



HAL
open science

Contributions à l'étude des processus markoviens déterministes par morceaux et de décision ainsi qu'à l'étude de l'enquête Bourciez

Alexandre Genadot

► **To cite this version:**

Alexandre Genadot. Contributions à l'étude des processus markoviens déterministes par morceaux et de décision ainsi qu'à l'étude de l'enquête Bourciez. Probabilités [math.PR]. Université de Bordeaux, 2023. tel-04326411

HAL Id: tel-04326411

<https://hal.science/tel-04326411v1>

Submitted on 6 Dec 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Mémoire présenté à

l'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ÉCOLE DOCTORALE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par **Alexandre Génadot**

en vue de l'obtention du diplôme

d'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

**Contributions à l'étude des processus markoviens
déterministes par morceaux et de décision ainsi qu'à l'étude
de l'enquête Bourciez**

Soutenue le 25 Octobre 2023 devant le jury composé de :

Romain Azaïs Chargé de recherche, Inria	Examineur
François Dufour Professeur, Institut national polytechnique de Bordeaux	Garant
Myriam Bras Professeure, Université Toulouse - Jean Jaurès	Rapporteure
Eva Löcherbach Professeure, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne	Rapporteure
Tomás Prieto-Rumeau Catedrático, Universidad Nacional de Educación a Distancia	Rapporteur
Adrien Richou Maître de conférences, Université de Bordeaux	Examineur

Table des matières

Préface	3
Cheminement	4
Liste des publications	5
Remerciements	6
1 Processus markoviens déterministes par morceaux : moyennisation et estimation	8
1.1 Processus markoviens déterministes par morceaux	8
1.1.1 Notations	8
1.1.2 Définition et quelques propriétés essentielles	9
1.1.3 Exemples	10
1.2 Quelques résultats en moyennisation	15
1.2.1 Moyennisation	15
1.2.2 Une inégalité de concentration pour une classe de PDMP en dimension infinie et sans frontière	16
1.2.3 Moyennisation de PDMP en dimension finie avec frontières	20
1.3 Un résultat d'estimation	24
1.3.1 Statistiques pour les PDMP	24
1.3.2 Estimation des nombres moyen de croisements	25
1.4 Discussion	28
2 Processus de décision markoviens : existence de politiques optimales, programmation linéaire et adaptation	32
2.1 Processus de décision markoviens	32
2.1.1 Notations et définitions principales	32
2.1.2 Cadres d'étude pour les MDP	36
2.1.3 Exemples de MDP	37
2.2 Une approche par compacité-continuité pour le coût total pour des récompenses non bornées et des espaces d'actions non compacts	44
2.2.1 Quelques éléments de contexte	44
2.2.2 Where is my coat?	45
2.2.3 Un résultat	47
2.3 Programmation linéaire pour le coût total	48
2.3.1 Quelques éléments de contexte et problématique	48
2.3.2 Formulation convexe et chasse aux fantômes	50
2.4 Le principe d'estimation et de contrôle	53
2.4.1 Le modèle	53

2.4.2	Forte consistance des estimateurs de minimum de contraste	54
2.5	Discussion	56
3	Statistiques appliquées à la linguistique	58
3.1	L'enquête Bourciez : des données brutes à la base de données	58
3.1.1	L'enquête Bourciez	58
3.1.2	Construction de la base de données	60
3.1.3	Qu'essayons-nous de faire?	63
3.2	Quelques exemples descriptifs	63
3.2.1	Le verbe naître en gascon	64
3.2.2	La traduction de quand, conjonction de subordination	66
3.2.3	Le gascon via ses formes de l'imparfait et du prétérit	68
3.3	Un peu de dialectométrie	70
3.3.1	Un exemple de gradient : le traitement du F latin	71
3.3.2	Exemples de partitions	77
3.4	Discussion	85
	Bibliographie	88

Préface

Dans ce mémoire, nous présentons les objets que nous avons étudiés depuis la thèse, les problématiques liées ainsi que, pour chaque objet, certains résultats que nous avons obtenus. Ces résultats sont placés dans leurs contextes. Nous indiquons notamment quelles motivations sous-tendent ces études, les hypothèses considérées, les idées mathématiques sous-jacentes et les perspectives afférentes. Le lecteur qui souhaiterait connaître le détail des arguments qui sous-tendent les résultats présentés pourra consulter nos articles, dont la liste est fournie à la fin de cette courte introduction. Le présent mémoire n'est pas exhaustif des travaux effectués depuis la thèse, mais il en est représentatif. Nous en présentons maintenant brièvement les trois chapitres.

Cheminement

Le Chapitre 1 a pour sujet principal les processus de Markov déterministes par morceaux singulièrement perturbés. Ce sont deux théories, la théorie des perturbations singulières et la théorie des processus de Markov déterministes par morceaux, PDMP dans ce qui suit pour l'anglais *Piecewise-Deterministic Markov Process*, que nous avons découvertes en thèse sous la direction de Michèle Thieullen et dont nous avons donc poursuivi l'étude depuis notre arrivée à l'université de Bordeaux. Les deux principaux résultats présentés au Chapitre 1, en Sections 1.2.2 et 1.2.3, concernent en effet des inégalités de concentrations pour une classe de PDMP singulièrement perturbés ainsi que la moyennisation de PDMP en présence de frontières. C'est aussi en thèse qu'un certain goût pour les modèles de neurones, comme il apparaîtra aussi dans ce chapitre, nous a été transmis. Par ailleurs, nous nous sommes aussi ouvert, peu après la thèse, à la statistique des processus et plus particulièrement de ces mêmes processus déterministes par morceaux, grâce à la poursuite d'un certain compagnonnage mathématique avec Romain Azaïs, débuté en Licence sur les bancs de l'université de Montpellier. L'étude du nombre moyen de croisements d'une hypersurface par un processus déterministe par morceaux présentée en Section 1.3.2 est un des fruits de ce compagnonnage.

Le Chapitre 2 traite principalement de la résolution de processus de décision markoviens, MDP dans ce qui suit pour l'anglais *Markov Decision Process*, lorsque que le critère à optimiser est celui de la récompense totale. J'ai été initié à la théorie des MDP par François Dufour peu après mon arrivée à Bordeaux, lorsque François m'a fait l'honneur de me proposer de faire partie de l'équipe-projet Inria qu'il dirige. C'est de cette collaboration que sont issus les deux principaux résultats présentés au Chapitre 2, en Sections 2.2 et 2.3, et qui concernent d'une part une approche par compacité-continuité et d'autre part une approche par programmation convexe pour le problème de MDP considéré. Les collaborations industrielles ainsi que notre goût, entretenu à la fois par la recherche et l'enseignement, pour les statistiques, nous ont mené

à nous intéresser à la théorie des MDP partiellement observés, sujet sur lequel je co-encadre la thèse de Romain Namyst avec François, ainsi qu’au principe d’estimation et de contrôle, que je présenterai en Section 2.4.

Au Chapitre 3, nous passons des mathématiques appliquées aux applications des mathématiques, ce chapitre ayant pour objet le dépouillement, à l’aide d’outils statistiques, de la grande enquête linguistique menée par l’universitaire bordelais Édouard Bourciez dans les années 1890. Cette enquête a été portée à notre connaissance par David Escarpit, compagnon linguiste, qui s’interrogeait notamment sur les moyens quantitatifs à mettre en œuvre afin d’analyser les réponses à cette enquête. Ces réflexions nous ont mené à envisager la transcription complète de celle-ci comme expliqué en Section 3.1, ce qui a abouti notamment aux travaux présentés en Sections 3.2 et 3.3 et qui concernent l’exploitation, via des techniques de statistiques descriptives, de la base de donnée obtenue grâce aux textes transcrits. Cette exploitation cherche évidemment à répondre à un certain nombre de questions posées par les linguistes du groupe que nous avons constitué pour mener à bien notre projet. Ce travail a pour originalité de se faire en partie de façon collaborative, via un réseau social bien connu.

Liste des publications

Dans le texte, nous distinguerons les citations des articles auxquels nous avons participé grâce à la couleur orange. Les autres citations sont en vert.

Dans l’ordre, nous avons les travaux suivants, avec les numéros qui leur sont attribués dans la bibliographie, les travaux [74], [75], [8] et [27] étant issus de la thèse :

- [74] Alexandre Génadot et Michèle Thieullen. Averaging for a fully coupled piecewise-deterministic markov process in infinite dimensions. *Advances in Applied Probability*, 44(3):749–773, 2012.
- [75] Alexandre Génadot et Michèle Thieullen. Multiscale piecewise deterministic markov process in infinite dimension: central limit theorem and langevin approximation. *ESAIM: Probability and Statistics*, 18:541–569, 2014.
- [8] Romain Azaïs, Jean-Baptiste Bardet, Alexandre Génadot, Nathalie Krell et Pierre-André Zitt. Piecewise deterministic markov process—recent results. In *Esaim: Proceedings*, volume 44, pages 276–290. EDP Sciences, 2014.
- [27] Muriel Boulakia, Alexandre Génadot et Michèle Thieullen. Simulation of spdes for excitable media using finite elements. *Journal of Scientific Computing*, 65:171–195, 2015.
- [10] Romain Azaïs et Alexandre Génadot. Semi-parametric inference for the absorption features of a growth-fragmentation model. *Test*, 24(2):341–360, 2015.
- [70] Alexandre Génadot. Spatio-temporal averaging for a class of hybrid systems and application to conductance-based neuron models. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 22:178–190, 2016.
- [41] Bertrand Cloez, Renaud Dessalles, Alexandre Génadot, Florent Malrieu, Aline Marguet et Romain Yvinec. Probabilistic and piecewise deterministic models in biology. *ESAIM: Proceedings and Surveys*, 60:225–245, 2017.
- [12] Romain Azaïs et Alexandre Génadot. A new characterization of the jump rate for piecewise-deterministic markov processes with discrete transitions. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 47(8):1812–1829, 2018.

- [11] Romain Azaïs et Alexandre Génadot. Level crossings and absorption of an insurance model. *Statistical Inference for Piecewise-deterministic Markov Processes*, pages 65–105, 2018.
- [14] Romain Azaïs, Alexandre Génadot et Benoît Henry. Inference for conditioned galton-watson trees from their harris path. *ALEA: Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics*, 16(1):1–45, 2019.
- [13] Romain Azaïs et Alexandre Génadot. Estimation of the average number of continuous crossings for non-stationary non-diffusion processes. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 198:119–138, 2019.
- [71] Alexandre Génadot. Averaging for some simple constrained markov processes. *Probability and Mathematical Statistics*, 39(10):139–158, 2019.
- [52] François Dufour et Alexandre Génadot. On the expected total reward with unbounded returns for markov decision processes. *Applied Mathematics & Optimization*, 82:433–450, 2020
- [49] Arnaud Ducrot et Alexandre Génadot. Self-similar behavior of a nonlocal diffusion equation with time delay. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 52(3):2275–2312, 2020.
- [51] François Dufour et Alexandre Génadot. A convex programming approach for discrete-time markov decision processes under the expected total reward criterion. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 58(4):2535–2566, 2020.
- [72] Alexandre Génadot. Averaging for slow-fast piecewise deterministic markov processes with an attractive boundary. *Accepté pour publication dans la revue Advances in Applied Probability*, 2023.
- [73] Alexandre Génadot. Quelle méthodologie pour dépouiller l’enquête bourciez ? *Accepté pour publication dans la revue Lengas*, 2023.

Remerciements

L’écriture de ce mémoire d’habilitation me donne l’occasion d’exprimer ma gratitude envers un certain nombre de personnes, occasion que l’on ne saisit jamais assez.

Je souhaite en premier lieu remercier chaleureusement Myriam Bras, Eva Löcherbach et Tomás Prieto-Rumeau pour avoir accepté d’être les rapporteurs du présent mémoire et pour m’avoir fait l’honneur de juger mon travail.

Je remercie tout aussi chaleureusement Romain Azaïs, François Dufour et Adrien Richou d’avoir accepté de participer à mon jury.

Je tiens, plus largement, à remercier toutes celles et tous ceux qui ont contribué, directement ou indirectement, au bon déroulement de mes travaux, au sein de l’institut de mathématiques de Bordeaux et du centre Inria de l’université de Bordeaux. Merci en particulier aux membres de l’équipe-projet Inria Astral pour leur soutien scientifique et humain. Je suis en particulier très honoré d’avoir partagé le bureau de Huilong Zhang pendant de trop courtes années.

Je ne pourrais mener mes recherches sans être aussi enseignant. Je profite donc de l’occasion qui m’est donnée pour remercier les membres de l’unité de formation en mathématiques et interactions de l’université de Bordeaux et les équipes enseignantes de l’Enseirb-Matmecca.

Je souhaite en particulier exprimer ma reconnaissance à tous les membres de l'équipe pédagogique de la licence Miashs pour m'avoir si bien accueilli lorsque je suis arrivé à Bordeaux.

Merci à tous les étudiants dont j'ai eu la charge et dont la seule présence me donne souvent l'énergie de toujours tout recommencer.

Et *para recomenzar el infinito* avec nos petits bouts, merci à toi, *escriñh de lutz*.

Chapitre 1

Processus markoviens déterministes par morceaux : moyennisation et estimation

La plupart des processus stochastiques en temps continu consistent en une combinaison des trois ingrédients suivants :

- sauts stochastiques ;
- diffusion ;
- mouvements déterministes.

Dans notre recherche, nous nous concentrons principalement sur les modèles non-diffusifs. En d'autres termes, nous nous intéressons à des modèles stochastiques pour lesquels le caractère aléatoire n'apparaît qu'à des moments fixes ou aléatoires, c'est-à-dire ceux qui combinent des mouvements déterministes et des sauts aléatoires. Ces processus stochastiques sont appelés processus de Markov déterministes par morceaux (PDMP). Cette famille de modèles joue un rôle central dans les probabilités appliquées car elle constitue une bonne part des modèles dans de nombreux domaines de recherche et couvre une grande variété d'applications.

Après avoir présenté ces processus en Section 1.1 et donné deux exemples importants quant à la motivation de l'étude de certaines caractéristiques de ceux-ci, nous présenterons plus spécifiquement les résultats principaux des articles [70], [72] et [13] en Sections 1.2 et 1.3. Nous terminerons ce chapitre par une discussion en Section 1.4.

1.1 Processus markoviens déterministes par morceaux

Cette section est dévolue à la définition des PDMP en Section 1.1.2 et à la présentation de deux exemples importants en Section 1.1.3. Nous commençons par définir les notations employées dans ce chapitre et que nous conserverons au chapitre suivant.

1.1.1 Notations

Dans tout ce chapitre, nous utiliserons les notations suivantes.

- \mathbf{R} est l'ensemble des réels, \mathbf{R}_+ est l'ensemble des réels positifs et \mathbf{N} est l'ensemble des entiers positifs (0 compris). Pour $d \in \mathbf{N}^*$, on note λ_d la mesure de Lebesgue sur \mathbf{R}^d . Le point médian désigne le produit scalaire dans cet espace.

- \mathbf{X} représente un espace de Borel, c'est-à-dire un sous ensemble mesurable non vide d'un espace polonais. Cet espace est lui même muni de sa tribu de Borel, notée $\mathcal{B}(\mathbf{X})$. Lorsque cela a du sens, nous notons $B[0, C]$ la boule fermée de centre 0 et de rayon $C > 0$ dans un tel espace. L'ensemble des probabilités sur \mathbf{X} sera noté $\mathcal{P}(\mathbf{X})$, à ne pas confondre avec l'ensemble des parties, que l'on notera $\wp(\mathbf{X})$.
- \mathbf{Y} représente un espace au plus dénombrable, souvent fini.
- Les flots, ou semi-groupes, sont représentés par la lettre φ . Un flot φ est une application mesurable de $\mathbf{X} \times \mathbf{R}$ dans \mathbf{X} telle que

$$\forall x \in \mathbf{X}, (s, t) \in \mathbf{R}^2, \quad \varphi(x, 0) = x, \quad \varphi(\varphi(x, t), s) = \varphi(x, t + s).$$

Les flots considérés seront toujours continus en temps.

- Les intensités sont représentés par la lettre λ , ce sont des applications mesurables de \mathbf{X} dans \mathbf{R}_+^* . On demande en général aussi quelques conditions d'intégrabilité le long des flots, c'est-à-dire des conditions assurant l'existence locale des intégrales du type

$$\int_0^t \lambda(\varphi(x, s)) ds.$$

De plus, la fonction $t \mapsto \lambda(\varphi(x, t))$ sera toujours au moins càdlàg sur \mathbf{R}_+ et elle sera souvent continue.

- Les noyaux stochastiques, appelés aussi noyaux de Markov ou de transition, sont représentés par la lettre Q . Dans ce chapitre, Q est un noyau sur \mathbf{X} sachant \mathbf{X} , c'est-à-dire une application de \mathbf{X} dans $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ telle que pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$, l'application

$$x \mapsto Q(B|x)$$

est mesurable sur \mathbf{X} . Pour tout $x \in \mathbf{X}$, on suppose que $Q(\{x\}|x) = 0$ de telle sorte qu'une transition a bien lieu.

1.1.2 Définition et quelques propriétés essentielles

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et \mathbf{X} un espace de Borel. Un processus markovien déterministe par morceaux est un processus càdlàg $(X_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ à valeurs dans \mathbf{X} qui peut être construit de la façon suivante :

1. Au temps $t = 0$, X_0 est une variable aléatoire à valeurs dans l'intérieur de \mathbf{X} .
2. On note

$$t_{\partial\mathbf{X}}(X_0) = \inf\{t \in \mathbf{R}_+ ; \varphi(X_0, t) \in \partial\mathbf{X}\}$$

le temps d'atteinte de la frontière par le processus en suivant le flot $\varphi(X_0, \cdot)$. On considère alors S_1 le temps du premier saut dont la loi est donnée à travers la fonction de survie

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad \mathbf{P}(S_1 \geq t | X_0) = e^{-\int_0^t \lambda(\varphi(X_0, s)) ds} \mathbf{1}_{[0, t_{\partial\mathbf{X}}(X_0)[}(t),$$

où λ gouverne l'intensité des sauts stochastiques. Un saut a donc lieu soit lorsqu'une horloge stochastique gouvernée par λ sonne ou bien lorsque le processus atteint la frontière. On parle dans ce dernier cas de sauts forcés.

3. Au temps $T_1 = S_1$, le processus saute vers une nouvelle valeur X_{T_1} dont la loi est donnée par le noyau $Q(\cdot|\varphi(X_0, S_1))$.
4. Et ainsi de suite : supposons le processus construit jusqu'au n -ième temps de saut. On considère alors la variable aléatoire S_{n+1} dont la loi conditionnellement à X_{T_n} est donnée par

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad \mathbf{P}(S_{n+1} \geq t | X_{T_n}) = e^{-\int_0^t \lambda(\phi(X_{T_n}, s)) ds} \mathbf{1}_{[0, t_{\partial\mathbf{X}}(X_{T_n})](t)}.$$

Le $(n + 1)$ -ième temps de saut est alors donné par $T_{n+1} = T_n + S_{n+1}$, temps auquel une nouvelle valeur est sélectionnée selon le noyau $Q(\cdot|\varphi(X_{T_n}, S_{n+1}))$.

Cette construction reprend celle donnée dans [45, Section 2.4] et étendue aux espaces de Borel généraux dans [111, Section 2.1]. Pour que le processus soit bien défini, on demande en général que l'espérance du nombre de sauts sur un intervalle de temps fini soit finie, voir [45, Assumption 2.4.4]. Ceci est en particulier vrai lorsque la fonction de taux λ est bornée et qu'il n'y a pas de frontière ou bien lorsqu'elle est bornée et que les sauts à la frontière renvoient le processus suffisamment loin de celle-ci. On peut alors montrer que $(X_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ est un processus de Markov fort et homogène en temps, voir [45, Section 2.5] et [111, Theorem 2.1.1]. Il est aussi possible de caractériser complètement le générateur étendu de ce processus de Markov, voir [111, Theorem 2.2.1]. Nous expliciterons celui-ci lorsque nous présenterons certains résultats en Section 1.2.

Il est toujours bon de savoir construire un processus à partir d'une suite de variables aléatoires uniformes sur $[0, 1]$ et indépendantes. Cette construction sur le cube de Hilbert est aussi donnée dans les références [45] et [111]. Lorsque nous présenterons des simulations de ces processus, c'est bien sur cette construction que nous nous appuierons et plus particulièrement sur les méthodes exposées dans [112].

Comme il apparaîtra dans les exemples ci-dessous, nous avons un goût particulier pour les PDMP lorsque ceux-ci se décrivent grâce à l'adjonction d'une variable de modulation. Dans ce cadre, le processus est à valeurs dans $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ où \mathbf{Y} est un espace au plus dénombrable. La construction explicitée ci-dessus est toujours valable à ceci près que le flot φ se décompose de telle sorte que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y}, \quad \varphi((x, y), t) = (\varphi_y(x, t), y)$$

où pour tout $(x, y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, $\varphi_y(x, \cdot)$ est un flot sur \mathbf{X} . Lorsque $\mathbf{X} = \mathbf{R}^d$ pour un certain entier d non nul, on parle de variable euclidienne pour la composante à valeurs dans \mathbf{X} et de mode pour celle à valeurs dans \mathbf{Y} . Le PDMP associé $(X_t, Y_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ à valeurs dans $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ est tel que sa seconde composante est constante par morceaux. Une trajectoire typique est présentée en Figure 1.1.

1.1.3 Exemples

Nous allons donner deux exemples. Tous les deux sont des modèles de génération d'un potentiel d'action dans un neurone. Le hasard a fait que nous avons pu parler un peu longuement du pendant déterministe de ce type de modèles aux étudiants de Licence Miashs lors de l'année universitaire 2022-2023. Ces deux exemples nous serviront d'illustration dans la présentation de nos résultats.

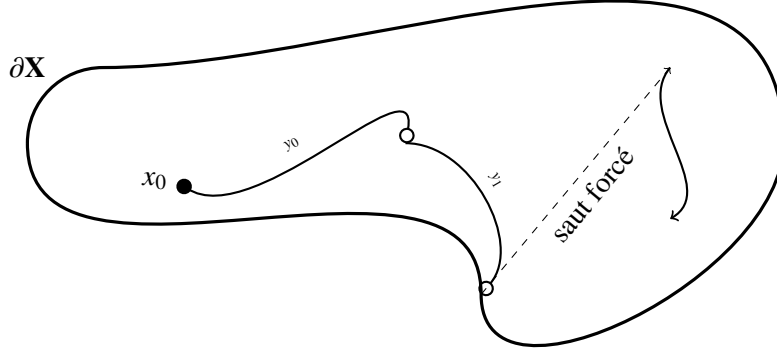


FIGURE 1.1 – Trajectoire typique de la variable euclidienne pour un PDMP avec modes. La variable euclidienne commence en x_0 par suivre le flot $\varphi_{y_0}(x_0, \cdot)$. À un instant aléatoire T_1 (représenté par un cercle), la variable modale saute vers l'état y_1 : la variable euclidienne suit alors le flot $\varphi_{y_1}(\varphi_{y_0}(x_0, T_1), \cdot)$ jusqu'à son contact avec la frontière où un saut forcé a lieu.

Modèle de neurones hybrides basés sur les conductances.

Soit $\mathbf{Y} = E^N$ où E est un ensemble fini et $N \in \mathbf{N}^*$. Soit aussi $\mathbf{X} = H_0^1([0, 1])$, l'espace de Sobolev correspondant à la complétion de l'espace des fonctions infiniment dérivables par rapport à la norme

$$f \in C^\infty([0, 1], \mathbf{R}) \mapsto \sqrt{\int_0^1 f(x)^2 + f'(x)^2 dx}.$$

C'est aussi un espace de Hilbert. Pour $x \in \mathbf{X}$ et $y \in \mathbf{Y}$, on considère le flot $\varphi_y(x, \cdot)$ associé à l'équation aux dérivées partielles

$$\partial_t x_t = \Delta x_t + \frac{1}{N} \sum_{\xi \in E} \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{\xi\}}(y(i)) (v_\xi - x_t) \delta_{\frac{i}{N+1}} \quad (1.1)$$

munie des conditions aux limites de Dirichlet et où, pour $\xi \in E$, c_ξ et v_ξ sont des constantes. La fonction de taux est donnée pour $(x, y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ par

$$\lambda(x, y) = \sum_{i=1}^N \sum_{\xi \in E \setminus \{y(i)\}} \alpha_{y(i)\xi}(x(i/(N+1))),$$

où les $\alpha_{\xi\zeta}$ sont des fonctions bornées positives ou nulles telles que pour tout $a \in \mathbf{R}$, $(\alpha_{\xi\zeta}(a))_{(\xi,\zeta) \in E^2}$ est une matrice de transition sur E . Le noyau de transition est quant à lui donné, pour $(x, y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, par

$$Q(dx, dy|x, y) = \delta_x(dx) \frac{1}{\lambda(x, y)} \sum_{i=1}^N \sum_{\xi \in E \setminus \{y(i)\}} \alpha_{y(i)\xi}(x(i/(N+1))) \delta_{y(i) \rightarrow \xi}(dy),$$

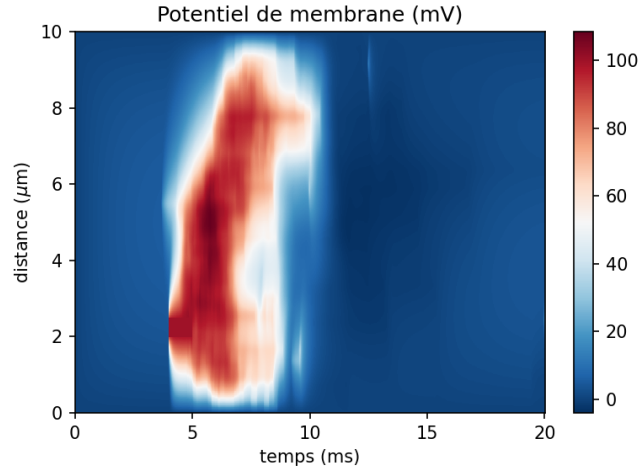


FIGURE 1.2 – Simulation d’un modèle de neurone basé sur les conductances de type PDMP. Il s’agit d’une version hybride du modèle d’Hodgkin-Huxley lorsque la dynamique des canaux de types sodium et potassium est rendue stochastique comme expliqué dans cette section. Les conditions aux bords sont celles de Dirichlet. Les valeurs des constantes pour le modèle bio-physiologique sont celles présentées dans l’article [83]. Les canaux sont distribués uniformément le long de l’axone avec 15 canaux de type sodium pour 1 canal de type potassium, le neurone étant stimulé entre la quatrième et la cinquième milliseconde sur la portion comprise entre 2 et 2,5 μm . Notons toutefois que la distribution spatiale des canaux ainsi que l’intensité du courant imputable à un canal, choisies pour la simulation, ne reflètent pas la réalité physiologique. Malgré cela, nous observons bien, qualitativement, ce qui est attendu pour la génération et la propagation d’un potentiel d’action.

où pour $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et $\xi \in E$, $y_{y(i) \rightarrow \xi}$ désigne l’élément de \mathbf{Y} dont toutes les composantes sont égales à celles de y exceptée la i -ème qui est mise à jour vers ξ . On remarquera que seule la composante modale saute ici et que c’est un modèle où il n’y a pas de sauts forcés.

Nous présentons maintenant une interprétation bio-physique de ce modèle. L’axone est la partie d’un neurone qui transmet les informations reçues du soma à un autre neurone sur de longues distances : la longueur de l’axone est grande par rapport à la taille du soma. Le long de l’axone se trouvent les canaux ioniques qui amplifient et permettent la propagation de l’impulsion reçue. L’axone est modélisé ici par le segment $[0, 1]$. Les canaux ioniques sont supposés être en nombre $N \in \mathbf{N}^*$ et régulièrement placés le long de l’axone en $\frac{i}{N+1}$ pour $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Cette distribution des canaux n’est pas tout à fait réaliste mais elle permet de fixer les idées. Chaque canal ionique peut être dans un état $\xi \in E$. Par exemple, pour le modèle de Hodgkin-Huxley [83], un état peut être : « réceptif aux ions sodium et ouvert ». L’espace des configurations pour les canaux ioniques est donc $\mathbf{Y} = E^N$. Pour $\xi \in E$, nous dénotons par c_ξ et v_ξ la conductance et le potentiel d’inversion associés à un canal dans l’état ξ . L’équation d’évolution vérifiée par le potentiel trans-membranaire, c’est-à-dire la différence de potentiel entre l’intérieur et l’extérieur de l’axone, est donnée par l’Équation (1.1). La configuration des canaux ioniques évolue elle à taux λ . Une illustration numérique est proposée en Figure 1.2.

Un modèle intègre et tir exponentiel adaptatif hybride basé sur les conductances

Un autre type de modèles de neurones très populaire est le modèle intègre et tir, dans sa version exponentielle. On pourra par exemple consulter l'article [66] qui en présente une variation récente dont nous allons présenter une version PDMP, le modèle étant déterministe dans l'article cité.

Soit $\mathbf{Y} = \{kb/N ; k \in \llbracket 0, \lfloor N/b \rfloor \rrbracket\}$ avec $N \in \mathbf{N}^*$ et soit $\mathbf{X} =]-\infty, V_D[$ où V_D et b sont des constantes, avec N/b grand. Nous donnerons une interprétation électro-physiologique du modèle plus bas. Pour $x \in \mathbf{X}$ et $y \in \mathbf{Y}$, on considère le flot $\varphi_y(x, \cdot)$ associé à l'équation différentielle

$$C \frac{dx_t}{dt} = g_L(E_L - x_t) + g_L \Delta_T e^{\frac{x_t - V_T}{\Delta_T}} + y(E_A - x_t) + I \quad (1.2)$$

sur $[0, T]$ et où $C, g_L, E_L, E_A, \Delta_T, I$ et V_T sont des constantes (nous ne détaillons pas les unités, voir [66]). La fonction de taux est donnée pour $(x, y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ par

$$\lambda(x, y) = \frac{N}{\tau_A b} (s(x)(1 - y) + (1 - s(x))y)$$

avec

$$s(x) := \frac{\bar{g}_A}{1 + e^{\frac{V_A - x}{\Delta_A}}}$$

et où $\tau_A, b, \bar{g}_A, V_A$ et Δ_A sont encore des constantes. Lors d'un saut de ce type (non forcé), la mesure de saut permet d'augmenter ou diminuer y de $1/N$. Néanmoins, dans ce modèle, il y a des sauts forcés pour les variables euclidienne et modale. Lorsque la variable euclidienne atteint le seuil V_D (qui joue le rôle de frontière ici), celle-ci est ramenée à V_R alors que la variable modale saute de sa valeur courante y vers une valeur $\min(1, y + b)$ pour un certain incrément b . En d'autres termes, la mesure de saut est donnée par :

$$Q(d\bar{x}, d\bar{y}|x, y) = \begin{cases} \delta_x(d\bar{x}) \frac{N}{\tau_A b \lambda(x, y)} \left((1 - y)s(x)\delta_{y+\frac{b}{N}}(d\bar{y}) + y(1 - s(x))\delta_{y-\frac{b}{N}}(d\bar{y}) \right) & \text{si } x \in \mathbf{X}, \\ \delta_{V_R}(d\bar{x}) \delta_{1 \wedge (y+b)}(d\bar{y}) & \text{si } x \in \partial\mathbf{X}. \end{cases}$$

Dans ce modèle, la variable euclidienne x décrit la variation du potentiel trans-membranaire d'un neurone au cours du temps en un point donné de l'axone, c'est pourquoi nous avons une équation différentielle ordinaire au lieu d'une équation aux dérivées partielles. L'originalité de ces modèles de type intègre et tir réside dans le fait de ne pas considérer la forme spécifique du potentiel d'action. La raison pour cela est que les potentiels d'actions possèdent en général la même forme et la même amplitude, ce n'est donc pas de cette façon qu'est codée l'information transmise d'un neurone à l'autre. Ce qui compte, plutôt, ce sont les temps entre les potentiels d'action ou même le temps du premier déclenchement par rapport à un temps de référence. Dans ce modèle, on considère donc que dès que le potentiel trans-membranaire dépasse un certain seuil noté V_D , un potentiel d'action est déclenché et que, comme il n'est pas besoin de le décrire, le potentiel trans-membranaire est instantanément ramené à une certaine valeur V_R . Couplé à la variable d'adaptation, jouant le rôle d'une conductance, modélisée par y ici, ce type de modèle est capable de reproduire très fidèlement, du point de vue des temps entre les potentiels d'action, de nombreux trains de potentiels d'action observés dans les neurones. Ils ont de plus l'avantage d'être interprétables, puisqu'on peut les déduire des modèles de neurones basés sur les conductances, tout en étant moins coûteux en temps de calculs numériques. Une simulation de ce modèle est présentée en Figure 1.3.

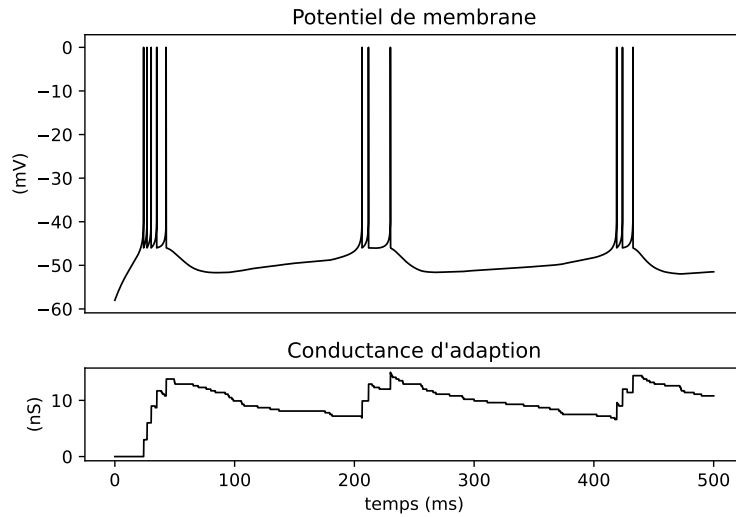


FIGURE 1.3 – Simulation du modèle Cadex de l'article [66] dans sa version PDMP. Nous pouvons observer un train de potentiels d'action avec *bursting* : lorsque le neurone décharge, il décharge en rafale puis redevient silencieux, avant d'éventuellement recommencer. En fait, nous sommes même ici dans un cas d'*adaptive bursting* : les tirs lors d'une rafale sont de plus en plus écartés. C'est un comportement observable chez des neurones physiques. Pour bien voir les temps de décharge, ceux-ci sont matérialisés par des traits verticaux, reliant V_R à 0. Nous donnons la valeur des constantes permettant ces simulations sans les unités ci-dessous :

N	g_L	E_L	E_A	Δ_T	C	V_A	Δ_A	\bar{g}_A	I	V_R	b	V_T	τ_a	V_D
10	12×10^{-12}	-58	-60	2	200×10^{-12}	-45	1	10×10^{-12}	150×10^{-12}	-46	3×10^{-12}	-50	200	-40

1.2 Quelques résultats en moyennisation

1.2.1 Moyennisation

Soit $(X(t), Y(t))_{t \in \mathbf{R}_+}$ un PDMP avec mode à valeurs dans $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$. Il n'est pas rare, c'est même certainement le cas le plus courant, que les variables qui décrivent l'évolution d'un système biologique ou physique possèdent différentes échelles de temps. Par exemple, pour citer un cas que nous connaissons bien, certains canaux ioniques ont une dynamique bien plus rapide que d'autres. Pour notre couple (X, Y) , il se peut donc que X et Y évoluent selon des échelles de temps bien différentes. On peut alors avoir envie de tirer parti de ce phénomène en le caricaturant, c'est-à-dire en accélérant infiniment la dynamique du processus dont l'évolution est la plus rapide. On espère ce faisant obtenir un modèle plus simple à étudier, du point de vue de la théorie ou des simulations. Cette démarche a connu un immense succès pour les modèles de neurones, on pourra pour s'en convaincre consulter [62].

