 oz of clay to make each of 7 plates*, we could take a lump of clay that is 1 oz to be 1 base unit, 1 plate to be 1 group, and the total amount of clay to be 1 product amount. » (ibid., p.92, je souligne) »

La situation permet d'introduire trois valeurs de grandeurs : la masse totale des assiettes, la masse d'une assiette, la masse d'une once. Chacune de ces valeurs peut être prise comme « total ». Ce total peut alors être mesuré avec l'une ou l'autre des deux valeurs restantes. Étant choisie une de ces deux valeurs comme unité, la troisième valeur peut être prise comme unité simple, qui sert à

mesurer la deuxième, considérée alors comme unité relative (à la troisième). Le produit est conséquemment mesuré dans la troisième (unité simple) et aussi dans la deuxième (unité relative). C'est ce qu'exprime la définition de la multiplication retenue par Izsak et Beckmann. Cette diversité de choix permet donc de repérer six relations multiplicatives.

	La quantité totale à mesurer (T)	Nombre d'unités simples dans T (P) Produit	Nombre d'unités relatives dans T (M) Multiplicateur	Unité relative (UR)	Nombre d'unités simples dans UR (N) Multiplicande	Unité simple (US)
*	Masse totale			Masse d'une assiette		Masse d'une once
*	Masse totale			Masse d'une once		Masse d'une assiette
*	Masse d'une assiette			Masse totale		Masse d'une once
	Masse d'une assiette			Masse d'une once		Masse totale
	Masse d'une once			Masse d'une assiette		Masse totale
	Masse d'une once			Masse totale		Masse d'une assiette

Figure 16. – Une diversité de situations multiplicatives

Bien qu'ils présentent plusieurs cas (repérés par *), Izsak et Beckmann n'explicitent pas la généralité de leur modèle comme je le fais. Fondamentalement, pour Polotskaia, la relation multiplicative de composition (ou de comparaison) est définie par la relation ternaire entre le total, l'unité relative et le nombre d'unités relatives. La perspective ensembliste ne permet pas (ou permet seulement difficilement) ce point de vue sur la situation. Elle exige en effet d'introduire une unité simple pour formuler la multiplication alors que la relation multiplicative (autrement dit une relation de mesure de grandeur avec une unité) pourrait s'exprimer dans une diversité d'unités simples et reste significative même si aucune unité simple n'est mentionnée (en d'autres termes, la relation de mesure de la masse totale avec la masse d'une assiette comme unité demeure significative, que la masse d'une assiette soit mesurée en grammes, en onces ou encore considérée comme unité indépendante). Izsak et Beckmann indiquent d'ailleurs « The definition applies to situations in which there is a quantity (the product amount) that is simultaneously measured with two different units that we call base units and groups. » (p. 90). Par contraste la relation multiplicative selon Polotskaia et coll. pourrait être une situation dans laquelle il y a une quantité qui est mesurée avec une unité. Avec les unités relatives, on pourrait dire qu'il y a une relation multiplicative quand une quantité est mesurée avec une unité (relative) (point de vue de Polotskaia sans inclure la parenthèse, point de vue de Beckmann en incluant la parenthèse).

Izsak et Beckmann explore la potentialité de leur modèle pour différents types de nombres et de contextes et ils montrent qu'il peut être utilisé pour modéliser les situations rectangulaires, alors que Polotskaia introduit un autre type de relation multiplicative pour ces situations⁴⁴. Considérant en effet un rectangle de 3 cm par 4 cm, l'unité cm² peut être introduite pour un rectangle (carré) de côtés 1 cm et l'aire d'une bande de 4 cm par 1 cm peut constituer une unité relative (un groupe pour les auteurs).

44 Cette différence peut aussi s'expliquer par le fait que la visée de Polotskaia n'est pas théorique vis-à-vis de la multiplication. Sa perspective est celle de la résolution de problèmes arithmétiques.

Cette définition fournit une approche cohérente pour la multiplication qui s'applique à tous les nombres positifs (pas seulement les entiers). Elle présente de grandes similitudes avec la définition de Bézout et aussi quelques différences que je ne discuterai pas en profondeur. Disons simplement que 1) remplacer simplement l'expression "group" par "related unit", et "base unit" par "simple unit" fournit une formulation légèrement différente de la définition, sans – selon moi – changer ni le sens, ni l'esprit de ce travail. Cela montre comment le concept d'unité relative (et simple) apparaît dans les recherches sur la multiplication qui sont préoccupées par la cohérence. 2) Izsák and Beckmann (2019) considèrent également que la multiplication est enracinée dans la mesure d'une grandeur dans deux unités : relative et simple.

Signalons que ce point de vue sur la relation multiplicative est en tension avec le point de vue de Brousseau sur la multiplication évoqué par Margolinas (2021). Pour Brousseau (et Margolinas), il faudrait deux situations fondamentales pour les opérations sur les rationnels : « seule l'addition (et la soustraction) est possible pour les rationnels-mesure, la multiplication (et la division) n'étant rendue possible que pour les rationnels-application. » (p. 26-27) Le point de vue apporté ici permet de voir une multiplication comme un changement d'unité. Pour avoir une situation fondamentale unique, il faut probablement des unités de différentes tailles, donc des grandeurs.

4.2. Fractions as Measures sequence (FAMS)

Mon second exemple relatif aux potentialités des unités relatives concerne les fractions. Cortina, Višňovská and Zúñiga (2014) ont conçu une séquence d'enseignement pour enseigner les fractions comme mesures (fractions as measures sequence, FAMS dans la suite). Les enseignants travaillent avec les chercheurs de façon rapprochée. Les élèves sont de milieu défavorisés (Mexique, Afrique du Sud). Le but est d'enseigner à *tous* les élèves. Il semble que les résultats soient prometteurs (ibid, Visnovska & Cortina, 2017).

Je présente rapidement la séquence (SANCP, 2019). Dans la plupart des sessions, dans différentes tâches, les élèves rencontrent l'idée que pour mesurer une valeur de grandeur donnée, utiliser une plus petite unité se traduit en davantage d'unités mesurées, le but final étant par exemple $\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$.

- Dans les premières sessions, les élèves apprennent à mesurer avec des parties du corps. Ils rencontrent le besoin d'avoir une unité commune pour être capable de communiquer leurs mesures. Ils utilisent alors une baguette unité (je l'appelle la référence R , 24 cm de long, une mesure qu'ils ne connaissent pas) mais ils remarquent que cette baguette unité ne fournit pas des mesures différentes pour des objets de tailles différentes. Tous les élèves de la classe mesurent 5 unités et un petit peu !
- Étape 3 : Conséquemment, il leur est demandé de fabriquer des « sous-unités » (des petits de deux, de trois, etc.) dont la longueur est telle que : quand la référence est mesurée avec le « petit de deux », la référence mesure 2 *petits de deux* (2 SO_2). Ils fabriquent alors des « petits de trois », des « petits de quatre », etc.
- (4) Ils comparent les longueurs des « petits » matériellement et par le raisonnement. (5) Ils utilisent les « petits » pour mesurer des longueurs et utilisent une notation transitoire pour garder la trace de leurs mesurages. (6) Ils fabriquent la longueur de R en utilisant les

« petits » (7) et d'autres longueurs exprimées avec la notation transitoire. Les élèves doivent justifier ou anticiper si elles sont plus courtes ou plus longues que R .

- Le symbolisme et le nom des fractions (*demi* remplaçant *petit de deux*) sont introduits vers la fin de la séquence.

Un moment clé de FAMS est le problème de l'étape 3 : 'fabriquer des petits de deux'. Il est important de noter que cette tâche se focalise sur l'unité. Les élèves peuvent d'abord considérer qu'ils cherchent une unité 'ordinaire' (étant de la même nature que les unités corporelles et R). Ensuite, SO_2 est introduit comme une unité qui est *relative* à l'unité simple R , la relation est d'abord ' R mesure 2 SO_2 (puis les expressions correspondantes avec SO_3 , SO_4 , etc.). Cet aspect est travaillé dans beaucoup de tâches dans les étapes suivantes. Dans les étapes 6 et 7, les élèves commencent à articuler leurs mesurages en « petits » avec la longueur de R . D'après Cortina et al. (2014), l'étape 6 a été introduite pour aider les élèves à lier la longueur de R à celles des « petits ». En d'autres termes, dans ces étapes les élèves doivent lier leurs mesures en unités relatives à un nombre (qui est toujours 1 dans la séquence) d'unités simples.

4.3. En numération

Dans cette relecture, pourraient précisément se positionner mes propres travaux antérieurs sur la numération et le calcul, mais je n'y reviens pas puisque je les ai déjà évoqués. Il s'agit des potentialités des unités de la numération, notamment au niveau du calcul mais aussi pour le dénombrement.

5. Des savoirs transparents

Comment interpréter la difficulté des élèves ? Nous avons vu en particulier au chapitre 3, plusieurs explications pour des difficultés d'élèves, le défaut de pratiques des enseignants, l'immaturation des élèves, puis dans ce chapitre un éclairage par la psychologie cognitive, avec des niveaux de significations d'une notion pour lesquels on ne dispose pas de moyens de l'enseigner, avec pour conséquence de toutes difficultés, souvent le constat que les élèves n'ont pas appris.

La question qui vient alors est : Est-il possible d'interpréter certaines difficultés en termes de savoirs mathématiques qui ne seraient pas enseignés, car ils ne vivent pas dans l'institution, mais qui existent ailleurs aujourd'hui, dans d'autres institutions, ou qui ont existé hier ? Dans l'hypothèse d'une réponse favorable, le savoir manquant sera dit transparent s'il intervient dans la classe.

5.1. La propriété P

Dans les trois extraits évoqués section 2., nous avons montré comment des raisonnements en appui sur les unités relatives permettent de traiter les tâches à l'étude. Nous avons aussi indiqué que ces raisonnements soit n'étaient pas mobilisés par les élèves ou l'enseignante, soit ne diffusaient pas. Nous avons aussi vu que des raisonnements alternatifs étaient possibles qui permettent de donner des réponses, éventuellement seulement partielles, aux tâches proposées en appui sur des *groupes*, une dizaine comme un groupe de dix, un septième comme un partage en 7, 1 mm comme un partage du centimètre en dix. Ces éléments impliquent que voir une dizaine comme dix fois plus grande qu'une unité, un septième comme 7 fois plus petit que 1 ou 1 mm

comme dix fois plus petit que 1 cm, autrement dit des tailles relatives entre deux quantités de la même espèce, est une connaissance qui n'est pas partagée dans l'institution scolaire.

Ce double point de vue (groupe vs taille) sur la dizaine, le septième et le centimètre fait écho aux descriptions de la difficulté des élèves relevée par Perrin-Glorian (chapitre 3) : la différence entre ce qu'ils savent faire : paver pour conclure sur le fait que ce sont bien des quarts, et ce qu'ils devraient savoir faire : raisonner pour déterminer l'égalité de grandeurs), qui correspondrait ici à 10 millimètres dans 1 centimètre versus le millimètre 10 fois plus petit que le centimètre.

Cette différence fait aussi écho à la classification proposée par Thompson que nous avons évoquée à la section 1.1. Le niveau groupe correspondrait à la Measure Magnitude et le niveau taille relative à la Steffe Magnitude. De même qu'aux États-Unis (Thompson et coll., 2014), le niveau de signification qui consisterait à envisager la taille relative entre deux unités de la même espèce pourrait être peu présent en France.

Le chapitre 3 a montré comment la notion de *quantité* semble pouvoir se constituer en une notion qu'il semble possible d'enseigner en introduisant un point de vue mathématique sur la grandeur et en particulier en considérant la propriété P, dans un raisonnement par l'absurde. La propriété P utilisée dans un raisonnement par l'absurde pourrait conduire à la 'dématérialisation' des objets mesurés et à la notion de quantité.

La propriété P apparaît alors comme un savoir transparent dans l'institution d'enseignement mais aussi dans une partie de la noosphère, y compris au plan international. Dans l'hypothèse où c'est bien la propriété P qui permet de conceptualiser la quantité, cette transparence conduit à l'impossibilité d'enseigner la notion de quantité (au moins dans le cas continu). Directement dépendante de la notion de quantité, la notion d'unité « en général », et en particulier la notion d'unité relative, parmi lesquelles les unités de la numération, qu'il devient alors plus raisonnable d'appeler les unités *en* numération, est une autre notion qu'il semble impossible d'enseigner (au moins dans le cas continu). Directement dépendantes aussi de cette notion de quantité et des unités relatives, se trouvent les relations de comparaisons multiplicatives : n fois plus grand et n fois plus petit. Les analyses précédentes suggèrent que leur maîtrise est directement liée à la maîtrise de la notion de quantité, même s'il faut, pour ces relations, sans doute adjoindre des considérations langagières qui permettent d'exprimer la comparaison, une relation de comparaison multiplicative n'est rien d'autre que l'expression d'une mesure d'une quantité avec une unité. En effet, ' a est n fois plus petit que b ' signifie que 'avec la quantité a comme unité, la quantité b mesure n ', etc. Vu le 'non-enseignement' probable de la notion de quantité, les difficultés connues, associées à ces expressions fois plus / fois moins, pourraient être dans une large mesure liées non pas à des difficultés langagières mais au défaut d'enseignement de la notion mathématique sous-jacente, celle de quantité.

On voit alors que le fait que les unités aient été supprimées de l'arithmétique *en général* puis de la numération *en particulier* rend leur vie extrêmement difficile, voire impossible dans les classes aujourd'hui même si des textes curriculaires affirment qu'elles ont une place à occuper.

5.2. Un point de vue sur raisonnement additif / raisonnement multiplicatif

Une autre facette de l'identification de la notion de quantité, comme notion mathématique, est la distinction que j'ai introduite dans mon commentaire du 3.2 sur nature des quantités et nature des

nombres. L'analyse théorique proposée a visé à montrer que la notion de quantité, telle qu'obtenue par la propriété P dans un raisonnement par l'absurde, est nécessaire (ce qui ne veut pas dire suffisante) pour appréhender le traité de Bezout. Il est possible de regarder cette analyse théorique avec un autre point de vue. Que se passe-t-il si le sujet (élèves, professeur, lecteur) n'a pas la connaissance de la notion de quantité ? L'analyse théorique suggère qu'il va pouvoir effectuer une partie des raisonnements mais pas tous. Il ne va pas pouvoir accéder au nombre, comme *nombre de fois*. Il va pouvoir effectuer les raisonnements du type « décomposition-recomposition », qualifiés d'additifs par Rahaman et Subramaniam et d'autres chercheurs. Dans cette hypothèse, c'est *la qualité de ce qui est compté*, les propriétés de ce qui est compté ou mesuré, le fait que ce qui est compté ou mesuré est une quantité, qui permettrait au sujet d'accéder à un raisonnement dit « multiplicatif ».

Je n'ai pas exploré plus avant la question mais, disons simplement, que si mes analyses en termes de quantités sont correctes, fonder le « progrès » de « raisonnement additif » à « raisonnement multiplicatif » sur un arrière-plan mathématique ensembliste me semble rendre l'entreprise relativement aléatoire.

5.3. La propriété M

Dans la troisième partie de (Chambris, Coulange, Rinaldi & Train, 2021), nous nous intéressons à des savoirs sur la multiplication qui semblent vivre difficilement dans l'institution actuelle d'enseignement primaire. L'étude est réalisée sur deux types de corpus : l'un est constitué par des extraits de manuels scolaires relatifs à la multiplication par les puissances de dix, l'autre par une séance de classe sur l'égalité de fractions dont un extrait a été présenté au 2.1 dans ce chapitre.

La propriété M peut être formulée comme suit : pour prendre b unités de taille a u (ou pour multiplier a unités de taille u par un nombre b), on peut prendre le même nombre d'unités mais des unités b fois plus grandes.

Nous mettons en évidence que la propriété M intervient dans les deux corpus. Dans les manuels étudiés, si une recomposition est parfois proposée pour les nombres entiers (dix groupes de dix deviennent un groupe de cent), la propriété M est mobilisée de façon implicite avec les nombres décimaux et parfois avec les nombres entiers « Lorsqu'on multiplie un nombre entier par dix, son chiffre des unités devient le chiffre des dizaines », une petite flèche indiquant alors que les dizaines *glissent* dans la colonne des centaines. Dans la classe du LÉA, nous avons vu dans l'extrait relatif à la comparaison de $\frac{3}{7}$ et $\frac{9}{21}$ qu'un élève dit que les deux fractions sont égales car « là, c'est 3 fois plus petit, et là, il y en a 3 fois plus ». L'enseignante identifie *quelque chose*, mais en dépit de ses efforts pour que la justification diffuse dans la classe, elle se rabat finalement sur un partage en parts égales et un dénombrement de parties. Faute, probablement de disposer de la notion de quantité au niveau de l'institution, elle transforme ainsi une relation de comparaison multiplicative entre deux tailles en un dénombrement de parts dans un partage.

La justification des techniques de calculs de multiplication et la justification des équivalences de fractions constituent ainsi deux habitats, au sens de la TAD, dans lesquels la propriété M est utilisée de temps à autres dans l'arithmétique scolaire. La propriété M apparaît alors comme un savoir transparent dans l'institution d'enseignement de l'arithmétique à l'école primaire.

