



HAL
open science

Optimal control under uncertainties for the vertical landing of the first stage of a reusable launch vehicle

Clara Leparoux

► **To cite this version:**

Clara Leparoux. Optimal control under uncertainties for the vertical landing of the first stage of a reusable launch vehicle. Optimization and Control [math.OC]. Institut Polytechnique de Paris, 2023. English. NNT : 2023IPP AE007 . tel-04383691v2

HAL Id: tel-04383691

<https://hal.science/tel-04383691v2>

Submitted on 31 Jan 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT
POLYTECHNIQUE
DE PARIS

NNT : 2023IPPAAE007

Thèse de doctorat



Optimal control under uncertainties for the vertical landing of the first stage of a reusable launch vehicle

Thèse de doctorat de l'Institut Polytechnique de Paris
préparée à l'Ecole nationale supérieure de techniques avancées

École doctorale n°574 Ecole Doctorale de Mathématiques Hadamard (EDMH)
Spécialité de doctorat : Mathématiques appliquées

Thèse présentée et soutenue à Palaiseau, le 18 septembre 2023, par

Clara Leparoux

Composition du Jury :

Hasnaa Zidani Professeure, Insa Rouen Normandie (LMI)	Présidente du jury
Jean-Baptiste Caillau Professeur, Université Côte d'Azur (LJAD)	Rapporteur
Nicolas Petit Professeur, Mines Paris (CAS)	Rapporteur
Éric Bourgeois Ingénieur, CNES	Examineur
Andrea Simonetto Maître de conférences, ENSTA (UMA)	Examineur
Frédéric Jean Professeur, ENSTA (UMA)	Directeur de thèse
Bruno Hérissey Ingénieur de recherche, Onera (DTIS)	Co-encadrant

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	La planification de trajectoire en aérospatial	3
1.2	Lois de guidage pour l'aérospatial	5
1.2.1	Modèle de dynamique	5
1.2.2	Lois de guidage explicites	6
1.2.3	Méthodes numériques de contrôle optimal	8
1.2.4	Méthodes numériques de contrôle robuste	10
1.3	État de l'art du contrôle robuste	11
1.3.1	Méthodes ensemblistes	12
1.3.2	Réduction de sensibilité	12
1.3.3	Méthodes stochastiques	12
1.4	Résumé des contributions	13
1.5	Organisation du manuscrit	15
1.5.1	Partie I	15
1.5.2	Partie II	15
I	A general framework for robust motion planning	17
2	Robust motion planning problem formulation	19
2.1	Modeling robustness via stochastic open-loop optimal control	20
2.2	Statistical linearization	21
2.3	Efficient robust motion planning	23
2.4	Estimates for statistical linearization	24
2.4.1	Bounds on approximation errors	25

2.4.2	Feasibility of Problem 3 under approximation constraints	29
2.5	Summary	32
3	Accessibility conditions for statistical linearization	33
3.1	Motivation and state of the art on accessibility	34
3.2	General conditions for accessibility and controllability	34
3.3	Form of the Lie brackets for statistical linearization	36
3.4	Algebraic conditions for accessibility	39
3.5	Accessibility criterion for statistical linearization	42
3.6	Counterexample: the biaffine case	45
3.7	Summary	47
II	Case study: vertical landing of a space vehicle	49
4	Optimal guidance in the absence of uncertainties	51
4.1	State of the art considering Max-Min-Max controls	52
4.2	Model and problem statement	53
4.3	Optimality conditions	55
4.4	Structure of optimal controls	57
4.4.1	Solution of the optimal control problem	57
4.4.2	Variations of Ψ	59
4.4.3	Structure of the optimal control when considering the effect of the atmosphere	65
4.5	Additional properties of optimal trajectories	68
4.5.1	Singular arcs	68
4.5.2	Number of contact points	70
4.6	Numerical results	73
4.7	Sensitivity analysis	76
4.8	Summary	79
5	Robust motion planning using statistical linearization	83
5.1	Framework	83
5.2	Direct statistical linearization	85
5.3	Statistical linearization through partial feedback	87
5.3.1	Adding feedback into the model	87
5.3.2	Adding actuator limits to the model	88
5.3.3	State constraints	91

5.4	Numerical results	92
5.4.1	Considering only thrust magnitude limits	93
5.4.2	Considering control limits and state constraints	96
5.4.3	Conclusions	99
5.5	Summary	100
6	Robust motion planning with detection area	101
6.1	Formulation du problème	102
6.2	Application au lanceur	106
6.2.1	Modélisation de la première phase	106
6.2.2	Choix du contrôleur de la seconde phase	107
6.2.3	Définition de la zone \mathcal{Z}	107
6.2.4	Contrainte sur t_1	109
6.3	Estimation du coût de la seconde phase	109
6.3.1	Expression exacte de la fonction valeur d'un problème LQ	109
6.3.2	Calcul par résolution numérique d'un problème de contrôle optimal	110
6.3.3	Choix de t_f	112
6.4	Résultats numériques	112
6.4.1	Approximation de $\mathbb{E}^\phi[C_2]$ par le coût d'un problème LQ	113
6.4.2	Calcul numérique de $\mathbb{E}^\phi[C_2(m(t_1))]$	114
6.4.3	Conclusions	115
7	Perspectives	117
7.1	Justifications théoriques de la linéarisation statistique	117
7.2	Contrôle optimal d'un véhicule spatial à l'atterrissage	118
7.3	Application de la méthode de planification de trajectoire robuste au lanceur	118
7.4	Méthode de planification en 2 phases	119
	Bibliographie	121

Remerciements

Je remercie tous les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'égard de mon travail, ainsi que pour les nombreuses questions et remarques constructives qu'ils ont apportées. Je souhaite tout particulièrement remercier Hasnaa Zidani, qui a accepté de présider le jury, ainsi qu'Éric Bourgeois et Andrea Simonetto, et surtout Jean-Baptiste Caillau et Nicolas Petit, qui ont accepté d'être rapporteurs de mon manuscrit.

Je tiens à remercier chaleureusement mes encadrants de thèse Bruno Hérissé et Frédéric Jean pour leur accompagnement et leur implication constants durant ces trois années. Votre présence et votre réactivité m'ont permis d'achever ce travail avec sérénité. Je remercie aussi Riccardo Bonalli pour ses conseils.

Ce travail est le fruit d'une collaboration entre l'Unité de Mathématiques Appliquées de l'ENSTA Paris et le Département Traitement de l'Information et Systèmes de l'Onera Palaiseau. J'ai eu la chance d'avoir le soutien des membres de ces deux équipes et je leur suis reconnaissante.

Je garderai un souvenir particulièrement agréable de ces trois années grâce aux stagiaires, aux doctorants et aux post-doctorants avec qui j'ai pu partager de nombreux moments de détente. En particulier, Camille, Enzo, Esteban, Julius et Etienne qui m'ont accueillie chaleureusement à l'Onera ; Juliette, Hanae et Mathieu qui ont partagé avec moi ces trois ans ; et ceux qui nous ont rejoint ensuite, Thomas, Baptiste et Paul, Thomas, Pelin, Renato et Jules, et enfin Léonie, Matthieu, Lucas et Clément. De l'autre côté de Palaiseau, je remercie particulièrement Laura pour sa bienveillance, mes cobureaux Alex et Amond que j'ai toujours eu plaisir à voir, et ceux avec qui j'ai partagé les pauses café (et les shams), notamment Othmane, Pierre, Alice, Cristian, Thibaut, Fabien, Quentin, Paul, Morgane, Rose-Cloé, Natalia, Raphaël, Cédric et Sarah.

Enfin, un dernier mot pour ma famille et mes amis, qui ont été présents à chaque fois que j'en avais besoin.

Nomenclature

Variables

x : vecteur d'état déterministe de taille n

x_t : vecteur d'état stochastique de taille n

dW_t : processus de Wiener

g : paramètre de diffusion du processus de Wiener

m : espérance de x_t

P : matrice de covariance de x_t

(m, P) : variables de la linéarisation statistique

$X = (m, P)$: vecteur d'état du système correspondant à la linéarisation statistique

u : contrôle de taille k , de la dynamique en boucle ouverte

v : contrôle de la dynamique avec retour d'état

f : famille de champs de vecteurs définie par le système non perturbé

F : famille de champs de vecteurs définie par la solution de l'équation de la linéarisation statistique

t_f : durée totale de la trajectoire

S : cible

Modélisation du lanceur

$r = (r_x, r_z)$ en 2D ou (r_x, r_y, r_z) en 3D : vecteur position

$v = (v_x, v_z)$ en 2D ou (v_x, v_y, v_z) en 3D : vecteur vitesse

μ : masse

q : débit d'éjection des gaz

T : poussée maximale du moteur

$g_a = (0, g_0)$ en 2D ou $(0, 0, g_0)$ en 3D où g_0 est l'accélération de gravité

Ensembles et espaces

\mathbb{R} : ensemble des réels

\mathcal{U} : ensemble des contrôles admissibles

\mathcal{A} : ensemble atteignable

S_n : ensemble des matrices symétriques de taille n

\mathcal{A}_n : ensemble des matrices antisymétriques de taille n

I : matrice identité

\mathcal{I} : idéal

$\text{span}\{f\}$: espace vectoriel généré par f

$\text{Lie}(f)$: algèbre de Lie générée par f

Opérateurs mathématiques

$\langle \cdot, \cdot \rangle$: produit scalaire

\mathbb{E} : espérance

Pr : probabilité

$D_x f$: matrice jacobienne de f par rapport à x

Introduction

Le déplacement de systèmes autonomes représente encore aujourd’hui un challenge majeur en ingénierie. De nombreux problèmes restent non résolus, afin d’assurer la sécurité, la fiabilité et la durabilité de tels systèmes dans la performance de tâches de plus en plus complexes. Les applications sont nombreuses, avec des exemples concrets dans la vie courante tels que les voitures autonomes, ainsi que dans l’industrie avec les lanceurs réutilisables ou la robotique. L’une des étapes clés pour réaliser un mouvement autonome est la *planification de trajectoire*, consistant à calculer un chemin à suivre afin d’atteindre la cible visée. Il s’agit généralement d’une brique importante de l’algorithme de contrôle du système, et elle peut avoir différents rôles.

- Pour les systèmes n’ayant pas accès à des mesures ou estimations de l’état, la planification de trajectoire fournit le contrôle en *boucle ouverte* permettant au système de réaliser le mouvement souhaité. Cela peut être le cas pour les systèmes dépourvus de capteurs, ou qui en possèdent mais ne peuvent pas estimer complètement leur état par manque d’observabilité, ou car les capteurs sont imprécis ou induisent des retards. On trouve un exemple de ce rôle dans les mouvements biologiques rapides, qui n’utilisent pas les informations captées par la vue ou le toucher. En effet, ces dernières induisant de fortes latences, elles n’interviennent que dans les mouvements précis et lents. Ainsi, [Berret and Jean, 2020b] propose une modélisation du contrôle de la force et de l’impédance dans les mouvements humains, avec une composante *feedforward* ne dépendant pas des informations sensorielles.
- Elle peut aussi servir d’étape de prédiction dans un algorithme d’optimisation ou de prise de décision, nécessitant d’estimer la faisabilité d’un trajet ou son coût dans différentes conditions. Par exemple, les méthodes d’optimisation de conception multidisciplinaire contiennent généralement une étape de planification de

trajectoire afin d'estimer les coûts d'une conception [Balesdent et al., 2011]. Une étape de planification est aussi contenue dans l'algorithme proposé par [Hayner et al., 2023], avec comme application l'automatisation du choix du site d'atterrissage d'un atterrisseur sur Mars. Cet algorithme permet de faire le choix entre des sites repérés automatiquement par vision, en éliminant au fur et à mesure de la descente les cibles dont la trajectoire pour les atteindre ne respecterait pas les contraintes imposées.

- Pour des systèmes équipés de capteurs, la planification de trajectoire sert à calculer une trajectoire et un contrôle de référence. Un asservissement (ou suivi de trajectoire), réalisé à l'aide d'un contrôle par *retour d'état* par exemple, est utilisé pour corriger les écarts mesurés à la trajectoire de référence. Ce type de boucle est classique en automatique, et il existe de nombreuses manières d'effectuer la planification, souvent propres à l'application visée. Par exemple, [Athans, 1971] présente la planification de trajectoire dans un cadre linéaire quadratique gaussien.

C'est dans ce dernier cadre que se placent les travaux de ce manuscrit. En plus de permettre au système d'atteindre l'état souhaité depuis son état initial, la référence d'un suivi de trajectoire doit généralement remplir les objectifs suivants :

- *optimalité* : minimiser une grandeur d'intérêt, comme la consommation de carburant, l'énergie, la durée de la trajectoire ou l'erreur finale ;
- prise en compte de *contraintes*, comme une limite de consommation de carburant ou l'évitement d'obstacles.

De plus, il peut être nécessaire que la référence soit robuste par rapport à des perturbations de l'environnement, des phénomènes physiques non pris en compte dans la modélisation, des incertitudes sur les paramètres physiques ou un manque de précision des mesures. Toutefois, prendre en compte la présence d'aléas dans la modélisation rend souvent la solution plus coûteuse et demande d'effectuer un compromis avec l'objectif d'optimalité. Ce compromis peut être illustré par le "drunken spider problem" [Kappen, 2005]. Dans cette situation, une araignée doit choisir un chemin pour rejoindre sa maison située derrière un lac, en évitant de tomber dedans. Elle a le choix entre un chemin court traversant un pont étroit ou un autre faisant le tour du lac. En l'absence d'aléas, le premier choix, c'est-à-dire traverser le pont, est optimal en termes de distance parcourue. Toutefois, si les mouvements de l'araignée sont incertains, il devient plus sûr pour elle de choisir le second chemin, celui qui contourne le lac.

Ce manuscrit traite de la planification de trajectoire, dans le contexte du calcul d'une référence à un suivi de trajectoire, avec pour application un problème d'atterrissage

vertical de véhicule spatial. Nous traitons ce problème comme un problème de contrôle optimal sous contraintes au sein duquel on prend en compte la robustesse. Les exigences liées à l'application requièrent de prendre en compte des aléas, comme expliqué dans la section suivante.

1.1 | La planification de trajectoire en aérospatial

La planification de trajectoire est une étape essentielle en aérospatial, où les systèmes, lanceurs et satellites, sont majoritairement autonomes, les missions habitées étant rares et la possibilité d'intervention humaine à distance limitée par les délais de communication. Actuellement, un challenge majeur en aérospatial concerne l'atterrissage précis de véhicules spatiaux, pour les futures missions scientifiques et d'exploration sur la Lune et Mars [Braun and Manning, 2007, Song et al., 2023], et pour l'utilisation de lanceurs réutilisables revenant sur Terre.

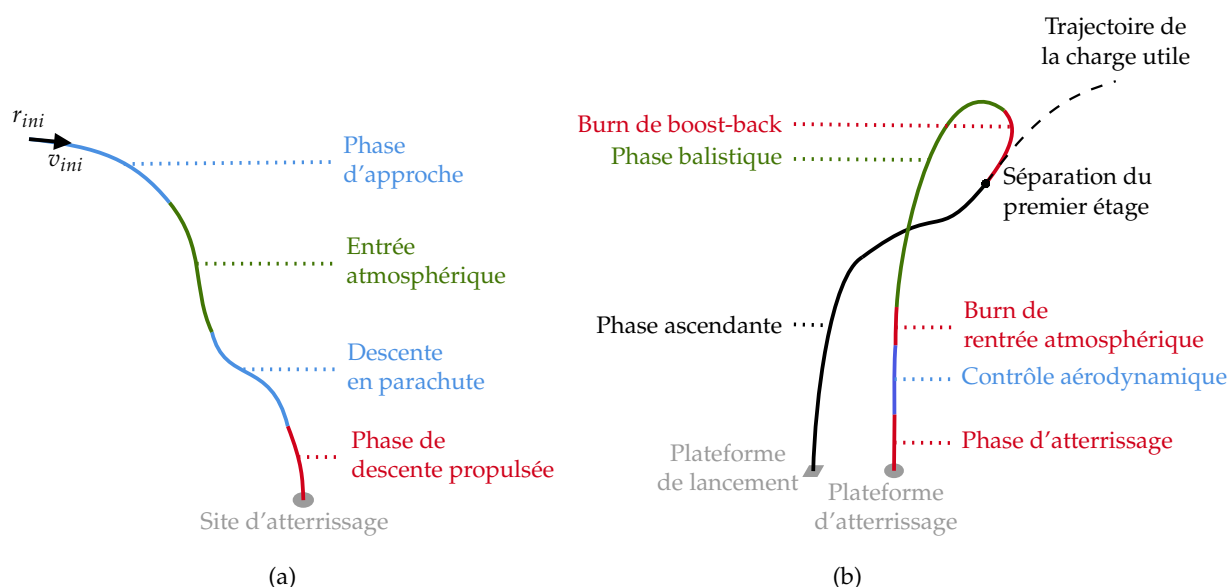


FIGURE 1.1 – Séquence d'un atterrissage sur Mars (a) et stratégie Toss-Back (b)

L'atterrissage est généralement effectué en plusieurs étapes. Par exemple, sur Mars, la rentrée atmosphérique est suivie par une phase de descente en parachute, puis par une descente propulsée [Ploen et al., 2006] (voir Figure 1.1 (a)). Pour les lanceurs réutilisables atterrissant sur Terre, la stratégie majeure utilisée aujourd'hui est la stratégie Toss-Back, consistant à rallumer le moteur-fusée pour effectuer un atterrissage vertical.

Cette stratégie est effectuée en 2 étapes : d’abord une phase de retour [Brendel et al., 2019] positionne le lanceur à quelques kilomètres au-dessus de la plateforme d’atterrissage dans de bonnes conditions d’orientation et de vitesse, puis une phase d’atterrissage est effectuée (voir Figure 1.1 (b)).

Dans nos travaux, nous nous intéressons à la dernière phase, correspondant à la phase atterrissage ou de descente propulsée. Elle correspond aux derniers kilomètres de la trajectoire, et requiert d’être effectuée avec une très grande précision pour atteindre une plateforme d’atterrissage de quelques mètres de côtés, ou un site d’atterrissage prédéfini. Ainsi, elle est généralement effectuée en suivant par retour d’état une trajectoire de référence [Ganet-Schoeller and Brunel, 2019, Malyuta et al., 2021, Scharf et al., 2017, Yu et al., 2017]. Celle-ci est calculée au début de la phase d’atterrissage, afin de corriger à partir des mesures les erreurs accumulées depuis le début du trajet [Blackmore, 2016] et donnant la possibilité de modifier le site d’atterrissage [Ma et al., 2019, Wolf et al., 2011, Hayner et al., 2023]. En aérospatial, la planification de trajectoire fait partie de l’étape de *guidage* de la boucle de *GNC*, calculant une référence afin de fournir une consigne d’accélération au *pilotage*. Celui-ci calcule le contrôle des actionneurs à l’aide de l’estimation de l’état faite par la *navigation* à partir des mesures (Figure 1.2).

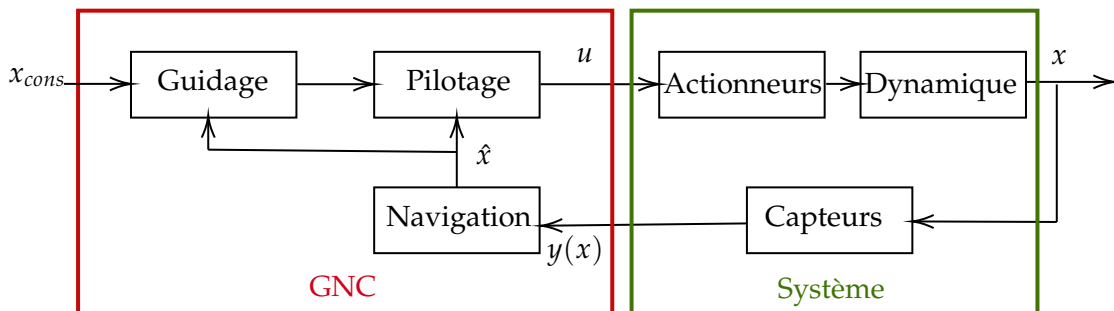


FIGURE 1.2 – Boucle de GNC en aérospatial

La planification de trajectoire joue un rôle important dans la minimisation du coût de la mission. Récemment, [Ploen et al., 2006, Sostaric and Rea, 2005] justifient l’intérêt pour les missions du Mars Science Laboratory de la stratégie de guidage dite *pinpoint landing* consistant à minimiser la consommation de carburant sous la contrainte d’atteindre la cible de manière exacte. En effet, les missions sur Mars récentes requièrent d’atterrir avec une charge utile lourde à un site prédéfini avec une précision extrême, compte tenu des difficultés à estimer correctement la position sur Mars [Wolf et al., 2006]. Dans cette situation, l’économie de carburant est vitale car en plus de réduire les coûts en évitant le surdimensionnement, elle permet aussi de garder de la marge de manœuvre

pour faire face à des aléas. Ainsi, la planification de trajectoire est le plus souvent traitée comme un problème de contrôle optimal, tel que formulé à l'origine par [Miele, 1962], avec pour objectif de minimiser une quantité importante pour la mission. Cela peut être la consommation de carburant ou l'erreur finale. De plus, la recherche de précision à l'atterrissage est un souci récent en aérospatial. Dans cet objectif, il devient nécessaire de développer des méthodes robustes aux aléas [Blackmore, 2016], tels que les incertitudes sur les paramètres physiques du véhicule, les incertitudes de mesure et les perturbations pouvant agir sur la dynamique. Les aléas peuvent être particulièrement importants dans les missions d'exploration dans des environnements inconnus [Quadrelli et al., 2015].

Dans nos travaux, nous cherchons à satisfaire ces deux objectifs d'optimalité et de robustesse, en développant une méthode de contrôle sous-optimale robuste aux aléas. La prédominance de l'un des objectifs par rapport à l'autre dépend du scénario considéré. En effet, si la trajectoire est très courte, il est plus important de privilégier la robustesse pour améliorer la précision, car il y a peu de marge de manœuvre pour réduire les coûts. À l'inverse, il est important de minimiser les coûts sur une trajectoire très longue.

Ainsi, la suite de la section fait un état de l'art des principales méthodes de guidage utilisées en aérospatial.

1.2 | Lois de guidage pour l'aérospatial

Les lois de guidage peuvent être regroupées en trois catégories : les lois explicites, les lois numériques optimales et les lois numériques robustes aux aléas. Les surveys [Liu et al., 2021, Malyuta et al., 2021, Ploen et al., 2006, Song et al., 2020] répertorient et comparent ces lois.

1.2.1 | Modèle de dynamique

Les lois de guidage en aérospatial se basent généralement sur un modèle de dynamique simple, ne prenant pas en compte les effets aérodynamiques. En effet, la planification de trajectoire étant effectuée en amont de la boucle de contrôle et devant parfois être recalculée pendant le vol, son calcul doit être rapide. Ainsi, le modèle de dynamique considéré est généralement le suivant

$$\begin{cases} \dot{r}(t) = v(t), \\ \dot{v}(t) = \frac{T}{\mu(t)}u(t) - g_a(r), \\ \dot{\mu}(t) = -q\|u(t)\|, \end{cases} \quad (1.1)$$

où $r \in \mathbb{R}^3$ est la position, $v \in \mathbb{R}^3$ la vitesse, $\mu \in \mathbb{R}$ la masse, q le débit d'éjection des gaz, T la poussée maximale des moteurs, $u \in \mathbb{R}^3$ le contrôle et $g_a(r)$ l'accélération gravitationnelle. De plus, on considère que la norme du contrôle a des bornes inférieure et supérieure u_{min} et u_{max} , i.e. $u_{min} \leq \|u\| \leq u_{max}$. Pour le guidage de la descente propulsée, celle-ci durant un temps très court et s'effectuant proche du sol, des simplifications de ce modèle sont souvent considérées, en supposant l'accélération gravitationnelle constante, voire la masse constante.

1.2.2 | Lois de guidage explicites

Une première classe de lois de guidage regroupe les lois ayant une expression explicite. Elles reposent sur des hypothèses simplificatrices sur la modélisation du problème, mais sont particulièrement efficaces à calculer. Les principales lois de cette catégorie sont les lois polynomiales, les lois ZEM/ZEV et les lois utilisant le gravity turn.

1.2.2.1 | Lois polynomiales de type Apollo

La loi de guidage implémentée dans l'atterrisseur des missions Apollo était une loi polynomiale. Elle est calculée pour un problème d'atterrissage vertical en une dimension, en imposant une évolution quadratique de l'accélération avec le temps :

$$a(t) = a_0 + a_1 t + \frac{a_2}{2} t^2. \quad (1.2)$$

Les coefficients du polynôme a_0, a_1 et a_2 sont calculés de manière à résoudre un problème aux limites à trois degrés de liberté, avec un temps final fixé, permettant d'imposer la position, la vitesse et l'accélération finales [Klumpp, 1966]. C'est un cas particulier de la loi E-guidance proposée dans [Cherry, 1964], consistant à imposer une forme polynomiale à l'accélération dont l'ordre détermine le nombre de degrés de liberté permis.

La loi Apollo étant très efficace à calculer numériquement, elle est encore utilisée aujourd'hui, [Wong et al., 2006] donnant un exemple de son utilisation pour un atterrissage sur Mars. De plus, il est possible d'obtenir par la loi Apollo d'ordre 2 des résultats proches de ceux d'une loi optimale, à condition de choisir correctement les paramètres et les conditions initiales [Ploen et al., 2006]. De plus, des variantes de la loi Apollo plus adaptées à certains cadres ont été créées, comme la loi d'ordre 3 proposée par [Wolf et al., 2006] minimisant l'énergie dépensée. Enfin, la modélisation utilisée pour générer les lois polynomiales ne permet pas de prendre en compte des incertitudes. Durant les missions habitées Apollo, afin de permettre de s'adapter à des aléas, la loi utilisée donnait la possibilité au commandant de modifier la cible visée en agissant sur les commandes [Klumpp, 1966].

Toutefois, par la simplicité de la modélisation et l'impossibilité de prendre en compte directement des contraintes de contrôle et d'état, les lois polynomiales sont limitées dans leur utilisation. De plus, elles manquent de flexibilité, car elles requièrent de fixer à l'avance la cible visée et la durée de la trajectoire.

1.2.2.2 | Loïs feedback ZEM/ZEV

Les lois dites *ZEM/ZEV* (Zero-Effort Miss/Zero-Effort Velocity) sont des lois de guidage avec retour d'état optimales à temps final t_f fixé; elles sont présentées dans [Ebrahimi et al., 2008]. Pour une dynamique suivant (1.1) avec $q = 0$ (i.e. en considérant la masse constante), on cherche $a_c = \frac{T}{\mu}u$ minimisant le coût

$$J = \frac{1}{2} \int_t^{t_f} a_c(\tau)^\top a_c(\tau) d\tau. \quad (1.3)$$

On peut montrer que le contrôle peut être exprimé en fonction des grandeurs *zem* et *zev*, définies ensuite, de la manière suivante

$$a_c(t) = \frac{k_m}{t_{go}} zem(t) + \frac{k_v}{t_{go}^2} zev(t), \quad (1.4)$$

où $t_{go} = t_f - t$, t_f est la durée totale de la manœuvre, et k_m et k_v sont des constantes valant respectivement 6 et -2 . Les grandeurs *zem* et *zev* représentent respectivement la différence entre la position et la vitesse du véhicule si aucune commande n'est appliquée et la position et la vitesse visées. Ainsi, elles sont exprimées de la manière suivante

$$zem(t) = r_f - [r(t) + t_{go}v - \int_t^{t_f} (t_f - \tau)g_a(\tau)d\tau], \quad (1.5)$$

$$zev(t) = v_f - [v(t) - \int_t^{t_f} g_a(\tau)d\tau]. \quad (1.6)$$

L'expression de a_c est identique pour d'autres fonctions coûts que (1.4), aux valeurs de k_m et k_v près. Par exemple, [D'Souza, 1997] propose une loi similaire permettant de minimiser la somme de (1.3) et de t_f .

Les difficultés de la loi *ZEM/ZEV* résident dans le choix de t_f , et le fait qu'il ne soit pas possible d'utiliser l'expression (1.4) quand t est très proche de t_f , la valeur de t_{go} tendant vers 0. Comme les méthodes polynomiales, les méthodes *ZEM/ZEV* sont très efficaces à calculer par leur expression explicite. Par contre, elles ne permettent pas de prendre en compte des contraintes dans la formulation du problème. Récemment, [Wang et al., 2021, Zhang et al., 2017] ont proposé des méthodes permettant d'éviter les collisions. Le premier propose de viser une cible virtuelle avec une vitesse calculée pour que la fin de la trajectoire se fasse avec une courbure tournée vers le ciel, assurant

l'absence de collision avec le sol. Le second propose d'ajouter un terme d'évitement d'obstacle dans la fonction coût.

Les lois ZEM/ZEV ont aujourd'hui de multiples applications, notamment pour les problèmes d'interception [Guo et al., 2013] et pour des atterrissages sur Mars [Huang et al., 2022]. Elles ont l'avantage d'être des lois par retour d'état, donc d'être précises et de permettre d'atteindre une cible en mouvement. Toutefois, la simplicité de la modélisation considérée limite l'utilisation de ces lois.

1.2.2.3 | Gravity turn

Le gravity turn consiste à imposer que la poussée du moteur soit de la même direction et de sens opposé au vecteur vitesse du véhicule. De cette manière, la poussée va réduire la vitesse latérale, de manière que l'effet majeur agissant sur le véhicule soit la gravité, provoquant une rotation. Cela a deux avantages majeurs. Le premier est que cela maximise le freinage du véhicule, et donc minimise la pression dynamique. Le second est que la trajectoire d'un gravity turn est très verticale à l'approche du point d'atterrissage. On peut obtenir une expression explicite du contrôle par cette loi en supposant que la masse et la norme de la poussée sont constantes [Culler and Fried, 1957]. Le lieu et la durée de l'atterrissage sont alors directement définis par les conditions initiales [Citron et al., 1964]. La simplicité de cette loi fait qu'elle est toujours utilisée dans les applications récentes [Johnson et al., 2018, Yang and Liu, 2021], mais étant spécifique dans sa modélisation et dans la forme du contrôle utilisé, son utilisation est limitée.

1.2.3 | Méthodes numériques de contrôle optimal

Les méthodes explicites pour le guidage présentées dans la section précédente sont efficaces à calculer, mais requièrent de faire des hypothèses simplificatrices sur la modélisation du problème. Pour considérer une modélisation complexe de la dynamique et la prise en compte de nombreuses contraintes, il est nécessaire d'utiliser des méthodes numériques. Ces deux types de lois sont utilisées de manière complémentaire : les méthodes numériques de contrôle optimal permettent de calculer hors ligne un ensemble de solutions de référence, qui servent à régler les paramètres d'une loi explicite plus simple et efficace utilisée pour le guidage en ligne sur le système réel [Steinfeldt et al., 2010].

Les méthodes numériques pour le contrôle optimal peuvent être regroupées en cinq catégories : les méthodes *directes*, les méthodes *indirectes* [Trélat, 2012], celles passant par la résolution de l'équation d'Hamilton-Bellman-Jacobi, les méthodes de *planification*

optimiste et enfin les méthodes spécifiques aux contrôles Max-Min-Max. Des surveys des méthodes numériques existantes sont effectués dans [Betts, 1998, Caillaud et al., 2022].

Tout d'abord, les méthodes directes consistent à discrétiser le problème de contrôle optimal et à considérer la dynamique comme des contraintes à respecter. Cela permet de formuler le problème de contrôle optimal comme un problème d'optimisation sous contraintes, que l'on peut résoudre grâce à une descente de gradient par exemple. Les méthodes de résolution les plus efficaces se basent généralement sur une formulation ou une approximation convexe du problème [Acikmese and Ploen, 2007, Malyuta et al., 2022]. Un survey des méthodes numériques par l'approche directe est effectué dans [Betts, 2020]. Les méthodes directes sont les plus simples à mettre en œuvre, mais elles peuvent manquer de précision et être lourdes numériquement pour des problèmes de grande dimension.

Ensuite, les méthodes indirectes consistent à appliquer le Principe du Maximum de Pontryagin au problème de contrôle optimal considéré, et impliquent de résoudre le problème aux deux bouts obtenu. La résolution numérique peut se faire par l'utilisation d'une méthode de *tir*, consistant à ramener le problème de contrôle optimal à un problème aux deux bouts, dont on cherche les conditions initiales en utilisant par exemple une méthode de Newton. Les méthodes indirectes permettent généralement d'obtenir une solution avec une bonne précision, mais ont un plus petit espace de convergence et sont très sensibles à l'initialisation. De plus, elles nécessitent d'avoir une bonne connaissance a priori de la structure du contrôle optimal. Celle-ci étant rarement connue, il est possible d'utiliser des méthodes de continuation, consistant à partir d'une solution bien connue d'un problème simple et à déformer progressivement cette solution pour obtenir la solution d'un problème plus complexe [Brendel et al., 2019].

Puis, des méthodes de contrôle optimal sont basées sur la résolution de l'équation différentielle partielle d'Hamilton-Bellman-Jacobi (HJB). Cela a pour avantages de donner une solution globale, et de calculer un contrôle par retour d'état. Toutefois, cette approche requiert de pouvoir résoudre l'équation HJB, ce qui n'est pas toujours possible, notamment en grande dimension. Des exemples de méthodes numériques pour la résoudre sont présentées dans [Sethian, 1999].

De plus, [Caillaud et al., 2022] présente une approche pour le contrôle optimal par planification optimiste [Busoniu et al., 2016, Busoniu et al., 2018]. Cela consiste à discrétiser l'intervalle des temps, et à chercher le meilleur contrôle sur chaque sous-intervalle de temps. Cette méthode est particulièrement intéressante pour des systèmes où la dimension du contrôle est plus petite que celle de l'état. Toutefois, elle ne fournit pas toujours la solution optimale mais parfois une solution seulement proche de l'optimale.

Enfin, une dernière approche exploite directement la structure du contrôle optimal.

En effet, un critère classique en guidage est la minimisation d'un coût final, comme la consommation de carburant ou le temps final. Dans ce cas, le contrôle optimal pour un problème d'atterrissage a généralement une forme *Max-Min-Max*. Cela signifie que durant la phase d'atterrissage, la norme du contrôle est toujours saturée à sa borne minimale ou à sa borne maximale, et passe au maximum deux fois d'une borne à l'autre. On ne détaille pas la littérature existante et l'explication de ce résultat ici, car son étude fait l'objet du Chapitre 4. Cette structure est bien adaptée à l'utilisation de moteur-fusées, ceux-ci étant peu modulables et souvent modélisés comme des actionneurs tout ou rien. Les changements de valeur de la norme apparaissent aux changements de signe d'une *fonction switch*, exprimée en fonction des vecteurs adjoints du Principe du Maximum de Pontryagin. Ainsi, quand les vecteurs adjoints sont calculables explicitement, il est possible de déterminer entièrement le contrôle [Gazzola, Filippo and Marchini, Elsa M., 2021, Najson and Mease, 2005]. De plus, le calcul du contrôle peut être réduit au calcul des instants de switch d'une borne à l'autre, comme proposé dans [Ito and Sakai, 2020, Lu, 2018]. Toutefois, ce type de loi n'est utilisable que pour des problèmes simples pour lesquels la structure du contrôle est connue et ne comporte pas d'arcs singuliers. De plus, la structure des contrôles Max-Min-Max est particulièrement sensible aux incertitudes, c'est pourquoi des méthodes ont été proposées pour améliorer sa robustesse en augmentant le nombre d'arcs Min et Max [Olivier et al., 2018], ou en se plaçant sur les arcs singuliers [Palanki et al., 1993].

1.2.4 | Méthodes numériques de contrôle robuste

Des méthodes numériques ont aussi été développées dans le but de prendre en compte dans la modélisation la présence d'aléas, afin de faire de la planification de trajectoire robuste.

Tout d'abord, il existe des méthodes permettant de calculer un contrôle robuste à des incertitudes sur la valeur des paramètres ou des conditions initiales. Par exemple, la méthode présentée dans [Greco et al., 2020] est basée sur la modélisation de la distribution d'incertitudes épistémiques. D'autre part, [Shen et al., 2010] propose de calculer un contrôle robuste en minimisant la sensibilité de la solution aux incertitudes sur les conditions initiales. Toutefois, ces méthodes ne permettent pas de prendre en compte la présence de perturbations aléatoires.

Ensuite, plusieurs méthodes proposent de faire une modélisation stochastique des aléas. Par exemple, [Ridderhof and Tsiotras, 2019] propose un algorithme permettant de calculer le contrôle pour un atterrissage avec des objectifs terminaux en moyenne et en covariance. Cette méthode repose sur le découplage du problème de contrôle opti-

mal en deux sous-problèmes, l'un portant sur le contrôle de la moyenne et l'autre sur le contrôle de la covariance, qui sont résolus successivement dans un cadre linéaire quadratique gaussien. Toutefois, elle suppose que le contrôle est faiblement perturbé par les aléas stochastiques et qu'il n'y a pas d'aléas sur la masse. Ensuite, la méthode proposée par [Lew et al., 2019] permet la prise en compte de contraintes en probabilité pour un problème de guidage de robots sans collision à masse constante, et [Singh et al., 2017] utilise la théorie de la contraction pour la planification de trajectoire de systèmes affines en le contrôle. Néanmoins, ces méthodes supposent soit que la dynamique du système est linéaire ou affine, soit que l'aléa ne s'applique que sur la partie linéaire de la dynamique. Cela se justifie, car les méthodes stochastiques sont lourdes numériquement en dehors du cadre linéaire. Pour des systèmes non linéaires, la méthode proposée dans [Ridderhof and Tsiotras, 2021] permet d'optimiser une trajectoire de manière robuste en linéarisant la partie non perturbée de la dynamique stochastique autour d'une trajectoire de référence, puis en résolvant un problème avec une contrainte sur la covariance. Néanmoins, en effectuant une linéarisation standard de la dynamique, il n'y a pas de contrôlabilité de la covariance.

Enfin, des méthodes de commande prédictive [Pascucci et al., 2015] et d'apprentissage par renforcement [Gaudet et al., 2020, Izzo et al., 2019] ont aussi été appliquées aux problèmes de guidage pour l'aérospatial, mais sont trop lourdes pour être implémentées dans les véhicules spatiaux actuels, et manquent de garanties de robustesse et de stabilité [Malyuta et al., 2021].

Ainsi, il existe plusieurs types de méthodes de guidage robuste pour l'aérospatial, mais elles sont généralement spécifiques à une modélisation de la dynamique ou ne sont pas robustes à des perturbations aléatoires. Pour prendre en compte ces dernières, il semble intéressant de considérer une modélisation stochastique des aléas, mais il manque actuellement de méthodes efficaces pour faire du contrôle stochastique de systèmes non linéaires.

La section suivante répertorie les méthodes générales permettant de résoudre un problème de contrôle robuste.

1.3 | État de l'art du contrôle robuste

De manière générale, les méthodes de contrôle robuste peuvent être catégorisées en trois groupes : les méthodes ensemblistes, les méthodes basées sur la réduction de la sensibilité d'une grandeur d'intérêt et les méthodes basées sur une modélisation stochastique des aléas.

1.3.1 | Méthodes ensemblistes

Les méthodes ensemblistes prennent en compte les incertitudes en représentant l'état du système par un ensemble contenant toutes les valeurs possibles. Plus particulièrement, cela inclut tout d'abord les méthodes par analyse d'intervalle [Vehí et al., 2002], appliquées avec succès en robotique [Pepy et al., 2009] et en aérospatial [Bertin et al., 2021, Cheng et al., 2019]. Cela contient aussi les méthodes par ensembles invariants permettant de générer des trajectoires sûres [Berntorp et al., 2017, Blanchini, 1999, Danielson et al., 2020]. Toutefois, ces méthodes ont pour défaut de générer ou bien des solutions très conservatives, ou bien des algorithmes lourds [Blanchini, 1999].

1.3.2 | Réduction de sensibilité

La seconde catégorie contient les méthodes visant à réduire la sensibilité d'une certaine grandeur d'intérêt vis-à-vis des paramètres incertains. Par exemple, [Darlington et al., 2000, Rustem, 1994] proposent des algorithmes qui minimisent la sensibilité de la fonction objectif d'un problème de contrôle optimal. D'autre part, l'algorithme proposé dans [Plooij et al., 2015] permet de minimiser la sensibilité de l'état final pour le mouvement d'un bras robotique soumis à des frottements. Enfin, [Seywald and Seywald, 2019] modélise la dynamique de la sensibilité de l'état et la réduit en la pénalisant dans le coût du problème de contrôle optimal. Cette catégorie contient aussi les méthodes pire-cas, ou minmax, visant à obtenir la meilleure performance dans les conditions les plus dégradées. Cela comprend notamment les méthodes \mathcal{H}_∞ , dont la formulation a été donnée originellement dans [Zames, 1981] pour les systèmes linéaires et dont un équivalent pour les systèmes non linéaires est donné dans [Isidori and Astolfi, 1992]. Un survey des méthodes permettant de réduire les incertitudes paramétriques est proposé dans [Nagy and Braatz, 2004].

1.3.3 | Méthodes stochastiques

Les deux premières classes de méthodes sont bien adaptées pour traiter les incertitudes paramétriques, mais celles causées par des perturbations aléatoires de la dynamique sont mieux traitées par la troisième classe de méthodes, les méthodes stochastiques. Plus particulièrement, les méthodes stochastiques traitent la robustesse par rapport à des effets aléatoires en réduisant la covariance. Notamment, [Sain, 1966] est l'une des premières études traitant ce problème et donne la solution théorique du problème minimisant la covariance d'un coût d'un problème linéaire quadratique sous des perturbations aléatoires des entrées. Ensuite, pour les systèmes linéaires, [Hotz and Skel-

ton, 1985] et [Chen et al., 2015] proposent des analyses de problèmes de contrôle avec pour contrainte d'atteindre exactement une certaine covariance finale, le premier pour un problème à horizon infini et le second à horizon fini. Dans le même cadre, [Bakolas, 2016] propose une méthode de contrôle optimal de covariance, avec prise en compte de contraintes sur l'état. Enfin, [Censi et al., 2008] cherche à minimiser la covariance en pénalisant la covariance de l'état final dans le coût, par l'utilisation de matrices d'information de Fisher. Toutefois, bien que fiables, les méthodes stochastiques sont généralement lourdes en calcul, en dehors du cas linéaire quadratique.