Nous matérialisons la présence de deux échelles de temps en faisant dépendre notre processus d'un paramètre réel $\varepsilon > 0$, modélisant le fait que dans le couple $(X_\varepsilon, Y_\varepsilon)$ la variable Y_ε (ou certaines de ses composantes) évolue selon une échelle de temps de l'ordre de $1/\varepsilon$. On dit que le PDMP est singulièrement perturbé, *singularly perturbed* en anglais, et vouloir faire tendre ε vers 0, c'est chercher à le moyenniser. On parlera donc aussi de moyennisation, *averaging* en anglais. Ce terme de moyennisation provient du fait que l'on fera l'hypothèse que le processus Y_ε peut-être vu comme provenant de l'accélération de la dynamique d'un processus Y qui possède une mesure invariante $\pi(x)$ lorsque X_ε (ou X) est fixé à $x \in \mathbf{X}$. On pourra alors considérer la moyenne par rapport à cette mesure des éléments permettant de définir la dynamique de X_ε (équation d'évolution, mesure de sauts...), d'où la terminologie. Ceci est parfois moins direct qu'il peut sembler de prime abord, notamment en présence de frontières.

La littérature traitant des processus de Markov singulièrement perturbés est vaste, on pourra consulter à profit ce qu'il en est dit dans la deuxième partie du mémoire [91]. La moyennisation des processus de Markov non-contraints, c'est-à-dire dans notre cas sans frontière, a été étudiée par de nombreux auteurs depuis des décennies et est bien comprise pour une grande variété de processus de Markov. Par exemple, on pourra consulter [127] pour les chaînes de Markov à temps continu, [106] pour les processus de diffusion, [76] pour le mouvement brownien fractionnaire et [107] pour de nombreux autres exemples avec diverses applications.

A notre connaissance, la moyennisation des processus de Markov contraints, c'est-à-dire avec la présence d'une frontière, n'a pas fait l'objet d'autant de travaux, en particulier en ce qui concerne la description de la mesure de moyennisation à la frontière. Il y a une difficulté intrinsèque dans ces problèmes qui provient de la présence de deux types de sauts. Les sauts stochastiques à une fréquence élevée, ceux de la composante Y_ε dont la dynamique est rapide, et les sauts forcés à la frontière, ceux de la composante X_ε , pour laquelle le temps s'écoule à l'ordre un.

On pourra aussi noter que les premiers résultats sur des processus de Markov, des diffusions en l'occurrence, singulièrement perturbés et complètement couplés, c'est-à-dire où les dynamiques de X_ε et Y_ε sont inter-dépendantes, datent des années 1960, voir par exemple [90], avec des inégalités de concentration obtenue dans les années 1990, voir par exemple [123].

La littérature traitant spécifiquement des perturbations singulières pour des PDMP assez généraux n'est quant à elle toujours pas très étoffée à ce jour, du moins à notre connaissance.

Nous pensons pouvoir la faire commencer en 2008 avec la version préliminaire de l'article [57] où la moyennisation de PDMP sans frontières est considérée et un principe de grandes déviations obtenu. Viennent ensuite les travaux [124] et [105] où un développement asymptotique pour la loi d'un PDMP singulièrement perturbé et sans frontière est obtenu ainsi qu'un théorème de la limite centrale. Ces résultats sont adaptés au cas de PDMP en dimension infinie (lorsque le flot est donné à travers une équation aux dérivées partielles) dans [74] et [75]. Nous avons considéré le cas avec frontière très récemment dans [72], nous présenterons ce résultat en Section 1.2.3.

1.2.2 Une inégalité de concentration pour une classe de PDMP en dimension infinie et sans frontière

Dans cette section nous présentons le résultat principal de l'article [70]. Dans cet article, nous étudions une classe de PDMP en dimension infinie mais sans frontière, possédant un paramètre d'échelle temporelle ε et un paramètre de taille N . L'exemple typique, pour nous, est le modèle de neurone basé sur les conductances présenté en Section 1.1.3. Comme le modèle dépend à la fois de ε et de N , nous écrirons $X_{\varepsilon,N}$ et $Y_{\varepsilon,N}$ pour les composantes du PDMP. De même, comme l'espace dans lequel vit la variable $Y_{\varepsilon,N}$ grandit avec N , nous écrirons \mathbf{Y}_N au lieu de \mathbf{Y} , en supposant que les \mathbf{Y}_N forment une suite croissante d'ensembles inclus les uns dans les autres. Nous procédons à la description du modèle qui est une abstraction du modèle présenté en Section 1.1.3.

Dynamique de la variable $X_{\varepsilon,N}$. Dans ce modèle, la variable $X_{\varepsilon,N}$ est continue en temps et satisfait une équation de réaction-diffusion de la forme

$$\partial_t X_{\varepsilon,N} = AX_{\varepsilon,N} + F_N(X_{\varepsilon,N}, Y_{\varepsilon,N})$$

munie d'une condition initiale $(X_{\varepsilon,N,0}, Y_{\varepsilon,N,0})$ où A est un opérateur linéaire dont le domaine $\mathcal{D}(A)$ se plonge de façon continue et dense dans un espace de Hilbert \mathbf{X} dont le produit scalaire est dénoté par (\cdot, \cdot) et la norme associée par $\|\cdot\|$. Nous supposons que cet opérateur est dissipatif dans le sens où

$$\exists C_A \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in \mathbf{X}, \quad (Ax, x) \leq -C_A \|x\|^2.$$

C'est une hypothèse classique. On pourra par exemple penser au laplacien avec des conditions aux bords de type Dirichlet. Le terme de réaction F_N est défini sur $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}_N$ et est à valeurs dans \mathbf{X} . Sa croissance doit être contrôlée uniformément en N :

$$\exists C_F \in \mathbf{R}_+^*, \forall N \in \mathbf{N}^*, \forall (x_1, x_2, y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{X} \times \mathbf{Y}_N, \quad \|F_N(x_1, y) - F_N(x_2, y)\| \leq C_F \|x_1 - x_2\|.$$

Nous demandons aussi à sa valeur en 0 d'être uniformément bornée en N :

$$\exists C_{F,0} \in \mathbf{R}_+^*, \forall N \in \mathbf{N}^*, \forall y \in \mathbf{Y}_N, \quad \|F_N(0, y)\| \leq C_{F,0}.$$

Dynamique de la variable $Y_{\varepsilon,N}$. La variable modale $Y_{\varepsilon,N}$ a une dynamique gouvernée par les matrices d'intensité

$$\forall x \in \mathbf{X}, \quad \lambda_N(x) := \left(\frac{1}{\varepsilon} \lambda_N(z|x, y) \right)_{(y,z) \in \mathbf{Y}_N^2}$$

dont chaque instance dépend à la fois de ε , N et de x . Pour revenir aux notations de la Section 1.1, le taux global de saut est donc

$$\lambda_{N,\varepsilon}(x, y) = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{z \in \mathbf{Y}_N \setminus \{y\}} \lambda_N(z|x, y).$$

La présence de la quantité $1/\varepsilon$ matérialise le fait que ces sauts ont lieu à une fréquence très élevée. Nous supposons que la partie ne dépendant pas de ε de ces taux de sauts est uniformément bornée :

$$\exists C_\lambda \in \mathbf{R}_+^*, \forall N \in \mathbf{N}^*, \forall (x, y, z) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y}_N \times \mathbf{Y}_N, \quad |\lambda_N(z|x, y)| \leq C_\lambda,$$

et surtout, que pour tout $x \in \mathbf{X}$ fixé, il existe une mesure de probabilité $\pi_N(x) = (\pi_N(z|x))_{z \in \mathbf{Y}_N}$ sur \mathbf{Y}_N telle que

$$\forall y \in \mathbf{Y}_N, \quad \sum_{z \in \mathbf{Y}_N} \pi_N(z|x) \lambda_N(y|x, z) = 0.$$

C'est l'existence de cette mesure qui permet la moyennisation de la variable $X_{\varepsilon, N}$. C'est certainement l'hypothèse la plus fondamentale.

Générateur du processus. En tant que processus de Markov, la dynamique du PDMP donné par le couple $(X_{\varepsilon, N}, Y_{\varepsilon, N})$ est bien résumée par son générateur, et ici par son générateur étendu. On note $\mathcal{A}_{\varepsilon, N}$ ce générateur et $\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\varepsilon, N})$ son domaine. Nous allons préciser sa forme. Pour cela, pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, nous considérons une fonction à valeurs réelles ϕ définie sur $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}_N$, bornée, mesurable et même différentiable au sens de Fréchet par rapport à sa première variable et dont la différentielle en x , qui est un élément du dual de \mathbf{X} , peut être représentée par un élément de \mathbf{X} noté ϕ_x . On peut alors montrer que $\phi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\varepsilon, N})$ et que pour tout $(x, y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y}_N$,

$$\mathcal{A}_{\varepsilon, N} \phi(x, y) = (Ax + F_N(x, y), \phi_x(x, y)) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{z \in \mathbf{Y}_N \setminus \{y\}} \lambda_N(z|x, y) (\phi(x, z) - \phi(x, y)).$$

La décomposition de la dynamique apparaît ici aussi très clairement : le premier terme nous donne la dynamique de la variable $X_{\varepsilon, N}$, dynamique continue gouvernée par une équation de réaction-diffusion, alors que le deuxième terme nous donne la dynamique de la variable $Y_{\varepsilon, N}$, avec des sauts d'un élément de \mathbf{Y}_N à un autre à des taux d'ordre $1/\varepsilon$. On parle de générateur étendue car pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\varepsilon, N})$ le processus

$$t \mapsto \phi(X_{\varepsilon, N, t}, Y_{\varepsilon, N, t}) - \phi(X_{\varepsilon, N, 0}, Y_{\varepsilon, N, 0}) - \int_0^t \mathcal{A}_{\varepsilon, N} \phi(X_{\varepsilon, N, s}, Y_{\varepsilon, N, s}) ds$$

est *a priori* une martingale locale pour la filtration naturelle associée au PDMP. C'est d'ailleurs par ce biais que l'on définit le générateur étendu. Ce processus serait une martingale pour le générateur usuel. Les martingales ayant de bonnes propriétés et ayant été très étudiées depuis que J. Doob leur a porté un si grand et bel intérêt, le générateur est un outil très efficace d'étude des processus de Markov en général, et des PDMP en particulier.

Processus moyenné. Lorsque ε tend vers zéro, nous pouvons nous attendre à ce que le processus $Y_{\varepsilon, N}$ suive instantanément sa dynamique stationnaire et donc que $X_{\varepsilon, N}$ converge, lorsque ε tend vers 0, vers un processus \bar{X}_N solution de l'équation d'évolution

$$\partial_t \bar{X}_N = A \bar{X}_N + \bar{F}_N(\bar{X}_N),$$

où

$$\bar{F}_N(x) = \sum_{y \in \mathbf{Y}_N} F_N(x, y) \pi_N(y|x),$$

pourvu que la condition initiale converge aussi. Nous avons donc pris la moyenne du terme de réaction selon la mesure stationnaire associée au processus rapide. Cela, comme nous l'avons déjà mentionné, explique la terminologie. On remarquera aussi que \bar{X}_N obéit à une équation déterministe dans le cas exposé.

Contrôles sur la croissance de $X_{\varepsilon, N} - \bar{X}_N$. Nous faisons certaines hypothèses pour nous assurer d'un bon contrôle sur la croissance de la différence entre $X_{\varepsilon, N}$ et \bar{X}_N ainsi que de ses dérivées. Soit (α_N) , (β_N) et (γ_N) trois suites allant vers l'infini avec N . Nous allons faire des hypothèses sur la fonction

$$\Phi : (x_1, x_2, y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{X} \times \mathbf{Y}_N \mapsto (F_N(x_1, y) - \bar{F}_N(x_1), x_1 - x_2).$$

Nous supposons que, pour un horizon en temps T :

- Pour tout $N \in \mathbf{N}^*$ et tout $(x, y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y}_N$, l'application $t \in [0, T] \mapsto \Phi(x, \bar{X}_{N,t}, y)$ est dans $\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\varepsilon, N})$.
- L'application Φ est localement bornée, mais non nécessairement uniformément en N :

$$\forall C > 0, \quad \sup_{(x_1, x_2, y) \in B[0, C]^2 \times \mathbf{Y}_N} |\Phi(x_1, x_2, y)| = O(\alpha_N).$$

- L'application Φ est continûment différentiable au sens de Fréchet par rapport à sa première variable avec une différentielle qui admet une représentation Φ' dans \mathbf{X} . Nous demandons de plus que cette représentation soit localement bornée, mais non uniformément en N :

$$\forall C > 0, \quad \sup_{(x_1, x_2, y) \in B[0, C]^2 \times \mathbf{Y}_N} \|\Phi'(x_1, x_2, y)\| = O(\beta_N).$$

- Pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, la dérivée Φ_t de l'application $t \mapsto \Phi(x_1, \bar{X}_{N,t}, y)$ existe pour tout $(x, y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y}_N$. Cette dérivée est localement bornée, mais non uniformément en N :

$$\forall C > 0, \quad \sup_{(x, t, y) \in B[0, C] \times [0, T] \times \mathbf{Y}_N} |\Phi_t(x, \bar{X}_{N,t}, y)| = O(\gamma_N).$$

Contrôle des taux de sauts. Pour tout $N \in \mathbf{N}^*$ et tout $C > 0$, nous avons que si f_N est une fonction à valeurs réelles définie sur $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}_N \times \mathbf{R}_+$ qui est bornée sur $B[0, C] \times \mathbf{Y}_N \times \mathbf{R}_+$, alors il existe une constante C' et une suite ρ_{N, f_N} allant vers l'infini avec N telle que

$$\sup_{(x, y, t) \in B[0, C] \times \mathbf{Y}_N \times [0, T]} \left| \sum_{z \in \mathbf{Y}_N \setminus \{y\}} \lambda_N(z|x, y) (f_N(x, z, t) - f_N(x, y, t))^2 \right| \leq C' \rho_{N, f_N}.$$

Sous ces hypothèses, nous sommes alors capable de montrer le résultat de concentration suivant.

Théorème 1. *Pour tout horizon en temps $T > 0$, il existe des constantes C_i , $1 \leq i \leq 5$, dépendant uniquement de T ainsi qu'une suite (ρ_N) allant vers l'infini avec N telles que pour tout $(\varepsilon, N) \in]0, 1[\times \mathbf{N}^*$ et $\delta > 0$,*

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} \|X_{\varepsilon, N, t} - \bar{X}_{N, t}\| \geq \delta \right) \\ & \leq \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} \|X_{\varepsilon, N, 0} - \bar{X}_{N, 0}\| \geq C_1 \delta \right) + \mathbf{1}_{\varepsilon(\beta_N + \gamma_N) \geq C_2 \delta} + C_3 \exp \left(-C_4 \frac{\delta^2}{\varepsilon \rho_N} \Psi \left(C_5 \frac{\delta \alpha_N}{\rho_N} \right) \right). \end{aligned}$$

La fonction Ψ qui apparaît dans le résultat est définie sur $[-1, +\infty[$ par

$$\Psi(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \log(1+y) dy.$$

Cette fonction apparaît dans les inégalités exponentielles sur les martingales telles que présentées dans [54].

Nous pouvons déduire du Théorème 1 qu'une condition suffisante de convergence jointe en ε et N du processus $X_{\varepsilon, N}$ est que

$$\lim_{(\varepsilon, N) \rightarrow (0, +\infty)} \varepsilon(\beta_N + \gamma_N) = 0$$

et

$$\lim_{(\varepsilon, N) \rightarrow (0, +\infty)} \frac{1}{\varepsilon \rho_N} \Psi \left(C_5 \frac{\delta \alpha_N}{\rho_N} \right) = +\infty.$$

Ce type de résultat peut être utile en pratique puisqu'il donne un critère d'utilisation d'un modèle réduit plutôt qu'un modèle complet.

Les outils mathématiques que nous utilisons dans la preuve appartiennent à la théorie des perturbations singulières à travers l'étude d'une équation de Poisson, et aux probabilités générales à travers l'étude d'un problème de martingale. En ce qui concerne les résultats précédemment obtenus pour ce type de modèles, et en particulier les résultats de moyennisation [74, 75], la principale nouveauté vient de l'obtention de bornes quantitatives pour la convergence grâce à l'utilisation d'inégalités exponentielles pour les martingales. Nous voyons que ces estimations quantitatives sont nécessaires pour en déduire un critère sur la vitesse relative entre le paramètre d'échelle de temps ε et la taille de la population N , permettant une convergence jointe.

L'équation de Poisson dont il est fait mention dans le paragraphe précédent est l'équation

$$\forall (x, y, t) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y}_N \times \mathbf{R}_+, \quad \sum_{z \in \mathbf{Y}_N \setminus \{y\}} \lambda_N(z|x, y) (f_N(x, z, t) - f_N(x, y, t)) = \Phi(x, y, \bar{X}_{N, t}),$$

où l'inconnue est la fonction f_N . L'utilisation d'une équation de Poisson est une technique classique en moyennisation, l'article [106] est par exemple centré sur ce sujet en ce qui concerne les processus de diffusion. On pourra aussi consulter [107, Chapitre 11].

Il s'agit dans la preuve d'obtenir une bonne représentation en semi-martingale de la norme au carré de la différence entre $X_{\varepsilon, N}$ et \bar{X}_N . Cette décomposition en semi-martingale s'obtient grâce à la résolution de l'équation de Poisson qui permet de relier l'expression de la différence entre le processus lent-rapide et sa version moyennée avec le terme de sauts du générateur

étendu. Le problème de martingale associé au générateur étendu $\mathcal{A}_{\varepsilon,N}$ du processus permet alors d'obtenir la décomposition semi-martingale voulue. Il reste alors à borner convenablement chacun des termes. Il se trouve que dans notre cas, il est aussi possible d'obtenir une borne explicite et presque sûre sur le crochet de la partie martingale. C'est cette borne qui nous permet de borner de façon exponentielle la probabilité que la partie martingale s'éloigne en valeur absolue de zéro.

Exemple pour le modèle de neurone basé sur les conductances 1.1.3. Dans le cadre du modèle basé sur les conductances de type Hodgkin-Huxley présenté en Section 1.1.3, si on remplace les masses de Dirac $\delta_{\frac{i}{N+1}}$ par des approximations de l'unité $f_{\frac{i}{N+1}}$, c'est-à-dire en considérant l'équation aux dérivées partielles

$$\partial_t x_t = \Delta x_t + \frac{1}{N} \sum_{\xi \in E} \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{\xi\}}(y(i))(v_\xi - (x_t, f_{\frac{i}{N+1}})) f_{\frac{i}{N+1}},$$

on peut montrer, en faisant de bonnes hypothèses sur les paramètres du modèle, que l'on peut appliquer le Théorème 1 avec $\mathbf{X} = L^2([0, 1])$. Cela donne :

Corollaire 1. *Sous de bonnes hypothèses, il existe des constantes C_i , $1 \leq i \leq 5$ dépendant uniquement de T telles que pour tout $(\varepsilon, N) \in]0, 1[\times \mathbf{N}^*$ et $\delta > 0$,*

$$\mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} \|X_{\varepsilon, N, t} - \bar{X}_{N, t}\| \geq \delta \right) \quad (1.3)$$

$$\leq \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} \|X_{\varepsilon, N, 0} - \bar{X}_{N, 0}\| \geq C_1 \delta \right) + \mathbf{1}_{\varepsilon(N\sqrt{N} + N^3) \geq C_2 \delta} + C_3 \exp \left(-C_4 \frac{\delta^2}{\varepsilon N^3} \Psi \left(C_5 \frac{\delta}{N^2} \right) \right). \quad (1.4)$$

Comme $\lim_{N \rightarrow \infty} \Psi \left(C_5 \frac{\delta}{N^2} \right) = \Psi(0) = 1$, ce résultat nous montre que pour qu'il y ait convergence jointe en (ε, N) du processus $X_{\varepsilon, N}$, il suffit que l'on ait la convergence relative

$$\lim_{(\varepsilon, N) \rightarrow (0, +\infty)} \varepsilon N^3 = 0.$$

Cela signifie que la fréquence des sauts doit être suffisamment élevée par rapport à la taille de la population de canaux ioniques N . Comme mentionné plus haut, l'obtention de bornes quantitatives permet donc de donner un cadre à l'utilisation de modèles réduits. Bien sûr, la convergence relative ici proposée entre ε et N n'est peut-être pas optimale.

1.2.3 Moyennisation de PDMP en dimension finie avec frontières

Nous nous plaçons toujours dans cette section dans le cas d'une description avec variable de modulation des PDMP. Nous revenons en dimension finie en considérant pour \mathbf{X} un sous-ensemble de \mathbf{R}^d pour $d \in \mathbf{N}^*$ et plus précisément un domaine de celui-ci au sens où \mathbf{X} est ouvert et connexe. L'ensemble \mathbf{Y} est encore ici un ensemble fini. Nous parlerons donc ici à raison de composante euclidienne pour X_ε et de composante modale pour Y_ε . Nous nous intéressons dans cette section à l'interaction de la variable euclidienne avec une hypersurface $\partial \mathbf{X}$, lorsque la dynamique de la variable modale est infiniment accélérée. Lorsque cette hypersurface joue le rôle de frontière et que la variable euclidienne est contrainte à un saut forcé quand elle l'atteint,

nous serons particulièrement intéressé par l'expression de la moyennisation de la mesure de sauts à la frontière.

Dans un cadre plus simple que celui-ci, dans l'article [71], nous avons adopté une approche usuelle pour étudier une classe de PDMP unidimensionnels et linéaires par morceaux avec contraintes. C'est la méthode de pénalisation pour l'étude des processus lent-rapides telle qu'exposée dans la [94, Section 6.4]. Cette méthode consiste à considérer un processus pénalisé sautant à vitesse rapide lorsqu'il dépasse la frontière plutôt qu'un processus sautant instantanément à la frontière. Ensuite, un changement de temps est effectué afin de ralentir suffisamment la dynamique du processus pénalisé lorsqu'il dépasse la frontière, ce qui permet l'application des théorèmes limites classiques pour les processus de Markov. Mentionnons également que dans [94], les auteurs ont mis en place une méthode générale pour étudier les processus de Markov avec contraintes. Ils ont appelé cette méthode le *patchwork martingale problem*. Elle a été appliquée par exemple avec succès dans [42] aux diffusions réfléchies.

Nous allons proposer une méthode différente et à notre connaissance originale afin de surmonter la difficulté intrinsèque qui se présente lorsque l'on veut considérer à la fois des sauts aléatoires à une fréquence élevée et des sauts forcés (à la frontière). Nous proposons dans un premier temps de contourner ce problème en étudiant les interactions entre un PDMP dont le processus des modes est rapide et une hypersurface $\partial\mathbf{X}$ sans sauts forcés. Dans ce but, nous utilisons une étude que nous avons mené (à des fins statistiques) sur le nombre moyen de croisements d'une hypersurface par un processus lisse par morceaux dans [11, 13]. Dans ces articles, une formule de Rice pour le nombre moyen de croisements d'une hypersurface est obtenue et la mesure des croisements à la frontière est étudiée plus spécifiquement dans [26], nous en reparlerons en Section 1.3. L'une des principales hypothèses dans ces articles est l'existence de densités pour le processus en tous temps. Le problème de l'existence de densités pour les PDMP a été largement étudié dans les articles [69, 122]. Dans notre cadre, un ensemble d'hypothèses suffisantes consiste à supposer que la valeur initiale du processus a une densité, ainsi que la mesure de saut à la frontière. Une fois les interactions entre le processus lent-rapide et les croisements de l'hypersurface décrites lorsque la dynamique du processus rapide est infiniment accélérée, nous sommes en mesure de traiter la présence de sauts forcés dans la dynamique du PDMP, c'est-à-dire d'aborder le problème de moyennisation pour un PDMP contraint. Présenter toutes les étapes du raisonnement serait un peu long ici, présentons donc les hypothèses et le résultat.

Dynamique de la variable euclidienne. Lorsque le mode est fixé à $y \in \mathbf{Y}$, la variable euclidienne, tant qu'elle demeure à l'intérieur de \mathbf{X} , évolue selon le flot φ_y associé au champ de vecteur F_y . Lorsqu'elle touche la frontière en un point $x \in \partial X$, elle saute vers un point à l'intérieur de \mathbf{X} selon la mesure de saut $\nu_y(\cdot|x)$.

Nous faisons l'hypothèse suivante concernant la génération du flot. Pour tout $y \in \mathbf{Y}$, F_y est continûment différentiable et bornée sur \mathbf{R}^d . De plus, nous supposons que la croissance est au plus linéaire dans le sens qu'il existe deux constantes κ_1 et κ_2 strictement positives telles que

$$\|F_y(x)\| \leq \kappa_1 + \kappa_2\|x\|, \quad \forall x \in \mathbf{R}^d.$$

Ces hypothèses impliquent que pour tout $y \in \mathbf{Y}$, le problème de Cauchy :

$$\frac{d}{dt}x(t) = F_y(x(t))$$

avec pour condition initiale $x(0) = x$ admet une unique solution globale qui génère donc bien un flot que l'on a noté $\varphi_y(x, \cdot)$.

Dynamique de la variable de modulation. La dynamique de la variable modale, lorsque X_ε est fixé à x , évolue selon la matrice d'intensité $(\lambda(z|x, y))_{(y,z) \in Y \times Y}$. Nous supposons que les fonctions $x \in \mathbf{R}^d \mapsto \lambda(z|x, y)$ sont positives ou nulles, continûment différentiables et bornées.

Le processus moyenné. Pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, nous supposons que la chaîne de Markov à temps continu ayant pour générateur $(\lambda(z|x, y))_{(y,z) \in Y \times Y}$ est ergodique et l'on note $\pi(x)$ son unique mesure invariante. On note

$$\bar{F}(x) = \sum_{y \in Y} F_y(x) \pi_y(x)$$

le champ de vecteurs moyenné contre π .

Interactions avec la frontière. La frontière $\partial \mathbf{X}$ est supposée être une hypersurface compacte et connexe de classe C^1 . Nous supposons que pour tout $x \in \partial \mathbf{X}$,

$$\bar{F}(x) \cdot n_{\partial \mathbf{X}}(x) > 0$$

où $n_{\partial \mathbf{X}}(x)$ est la normale extérieure à $\partial \mathbf{X}$ en x . En d'autres termes, sous cette hypothèse, partant d'un point de \mathbf{X} , l'hypersurface $\partial \mathbf{X}$ est attractive pour le processus moyenné. Nous supposons de plus que lorsque la variable euclidienne touche la frontière, elle est renvoyée suffisamment loin de celle-ci, c'est-à-dire que pour tout $y \in Y$ et $x \in \partial \mathbf{X}$, $\nu_y(\cdot|x)$ est à support dans $\{x \in \mathbf{X} ; d(x, \partial \mathbf{X}) \geq \delta\}$ pour un certain $\delta > 0$.

Existence de densité. La valeur initiale $(X_\varepsilon(0), Y_\varepsilon(0))$ du PDMP possède une densité $f_{0,\varepsilon}$ par rapport à la mesure

$$\gamma(dx, dy) = \lambda_d(dx) \sum_{z \in Y} \delta_z(dy).$$

Cette densité est supposée continue en x et bornée uniformément sur \mathbf{X} en ε . Nous supposons aussi que les mesures de saut à la frontière possèdent une densité par rapport à la mesure de Lebesgue et que ces densités sont bornées et continues en x .

La partie euclidienne du PDMP que nous considérons est un processus défini sur $[0, T]$ càd-làg et à valeurs dans \mathbf{R}^d , c'est-à-dire qu'elle appartient à l'espace de Skorokhod $\mathbf{D}([0, T], \mathbf{R}^d)$. Nous considérons cet espace muni de la topologie dite J_1 comme exposée dans [85]. C'est la topologie la plus usuelle considérée sur cet espace en ce qui concerne les processus aléatoires non continus. Lorsque le processus est continu, cette topologie devient celle de la convergence uniforme, comme utilisée en Section 1.2.2.

Théorème 2. *Sous les hypothèses exposées, si $X_{\varepsilon,0}$ converge en loi vers une variable aléatoire \bar{X}_0 lorsque ε tend vers 0, alors le processus $(X_{\varepsilon,t})_{t \in [0,T]}$ converge en loi, lorsque ε tend vers 0, vers un processus moyen $(\bar{X}_t)_{t \in [0,T]}$, ayant pour condition initiale \bar{X}_0 et tel que :*

1. *Le processus \bar{X} est continûment différentiable par morceaux avec des sauts aux temps $(\bar{T}_{\partial \mathbf{X},i})_{i \in \mathbf{N}}$ défini pour $i \in \mathbf{N}$ par*

$$\bar{T}_{\partial \mathbf{X},i} := \inf\{t > \bar{T}_{\partial \mathbf{X},i-1} ; \bar{X}_t \in \partial \mathbf{X}\}$$

avec pour convention $\bar{T}_{\partial \mathbf{X},0} := 0$.

2. Entre deux sauts, pour $i \in \mathbf{N}$ et $t \in [\bar{T}_{\partial\mathbf{X},i-1}, \bar{T}_{\partial\mathbf{X},i}[$, le processus \bar{X} satisfait l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\bar{X}_t = \bar{F}(\bar{X}_t), \quad (1.5)$$

avec comme condition initiale $\bar{X}(\bar{T}_{\partial\mathbf{X},i-1})$.

3. Au temps de sauts, pour $i \in \mathbf{N}$, $\bar{X}(\bar{T}_{\partial\mathbf{X},i})$ est distribué selon la mesure de saut

$$\bar{v}(\cdot | \bar{X}(\bar{T}_{\partial\mathbf{X},i})).$$

Celle-ci est donnée, pour $x \in \partial\mathbf{X}$, par

$$\bar{v}(\cdot | x) := \sum_{y \in \mathbf{Y}} v_y(\cdot | x) \mu_{\partial\mathbf{X},y}(x)$$

où

$$\mu_{\partial\mathbf{X},y}(x) := \frac{\pi_y(x)(F_y(x) \cdot n_{\partial\mathbf{X}}(x))_+}{\sum_{z \in \mathbf{Y}} \pi_z(x)(F_z(x) \cdot n_{\partial\mathbf{X}}(x))_+}.$$

Commentaires sur la forme de la mesure de saut moyennée. Évidemment, le processus \bar{X} est encore un PDMP. Comme on le voit, la mesure de saut moyennée à la frontière est donc une pondération des mesures de saut à la frontière, les pondérations tenant compte à la fois de la mesure invariante associée aux modulations et des interactions entre le flot et la frontière à travers la partie positive du produit scalaire entre le champ de vecteurs et la normale extérieure à l'hypersurface considérée, conformément à ce que nous enseigne l'étude du nombre moyen de croisements d'une hypersurface par un processus continu par morceaux.

Cela est tout à fait intuitif : le processus aura d'autant plus tendance à toucher la frontière avec d'une part un mode fréquemment sélectionné, et ce fait est, asymptotiquement, mesuré par la probabilité invariante, et d'autre part avec un mode qui amène rapidement le processus vers la frontière, et ceci est mesuré par le produit scalaire entre le champ de vecteur et la normale à l'hypersurface. Il est donc naturel d'avoir une pondération entre ces deux phénomènes dans la formule présentée. Remarquons aussi à ce sujet et comme on le verra plus en détails en Section 1.3.2, que les formules pour les nombres moyens de croisements sont particulièrement explicites lorsque le processus possède une densité en tous temps. Cela explique pourquoi nous faisons ces hypothèses sur la loi initiale et les mesures de saut. La convergence des densités pour les PDMP lent-rapides sans frontière a été obtenue dans [105]. Ce sont ces résultats qui nous permettent de passer à la limite dans les formules pour les nombres moyens de croisements.

Quelques éléments sur la preuve. La preuve du Théorème 2 est réalisée en suivant le programme de Prokhorov : on montre d'abord que la famille $\{X_\varepsilon ; \varepsilon \in]0, 1]\}$ est tendue dans l'espace de Skorokhod puis on identifie la limite. La preuve de la tension est ici facilitée d'une part par l'existence d'une densité pour $X_{\varepsilon,t}$ en tous temps qui est continue et surtout bornée uniformément en ε et d'autre part par le fait que les temps d'inter-sauts de X_ε sont minorés uniformément en ε grâce à l'hypothèse sur le support de la mesure de saut. Pour l'identification de la limite, on travaille sur la formule de Dynkin. D'après [45, Theorem 2.6.14], nous savons

que pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$ et $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(h(X_{\varepsilon,t})) &= \mathbf{E}(h(X_{\varepsilon,0})) + \mathbf{E}\left(\int_0^t F_{Y_{\varepsilon,s}}(X_{\varepsilon,s}) \cdot \nabla h(X_{\varepsilon,s}) ds\right) \\ &\quad + \mathbf{E}\left(\int_0^t \int_{\mathbf{X}} [h(w) - h(X_{\varepsilon,s^-})] \nu_{Y_{\varepsilon,s^-}}(dw|X_{\varepsilon,s^-}) p_{\partial\mathbf{X},\varepsilon}(ds)\right), \end{aligned}$$

pour une large classe de fonctions h et où pour $t \in [0, T]$, le nombre de sauts de X_ε jusqu'au temps t est noté

$$p_{\partial\mathbf{X},\varepsilon}(t) = \sum_{s=0}^t \mathbf{1}_{\partial\mathbf{X}}(X_{\varepsilon,t}).$$

Là encore, l'hypothèse sur le support de la mesure de saut nous assure que l'espérance de $p_{\partial\mathbf{X},\varepsilon}(T)$ est finie. Le but est alors de passer à la limite dans la formule de Dynkin. Le terme impliquant la mesure de comptage des sauts est le plus délicat à traiter. C'est pour ce terme que nous passons par l'étude du nombre moyen de croisements de l'hypersurface pour un PDMP lent-rapide avec les mêmes caractéristiques mais non contraint à sauter lorsqu'il croise celle-ci.

Quelques extensions possibles. Il est possible d'étendre ce résultat dans plusieurs directions. Il n'est pas vraiment plus difficile de considérer par exemple que l'espace dans lequel vit \mathbf{X} change dès qu'il atteint la frontière, cette configuration correspondant à la description initiale des PDMP dans [45]. Il est un peu plus fastidieux, mais faisable, de considérer que le processus des modes est lui-même lent-rapide. Dans ce cadre, on suppose qu'il existe une partition $(\mathbf{Y}_j)_{1 \leq j \leq M}$, avec $M \geq 2$, de l'espace \mathbf{Y} telle que les transitions entre ces classes sont d'ordre 1 alors que celles à l'intérieur des classes sont d'ordre $1/\varepsilon$. Le processus moyenné est alors encore un PDMP avec un mode : celui-ci est simplement simplifié dans le sens où il prend alors ces valeurs dans $\llbracket 1, M \rrbracket$, la dynamique à l'intérieur de chaque classe ayant été, sous les hypothèses adéquates, moyennée.

Par ailleurs, nous proposons aussi un exemple d'application de notre résultat à un modèle de neurone de type Morris-Lecar dans l'article [72].

1.3 Un résultat d'estimation

Les résultats présentés en Section 1.2 présentent une étude probabiliste des PDMP en portant nos efforts sur la moyennisation de ceux-ci. Nous allons maintenant nous intéresser à des problématiques d'estimation statistiques pour ces processus.

1.3.1 Statistiques pour les PDMP

Je n'ai pas vraiment suivi de formation de statisticien, j'ai dû suivre en tout et pour tout deux unités d'enseignement dans ce domaine lors de ma formation, mais d'une façon assez naturelle, les statistiques ont pris peu à peu une place assez importante dans mes travaux, et aussi dans mes enseignements. Tous les travaux que j'ai menés en statistique des processus sont le fait d'un certain compagnonnage mathématique avec Romain Azaïs, qui en est lui spécialiste et qui a abouti aux études [10, 11, 12, 13, 14].

La construction exposée en Section 1.1 montre que les PDMP peuvent se résumer à la donnée d'un espace \mathbf{X} dont la frontière $\partial\mathbf{X}$ peut jouer un rôle important, d'un taux de saut λ ainsi que d'une mesure de saut Q . Le statisticien s'intéressera naturellement à la construction d'estimateurs ayant de bonnes propriétés de ces deux caractéristiques que sont λ et Q . Si on adopte le point de vue des processus ponctuels marqués pour la description des PDMP, ce que nous ne faisons pas dans ce travail, les premières études ayant pour sujet explicite la construction de tels estimateurs pour des PDMP assez généraux sont certainement [84, Chapitre 5, 7 et 8], livre dans lequel l'auteur s'intéresse à la construction d'estimateurs liés au taux de transition ainsi qu'au processus du maximum de vraisemblance associé à un PDMP. Si on adopte une description plus proche de celle de Davis, on peut mentionner [38, 39] et surtout [7, 9] pour la construction d'estimateurs liés au taux et à la mesure de saut dans un cadre général pour les PDMP. Dans ces travaux, le PDMP est supposé être observé en temps long et des hypothèses d'ergodicité sont faites. La méthode employée est celle de Nelson-Aalen. Nous avons travaillé sur ce sujet dans [12].