5.4. Raisonnements : montrer sur un exemple versus expliquer la généralité

Dans (Chambris, 2021a APMEP), j'ai proposé une étude rapide du document d'accompagnement des programmes de 2006 « les nombres au collège ». Ce document s'attache à établir la différence entre le quart de sept et sept quarts. La preuve présentée est contextualisée à l'exemple et repose sur « 4 fois 7 quarts, c'est 28 quarts, c'est 7 fois quatre quarts, donc 7 fois 1, donc 7 ». La contextualisation à l'exemple permet l'effectuation de deux calculs, 4 fois 7 et de 7 fois 4, tous deux égaux à 28. Dans le cas général, c'est l'égalité des deux produits qui provient de la propriété formelle de la commutativité de la multiplication des entiers qui permet d'établir la preuve. Cette propriété n'est pas mentionnée dans le texte. La rédaction du texte suggère que c'est le calcul effectif qui permet d'établir l'égalité. Dans la preuve classique, c'est l'utilisation de la propriété M -dans un discours générique et qui fait écho à l'expérience concrète- qui permet d'établir l'égalité, dans un raisonnement du type, le quart de 7, c'est le quart de 7 fois 1, c'est 7 fois plus grand que le quart de 1 (propriété M), c'est 7 quarts. Même si la propriété de commutativité de multiplication des entiers est censée être enseignée dans l'institution, elle ne renvoie probablement pas suffisamment à l'intuition pour qu'on fasse appel à elle. En l'absence de la propriété M, l'institution ne peut pas produire de preuve générale pour la commutativité de la multiplication d'un entier par une fraction unitaire.

La propriété M n'est pas dans le savoir à enseigner de l'arithmétique dans l'institution actuelle. Au regard des analyses qui précèdent, il me semble que c'est d'abord parce qu'elle implique des unités de tailles variables, et donc des quantités, qu'elle est absente. Faute d'un environnement praxéologique adapté, en particulier au niveau de la strate théorique, et d'un texte de savoir à enseigner, elle ne peut pas être enseignée de façon explicite et les élèves ne peuvent pas l'apprendre « dans l'institution ». Certains, professeurs ou élèves, peuvent néanmoins l'avoir apprise ou l'apprendre, incidemment tout seul ou dans d'autres institutions qu'ils auraient fréquentées, et l'utiliser tout aussi incidemment. Quand ils ne l'utilisent pas, il n'y a pas de moyens de produire des explications générales fondées sur une idéalisation de la réalité.

L'absence de M conduit en effet dans l'institution à l'impossibilité d'établir des preuves générales pour des propriétés qui impliquent les opérations (essentiellement la multiplication et la division), les nombres (dès lors que la numération décimale ou les fractions interviennent) ou encore les unités de mesure qui seraient fondées sur une idéalisation de la réalité, autrement dit sur « le sens ». Dans l'institution, les justifications apportées aux propriétés (quand il y en a) ne peuvent alors être que locales, contextualisées à l'exemple considéré. Les sujets de l'institution sont alors, dans le meilleur des cas, invités à déduire de l'observation de quelques exemples, la règle générale.

En termes d'écologie, les potentialités de la propriété M sont étendues. Sous la forme de la compensation, elle fournit aussi une technique auto-technologique pour effectuer des conversions entre unités (l'égalité des fractions en est un exemple). Par exemple, pour convertir des kilomètres en mètres, comme le mètre est 1000 fois plus petit que le kilomètre, si je prends le même nombre d'unités, j'obtiens une grandeur mille fois plus petite, je dois alors prendre 1000 fois plus d'unités pour avoir un résultat mille fois plus grand, donc 1000 fois plus de mètres que de kilomètres. Elle permet d'établir et de justifier des propriétés de la multiplication, telle la compensation qu'on trouve dans le curriculum chinois d'après Ma (Ma & Kessel, 2018). En effet, en adoptant un point

de vue sur la multiplication qui consiste à prendre un nombre d'unités de taille donnée, on peut produire par exemple le raisonnement suivant relatif à la « règle de multiplication par 5 » équivalente à « une multiplication par 10 et une division par 2 ». Vu la commutativité de la multiplication, il y a de multiples façons d'envisager la preuve. Une possibilité est : multiplier 5 par un nombre, c'est prendre ce nombre d'unités de taille 5. On peut prendre des unités deux fois plus grandes, donc de taille 10. Le résultat est alors deux fois trop grand. On peut alors le diviser par deux pour revenir au résultat attendu.

6. Conclusions

Ce chapitre s'intitule *les unités, les raisonnements multiplicatifs*. J'ai parlé longuement des unités tout au long du chapitre, et de façon moins explicite des raisonnements multiplicatifs. Si la littérature parle de raisonnement multiplicatif, au singulier. J'ai choisi le pluriel pour signifier que, peut-être, le raisonnement multiplicatif correspond en fait à des raisonnements, qui font appel à des propriétés mathématiques des grandeurs, une propriété pouvant être la propriété P (par l'absurde), une autre la propriété M, et qui interviennent dans le champ multiplicatif. Cette hypothèse peut sembler spéculative. Pourtant, la portée de ces deux propriétés, en termes de technologies et de techniques qu'elles supportent, me semble vaste et elles me semblent par ailleurs tellement absentes qu'il pourrait être intéressant d'explorer cette hypothèse. Je n'ai pas approfondi l'étude des besoins théoriques permettant la prise en charge des grandeurs quotient. Peut-être une ou plusieurs autres propriétés apparaîtraient-elles.

6.1. Des phénomènes identifiés dans la classe de mathématique en l'absence d'unités (relatives)

Les unités relatives et la propriété M sont absentes du savoir à enseigner. Bien qu'elles ne soient plus au socle de l'arithmétique, des *traces* des unités relatives sont visibles dans les programmes qui se sont succédé depuis 1970 : les *unités* du système métrique ; le « tableau de numération » qui comporte une colonne des *unités*, des *dizaines*, des *centaines*, etc. et différentes *classes*, une classe des *unités simples*, une classe des *milliers*, etc. ; et la troncature associée ou non à l'utilisation de ce tableau. La propriété M, propriété dépendante des unités relatives, intervient aussi incidemment de temps à autres.

L'étude présentée dans (Chambris, Coulange, Rinaldi, & Train, 2021) vise à étudier les traces de ces unités relatives dans l'enseignement actuel (à l'école élémentaire ou au début du collège), tant au plan de leur écologie, que des praxéologies qu'elles embarquent potentiellement ou effectivement. Elle s'appuie sur le corpus évoqué dans la section 2. Nous notions en conclusion :

A l'issue de cette triple étude, il nous semble possible de noter des éléments récurrents. Tout d'abord, les unités relatives, au moins dans l'institution de recherche, présentent des potentialités sur deux plans (au moins) :

- un premier plan est le plan technologique. On les trouve avec le calcul soustractif, les unités de numération permettent de calculer avec les grands nombres « comme avec les petits nombres » ce qui représente une grande économie de moyens. Plus précisément, si la technique est peut-être disponible en calculant « sans les zéros » la propriété de la troncature permet de justifier la technique. Nous ne l'avons pas évoqué mais, sans les unités, justifier le calcul « sur les chiffres de gauche » est possible à condition de développer un formalisme

arithmétique avancé. Les unités relatives réduisent les besoins trophiques [liés aux techniques de calcul sur les nombres]. On trouve d'autres potentialités technologiques des unités relatives avec un théorème de commutativité de la multiplication, qui formulé avec les unités (englobe l'associativité de la multiplication) [il s'agit de la propriété M qui était en cours d'identification], permet de satisfaire des besoins identifiés et d'autres qui ne l'étaient pas nécessairement.

- d'autres potentialités apparaissent avec des possibilités d'élémentation des savoirs en appui sur les unités. En effet, la mise en évidence de savoirs liés à ces unités rend visibles des savoirs qui ne sont pas identifiés par les institutions d'enseignement (on le voit par exemple avec le jeu non maîtrisé sur les unités de numération en lien avec la multiplication par dix). Ces savoirs, une fois identifiés, pourraient constituer des ressources pour les élèves et leurs enseignants. En l'état actuel, ils risquent d'être source de malentendus dans la classe (il semble en effet difficile pour un enseignant ou pour un élève d'imaginer qu'un savoir qui apparaît ne devrait pas être 'reconnu', en même temps ces savoirs sur les unités ne sont pas mis en texte par les institutions de référence). En termes de potentialités, ces unités pourraient constituer des ressources pour l'élémentation de certains savoirs aujourd'hui non identifiés -et par suite potentiellement sources d'inégalités- sur les nombres ou le calcul.
- Par ailleurs, ces unités pourraient avoir des potentialités en termes de « number sense ». On le voit avec l'apparition d'un théorème sur la commutativité / associativité de la multiplication [la propriété M] qui renouvelle les points de vue sur la multiplication et donc enrichit les significations de cette opération, nous semble-t-il. La propriété de la troncature [chapitre 2, section 2.1.2] est aussi un moyen d'obtenir des ordres de grandeur de nombres (ou de fournir des approximations à une précision donnée).

Une autre intention de ce chapitre était de contribuer à l'état des lieux des unités relatives (au plan de l'enseignement et apprentissage des nombres et du calcul). Dans chacune des sous-études, des indices semblent montrer que ces unités posent problème quand elles s'invitent dans les classes. Nous considérons que les phénomènes observés ne sont pas surprenants dans la mesure où ils ne font que refléter l'absence d'unités relatives dans les savoirs [à enseigner] de référence. Dans les différentes situations, on observe que ces unités sont identifiées comme des objets pertinents pour faire avancer la classe par quelques sujets (élèves ou professeurs) mais que leur potentialités ne sont en général pas exploitées au mieux. Il y a un risque, possiblement de glissement métacognitif ou de déstabilisation du système d'enseignement, à tenter d'enseigner des praxéologies qui impliquent ces unités alors que de telles praxéologies (et les objets qui en font le cœur [en particulier la valence sémiotique unité]) ne font pas partie des pratiques de l'institution et donc peuvent ne pas être comprises du tout. Le paradoxe est que ces unités sont peut-être aux racines épistémologiques des mathématiques, par suite elles émergent inévitablement à l'occasion de certaines tâches même s'il n'y a pas d'intention de les enseigner (comme en témoigne l'épisode de classe étudié sur les fractions). Se pose donc, quand même, au moins à titre prospectif, la question de praxéologies mathématiques et didactiques qui permettraient de pointer les savoirs liés à ces unités et de les faire apprendre de façon structurée. (p. 390-391)

6.2. Niveaux de signification et transparence de savoirs liés aux quantités

Au terme de cette note, il me semble possible de revenir sur la classification en cinq types de grandeurs de Thompson et de proposer une première articulation entre les propriétés mathématiques des grandeurs et de la mesure des grandeurs mises en évidence avec ces différents types repérés par la psychologie cognitive.

Les différents types sont donc les suivants (section 1.1, supra)

- 1) la capacité à comparer -ordonner- deux quantités de même nature (Awareness of size),
- 2) la mesure d'une quantité est associée à « un nombre d'unités », sans sensibilité à la taille de l'unité ou à la nécessité que ces unités soient toutes de même taille (Measure Magnitude),
- 3) étant données deux quantités, la capacité à identifier une unité commune pour les comparer et à exprimer cette comparaison en utilisant un ou plusieurs nombres ($A=6/7B$ ou $7A=6B$) (Steffe Magnitude),
- 4) « In words, this says that if a quantity B is measured in units of b , and the magnitude of b is r times as large as the magnitude of b' , then the measure of B in units of b' is $(1/r)$ times as large as the measure of B in units of b » (Thompson, et coll., 2014, p. 4-5) (Wildi magnitudes)
- 5) la capacité à concevoir le rapport entre deux quantités d'espèces différentes (avec des unités quotient) comme un invariant indépendant des unités (comprendre que $3 \text{ km} / 2\text{h} = 3/2 \text{ km/h} = 100 \text{ m} / 4 \text{ min}$ et aussi $2\text{h} \times 25\text{m/min} = 3 \text{ km}$ (Relative magnitudes).

Au regard du chapitre 3 et de la section 3.2 dans ce chapitre, la propriété P ($A > B$ ssi il existe C tel que $A=B+C$), utilisée dans un raisonnement par l'absurde, semble intervenir pour dépasser le niveau 2 puisqu'elle permet *mathématiquement* de se dispenser de la recombinaison concrète d'une quantité en une autre pour conclure à l'égalité de deux grandeurs, c'est alors la « taille » comme caractéristique abstraite commune à plusieurs objets qui est considérée. Mathématiquement, la propriété P permet donc de considérer une taille indépendamment des objets de cette taille (Chambris, 2021c EP21). Cette propriété n'est pas envisagée par Douady (1981) qui attribue l'impossibilité de conclure à l'égalité de grandeurs aux problèmes d'incertitudes induits par les manipulations concrètes. Cet aspect me semble particulièrement intéressant eu égard aux travaux de Chesnais et Munier sur mesure pragmatique et mesure théorique (Chesnais & Munier, 2016). Selon ces chercheuses, il est nécessaire de modéliser l'incertitude dans les situations pratiques de mesurage lors de l'enseignement. On voit que la perspective introduite par le raisonnement par l'absurde permet de faire un pas de côté par rapport à cette nécessité. Dans la perspective ici introduite, il ne s'agit en effet pas de nier l'incertitude introduite dans les situations pratiques de mesurage mais au contraire de prendre appui sur cette incertitude pour idéaliser l'action de partage en parts égales et d'introduire un raisonnement théorique (qui ne passe pas par une manipulation pratique) pour conclure à l'égalité de grandeurs.

L'égalité de grandeurs me semble être d'une importance cruciale pour la conceptualisation de plusieurs notions en arithmétique. Si on suit MJ Perrin dans les descriptions qu'elle apporte des difficultés des élèves, on voit que le « pavage » apparaît comme conception insuffisante pour accéder à la notion d'unité (comme grandeur). On pourrait croire que l'insuffisance concerne uniquement la notion d'aire et que la longueur n'est pas concernée car il y a en quelque sorte unicité du pavage d'une ligne par des segments. Si on suit Perrin Glorian (1993) et nos analyses du chapitre 3 section 3.3, il n'en est rien. On voit donc que l'égalité de grandeurs apparaît pour conceptualiser la notion de quantité, pour n'importe quelle grandeur⁴⁵, et conséquemment pour

⁴⁵ Le raisonnement proposé au chapitre 3 section 3.2 est très général. Toutefois, je n'ai pas considéré son application dans le cas discret, qui mériterait peut-être une attention spécifique.

conceptualiser la notion d'unité, qui est selon Bézout, « une quantité que l'on prend souvent (le plus souvent arbitrairement) ». Le raisonnement que nous avons présenté est nécessaire pour prouver l'égalité dans le cas de partage d'une grandeur en parts égales. Le raisonnement est donc nécessaire pour conceptualiser les *unités relatives*, au moins dans le cas où une unité est sous-multiple d'une unité donnée (unité obtenue par partage en parts égales d'une autre unité). Un raisonnement très similaire permet de prouver l'égalité dans le cas du complément, il permet donc, théoriquement, de concevoir l'égalité de deux quantités sans nécessité de recourir à une recombinaison de l'une en l'autre. Une conception de la quantité, indépendante des objets, semble nécessaire pour concevoir des unités multiples, en particulier, celles utilisées en numération. De même, elle intervient pour conceptualiser les relations multiplicatives (fois moins et probablement fois plus).

Concernant le niveau 4 de Thompson et coll., la caractéristique des Wildi magnitudes est exactement la propriété de compensation associée à la propriété M. Il s'agit de considérer k fois plus d'unités k fois plus petites. Par rapport à la propriété M, la compensation nécessite une dimension supplémentaire que je n'ai pas bien étudiée (le point 2 ci-après) : 1) avec des unités k fois plus petites, on obtient quelque chose de k fois plus petit (propriété M), 2) pour rendre alors k fois plus grand, on peut prendre k fois plus d'unités.

Coulange et Train (séminaire ARDM printemps 2021) envisagent la propriété M plutôt dans la perspective de la compensation qui apparaît dans l'épisode de classe avec CLEM dans lequel la tâche à l'étude consiste à comparer $3/7$ et $9/21$ (comme Thompson et coll.). La propriété M me semble cependant correspondre à une propriété de l'espace, plus élémentaire. Par ailleurs, il me semble que cette différence n'est pas fondamentale et que les deux conceptions sont très proches.

Je n'ai pas identifié, et pas réellement étudié, les conditions dans lesquelles les grandeurs quotients se constituent. Cette notion semble correspondre au niveau 5 de Thompson et coll.. Concernant le premier niveau, il pourrait correspondre à une utilisation de la propriété de comparaison des grandeurs. Le deuxième niveau semble assez proche d'éléments rapportés par Smith III et Barrett (2017) que j'ai évoqués au chapitre 3. Ce niveau pourrait être réinterprété en termes d'addition de grandeurs (articulée avec l'ordre).