De plus, prendre en compte des contraintes sur des grandeurs stochastiques peut poser des difficultés. La stratégie majeure adoptée est de passer par des contraintes en probabilité, assurant que la contrainte est satisfaite avec un certain niveau de confiance prédéfini [Nemirovski and Shapiro, 2006, Geletu et al., 2013]. Les contraintes en probabilité permettent de reformuler des contraintes stochastiques en contraintes déterministes sur la moyenne et la covariance par équivalence dans le cas gaussien (voir Chapitre 5) ou par approximation dans le cas général [Nakka and Chung, 2019]. Elles peuvent aussi être calculées numériquement par le calcul de l'espérance d'une fonction indicatrice [Geletu et al., 2013]. De plus, la loi de Boole permet de décomposer des contraintes complexes en somme de contraintes linéaires [Blackmore et al., 2011, Lew et al., 2020]. Bien que l'utilisation de contraintes en probabilité permette de prendre en compte des contraintes complexes et diverses sur le contrôle et l'état, elles peuvent alourdir considérablement la résolution du problème. Quand cela est possible, il peut être préférable d'utiliser des méthodes alternatives, comme des méthodes conservatives [Ridderhof and Tsiotras, 2019, Ridderhof and Tsiotras, 2021] ou l'approche incluant les saturations proposée en Section 5.3.2 du Chapitre 5.

Remark 1.3.1. D'après [Seywald and Seywald, 2019], la covariance de l'état d'un système aux conditions initiales aléatoires et la sensibilité aux conditions initiales de la solution du problème de contrôle associé sont directement liées. Ainsi, les méthodes ayant pour objectif la diminution de la covariance diminuent aussi la sensibilité, et inversement.

1.4 | Résumé des contributions

Les travaux de cette thèse portent sur le développement d'une méthode robuste de planification de trajectoire et de contrôle optimal. Ils apportent des justifications théoriques à la méthode présentée, prouvant l'existence de solutions au problème formulé. Enfin, la méthode est appliquée à un problème de planification de trajectoire pour l'at-

terrissage vertical d'un premier étage de lanceur réutilisable. Les contributions proposées sont les suivantes.

- Étude du contrôle optimal déterministe pour le problème d'atterrissage sans aléas. Nous avons mis en avant la persistance de la structure Max-Min-Max avec des contraintes fortes sur l'état et le contrôle et différentes fonctions coûts, y compris avec prise en compte de l'atmosphère. Cette structure étant particulièrement sensible aux perturbations, nous en déduisons qu'il est nécessaire de prendre en compte la présence d'aléas pour calculer une solution robuste.
- Formulation d'une méthode générale de planification robuste sous-optimale, basée sur la minimisation de la covariance et utilisant la linéarisation statistique. De plus, nous avons mis en œuvre cette méthode sur le problème de l'atterrissage et obtenu des résultats numériques montrant son efficacité.
- Justifications théoriques de la pertinence de la méthode de planification de trajectoire robuste proposée. Ces justifications concernent la contrôlabilité des systèmes linéarisés statistiquement, le calcul d'une estimée de l'erreur d'approximation par la linéarisation statistique et l'existence de solutions au problème de contrôle optimal formulé associé à une erreur d'approximation donnée.

Ces travaux ont donné lieu aux publications suivantes :

- [Leparoux et al., 2022a] Leparoux, C., Hérissé, B., and Jean, F. (2022a). Optimal planetary landing with pointing and glide-slope constraints. In *2022 IEEE 61st Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 4357–4362.
- [Leparoux et al., 2022b] Leparoux, C., Hérissé, B., and Jean, F. (2022b). Structure of optimal control for planetary landing with control and state constraints. *ESAIM : COCV*, 28 :67.
- [Bonalli et al., 2022] Bonalli, R., Leparoux, C., Hérissé, B., and Jean, F. (2022). On the accessibility and controllability of statistical linearization for stochastic control : Algebraic rank conditions and their genericity. *Mathematical Control and Related Fields*.
- [Leparoux et al., 2023b] Leparoux, C., Hérissé, B., and Jean, F. (2023b). Robust Motion Planning of the Powered Descent of a Space Vehicle. Présenté au IFAC WC 2023.
- [Leparoux et al., 2023a] Leparoux, C., Bonalli, R., Hérissé, B., and Jean, F. (2023a). Statistical Linearization for Robust Motion Planning. Preprint, soumis en Mars 2023.

1.5 | Organisation du manuscrit

1.5.1 | Partie I

La Partie I de ce manuscrit présente les contributions relatives à la formulation générale du problème de planification de trajectoire, non spécifique à l'aérospatial.

Tout d'abord, le Chapitre 2 commence par détailler la modélisation des incertitudes dans le cadre de la planification de trajectoire en utilisant des équations différentielles stochastiques. Cette modélisation est utilisée pour formuler dans un cadre général un problème de planification robuste de trajectoire comme un problème de contrôle optimal stochastique (Problème 2). La résolution de problèmes de contrôle optimal stochastique étant lourde numériquement, je propose de résoudre un problème de contrôle optimal déterministe (Problème 3), en utilisant la linéarisation statistique pour approcher moyenne et covariance. Je justifie l'intérêt de la linéarisation statistique comme approximation tout d'abord par le calcul d'estimées d'erreurs, dont une expression simple sous l'hypothèse d'un contrôle borné est donnée dans le théorème 2.4.2. Ce calcul permet d'exprimer des contraintes garantissant la justesse de l'approximation. De plus, j'effectue une étude de la faisabilité du problème de planification de trajectoire robuste utilisant la linéarisation statistique en prenant en compte des contraintes d'approximation.

Ensuite, le Chapitre 3 justifie l'existence de solutions du Problème 3, par l'étude de l'accessibilité de la linéarisation statistique. Dans un premier temps, je rappelle les conditions générales d'accessibilité et de contrôlabilité utilisant des conditions d'algèbre de Lie. Dans le cas d'un système linéarisé statistiquement, ces conditions sont complexes à utiliser car elles dépendent à la fois de la moyenne et de la covariance. Ensuite, je donne l'expression des crochets de Lie pour la linéarisation statistique (Lemme 3.3.1). Puis, je propose un résultat algébrique (Lemme 3.4.2), permettant de simplifier les conditions d'accessibilité. La Proposition 3.5.1 donne de nouvelles conditions suffisantes dans le cas de la linéarisation statistique obtenues par l'application de cette simplification, qui ne dépendent que de la moyenne. Enfin, je détaille cette même simplification pour des cas particuliers de systèmes control-affine et bilinéaire. Je présente aussi un contre-exemple montrant le caractère seulement suffisant de la condition.

1.5.2 | Partie II

La Partie II présente l'application de la méthode de planification de trajectoire robuste à l'atterrissage d'un véhicule spatial.

Le Chapitre 4 présente une étude préliminaire du problème d'atterrissage. Après un

état de l'art sur le contrôle optimal des problèmes d'atterrissage en aérospatial, je détaille une modélisation du problème d'atterrissage sans aléas, avec la prise en compte de contraintes sur le contrôle et l'état. Ensuite, je fais l'étude de la structure du contrôle optimal par le Principe du Maximum de Pontryagin, montrant qu'elle suit une forme Max-Min-Max ou Max-Singulier-Max (Théorème 4.0.1) quand on considère la minimisation d'un coût final. Puis, je fais une étude des arcs singuliers, écartant la structure Max-Singulier-Max dans le cas général, et j'étends le résultat sur la structure du contrôle au problème considérant l'effet d'une atmosphère à pression constante. J'étudie aussi le nombre de contacts avec la contrainte d'état. Enfin, je présente des résultats de simulations numériques, ainsi qu'une étude de la sensibilité de la solution. Ce chapitre permet de mettre en évidence le manque de robustesse des contrôles optimaux dans le cas d'un problème d'atterrissage.

Le Chapitre 5 détaille la modélisation du problème d'atterrissage soumis à des incertitudes et montre l'application de la formulation du Problème 3. J'utilise les conditions d'accessibilité données par la Proposition 3.5.1 afin de mettre en évidence le manque d'accessibilité de la dynamique en boucle ouverte. Ainsi, je propose une modélisation de la dynamique avec un retour d'état partiel possédant la propriété d'accessibilité, ainsi que des méthodes de prise en compte de contraintes sur un contrôle stochastique. Enfin, je présente des simulations numériques pour justifier l'efficacité de la méthode.

Enfin, le Chapitre 6 propose une formulation d'un problème de contrôle optimal, avec une dynamique en deux phases due à la présence d'une zone donnant accès à des mesures de meilleure qualité. Le problème formulé a pour but d'optimiser la trajectoire de la première phase pour arriver dans la zone de détection. Le contexte est détaillé et les difficultés de modélisation d'un tel problème expliquées. Ensuite, l'application au cas de l'atterrissage d'un lanceur est présentée et des simulations numériques montrent son fonctionnement.

Première partie

**A general framework for robust
motion planning**

Robust motion planning problem formulation

In this chapter, we propose a paradigm for robust motion planning which leverages stochastic differential equations to model uncertainty essentially along two main steps.

First, as presented in [Berret and Jean, 2020a], we model the motion planning problem through a stochastic open-loop optimal control problem where the state covariance is penalized in the cost to ensure robustness. Then, we approximate this latter stochastic formulation through an appropriate deterministic optimal control problem whose state variables are the first two moments of the original stochastic state, i.e., its mean and covariance. These mean and covariance are efficiently computed thanks to statistical linearization, which essentially boils down to approximating the distribution of the original stochastic state through a Gaussian distribution.

Statistical linearization methods have been successfully used for decades [Socha, 2007, Elishakoff and Crandall, 2016], especially for applications in mechanical engineering [Roberts and Spanos, 2003]. In addition, [Lambert et al., 2022] recently showed statistical linearization may be beneficially leveraged for variational inference. Despite its sound numerical performance, the theoretical well-posedness of statistical linearization still remains an open question. Specifically, the fidelity of approximations stemming from statistical linearization still requires investigation. We start bridging this gap by computing estimates of the approximation error which is generated by statistical linearization. We additionally study the feasibility of the optimal control problem with statistically linearized dynamics when accuracy constraints are imposed.

This chapter is largely based on [Leparoux et al., 2023a].

2.1 | Modeling robustness via stochastic open-loop optimal control

We start by modeling a motion planning problem via a deterministic control system

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (2.1)$$

where $x \in \mathbb{R}^n$ is the state variable and $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$ is the control variable. We aim at finding an open-loop control law $u(t), t \in [0, t_f]$, which steers the system from an initial state x^0 to a target set $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$, while minimizing a certain cost. The motion planning problem then amounts to the following optimal control problem (note that the final time t_f below may be free or fixed depending on the considered problem).

Problem 1 (Deterministic motion planning).

$$\min C(u) = \psi(x(t_f)) + \int_0^{t_f} L(x(t), u(t)) dt \quad (2.2)$$

among the controls $u \in L^2([0, t_f], \mathcal{U})$ such that the solution x of

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \text{ a.e. on } [0, t_f], x(0) = x^0, \quad (2.3)$$

satisfies $x(t_f) \in \mathcal{S}$.

At this step, let us further assume that the system is affected by uncertain perturbations. We consider two kinds of perturbations here: 1) uncertainties on the initial state and 2) noise on the dynamics. We model the first uncertainties by taking a random variable x^0 as initial state; the second ones are modelled by replacing the initial control system (2.1) with an Itô-type stochastic control system

$$dx_t = f(x_t, u(t))dt + g(x_t, u(t))dW_t, \quad (2.4)$$

where W_t is a d -dimensional Wiener process and $g(x, u)$ is a dispersion matrix. The quantities $x(t_f)$ and $C(u)$ are now random variables, and hence the corresponding terminal conditions and cost should be expressed via appropriate expectations.

In this setting the sample trajectories are dispersed around the mean trajectory, and the dispersion may increase along these trajectories. Consequently, the final states of sample trajectories may lie far from the target set \mathcal{S} . It is then natural to seek robustness by penalizing the norm of the covariance $\mathbf{P}(t)$ of the state x_t in the cost. For this, let us introduce two positive semi-definite symmetric matrices \bar{Q}_f and \bar{Q} which quantify penalization of the final covariance and of the covariance along trajectories, respectively. We thus obtain a first way of constructing a robust open-loop control strategy as solution to the following stochastic open-loop optimal control problem.

Problem 2 (Robust motion planning by stochastic optimal control).

$$\min J(u) = \mathbb{E}[C(u)] + \text{tr}(\bar{Q}_f P(t_f)) + \int_0^{t_f} \text{tr}(\bar{Q} P(t)) dt \quad (2.5)$$

among the controls $u \in L^2([0, t_f], \mathcal{U})$ such that the solution x_t of

$$\begin{aligned} dx_t &= f(x_t, u(t))dt + g(x_t, u(t))dW_t, \quad t \in [0, t_f], \\ x_0 &= x^0 \text{ (random variable)}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

satisfies $\mathbb{E}[x_{t_f}] \in \mathcal{S}$.

Note that mean and covariance play a major role in the above problem, the first specifying the intended target and the second ensuring robustness. Moreover, we could add a terminal constraint on covariance to specify an intended precision, but this would raise feasibility issues. Solving stochastic optimal control problems, such as Problem 2, is notoriously challenging, as few theoretical and numerical methods are available. However, since mean and covariance are of primary interest, we can use an approach based on statistical linearization.

2.2 | Statistical linearization

We recall here the main steps of calculation that lead to the statistical linearization equations. We consider a stochastic dynamical system of the form of (2.4). We first use Itô's formula to obtain a differential system for the mean and covariance. Specifically, we have:

$$\begin{cases} \dot{m} = \mathbb{E}[f(x, u)], \\ \dot{P} = \mathbb{E}[f(x, u)(x - m)^\top] + \mathbb{E}[(x - m)f(x, u)^\top] + \mathbb{E}[g(x)g(x)^\top]. \end{cases} \quad (2.7)$$

To simplify notation, we introduce the following functions:

$$A_u(t) = \mathbb{E}[f(x, u)(x - m)^\top] P^{-1} \quad \text{and} \quad b_u(t) = \mathbb{E}[f(x, u)], \quad (2.8)$$

as well as the $n \times k$ matrix $H_u(t)$ such that

$$H_u(t)H_u(t)^\top = \mathbb{E}[g(x)g(x)^\top]. \quad (2.9)$$

We can then express the mean and covariance in terms of the controlled system:

$$\begin{cases} \dot{m} = b_u(t) \\ \dot{P} = A_u(t)P + PA_u(t)^\top + H_u(t)H_u(t)^\top \end{cases} \quad (2.10)$$

with $m(0) = m^0$ and $P(0) = P^0$.

However, working with (2.10) is not practical because A_u , b_u , and H_u depend on the distribution of x_t , which is generally unknown, and they seldom have an analytical expression.

We adopt the approach proposed in [Berret and Jean, 2020a] to solve these two problems. First, we use a method called *Gaussian statistical linearization*, which approximates the distribution of x_t by a Gaussian distribution of mean m and covariance P . Furthermore, we derive analytical expressions for A_u , b_u , and H_u by using first-order Taylor expansion of f . This allows us to obtain an approximation of the mean $m(t)$ and covariance $P(t)$ of the process x_t , by the solution (m, P) of the following deterministic control system, which is called *statistical linearization* of (2.4):

$$\begin{cases} \dot{m} = f(m, u), \\ \dot{P} = D_x f(m, u)P + PD_x f(m, u)^\top + g(m, u)g(m, u)^\top, \end{cases} \quad (2.11)$$

where $D_x f$ denotes the Jacobian matrix of f with respect to x . Here, $m(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathcal{U}$, and $P(t) \in \mathcal{S}_n$, the vector space of $(n \times n)$ symmetric matrices.

Remark 2.2.1. The first order Taylor expansion provides a practical statistical linearization expression that is linear with respect to covariance. We can use higher order expansions, in order to provide a more accurate approximation of the underlying dynamics, but the expression for \dot{P} becomes more complex and contains products between P and terms that depend on P . Therefore, from now on, we will only consider the statistical linearization expression obtained through the first-order approximation. Furthermore, in Chapter 6, we present the *unscented transform* approach [Gustafsson and Hendeby, 2012], which is an alternative method to estimate mean and covariance that makes use of *sigma-points*.

Actually, one can show more specific properties of $P(t)$. Indeed, the latter satisfies the differential Lyapunov equation

$$\dot{P} = D_x f(m, u)P + PD_x f(m, u)^\top + g(m, u)g(m, u)^\top, \quad (2.12)$$

for which it holds

$$P(t) = \Phi(t, 0)P(0)\Phi(t, 0)^\top + \int_0^t \Phi(t, s)g(m(s), u(s))g(m(s), u(s))^\top \Phi(t, s)^\top ds, \quad t \geq 0, \quad (2.13)$$

where the fundamental matrix $\Phi(t, s) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is defined as the unique solution to

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, s) = D_x f(m(t), u(t)) \Phi(t, s), \\ \Phi(s, s) = I. \end{cases}$$

Since $P(0)$ is positive semi-definite as a covariance matrix, (2.13) implies that $P(t)$ is also positive semi-definite for any $t \geq 0$. Furthermore, if $P(0)$ is positive definite, then so is $P(t)$.

Remark 2.2.2. The statistical linearization approach is to be distinguished from standard linearization approaches, which can be found in the literature [Bakolas, 2016, Chen et al., 2015, Ridderhof et al., 2021]. When the dispersion matrix only depends on time, standard linearization consists in linearizing the unperturbed dynamics, i.e. f in (2.4), but it loses controllability on the covariance. This can be seen by noticing that the control variable u does not appear in the covariance equation (2.12) in the linear case.

2.3 | Efficient robust motion planning

We propose now a method to approximate the solution of Problem 2 through statistical linearization. The main idea of our approach is to approximate the mean $\mathbf{m}(t)$ and covariance $\mathbf{P}(t)$ of the process x_t by the solution (m, P) of (2.11). Importantly, the method requires that the deterministic cost C in Problem 1 has a quadratic dependence with respect to the state variables, so from now on we assume that the following property holds.

(H) The terminal cost ψ and the infinitesimal cost L in Problem 1 are quadratic functions (non necessarily homogeneous) of x , i.e. they are expressed by:

$$\psi(x) = x^\top Q_f x + c_f^\top x, \quad (2.14)$$

$$L(x, u) = u^\top R u + x^\top Q x + u^\top S x + c_1^\top x + c_2^\top u \quad (2.15)$$

where R, Q, S, Q_f and c_1, c_2, c_f are respectively matrices and vectors of appropriate dimensions.

Assumption (H) guarantees that the expectation of the cost C in Problem 1 depends on m and P uniquely. Indeed, by denoting with Q_ψ and $Q_L(u)$ the symmetric matrices which represent the homogeneous quadratic parts of ψ and L respectively, there holds

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[C(u)] &= \psi(\mathbf{m}(t_f)) + \text{tr}(Q_\psi \mathbf{P}(t_f)) \\ &\quad + \int_0^{t_f} (L(\mathbf{m}(t), u(t)) + \text{tr}(Q_L(u(t)) \mathbf{P}(t))) dt. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Setting $Q_f = \bar{Q}_f + Q_\psi$ and $Q(u) = \bar{Q} + Q_L(u)$, we finally obtain that

$$J(u) = \psi(\mathbf{m}(t_f)) + \text{tr}(Q_f \mathbf{P}(t_f)) + \int_0^{t_f} (L(\mathbf{m}(t), u(t)) + \text{tr}(Q(u(t)) \mathbf{P}(t))) dt. \quad (2.17)$$

Therefore, we propose to compute an open-loop control for the robust motion planning Problem 2 by rather solving the following deterministic optimal control problem (below, \mathbf{m}^0 and \mathbf{P}^0 denote the mean and covariance of the random variable x^0 , respectively).

Problem 3 (Robust motion planning by statistical linearization).

$$\min J_{lin}(u) = \psi(m(t_f)) + \text{tr}(Q_f P(t_f)) + \int_0^{t_f} (L(m(t), u(t)) + \text{tr}(Q(u(t))P(t))) dt \quad (2.18)$$

among the controls $u \in L^2([0, t_f], \mathcal{U})$ such that the solution (m, P) of

$$\begin{cases} \dot{m} = f(m, u), & (2.19a) \\ \dot{P} = D_x f(m, u)P + PD_x f(m, u)^\top + g(m, u)g(m, u)^\top, & (2.19b) \end{cases}$$

$$m(0) = \mathbf{m}^0, \quad P(0) = \mathbf{P}^0,$$

satisfies $m(t_f) \in \mathcal{S}$.

Remark 2.3.1. The formulation in Problem 3 has two additional notable features:

- the mean variable (equation (2.19a)) and the covariance variable (equation (2.19b)), which measures the dispersion of the process x_t , are decoupled;
- the resulting trajectory of the mean m corresponds to the planned trajectory for the deterministic system.

Despite its simplicity, the formulation in Problem 3 raises several questions, both from theoretical and practical point of view. First, in which sense is the solution to Problem 3 an approximation of the solution to Problem 2?

Second, is this approach relevant for robustness, in particular is the use of statistical linearization sufficient to reduce the covariance? The latter question boils down to study the controllability properties of the statistical linearization, i.e., the subject of Chapter 3 and of our paper [Bonalli et al., 2023]. From a practical point of view, we show the efficiency which is offered by solving Problem 3 by studying the example of the landing of a reusable launcher in Chapter 5.

2.4 | Estimates for statistical linearization

In this section, our objective consists of endowing statistical linearization with guarantees of well-posedness, and for this we aim at showing two important properties under mild assumptions. First, we compute estimates which quantify constraints for the approximation error between the trajectories of the stochastic control system (2.4) and

those of its statistical linearization (2.11). In short, this property ensures statistical linearization represents a well-posed approximation of mean and covariance of a stochastic control system as soon as the variance is forced to take small values. As a second result, we show that Problem 3 is feasible when the aforementioned approximation constraints are considered, in the specific case of control-linear systems, a fairly general class of control systems widely used in application. This latter result ensures that, under additional approximation constraints, Problem 3 is feasible, justifying the search of an optimal solution, and their solution trajectories are close to the trajectories of the original stochastic control system.

2.4.1 | Bounds on approximation errors

In this section, we leverage the following arguably mild assumption.

Assumption 1. The following hold for (2.4):

- the differential of the dynamics f is bounded uniformly-in-state, i.e., there exists a continuous function $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ such that $\|D_x f(x, u)\| \leq \varphi(\|u\|)$, for every $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{U}$;
- the dispersion matrix does not depend on the state variable, i.e., it holds that $g(x, u) = g(u)$, for every $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{U}$.

Note that, on the one hand the first condition in Assumption 1 is standard, in that it is required, among other conditions, to ensure existence and uniqueness for solutions to (2.4). Also, this condition trivially holds for vector field f with compact support (in which case the function φ is just a constant), a property often implicitly assumed in the models. On the other hand, the second condition in Assumption 1 is for instance satisfied as soon as uncertainty (specifically, $g(x_t, u(t))dW_t$ in (2.4)) originates from some uniformly recurrent noise, such as system measurement errors, uncertain weather conditions, etc.

Before establishing estimates of the error between the trajectories of the stochastic control system and those of its statistical linearization, we note that under Assumption 1 the original stochastic control system takes the form

$$dx_t = f(x_t, u(t)) dt + g(u(t)) dW_t, \quad (2.20)$$

and the statistical linearization of (2.20) now writes

$$\begin{cases} \dot{m}(t) = f(m(t), u(t)) \\ \dot{P}(t) = D_x f(m(t), u(t))P(t) + P(t)D_x f(m(t), u(t))^\top + g(u(t))g(u(t))^\top. \end{cases} \quad (2.21)$$

Error estimates between the trajectories of the stochastic control system (2.20) and those of its statistical linearization (2.21) are given below. Let us first fix some notation. Given a control law $u \in L^2([0, t_f], \mathcal{U})$ and a random variable x^0 with mean and covariance $(\mathbf{m}^0, \mathbf{P}^0)$, we denote by (\mathbf{m}, \mathbf{P}) the mean and covariance of the solutions to (2.20) with initial condition x^0 and control u , whereas (m, P) denotes the trajectories solutions to (2.21) with initial condition $(\mathbf{m}^0, \mathbf{P}^0)$ and control u .

Proposition 2.4.1. *Assume Assumption 1 holds and fix $t_f > 0$. Then there exists an increasing function $\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ such that for every u and x^0 , the following estimate holds true,*

$$\sup_{t \in [0, t_f]} \|\mathbf{m}(t) - m(t)\|^2 + \sup_{t \in [0, t_f]} \|\mathbf{P}(t) - P(t)\| \leq \alpha \left(\int_0^{t_f} \varphi(\|u(s)\|) ds \right) \times \int_0^{t_f} \varphi(\|u(s)\|) \|P(s)\| ds, \quad (2.22)$$

provided all quantities are defined in the whole interval $[0, t_f]$.

Remark 2.4.1. The error on the mean has an exponent 2 for homogeneity reasons, the covariance being homogeneous to the square of the mean.

Proof. Since the curves m and \mathbf{m} originate from the same initial condition \mathbf{m}^0 , the difference $\mathbf{m}(t) - m(t)$ writes as

$$\int_0^t (\dot{\mathbf{m}}(s) - \dot{m}(s)) ds = \int_0^t (\mathbb{E}[f(x_s, u(s))] - f(m(s), u(s))) ds. \quad (2.23)$$

Thanks to Assumption 1 and a first-order Taylor development of f with integral rest, for every $t \in [0, t_f]$ we may compute (we implicitly overload the constant $C > 0$ in what follows)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{m}(t) - m(t)\| &\leq \int_0^t \|\mathbb{E}[f(x_s, u(s))] - f(m(s), u(s))\| ds \\ &\leq \int_0^t \|f(\mathbf{m}(s), u(s)) - f(m(s), u(s))\| ds \\ &\quad + \int_0^t \int_0^1 \left\| \mathbb{E} \left[D_x f(\theta x_s + (1 - \theta)\mathbf{m}(s), u(s))(x_s - \mathbf{m}(s)) \right] \right\| d\theta ds \\ &\leq C \int_0^t \varphi(\|u(s)\|) (\|\mathbf{m}(s) - m(s)\| + \mathbb{E}[\|x_s - \mathbf{m}(s)\|]) ds \\ &\leq C \int_0^t \varphi(\|u(s)\|) \left(\|\mathbf{m}(s) - m(s)\| + (\text{tr} \mathbf{P}(s))^{\frac{1}{2}} \right) ds, \end{aligned}$$

where in the last line we use Hölder's inequality and the fact that, for every $s \in [0, t_f]$, by definition $\mathbb{E}[\|x_s - \mathbf{m}(s)\|^2] = \text{tr} \mathbf{P}(s)$. Therefore, a routine application of Grönwall's

inequality yields

$$\sup_{t \in [0, t_f]} \|\mathbf{m}(t) - m(t)\| \leq \alpha \left(\int_0^{t_f} \varphi(\|u(s)\|) ds \right) \int_0^{t_f} \varphi(\|u(s)\|) (\text{tr} \mathbf{P}(t))^{\frac{1}{2}} dt, \quad (2.24)$$

where α can be taken as the function $\alpha(s) = Ce^{Cs}$ here.

A similar computation may be performed for the covariance. Recall that, as a result of a classical computation using Itô's formula, there holds

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbb{E}[f(x_t, u(t))(x_t - \mathbf{m}(t))^\top + (x_t - \mathbf{m}(t))f(x_t, u(t))^\top] + g(u(t))g(u(t))^\top. \quad (2.25)$$

As a consequence, for every $t \in [0, t_f]$ we may compute

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}(t) - P(t)\| &\leq \int_0^t \left\| \mathbb{E}[f(x_s, u(s))(x_s - \mathbf{m}(s))^\top] - D_x f(m(s), u(s))P(s) \right\| ds \\ &\quad + \int_0^t \left\| \mathbb{E}[(x_s - \mathbf{m}(s))f(x_s, u(s))^\top] - P(s)D_x f(m(s), u(s))^\top \right\| ds \\ &= 2 \int_0^t \left\| \int_0^1 \mathbb{E} \left[D_x f(\theta x_s + (1-\theta)\mathbf{m}(s), u(s))(x_s - \mathbf{m}(s))(x_s - \mathbf{m}(s))^\top \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - D_x f(m(s), u(s))P(s) \pm D_x f(m(s), u(s))(x_s - \mathbf{m}(s))(x_s - \mathbf{m}(s))^\top \right] d\theta \right\| ds \\ &\leq C \int_0^t \varphi(\|u(s)\|) (\mathbb{E}[\|x_s - \mathbf{m}(s)\|^2] + \|\mathbf{P}(s) - P(s)\|) ds, \end{aligned}$$

where in the first equality the symbol \pm means that we added and subtracted the quantity

$$D_x f(m(s), u(s))(x_s - \mathbf{m}(s))(x_s - \mathbf{m}(s))^\top, \quad s \in [0, t_f].$$

Noting that

$$\text{tr} \mathbf{P}(s) \leq \|\mathbf{P}(s)\| \leq \|\mathbf{P}(s) - P(s)\| + \|P(s)\|, \quad s \in [0, t_f], \quad (2.26)$$

a routine application of Grönwall's inequality readily yields (we implicitly overload the nondecreasing function α in what follows)

$$\sup_{t \in [0, t_f]} \|\mathbf{P}(t) - P(t)\| \leq \alpha \left(\int_0^{t_f} \varphi(\|u(s)\|) ds \right) \int_0^{t_f} \varphi(\|u(s)\|) \|P(s)\| ds. \quad (2.27)$$

At this step, we note that from (2.24) we in particular infer that (we write α instead of

$\alpha \left(\int_0^{t_f} \varphi(\|u(s)\|) ds \right)$ and overload this for readability)

$$\begin{aligned}
 \sup_{t \in [0, t_f]} \|\mathbf{m}(t) - m(t)\|^2 &\leq \alpha \times \left(\int_0^{t_f} \varphi(\|u(s)\|) (\text{tr} \mathbf{P}(s))^{\frac{1}{2}} ds \right)^2 \\
 &\leq \alpha \times \left(\int_0^{t_f} \varphi(\|u(s)\|) \left(\|\mathbf{P}(s) - P(s)\|^{\frac{1}{2}} + \|P(s)\|^{\frac{1}{2}} \right) ds \right)^2 \quad \text{by (2.26),} \\
 &\leq \alpha \times \left(\left(\int_0^{t_f} \varphi(\|u(s)\|) \|P(s)\| ds \right)^{\frac{1}{2}} + \int_0^{t_f} \varphi(\|u(s)\|) \|P(s)\|^{\frac{1}{2}} ds \right)^2, \\
 &\leq \alpha \times \left(\int_0^{t_f} \varphi(\|u(s)\|) \|P(s)\| ds + \left(\int_0^{t_f} \varphi(\|u(s)\|) \|P(s)\|^{\frac{1}{2}} ds \right)^2 \right).
 \end{aligned}$$

By the Cauchy-Schwartz inequality, we get

$$\left(\int_0^{t_f} \varphi(\|u(s)\|) \|P(s)\|^{\frac{1}{2}} ds \right)^2 \leq \int_0^{t_f} \varphi(\|u(s)\|) ds \int_0^{t_f} \varphi(\|u(s)\|) \|P(s)\| ds, \quad (2.28)$$

and we finally obtain

$$\sup_{t \in [0, t_f]} \|\mathbf{m}(t) - m(t)\|^2 \leq \alpha \times \int_0^{t_f} \varphi(\|u(s)\|) \|P(s)\| ds, \quad (2.29)$$

which combined with (2.27) yields (2.22), and the conclusion follows. \square

Estimate (2.22) becomes particularly insightful when controls are bounded. In this setting, the subset $\varphi(\|\mathcal{U}\|) \subseteq \mathbb{R}_+$ being bounded, Proposition 2.4.1 essentially states that the unique leverage to minimize the error generated by statistical linearization consists of forcing the L^1 norm of P to stay small. The latter property happens to be particularly useful in many applications which range from aerospace and robotics [Ridderhof and Tsiotras, 2019, Seywald and Seywald, 2019], to estimation and learning [Lambert et al., 2022].

Theorem 2.4.2. *Assume Assumption 1 holds and the control set \mathcal{U} is bounded. Fix $t_f > 0$. Then there exists a constant $C > 0$ which depends on f , t_f , and \mathcal{U} uniquely and for which the following estimate holds true,*

$$\sup_{t \in [0, t_f]} \|\mathbf{m}(t) - m(t)\|^2 + \sup_{t \in [0, t_f]} \|\mathbf{P}(t) - P(t)\| \leq C \int_0^t \|P(s)\| ds, \quad (2.30)$$

provided all quantities are defined in the whole interval $[0, t_f]$.

2.4.2 | Feasibility of Problem 3 under approximation constraints

Proposition 2.4.1 quantitatively estimates the well-posedness of statistical linearization: if one is capable of controlling (2.21) in such a way that the left-hand side of (2.22) takes small values, then the solutions to the statistical linearization well-approximate, i.e., with respect to second-order moments, the solutions to the original stochastic control system. The aforementioned requirements introduce new constraints that should be applied to Problem 3 to ensure that its solution generates trajectories that closely approximate the stochastic dynamics when statistically linearized.

However, the aforementioned constraints entail feasibility issues. Indeed, Problem 3 consists of a minimization problem on the set of L^2 controls whose associated trajectory satisfies the terminal condition $m(t_f) \in \mathcal{S}$. The fact that this set of controls is non-empty can be guaranteed by usual controllability conditions on the dynamics $f(x, u)$. The question is whether this set of admissible control remains non-empty when adding the new constraints we previously introduced. The aim of this section is to answer this question.

Let us first formalize the setting properly. For this, fix $t_f > 0$, and choose a vector $m^0 \in \mathbb{R}^n$ and a positive semi-definite symmetric matrix P^0 . Given a control $u \in L^2([0, t_f], \mathbb{R}^k)$, we denote by (m_u, P_u) the solution to (2.11) with initial condition (m^0, P^0) and control u . Assume Assumption 1 is satisfied and let α be the increasing function stemming from Proposition 2.4.1. For $\varepsilon > 0$ we define $\mathbb{U}(\varepsilon, m^0, P^0)$ to be the set of controls $u \in L^2([0, t_f], \mathbb{R}^k)$ such that

$$\alpha \left(\int_0^{t_f} \varphi(\|u(s)\|) ds \right) \times \int_0^{t_f} \varphi(\|u(s)\|) \|P(s)\| ds \leq \varepsilon. \quad (2.31)$$

As a direct corollary of Proposition 2.4.1, $\mathbb{U}(\varepsilon, m^0, P^0)$ is a class of control guaranteeing that the statistical linearization approximates to within ε the solutions to the original stochastic control system.

Corollary 2.4.3. *Assume Assumption 1 holds and consider a random variable x^0 with mean and covariance equal to (m^0, P^0) respectively. Given a control $u \in L^2([0, t_f], \mathbb{R}^k)$, we denote by $(\mathbf{m}_u, \mathbf{P}_u)$ the mean and the covariance of the solution to (2.4) with initial condition x^0 and control u , respectively. Then, for any $u \in \mathbb{U}(\varepsilon, m^0, P^0)$ there holds*

$$\sup_{t \in [0, t_f]} \|\mathbf{m}_u(t) - m_u(t)\|^2 + \sup_{t \in [0, t_f]} \|\mathbf{P}_u(t) - P_u(t)\| \leq \varepsilon. \quad (2.32)$$

Our initial question is whether for any $\varepsilon > 0$ one can find controls u in $\mathbb{U}(\varepsilon, m^0, P^0)$ satisfying $m_u(t_f) \in \mathcal{S}$. We consider the most constrained case where the target is re-

duced to a point, i.e., $\mathcal{S} = \{m^f\}$. Moreover, we restrict ourselves to a more specific setting than the one of Assumption 1.

Assumption 2. The following hold for (2.4):

1. the control domain is $\mathcal{U} = \mathbb{R}^k$;
2. the dynamics f is control-linear, i.e.,

$$f(x, u) = \sum_{i=1}^k u_i f_i(x), \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k,$$

where $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, k$, are smooth vector fields for which there exists $L > 0$ such that $\|D_x f_i(x)\| \leq L$ for every $x \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, k$;

3. the vector fields satisfy the Lie bracket generating condition

$$\mathbb{R}^n = \text{Lie}(f_1, \dots, f_k)(x), \quad \text{for every } x \in \mathbb{R}^n; \quad (2.33)$$

4. the dispersion is constant, i.e., $g(x, u) = g$, for every $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$.

Note that the above assumption implies that Assumption 1 is satisfied with $\varphi(r) = Lr$. Assumption 2 may seem rather restrictive, in particular for what concerns the hypothesis that the dynamics is control-linear and the dispersion is constant. However, this setting is encountered in many control applications, often in the case of simplification of more complex problems. Also, the Lie bracket generating condition (2.33) is *generic*, i.e., it is satisfied by almost every tuple of vector fields (f_1, \dots, f_k) .

Under this assumption we show that we have controllability for the variable m in any class $\mathbb{U}(\varepsilon, m^0, P^0)$ provided P^0 is small enough.

Proposition 2.4.4. *Assume Assumption 2 holds. For every $m^0, m^f \in \mathbb{R}^n$ and $\varepsilon > 0$, there exists a constant $c > 0$ such that, for every positive semi-definite symmetric matrix P^0 with $\|P^0\| \leq c$, there exists a control $u \in \mathbb{U}(\varepsilon, m^0, P^0)$ satisfying*

$$m_u(t_f) = m^f. \quad (2.34)$$

Remark 2.4.2. A priori, the controllability properties of the original stochastic system are not directly related to the controllability properties of its statistical linearization. However, Corollary 2.4.3 and Proposition 2.4.4 yield approximate controllability of the mean of the original stochastic system, while controllability of its covariance is addressed in Chapter 3.

Remark 2.4.3. Note that when the initial condition x^0 is deterministic, the initial covariance P^0 is zero. The proposition then implies that, for every m^0, m^f and ε , the corresponding set $\mathbf{U}(\varepsilon, m^0, 0)$ contains controls joining m^0 to m^f . This case is important for applications.

Proof. Fix m^0, m^f . Thanks to Assumption 2, and in particular (2.33), there exist a constant $C = C(m^0, m^f) > 0$ and a control $\bar{u} \in L^2([0, 1], \mathbb{R}^k)$ such that

$$m_{\bar{u}}(0) = m^0, \quad m_{\bar{u}}(1) = m^f, \quad \|\bar{u}(t)\| = C, \quad t \in [0, 1].$$

Therefore, for every $\eta > 0$ we may define the control $u_\eta \in L^2([0, t_f], \mathbb{R}^k)$ by

$$u_\eta(t) \triangleq \frac{1}{\eta} \bar{u}\left(\frac{t}{\eta}\right) \mathbb{1}_{[0, \eta]}(t), \quad t \in [0, t_f].$$

It holds that

$$\|u_\eta\|_{L^1} = \|\bar{u}\|_{L^1} = C,$$

and that

$$m_{u_\eta}(t) = \begin{cases} m_{\bar{u}}\left(\frac{t}{\eta}\right), & 0 \leq t \leq \eta \\ m^f, & \eta \leq t \leq t_f. \end{cases}$$

At this step, for every $u \in L^2([0, t_f], \mathbb{R}^k)$, the matrix P_u being solution of a Lyapunov differential equation may be explicitly computed as

$$P_u(t) = \Phi_u(t, 0)P^0\Phi_u(t, 0)^\top + \int_0^t \Phi_u(t, s)gg^\top\Phi_u(t, s)^\top ds,$$

where the fundamental matrix $\Phi_u(t, s) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is the solution of

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Phi_u(t, s) = \sum_{i=1}^k u_i(t)D_x f_i(m_u(t))\Phi_u(t, s) \\ \Phi_u(s, s) = I. \end{cases}$$

A straightforward application of Grönwall's inequality yields

$$\sup_{0 \leq s \leq t \leq t_f} \|\Phi_u(t, s)\| \leq e^{\bar{C}\|u\|_{L^1}},$$

where the constant $\bar{C} > 0$ depends on L uniquely by Assumption 2-2. In what follows, we will implicitly overload the constant \bar{C} . For every $t \in [0, \eta]$ we may compute

$$\begin{aligned} \|P_{u_\eta}(t)\| &\leq \|\Phi_{u_\eta}(t, 0)\|^2 \|P^0\| + \int_0^t \|g\|^2 \|\Phi_{u_\eta}(t, s)\|^2 ds \\ &\leq e^{\bar{C}\|u_\eta\|_{L^1}} (\|P^0\| + \bar{C}t) = e^{\bar{C}C} (\|P^0\| + \bar{C}t), \end{aligned}$$

from which we finally obtain that (recall that $\varphi(r) = Lr$)

$$\begin{aligned} & \alpha \left(\int_0^{t_f} \varphi(\|u_\eta\|) \right) \times \int_0^{t_f} \varphi(\|u_\eta\|) \|P_{u_\eta}\| \\ &= \alpha(LC) \int_0^\eta \frac{L}{\eta} \left\| \bar{u} \left(\frac{t}{\eta} \right) \right\| \|P_{u_\eta}(t)\| dt \\ &\leq \text{Const} \times (\eta + \|P^0\|). \end{aligned}$$

The conclusion follows from the arbitrariness of $\eta > 0$. □

Thus we should solve Problem 3 by optimizing over controls in $\mathcal{U}(\varepsilon, m^0, P^0)$ if we desire to guarantee that the solution generates trajectories by statistically linearized dynamics that are ε -approximations of the stochastic ones. Proposition 2.4.4 ensures that under the constraint $u \in \mathcal{U}(\varepsilon, m^0, P^0)$ Problem 3 remains feasible. In practice, it is preferable either to treat constraint (2.31) via penalization over controls, or simply to check at a post-processing level that the left-hand side of (2.31) stays small. We use the latter approach in Chapter 5.