Bien sûr, on peut s'intéresser, d'un point de vue statistique, non pas à l'estimation des caractéristiques intrinsèques d'un processus, mais seulement à l'estimation de certaines fonctionnelles qui lui sont reliées. Souvent, les deux problématique sont liées, notamment via des méthodes de *plug-in*, mais il est parfois possible de les aborder d'une façon moins directe. Nous nous sommes par exemple intéressés à l'estimation du nombre moyen de croisement continu, c'est-à-dire non dus à un saut, d'une hypersurface pour un PDMP à valeurs dans $\mathbf{X} = \mathbf{R}^d$. Le lecteur attentif aura certainement remarqué que c'est une problématique que nous avons déjà mentionnée en Section 1.2.3. En fait, cette étude statistique est venue avant l'étude probabiliste présentée en Section 1.2.3. Du point de vue des applications, si on pense aux modèles de neurones et au seuil d'excitabilité, savoir estimer le nombre de fois que l'on a dépassé celui-ci est fondamental. D'une façon générale, la littérature regorge d'exemples où l'on s'intéresse soit au temps passé dans une certaine zone, soit au nombre de fois que le processus lui rend visite, pour le meilleur ou pour le pire. On pourra par exemple consulter les articles [65, 21]. Nous avons travaillé sur ce sujet dans les articles [13] et [10]. Nous exposons nos résultats en Section 1.3.2.

1.3.2 Estimation des nombres moyen de croisements

Les formules de Kac-Rice pour les PDMP

On désigne par formule de Kac-Rice – voir les articles fondateurs [88, 110] – une formule permettant de compter le nombre moyen de fois qu'un processus, assez lisse en général, croise un certain ensemble de niveau. On pourra consulter l'ouvrage récent [22] si l'on souhaite faire un tour assez complet du sujet. Pour les PDMP, à notre connaissance, les deux premiers articles adaptant ces formules à leurs caractéristiques sont [26] et [43]. En s'appuyant sur les livres [92] et [58], nous avons retravaillé ces formules pour pouvoir considérer des processus non-stationnaires et obtenus les résultats exposés dans cette section. Ces formules sont valables pour des processus plus généraux que les PDMP, qui ne sont pas forcément markoviens mais simplement lisses par morceaux.

Définitions du PDMP et des croisements. Nous considérons un PDMP X à valeurs dans \mathbf{X} , un sous-ensemble mesurable de \mathbf{R}^d . On suppose que pour $x \in \mathbf{X}$, le flot φ associé à ce PDMP

provient de la résolution du problème de Cauchy

$$\frac{dx_t}{dt} = F(x_t), \quad x_0 = x$$

où F est une application de \mathbf{X} dans lui-même continûment dérivable.

Soit aussi \mathcal{S} une hypersurface de \mathbf{R}^d compacte et connexe de classe C^1 , incluse dans \mathbf{X} . En dimension plus grande ou égale à deux, cette hypersurface est la frontière d'un domaine compact de \mathbf{R}^d , ce qui permet de définir un espace intérieur et un autre extérieur. Nous considérerons donc la normale extérieure à \mathcal{S} au point $x \in \mathcal{S}$ notée $n_{\mathcal{S}}(x)$. En dimension un, une hypersurface est un point, $\mathcal{S} = \{x\}$ pour un certain $x \in \mathbf{R}$ et par convention, et surtout parce que cela fait sens dans les formules, nous posons $n_{\mathcal{S}}(x) := 1$ dans ce cas.

Définissons maintenant ce qu'est un croisement de \mathcal{S} par le PDMP X . Nous dirons que X croise l'hypersurface de façon continue à l'instant τ lorsque X ne saute pas à l'instant τ , c'est-à-dire lorsque $X_{\tau^-} = X_{\tau}$, que X_{τ} est sur \mathcal{S} et enfin que X croise \mathcal{S} sans demeurer sur celle-ci :

$$\exists \delta > 0, \forall t \in]\tau - \delta, \tau + \delta[\setminus \{\tau\}, \quad X_t \notin \mathcal{S}.$$

Hypothèses. Nous supposons que le processus n'est jamais tangent à l'hypersurface :

$$\forall x \in \mathcal{S}, \quad F(x) \cdot n_{\mathcal{S}}(x) \neq 0.$$

Cette même hypothèse est faite en Section 1.2.3 par rapport à la frontière $\partial\mathbf{X}$ pour la moyennisation d'un PDMP avec des sauts forcés. Elle permet d'éviter que le processus devienne infinitésimalement proche de l'hypersurface sans jamais la croiser. Nous supposons aussi que le nombre de fois que X croise \mathcal{S} de façon continue est fini pour tout horizon temporel T .

Une autre hypothèse fondamentale, là aussi similaire aux hypothèses faites en Section 1.2.3, concerne l'existence de densité en tous temps par rapport à la mesure de Lebesgue. Nous notons f_t la densité de X_t au temps $t \geq 0$. Nous supposons que f_t est continue en tous temps au voisinage de \mathcal{S} . Enfin, nous supposons que X ne saute ni vers, ni depuis \mathcal{S} .

Nous commençons par donner les formules en dimension 1.

Théorème 3. *Pour tout niveau x et tout temps T , le nombre de croisements continus de x par X est égal presque-sûrement à*

$$|F(x)|l_T(x)$$

où $l_T(x)$ est le temps local passé en x par le processus X entre les temps 0 et T , c'est-à-dire

$$l_T(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta} \int_0^T \mathbf{1}_{[x-\delta, x+\delta]}(X_t) dt.$$

On voit bien dans ce résultat que le nombre de croisements dépend du temps passé autour du niveau considéré et de la propension du processus à « pointer » vers cette ligne de niveau. On en déduit la formule pour l'espérance suivante.

Corollaire 2. *Pour tout niveau x et tout temps T , le nombre moyen de croisements continus de x par X est égal à*

$$|F(x)| \int_0^T f_t(x) dt.$$

On peut obtenir le nombre moyen de croisements continus de bas en haut en remplaçant la valeur absolue par la valeur positive $r^+(x)$ et de la même façon le nombre moyen de croisements continus de haut en bas en la remplaçant par $r^-(x)$. En dimension $d \geq 2$ la formule prend la forme suivante.

Théorème 4. *Pour tout horizon temporel T , le nombre moyen de croisements continus de \mathcal{S} par X est égal à*

$$C_T(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} |F(x) \cdot n_{\mathcal{S}}(x)| \int_0^T f_t(x) dt \sigma_{d-1}(dx), \quad (1.6)$$

où σ_{d-1} est la mesure de surface en dimension $d - 1$.

La relation avec le temps local est malheureusement moins claire dans ce cas. Néanmoins, les hypothèses que l'on a faites permettent d'affirmer que le nombre de croisements de \mathcal{S} par le processus X est égal au nombre de croisement de 0 par le processus $\rho_{\mathcal{S}} \circ X$ où $\rho_{\mathcal{S}}$ est une fonction de classe C^1 qui caractérise \mathcal{S} (en anglais, on parle de C^1 -defining function).

Le cadre statistique

Du point de vue statistique, on peut trouver la question de compter le nombre de croisement d'une hypersurface un peu incongrue : après tout, pourquoi de pas simplement compter le nombre de fois que l'on est d'un côté puis de l'autre de cette hypersurface ? C'est-à-dire, pourquoi na pas utiliser l'estimateur empirique associé au comptage des croisements, ou, pour le dire autrement, utiliser une méthode de Monte-Carlo ? C'est évidemment possible, mais un des enseignements des formules de Kac-Rice est qu'effectivement, la position est importante, et ceci se manifeste de part la présence de la densité du processus dans la formule, mais le vecteur vitesse est manifestement aussi important. On peut donc espérer qu'en ayant accès à celui-ci, ou plutôt à une estimation de celui-ci, l'on parvienne à mieux déduire des données l'information qu'elles recèlent relativement au problème de comptage du nombre de croisements. Nous avons comparé notre approche avec l'approche empirique dans l'article [13]. Explicitons un peu la démarche et les résultats.

La densité de probabilité f_t , pour $t \in [0, T]$, qui apparaît dans le formule de Kac-Rice (1.6) est généralement inconnue mais peut être estimée, par exemple via des méthodes à noyau, à partir d'un ensemble de trajectoires échantillonnées le long de l'intervalle $[0, T]$. Dans un grand nombre d'applications, le champ de vecteur F est supposé connu car il est déduit de lois scientifiques, en particulier pour les modèles en physique et en biologie. Cela nous permet de proposer un estimateur de type *plug-in* de $C_T(\mathcal{S})$ donné par

$$\hat{C}_T(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} |F(x) \cdot n_{\mathcal{S}}(x)| \int_0^T \hat{f}_t(x) dt \sigma_{d-1}(dx)$$

où \hat{f}_t désigne un estimateur de f_t .

Nous supposons que nous observons n trajectoires $(X^{(n)})_{n \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ indépendantes d'un même PDMP sur l'intervalle de temps $[0, T]$ et échantillonnées aux temps $t_i = \frac{i-1}{n_T-1}T$ avec $n_T \in \mathbf{N}^*$ assez grand. Dans ce contexte, un estimateur naturel et usuel de f_t est l'estimateur à noyau

$$\forall x \in \mathcal{S}, \forall i \in \llbracket 1, n_T \rrbracket, \quad \hat{f}_{t_i, n}(x) = \frac{1}{n \sqrt{\det(B_n)}} \sum_{k=1}^n \mathbf{K}_d(B_n^{-1/2}(x - X_{t_i}^{(k)})) \quad (1.7)$$

où la fenêtre de lissage B_n est une matrice symétrique définie positive et \mathbf{K}_d le noyau. Nous considérons l'estimateur du nombre moyen de croisements suivant

$$\hat{C}_T^{(n,n_T)}(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} |F(x) \cdot n_{\mathcal{S}}(x)| \frac{T}{n_T - 1} \sum_{i=1}^{n_T} \hat{f}_{i,n}(x) \sigma_{d-1}(dx)$$

où l'on a estimé l'intégrale sur $[0, T]$ par la méthode des rectangles. La consistance théorique de cet estimateur est établie à partir des propriétés asymptotiques de l'estimateur à noyau (1.7). Cela permet d'obtenir le résultat suivant.

Théorème 5. *Sous de bonnes hypothèses sur le noyau \mathbf{K}_d et la fenêtre lissage B_n , l'estimateur $\hat{C}_T^{(n,n_T)}(\mathcal{S})$ converge presque-sûrement vers $C_T(\mathcal{S})$.*

Les simulations faites dans l'article [13] nous permettent de comparer l'estimateur proposé avec l'estimateur empirique de nombre de croisements (le simple comptage de ceux-ci). Lorsque le processus X est continu, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a que des changements de directions, comme dans le cas du modèle présenté en Section 1.1.3 pour un PDMP avec une description avec modes, le nombre moyen de croisements estimé par l'estimateur empirique est toujours inférieur ou égal au nombre moyen de croisements réels, certains croisements étant manqués si la grille d'échantillonnage n'est pas assez fine. Dans le cas où il peut y avoir des croisements non continus, l'estimateur empirique les compte également, ce qui n'est pas le cas des l'estimateur proposé qui ne compte que les croisements continus. On pourra remarquer que déterminer si un croisement est continu ou non de façon empirique dépend beaucoup du lien entre la finesse de la grille et la taille des sauts.

Une mise en pratique de notre méthode avec des données réelles, provenant de trajectoires GPS de goélands bruns, est aussi proposée dans l'article [13]. Pour ces données, nos estimateurs ont pour effet de lisser les estimations obtenues par l'estimateur empirique. Ces données GPS ne comportaient pas de mesures de vitesse : nous n'avons donc pas plus d'informations que dans le cas empirique. Il faut cependant noter que de telles données sont souvent disponibles grâce à l'exploitation de l'effet Doppler, permettant d'obtenir des mesures de vitesse, d'ailleurs souvent plus fiables que les données de position. L'estimateur que nous avons construit fait particulièrement sens dans un tel cas.

1.4 Discussion

Nous avons présenté, en Section 1.2 deux résultats relatifs à la moyennisation de PDMP. Ils ont permis pour l'un d'obtenir une vitesse de convergence explicite du processus lent-rapide vers sa version moyennée, dans un cadre sans frontière, et pour l'autre d'obtenir la moyennisation de la variable rapide dans un cadre avec frontière. Dans ce dernier cadre, nous avons utilisé des résultats obtenus à l'origine pour l'étude tout à fait antérieure et *a priori* indépendante présentée en Section 1.3, ayant des fins statistiques, sur le nombre moyen de croisements d'une hypersurface par un PDMP. Cet échange, un peut inattendu, entre études à motivations statistiques et études probabilistes, est particulièrement intéressant.

Ces travaux peuvent être poursuivis selon plusieurs axes, assez naturels. Un premier axe peut consister à essayer de fournir des inégalités de concentration dans le cas avec frontière. Nous travaillons actuellement sur de telles inégalités pour les processus de décision markoviens

qui ferons l'objet du Chapitre 2. Cela devrait nous permettre de fourbir nos armes afin d'attaquer ce problème pour les PDMP singulièrement perturbé avec frontière. Ce serait aussi une première étape afin de montrer un théorème de la limite centrale dans ce cadre et pourquoi pas un principe de grandes déviations. Si la moyennisation a pour effet d'annuler le champ de vecteur, la connaissance de la dynamique des fluctuations est alors d'un intérêt particulièrement important. Dans cette même ligne, il pourrait être intéressant de s'intéresser aux développements asymptotiques en ε de la densité du processus rapide à tout ordre.

Un deuxième axe est tourné vers la relaxation d'hypothèses qui nous semblent fortes dans ces travaux. Par exemple, l'ensemble des modes possibles \mathbf{Y} que l'on considère est toujours fini. C'est une restriction technique importante. La finitude de \mathbf{Y} est cruciale dans les preuves proposées. Montrer les mêmes résultats pour \mathbf{Y} non fini nécessiterait de retravailler assez profondément les hypothèses ou de proposer d'autres preuves. Nous avons souvent en tête, lorsque nous nous attaquons à des problèmes de moyennisation, l'exemple des modèles de neurones, où \mathbf{Y} peut être grand mais est toujours fini, cela doit induire un certain biais dans notre approche.

Dans le même esprit, les équations aux dérivées partielles considérées en Section 1.2.2 ont elles aussi une forme très particulière. Les hypothèses qui sont faites sont très communes et raisonnables dans ce contexte et pertinentes du point de vue des applications considérées, elles correspondent notamment à l'équation de la chaleur avec des conditions aux limites de Dirichlet. Néanmoins, ces hypothèses font qu'il n'y a pas vraiment de surprises ou de nouveautés au niveau des résultats par rapport à l'étude de PDMP singulièrement perturbés construits à partir d'une équation différentielle ordinaire. Cela est simplement plus technique, les objets mathématiques considérés étant plus complexes, en un certain sens. Il pourrait être intéressant de considérer des PDMP conduit par des EDP plus exotiques.

Nous pouvons aussi nous interroger sur les interactions avec la frontières en ce qui concerne les résultats présentés en Section 1.3.2. Quid d'une interaction avec des rebonds, des réflexions ? C'est un cadre qui à mon avis peut être un peu plus délicat à traiter. On peut sans doute tenter la même approche, à l'aide de l'étude du nombre de croisements. Dans ce contexte, après un saut forcé à la frontière, le processus peut en théorie rester proche de celle-ci. Il faut alors être capable de contrôler le nombre de fois qu'il la touche dans un intervalle de temps donné et prendre garde aux phénomènes d'accumulation, d'une façon plus fine que dans le cadre présenté en Section 1.3.2. C'est une étude que nous trouvons intéressante et que nous souhaitons mener dans le futur, en prenant soin de lire auparavant une partie de la riche littérature sur les processus réfléchis, notamment les diffusions, en commençant par [95].

Une critique que l'on peut faire sur ce travail est qu'il n'y est pas question de la convergence de la variable lente, ce qui serait pourtant possible à travers l'étude de sa mesure d'occupation, c'est-à-dire à travers l'étude de la convergence de quantités telles que

$$\int_0^T f(t) \mathbf{1}_y(Y_{\varepsilon,t}) dt$$

pour certaines fonctions f . Nous pourrions dire que la convergence de ces quantités a été traité dans [57] et que cela a beau être en dimension finie dans cet article, là n'est pas la difficulté puisque l'espace où vit X_ε est, pour la convergence de ces mesures d'occupation, assez accessible dans la preuve. Néanmoins, nous pensons que c'est plutôt par goût personnel que nous ne nous sommes pas vraiment penché sur la question jusqu'ici.

Enfin, un troisième axe concerne l'étude pour elle-même du nombre de croisements d'une hypersurface par un PDMP. L'étude de la loi de ce nombre de croisements reste en effet à mener. Il est tout à fait possible, par exemple, d'écrire des formules pour le moment d'ordre k de ce nombre moyen de croisements sur une fenêtre temporelle déterminée. Il est aussi possible de s'intéresser aux covariations de ces croisements sur des fenêtres temporelles différentes. C'est un domaine de recherche qui possède une littérature très riche pour d'autres types de processus, voir par exemple [6].

Chapitre 2

Processus de décision markoviens : existence de politiques optimales, programmation linéaire et adaptation

Depuis que je fais partie de l'équipe-projet Inria ASTRAL (anciennement CQFD) de Inria Bordeaux-Sud-Ouest, une partie de mes recherches est consacrée à l'analyse de modèles de décision stochastiques, sur les plans théoriques et pratiques (numériques).

De nombreuses applications en optimisation dynamique peuvent être décrites de la façon suivante : un certain système évolue de manière aléatoire sous le contrôle d'une séquence d'actions, le choix d'une action relevant d'une *politique*, avec pour objectif d'optimiser une certaine fonction de performance, une récompense ou un coût par exemple. Les processus de décision markoviens ont été introduits dans la littérature afin de modéliser une telle situation et leur capacité générique à modéliser des applications de la vie courante a fait et fait encore leur succès dans de nombreux domaines.

En Section 2.1, après avoir rappelé la définition d'un processus de décision markovien, nous présentons quelques problématiques reliées à ceux-ci ainsi que deux exemples. Les Sections 2.2 et 2.3 sont consacrées à la présentation des résultats des articles [52] et [51]. La Section 2.4 a pour objet le principe d'estimation et de contrôle. Nous terminons en Section 2.5 par une discussion.

2.1 Processus de décision markoviens

2.1.1 Notations et définitions principales

Nous utiliserons dans ce chapitre les notations suivantes, qui sont, lorsque cela est possible, communes avec celles du Chapitre 1. Sous une forme assez générale, un processus de décision markovien (MDP) non-stationnaire consiste en la donnée du sextuplé :

$$((\mathbf{X}_t)_{t \in \mathbf{N}^*}, (\mathbf{A}_t)_{t \in \mathbf{N}^*}, (\Psi_t)_{t \in \mathbf{N}^*}, (Q_t)_{t \in \mathbf{N}^*}, (r_t)_{t \in \mathbf{N}^*}, \nu)$$

où

- L'espace \mathbf{X}_t est l'espace des états du processus au temps $t \in \mathbf{N}^*$. La suite $(\mathbf{X}_t)_{t \in \mathbf{N}^*}$ doit être une suite d'espaces de Borel.

- L'espace \mathbf{A}_t est l'espace des contrôles ou encore des actions du processus au temps $t \in \mathbf{N}^*$. La suite $(\mathbf{A}_t)_{t \in \mathbf{N}^*}$ est aussi une suite d'espaces de Borel. Nous en profitons pour définir l'espace des histoires jusqu'au temps $t \in \mathbf{N}^*$, noté \mathbf{H}_t , de façon récursive en posant $\mathbf{H}_1 = \mathbf{X}_1$ puis $\mathbf{H}_{t+1} = \mathbf{H}_t \times \mathbf{A}_t \times \mathbf{X}_{t+1}$ pour $t \in \mathbf{N}^*$. L'espace des histoires est alors $\mathbf{H}_\infty = \prod_{t \in \mathbf{N}^*} \mathbf{X}_t \times \mathbf{A}_t$. L'histoire nous indique par quels états le processus est passé et quelles ont été les décisions prises (les actions).
- Comme toutes les actions de l'espace \mathbf{A}_t ne sont pas forcément disponibles au temps t , nous introduisons une suite de multifonctions $(\Psi_t)_{t \in \mathbf{N}^*}$ définies récursivement par

$$\Psi_1 : \mathbf{X}_1 \rightarrow \wp(\mathbf{A}_1) \setminus \{\emptyset\}$$

puis pour $t \in \mathbf{N}^*$, $t \geq 2$,

$$\Psi_t : \mathbf{K}_{t-1} \times \mathbf{X}_t \rightarrow \wp(\mathbf{A}_t) \setminus \{\emptyset\}$$

où $\mathbf{K}_t \subset \mathbf{H}_t \times \mathbf{A}_t$ est le graphe de Ψ_t . Nous supposons que ce graphe est mesurable. L'ensemble $\Psi_t(h_t)$ pour $h_t \in \mathbf{K}_{t-1} \times \mathbf{X}_t$ représente l'espace des actions disponibles au temps t lorsque l'histoire jusqu'au temps t correspond à h_t . On parle d'histoire admissible et on note $\mathbf{H}_t = \mathbf{K}_{t-1} \times \mathbf{X}_t$ pour $t \in \mathbf{N}^*$ où par abus de notation, $\mathbf{K}_0 \times \mathbf{X}_1$ désigne \mathbf{X}_1 .

- Les probabilités de transition vers un nouvel état connaissant l'histoire courante, du temps t au temps $t + 1$, sont représentées par une suite de noyaux stochastiques $(Q_t)_{t \in \mathbf{N}^*}$ sur \mathbf{X}_{t+1} sachant \mathbf{K}_t .
- La fonction de récompense au temps $t \in \mathbf{N}^*$ est $r_t : \mathbf{K}_t \rightarrow [-\infty, +\infty[$.
- Enfin, la distribution initiale du processus que l'on va considérer est la mesure de probabilité ν sur l'espace probabilisable $(\mathbf{X}_1, \mathcal{B}(\mathbf{X}_1))$.

Une politique de contrôles, ou plus simplement une politique, est une suite de noyaux stochastiques $\pi = (\pi_t)_{t \in \mathbf{N}^*}$ sur \mathbf{A}_t sachant \mathbf{H}_t tels que $\pi_t(\Psi_t(h_t)|h_t) = 1$ pour tout $h_t \in \mathbf{H}_t$. C'est donc par le biais d'une politique que les actions sont sélectionnées dans l'ensemble des actions disponibles au cours du temps, et ce en fonction de l'histoire vécue. Nous notons Π l'ensemble de toutes les politiques. On les dit souvent randomisées puisque le choix de l'action peut être aléatoire.

Une politique $\pi = (\pi_t)_{t \in \mathbf{N}^*} \in \Pi$ est dite randomisée et stationnaire si il existe un noyau stochastique ρ sur \mathbf{A} sachant \mathbf{X} satisfaisant $\rho(\mathbf{A}(x)|x) = 1$ pour tout $x \in \mathbf{X}$ et $\pi_t(\cdot|h_t) = \rho(\cdot|x_t)$ pour tout $h_t = (x_1, a_1, \dots, x_t) \in \mathbf{H}_t$ et $t \in \mathbf{N}^*$. Dans un tel cas, nous noterons ρ à la place de π pour souligner le fait que la politique randomisée et stationnaire correspondante π est générée par ρ . Nous noterons Π_ρ l'ensemble des politiques randomisées et stationnaires.

Pour rendre cela un peu plus concret, nous en venons maintenant à la construction du processus de décision associé aux caractéristiques définies. Pour cela, nous introduisons l'espace canonique (Ω, \mathcal{F}) composé de l'ensemble des trajectoires $\Omega = \mathbf{H}_\infty$ et de la tribu produit associée notée \mathcal{F} . Les projections canoniques de Ω vers l'état et l'action correspondants au temps t sont notées X_t et A_t . Autrement dit, pour

$$\omega = (y_1, b_1, \dots, y_t, b_t, \dots) \in \Omega \quad \text{nous avons} \quad X_t(\omega) = y_t \quad \text{et} \quad A_t(\omega) = b_t$$

pour $t \in \mathbf{N}^*$. Le processus des états est donc $(X_t)_{t \in \mathbf{N}^*}$ et celui des actions choisies $(A_t)_{t \in \mathbf{N}^*}$. Nous notons $\mathcal{H}_t = \sigma(X_1, A_1, \dots, X_{t-1}, A_{t-1}, X_t)$, pour $t \geq 2$, l'information engendrée par ces deux processus jusqu'à l'instant t .

Il est alors possible, pour chaque politique $\pi \in \Pi$ et chaque mesure initiale ν , en utilisant le Théorème de Ionescu Tulcea, de montrer qu'il existe une unique mesure de probabilité \mathbf{P}_ν^π sur (Ω, \mathcal{F}) telle que la loi marginale de \mathbf{P}^π sur $\mathbf{H}_t \times \mathbf{A}_t$, notée $\mathbf{P}_{\nu|\mathbf{H}_t \times \mathbf{A}_t}^\pi$, satisfait

$$\mathbf{P}_{\nu|\mathbf{H}_t \times \mathbf{A}_t}^\pi(\mathbf{K}_t) = 1,$$

pour tout $t \in \mathbf{N}^*$ et

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\nu^\pi(X_1 \in B) &= \nu(B), \quad \text{pour } B \in \mathcal{B}(\mathbf{X}_1), \\ \mathbf{P}_\nu^\pi(X_{t+1} \in C | \mathcal{H}_t \vee \sigma(A_t)) &= Q_t(C | H_t, A_t) \quad \text{pour } C \in \mathcal{B}(\mathbf{X}_{t+1}), \\ \mathbf{P}_\nu^\pi(A_t \in D | \mathcal{H}_t) &= \pi_t(D | X_1, A_1, \dots, X_{t-1}, A_{t-1}, X_t) \quad \text{pour } D \in \mathcal{B}(\mathbf{A}_t), \end{aligned}$$

\mathbf{P}_ν^π -p.s., pour tout $t \in \mathbf{N}^*$.

Une remarque en passant : on peut se demander pourquoi utiliser le Théorème de Ionescu Tulcea plutôt que le Théorème d'extension de Kolmogorov. Dans notre contexte, puisque l'on a défini le processus via les noyaux de transitions Q_t , l'application du Théorème de Ionescu Tulcea est simplement plus directe. Sur ces différents théorèmes d'existence et leurs généalogies, on pourra consulter [96].

Nous dirons que \mathbf{P}_ν^π est la mesure de probabilité stratégique générée par la politique π lorsque la distribution initiale est ν . L'espérance par rapport à cette mesure stratégique est notée \mathbf{E}_ν^π . Nous désignons par \mathcal{S} la famille des mesures de probabilités stratégiques

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{P}_\nu^\pi : \pi \in \Pi\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega). \quad (2.1)$$

Nous nous intéresserons typiquement au critère consistant tout simplement à sommer les récompenses perçues au cours du temps et à en considérer la moyenne. Ce critère correspond à la récompense totale moyenne $\mathcal{J} : \mathcal{S} \rightarrow [-\infty, +\infty[$ définie par

$$\mathcal{J}(\mathbf{P}_\nu^\pi) = \sum_{t=1}^{\infty} \int_{\mathbf{K}_t} r_t^+(H_t, A_t) d\mathbf{P}_{\nu|\mathbf{H}_t \times \mathbf{A}_t}^\pi - \sum_{t=1}^{\infty} \int_{\mathbf{K}_t} r_t^-(H_t, A_t) d\mathbf{P}_{\nu|\mathbf{H}_t \times \mathbf{A}_t}^\pi$$

où $\mathbf{P}_\nu^\pi \in \mathcal{S}$ et où par convention $(+\infty) - (+\infty) = -\infty$. Si jamais l'on n'appréciait pas cette convention, il est possible de la remplacer par la finitude d'un des deux termes. En anglais on parle d'*expected total reward* pour ce critère. Selon les caractéristiques qu'il est besoin de souligner, nous noterons aussi $\mathcal{J}_\nu(r, \pi)$ la quantité $\mathcal{J}(\mathbf{P}_\nu^\pi)$, nous ferons notamment cela dans le cadre stationnaire exposé plus bas. La dynamique du processus en relation avec les récompenses est illustrée en Figure 2.1.

Problème de contrôle optimal. Le problème de contrôle optimal que nous considérons consiste en la maximisation de cette récompense \mathcal{J} sur l'ensemble des mesures stratégiques \mathcal{S} .

Le cadre stationnaire. Dans la présentation ci-dessus, nous avons décrit un processus non-stationnaire : les espaces des états, des actions, les multifonctions, les noyaux et les récompenses dépendent toutes et tous du temps. Le cadre stationnaire, où toutes ces quantités ne dépendent plus du temps, plus simple à décrire, recouvre cependant de nombreuses applications

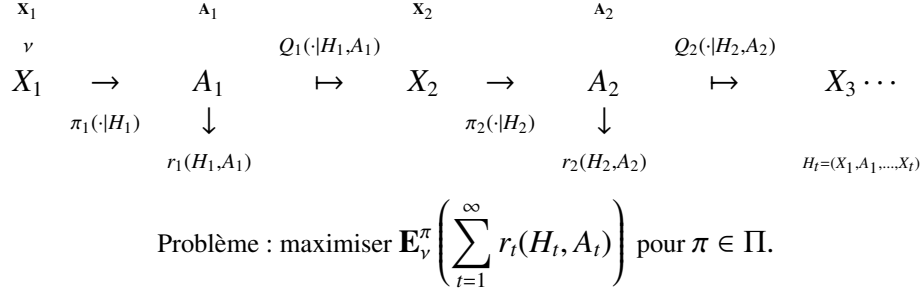


FIGURE 2.1 – Schéma d'un processus de décision markovien. Le processus débute dans un état X_1 , distribué selon une distribution initiale ν . Pour savoir quelle action l'on doit prendre, on applique la politique π_1 , qui dépend de l'état où l'on est. Cette politique nous donne une action A_1 . À ce couple état-action est associée une certaine récompense r_1 . Le processus est alors amené, en fonction de l'action choisie, vers un nouvel état X_2 , et ce selon un noyau de transition Q_1 , etc... Le problème consiste à maximiser la récompense totale moyenne, en jouant sur les politiques, et à trouver la politique optimale associée, si elle existe.

intéressantes. Une simplification supplémentaire mais là aussi souvent pertinente, consiste à représenter le graphe de la multifonction par l'ensemble

$$\mathbf{K} = \{(x, a) \in \mathbf{X} \times \mathbf{A} ; a \in \mathbf{A}(x)\}$$

où la famille $\mathbf{A}(x)$ est une famille d'ensembles mesurables non vides. L'ensemble $\mathbf{A}(x)$ représente alors l'ensemble des actions disponibles lorsque l'état du système est $x \in \mathbf{X}$. Le noyau Q est alors souvent considéré comme un noyau sur \mathbf{X} sachant \mathbf{K} . L'histoire est donc quelque peu oubliée et c'est pour cela que l'on dit ces processus markoviens. Néanmoins, les politiques peuvent dépendre, elles, toujours de toute l'histoire du processus. En cela, les MDP ne sont pas des processus markoviens au sens usuel du terme. Ils le deviennent lorsque, pour le problème d'optimisation considéré, il est possible de considérer une classe de politiques qui font que le processus est réellement markovien.

Dans le cadre stationnaire, nous considérerons que le MDP est soumis à des contraintes, au nombre de $q \in \mathbf{N}^*$:

- Pour $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$, les applications mesurables $c_i : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{R}$ sont les fonctions de contraintes.
- Les contraintes limites sont des nombres réels donnés à travers le vecteur $\theta^* = (\theta_i^*)_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket}$.

Le modèle consistera donc en la donnée de l'octuplet

$$(\mathbf{X}, \mathbf{A}, \{\mathbf{A}(x) ; x \in \mathbf{X}\}, Q, r, c, \theta^*, \nu). \quad (2.2)$$

Une politique $\pi \in \Pi$ sera dite admissible si elle satisfait aux contraintes :

$$\forall i \in \llbracket 1, q \rrbracket, \quad \mathcal{J}_\nu(c_i, \pi) \geq \theta_i^*.$$

L'ensemble des politiques admissibles est dénotée Π_{θ^*} . Le problème de contrôle optimal consiste dans ce cas à maximiser la récompense totale moyenne $\mathcal{J}_\nu(r, \pi)$ sur l'ensemble des politiques $\pi \in \Pi_{\theta^*}$. La valeur associée à ce problème de contrôle optimal avec contraintes est

$$\sup \{ \mathcal{J}_\nu(r, \pi) ; \pi \in \Pi_{\theta^*} \}.$$

2.1.2 Cadres d'étude pour les MDP

Contrairement à nos études sur les PDMP, où la problématique de la moyennisation pour ces processus spécifiques correspond à une littérature assez réduite, les problématiques que nous allons considérer pour les MDP sont très classiques et la littérature correspondante très vaste. Les résultats que nous allons présenter sont aussi par conséquent sensiblement plus techniques, les innovations dans ce domaine étant plus demandeuses de ce point de vue là.

Le livre [81], au Chapitre 1, présente *a brief guide to the literature* pour les MDP. Celle-ci est très bien faite et nous nous contenterons de dire ici que l'étude des MDP peut être retracée depuis la fin des années 1940 et le début des années 1950, avec les fameux articles de Bellman [19, 20]. Les livres [81] et [80], qui font autorité sur le sujet des MDP, présentent aussi d'autres type de critères que celui du *total reward* dont nous avons parlé, les plus connus étant peut-être la récompense moyenne avec un facteur d'actualisation, *expected discounted reward* en anglais, la récompense moyennée, *averaged reward* en anglais, et bien sûr, la récompense totale moyenne mais à horizon fini dont nous parlerons à titre d'exemple en Section 2.1.3. Il est aussi possible de considérer un coût au lieu d'une récompense et de chercher alors à minimiser un certain critère. Sur un autre plan, il est souvent naturel de souhaiter prendre en compte diverses contraintes éventuelles lors de l'optimisation et c'est ce que nous ferons en Section 2.3. Il existe par ailleurs de nombreuses variantes dans la définition des MDP. Pour terminer ce très court et orienté panorama, nous noterons enfin que l'utilisation depuis les années 2000-2010 de méthodes d'apprentissages de type *(deep/soft)-Q-learning* a donné une nouvelle impulsion à l'utilisation des MDP, l'apprentissage par renforcement pouvant être décrit de façon efficace avec le formalisme des MDP, voir par exemple [60].

Fixons-nous sur le critère exposé dans la section précédente même si ce qui est dit plus bas est valable pour d'autres types de critères. Chercher à résoudre le MDP consiste à chercher la valeur du maximum

$$\max_{\mathbf{P} \in \mathcal{S}} \mathcal{J}(\mathbf{P})$$

ainsi que la politique optimale associée, si celle-ci existe. Dans la littérature, plusieurs approches ont été proposées pour étudier un tel problème :

- **Par les équations de programmation dynamique.** Une méthode possible est basée sur l'analyse de l'équation de programmation dynamique que l'on appelle encore l'équation ou les équations de Bellman. Dans le cas fini, l'exemple de la Section 2.1.3 en offre une illustration. Cette méthode peut permettre de trouver à la fois la valeur du maximum et de construire la politique optimale associée.
- **Par les mesures d'occupation.** Dans le cas stationnaire, une autre méthode consiste à passer par la mesure d'occupation du processus (X_t, A_t) , via la ré-écriture du critère comme une intégrale contre cette mesure d'occupation. Il est intéressant de faire cela car les mesures d'occupation vérifient une équation linéaire que l'on peut espérer savoir résoudre sous de bonnes hypothèses. Là encore, cette méthode peut permettre de trouver à la fois la valeur du maximum et de construire la politique optimale associée, par désintégration de cette mesure d'occupation. Cette approche sera développée en Section 2.3, ce qui est assez original en ce qui concerne le coût total.
- **Par compacité-continuité.** Il est aussi possible d'envisager une méthode non constructive consistant à trouver une topologie appropriée sur l'ensemble des mesures de probabilité stratégiques pour s'assurer que cet ensemble est compact et que la fonctionnelle

\mathcal{J} est semi-continue sur cet espace. Cette topologie doit contenir assez d'ouverts afin de s'assurer de la semi-continuité de \mathcal{J} mais suffisamment peu pour que l'ensemble des probabilités stratégiques soit compact. Cette approche sera développée en Section 2.3 où nous proposerons un jeu d'hypothèses permettant de traiter le cas de récompenses non bornées, ce qui fait sens dans certains champs applicatifs.