Chapitre 5. Conclusions et perspectives

La mathématisation des grandeurs et des unités permet de rendre visibles plusieurs savoirs qui interviennent, de façon transparente mais critique, dans l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique scolaire. C'est en résumé me semble-t-il ce qu'il faut retenir de cette note de synthèse. Ainsi, en dépit de « l'évanescence de la théorie des ensembles » (Radford, 2021, ma traduction) dans l'enseignement aujourd'hui, les élèves continuent d'avoir besoin de savoirs spécifiques sur les grandeurs pour apprendre l'arithmétique et ces besoins semblent à de nombreuses occasions ne pas être satisfaits, en France et dans d'autres parties du monde. En un sens, ils ne peuvent être satisfaits dans la mesure où l'arrière-plan ensembliste, même évanescent, ne leur donne pas droit de cité dans ces institutions d'enseignement. Ces savoirs mathématiques que nous avons rendu visibles ne s'inscrivent pas dans la transposition de la théorie des ensembles qui conduit à l'arithmétique scolaire à enseigner. Peut-être pourraient-ils, dans une certaine mesure, être pris en charge didactiquement. L'enquête menée suggère que même s'ils étaient, ce ne pourrait être que partiellement. On imagine en effet mal comment une propriété telle le théorème de Pythagore pourrait n'être prise en charge que didactiquement. Dans la mesure où ils semblent non seulement nécessaires mais où ils interviennent incidemment, cette absence de prise en charge mathématique en fait des savoirs transparents au sein de l'institution.

Ainsi, en utilisant des méthodologies ancrées dans l'analyse mathématique et dans l'observation de l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique scolaire aujourd'hui en France, et conséquemment probablement assez différentes de celles de Davidov, nous arrivons à une conclusion qui me semble proche de la sienne. Par ailleurs, au-delà de la définition du nombre comme « nombre de fois » pour l'itération d'une quantité, nous avons précisé certaines propriétés des quantités dont la présence – dans le savoir à enseigner pour leur enseignement et leur apprentissage – semble critique pour produire des raisonnements efficaces sur les quantités, la mesure des grandeurs, le nombre, les opérations, le calcul et la proportionnalité. Je reviens dans cette conclusion sur trois dimensions qui me semblent essentielles dans mon travail. La première partie concernera les savoirs mathématiques de l'arithmétique sous-jacents dans ce travail notamment les propriétés que j'ai appelées P et M. Au regard la partie précédente, la deuxième partie proposera de réinterpréter l'arithmétique dans le but d'avancer sur ce qui pourrait constituer une référence pour le savoir à enseigner de l'arithmétique scolaire et en particulier d'envisager des raisons d'être. La troisième en considérant les questions d'enseignement et d'apprentissage de l'arithmétique scolaire reviendra sur la transparence des savoirs. Elle se situera donc du côté du savoir enseigné et du savoir appris et explorera quelques facettes de ces savoirs. Dans la suite de ces conclusions, deux perspectives seront envisagées, sur l'enseignement-apprentissage de la proportionnalité, sur l'élaboration d'une référence pour le savoir à enseigner en arithmétique.

1 Les savoirs sur les grandeurs

La définition des grandeurs par Bézout est on ne peut plus classique « tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution ». Elle est formulée dans les mêmes termes que

dans l'Encyclopédie publiée peu avant d'ailleurs. Il semble finalement que ce sont les propriétés nécessaires pour que les nombres et les opérations aient les *bonnes* propriétés qui permettent de déterminer quelles sont les propriétés des grandeurs chez Bézout. C'est un point de vue très semblable à celui de Dhombres sur les grandeurs dans les *Éléments* d'Euclide : « sera *ipso facto* conçue comme grandeur celle qui satisfera les requis de la théorie construite » (1997, p. 5).

1.1 La propriété P

Dans cette note, j'ai mis en évidence l'importance de la propriété P (chapitres 1, 3 et 4). Très tôt, je me suis intéressée à la propriété P. Dans les approches scolaires, c'est en général l'ordre des grandeurs qui est introduit en premier. Pour autant, en adoptant un point de vue préliminaire sur l'inclusion des objets, si A et B sont une partition de C et si l'on souhaite que l'ordre et l'addition des quantités soient en adéquation avec des raisonnements sur le réel, la partition contraint la façon dont la somme et l'ordre des grandeurs peuvent être appréhendés. En effet, si $A \subset B$ et $A \neq B$, alors $\underline{A} < \underline{B}$ (je note \underline{X} la grandeur attachée à l'objet X) et si $A \cup C = B$ (et $C \cap A = \emptyset$), alors $\underline{A} + \underline{C} = \underline{B}$. Conséquemment, le complémentaire (C) de A dans B correspond à la soustraction. Autrement dit, si $\underline{A} < \underline{B}$, la quantité \underline{C} est ce qu'il faut ajouter à \underline{A} pour avoir \underline{B} , $\underline{A} + \underline{C} = \underline{B}$. La propriété P apparaît dans les notions communes des *Éléments* : le tout est plus grand que la partie.

Le chapitre 3 est consacré à la propriété P. Les manifestations de P sont multiformes, même si elle est souvent transparente. J'ai caractérisé deux types de manifestations de P. Soit c'est uniquement P qui intervient, soit P intervient dans un raisonnement par l'absurde dans lequel l'ordre total de l'ensemble des grandeurs (et les propriétés d'associativité et de commutativité de l'addition) intervient également. La propriété P semble apparaître dans la plupart des définitions des grandeurs (aux chapitres 1 et 3), qu'elles soient formulées par Euclide (le tout est plus grand que la partie) ou dans une perspective contemporaine (pour tout a , pour tout b , $a > b$ si et seulement si il existe c tq : $a = b + c$). Dans les théories des grandeurs, P associée aux autres propriétés (ordre total, commutativité, associativité de l'addition) permet d'établir notamment la régularité de l'addition, l'existence de la soustraction, la régularité de la multiplication par un entier, la compatibilité de l'ordre avec l'addition. Dans le chapitre 3, dans un ensemble de contextes didactiques variés, nous l'avons identifiée d'abord dans une utilisation naïve (en lien avec l'existence de la soustraction), dans un questionnaire sur la longueur réalisé dans le cadre de ma thèse, une difficulté locale d'élèves de fin de primaire à reconstituer un morceau manquant, à l'aide d'un instrument de report de longueur. Dougherty et Venenciano mentionnent P comme outil pour le raisonnement dans l'ingénierie de Davidov, encadrée par une théorie des grandeurs dans laquelle P intervient. En revanche, P manque dans les travaux s'inscrivant dans le champ de la psychologie cognitive, dans la revue de littérature de Smith & Barrett (Chapitre 3), et aussi dans les niveaux de significations de Thompson (chapitre 4). Ces auteurs s'inscrivent dans le paradigme piagétien, et l'échelon le plus bas (après l'ordre) est lié au report de l'unité, comme chez Piaget. Peut-être qu'on ne voit que ce qu'on regarde. Il est raisonnable de faire l'hypothèse

que l'introduction de la propriété P pourrait constituer une alternative pour caractériser ce niveau ou en donnerait une caractérisation un peu différente.

1.2 La propriété P dans des raisonnements complexes

La propriété P intervient au chapitre 3 dans des raisonnements complexes (absurde et ordre total, associativité et commutativité de l'addition). Dans les travaux de Cortina & Visnovska, c'est la compatibilité de l'addition des grandeurs avec l'ordre (qui se déduit de P dans la théorie) qui est utilisée implicitement. Par ailleurs, même si la formalisation du raisonnement n'est pas proposée par ces auteurs, c'est un raisonnement par l'absurde (ou contraposée) qui permet d'obtenir que l'ordre des nombres d'unités est inverse à l'ordre des tailles des unités. L'occurrence la plus troublante de P dans ce chapitre est la double description d'un échec sur l'apprentissage de l'aire, chez Douady et chez Perrin-Glorian, deux chercheuses qui ont beaucoup travaillé ensemble. Les deux exemples portent sur des divisions de figures. Au-delà de ce point commun, les deux descriptions précises et les interprétations au combien utiles pour la reconstruction semblent, au départ, étrangères l'une à l'autre. Douady conclut sur une maturité psychique insuffisante des élèves (une conclusion fondée sur le refus pragmatique des élèves d'accepter que deux découpages différents en un même nombre de parts égales d'une même surface produisent des parts de même taille) et Perrin-Glorian sur des gestes professionnels inadaptés de la part des enseignants.

1.2.1 La notion de quantité

La relecture de ces épisodes avec la propriété P (dans un raisonnement complexe) permet alors de faire apparaître l'égalité de deux quantités sous un jour nouveau. Le raisonnement (par l'absurde), supposant la fausseté de l'égalité et donc qu'une des deux quantités est nécessairement plus grande que l'autre, permet de conclure à l'égalité sans nécessité (et d'ailleurs sans possibilité) de réaliser la recombinaison d'une surface en l'autre en l'autre. Sans préjuger de la capacité des élèves à effectuer le raisonnement par l'absurde (néanmoins peut-être proche de celui qu'on observe chez Cortina & Visnovska, présenté dans le même chapitre, avec des élèves de grade 4 – CM1), la relecture de ces travaux pionniers en didactique montre la transparence de la propriété P pour les chercheuses, bonnes mathématiciennes au demeurant. Cette propriété est aussi absente dans l'enseignement donné à des élèves de 13-14 ans sur l'aire en Inde, enseignement qui ne permet pas à tous les élèves d'accéder à la formule de l'aire du triangle rectangle, en divisant par deux l'aire du rectangle sans reconstituer les unités par découpage recollement (Rahaman & Subramaniam, 2016). Le raisonnement, généralisable, permet d'établir la régularité de la multiplication de l'aire par un entier, et donc éclaire la possibilité de la division des figures. Une autre utilisation de la propriété P que je n'ai pas cherché à rencontrer dans mes travaux est celle, un peu plus élémentaire, qui permet d'établir l'égalité de deux quantités par complément. Je l'ai évoquée lors de la présentation des axiomatiques des grandeurs au chapitre 3. La propriété P réapparaît ensuite au chapitre 4, pour interpréter la double définition du nombre (concret) de Bézout. Cette interprétation semble nécessiter d'attribuer aux quantités du traité d'arithmétique de Bézout la propriété P, a posteriori (cf. Dhombres).

1.2.2 La notion d'unité (relative)

Une fois la propriété P attribuée, il est possible de caractériser la notion d'unité chez Bézout : « L'unité est une quantité que l'on prend (le plus souvent arbitrairement) (§4) ». Cette définition à la fois théorique et générale me permet d'introduire la notion d' « unité relative », une unité de grandeur définie en appui sur et relativement à une autre définie préalablement. Une analyse du texte de Bézout montre que cette notion est identifiée par Bézout comme un savoir nécessaire pour appréhender les notions telles que la numération décimale, les fractions, la multiplication. Une relecture de travaux de didactique (notamment mes propres travaux sur la numération des entiers) montrent que l'enseignement, l'apprentissage ou la mobilisation de cette notion sont identifiés par la recherche, comme une connaissance nécessaire à l'apprentissage de notions mathématiques aussi variées que les fractions dès le début de l'apprentissage (chapitre 3 -Perrin et chapitre 4 –Cortina & Visnovska), la numération décimale des entiers (chapitre 2 – conclusion du chapitre 2) ou des décimaux (chapitre 4 – articulation système métrique – décimaux), le calcul mental dans le champ additif (chapitre 2 – Rinaldi & Chambris), la proportionnalité (chapitre 1)¹. Autrement dit, si la notion d'unité n'est pas disponible, les notions qui en dépendent dans l'organisation logique des savoirs ne peuvent être apprises dans leur *épaisseur* ou leur complexité.

Il en va par exemple ainsi de l'interprétation de la numération positionnelle en unités simples. L'enseignante Édith (chapitre 2, Batteau & Clivaz) recompose en unités simples les deux centaines, la centaine n'est pas interprétée comme une unité. Plus largement, la reconstruction que j'ai proposée de la théorie de la numération en unités simples montre au niveau du savoir mathématique la possibilité de l'absence d'unités autres que un dans l'enseignement de la numération (qui n'est plus positionnelle), tout en gardant une consistance (au plan logique). Avec sa valence sémiotique groupe, la centaine peut être interprétée comme un groupe de dix groupes de dix. Dans les deux cas, c'est la nature des groupes et objets assemblés (et leurs nombres) qui font que le paquet, une fois réalisé, s'appelle « une centaine ». Le mot centaine ne renvoie pas à une quantité d'objet et la quantité d'objets à l'intérieur de la centaine ne peut se calculer qu'en unités simples puisqu'il n'y qu'une sorte d'unités (des uns) dans l'institution.

La description précise par Perrin des difficultés des élèves est de cette nature : les élèves ont besoin de recomposer l'objet en 4 morceaux pour affirmer que c'est un quart. Le quart n'est pas une taille », c'est ce qu'il faut prendre 4 fois pour faire 1. Dans le cas de Perrin, nous avons vu que le raisonnement par l'absurde impliquant l'ordre total entre les « morceaux » associé à P permet, mathématiquement, de faire le pas supplémentaire qui permet de comparer les objets indépendamment de leur *composition* et de conclure à l'égalité de leur taille (aucun des deux n'est plus grand que l'autre) (Chapitre 3).

¹ Faute d'être parvenue à caractériser la conception des grandeurs dans le point de vue unificateur sur la multiplication des réels développé par Iszak et Beckmann (2019), je ne l'inclus pas dans cette liste. Cependant, la définition de la multiplication par Bezout est unificatrice (au moins jusqu'aux rationnels) de la même façon que celle d'Izsak et Beckmann.

Ces unités relatives interviennent aussi pour interpréter des relations multiplicatives : 'A est trois fois plus que grand B' ou 'B est trois fois plus petit que A' renvoie à la possibilité de concevoir A et B comme des quantités. Le registre de la mesure des grandeurs permet de reformuler ces relations : 'A mesure 3 quand on prend B comme unité' et aussi 'B mesure 1/3 quand on prend A comme unité'. Si par exemple, A est un septième ou 4 billes. Un septième ou '4 billes' doivent être considérés comme des quantités et aussi comme des unités (relatives aux quantités '1' ou 'une bille').

1.3 La propriété M

L'autre propriété des grandeurs mise en évidence est la propriété M, elle n'apparaît qu'à partir du chapitre 4. Même si j'avais croisé incidemment M dans mes activités antérieures (en formant des enseignants à l'enseignement du calcul mental ou pendant mes cours de didactique des mathématiques dans le master recherche), ce sont bien la professeure du LÉA de Bordeaux et ses élèves, notamment CLEM et la résistance des autres, dans les travaux avec Coulange et Train qui nous ont conduits à enquêter, pour finalement identifier M comme un savoir transparent. Qu'est-ce que la propriété M ?

Cette propriété affirme que si l'on considère une quantité Q mesurée avec une unité U et qu'on prend une unité p fois plus grande ou plus petite que U et le même nombre d'unités, la quantité obtenue est elle-même p fois plus grande ou plus petite que Q . Les types de quantités sur lesquelles M s'appliquent doivent pouvoir être p fois plus grandes ou plus petites, qualité, on l'a vu précédemment, qui peut être obtenue comme une conséquence de P. Bézout fait intervenir M, incidemment, très tôt dans le traité, à propos de la numération décimale, pour obtenir un nombre dix fois plus grand en décalant les chiffres de l'écriture décimale.

Plusieurs questions relatives à M restent en suspens. Est-ce que M se déduit des autres propriétés des grandeurs ou est-ce un axiome supplémentaire ? Dans nos travaux avec Coulange et Train, M est en tension. Eux favorisent la compensation alors que je favorise M. De mon point de vue, la différence porte sur l'ajout d'une propriété que je n'ai pas encore étudié : n fois moins d'unités donnent une grandeur n fois plus petite. Des connaissances supplémentaires sur les nombres et la multiplication sont-elles nécessaires pour obtenir cette propriété, le cas échéant lesquelles ? Ceci étant dit, M ou la compensation sont un « couteau suisse » dans l'arithmétique de Bézout. Ces propriétés sont utilisés pour établir un très grand nombre de propriétés, à la fois des propriétés d'ordre calculatoire liées à la numération, l'équivalence des fractions, les formules de la multiplication des fractions en appui sur le sens, etc., mais aussi les propriétés de la multiplication entre *nombres abstraits*, à savoir la commutativité, qui combinée à M permet d'obtenir l'associativité de la multiplication des nombres abstraits (mais Bézout n'évoque pas cette dernière propriété).

Sur ces différentes propriétés et notions de l'arithmétique, des ingénieries pourraient être développées. D'ailleurs, Surroca, dans son mémoire de master que je dirige a conçu une première ingénierie dont les analyses sont encore en cours sur la propriété M.

2 L'arithmétique comme science des quantités quand elles sont exprimées en nombres

Dans les premières lignes des notions préliminaires Bézout indique que l'arithmétique est une science des quantités « qui ne considère les quantités qu'en tant qu'elles sont exprimées en nombres ». Les grandeurs sont habituellement vues comme des objets extérieurs à l'arithmétique. La mise en évidence de ces propriétés permet de reposer la question des raisons d'être de l'arithmétique.

2.1 L'écologie de la propriété M dans le traité de Bézout

La propriété M a (au moins) deux facettes, 1) **ce qu'elle dit sur le monde**, comme idéalisation de la réalité (un grossissement / rétrécissement des unités d'une quantité – grossies ou rétrécies un certain *nombre de fois*– qui se répercute globalement sur la quantité qui est elle-aussi grossie / rétrécie le même *nombre de fois*), 2) **ce qu'elle permet de faire**, en l'occurrence produire de nombreux raisonnements dès lors qu'une unité, un certain nombre de copies de cette unité (*un nombre de fois cette unité*) et un changement de taille de cette unité (*un autre nombre de fois cette unité*) peuvent être en jeu, raisonnements qui permettent d'établir des techniques générales de changements d'unités (incluant les fractions) ou de calculs impliquant notamment la multiplication ou la division. Cependant, il me semble important de signaler que ces deux facettes « marchent ensemble » : ce qu'elle dit sur le monde *est ce qui* permet de faire. Ces différents *faire* trouvent leur place dans les différents registres d'expression de l'arithmétique, éventuellement combinés : la numération décimale, les opérations arithmétiques, les fractions, l'expression langagière des unités (dizaines, centaines, centimètre, minute, etc.).