2.5 | Summary

In this chapter, we have presented how we model uncertainties acting on a controlled system thanks to stochastic differential equations. Then, in a stochastic optimal control framework, we have proposed a formulation of robust motion planning. To address the computational challenge posed by stochastic optimal control, we have employed a statistical linearization approach. Specifically, we have approximated the solution to the problem by solving a deterministic optimal control problem that involves mean and covariance as variables. Finally, we have theoretically justified this approximation in two steps. First, we have computed bounds that estimate approximation errors of statistical linearization, and obtained accuracy constraints depending on covariance. Then, we have showed the well-posedness of statistical linearization by proving that the mean of the approximated robust motion planning problem is controllable under approximation constraints when considering linear systems.

In Chapter 3, we extend our investigation of the controllability properties of statistical linearization to a more general framework, which incorporates its weaker form known as accessibility.

Accessibility conditions for statistical linearization

Chapter 2 introduced how statistical linearization can help reduce a stochastic optimal control problem to a deterministic optimal control problem. For robust motion planning, this means solving a minimal variance problem instead. In addition, we have seen that reducing the covariance is important for ensuring the accuracy of the statistical linearization approximation, as well as the robustness of its solution. Specifically, solving Problem 3 has sense if we can control both mean and covariance, which is possible if we have at least *accessibility* on these two variables. The aim of this chapter is to further explore the controllability and accessibility properties of statistical linearization.

Section 3.1 provides a detailed explanation of the motivations behind seeking accessibility conditions for statistical linearization. Then, in Section 3.2, we review the general conditions for accessibility and controllability, which involve the computation of Lie brackets. Section 3.3 presents a general form of the Lie brackets for statistical linearization. In Section 3.4, we provide an algebraic result that simplifies accessibility conditions. In section 3.5, we express a simplification for statistical linearization through a sufficient accessibility condition. We provide a detailed explanation of this simplification in the case of control-affine systems. Finally, in Section 3.6, we study a counterexample of a class of systems that does not satisfy the sufficient condition, but can still be accessible.

This chapter is largely based on [Bonalli et al., 2023].

3.1 | Motivation and state of the art on accessibility

Although statistical linearization has already been successfully applied to complex systems, e.g., [Seywald and Seywald, 2019, Ridderhof and Tsiotras, 2019], it might suffer from controllability issues. Yet, since the variance can be minimized only if the covariance P can be controlled directly, at the very least the system (2.11) must be *accessible*, i.e., the reachable set of (2.11) must have non-empty interior. It is worth noting that this latter property is fundamental when leveraging statistical linearization for robust optimal control, in that it allows one to locally steer (2.11) along every direction, a key requirement without which one might not be capable to reduce the value of the cost [Trélat, 2012, Bonalli et al., 2020]. Unfortunately, accessibility might not hold even when considering very simple settings. Indeed, in the case where (2.4) is linear, i.e., the mapping f is linear in (x, u) , and the mapping g is constant, the dynamics of P in (2.11) is independent of m and u , which makes it not accessible: in turn, it is impossible to control the values of P in linear settings.

Although accessibility is difficult to verify and no general exact characterizations exist, one may often establish accessibility through sufficient conditions on the rank of a certain Lie algebra (which, in special cases, may additionally yield complete controllability). This remark leads us to investigating the following crucial question for the well-posedness of statistical linearization: are there conditions on the mappings f, g which yield accessibility of (2.11) by means of Lie algebra-based sufficient conditions? Note that in practice, uncertainty is often difficult to model. Therefore, the aforementioned sought conditions must depend on the values of the variable m only (that is, they must not depend on the values of P), and in addition, they should be preferably stated in terms of the mapping f uniquely, (that is, they should yield the same properties for different mappings g).

3.2 | General conditions for accessibility and controllability

Let us first recall the main existing accessibility and controllability conditions. We refer to [Jurdjevic, 2012, Chapter 3] for further details. Let

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in M, u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k, \quad (3.1)$$

be any (smooth) control system on an open subset M of \mathbb{R}^n . Specifically, this control system is characterized by the family of (smooth) vector fields

$$\mathbf{f} = \{f_u = f(\cdot, u) : u \in \mathcal{U}\}.$$

Two Lie algebras of vector fields are naturally associated with \mathbf{f} :

- the Lie algebra generated by \mathbf{f} ,

$$\text{Lie}(\mathbf{f}) = \text{span} \{[f_1, \dots, [f_{k-1}, f_k]] : k \geq 1, f_i \in \mathbf{f}\};$$

- the so called *zero-time ideal*¹, defined as

$$\mathcal{I}(\mathbf{f}) = \text{span} \{f_1 - f_2, f_3 : f_1, f_2 \in \mathbf{f}, f_3 \in \mathcal{D}(\mathbf{f})\} \subset \text{Lie}(\mathbf{f}),$$

where $\mathcal{D}(\mathbf{f}) = \{[f_1, \dots, [f_{k-1}, f_k]] : k \geq 2, f_i \in \mathbf{f}\}$.

From now on, for every $x \in M$, we denote by $\text{Lie}_x(\mathbf{f})$ (resp. $\mathcal{I}_x(\mathbf{f})$) the set of vectors $f(x) \in \mathbb{R}^n$ such that $f \in \text{Lie}(\mathbf{f})$ (resp. $f \in \mathcal{I}(\mathbf{f})$).

Definition 1. We say that \mathbf{f} (or the control system (3.1)) satisfies the *accessibility rank condition* at $x \in M$ if $\dim \text{Lie}_x(\mathbf{f}) = n$, and that it satisfies the *accessibility rank condition in fixed time* at $x \in M$ if $\dim \mathcal{I}_x(\mathbf{f}) = n$.

Remark 3.2.1. Note that the accessibility rank condition in fixed time implies the accessibility rank condition since $\mathcal{I}(\mathbf{f})$ is contained in $\text{Lie}(\mathbf{f})$.

For every $x \in M$, let us denote by $\mathcal{A}(x, T)$ the *reachable set* from x in time $T \geq 0$ of (3.1), and by $\mathcal{A}(x) = \bigcup_{T \geq 0} \mathcal{A}(x, T)$ the *reachable set* from x . The accessibility rank conditions give sufficient conditions such that reachable sets have nonempty interiors (see also [Sontag, 1998, Sect. 4.5] for the necessity of these conditions).

Lemma 3.2.1 (Accessibility properties, Th. 2 p. 68, and Th. 3 p. 71 of [Jurdjevic, 2012]).

1. If \mathbf{f} satisfies the accessibility rank condition at every point of M , then $\forall x \in M$, $\mathcal{A}(x)$ has nonempty interior and the set of interior points is dense in $\mathcal{A}(x)$.
2. If \mathbf{f} satisfies the accessibility rank condition in fixed time at every point in M , then $\forall x \in M$, $\mathcal{A}(x, T)$ has nonempty interior for $T > 0$ small enough and the set of interior points is dense in $\mathcal{A}(x, T)$. If moreover \mathbf{f} contains at least one complete vector field on M , then the preceding properties of $\mathcal{A}(x, T)$ hold for every $T > 0$.

1. The terminology *zero-time ideal* comes from the fact that $\mathcal{I}(\mathbf{f})$ is associated with the set of chained flows of the form $e^{t_1 f_1} \circ \dots \circ e^{t_k f_k}$, $k \in \mathbb{N}$, $f_i \in \mathbf{f}$, where the total time $t_1 + \dots + t_k$ equals zero. On the contrary, $\text{Lie}(\mathbf{f})$ is associated with the set of such elements but for which the total time $t_1 + \dots + t_k$ is let free.

The property for a control system of having reachable sets with nonempty interiors is often called *accessibility*, which is a crucial property especially in the context of optimal control. Indeed, it guarantees that one can generate infinitesimal perturbations in any direction around the endpoint of a trajectory by varying its generating control (either in fixed time if $\text{int}\mathcal{A}(x, T)$ is nonempty, or in free time if $\text{int}\mathcal{A}(x)$ is nonempty), opening up the possibility of performing calculus of variations.

Consider now the particular case of control-affine systems, i.e.,

$$f(x, u) = f_0(x) + \sum_{i=1}^k u_i f_i(x), \quad u \in \mathcal{U} = \mathbb{R}^k. \quad (3.2)$$

The Lie algebras associated with such a system respectively take the forms

$$\text{Lie}(f) = \text{Lie}\{f_i : i = 0, \dots, k\} \quad \text{and} \quad \mathcal{I}(f) = \text{Lie}\{\text{ad}^s f_0 \cdot f_i : s \geq 0, i = 1, \dots, k\},$$

where we denote $\text{ad}^1 f_0 \cdot f_i = [f_0, f_i]$ and $\text{ad}^s f_0 \cdot f_i = \text{ad}^1 f_0 \cdot (\text{ad}^{s-1} f_0 \cdot f_i)$ for $s \geq 2$. The main benefit offered by these relations is that they allow for expressing the accessibility rank conditions in terms of iterated brackets of the f_i 's uniquely. Moreover, a somewhat stronger version of Lemma 3.2.1 may be established, enabling the following ease-of-use sufficient conditions for the controllability of control-affine systems.

Lemma 3.2.2. *Assume M is connected. If for every $x \in M$ it holds that*

$$\dim \text{Lie}_x(f_1, \dots, f_k) = n, \quad (3.3)$$

then the control-affine system (3.2) is controllable on M in free and fixed time, i.e., for every $x \in M$, $\mathcal{A}(x) = M$ and $\mathcal{A}(x, T) = M$ for $T > 0$ small enough.

Remark 3.2.2. Note that the Lie algebra $\text{Lie}(f_1, \dots, f_k)$ is included in $\mathcal{I}(f)$, therefore (3.3) implies that the accessibility rank condition in fixed time at x holds.

3.3 | Form of the Lie brackets for statistical linearization

We recall from Section 2.2 that $P(t)$ is positive definite. Denote by \mathbb{S}_n^+ the set of positive definite $(n \times n)$ symmetric matrices, and consider an open subset M of \mathbb{R}^n (specifically, in some settings it can be convenient to work with m in M instead of $m \in \mathbb{R}^n$). In this chapter, we consider statistical linearization as the control system on $M \times \mathbb{S}_n^+$ which is given by

$$\dot{X} = F(X, u), \quad X = (m, P) \in M \times \mathbb{S}_n^+, \quad u \in \mathcal{U}, \quad (3.4)$$

where the smooth mapping $F : M \times \mathbb{S}_n^+ \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}_n$ is defined by

$$F(X, u) = \begin{pmatrix} f(m, u) \\ D_x f(m, u)P + PD_x f(m, u)^\top + g(m)g(m)^\top \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Our main goal is to study accessibility and controllability properties for this system.

Remark 3.3.1. As a consequence of (2.13), the trajectories of $F(X, u)$ are defined on the same time-intervals in which the trajectories of $f(m, u)$ are. In particular, if for a given $u \in \mathcal{U}$ the vector field $f(\cdot, u)$ is complete on M , then the vector field $F(\cdot, u)$ is complete on $M \times \mathbb{S}_n^+$.

The accessibility rank conditions require the computation of Lie brackets. We establish here a general expression of the Lie brackets between the vector fields which define the statistical linearization. For this, given a controlled drift f and a diffusion g defining the statistical linearization (3.4), we denote by $\mathbf{f} = \{f(\cdot, u) : u \in \mathcal{U}\}$ the family of vector fields on M which is defined by the drift, and by $\mathbf{F}_g = \{F(\cdot, u) : u \in \mathcal{U}\}$ the family of vector fields (3.5) on $M \times \mathbb{S}_n^+$ which is defined by the statistical linearization. Clearly by definition, for every $F \in \mathbf{F}_g$ there exists $f \in \mathbf{f}$ such that

$$F(X) = \begin{pmatrix} f(m) \\ Df(m)P + PDf(m)^\top + g(m)g(m)^\top \end{pmatrix}, \quad X = (m, P) \in M \times \mathbb{S}_n^+.$$

Lemma 3.3.1. Consider two vector fields F_1, F_2 on $M \times \mathbb{S}_n^+$ of the form

$$F_i(X) = \begin{pmatrix} f_i(m) \\ Df_i(m)P + PDf_i(m)^\top + B_i(m) \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2,$$

where f_1, f_2 are vector fields on M and $B_1, B_2 : M \rightarrow \mathbb{S}_n$ are smooth mappings. Then,

$$[F_1, F_2](X) = \begin{pmatrix} [f_1, f_2](m) \\ D[f_1, f_2](m)P + PD[f_1, f_2](m)^\top + B_{12}(m) \end{pmatrix},$$

where, for every $m \in M$,

$$B_{12}(m) = dB_2(m) \cdot f_1(m) - dB_1(m) \cdot f_2(m) + Df_2(m)B_1(m) - Df_1(m)B_2(m) \\ + B_1(m)Df_2(m)^\top - B_2(m)Df_1(m)^\top$$

is a symmetric matrix (note that we denote by $Df(m)$ the Jacobian matrix of a vector field f , whereas we denote by $dB(m)$ the differential of a map B at m).

Proof. By definition, the Lie brackets of F_1 and F_2 is given by

$$[F_1, F_2](X) = dF_2(X) \cdot F_1(X) - dF_1(X) \cdot F_2(X).$$

Let us denote $Y = (Y_m, Y_P)$ any element $Y \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}_n$. On the one hand, the first n components of $dF_2(X) \cdot F_1(X)$ satisfy

$$\begin{aligned} (dF_2(X) \cdot F_1(X))_m &= d(F_2)_m(X) \cdot F_1(X) \\ &= \frac{\partial f_2}{\partial m}(m) \cdot (F_1(X))_m + \frac{\partial f_2}{\partial P}(m) \cdot (F_1(X))_P = Df_2(m)f_1(m), \end{aligned}$$

and therefore we readily obtain that

$$[F_1, F_2](X)_m = [f_1, f_2](m).$$

On the other hand, the remaining n^2 components of $dF_2(X) \cdot F_1(X)$ satisfy

$$\begin{aligned} (dF_2(X) \cdot F_1(X))_P &= \frac{\partial (Df_2(m)P + PDf_2(m)^\top + B_2(m))}{\partial m} \cdot f_1(m) \\ &+ \frac{\partial (Df_2(m)P + PDf_2(m)^\top + B_2(m))}{\partial P} \cdot (Df_1(m)P + PDf_1(m)^\top + B_1(m)). \end{aligned}$$

Let us develop these two terms separately. For the first term, we may compute

$$\begin{aligned} \frac{\partial (Df_2(m)P + PDf_2(m)^\top + B_2(m))}{\partial m} \cdot f_1(m) &= \\ D^2f_2(m) \cdot (f_1(m), \cdot)P + P[D^2f_2(m) \cdot (f_1(m), \cdot)]^\top + dB_2(m) \cdot f_1(m), \end{aligned}$$

where, with an abuse of notation, we implicitly identify the linear mapping

$$D^2f_2(m) \cdot (f_1(m), \cdot) : h \in \mathbb{R}^n \mapsto D^2f_2(m) \cdot (f_1(m), h) \in \mathbb{R}^n$$

to a $(n \times n)$ matrix. For the second term, we may compute

$$\begin{aligned} \frac{\partial (Df_2(m)P + PDf_2(m)^\top + B_2(m))}{\partial P} \cdot (Df_1(m)P + PDf_1(m)^\top + B_1(m)) &= \\ Df_2(m)Df_1(m)P + Df_2(m)PDf_1(m)^\top + Df_1(m)PDf_2(m)^\top + P[Df_2(m)Df_1(m)]^\top \\ &+ Df_2(m)B_1(m) + B_1(m)Df_2(m)^\top. \end{aligned}$$

Similar formulas hold for $(dF_1(X) \cdot F_2(X))_P$, which can be readily checked by index exchange. At this step, by leveraging the relation

$$\begin{aligned} D[f_1, f_2](m) &= D^2f_2(m) \cdot (f_1(m), \cdot) - D^2f_1(m) \cdot (f_2(m), \cdot) \\ &+ Df_2(m)Df_1(m) - Df_1(m)Df_2(m), \end{aligned}$$

we finally obtain that

$$[F_1, F_2]_P(X) = D[f_1, f_2](m)P + PD[f_1, f_2](m)^\top + B_{12}(m),$$

where B_{12} is as stated in the lemma, and the conclusion follows. \square

An elementary induction argument on this lemma yields a simple closed form for every element in $\text{Lie}(F_g)$ and $\mathcal{I}(F_g)$, respectively.

Corollary 3.3.2. *Every vector field F in $\text{Lie}(F_g)$ (resp. in $\mathcal{I}(F_g)$) writes as*

$$F(X) = \begin{pmatrix} f(m) \\ Df(m)P + PDf(m)^\top + B(m) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

where f belongs to $\text{Lie}(f)$ (resp. to $\mathcal{I}(f)$) and $B : M \rightarrow \mathbb{S}_n$ is a smooth mapping. Reciprocally, if f belongs to $\text{Lie}(f)$ (resp. to $\mathcal{I}(f)$), then there exists F in $\text{Lie}(F_g)$ (resp. in $\mathcal{I}(F_g)$) and a smooth mapping $B : M \rightarrow \mathbb{S}_n$ such that (3.6) holds.

Finally, if $F \in \text{Lie}(F_0)$ (i.e. if $g = 0$), then $B = 0$.

Remark 3.3.2. The family F_0 plays an important role in the forthcoming algebraic conditions. It is important to note that this family is not directly associated with the statistical linearization of a stochastic differential equation (2.4), in that the latter is not defined for $g = 0$. Nevertheless, this family F_0 can be interpreted as the statistical linearization of a deterministic control system subject to imperfect information on the initial condition, which is modelled through a Borel measure (see for instance [Marigonda and Quincampoix, 2018]).

3.4 | Algebraic conditions for accessibility

To simplify the expression of the accessibility rank conditions, we first provide an algebraic result which allows us to express these sought conditions independently of g and P . In what follows, we denote $E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}_n$, a vector space of dimension $N = n + \frac{n(n+1)}{2}$. Recall that F_0 denotes the family of the vector fields (3.5) associated with $g = 0$. Also, we denote by $M_n(\mathbb{R})$ the space of $(n \times n)$ matrices and by $I \in \mathbb{S}_n^+$ the identity matrix.

Lemma 3.4.1. *For every $m \in M$, the following properties hold:*

1. $\dim \mathcal{I}_{(m,I)}(F_0) = N$ if and only if $\dim \mathcal{I}_{(m,P)}(F_0) = N \forall P \in \mathbb{S}_n^+$;
2. $\dim \text{Lie}_{(m,I)}(F_0) = N$ if and only if $\dim \text{Lie}_{(m,P)}(F_0) = N \forall P \in \mathbb{S}_n^+$.

Proof. For any given $P \in \mathbb{S}_n^+$, we introduce the map $\phi_P : \mathbb{R}^n \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow E$, which is defined by

$$\phi_P(v, A) = \begin{pmatrix} v \\ AP + PA^\top \end{pmatrix}.$$

We claim that

$$\mathbb{R}^n \times M_n(\mathbb{R}) = E \oplus \ker \phi_P. \quad (3.7)$$

For this, note first that $\ker \phi_P = \{0\} \times \mathbb{A}_n P^{-1}$, where \mathbb{A}_n denotes the set of $(n \times n)$ skew-symmetric matrices. Hence, we are left to prove that

$$M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{S}_n \oplus \mathbb{A}_n P^{-1},$$

or equivalently that

$$\mathbb{S}_n \cap \mathbb{A}_n P^{-1} = \{0\}.$$

For this, if we assume S is an element of this intersection, that is S is symmetric and $S = \Lambda P^{-1}$ with $\Lambda \in \mathbb{A}_n$, it must hold that

$$\Lambda P^{-1} = S = S^\top = (\Lambda P^{-1})^\top = -P^{-1} \Lambda,$$

implying that $P\Lambda + \Lambda P = 0$. This latter Lyapunov equation has no trivial solutions if and only if $S_P \{P\} \cap S_P \{-P\} \neq \emptyset$, which is not the case since P is positive definite. Therefore, $\Lambda = 0$ and thus $S = 0$. We conclude that (3.7) holds true.

At this point, we proceed by first showing the first point of the lemma. For this, fix $m \in M$ and denote

$$\tilde{E} = \left\{ \begin{pmatrix} f(m) \\ Df(m) \end{pmatrix} : f \in \mathcal{I}(f) \right\}.$$

Since $\mathcal{I}(f)$ is a Lie algebra, \tilde{E} is a linear subspace of $\mathbb{R}^n \times M_n(\mathbb{R})$. Moreover, for every $P \in \mathbb{S}_n^+$, thanks to Corollary 3.3.2 it holds that

$$\mathcal{I}_{(m,P)}(\mathbf{F}_0) = \phi_P(\tilde{E}) \subset E,$$

and hence, thanks to (3.7) we have that $\dim \mathcal{I}_{(m,P)}(\mathbf{F}_0) = N$ if and only if $E \subset \tilde{E}$. Since this last condition holds true independently of P , Point 1. of the lemma follows. Point 2. can be proved along the same line. \square

Let us now study the rank of the subspaces $\mathcal{I}_X(\mathbf{F}_g)$ and $\text{Lie}_X(\mathbf{F}_g)$, for $g \neq 0$. Specifically, the following key density result holds true.

Lemma 3.4.2.

1. If $\dim \mathcal{I}_{(m,I)}(\mathbf{F}_0) = N$ for every $m \in M$, then there exists an open and dense subset Ω of $M \times \mathbb{S}_n^+$, such that $\dim \mathcal{I}_X(\mathbf{F}_g) = N$ for every $X \in \Omega$.
2. If $\dim \text{Lie}_{(m,I)}(\mathbf{F}_0) = N$ for every $m \in M$, then there exists an open and dense subset $\tilde{\Omega}$ of $M \times \mathbb{S}_n^+$, such that $\dim \text{Lie}_X(\mathbf{F}_g) = N$ for every $X \in \tilde{\Omega}$.

Proof. We only prove Point 1., the proof of Point 2. being identical. Fix $m_0 \in M$. By assumption, there exist N vector fields f_1, \dots, f_N in $\mathcal{I}(f)$ such that

$$\det_E \left(\left(\begin{array}{c} f_1(m_0) \\ Df_1(m_0) + Df_1(m_0)^\top \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{c} f_N(m_0) \\ Df_N(m_0) + Df_N(m_0)^\top \end{array} \right) \right) \neq 0,$$

where \det_E denotes the determinant in the vector space E . By continuity, for every m in a neighbourhood $\mathcal{V}_{m_0} \subset M$ of m_0 it holds that

$$\det_E \left(\left(\begin{array}{c} f_1(m) \\ Df_1(m) + Df_1(m)^\top \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{c} f_N(m) \\ Df_N(m) + Df_N(m)^\top \end{array} \right) \right) \neq 0. \quad (3.8)$$

At this step, from Corollary 3.3.2, there exist F_1, \dots, F_N in $\mathcal{I}(\mathbf{F}_g)$ such that

$$F_i(X) = \left(\begin{array}{c} f_i(m) \\ Df_i(m)P + PDf_i(m)^\top + B_i(m) \end{array} \right), \quad i = 1, \dots, N.$$

Let us introduce the scalar function on $M \times \mathbb{S}_n^+$, which is defined by

$$p(X) = \det_E (F_1(X), \dots, F_N(X)).$$

Clearly, $\dim \mathcal{I}_X(\mathbf{F}_g) = N$ as soon as $p(X) \neq 0$. But for any fixed $m \in \mathcal{V}_{m_0}$, the mapping $p(X) = p(m, P)$ is a polynomial function of P , whose homogeneous term of highest degree is

$$p^0(m, P) = \det_E \left(\left(\begin{array}{c} f_1(m) \\ Df_1(m)P + PDf_1(m)^\top \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{c} f_N(m) \\ Df_N(m)P + PDf_N(m)^\top \end{array} \right) \right).$$

Therefore, (3.8) yields $p^0(m, I) \neq 0$, and thus both p^0 and p are not the zero P -polynomial. As a consequence, the subset

$$\Omega_{m_0} = \{(m, P) \in \mathcal{V}_{m_0} \times \mathbb{S}_n^+ : p(m, P) \neq 0\}$$

is open and dense in $\mathcal{V}_{m_0} \times \mathbb{S}_n^+$. By taking the union of the sets Ω_{m_0} for all $m_0 \in M$, we obtain a dense and open subset Ω of $M \times \mathbb{S}_n^+$, on which $\dim \mathcal{I}_X(\mathbf{F}_g) = N$. \square

3.5 | Accessibility criterion for statistical linearization

We are now in position to establish sufficient conditions for the accessibility of the statistical linearization. Specifically, the following result comes from a direct application of Lemma 3.4.2.

Proposition 3.5.1. *Consider drift f and diffusion g mappings, and denote by f and F_g the families of vector fields associated with f and the corresponding statistical linearization (3.4), respectively. The following conditions hold true:*

1. *if for every $m \in M$ there holds*

$$\dim \left\{ \begin{pmatrix} f(m) \\ Df(m) + Df(m)^\top \end{pmatrix} : f \in \text{Lie}(f) \right\} = N, \quad (3.9)$$

then F_g satisfies the accessibility rank condition on an open and dense subset of $M \times \mathbb{S}_n^+$;

2. *if for every $m \in M$ there holds*

$$\dim \left\{ \begin{pmatrix} f(m) \\ Df(m) + Df(m)^\top \end{pmatrix} : f \in \mathcal{I}(f) \right\} = N, \quad (3.10)$$

then F_g satisfies the accessibility rank condition in fixed time on an open and dense subset of $M \times \mathbb{S}_n^+$.

Remark 3.5.1. In the case $g = 0$, by Lemma 3.4.1 the open and dense subsets which result from Proposition 3.5.1 are the whole space $M \times \mathbb{S}_n^+$, and the requirements of Point 1. and 2. of the proposition are equivalent to the accessibility rank conditions in free and fixed time, respectively. This equivalence does not hold in general for nonzero g , see Section 3.6 for a counterexample.

Importantly, these conditions involve properties of the family of controlled drift mappings f uniquely, and in particular neither the diffusion g nor the covariance variable P explicitly affect them. Through these accessibility conditions, one can deduce the structure of the reachable sets in free and fixed time, and thus generic accessibility properties for (2.11) by means of Lemma 3.2.1. Note that, thanks to Remark 3.3.1, the assumption concerning the completeness of the vector fields which is required in Lemma 3.2.1 can be merely tested on the family f .

Proposition 3.5.1 may be refined in the case of control-affine drift, that is, mappings f of the form

$$f(x, u) = f_0(x) + \sum_{i=1}^k u_i f_i(x), \quad u \in \mathcal{U} = \mathbb{R}^k. \quad (3.11)$$

In such case, the statistical linearization takes a control-affine form as well, specifically

$$\dot{X} = F_{f_0, g}(X) + \sum_{i=1}^k u_i F_{f_i}(X), \quad u \in \mathbb{R}^k, \quad (3.12)$$

where we introduced the following vector fields on $M \times \mathbb{S}_n^+$:

$$F_{f_0, g}(X) = \begin{pmatrix} f_0(m) \\ Df_0(m)P + PDf_0(m)^\top + g(m)^\top g(m) \end{pmatrix},$$

$$F_{f_i}(X) = \begin{pmatrix} f_i(m) \\ Df_i(m)P + PDf_i(m)^\top \end{pmatrix}, \quad X = (m, P), \quad i = 1, \dots, k.$$

In addition to the accessibility stated through Proposition 3.5.1, from a direct application of Lemma 3.2.2 we obtain stronger controllability conditions for (3.12).

Proposition 3.5.2. *Assume M is connected. If for every $m \in M$ there holds*

$$\dim \left\{ \begin{pmatrix} f(m) \\ Df(m) + Df(m)^\top \end{pmatrix} : f \in \text{Lie}(f_1, \dots, f_k) \right\} = N,$$

then system (3.12) is controllable on $M \times \mathbb{S}_n^+$ in free and fixed time.

Proof. It suffices to notice that, by applying Lemma 3.4.1-Point 2. to the family $F_0 = \{F_{f_1}, \dots, F_{f_k}\}$, the assumption above implies that (3.12) satisfies the assumption of Lemma 3.2.2. \square

Now that sufficient conditions for accessibility and controllability are obtained, it is then paramount to understand how restrictive they are. Two main results are established in a complementary work [Bonalli et al., 2023] on generic accessibility and controllability for (2.11), that we recall here. Control-affine mappings such as (3.2) are considered.

For an open subset M of \mathbb{R}^n and $\ell, r \in \mathbb{N}$, introduce the following quantities (see, e.g., [Hirsch, 1994]):

- $\pi_r^\ell : J^\ell(M; \mathbb{R}^r) \rightarrow M$ is the vector bundle of ℓ -jets of maps in $C^\infty(M; \mathbb{R}^r)$;
- for every $h \in C^\infty(M; \mathbb{R}^r)$, $j_r^\ell(h) : M \rightarrow J^\ell(M; \mathbb{R}^r)$ is the jet map associated with π_r^ℓ ; in particular, when clear from the context, for the sake of conciseness we denote $j^\ell(h)_y = j^\ell(h)(y) \in J^\ell(M; \mathbb{R}^r)$, for every $h \in C^\infty(M; \mathbb{R}^r)$ and every $y \in M$.

Recall that the family of sets

$$\left\{ h \in C^\infty(M; \mathbb{R}^r) : j^\ell(h)(M) \subset \mathcal{V} \right\}, \quad \mathcal{V} \text{ open subset of } J^\ell(M; \mathbb{R}^r),$$

generates the (weak) Whitney topology of $C^\infty(M; \mathbb{R}^r)$. The main results are as follows.

Theorem 3.5.3 (Accessibility with Respect to Generic Drift). *There exists an open and dense (w.r.t. the Whitney topology) subset $\mathcal{O}_{\text{Acc}} \subset C^\infty(M, \mathbb{R}^{n \times (k+1)})$, such that for every $(f_0, f_1, \dots, f_k) \in \mathcal{O}_{\text{Acc}}$, the family of vector fields*

$$f = \left\{ f_0 + \sum_{i=1}^k u_i f_i : u \in \mathcal{U} \right\}$$

satisfies condition (3.9) for every $m \in M$. In addition, there exists an open and dense (w.r.t. the Whitney topology) subset $\mathcal{O}_{\text{Acc}_+} \subset C^\infty(M, \mathbb{R}^{n \times (k+1)})$, such that for every $(f_0, f_1, \dots, f_k) \in \mathcal{O}_{\text{Acc}_+}$, the above defined family of vector fields f satisfies condition (3.10) for every $m \in M$.

Together with Proposition 3.5.1, Theorem 3.5.3 readily yields the following corollary.

Corollary 3.5.4 (Accessibility with Respect to Generic Drift and Initial Datum). *There exists an open and dense (w.r.t. the Whitney topology) subset $\mathcal{O}_{\text{Acc}_+} \subset C^\infty(M; \mathbb{R}^{n \times (k+1)})$, such that for every $(f_0, f_1, \dots, f_k) \in \mathcal{O}_{\text{Acc}_+}$ and every diffusion $g \in C^\infty(M; \mathbb{R}^{n \times d})$, the family of vector fields*

$$F_g = \left\{ F_{f_0, g} + \sum_{i=1}^k u_i F_{f_i} : u \in \mathcal{U} \right\}$$

satisfies the accessibility rank condition in fixed time on an open and dense subset $\Omega_g \subset M \times \mathbb{S}_n^+$ which depends on g uniquely.

Theorem 3.5.5 (Controllability with Respect to Generic Drift).

Let $k \geq 2$. There exists an open and dense (w.r.t. the Whitney topology) subset $\mathcal{O}_{\text{Contr}} \subset C^\infty(M; \mathbb{R}^{n \times k})$, such that for every $(f_1, \dots, f_k) \in \mathcal{O}_{\text{Contr}}$, every vector field $f_0 \in C^\infty(M; \mathbb{R}^n)$, and every diffusion $g \in C^\infty(M; \mathbb{R}^{n \times d})$, the family of vector fields

$$F_g = \left\{ F_{f_0, g} + \sum_{i=1}^k u_i F_{f_i} : u \in \mathcal{U} \right\}$$

is controllable on $M \times \mathbb{S}_n^+$ in free and fixed time.

Thanks to these genericity results, we can confidently assert that there exist systems that satisfy the sufficient conditions (3.9) and (3.10), but this does not imply that these conditions are also necessary. To illustrate that, in the next section we provide an example of a particular class of systems which is generally accessible even though it does not verify the latter sufficient accessibility conditions.

3.6 | Counterexample: the biaffine case

The class we consider is the one associated with constant diffusions g and control-affine drifts f which depend linearly on x , i.e., $f_i(x) = A_i x$ with $A_i \in M_n(\mathbb{R})$ for $i = 0, \dots, m_u$. We say that such an f is a *biaffine system*, the simplest class of nonlinear systems. The statistical linearization takes the control-affine form (3.12), where

$$F_{f_0, g}(X) = \begin{pmatrix} A_0 m \\ A_0 P + P A_0^\top + g g^\top \end{pmatrix}, \quad F_{f_i}(X) = \begin{pmatrix} A_i m \\ A_i P + P A_i^\top \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, k.$$

For simplicity we set $F_0 = F_{f_0, g}$ and $F_i = F_{f_i}$. Lemma 3.3.1 yields the following forms of the Lie brackets,

$$[F_i, F_j](X) = \begin{pmatrix} [A_i, A_j] m \\ [A_i, A_j] P + P [A_i, A_j]^\top + B_{ij} \end{pmatrix}, \quad i, j = 0, \dots, k, \quad (3.13)$$

where the symmetric matrices $B_{ij} \in \mathbb{S}_n$ are given by

$$B_{0j} = A_j g g^\top + g g^\top A_j^\top \quad \text{and} \quad B_{ij} = 0 \quad \text{for } i, j = 1, \dots, k. \quad (3.14)$$

We first show that, in such specific case, the accessibility conditions given by Proposition 3.5.1 do no longer hold true.

Proposition 3.6.1. *Assume that the drift f is a biaffine system. Then, at every $m \in \mathbb{R}^n$, the sufficient conditions (3.9) and (3.10) in Proposition 3.5.1 are not satisfied. In particular, if in addition $g = 0$, then the statistical linearization satisfy none of the accessibility rank conditions.*

Proof. As a consequence of (3.13), condition (3.9) at $m \in \mathbb{R}^n$ writes as

$$\dim \left\{ \begin{pmatrix} A m \\ A + A^\top \end{pmatrix} : A \in \text{Lie}(A_0, A_1, \dots, A_k) \right\} = N.$$

Fix $m \in \mathbb{R}^n$, $P \in \mathbb{S}_n^+$, and introduce the linear map $\psi_{(m, P)} : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}_n$ defined by

$$\psi_{(m, P)}(A) = \begin{pmatrix} A m \\ A P + P A^\top \end{pmatrix}.$$

If condition (3.9) holds at m , then necessarily $\text{rank} \psi_{(m, I)} = N$. Let us prove that this latter condition is not actually true.

For this, obviously we have that

$$\ker \psi_{(m, I)} = \{A \in \mathbb{A}_n : A m = 0\}.$$

If $m = 0$, then $\ker \psi_{(m,I)} = \mathbb{A}_n$ is of dimension $n(n-1)/2$, and thus, by the rank-nullity theorem, $\text{rank} \psi_{(m,I)} = n^2 - n(n-1)/2 = n(n+1)/2$ is smaller than N . If $m \neq 0$, then we can find an orthogonal basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ of \mathbb{R}^n where $e_1 = m$. In that basis, the element $A_{i,j}$ in the i th row and the j th column of A satisfies

$$A_{i,j} = e_i^\top A e_j = -e_j^\top A e_i = -A_{j,i},$$

yielding $A_{1,j} = A_{i,1} = 0$. As a consequence, in these coordinates, we have

$$\ker \psi_{(m,I)} = \left\{ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}) : \bar{A} \in \mathbb{A}_n(n-1) \right\}.$$

Thus $\ker \psi_{(m,I)}$ has the same dimension as $\mathbb{A}_n(n-1)$. Hence $\text{rank} \psi_{(m,I)} = n^2 - (n-2)(n-1)/2$ is equal to $N-1$ and we deduce that the condition (3.9) is never satisfied. This proof can be easily replicated to show condition (3.10). \square

Proposition 3.6.1 shows that our sufficient conditions for accessibility can not be leveraged to prove that biaffine systems are generally accessible. Nevertheless, it is still possible to formulate other sufficient general conditions for the accessibility of biaffine systems. In particular, the following result holds true.

Proposition 3.6.2. *Assume that the biaffine system satisfies the followings:*

- (i) $\dim \text{Lie}(A_1, \dots, A_k) = n^2$;
- (ii) *there exists $i \in \{1, \dots, k\}$ such that $B_{0i} = A_i g g^\top + g g^\top A_i^\top$ is nonzero.*

Then F_g satisfies the accessibility rank condition in fixed time on an open and dense subset of $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}_n^+$.

Remark 3.6.1. Conditions (i) and (ii) are satisfied by generic matrices A_1, \dots, A_k when $k > 1$ and $g \neq 0$, respectively. Hence, the statistical linearization of a “very large” class of biaffine systems satisfy the accessibility rank conditions, though they do not satisfy the sufficient conditions which are provided in Proposition 3.5.1.

Proof. Note first that, as a consequence of (3.13), every vector field in $\mathcal{I}(F_g)$ writes as

$$F(X) = \begin{pmatrix} Am \\ AP + PA^\top + B \end{pmatrix}, \quad A \in M_n(\mathbb{R}), \quad B \in \mathbb{S}_n,$$

and thus $F(X)$ depends affinely on $X = (m, P)$. As a result, the accessibility rank condition in fixed time $\dim \mathcal{I}_X(F_g) = N$ holds either nowhere, or for points X which belong to an open and dense subset of $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}_n^+$ (to see this, use the argument we provide at the

end of the proof of Lemma 3.4.2). Therefore, it is enough to prove that $\dim \mathcal{I}_X(\mathbf{F}_g) = N$ holds for any specific point X .

For this, by Hypothesis (ii) the symmetric matrix B_{0i} is nonzero, thus we can choose $\bar{m} \in \mathbb{R}^n$ and $\bar{P} \in \mathbb{S}_n^+$ such that $\bar{m}^\top \bar{P}^{-1} B_{0i} \bar{P}^{-1} \bar{m} \neq 0$. Set $\bar{X} = (\bar{m}, \bar{P})$.

Now, note that, on the one hand the set $\mathcal{I}_{\bar{X}}(\mathbf{F}_g)$ contains the vector

$$[F_0, F_i](\bar{X}) = \begin{pmatrix} A_{0i} \bar{m} \\ A_{0i} \bar{P} + \bar{P} A_{0i}^\top + B_{0i} \end{pmatrix}, \quad \text{where } A_{0i} = [A_0, A_i],$$

whereas, on the other hand, it contains the linear subset

$$W = \{F(\bar{X}) : F \in \text{Lie}(F_1, \dots, F_k)\}.$$

Thanks to (3.13) and (3.14), every $F(\bar{X}) \in W$ writes as

$$F(\bar{X}) = \begin{pmatrix} A \bar{m} \\ A \bar{P} + \bar{P} A^\top \end{pmatrix}, \quad \text{with } A \in \text{Lie}(A_1, \dots, A_k).$$

It then results from Hypothesis (i) that W is the image of the map $\psi_{\bar{X}}$ which is defined in the proof of Proposition 3.6.1. Moreover, a straightforward adaptation of the latter proof implies that $\text{rank} \psi_{\bar{X}} = N - 1$, and therefore that $\dim W = N - 1$.

Let us prove that $[F_0, F_i](\bar{X})$ does not belong to W . Indeed, if an element $(v, Q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}_n$ belongs to W , then there exists a matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ such that $v = A \bar{m}$ and $Q = A \bar{P} + \bar{P} A^\top$. Equivalently, there exists $\Omega \in \mathbb{A}_n$ such that $v = (\frac{1}{2}Q + \Omega) \bar{P}^{-1} \bar{m}$. By multiplying the latter expression by $\bar{m}^\top \bar{P}^{-1}$, we obtain that

$$\alpha(v, Q) := \bar{m}^\top \bar{P}^{-1} (v - \frac{1}{2}Q \bar{P}^{-1} \bar{m}) = 0.$$

Let us compute this expression in the case $(v, Q) = [F_0, F_i](\bar{X})$. We have that

$$\begin{aligned} \alpha([F_0, F_i](\bar{X})) &= \bar{m}^\top \bar{P}^{-1} \left(A_{0i} \bar{m} - \frac{1}{2} (A_{0i} \bar{P} + \bar{P} A_{0i}^\top + B_{0i}) \bar{P}^{-1} \bar{m} \right) \\ &= \frac{1}{2} \bar{m}^\top \bar{P}^{-1} \left((A_{0i} \bar{P} - \bar{P} A_{0i}^\top) - B_{0i} \right) \bar{P}^{-1} \bar{m} = -\frac{1}{2} \bar{m}^\top \bar{P}^{-1} B_{0i} \bar{P}^{-1} \bar{m}. \end{aligned}$$

But the choice of \bar{X} guarantees $\alpha([F_0, F_i](\bar{X})) \neq 0$, which implies $[F_0, F_i](\bar{X}) \notin W$.