Nous donnerons quelques travaux de références relatifs à ces méthodes dans les sections dédiées que sont les Sections 2.2 et 2.3.

Par ailleurs, depuis Octobre 2021, je co-encadre avec François Dufour la thèse de Romain Namyst dont le but est d'étudier un problème de contrôle optimal dans un cadre partiellement observé en temps discret avec des applications au domaine de la poursuite de cibles dans un contexte passif. On se propose d'utiliser le formalisme des MDP pour cela et plus particulièrement celui des processus de décision markoviens partiellement observés (POMDP). Le terme partiellement observé signifie que l'on n'a accès à la variable d'intérêt, la variable d'état, qu'à travers une fonctionnelle de celle-ci. Par exemple, dans certains problèmes de poursuite d'une cible, le poursuivant n'a pas accès à la position de la cible mais seulement à l'angle, de surcroît bruité, formé par la droite reliant le poursuivant à la cible et une autre direction bien définie (le nord par exemple). Ce problème de poursuite est très étudié et ce depuis longtemps, on pourra consulter sur ce sujet [101, Section 1.4]. Une façon de résoudre ce genre de problèmes consiste à plonger celui-ci dans un cadre complètement observé. En général, cela se fait au prix du changement de l'espace des états qui devient alors un espace de probabilité appelé couramment espace des *beliefs*. Passant d'un certain espace à l'espace des probabilités sur celui-ci, le problème considéré demeure particulièrement difficile, notamment en ce qui concerne sa résolution pratique, comme le font remarquer les auteurs de [23] :

The introduction of the belief state is a hallmark of the classical partially observed Markovian decision problem (POMDP), which is among the most challenging DP problems, and in practice requires the use of approximations for suboptimal solution. The POMDP approach to adaptive control is part of the folklore of control theory. For example, it is discussed in detail in the survey by Kumar [93], which gives many related references.

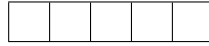
Dans le même esprit, il est assez classique de considérer que le MDP est paramétrisé par un paramètre dont la valeur est *a priori* inconnue. On cherche alors à estimer celui-ci tout en contrôlant au mieux le processus. C'est le principe d'estimation et de contrôle tel qu'exposé dans [79, Section 5.5]. On ne parle plus de MDP partiellement observé mais de contrôle *adaptatif*. Nous présenterons cette approche en Section 2.4.

2.1.3 Exemples de MDP

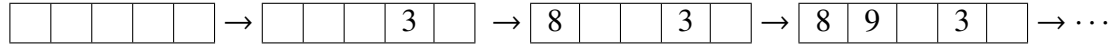
But who's counting?

Voici un exemple simple, où toutes les caractéristiques du MDP sont finies, même l'horizon. Cet exemple est décrit dans [109] et il m'est souvent d'un grand secours pour expliquer ce qu'est un MDP aux étudiants. Il est particulièrement intéressant du point de vue de la modélisation.

Dans le jeu *But who's counting?*, un joueur dispose au départ d'un tableau avec 5 places disponibles :



Il tourne alors une roue à 10 chiffres afin d'obtenir un chiffre entre 0 et 9. Il doit alors placer ce chiffre dans le tableau puis il recommence : il tourne la roue, il place le chiffre obtenu, etc... jusqu'à ce qu'il ait rempli le tableau. On peut obtenir par exemple la suite de tableaux :



Le but du joueur est de trouver où mettre le chiffre obtenu de façon à obtenir le plus grand nombre à 5 chiffres possible.

Nous allons quant à nous essayer de trouver la stratégie qui permet d'obtenir, en moyenne, le nombre à 5 chiffres le plus grand. Pour cela, nous adoptons le formalisme des MDP. On peut se convaincre que pour résoudre le problème, il suffit de considérer à chaque temps la configuration du tableau, c'est-à-dire, quelles sont les places prises et les places disponibles, ainsi que le numéro tiré. Choisissons de modéliser le tableau par un quintuplet de 0 et de 1 avec 0 lorsque la place est vide et 1 lorsqu'elle est prise. Si on considère comme temps initial 0, l'espace des états est

$$\mathbf{X}_0 = \{(0, 0, 0, 0, 0)\} \times \llbracket 0, 9 \rrbracket.$$

L'espace des actions disponibles est

$$\mathbf{A}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

où 0 signifie que l'on met le chiffre d dans la case la plus à droite, c'est-à-dire que d sera le chiffre des unités, 1 signifie que d sera le chiffre des dizaines, etc... D'ailleurs, convenons, pour cet exemple, que lorsqu'on écrit $p \in \{0, 1\}^5$, on adopte la convention :

$$p = (p_4, p_3, p_2, p_1, p_0).$$

Au temps 1, l'espace des états devient

$$\mathbf{X}_1 = \left\{ (p, d) ; p \in \{0, 1\}^5, \sum_{i=0}^4 p_i = 1, d \in \llbracket 0, 9 \rrbracket \right\}$$

tandis que l'espace des actions devient, pour $(p, d) \in \mathbf{X}_1$,

$$\mathbf{A}_1((p, d)) = \{0, 1, 2, 3, 4\} \setminus \{i \in \{0, 1, 2, 3, 4\} ; p_i = 1\}.$$

En fait, cet espace des actions disponibles ne dépend pas vraiment du temps, il est toujours possible de l'écrire sous la forme

$$\mathbf{A}((p, d)) = \{0, 1, 2, 3, 4\} \setminus \{i \in \{0, 1, 2, 3, 4\} ; p_i = 1\}.$$

L'espace \mathbf{X}_t est défini par

$$\mathbf{X}_t = \left\{ (p, d) ; p \in \{0, 1\}^5, \sum_{i=0}^4 p_i = t, d \in \llbracket 0, 9 \rrbracket \right\}$$

pour $t \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$.

Le noyau de transition est donné par

$$Q(\{(p', d')\} | (p, d), a) = \frac{1}{10}$$

où d et d' sont deux chiffres entre 0 et 9, $p \in \{0, 1\}^5$, $a \in \mathbf{A}((p, d))$ et p' est tel que

$$p'_i = \begin{cases} p_i & \text{si } i \in \llbracket 0, 4 \rrbracket \setminus \{a\}, \\ 1 & \text{si } i = a. \end{cases}$$

Nous notons $(X_t = (P_t, D_t), A_t)_{t \in \llbracket 0, 5 \rrbracket}$ le MDP associé. Dire que nous souhaitons obtenir le plus grand nombre en moyenne signifie que l'on souhaite maximiser sur toutes les mesures stratégiques le critère

$$\mathbf{E}_\nu^\pi \left(\sum_{t=0}^4 D_t 10^{A_t} \right)$$

avec ν la mesure de probabilité uniforme sur \mathbf{X}_0 . La fonction récompense est donc

$$r((p, d), a) = d10^a$$

pour un état (p, d) et $a \in \mathbf{A}((p, d))$. Par commodité, la récompense terminale r_5 est aussi définie par

$$r_5((p, d)) = 0$$

pour tout $(p, d) \in \mathbf{X}_5$. Les équations de Bellman nous permettent de résoudre le problème :

$$\begin{cases} J_5(x) = r_5(x), & \text{pour } x \in \mathbf{X}_5, \\ J_t(x) = \max_{a \in \mathbf{A}(x)} \left\{ r(x, a) + \sum_{d'=0}^9 J_{t+1}((p', d')) Q(\{(p', d')\} | (p, d), a) \right\}, & \text{pour } x \in \mathbf{X}_t \\ & \text{et } t \in \llbracket 0, 4 \rrbracket. \end{cases}$$

La valeur recherchée, la fonction valeur, sera alors

$$\frac{1}{10} \sum_{d=0}^9 J_0((p, d))$$

avec $p = (0, 0, 0, 0, 0)$ comme indiqué dans [81, Section 3.2]. Une implémentation de ces équations donne comme fonction valeur 78 733, 8. Le lecteur attentif notera que la valeur numérique que nous trouvons diffère de 0, 32 de la valeur indiquée dans [109], différence sans doute imputable à l'évolution des précisions machines. Le plus intéressant dans ce problème, est que la résolution des équations de Bellman nous indique quelle est la meilleure stratégie de placement des chiffres à chaque étape. Nous pouvons résumer cela dans un tableau comme donné en Figure 2.2. La symétrie des colonnes par rapport à la médiane 4, 5 nous indique que nous aurions sans doute pu résoudre ce problème spécifique autrement.

Un peu de programmation linéaire

Notre but est d'illustrer le concept de programmation linéaire sur un exemple académique et surtout d'illustrer les difficultés auxquelles l'on peut faire face dans le cadre du coût total

Chiffre aléatoire obtenu	Place optimale (0 étant la place la plus à droite)				
	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	1	1	0	0	0
4	2	1	1	0	0
5	2	2	1	1	0
6	3	2	2	1	0
7	4	3	2	1	0
8	4	3	2	1	0
9	4	3	2	1	0

FIGURE 2.2 – Grille de résolution du jeu *But who's counting?*.

dans une telle situation. Cela nous permet aussi de donner un peu de vocabulaire dans un cadre un peu moins aride.

Le modèle. Rappelons que nous nous plaçons dans le cadre stationnaire. Nous considérons un MDP dont l'espace des états est

$$\mathbf{X} = \mathbf{Z} \cup \{\Delta\}$$

où Δ est un état dit cimetière. L'ensemble des actions est lui donné par $\mathbf{A} = \{a, b\}$. Pour $x \neq 1$, il n'y a qu'une seule action de disponible et c'est a : $\mathbf{A}(x) = \{a\}$. Pour $x = 1$, les deux actions sont disponibles : $\mathbf{A}(1) = \{a, b\}$. La mesure de probabilité initiale ν est uniforme sur $\{1, \Delta\}$: $\nu(1) = \nu(\Delta) = \frac{1}{2}$. Les transitions sont telles que

$$\forall x \in \mathbf{Z}, x \leq 0, \quad Q(x+1|x, a) = 1$$

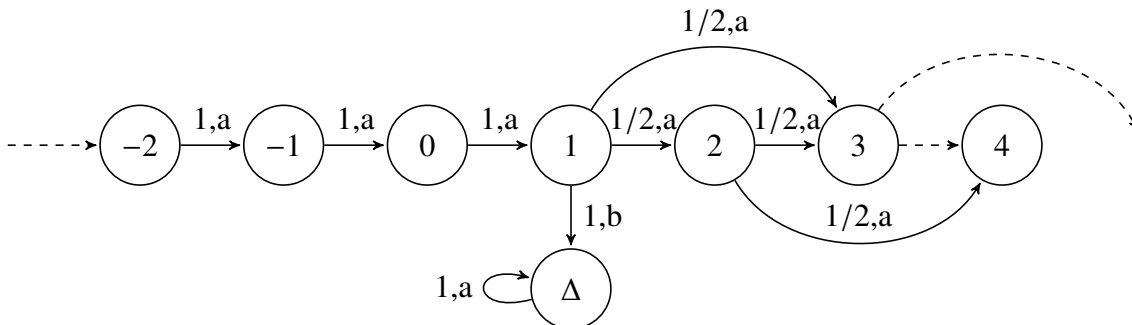
et

$$\forall x \in \mathbf{Z}, x \geq 1, \quad Q(x+1|x, a) = Q(x+2|x, a) = \frac{1}{2}$$

et enfin

$$Q(\Delta|1, b) = Q(\Delta|\Delta, a) = 1.$$

Le graphe suivant illustre la dynamique du processus selon les actions choisies :



La fonction récompense r est donnée par

$$\forall x \in \mathbf{Z} \setminus \{1\}, \quad r(x, a) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$$

et

$$r(1, a) = r(1, b) = \frac{1}{2}, \quad r(\Delta, a) = 0.$$

La fonction de contrainte c est définie par

$$\forall x \in \mathbf{Z} \setminus \{1\}, \quad c(x, a) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{|x|}$$

et

$$c(1, a) = -\frac{1}{18}, \quad c(1, b) = 1, \quad c(\Delta, a) = 0.$$

avec pour contrainte limite θ^* . Notre but est de maximiser la récompense totale

$$\mathbf{E}_v^\pi \left(\sum_{t=1}^{\infty} r(X_t, A_t) \right)$$

tout en faisant en sorte de satisfaire la contrainte

$$\mathbf{E}_v^\pi \left(\sum_{t=1}^{\infty} c(X_t, A_t) \right) \geq \theta^*.$$

Nous notons Π_{θ^*} l'ensemble des politiques $\pi \in \Pi$ satisfaisant cette contrainte. Une telle politique sera dite admissible.

Le principe de la programmation linéaire. La programmation linéaire se base sur l'observation qu'il est possible d'écrire la récompense totale sous la forme

$$\mathbf{E}_v^\pi \left(\sum_{t=1}^{\infty} r(X_t, A_t) \right) = \int_{\mathbf{X} \times \mathbf{A}} r(x, a) \mu_v^\pi(dx, da)$$

où la mesure μ_v^π est la mesure d'occupation associée au MDP définie pour $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbf{X} \times \mathbf{A})$ par

$$\mu_v^\pi(\Gamma) = \sum_{t=1}^{\infty} \mathbf{P}_v^\pi((X_t, A_t) \in \Gamma),$$

avec $\pi \in \Pi_{\theta^*}$. Il est bien sûr possible de faire de même pour la contrainte. Remarquons qu'il se peut que la mesure d'occupation prenne la valeur $+\infty$. Ceci n'a pas lieu si l'on considère le critère de la récompense totale avec actualisation. En effet, si il existe un facteur d'actualisation noté $\beta \in]0, 1[$, la mesure d'occupation s'écrit

$$\mu_{v,\beta}^\pi(\Gamma) = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \mathbf{P}_v^\pi((X_t, A_t) \in \Gamma).$$

Dans ce cas, la mesure d'occupation est une mesure finie à support dans \mathbf{K} qui satisfait l'équation linéaire, dite équation caractéristique,

$$\mu_{\mathbf{X}} = v + \beta \mu Q \tag{2.3}$$

où pour une mesure μ sur $\mathbf{X} \times \mathbf{A}$, $\mu_{\mathbf{X}}$ est la marginale de μ sur \mathbf{X} et

$$\mu Q(dx) = \int_{\mathbf{X} \times \mathbf{A}} Q(dx|y, a) \mu(dy, da).$$

Il est alors possible de montrer que toute mesure μ satisfaisant l'équation linéaire (2.3) est aussi une mesure d'occupation, c'est-à-dire qu'il lui correspond un $\pi \in \Pi_{\theta^*}$ tel que $\mu = \mu_{\nu}^{\pi}$, voir [81, Section 6]. Cela n'est plus vrai dans le cas de la récompense totale, où l'équation vérifiée est

$$\mu_{\mathbf{X}} = \nu + \mu Q \quad (2.4)$$

pour μ une mesure sur $\mathbf{X} \times \mathbf{A}$ à support dans \mathbf{K} . Il se peut qu'il existe alors des mesures fantômes qui sont solutions de (2.4) mais qui ne correspondent pas à des mesures d'occupation. Le but de l'article présenté en Section 2.3 est d'apprendre, en quelque sorte, à éliminer ces fantômes.

Résolution du problème avec facteur d'actualisation. Illustrons la résolution du problème initial par programmation linéaire en la présence d'un facteur d'actualisation $\beta \in]0, 1[$. Notre but est donc de maximiser la récompense totale

$$\mathbf{E}_{\nu}^{\pi} \left(\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} r(X_t, A_t) \right)$$

tout en faisant en sorte de satisfaire la contrainte

$$\mathbf{E}_{\nu}^{\pi} \left(\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} c(X_t, A_t) \right) \geq \theta^*.$$

Comme indiqué plus haut, cela revient à vouloir maximiser

$$\mu(r) = \int_{\mathbf{X} \times \mathbf{A}} r(x, a) \mu(dx, da),$$

sous la contrainte

$$\mu(c) = \int_{\mathbf{X} \times \mathbf{A}} c(x, a) \mu(dx, da) \geq \theta^*,$$

lorsque μ est une mesure finie qui satisfait l'équation linéaire

$$\mu_{\mathbf{X}} = \nu + \beta \mu Q.$$

Cette équation linéaire implique que μ est de masse égale à $\frac{1}{1-\beta}$. L'équation linéaire donne le système

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mu(x, a) = \beta \mu(x-1, a), & \text{pour } x \in \mathbf{Z}, x \leq 0, \\ \mu(1, a) + \mu(1, b) = \frac{1}{2} + \beta \mu(0, a), \\ \mu(2, a) = \frac{1}{2} \beta \mu(1, a), \\ \mu(x+2, a) = \frac{1}{2} \beta \mu(x+1, a) + \frac{1}{2} \beta \mu(x, a), & \text{pour } x \in \mathbf{Z}, x \geq 1, \\ \mu(\Delta, a) = \frac{1}{2} + \beta \mu(\Delta, a) + \beta \mu(1, b). \end{array} \right.$$

Les équations

$$\mu(x, a) = \beta \mu(x-1, a) \quad \text{pour } x \in \mathbf{Z}, x \leq 0$$

impliquent, comme $\beta \in]0, 1[$, que $\mu(x, a) = 0$ pour $x \leq 0$. Il est alors possible d'exprimer toutes les autres quantités en fonction de $\mu(1, a)$. Nous obtenons

$$\begin{cases} \mu(x, a) = 0 & \text{pour } x \in \mathbf{Z}, x \leq 0, \\ \mu(1, b) = \frac{1}{2} - \mu(1, a) \\ \mu(x, a) = \frac{2\mu(1, a)}{\sqrt{\beta(\beta+8)}} \left(\left(\frac{\beta + \sqrt{\beta(\beta+8)}}{4} \right)^x - \left(\frac{\beta - \sqrt{\beta(\beta+8)}}{4} \right)^x \right) & \text{pour } x \in \mathbf{Z}, x \geq 1, \\ \mu(\Delta, a) = \frac{1}{1-\beta} \left(\frac{1}{2} + \beta \left(\frac{1}{2} - \mu(1, a) \right) \right) \\ \mu(1, a) \in [0, 1/2]. \end{cases}$$

Avec ces données, nous pouvons calculer

$$\mu(r) = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \frac{\beta}{(8-3\beta)} \mu(1, a)$$

et

$$\mu(c) = \frac{1}{2} - \frac{76+5\beta}{9(8+\beta)} \mu(1, a)$$

avec $\mu(1, a) \in [0, 1/2]$. Avec pour contrainte limite $\theta^* = \frac{1}{4}$ par exemple, on doit donc maximiser

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \frac{\beta}{(8-3\beta)} \mu(1, a)$$

pour $\mu(1, a) \in \left[0, \frac{1}{4} \frac{9(8+\beta)}{76+5\beta} \right]$ et la fonction valeur vaut donc

$$\frac{1}{4} + \frac{27\beta(8+\beta)}{8(8-3\beta)(76+5\beta)}$$

avec $\mu^*(1, a) = \frac{1}{4} \frac{9(8+\beta)}{76+5\beta}$.

Retour sur la récompense totale et les mesures fantômes. Notons qu'il est tout à fait naturel, au vu de la dynamique du processus et de sa mesure initiale, que la résolution de l'équation linéaire confirme que la mesure d'occupation soit nulle pour tout (x, a) avec $x \leq 0$. Cependant, si l'on considère le cas de la récompense totale, c'est-à-dire $\beta = 1$, on obtient alors les équations

$$\begin{cases} \mu(x, a) = \mu(x-1, a) & \text{pour } x \in \mathbf{Z}, x \leq 0, \\ \mu(1, a) + \mu(1, b) = \frac{1}{2} + \mu(0, a), \\ \mu(2, a) = \frac{1}{2} \mu(1, a), \\ \mu(x+2, a) = \frac{1}{2} \mu(x+1, a) + \frac{1}{2} \mu(x, a) & \text{pour } x \in \mathbf{Z}, x \geq 1, \\ \mu(\Delta, a) = \frac{1}{2} + \mu(\Delta, a) + \mu(1, b). \end{cases} \quad (2.5)$$

Il se trouve que ces équations admettent des solutions telles que la mesure d'occupation est non nulle en $\{(x, a)\}$ avec $x \leq 0$. De telles mesures, encore une fois, au vu de la dynamique du processus et de sa mesure initiale, ne peuvent pas correspondre à de réelles mesures d'occupation : ce sont des mesures fantômes.

2.2 Une approche par compacité-continuité pour le coût total pour des récompenses non bornées et des espaces d'actions non compacts

2.2.1 Quelques éléments de contexte

Dans cette section, notre objectif est de fournir des conditions suffisantes pour l'existence de stratégies optimales pour le problème de la maximisation de l'espérance de la récompense totale. Le modèle de MDP considéré est assez général puisque la fonction de récompense peut être non bornée à la fois supérieurement et inférieurement et que les ensembles d'actions disponibles à chaque étape pour le contrôleur ne sont pas nécessairement compacts.

Voici un exemple typique de modèle que nous souhaitons être capable de considérer. L'espace des états est donné par l'intervalle $\mathbf{X} = [0, 1]$, l'espace des actions est $\mathbf{A} = \mathbf{N}^*$ et la fonction récompense r , qui ne dépend pas du temps ici, est définie par

$$r(x, a) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, a) \in \{0\} \times \mathbf{A} \\ \frac{1}{a^2} \frac{1}{\sqrt{x}} I_{]0,1/2]}(x) - a \frac{1}{\sqrt{1-x}} I_{]1/2,1[}(x) & \text{si } (x, a) \in]0, 1[\times \mathbf{A} \\ -\infty, & \text{si } (x, a) \in \{1\} \times \mathbf{A}. \end{cases}$$

Notons que cette fonction récompense r n'est ni semi-continue supérieurement, ni bornée supérieurement. De plus, elle peut prendre la valeur $-\infty$. Ce type de fonctions n'avaient pas été pris en considération dans la littérature, voir par exemple [15, 16, 103, 117, 118].

Pour pouvoir considérer de telles fonctions, nous utilisons une approche dans la lignée des travaux développés dans les articles susmentionnés [15, 16, 103, 117, 118] et qui consiste, comme déjà indiqué dans la section précédente, à trouver une topologie appropriée sur l'ensemble des mesures de probabilité stratégiques pour s'assurer que cet ensemble est compact et que l'espérance de la fonctionnelle de la récompense est semi-continue. Cette technique est assez classique dans la littérature. Dans le contexte des ensembles d'actions compacts, elle a été étudiée par de nombreux auteurs, voir par exemple [15, 103, 117, 118]. Dans [16], cette méthode a été généralisée au cas d'éventuels ensembles d'actions non compacts en introduisant la condition dite de coercivité forte sur la fonction de récompense. Une condition fondamentale utilisée dans tous les travaux [15, 16, 117] est de considérer que la fonction de récompense est bornée supérieurement (ou de manière équivalente, bornée inférieurement pour une fonction de coût). Cependant de nombreux modèles réels ne satisfont pas cette propriété, en particulier en économie où la fonction d'utilité peut être logarithmique et prendre la valeur $-\infty$ pour certains états. De nouveaux ensembles de conditions ont été alors étudiés comme par exemple dans [86]. Les auteurs fournissent des résultats d'existence basés sur l'analyse de l'équation d'optimalité de Bellman.

Nous utilisons une autre approche en suivant la ligne développée dans [16] pour montrer l'existence de stratégies optimales dans le cadre général d'une fonction de récompense non bornée, généralisant ainsi les résultats de [16]. L'existence de stratégies optimales est obtenue sous des conditions assez générales qui nous permettent notamment de ne pas demander la compacité de l'espace des actions. Ce travail nous a aussi amené à donner une caractérisation originale du théorème Portmanteau qui caractérise la convergence en loi des variables aléatoires. Nous avons montré que la classe de détermination pour la convergence en loi, celle des

fonctions continues et bornées, peut-être relâchée à celle des fonctions non partout bornées et semi-continues supérieurement.

2.2.2 Where is my coat?

Afin d'obtenir notre résultat, nous avons été amené à donner une caractérisation originale, du moins à notre connaissance, du théorème Portmanteau qui caractérise la convergence en loi des variables aléatoires. Comme explicité ci-dessous, nous avons montré que la classe de détermination pour la convergence en loi, celle des fonctions continues et bornées, peut-être relâchée à celle des fonctions non partout bornées et semi-continues supérieurement. C'est une extension somme toute assez modeste du célèbre théorème, mais elle n'est pas selon nous dénuée d'intérêt dans le sens où sa portée est assez générale. Elle était par ailleurs cruciale pour la démonstration de notre résultat principal.

Par définition, une suite de mesures de probabilité (μ_n) sur un espace métrique \mathbf{X} converge faiblement vers une mesure μ si pour toute fonction u continue et bornée sur \mathbf{X} ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{X}} u d\mu_n = \int_{\mathbf{X}} u d\mu.$$

Le théorème Portmanteau, aussi connu sous le nom de théorème d'Alexandroff, voir [25, Corollary 8.2.5], nous enseigne que la condition de continuité pour la classe de fonctions tests u peut être affaiblie à de la semi-continuité. La convergence faible de μ_n vers μ est ainsi équivalente au fait que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{X}} u d\mu_n \leq \int_{\mathbf{X}} u d\mu$$

pour toute fonction u semi-continue supérieurement et bornée supérieurement. Cette condition de bornitude peut elle-même être affaiblie à une propriété d'uniforme intégrabilité de la classe de fonctions tests considérées. Par exemple, avec nos notations, le résultat [128, Theorem 2] revêt la forme suivante.

Théorème 6 ([128]). *Une suite (μ_n) de mesures de probabilités sur un espace métrique \mathbf{X} converge faiblement vers une mesure de probabilité μ si, et seulement si, pour toute fonction continue u qui est asymptotiquement uniformément intégrable, c'est-à-dire vérifiant*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}, C_\varepsilon > 0, \forall n \geq n_\varepsilon, \int_{\{|u| \geq C_\varepsilon\}} |u| d\mu_n < \varepsilon,$$

nous avons la convergence

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{X}} u d\mu_n = \int_{\mathbf{X}} u d\mu.$$

Nous proposons dans [52] une approche permettant d'affaiblir à la fois la condition de semi-continuité et celle de bornitude.

Théorème 7. *Une suite (μ_n) de mesures de probabilités sur un espace métrique \mathbf{X} converge faiblement vers une mesure de probabilité μ si, et seulement si, pour toute fonction $u : \mathbf{X} \rightarrow [-\infty, +\infty[$ satisfaisant les conditions :*

— u^+ est intégrable par rapport à μ :

$$\int_{\mathbf{X}} u^+ d\mu < +\infty ; \quad (2.6)$$

— pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble fermé \mathbf{X}_ε de \mathbf{X} satisfaisant

$$\sup_n \int_{\mathbf{X} \setminus \mathbf{X}_\varepsilon} [u^+ \vee 1] d\mu_n < \varepsilon ; \quad (2.7)$$

— la restriction de u à \mathbf{X}_ε est semi-continue et bornée supérieurement ; nous avons,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{X}} u d\mu_n \leq \int_{\mathbf{X}} u d\mu. \quad (2.8)$$

Bien sûr, la condition (2.7) peut être affaiblie à l'existence, pour tout $\varepsilon > 0$, d'un sous-ensemble fermé \mathbf{X}_ε et d'un entier n_ε tel que

$$\sup_{n \geq n_\varepsilon} \int_{\mathbf{X} \setminus \mathbf{X}_\varepsilon} [u^+ \vee 1] d\mu_n < \varepsilon.$$

Il n'est alors pas difficile de se rendre compte que si l'on rajoute à cette condition l'hypothèse que u soit continue supérieurement et bornée supérieurement, alors cela implique l'intégrabilité uniforme asymptotique de u . La condition que nous proposons semble donc plus forte, en ce sens, que l'uniforme intégrabilité asymptotique. Mais dans notre cas, u n'est semi-continue que sur un certain sous-ensemble \mathbf{X}_ε , ce qui fait qu'en ce sens l'ensemble des conditions proposées dans le Théorème 7 est plus faible que les conditions proposées dans Théorème 6.

Le résultat suivant est une conséquence directe du Théorème 7. Il transpose le résultat de type Portmanteau en une propriété de continuité de la fonctionnelle

$$\mathbf{P} \mapsto \int_{\mathbf{X}} u d\mathbf{P}$$

sur un sous-ensemble \mathcal{P} de $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ pour des u bien choisies.

Corollaire 3. Soit \mathbf{X} un espace métrique. Considérons un sous-espace \mathcal{P} de $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ et une fonction u sur \mathbf{X} tels que

— pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace fermé \mathbf{X}_ε de \mathbf{X} tel que

$$\sup_{\mathbf{P} \in \mathcal{P}} \int_{\mathbf{X} \setminus \mathbf{X}_\varepsilon} (u^+ \vee 1) d\mathbf{P} < \varepsilon,$$

— la restriction de u à \mathbf{X}_ε est semi-continue et bornée supérieurement.

Alors la fonction $\mathbf{P} \mapsto \int_{\mathbf{X}} u d\mathbf{P}$ définie sur \mathcal{P} est semi-continue et bornée supérieurement.

C'est bien sous cette forme que le résultat nous est utile : la fonction $\mathbf{P} \mapsto \int_{\mathbf{X}} u d\mathbf{P}$ sera pour nous la fonction qui à une mesure stratégique associe l'intégrale de la récompense totale contre celle-ci.

2.2.3 Un résultat

Nous proposons dans l'article [52] les jeux d'hypothèses suivants.

Condition de sommabilité. Nous supposons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{p \geq n} \sup_{\pi \in \Pi} \left[\sum_{t=n}^p \mathbf{E}_v^\pi (r_t(H_t, A_t)) \right]^+ = 0.$$

Cette condition est la Condition (C) des articles de Schäl [116, 117]. Elle est un peu plus faible que la Condition (A3) que l'on trouve dans l'article de [16]. Sur ce type de conditions, on pourra aussi consulter [89, Remark 6.11].

Condition de continuité du noyau. Pour tout $t \in \mathbf{N}^*$, toute application g continue et bornée sur \mathbf{X}_{t+1} et tout $\varepsilon > 0$ il existe un sous-ensemble fermé C_ε de \mathbf{K}_t tel que

$$\sup_{\pi \in \Pi} \mathbf{E}_v^\pi (\mathbf{1}_{\mathbf{K}_t \setminus C_\varepsilon}(H_t, A_t)) < \varepsilon$$

et tel que l'application à valeurs réelles définie sur C_ε par

$$(x_1, a_1, \dots, x_t, a_t) \mapsto Q_t g(x_1, a_1, \dots, x_t, a_t)$$

est continue. Cette condition est usuelle dans ce contexte, voir par exemple la condition (C2) dans [15] ainsi que la condition (A1) dans [16]. Cette hypothèse nous dit que le noyau de transition au temps t est faiblement continu sur un sous-ensemble fermé de \mathbf{K}_t , pour $t \in \mathbf{N}^*$. Il est possible de proposer des conditions sur les données du MDP qui impliquent cette hypothèse, voir par exemple [15, Section 3].

Condition de coercivité sur la récompense. Pour tout $t \in \mathbf{N}^*$, $\varepsilon > 0$ il existe K_ε , un sous-espace fermé de H_t , satisfaisant

$$\sup_{\pi \in \Pi} \mathbf{E}_v^\pi (\mathbf{1}_{H_t \setminus K_\varepsilon}(H_t) [1 \vee r_t^+(H_t, A_t)]) < \varepsilon \quad (2.9)$$

et tel que la restriction de r_t à $(K_\varepsilon \times \mathbf{A}_t) \cap \mathbf{K}_t$ est fortement coercive et bornée supérieurement. Nous demandons donc en particulier que la probabilité que le processus vive là où la fonction récompense n'a pas forcément de bonnes propriétés soit aussi petite que possible et cela uniformément en les politiques.

Rappelons que selon [16], pour deux espaces métriques \mathbf{X} et $\tilde{\mathbf{X}}$ et un sous-ensemble B de $\mathbf{X} \times \tilde{\mathbf{X}}$, une fonction $u : B \rightarrow [-\infty, +\infty)$ est dite fortement coercive sur B si pour toute suite $\{(y_k, z_k)\}_{k \in \mathbf{N}}$ dans B tel que $y_k \rightarrow y^*$ pour un certain $y^* \in Y$ et $\beta = \limsup_k u(y_k, z_k) > -\infty$, il existe un sous-suite $\{z_{k_j}\}$ de $\{z_k\}$ et $z^* \in Z$ tels que $z_{k_j} \rightarrow z^*$, $(y^*, z^*) \in B$ et $u(y^*, z^*) \geq \beta$. Une des conséquences directes de la définition est qu'une fonction fortement coercive est aussi semi-continue supérieurement. Néanmoins, il n'est pas difficile d'exhiber des fonctions semi-continues supérieurement qui ne sont pas fortement coercives. Cette définition de la coercivité forte est consistante avec la notion de coercivité que l'on trouve dans la littérature. En effet, si $u : \mathbf{X} \times \tilde{\mathbf{X}} \rightarrow [-\infty, +\infty)$ est fortement coercive avec $(\tilde{\mathbf{X}}, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, alors, pour tout $y \in \mathbf{X}$, nous avons $\lim_{\|z\| \rightarrow \infty} u(y, z) = -\infty$.

Cette hypothèse est sans doute la nouveauté principale de l'article [52]. Elle généralise la condition (A2) de [16] au cas où la fonction récompense peut ne pas être bornée supérieurement. On observera que dans les références [15, 16, 116, 117], les fonctions récompenses sont toujours bornées supérieurement. Dans [87], au contraire, les auteurs étudient un MDP avec un facteur d'actualisation lorsque les espaces d'états et d'actions sont généraux et la fonction récompense possiblement non bornée supérieurement. La situation qu'ils considèrent est en fait un cas particulier de la situation présentée ici. On remarquera enfin que la condition proposée, et tout le cadre proposé en fait, permet de considérer des récompenses qui prennent en compte toute l'histoire du processus, contrairement à ce qui est proposé dans [16].

On peut déduire de ces hypothèses que pour tout $t \in \mathbf{N}^*$,

$$\sup_{\mathbf{P} \in \mathcal{S}} \int_{\mathbf{K}_t} r_t^+(H_t, A_t) d\mathbf{P}_{|\mathbf{H}_t \times \mathbf{A}_t} < \infty,$$

de sorte que la fonction récompense considérée fait sens. Le résultat principal de l'article [52] est le suivant.

Théorème 8. *Sous les hypothèses présentées et si il existe une mesure de probabilité stratégique $\mathbf{P}_m \in \mathcal{S}$ telle que $\mathcal{J}(\mathbf{P}_m) > -\infty$, il existe alors une politique $\pi^* \in \Pi$ telle que*

$$\sup_{\mathbf{P} \in \mathcal{S}} \mathcal{J}(\mathbf{P}) = \mathcal{J}(\mathbf{P}_v^*).$$

L'idée générale de la preuve est assez simple, les détails le sont un peu moins : on se propose de montrer que la fonction \mathcal{J} est semi-compacte supérieurement, c'est-à-dire que ses hypographe sont d'adhérences compactes, de telle sorte que l'ensemble $\{\mathcal{J} \geq \mathcal{J}(\mathbf{P}_m)\}$ est relativement compact. L'application \mathcal{J} étant aussi semi-continue supérieurement, elle admet un maximum sur l'espace compact donné par la fermeture de $\{\mathcal{J} \geq \mathcal{J}(\mathbf{P}_m)\}$. La modification du théorème de Portmanteau que nous avons considérée en Section 2.2.2 est un ingrédient fondamental pour montrer que sous les hypothèses considérées, l'application \mathcal{J} est en effet à la fois semi-continue et semi-compacte supérieurement.

2.3 Programmation linéaire pour le coût total

2.3.1 Quelques éléments de contexte et problématique

Rappelons que nous avons introduit l'idée générale qui sous-tend la programmation linéaire dans le deuxième exemple de la Section 2.1.3. Il est donc sans doute souhaitable de lire cet exemple avant d'entamer la présente section. Dans l'exemple, nous nous sommes permis de considérer des contraintes. C'est que, pour des problèmes stationnaires, la programmation linéaire ou encore convexe s'est montrée particulièrement efficace pour la résolution des processus de décision markoviens avec contraintes, voir [80]. La programmation convexe peut être appliquée à une large gamme de problèmes de contrôle comme les problèmes à horizon fini ou les problèmes à horizon infini mais en général, avec un facteur d'actualisation. Pour ces critères, comme on l'a vu, l'idée principale est de reformuler le problème de contrôle dynamique original comme un problème d'optimisation statique de dimension infinie sur un espace de mesures finies donné par les mesures d'occupation du processus contrôlé.