Pour préciser ces éléments, je présente ci-après (figure 17) une analyse praxéologique de la tâche 345×10 , qui me semble pouvoir être faite dans le cadre de l'arithmétique de Bézout, en montrant comment la strate théorique permet d'éclairer les autres composantes de la praxéologie. Cette tâche est donc une tâche de calcul. Dans le cadre des praxéologies de recherche, l'arrière-plan technologico-théorique est décrit comme suit par Bosch et coll. (2017) :

[The theoretical block or logos] includes the technological discourse (the logos of the technique), composed of descriptions and explanations that make the techniques understandable and enable the production of new ones. It also contains a second level of justification simply called the theory, which gives meaning to the problems, allows for the interpretation of the techniques and serves as a basis to the technological descriptions and justifications. In this sense, the theory provides the main notions, assumptions and unquestioned principles of the research (p. 40).

Tâche (La théorie Θ donne du sens aux problèmes)	Calculer 345×10 Écrire en chiffres la quantité dix fois plus grande que 345
Technique (La théorie Θ permet l'interprétation des techniques)	Écrire un zéro à droite - Décaler chaque chiffre d'un rang vers la gauche ; écrire un zéro à droite, si besoin Chaque rang indique un ordre d'unités, dix fois plus grand que celui qui est à sa droite.

<p>Technologie Description et explication de la technique (La théorie Θ sert de base aux descriptions et aux justifications)</p>	<p>345 : cumul additif des nombres d'unités des différents types (3 __, 4_, 5) Propriété M : Une quantité (exprimée comme un nombre d'unités) est rendue dix fois plus grande, lorsqu'elle a le même nombre d'unités, mais des unités dix fois plus grandes (dans le registre des unités). Réinterpréter M, dans le registre de la numération positionnelle : comme chaque rang indique un ordre d'unités dix fois plus grand que celui qui est à sa droite, pour multiplier par dix, il suffit de décaler chaque chiffre d'un rang vers la gauche. Dix fois plus grand que chacune des unités de 345 : dix fois plus grand que 5, c'est 5_ ; dix fois plus grand que 4_, c'est 4__ ; dix fois plus grand que 3__ c'est 3___.</p>
<p>Théorie (Θ)</p>	<p>345 = quantité (nombre) Le nombre (345) comme expression de combien d'unités composent une quantité Dix fois plus grand que : quantité (345), le nombre dix comme <i>nombre de fois</i> Propriété M : Une quantité (exprimée comme un nombre d'unités) est rendue dix fois plus grande, lorsqu'elle a le même nombre d'unités, mais des unités dix fois plus grandes La numération positionnelle, expression d'une quantité comme la juxtaposition de nombres d'unités de dix en dix fois plus grandes, de droite à gauche.</p>

Figure 17. – Interprétation d'une praxéologie dans l'arithmétique comme expression de la mesure des quantités

Les notions préliminaires de l'arithmétique de Bézout situent l'ensemble du traité dans le cadre de la mesure des quantités. Je considère que la propriété M est une propriété qui doit s'interpréter dans ce cadre. L'arithmétique étant la science des quantités quand elles sont exprimées en nombre, les différentes notions de l'arithmétique sont alors des expressions des quantités : la numération décimale, les fractions, le symbolisme arithmétique² et aussi les expressions avec des nombres d'unités (4 dizaines, 5 toises). Ce tableau montre que l'arrière-plan théorique de la mesure des quantités permet de réinterpréter la tâche comme une question d'unités et de nombre d'unités. Il éclaire la technique, sert de base aux technologies, il est possible de proposer des discours descriptifs ou explicatifs en référence à cet arrière-plan. La tâche de calcul (l'expression arithmétique 345×10) est réinterprétée comme une question relative à une quantité qu'il conviendrait de « faire grossir 10 fois ». La propriété M s'applique en faisant *grossir* dix fois les unités du nombre (exprimé en écriture positionnelle). Si la technique semble se dérouler, de façon interne à l'écriture positionnelle, l'arrière-plan de la mesure des quantités permet d'interpréter l'écriture chiffrée comme l'expression de nombres d'unités de plusieurs types.

J'ai donné dans la note au chapitre 4 d'autres exemples de technologies pour le calcul ou les fractions dans le registre des nombres d'unités.

² Au plan d'un travail historique, il faudrait interroger par ailleurs plus avant l'absence totale de symbolisme arithmétique dans le traité d'arithmétique de Bézout.

2.2 L'expression de la mesure des quantités comme raison d'être de l'arithmétique scolaire

Dans l'arithmétique de Bézout, un nombre est *un nombre de fois (une unité)*. Il y a ainsi les nombres concrets, ceux dont l'unité est exprimée, 4 toises mais aussi 4 tiers, et les nombres abstraits, ceux dont l'unité n'est pas exprimée, comme 4 ou 4 fois. Il me semble qu'on peut considérer que les nombres abstraits ont une unité implicite qui est le nombre 1.

Considérer conjointement que l'unité est intégrée dans le nombre et que l'arithmétique est la science des quantités quand elles sont exprimées en nombre permet de voir l'arithmétique sous un angle nouveau, me semble-t-il. En effet, au regard de ce qui précède, 4 toises est un objet de l'arithmétique au même titre que 3×4 (expression dans laquelle 3 est une unité de taille 3 prise 4 fois), de même 4 dizaines (l'unité, une dizaine est prise 4 fois) ou encore 4 tiers ou $4/3$. Dans cette perspective, nombre de problèmes de l'arithmétique –je vais me limiter au champ multiplicatif faute d'avoir exploré ce qui se passe au plan du champ additif –peuvent être vus comme des questions, du type *quel est le nombre d'unités ?*, *quelle est la taille de l'unité ?*. Par exemple :

- a. Étant donné un nombre d'unités $a U$ et une autre unité V , déterminer b tels que $a U = b V$
- b. Étant donné un nombre d'unités $a U$ et un nombre b (dont on ne connaît pas l'unité), déterminer l'unité V pour que $a U = b V$

Une question comme « Combien de paquets de 8 cartes peut-on faire avec 56 cartes ? » peut être réinterprétée, selon (a), comme la recherche du nombre d'unités de taille 8 cartes dans une quantité de taille 56 cartes. C'est la division quotient. L'autre question « On a réparti 56 cartes dans 8 paquets tous identiques. Combien y a-t-il de cartes dans chaque paquet ? » peut être réinterprétée, selon (b), comme la recherche de la taille des unités quand on a mesuré une quantité de 56 cartes et qu'on a obtenu 8 unités. C'est la division partition. De même, la recherche du nombre d'unités u dans une quantité qui mesure $4/3$ quand on a pris des unités de taille $5/7 u$ s'interprète comme la multiplication de $5/7 u$ par $4/3$. L'écriture chiffrée par exemple, le nombre qui s'écrit 345, peut être interprétée avec les unités utilisées pour la numération '3 centaines 4 dizaines 5 unités' (un nombre *complexe* pour Bézout). Le problème de la numération dans une base est alors : étant donné un système d'unités, vérifiant certaines relations, exprimer une quantité dans ces unités en respectant certaines contraintes (liées aux relations).

Ce point de vue sur l'arithmétique amène à revisiter la question des raisons d'être liées aux grandeurs. Un résultat important de mon cours à l'école d'été de didactique des mathématiques en 2019, pour le thème « grandeurs et mesure » était que les unités relatives constituent une raison d'être des grandeurs. Dans leur introduction au thème, Pressiat et Cirade (2021, p. 167) indiquent : « tout au long de la scolarité, la question de la mesure des grandeurs engendre des besoins conduisant à la construction de systèmes de nombres de plus en plus élaborés. ». Le point de vue qui précède sur l'arithmétique permet de reposer le problème de la construction des systèmes de nombres en introduisant la construction d'un

ensemble d'unités. Étant donné une unité u (u peut être le nombre 1), les unités sous-multiples de u , c'est-à-dire les unités $v_1, v_2, v_3 \dots v_n, \dots$ telles que $i v_i = u$ (dont l'existence devrait être assurée par un axiome de divisibilité de la grandeur de l'espèce de u) permettent d'exprimer les quantités commensurables avec u sous la forme de nombres *concrets* $r_i v_i$. Un problème nouveau se pose avec l'extension aux incommensurables, problème qui n'est pas traité dans le traité d'arithmétique de Bézout³. De même, la numération positionnelle décimale découle de l'expression des nombres au moyen d'une combinaison d'unités dont les tailles sont de dix en dix fois plus grandes. Par ailleurs, de la même façon, l'inclusion d'unités dans l'arithmétique permet de voir les opérations de multiplication et de divisions comme des questions d'unités.

Dans le paradigme ensembliste, il n'y a qu'une seule unité. Il me semble alors que ce qui me semble être la principale raison d'être de l'arithmétique (classique) perd de sa visibilité.

2.3 Deux paradigmes en tension dans les travaux de didactique

Au chapitre 1, j'ai rapporté l'abandon du paradigme d'idéalisation de la réalité et l'apparition du paradigme formaliste, au tournant du 20^e siècle. Dans l'histoire cette rupture est concomitante de l'abandon des grandeurs aux origines des nombres et du choix des ensembles comme objets de base. Les travaux de Burali-Forti et Whitney semblent cependant montrer que le paradigme formaliste permet de définir les grandeurs (formellement) et de construire les nombres comme nombres de fois (chapitre 1). Cette approche est aussi celle de Bézout dans son traité d'arithmétique, écrit dans le paradigme d'idéalisation de la réalité (chapitre 4).

Pour les questions d'enseignement à l'école, si un paradigme mathématique est adapté pour les raisonnements, ce ne peut être que le paradigme d'idéalisation de la réalité. Le traité de Bézout s'inscrit dans ce paradigme et l'arithmétique y est l'expression de la mesure des quantités. Ceci signifie que l'arrière-plan de la lecture doit être celui d'un espace de grandeurs. Les objets qui y vivent sont seulement des grandeurs⁴ et rien d'autre.

Cette remarque éclaire me semble-t-il une différence (chapitre 4 section 4.1) entre l'approche de Polotskaia inspirée par Davidov (Polotskaia & Savard, 2021) et celle de Beckmann et Izsak (2019) s'inscrivant dans le paradigme dominant en mathématiques dans lequel les nombres peuvent apparaître comme des modèles des grandeurs. Polotskaia et Savard considèrent que la relation multiplicative exprime une relation entre des grandeurs, alors que les seconds considèrent qu'elle exprime une relation entre des nombres (qui expriment des mesures de grandeurs). Si la première permet de voir une relation multiplicative comme une mesure de grandeurs dans une unité, la seconde nécessite une opération (la multiplication) pour modéliser la relation ce qui nécessite un niveau de formalisation supplémentaire. C'est ce qui fait dire me semble-t-il à Polotskaia et Savard que : « Izsák and Beckmann (2019) [...]

³ Signalons que la construction des réels de Weierstrass s'appuie sur des *nombres* dits *complexes* qui sont des combinaisons finies de $r_i v_i$ (Boniface 2002).

⁴ Les nombres sont des grandeurs.

discuss situations that can be modeled by a multiplication operation. Our understanding is that, in situations to be understood and modeled mathematically, an arithmetic operation is not an appropriate mental tool to start with. » Dans l'arithmétique de Bézout, les grandeurs sont *dans* l'arithmétique, ce qui permet l'expression de la relation en termes d'unités et de nombres d'unités, en amont de la traduction de la relation en termes d'opération arithmétique.

3 La transparence des savoirs de l'arithmétique scolaire

Cette note a rendu visibles plusieurs savoirs transparents. Les savoirs transparents que nous avons rendus visibles vivent dans le savoir à enseigner d'autres institutions. En particulier, ils vivaient probablement dans l'institution dont le savoir à enseigner était l'arithmétique de Bézout, l'enseignement de l'arithmétique à l'école en France à la fin du 19^e siècle et au début du 20^e. Nous n'avons toutefois pas vu les propriétés P et M dans le traité d'arithmétique et nous n'avons pas étudié de manuels de la fin du 19^e siècle ou du début du 20^e siècle, sur ces questions. Dans la mesure où P est une notion commune des éléments d'Euclide, elle était sans doute connue. La propriété M était-elle connue par les professeurs ? Est-ce que ce que nous avons déduit de P sur la nature des quantités et des unités était explicité aux élèves ? Nous n'avons pas d'éléments de réponse sur ces questions. Nous pouvons toutefois interroger la situation actuelle au regard de ces transparences.

3.1 La difficulté à identifier les savoirs transparents

Pour identifier les savoirs transparents nous avons croisé plusieurs types d'analyses. Dans mes travaux anciens sur la numération (chapitre 2), c'est l'étude comparée des manuels scolaires qui m'avait permis de repérer d'abord la réduction de la valence instrumentale des dizaines, centaines, milliers, etc. que j'ai désignés génériquement alors par *unités de la numération*. J'ai ensuite identifié la modification de leur valence sémiotique. La communication de tels résultats, même au sein d'une communauté de recherche, est très difficile. En effet, les résultats sont situés théoriquement (dans la TAD) et le savoir transparent, même s'il relève des mathématiques – donc a priori moins situé théoriquement –, n'est pas identifié comme un savoir mathématique existant dans un texte. Ce n'est qu'avec mes travaux sur les unités relatives et l'analyse du traité de Bézout qui m'a alors servi de promontoire d'observation que les unités de la numération sont vraiment devenues des unités *en* numération. Le traité de Bézout a par ailleurs permis de situer la propriété M, dans les mathématiques. Pour comprendre la nature des savoirs associés à P et M, nous avons travaillé sur des corpus variés mais qui ont une particularité commune, celle de rapporter des pratiques de classe dans lesquelles les élèves ont l'opportunité de résoudre des problèmes de mathématiques consistants (provenant de la littérature de recherche rapportant des ingénieries ou d'un travail collaboratif dans le cadre d'un LéA). En d'autres termes, nous avons étudié des contextes dans lesquels ces savoirs vivaient, même s'ils étaient, pour nous, initialement, transparents. Le questionnement des situations, avec des outils didactiques nous ont permis progressivement de les identifier et de les caractériser. J'ai par ailleurs réalisé un travail mathématique en m'affranchissant de l'horizon ensembliste dominant, ce qui a nécessité en

outre une étude historique et épistémologique. Nous avons réalisé un travail bibliographique dans plusieurs directions, notre champ et des champs connexes.

Une caractéristique des savoirs transparents est qu'ils sont invisibles. L'identification des savoirs transparents me semble poser une difficulté de la même nature que celle de la mise en évidence d'une maladie qui aurait des symptômes multiformes et diffus et dont on ne connaîtrait pas l'existence. De façon tout à fait intéressante, nous avons repéré la transparence d'un même savoir chez trois chercheurs : la régularité de la multiplication d'une aire par un entier. Il se trouve que ces trois chercheurs ont travaillé ensemble, au moins par paires : Douady avec Perrin, Perrin avec Butlen, dans des travaux sur les fractions. Les trois chercheurs donnent chacun une explication de la *même* difficulté rencontrée et les trois explications sont différentes. Douady situe le problème au niveau de la maturité des élèves, Perrin au niveau des pratiques des enseignants (la décontextualisation trop rapide), Butlen au niveau d'un malentendu sur l'activité mathématique par les professeurs des écoles (une croyance en la manipulation alors qu'il faudrait faire produire des raisonnements). Au regard des difficultés connues dans les pratiques des professeurs des écoles et dans le développement des élèves, ces trois explications sont raisonnables. Elles correspondent à des difficultés qu'on peut facilement imaginer chez les élèves ou chez les enseignants. Il me semble alors que ces variations dans les explications sont tout à fait symptomatiques des problèmes posés par la transparence des savoirs, quand elle est située au niveau institutionnel, et en particulier par la difficulté que soulève leur identification. Dans la mesure où une explication rationnelle réside dans un objet qui n'existe pas dans l'institution, il n'y a plus d'explication rationnelle possible dans l'institution.

Cette transparence pose alors de façon aiguë la question de la formation des maîtres. Tout d'abord, comment former des enseignants si une partie importante des savoirs de la discipline n'est identifiée ni dans les textes pour le savoir à enseigner, ni par les formateurs spécialistes de la discipline ? Ensuite, comment former à des gestes professionnels, tels l'institutionnalisation, la mise en commun, la mise en activité des élèves, dont les didacticiens considèrent qu'ils ont une composante disciplinaire importante si les savoirs disciplinaires sont mal ou ne sont pas identifiés ?