In summary, we have shown that $W \oplus \mathbb{R}[F_0, F_i](\bar{X})$ is a vector space of dimension N included in $\mathcal{I}_{\bar{X}}(\mathbf{F}_g)$. We deduce that $\dim \mathcal{I}_{\bar{X}}(\mathbf{F}_g) = N$, concluding the proof. \square

3.7 | Summary

This chapter has derived sufficient accessibility conditions for statistical linearization, that are more practical than general Lie bracket conditions. It completes the study

of the well-posedness of the approximated motion planning problem introduced in Chapter 2 (Problem 3), since it gives conditions under which there is a sense in penalizing covariance. The rest of the manuscript concerns the application of the robust motion planning approach to a space vehicle landing. Hence, the verification of the satisfaction of the accessibility conditions for a launch vehicle dynamics is detailed in Sections 5.2 and 5.3.1.

Part II

Case study: vertical landing of a space vehicle

Optimal guidance in the absence of uncertainties

The purpose of this chapter is to analyze a vertical landing problem considering relevant control and state constraints without considering uncertainties. Indeed, we show that the structure of the control remains identical after changing the cost or adding constraints, which suggests that it is not specific to the problem formulation (we can even modify the dynamic model to take into account the effect of an atmosphere). We study at first the problem with three-dimensional dynamics but no consideration of aerodynamic effects, and we consider, in addition to the bound on the control norm, a thrust pointing constraint limiting the amplitude of the control direction as well as the launcher orientation, both for safety reasons and to model actuator limits. We also take into account a glide-slope constraint, forcing the launcher position to stay inside a cone centered on the target, to ensure that the vehicle remains at a safe altitude and to guarantee sensor operability. The cost of the optimal control problem considered is expressed as a final cost, which embraces the most common applications such as maximizing the final mass or minimizing the final time. Our main result is that, in this framework (defined later as Problem 4), an optimal control has either a Max-Min-Max form or a Max-Singular-Max form as stated below.

Theorem 4.0.1. *Consider an optimal trajectory on $[0, t_f]$. Then, the control $u(t)$ is in the Max-Min-Max or the Max-Singular-Max form, i.e. there exist t_1 and t_2 with $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_f$ such that*

$$\|u(t)\| = \begin{cases} u_{max} & \text{if } t \in [0, t_1) \cup (t_2, t_f], \\ u_{min} \text{ or singular} & \text{if } t \in [t_1, t_2]. \end{cases}$$

Remark 4.0.1. When $t_1 = 0$ or $t_2 = t_f$, the Max-Min-Max or Max-Singular-Max form

degenerates in a Max, Min, Singular, Max-Min, Max-Singular, Min-Max or Singular-Max form.

Moreover, ignoring the pointing constraint, we show that the optimal controls keep the same structure when considering the effect of the atmosphere on the thrust force at low altitude (the pressure is assumed to be constant with respect to altitude).

We then complete the analysis of optimal trajectories by studying two types of sub-arcs that play a particular role both from a theoretical and a numerical point of view, namely singular arcs and boundary arcs (where the state constraint is active). We show that singular arcs rarely occur, and that at most three boundary arcs appear in an optimal trajectory, the latter result being proved under additional conditions. Besides, the available numerical results make think that this outcome is likely to be generalized. This study highlights the lack of robustness of optimal guidance methods, and justifies the need to develop robust methods.

This chapter is largely based on [Leparoux et al., 2022a, Leparoux et al., 2022b].

4.1 | State of the art considering Max-Min-Max controls

Previous theoretical and numerical studies on powered descent problems tend to show that the structure of the optimal control generally does not contain singular arcs. Indeed, [Chen et al., 2016] shows the Bang-Bang characteristic of controls minimizing a L^1 -norm. In the case of landing, [Meditch, 1964] has first showed that the optimal control of the one dimension fuel-optimal problem with a bounded control follows an Off-Bang structure, i.e. it has a period of off thrust followed by full thrust until touchdown. Then, the Bang-Off-Bang structure, called Max-Min-Max when the thrust is not allowed to go to zero, has been found to be optimal for numerous variants of the problem, such as the two-dimensional problem studied in [Leitmann, 1959], the problem with specified initial and final thrust studied in [Topcu et al., 2005], or with throttle and thrust angle control in [Topcu et al., 2007]. Recently, [Gazzola, Filippo and Marchini, Elsa M., 2021], [Ménou et al., 2021] and the remarkable PhD thesis [Ménou, 2023] showed that the Max-Min-Max structure is the solution of the one-dimensional problem, minimizing the final time for the first one and considering the effect of an atmosphere on the thrust for the latter. Finally, [Reynolds and Mesbahi, 2020] found that the three degree of freedom problem with independent thrust and torque had in general a Max-Min-Max structure. More generally, considering the problem of controlling a vehicle in space but not nec-

essarily during the landing phase, [Robbins, 1965] shows that the optimal control is a finite succession of Min and Max arcs. However, there lack theoretical studies relating more complex formulations of the landing problem, for instance considering realistic technical and safety constraints. Among the existing numerical methods, a noteworthy one is presented in [Acikmese and Ploen, 2007, Blackmore et al., 2010, Acikmese et al., 2013], that succeeds to solve efficiently the problem including constraints on the thrust direction and the launcher position, thanks to a convexification method. The simulations carried out in these studies also reveal a Max-Min-Max form of control.

4.2 | Model and problem statement

We consider the following dynamic model, expressed in an inertial frame (e_x, e_y, e_z) ,

$$\begin{cases} \dot{r} &= v, \\ \dot{v} &= \frac{T}{\mu} u - g_a, \\ \dot{\mu} &= -q \|u\|, \end{cases} \quad (4.1)$$

where $r(t) = (r_x(t), r_y(t), r_z(t)) \in \mathbb{R}^3$ is the vehicle position, $v(t) \in \mathbb{R}^3$ is its velocity, $\mu(t) > 0$ is its mass, q the maximal mass flow rate of the engine, $T > 0$ the maximal thrust and $g_a = (0, 0, g_0)$ with g_0 the gravitational acceleration. The thrust is controlled by the vector $u(t) \in \mathbb{R}^3$, where $\|u\| \leq 1$ is the engine throttle. The state is denoted by $x = (r, v, \mu) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. It is subject to the following constraints:

— bounds on the control norm,

$$u_{min} \leq \|u\| \leq u_{max}, \quad (4.2)$$

— a pointing constraint, formulated as

$$\langle e_z, u \rangle \geq \|u\| \cos(\theta_{max}), \text{ where } \theta_{max} \in [0, \frac{\pi}{2}) \text{ is a constant,} \quad (4.3)$$

— a glide-slope constraint,

$$h(r) = r_z - \tan(\gamma) \|(r_x, r_y)\| \geq 0, \text{ where } \gamma \in [0, \frac{\pi}{2}) \text{ is a constant,} \quad (4.4)$$

— a mass constraint,

$$\mu \geq \mu_e, \text{ where } \mu_e > 0 \text{ denotes the empty mass of the vehicle.} \quad (4.5)$$

Remark 4.2.1. The limits u_{min} and u_{max} correspond to additional constraints that may be imposed on the thrust, and which may differ from the actual actuator limits, while $\|u\| \leq 1$ comes from normalization by T . Thus, the limits satisfy $0 \leq u_{min} \leq u_{max} \leq 1$.

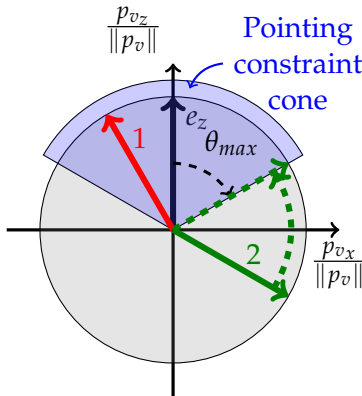


Figure 4.1 – The thrust pointing constraint.
 Red: nonsaturating orientation. Green:
 saturating orientation.

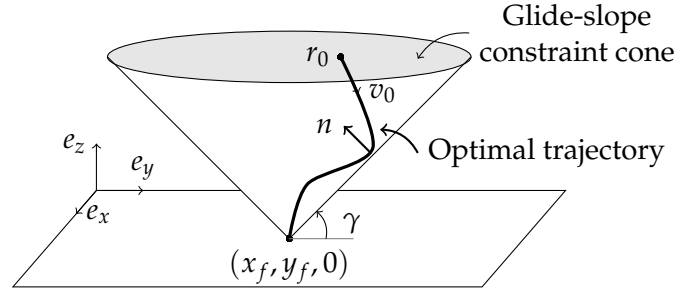


Figure 4.2 – Glide-slope constraint

The landing problem consists in reaching a target on the ground (zero terminal altitude and vertical velocity) while minimizing a final cost. The target and the cost are chosen as follows.

- We represent the target as a subset $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^7$ to which the final state $x(t_f)$ must belong. This set is designed so that the final state has zero terminal altitude and vertical velocity, and is close to $r = 0$ and $v = 0$ ($r = 0$ represents the center of the physical target here). It should at least satisfy the following property,

$$\{x \in \mathbb{R}^7 : r = v = 0\} \subset \mathcal{C} \subset \{x \in \mathbb{R}^7 : r_z = v_z = 0\}. \quad (4.6)$$

- The terminal cost $\ell(t, x)$ usually penalizes the total duration (minimal time problems) or the diminution of the mass (maximisation of the final mass). It may also contain a penalization of the final horizontal positions and velocities (in the case where the target \mathcal{C} does not ensure that these quantities are small at the final state). We summarize this by imposing that ℓ is a C^1 function which satisfies, for every $t \in (0, +\infty)$ and $x \in \mathbb{R}^7$,

$$\frac{\partial \ell}{\partial t}(t, x) \geq 0, \quad \frac{\partial \ell}{\partial \mu}(t, x) \leq 0, \quad \ell(t, (r = 0, v = 0, \mu)) \leq \ell(t, x). \quad (4.7)$$

To summarize, the landing problem can be written as the following optimal control problem in free time.

Problem 4.

$$\min \ell(t_f, x(t_f)) \text{ such that } \left\{ \begin{array}{l} x(\cdot) = (r(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot)) \text{ follows (4.1),} \\ x(0) = (r_0, v_0, \mu_0), \\ x(t_f) \in \mathcal{C}, \\ \mu(t) > \mu_e \quad \forall t \in [0, t_f], \\ u_{\min} \leq \|u\| \leq u_{\max}, \\ \langle e_z, u \rangle \geq \|u\| \cos(\theta_{\max}), \\ h(r) \geq 0. \end{array} \right.$$

Remark 4.2.2. The mass constraint $\mu(t) = \mu_e$ can not be reached for $t \in [0, t_f]$. Indeed it would imply that $u = 0$ on $[t, t_f]$, which makes it impossible to reach $r_z(t_f) = 0$ with $v_z(t_f) = 0$. Thus, the mass constraint writes as a strict inequality $\mu(t) > \mu_e$ and it plays no role in the optimality conditions.

Remark 4.2.3. If there exists trajectories $x(\cdot)$ satisfying the constraints of Problem 4, then this problem admits optimal solutions, it results from an adaptation of the results in [Acikmese and Ploen, 2007]. Indeed, the existence is proved in [Acikmese and Ploen, 2007] for the same problem formulation but with a different cost expression including an integral term and without considering the pointing constraint. The proof consists in first convexifying the constraints and then showing the existence of an optimal solution for the convex formulation of the problem [Acikmese and Ploen, 2007, Theorem 1]. We cannot show the existence of the solution to Problem 4 using this last theorem because of the difference in the cost expression, but we arrive to the same conclusion using [Lee and Markus, 1967, Theorem 4]. Then, it is necessary to show that optimal solutions of the convexified problem are also optimal for the non convex formulation of the problem. This is done in [Acikmese and Ploen, 2007, Lemma 2] without the pointing constraint, and in [Acikmese et al., 2013, Lemma 1] when considering the pointing constraint.

4.3 | Optimality conditions

We give in this section the necessary optimality conditions provided by the Pontryagin Maximum Principle applied to the optimal control Problem 4. Let us firstly specify some notations.

— For $p = (p_x, p_y, p_z) \in \mathbb{R}^3$, we set $\bar{p} = (p_x, p_y)$.

- The glide-slope constraint writes as $h(r) = r_z - \tan(\gamma)\|\bar{r}\|$. At a point r such that $\bar{r} \neq 0$ the gradient of h is

$$n := \nabla h(r) = \begin{pmatrix} -\tan(\gamma) \frac{\bar{r}}{\|\bar{r}\|} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

- The control set is $\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^3 : u_{min} \leq \|u\| \leq u_{max} \text{ and } \langle e_z, u \rangle \geq \|u\| \cos(\theta_{max})\}$.

Since the glide-slope constraint is a state constraint, we need a version of the maximum principle able to take into account such constraints. We choose the one given in [Vinter, 2010, Th. 9.5.1], which in our case writes as follows. Define the Hamiltonian of Problem 4 as

$$H(x, P, u) = \langle p_r, v \rangle + \langle p_v, \frac{T}{\mu}u - g_a \rangle - p_\mu q \|u\|, \quad (4.9)$$

where the adjoint vector $P = (p_r, p_v, p_\mu)$ belongs to $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$.

Let $(x(\cdot), u(\cdot))$ be an optimal solution of Problem 4. Then there exists a constant $p^0 = 0$ or -1 , an absolutely continuous function $P(\cdot)$ on $[0, t_f]$, and a nonnegative Borel measure ν on $[0, t_f]$, such that, writing

$$Q(t) = (q_r(t), p_v(t), p_\mu(t)), \quad q_r(t) = p_r(t) - \int_{[0,t)} n(s)\nu(ds), \quad (4.10)$$

we have:

1. $(P, p^0, \nu) \neq (0, 0, 0)$;
2. $\text{supp}\{\nu\} \subset \{t \in [0, t_f] : h(r(t)) = 0\}$;
3. (dynamics of the adjoint vector) for a.e. $t \in [0, t_f]$,

$$\begin{cases} \dot{p}_r(t) &= 0, \\ \dot{p}_v(t) &= -q_r(t), \\ \dot{p}_\mu(t) &= \frac{T}{\mu(t)^2} \langle p_v(t), u(t) \rangle; \end{cases} \quad (4.11)$$

4. (maximization condition) for a.e. $t \in [0, t_f]$,

$$H(x(t), Q(t), u(t)) = \max_{w \in \mathcal{U}} H(x(t), Q(t), w); \quad (4.12)$$

5. (transversality condition)

$$\max_{w \in \mathcal{U}} H(x(t_f), Q(t_f), w) = -p^0 \frac{\partial \ell}{\partial t}(t_f, x(t_f)). \quad (4.13)$$

Note that we omit the terminal conditions on $Q(t_f)$ since we do not need them.

Remark 4.3.1. When $\gamma \neq 0$, the function h is not differentiable at points r with $\bar{r} = 0$ and its gradient n is not defined at such points. Thus, following the notations of [Vinter, 2010], we should write $q_r(t)$ in (4.10) as

$$q_r(t) = p_r(t) - \int_{[0,t)} \partial^> h(r(s)) v(ds), \quad (4.14)$$

where $\partial^> h$ denotes a partial subdifferential. However this expression coincides with the one of (4.10) since at an interior time $s \in (0, t_f)$ where $v \neq 0$, i.e. $h(r(s)) = 0$, $\bar{r}(s)$ is nonzero. Indeed, otherwise $h(r(s)) = 0$ would imply $r(s) = 0$ since $\gamma \neq 0$, and then $v_z(s) = 0$, as z has reached a minimum. Then, as near s there holds $z(t) = o(t - s)$ and $h(t) = -\tan(\gamma)|t - s| \|\bar{v}(s)\| + o(t - s)$, $h(t) \geq 0$ would imply that $\bar{v}(s) = 0$, and thus $r(s) = v(s) = 0$. Hence $x(s)$ would belong to the target \mathcal{C} by (4.6) and minimize the cost ℓ by (4.7), a contradiction with $s < t_f$.

Remark 4.3.2. Note that an informal formulation of the PMP is given in [Hartl et al., 1995, Informal Theorem 4.1]. This theorem has not been fully proven in the litterature, contrary to [Vinter, 2010, Theorem 9.5.1] but it is more intuitive, making it a useful tool for quickly grasping the result. In this formulation, the discontinuous dynamics of the adjoint vectors are expressed as follows. For any time τ at a contact with the state constraint or in a boundary interval (see definition in Section 4.5.2), there might be a jump in the adjoint vectors and the hamiltonian, following the expressions

$$P(\tau^+) = P(\tau^-) - v n(\tau), \quad (4.15)$$

$$H(x(\tau^+), P(\tau^+), u(\tau^+)) = H(x(\tau^-), P(\tau^-), u(\tau^-)) + v \frac{\partial h(x(\tau))}{\partial t}, \quad (4.16)$$

with $v \geq 0$ such that $v(\tau)h(r(\tau)) = 0$, and where τ^+ and τ^- denote the left-hand side and the right-hand side limits. In this setting, Proposition 4.4.2-3. below means that jumps of the adjoint vectors at contacts do not change the direction of evolution of Ψ .

4.4 | Structure of optimal controls

4.4.1 | Solution of the optimal control problem

We first exploit equations of the Pontryagin Maximum Principle to obtain information on the evolution of the control. Those results will be necessary to deduce the general form of the control with respect to time.

For $d = 1, 2$, we denote by \mathcal{S}^d the unit sphere in \mathbb{R}^{d+1} . Remind also that, for $p_v = (p_{v_x}, p_{v_y}, p_{v_z})$, we set $\bar{p}_v = (p_{v_x}, p_{v_y})$.

Lemma 4.4.1. Let $u(t)$, $t \in [0, t_f]$, be an optimal control of Problem 4, and $P(\cdot)$ be its adjoint vector. Then, for any $t \in [0, t_f]$ such that $u(t) \neq 0$, there holds

$$\frac{u(t)}{\|u(t)\|} = d(t),$$

where $d : [0, t_f] \rightarrow \mathcal{S}^2$ is a measurable function satisfying

$$d(t) = \begin{cases} \frac{p_v(t)}{\|p_v(t)\|} & \text{if } p_{v_z}(t) \geq \|p_v(t)\| \cos(\theta_{max}) \text{ and } p_v(t) \neq 0, \\ \left(\sin(\theta_{max}) \frac{\bar{p}_v(t)}{\|\bar{p}_v(t)\|}, \cos(\theta_{max}) \right) & \text{if } p_{v_z}(t) < \|p_v(t)\| \cos(\theta_{max}) \text{ and } \bar{p}_v(t) \neq 0, \\ \left(\sin(\theta_{max})\delta, \cos(\theta_{max}) \right) \text{ with } \delta \in \mathcal{S}^1 & \text{if } p_{v_z}(t) < \|p_v(t)\| \cos(\theta_{max}) \text{ and } \bar{p}_v(t) = 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

Moreover, set

$$\Psi(t) = \frac{T}{\mu} \langle p_v(t), d(t) \rangle - p_\mu(t)q, \quad t \in [0, t_f]. \quad (4.18)$$

Then we have

$$\|u(t)\| = \begin{cases} u_{max} & \text{if } \Psi(t) > 0, \\ u_{min} & \text{if } \Psi(t) < 0. \end{cases}$$

Proof of Lemma 4.4.1. If $u(\cdot)$ is an optimal control on $[0, t_f]$, then the maximization condition of the Pontryagin Principle implies that, for almost all $t \in [0, t_f]$, $u(t)$ maximizes

$$\varphi(t, w) = \langle p_v, \frac{T}{\mu} w \rangle - p_\mu q \|w\|$$

among the $w \in \mathcal{U}$. Making the change of variable $w = \alpha d$, with $\alpha = \|w\|$ and $d \in \mathcal{S}^2$, to find $u(t) \in \mathcal{U}$ maximizing φ amounts to find α and d maximizing

$$\varphi(t, w) = \alpha \left(\frac{T}{\mu} \langle p_v, d \rangle - p_\mu q \right)$$

under the conditions $u_{min} \leq \alpha \leq u_{max}$ and $d \in \mathcal{D} = \{d \in \mathcal{S}^2 : \langle e_z, d \rangle \geq \cos(\theta_{max})\}$. Let us write

$$\varphi(t, w) = \alpha \psi(t, d), \quad \text{where} \quad \psi(t, d) = \frac{T}{\mu} \langle p_v, d \rangle - p_\mu q.$$

First, $\alpha \geq 0$ implies that

$$\max \varphi = \max_{\alpha} \left[\alpha (\max_d \psi) \right].$$

Then, the maximum of φ is attained for α satisfying

$$\begin{cases} \alpha = u_{max} & \text{if } \max(\psi) > 0, \\ \alpha = u_{min} & \text{if } \max(\psi) < 0, \end{cases}$$

and for d solution of the problem

$$\max_d \psi = -p_\mu q + \frac{T}{\mu} \max_{d \in \mathcal{D}} \langle p_v, d \rangle.$$

It is a matter of an exercise to check that the solution d of this maximization problem satisfies the statement of the lemma (for the sake of completeness we give the proof in Appendix, in Lemma 4.8.1). Lemma 4.4.1 follows by setting $\Psi = \max_d \psi$. \square

Thus, the norm of the control is mainly determined by the sign of the switching function Ψ and takes only the values u_{min} and u_{max} when Ψ is non zero (*bang arcs*). Therefore, we need to analyze the variations of Ψ , which we will do now. Note however that, on time intervals where Ψ is zero, the value of the control can not be deduced directly from the maximisation of the Hamiltonian. Such parts of the trajectory are called *singular arcs*, they are the subject of a further study in Section 4.5.1.

Remark 4.4.1. The direction d of the control is more regular than just measurable. Indeed let $I \subset [0, t_f]$ be the closed set such that, for every $t \in I$,

$$p_v(t) = 0 \quad \text{or} \quad p_{v_z}(t) < 0 \quad \text{and} \quad \bar{p}_v(t) = 0. \quad (4.19)$$

Equivalently, for every $t \in [0, t_f] \setminus I$, there holds

$$p_v(t) \neq 0 \quad \text{and} \quad \text{if } p_{v_z}(t) < \|\bar{p}_v(t)\| \cos \theta_{max}, \text{ then } \bar{p}_v(t) \neq 0, \quad (4.20)$$

which implies that for these times $d(t)$ is defined as a function of $p_v(t)$. This function being locally Lipschitz, the function $d(\cdot)$ is absolutely continuous on every subinterval of $[0, t_f] \setminus I$. In particular $d(\cdot)$ is continuous on $[0, t_f] \setminus I$ while it may be discontinuous on I .

4.4.2 | Variations of Ψ

Proposition 4.4.2. Consider an optimal trajectory on $[0, t_f]$. Then:

1. Ψ is absolutely continuous on $[0, t_f]$;
2. at a.e. $t \in [0, t_f]$, the time derivative of Ψ is

$$\dot{\Psi}(t) = -\frac{T}{\mu(t)} \langle q_r(t), d(t) \rangle; \quad (4.21)$$

3. $t \mapsto \langle q_r(t), d(t) \rangle$ is a nonincreasing function on a full measure subset of $[0, t_f]$.

Proof of Points 1. and 2. Consider an optimal trajectory on $[0, t_f]$ with adjoint vector $P = (p_r, p_v, p_\mu)$. Recall that the switching function Ψ is given by

$$\Psi(t) = \frac{T}{\mu} \langle p_v(t), d(t) \rangle - p_\mu(t)q, \quad (4.22)$$

the function $d(\cdot)$ being defined in Lemma 4.4.1. Note first that, for every $t \in [0, t_f]$, there holds

$$\langle p_v, d \rangle = \begin{cases} \|p_v\| & \text{if } p_{v_z} \geq \cos(\theta_{max}) \|p_v\|, \\ \|\bar{p}_v\| \sin(\theta_{max}) + p_{v_z} \cos(\theta_{max}) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Thus $\langle p_v, d \rangle$ is a Lipschitz function of p_v . Recall that the composition of a Lipschitz function with an absolutely continuous function is absolutely continuous (see [Ziemer, 2017, Ex. 9 page 235]¹). Since p_v is absolutely continuous on $[0, t_f]$, we deduce that $\langle p_v, d \rangle(\cdot)$ is absolutely continuous too, which proves Point 1.

Moreover, a simple computation shows

$$\dot{\Psi} = \frac{T}{\mu} \frac{d \langle p_v, d \rangle}{dt} \quad \text{a.e. on } [0, t_f],$$

so we are left with the computation of the time derivative of $\langle p_v, d \rangle$.

Let us introduce the subsets $I_1 = \{t \in [0, t_f] : p_v(t) = 0\}$, $I_2 = \{t \in [0, t_f] : \bar{p}_v(t) = 0 \text{ and } p_{v_z}(t) < 0\}$, and $I = I_1 \cup I_2$. As noticed in Remark 4.4.1, the function $d(\cdot)$ is absolutely continuous on $[0, t_f] \setminus I$. Hence $d(\cdot)$ is differentiable a.e. on this subset and we can compute directly the time derivative of $\langle p_v, d \rangle$ as follows:

— when the pointing constraint is not active, there holds $\langle p_v, d \rangle = \|p_v\|$ and then

$$\frac{d \langle p_v, d \rangle}{dt} = \frac{d \|p_v\|}{dt} = -\frac{\langle q_r, p_v \rangle}{\|p_v\|} = -\langle q_r, d \rangle.$$

— when the pointing constraint is active, $\langle p_v, d \rangle = \sin(\theta_{max}) \|\bar{p}_v\| + \cos(\theta_{max}) p_{v_z}$ and we obtain

$$\frac{d \langle p_v, d \rangle}{dt} = \sin(\theta_{max}) \left(-\frac{\langle \bar{q}_r, \bar{p}_v \rangle}{\|\bar{p}_v\|} \right) - \cos(\theta_{max}) q_z = -\langle q_r, d \rangle. \quad (4.23)$$

As a consequence, (4.21) holds a.e. on $[0, t_f] \setminus I$.

Now, since $p_v = 0$ and $\langle p_v, d \rangle = 0$ on I_1 , we have $\dot{p}_v = -q_r = 0$ and $\frac{d \langle p_v, d \rangle}{dt} = 0$ a.e. on I_1 (see for instance [Chitour et al., 2006, Lemma 3.10]), which implies that (4.21) holds a.e. on I_1 . The same argument on \bar{p}_v instead of p_v shows that (4.21) holds a.e. on I_2 too, and so on I . This concludes the proof of Point 2. \square

1. The reference is only an exercise, but its proof is elementary. It can be found for instance in Th 3.1 of the unpublished lecture notes of Jia Rong-Qing, <https://sites.ualberta.ca/~rjia/Math418/Notes/chap3.pdf>

Lemma 4.4.3. Consider a subinterval (t_1, t_2) of $[0, t_f] \setminus I$. Then, $t \mapsto \langle q_r(t), d(t) \rangle$ is a nonincreasing function on (t_1, t_2) .

In order to prove Lemma 4.4.3, we will show that $\langle q_r(t), d(t) \rangle$ is locally nonincreasing, i.e., for any $t_0 \in [0, t_f)$ and any $t > t_0$ close enough, there holds $\langle q_r(t), d(t) \rangle \leq \langle q_r(t_0), d(t_0) \rangle$. We first prove two preliminary lemmas.

Lemma 4.4.4. For a.e. $t \in (t_1, t_2) \subset [0, t_f] \setminus I$, there holds

$$\langle \dot{p}_v(t), \dot{d}(t) \rangle \geq 0. \quad (4.24)$$

Proof. Recall first (see Remark 4.4.1), that $d(\cdot)$ is absolutely continuous on (t_1, t_2) and that on such an interval,

$$d(t) = \frac{p(t)}{\|p(t)\|} \quad \text{or} \quad d(t) = \left(\sin(\theta_{max}) \frac{\bar{p}_v(t)}{\|\bar{p}_v(t)\|}, \cos(\theta_{max}) \right). \quad (4.25)$$

Thus, for a.e. $t \in (t_1, t_2)$, we have either

$$\langle \dot{p}_v(t), \dot{d}(t) \rangle = \frac{1}{\|p_v(t)\|} \left(\|\dot{p}_v(t)\|^2 - \frac{\langle \dot{p}_v(t), p_v(t) \rangle^2}{\|p_v(t)\|^2} \right), \quad (4.26)$$

or,

$$\langle \dot{p}_v(t), \dot{d}(t) \rangle = \frac{\sin(\theta_{max})}{\|\bar{p}_v(t)\|} \left(\|\dot{\bar{p}}_v(t)\|^2 - \frac{\langle \dot{\bar{p}}_v(t), \bar{p}_v(t) \rangle^2}{\|\bar{p}_v(t)\|^2} \right). \quad (4.27)$$

Both expressions are nonnegative due to Cauchy-Schwarz inequality. \square

Note that moreover $\langle \dot{p}_v(t), \dot{d}(t) \rangle = 0$ if and only if $p_v(t)$ and $\dot{p}_v(t)$ are collinear when $d(t) = \frac{p(t)}{\|p(t)\|}$, and if and only if $\bar{p}_v(t)$ and $\dot{\bar{p}}_v(t)$ are collinear otherwise.

Corollary 4.4.5. If the state constraint is not active (i.e. $h(r(t)) \neq 0$) on $(t_1, t_2) \subset [0, t_f] \setminus I$, then $\langle q_r(t), d(t) \rangle$ is differentiable a.e. on (t_1, t_2) and

$$\frac{d}{dt} \langle q_r(t), d(t) \rangle \leq 0. \quad (4.28)$$

Moreover this derivative is zero if and only if $p_v(t)$ and q_r are collinear when $d(t) = \frac{p_v(t)}{\|p_v(t)\|}$, and if and only if $\bar{p}_v(t)$ and \bar{q}_r are collinear otherwise.

Proof. On (t_1, t_2) , the measure ν is zero, so that q_r is constant and $\dot{p}_v(t) = -q_r$. Therefore, the sign of the derivative

$$\frac{d}{dt} \langle q_r(t), d(t) \rangle = \langle q_r, \dot{d}(t) \rangle = -\langle \dot{p}_v(t), \dot{d}(t) \rangle \quad (4.29)$$

is given by Lemma 4.4.4. \square

Lemma 4.4.6. *Let $(t_1, t_2) \subset [0, t_f] \setminus I$ and let $t_0 \in (t_1, t_2)$ be such that $h(r(t_0)) = 0$. Then*

$$\langle n(t_0), d(t_0) \rangle > 0, \quad \text{where} \quad n(t) = \begin{pmatrix} -\tan(\gamma) \frac{\bar{r}(t)}{\|\bar{r}(t)\|} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

Proof. Set $h[t] = h(r(t))$. Since $h(r) = r_z - \tan(\gamma)\|\bar{r}\|$, the function $t \mapsto h[t]$ is C^1 at times such that $\bar{r}(t) \neq 0$. Its derivative

$$\dot{h}[t] = \langle n(t), v(t) \rangle, \quad (4.31)$$

is absolutely continuous and, for a.e. t ,

$$\ddot{h}[t] = \frac{T}{\mu(t)} \|u(t)\| \langle n(t), d(t) \rangle - g_0 + \langle \dot{n}(t), v(t) \rangle. \quad (4.32)$$

Moreover, due to Cauchy-Schwarz inequality, we have

$$\langle \dot{n}(t), v(t) \rangle = \frac{\tan(\gamma)}{\|\bar{r}(t)\|} \left(-\|\bar{v}(t)\|^2 + \frac{\langle \bar{r}(t), \bar{v}(t) \rangle^2}{\|\bar{r}(t)\|^2} \right) \leq 0. \quad (4.33)$$

Note that the argument in Remark 4.3.1 shows that $\bar{r}(t_0) \neq 0$ if $\gamma \neq 0$, so the expression above is well-defined and $\dot{h}[t]$ is differentiable at t_0 .

Since $h[t] \geq 0$ on $[0, t_f]$, t_0 is a minimum of $h[t]$, therefore $\dot{h}[t_0] = 0$. Moreover, there exists a sequence of times $t^k > t_0$ converging to t_0 such that $\dot{h}[t^k] \geq 0$. Thus

$$\int_{t_0}^{t^k} \ddot{h}[t] dt = \dot{h}[t^k] \geq 0. \quad (4.34)$$

Using (4.32) and (4.33), this implies

$$\int_{t_0}^{t^k} \frac{T}{\mu(t)} \|u(t)\| \langle n(t), d(t) \rangle dt \geq g_0(t^k - t_0). \quad (4.35)$$

The function $d(t)$ being continuous (see Remark 4.4.1), $\langle n(t), d(t) \rangle$ is continuous too, and the above inequality implies that $\langle n(t_0), d(t_0) \rangle$ is nonnegative and then

$$g_0 \leq \frac{1}{t^k - t_0} \int_{t_0}^{t^k} \frac{T}{\mu(t)} \|u(t)\| \langle n(t), d(t) \rangle dt \leq \frac{T}{\mu_e} u_{max} \max_{[t_0, t^k]} \langle n(t), d(t) \rangle, \quad (4.36)$$

and $\max_{[t_0, t^k]} \langle n(t), d(t) \rangle$ tends toward $\langle n(t_0), d(t_0) \rangle$ when t^k converges to t_0 , which gives the result. \square

Remark 4.4.2. The above inequality shows also that if $\|u(t)\|$ has a limit α when t tends toward t_0 , then the limit α satisfies $T\alpha \geq \mu_e g_0 \cos(\gamma)$.

Proof of Lemma 4.4.3. Let $t_0 \in [0, t_f]$. If $h[t_0] \neq 0$, then $h[t] \neq 0$ in a neighborhood of t_0 . It then results from Corollary 4.4.5 that $t \mapsto \langle q_r(t), d(t) \rangle$ is nonincreasing near t_0 .

We are left with the case $h[t_0] = 0$. Recall that, for $t > t_0$, we have from the maximum principle

$$q_r(t) = q_r(t_0) - \int_{[t_0, t)} n(s)v(ds), \quad (4.37)$$

and that the function $d(\cdot)$ is absolutely continuous on (t_1, t_2) , so that, for t near t_0 , $d(t) - d(t_0) = \int_{t_0}^t \dot{d}(s)ds$. Thus, for $t > t_0$ close enough to t_0 we have

$$\langle q_r(t), d(t) \rangle - \langle q_r(t_0), d(t_0) \rangle = I_1 + I_2 - I_3, \quad (4.38)$$

where

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{t_0}^t \langle q_r(s), \dot{d}(s) \rangle ds, & I_2 &= \int_{t_0}^t \left\langle \int_{[t_0, s)} n(\sigma)v(d\sigma), \dot{d}(s) \right\rangle ds, \\ I_3 &= \int_{[t_0, t)} \langle n(s), d(t) \rangle v(ds). \end{aligned} \quad (4.39)$$

First, by Lemma 4.4.4 we have $I_1 \leq 0$. Second, $p_v(t)$ and $q_r(t)$ are bounded near t_0 , and so $\dot{d}(t)$ is bounded too. Since v is a positive measure, we obtain

$$I_2 \leq (t - t_0)Cst \int_{[t_0, t)} v(ds). \quad (4.40)$$

Third, by Lemma 4.4.6 and the continuity of $\langle n(t), d(t) \rangle$, we obtain

$$I_3 \geq \frac{1}{2} \langle n(t_0), d(t_0) \rangle \int_{[t_0, t)} v(ds). \quad (4.41)$$

As a consequence, $I_2 - I_3 \leq 0$ for $t - t_0$ small enough. Thus $\langle q_r(t), d(t) \rangle \leq \langle q_r(t_0), d(t_0) \rangle$ for $t > t_0$ close enough to t_0 , which concludes the proof. \square

Proof of Proposition 4.4.2-Point 3. Let us show that for every $t_0 \in [0, t_f]$, $t \mapsto \langle q_r, d \rangle$ is nonincreasing almost everywhere in the neighbourhood of t_0 . If (4.20) is true at t_0 , the result is given by Lemma 4.4.3. Otherwise, let us consider the case when $\bar{p}_v(t_0) = 0$ and $p_{v_z}(t_0) < 0$. The case when $p_v(t_0) = 0$ can be treated in the same way. Firstly, it should be noted that

1. from $q_z(t) = p_z(t_0) - \int_{[0, t)} v(ds)$, q_z is a nonincreasing function on $[0, t_f]$;
2. from $\bar{q}_r(t) = \bar{p}_r(t_0) + \int_{[0, t)} \tan(\gamma) \frac{\bar{r}}{\|\bar{r}\|} v(ds)$, as $\bar{r}(t_0) \neq 0$ if $h(t_0) = 0$ and q_r is constant if $h(t_0) \neq 0$, q_x and q_y are monotonous in a neighbourhood of t_0 ;
3. $\bar{p}_v(t) = - \int_{t_0}^t \bar{q}_r(s)ds$.

Recall that we denote by \bar{d} the vector composed of the two first coordinates of d . Then, in a neighbourhood (t_-, t_+) of t_0 , with $t_- \leq t_+$,

$$\langle q_r, d \rangle = \langle \bar{q}_r, \bar{d} \rangle + \cos(\theta_{max})q_z.$$

As q_z is nonincreasing, let us show that $\langle \bar{q}_r, \bar{d} \rangle$ is nonincreasing. From 2., on each interval $J = (t_-, t_0)$ or (t_0, t_+) ,

- either $\bar{q}_r = 0$ and $\langle \bar{q}_r, \bar{d} \rangle = 0$ is constant;
- or $\bar{q}_r(t) \neq 0 \forall t \in J$, thus $\bar{p}_v(t) \neq 0$ and $\bar{d} = \sin(\theta_{max}) \frac{\bar{p}_v}{\|\bar{p}_v\|}$. In this case,

$$\langle \bar{q}_r, \bar{d} \rangle = -\frac{\sin(\theta_{max})}{\|\bar{p}_v(t)\|} \int_{t_0}^t \langle \bar{q}_r(s), \bar{q}_r(t) \rangle ds.$$

We can assume, by reducing the interval J if necessary, that for every t and s in J , $\text{sign}(q_x(t)) = \text{sign}(q_x(s))$ and $\text{sign}(q_y(t)) = \text{sign}(q_y(s))$. It implies that $\langle \bar{q}_r(s), \bar{q}_r(t) \rangle \geq 0$, and then $\langle \bar{q}_r, \bar{d} \rangle$ is nonincreasing on J and is of the same sign as $(t_0 - t)$.

Combining these results, we obtain that $\langle \bar{q}_r, \bar{d} \rangle$ is nonincreasing on $(t_-, t_0) \cup (t_0, t_+)$, which concludes the proof of the proposition. \square

Proof of Theorem 4.0.1. Consider an optimal trajectory on $[0, t_f]$. From Lemma 4.4.1, the norm of the control has the following expression depending on the sign of Ψ :

$$\|u(t)\| = \begin{cases} u_{max} & \text{if } \Psi(t) > 0, \\ u_{min} & \text{if } \Psi(t) < 0. \end{cases}$$

Moreover the control is singular on an interval if $\Psi(t) = 0$ on this interval. Let us show that Ψ can change of sign at most two times or be constantly zero on at most one interval.

First, we study the sign of $\dot{\Psi}$ thanks to Proposition 4.4.2. Indeed, from Proposition 4.4.2-Point 2, the sign of the derivative of Ψ is the opposite of the one of $\langle q_r, d \rangle$. Moreover, from Proposition 4.4.2-Point 3, $\langle q_r, d \rangle$ is non increasing, thus it may be zero on at most one interval denoted $[\bar{t}_1, \bar{t}_2] \subset [0, t_f]$. Then, on $[0, \bar{t}_1)$, one has $\langle q_r, d \rangle > 0$, $\dot{\Psi} < 0$, and on $(\bar{t}_2, t_f]$ one has $\langle q_r, d \rangle < 0$, $\dot{\Psi} > 0$.

Now, let us detail the study of Ψ on the interval $[\bar{t}_1, \bar{t}_2]$. Assume first that $\Psi(t) \neq 0$ for every $t \in [\bar{t}_1, \bar{t}_2]$. Then, on $[0, \bar{t}_1]$ (respectively $[\bar{t}_2, t_f]$) as Ψ is continuous from Proposition 4.4.2-Point 1 and decreasing (resp. increasing), it may be zero at most one time. Finally on $[0, t_f]$ it may be zero and change of sign at most two times. If $\Psi(t) > 0$ on $[\bar{t}_1, \bar{t}_2]$, then Ψ is strictly positive everywhere on $[0, t_f]$. If $\Psi(t) < 0$ on $[\bar{t}_1, \bar{t}_2]$, let us define $t_1 \in [0, \bar{t}_1)$ (resp. $t_2 \in (\bar{t}_2, t_f]$) such that $\Psi(t_1) = 0$ or $t_1 = 0$ (resp. $t_2 = t_f$). Then

$\Psi(t) > 0$ on $[0, t_1) \cup (t_2, t_f]$ and $\Psi(t) < 0$ on (t_1, t_2) . Note that $\langle q_r, d \rangle(0) < 0$ corresponds to selecting $t_1 = 0$.

Assume now that Ψ crosses zero on $[\bar{t}_1, \bar{t}_2]$. As $\Psi(t)$ is zero on that interval, then $\Psi(t) = 0$ for all $t \in [\bar{t}_1, \bar{t}_2]$. Moreover, as it is decreasing on $[0, \bar{t}_1]$ and increasing on $[\bar{t}_2, t_f]$, we obtain $\Psi(t) > 0$ for all $t \in [0, \bar{t}_1) \cup (\bar{t}_2, t_f]$.

This study on the sign of Ψ ends the proof of the theorem. \square

4.4.3 | Structure of the optimal control when considering the effect of the atmosphere

The structure of optimal controls described in Theorem 4.0.1 seems to be preserved when one take into account the effect of an atmosphere. It has been proven in [Ménou et al., 2021] for a simple one-dimensional dynamics. We will extend the result to our framework but with a simplified model of the effect of the atmosphere at low altitude. Indeed, we model this effect by applying an additional force in the direction of the launcher, which introduces a new term $\frac{\sigma}{\mu\|u\|}u$ in the equation of \dot{v} . The new dynamics is given by

$$\begin{cases} \dot{r} &= v, \\ \dot{v} &= \left(T - \frac{\sigma}{\|u\|} \right) \frac{u}{\mu} - g_a, \\ \dot{\mu} &= -q\|u\|, \end{cases} \quad (4.42)$$

where σ is a constant parameter which depends on the engine nozzle exit area and on the atmospheric pressure assumed to be constant with respect to altitude. We make the following assumption.