Il faut alors bien souligner que cela n'est en général pas envisageable pour le critère de la récompense totale moyenne, sauf évidemment pour des modèles très spécifiques. Ce critère est très exigeant et présente d'importantes difficultés techniques. Comme souligné dans l'exemple de la Section 2.1.3, l'équation de programmation convexe satisfaite par les mesures d'occupation dans ce cas ne caractérise pas ces mesures : certaines mesures solutions ne correspondent pas à des mesures d'occupation générées par des politiques stationnaires, ce sont des mesures dites fantômes.

Nous allons tout de même présenter une formulation de ce problème sous l'angle de la programmation convexe. Nous montrons, sous certaines hypothèses plutôt classiques dans la littérature, dites de Slater et de compacité-continuité, que le problème considéré est bien posé et que la valeur du problème d'optimisation sous contraintes correspond à celle de la formulation convexe que nous présentons en Section 2.3.2, et que, si le problème convexe admet une solution optimale, alors il est possible de construire une politique stationnaire et randomisée optimale pour le problème original.

Formulation du problème. Dans la suite de cette section, nous considérons donc un modèle stationnaire

$$(\mathbf{X}, \mathbf{A}, \{\mathbf{A}(x) ; x \in \mathbf{X}\}, Q, r, c, \theta_*, \nu) \quad (2.10)$$

tel que défini en Section 2.1.1. Rappelons que pour une fonction à valeurs réelles et mesurable h sur \mathbf{K} et une politique $\pi \in \Pi$, nous noterons ici $\mathcal{J}_\nu(h, \pi)$ la quantité

$$\mathcal{J}_\nu(h, \pi) = \sum_{t \in \mathbb{N}^*} \mathbf{E}_\nu^\pi(h^+(X_t, A_t)) - \sum_{t \in \mathbb{N}^*} \mathbf{E}_\nu^\pi(h^-(X_t, A_t))$$

pourvu que l'une des deux sommes soit finie. De manière équivalente, on peut ré-écrire la quantité $\mathcal{J}_\nu(h, \pi)$ grâce à la mesure d'occupation générée par la politique $\pi \in \Pi$:

$$\mathcal{J}_\nu(h, \pi) = \mu^\pi(h).$$

Une politique $\pi \in \Pi$ sera dite admissible si

$$\forall i \in \llbracket 1, q \rrbracket, \quad \mathcal{J}_\nu(c_i, \pi) \geq \theta_i^*.$$

L'ensemble des politiques admissibles est dénotée par Π_{θ^*} .

Le problème de contrôle optimal auquel nous nous intéressons consiste à maximiser la récompense totale moyenne $\mathcal{J}_\nu(r, \pi)$ sur l'ensemble des politiques $\pi \in \Pi_{\theta^*}$. La valeur associée à ce problème de contrôle optimal avec contraintes est

$$\sup \{ \mathcal{J}_\nu(r, \pi) ; \pi \in \Pi_{\theta^*} \}.$$

Une politique $\hat{\pi} \in \Pi$ est optimale si $\hat{\pi} \in \Pi_{\theta^*}$ et

$$\mathcal{J}_\nu(r, \hat{\pi}) = \sup \{ \mathcal{J}_\nu(r, \pi) ; \pi \in \Pi_{\theta^*} \}.$$

La section suivante est consacrée à la présentation d'une formulation convexe de ce problème.

2.3.2 Formulation convexe et chasse aux fantômes

Nous allons présenter un jeu d'hypothèses qui permet d'énoncer l'un des résultats importants de l'article [51]. Nous nous contenterons ici de la condition (S), pour *strong*, qui est une hypothèse usuelle dans la littérature, voir par exemple [117]. D'autres conditions sont présentées dans [51].

La condition (S). La condition (S) consiste en les trois hypothèses suivantes :

- (S1) Pour $x \in \mathbf{X}$, l'ensemble $\mathbf{A}(x)$ est compact.
- (S2) Pour tout $x \in \mathbf{X}$ et $\Lambda \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$, $Q(\Lambda|x, \cdot)$ est continu sur $\mathbf{A}(x)$.
- (S3) Pour tout $x \in \mathbf{X}$, la récompense $r(x, \cdot)$ et les contraintes $c_i(x, \cdot)$, pour $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$ sont semi-continues supérieurement sur $\mathbf{A}(x)$.

Sous les conditions (S1) et (S2), nous pouvons montrer que le noyau de transition Q est absolument continu par rapport à un noyau markovien P sur \mathbf{X} sachant \mathbf{X} . Celui-ci est donné par

$$P(dy|x) = \sum_{k \in \mathbf{N}^*} \frac{1}{2^k} Q(dy|x, \xi_k(x)) \quad (2.11)$$

où $\{\xi_k\}_{k \in \mathbf{N}^*}$ est une suite de sélecteurs mesurables de la multifonction définie de \mathbf{X} dans \mathbf{A} par $x \rightarrow \mathbf{A}(x)$ et satisfaisant $\mathbf{A}(x) = \overline{\{\xi_n(x) ; n \in \mathbf{N}^*\}}$ pour tout $x \in \mathbf{X}$. Nous associons à ce noyau stochastique P la mesure p sur \mathbf{X} définie par

$$p = \sum_{k \in \mathbf{N}} \frac{1}{2^{k+1}} \nu P^k \quad (2.12)$$

où le noyau stochastique P^n est défini de façon récursive, pour $n \in \mathbf{N}^*$, par

$$P^n(B|x) = \int_{\mathbf{X}} P^{n-1}(B|y) P(dy|x)$$

pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$ et $x \in \mathbf{X}$ et avec $P^0(\cdot|x) = \delta_x(\cdot)$ la mesure de Dirac en $x \in \mathbf{X}$.

Idee maîtresse. L'existence de cette mesure de probabilité de référence p , naturellement associée au modèle sous l'hypothèse (S), va nous permettre d'exhiber, par désintégration par rapport à celle-ci, la structure particulière revêtue par les mesures d'occupation randomisées et stationnaires. C'est en tirant partie de cette structure que nous pourrions obtenir un programme convexe assez finement adapté au problème.

Définition d'un programme convexe. Nous dirons qu'une mesure μ sur $\mathbf{X} \times \mathbf{A}$ satisfait l'équation caractéristique si elle est à support dans \mathbf{K} , $\mu((\mathbf{K})^c) = 0$, et qu'elle satisfait l'équation linéaire $\mu_{\mathbf{X}} = \nu + \mu Q$. Comme évoqué plus haut, une solution de l'équation caractéristique qui ne correspond pas à une mesure d'occupation est dite fantôme. Nous allons donc considérer un sous-ensemble de variables Ξ qui permettent de générer un ensemble de mesures η^{Ξ} qui doivent non seulement satisfaire l'équation caractéristique mais aussi avoir d'autres bonnes propriétés. Cet ensemble de mesures η^{Ξ} doit être suffisamment grand pour contenir au moins l'ensemble des mesures d'occupation générées par des politiques randomisées stationnaires mais aussi suffisamment petit afin de contenir le moins possible de solutions fantômes.

Sous l'hypothèse (S), il est possible de montrer que toute mesure d'occupation μ générée par une politique randomisée et stationnaire peut s'écrire sous la forme

$$\mu(dx, da) = \mathbf{1}_\infty(x)\hat{\rho}(da|x)p(dx) + \bar{\rho}(da|x)p(dx)$$

où $\hat{\rho}$ et $\bar{\rho}$ sont deux noyaux finis sur \mathbf{A} sachant \mathbf{X} satisfaisant $\hat{\rho}(\mathbf{A}(x)^c|x) + \bar{\rho}(\mathbf{A}(x)^c|x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{X}$. Dans cette écriture, la fonction $\mathbf{1}_\infty$ est constante égale à $+\infty$ avec la convention usuelle en théorie de la mesure consistant à dire que $0 \times (+\infty) = 0$. Partant de cette désintégration, il est assez naturel de considérer un ensemble de mesures réalisables, *feasible* en anglais, \mathcal{K}_p , consistant en les couples $\Xi = (\rho^\infty, \rho^*)$ de noyaux finis sur \mathbf{A} sachant \mathbf{X} satisfaisant $\rho^\infty(\mathbf{A}(x)^c|x) + \rho^*(\mathbf{A}(x)^c|x) = 0$ et pour lesquels la mesure donnée par

$$\eta^\Xi(dx, da) = \mathbf{1}_\infty(x)\rho^\infty(da|x)p(dx) + \rho^*(da|x)p(dx)$$

doit satisfaire elle aussi l'équation caractéristique de même que les conditions

$$\eta^\Xi(|r|) < +\infty, \quad \eta^\Xi(|c_i|) < +\infty$$

pour tout $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$.

Remarquons que, dans l'expression de η^Ξ , le premier terme, donné par $\mathbf{1}_\infty(x)\rho^\infty(da|x)p(dx)$, est une mesure bien définie mais très particulière en le sens qu'elle prend ses valeurs dans $\{0, +\infty\}$. Ce terme prend en compte le fait qu'il est possible, pour une mesure d'occupation générée par une certaine politique, de valoir 0 ou $+\infty$ en certains points ou en certains lieux de l'espace.

Le programme convexe que nous allons définir ci-après s'exprime en termes des variables réalisables $\Xi \in \mathcal{K}_p$ et des mesures η^Ξ . Il est clair par définition que l'ensemble $\{\eta^\Xi ; \Xi \in \mathcal{K}_p\}$ est un sous-ensemble des mesures satisfaisant l'équation caractéristique et à support dans \mathbf{K} . Comme souligné ci-dessus, l'idée maîtresse est de s'assurer que l'ensemble $\{\eta^\Xi ; \Xi \in \mathcal{K}_p\}$ contient aussi peu de mesures fantômes que possible.

Finitude des valeurs. L'hypothèse (F) suivante assure que les problèmes d'optimisation considérés sont bien posés :

(F Ξ) Les quantités $\sup\{\eta^\Xi(r^+) ; \Xi \in \mathcal{K}_p\}$ et $\sup\{\eta^\Xi(c_i^+) ; \Xi \in \mathcal{K}_p\}$ sont finies pour tout $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$.

(F μ) Nous avons $\mu(|r|) < +\infty$ et $\mu(|c_i|) < +\infty$ pour toute mesure d'occupation μ et $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$. Cette hypothèse est comparable à l'hypothèse (A2) introduite dans [53, p. 847]. L'hypothèse (F Ξ) nous assure que la valeur des programmes convexes non contraints associée à la fonction récompense r ou aux contraintes c_i pour $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$ est bien finie alors que l'hypothèse (F μ) nous assure que le critère de performance associé à la fonction récompense r ou aux contraintes c_i pour $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$ est bien fini.

Définition du programme convexe. Le programme convexe que nous considérons, noté \mathcal{KP}_p , consiste en la maximisation de $\eta^\Xi(r)$ pour $\Xi \in \mathcal{K}_p$ tel que $\eta^\Xi(c_i) \geq \theta_i^*$ pour $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$. La valeur de ce programme convexe est donnée par

$$\sup\{\eta^\Xi(r) ; \Xi \in \mathcal{K}_p \text{ et } \eta^\Xi(c_i) \geq \theta_i^* \text{ pour } i \in \llbracket 1, q \rrbracket\} \quad (2.13)$$

si l'ensemble considéré est non vide, cette valeur étant $-\infty$ dans ce dernier cas. Une variable $\hat{\Xi} \in \mathcal{K}_p$ est une solution optimale de ce programme convexe \mathcal{KP}_p si

$$\eta^{\hat{\Xi}}(r) = \sup \{ \eta^{\Xi}(r) ; \Xi \in \mathcal{K}_p \text{ et } \eta^{\Xi}(c_i) \geq \theta_i^* \text{ pour } i \in \llbracket 1, q \rrbracket \}.$$

Soit h une fonction égale à r ou c_i pour $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$. On obtient facilement que

$$\eta^{\alpha\Xi_1 + (1-\alpha)\Xi_2}(h) = \alpha\eta^{\Xi_1}(h) + (1-\alpha)\eta^{\Xi_2}(h)$$

pour tout $\alpha \in [0, 1]$ et $\Xi_1, \Xi_2 \in \mathcal{K}_p$. Cela implique que le programme mathématique défini plus haut est en effet un programme convexe.

La condition de Slater. Finalement, nous introduisons une dernière hypothèse très usuelle en contrôle en supposant qu'il existe une mesure d'occupation μ^* telle que $\theta_i^* < \mu^*(c_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$. Cette condition, proposée par Slater dans [121], est très classique en optimisation, voir par exemple [17].

Théorème 9. *Sous les conditions (S), (F) et de Slater, nous avons l'égalité*

$$\sup \{ \mathcal{J}_v(r, \pi) ; \pi \in \Pi_{\theta^*} \} = \sup \{ \eta^{\Xi}(r) ; \Xi \in \mathcal{K}_p \text{ et } \eta^{\Xi}(c_i) \geq \theta_i^* \text{ pour } i \in \llbracket 1, q \rrbracket \}$$

De plus, si $\hat{\Xi} = (\hat{\rho}^\infty, \hat{\rho}^*)$ est une solution optimale du programme convexe, il est alors possible de construire explicitement une politique randomisée et stationnaire $\hat{\pi}$ induite par $\hat{\Xi}$ qui est optimale pour le problème de contrôle originel.

Soit κ un noyau stochastique sur \mathbf{A} sachant \mathbf{X} , arbitraire mais fixé et tel que pour $x \in \mathbf{X}$, $\kappa(\mathbf{A}(x)|x) = 1$. La politique randomisée et stationnaire $\hat{\pi}$ est définie par

$$\hat{\pi}(da|x) = \mathbf{1}_{\mathcal{E}_\infty}(x) \frac{\hat{\rho}^\infty(da|x)}{\hat{\rho}^\infty(\mathbf{A}|x)} + \mathbf{1}_{\mathcal{E}_*}(x) \left[\mathbf{1}_{\mathcal{E}_*}(x) \frac{\hat{\rho}^*(da|x)}{\hat{\rho}^*(\mathbf{A}|x)} + \mathbf{1}_{\mathcal{E}_c}(x) \kappa(da|x) \right]. \quad (2.14)$$

où

$$\mathcal{E}_\infty = \{x \in \mathbf{X} ; \hat{\rho}^\infty(\mathbf{A}|x) > 0\} \quad (2.15)$$

et

$$\mathcal{E}_* = \{x \in \mathbf{X} ; \hat{\rho}^*(\mathbf{A}|x) > 0\}. \quad (2.16)$$

Il y a donc trois façons de choisir l'action en fonction de où se trouve x dans l'espace \mathbf{X} . Soit la désintégration de $\hat{\Xi}$ par rapport à p induit que $\hat{\rho}(\mathbf{A}|x) > 0$, c'est un cas où la mesure d'occupation peut valoir $+\infty$, auquel cas il faut choisir l'action selon le noyau $\hat{\rho}$ renormalisé. Soit ce n'est pas le cas et alors l'action est choisie arbitrairement si $\hat{\rho}^*(\mathbf{A}|x) = 0$, ce qui signifie qu'intuitivement le processus ne rend pas visite à l'état x , ou selon le noyau $\hat{\rho}^*$ renormalisé si $\hat{\rho}^*(\mathbf{A}|x) > 0$. On se rend compte que l'existence de la mesure de référence p nous permet de construire des mesures dont le support est plus proche de celui des mesures d'occupation.

Si l'on reprend l'exemple concernant la programmation linéaire donné en Section 2.1.3, il est possible de montrer de façon tout à fait explicite que notre formulation convexe permet d'éliminer les solutions fantômes du système (2.5). Nous montrons en effet dans ce cas, voir

[51, Section 6.1], que les hypothèses que nous avons explicitées dans la présente section sont vérifiées et que

$$\sup \{ \mathcal{J}_v(r, \pi) ; \pi \in \Pi \text{ et } \mathcal{J}_v(c, \pi) \geq \theta^* \} = \mathcal{J}_v(r, \pi^*) = 13/40$$

où π^* est la politique stationnaire randomisée donnée par $\pi^*({a}|1) = \pi^*({b}|1) = 1/2, \pi^*({a}|x) = 1$ pour $x \in \mathbf{Z} \setminus \{1\}$. De plus,

$$\begin{aligned} & \sup \{ \eta^{\Xi}(r) ; \Xi \in \mathcal{K}_p \text{ et } \eta^{\Xi}(c) \geq \theta^* \} \\ &= \sup \{ (3/10) \eta^{\Xi}(1, a) + 1/4 ; \eta^{\Xi}(1, a) \in [0, 1/2] \text{ et } (1/2 - \eta^{\Xi}(1, a)) \geq 1/4 \} \\ &= 13/40. \end{aligned}$$

Par conséquent, les valeurs du problème de contrôle optimal originel et de notre programme convexe \mathcal{KP}_p correspondent, comme il est attendu. Les solutions fantômes du système (2.5) sont donc bien éliminées. Nous pouvons remarquer par ailleurs que la valeur du problème associée à la récompense totale correspond ici à celle du problème avec facteur d'actualisation lorsque celui-ci converge vers 1. C'est une technique possible pour attaquer le problème de la récompense totale comme présenté en [80, Section 9]. On parle de *vanishing discount factor approach* en anglais.

2.4 Le principe d'estimation et de contrôle

Dans de nombreux problèmes pratiques qu'il est possible de modéliser à l'aide d'un MDP, les variables qui définissent ce MDP ne sont pas directement observées ou sont observées de façon bruitée. Nous avons déjà donné l'exemple d'une position à laquelle nous n'aurions pas accès mais dont nous connaîtrions seulement une coordonnée dans un certain repère, et ce de façon bruitée. Le MDP est alors partiellement observé, voir [18, Section 5]. La thèse de Romain Namyst, que je co-encadre avec François Dufour, consiste à développer des méthodologies efficaces pour résoudre certains POMDP. Un autre cas assez courant consiste à avoir construit un modèle dont un des paramètres est inconnu, certains auteurs parlent alors de modèles ambigus, voir [67]. C'est de cela dont nous allons parler dans cette section et c'est un travail que nous avons récemment généralisé au temps continu.

2.4.1 Le modèle

Soit Θ un espace compact qui sera pour nous l'espace des paramètres. Pour $\vartheta \in \Theta$, nous considérons le modèle stationnaire

$$(\mathbf{X}, \mathbf{A}, \{\mathbf{A}(x) ; x \in \mathbf{X}\}, Q^\vartheta, r^\vartheta, \nu). \quad (2.17)$$

Le noyau de transition ainsi que la fonction de récompense dépendent donc de ϑ . Pour ϑ fixé, il est possible que l'on sache résoudre ce MDP, en ayant défini le critère que l'on considère et sous de bonnes hypothèses liées à ce critère. Nous considérerons le critère de la récompense totale avec un facteur d'actualisation. La question que l'on se pose est la suivante : comment résoudre le MDP au mieux lorsque le vrai paramètre, qui régit la dynamique réelle du processus, est inconnu ? Si on suppose que l'on observe le MDP au cours du temps, comment *adapter* au

mieux notre contrôle aux observations ? Le livre [79] est tout entier consacré à la résolution des MDP avec adaptation.

Il nous faut donc en premier lieu construire un estimateur qui soit compatible, ou encore consistant, avec les contrôles. Nous dirons qu'une suite $(\hat{\vartheta}_t)$ est une suite d'estimateurs fortement consistants d'un paramètre $\vartheta \in \Theta$ si :

- Pour tout $t \in \mathbf{N}$, la construction de $\hat{\vartheta}_t$ ne dépend que de l'information jusqu'au temps t : c'est une application mesurable de \mathbf{H}_t dans Θ ;
- La propriété suivante de forte consistance, c'est-à-dire de convergence presque sûre, est vérifiée :

$$\forall \pi \in \Pi, \quad \forall x \in \mathbf{X}, \quad \mathbf{P}_x^{\vartheta, \pi} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\vartheta}_t = \vartheta \right).$$

Les fonctions de contrastes se sont avérées être un bon moyen de construire de tels estimateurs. Soit h une fonction mesurable à valeurs réelles et définie sur $\Theta \times \mathbf{K} \times \mathbf{X}$ et soit

$$H(\vartheta, \vartheta', x, a) = \int_{\mathbf{X}} [h(\vartheta', x, a, y) - h(\vartheta, x, a, y)] Q^{\vartheta}(dy|x, a),$$

pour tout $(\vartheta, \vartheta', x, a) \in \Theta \times \Theta \times \mathbf{K}$. La fonction h est dite être une fonction de contraste si, pour tout ϑ et ϑ' dans Θ et $(x, a) \in \mathbf{K}$:

- a) la fonction h est intégrable contre le noyau :

$$\int_{\mathbf{X}} |h(\vartheta', x, a, y)| Q^{\vartheta}(dy|x, a) < \infty.$$

- b) la fonction H est à valeurs positives ou nulles avec

$$H(\vartheta, \vartheta', x, a) = 0 \iff \vartheta = \vartheta'.$$

On dit que H possède la propriété d'identifiabilité.

Pour tout $t \geq 1$, la fonction de contraste cumulative associée à h jusqu'au temps t est donnée par

$$L_t(\vartheta, h_t) = \sum_{j=0}^{t-1} h(\vartheta, x_j, a_j, x_{j+1})$$

où $h_t = (x_0, a_0, \dots, x_{t-1}, a_{t-1}, x_t) \in \mathbf{H}_t$ et $\vartheta \in \Theta$. Un exemple typique est la log-vraisemblance.

Notons $\vartheta^* \in \Theta$ le paramètre inconnu. Pour $t \geq 1$, nous considérons une fonction mesurable $\hat{\vartheta}_t : H_t \rightarrow \Theta$ telle que

$$L_t(\hat{\vartheta}_t(h_t), h_t) = \min_{\vartheta \in \Theta} L_t(\vartheta, h_t), \quad \forall h_t \in \mathbf{H}_t.$$

Nous dirons que la suite $(\hat{\vartheta}_t)$ est une suite d'estimateurs de minimum de contrastes (EMC) de ϑ^* .

2.4.2 Forte consistance des estimateurs de minimum de contraste

Dans ce cadre, nous considérons le jeu d'hypothèses suivant.

1. L'espace des paramètres Θ est un espace métrique compact avec pour métrique d .

2. L'espace des couples états-actions \mathbf{K} est fermé.
3. La fonction de contraste h est telle que :
 - (a) elle admet un moment d'ordre 2 par rapport au noyau de transition : il existe une constante $C \in \mathbf{R}$ telle que pour tout $(x, a) \in \mathbf{K}$,

$$\int h^2(\vartheta, x, a, y) Q^{\vartheta^*}(\mathrm{d}y|x, a) \leq C,$$

pour tout $\vartheta \in \Theta$;

- (b) la famille de fonctions $\{h(\cdot, x, a, y) ; (x, a, y) \in \mathbf{K} \times \mathbf{X}\}$ est équi-continue sur Θ . Comme Θ est compact, cette équi-continuité est donc uniforme ;
- (c) pour tout voisinage ouvert U de ϑ^* ,

$$\inf_{(\vartheta, x, a) \in U^c \times \mathbf{K}} H(\vartheta^*, \vartheta, x, a) > 0.$$

On demande donc, en quelque sorte, qu'il existe un voisinage du paramètre à estimer tel qu'il y ait suffisamment de contraste à l'intérieur de ce voisinage pour pouvoir distinguer ce paramètre.

Nous avons alors le résultat fondamental suivant.

Théorème 10. *Sous ces conditions, il existe une suite d'estimateurs du minimum de contraste fortement consistants de ϑ^* .*

Ce théorème est présenté en [79, Section 5.4, p. 103]. Néanmoins, de notre point de vue, l'inégalité à la fin de [79, p. 104] devrait être clarifiée. En effet, en général, il n'est pas possible d'inverser \liminf et \inf comme cela semble être fait sans autres arguments. Bien sûr, cela est possible lorsque l'infimum porte sur un ensemble fini. Il est possible d'effectuer une telle réduction et d'obtenir le résultat, ce que nous avons fait, mais au prix d'une certaine restructuration de la preuve afin d'y incorporer une prise en compte pertinente de la compacité. Nous notons que la même remarque s'applique à l'article [61, preuve du Théorème 2.1.2] qui a inspiré [79, Section 5.4, p. 103]. Les auteurs des deux articles susmentionnés ont certainement pensé à une telle réduction, mais cela n'apparaît pas clairement dans leurs écrits et comme nous l'avons dit, cette réduction implique une restructuration minutieuse de leurs preuves. Nous remarquons également que l'article [61, preuve du Théorème 2.1.2] s'inspire de l'article [114] où cette fois, une réduction à la dimension finie apparaît, dans un contexte non contrôlé, mais malheureusement, avec une argumentation circulaire de notre point de vue.

Voici une façon de construire des estimateurs de minimum de contraste. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit Θ_n une sous-ensemble fini approximant l'ensemble Θ . Par approximation, nous voulons dire que

$$\forall \vartheta \in \Theta, \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbf{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad d(\vartheta, P_n(\vartheta)) \leq \varepsilon$$

où $P_n(\vartheta)$ est un des plus proches voisins de ϑ dans Θ_n . Soit $t \geq 1$ fixé. Pour toute histoire $h_t \in \mathbf{H}_t$, nous considérons la suite $(\hat{\vartheta}_{n,t}(h_t))_{n \geq 1}$ dans Θ_n telle que

$$L_t(\hat{\vartheta}_{n,t}(h_t), h_t) = \min_{\vartheta \in \Theta_n} L_t(\vartheta, h_t), \quad \forall h_t \in H_t.$$

Considérons aussi

$$\gamma_t : h_t \in \mathbf{H}_t \mapsto \liminf_{n \rightarrow \infty} \hat{\vartheta}_{n,t}(h_t)$$

Il est alors possible de montrer que la suite de fonctions mesurables $(\gamma_t)_{t \geq 1}$ est une suite d'estimateurs de minimum de contraste de ϑ^* .

La construction d'une suite d'estimateurs de minimum de contrastes est notamment utile dans la mise en œuvre du principe d'estimation et de contrôle. Celui-ci peut se résumer de la façon suivante [79, Section 2.5] :

- pour toutes valeurs admissibles du paramètre inconnu ϑ , résoudre le problème de contrôle optimal associé avec ce ϑ et obtenir ainsi une politique optimale $\pi^{*,\vartheta}$.
- pour tout temps t , calculer une estimation ϑ_t du vrai paramètre ϑ^* et choisir, au temps t , une action selon le noyau π^{*,ϑ_t} . En d'autres termes, nous substituons à ϑ^* son estimation courante pour la mise en œuvre de la politique optimale.

Il n'est pas raisonnable d'espérer qu'une telle politique, issue du principe d'estimation et de contrôle, soit optimale. Nous pouvons toutefois montrer, sous certaines hypothèses pour le problème de la récompense moyenne avec actualisation, qu'une telle politique est asymptotiquement optimale pour ce problème. Ce concept a été développé par Schäl, voir [119]. Une politique π est asymptotiquement optimale pour le problème de la récompense moyenne avec actualisation si pour tout $x \in \mathbf{X}$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \mathcal{J}_{x,t}(r, \pi) - \mathbf{E}_x^\pi \left(\sup_{\delta \in \Pi} \mathcal{J}_{X_t,0}(r, \delta) \right) \right| = 0$$

où pour tout $t \in \mathbf{N}$,

$$\mathcal{J}_{x,t}(r, \pi) = \mathbf{E}_x^\pi \left(\sum_{s=t}^{\infty} \beta^{s-t} r(X_s, A_s) \right)$$

avec $\beta \in (0, 1)$ comme facteur d'actualisation. Ce concept permet de mesurer la qualité de la politique après avoir attendu que l'estimateur de ϑ^* se soit suffisamment rapproché de la vraie valeur du paramètre.

2.5 Discussion

Nous avons présenté dans ce chapitre deux façons de s'attaquer au problème de la récompense totale, une par compacité-continuité et l'autre par programmation linéaire, ainsi que la construction d'estimateurs en lien avec le principe d'estimation et de contrôle, c'est-à-dire une façon d'aborder le problème de la récompense avec facteur d'actualisation lorsqu'un ou plusieurs paramètres du modèle nous sont inconnus.

Comme nous l'avons déjà mentionné, résoudre un MDP lorsque le critère est celui de la récompense totale moyenne est particulièrement difficile. Les résultats obtenus sont assez techniques. Dès lors, dans quelle direction se tourner pour chercher des pistes d'amélioration ? Dans le cadre de la programmation linéaire, il est possible de montrer, via des exemples, que les conditions que l'on a proposées ne sont pas nécessaires. Nous pouvons cependant exhiber des cas où nos hypothèses ne sont pas vérifiées, notamment la condition, pourtant si usuelle, de Slater, mais tels que le programme linéaire que l'on propose donne la bonne solution. Serait-on donc capable d'obtenir notre résultat sans cette condition ?

En ce qui concerne le principe d'estimation et de contrôle, une thématique liée est celle du contrôle dit robuste des MDP. Dans le cadre où un paramètre d'un MDP est inconnu, la

robustesse peut consister à s'intéresser à la maximisation du critère

$$\inf_{\theta \in \Theta} \mathcal{J}_v^\theta(r, \pi),$$

voir par exemple [126] pour des formulations en ce sens. Un autre critère robuste très étudié en ce moment est celui lié à la *conditional value at risk*, voir par exemple [40] et [47]. Contrairement au cadre du principe d'estimation et de contrôle ou des MDP partiellement observés, l'idée d'estimer, d'une façon ou d'une autre, le paramètre inconnu, n'est plus envisagée. Cela est remplacé par l'introduction d'un critère d'optimisation plus ou moins averse au risque. C'est une thématique que nous souhaitons aborder dans le futur. Par ailleurs, à notre connaissance, le principe d'estimation et contrôle n'a pas fait l'objet d'investigations dans le cadre du coût total. C'est une autre piste de réflexion.

Nous avons de plus en préparation un article qui fait le lien entre les techniques liées à la théorie des perturbations singulières présentées au Chapitre 1 et la théorie des MDP présentée au Chapitre 2. Il s'agit d'étudier la contrôlabilité d'un MDP avec pour critère la récompense moyenne avec un facteur d'actualisation lorsqu'un paramètre d'échelle de temps est présent. Nous menons ce travail du point de vue de la programmation linéaire. Cela est particulièrement intéressant car cela fait aussi le lien entre le critère de la récompense moyenne avec facteur d'actualisation et le critère de la récompense moyennée, via les problèmes de programmation linéaire associés.

Un autre lien évident entre les Chapitres 1 et 2 est qu'il est possible de considérer le pendant continu des MDP et de chercher à contrôler un PDMP. C'est un axe de recherche très développé, voir par exemple [68, 48, 50]. Nous avons déjà fourni un certain nombre d'efforts dans ce domaine, notamment autour de la question des classes suffisantes de politiques à considérer pour résoudre un MDP en temps continu, mais sur ce dernier plan, ces efforts n'ont pas pour le moment totalement porté leurs fruits. Nous avons par contre obtenu récemment certains résultats autour du principe d'estimation et de contrôle pour les PDMP et l'existence d'estimateurs du minimum de contraste pour ceux-ci.

Chapitre 3

Statistiques appliquées à la linguistique

Ce chapitre aborde un aspect de mon travail très différent : il y est moins question de probabilité, pas du tout de PDMP ou de MDP mais beaucoup plus question de données, de représentations de celles-ci, de statistiques et de dialectologie romane. C'est une aventure humaine et scientifique qui a commencé à la fin du premier confinement, au début du mois de mai 2020, et qui est bien partie pour durer. Une partie de ce travail a été présentée dans l'article [73], le reste est inédit. Il doit beaucoup à de nombreux échanges avec David Escarpit et Quentin Peyras.

3.1 L'enquête Bourciez : des données brutes à la base de données

3.1.1 L'enquête Bourciez

Édouard Bourciez est un éminent linguiste dont les *Éléments* [29] et le *Précis* [30], ré-édités de nombreuses fois, ont participé à la formation de plusieurs générations de romanistes. Maître de conférences de l'université de Bordeaux à partir de 1883 puis professeur des universités à partir de 1893 dans cette même université, il a voué, comme dit pudiquement Albert Henry [78], « un intérêt particulier aux choses du Sud-Ouest de la France ». Cet intérêt, c'est le moins que l'on puisse dire, l'a poussé à mener une enquête linguistique de grande envergure à partir de l'automne de l'année 1894. Il demande alors aux instituteurs des académies de Bordeaux et Toulouse, via les recteurs de ces académies, de traduire, dans l'idiome de la commune où ils enseignaient, une version retravaillée de la parabole du fils prodigue. Les résultats de cette enquête ont sans doute dépassé les attentes du professeur, puisque plus de 4400 paraboles lui sont revenues, quasiment toutes les communes de dix départements sont représentées, et parfois par plusieurs versions. Ces manuscrits sont aujourd'hui conservés à la bibliothèque de l'université de Bordeaux-Montaigne et forment un corpus de 17 volumes d'environ 1000 pages manuscrites chacun. Ce corpus, nous le dénommerons par les termes d'*Enquête Bourciez*, lui-même l'ayant dénommé *Recueil des idiomes de la région gasconne*.

Quels sont donc ces idiomes, que l'on trouve dans la région délimitée par l'enquête en ce temps là ? C'est évidemment, en premier lieu, la langue occitane sous sa forme gasconne, que nous dénommerons simplement par gascon et dont nous donnerons une définition en Section 3.2.3. Viennent ensuite deux autres dialectes de l'occitan, le limousin et le languedocien, pour reprendre des catégories bien connues, les choses étant sensiblement plus complexes, notam-

ment aux interfaces. Le pays Basque a renvoyé des paraboles dans sa langue, environ 150, et enfin, quelques cantons, dans le nord du département de la Gironde, sont majoritairement de langue d’Oil, ainsi que quelques communes de l’entre deux mers et de l’Ouest du département de la Dordogne.

Pour des raisons qui ne sont pas simples à exposer, une analyse systématique de cette enquête n’a jamais été effectuée, hormis, et tout de même plus d’un siècle après l’enquête, pour sa partie basque, voir [5] et les références liées, correspondant comme on l’a dit à 150 communes, soit moins de 4% du corpus. Nous soulignerons par ailleurs que Bourciez lui-même n’en fait que très peu mention alors même qu’il a publié des articles ou des notices sur une période de plus de 50 ans, dont 45 années se trouvent après qu’il ait mené l’enquête qui nous occupe. L’article [28], qui s’appuie explicitement sur l’enquête et dont nous parlerons en Section 3.2.1, fait en l’espèce figure d’exception.

Attardons-nous quelques instants sur les limites méthodologiques de l’enquête. D’abord, c’est une enquête faite par correspondance. Même si les consignes, transmises par les rectorats des académies de Bordeaux et Toulouse, précisaient bien de traduire dans l’idiome de la commune, nous ne savons pas toujours qui est l’auteur de la traduction, l’instituteur ayant pu se faire aider par un habitant ou par ses élèves comme cela est parfois mentionné explicitement. Nous ne savons pas non plus de façon certaine s’il s’agit bien de l’idiome de la commune en question et non pas d’une commune voisine dont l’instituteur serait originaire. Il n’est pas difficile, mais cependant très fastidieux, de retrouver dans les recensements de 1891 et 1896 la trace des instituteurs et de connaître leurs communes de naissance. Il est rare qu’ils soient exactement de la commune où ils enseignent même s’il n’est pas rare qu’ils soient d’une commune ou d’un canton voisin. Se pose donc le problème de la fiabilité des sources. Nous pouvons nous rassurer, à mon avis, de deux façons :

- Il y a eu entre 1897 et 1902, à une époque très proche donc, l’enquête menée par Jules Gilliéron et Edmond Edmont, ayant abouti à l’Atlas Linguistique de France (ALF) ainsi que l’enquête menée par Jean Ségué, de 1957 à 1965 et ayant abouti à l’Atlas Linguistique et Ethnographique de Gascogne (ALG). Ces deux enquêtes ont été administrées par le biais d’entretiens, avec l’utilisation d’une notation à visée phonétique pour la première et des enregistrements pour la seconde. Elles permettent donc de croiser les sources pour les villes communes avec celles de l’enquête Bourciez. Ces croisements n’ont jusqu’alors jamais mis en doute les résultats de l’enquête Bourciez, celle-ci permettant alors de préciser bien des phénomènes. Nous remarquons en effet au passage que le maillage territorial de l’enquête Bourciez est beaucoup plus fin que celui de l’ALF et de l’ALG. Indiquons aussi qu’une autre enquête possède un maillage semblable à celui de l’enquête Bourciez, c’est celle menée par Julien Sacaze en 1887 dans les départements pyrénéens, voir par exemple [1]. Cette enquête pourrait aussi servir à faire certaines comparaisons pour les départements communs aux deux enquêtes mais elle n’a malheureusement pas été encore totalement dépouillée non plus.
- Les distributions diatopiques des traits linguistiques obtenues grâce à l’enquête Bourciez ne sauraient, à notre avis, être compatibles avec des réponses erronées ou fantaisistes des instituteurs, au moins au niveau mésoscopique. Le lecteur sera sans doute frappé par la clarté des cartes obtenues sans traitement supplémentaire.