3.2 Question macro-didactique : définir le savoir à enseigner

Les savoirs que nous avons identifiés trouvent un habitat mathématique naturel dans l'arithmétique de Bézout. Dans cet habitat, l'arithmétique s'interprète comme la science des quantités quand elles sont exprimées en nombres. Pourtant, les analyses que nous avons faites montrent qu'il n'y a pas besoin que l'arithmétique de Bézout constitue l'arrière-plan théorique de l'arithmétique à enseigner pour qu'ils se manifestent. C'est d'ailleurs, en un certain sens, le cœur du problème. Ces savoirs se manifestent car ils sont aux fondements psychologiques et ontologiques (dirait Thom) des grandeurs quand elles fondent le nombre.

Liping Ma (2013) donne une description de phénomènes curriculaires qui se produisent aux États-Unis, dont elle attribue la cause à un défaut dans les fondements du savoir à enseigner en arithmétique. Pour établir ses résultats elle réalise une comparaison entre le curriculum

chinois qui est fondé sur une arithmétique de type classique (actualisée depuis le début du 20^e siècle en intégrant par exemple les propriétés des opérations) et les évolutions du curriculum américain depuis le début du 20^e siècle, en particulier les évolutions depuis les années 1970. En particulier, elle explique que faute d'une colonne vertébrale solide, les programmes américains sont instables, qu'il existe des discontinuités pour les élèves et qu'il y a un manque de cohérence entre les concepts. Sans reprendre les analyses de Ma, je rapporte quelques-unes de ses conclusions. L'instabilité est liée à la facilité de modifier des contenus qui ne sont pas solidement liés les uns aux autres. Cette instabilité conduit à une difficulté dans la formation car il est impossible de capitaliser les expériences. Dans la mesure où les contenus sont juxtaposés les uns aux autres, les continuités ne sont prises en charge qu'à la marge et sont fragilisées lorsque les contenus sont modifiés localement. Ma indique que le trop grand nombre de micro-thèmes juxtaposés conduit à négliger certains d'entre eux, ce qui à terme crée des discontinuités dans les apprentissages au fil des années. Le manque de cohérence se manifeste par exemple dans l'approche de la multiplication qui est différente pour les entiers et les nombres non entiers (alors que l'approche par l'unité est cohérente pour tous les types de nombres). Les savoirs que j'ai identifiés comme transparents sont aux fondements de l'arithmétique classique de Bézout, la notion d'unité (apportée possiblement par P), la propriété M. Il s'agit d'une, si ce n'est la seule possible, colonne vertébrale de l'arithmétique scolaire. Faute de colonne vertébrale mathématique, le choix et la définition même des notions à enseigner sont fonctions des acteurs sollicités.

3.3 Question micro-didactique : raisonnement additif et raisonnement multiplicatif

L'autre aspect de nos résultats sur la transparence des savoirs est celui de connexions que nous avons commencé à identifier entre les savoirs transparents, dans l'arithmétique scolaire en France, et les travaux au plan international dans le champ « du raisonnement additif et du raisonnement multiplicatif ».

Thompson distingue des *levels of meaning* des grandeurs. L'aspect caractéristique du niveau Steffe Magnitude consiste en la capacité à identifier une même unité pour mesurer deux quantités de la même espèce, alors qu'au niveau Measure Magnitude, la grandeur est vue comme constituée d'un nombre d'objets auxquels n'est pas attaché une taille, point de vue que je rattache à la *grandeur par recomposition*. Thompson (Chapitre 4), par ailleurs en appui sur les travaux de Steffe, considère que cette différence est caractéristique du passage entre raisonnement additif et raisonnement multiplicatif, un problème fondamental en didactique des mathématiques. Ces travaux sont peu connus en France.

D'une part nous avons clairement identifié l'articulation entre les niveaux Measure Magnitude, Steffe Magnitude et Wildi Magnitude de Thompson et coll. avec les observations de Perrin (chapitre 3) et celles faites au LÉA Carles Vernet. Pour les niveaux Measure Magnitude et Steffe Magnitude d'une part, nous nous appuyons sur les observations de Perrin dans le traitement d'une tâche par les élèves. Nous nous appuyons par ailleurs sur les observations réalisées au sein du LÉA avec le raisonnement de CLEM produit dans une tâche au niveau Wildi Magnitude. L'hypothèse de l'indisponibilité de la notion de quantité dans la

classe conduirait l'enseignante à transformer un raisonnement au niveau Wildi Magnitude en un raisonnement au niveau Measure Magnitude afin de diffuser une explication aux élèves.

Au-delà de ces mises en évidence contextuelles, l'apport de notre travail est la mathématisation de ces *levels of meaning*. Pour le moment, nous n'en sommes qu'à des hypothèses théoriques au sens où nous identifions des savoirs mathématiques qui, s'ils étaient utilisés par les élèves (et nous n'avons pas d'étude concernant les conditions de la maîtrise de ces savoirs ou les moyens d'y parvenir), dans des types de raisonnements que nous avons mis en évidence, permettraient de témoigner de l'accès à ces *levels of meaning*. Les analyses théoriques (chapitres 3 et chapitre 4) nous encouragent à engager un travail d'ingénierie pour mettre à l'épreuve ces résultats théoriques.

Une interprétation de l'apport de P (associé à l'ordre total et au raisonnement pas l'absurde) (chapitre 3) serait donc que : *apprendre les types de raisonnements associés à P à propos de l'égalité des quantités dans un partage en parts égales pourrait permettre d'accéder à la notion de quantité (du type de celle qu'on rencontre chez Bézout) et au raisonnement multiplicatif*. De façon troublante, de même que P utilisée par l'absurde avec l'ordre total pourrait conduire au niveau Steffe magnitude, M semble conduire au niveau suivant de Thompson, le niveau « Wildi magnitude ».

Dans l'étude des conditions sur les quantités dans le traité de Bézout (chapitre 4), une analyse mathématique semble permettre de mettre en évidence ce qui pourrait ressembler à deux raisonnements l'un de type additif, l'autre de type multiplicatif, dont la nature dépend de la nature de ce qui est compté. Le raisonnement additif opérerait sur la grandeur par recomposition (et la multiplication par un entier ne serait pas régulière) alors que le raisonnement multiplicatif opérerait sur la quantité (et la multiplication par un entier serait régulière).

Des indices supplémentaires nous confortent dans cette interprétation. Dans certains pays d'Asie du Sud-Est, le raisonnement multiplicatif semble être mieux maîtrisé (Thompson, et coll., 2014) ou les tâches proposées aux élèves par exemple dans le domaine de la proportionnalité semblent être plus variées (cf. Beckmann & Izsak, 2015 et section suivante sur les perspectives). Les éléments rapportés par Ma suggèrent que l'arrière-plan théorique dans certains pays d'Asie du Sud-Est pourrait être du type de celui qu'on trouve dans l'arithmétique classique. Dans des travaux en cours avec Batteau, sur l'arithmétique japonaise, nous avons commencé à explorer cette question.

Dans la suite de ces conclusions, je présente deux perspectives, l'une sur l'enseignement-apprentissage de la proportionnalité, l'autre moins développée, qui ne constitue pas à proprement parler une perspective de recherche, sur l'élaboration d'une référence pour le savoir à enseigner en arithmétique.

4 Transparence des savoirs dans l'enseignement de la proportionnalité

Une étude de l'histoire de la transposition didactique de la proportionnalité est l'objet de la section 3 du chapitre 1. La transposition actuelle de la notion laisse apparaître plusieurs problèmes sur lesquels je reviens maintenant en les complétant par d'autres éléments. Ce retour me permettra d'identifier ce qui me semble constituer un chantier de recherche dans lequel je pourrai diriger plusieurs thèses.

J'ai montré au chapitre 1, comment l'explicitation des grandeurs permet de rendre visible plusieurs degrés de complexité conceptuelle de la proportionnalité et que ces degrés sont invisibles, dans le savoir, quand on prend l'application linéaire numérique comme modèle pour la proportionnalité. Ce choix institutionnel, loin d'être spécifique au contexte français, a permis un *décrochage* entre les notions accessibles par des raisonnements qui s'appuient sur la réalité et le modèle mathématique retenu pour l'enseignement, et en particulier la mise en avant de la notion de coefficient de proportionnalité. Ce choix pourrait alors avoir pour conséquences la manifestation de savoirs transparents, à différents stades de l'apprentissage. En effet, si des élèves produisent spontanément des raisonnements dans le domaine de la proportionnalité, il y a de fortes chances que ces raisonnements s'appuient des propriétés élémentaires de la proportionnalité, celles qui sont peu mathématisées par l'application linéaire numérique. En particulier, au chapitre 1, j'ai mentionné, en suivant Freudenthal, le « principe d'uniformité » qui pourrait alors être un « bon candidat » à la transparence. Il y a cependant d'autres candidats possibles.

4.1 Interactions entre didactique des mathématiques et didactique des sciences physiques et chimiques : l'invariant des situations de proportionnalité

J'ai engagé des réflexions avec des collègues du LDAR (Javoy et Decroix, didacticiennes des sciences physiques et chimiques) sur l'interdisciplinarité entre mathématiques et sciences physico-chimiques. Ces regards croisés déplacent les questions. En sciences, l'enjeu n'est pas l'apprentissage de la résolution de problèmes de proportionnalité ou de la modélisation de situations comme situations de proportionnalité. L'enjeu est l'apprentissage de nouvelles grandeurs, spécifiques du domaine, la vitesse, la concentration, la densité, la masse volumique, etc. qui permettent de décrire, puis de prédire des phénomènes physico-chimiques.

En sciences physiques et chimiques, le phénomène de densité est appréhendé qualitativement et perceptivement dans des expériences de type *flotte / coule*, dès l'école maternelle. L'enseignement des sciences rencontre néanmoins des difficultés à proposer un savoir à enseigner qui permettrait aux élèves de faire le lien entre ces premières perceptions et les « formules » finales. Des difficultés d'élèves (à la fin du lycée) ont été documentées par Akatugba (Akatugba & Wallace, 1999). Par exemple, connaissant la masse volumique de

l'aluminium, $2,70 \text{ g/cm}^3$, un élève est invité déterminer la masse de 50 cm^3 ⁵. Dans un premier temps, il résout le problème en utilisant la formule de la masse volumique. Le chercheur invite alors l'élève à utiliser the « ratio method » pour résoudre le problème. L'élève déclare : « I can see from the question that it won't be easy to use ratio ». Le chercheur demande : « Why not ». L'élève répond : « there are two values there [2,70 et 50], and for you to be able to solve it using ratio, there has to be more than two, like maybe three or so. That is where formula comes in. ». L'élève cherche trois valeurs pour faire fonctionner une règle de trois. Il n'en trouve pas. Il ne voit pas la valeur de la grandeur quotient $2,70 \text{ g/cm}^3$ comme exprimant une relation entre deux grandeurs en proportion (une masse et un volume) dans la situation, il ne voit pas les deux valeurs $2,70 \text{ g}$ et 1 cm^3 pour chacune de ces grandeurs. Javoy (Javoy, Decroix & de Hosson, 2018) a élaboré une première ingénierie, au niveau du cycle 3 –élèves de 9-12 ans- pour passer d'une approche purement perceptive de la densité à une première approche quantitative. Avec Javoy et Decroix, nous avons commencé à élaborer un questionnaire pour étudier les réponses des enseignants à des différents niveaux de formalisations de la notion.

Ce que je retiens dans un premier temps de ce travail interdisciplinaire est une facette qualitative des situations où deux grandeurs sont en proportion. La proportionnalité se manifeste dans un invariant accessible aux sens, dans un *phénomène*. Ainsi, dès avant la caractérisation quantitative par un principe d'uniformité se trouve l'identification d'un phénomène, sensible, dans un certain nombre de cas. Ce peut-être la perception d'un mouvement régulier, le goût d'une recette, la couleur d'une teinte, la flottaison dans un type de liquide, etc. Dans d'autres contextes qui interviennent dans l'enseignement des mathématiques, la dimension sensible est probablement moins prégnante, notamment quand une grandeur impliquée est la monnaie.

Si ce phénomène est en quelque sorte *premier* au plan de la perception de la proportionnalité, il est aussi *dernier* dans nos degrés de complexité conceptuelle de la proportionnalité dans la mesure où le coefficient de proportionnalité d'une situation est exactement une mesure du phénomène sensible, dans une unité spécifique des grandeurs en proportion. Le travail en relation avec les didacticiennes des sciences physiques et chimiques invite à réinterroger la prise en compte de l'invariant des situations dans l'enseignement de la proportionnalité, en mathématiques.

4.2 Le principe d'uniformité : transparence ?

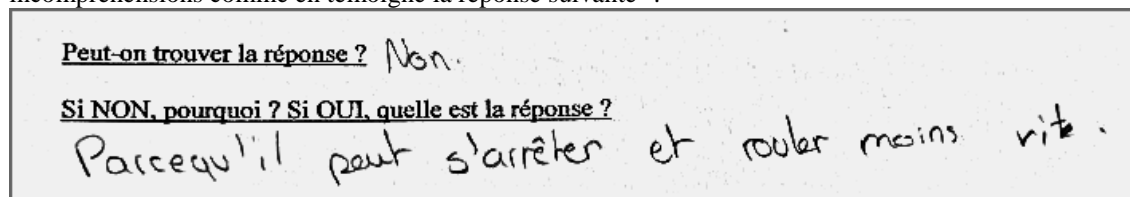
Depuis les années 1980, les textes officiels mentionnent que les élèves doivent *savoir reconnaître une situation de proportionnalité*. Quels moyens sont à disposition des enseignants pour enseigner ce savoir ? Quels moyens sont à disposition des élèves pour déterminer si une situation est ou non de proportionnalité ? Il est raisonnable de penser que quand les élèves vont être confrontés à des situations de proportionnalité, leurs premiers raisonnements quantitatifs vont mobiliser les niveaux les plus élémentaires de la

⁵ «A large bar of aluminium has a density of 2.70 g/cm^3 . A chemist breaks off a piece 50 cm^3 for analysis. What is the mass of the piece?» (p.41)

caractérisation, en particulier, le principe d'uniformité. Comment ces savoirs élémentaires peuvent-ils être accueillis par les enseignants ? Un élément de réponse se trouve selon moi dans un texte de Simard⁶, de la revue *Petit x*. Sept problèmes étaient proposés aux élèves avec la consigne suivante : « Voici plusieurs énoncés de problèmes. Certains énoncés ne te permettent pas de trouver la solution. Pour chaque problème tu précises si on peut trouver la réponse et tu expliqueras pourquoi on peut, ou on ne peut pas. » (Simard, 2012, p. 38). Je présente deux énoncés de problèmes, des réponses d'élèves proposées dans l'article et les analyses de Simard (p. 41-43).

Problème 4. Le train roule à la vitesse moyenne de 120 km par heure. Combien de kilomètres le train parcourt-il en deux heures et demie ?

[...] La notion même de vitesse « moyenne » est délicate à comprendre. La grandeur quotient « vitesse moyenne » est beaucoup plus complexe à gérer que la grandeur quotient « prix au kilo ». Ceci génère des incompréhensions comme en témoigne la réponse suivante⁷ :



Peut-on trouver la réponse ? Non.
Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?
Parcequ'il peut s'arrêter et rouler moins vite.

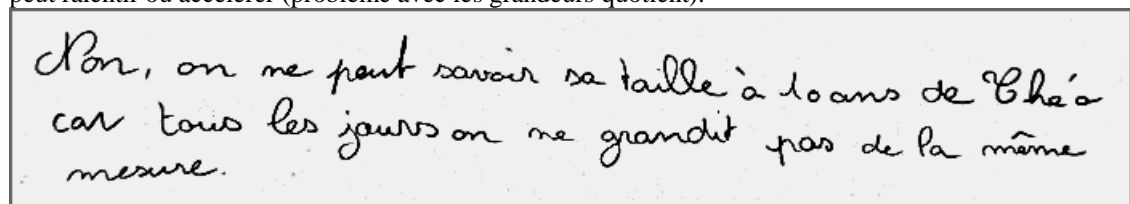
[...]

Problème 5. Théo a 5 ans. Il mesure 110 centimètres. Quel sera sa taille à 10 ans ?

[...]

Cette situation n'est pourtant pas une situation de proportionnalité. Pour le justifier, on peut se référer aux propriétés de linéarité : Théo devrait mesurer 2,20 m à 10 ans ce qui n'est pas vraiment réalisable, mais 4,40 m à 20 ans, ce n'est plus dans un domaine raisonnable... ces arguments tiennent plus de la critique du résultat théorique que des arguments strictement mathématiques (voir paragraphe 1.3.). Plus mathématiquement, taille et âge ne sont pas des grandeurs proportionnelles car à la naissance (0 an) un bébé ne mesure pas 0 cm !). Le retour à l'unité est également utilisé pour tenter de justifier (« on ne grandit pas tous les ans de la même mesure », « on ne grandit pas tous les jours pareil »...). Ces réponses témoignent d'une compréhension de la problématique sous-jacente (mathématiquement il s'agit de la distinction entre « fonction croissante » et « fonction linéaire »).

[...] Des élèves tentent d'expliquer en se ramenant à une unité de temps (croissance par an, par mois ou par jour) et en arguant qu'on ne croît pas toujours de la même façon. La plupart du temps ces élèves ont également répondu par la négative au problème précédent (vitesse moyenne du train), arguant que le train peut ralentir ou accélérer (problème avec les grandeurs quotient).



Non, on ne peut savoir sa taille à 10 ans de Théo car tous les jours on ne grandit pas de la même mesure.