Assumption 3. The net thrust is always positive: $Tu_{min} \geq \sigma$.

Also, for the sake of simplicity, we do not consider here the pointing constraint (but we keep the glide-slope constraint). Finally, the optimal control problem is formulated as follows.

Problem 5.

$$\min \ell(t_f, x(t_f)) \text{ such that}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(\cdot) = (r(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot)) \text{ follows (4.42),} \\ x(0) = (r_0, v_0, \mu_0), \\ (z, v_z)(t_f) = (0, 0), \\ \mu(t) > \mu_e \forall t \in [0, t_f], \\ u_{min} \leq \|u\| \leq u_{max}, \\ h(r) \geq 0. \end{array} \right.$$

We are able to prove that the optimal trajectories of this problem have the same structure as the ones of Problem 4.

Theorem 4.4.7. *Consider an optimal trajectory on $[0, t_f]$ of Problem 5. Then, the control $u(t)$ is in the Max-Min-Max or the Max-Singular-Max form, i.e. there exist t_1 and t_2 with $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_f$ such that*

$$\|u\|(t) = \begin{cases} u_{max} & \text{if } t \in [0, t_1] \cup (t_2, t_f], \\ u_{min} \text{ or singular} & \text{if } t \in [t_1, t_2]. \end{cases}$$

The proof of this results follows the lines as the one of Theorem 4.0.1, so we only detail here the changes. Consider the Hamiltonian of Problem 5,

$$H(x, P, u) = \langle p_r, v \rangle + \left\langle p_v, \left(T - \frac{\sigma}{\|u\|} \right) \frac{u}{\mu} - g_a \right\rangle - p_\mu q \|u\|. \quad (4.43)$$

The dynamics of the adjoint vector is

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_r(t) = 0, \\ \dot{p}_v(t) = -q_r(t), \\ \dot{p}_\mu(t) = \frac{1}{\mu(t)^2} \left\langle p_v(t), \left(T - \frac{\sigma}{\|u(t)\|} \right) u(t) \right\rangle. \end{array} \right. \quad (4.44)$$

Lemma 4.4.8. *Every optimal control of Problem 5 satisfies*

$$\|u(t)\| = \begin{cases} u_{max} & \text{if } \Psi(t) > 0, \\ u_{min} & \text{if } \Psi(t) < 0, \end{cases}$$

where

$$\Psi = \frac{T}{\mu} \|p_v\| - p_\mu q,$$

and, for all t such that $u(t) \neq 0$,

$$\frac{u(t)}{\|u(t)\|} = \frac{p_v(t)}{\|p_v(t)\|}.$$

Proof. If $u(\cdot)$ is an optimal control on $[0, t_f]$, then the maximization condition of the Pontryagin Principle implies that, for almost all $t \in [0, t_f]$, $u(t)$ maximizes

$$\varphi(t, w) = \left\langle p_v, \left(T - \frac{\sigma}{\|w\|} \right) \frac{w}{\mu} \right\rangle - p_\mu q \|w\|$$

among all $w \in \mathcal{U}$. Making the change of variable $w = \alpha d$, with $\alpha = \|w\|$, to find $u(t) \in \mathcal{U}$ maximizing φ amounts to find α and d maximizing

$$\varphi(t, \alpha, d) = \alpha \left(\frac{T}{\mu} \langle p_v, d \rangle - p_\mu q \right) - \frac{\sigma}{\mu} \langle p_v, d \rangle,$$

under the conditions $u_{\min} \leq \alpha \leq u_{\max}$ and $d \in \mathcal{S}^2$. It is clear that this maximization yields to the statement of the lemma. \square

Lemma 4.4.9. *Consider an optimal trajectory on $[0, t_f]$. Then:*

1. Ψ is absolutely continuous on $[0, t_f]$;
2. $t \mapsto \left\langle q_r(t), \frac{p_v(t)}{\|p_v(t)\|} \right\rangle$ is a nonincreasing function on a full measurement subset of $[0, t_f]$.

Proof. We do not detail the proof here as it is very similar to the one of Proposition 4.4.2-Points 1,3. \square

Proof of Theorem 4.4.7. Let study the sign of $\Psi(t)$. Its derivative is expressed by

$$\dot{\Psi}(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left(\frac{\sigma q}{\mu(t)} \|p_v\| - T \left\langle q_r(t), \frac{p_v(t)}{\|p_v(t)\|} \right\rangle \right),$$

and can be written as follows

$$\dot{\Psi}(t) = K(t)\Psi(t) + \frac{1}{\mu(t)} f(t),$$

where K and f are functions expressed by

$$K(t) = \frac{\sigma q}{T\mu(t)} \quad \text{and} \quad f(t) = \frac{\sigma q^2}{T} p_\mu(t) - T \left\langle q_r(t), \frac{p_v(t)}{\|p_v(t)\|} \right\rangle.$$

We deduce that

$$\frac{d}{dt} \left[\Psi(t) e^{-\int_0^t K(s) ds} \right] = \frac{e^{-\int_0^t K(s) ds}}{\mu(t)} f(t).$$

Using the expression of the optimal control given in Lemma 4.4.8 and from (4.44), we obtain that the derivative of p_μ is expressed by $\frac{\|p_v\|}{\mu(t)^2} (T\|u\| - \sigma)$; therefore, from Assumption 3, $\dot{p}_\mu(t) > 0$ and p_μ is increasing. By Lemma 4.4.9 the function $\left\langle q_r(t), \frac{p_v(t)}{\|p_v(t)\|} \right\rangle$ is nonincreasing, thus we obtain that $f(t)$ is increasing and can change of sign at most one time. Consequently, $\Psi(t) e^{-\int_0^t K(s) ds}$ can changes of sign at most two times, and in that case it is positive, then negative and then positive, and Ψ has the same property. \square

4.5 | Additional properties of optimal trajectories

Optimal trajectories may contain two kinds of arcs that play a very specific role both from a theoretical and numerical point of view: singular arcs, on which the value of the control is not determined by the maximisation of the Hamiltonian, and boundary arcs, where the state constraint is active. The aim of this section is to study the occurrence of such phenomena. We will obtain results mainly in the particular case where the glide-slope constraint reduces to an altitude constraint, i.e. the case where $\gamma = 0$.

4.5.1 | Singular arcs

A *singular arc* is the restriction of an optimal trajectory to an interval $(t'_1, t'_2) \subset [0, t_f]$ on which the switching function Ψ is zero. From Theorem 4.0.1, optimal trajectories may contain a singular arc, but not more than one.

In the study of singular arcs we present below, we first give two lemmas showing that such arcs have a particular form, namely some adjoint vectors are collinear and the pointing constraint is active. Then we show in Proposition 4.5.3 that in the case $\gamma = 0$, these properties happen only if the initial conditions are in very specific positions, so that singular arcs do not appear for generic initial conditions. We did not try to extend the result to $\gamma \neq 0$, but it is reasonable to believe that the results (no singular arc for generic initial conditions) still hold in this case.

Lemma 4.5.1. *Consider an optimal trajectory on $[0, t_f]$. Assume that it contains a singular arc defined on an interval $(t'_1, t'_2) \subset [0, t_f] \setminus I$. Then there holds*

$$\int_{[t'_1, t'_2]} v(ds) = 0. \quad (4.45)$$

Moreover if the pointing constraint is not active (i.e. $d(t) = \frac{p_v(t)}{\|p_v(t)\|}$), then $p_v(t)$ and $q_r(t)$ are collinear, otherwise $\bar{p}_v(t)$ and $\bar{q}_r(t)$ are collinear.

Remark 4.5.1. Equation (4.45) means either that the state constraint (i.e. the glide-slope constraint) is never active, or that on each open interval where this constraint is active, the adjoint vector follows the same equations as when the constraint is not active. However a singular part of the measure v at t'_2 is not excluded.

Proof. Since $\Psi(t) = 0$ on (t'_1, t'_2) , there holds $\dot{\Psi}(t) = 0$ a.e. on (t'_1, t'_2) , and it follows from Proposition 4.4.2 that $\langle q_r(t), d(t) \rangle$ is constantly equal to zero on (t'_1, t'_2) . If the state constraint is not active on (t'_1, t'_2) , the conclusion follows from Corollary 4.4.5. If the constraint is active at some time $t'_0 \in (t'_1, t'_2)$, following the lines of the proof of Lemma 4.4.3,

we obtain from (4.38) that both I_1 and $I_2 - I_3$ must be zero near t'_0 . The latter implies

$$\langle n(t'_0), d(t'_0) \rangle \int_{[t'_0, t]} v(ds) = 0 \quad (4.46)$$

which again gives the conclusion since $\langle n(t'_0), d(t'_0) \rangle > 0$ by Lemma 4.4.6. \square

Lemma 4.5.2. *If the pointing constraint is not active on an interval $(t'_1, t'_2) \subset [0, t_f] \setminus I$, then the trajectory is not singular on that interval.*

Proof. If the trajectory is singular (t'_1, t'_2) , then by Lemma 4.5.1, q_r and p_v are collinear on this interval. Moreover, when the pointing constraint is not active, $\Psi = 0$ implies from (4.21) that $\langle q_r, d \rangle = \frac{\langle q_r, p_v \rangle}{\|p_v\|} = 0$. Thus $q_r = 0$. Now, from (4.9), which is equivalent to

$$H(x, P, u) = \|u\| \Psi + \langle q_r, v \rangle - p_{v_z} g_0,$$

the expression of the Hamiltonian becomes

$$H(x, P, u) = -p_{v_z} g_0.$$

The transversality condition (4.13) and the condition (4.7) on ℓ then imply that $p_{v_z} \leq 0$, which contradicts the assumption that the pointing constraint is not active. \square

Consider now the particular case where the glide-slope constraint reduces to an altitude constraint, i.e. the case where $\gamma = 0$. In that case, $n = e_z$, so $\bar{q}_r = \bar{p}_r$ is constant even when $h(r) = 0$. Moreover we impose that the final position and velocity are fixed and null, i.e. we choose as target $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^7 : r = v = 0\}$.

Proposition 4.5.3. *Under the above assumptions, if the optimal trajectory contains a singular arc, then the initial conditions are such that $(r_x, r_y)(0)$ and $(v_x, v_y)(0)$ are collinear. Consequently, for generic initial conditions there are no singular arcs.*

Proof. Consider a trajectory containing a singular arc on an interval $[t'_1, t'_2]$. According to Lemma 4.5.1, $\bar{p}_v(t'_1)$ and \bar{p}_r are collinear. Set $\bar{d} = (d_x, d_y)$, $\bar{r} = (r_x, r_y)$ and $\bar{v} = (v_x, v_y)$. Since $(r(t_f), v(t_f)) = (0, 0)$, \bar{d} has the same direction as \bar{p}_v and as \bar{v} by the dynamics of the vehicle. We conclude that $\bar{r}(0)$ and $\bar{v}(0)$ are collinear. \square

Proposition 4.5.3 helps to explain why singular trajectories seldom arise in numerical simulations and are often dismissed in the literature. Note that we make additional assumptions in order to give a simple proof but the results could probably be extended, for example by continuity arguments.

Remark 4.5.2. The condition $(r_x, r_y)(0)$ and $(v_x, v_y)(0)$ linearly dependent is satisfied for instance when considering the two dimensional problem, which has been studied many times in the literature. Thus, it seems that singular arcs appear rarely. From our own observations, the most common cases where they appear seem to be when the cost depends on the final time and q is small (the mass varies slightly).

4.5.2 | Number of contact points

Given a trajectory, we say that $[t_{c_1}, t_{c_2}]$ is a *boundary interval* if $h(t) = 0$ for all $t \in [t_{c_1}, t_{c_2}]$, and $[t_{c_1}, t_{c_2}]$ is the largest interval satisfying this condition and containing t_{c_1}, t_{c_2} . When the boundary interval is reduced to a point t_c (i.e. $t_{c_1} = t_{c_2} = t_c$), we rather say that t_c is a *contact point*.

The aim of this subsection is to show that there are few boundary intervals along an optimal trajectory in general. To keep the problem manageable we restrict ourselves to the particular setting where:

- the state constraint reduces to an altitude constraint (i.e. $\gamma = 0$), as in the end of the previous subsection; remind that in that case $n = e_z$, so $\bar{q}_r = \bar{p}_r$ is constant even when $h(r) = 0$;
- the mass μ is assumed to be constant, i.e. $q = 0$.

Lemma 4.5.4. *There is at most one contact point or boundary interval on each Max or Min arc of an optimal trajectory.*

Proof. Let us show that there is at most one contact point or boundary interval on each Max arc (including possibly the final point for the last Max arc). A similar reasoning on Min arcs will then give the conclusion. By contradiction, assume that the same Max arc contains two different boundary intervals $[t'_{c_1}, t_{c_1}]$ and $[t_{c_2}, t'_{c_2}]$, with $t_{c_1} < t_{c_2}$. We can moreover assume that $h(t) = z(t) > 0$ on (t_{c_1}, t_{c_2}) . Then

$$\dot{v}_z(t_{c_1}) \geq 0, \quad \dot{v}_z(t_{c_2}) \geq 0, \quad (4.47)$$

and there exists $t_b \in (t_{c_1}, t_{c_2})$ such that $\dot{v}_z(t_b) < 0$.

Note that \dot{v}_z is an affine function of d_z , the vertical component of d ,

$$\dot{v}_z = u_{max} \frac{T}{\mu} d_z - g_0,$$

so the above sign condition on \dot{v}_z write as

$$d_z(t_{c_1}) \text{ and } d_z(t_{c_2}) \geq \frac{\mu g_0}{Tu_{max}}, \quad d_z(t_b) < \frac{\mu g_0}{Tu_{max}}. \quad (4.48)$$

Now, on (t_{c_1}, t_{c_2}) , the state constraint is inactive, therefore $q_r = q_r(t_{c_1})$ is constant and

$$p_v(t) = p_0 - q_r t, \quad \forall t \in (t_{c_1}, t_{c_2}).$$

Assume first that p_0 and q_r are collinear, and write $p_0 = \rho_0 \delta$ and $q_r = \rho_r \delta$, with $\rho_0, \rho_r \in \mathbb{R}$ and $\delta \in \mathcal{S}^2$. Thus,

$$\frac{p_v}{\|p_v\|} = \text{sign}(\rho_0 - \rho_r t) \delta.$$

We deduce that in that case d_z can take only two values, $\cos(\theta_{max})$ and the constant value $|\delta_z|$ (if this value belongs to $(\cos(\theta_{max}), 1]$), and can change value at most one time. This contradicts (4.48).

Thus p_0 and q_r are not collinear. In particular d is absolutely continuous on (t_{c_1}, t_{c_2}) . First, let us notice that when the pointing constraint is active, d_z is constantly equal to $\cos(\theta_{max})$, and study now the evolution of d_z when the pointing constraint is not active. We will reduce the problem to two dimensions. Let us choose $\hat{n} = \pm \frac{p_0 \wedge q_r}{\|p_0 \wedge q_r\|}$ such that $\langle \hat{n}, e_z \rangle \geq 0$. Then d , which is equal to $\frac{p_v}{\|p_v\|}$, belongs to the normal plane to \hat{n} , denoted \hat{n}^\perp . Note that $\hat{n} \neq e_z$. Indeed, otherwise $p_{v_z} = 0$, which implies that d_z is constantly equal to $\cos(\theta_{max})$ and is in contradiction with (4.48). Let α be the angle between \hat{n} and the plane (e_x, e_y) and let us choose (u_1, u_2) an orthonormal basis of \hat{n}^\perp such that $\langle u_1, e_z \rangle = 0$ and $\langle u_2, e_z \rangle = \cos(\alpha) > 0$. Then, we define ϕ such that d can be written

$$d = \cos(\phi) u_1 + \sin(\phi) u_2$$

with $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ and we have that

$$d_z = \sin(\phi) \cos(\alpha).$$

We have from (4.48) that $\phi(t_{c_1})$ and $\phi(t_{c_2})$ are in $(0, \frac{\pi}{2})$. Now, let us show that the evolution of d_z contradicts (4.48). Since α is constant,

$$\dot{d}_z = \dot{\phi} \cos(\phi) \cos(\alpha), \quad (4.49)$$

therefore, \dot{d}_z has the same sign as $\dot{\phi}$, and $\dot{\phi}$ can be expressed thanks to the following computations. We reduce ourselves to \hat{n}^\perp , since p_v, p_0 and q_r belongs to it. We place ourselves in this plane in the coordinates defined by (u_1, u_2) . By abuse of notation, we will call p_v the vector in two dimensions defined by $p_v = (\langle p_v, u_1 \rangle, \langle p_v, u_2 \rangle)$. As

$p_v = \|p_v\| d = \|p_v\| \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}$, then

$$\dot{p}_v = \frac{d\|p_v\|}{dt} \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} + \|p_v\| \dot{\phi} \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix},$$

and by multiplying on the left by $\begin{pmatrix} -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$ we obtain

$$\begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix}^T (-q_r) = \|p_v\| \dot{\phi}.$$

We deduce that

$$\dot{\phi} = -\frac{1}{\|p_v\|^2} \det(q_r, p_v) = -\frac{1}{\|p_v\|^2} \det(q_r, p_0).$$

As q_r and p_0 are constant, we deduce that $\dot{\phi}$ is of constant sign, and \dot{d}_z also from (4.49). Thus, d_z is monotonous when the pointing constraint is not active and constant when it is active: we conclude that it is not possible to verify (4.48). \square

Corollary 4.5.5. *For generic initial conditions, there are at most three contact points or boundary intervals along an optimal trajectory. More precisely,*

1. if $u_{min} < \frac{\mu_0 g_0}{T}$, there are along the trajectory at most two contact points or boundary intervals;
2. if $u_{min} \cos(\theta_{max}) \geq \frac{\mu_0 g_0}{T}$, the only possible contact point is the final point.

Proof. The main statement follows by application of Theorem 4.0.1 and Proposition 4.5.3, which imply that the control is of the form Max-Min-Max (or the restriction of such a control to a subinterval), and Lemma 4.5.4 gives us the number of contacts. Then, the assumption of Point 1 implies that $u_{min}T$ does not compensate the weight of the vehicle, therefore it is not possible to have a contact on a Min arc without violating the state constraint. Finally, the assumption of Point 2 implies that $u(t)T$ compensate the weight of the vehicle for any control direction, therefore the vertical velocity, and so the altitude, would remain positive after a contact with the state constraint. We deduce that it is not possible to have a contact aside from the final point. \square

Remark 4.5.3. The last result is demonstrated under the assumption of a constant mass. However we expect it to stay true if the mass has small variations, i.e. if q is small. Indeed, the reasoning is still correct if $\mu(t_b) \sim \mu(t_{c_1})$ or $\mu(t_{c_2})$, therefore it is sufficient to assume that the mass varies only slightly between two contact points. Likewise, the same reasoning would work with a glide-slope constraint of $\gamma \neq 0$, by assuming that n is constant, which means in two dimensions that the trajectory stays in the same half-plane $x \geq 0$ or $x \leq 0$.

4.6 | Numerical results

This section presents some examples for a Mars powered descent problem, in two dimensions for the sake of simplicity. The simulations are carried out by using CasADi [Andersson et al., 2019] with python language and the IPOPT solver. They are performed under the same conditions as in [Acikmese and Ploen, 2007]. The launcher parameters are $T = 16573N$, $u_{min} = 0.3$ and $u_{max} = 0.8$ and $\mu_e = 1505kg$ and $g_0 = 3.71m/s^2$ corresponds to the Mars gravitational acceleration. The initial state is given by $r_0 = [2000, 1500]m$, $v_0 = [100, -75]m/s$ and $\mu_0 = 1905kg$, and the final time t_f is free. The considered optimal control problem aims to perform a pinpoint landing by steering the vehicle to null final position and velocity. In this setting it is usual to minimize fuel consumption

$$J = \int_0^{t_f} \|u(t)\| dt.$$

When $q \neq 0$, this cost is equal to $(\mu(0) - \mu(t_f))/q$, hence it is actually a final cost (which represents the maximisation of final mass) and we recover an optimal problem in the form of Problem 4. When $q = 0$, J is not a final cost and so our preceding study do not directly apply. But it is straightforward to show that all results presented in Section 4.4 and 4.5 remain valid.

The first set of simulations is performed in the conditions of section 4.5 with a constant vehicle mass, i.e. with $q = 0$. Note that the assumption of the Point 1 of Corollary 4.5.5, $u_{min} < \frac{\mu_0 g_0}{T}$, is verified.

Three simulations were performed. The first executes a Mars landing if no pointing and altitude constraint is applied. Figure 4.3 shows that in that case, the zero altitude is crossed. In the second simulation, an altitude constraint has been added. We see that, in accordance with the results of Corollary 4.5.5, there are two contact points with the state constraint along the trajectory: one during the first Bang arc and the final point. However, the angle of the thrust exceeds 45° at the end of the trajectory. Finally, in the third example, a pointing constraint of 45° is added. There are again two contacts with the state constraints, and the pointing constraint is active during the last 16s of the trajectory, which has the effect of making the trajectory more vertical.

A second set of simulations has been performed with a varying mass, with $q = 8.4294kg/s$, considering a glide-slope constraint of $\gamma = 5^\circ$. In that case, the constraints are more compelling, as we see on the green plot on Figure 4.4 that the thrust direction is saturated by the pointing constraint on both its inferior and its superior bounds. There is still one contact point with the state constraint, although we leave the framework of Corollary 4.5.5. Remark that in all examples the form of the control is Max-Min-Max,

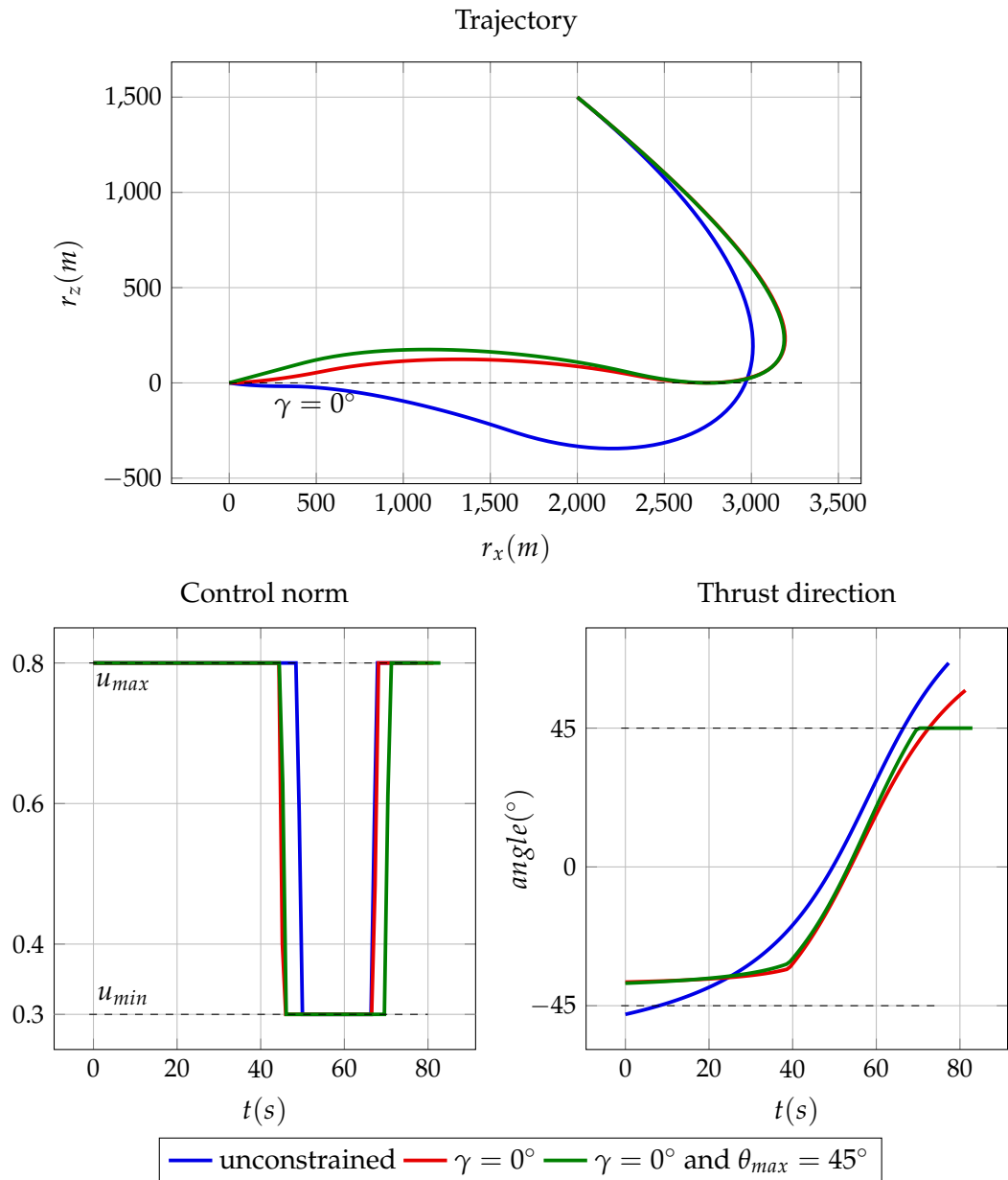


Figure 4.3 – Simulation results for $q = 0$ without glide-slope or pointing constraint (blue), with only a glide-slope constraint of $\gamma = 0^\circ$ (red) and with glide-slope and pointing constraints for $\theta_{max} = 45^\circ$ (green).

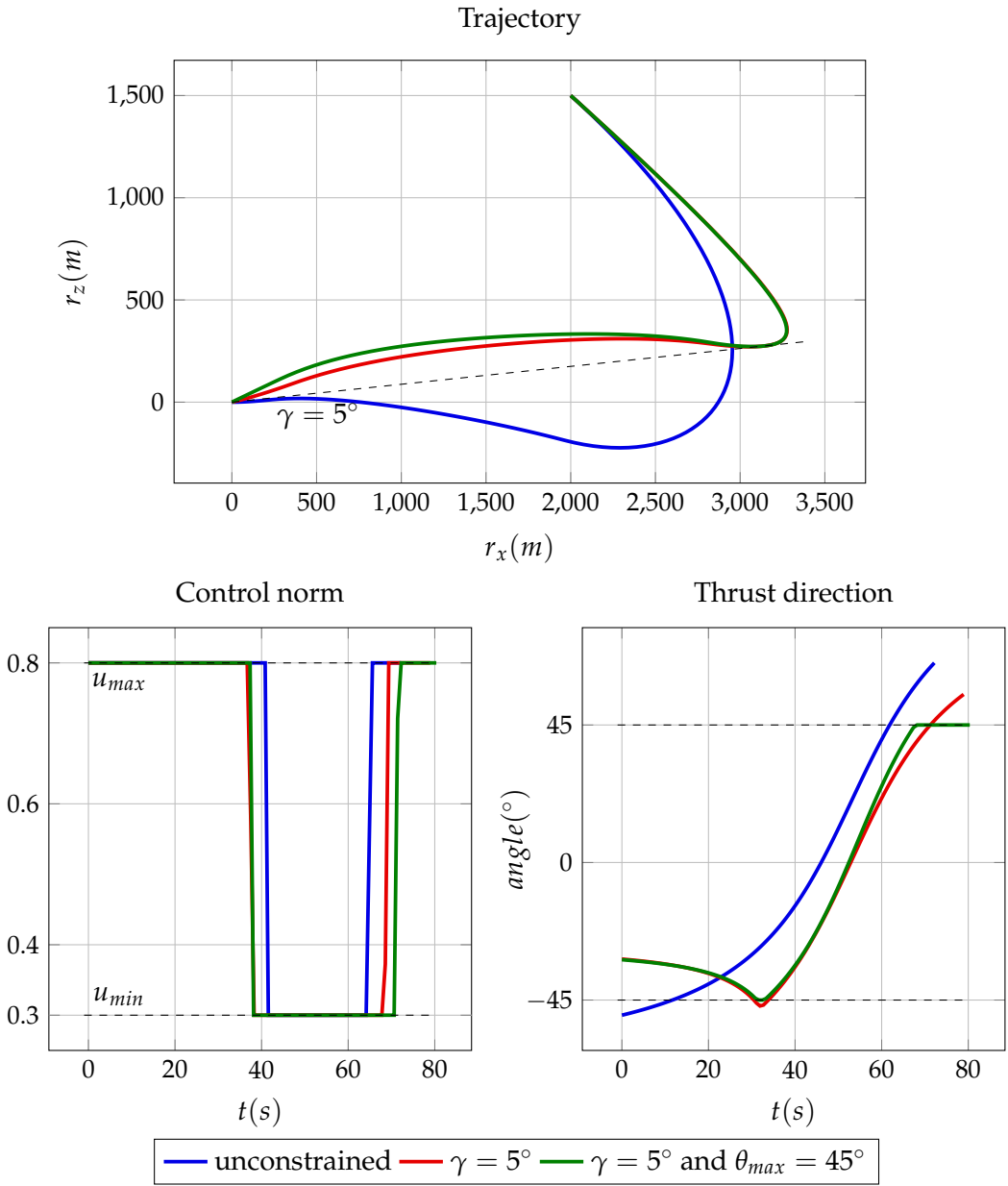


Figure 4.4 – Simulation results with a varying mass, and a glide-slope constraint of $\gamma = 5^\circ$.

and even the switching times vary little from one simulation to another. Thus, there is rigidity in the structure of the optimal solution, in the sense that it does not adapt to changes of the problem. This can be practical, because it means that we can simplify the solution of some complex problems by computing the solution of a simpler problem instead [Maamria et al., 2020]. However, the Max-Min-Max control is always saturated, leaving no room to react to perturbations or uncertainties. This lack of flexibility makes the structure highly sensitive to uncertainties.

4.7 | Sensitivity analysis

Let us make a sensitivity analysis regarding uncertainties on initial conditions (uncertain parameters could be studied as well by considering them in the dynamics as states with null dynamics). Our objective is to measure the extent to which a minor variation in the initial conditions around a reference value affects the value of the cost function for a solution of Problem 4. This amounts to study the sensitivity of the *value function* of Problem 4, which is denoted by V and is defined as follows. For all $(t_0, x_0) \in [0, t_f] \times \mathbb{R}^n$,

$$V(t_0, x_0) = \inf \{ \ell(t_f, x(t_f)) \mid x \text{ is a solution to Problem 4, } x(t_0) = x_0 \}. \quad (4.50)$$

Let $(x(\cdot), u(\cdot))$ an optimal solution of Problem 4. Therefore, we would like to quantify the following quantity

$$s_0 = \frac{\partial V}{\partial x}(0, x(0)). \quad (4.51)$$

A direct but computationally intensive approach to calculating s_0 would be to solve Problem 4 with different initial conditions. However, it is also possible to determine the sensitivity value around a reference point from a single instance of the problem, as sensitivity with respect to initial conditions is characterized by the value of $P(0)$. Specifically, from [Frankowska, 2001, Theorem 3.13], if $V(t_0, \cdot)$ is differentiable at x_0 , the sensitivity is related to the adjoint vectors as follows

$$\frac{\partial V}{\partial x}(t, x(t)) = -P(t). \quad (4.52)$$

Therefore, we can obtain the value of s_0 by using the provided $P(0)$ quantity, which is typically available through classical solvers like Ipopt. We obtained numerical sensitivity results for Problem 4 using this approach for different initial conditions, in the settings specified in Tables 4.1-4.4. We have computed them for two different cost functions: first maximizing the final mass, and then minimizing the total duration t_f . While

we have excluded pointing and state constraints in this analysis, they would not have been activated in the chosen settings. The computed trajectory and control solution with the settings of Table 4.1 are presented in Figure 4.5 (but only once since the shapes of the solutions in the three other settings are very similar), and the initial adjoint vector values are shown in Tables 4.1-4.4. To facilitate comparison, we have provided these values with normalization parameters $T_{ref} = 10s$, $x_{ref} = 1000m$ and $\mu^0 = \mu^0$.

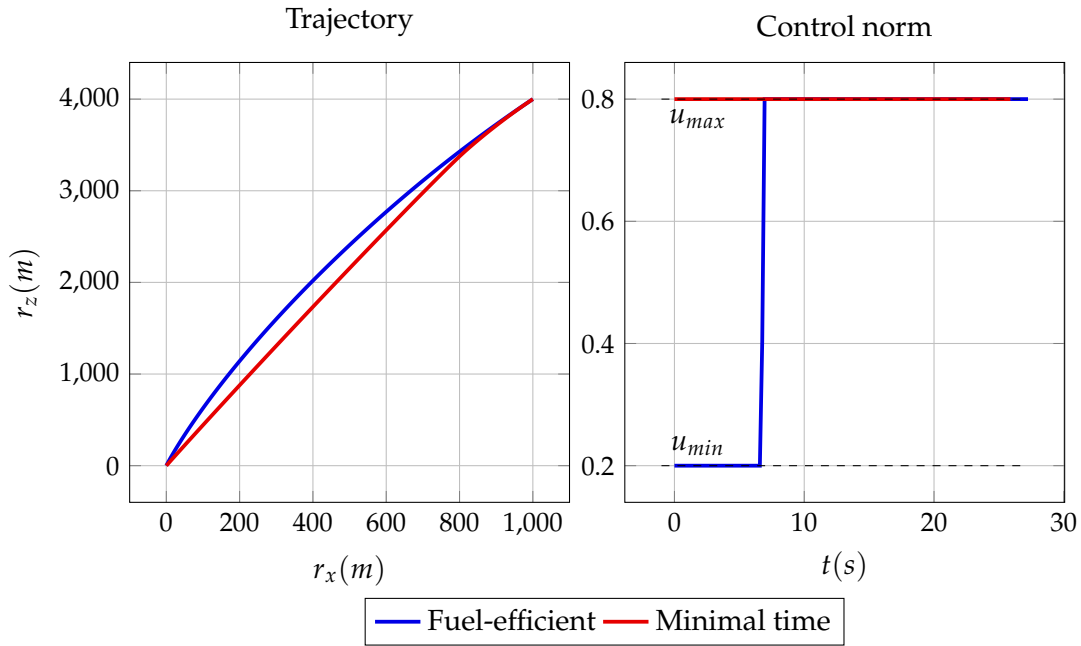


Figure 4.5 – Optimal solution in the settings of Table 4.1

Property	Value	Quantity	Normalized value
T	$1e6N$	Fuel-efficient	
u_{min}	0.2	q_x	1.6e-3
u_{max}	0.8	q_z	-1.0e-2
q	$300kg.s^{-1}$	$p_{v_x}(0)$	7.5e-3
g_0	$9.81m.s^{-2}$	$p_{v_z}(0)$	1.7e-2
r^0	$(1000, 4000)m$	$p_\mu(0)$	0.83
v^0	$(-75, -200)m.s^{-1}$	Minimal time	
μ^0	40000kg	q_x	-3.8e-2
		q_z	-3e-1
		$p_{v_x}(0)$	-6.7e-3
		$p_{v_z}(0)$	-7.5e-2
		$p_\mu(0)$	-2.1

Table 4.1 – Simulation settings and sensitivity results

Property		Value	
r^0		$(1000, 2000)m$	
v^0		$(-75, -200)m.s^{-1}$	
μ^0		$40000kg$	

Quantity	Normalized value	Quantity	Normalized value
Fuel-efficient		Minimal time	
q_x	-9.5e-3	q_x	-1.2e-1
q_z	-8.8e-3	q_z	-3.8e-1
$p_{v_x}(0)$	-2.1e-3	$p_{v_x}(0)$	-2.0e-2
$p_{v_z}(0)$	2.5e-2	$p_{v_z}(0)$	4.1e-3
$p_\mu(0)$	0.85	$p_\mu(0)$	-1.7

Table 4.2 – Sensitivity results with a lower initial altitude

Property		Value	
r^0		$(1000, 4000)m$	
v^0		$(-75, -200)m.s^{-1}$	
μ^0		$20000kg$	

Quantity	Normalized value	Quantity	Normalized value
Fuel-efficient		Minimal time	
q_x	-1.0e-3	q_x	-3.6e-2
q_z	-1.3e-2	q_z	-2.0e-1
$p_{v_x}(0)$	2.1e-3	$p_{v_x}(0)$	-1.6e-2
$p_{v_z}(0)$	4.3e-3	$p_{v_z}(0)$	-9.0e-2
$p_\mu(0)$	0.89	$p_\mu(0)$	-0.91

Table 4.3 – Sensitivity results with a lower initial mass

Property		Value	
r^0		$(1000, 4000)m$	
v^0		$(-30, -200)m.s^{-1}$	
μ^0		$40000kg$	

Quantity	Normalized value	Quantity	Normalized value
Fuel-efficient		Minimal time	
q_x	-7.8e-3	q_x	-5.0e-2
q_z	-8.8e-3	q_z	-3.0e-1
$p_{v_x}(0)$	-9.6e-3	$p_{v_x}(0)$	-2.0e-2
$p_{v_z}(0)$	1.8e-2	$p_{v_z}(0)$	-7.9e-2
$p_\mu(0)$	0.83	$p_\mu(0)$	-2.1

Table 4.4 – Sensitivity results with a lower initial lateral velocity

Our analysis shows that the initial mass condition has the greatest influence on the

value function, while being the most uncertain parameter. For instance, in the settings of Table 4.1 when minimizing fuel consumption, a deviation of 3% on the initial mass, which is the order of magnitude selected for the following chapters, leads to a 2.4% deviation in the value function as indicated by the p_μ adjoint, and this sensitivity is greater in the other settings presented. Finally, the sensitivities are higher when minimizing the total duration, which is understandable since minimal time leaves little room for adaptation. We deduce that initial mass is a particularly important parameter, and that it is therefore important to model the uncertainties surrounding it. This is addressed in the next chapters.

4.8 | Summary

This chapter has studied the structure of the optimal control for the powered descent problem, for three dimensional dynamics, first without modeling the effect of an atmosphere, and with a constant pressure modeling. It has shown that the optimal control has generally a Max-Min-Max form, and that this structure is sensitive to uncertainties and perturbations. This last observation is particularly interesting, since Min-Max structures are very common in optimal control problems, even in different settings than those studied here. Additionally, according to recent research [Ito and ichiro Sakai, 2023], it appears that the activation of the pointing constraint on the control direction also follows a three arcs switching structure, where it is initially active, then inactive, and finally active again. Therefore, the next two chapters aim to infuse robustness into the solution of the powered descent, Chapter 5 applying the approach described in Chapter 2 and Chapter 6 proposing an alternative approach assuming the presence of a measurement area.

Annexe - Proof for the optimal control direction expression

Lemma 4.8.1. *The solutions of the maximization problem*

$$\max_d \langle p_v, d \rangle \quad \text{under the conditions} \quad \begin{cases} c_+(d) = \langle e_z, d \rangle - \cos(\theta_{max}) \geq 0, \\ c_1(d) = \langle d, d \rangle - 1 = 0, \end{cases} \quad (4.53)$$

are the vectors $d \in \mathcal{S}^2$ satisfying

$$d = \begin{cases} \frac{p_v}{\|p_v\|} & \text{if } p_{v_z} \geq \|p_v\| \cos(\theta_{max}) \text{ and } p_v \neq 0, \\ \left(\sin(\theta_{max}) \frac{\bar{p}_v}{\|\bar{p}_v\|}, \cos(\theta_{max}) \right) & \text{if } p_{v_z} < \|p_v\| \cos(\theta_{max}) \text{ and } \bar{p}_v \neq 0, \\ \left(\sin(\theta_{max}) \delta, \cos(\theta_{max}) \right) \text{ where } \delta \in \mathcal{S}^1 & \text{if } p_{v_z} < \|p_v\| \cos(\theta_{max}) \text{ and } \bar{p}_v = 0. \end{cases} \quad (4.54)$$

Proof. Set $f = \langle p_v, d \rangle$ and consider $p_v \neq 0$. Denoting by λ_+ and λ the Lagrange multipliers associated to the conditions c_+ and c_1 , the Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions write as

$$\begin{cases} \nabla f(d) + \lambda \nabla c_1(d) + \lambda_+ \nabla c_+(d) = 0 \\ c_+(d) \geq 0, \quad c_1(d) = 0, \\ \lambda_+ c_+(d) = 0, \\ \lambda_+ \geq 0, \end{cases} \quad (4.55)$$

where the gradients are given by

$$\nabla f(d) = p_v, \quad \nabla c_1(d) = 2d, \quad \nabla c_+(d) = e_z. \quad (4.56)$$

Case 1: $c_+(d) > 0$. Then $\lambda_+ = 0$, $p_v + 2\lambda d = 0$, $\langle d, d \rangle = 1$, and we get the following alternative. Either $p_v = 0$ and then every $d \in \mathcal{S}^2$ is a maximum. Or $d = \epsilon \frac{p_v}{\|p_v\|}$ with $\epsilon = \pm 1$, and since d maximizes f , then $\epsilon = 1$.