Une limite réelle est, à notre avis, que l’enquête Bourciez est une enquête écrite pour laquelle il est demandé de transcrire les sons d’une langue, la langue occitane pour ce qui nous concerne,

au moyen d'un système d'écriture, d'une orthographe, forgé pour une autre langue, la langue française. De plus, chaque instituteur adapte ce système orthographique de façon personnelle au parler de sa commune. Ce n'est donc pas ici un alphabet phonétique qui est employé. Si cette transposition permet d'inférer en partie la prononciation, il n'est pas envisageable de l'utiliser pour des analyses phonologiques fines, comme une étude de l'accent tonique par exemple. Certains traits phonétiques sont cependant accessibles, comme nous le verrons en Section 3.3.1 et, d'une façon assez inattendue, il est aussi possible de s'appuyer sur les mots bruts, tels qu'ils sont écrits donc, pour obtenir des classifications dialectales qui font sens, comme cela sera explicité en Section 3.3.2.

D'autre part, la traduction du texte étant demandée mot à mot, il n'est pas non plus très pertinent d'en faire usage pour une étude syntaxique de la langue, sauf, encore une fois, pour certains traits bien spécifiques.

Ces réserves à l'esprit, une équipe bigarrée d'universitaires, d'enseignants ou tout simplement de passionnés de la langue d'Oc a donc décidé, au mois de mai 2020, qu'il s'en allait temps de procéder au dépouillement systématique de l'enquête Bourciez. C'est un projet de recherche hors les murs mené de façon collaborative via un réseau social bien connu. Notre groupe s'appelle *La dialectometria*, les principaux contributeurs étant, pour le moment, David Escarpit, Quentin Peyras et moi-même. La page web du projet est accessible via ma page professionnelle.

3.1.2 Construction de la base de données

La transcription informatique des manuscrits est effectuée de la façon la plus simple qui soit : les paraboles sont recopiées sur ordinateur au format texte, `txt`. Plus de la moitié des paraboles ont été transcrites à ce jour. Bien sûr, on est en droit de se demander pourquoi nous n'utilisons pas des méthodes de reconnaissance d'écritures manuscrites pour cela. En fait, même si celles-ci sont de plus en plus performantes, pour les manuscrits dont on dispose, plus ou moins lisibles, d'une structure parfois quelque peu fantaisiste et écrits au moyen d'une orthographe non normée, il ne manque pas de se trouver de nombreuses coquilles lors d'une transcription automatique. Il est donc nécessaire de les relire de façon attentive et la copie directe devient alors plus performante. La copie directe revêt un autre avantage, certainement plus décisif : elle nous permet de nous imprégner pleinement du corpus. D'un point de vue socio-linguistique, cela est peut-être plus important encore. Faire ces copies permet aux membres du groupe d'interagir quotidiennement autour des transcriptions et ces interactions se faisant en occitan, c'est un espace de sociabilisation en cette langue, ce qui n'est peut-être pas si commun à l'heure actuelle.

Les scripteurs informatiques ont pour obligation de respecter un certain format dans le fichier texte afin de faciliter la création de la base de données. Le terme de ligne, dans la liste suivante, est à prendre au sens informatique du terme :

Ligne 1 : Nom de l'enquête (en occitan) ;

Ligne 2 : Noms de la commune et du canton (en occitan) ;

Ligne 3 : Date et nom de l'auteur ;

Lignes 4 et 6 : Vides ;

Ligne 5 : Titre ;

Ligne 7 à 15 : Les 9 paragraphes de la parabole, précédés des numéros de paragraphe ;

Ligne 16 : Vide ;

Ligne 17 et plus : Les éventuels commentaires de l'auteur.

Voilà ce que donne par exemple, la parabole de Bordeaux

Enquêsta Bourciez

Comuna : Bordèu, canton de Bordèu

Autor : Monsieur X, négociant à Bordeaux, âgé de 60 ans.

L'enfant Prodigue.

1. Un home n'abèbe que dus gouyats. Lou pu june dichut à soun pay : « Es temps que siguy moun meste et qu'aougy de l'argen. Faou que pusquy m'en ana et que begy daou péis. Partatgeats boste bién, et dounatz-mé sonque diby aougé. – Oui, moun drôle, dichut lou pay, coume boudras. Sus un méchan, et seras punit. » Puy, oubren lou tirouar, partagèt soun bién e en fit duyes pourtiouns égales.

2. Caouques jours après lou méchan gouyat s'en angut daou bilatche, fédén lou fiérot, et chen dire adiu à digun. Trabessèt bocop de landes, de boys, de ribeyres et bingut dens une grande bille, oun despensèt tout soun argen. Aou cap de quaouques més, discut bendre sous peillots ad une bieille feme, et se louga per esta baylet : l'enbièren aous champs per y garda lous ases et lous béous.

3. Alors fut bien malhurus. N'aougut pas mey de leyt pér droumi la nuyt, ni de fuc per se caouha quan fadèbe freyt. Caouquescops abèbe ta grande hamy qu'aouré bien mingea aquelles feuilles de caous et aquets fruyts pouyrits que mingen lous porcs. Mais digun li dounabe ré.

4. Un dessey, lou bente bide se dechèt toumba sus un ban, gueytan per la fineste lous aoudets que boulaben léougeyement. Puy bit parèche den lou ciel la lune ét les estelles, et se dichut en plouran : « Là-bas, l'oustaou de mou pay es plén de domestiques qu'an daou pan et daou bin, dos éous e daou froumatche, tan que n'en bolen. Penden aqueste temps jou mory aci de hamy.

5. Té, baouc mé léba, angrey trouba moun pay et li direy : Firy un peccat, quan boulury bous quitta. Aouguri gran tort, et faou que me punissets, lou saby bien. Ne m'apperatz pu boste gouyat, treytatz-mé coume lou darney de bostes baylets. Estury coupable, mais me languissèby lugn de bous. »

6. Lou pay ère den soun casaou, fenissen d'arrousa ses flous : bisitabe lous poumeys et lous radins. Quan bit beni saou camin soun drôle tout coubert de sudou ét de poussière, treynan la came, se damandèt si fallèbe què lou punisse ou que perdounesse. Anfin, abec les larmes dén lous uils, li tendut lous bras et se jitan à soun cot li baillet ün gros poutoun.

7. Puy fit acheyta sou gouyat, apperet ses gens et lous besîns : « Boli l'eyma coume aban, lou praoube drôle, lisy dichut si léou qu'esturen assemblats. Fut assés punit : que nat de bousaous adare li fasse de reproche. Benèts lou beyre : appourtatz-li biste une belle peille, mettez-li un anet aou dit et dos souliés néous as pés. Pouyratz tabé préne dos bigueys, dos canards, et amena un bedet boun à tua : ban béoure, mingea ensemble et fa grande feste. »

8. Lous baylets aoubéiren à lur meste et miren une belle nape sus la taoule. Aou même moumen l'eynat dos gouyat rébénèbe de la casse dabec sous cans : « Qu'es dounc aquet tapatche, s'escriidet-et en juran ? Crédy que cantatz aqui, n'es pas trop

léou que rebeny. Suts foou, moun pay ? »

9. « Nou, moun drôle, lou suy pas, respoundut lou bieil. Si lou fedy, aco's que suy plén de joye. Canten et soun hurus car an bien de qué. Que lou boles ou nou, fadrà tabé que tu cantes et te réjouisses abec nous-aous, pasque toun fray qu'ère mort, es rebingut à la bie. Aco's coume si benèbe de nèche : gey ère perdut, anuyt lou bala retroubat. »

On comprendra mieux à la lecture de cette parabole, ce que nous voulions dire par le fait qu'il n'y a pas d'orthographe standardisée employée : l'auteur utilise les conventions orthographiques du français pour retranscrire au mieux l'occitan. Il est possible de lire les paraboles transcrites sur la page du projet, via une carte interactive.

Le format de transcription présenté permet la segmentation automatique des neuf paragraphes de la parabole. Ces paragraphes sont eux-mêmes segmentés de façon automatique, à l'aide de la recherche de mots balises par expressions régulières, en segments de plus courtes longueurs, rendant possible la création d'une recherche automatique mot à mot à l'intérieur de chaque segment, toujours par expressions régulières. Pour qu'une telle recherche soit efficace, il faut, encore une fois, avoir une bonne familiarité avec le corpus, un même mot pouvant parfois être écrit par les auteurs de plus de cent façons différentes, mais pas incohérentes, rendant difficile la création d'une expression régulière les représentant toutes. Il est possible, nous l'avons fait aussi, de construire la base de données des mots de la parabole en se basant sur une distance lexicographique.

Nous avons construit à ce jour une base de données possédant autant de lignes que de paraboles, c'est-à-dire 2652, avec pour chaque ligne, c'est-à-dire pour chaque parabole retranscrite, plus de 700 variables, correspondant majoritairement aux mots de la parabole, avec quelques entrées supplémentaires de description (nom du département, de la commune, du canton et coordonnées gps). Cette base de données est au format csv et l'encodage des caractères en UTF-8. Depuis cette base de données primaires, nous créons aussi parallèlement une meta-base qui comprend en plus, pour chaque entrée de la base, une série de traits linguistiques (consonantisme, vocalisme, morphologie...). Par exemple, dans la meta-base, pour le mot « dit » du morceau « le plus jeune dit à son père », on trouvera les entrées :

- DIT : vecteur contenant les traductions de ce mot ;
- DIT_Flexion : indication sur la flexion, ici un verbe au prétérit à la troisième personne du singulier ;
- DIT_Lèma : indication sur le lemme utilisé, c'est-à-dire l'unité lexicale choisie, non fléchie ;
- DIT_Morfologia : indication sur la forme, ici courte ou longue, *dit* est une forme courte par opposition à *diguèt* qui est une forme longue ;
- DIT_Consonantisme : lorsque la forme est longue, la ou les consonnes précédant la désinence vocalique flexionnelle, par exemple, *squ* pour *disquèt* ;
- DIT_Vocalisme : lorsque la forme est longue, la voyelle finale utilisée, par exemple, *ó* pour *digot*.

À terme, cela sera fait pour chaque mot de la parabole, selon les traits qui leur sont propres, l'idée générale étant de faciliter le travail du linguiste, notamment au niveau de l'analyse dialectométrique.

3.1.3 Qu’essayons-nous de faire ?

Nous procédons majoritairement, pour le moment, à une analyse statistique descriptive de la base de données. C’est-à-dire que pour chaque entrée, nous analysons les différents choix de vocabulaire, ou encore les traits morphologiques ou phonologiques de la transcription des mots, en les regroupant et en les visualisant sur une carte. Ceci est effectué à l’aide du logiciel R grâce à la meta-base et à la visualisation des données sur des cartes en utilisant les bibliothèques `leaflet` ou `pyplot` pour les cartes interactives et `mapsf` pour les cartes statiques. À ce niveau, il est possible aussi de regrouper les mots permettant l’étude d’un même trait. Si l’on s’intéresse par exemple à la morphologie du prétérit, nous pouvons considérer tous les verbes au prétérit, aux personnes faisant apparaître le trait qui nous intéresse. Cela permet d’avoir une meilleure idée de la distribution des traits puisqu’il existe aux interfaces entre les zones où un trait spécifique est quasiment exclusivement employé, des concurrences entre les formes qui font qu’une même personne peut parfois utiliser plusieurs d’entre elles. Il est possible alors de définir, de façon plus ou moins locale, la probabilité empirique d’employer telle ou telle forme. Nous verrons des exemples en Section 3.2. Une application `shiny` est par ailleurs aussi accessible depuis la page du projet ; elle permet de construire des cartes linguistiques basiques à partir d’un échantillon de notre base.

Comme le dit très bien H. Gœbl dans l’introduction de l’article [63], ces cartes mots à mots, ou traits à traits, font souvent apparaître des zones qui ne se recoupent pas forcément selon les traits que l’on considère. Les dynamiques de variations lexicales, morphologiques ou phonologiques peuvent être en effet différentes selon les catégories et peuvent aussi faire montre de variations à l’intérieur de ces catégories. Si le nombre de traits considérés est important, comment dès lors définir des zones cohérentes de façon objective sans vouloir se placer au niveau du plus petit dénominateur commun ?

Nous avons mentionné dans la Section précédente le nom de Jean Séguy qui a joué un rôle de pionnier dans ce domaine. Il est aussi le linguiste qui a créé le mot de dialectométrie. Derrière ce mot se cache donc la volonté de mesurer, de façon quantitative, les variations d’une langue dans l’espace, c’est-à-dire les variations diatopiques de l’idiome considéré, que celles-ci soit, comme on l’a dit, d’ordre lexical, phonologique ou encore morphologique. Dans l’article [63], ce terme recouvre un ensemble de techniques de statistiques plutôt descriptives qu’utiliseraient un statisticien pour décrire un tableau de données qualitatives. On se place donc dans le cadre de l’analyse de données qualitatives. En linguistique, les méthodes de classifications basées sur des matrices de similarités jouent un rôle central. Nous présenterons plusieurs démarches possibles en ce sens en Section 3.3.

3.2 Quelques exemples descriptifs

Dans cette section, nous donnons deux exemples, en Sections 3.2.1 et 3.2.2, d’étude de la traduction d’un mot à partir de l’enquête Bourciez et de son croisement avec d’autres sources. En Section 3.2.3, nous montrons comment l’étude des correspondances dans l’usage de certains traits linguistiques permet de faire émerger des structures cohérentes, ce qui est un premier pas vers les méthodes dialectométriques développées en Section 3.3.

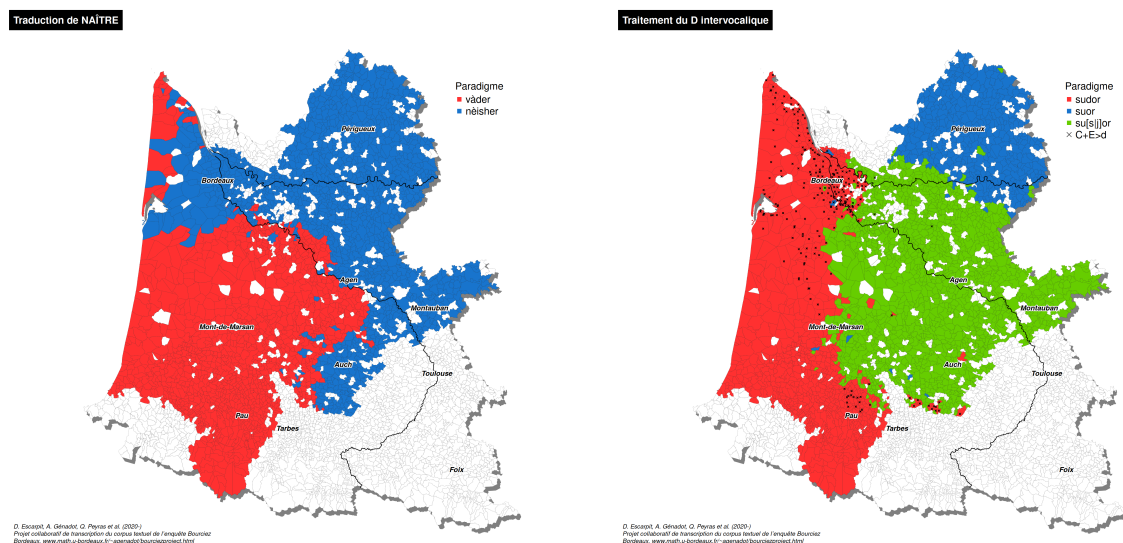
Au niveau des notations, nous noterons en italique l’occitan en graphie classique, par

exemple *aver*, en majuscule les formes latines, par exemple HABĒRE, et entre guillemets la reproduction brute d'un mot d'une parabole dans sa graphie originelle, par exemple « aoué ».

3.2.1 Le verbe naître en gascon

Nous allons dans cette section illustrer l'article de Bourciez [28] sur le verbe naître en gascon. Il ne manque en effet à cet article que quelques cartes afin de suivre au mieux le cheminement de l'auteur. Cela nous permettra aussi d'expliquer comment celles-ci sont construites.

Tout d'abord, pourquoi s'intéresser particulièrement à ce verbe ? Bourciez indique deux raisons : la première, c'est qu'il n'apparaît pas dans l'ALF alors en construction. La seconde est qu'il y a ici une originalité d'une certaine partie du domaine gascon pour rendre l'idée de « venir au monde, commencer à être », pour reprendre les termes de Bourciez. Comme indiqué dans [125, Volume 7, page 22], ce sont des dérivés du verbe latin NASCĒRE qui servent à rendre cette idée dans tout le domaine roman. Toutefois, les gascons ont proposé une autre solution que l'on retrouve dans les données de l'enquête. Il s'agit de VADĒRE ayant pour sens marcher ou encore aller en latin et dont on retrouve des traces dans la conjugaison du verbe aller en français. Ce verbe est devenu *vàder* en gascon et par un certain glissement sémantique, il a lui aussi servi à rendre l'idée de naître. Comme nous le montre la Figure 3.1a, cette forme a connu un certain succès.



(a) Distribution de *vâder* et *nêisher*.

(b) Traitement du D intervocalique.

FIGURE 3.1 – Distribution de *vâder* et *nêisher* et traitement du D intervocalique latin à partir de la traduction du mot sueur qui donne les paradigmes *sudor* en rouge, *susor* en vert et *suor* en bleu. Nous faisons aussi apparaître grâce à des points noirs le passage du latin C+E à d+e à partir de la traduction des mots oiseau, AUCĒLLUS qui donne *audèth*, et raisin, RACEMUS qui donne *radim*, si on ne considère dans ces deux derniers cas qu'uniquement le paradigme qui nous intéresse.

Avant de commenter quelque peu la distribution obtenue, nous donnons ici quelques indications sur la confection des cartes. Pour les limites communales de la France ainsi que les coordonnées géographiques des communes, nous avons utilisé les couches cartographiques mises à disposition sur la plateforme ouverte des données publiques françaises (Data Gouv). Toutefois, les limites communales à l'époque de l'enquête Bourciez n'étaient pas les mêmes qu'actuellement, certaines communes ayant été rassemblées. De plus, certaines paraboles sont attachées à un quartier ou un hameau en particulier. Dans de tels cas, nous avons effectué une tessellation de Voronoï de la commune actuelle concernée afin d'attacher une zone géographique à chaque parabole. Nous avons fait aussi apparaître le cours de la Garonne sur les cartes car, comme le dit bien Jean Séguy dans [120], c'est peut-être le seul élément géographique, avec, bien sûr, l'océan Atlantique et les Pyrénées, qui revêt une certaine importance pour l'interprétation des résultats. Nous avons d'ailleurs fait apparaître aussi la rivière Dordogne sur ces cartes pour se repérer un peu mieux. Les données relatives à la Garonne et à la Dordogne proviennent du service d'administration national des données et référentiels sur l'eau (Sandre).

Revenons à la traduction de naïtre présentée en Figure 3.1a. On trouve la forme *vàder* de la pointe de Grave aux confins du Béarn et de la Bigorre. Son emploi est quasi exclusif dans les départements des Landes, des Pyrénées-Atlantiques pour sa partie occitane et dans les parties gasconnes du Lot-et-Garonne et du Tarn-et-Garonne. Son usage est nettement concurrencé par *nèisher* en Gironde, dans l'est du Gers, et même si nous n'avons pas encore compilé les données correspondantes, dans une grande partie du département des Hautes-Pyrénées. Dans son article, Bourciez explique que c'est bien la forme issue de NASCÈRE qui a dû être dominante avant de laisser la place, pour une bonne part du domaine gascon, à *vàder*, avec, peut-être, une diffusion depuis le Béarn jusqu'au Médoc en suivant le littoral, cette forme ayant à nouveau été concurrencée par *nèisher* en Gironde, sans doute sous l'influence de l'usage bordelais, le sud-est de la Gascogne ayant quant à lui maintenu l'usage, majoritaire en occitan, des formes issues de NASCÈRE ou, pour le dire autrement, refusé l'innovation proposée par le gascon plus occidental.

Il y a un autre point intéressant soulevé par Bourciez dans son article que nous souhaitons aussi illustrer. C'est le maintien du /d/ intervocalique dans une partie du domaine gascon, par opposition à l'ensemble des parlers occitans. Le latin SŪDĀRE a en effet donné *susar* ou *suar* dans la quasi totalité des parlers occitans. Ce trait peut se percevoir dans l'emploi de *vàder* à travers les trois solutions phonétiques proposées par les instituteurs pour la consonne intervocalique : *vàder*, *vàser* et *vàjer*, soit /d/, /z/ ou /ʒ/, réalisé aussi /j/. Comme nous venons de le voir, *vàder* est concurrencé par *nèisher* dans une partie du domaine étudié, ce qui masque en grande partie la distribution associée. Bourciez s'appuie sur la traduction du mot *sueur* pour contourner ce fait, qui donne *sudor* ou *susor* en gascon, ce mot étant très largement partagé sous ces deux formes dans le domaine étudié, avec *suor* en Dordogne. La distribution associée est présentée en Figure 3.1b. Il serait tout à fait possible de s'appuyer sur d'autres mots utilisés dans la parabole pour illustrer ce phénomène en considérant les dérivés de VIDĒRE et CRĒDĒRE, qui ont donné les verbes voir et croire en français et les paradigmes *véder*, *véser* ou encore *veire* en occitan. Néanmoins, là encore, la présence majoritaire des formes *veire* et *creire* en gironde masque la distribution d'intérêt. On comprend mieux dès lors pourquoi Bourciez a choisi la traduction du mot *sueur* pour illustrer son propos. Nous voyons en Figure 3.1b que les distributions de /d/ et /z/ ou /j/ coupent la Gascogne en deux. Cette coupe, du sud-est de la Gironde à Mont-de-Marsan, suit des chemins secondaires de la grande voie de pèlerinage

et de commerce dite des petites landes, situés quelque peu à l'ouest de celle-ci pour la partie concernée.

Nous noterons pour terminer cette section qu'il existe encore d'autres mots présentant un /d/ intervocalique avec une distribution propre à une partie de la Gascogne, et même toute girondine. C'est l'évolution du C intervocalique latin qui donne souvent /d/ dans les parlers de la région de Bordeaux. Ainsi RACEMUS donne *radim*, en français raisin, AUCĒLLUS donne *audèth*, en français oiseau, FACĒRE donne *hèder*, en français faire et DICĒRE donne *déder*, en français dire. Les distributions sont ici encore différentes de celles rencontrées pour les dérivées de SUDOR, de VIDĒRE et CRĒDĒRE. La distribution de C+E>d semble en effet être incluse dans celle de D>d comme le montre la Figure 3.1b. Pour la distribution de C+E>d, il est intéressant d'observer aussi l'existence d'un axe reliant le sud de la Gironde à Mont-de-Marsan, via l'actuelle route départementale D834, ainsi qu'un certain agrégat au nord de Pau – et un autre agrégat en pays auscitain mais qui obéit à une autre logique –. Il y a peut-être eu une solution de continuité par le passé entre cet agrégat palois et la Gironde. On voit encore ici se dessiner des routes traditionnelles toujours utilisées aujourd'hui, et qui ont naturellement participé à la diffusion de traits linguistiques. Il est particulièrement manifeste sur cet exemple que c'est la finesse du maillage de l'enquête Bourciez qui permet de suivre ces routes, alors que ceci nous semble plus difficile avec l'ALF ou l'ALG. D'une façon générale, l'enquête Bourciez s'avère être un outil utile lorsque l'on souhaite préciser la distribution de tel ou tel trait que l'on rencontre dans l'ALF ou l'ALG.

3.2.2 La traduction de quand, conjonction de subordination

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à la traduction de la conjonction de subordination « quand ». Cette conjonction est présente en trois endroits du texte :

— Paragraphe 3 : « Il n'eut plus de lit pour dormir la nuit, ni de feu pour se chauffer quand il faisait froid. »

— Paragraphe 5 : « Je fis un péché, quand je voulus vous quitter. »

— Paragraphe 6 : « Quand il vit venir sur le chemin son fils... »

À ces trois occurrences, l'on peut rajouter la traduction de « dès que » au

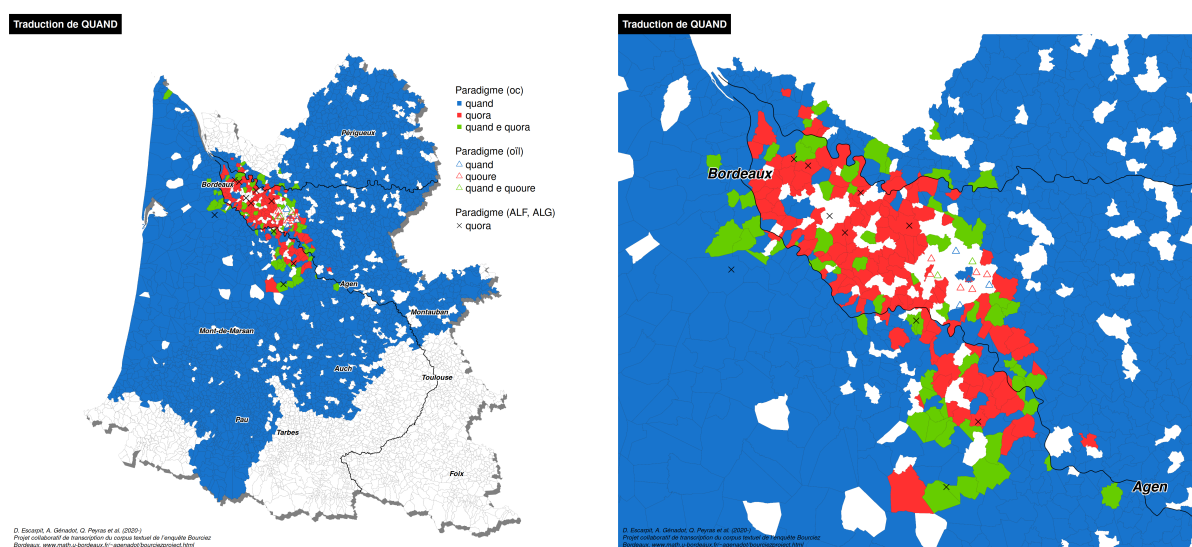
— Paragraphe 7 : « ...leur dit-il dès qu'ils furent assemblés. »

Dans la plupart des parlers occitans, il est naturel de s'attendre à ce que la solution proposée soit le cognat du « quand » français qu'est le *quand* occitan, tous deux dérivés du latin QUANDO de même sens. Dans l'enquête, il y a cependant une autre solution qui est proposée, c'est l'utilisation de *quora* du latin QUĀ ORĀ, littéralement, « à quelle heure ». On voit sur la Figure 3.2 que cette dernière solution est principalement adoptée autour de Bordeaux et dans la région de l'Entre-deux-mers, entre la Garonne et la Dordogne, avec une certaine continuité jusqu'à la région de Marmande, des deux côtés de la Garonne. Or, si *quora* est bien connu en occitan, il l'est plutôt comme adverbe interrogatif : *Quora tornaràs ?* me disait mon grand père, c'est-à-dire, « quand reviendras-tu ? ». Il y a donc là une certaine originalité de cette région dans notre corpus de ce point de vue là.

Parmi les 199 communes du corpus où *quora* est employé, il y en a 183 qui présentent toutes les données pour les *quand* et *quora* des paragraphes 3,5 et 6. Les effectifs pour ces communes sont les suivants :

	paragraphe 3	paragraphe 5	paragraphe 6
quand	25	42	24
quora	158	141	159

Ce tableau se lit de la façon suivante : il y a 25 communes où le « quand » du paragraphe 3 est traduit par *quand*. Il semble que *quand* soit un peu plus choisi pour la phrase du paragraphe 5, un test de Fisher donne une p-valeur égale à 0,03. Si cette différence est significative, comment l'expliquer ? Une différence notable entre les phrases considérées des paragraphes 3, 5 et 6 est que celle du paragraphe 5 est au style direct. Nous pourrions formuler l'hypothèse que *quand* est un peu plus utilisé au style direct qu'indirect dans cette zone mais pour vérifier cette hypothèse, il nous faudrait avoir accès à d'autres sources et constituer un corpus plus large encore afin d'étudier ce phénomène pour la zone concernée.



(a) Vue générale.

(b) Zoom.

FIGURE 3.2 – Distribution de *quand* et *quora* dans l'enquête Bourciez.

En ce qui concerne le domaine géographique que l'on étudie, ces résultats peuvent se deviner dans l'ALF dans lequel *quora* est employé dans les communes d'Andraut, Targon et Houëilles, voir les cartes 90, 93, 512, 516, 573, 654a, 1109, 1150, 1306a et 1370a de l'ALF. L'ALG nous donne également comme communes Beychac-et-Caillau, Grézillac, Blasimon, La Sauve, Saucats, Blagnac et Labastide-Castel-Amouroux. Toutes ces communes se trouvent dans l'aire géographique que nous avons déterminée grâce à l'enquête Bourciez. Nous les faisons aussi apparaître en Figure 3.2.

La consultation des cartes de l'ALF nous permet aussi de nous rendre compte qu'il y a d'autres domaines où *quora* est employé comme conjonction de subordination, notamment autour du département des Alpes-maritimes et jusque dans les vallées occitanes en Italie, d'où son emploi aussi en Guardia Piemontese. Il y a sans doute d'autres régions où *quora* doit être employé en ce sens mais que les atlas n'ont pas pu enregistrer.

En dehors du domaine occitan, un cognat de *quora* peut aussi se trouver comme conjonction. On le trouve par exemple en romanche [36, entrée quand, note 2] et jusqu’au saintonguais [125, entrée horā, page 478]. Cette dernière zone est proche de la région bordelaise. Cette coïncidence dans l’usage est peut-être le reflet du substrat occitan sur lequel le saintonguais a pris place. On peut toutefois penser à une évolution indépendante au vu de son utilisation dans la zone romanche. Pour continuer tout de même quelque peu sur cette voie, nous noterons qu’il est bien connu qu’il y a des communes de Gironde, dans l’Entre-deux-mers, le Libournais, et le Blayais, qui sont de parlars saintonguais. Les enclaves de l’Entre-deux-mers ont été très étudiées, voir par exemple les études de Bourciez citées dans [4]. Dans l’enquête Bourciez, il y a douze communes des cantons de Monségur, Seyches, Pellegrue et La Réole qui emploient cet idiome. Elles sont représentées par des triangles dans la Figure 3.2. Il est intéressant de noter que pour ces communes aussi, lorsque les cognats saintonguais de *quand* et *quora* sont tous deux employés, *quand* est employé au paragraphe 5 et *quora* dans les autres cas, comme pour les communes occitanophones. Enfin, dans l’enquête Bourciez, les communes de langue d’Oïl des arrondissements de Blaye et Libourne ne présentent jamais le « quoure » saintonguais.

Cet exemple nous a permis de montrer comment il était possible de faire dialoguer l’enquête Bourciez avec les enquêtes de l’ALF et de l’ALG et comment l’enquête Bourciez permet parfois de préciser ce qui apparaît de manière relativement floue dans ces deux enquêtes. Comme nous l’avons déjà dit, le maillage territorial utilisé fait de cet enquête un outil précieux. L’exemple considéré est par ailleurs intéressant car il fait apparaître un choix pour la traduction d’une conjonction de coordination — *quora* — assez original dans l’ensemble roman. Nous avons aussi pu illustrer comment utiliser l’enquête lorsque la traduction d’un même mot apparaît plusieurs fois. Ceci est très élémentaire mais permet de bien se rendre compte du degré de variabilité intrinsèque de chaque individu lorsqu’il choisit, pour la traduction, tel ou tel mot à sa disposition. Un peu comme en physique quantique, on ne peut pas savoir à l’avance, dans certaines zones, si l’individu va choisir la réalisation A ou la réalisation B, il faut faire l’expérience et, pour filer la métaphore, à chaque fois que cette expérience est faite, on peut imaginer qu’à un infime degré, le système que constitue la langue, est modifié. À un niveau moins individuel, ces variations permettent souvent de déterminer des zones d’interface ou d’interaction, qui font parfois émerger des solutions originales qui leurs sont propres, comme nous le verrons en Section 3.3.1 à propos de l’interaction entre les phonèmes /f/ et /h/.

3.2.3 Le gascon via ses formes de l’imparfait et du prétérit

L’une des caractéristiques qui unit de la façon la plus évidente les parlars gascons est sans doute l’originalité des désinences verbales employées à l’imparfait et au prétérit, si on le compare aux autres parlars occitans. Cette originalité a notamment été analysée dans [115] et [2], en se basant sur les données de l’ALG. De quoi parle-t-on exactement ? À la troisième personne du singulier de l’imparfait du verbe faire, *far*, là où la plupart des parlars occitans diront *fasiá* pour « il faisait », le gascon dira *hasè* ou *hasèva*. De façon tout à fait corrélée, comme souligné dans [2] et comme nous le montrerons avec nos données, à la désinence de la troisième personne du singulier du prétérit : pour le verbe dire, là où la plupart des parlars occitans diront *diguèt*, le gascon dira *digot*. Notons qu’ici nous ne prenons pas en compte les variations de la consonne centrale, on peut trouver *disot* par exemple, et que nous considérons *dishut* comme une variation de *dishot*. Cette dépendance entre les formes de prétérit et d’imparfait en terme d’aréologie a le mérite de proposer une définition, minimaliste et critiquable, bien sûr, de ce

qu'est l'aire gasconne, au moins pour la partie de l'enquête que nous avons dépouillée jusqu'alors : c'est l'endroit où la conjugaison des verbes du premier groupe se fait en *-è/-èva* à l'imparfait en même temps que celle des verbes des deuxième et troisième groupes se fait en *-ot* au prétérit.

Voici les fréquences conditionnelles observées dans nos données, plus de 2500, rappelons-le, à partir des verbes faire et dire :

	Imp.	-è(va)	-iá
Prét.			
-èt		0.01	0.99
-ot		0.99	0.01

	Prét.	-èt	-ot
Imp.			
-è/-èva		0.01	0.99
-iá		0.98	0.02

Le tableau de gauche se lit de la façon suivante : sachant que l'on emploie la forme en *-ót* au prétérit, il y a 99% de chance d'employer la forme en *-è/-èva* à l'imparfait. Pour le tableau de droite, le conditionnement est inversé : sachant que l'on emploie la forme en *-iá* à l'imparfait, il y a 98% de chance d'employer la forme en *-èt* au prétérit. Nous pourrions aussi considérer des distances de type χ^2 mais la considération des fréquences conditionnelles nous semble plus parlante dans notre cas. Nous donnons dans le tableau suivant la valeur de

$$\frac{\mathbf{P}(A|B) + \mathbf{P}(B|A)}{2}$$

pour toutes les paires d'entrées (*A*, *B*) possibles afin de ne faire qu'un seul tableau interprétable en terme d'intensité de la dépendance :

	Imp.	-è/-èva	-iá
Prét.			
-èt		0.01	0.99
-ot		0.985	0.015

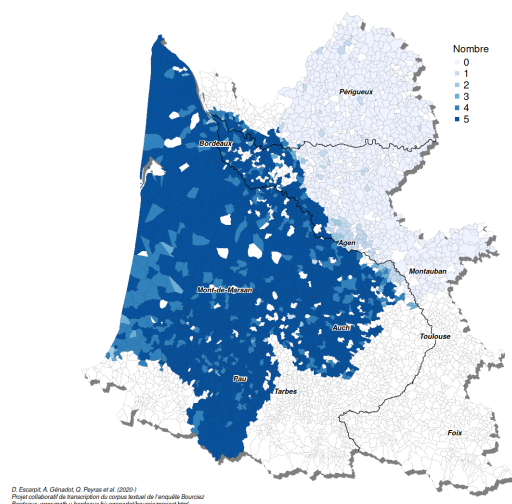
Nous observons donc que la coïncidence des emplois est très forte.