Au-delà de la confusion entre vitesse moyenne et vitesse constante (donc attachée à un phénomène qui est un mouvement uniforme), les éléments apportés par Simard semblent montrer que justement *les élèves qui répondent par la négative* ont bien perçu un phénomène sensible (qui ne se manifeste pas dans les cas qu'ils doivent étudier) et que ce phénomène sensible se traduit par une nécessité du « principe d'uniformité ». Ils concluent alors en arguant soit qu'ils manquent d'information relativement à l'uniformité du phénomène, soit que le phénomène n'est pas uniforme. Ces arguments ne sont pas reconnus comme

⁶ Simard a par ailleurs écrit un document d'accompagnement des programmes en 2012.

⁷ Simard confond vitesse moyenne et vitesse constante.

caractéristiques de la proportionnalité par Simard mais comme distinctifs de « fonction croissante » et « fonction linéaire ». En réalité, comme le phénomène n'est pas uniforme, il est impossible de définir une fonction entre les grandeurs en relation si on considère que ces grandeurs sont par exemple la durée d'observation du phénomène et la distance parcourue (ou la croissance) pendant l'observation. On ne peut pas associer de 'distance parcourue' à la durée '1 s'⁸. Il me semble que ces imprécisions ou erreurs sont des signes de la transparence du *principe d'uniformité* au plan institutionnel et on voit comment cette transparence risque de conduire à l'impossibilité de créer un lien entre la perception d'un phénomène, une première caractérisation quantitative du phénomène –réalisée spontanément par certains élèves-, et des formalisations plus avancées du phénomène qui devrait pourtant s'appuyer sur des caractérisations du type précédent réalisées par tous les élèves.

4.3 Des potentialités de la propriété M

Nous avons vu que la propriété M est une sorte de couteau suisse pour établir les techniques de calcul ou l'équivalence d'expressions dans l'enseignement apprentissage de notions associées à la multiplication ou aux unités. La proportionnalité étant une notion majeure dans le « champ conceptuel multiplicatif », on peut s'attendre à ce que la propriété M s'y manifeste de façon visible ou transparente.

4.3.1 Dans les travaux de Beckmann et Izsak

Dans un article de 2015, Beckmann et Izsak mentionnent deux raisonnements utilisables pour traiter certains problèmes de proportionnalité : « multiple-batches perspective » (perspective des groupes multiples) et « variable-parts perspective » (perspective des parts variables). Les auteurs présentent les deux raisonnements en appui sur l'exemple suivant : « Le problème du Punch : Pour faire du Punch, mélanger du jus de pêche et du jus de raisin dans un rapport de 2 à 3. Quelles sont les quantités de jus de pêche et de raisin que vous pouvez mélanger dans ce rapport. ? » (p. 22, ma traduction).

Ils indiquent, entre autres éléments :

A second strategy involves scaling (or multiplying) volumes (e.g., Lamon, 2007; Lobato & Ellis, 2010; Vergnaud, 1988). Given some volumes of peach and grape juice mixed in an A to B ratio, one might want to make a new mixture using c times as much peach juice. To maintain the same ratio requires also using c times as much grape juice, but again the explanation for why this is so is different in the two perspectives (Figure 5). From the multiple-batches perspective, if the original volumes of peach and grape juice are $r \cdot A$ cups and $r \cdot B$ cups respectively, then letting c operate on these quantities, and applying the associative property of multiplication, produces $(c \cdot r) \cdot A$ cups peach juice and $(c \cdot r) \cdot B$ cups grape juice. In this case, c operates on the number of batches, r . According to the multiple-batches definition, these new quantities are in the ratio A to B (Figure 5a). From the variable-parts perspective, if the original volumes of peach and grape juice are $A \cdot r$ cups and $B \cdot r$ cups respectively, then letting c operate on these quantities and applying the associative and commutative properties of multiplication produces $A \cdot (c \cdot r)$ cups peach juice and $B \cdot (c \cdot r)$ cups grape juice. In this case, c operates on the size

⁸ On peut définir d'autres fonctions, comme par exemple la distance parcourue (ou la croissance de taille) depuis un temps considéré comme origine. Dans le cas d'un phénomène uniforme, les deux fonctions prennent les mêmes valeurs mais elles ne représentent pas la même chose.

of the parts, r . According to the variable parts definition, these new amounts are in the ratio A to B (Figure 5b).

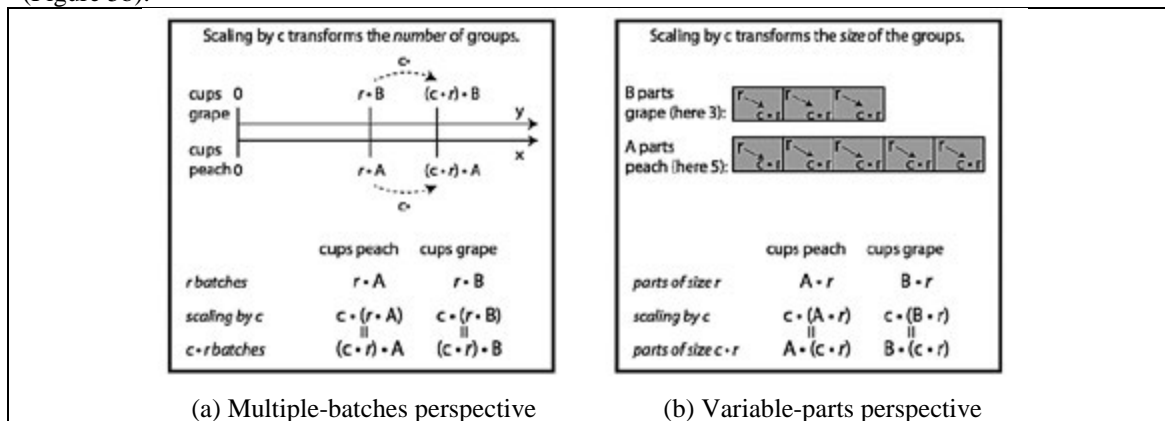


Figure 5. Operating within measure spaces from two perspectives: (a) scaling batches within measure spaces transforms the number of batches, leaving the size of each batch unchanged, and (b) scaling parts within measure spaces transforms the size of the parts, leaving the number of parts unchanged. (Beckmann & Izsak, 2015, p. 25)

Ainsi, la stratégie *groupes multiples* consiste à prendre c fois plus (ou c fois moins) de groupes alors que la stratégie *parts variables* consiste à prendre des parts c fois plus grandes ou plus petites. Beckmann et Izsak établissent l'équivalence logique des raisonnements en appui sur l'associativité de la multiplication. La propriété M est invisible pour les chercheurs, en tant que propriété mathématique de la mesure des grandeurs, qui l'assimilent alors à l'associativité de la multiplication. Avec la formulation que j'ai adoptée pour la propriété M , je dirais que la stratégie a agit au niveau du nombre d'unités, alors que la stratégie b agit au niveau de la taille des unités. L'équivalence entre les stratégies provient alors de la propriété M appliquée à chaque valeur de la relation de proportionnalité : c fois plus (c fois moins) d'unités donnent une quantité c fois plus grande (plus petite), c'est la même quantité qu'avec des unités c fois plus grandes (ou plus petites).

Les auteurs indiquent par ailleurs que la seconde perspective est largement sous-représentée dans les travaux de recherche. Ils précisent aussi que « les curricula du Japon et de Singapour qui sont des pays qui ont des performances élevées en mathématiques incluent cette perspective » (p. 31, ma traduction).

Au-delà de la stratégie documentée, ce que je retiens de ces travaux est alors que la propriété M a des potentialités probablement inexploitées, ou transparentes, dans le traitement de la proportionnalité.

4.3.2 La propriété M dans le « retour à l'unité »

Cette contribution de la propriété M me semble devoir être étendue à d'autres situations tout à fait ordinaires dans le curriculum de la proportionnalité. Dans les techniques actuelles de la proportionnalité à l'école, le retour à l'unité est introduit comme suit : « Sachant que 4 stylos valent 2,42 euros, combien valent 14 stylos ? » un stylo coûte 4 fois moins, soit $2,42\text{€} : 4$, 14 stylos coûtent 14 fois plus, soit $((2,42\text{€} : 4) \times 14)$. Les manuels de la période classique indiquaient qu'il était possible, voire préférable, d'effectuer la multiplication avant la division, ce que ne fait pas l'école primaire actuelle, probablement du fait d'un risque de perte de sens. En rapport avec le contexte, il n'y en a en effet pas de raison logique qui

justifierait de faire la multiplication avant la division. Pourtant, une justification, qui repose sur les quantités, en appui sur la propriété M, est possible. On peut considérer que : $2,42 \text{ €} : 4$ est une unité. On peut alors affirmer que le prix de 14 unités chacune quatre fois plus petites que $2,42 \text{ €}$ est 4 fois plus petit que le prix de 14 unités chacune égale à $2,42 \text{ €}$. On retrouve la propriété M : elle permet donc de « déplacer » le diviseur⁹.

Si au début de l'enseignement de la proportionnalité, les élèves sont sensés calculer d'abord la division, et faire ensuite la multiplication. Il est probable qu'à un moment ultérieur, ils seront invités à effectuer d'abord la multiplication et ensuite la division. Comment la transition est-elle alors gérée ? La propriété M se manifeste-t-elle de façon transparente dans les situations d'enseignement ?

4.4 Une proposition de relecture de la complexité de la proportionnalité

La proportionnalité est une relation entre deux grandeurs associées à un phénomène. Je reprends à la figure 18 le tableau (figure 4, p. 35) du chapitre 1. Je l'enrichis en introduisant les propriétés mathématiques identifiées qui interviennent dans différentes technologies associées à la proportionnalité. J'intègre les différents *levels of meaning* de Thompson pour les grandeurs en proportion. Le croisement des analyses de Beckmann et Izsak, de Thompson et mes propres analyses sur la propriété M permet de faire apparaître un degré de complexité conceptuelle de la proportionnalité, qui vient s'inscrire au sein des degrés précédents. Sa place, en termes de hiérarchie, pourrait être précisée. Par exemple, dans leur revue de travaux, Beckmann et Izsak indiquent que des élèves pourraient développer le point de vue de la propriété M avant le point de vue additif. Si l'on s'en tient au fait que la proportionnalité est intrinsèquement définie par une relation du type « aux mêmes correspondent les mêmes » (ce qui peut aussi se discuter), cela pourrait signifier que les élèves pourraient appréhender la propriété M, incluant l'idée d'un rapport constant, sans l'articuler avec la proportionnalité.

J'indique par ailleurs dans les points de vue 3 et 4, des raisonnements en appui sur la réalité absents de ressources que j'ai étudiées et qui me semblent susceptibles d'établir les propriétés d'additivité et de co-variation dans les mêmes rapports en faisant l'hypothèse du principe d'uniformité.

Ce tableau *provisoire* réorganise ainsi les éléments des chapitres 1, 3 et 4 et ceux des sections précédentes et donne, me semble-t-il, une lecture renouvelée de degrés de complexité conceptuelle attachés à la proportionnalité.

Aujourd'hui en France, ce sont principalement, si ce n'est exclusivement, les points de vue 3, 4 et 6 qui apparaissent dans le savoir à enseigner en mathématiques. Les propriétés P et M susceptibles de justifier certaines transitions ne font pas partie du savoir à enseigner.

⁹ Je ne sais pas si les manuels anciens justifiaient la technique, ni comment, le cas échéant. À une époque, la théorie des proportions, en appui sur les nombres, permettait d'échanger les termes de la proportion. Est-ce que la propriété M étaient sous-jacente, implicitement ou explicitement et à quelle(s) époque(s) ? Il s'agit là de questions que je n'ai pas étudiées.

	Point de vue 1 : ordre	Point de vue 2 : uniformité	Point de vue 3 : additif	Point de vue 4 : co-variation dans les mêmes rapports	Point de vue 5 : transformer la ou les unités relatives	Point de vue 6 : taux
Propriétés mathématiques liées aux grandeurs		Ordre : être capable de comparer deux durées, deux distances	Propriété P ?	Propriété P - absurde Unités relatives	Propriété M	?
<i>Levels of meaning</i> Thompson		1 – Awareness of size	2 – Measure magnitude	3 – Steffe magnitude	4 – Wildi magnitude	5 – Relative magnitude
Descripteurs de l'invariant Manipulations attachées aux grandeurs en proportion.	plus ou moins « fort » - être plus ou moins sucré vs avoir le même gout - aller plus moins vite - flotter / couler	Uniformité comme caractéristique de la situation : des distances égales parcourses en des durées égales (présent dans Freudenthal, 1983) Ou absence d'uniformité On ne grandit pas tous les jours pareil vs on grandit tous les jours pareil	Si $a \rightarrow b, a' \rightarrow b'$ alors $a+a' \rightarrow b+b'$ Un mobile se déplace à une allure régulière pendant une durée $a+a'$. La durée se décompose en a et a' . Dans la durée a , on parcourt la distance b ET dans la durée a' , on parcourt la distance b' . Dans la durée $a+a'$, à cette allure, on parcourt la distance $b+b'$.	Si $a \rightarrow b$ alors $a/2 \rightarrow b/2'$ Dans le temps a , on parcourt la distance b . En deux fois moins de temps ? Soit a' la durée, telle que $a'+a' = a$. Comme le principe d'uniformité est respecté, dans chaque durée a' la même distance est parcourue, appelons-la b' . On a alors, $b'+b'=b$. Donc, $b'=b/2$ (Pour cette dernière étape, b' doit être une quantité au sens du chapitre 3) Passage par l'unité. Changement d'unités $27 \text{ km/h} =$ $27 \times 1000 \text{ m} / 3600 \text{ s} =$ $27\,000 \text{ m} : 3600 / 1 \text{ s} = \dots$ (rais. prop)	Calcul de règle de 3, inversion possible de x et : Interpréter une situation de ratio constant comme une situation de proportionnalité : 3 vol. de vert pour 4 vol. de bleu (Beckmann & Izsak, 2015) Cas particulier des situations d'agrandissement « loupe » ?	Le nombre et unité quotient (taux) L'unité est une classe d'équivalence de rapports externes. $27 \text{ km/h} =$ $27 \times 1000 \text{ m} /$ $3600 \text{ s} =$ $(27 \times 1000 / 3600) \times$ m/s
Potentialités ou rôle de l'invariant	Phénomène perceptif	Présence ou absence d'uniformité	L'invariant pour établir l'additivité	L'invariant pour établir la divisibilité		Le taux comme mesure de l'invariant

Figure 18. – Différents degrés de complexité conceptuelle attachés à la proportionnalité

4.5 Projets

Le thème mathématique de la proportionnalité apparaît ainsi largement sous-exploité en termes de ses potentialités pour caractériser un type de relation entre grandeurs, et des moyens de l'étudier, l'étude qui en est proposée dans le curriculum standard semble particulièrement pauvre. Les éléments qui précèdent sur la proportionnalité laissent par ailleurs augurer de possibles transparences de savoirs associés aux grandeurs dans l'enseignement de cette notion. À tous les degrés de complexité conceptuelle des savoirs spécifiques sur les grandeurs sont susceptibles d'intervenir incidemment, de façon transparente. Au-delà du constat éventuel de la transparence se pose la question de la proposition d'alternatives et au préalable celle de leur construction. Sur ces questions, je pourrais diriger plusieurs thèses.

Ainsi, à différents niveaux de scolarité, il serait intéressant de documenter la transparence éventuelle de l'un ou l'autre des savoirs que nous avons identifiés. Au plan méthodologique un tel travail peut s'effectuer dans le cadre de l'observation de pratiques ordinaires, pour peu que les enseignants enseignent effectivement la notion¹⁰. Quelles tâches sont utilisées ? Comment les enseignants gèrent-ils les tâches du type « exemples de situations de proportionnalité et non proportionnalité » ? Au fil des années, comment font-ils évoluer les techniques de résolution, au moyen de quelles justifications mathématiques ? Comment les enseignants traitent-ils les réponses spontanées des élèves ? Quels savoirs introduisent-ils ? Comment ces savoirs sont-ils articulés avec les réponses des élèves ? Des savoirs transparents se manifestent-ils ?

Ce premier repérage devrait permettre de préciser des marges de manœuvre pour faire évoluer les pratiques. Des ressources pourraient être conçues et leur utilisation étudiée. Il pourrait s'agir de co-construire avec des formateurs et des enseignants une ressource qui propose des raisonnements en appui sur l'idéalisation de la réalité. Quels savoirs pourraient être institutionnalisés, comment les formuler ? En quoi ces savoirs entrent-ils en tension, profonde ou non, avec les pratiques des enseignants ? Il faut ici distinguer me semble-t-il le cas des enseignants du premier degré et le cas des enseignants du second degré, qui n'ont probablement le même rapport ni aux mathématiques, ni aux ressources. Depuis plusieurs années, je travaille avec des enseignants et des formateurs dans des groupes pluri-catégoriels, groupe IREM ou groupes de formateurs rattachés aux groupes départementaux mathématiques pour le premier degré. La thèse d'Agnès Batton sur la formation à l'enseignement du calcul mental s'ancre dans le travail d'un tel groupe. Elle étudie le développement des pratiques des formateurs, en relation avec un savoir transparent (pour le champ additif) qu'elle a identifié. Une telle structure me semble constituer un environnement tout à fait favorable pour produire des ressources en prise avec les besoins des formateurs et des enseignants.