Case 2: $c_+(d) = 0$. Then $d_z = \cos \theta_{max}$, $p_v + 2\lambda d + \lambda_+ e_z = 0$, $\langle d, d \rangle = 1$, and we get the following alternative. Either $p_v = p_{v_z} e_z$ (i.e. $\bar{p}_v = 0$) with $p_{v_z} \leq 0$, and in this case, choosing $\lambda_+ = -p_{v_z}$ we obtain that every d of the form $(\sin(\theta_{max})\delta, \cos(\theta_{max}))$, with $\delta \in \mathcal{S}^1$, is maximum. Or $p_v + \lambda_+ e_z \neq 0$ and so $d = \epsilon \frac{p_v + \lambda_+ e_z}{\|p_v + \lambda_+ e_z\|}$ with $\epsilon = \pm 1$. In that case, $\epsilon(p_{v_z} + \lambda_+) = \|p_v + \lambda_+ e_z\| \cos(\theta_{max})$ and

$$d = \begin{pmatrix} \frac{\epsilon p_{v_x}}{\|p_v + \lambda_+ e_z\|} \\ \frac{\epsilon p_{v_y}}{\|p_v + \lambda_+ e_z\|} \\ \frac{\epsilon p_{v_z}}{\|p_v + \lambda_+ e_z\|} \end{pmatrix} = \cos(\theta_{max}) \begin{pmatrix} \frac{p_{v_x}}{(p_{v_z} + \lambda_+)} \\ \frac{p_{v_y}}{(p_{v_z} + \lambda_+)} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

As d is unit, we have

$$\|d\|^2 = 1 = \cos(\theta_{max})^2 \left(1 + \frac{p_{v_x}^2 + p_{v_y}^2}{(p_{v_z} + \lambda_+)^2} \right) = \cos(\theta_{max})^2 \left(1 + \frac{\|\bar{p}_v\|^2}{(p_{v_z} + \lambda_+)^2} \right).$$

We deduce that

$$\sin(\theta_{max})^2 = \cos(\theta_{max})^2 \frac{\|\bar{p}_v\|^2}{(p_{v_z} + \lambda_+)^2}, \quad \text{so} \quad \frac{\cos \theta_{max}}{(p_{v_z} + \lambda_+)} = \epsilon \frac{\sin \theta_{max}}{\|\bar{p}_v\|}.$$

Thus,

$$d = \begin{pmatrix} \epsilon \sin(\theta_{max}) \frac{p_{v_x}}{\|\bar{p}_v\|} \\ \epsilon \sin(\theta_{max}) \frac{p_{v_y}}{\|\bar{p}_v\|} \\ \cos(\theta_{max}) \end{pmatrix},$$

and the parameter ϵ is equal to $+1$ since d maximizes f . □

Robust motion planning using statistical linearization

Chapter 4 has shown that the optimal control for the powered descent problem has generally a Max-Min-Max structure, a control law which has been shown to suffer from lack of robustness with respect to uncertainties and disturbances [Ridderhof and Tsiontras, 2019]. Therefore, infusing robustness with respect to uncertainty in the aforementioned optimal control problem formulation is crucial to ensure reliability. However, existing robust motion planning methods generally lack justification of well-posedness, as well as analysis of the accuracy of the corresponding approximations. In this chapter, we fill this gap by applying our robust motion planning method, presented in Chapter 2, for the powered descent of a space vehicle which explicitly includes modeling of environmental and system uncertainties, such as aerodynamic effects, parameter uncertainties, and measurement errors. In addition, we use the theoretical findings of Chapter 3 to study the accessibility of the statistically linearized dynamics under both open-loop and partial feedback control laws, and we propose a modelling of the actuator limits and state constraints in a stochastic setting. Finally, numerical results are provided to justify the consistency of the approach. In particular, numerical computations of estimation errors of statistical linearization are given to illustrate the results of Section 2.4.

This chapter is largely based on [Leparoux et al., 2023a, Leparoux et al., 2023b].

5.1 | Framework

For the sake of simplicity, we consider a two-dimensional formulation only, we refer the reader to Chapter 4 for a discussion on the complete three-dimensional model. In this setting, the state $x = (r, v, \mu) \in \mathbb{R}^5$ is composed by the position $r = (r_y, r_z) \in \mathbb{R}^2$,

the velocity $v = (v_y, v_z) \in \mathbb{R}^2$, and the mass $\mu \in \mathbb{R}$, while the control $u = (u_y, u_z)$ represents the two-dimensional normalized thrust vector.

Ignoring disturbances and uncertainties, the dynamics of the system, referred later as the *unperturbed dynamics*, are described by (4.1) and are recalled here:

$$\dot{x} = f(x, u) = \begin{pmatrix} v \\ \frac{T}{\mu}u - \begin{pmatrix} 0 \\ g_0 \end{pmatrix} \\ -q\|u\| \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

We also impose the same thrust and state constraints for all $t \in [0, t_f)$, which can be expressed in two dimensions as follows:

$$\begin{cases} \mu(t) > \mu_e, & (5.2) \\ 0 \leq u_{min} \leq \|u(t)\| \leq u_{max}, & (5.3) \\ \langle e_z, u(t) \rangle \geq \|u(t)\| \cos(\theta_{max}), \text{ with } \theta_{max} \in [0, \frac{\pi}{2}), & (5.4) \\ r_z(t) - \tan(\gamma)|r_y(t)| \geq 0, \text{ with } \gamma \in [0, \frac{\pi}{2}). & (5.5) \end{cases}$$

The goal of the powered descent is to reach the target $\mathcal{S} = \{r = 0, v = 0\}$ from the initial state $x(0)$. To save the largest amount of fuel in the vehicle tanks, the motion planning problem takes the form of Problem 1 with the following cost function:

$$C(u) = -\mu(t_f). \quad (5.6)$$

Thus, it is formulated as follows

Problem 6 (Deterministic motion planning for powered descent).

$$\min C(u) = -\mu(t_f) \quad (5.7)$$

among the controls $u \in L^2([0, t_f], \mathcal{U})$ such that the solution x of

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \text{ a.e. on } [0, t_f], \\ x(0) = x^0, \\ x(t) \in \mathcal{X} \forall t \in [0, t_f], \end{cases}$$

satisfies $x(t_f) \in \mathcal{S}$,

where

$$\mathcal{U} = \{u \mid u_{min} \leq \|u\| \leq u_{max} \text{ and } \langle e_z, u \rangle \geq \|u\| \cos(\theta_{max})\}$$

and

$$\mathcal{X} = \{x = (r, v, \mu) \mid r_z - \tan(\gamma)|r_y| \geq 0 \text{ and } \mu > \mu_e\}.$$

In addition, the system is subject to at least two types of uncertainties. First, several effects such as aerodynamic forces are neglected from the dynamics model for convenience. Therefore, we propose to model these neglected quantities through an additive noise on the acceleration (i.e., the derivative of v). As a result, we write the dynamics as

$$dx_t = f(x_t, u(t)) dt + g dW_t, \quad (5.8)$$

where W_t is a one-dimensional Brownian motion and $g = (0, 0, \sigma_y, \sigma_z, 0)$ is a constant vector, σ_y, σ_z being nonnegative constants. Second, the initial state $x(0)$ is known only up to measurement errors. We model these errors by considering $x(0)$ as a random variable x^0 with normal density $\mathcal{N}(m^0, P^0)$. Finally, we formulate the robust motion planning of the powered descent as a problem in the form of Problem 2 as follows

Problem 7 (Stochastic robust motion planning for powered descent).

$$\min J(u) = \mathbb{E}[-\mu(t_f)] + \text{tr}(\bar{Q}_f P(t_f)) + \int_0^{t_f} \text{tr}(\bar{Q} P(t)) dt \quad (5.9)$$

among the controls $u \in L^2([0, t_f], \mathcal{U})$ such that the solution x_t of

$$\begin{cases} dx_t = f(x_t, u(t)) dt + g(x_t, u(t)) dW_t, & t \in [0, t_f], \\ x_0 = x^0 \text{ (random variable)}, x_t \in \mathcal{X} \forall t \in [0, t_f] \end{cases}$$

satisfies $\mathbb{E}[x_{t_f}] \in \mathcal{S}$.

5.2 | Direct statistical linearization

Following the approach described in Section 2.1, we solve a problem in the form of Problem 3 rather than one in the form of Problem 2. In particular, we look for a solution of the robust powered descent problem as a control law u which minimizes the following problem (where we write m as $m = (m_r, m_v, m_\mu) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$).

Problem 8.

$$\min_{u, t_f} J_{lin}(u) = -m_\mu(t_f) + \text{tr}(Q_f P(t_f)) + \int_0^{t_f} \text{tr}(Q P(t)) dt$$

under the constraints

$$\begin{cases} (m, P)(\cdot) \text{ solution of the statistical linearization (2.11),} \\ u(t) \in \mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid u_{\min} \leq \|u\| \leq u_{\max}\} \quad \text{for a.e. } t \in [0, t_f], \\ (m, P)(0) = (m^0, P^0), \\ m(t_f) \in \mathcal{S}. \end{cases}$$

Unfortunately, this formulation can not be leveraged because the corresponding statistical linearization is not controllable, in the sense that it does not enjoy accessibility property. In particular, there is no reason for the solution of Problem 8 to perform the powered descent with a small final covariance.

Lemma 5.2.1. *For the dynamic system (5.1), no point $m \in \mathbb{R}^5$ satisfies condition (3.9), whose expression we recall here:*

$$\dim \left\{ \begin{pmatrix} f(m) \\ Df(m) + Df(m)^\top \end{pmatrix} : f \in \text{Lie}(f) \right\} = N. \quad (5.10)$$

Proof. As the proof consists of a simple computation, below we only detail the main steps. For the dynamic system (5.1), any vector field $f_u \in \mathcal{f}$ has the form

$$f_u(x) = \begin{pmatrix} v_y \\ v_z \\ f_{u,3}(\mu) \\ f_{u,4}(\mu) \\ f_{u,5} \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

where $f_{u,3}(\mu) = \frac{T}{\mu}u_y$, $f_{u,4}(\mu) = \frac{T}{\mu}u_z - g_0$ and $f_{u,5} = -q\|u\|$. Thus, for any $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$, the first two components of $f_{u_1}(x) - f_{u_2}(x)$ are zero, as well as the last component of $[f_{u_1}, f_{u_2}](x)$, and their other components are functions of μ only. By induction, we deduce that all elements $f \in \mathcal{I}(f)$ are functions of μ , so that

$$\dim \left(\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} f(x) \\ Df(x) + Df(x)^\top \end{pmatrix} : f \in \mathcal{I}(f) \right\} \right) \leq 9 < n + \frac{n(n+1)}{2}, \quad (5.12)$$

and the conclusion follows. \square

Remark 5.2.1. However, in a similar fashion we can prove the unperturbed system is accessible from any point, by showing that the dimension of $\text{span} \{f(x) : f \in \mathcal{I}(f)\}$ is equal to n . Indeed, by considering for instance the controls $u_1 = (0, 0)$, $u_2 = (0, 1)$, $u_3 = (1, 0)$ and $u_4 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, we obtain that the vectors $f_{u_1}(x) - f_{u_2}(x)$, $f_{u_1}(x) - f_{u_3}(x)$, $f_{u_1}(x) - f_{u_4}(x)$, $[f_{u_1}, f_{u_2}](x)$, $[f_{u_1}, f_{u_3}](x)$ are linearly independent, which leads to the conclusion.

The sufficient accessibility condition is not satisfied. This does not prove that the statistically linearized system (2.11) is not accessible, since the condition tested is only a sufficient one. However, the lack of accessibility is expected because here the vector fields in f are analytic vector fields, and in this case the Lie-based accessibility sufficient conditions are merely necessary (see [Jurđjević, 2012]). In a more informal way, notice that the dynamics (5.1) is almost linear and the statistical linearizations of linear systems are never accessible. Finally, our numerical solutions of the robust motion planning problem subject to dynamics (2.11) (such as those presented on Figure 5.2) do not succeed in reducing the covariance, which tends to confirm this non accessibility property.

5.3 | Statistical linearization through partial feedback

5.3.1 | Adding feedback into the model

We have seen in the previous section that our method fails to provide an open-loop control that is satisfactory in terms of robustness. Nevertheless, some measurements, such as for position r and velocity v , are available during the powered descent, and we can include those into a feedback control. Note that, on the one hand, measurements of mass are generally not available and, on the other hand, this quantity is in general not observable, which in turn hinders the design of feedback controls that are also functions of the mass.

Therefore, we replace the control variable u in (5.1) by a function u_{FB} of $\bar{x} = (r, v)$ which depends on some appropriate parameters ω , and in turn we consider ω as the new control variable. When including this partial feedback controls, the launch vehicle unperturbed dynamics writes as

$$f_{FB}(x, \omega) = f(x, u_{FB}(\bar{x}, \omega)). \quad (5.13)$$

Keeping the same dispersion term g as in (5.8), we obtain a new stochastic model for the dynamics,

$$dx_t = f_{FB}(x_t, \omega(t)) dt + g dW_t. \quad (5.14)$$

Returning to the physics of the problem, let us remark that the control u is provided by two actuators, one for the norm of u , the other one for its direction, so that

$$u = u_\rho \begin{pmatrix} \cos(u_\theta) \\ \sin(u_\theta) \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

where $u_\rho = \|u\|$ and $u_\theta \in [-\pi, \pi)$. Restricting ourselves to linear functions of \bar{x} , we write the feedback control as

$$u_{FB}(x, \omega) = (\rho + K_n \bar{x}) \begin{pmatrix} \cos(\theta + K_d \bar{x}) \\ \sin(\theta + K_d \bar{x}) \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

where $\rho, \theta \in \mathbb{R}$, $K_n, K_d \in \mathbb{R}^4$, so that $\omega = (\rho, \theta, K_n, K_d)$.

Note that the statistical linearization of the system defined by (5.14) writes as

$$\begin{cases} \dot{m} &= f_{FB}(m, \omega), \\ \dot{P} &= D_x f_{FB}(m, \omega) P + P D_x f_{FB}(m, \omega)^\top + g g^\top, \end{cases} \quad (5.17)$$

and we checked with the help of a formal calculation software that, unlike in the case of the statistical linearization of (5.8), this new system satisfies the sufficient condition for accessibility, i.e. that, denoting by f_{FB} the family of all vector fields $f_{FB}(\cdot, \omega)$, there holds

$$\dim \left(\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} f(x) \\ Df(x) + Df(x)^\top \end{pmatrix} : f \in \mathcal{I}(f_{FB}) \right\} \right) = 20 = n + \frac{n(n+1)}{2}, \quad (5.18)$$

for any x in \mathbb{R}^n , with $n = 5$.

5.3.2 | Adding actuator limits to the model

In the dynamics (5.14), the control of the actuators $u_{FB}(x_t, \omega(t))$ becomes a stochastic process, therefore imposing $u_{min} \leq \|u_{FB}\| \leq u_{max}$ is not possible. The same difficulties arise when imposing the orientation constraint (5.4) on u_{FB} . In turn, the physical limits of the actuators have to be taken into account differently in the model, and we propose two independent ways to handle them.

First approach: saturation modelling The first approach consists in encoding the physical limits of the actuators directly in the dynamic model. This can be achieved by using a saturation function in the model, which can be given as follows: for real numbers $a < b$, consider a function sat_a^b such that $\text{sat}_a^b(s) \in [a, b]$ for every $s \in \mathbb{R}$. Then, using the notation of the control introduced by (5.15), we replace the original unperturbed dynamics $f(x, u)$ by

$$f_{sat}(x, u) = f \left(x, \text{sat}_{u_{min}}^{u_{max}}(u_\rho) \begin{pmatrix} \cos(\text{sat}_{\frac{\pi}{2}-\theta_{max}}^{\frac{\pi}{2}+\theta_{max}}(u_\theta)) \\ \sin(\text{sat}_{\frac{\pi}{2}-\theta_{max}}^{\frac{\pi}{2}+\theta_{max}}(u_\theta)) \end{pmatrix} \right). \quad (5.19)$$

and then replace $f_{FB}(x, \omega) = f(x, u_{FB}(x, \omega))$ in (5.14) by

$$f_{FB}^{\text{sat}}(x, \omega) = f^{\text{sat}}(x, u_{FB}(x, \omega)).$$

Assuming that sat_a^b is a smooth function, we can compute the statistical linearization of the saturated feedback dynamics as

$$\begin{cases} \dot{m} &= f_{FB}^{\text{sat}}(m, \omega), \\ \dot{P} &= D_x f_{FB}^{\text{sat}}(m, \omega)P + PD_x f_{FB}^{\text{sat}}(m, \omega)^\top + g(m)g(m)^\top. \end{cases} \quad (5.20)$$

Following our previous discussion, we add the aforementioned control constraints to Problem 3, obtaining the following robust motion planning problem.

Problem 9 (Saturated closed-loop robust motion planning).

$$\min_{\omega, t_f} -m_\mu(t_f) + \text{tr}(Q_f P(t_f)) + \int_0^{t_f} \text{tr}(QP(t))dt$$

under the constraints

$$\begin{cases} (m, P)(\cdot) \text{ follows (5.20),} \\ (m, P)(0) = (m^0, P^0), \\ m(t_f) \in \mathcal{S}. \end{cases}$$

Remark 5.3.1. Note that the smoothness of sat_a^b is required in order to use statistical linearization. Different possibilities exist for the choice of a smooth saturation function, e.g., the hyperbolic tangent function or the exact (non smooth) saturation function defined by $\overline{\text{sat}}_a^b(s) = s$ if $s \in [a, b]$, $= a$ if $s \leq a$, and $= b$ if $s \geq b$ (we use this latter in our simulation). Note that this function can be written as

$$\overline{\text{sat}}_a^b(s) = \frac{b+a}{2} + \frac{|s-a| - |s-b|}{2}. \quad (5.21)$$

We then choose a small parameter ϵ and define sat_a^b by replacing the absolute values $|s|$ by $\sqrt{s^2 + \epsilon^2}$ in the expression above. The smaller ϵ is, the closer the approximation to the exact saturation function is (see Figure 5.1).

Second approach: chance constraints The second approach consists in requiring that the inequality constraints (5.3) and (5.4) be satisfied with a probability greater than a certain given threshold. Let us explain why such chance constraint is well-suited for the statistical linearization approach. Indeed, consider a chance constraint such as

$$\Pr[a^\top x_t \leq c] \geq p, \quad (5.22)$$

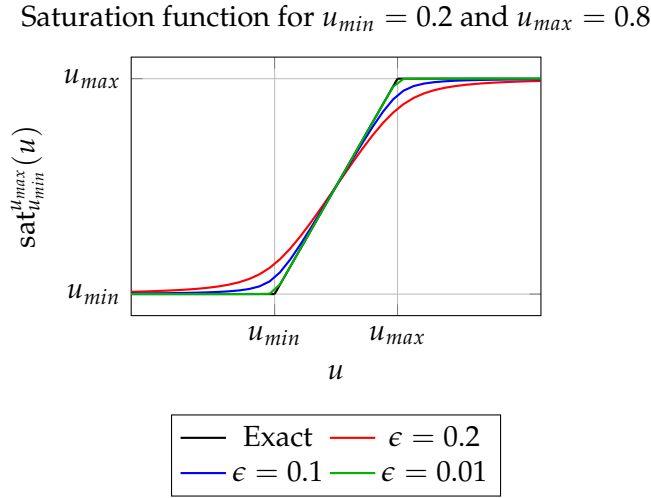


Figure 5.1 – The saturation function: exact value and smooth approximations

where $a \in \mathbb{R}^5$, $c \in \mathbb{R}$, and $p \in (0, 1)$ is the chosen probability threshold. In this formula the probability \Pr is supposed to be computed with respect to the probability distribution of the process x_t solution of (5.14). Now, the main principle underneath the method of statistical linearization consists of approximating the distribution of x_t by rather a normal distribution whose mean and covariance are the state variables $m(t)$ and $P(t)$ of the statistical linearization (5.17) (see Section 2.2 and [Berret and Jean, 2020a] for explanations on this approximation). For such a distribution the chance constraint (5.22) writes as

$$a^\top m + \Psi^{-1}(p) \sqrt{a^\top P a} \leq c, \quad (5.23)$$

where Ψ^{-1} is the inverse cumulative distribution function of the normal distribution. Thus, the chance constraint on the stochastic process is transformed into a state constraint in the setting of the statistical linearization.

Following this approach, we reformulate the norm constraint and the orientation constraint (5.4) on u_{FB} as the following chance constraints on the solutions of (5.14): for every $t \in [0, t_f]$, there holds

$$\Pr(\|u_{FB}(x_t, \omega)\| \in [u_{min}, u_{max}]) = \Pr((\rho + K_n \bar{x}_t) \in [u_{min}, u_{max}]) \geq p_n, \quad (5.24)$$

and

$$\Pr(\langle e_z, u_{FB}(x_t, \omega) \rangle \geq \cos(\theta_{max}) \|u_{FB}(x_t, \omega)\|) = \Pr((\theta + K_d \bar{x}_t) \in [\frac{\pi}{2} - \theta_{max}, \frac{\pi}{2} + \theta_{max}]) \geq p_d, \quad (5.25)$$

where p_n and p_d are the chosen thresholds.

Replacing these constraints by state constraints on the statistical linearization, we finally formulate the following robust motion planning problem.

Problem 10 (Chance constrained robust motion planning).

$$\min_{\omega, t_f} -m_\mu(t_f) + \text{tr}(Q_f P(t_f)) + \int_0^{t_f} \text{tr}(QP(t))dt$$

under the following constraints:

- $(m, P)(\cdot)$ is solution of (5.17) with $(m, P)(0) = (m^0, P^0)$;
- $\forall t \in [0, t_f]$ there holds

$$\begin{cases} u_{max} - (\rho(t) + K_n(t)\bar{m}(t)) \geq \Psi^{-1}(p) \sqrt{K_n(t)\bar{P}(t)K_n(t)^\top}, \\ (\rho(t) + K_n(t)\bar{m}(t)) - u_{min} \geq \Psi^{-1}(p) \sqrt{K_n(t)\bar{P}(t)K_n(t)^\top}, \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} (\frac{\pi}{2} + \theta_{max}) - (\theta(t) + K_d(t)\bar{m}(t)) \geq \Psi^{-1}(p_d) \sqrt{K_d(t)\bar{P}(t)K_d(t)^\top}, \\ (\theta(t) + K_d(t)\bar{m}(t)) - (\frac{\pi}{2} - \theta_{max}) \geq \Psi^{-1}(p_d) \sqrt{K_d(t)\bar{P}(t)K_d(t)^\top}, \end{cases}$$

where \bar{m} denotes the first four components of m and \bar{P} the matrix formed by the first four lines and columns of P ;

- $m(t_f) \in \mathcal{S}$.

Note that this formulation may be numerically expensive to handle because additional mixed constraints on both mean and covariance are considered.

Remark 5.3.2. The solution $\omega(\cdot)$ of the above problem guarantees that the constraints $u_{min} \leq \|u_{FB}\| \leq u_{max}$ is satisfied only in probability. Thus when using this control law $\omega(\cdot)$ for simulating the stochastic model (5.14), one has to model the system including saturation (such as the function f_{FB}^{sat} defined in the first approach) to force the physical limits of the actuator.

5.3.3 | State constraints

The state constraints given by (5.2) and (5.5) indicate that any violation of these constraints would result in a failure of the motion planning problem due to a significant change in the system dynamics. Indeed, the violation of (5.2) would force the control to zero, and assuming that the violation of (5.5) would cause a crash, then in that situation the entire dynamics of the vehicle would be zero. Therefore, we formulate the

motion planning problem to ensure that these constraints are satisfied with a chosen level of confidence. To do this, when considering hazards, we impose constraints on the mean with conservative deterministic margins. Considering the mass constraint (5.2), this leads to

$$m_\mu(t) > (1 + \eta)\mu_e \quad \forall t \in [0, t_f], \quad (5.26)$$

where η is a margin greater than the order of magnitude of the uncertainties on mass measurements. Considering the glide-slope constraint (5.5), this leads to

$$m_z - \tan(\gamma)|m_y| \geq 0. \quad (5.27)$$

The robustness of the satisfaction of the glide-slope-constraint is ensured by taking γ sufficiently high.

Remark 5.3.3. Chance constraint formulations could be used to include state constraints too. However, it would require to change the definition of the glide-slope constraint, by taking a constraint cone of vertex at lower altitude than the target, so that it does not conflict with the terminal constraint. A probability formulation for the mass constraint is also possible, but we prefer not to add a constraint on the mass variance since there is no feedback on the mass.

5.4 | Numerical results

This section presents some numerical results to illustrate solutions of Problems 8–10. Results are presented for two different parameter settings. The first setting is chosen to activate only the norm constraint on the control, while the second one involves all the constraints formulated in the complete problem. Calculations are based on a direct method which makes use of a time discretization of the considered optimal control problems, using a grid of 150 nodes and the CasADi toolbox [Andersson et al., 2019] (combined with the IPOPT solver). The computed open-loop optimal control is then used as an input to simulate the stochastic dynamic model with random uncertainties. When performing the simulations, actuator limits are forced by applying a saturation on the input control following the exact expression (5.21).

The initial mean state is given by (r^0, v^0, μ^0) . We assume that measurements of the initial position and velocity are quite accurate, while the initial mass is imprecisely known, hence the settings of P^0 . Along the trajectory, the dynamics are subject to perturbations due to aerodynamic effects, modeled by white noises of standard deviation depending on the mass $g = \frac{\sigma}{\mu}$. Moreover, the nonnegative symmetric matrices Q and

Q_f are fixed to the same value for the three considered problems in each setting. We do not penalize the mass covariance, since position and velocity are the quantities of interest to attain precision landing and ensure safety.

5.4.1 | Considering only thrust magnitude limits

First, we only consider the norm constraint $u_{min} \leq \|u_{FB}\| \leq u_{max}$ and we ignore (5.2), (5.4) and (5.5) (in the chosen settings they would not be activated). The parameters in the dynamics (5.1) and the simulation settings are specified in Table 5.1.

Property	Value	Property	Value
T	$1e6N$	g	$\text{diag}(0, 0, 100, 10, 0)N$
u_{min}	0.2	P^0	$\text{diag}(100m^2, 100m^2, 1m^2s^{-2}, 1m^2s^{-2}, 1600kg^2)$
u_{max}	0.8	Q	$\text{diag}(10, 50, 1, 10, 0).10^3$
q	$300kgs^{-1}$	Q_f	$\text{diag}(14, 20, 0.2, 4, 0).10^3$
g_0	$9.81ms^{-2}$		
r^0	$(1000, 4000)m$		
v^0	$(-75, -200)ms^{-1}$		
μ^0	$40000kg$		

Table 5.1 – Simulation settings

Figure 5.2 shows Monte-Carlo samples of trajectories solutions to dynamics (5.8) which are generated by the control solution of Problem 8. The right plot shows the norm $\|u\|$ of the optimal control, which takes a Max form. The left plot shows simulated trajectories. We clearly observe that the covariance in position increases with time although it is strongly penalized in the cost, which tends to confirm that there is a lack of accessibility using this formulation. The final state standard deviation is $(29.7m, 58.6m, 1.3ms^{-1}, 5.2ms^{-1})$, which is indeed greater than the initial covariance. Note that the final time t_f is 26.4s.

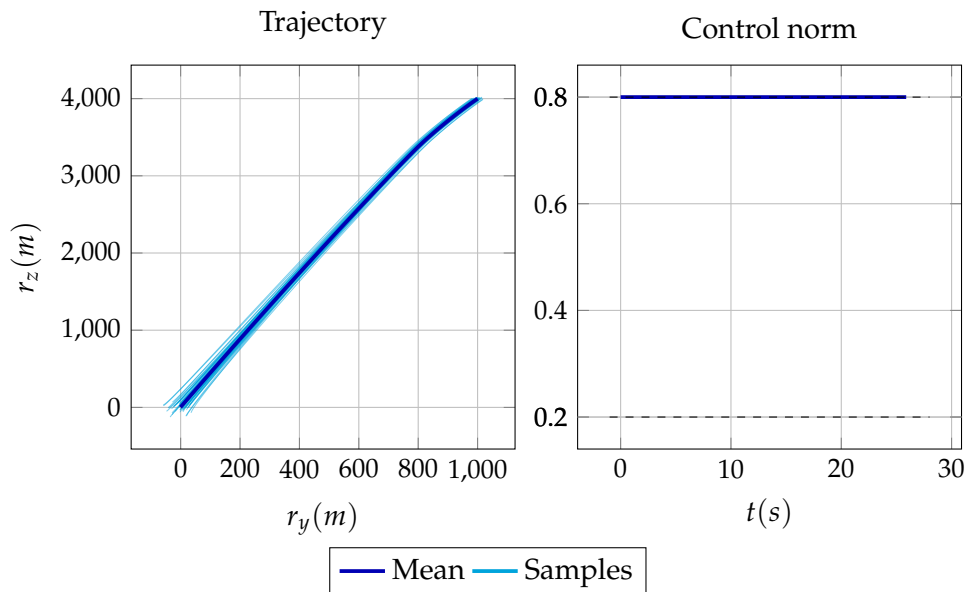


Figure 5.2 – Simulations of random trajectories minimizing the covariance, with a deterministic control

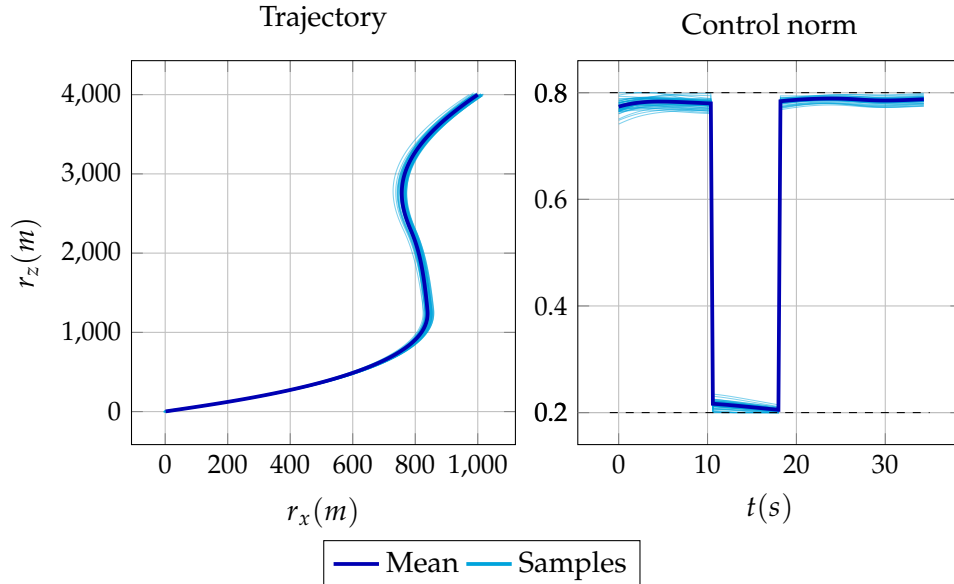


Figure 5.3 – Simulations of random trajectories minimizing the covariance, with feedback dynamics and chance constraints

Figure 5.3 shows trajectories solutions of dynamics (5.14), which are generated by the control solution of Problem 10 with $p = 0.99$. The feedback gains are penalized

within the cost to regularize the problem:

$$\min_{\omega, t_f} -m_\mu(t_f) + \text{tr}(Q_f P(t_f)) + \int_0^{t_f} \text{tr}(QP(t)) + 2\|K_n(t)\|^2 + \|K_d(t)\|^2 dt. \quad (5.28)$$

The shape of the control norm $\|u\|$ looks like a Max-Min-Max control to which margins would have been added with respect to the real actuator limits, u_{min} and u_{max} .

Figure 5.4 shows trajectories solutions of dynamics (5.14), which are generated by the control solution of Problem 9, with partial feedback and actuator limits treated as a saturation in the model. The smoothing parameter ϵ is set to 0.02. The cost is still expressed by (5.28). The final state standard deviation is $(4.7m, 4.7m, 0.4m/s, 0.7m/s)$, and its norm is even smaller than the norm of the solution which stems from the chance constraint formulation. The final time (34.7s) is very close to the one obtained with chance constraints. Importantly, we note that the controls obtained with the two feedback methods are very similar in shape and duration, except that the control obtained under smooth saturation approximation is smoother, yielding larger margins on the norm of the control $\|u\|$.

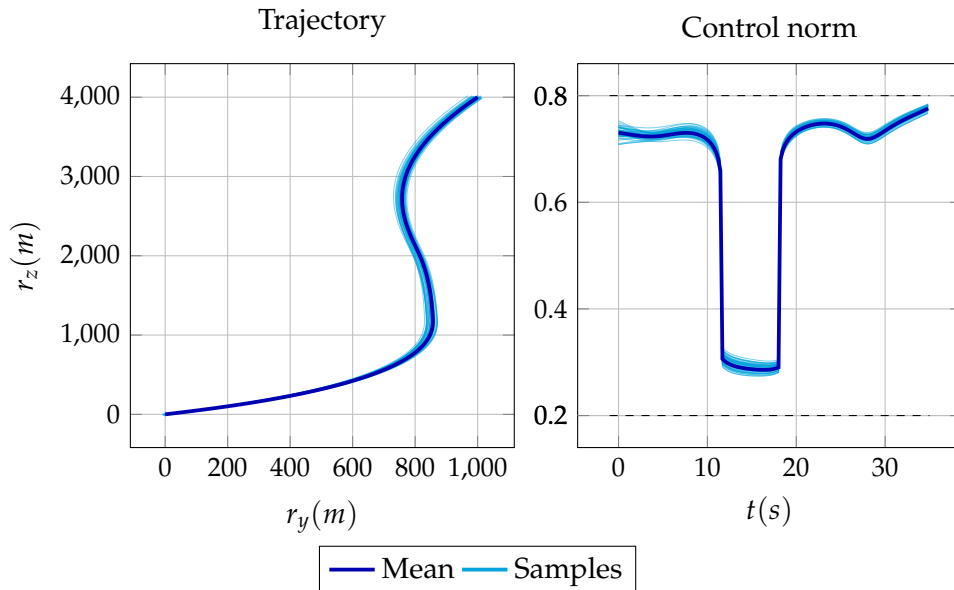


Figure 5.4 – Simulations of random trajectories minimizing the covariance, with smoothly saturated feedback dynamics

Finally, the fourth set of plots (Figure 5.5) shows the relative error stemming from statistical linearization. Those are obtained when simulating the saturated feedback linearized dynamics (5.20) using the control solution of Problem 9. Approximation of the true mean and covariance are obtained via Monte-Carlo estimates with 1000 sample

trajectories solutions to dynamics (5.14). Thus, since the errors on both mean and covariance remain bounded, we deduce that estimates of the statistical linearization are consistent.

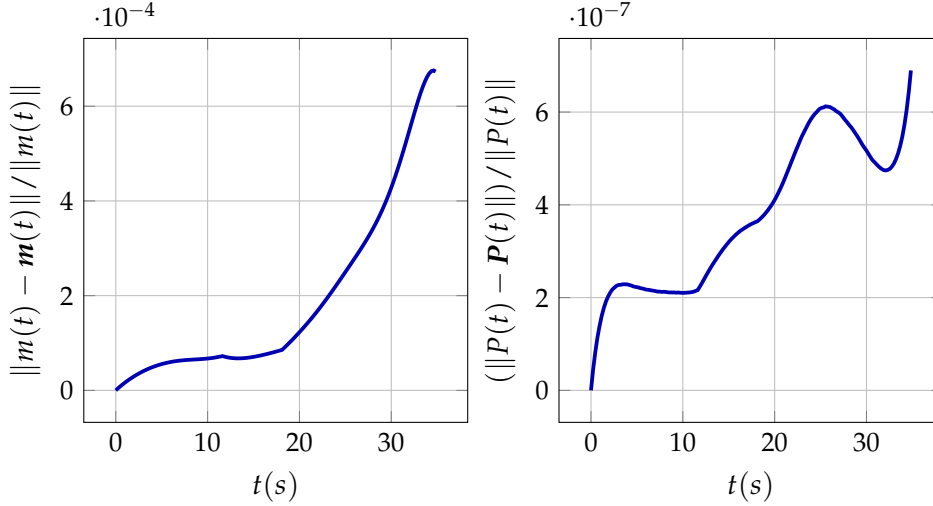


Figure 5.5 – Relative errors on statistical linearization estimates of the mean and the covariance

5.4.2 | Considering control limits and state constraints

Now, let us present solutions for the complete formulations of Problems 8–10, including control and state constraints represented by equations (5.3)–(5.5). The simulation settings are precised in Table 5.2. We fix the mass margin to a conservative value $\eta = 3.7\%$ such that $\eta\mu_e$ is superior to two times the initial mass dispersion. The deterministic fuel saving optimal solution for $Q = Q_f = 0$ is shown in red on the first set of plots for comparison.

Property	Value	Property	Value
T	16573N	g	diag(0, 0, 100, 10, 0)N
u_{min}	0.3	P^0	diag(200m ² , 200m ² , 10m ² s ⁻² , 10m ² s ⁻² , 361kg ²)
u_{max}	0.8	Q	diag(2., 2., 1., 1, 0).10 ²
q	8.4294kgs ⁻¹	Q_f	diag(1., 2., 0.1, 0.1, 0).10 ³
g_0	3.71ms ⁻²	μ_e	1350kg
r^0	(2000, 1500)m	θ_{max}	65°
v^0	(100, -75)ms ⁻¹	γ	5°
μ^0	1905kg		

Table 5.2 – Simulation settings

Fig. 5.6 shows in blue trajectories generated by the solution of Problem 8, which is depicted below, when considering an open-loop control. The norm of the control solution is almost always saturated, and the final time $t_f = 68.2s$ is smaller than in the deterministic case ($t_f = 78.9s$). However, the covariance stays high, with a final position and velocity standard deviation of $(233.9m, 259.5m, 3.2m/s, 5.0m/s)$ (see the previous subsection for explanation).

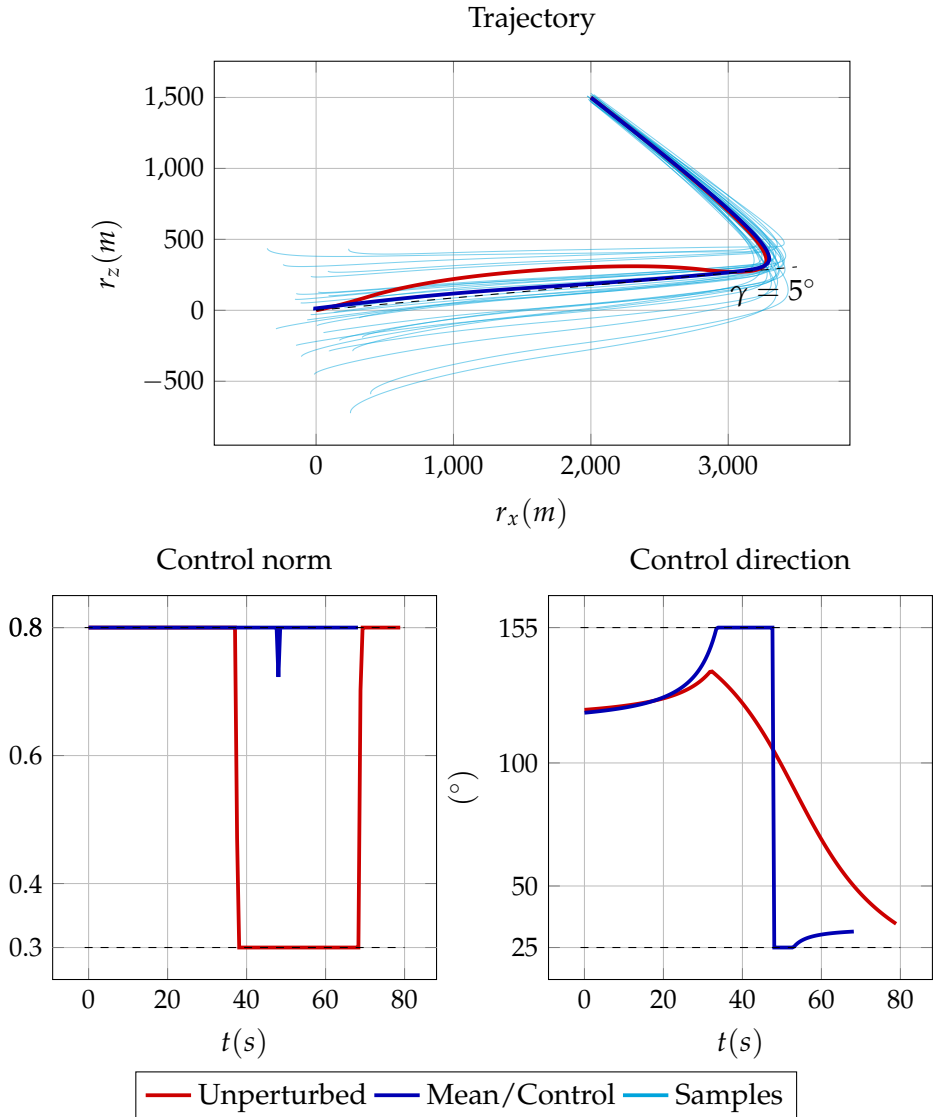


Figure 5.6 – Simulations of random trajectories with an open loop control

Fig. 5.7 shows trajectories generated by the control solution when considering feedback dynamics and using chance constraints ($p_n = p_d = 0.99$) to handle actuator limits.

Then, the cost function is now expressed by (5.28). The dispersion is controlled all along the trajectory, and the final state standard deviation is $(12.2m, 9.7m, 1.4m/s, 1.0m/s)$, and $t_f = 78.7s$.