Cette très forte corrélation peut être étendue à d'autres phénomènes :

- les désinences du conditionnel de par l'analogie avec celle de l'imparfait, à travers la traduction de « aurait » dans le tableau associé à la Figure 3.3 ;
- le traitement de la désinence latine ARIUM, comme souligné dans [115], à travers la traduction du mot « pommier », POMARIUM, qui donne *pomèr* ou *pomèir* en gascon, et *pomièr* dans les autres aires de notre enquête ;
- le traitement du LL latin en finale dans le suffixe ĘLLU latin, à travers la traduction de mot « veau », VITĘLLUS, qui donne *vedèth* ou *vetèth* en gascon, voir [29, paragraphe 271], et *vedèl* ou *vedèu* dans les autres zones considérées, si l'on fait fi des formes de transitions.

Nous donnons l'intensité de ces coïncidences en Figure 3.3 ainsi que la carte correspondante, avec une échelle de 0 à 5. Les coïncidences de 2 à 4 peuvent être dues à des valeurs manquantes, une partie de la Gascogne n'utilise pas le prétérit mais le passé composé ou le plus-que-parfait par exemple, cette zone est d'ailleurs visible sur la carte, au-dessus de Bayonne – voir [32] sur l'usage usuel de ces temps en occitan. Le fait gascon, de ce point de vue là, n'en est pas moins manifeste. Évidemment, corrélation n'est pas raison et nous ne savons pas si la

Coincidence : digot, auré/i, hasé(va), pomè(i)r, vedèth



Formes	far (Imp.)		aver (Cond.)		pomèir (ARIUM)		vedèth (LL)	
	-è(va)	-iá	-é/i	-iá	-è(i)r	-ièr	-èth	-èl/-èu
-èt	0.005	0.99	0.99	0.008	0.05	0.96	0.02	0.98
-ot	0.99	0.01	0.01	0.99	0.98	0.01	0.99	0.02

FIGURE 3.3 – L’aire gasconne selon les critères mentionnés en Section 3.2.3 ainsi que le tableau des moyennes des fréquences conditionnelles.

coïncidence de ces traits peut s’expliquer de façon unifiée, en développant un argumentaire qui reprendrait les idées de [115] par exemple.

Pondérons quelque peu ces résultats en soulignant à nouveau qu’ils ne concernent que les paraboles dépouillées jusqu’alors, l’exploitation des paraboles des départements de Haute-Garonne et d’Ariège devrait nuancer ces conclusions : le gascon sud-oriental devrait moins faire montre de ces corrélations tout en restant pleinement gascon.

Ce faisant, nous avons réalisé dans cette section une première partition de nos données, en nous basant sur des coïncidences d’emplois de certains traits linguistiques, choisis avec soin. Il serait fastidieux de passer en revue toutes les caractéristiques linguistiques présentes dans la parabole de cette façon là. Nous utiliserons en Section 3.3.2 des méthodes de partitionnement usuelles qui permettent d’automatiser et généraliser le procédé.

3.3 Un peu de dialectométrie

Comme nous l’avons mentionné en Section 3.1, l’inventeur du mot de *dialectométrie* est Jean Séguy, qui, avec d’autres romanistes européens de son temps, a eu un impact majeur sur le développement des méthodes quantitatives en linguistique, voir par exemple [3, 24] et [97, Chapitre 7]. Pour citer Hans Gøabl [64], « la dialectométrie est une méthode quantitative pour l’analyse et l’étude des structures de profondeur contenues (mieux : cachées) dans les données

d'un atlas linguistique classique ». Pour un statisticien, la dialectométrie recouvre en grande partie les méthodes classiques d'analyse des données, à travers la construction de matrices de distances, l'analyse des correspondances multiples ou encore l'analyse factorielle multiple et les méthodes de classification et de régression, sans avoir la prétention d'être exhaustif sur les méthodes employées. Nous présentons un autre type d'approche en Section 3.3.1, autour de la notion de gradient linguistique. On pourra consulter [34] pour avoir un aperçu de ces diverses méthodes dialectométriques.

3.3.1 Un exemple de gradient : le traitement du F latin

L'un des traits phonologiques emblématiques du Gascon est le traitement qu'il réserve au F latin, voir par exemple [37, Section 2.2]. Celui-ci passe très largement à la consonne glottale fricative /h/ : FĒSTA > *hèsta*, réalisé [ˈhɛsto] par exemple. Ce même phénomène apparaît aussi par-delà les Pyrénées [33, 113] où aujourd'hui, ce /h/ est devenu muet dans la plupart des dialectes de la péninsule ibérique. Cette variation diachronique a fait l'objet d'une grande attention de la part des romanistes [100, 108]. Par rapport aux autres dialectes de l'occitan, ce trait phonétique est un des traits typiques du Gascon, même si il n'est pas restreint à celui-ci, nous pouvons mentionner par exemple certains parlars du Cantal qui ont aussi connu en partie cette évolution. Mentionnons aussi que la transformation F>h est aussi discutée dans d'autres langues, comme par exemple en irlandais, voir [82, 104]. La réalisation de cette consonne diffère selon les contrées gasconnes, elle peut être plus ou moins muette ou au contraire fortement aspirée. Est-ce que cela se perçoit, d'une façon ou d'une autre, dans le corpus de l'enquête Bourciez ?

Nous avons déjà dit en introduction qu'il ne faut pas espérer inférer finement la prononciation à partir d'une enquête écrite. Ce que l'on peut faire toutefois dans le cas du traitement du F latin, est de considérer la distribution des signes f et h ainsi que l'absence d'un de ces deux signes, à l'attaque de mots qui en latin, commencent par F. Nous soulignons, encore une fois, que l'utilisation de la lettre h par les instituteurs ne présume pas de l'aspiration de celle-ci, sauf lorsque cela est mentionné explicitement. Cette mention est présente pour 5% des paraboles, ce que nous interprétons comme le fait que la prononciation de /h/ est considérée comme non problématique, et même évidente, par la plupart des auteurs. Ces indications soulignent toutes que le /h/ est aspiré, comme attendu dans le domaine Gascon. Il est intéressant de noter que le /h/ est aspiré dans quelques villes de la rive droite de la Garonne, où cela n'est pas vraiment attendu. Cela est très clairement indiqué à Samonac, Pompignac et Sallebœuf. Les mentions d'aspiration du h sur la rive gauche de la Garonne sont, quant à elles, plus communes et sans surprises.

Nous avons donc sélectionné dans la parabole un certain nombre de mots selon les deux critères suivant :

- ils proviennent de mots possédant un F en latin suivi d'une voyelle ;
- ils sont bien représentés sur tout le territoire de l'enquête, sous une forme proche, au moins du point de vue étymologique.

Cela nous a amené à considérer 17 mots de la parabole, dont 16 avec un F en attaque. Voici 8 mots sur lesquels nous ferons quelques commentaires plus particuliers :

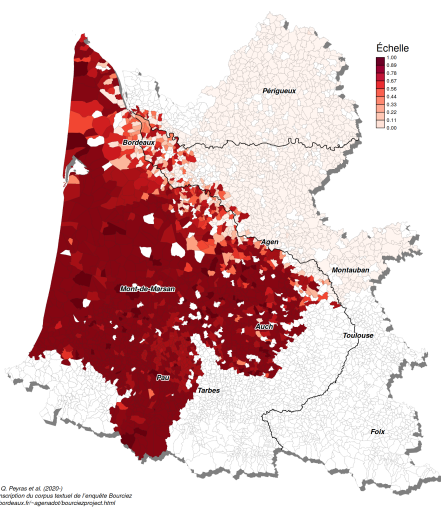
	Mot	Traduction	Étymologie latine
1	<i>cauhar</i>	chauffer	CALEFĀRE
2	<i>hami</i>	faim	FAMES
3	<i>hasèva</i>	faisait	troisième personne de l'imparfait de <i>far</i> , du latin FACĒRE
4	<i>hemna</i>	femme	FĒMĪNA
5	<i>hèsta</i>	fête	FESTUM
6	<i>hasoc</i>	fit	troisième personne du preterit de <i>far</i> , du latin FACĒRE
7	<i>huec</i>	feu	FŌCUS
8	<i>huelha</i>	feuille	FŌLIA

Ces 8 mots ont un taux de transcription très élevé, supérieur à 97%, de sorte que les comparaisons peuvent être effectuées sans trop de biais. Les 9 autres mots considérés sont six autres flexions de la traduction du verbe faire ainsi que les traductions de fenêtre, fils et fou, qui sont légèrement moins bien représentés. Il faut bien dire aussi que, si fenêtre peut se traduire par le mot *finèstra*, ce mot peut prendre en gascon la forme *arrièsta* par métathèse de *r*, amuïssement de *f* et de *n* puis prothèse de *a*, ce qui rend son traitement assez particulier. Dans le tableau considéré, 7 mots sur 8 ont un F étymologique en première position : les mots 2 à 8. Seul le mot 1, *cauhar*, présente ce phonème dans le corps du mot. Nous allons chercher à savoir si le traitement est différent dans ce cas. Pour les 7 mots avec le F en première position, nous avons les combinaisons *ha*, *he/hè*, *hi* et *hue*. Ici encore, nous examinerons les différences de traitement possibles en ce qui concerne la voyelle ou la diphtongue qui suit le phonème /h/.

Il existe également de nombreux mots gascons qui possèdent un F latin étymologique et qui apparaissent dans de nombreuses paraboles mais pas dans l'ensemble du domaine étudié. Par exemple, la traduction du mot coq peut être *hasan* (du latin PHASANIUS) mais ce mot est concurrencé par d'autres dans le domaine étudié, à savoir *viguèir* ou *galh*, et possède donc un taux de transcription inférieur à 50%. Cependant, il ne serait pas difficile de montrer que ces mots non considérés se comportent comme les mots considérés. Un autre phénomène intéressant est l'adjonction de la particule /es/ pour aider à la prononciation du h, principalement pour le mot *huelha* dans nos données : *es-huelha*. Dans un tel cas, le /h/ peut toujours être écrit ou non. Par exemple, nous pouvons trouver à la fois la transcription « eussoueuilleu » et « eushoueuilleu ». Il y a aussi l'apparition d'un /g/ euphonique dans quelques rares cas : en gascon, ce phonème est souvent utilisé pour prévenir un hiatus, par exemple « e guit » pour *e hit* lorsque le /h/ n'est pas aspiré. À cet égard, on trouve également la graphie « eusgoueuille ».

Les distributions des fréquences d'utilisation des signes f et h pour les 17 mots considérés avec F en attaque sont données en Figure 3.4. Comme on pouvait s'y attendre, la lettre h est utilisée dans la majeure partie de la région gasconne, tandis que la lettre f est utilisée dans les régions languedociennes et limousines. L'absence de signe, que nous noterons par le signe représentant l'ensemble vide « Ø », semble émerger du contact entre ces deux phonèmes, en suivant la Garonne. Cela suggère que l'aire de répartition de la consonne gasconne /h/ non aspirée se situe autour de la Garonne, et semble même se poursuivre quelque peu le long de l'estuaire de la Gironde dans le Médoc. En quelque sorte, au contact du /f/, le /h/ apparaît au locuteur comme une absence d'articulation et tend à disparaître. Notons, à propos de cette disparition, que nous n'observons pas, géographiquement, une séquence d'affaiblissement phonologique,

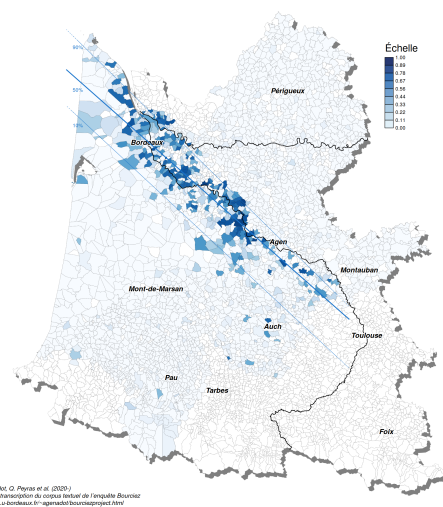
Transcription du F en attaque : h



© Escoubé, A. Générac, O. Peyrot et al. (2023).
Projet collaboratif de transcription du corpus lexical de l'anglais Bournois.
Bordeaux, www.math.u-bordeaux.fr/~agenard/bournoisproject.html

(a) Fréquence d'utilisation de h.

Transcription du F en attaque : Ø



© Escoubé, A. Générac, O. Peyrot et al. (2023).
Projet collaboratif de transcription du corpus lexical de l'anglais Bournois.
Bordeaux, www.math.u-bordeaux.fr/~agenard/bournoisproject.html

(b) Fréquence d'utilisation de Ø avec régressions quantiles.

FIGURE 3.4 – Distributions des signes h et Ø en attaque à partir de 17 mots. On en déduit aisément la distribution générale de f par complémentarité.

voir [33, 55, 104], $f > h > \emptyset$, mais plutôt la double séquence $f > \emptyset$ et $h > \emptyset$. Cela implique deux choses : dans le corps du domaine gascon, le /h/ n'est pas affaibli, ou du moins pas au point de disparaître, tout comme le /f/ du domaine languedocien reste fort. C'est donc bien du contact entre les deux prononciations qu'émerge l'amuïssement de la consonne h.

Nous avons tracé sur la Figure 3.4 les points où Ø est présent avec la fréquence d'usage correspondante en degré de bleu ainsi que le cours de la Garonne. En ne tenant compte que de ces points, nous avons tracé les droites de régressions quantiles tenant compte des fréquences. Ces droites de régressions quantiles suivent bien ici la direction indiquée par la Garonne. En fait, la Garonne se comporte comme une médiane dans le sens où la somme des fréquences du signe Ø sur sa rive droite correspond à 56% environ de la somme totale des fréquences observées pour ce signe. Il est aussi assez visible sur cette carte que l'usage de h et de Ø est présent sur la rive droite de la Garonne dans les départements de la Gironde et du Lot-et-Garonne mais disparaît en aval d'Agen, vers Port-Sainte-Marie, au profit de la rive gauche du fleuve. En ce sens, la Garonne serait un fleuve un peu plus gascon que languedocien entre Agen et Bordeaux, et plus languedocien que gascon en amont d'Agen, si tant est qu'une telle affirmation ait un sens. En tout état de cause, ce trait typiquement gascon semble s'étendre un peu au domaine languedocien en aval d'Agen. Cela tend à confirmer qu'il a pu y avoir, dans le passé, un usage plus marqué du /h/ gascon aspiré à l'est de la Garonne. Cette prononciation particulière se serait ensuite progressivement atténuée au contact du dialecte languedocien et peut-être aussi sous l'influence de la prononciation française du h muet.

Qu'est-il possible de dire concernant la consistance dans l'écriture, et peut-être dans la prononciation, de /h/ par les auteurs ? À quel point le traitement dépend-il du mot considéré ?

Une façon naïve de répondre à cette question consiste à calculer le nombre moyen de fois que les auteurs sont consistants dans leurs choix, pour chaque paire de mots :

	<i>cauhar</i>	<i>hami</i>	<i>hasèva</i>	<i>hemna</i>	<i>hèsta</i>	<i>hasoc</i>	<i>huec</i>	<i>huelha</i>
<i>cauhar</i>	1.00	0.89	0.93	0.80	0.91	0.92	0.90	0.92
<i>hami</i>	0.89	1.00	0.91	0.83	0.95	0.94	0.95	0.93
<i>hasèva</i>	0.93	0.91	1.00	0.81	0.93	0.94	0.92	0.94
<i>hemna</i>	0.80	0.83	0.81	1.00	0.84	0.82	0.83	0.82
<i>hèsta</i>	0.91	0.95	0.93	0.84	1.00	0.95	0.95	0.94
<i>hasoc</i>	0.92	0.94	0.94	0.82	0.95	1.00	0.94	0.94
<i>huec</i>	0.90	0.95	0.92	0.83	0.95	0.94	1.00	0.94
<i>huelha</i>	0.92	0.93	0.94	0.82	0.94	0.94	0.94	1.00

Ce tableau signifie que, par exemple, 93% des auteurs utilisent à la fois la solution f lorsqu'ils écrivent *caufar* et *hasèva* (première ligne, troisième colonne). Nous observons que ces taux de consistance deux-à-deux sont très élevés mais le sont un peu moins pour la traduction du mot femme. On peut se rendre compte que dans les zones où l'absence de signe peut être attendue, le mot *hemna* est en compétition avec « fame », qui, d'une certaine façon, imite la prononciation française de femme, toujours avec un f. Cela implique que de nombreux auteurs qui utilisent le phonème /h/ pour les autres mots, ne l'utilisent pas pour celui-ci. L'utilisation de tests du χ^2 confirme ces résultats tout comme une analyse en composantes principales, dans le sens où l'on y observe trois groupes bien définis, f, h et \emptyset , mais avec la traduction du mot femme à part. Il ne semble donc pas y avoir de traitements significativement différents selon que le F soit en attaque ou dans le corps d'un mot, ou encore selon la voyelle suivante, si on met à part la traduction de femme pour laquelle il existe une explication propre.

Notre objectif est maintenant d'étudier d'un peu plus près le passage de /h/ à /f/ dans le domaine étudié. Puisque les distributions des signes f, h et \emptyset présentent manifestement un lien fort avec la localisation de la Garonne nous avons affiché, pour les $n = 2652$ villes i , la fréquence $p_{i,f}$ (respectivement $p_{i,h}$ et $p_{i,\emptyset}$) d'utilisation de f (respectivement h et \emptyset) en fonction de la distance à la Garonne en Figure 3.5. Les abscisses négatives correspondent aux villes situées sur la rive gauche du fleuve tandis que les abscisses positives correspondent à celles situées sur la rive droite. La localisation de la Garonne est en zéro.

Nous pouvons voir sur cette figure que la transcription par une absence de signe est effectivement concentrée autour de la Garonne. Les transitions de f à h et de h à f semblent suivre des courbes sigmoïdes. Nous notons que ces transitions ne sont pas symétriques en raison de la présence du signe \emptyset : les transitions entre f et h+ \emptyset sont elles symétriques. Cela signifie simplement que l'absence de signe correspond à l'absence d'un h, et non d'un f, et que cela reflète donc que le /h/ non aspiré provient bien d'un affaiblissement d'un /h/ aspiré, si nous avons des doutes.

Afin de clarifier ce point, nous proposons de lisser ces fréquences de la manière suivante. Nous désignons par d_i la distance euclidienne à la Garonne pour la ville i . Pour une distance fixe d et une distance à la Garonne x , nous désignons par

$$\mathcal{I}_{d,x} = \{j \in \{1, \dots, n\} ; |d_j - x| \leq d\},$$

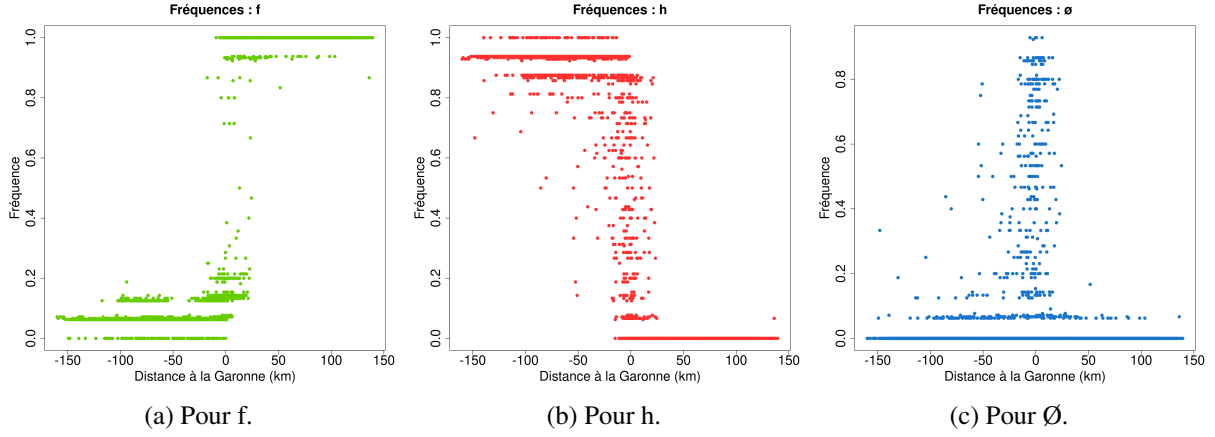


FIGURE 3.5 – Fréquences brutes de la distribution des signes f , h et \emptyset ainsi que les versions lissées pour $d = 1,5$ km.

l'ensemble des villes qui sont à une distance x plus ou moins d km de la Garonne. Les fréquences lissées, par bandes de $2d$ km de large sont ainsi définies par

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \forall a \in \{f, h, \emptyset\}, \quad p_a^{(d,x)} = \frac{1}{\text{Card}(\mathcal{I}_{d,x})} \sum_{j \in \mathcal{I}_{d,x}} p_{j,a}.$$

Par exemple, nous pouvons interpréter $p_f^{(1,10)}$ comme la fréquence d'utilisation du signe f sachant que nous sommes à une distance de la Garonne comprise entre $10 - 1 = 9$ et $10 + 1 = 11$ km. Les résultats sont affichés en Figure 3.6 pour $d = 1,5$ km. Nous traçons également sur ces figures les sigmoïdes les plus proches pour les fréquences lissées des signes h et f , par minimisation de la moyenne des erreurs en valeurs absolues. À cette échelle, l'adéquation entre les données et les courbes sigmoïdes est très bonne (au sens des corrélations). Il faut bien observer aussi que ce lissage n'est pas vraiment local dans le sens où des communes très éloignées géographiquement mais ayant pour point commun une distance à la Garonne assez proche, participent à la moyenne d'un même groupe. Il est remarquable que tout se passe comme si les distributions de h et f émergeaient d'un modèle théorique simple de dynamique des populations décrivant les interactions entre deux caractéristiques en interaction, voir par exemple [98, 77].

Nous présentons aussi en Figure 3.6a un lissage plus local, aux 10 plus proches voisins, en fonction de la distance à la Garonne. La tendance observée est la même : une transition de type sigmoïdale pour le fait d'employer le $/f/$ plutôt que le $/h/$. Nous observons cependant ici, le lissage étant plus local, l'apparition d'une bande de transition entre deux courbes sigmoïdes reliant 0 à 1. Cette bande sera plus ou moins large selon le nombre de communes participant à la formation d'une moyenne. Cette technique a le mérite de définir une zone de transition d'une façon peut-être plus claire que pour l'autre lissage.

Dans la zone de transition, celle d'emploi de \emptyset , nous observons une grande variabilité. La Figure 3.7 en donne un aperçu. Explicitons un peu ce que cette figure représente. Pour chaque commune i , on note

$$m_{i,\emptyset} = \max_{j \in \mathcal{V}_{i,10}} |p_i - p_j|$$

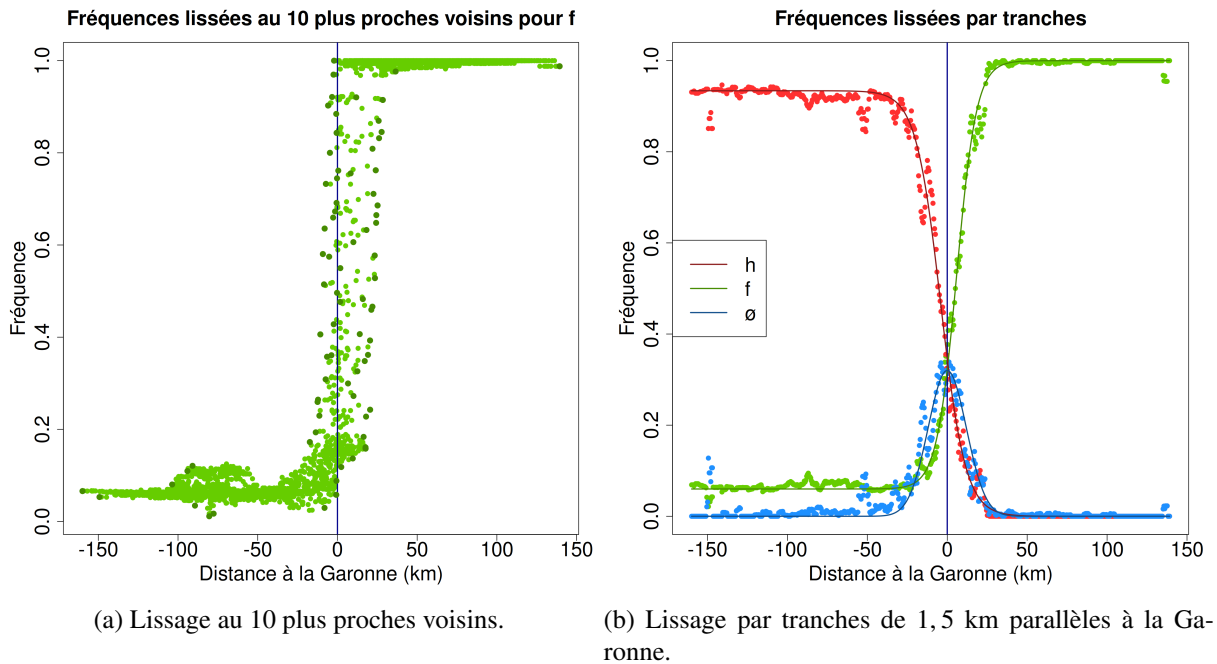


FIGURE 3.6 – Deux types de lissage pour les fréquences. Pour la Figure 3.6a, un lissage aux 10 plus proches voisins pour les fréquences d’utilisation de *f*, les points plus foncés pouvant servir à définir les limites extérieures de la zone de transition. Pour la Figure 3.6b, un lissage par tranches de 1,5 km parallèles à la Garonne, avec les ajustements logistiques et gaussien correspondants.

la différence maximale de fréquence d’utilisation de \emptyset entre la commune i et l’un de ces 10 plus proches voisins $j \in \mathcal{V}_{i,10}$. Nous pouvons obtenir les diagrammes en boîte de ces m_i par tranche d’utilisation de \emptyset comme cela est présenté en Figure 3.7. Nous observons que plus l’usage de \emptyset est fréquent, plus il devient quasi-systématique d’observer son quasi non emploi dans une des dix plus proches communes voisines. La prononciation du *h* semble donc assez instable dans cette zone de transition.

Cet exemple nous a permis de montrer qu’il était possible d’utiliser l’enquête Bourciez pour mener certaines analyses phonologiques, bien qu’une enquête écrite sans utilisation d’un alphabet phonétique ne soit pas particulièrement bien indiquée pour cela. Les résultats obtenus n’en sont pas moins clairs : il y a une transition graduelle entre /*f*/ et /*h*/ qui fait émerger, par un phénomène de contact, une troisième solution que nous avons notée \emptyset , correspondant à un *h* muet autorisant par exemple les liaisons. Nous avons montré que ce trait se diffuse depuis le cours de la Garonne qui joue moins le rôle d’une frontière que celui d’une zone d’intenses interactions, propices sans doute à la fois aux innovations, à la transmission de celui-ci mais aussi, peut-être, par l’effet du nombre, à une certaine stabilisation. C’est en effet le long du cours de la Garonne que la densité communale est la plus grande dans la région considérée et cette densité est en fait fortement corrélée à la distribution de \emptyset .

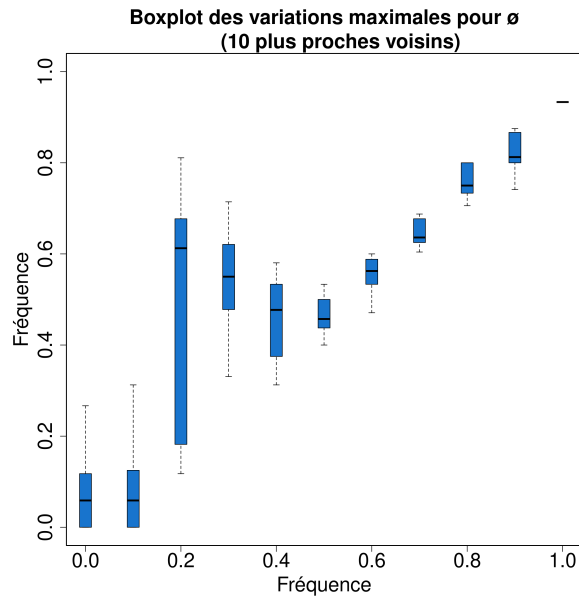


FIGURE 3.7 – Diagrammes en boîte de la variation maximale de la fréquence d’emploi de \emptyset lorsque on considère les dix plus proches voisins de chaque commune.

3.3.2 Exemples de partitions

Nous allons illustrer dans cette partie cette tentative de faire émerger des *structures de profondeurs* en considérant uniquement le premier paragraphe de la parabole, qui donne déjà à voir de nombreux traits phonologiques, morphologiques et lexicaux intéressants. Pour comparer deux paraboles entre elles, nous avons besoin de construire une distance entre celles-ci, c’est ce que nous présentons dans un premier temps à travers la construction d’une distance trait à trait et la considération de la distance d’édition. Dans un deuxième temps, nous présentons quelques partitions obtenues. On trouvera dans [99] ces diverses techniques, et d’autres, présentées sur les données de divers atlas linguistiques.

Deux distances linguistiques

Nous proposons deux façons de mesurer la distance entre deux paraboles assez différentes. La première se base sur l’identification de traits linguistiques pertinents. Considérons par exemple uniquement le morceau « Le plus jeune dit à son père ». Nous pouvons déjà identifier de très nombreux traits phonologiques, morphologiques ou syntaxiques dans cette traduction mot à mot. Par exemple, pour la traduction de l’article défini « le », nous pouvons considérer le lemme choisi : *lo* ou *eth* ainsi que ses variations dans le premier cas, /lu/, /ly/, /lo/, /lø/ ou encore /le/. Pour la traduction de « dit », nous pouvons considérer le type de forme : forte ou faible, c’est-à-dire courte ou longue, et lorsque celle-ci est faible, la désinence du prétérit employée *-ot* ou *-èt*, avec si on le souhaite, des variations. Il serait assez difficile d’être exhaustif et nous nous sommes arrêtés, pour la traduction du premier paragraphe de la parabole à une centaine de traits.

Il est alors possible de construire le tableau disjonctif complet des modalités dont la distance l^1 entre chaque ligne peut être considéré comme une mesure de la distance entre deux paraboles.

Autrement dit, la distance entre deux traits t_1 et t_2 étant définie par

$$d(t_1, t_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } t_1 = t_2, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

nous pouvons obtenir, pour chaque trait identifié, la distance entre deux paraboles par rapport à celui-ci puis, par sommation ou moyennisation, la distance totale par rapport à tous les traits considérés. Nous appellerons la distance ainsi obtenue « distance par traits ». Nous pourrions aussi décider de pondérations plus fines, il pourrait en effet apparaître légitime de penser que les variations de *lo* sont plus proches entre elles que la distance d'une d'elle à *eth*. La seconde distance que nous considérerons possède ce degré de finesse.

La distance par identification de traits présentée se base donc sur une partition de chaque mot en divers traits linguistiques qui nous paraissent pertinents. Il y a donc une certaine analyse linguistique préliminaire au calcul de la distance par identification de traits. Le préjugé qui sous-tend cette approche est qu'il ne serait pas possible de se baser directement sur l'écriture des mots pour analyser les similarités entre les paraboles, puisque les instituteurs ont utilisé une orthographe dite patoisante offrant une grande variabilité. Ainsi, les écritures « fougait » et « fouguet » peuvent tout à fait représenter une seule et unique prononciation. Ce préjugé, comme nous allons le voir, semble infondé lorsque l'on souhaite faire émerger des structures communes : la correspondance entre la phonétique occitane et l'écriture via le système orthographique du français semble préserver les structures de cohérence de la langue d'oc au niveau diatopique.

Nous allons donc considérer une solution plus directe pour calculer la distance entre deux mots, c'est la distance d'édition, appelée aussi distance de Levenshtein. Celle-ci donne le nombre minimal d'insertions, de suppressions et de substitutions nécessaires pour transformer une chaîne de caractères en une autre. Ainsi, la distance d'édition de « lou » à « lu » est 1, celle de « lou » à « eth » est 3, ce qui semble pertinent. Par contre, la distance d'édition de « digait » à « diguet » est 2, ce qui est peut-être exagéré et c'est surtout la même que la distance de « digait » à « digout », alors qu'ici, la différence est d'intérêt. Une distance idéale serait sans doute une distance d'édition basée sur une certaine normalisation des écritures du corpus ou encore une distance par identification de traits pondérée, comme nous l'avons mentionné plus haut. Néanmoins, les résultats que nous allons présenter semblent montrer qu'il n'est pas forcément utile de poursuivre dans cette voie.

Nous avons considéré certains mots ou traits observés dans le premier paragraphe de la parabole et utilisé ces deux distances pour former deux matrices de similarités. Nous avons considéré 63 mots pour la distance d'édition, ces mots permettant l'identification de 100 traits permettant de construire la distance par traits. Nous présentons en Figure 3.8 la distance de la parabole de Bordeaux aux autres paraboles pour les distances par traits et d'édition, toutes deux normalisées à 1, pour comparaison. Nous observons dans les deux cas un gradient de couleurs depuis Bordeaux, du bleu clair pour les distances les plus petites au bleu foncé pour les plus grandes, matérialisant l'augmentation de la distance linguistique considérée lorsque l'on s'éloigne de la cité de référence choisie. Nous pouvons remarquer que l'évolution de ce gradient n'est pas la même dans toutes les directions. Dans les deux cas, une certaine aire linguistique bordelaise se dégage. Néanmoins, la distance par traits semble être plus clivante : les zones claires et foncées sont plus marquées. Ceci est peut-être dû au pré-traitement effectué pour calculer la distance par traits : un mot étant réduit à une ou à un petit nombre de caractéristiques,

les comparaisons sont plus tranchées que dans le cas de la distance d'édition où le mot brut est considéré.

On prendra garde par ailleurs à ne pas sur-interpréter les différences de couleurs. L'écart-type réel pour la distance par traits par exemple est d'environ 6% pour une plage de données variant entre 0 et 30%, ce qui correspond à un désaccord typique de 6 traits sur les 100 considérés. Ces traits couvrent de la morphologie et du vocabulaire, mais aussi de la phonologie, pour laquelle les notations sont parfois assez flottantes.

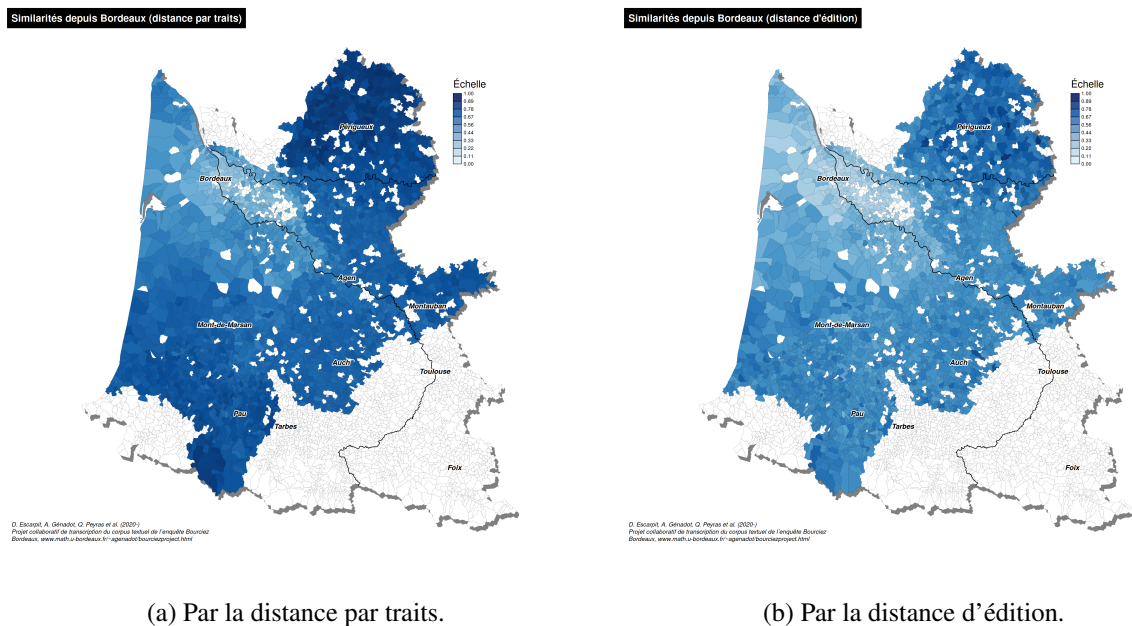
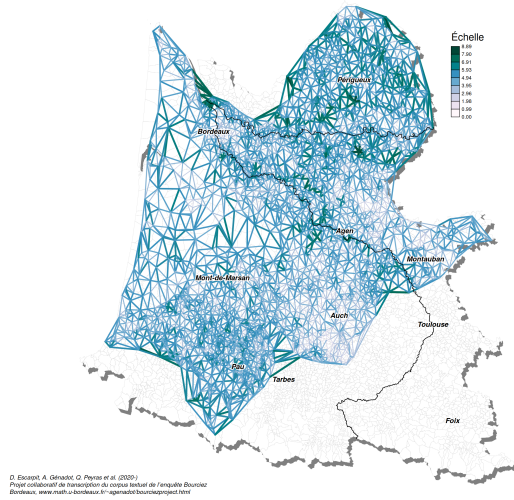


FIGURE 3.8 – Distances depuis Bordeaux.