¹⁰ Je co-dirige actuellement le mémoire de master de Lacrampe qui étudie le début de l'enseignement de la proportionnalité (à l'école), dans le cadre d'observations naturalistes dans les classes. Elle a eu le plus grand mal à trouver des enseignant.e.s qui enseignent effectivement la notion.

Les résultats présentés dans cette note de synthèse invitent à réfléchir aux moyens d'intégrer les propriétés P et M dans le savoir à enseigner de ces ressources à construire, afin que les connaissances sur les quantités ou leur mesure puissent être réinvesties dans l'enseignement apprentissage de la proportionnalité.

5 Vers un texte pour le savoir à enseigner en arithmétique scolaire

Les travaux présentés dans cette note posent, selon moi, la question la nécessité de l'élaboration d'un texte, actualisé, pour le savoir à enseigner en arithmétique scolaire, un texte qui rende visibles les savoirs aujourd'hui transparents. Même si la mise au jour des savoirs transparents n'est peut-être pas terminée, il me semble que les éléments déjà apportés permettent d'envisager concrètement l'élaboration d'un texte, même s'il n'est pas complet.

Un tel projet pourrait en réalité viser l'élaboration de plusieurs textes en cohérence, en appui sur le modèle de transposition didactique que j'ai mis en évidence au chapitre 1. Des textes plus ou moins parcellaires existent qui pourraient être mis en cohérence et rénovés. Il s'agit à la fois de textes élaborés dans le paradigme formaliste et, par exemple du traité d'arithmétique de Bézout, ou d'autres textes à identifier. Il peut s'agir de textes historiques ou de textes actuels provenant d'autres pays. Est-ce qu'il faut nécessairement s'appuyer un texte élaboré dans le paradigme formel ? La question me semble ouverte mais un tel texte constituerait assurément une légitimation, aux yeux de certains acteurs du système éducatif, d'un autre texte qui serait, lui, formulé et élaboré dans le paradigme d'idéalisation de la réalité avec des concepts idéalisés. En effet, ce qui n'est pas discutable est qu'il est nécessaire de disposer d'un texte qui contienne des éléments de discours utilisables dans la classe avec les élèves.

Des points mathématiques théoriques ne sont sans doute pas suffisamment clarifiés, en particulier une actualisation des notions de nombres concrets et de nombres abstraits me paraît nécessaire. La question de l'articulation avec l'enseignement secondaire, y compris jusqu'à la fin du lycée se pose aussi : quand on enseigne à l'école, il faut préserver l'avenir.

Un tel travail pourrait rassembler des didacticiens, des mathématiciens, des historiens des mathématiques, des formateurs, des enseignants. Le cadre des IREM me semble adapté pour ce projet. Cette perspective n'est pas une perspective de recherche. Il s'agit ici d'abord de produire un texte susceptible de ressourcer l'enseignement, en appui partiel sur des résultats de recherches déjà établis et aussi sur des travaux, théoriques. Cette ressource pourrait être mise à l'épreuve, dans des recherches, sur certains de ses aspects et actualisée en fonction des résultats.

Références

- Abramov, A. (2010). Toward a history of mathematics education reform in Soviet schools (1960s–1980s). In A. Karp & B. R. Vogeli (Eds.), *Russian mathematics education: History and world significance* (pp. 87–140).
- Adjage, R. (1999). *L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial* [PhD Thesis]. Université Louis Pasteur-Strasbourg I.
- Adjage, R. (2007). Rationnels et proportionnalité: Complexité et enseignement au début du collège. *Petit x*, 74, 5–33.
- Akatugba, A. H., & Wallace, J. (1999). Mathematical dimensions of students' use of proportional reasoning in high school physics. *School Science and Mathematics*, 99(1), 31–41.
- Alfonsi, L. (2011). *Étienne Bézout (1730-1783): Mathématicien des Lumières*. L'Harmattan.
- Artaud, M. (1998). Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. In M. Bailleul, C. Comiti, J.-L. Dorier, J.-B. Lagrange, B. Parzysz, & M.-H. Salin (Eds.), *Actes de la IXe école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 101–139). ARDM et IUFM.
- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147–176.
- Balacheff, N., & Margolinas, C. (2005). cKç—Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques. XII^e école d'été de didactique des mathématiques, Aout 2003, Corps* (pp. 1–32). La pensée sauvage.
- Batteau, V., & Clivaz, S. (2016). Le dispositif de lesson study: Travail autour d'une leçon de numération. *Grand N*, 98.
- Battista, M. T. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843–908). Information Age.
- Batton, A., Chambris, C., Melon, I., Freguis, G., & Radovanovic, A. (2020). Défi Calcul: Un dispositif de formation de formateurs, d'enseignants, d'élèves au calcul mental. Atelier. *Actes Du Colloque de La Copirelem 2019, 4-6 Juin 2019, HEP Vaud, Lausanne, Suisse*, 242–266. <http://www.arpeme.fr/documents/Actes-Lausanne-e.pdf>
- Beckmann, S., & Izsák, A. (2015). Two perspectives on proportional relationships: Extending complementary origins of multiplication in terms of quantities. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(1), 17–38.
- Bergsten, C. (2014). Mathematical approaches. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 376–383). Springer.
- Bessot, A., & Comiti, C. (2008). Apport des études comparatives aux recherches en didactique des mathématiques: Le cas Viêt-Nam/France. In L. Coulange & C. Hache (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (pp. 171–193). IREM de Paris 7, ARDM.
- Bezout, É. (1821). *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie* (1e ed. 1764— Dernière ed. Publiée du vivant de l'auteur 1781). In A. A. L. Reynaud (Ed.), *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie avec des notes et des tables de logarithmes par A.A.L. Reynaud* (9th ed.). Courcier, Libraire pour les sciences. <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k201342q.r=reynaud%20bezout?rk=21459;2>
- Boero, P. (1989). Mathematical literacy for all experiences and problems. *Actes Du Colloque PME 13*, 62–76.
- Boniface, J. (2002). *Les constructions des nombres réels dans le mouvement d'arithmétisation de l'analyse*. Ellipses.
- Bosch, M., & Chevillard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs: Objet d'étude et problématique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 19(1), 77–123.
- Bosch, M., Gascón, J., & Trigueros, M. (2017). Dialogue between theories interpreted as research praxeologies: The case of APOS and the ATD. *Educational Studies in Mathematics*, 95(1), 39–52.
- Bourbaki. (1984). *Éléments d'histoire des mathématiques*. Masson.

- Bronner, A. (2008). La question du numérique dans l'enseignement du secondaire au travers des évolutions curriculaires. In A. Rouchier & I. Bloch (Eds.), *Perspectives en didactique des mathématiques* (pp. 17–45). La pensée sauvage.
- Brossard, M. (2008). Concepts quotidiens/ concepts scientifiques: Réflexions sur une hypothèse de travail. *Carrefours de l'éducation*, 26(2), 67–82. <https://www.cairn.info/revue-carrefours-de-l-education-2008-2-page-67.htm>
- Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques*, 2(1), 37–27. <https://revue-rdm.com/1981/problemes-de-didactique-des/>
- Brousseau, N., & Brousseau, G. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire. Comptes rendus d'observations de situations et de processus didactiques à l'école Jules Michelet de Talence*. IREM, Université de Bordeaux 1.
- Burali-Forti, C. (1899). Les propriétés formales des opérations algébriques. *Revue de Mathématiques*, 6, 141–177.
- Burali-Forti, C. (1901). Sur les différentes méthodes logiques pour la définition du nombre réel. *Bibliothèque Du Congrès International de Philosophie*, 3, 289–307. <https://doi.org/10.5840/wcp11901311>
- Cantor, G. (1883). *Gesammelte Abhandlungen*. Springer (Berlin).
- Casari, E. (1974). Axiomataical and set-theoretical thinking. *Synthese*, 27, 49–62.
- Chambris, C. (2004). *Rapports entre grandeurs, nombres et opérations dans les programmes de l'école primaire élémentaire au 20ème siècle* [Mémoire de DEA].
- Chambris, C. (2007). Petite histoire des rapports entre grandeurs et numérique dans les programmes de l'école primaire. *Repères-IREM*, 69, 5–31.
- Chambris, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire: Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle: Connaissances des élèves actuels* [Université Paris Diderot (Paris 7)]. <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00338665/en/>
- Chambris, C. (2009). Contribution de l'étude des grandeurs à l'étude de la numération de position avant la réforme des mathématiques modernes, en France, au cours élémentaire (2ème et 3ème années de primaire). In M.-J. Perrin-Glorian & C. Ouvrier-Buffet (Eds.), *Actes du colloque DIDIREM*. (pp. 211–222). Université Paris Diderot-Paris & Laboratoire de Didactique André Revuz.
- Chambris, C. (2010). Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20e siècle: Théories et écologie. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 30, 317–366.
- Chambris, C. (2012a). Consolider la maîtrise de la numération des entiers et des grandeurs. Le système métrique peut-il être utile? *Grand N*, 89, 39–70.
- Chambris, C. (2012b). Consolider la maîtrise de la numération et des grandeurs à l'entrée au collège. Le système métrique peut-il être utile? *Petit x*, 89, 5–32. http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/squelettes/fic_x.php?num=89&rang=1
- Chambris, C. (2012c). Évolution des organisations mathématiques sur la numération au vingtième siècle en France. In M.-J. Perrin-Glorian (Ed.), *Eclairages sur l'enseignement des nombres et de la numération à l'école primaire*. (pp. 51–72). IREM de Paris. <http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS12003.pdf>
- Chambris, C. (2012d). Le système métrique au service de la numération des entiers et des grandeurs. In J.-L. Durpaire & M. Mégard (Eds.), *Le nombre au cycle 3. Apprentissages numériques*. (pp. 13–30). SCÉRÉN CNDP-CRDP.
- Chambris, C. (2012e). Étude des conditions pour favoriser les connexions entre les connaissances: Une approche écologique. In J.-L. Dorier & S. Coutat (Eds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social: Enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (Vol. GT9, pp. 1143–1156). <http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012>
- Chambris, C. (2014a). *Ciel, les grandeurs! (Conférence, sans acte)*. Journées Nationales APMEP, Toulouse.
- Chambris, C. (2014b). Contribution à propos de la numération décimale. In Conseil supérieur des programmes (Ed.), *Contribution aux travaux des groupes d'élaboration des projets de programmes C 2, C3 et C4*. Eduscol. http://cache.media.education.gouv.fr/file/CSP/23/3/Chambris_Christine_-_MCF-_CSP_363233.pdf

- Chambris, C. (2018). The influence of theoretical mathematical foundations on teaching and learning: A case study of whole numbers in elementary school. *Educational Studies in Mathematics*, 97(2), 185–207. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9790-3>
- Chambris, C. (2021). Raisons d’être des grandeurs. Le cas de l’arithmétique à l’école élémentaire. In H. Chaachoua, A. Bessot, B. Barquero, G. Cirade, L. Coulange, P. Job, A.-C. Mathé, A. Pressiat, M. Schneider, & F. Vandebrouck (Eds.), *Perspectives en didactique des mathématiques: Point de vue de l’élève, questions curriculaires, grandeurs et mesures*. (Vol. 1, pp. 169–196). La pensée sauvage.
- Chambris, C. (2021a). *Les unités au cœur de l’arithmétique (Conférence, sans acte)*. Journées Nationales APMEP, Bourges.
- Chambris, C. (2021c, October). L’égalité de grandeurs, un savoir transparent (de l’arithmétique)? Retour sur l’ingénierie pionnière de Douady et Perrin sur les fractions et décimaux. Contribution dans le symposium Sur la transparence de certains savoirs scolaires en arithmétique. *Pas d’acte*. L’école primaire au 21^e siècle, Cergy.
- Chambris, C. (Ed.). (2021d). Symposium Sur la transparence de certains savoirs scolaires en arithmétique. *Colloque l’école primaire au 21^e siècle. Sans acte*.
- Chambris, C., & Batteau, V. (2021). A mathematical perspective on units in Arithmetic teaching and learning: A comparison of French, Swiss, and Japanese contexts (Workshop). In J. Novotna & H. Moroava (Eds.), *Broadening experiences in elementary school mathematics. Proceedings of International Symposium Elementary Mathematics Teaching 21. Prague 22-26 august 2021* (pp. 435–437). Charles University, Faculty of Education.
- Chambris, C., Coulange, L., Rinaldi, A.-M., & Train, G. (2021). Unités (relatives) pour les nombres et le calcul à l’école. Vers un état des lieux—Potentialités. In H. Chaachoua, A. Bessot, B. Barquero, G. Cirade, L. Coulange, P. Job, A.-C. Mathé, A. Pressiat, M. Schneider, & F. Vandebrouck (Eds.), *Perspectives en didactique des mathématiques: Point de vue de l’élève, questions curriculaires, grandeurs et mesures*. (Vol. 2, pp. 373–396). La pensée sauvage.
- Chambris, C., Coulange, L., & Train, G. (2021). *Measurement units and numeration units: What reveals the introduction of a “mixed” table in decimals teaching*. Extended paper presented at ICME14, TSG10.
- Chambris, C., Haspekian, M., Melon, I., & Pasquet-Fortune, N. (2018). Le défi calcul: Entre calcul mental et calculatrice. Atelier. In B. Lebot & F. Vandebrouck (Eds.), *Actes du colloque mathématiques en cycle 3, IREM de Poitiers, 8-9 juin 2017*. (pp. 227–238). <http://irem.univ-poitiers.fr/colloque2017/ressources/Actes.pdf>
- Chambris, C., & Tempier, F. (2017). Dealing with large numbers: What is important for students and teachers to know? In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10, February 1-5, 2017)* (pp. 322–329). DCU Institute of Education and ERME.
- Chambris, C., Tempier, F., & Allard, C. (2017). Un regard sur les nombres à la transition école – collège. *Repères IREM*, 108, 63–91.
- Chambris, C., & Visnovska, J. (2021). On the history of units in French elementary school arithmetic: The case of proportionality. *Historia Mathematica*. <https://doi.org/10.1016/j.hm.2021.04.003>
- Chesnais, A. (2018). *Un point de vue de didactique des mathématiques sur les inégalités scolaires et le rôle du langage dans l’apprentissage et l’enseignement*. [Habilitation à diriger des recherches, Université de Montpellier]. <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-02046178>
- Chesnais, A., & Munier, V. (2016). Mesure, mesurage et incertitudes: Une problématique interdidactique mathématiques-physique. In É. Mounier & A.-C. Mathé (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2014-2015* (pp. 212–237). IREM de Paris 7, ARDM.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. La pensée sauvage.
- Chevallard, Y. (1992a). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 12(1), 73–112.
- Chevallard, Y. (1992b). Une réforme inaccomplie. *La Gazette Des Mathématiciens*, 54, 17–21.
- Chevallard, Y. (1998). Questions vives, savoirs moribonds: Le problème curriculaire aujourd’hui. *Défendre et Transformer l’école Pour Tous (3-5 Octobre 1997)*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=19

- Chevallard, Y. (2003). Nouveaux dispositifs didactiques au collège et au lycée: Raisons d'être, fonctions, devenir. In M. Bridenne (Ed.), *Actes des journées de la commission inter-IREM Didactique* (pp. 1–26). IREM. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=49
- Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. Javier García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 705–746). Universidad de Jaén.
- Chevallard, Y., & Bosch, M. (2001). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une atlantide oubliée. *Petit x*, 55, 5–32.
<https://numerisation.univ-irem.fr/PX/IGR01021/IGR01021.pdf>
- Chevallard, Y., & Bosch, M. (2002). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations. *Petit x*, 59, 43–76.
- Chevallard, Y., & Bosch, M. (2020). The anthropological theory of the didactic. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (2nd ed., pp. 53–60). Springer Nature Switzerland.
- Cirade, G., Artaud, M., Bosch, M., Bourgade, J.-P., Chevallard, Y., Ladage, C., & Sierra, T. A. (Eds.). (2017). CITAD 4. In *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société*. (p. 978). <https://citad4.sciencesconf.org>
- Cobb, P. (2003). Investigating students' reasoning about linear measurement as a paradigm case of design research. In M. Stephan, J. Bowers, P. Cobb, & K. Gravemeijer (Eds.), *Supporting students' development of measuring conceptions: Analyzing students' learning in social context* (National Council of Teachers of Mathematics, pp. 1–23). NCTM.
- Confrey, J., & Harel, G. (1994). Introduction. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. vii–xviii). The Suny Press.
- Cortina, J. L. (2006). *Instructional design in ratio* [PhD Thesis, Vanderbilt University]. <https://search.proquest.com/openview/6c95dfa6103d6624b308f2946d640b1f/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750&diss=y>
- Cortina, J. L., Visnovska, J., & Zuniga, C. (2014). Unit fractions in the context of proportionality: Supporting students' reasoning about the inverse order relationship. *Mathematics Education Research Journal*, 26(1), 79–99.
- d'Alembert. (1757). Grandeur. In *Encyclopédie*.
- Davydov, V. V. (1975). The psychological characteristics of the “prenumerical” period of mathematics instruction. *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics*, 7, 109–206.
- Davydov, V. V. (1982). The psychological characteristics of the formation of elementary mathematical operations in children. In J. M. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: Cognitive perspective* (pp. 224–238). Lawrence Erlbaum Associates.
- Dedekind, R. (1872). *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Braunschweig.
- Dhombres, J. (1997). Les grandeurs: Évolution d'un concept flexible. In J. Dhombres, J. Reignier, & N. Rouche (Eds.), *Grandeurs physiques et grandeurs mathématiques*. CREM A.S.B.L.
- Dienes, Z. P., & Golding, E. W. (1966). *Sets, numbers and powers*. Herder & Herder.
- Douady, R. (1981). Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire (enfants de 6 à 11 ans). *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 1(1), 77–111.
- Douady, R., & Perrin-Glorian, M.-J. (1986). *Liaison École-Collège: Nombres décimaux*. IREM. <http://numerisation.univ-irem.fr/PS/IPS86019/IPS86019.pdf>
- Dougherty, B. J., & Simon, M. (2014). Elkonin and Davydov Curriculum in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 204–207). Springer.
- Dougherty, B. J., & Venenciano, L. C. (2007). Measure up for understanding: Reflect and discuss. *Teaching Children Mathematics*, 13(9), 452–456.
<https://crdg.hawaii.edu/wp-content/uploads/measureup-2007-05b.pdf>
- Duquesne-Belfais, F., & Girodet, M.-A. (2014). *Guide pédagogique et manuel élève « Tous en maths » CMI*. Nathan.
- Fénichel, M., & Taveau, C. (2008). *Enseigner les mathématiques au cycle 3 [Multimédia multsupport]: Deux situations d'apprentissage en images: Le cercle sans tourner en rond, l'enveloppe des nombres*. SCÉRÉN-CRDP, Académie de Créteil.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Kluwer.

- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*. Kluwer Academic Publishers.
- Fuson, K. C. (1992). Research on Whole Number Addition and Subtraction. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching learning* (pp. 243–275). National Council of Teachers of Mathematics; New York: Macmillan Publishing Co.
- Gandon, S. (2009). *Relations et quantités chez Russell (1897-1913)*. Philosophie. Mémoire inédit présenté en vue de l'Habilitation à Diriger des Recherches. Université Blaise Pascal.
- Goody, J. (1979). *La raison graphique: La domestication de la pensée sauvage* (J. Bazin & A. Bensa, Trans.). Les éditions de minuit.
- Griesel, H. (2007). Reform of the construction of the number system with reference to Gottlob Frege. *ZDM*, 39(1–2), 31–38. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0003-2>
- Harel, G., & Confrey, J. (Eds.). (1994). *Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*. The Suny Press.
- Harlé, A. (1987). L'image du nombre dans les manuels d'arithmétique de l'enseignement primaire au début du XXème siècle. In Groupe d'Histoire des Mathématiques (Ed.), *Fragments d'histoire des mathématiques II* (pp. 22–84).
- Hersant, M. (2005). La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui. *Repères IREM*, 59, 5–41.
- Houdement, C., & Tempier, F. (2019). Understanding place value with numeration units. *ZDM*, 51(1), 25–37.
- Howe, R. (2015). The most important thing for your child to learn about arithmetic. In X. Sun, B. Kaur, & J. Novotna (Eds.), *Primary mathematics study on whole numbers: ICMI study 23 conference proceedings, June 3-7, 2015* (pp. 107–114). University of Macau.
- Izsák, A., & Beckmann, S. (2019). Developing a coherent approach to multiplication and measurement. *Educational Studies in Mathematics*, 101(1), 83–103. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09885-8>
- Javoy, S., Decroix, A.-A., & de Hosson, C. (2018). La construction du concept physique de volume en cycle III: Quelles difficultés? Quelles stratégies didactiques. *6e Colloque Espace Mathématiques Francophone*.
- Kieren, T. E. (1980). The rational number construct—Its elements and mechanism. In T. E. Kieren (Ed.), *Recent Research on Number Learning* (pp. 125–150). ERIC/SMEAC.
- Kilpatrick, J. (2008). *Hassler Whitney*. The First Century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008) - History of ICMI. <https://www.icmihistory.unito.it/portrait/whitney.php>
- Kolmogorov, A. N. (1960). Préface. In *La mesure des grandeurs, de Henri Lebesgue. Traduction en russe. 2e édition (1e édition 1938)*. Uchpedgiz.
- Kolmogorov, A. N. (1979). Quantity (1e édition, vol. 7, 1951). In *Great Soviet Encyclopedia* (3rd ed.). <http://encyclopedia2.thefreedictionary.com/quantity>
- La Chapelle. (1765). *Nombre*.
- Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1, pp. 629–667). Information Age.
- Laparra, M., & Margolinas, C. (2011). Quand les maîtres contribuent à leur insu à renforcer les difficultés des élèves. In J.-Y. Rochex & J. Crinon (Eds.), *La construction des inégalités scolaires* (pp. 111–130). Presses universitaires de Rennes. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00779193>
- Lebesgue, H. (1932). Sur la mesure des grandeurs. *L'enseignement Mathématique*, 31, 173–206.
- Lebesgue, H. (1933). Sur la mesure des grandeurs. *L'enseignement Mathématique*, 32, 23–51.
- Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States* (Lawrence Erlbaum Associates). Routledge.
- Ma, L. (2013). A critique of the structure of US elementary school mathematics. *Notices of the AMs*, 60(10), 1282–1296.
- Ma, L., & Kessel, C. (2018). The Theory of School Arithmetic: Whole Numbers. In M. Bartolini-Bussi & X. Sun (Eds.), *Building the Foundation: Whole Numbers in the Primary Grades* (pp.

- 439–463). Springer Open. <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-319-63555-2.pdf>
- Malet, A. (2006). Renaissance notions of number and magnitude. *Historia Mathematica*, 33(1), 63–81. <https://doi.org/10.1016/j.hm.2004.11.011>
- Margolinas, C. (2021). Construire des points de vue d'élèves: Des défis théoriques et méthodologiques pour la recherche en didactique des mathématiques. In H. Chaachoua, A. Bessot, B. Barquero, G. Cirade, L. Coulange, P. Job, A.-C. Mathé, A. Pressiat, M. Schneider, & F. Vandebrouck (Eds.), *Perspectives en didactique des mathématiques: Point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeurs et mesures*. (Vol. 1, pp. 19–49). La pensée sauvage.
- Margolinas, C., & Drijvers, P. (2015). Didactical engineering in France; an insider's and an outsider's view on its foundations, its practice and its impact. *ZDM*, 47(6), 893–903. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0698-z>
- Margolinas, C., & Laparra, M. (2011). Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire. In J.-Y. Rochex & J. Crinon (Eds.), *La construction des inégalités scolaires* (pp. 19–32). Presses Universitaires de Rennes. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00779196>
- Margolinas, C., & Laparra, M. (2019). Comment se manifeste le continuum oralité/littératie?: Étude d'une tâche de classification. *Pratiques*, 183–184, 1–25. <https://doi.org/10.4000/pratiques.7513>
- MEN. (2007). *Collège – mathématiques – projet de document d'accompagnement – grandeurs et mesures*. (Ministère de l'Éducation nationale – Direction générale de l'enseignement scolaire – bureau du contenu des enseignements). Eduscol.
- Mounier, É. (2010). *Une analyse de l'enseignement de la numération: Vers de nouvelles pistes*. Université Paris Diderot (Paris 7).
- Mounier, É. (2013). Y-a-t-il des marges de manœuvres pour piloter la classe durant une phase de bouclage? *Recherches en didactique des mathématiques*, 33(1), 79–113. <https://revue-rdm.com/2013/y-a-t-il-des-marges-de-manoeuvres/>
- Newton, I. (1707). *Arithmetica universalis*. Typis Academicis.
- Neyret, R. (1995). *Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants: Nombres décimaux, rationnels et réels dans les Instituts Universitaires de Formation des Maitres*. Université Joseph Fourier - Grenoble 1.
- Otte, M. (2007). Mathematical history, philosophy and education. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2), 243–255. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9079-z>
- Otte, M., & Jahnke, H. N. (1981). Origins of the Program of “Arithmetization of Mathematics.” In H. Mehrtens, H. J. Bos, & I. Schneider (Eds.), *Social history of nineteenth century mathematics* (pp. 21–49). Birkhäuser.
- Peirce, Ch. S. (1931–1935). *Collected Papers of Charles Sanders Peirce, Volumes I–VI*, C. Hartshorne and P. Weiß (Eds.), Cambridge, MA (Harvard UP) (cité par numéro de volume et paragraphe).
- Peltier-Barbier, M.-L. (Ed.). (2004). *Dur pour les élèves, dur pour les enseignants, dur d'enseigner en ZEP*. La pensée sauvage.
- Perrin-Glorian, M.-J. (1992). *Aires de surfaces planes et nombres décimaux: Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème* [PhD Thesis].
- Perrin-Glorian, M.-J. (1993). Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans les classes « faibles ». *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 13(1.2), 5–118. <https://revue-rdm.com/1993/questions-didactiques-soulevees-a/>
- Perrin-Glorian, M.-J. (2002). Problèmes didactiques liés à l'enseignement des grandeurs. Le cas des aires. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11ième École d'Été de Didactique des Mathématiques. Version CD-ROM* (pp. 1–46). La pensée sauvage.
- Polotskaia, E. (2017). How the Relational Paradigm Can Transform the Teaching and Learning of Mathematics: Experiment in Quebec. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 18(2), 161–180.
- Polotskaia, E., & Savard, A. (2021). Some multiplicative structures in elementary education: A view from relational paradigm. *Educational Studies in Mathematics*, 106(3), 447–469. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09979-8>

- Pressiat, A. (2002). Grandeurs et mesures : évolution des organisations mathématiques de référence et problèmes de transposition. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11^{ème} École d'Été de Didactique des Mathématiques. Version CD-ROM* (pp. 1–19). La pensée sauvage.
- Pressiat, A., & Cirade, G. (2021). Introduction au thème Grandeurs et mesure. In H. Chaachoua, A. Bessot, B. Barquero, G. Cirade, L. Coulange, P. Job, A.-C. Mathé, A. Pressiat, M. Schneider, & F. Vandebrouck (Eds.), *Perspectives en didactique des mathématiques: Point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeurs et mesures.* (Vol. 1, pp. 167–168). La pensée sauvage.
- Proust, C. (2008). Quantifier et calculer: Usages des nombres à Nippur. *Revue d'histoire Des Mathématiques*, 14(2), 143–209.
http://www.numdam.org/article/RHM_2008__14_2_143_0.pdf
- Radford, L. (2021). Davydov's concept of the concept and its dialectical materialist background. *Educational Studies in Mathematics*, 106(3), 327–342.
<https://doi.org/10.1007/s10649-020-09959-y>
- Rahaman, J., & Subramaniam, K. (2016). *Constructing the concept of area measurement in a classroom.* 1–8. (Extended paper presented at ICME 13, Hambourg)
- Reynaud, A. A. L. (1821). Notes sur l'arithmétique (1^e ed. Vers 1806). In A. A. L. Reynaud (Ed.), *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie avec des notes et des tables de logarithmes par A.A.L. Reynaud* (9th ed.). Courcier, Libraire pour les sciences.
<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k201342q.r=reynaud%20bezout?rk=21459;2>
- Rinaldi, A.-M. (2016). *Place et rôle des technologies dans l'enseignement et l'apprentissage du calcul soustractif en CE2: Proposition d'ingénierie* [PhD Thesis]. Université Sorbonne Paris Cité-Université Paris Diderot (Paris 7).
- Rinaldi, A.-M., & Chambris, C. (2019). De l'analyse d'un dispositif d'enseignement du calcul soustractif en CE2 à l'analyse des connaissances requises en numération. In M. Abboud (Ed.), *Actes du colloque EMF 2018* (pp. 1048–1055).
- Roditi, E. (2009). L'histogramme: À la recherche du savoir à enseigner. *Spirale-Revue de Recherches En Éducation*, 43, 129–138.
- SANCP. (2019). *MICLE Session 1 & 2 Handbook (South African Numeracy Chair Project)*. Rhodes University. <https://www.ru.ac.za/sanc/teacherdevelopment/miclegr4-7>
- Saraiva, L. M. R. (2015). Étienne Bézout in Portugal: The reform of the Portuguese University and beyond (1772–1838). *Historia Mathematica*, 42(1), 14–46.
<https://doi.org/10.1016/j.hm.2014.05.002>
- Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Children*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203883785>
- Schmittau, J. (2005). The development of algebraic thinking. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, 37(1), 16–22.
- Simard, A. (2012). Proportionnalité en CM2 et sixième. *Petit x*, 90, 35–52.
- Smith III, J. P., & Barrett, J. E. (2017). Learning and teaching measurement: Coordinating quantity and number. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education.* (pp. 355–385). National Council of Teachers of Mathematics.
- Smith III, J. P., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Teppo, A. R. (2011). Learning, teaching, and using measurement: Introduction to the issue. *ZDM*, 43(5), 617–620.
<https://doi.org/10.1007/s11858-011-0369-7>
- Soury-Lavergne, S., Croquelois, S., Martinez, J.-L., & Rabatel, J.-P. (2020a). Conceptions des élèves de primaire sur la numération décimale de position. *Revue de Mathématiques pour l'école*, 233, 128–143.
https://www.revue-mathematiques.ch/files/4015/9195/4427/RMe-233-Soury_Lavergne.pdf
- Soury-Lavergne, S., Croquelois, S., Martinez, J.-L., & Rabatel, J.-P. (2020b). Conceptions des élèves de cycle 2 et cycle 3 sur la numération décimale de position. *Actes du 46^e Colloque de la COPIRELEM Lausanne les 4, 5 et 6 Juin 2019 Dispositifs de formation à l'enseignement des mathématiques au XXI^e siècle*, 457–477.
https://www.revue-mathematiques.ch/files/4015/9195/4427/RMe-233-Soury_Lavergne.pdf
- Steiner, H.-G. (1969). Magnitudes and rational numbers. A didactical analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 2(2–3), 371–392. <https://doi.org/10.1007/BF00303470>

- Tempier, F. (2010). Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2. *Grand N*, 86, 59–90.
- Tempier, F. (2013). *La numération décimale à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*. [PhD Thesis]. Université Paris-Diderot-Paris VII.
- Tempier, F., & Chambris, C. (2017). Concevoir une ressource pour l'enseignement de la numération décimale de position. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 37(2–3), 289–332.
- Thanheiser, E. (2009). Preservice Elementary School Teachers' Conceptions of Multidigit Whole Numbers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(3), 251–281.
<http://www.jstor.org/stable/40539337>
- Thom, R. (1970). Les Mathématiques “Modernes”: Une erreur pédagogique et philosophique ? *L'Age de La Science*, 3, 225–242.
- Thom, R. (1973). Modern mathematics: Does it exist? In A. G. Howson (Ed.), *Developments in Mathematical Education: Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education* (pp. 194–210). Cambridge University Press.
<https://doi.org/10.1017/CBO9781139013536.011>
- Thom, R. (1990). La vie et l'oeuvre de Hassler Whitney. *La Vie des sciences - Comptes rendus*, 7(6), 473–476. <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k5738258w>
- Thompson, P. W. (1988). Quantitative concepts as a foundation for algebra. In M. Behr (Ed.), *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 163–170).
- Thompson, P. W., Carlson, M. P., Byerley, C., & Hatfield, N. (2014). Schemes for thinking with magnitudes: A hypothesis about foundational reasoning abilities in algebra. *Epistemic Algebraic Students: Emerging Models of Students' Algebraic Knowing*, 4, 1–24.
- Ulrich, C. (2015). Stages in constructing and coordinating units additively and multiplicatively (Part 1). *For the Learning of Mathematics*, 35(3), 2–7.
- Ulrich, C. (2016). Stages in constructing and coordinating units additively and multiplicatively (Part 2). *For the Learning of Mathematics*, 36(1), 34–39.
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structure. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127–174). Academic Press.
- Vigour, C. (2016). *La comparaison dans les sciences sociales*. La Découverte.
- Višňovská, J., & Cortina, J. L. (2017). Learning to support all students' fraction understanding. In J. Novotná & H. Moraová (Eds.), *Equity and diversity in elementary mathematics education, Proceedings of the bi-annual International Symposium on Elementary Mathematics Teaching* (pp. 430–440). Charles University, Faculty of Education.
- Visnovska, J., Cortina, J. L., Vale, P., & Graven, M. (2018). The Role of the Story in Enabling Meaningful Mathematical Engagement in the Classroom. In J. Hunter, P. Perger, & L. Darragh (Eds.), *Making waves, opening spaces (Proceedings of the 41st annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia)* (pp. 717–724). MERGA.
- Whitney, H. (1968a). The mathematics of physical quantities: Part I: mathematical models for measurement. *The American Mathematical Monthly*, 75(2), 115–138.
- Whitney, H. (1968b). The Mathematics of Physical Quantities: Part II: Quantity Structures and Dimensional Analysis. *The American Mathematical Monthly*, 75(3), 227–256.
<https://doi.org/10.2307/2314953>
- Wijayanti, D., & Bosch, M. (2018). The evolution of the knowledge to be taught through educational reforms: The case of proportionality. In Y. Shimizu & R. Vithal (Eds.), *Proceedings of ICMI Study 24. School mathematics curriculum reforms: Challenges, changes and opportunities*. (pp. 173–180). University of Tsukuba.
<https://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/ICMI%20studies/ICMI%20Study%2024/ICMI%20Study%2024%20Proceedings.pdf>