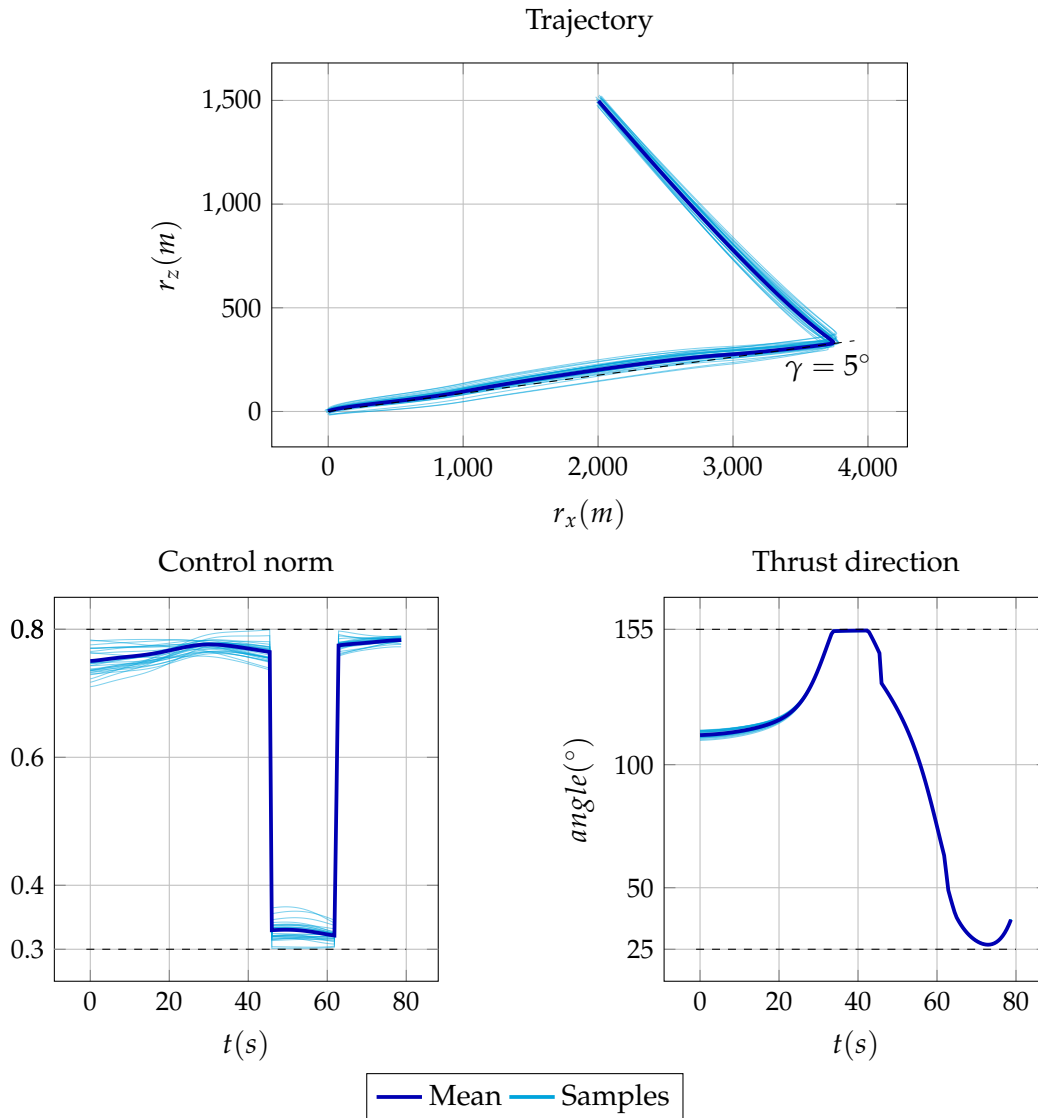


Figure 5.7 – Simulations of random trajectories minimizing the covariance, with actuator limits as chance constraints

Finally, Fig. 5.8 shows trajectories generated by the solution when considering feedback controls and a smooth modeling of actuator limits, with $\epsilon = 0.02$ for the norm saturation and $\epsilon = 0.0002$ for the direction. The cost is still expressed by (5.28). The final state standard deviation is $(12.8m, 9.9m, 1.2m/s, 0.9m/s)$ and the final time $t_f = 80.4s$.

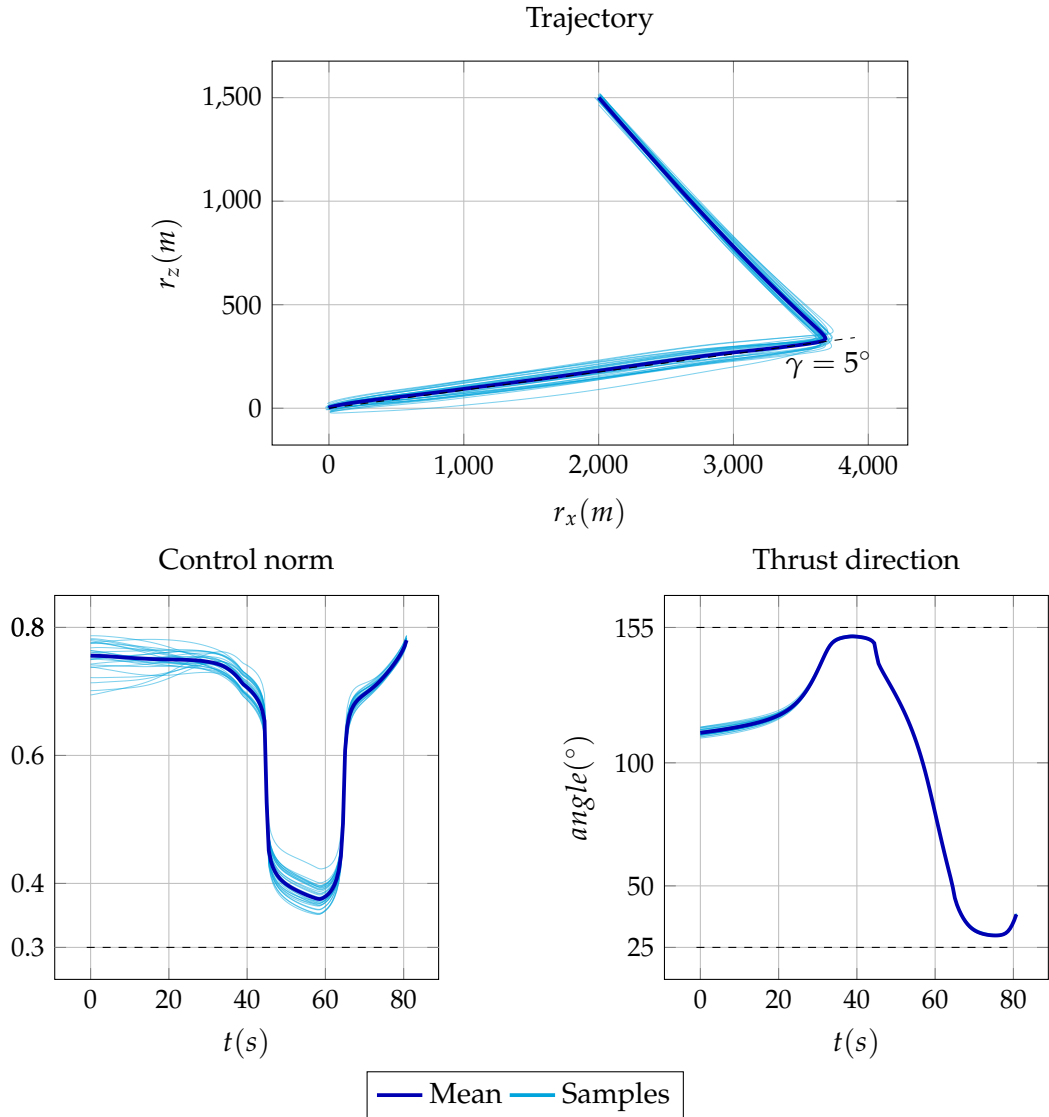


Figure 5.8 – Simulations of random trajectories minimizing the covariance, with a smooth modeling of actuator limits

5.4.3 | Conclusions

Based on the numerical results obtained in the two settings, we draw the following conclusions.

First, we observed that the final time obtained through the deterministic control of the open-loop dynamics was significantly smaller than that obtained through the stochastic controls of feedback dynamics. This can be explained as follows: in the absence of the accessibility property, reducing the final time is the only way to minimize

the final covariance. However, with partial feedback, the control can be kept closer to the fuel-optimal solution while still ensuring robustness. Second, we have remarked that the two stochastic controls are alike the deterministic solution, regarding the shape and the duration, except that there are margins between the extreme values of the control and the real values of actuator bounds u_{min} and u_{max} . By setting the probability parameters p_n and p_d to larger values in the second approach and the ϵ parameters in the third approach, we would obtain solutions with larger margins, which would ensure better robustness with respect to the control bounds. However, this may cause convergence issues, especially for the chance constraints approach. Here, the third solution takes larger margins from the bounds, while attaining similar final dispersions. Moreover, since the ϵ parameter in the third approach influences the smoothness of the solution, it can be adjusted so that the reference control fits realistic engine dynamics.

Finally, note that the smoothly saturated dynamics approach is adaptable outside the context of statistical linearization since it only requires estimations of the mean to compute the control margins, while in the chance constraints approach the margins depend on both mean and covariance estimations.

5.5 | Summary

This chapter has presented the application of the robust motion planning approach presented in Chapter 2 to the powered descent problem. The vehicle dynamics representation considers a feedback form of control, based on two crucial observations: first, limiting the covariance is essential to ensure the robustness of the solution, and second, it requires the control to depend on the state. Then, two ways to handle actuator saturations have been proposed, one by using chance constraints and the other using a tractable modeling of actuator saturations. In the next chapter, we propose an alternative approach to perform robust motion planning, which uses additional measurements available when the vehicle is close to the target.

Robust motion planning with detection area

Nous nous sommes intéressés jusqu'ici à la planification de la trajectoire d'atterrissage d'un véhicule spatial depuis des conditions initiales jusqu'à atteindre une cible. Nous supposons que les incertitudes impactaient la dynamique tout le long de la trajectoire. Dans ces conditions, la précision de l'atterrissage est limitée par l'intensité des aléas. Pour réaliser un atterrissage précis, il est donc nécessaire d'avoir accès à des mesures permettant de réduire l'effet de ces aléas. En réalité, des mesures précises peuvent être disponibles lorsque le lanceur se rapproche suffisamment de la cible, car il peut alors utiliser des capteurs plus précis, tels que le GPS différentiel. Ainsi, nous nous intéressons maintenant à un nouveau problème, à savoir la planification de la trajectoire du lanceur soumis à des aléas jusqu'à ce qu'il atteigne une zone spécifique, appelée *zone de détection*. Il existe déjà des méthodes de planification de trajectoire en plusieurs phases, notamment pour planifier la trajectoire d'atterrissage de véhicules spatiaux. Par exemple, [Brendel et al., 2019] propose une méthode de planification des phases successives de la phase de retour d'une stratégie Toss-back. De même, la méthode présentée dans [Wan et al., 2020] permet d'optimiser les trois phases d'un atterrissage planétaire et celle présentée dans [Banerjee and Padhi, 2020] d'optimiser les phases d'un atterrissage lunaire. De manière similaire, [Lu, 2018] propose de planifier une trajectoire d'atterrissage en minimisant la consommation de carburant jusqu'à atteindre une certaine altitude, et de planifier la fin de la trajectoire avec un contrôleur sous optimal en retour d'état afin d'atteindre la cible avec une attitude nulle. Enfin, [Ai et al., 2019] propose de résoudre un problème de consensus en plusieurs phases pour un problème d'interception. Notre méthode se différencie de celles existantes par la prise en compte d'aléas sur une partie de la trajectoire.

Dans ce chapitre, on présente une étude préliminaire du problème, effectuée en fin de thèse. Une présentation complète de la démarche nécessiterait davantage de développements, que je n'ai pas pu faire par manque de temps. Ceux-ci seront effectués dans des travaux futurs, et les principales pistes d'approfondissement sont détaillées au Chapitre 7.

6.1 | Formulation du problème

On étudie le problème de planification de la trajectoire d'un véhicule à l'atterrissage avec une contrainte d'atteindre une cible \mathcal{S} avec une probabilité supérieure à un seuil p . On suppose qu'il existe autour de la cible une zone \mathcal{Z} dans laquelle le véhicule a accès à des mesures précises, ce qui permet de contrôler le véhicule par un feedback prédéfini à partir d'un instant t_1 garantissant l'entrée dans la zone \mathcal{Z} . Ainsi, la dynamique du véhicule est en deux phases :

- de 0 à t_1 , le véhicule est soumis à des incertitudes. On modélise la dynamique par l'équation différentielle stochastique contrôlée (2.4), dont l'expression est rappelée ici :

$$dx_t = f(x_t, u(t))dt + g(x_t)dW_t \quad (6.1)$$

où x_0 est une variable aléatoire (fixée dans toute la suite).

- de t_1 à t_f , le véhicule a accès à des mesures de bonne qualité et est contrôlé en boucle fermée, donc l'impact des aléas sur la dynamique est négligeable. Le contrôleur est un feedback prédéfini, qui fournit le contrôle u . On remarque que u peut dépendre des conditions initiales de la seconde phase en t_1 . Ainsi, on modélise la dynamique par l'équation différentielle déterministe suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(x, x(t_1))). \quad (6.2)$$

Dans la suite, on notera le contrôleur de la seconde phase u_2 , tel que $u_2(x) = u(x, x(t_1))$.

On traite la planification comme un problème de contrôle optimal, dont la solution minimise un coût, exprimé comme la somme des coûts de la première et de la seconde phase. Avant de pouvoir formuler le problème de planification, plusieurs éléments sont à définir.

Définition de t_1 . Une première idée serait de définir t_1 comme le premier instant où l'état entre dans la zone \mathcal{Z} , la dynamique passant ensuite de (6.1) à (6.2). Dans ce cas, t_1

dépendrait de l'aléa, car cela serait un temps d'arrêt du processus x_t suivant (6.1). Dans ce travail, nous avons choisi de considérer t_1 comme un temps planifié a priori, donc qui ne dépend pas de l'aléa. Ce temps t_1 est considéré comme un paramètre d'optimisation (donc laissé libre) avec la contrainte que la probabilité d'être dans \mathcal{Z} à t_1 est supérieure à p , i.e.

$$Pr[x_{t_1} \in \mathcal{Z}] > p, \quad (6.3)$$

où x_t est la trajectoire de (6.1) associée à la loi de commande $u(\cdot)$.

Notons qu'on aimerait imposer de plus que t_1 soit un instant où on entre dans \mathcal{Z} avec une probabilité p , i.e. un minimum local des instants où la contrainte en probabilité est satisfaite le long de la trajectoire. Nous ne le faisons pas dans le cadre général, mais nous reviendrons sur cette contrainte supplémentaire dans la section 6.2.4.

Définition de \mathcal{Z} . La zone où des mesures précises sont disponibles est représentée par l'ensemble \mathcal{Z} . Il doit donc contenir la cible à atteindre \mathcal{S} . De plus, on souhaite garantir qu'une fois la zone atteinte il ne soit plus possible d'en ressortir, afin que l'équation (6.2) représente la dynamique du système pour tout t supérieur à t_1 . Pour cela, on fait l'hypothèse suivante.

Hypothèse 4. L'ensemble \mathcal{Z} est invariant par la dynamique représentée par (6.2).

D'après la définition de t_1 , on garantit que le véhicule atteint \mathcal{Z} avec une probabilité supérieure à p . L'invariance de \mathcal{Z} garantit donc que le véhicule atteint la cible avec une probabilité supérieure à p .

Choix du contrôleur de la seconde phase et de t_f . Le choix du contrôleur de la seconde phase est important, car il impacte \mathcal{Z} par l'Hypothèse 4. On n'imposera pas la forme du contrôleur dans cette section qui vise à donner une démarche générale, mais une comparaison entre différentes possibilités est effectuée dans la Section 6.2 dans le cadre de l'application au problème d'atterrissage. De plus, la définition de t_f fait partie de la conception du contrôleur. Étant donné que l'état initial de la seconde phase est une réalisation de la variable aléatoire x_{t_1} , le temps final t_f peut être infini (dans le cas d'un régulateur LQ à horizon infini par exemple), fonction de la variable aléatoire x_{t_1} (typiquement de sa moyenne et de sa covariance), libre et donc fonction de la réalisation de x_{t_1} , ou encore fixe (et donc identique pour tous les x_{t_1}).

Expression du coût. On cherchera à minimiser le coût total de la trajectoire, exprimé par une espérance

$$J = \min_{u, t_1} \mathbb{E}[C(u, t_1)]. \quad (6.4)$$

Typiquement ce coût C peut être la consommation de carburant le long de la trajectoire. Il est souvent pratique d'exprimer le coût d'une trajectoire comme la somme des contributions au coût de la première et de la seconde phase, notées respectivement C_1 et C_2 ,

$$C = C_1(u, t_1) + C_2(x_{t_1}). \quad (6.5)$$

La contribution de la seconde phase C_2 ne dépend que du point initial de la seconde phase, car la loi de commande est fixée après t_1 . La forme (6.5) suggère que l'on pourrait aussi choisir des coûts différents sur la première et la seconde phase, comme la consommation de carburant sur la première phase et l'erreur finale pour la seconde phase. Dans ce cas, il sera nécessaire de prendre des grandeurs comparables et donc introduire une pondération ou un terme de normalisation.

Ensuite, le coût (6.4) est une espérance calculée sur toutes les réalisations possibles de la trajectoire associée à u , qu'elles atteignent la cible ou non. En réalité, seules les réalisations atteignant la cible devraient être prises en compte dans le calcul, d'autant plus que u_2 , et donc C_2 , pourraient ne pas être définis pour les réalisations ratant la zone à l'instant t_1 . Pour écarter ces dernières, il faudrait donc exprimer le coût comme une espérance conditionnelle. Ce raffinement de la modélisation ne nous semble pas nécessaire ici car dans le calcul du coût, nous étendrons la définition du contrôleur u_2 hors de \mathcal{Z} de façon à ce que le coût des réalisations hors de \mathcal{Z} soit plus élevé. Ainsi les réalisations n'entrant pas dans \mathcal{Z} devraient avoir peu d'influence sur le problème d'optimisation, surtout quand le seuil p est proche de 1. Notons que la façon dont on a choisi t_1 , identique pour toutes les réalisations d'une trajectoire, est cruciale pour pouvoir faire cette approximation.

Finalement, le problème de planification peut être formulé de la manière suivante.

Problème 11 (Problème de planification stochastique en 2 phases).

$$\min_{u, t_1} \mathbb{E}[C_1(u, t_1)] + \mathbb{E}[C_2(x_{t_1})]$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} x_t, t \in [0, t_1], \text{ trajectoire de (6.1),} & (6.6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(t) \in \mathcal{U} \text{ presque partout sur } [0, t_1], & (6.7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Pr[x_{t_1} \in \mathcal{Z}] > p. & (6.8) \end{cases}$$

C'est un problème de contrôle optimal stochastique en boucle ouverte sur la première phase (en temps t_1 libre) avec un coût distribué le long de la trajectoire ($\mathbb{E}[C_1(u, t_1)]$), un coût final ($\mathbb{E}[C_2(x_{t_1})]$) et une contrainte finale en probabilité. Ce problème est donc

difficile à traiter a priori. Dans une démarche similaire à celle présentée au Chapitre 2, on traite le Problème 11 en utilisant la linéarisation statistique. Ainsi, on approxime la distribution de x_t par une distribution gaussienne de moyenne m et covariance P , solutions du système déterministe suivant

$$\begin{cases} \dot{m} = f(m, u), \\ \dot{P} = D_x f(m, u)P + PD_x f(m, u)^\top + g(m, u)g(m, u)^\top. \end{cases} \quad (6.9)$$

Soit $\phi(t)$ la loi gaussienne associée à $(m(t), P(t))$. De cette manière, on remplace le coût (6.4) par

$$C = \mathbb{E}^\phi[C_1(u, t_1)] + \mathbb{E}^\phi[C_2(x_{t_1})], \quad (6.10)$$

où les espérances de C_1 et C_2 sont calculées avec la densité gaussienne associée à (m, P) . De même, on approxime la contrainte (6.8) par $\Pr^\phi[x_{t_1} \in \mathcal{Z}] > p$, qui s'exprime en fonction de $m(t_1)$ et $P(t_1)$ comme détaillé dans la Section 5.3.2 du Chapitre 5. En supposant que la zone \mathcal{Z} est définie par n_c contraintes affines sur l'état,

$$\mathcal{Z} = \{x | a_i x \leq c_i \text{ pour } i = 1, \dots, n_c\}, \quad (6.11)$$

la contrainte (6.8) devient donc

$$a_i^\top m(t_1) + \Psi^{-1}(p) \sqrt{a_i^\top P(t_1) a_i} \leq c_i \quad (6.12)$$

pour $i = 1, \dots, n_c$.

Ainsi, on approxime la solution du Problème 11 par la solution du problème de contrôle optimal déterministe suivant.

Problème 12 (Problème de planification déterministe en 2 phases).

$$\min_{u, t_1} \mathbb{E}^\phi[C_1(u, t_1)] + \mathbb{E}^\phi[C_2(x_{t_1})]$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} (m, P)(\cdot) \text{ suit (6.9) } \forall t \in [0, t_1], \\ u(t) \in \mathcal{U} \text{ presque partout sur } [0, t_1], \\ a_i^\top m(t_1) + \Psi^{-1}(p) \sqrt{a_i^\top P(t_1) a_i} \leq c_i \text{ pour } i = 1, \dots, n_c. \end{cases}$$

C'est un problème de contrôle optimal standard en temps libre t_1 , avec un coût intégral et un coût final, ainsi qu'une contrainte sur l'état final.

6.2 | Application au lanceur

On applique la démarche générale présentée dans la section précédente au problème d'atterrissage de lanceur réutilisable. Par simplicité, on s'intéresse au problème à deux dimensions, c'est-à-dire que l'on exprime le vecteur d'état par $x = (r, v, \mu)$ où $r = (r_y, r_z) \in \mathbb{R}^2$ est la position, $v = (v_y, v_z) \in \mathbb{R}^2$ la vitesse et $\mu \in \mathbb{R}$ la masse. On cherchera à planifier la trajectoire de 0 à t_1 en minimisant la consommation de carburant. Ainsi, les coûts de la première et de la seconde phase s'expriment respectivement par

$$C_1 = \int_0^{t_1} \|u(t)\| dt \quad (6.13)$$

et C_2 par la consommation de carburant ou une grandeur comparable qu'il faudra préciser.

De plus, les actionneurs sont limités en amplitude et en direction, comme décrit en Section 4.2, ce qui définit l'ensemble des contrôles admissibles

$$\mathcal{U} = \left\{ u = (u_y, u_z) \in \mathbb{R}^2 : u_{min} \leq \|u\| \leq u_{max} \text{ et } u_z \geq |u_y| \cos(\theta_{max}) \right\}.$$

6.2.1 | Modélisation de la première phase

De 0 à t_1 , le véhicule est soumis à des incertitudes. Il a accès à des mesures de position et de vitesse, permettant de faire un retour d'état partiel. Cependant, ces mesures sont bruitées, ce qui doit être pris en compte dans la modélisation par l'équation différentielle stochastique (6.1). Comme expliqué en Section 5.3.1, on considère la variable de contrôle $\omega = (\rho, \theta, K_n, K_d)$ et on exprime le contrôle par retour d'état partiel par

$$u_{FB}(x, \omega) = (\rho + K_n \bar{x}) \begin{pmatrix} \cos(\theta + K_d \bar{x}) \\ \sin(\theta + K_d \bar{x}) \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

où $\rho, \theta \in \mathbb{R}$, $K_n, K_d \in \mathbb{R}^4$ et $\bar{x} = (r, v)$. On rappelle qu'avec cette modélisation en retour d'état partiel de la dynamique, la dynamique linéarisée statistiquement possède des propriétés d'accessibilité de la moyenne et de la covariance garantissant l'existence de solutions du problème 12. De plus, on modélise des limitations des actionneurs par des saturations dans la dynamique, de la même façon qu'à la Section 5.3.2. Ainsi, la dynamique non perturbée du lanceur est exprimée par $f_{FB}^{\text{sat}}(x, \omega) = f^{\text{sat}}(x, u_{FB}(x, \omega))$, où la dynamique saturée suit les équations suivantes

$$f^{\text{sat}}(x, u) = f \left(x, \text{sat}_{u_{min}}^{u_{max}}(u_\rho) \begin{pmatrix} \cos(\text{sat}_{\frac{\pi}{2}-\theta_{max}}^{\frac{\pi}{2}+\theta_{max}}(u_\theta)) \\ \sin(\text{sat}_{\frac{\pi}{2}-\theta_{max}}^{\frac{\pi}{2}+\theta_{max}}(u_\theta)) \end{pmatrix} \right), \quad (6.15)$$

où f est exprimé par :

$$f(x, u) = \begin{pmatrix} v \\ \frac{T}{\mu}u - \begin{pmatrix} 0 \\ g_0 \end{pmatrix} \\ -q\|u\| \end{pmatrix}. \quad (6.16)$$

6.2.2 | Choix du contrôleur de la seconde phase

Durant la seconde phase, le véhicule a accès à des mesures précises. On modélise sa dynamique en boucle fermée par une équation différentielle déterministe, que l'on obtient en remplaçant u dans (6.15) par un contrôle en boucle fermée $u_2(x)$:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} v \\ \frac{T}{\mu}u_2(x) - \begin{pmatrix} 0 \\ g_0 \end{pmatrix} \\ -q\|u_2(x)\| \end{pmatrix}. \quad (6.17)$$

De plus, u_2 doit permettre d'atteindre la cible \mathcal{S} en t_f , depuis des conditions initiales (r_1, v_1, μ_1) en t_1 . Plusieurs choix de contrôleurs en boucle fermée sont possibles pour résoudre le problème considéré. Par exemple, on peut utiliser un contrôleur LQ ou un contrôleur ZEM/ZEV (présenté en Section 1.2.2.2). Une autre option serait d'utiliser un MPC ou d'autres méthodes disponibles. Pour garantir l'Hypothèse 4, il serait pertinent d'utiliser un retour d'état associé à une fonction de Lyapunov.

Il convient de souligner que notre objectif n'est pas de traiter le problème spécifique lié à la deuxième phase, car le contrôleur u_2 est simplement une donnée du problème de planification. Notre démarche consiste à développer une méthode capable de s'adapter à différentes propositions concernant u_2 . En effet, pour résoudre le Problème 12, il n'est pas nécessaire d'avoir l'expression explicite de u_2 , mais seulement d'être en mesure de calculer le coût d'une trajectoire. Dans les simulations présentées dans la section 6.4, nous avons considéré un cas où le contrôleur u_2 était construit de manière à optimiser un certain coût, ce qui nous permet de le calculer en résolvant numériquement un problème de contrôle optimal.

6.2.3 | Définition de la zone \mathcal{Z}

En t_1 , l'état du véhicule doit atteindre une zone \mathcal{Z} , invariante par le contrôleur de la seconde phase d'après l'Hypothèse 4. Ainsi, on définit \mathcal{Z} par les contraintes suivantes.

1. La position r doit appartenir à une zone \mathcal{Z}_r , contenant \mathcal{S} . On définit cette zone comme limitée par une altitude maximale h_{max} et une contrainte de glide-slope

d'angle γ , i.e.

$$\mathcal{Z}_r \subseteq \{(r_y, r_z) \mid 0 \leq r_z \leq h_{max} \text{ et } r_z \geq \tan(\gamma)|r_y|\}. \quad (6.18)$$

2. On impose que la vitesse soit dirigée vers le sol et vers l'intérieur de la zone et que chaque composante du vecteur vitesse soit de norme inférieure à une vitesse maximale v_{max} . Le but de cette contrainte est d'assurer empiriquement que la zone \mathcal{Z} reste invariante par la dynamique de la seconde phase. Cela sera vérifié numériquement au cours des simulations.

Ainsi, on définit \mathcal{Z} de la manière suivante :

$$\mathcal{Z} = \{(r, v) \mid r \in \mathcal{Z}_r, -v_{max} \leq v_y \leq v_{max}, -v_{max} \leq v_z \leq 0 \text{ et } r_y v_y \leq 0\}. \quad (6.19)$$

On peut transformer $\Pr[x \in \mathcal{Z}] > p$ en des contraintes affines, de la manière suivante

$$\begin{cases} \Pr[x \in \mathcal{Z}^+] > \tau, \\ \Pr[x \in \mathcal{Z}^-] > p - \tau \text{ et } 0 \leq \tau \leq p; \end{cases} \quad (6.20)$$

où

$$\mathcal{Z}^+ = \{(r, v) \mid r \in \mathcal{Z}_r, -v_{max} \leq v_y \leq v_{max}, -v_{max} \leq v_z \leq 0, r_y \leq 0 \text{ et } v_y \geq 0\}; \quad (6.21)$$

et

$$\mathcal{Z}^- = \{(r, v) \mid r \in \mathcal{Z}_r, -v_{max} \leq v_y \leq v_{max}, -v_{max} \leq v_z \leq 0, r_y \geq 0 \text{ et } v_y \leq 0\}. \quad (6.22)$$

Pour simplifier, on approxime les contraintes sur v par des contraintes en moyenne, et celles sur r par la contrainte $\Pr^\phi[r \in \mathcal{Z}_r] > p$. Cette dernière est équivalente aux contraintes sur m et P (voir (5.23) en Section 5.3.2 du Chapitre 5) suivantes :

$$\begin{cases} m_{r_z} \geq \Psi^{-1}(p) \sqrt{P_{zz}}, \end{cases} \quad (6.23)$$

$$\begin{cases} m_{r_z} \leq h_{max} - \Psi^{-1}(p) \sqrt{P_{zz}}, \end{cases} \quad (6.24)$$

$$\begin{cases} m_{r_z} \geq \tan(\gamma) m_{r_y} + \Psi^{-1}(p) \sqrt{\tan(\gamma)^2 P_{yy} + P_{zz} - 2 \tan(\gamma) P_{yz}}, \end{cases} \quad (6.25)$$

$$\begin{cases} m_{r_z} \geq -\tan(\gamma) m_{r_y} + \Psi^{-1}(p) \sqrt{\tan(\gamma)^2 P_{yy} + P_{zz} + 2 \tan(\gamma) P_{yz}}. \end{cases} \quad (6.26)$$

Ainsi, la contrainte $\Pr^\phi[x_{t_1} \in \mathcal{Z}] > p$ est remplacée par $(m, P)(t_1) \in \mathcal{Z}_p$, où \mathcal{Z}_p est défini par

$$\mathcal{Z}_p = \left\{ (m, P) \text{ vérifiant (6.23), (6.24), (6.25) et (6.26), } -v_{max} \leq m_{v_y} \leq v_{max}, \right. \\ \left. -v_{max} \leq m_{v_z} \leq 0 \text{ et } m_{r_y} m_{v_y} \leq 0 \right\}. \quad (6.27)$$

Notons qu'en théorie il faudrait assurer qu'il reste suffisamment de carburant en t_1 pour effectuer la seconde phase. Cela pourrait être fait en ajoutant une contrainte sur la masse en t_1 . En pratique, on n'imposera pas cette contrainte et on vérifiera a posteriori qu'elle est satisfaite. En particulier, dans le cas où on minimise la consommation de masse sur les deux phases, on a la garantie que la contrainte sera satisfaite s'il existe une solution au Problème 12.

6.2.4 | Contrainte sur t_1

La contrainte $\Pr[x_{t_1} \in \mathcal{Z}] > p$ signifie que l'ellipse de confiance dessinée par m et P pour un p donné est entièrement dans \mathcal{Z} en t_1 . Comme nous l'avons mentionné dans la section 6.1, on veut imposer non seulement que la contrainte soit satisfaite en t_1 , mais également que t_1 soit un instant où on entre dans la zone \mathcal{Z} avec probabilité p . Ceci revient à demander que l'ellipse ait au moins un point de contact avec un des bords de \mathcal{Z} . En pratique pour l'implémentation on simplifiera cette contrainte en imposant que seul le haut de l'ellipse est en contact avec le bord supérieur de \mathcal{Z} au temps t_1 , c'est-à-dire que :

$$m_{r_z}(t_1) = h_{max} - \Psi^{-1}(p) \sqrt{P_{zz}(t_1)}. \quad (6.28)$$

En pratique, cette contrainte est justifiée si $P_{zz}(t_1)$ est faible, c'est-à-dire si toutes les trajectoires sont proches en t_1 .

6.3 | Estimation du coût de la seconde phase

La résolution du Problème 12 requiert de calculer $\mathbb{E}^\phi[C_2]$ et dépend de la manière dont on calcule le contrôleur u_2 . Pour le faire, nous proposons deux méthodes. La première consiste à choisir u_2 et C_2 à partir d'un problème LQ, la seconde à les déterminer numériquement.

6.3.1 | Expression exacte de la fonction valeur d'un problème LQ

La seconde phase étant courte, la masse du véhicule varie peu. Or, en supposant la masse constante, la dynamique (6.17) est control-affine. Considérons la variable de contrôle $a \in \mathbb{R}^2$ définie par

$$a = \frac{T}{\mu} u - \begin{pmatrix} 0 \\ g_0 \end{pmatrix}. \quad (6.29)$$

La dynamique du véhicule est alors linéaire et s'exprime par

$$\begin{cases} \dot{r} = v, \\ \dot{v} = a. \end{cases} \quad (6.30)$$

On note \bar{x} le vecteur d'état réduit, tel que $\bar{x} = (r, v)$.

Choisir un contrôle solution d'un problème LQ est efficace et fournit un retour d'état. On choisit dans ce cas de compter dans le Problème 12 le coût de la seconde phase comme le coût quadratique correspondant, avec un coefficient de normalisation :

$$J_{LQ} = \bar{x}(t_f)^\top Q_f \bar{x}(t_f) + \int_{t_1}^{t_f} a(t)^\top R a(t) dt, \quad (6.31)$$

où $R \in \mathbb{R}^2$ et $Q_f \in \mathbb{R}^4$ sont des matrices de pondération. Il existe une expression explicite de la fonction valeur en temps fini $t_f - t_1$ associée à la dynamique (6.30) et au coût (6.31) pour des conditions initiales en t_1 déterministes, qui est

$$C_{2,det}(\bar{x}(t_1)) = \bar{x}(t_1)^\top S(0) \bar{x}(t_1) \quad (6.32)$$

où S est la solution de l'équation différentielle de Riccati

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt}(t) + A(t)^\top S(t) + S(t)A(t) - S(t)B(t)R^{-1}B(t)^\top S(t) = 0, & t \in [0, t_f - t_1], \\ S(t_f - t_1) = Q_f. \end{cases} \quad (6.33)$$

On en déduit que pour $\bar{x}(t_1)$ stochastique de moyenne $\bar{m}(t_1)$ et de covariance $\bar{P}(t_1)$, l'expression de l'espérance de la fonction valeur est

$$\mathbb{E}^\phi[C_2(\bar{x}(t_1))] = \bar{m}(t_1)^\top S(0) \bar{m}(t_1) + \text{Tr}(S(0) \bar{P}(t_1)). \quad (6.34)$$

Cette expression explicite permet un calcul très efficace de l'espérance du coût de la seconde phase. Par contre, il repose sur l'hypothèse que la masse est constante ou varie peu et ne permet pas de prendre en compte dans le calcul des contraintes sur le contrôle ou l'état. De plus, cela nécessite d'imposer t_f , et de régler la normalisation de C_2 par rapport à la consommation de masse. Une discussion sur la manière de choisir t_f est faite en Section 6.3.3.

6.3.2 | Calcul par résolution numérique d'un problème de contrôle optimal

On se place maintenant dans un cas où u_2 n'est donné que numériquement en fonction de la condition initiale $x(t_1)$. Par conséquent, on doit calculer numériquement l'espérance $\mathbb{E}^\phi[C_2]$. Cela peut être fait par exemple grâce à une méthode de Monte-Carlo,

en calculant $C_2(x(t_1))$ pour des conditions initiales $x(t_1)$ générées aléatoirement suivant une distribution gaussienne de moyenne $m(t_1)$ et covariance $P(t_1)$. L'espérance de C_2 est alors estimée par la moyenne des coûts obtenus. Ce type de méthode a l'avantage d'être flexible, car il ne nécessite pas d'hypothèse sur la dynamique. Par contre, cette approche est lourde numériquement, car elle nécessite pour que l'estimation soit précise de calculer un nombre important de solutions.

On propose une autre approche, utilisant un filtre "unscented", présenté à l'origine dans [Julier et al., 1995]. On rappelle ici la démarche. Le principe est similaire à une méthode de Monte-Carlo, à la différence que les conditions initiales ne sont pas générées aléatoirement, mais choisies en fonction de $m(t_1)$ et $P(t_1)$ de manière à représenter correctement la distribution de $x(t_1)$. Par cette méthode, il n'est nécessaire de ne générer que $2n + 1$ solutions pour estimer $\mathbb{E}^\phi[C_2]$. Les conditions initiales sont appelées des *sigma points* et sont choisies de la manière suivante. Tout d'abord, le premier sigma point est placé à la moyenne, tel que

$$x_1^0 = m(t_1). \quad (6.35)$$

Ensuite, pour k allant de 1 à n ,

$$x_1^k = m(t_1) + \sqrt{\frac{n}{1-W^0}} P(t_1). \quad (6.36)$$

Enfin, pour k allant de $n + 1$ à $2n$,

$$x_1^k = m(t_1) - \sqrt{\frac{n}{1-W^0}} P(t_1). \quad (6.37)$$

Finalement, l'espérance du coût est calculée par l'expression suivante :

$$\mathbb{E}^\phi[C_2] = \sum_{k=0}^{2n} W^k C_{2,x_1^k} \quad (6.38)$$

où C_{2,x_1^k} est le coût de la seconde phase pour la condition initiale x_1^k , W^0 est fixé et $W^k = \frac{1-W^0}{2n}$ pour k allant de 1 à $2n$. L'approche par sigma points étant plus légère numériquement qu'une méthode de Monte-Carlo, c'est celle-ci qui est utilisée dans la section suivante pour générer les résultats numériques.

On utilisera cette méthode dans un cas où l'on suppose que u_2 est obtenu en résolvant un problème LQ dans lequel on ajoute les contraintes (ou un autre problème de contrôle optimal), puisqu'il n'est pas nécessaire d'avoir l'expression de u_2 en tant que retour d'état.

6.3.3 | Choix de t_f

Dans les deux méthodes présentées pour construire u_2 il est nécessaire de fixer la valeur de t_f en fonction de $m(t_1)$ et $P(t_1)$. Il n'existe pas de méthode universelle pour le faire, mais il existe des heuristiques. Par exemple, [Lu, 2018] propose un calcul approchant la durée de la seconde phase par celle d'un gravity turn, dont l'expression est explicite :

$$t_f = k \frac{\|m_v(t_1)\|}{2} \left(\frac{1 + \sin(\Theta(t_1))}{\alpha + g_0} + \frac{1 - \sin(\Theta(t_1))}{\alpha - g_0} \right), \quad (6.39)$$

où $\Theta(t_1)$ est l'angle initial de la trajectoire. Dans cette expression, α correspond à la valeur d'accélération permettant d'effectuer un gravity turn avec une vitesse et une altitude finales nulles, et est solution de l'équation suivante :

$$\alpha^2 + \left(\frac{\|m_v(t_1)\|^2 \sin(\Theta(t_1))}{2m_{r_z}(t_1)} \right) \alpha - \left(\frac{\|m_v(t_1)\|^2 g_0 (1 + \sin(\Theta(t_1)))^2}{4m_{r_z}(t_1)} + g_0^2 \right) = 0. \quad (6.40)$$

La valeur de t_f peut aussi être choisie à partir de valeurs numériques connues.

6.4 | Résultats numériques

Nous présentons dans cette section des résultats numériques illustrant la méthode en deux phases et utilisant les deux méthodes de calcul de $\mathbb{E}^\phi[C_2]$ présentées. Les résultats ont été obtenus avec les mêmes paramètres et conditions initiales qu'en Section 5.4.1, rappelés dans le Tableau 6.1. La zone \mathcal{Z} est définie avec une altitude maximale h_{max} de $600m$, une vitesse maximale v_{max} de $30m.s^{-1}$ et un angle de glide-slope γ de 45° . Elle est représentée en gris sur les figures. On a fixé p à 0.95 .

Property	Value	Property	Value
T	$1e6N$	h_{max}	$600m$
u_{min}	0.2	v_{max}	$30m.s^{-1}$
u_{max}	0.8	r^0	$(1000, 4000)m$
q	$300kg.s^{-1}$	v^0	$(-75, -200)ms^{-1}$
g_0	$9.81ms^{-2}$	μ^0	$40000kg$
θ_{max}	65°	g	$diag(0, 0, 100, 10, 0)N$
γ	45°	P^0	$diag(100m^2, 100m^2, 1m^2.s^{-2}, 1m^2.s^{-2}, 1600kg^2)$

TABLE 6.1 – Paramètres utilisés pour les résultats numériques

Nous avons d'abord calculé la solution du Problème 12 grâce à la bibliothèque IPOPT en Python. Afin de régulariser le problème, on pénalise les gains de retour d'état dans

le coût du Problème 12 :

$$\min_{u, t_1} \mathbb{E}^\phi[C_1(u, t_1)] + \mathbb{E}^\phi[C_2(x_{t_1})] + \int_0^{t_1} 2\|K_n(t)\|^2 + \|K_d(t)\|^2 dt. \quad (6.41)$$

La solution est utilisée pour générer des trajectoires suivant la dynamique (6.15) de 0 à t_1 , à partir de conditions initiales aléatoires en 0 de moyenne (r^0, v^0, μ^0) et covariance P^0 . Le contrôle et la trajectoire de la première phase sont tracés en bleu.

De t_1 à t_f , nous calculons les trajectoires comme les solutions du problème suivant.

Problème 13 (Calcul simplifié de la phase 2).

$$\min_a \int_{t_1}^{t_f} a(t)^\top a(t) dt + 200\bar{x}(t_f)^\top \bar{x}(t_f) \quad (6.42)$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} (r, v, \mu)(t_1) = (r_1, v_1, \mu_1), \\ \bar{x}(\cdot) \text{ suit (6.30) } \quad \forall t \in [t_1, t_f], \\ u_2(t) = (a(t) - g_a) \frac{\mu}{T} \in \mathcal{U} \text{ presque partout sur } [t_1, t_f]. \end{cases}$$

On rappelle que $\bar{x} = (r, v)$. De plus, t_f est fixé à une valeur calculée par (6.39) à partir des conditions initiales $(m, P)(t_1)$.

Le contrôle et les échantillons de trajectoires de la seconde phase sont tracés en rouge.

6.4.1 | Approximation de $\mathbb{E}^\phi[C_2]$ par le coût d'un problème LQ

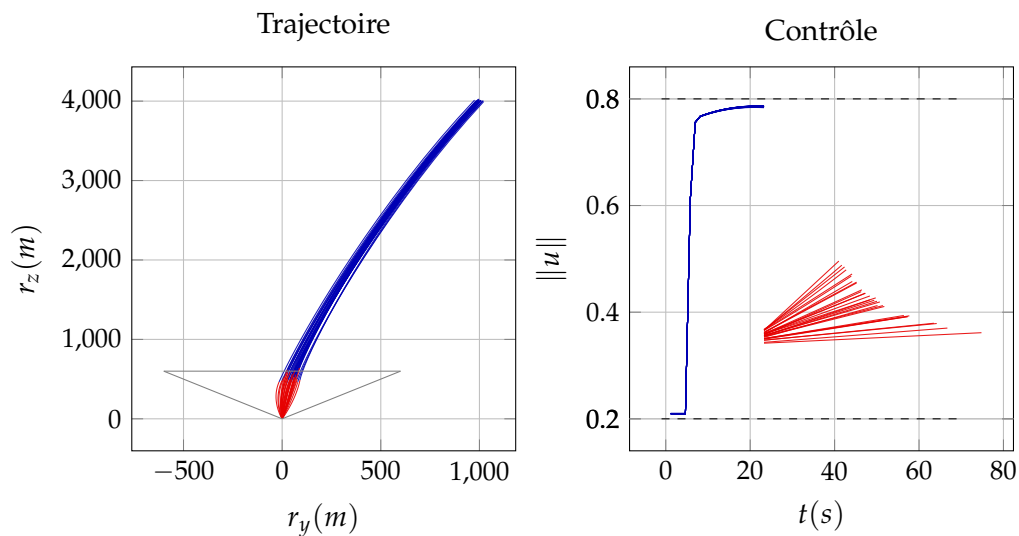


FIGURE 6.1 – Solution et échantillons de trajectoires

Tout d'abord, on calcule la solution du Problème 12 avec $\mathbb{E}^\phi[C_2]$ approximé par la fonction valeur du problème LQ (6.30)-(6.31). Elle a permis de générer les trajectoires tracées sur la Figure 6.1.

L'écart-type sur la position et la vitesse en t_1 est de $(26.5m, 41.2m, 1.14m.s^{-1}, 3.32m.s^{-1})$. Durant la seconde phase, les trajectoires se resserrent et l'écart-type atteint $(0.17m, 0.2m, 0.017m.s^{-1}, 0.034m.s^{-1})$ en t_f , ce qui est beaucoup plus faible que les valeurs obtenues en Section 5.4.1 sans zone de détection.

6.4.2 | Calcul numérique de $\mathbb{E}^\phi[C_2(m(t_1))]$

Dans cette section, nous présentons des résultats pour lesquels nous calculons numériquement le terme $\mathbb{E}^\phi[C_2]$ en prenant $m(t_1)$ comme condition initiale en t_1 . Pour le faire, nous avons calculé u_2 grâce à CasADi avec le solveur IPOPT, puis nous calculons la contribution C_2 comme la consommation de carburant pour le contrôleur u_2 obtenu. Les trajectoires générées par la solution obtenue sont tracées sur la Figure 6.2.

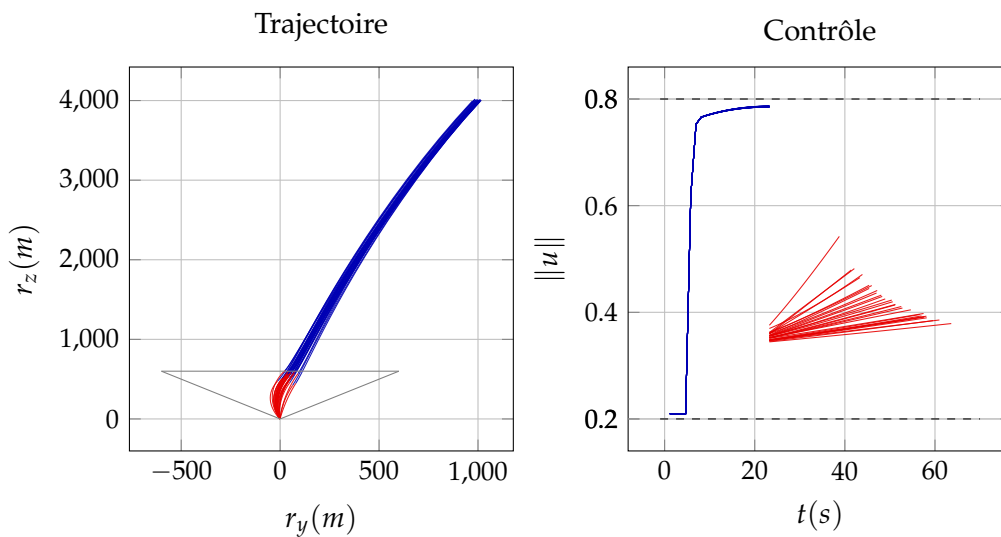


FIGURE 6.2 – Solution et échantillons de trajectoires

Les écart-types en t_1 et en t_f ont des valeurs proches de celles données à la section précédente. On voit que les trajectoires en t_1 sont plus éloignées de $r_y = 0$, et les trajectoires de la phase 2 moins verticales que celles de la Figure 6.1. C'est cohérent avec le fait qu'ici la contribution C_2 soit calculée pour minimiser la consommation de carburant, alors que précédemment elle minimisait le carré de l'accélération.

6.4.3 | Conclusions

On peut tirer les conclusions suivantes des résultats numériques obtenus.

Premièrement, la fin de la première phase est approximativement à la position $r_y = 0$. Cette trajectoire finale présente une forme plus verticale que par la méthode en une phase (Figure 5.4), ce qui est préférable car elle réduit la sensibilité aux aléas. De plus, en comparant les trajectoires des Figures 6.1 et 6.2, on voit que le choix du contrôleur utilisé pour le calcul du coût de la seconde phase a un impact sur la forme de la trajectoire obtenue.

Ensuite, durant la première phase, le contrôle des Figures 6.1 et 6.2 a une forme similaire à une forme Min-Max, mais est plus lisse et légèrement éloigné des bornes u_{min} et u_{max} . Cela vient de la modélisation des saturations dans la dynamique, puisque la forme est similaire à celle du contrôle de la Figure 5.4. De plus, le contrôle de la seconde phase est plus robuste que celui obtenu par la méthode en une seule phase. Il se situe loin des bornes u_{min} et u_{max} et ne correspond pas à une forme Max-Min-Max, ce qui offre une plus grande marge de manœuvre près du point d'atterrissage pour corriger les effets des perturbations. Par conséquent, la méthode en deux phases semble mieux adaptée à la conception de trajectoires mission, car elle rend possible la correction d'écarts importants dus à des perturbations, en particulier lorsqu'elles ne sont pas bien modélisées.

Perspectives

Suite aux contributions proposées, plusieurs pistes restent à explorer. Elles pourraient faire l'objet de futurs travaux.

7.1 | Justifications théoriques de la linéarisation statistique

Une première piste serait d'étendre les résultats théoriques de la Section 2.4 du Chapitre 2.

Plus particulièrement, il serait intéressant d'avoir des résultats sur les estimées d'erreur de la linéarisation statistique pour des termes de dispersion dépendant à la fois du contrôle et de l'état, donc hors de cadre de l'Hypothèse 1. En effet, cette hypothèse est restrictive sur le type d'incertitudes qui peut être considéré, et exclut principalement la modélisation d'incertitudes sur la dynamique du véhicule, par exemple les forces aérodynamiques ou l'effet de l'atmosphère. Néanmoins, cette étude ne pourrait pas être effectuée par la démarche présentée dans ce manuscrit parce que les estimées du type Gronwal utilisées dans la Section 2.4 ne permettraient plus de conclure.

Ensuite, l'Hypothèse 2, faite pour pouvoir justifier la faisabilité du Problème 3, est très restrictive. Tout d'abord, l'Hypothèse 2-2. restreint le résultat aux systèmes linéaires en le contrôle. Il serait intéressant d'étudier l'extension aux systèmes control-affine, ce à quoi nous ne sommes pas parvenus par la méthode présentée dans ce manuscrit, car elle est basée sur l'invariance des trajectoires par reparamétrisation du temps. De même, une étude pourrait être faite pour des termes de dispersion autres que constants (Hypothèse 2-4.).

7.2 | Contrôle optimal d'un véhicule spatial à l'atterrissage

L'étude du Chapitre 4 se limite à une modélisation simplifiée de la dynamique. Toutefois, la littérature suggère que les résultats pourraient être étendus à des modèles plus complexes prenant en compte la dynamique d'attitude, des résultats existant déjà dans le cas où la commande de couple est indépendante de la commande de poussée [Reynolds and Mesbahi, 2020], et pour des modèles de l'effet de l'atmosphère autres que constants, une étude complète ayant déjà été effectuée pour des mouvements en une dimension dans [Ménou et al., 2021]. Cependant, la preuve est déjà complexe dans le Chapitre 4 à cause des contraintes d'état, donc il ne semble pas raisonnable de complexifier encore avec une dynamique plus réaliste. L'esprit du Chapitre 4 était de vérifier que la structure Max-Min-Max perdurait quand on compliquait le modèle.

7.3 | Application de la méthode de planification de trajectoire robuste au lanceur

L'application de la méthode de planification de trajectoire robuste a été présentée pour un modèle de dynamique simple, considérant la poussée et l'effet d'une force de gravité constante, mais pas les forces de traînée et de portance, l'effet de l'atmosphère ou une force centrale de gravité par exemple. Ce choix est justifié dans un but de simplicité et pour lier les résultats du Chapitre 5 à ceux du Chapitre 4. Toutefois, la méthode ne requérant pas d'hypothèse sur la dynamique, elle pourrait être appliquée à des dynamiques plus complexes. Nous pourrions traiter ces applications, cela demanderait simplement d'y consacrer du temps et d'avoir un intérêt pour une application précise.

Ensuite, les résultats numériques ont été présentés dans le cas de bruits gaussiens dans un cadre adapté à la linéarisation statistique. Cependant, la méthode utilisée ne peut pas être appliquée directement aux bruits non gaussiens. Néanmoins, il serait possible d'aborder un cas particulier en ne considérant que des incertitudes sans diffusion, comme mentionné dans la remarque 3.3.2. Dans ce contexte, il serait intéressant d'explorer cette possibilité et d'évaluer les résultats obtenus.

7.4 | Méthode de planification en 2 phases

Par manque de temps, l'étude du Chapitre 6 a été faite avec plusieurs hypothèses simplificatrices, permettant d'illustrer le fonctionnement de la méthode de planification en deux phases. Plusieurs aspects pourraient donc être approfondis à la fois d'un point de vue numérique et théorique. Tout d'abord, nous avons choisi dans notre étude un contrôleur u_2 solution d'un problème de contrôle optimal particulier, mais il faudrait comparer ce choix à d'autres possibles comme un contrôleur en retour d'état non optimal par exemple. De même, dans le choix du contrôleur, nous avons choisi de fixer t_f selon une heuristique particulière, mais il est aussi possible de le prendre libre ou à horizon infini. De plus, nous avons défini la zone \mathcal{Z} avec des contraintes sur la vitesse et avons vérifié en simulation qu'elles permettaient de garantir l'invariance par la dynamique de la seconde phase. Nous pourrions construire une zone \mathcal{Z} avec le contrôleur u_2 de manière à avoir des garanties théoriques d'invariance, c'est-à-dire stable par la dynamique de la seconde phase, à l'aide par exemple de fonctions de Lyapunov.

Ensuite, nous n'avons pas utilisé d'espérance conditionnelle pour définir le coût du problème de planification, car cela n'était pas nécessaire avec la définition de t_1 et le choix du contrôleur de la seconde phase que nous avons pris, comme expliqué en Section 6.1. Toutefois, l'utilisation de l'espérance conditionnelle serait nécessaire dans le cas où t_1 serait défini comme un temps d'arrêt (instant d'entrée dans la zone).

Puis, nous avons proposé de résoudre le problème de planification avec zone de détection par une méthode utilisant la linéarisation statistique, dans la continuité des travaux de ce manuscrit. Cela n'est pas la seule méthode possible pour le faire. On pourrait par exemple résoudre le Problème 11 dans le cadre du contrôle optimal stochastique par une méthode adaptée, par une discrétisation complète du problème et une résolution par une méthode directe. Ce type d'approche serait probablement nécessaire pour traiter les cas cités ci-dessus avec t_1 variable aléatoire [Carpentier et al., 2011]. Cependant, cela soulève des questions importantes : est-il possible de résoudre le problème dans un temps raisonnable ? N'est-il pas de dimension trop élevée pour y parvenir ?

Enfin, des simplifications de modélisation ont été proposées pour le calcul numérique de la solution, mais la démarche proposée devrait fonctionner pour un problème plus complexe. En particulier, le calcul de $\mathbb{E}^\phi[C_2]$ a été fait en Section 6.4.2 en supposant que l'aléa ne portait que sur r_y afin de réduire le nombre de sigma points à générer, mais en réalité l'aléa porte sur tous les états. Ensuite, la méthode proposée n'exclut pas une modélisation plus complexe de la dynamique du véhicule. Enfin, il serait intéressant de produire des résultats numériques pour d'autres paramètres et différentes conditions initiales que ceux de la Section 6.4.2.

Bibliographie

- [Acikmese et al., 2013] Acikmese, B., Carson, J., and Blackmore, L. (2013). Lossless convexification of the soft landing optimal control problem with non-convex control bound and pointing constraints. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 21(6) :2104–2113.
- [Acikmese and Ploen, 2007] Acikmese, B. and Ploen, S. R. (2007). Convex programming approach to powered descent guidance for mars landing. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 30(5) :1353–1366.
- [Ai et al., 2019] Ai, X., Wang, L., Yu, J., and Shen, Y. (2019). Field-of-view constrained two-stage guidance law design for three-dimensional salvo attack of multiple missiles via an optimal control approach. *Aerospace Science and Technology*, 85 :334–346.
- [Andersson et al., 2019] Andersson, J. A. E., Gillis, J., Horn, G., Rawlings, J. B., and Diehl, M. (2019). CasADi – A software framework for nonlinear optimization and optimal control. *Mathematical Programming Computation*, 11(1) :1–36.
- [Athans, 1971] Athans, M. (1971). The role and use of the stochastic linear-quadratic-gaussian problem in control system design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-16(6).
- [Bakolas, 2016] Bakolas, E. (2016). Optimal covariance control for stochastic linear systems subject to integral quadratic state constraints. In *2016 American Control Conference*. IEEE.
- [Balesdent et al., 2011] Balesdent, M., Bérend, N., Dépincé, P., and Chriette, A. (2011). A survey of multidisciplinary design optimization methods in launch vehicle design. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 45(5) :619–642.
- [Banerjee and Padhi, 2020] Banerjee, A. and Padhi, R. (2020). Multi-phase MPSP guidance for lunar soft landing. *Transactions of the Indian National Academy of Engineering*, 5(1) :61–74.
- [Berntorp et al., 2017] Berntorp, K., Weiss, A., Danielson, C., Kolmanovsky, I. V., and Cairano, S. D. (2017). Automated driving : Safe motion planning using positively invariant sets. In *2017 IEEE 20th International*

- Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*. IEEE.
- [Berret and Jean, 2020a] Berret, B. and Jean, F. (2020a). Efficient Computation of Optimal Open-loop Controls for Stochastic Systems. *Automatica*, 115 :108874.
- [Berret and Jean, 2020b] Berret, B. and Jean, F. (2020b). Stochastic Optimal Open-loop Control as a Theory of Force and Impedance Planning via Muscle Co-contraction. *PLoS Computational Biology*, 16(2) :e1007414.
- [Bertin et al., 2021] Bertin, E., Hérissé, B., dit Sandretto, J. A., and Chapoutot, A. (2021). Spatio-temporal constrained zonotopes for validation of optimal control problems. In *2021 60th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 6708–6713.
- [Betts, 2020] Betts, J. (2020). *Practical Methods for Optimal Control Using Nonlinear Programming*. Advances in design and control. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [Betts, 1998] Betts, J. T. (1998). Survey of numerical methods for trajectory optimization. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 21(2) :193–207.
- [Blackmore, 2016] Blackmore, L. (2016). Autonomous precision landing of space rockets. *The Bridge*, 46(4) :15–20.
- [Blackmore et al., 2010] Blackmore, L., Açikmeşe, B., and Scharf, D. P. (2010). Minimum-landing-error powered-descent guidance for mars landing using convex optimization. *Journal of guidance, control, and dynamics*, 33(4) :1161–1171.
- [Blackmore et al., 2011] Blackmore, L., Ono, M., and Williams, B. C. (2011). Chance-constrained optimal path planning with obstacles. 27(6) :1080–1094.
- [Blanchini, 1999] Blanchini, F. (1999). Set invariance in control. *Automatica*, 35(11) :1747–1767.
- [Bonalli et al., 2020] Bonalli, R., Hérissé, B., and Trélat, E. (2020). Optimal Control of Endo-Atmospheric Launch Vehicle Systems : Geometric and Computational Issues. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 65 :2418–2433.
- [Bonalli et al., 2023] Bonalli, R., Leparoux, C., Hérissé, B., and Jean, F. (2023). On the accessibility and controllability of statistical linearization for stochastic control : Algebraic rank conditions and their genericity. *Mathematical Control and Related Fields*.
- [Braun and Manning, 2007] Braun, R. D. and Manning, R. M. (2007). Mars exploration entry, descent, and landing challenges. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 44(2) :310–323.
- [Brendel et al., 2019] Brendel, E., Hérissé, B., and Bourgeois, E. (2019). Optimal guidance for toss back concepts of Reusable Launch Vehicles. In *EUCASS 2019*, Madrid, Spain.

- [Busoniu et al., 2016] Busoniu, L., Pall, E., and Munos, R. (2016). Discounted near-optimal control of general continuous-action nonlinear systems using optimistic planning. In *2016 American Control Conference (ACC)*. IEEE.
- [Buşoniu et al., 2018] Buşoniu, L., Páll, E., and Munos, R. (2018). Continuous-action planning for discounted infinite-horizon nonlinear optimal control with lipschitz values. *Automatica*, 92 :100–108.
- [Caillau et al., 2022] Caillau, J.-B., Ferretti, R., Trélat, E., and Zidani, H. (2022). An algorithmic guide for finite-dimensional optimal control problems.
- [Carpentier et al., 2011] Carpentier, P., Chancelier, J.-P., and Cohen, G. (2011). Optimal control under probability constraint. Présentation au SADCO Workshop.
- [Censi et al., 2008] Censi, A., Calisi, D., Luca, A. D., and Oriolo, G. (2008). A bayesian framework for optimal motion planning with uncertainty. In *2008 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE.
- [Chen et al., 2015] Chen, Y., Georgiou, T., and Pavon, M. (2015). Optimal Control of the State Statistics for a Linear Stochastic System. In *IEEE Conference on Decision and Control*.
- [Chen et al., 2016] Chen, Z., Caillau, J.-B., and Chitour, Y. (2016). L1-minimization for mechanical systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 54(3) :1245–1265.
- [Cheng et al., 2019] Cheng, L., Wen, H., and Jin, D. (2019). Uncertain parameters analysis of powered-descent guidance based on chebyshev interval method. *Acta Astronautica*, 162 :581–588.
- [Cherry, 1964] Cherry, G. (1964). A general, explicit, optimizing guidance law for rocket-propelled spaceflight. In *Astrodynamics Guidance and Control Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- [Chitour et al., 2006] Chitour, Y., Jean, F., and Trélat, E. (2006). Genericity results for singular curves. *J. Differential Geometry*, 73(1).
- [Citron et al., 1964] Citron, S. J., Dunin, S. E., and Meissinger, H. F. (1964). A terminal guidance technique for lunar landing. *AIAA Journal*, 2(3) :503–509.
- [Culler and Fried, 1957] Culler, G. J. and Fried, B. D. (1957). Universal gravity turn trajectories. *Journal of Applied Physics*, 28(6) :672–676.
- [Danielson et al., 2020] Danielson, C., Berntorp, K., Weiss, A., and Cairano, S. D. (2020). Robust motion planning for uncertain systems with disturbances using the invariant-set motion planner. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 65(10) :4456–4463.

- [Darlington et al., 2000] Darlington, J., Pantelides, C., Rustem, B., and Tanyi, B. (2000). Decreasing the sensitivity of open-loop optimal solutions in decision making under uncertainty. *European Journal of Operational Research*, 121(2) :343–362.
- [D’Souza, 1997] D’Souza, C. (1997). An optimal guidance law for planetary landing. In *Guidance, Navigation, and Control Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- [Ebrahimi et al., 2008] Ebrahimi, B., Bahrami, M., and Roshanian, J. (2008). Optimal sliding-mode guidance with terminal velocity constraint for fixed-interval propulsive maneuvers. *Acta Astronautica*, 62(10-11) :556–562.
- [Elishakoff and Crandall, 2016] Elishakoff, I. and Crandall, S. H. (2016). Sixty years of stochastic linearization technique. *Meccanica*, 52(1-2) :299–305.
- [Frankowska, 2001] Frankowska, H. (2001). Value fonction in optimal control.
- [Ganet-Schoeller and Brunel, 2019] Ganet-Schoeller, M. and Brunel, A. (2019). Optimal guidance for 1st stage launcher recovery. In *21st IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace (ACA)*, volume 52, pages 532–537. Elsevier.
- [Gaudet et al., 2020] Gaudet, B., Linares, R., and Furfaro, R. (2020). Deep reinforcement learning for six degree-of-freedom planetary landing. *Advances in Space Research*, 65(7) :1723–1741.
- [Gazzola, Filippo and Marchini, Elsa M., 2021] Gazzola, Filippo and Marchini, Elsa M. (2021). A minimal time optimal control for a drone landing problem. *ESAIM : COCV*, 27 :99.
- [Geletu et al., 2013] Geletu, A., Klöppel, M., Zhang, H., and Li, P. (2013). Advances and applications of chance-constrained approaches to systems optimisation under uncertainty. 44 :1209–1232.
- [Greco et al., 2020] Greco, C., Campagnola, S., and Vasile, M. L. (2020). Robust space trajectory design using belief stochastic optimal control. In *AIAA Scitech 2020 Forum*. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- [Guo et al., 2013] Guo, Y., Hawkins, M., and Wie, B. (2013). Applications of generalized zero-effort-miss/zero-effort-velocity feedback guidance algorithm. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 36(3) :810–820.
- [Gustafsson and Hendeby, 2012] Gustafsson, F. and Hendeby, G. (2012). Some relations between extended and unscented kalman filters. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 60(2) :545–555.
- [Hartl et al., 1995] Hartl, R. F., Sethi, S. P., and Vickson, R. G. (1995). A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints. *SIAM Review*, 37(2) :181–218.

- [Hayner et al., 2023] Hayner, C. R., Buckner, S. C., Broyles, D., Madewell, E., Leung, K., and Acikmese, B. (2023). Halo : Hazard-aware landing optimization for autonomous systems.
- [Hirsch, 1994] Hirsch, M. W. (1994). *Differential Topology*. Springer.
- [Hotz and Skelton, 1985] Hotz, A. and Skelton, R. (1985). A Covariance Control Theory. In *IEEE Conference on Decision and Control*.
- [Huang et al., 2022] Huang, X., Xu, C., Hu, J., Li, M., Guo, M., Wang, X., Zhao, Y., Hua, B., and Wang, Y. (2022). Powered-descent landing GNC system design and flight results for tianwen-1 mission. *Astrodynamics*, 6(1) :3–16.
- [Isidori and Astolfi, 1992] Isidori, A. and Astolfi, A. (1992). Disturbance attenuation and $h/\text{sub infinity}$ /-control via measurement feedback in nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(9) :1283–1293.
- [Ito and ichiro Sakai, 2023] Ito, T. and ichiro Sakai, S. (2023). Optimal powered descent guidance under thrust pointing constraint. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 46(4) :695–708.
- [Ito and Sakai, 2020] Ito, T. and Sakai, S. (2020). Throttled explicit guidance for pinpoint landing under bounded thrust acceleration. *Acta Astronautica*, 176 :438–454.
- [Izzo et al., 2019] Izzo, D., Märten, M., and Pan, B. (2019). A survey on artificial intelligence trends in spacecraft guidance dynamics and control. *Astrodynamics*, 3(4) :287–299.
- [Johnson et al., 2018] Johnson, B. J., Braden, E. M., Sostaric, R. R., Cerimele, C. J., and Lu, P. (2018). Entry, descent, and landing performance for a mid-lift-to-drag ratio vehicle at mars. In *American Astronautical Society Guidance and Control Conference*.
- [Julier et al., 1995] Julier, S., Uhlmann, J., and Durrant-Whyte, H. (1995). A new approach for filtering nonlinear systems. In *Proceedings of 1995 American Control Conference - ACC'95*. American Autom Control Council.
- [Jurdjevic, 2012] Jurdjevic, V. (2012). *Geometric Control Theory*. Cambridge University Press.
- [Kappen, 2005] Kappen, H. J. (2005). Path integrals and symmetry breaking for optimal control theory. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2005(11) :P11011.
- [Klumpp, 1966] Klumpp, A. R. (1966). A manually retargeted automatic descent and landing system for lem. In *Guidance and Control Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- [Lambert et al., 2022] Lambert, M., Chewi, S., Bach, F., Bonnabel, S., and Rigollet, P. (2022). Variational inference via wasserstein gradient flows.

- [Lee and Markus, 1967] Lee, E. B. and Markus, L. (1967). *Foundations of optimal control theory*. Wiley.
- [Leitmann, 1959] Leitmann, G. (1959). On a class of variational problems in rocket flight. *Journal of the Aerospace Sciences*, 26(9) :586–591.
- [Leparoux et al., 2023a] Leparoux, C., Bonalli, R., Hérissé, B., and Jean, F. (2023a). Statistical Linearization for Robust Motion Planning. ArXiv preprint <https://arxiv.org/abs/2303.01288>.
- [Leparoux et al., 2022a] Leparoux, C., Hérissé, B., and Jean, F. (2022a). Optimal planetary landing with pointing and glide-slope constraints. In *2022 IEEE 61st Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 4357–4362.
- [Leparoux et al., 2022b] Leparoux, C., Hérissé, B., and Jean, F. (2022b). Structure of optimal control for planetary landing with control and state constraints. *ESAIM : COCV*, 28 :67.
- [Leparoux et al., 2023b] Leparoux, C., Hérissé, B., and Jean, F. (2023b). Robust Motion Planning of the Powered Descent of a Space Vehicle. Accepted at IFAC WC 2023.
- [Lew et al., 2020] Lew, T., Bonalli, R., and Pavone, M. (2020). Chance-constrained sequential convex programming for robust trajectory optimization. In *2020 European Control Conference (ECC)*, pages 1871–1878.
- [Lew et al., 2019] Lew, T., Lyck, F., and Muller, G. (2019). Chance-constrained optimal altitude control of a rocket.
- [Liu et al., 2021] Liu, X., Li, S., and Xin, M. (2021). Comparison of powered descent guidance laws for planetary pin-point landing. *Acta Astronautica*, 187 :101–114.
- [Lu, 2018] Lu, P. (2018). Propellant-optimal powered descent guidance. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 41(4) :813–826.
- [Ma et al., 2019] Ma, L., Wang, K., Xu, Z., Shao, Z., Song, Z., and Biegler, L. T. (2019). Multi-point powered descent guidance based on optimal sensitivity. *Aerospace Science and Technology*, 86 :465–477.
- [Maamria et al., 2020] Maamria, D., Chaplais, F., Sciarretta, A., and Petit, N. (2020). Impact of regular perturbations in input constrained optimal control problems. *Optimal Control Applications and Methods*, 41(4) :1321–1351.
- [Malyuta et al., 2022] Malyuta, D., Reynolds, T. P., Szmuk, M., Lew, T., Bonalli, R., Pavone, M., and Açıkmeşe, B. (2022). Convex optimization for trajectory generation : A tutorial on generating dynamically feasible trajectories reliably and efficiently. *IEEE Control Systems*, 42(5) :40–113.
- [Malyuta et al., 2021] Malyuta, D., Yu, Y., Elango, P., and Açıkmeşe, B. (2021). Advances in trajectory optimization for space vehicle control. *Annual Reviews in Control*, 52 :282–315.

- [Marigonda and Quincampoix, 2018] Marigonda, A. and Quincampoix, M. (2018). Mayer Control Problem with Probabilistic Uncertainty on Initial Positions. *Journal of Differential Equations*, 264 :3212–3252.
- [Meditch, 1964] Meditch, J. (1964). On the problem of optimal thrust programming for a lunar soft landing. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 9(4) :477–484.
- [Ménou, 2023] Ménou, H. (2023). *Hierarchical Emergency Guidance Optimization for reusable Tossback vehicle landing*. PhD thesis, Université Paris sciences et lettres.
- [Ménou et al., 2021] Ménou, H., Bourgeois, E., and Petit, N. (2021). Fuel-optimal program for atmospheric vertical powered landing. In *2021 60th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 6312–6319.
- [Miele, 1962] Miele, A. (1962). The calculus of variations in applied aerodynamics and flight mechanics. *Mathematics in science and engineering*, 5 :99–170.
- [Nagy and Braatz, 2004] Nagy, Z. K. and Braatz, R. D. (2004). Open-loop and Closed-loop Robust Optimal Control of Batch Processes using Distributional and Worst-case Analysis. *Journal of Process Control*, 14(4) :411–422.
- [Najson and Mease, 2005] Najson, F. and Mease, K. (2005). A computationally non-expensive guidance algorithm for fuel efficient soft landing. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- [Nakka and Chung, 2019] Nakka, Y. and Chung, S.-J. (2019). Trajectory optimization for chance-constrained nonlinear stochastic systems.
- [Nemirovski and Shapiro, 2006] Nemirovski, A. and Shapiro, A. (2006). Convex approximations of chance constrained programs. 17 :969–996.
- [Olivier et al., 2018] Olivier, A., Haberkorn, T., Trélat, E., Bourgeois, É., and Handschuh, D.-A. (2018). Redundancy implies robustness for bang-bang strategies. *Optimal Control Applications and Methods*, 40(1) :85–104.
- [Palanki et al., 1993] Palanki, S., Kravaris, C., and Wang, H. Y. (1993). Synthesis of state feedback laws for end-point optimization in batch processes. *Chemical Engineering Science*, 48(1) :135–152.
- [Pascucci et al., 2015] Pascucci, C. A., Bennani, S., and Bemporad, A. (2015). Model predictive control for powered descent guidance and control. In *2015 European Control Conference (ECC)*. IEEE.
- [Pepy et al., 2009] Pepy, R., Kieffer, M., and Walter, E. (2009). Reliable robust path planning with application to mobile robots. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 19(3) :413–424.
- [Ploen et al., 2006] Ploen, S., Acikmese, B., and Wolf, A. (2006). A comparison of powered descent guidance laws for mars pinpoint landing. In *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit*.

- [Plooij et al., 2015] Plooij, M., Wolfsdag, W., and Wisse, M. (2015). Robust feedforward control of robotic arms with friction model uncertainty. *Robotics and Autonomous Systems*, 70 :83–91.
- [Quadrelli et al., 2015] Quadrelli, M. B., Wood, L. J., Riedel, J. E., McHenry, M. C., Aung, M., Cangahuala, L. A., Volpe, R. A., Beauchamp, P. M., and Cutts, J. A. (2015). Guidance, navigation, and control technology assessment for future planetary science missions. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 38(7) :1165–1186.
- [Reynolds and Mesbahi, 2020] Reynolds, T. P. and Mesbahi, M. (2020). Optimal planar powered descent with independent thrust and torque. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 43(7) :1225–1231.
- [Ridderhof et al., 2021] Ridderhof, J., Pilipovsky, J., and Tsiotras, P. (2021). Chance-constrained covariance control for low-thrust minimum-fuel trajectory optimization. In *AIAA/AAS Astrodynamics Specialists Conference*.
- [Ridderhof and Tsiotras, 2019] Ridderhof, J. and Tsiotras, P. (2019). Minimum-fuel Powered Descent in the Presence of Random Disturbances. In *AIAA Scitech Forum*.
- [Ridderhof and Tsiotras, 2021] Ridderhof, J. and Tsiotras, P. (2021). Minimum-fuel closed-loop powered descent guidance with stochastically derived throttle margins. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 44(3) :537–547.
- [Robbins, 1965] Robbins, H. M. (1965). Optimality of intermediate-thrust arcs of rocket trajectories. *AIAA Journal*, 3(6) :1094–1098.
- [Roberts and Spanos, 2003] Roberts, J. B. and Spanos, P. D. (2003). *Random vibration and statistical linearization*. Courier Corporation.
- [Rustem, 1994] Rustem, B. (1994). Stochastic and Robust Control of Nonlinear Economic Systems. *European Journal of Operational Research*, 73(2) :304–318.
- [Sain, 1966] Sain, M. (1966). Control of Linear Systems According to the Minimal Variance Criterion – A New Approach to the Disturbance Problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11(1) :118–122.
- [Scharf et al., 2017] Scharf, D. P., Açıkmeşe, B., Dueri, D., Benito, J., and Casoliva, J. (2017). Implementation and experimental demonstration of onboard powered-descent guidance. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 40(2) :213–229.
- [Sethian, 1999] Sethian, J. A. (1999). *Level Set Methods and Fast Marching Methods*.
- [Seywald and Seywald, 2019] Seywald, K. and Seywald, H. (2019). Desensitized Optimal Control. In *AIAA Scitech Forum*.

- [Shen et al., 2010] Shen, H., Seywald, H., and Powell, R. W. (2010). Desensitizing the minimum-fuel powered descent for mars pinpoint landing. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 33(1) :108–115.
- [Singh et al., 2017] Singh, S., Majumdar, A., Slotine, J.-J., and Pavone, M. (2017). Robust online motion planning via contraction theory and convex optimization. In *2017 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. IEEE.
- [Socha, 2007] Socha, L. (2007). *Linearization methods for stochastic dynamic systems*, volume 730. Springer Science & Business Media.
- [Song et al., 2023] Song, Z., Zhao, D., and Theil, S. (2023). *Autonomous Trajectory Planning and Guidance Control for Launch Vehicles*. Springer Nature Singapore.
- [Song et al., 2020] Song, Z.-Y., Wang, C., Theil, S., Seelbinder, D., Sagliano, M., Liu, X.-F., and Shao, Z.-J. (2020). Survey of autonomous guidance methods for powered planetary landing. *Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering*, 21(5) :652–674.
- [Sontag, 1998] Sontag, E. D. (1998). *Mathematical Control Theory : Deterministic Finite Dimensional Systems*. Springer.
- [Sostaric and Rea, 2005] Sostaric, R. and Rea, J. (2005). Powered descent guidance methods for the moon and mars. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*.
- [Steinfeldt et al., 2010] Steinfeldt, B. A., Grant, M. J., Matz, D. A., Braun, R. D., and Barton, G. H. (2010). Guidance, navigation, and control system performance trades for mars pinpoint landing. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 47(1) :188–198.
- [Topcu et al., 2005] Topcu, U., Casoliva, J., and Mease, K. (2005). Fuel efficient powered descent guidance for mars landing. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*.
- [Topcu et al., 2007] Topcu, U., Casoliva, J., and Mease, K. D. (2007). Minimum-fuel powered descent for mars pinpoint landing. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 44(2) :324–331.
- [Trélat, 2012] Trélat, E. (2012). Optimal Control and Applications to Aerospace : some Results and Challenges. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 154 :713–758.
- [Vehí et al., 2002] Vehí, J., Ferrer, I., and Sainz, M. Á. (2002). A SURVEY OF APPLICATIONS OF INTERVAL ANALYSIS TO ROBUST CONTROL. In *15th IFAC World Congress*, volume 35, pages 389–400. Elsevier.
- [Vinter, 2010] Vinter, R. (2010). *Optimal Control*. Modern Birkhauser Classics. Springer.
- [Wan et al., 2020] Wan, C., Jing, G., Dai, R., and Rea, J. R. (2020). Fuel-optimal guidance for end-to-end

- human-mars entry, powered-descent, and landing mission. In *AIAA Scitech 2020 Forum*. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- [Wang et al., 2021] Wang, P., Guo, Y., Ma, G., and Wie, B. (2021). Two-phase zero-effort-miss/zero-effort-velocity guidance for mars landing. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 44(1) :75–87.
- [Wolf et al., 2006] Wolf, A., Tooley, J., Ploen, S., Ivanov, M., Acikmese, B., and Gromov, K. (2006). Performance trades for mars pinpoint landing. In *2006 IEEE Aerospace Conference*. IEEE.
- [Wolf et al., 2011] Wolf, A. A., Acikmese, B., Cheng, Y., Casoliva, J., Carson, J. M., and Ivanov, M. C. (2011). Toward improved landing precision on mars. In *2011 Aerospace Conference*.
- [Wong et al., 2006] Wong, E. C., Singh, G., and Masciarelli, J. P. (2006). Guidance and control design for hazard avoidance and safe landing on mars. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 43(2) :378–384.
- [Yang and Liu, 2021] Yang, R. and Liu, X. (2021). Gravity-turn-based precise landing guidance for reusable rockets. In *Lecture Notes in Electrical Engineering*, pages 3423–3434. Springer Singapore.
- [Yu et al., 2017] Yu, Z., Cui, P., and Crassidis, J. L. (2017). Design and optimization of navigation and guidance techniques for mars pinpoint landing : Review and prospect. *Progress in Aerospace Sciences*, 94 :82–94.
- [Zames, 1981] Zames, G. (1981). Feedback and optimal sensitivity : Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(2) :301–320.
- [Zhang et al., 2017] Zhang, Y., Guo, Y., Ma, G., and Zeng, T. (2017). Collision avoidance ZEM/ZEV optimal feedback guidance for powered descent phase of landing on mars. *Advances in Space Research*, 59(6) :1514–1525.
- [Ziemer, 2017] Ziemer, W. P. (2017). *Modern real analysis*, volume 278 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Cham, second edition. With contributions by Monica Torres.

Titre : Contrôle optimal sous incertitudes pour l'atterrissage vertical d'un premier étage de lanceur réutilisable

Mots clés : Planification de trajectoire, Contrôle optimal, Contrôle stochastique, Robustesse, Aérospatial.

Résumé :

Les travaux de cette thèse portent sur la planification de trajectoire pour l'atterrissage d'un lanceur réutilisable, c'est-à-dire que nous cherchons à calculer une trajectoire de référence et un contrôle, qui sera appliqué en boucle ouverte pour réaliser l'atterrissage ou servira de référence à un algorithme d'asservissement (suivi de trajectoire). Nous traitons la planification de trajectoire comme un problème de contrôle optimal, cherchant le contrôle permettant d'atteindre une cible en position et en vitesse en minimisant un coût, la consommation de carburant, et en respectant des contraintes sur le contrôle et l'état. Deux approches sont possibles pour résoudre ce problème. D'une part, une modélisation déterministe permet de bénéficier des nombreux outils efficaces du contrôle optimal déterministe, mais elle ne permet pas d'assurer la robustesse voulue. D'autre part, une modélisation stochastique permet la modélisation de nombreux aléas à l'origine d'incertitudes, mais les méthodes numériques de résolution de problèmes de contrôle optimal stochastique manquent d'efficacité, en particulier si la dimension du système est élevée. Notre travail considère et compare ces deux ap-

proches. Dans un premier temps, nous étudions la solution optimale du problème déterministe et mettons en avant la persistance de la structure Max-Min-Max du contrôle avec des contraintes fortes sur le contrôle et l'état. Cette structure étant particulièrement sensible aux perturbations, nous en déduisons qu'il est nécessaire de prendre en compte la présence d'aléas pour calculer une solution robuste. Dans un second temps, nous proposons une formulation d'une méthode générale de planification de trajectoire robuste sous-optimale, basée sur la minimisation de la covariance et utilisant la linéarisation statistique. De plus, nous avons mis en œuvre cette méthode sur le problème de l'atterrissage et obtenu des résultats numériques montrant son efficacité. Enfin, nous procurons des justifications théoriques de la pertinence de la méthode de planification de trajectoire robuste proposée. Ces justifications concernent l'accessibilité des systèmes linéarisés statistiquement, le calcul d'une estimée de l'erreur d'approximation par la linéarisation statistique et l'existence de solutions au problème de contrôle optimal formulé associé à une erreur d'approximation donnée.

Title : Optimal control under uncertainties for the vertical landing of the first stage of a reusable launch vehicle

Keywords : Motion planning, Optimal control, Stochastic control, Robustness, Aerospace.

Abstract :

The work of this thesis focuses on trajectory planning for the landing of a reusable launch vehicle. We are seeking to calculate a reference trajectory and a control that will be applied in open-loop to achieve the landing or will serve as a reference for a feedback control algorithm (trajectory tracking). We treat trajectory planning as an optimal control problem, aiming to find the control that reaches a target in position and velocity while minimizing a cost, fuel consumption, and satisfying control and state constraints. There are two possible approaches to solving this problem. On the one hand, a deterministic modeling approach allows us to leverage the efficient tools of deterministic optimal control, but it may not provide the desired robustness. On the other hand, a stochastic modeling approach allows for the representation of various uncertainties, but numerical methods for solving stochastic optimal control problems lack efficiency, especially in high-dimensional systems. Our work considers and compares these two approaches. Firstly, we

investigate the optimal solution of the deterministic problem and highlight the persistence of the Max-Min-Max control structure under strong control and state constraints. Since this structure is particularly sensitive to uncertainties, we conclude that it is necessary to consider the presence of uncertainties to compute a robust solution. Secondly, we propose a formulation for a general suboptimal robust trajectory planning method based on minimizing covariance and using statistical linearization. Furthermore, we have implemented this method for the landing problem and obtained numerical results demonstrating its effectiveness. Finally, we provide theoretical justifications for the relevance of the proposed robust trajectory planning method. These justifications pertain to the accessibility of statistically linearized systems, the calculation of approximation error estimates through statistical linearization, and the existence of solutions to the associated optimal control problem given a specific approximation error.