Nous présentons en Figure 3.9 une autre façon d'appréhender ces deux distances. Nous avons effectué une triangulation de Delaunay [46] des points correspondant aux paraboles et dessiné les liens en fonction de la valeur de la distance d'édition ou par traits entre les deux points considérés. Plus la distance est élevée, plus le segment est vert foncé et épais, plus elle est petite, plus le trait est bleu clair et fin. Nous suivons en cela une représentation utilisée par l'école salzbourgeoise. Il faut donc bien comprendre que les cartes de la Figure 3.9 représentent les variations locales de la distance considérée.

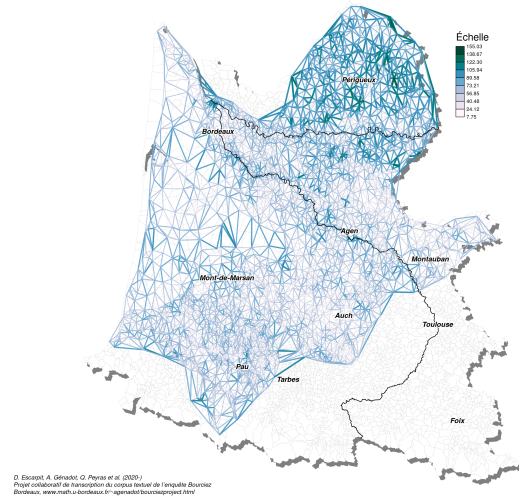
Ce faisant, un examen attentif de ces cartes nous permet de circonscrire certaines aires correspondant à des zones plutôt claires et plus ou moins bien séparées entre elles par quelques traits plus épais. La séparation nord-est entre le gascon et le languedocien peut par exemple se percevoir au nord-ouest d'Agen, ainsi que le passage du languedocien au limousin, avec une première marche en dessous de la Dordogne et une autre au-dessus. Nous remarquons aussi que c'est dans la zone périgourdine que les variations sont les plus importantes, ce qui n'est pas très étonnant, au moins pour la distance d'édition, tant, par exemple, la transcription des consonnes sibilantes de ce dialecte à l'aide des signes du français peut donner lieu à des représentations différentes de la part des instituteurs.

Distance par traits point à point



(a) Par la distance par traits.

Distance d'édition point à point



(b) Par la distance d'édition.

FIGURE 3.9 – Distances deux à deux.

Cette figure confirme aussi que la distance par traits présente un certain décalage par rapport à la distance d'édition. Les couleurs sont plus foncées, les traits plus épais, ce qui laisse penser que la distance par traits a tendance à donner des valeurs relatives plus importantes que la distance d'édition. L'étude des histogrammes des distances à Bordeaux montre qu'il y a en effet un certain décalage vers la droite, vers les plus grandes valeurs, pour la distance par traits par rapport à la distance d'édition. Ceci est confirmé par une étude systématique de la corrélation entre les deux distances, commune par commune : la moyenne des coefficients de corrélation est de 0,91 avec un écart-type de 0,03. Une régression linéaire donne pour droite de régression,

$$d_{\text{édition}} = -17,7 + 16,46d_{\text{traits}}$$

avec un coefficient de détermination de 0,82. Les deux distances sont donc en ce sens très similaires.

Les méthodes de partitionnement que nous allons présenter dans la section suivante constituent un bon moyen d'essayer de démêler ce que la Figure 3.9 offre à percevoir.

Présentation de quelques partitions

Les deux distances présentées permettent de construire des matrices de dissimilarités, c'est-à-dire une matrice de taille le nombre de paraboles où chaque entrée (i, j) est la distance de la parabole i à la parabole j , selon la distance choisie. À partir d'une matrice de dissimilarité, nous pouvons mettre en œuvre diverses méthodes de classification. Il y a de nombreux choix en la matière, on pourra consulter par exemple [102] pour se faire une idée. Les méthodes suivantes donnent toutes des résultats intéressants pour nos données, avec l'une et l'autre des distances proposées :

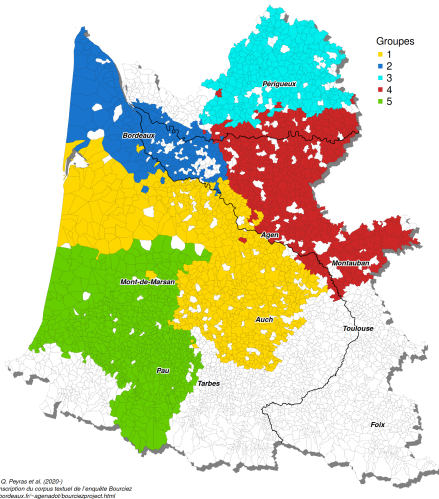
- La formation d’une partition par logique floue. On retrouve ce principe de partitionnement sous différentes dénominations dans la littérature, le plus souvent, peut-être, sous la forme de *fuzzy clustering* en anglais, voir [44, 59]. L’*a priori* principal qui justifie l’utilisation d’un algorithme de classification avec un paramètre d’ambiguïté est justement de mettre en œuvre une méthodologie qui permet de déterminer quelles sont les zones ambiguës. Car si les structures de cohérences, parfois difficilement visibles par superpositions de cartes, sont d’intérêt, les zones d’ambiguïté le sont aussi et devraient se manifester avec plus ou moins de force à l’interface des zones de cohérences. Mathématiquement, c’est une méthode de type centres mobiles, *k-means* en anglais, avec pondération.
- La formation d’une partition par classification ascendante hiérarchique, voir [56], selon l’algorithme du lien maximal, *complete link* en anglais. Cet algorithme permet de construire des classes cohérentes mais qui ne sont pas forcément bien différenciables les unes par rapport aux autres. Il peut aussi avoir tendance à former, pour nos données, des zones de tailles très différentes géographiquement, ce qui n’est pas forcément incohérent. Cet algorithme permet de mettre en lumière des zones de cohérences intéressantes qui ne sont pas forcément aussi bien identifiées par les autres algorithmes mentionnés, comme une zone garonnaise par exemple. Mathématiquement, la distance entre deux classes est définie ici comme la distance maximale entre les paires de points (c’est-à-dire de paraboles) appartenant à l’une et l’autre classe. Cet algorithme tend à former des classes de même diamètre, c’est-à-dire que les distances maximales à l’intérieur des classes tendent à être similaires.
- La formation d’une partition par classification ascendante hiérarchique selon l’algorithme de Ward. Elle permet d’obtenir des classes à la fois cohérentes et assez bien différenciées. À chaque étape, on agglomère les classes de sorte à augmenter le moins possible la variabilité, au sens de la variance qui prend ici la forme d’une inertie, à l’intérieur de chaque classe. C’est cette méthode que nous allons utiliser par la suite car il faut bien se limiter dans notre exposition.

Nous allons donc utiliser une méthode de classification ascendante hiérarchique qui permet d’obtenir un arbre binaire de classification dont, lorsque les individus sont représentés sur l’axe des abscisses, les hauteurs des nœuds représentent les distances entre les deux groupes fils. Nous pouvons élaguer cet arbre selon la méthode de notre choix, la méthode du coude ou de la silhouette par exemple, afin d’obtenir une partition. Nous pouvons aussi nous arrêter sur un nombre de parties maximal qui donne une classification interprétable.

Nous présentons en Figure 3.10 deux partitions contenant 5 et 10 groupes, issues de la même classification ascendante hiérarchique basée sur les distances d’édition et par traits. Ces nombres de groupes semblent en effet être pertinents selon la méthode dite de la silhouette.

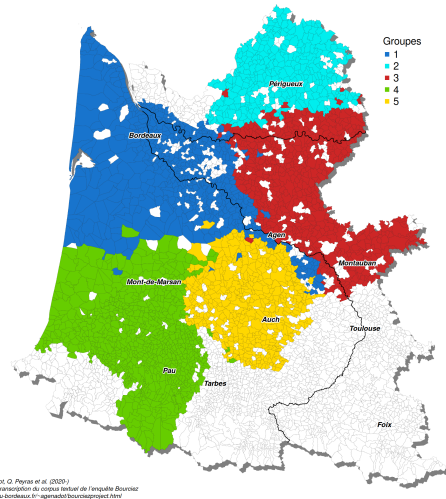
La première chose à dire concernant ces classifications est qu’il est assez remarquable d’obtenir ici des zones cohérentes géographiquement, bien formées, présentant de grandes composantes connexes, alors même qu’aucun critère de ce type n’entre en jeu dans les calculs : la distance physique entre les lieux des paraboles n’est pas considérée. Ceci est certainement dû à la qualité des données. Cette qualité est manifeste lorsqu’on se rend compte que les partitions obtenues avec les distances par traits et d’éditions sont très similaires, comme on pouvait s’y attendre vu la très forte corrélation entre les deux distances. Cela fait la démonstration, comme mentionné plus haut, que l’orthographe personnelle utilisée par les instituteurs, basée sur celle

Partionnement hiérarchique : (édition, Ward)



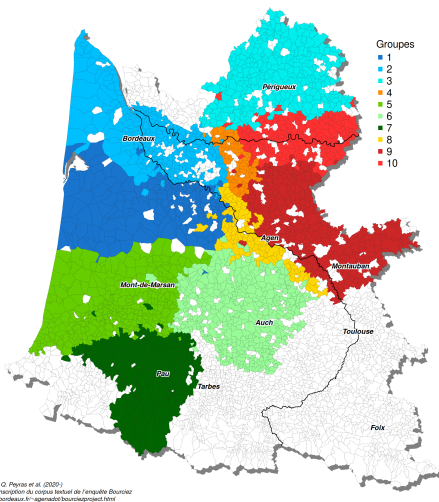
(a) Partition de taille 5 pour la distance d'édition.

Partionnement hiérarchique : (traits, Ward)



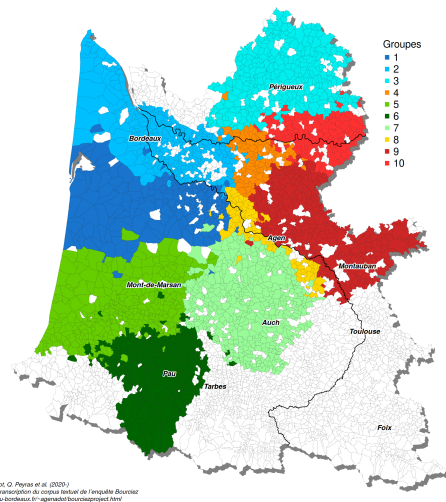
(b) Partition de taille 5 pour la distance par traits.

Partionnement hiérarchique : (édition, Ward)



(c) Partition de taille 10 pour la distance d'édition.

Partionnement hiérarchique : (traits, Ward)



(d) Partition de taille 10 pour la distance par traits.

FIGURE 3.10 – Deux exemples de partitions obtenues lorsque les similarités sont calculées via les distances d'édition et par traits via la méthode de Ward.

du français et aussi erratique qu'elle puisse parfois être, est propre à conserver les structures de profondeurs de la langue occitane. La mise en œuvre de la distance d'édition étant plus simple que celle par traits, cela pourrait permettre de justifier un passage à l'échelle sur l'ensemble des neuf paragraphes de la parabole pour le partitionnement et pourquoi pas, même, un calcul des distances directement sur les textes bruts dans leur ensemble, c'est-à-dire sans passer par l'extraction des mots.

Dans un second temps, nous ne pouvons que remarquer que les zones définies en Figures 3.10a et 3.10b sont bien connues. Nous observons de façon assez claire la zone limousine, couleur cyan, ainsi que la zone languedocienne en rouge. Le sud gascon est représenté en vert, avec le Béarn et le sud des landes de Gascogne et enfin une zone intermédiaire, un gascon peut-être plus central, correspondant assez bien au pays auscitain avec une extension plus grande vers l'ouest pour la distance d'édition ce qui fait que la zone bordelaise, en bleu, est moins étendue pour la distance d'édition que pour la distance par traits où elle admet même une certaine extension garonnaise. Les partitions à 10 éléments permettent de relativiser ces différences : selon une coupe un peu moins macroscopique, ces grandes zones se redécoupent de façons très similaires comme il apparaît en Figures 3.10c et 3.10d. Comme déjà observé en Section 3.3.1, nous remarquons aussi sur ces figures que des caractéristiques gasconnes semblent s'étendre sur la rive droite de la Garonne depuis son embouchure jusqu'aux alentours de Port-Sainte-Marie, que le fleuve semble bien démarquer les parlers gascons et languedociens de Port-Sainte-Marie à Auvillar, puis que des traits languedociens semblent gagner la rive gauche.

Notons en passant qu'il est normal que les parties ne soient pas complètement connexes, c'est peut être le simple reflet que les limites dialectales ne sont pas toujours très bien définies. On pourrait aussi penser que certaines paraboles ont été mal classées pour diverses raisons. Ce peut être le cas, bien sûr, mais il y a aussi le cas des « imposteurs », si je puis dire : la parabole en rouge dans la zone jaune – c'est celle de la commune du Fréchou – est par exemple clairement écrite en languedocien, elle est donc à ce titre bien classée. Ce cas est caricatural mais peut nous laisser penser que lorsqu'une parabole semble être mal classée, c'est peut-être, dans certains cas, qu'elle ne correspond pas en fait au parler de la commune en question. C'est en tout cas une invitation à y regarder de plus près.

Afin de mieux comprendre ce qui caractérise ces zones, nous donnons dans le tableau suivant, pour chacune des classes, les 5 traits les plus sur-représentés, pour la distance par traits. Cela ne signifie pas que tous les traits présentés sont partagés dans la zone en question et qu'eux seuls déterminent la classe, bien d'autres traits pouvant être sur-représentés et avoir participé à la formation des classes. S'arrêter à 5 est arbitraire mais permet déjà d'éclairer ce qui fait la cohérence des groupes obtenus.

	Distance par traits
bleu	passage [u>y] (<i>pusqui</i>) finale féminine notée « e » emploi de <i>fau</i> forme en <i>dishut</i> (<i>sh, -ut</i>) emploi de <i>gojat</i>
cyan	forme du subjonctif (<i>pesse</i>) prononciation [v] de <i>v</i> chute de <i>s</i> devant <i>t</i> (<i>mè'tre</i>) finale de pluriel féminin en [a] chute de certaines finales (<i>puni(t)</i>)
rouge	Non vocalisation du <i>l</i> (<i>cal</i>) prétérit en <i>-èt</i> F étymologique prononcé [f] forme <i>mèstre</i> (<i>s</i> et <i>-re</i>) forme <i>joine</i>
vert	prétérit en <i>-a</i> (1er gr.) emploi de <i>com</i> <i>que</i> énonciatif <i>j</i> prononcé [j] (<i>yod</i>) forme composée pour « mon » (<i>lo men</i>)
jaune	forme <i>augi</i> (diphthongue) forme <i>ben</i> (substantif) <i>v</i> prononcé [w] prétérit en <i>-ot</i> <i>j</i> prononcé [ʒ]

Lorsque les classes obtenues sont différentes, les différences entre les sur-représentations permettent parfois de mieux comprendre ce qui les définit. Ici, ce n'est néanmoins pas très probant si l'on s'intéresse uniquement au cinq traits les plus sur-représentés, expliquer la différence entre les partitions à cinq éléments pour les deux distances nécessiterait une analyse plus fine.

Pour les partitions contenant 10 éléments la distance d'édition fait par exemple apparaître en Figure 3.10c la classe 4, orange, qui pourrait représenter une zone de transition tri-dialectale, de rencontre entre le le gascon, le languedocien et le limousin. Elle comprend par exemple le canton de Vélignes souvent considéré comme le dernier canton gascon avant de passer aux parlers du Périgord. Quels sont les traits qui caractérisent cette zone d'interaction tri-dialectale dans le paragraphe 1 ? Elle est assez bien caractérisée par l'utilisation de la forme *auguer* pour dire « avoir » et du radical analogique /sk/ au subjonctif présent de ce même verbe, c'est en effet dans cette zone que l'on dit de façon préférentielle *que asqui* par exemple, pour « que j'aie ». Néanmoins, il ne semble pas évident de relier ces deux traits à une forme d'interaction tri-dialectale sinon que, comme nous l'avons vu en Section 3.3.1, les interactions peuvent favoriser l'émergence de traits originaux.

Nous remarquons aussi que pour les deux partitions, la partie 8, orange, correspond à une zone garonnaise. Pour les deux partitions, elle est assez bien caractérisée par l'emploi du radical

analogique /sk/ au subjonctif présent, comme pour la zone 4 en jaune précédemment mentionnée, l’amuïssement du F latin, ainsi que d’autres traits peut-être moins spécifiques comme la prononciation [ʒ] de *j* et les prétérits en *-ot*.

Il nous faudra bien sûr dans le futur étendre l’analyse aux 9 paragraphes de la parabole et diversifier les approches, en suivant notamment l’exemple de l’école salzbourgeoise dont les résultats sur les données de l’ALF sont accessibles en ligne de façon assez ergonomique. Il est notable, encore une fois, que le grain fin de l’enquête Bourciez nous permettra sans doute, nous l’espérons, d’aller plus loin dans la compréhension des variations diatopiques des structures dialectales qui émergent des données.

3.4 Discussion

Nous avons donc présenté la méthodologie que nous employons pour dépouiller l’enquête Bourciez et analyser certaines des données que nous en avons tirées. Les méthodes de statistique descriptive employées sont classiques mais assez variées, avec un traitement des couches géographiques qui a nécessité d’adapter les maillages administratifs à nos données.

Mot par mot, ou trait à trait, nous avons considéré en Section 3.2 la traduction du verbe naître, celle de la conjonction de coordination « quand ». En Section 3.2.3, à travers les fortes coïncidences de ses formes du prétérit et de l’imparfait, de son traitement spécifique de la désinence ARIUM et du double L, nous avons pu circonscrire la zone de parlars gascons. Il serait possible d’étendre cette démarche, à la manière de ce qui est fait en [35], en identifiant d’abord les variables, les traits linguistiques, qui montrent une organisation spatiale la plus lisible et interprétable possible, et de procéder à des regroupements, pourquoi pas en utilisant à ce moment-là une méthode de partitionnement automatique. Il s’agit, en procédant de la sorte, de pouvoir interpréter au mieux les aires définies. C’est une démarche du bas vers le haut sur les variables, contrairement à la procédure de partitionnement présentée en Section 3.3.2 dont l’algorithme suit aussi une procédure de bas en haut, mais au niveau des individus, alors qu’il prend en compte toutes les variables mises à disposition. Ce n’est qu’a posteriori que l’on peut essayer d’interpréter les classes obtenues à travers l’étude des sur-représentations de certains traits dans les classes, mais ce n’est pas toujours chose facile, surtout lorsqu’il y a de nombreux traits. Nous pensons qu’un aller-retour entre ces deux méthodes est nécessaire pour obtenir des partitions qui représentent les données de façon pertinente.

Un autre enseignement important du travail présenté est que nous levons le doute que certains ont pu avoir sur la possible utilisation de l’enquête Bourciez à des fins linguistiques. Oui cette enquête est fiable et il est, dans une assez large mesure, possible de faire confiance à l’orthographe des instituteurs pour inférer des traits morphologiques et phonétiques, obtenir des partitions cohérentes et interroger les interactions diatopiques entre certains traits. Nous pensons en effet que l’analyse du gradient linguistique du traitement du F latin effectuée en Section 3.3.1 ainsi que les partitions dialectales obtenues via la distance d’édition en Section 3.3.2 font la démonstration que l’orthographe utilisée par les instituteurs est conservative pour les aires dialectales.

Les résultats que nous obtenons ne sont pas, pour le moment au moins, de nature à bouleverser le champ de la dialectologie occitane, ils sont, pour bonne part, bien connus. Toutefois, comme nous l’avons mentionné à plusieurs reprises, ce « retour vers le futur » que permet

l'enquête Bourciez sur les données des enquêtes qui l'ont suivie dans le temps, rend possible l'analyse de nombreux phénomènes parfois peu visibles dans les autres enquêtes ou d'en affiner la compréhension, notamment au niveau des zones d'interface entre les différents dialectes.

Nous nous intéressons à plusieurs problématiques, pour lesquelles nous n'avons pour le moment que des réponses partielles. En voici deux auxquelles nous réfléchissons plus particulièrement :

(P1) Il existe une dynamique trans-dialectale garonnaise de Bordeaux à Toulouse avec des caractères propres ;

(P2) Les parlers bordelais, pleinement gascons, sont liés, d'une façon qui leur est propre, aux parlers languedociens et limousins.

En ce sens, nous avons vu un exemple en Section 3.3.1 de trait garonnais avec le h non aspiré. Il existe d'autres traits qu'il est possible de mettre en avant, on peut par exemple penser au verbe avoir, sous la forme *auger*, et à certaines de ses flexions. Nous n'avons pas pu montrer non plus ici, nous voulions être concis, comment les parlers bordelais peuvent aussi se rattacher, dans une certaine mesure, lorsqu'on les regarde avec un certain prisme, aux parlers limousins. On peut ici penser à l'usage de l'article partitif, à Bordeaux comme à Périgueux, on veut *de l'argent*, alors que les languedociens veulent *d'argent* et les sud-gascons éliminent l'article. On pourrait aussi penser aux parlers médoquins, qui utilisent certaines formes du verbe avoir, des variations de *aièr*, que l'on retrouve en Périgord. Il nous faudra, pour répondre plus pleinement à ces problématiques, terminer la transcription des paraboles et les faire discuter non seulement avec les données d'autres enquêtes, comme l'ALF ou l'ALG, mais aussi avec d'autres sources, plus littéraires.

Bien sûr, le dépouillement n'est pas terminé mais nous pensons que le présent travail est un point d'étape important et nécessaire. Nous souhaitons à l'avenir, et nous avons commencé des démarches en ce sens, mettre à disposition non seulement les transcriptions des paraboles mais surtout les données qui en sont issues à la manière de ce que l'on trouve sur le site du Thesoc et pourquoi pas aussi, avec les bons outils, à la manière de ce qui est proposé par l'école salzbourgeoise sur le site *dialektkarten* et concourir ainsi à la mise à disposition d'outils efficaces, voir [31], pour l'étude de la langue occitane.

Bibliographie

- [1] Jacques Allières. Petit atlas linguistique basque français" bourciez"(i). *Fontes linguae vasconum : Studia et documenta*, 9(27) :353–386, 1977.
- [2] Jacques Allières et Christian Abry. Quelques énigmes de la conjugaison gasconne ou le verdict de l'aire. *Espaces Romans : Etudes de Dialectologie et de Géolinguistique Offertes à Gaston Tuaille*, pages 175–192, 1988.
- [3] Xosé Álvarez, Ernestina Carrilho et Catarina Magro. *Current approaches to limits and areas in dialectology*. Cambridge Scholars Publishing, 2013.
- [4] Joseph Anglade. Mélanges de linguistique et de littérature offerts à m. alfred jeanroy par ses élèves et ses amis. paris, éditions e. droz, 1928. In *Annales du Midi*, volume 41, pages 65–68. Persée-Portail des revues scientifiques en SHS, 1929.
- [5] Gotzon Aurrekoetxea et Charles Videgain. Le projet bourciez : traitement géolinguistique d'un corpus dialectal de 1895. *Dialectologia : revista electrònica*, pages 81–111, 2009.
- [6] Jean-Marc Azaïs et Mario Wschebor. *Level sets and extrema of random processes and fields*. John Wiley & Sons, 2009.
- [7] Romain Azaïs. A recursive nonparametric estimator for the transition kernel of a piecewise-deterministic markov process. *ESAIM : Probability and Statistics*, 18 :726–749, 2014.
- [8] Romain Azaïs, Jean-Baptiste Bardet, Alexandre Génadot, Nathalie Krell et Pierre-André Zitt. Piecewise deterministic markov process—recent results. In *Esaim : Proceedings*, volume 44, pages 276–290. EDP Sciences, 2014.
- [9] Romain Azaïs, François Dufour et Anne Gégout-Petit. Non-parametric estimation of the conditional distribution of the interjumping times for piecewise-deterministic markov processes. *Scandinavian Journal of Statistics*, 41(4) :950–969, 2014.
- [10] Romain Azaïs et Alexandre Génadot. Semi-parametric inference for the absorption features of a growth-fragmentation model. *Test*, 24(2) :341–360, 2015.
- [11] Romain Azaïs et Alexandre Génadot. Level crossings and absorption of an insurance model. *Statistical Inference for Piecewise-deterministic Markov Processes*, pages 65–105, 2018.

- [12] Romain Azaïs et Alexandre Génadot. A new characterization of the jump rate for piecewise-deterministic markov processes with discrete transitions. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 47(8) :1812–1829, 2018.
- [13] Romain Azaïs et Alexandre Génadot. Estimation of the average number of continuous crossings for non-stationary non-diffusion processes. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 198 :119–138, 2019.
- [14] Romain Azaïs, Alexandre Génadot et Benoît Henry. Inference for conditioned galton-watson trees from their harris path. *ALEA : Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics*, 16(1) :1–45, 2019.
- [15] Erik Balder. On compactness of the space of policies in stochastic dynamic programming. *Stochastic Process. Appl.*, 32(1) :141–150, 1989.
- [16] Erik Balder. Existence without explicit compactness in stochastic dynamic programming. *Math. Oper. Res.*, 17(3) :572–580, 1992.
- [17] Viorel Barbu et Teodor Precupanu. *Convexity and optimization in Banach spaces*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [18] Nicole Bäuerle et Ulrich Rieder. *Markov decision processes with applications to finance*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [19] Richard Bellman. On the theory of dynamic programming. *Proceedings of the national Academy of Sciences*, 38(8) :716–719, 1952.
- [20] Richard Bellman. A markovian decision process. *Journal of mathematics and mechanics*, pages 679–684, 1957.
- [21] Patrice Bertail, Stéphan Cléménçon et Jessica Tressou. A storage model with random release rate for modeling exposure to food contaminants. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 5(1) :35–60, 2008.
- [22] Corinne Berzin, Alain Latour et José León. Kac-rice formula : A contemporary overview of the main results and applications. *arXiv preprint arXiv :2205.08742*, 2022.
- [23] Siddhant Bhambri, Amrita Bhattacharjee et Dimitri Bertsekas. Reinforcement learning methods for wordle : A pomdp/adaptive control approach. *arXiv preprint arXiv :2211.10298*, 2022.
- [24] Charles Boberg, John Nerbonne et Dominic Watt. *The handbook of dialectology*. John Wiley & Sons, 2018.
- [25] Vladimir Bogachev. *Measure theory. Vol. I, II*. Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- [26] Konstantin Borovkov et Günter Last. On rice’s formula for stationary multivariate piecewise smooth processes. *Journal of Applied Probability*, 49(2) :351–363, 2012.
- [27] Muriel Boulakia, Alexandre Génadot et Michèle Thieullen. Simulation of spdes for excitable media using finite elements. *Journal of Scientific Computing*, 65 :171–195, 2015.

- [28] Édouard Bourciez. Le verbe „naître” en gascon. *Romanische Forschungen*, 23(1. H) :415–423, 1907.
- [29] Édouard Bourciez. *Éléments de linguistique romane*, volume 6. C. Klincksieck, 1910.
- [30] Édouard Bourciez. *Précis historique de phonétique française*. Klincksieck, 1926.
- [31] Myriam Bras. Nouvelles perspectives pour la linguistique occitane à partir de la base textuelle batelòc. *Les langues régionales de France : Nouvelles approches, nouvelles méthodologies, revitalisation*, page 121, 2023.
- [32] Myriam Bras et Jean Sibille. Passé composé et passé simple en occitan. In *13ème Conférence CHRONOS*, 2018.
- [33] Esther Brown et William Raymond. How discourse context shapes the lexicon : Explaining the distribution of spanish f-/h-words. *Diachronica*, 29(2) :139–161, 2012.
- [34] Guylaine Brun-Trigaud et Jean Le Dû. Petite leçon de dialectométrie à partir des données du nouvel atlas linguistique de la basse-bretagne. *Lapurdum. Euskal ikerketen aldizkaria| Revue d'études basques| Revista de estudios vascos| Basque studies review*, (19) :133–151, 2016.
- [35] Guylaine Brun-Trigaud et Albert Malfatto. Limites dialectales vs. limites lexicales dans le domaines occitan : un impossible accord ? *Current Approaches to Limits and Areas in Dialectology*, page 293, 2013.
- [36] Wolfgang (dir.) Buchi, Éva et Schweickard. *Dictionnaire Étymologique Roman*. Mise en ligne par l'Atilf : <http://www.atilf.fr/DERom>, 2008.
- [37] Ivaylo Burov. Sur les probables interférences phonologiques entre basque et gascon. *Lapurdum. Euskal ikerketen aldizkaria| Revue d'études basques| Revista de estudios vascos| Basque studies review*, (21), 2018.
- [38] Julien Chiquet et Nikolaos Limnios. A method to compute the transition function of a piecewise deterministic markov process with application to reliability. *Statistics & probability letters*, 78(12) :1397–1403, 2008.
- [39] Julien Chiquet, Nikolaos Limnios et Mohamed Eid. Piecewise deterministic markov processes applied to fatigue crack growth modelling. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 139(5) :1657–1667, 2009.
- [40] Yinlam Chow, Aviv Tamar, Shie Mannor et Marco Pavone. Risk-sensitive and robust decision-making : a cvar optimization approach. *Advances in neural information processing systems*, 28, 2015.
- [41] Bertrand Cloez, Renaud Dessalles, Alexandre Génadot, Florent Malrieu, Aline Marguet et Romain Yvinec. Probabilistic and piecewise deterministic models in biology. *ESAIM : Proceedings and Surveys*, 60 :225–245, 2017.

- [42] Cristina Costantini et Thomas Kurtz. Diffusion approximation for transport processes with general reflection boundary conditions. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 16(05) :717–762, 2006.
- [43] Federico Dalmao et Ernesto Mordecki. Rice formula for processes with jumps and applications. *Extremes*, 18 :15–35, 2015.
- [44] Rajesh Davé et Raghuram Krishnapuram. Robust clustering methods : a unified view. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, 5(2) :270–293, 1997.
- [45] Mark Davis. *Markov models and optimization*. Routledge, 2018.
- [46] Boris Delaunay et al. Sur la sphere vide. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Otdelenie Matematicheskii i Estestvennyka Nauk*, 7(793-800) :1–2, 1934.
- [47] Rui Ding et Eugene Feinberg. Cvar optimization for mdps : Existence and computation of optimal policies. *ACM SIGMETRICS Performance Evaluation Review*, 50(2) :39–41, 2022.
- [48] Oswaldo Luiz do Valle Costa et François Dufour. *Continuous average control of piecewise deterministic Markov processes*. Springer, 2013.
- [49] Arnaud Ducrot et Alexandre Génadot. Self-similar behavior of a nonlocal diffusion equation with time delay. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 52(3) :2275–2312, 2020.
- [50] François Dufour, Benoîte de Saporta et Huilong Zhang. *Numerical methods for simulation and optimization of piecewise deterministic Markov processes : application to reliability*. John Wiley & Sons, 2015.
- [51] François Dufour et Alexandre Génadot. A convex programming approach for discrete-time markov decision processes under the expected total reward criterion. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 58(4) :2535–2566, 2020.
- [52] François Dufour et Alexandre Génadot. On the expected total reward with unbounded returns for markov decision processes. *Applied Mathematics & Optimization*, 82 :433–450, 2020.
- [53] François Dufour et Alexei Piunovskiy. The expected total cost criterion for markov decision processes under constraints. *Advances in Applied Probability*, 45(3) :837–859, 2013.
- [54] Kacha Dzhaparidze et Harry Van Zanten. On bernstein-type inequalities for martingales. *Stochastic processes and their applications*, 93(1) :109–117, 2001.
- [55] Geneviève Escure. Hierarchies and phonological weakening. *Lingua*, 43(1) :55–64, 1977.
- [56] Sabine Everitt, Brian fand Landau, Morven Leese, Daniel Stahl, et al. Hierarchical clustering. *Cluster analysis*, 5 :71–110, 2011.

- [57] Alessandra Faggionato, Davide Gabrielli et Marco Ribezzi-Crivellari. Averaging and large deviation principles for fully-coupled piecewise deterministic markov processes and applications to molecular motors. *Markov Processes And Related Fields*, 16(3) :497–548, 2010.
- [58] Herbert Federer. *Geometric measure theory*. Springer, 2014.
- [59] Luis Angel García-Escudero, Alfonso Gordaliza, Carlos Matrán et Agustín Mayo-Iscar. A review of robust clustering methods. *Advances in Data Analysis and Classification*, 4 :89–109, 2010.
- [60] Matthieu Geist, Bruno Scherrer et Olivier Pietquin. A theory of regularized markov decision processes. In *International Conference on Machine Learning*, pages 2160–2169. PMLR, 2019.
- [61] Jean-Pierre Georgan. Estimation et controle des chaines de markov sur des espaces arbitraires. In *Journées de Statistique des Processus Stochastiques : Proceedings, Grenoble, Juin 1977*, pages 71–113. Springer, 1978.
- [62] Wulfram Gerstner, Werner M Kistler, Richard Naud et Liam Paninski. *Neuronal dynamics : From single neurons to networks and models of cognition*. Cambridge University Press, 2014.
- [63] Hans Goebel. Regards dialectométriques sur les données de l'" atlas linguistique de la france"(alf) : Relations quantitatives et structures de profondeur. *Estudis Romànics*, 25 :60–117, 2003.
- [64] Hans Goebel. Brève introduction aux problèmes et méthodes de la dialectométrie. *Revue roumaine de linguistique*, 53(1-2), 2008.
- [65] Branda Goncalves, Thierry Huillet et Eva Löcherbach. On population growth with catastrophes. *Stochastic Models*, 38(2) :214–249, 2022.
- [66] Tomasz Górski, Damien Depannemaecker et Alain Destexhe. Conductance-based adaptive exponential integrate-and-fire model. *Neural Computation*, 33(1) :41–66, 2021.
- [67] Massimo Guidolin et Francesca Rinaldi. Ambiguity in asset pricing and portfolio choice : A review of the literature. *Federal Reserve Bank of St. Louis Working Paper No*, 2010.
- [68] Xianping Guo, Onésimo Hernández-Lerma, Tomás Prieto-Rumeau, Xi-Ren Cao, Junyu Zhang, Qiying Hu, Mark E Lewis et Ricardo Vélez. A survey of recent results on continuous-time markov decision processes. *Top*, 14 :177–261, 2006.
- [69] Piotr Gwiżdż et Marta Tyran-Kamińska. Densities for piecewise deterministic markov processes with boundary. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 479(1) :384–425, 2019.
- [70] Alexandre Génadot. Spatio-temporal averaging for a class of hybrid systems and application to conductance-based neuron models. *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, 22 :178–190, 2016.

- [71] Alexandre Génadot. Averaging for some simple constrained markov processes. *Probability and Mathematical Statistics*, 39(10) :139–158, 2019.
- [72] Alexandre Génadot. Averaging for slow-fast piecewise deterministic markov processes with an attractive boundary. *Accepté pour publication dans la revue Advances in Applied Probability*, 2023.
- [73] Alexandre Génadot. Quelle méthodologie pour dépouiller l’enquête bourciez? *Accepté pour publication dans la revue Lengas*, 2023.
- [74] Alexandre Génadot et Michèle Thioullien. Averaging for a fully coupled piecewise-deterministic markov process in infinite dimensions. *Advances in Applied Probability*, 44(3) :749–773, 2012.
- [75] Alexandre Génadot et Michèle Thioullien. Multiscale piecewise deterministic markov process in infinite dimension : central limit theorem and langevin approximation. *ESAIM : Probability and Statistics*, 18 :541–569, 2014.
- [76] Martin Hairer et Xue-Mei LI. Averaging dynamics driven by fractional brownian motion. *The Annals of Probability*, 48(4) :1826–1860, 2020.
- [77] Elieudon FW Heffern, Holly Huelskamp, Sonya Bahar et Fredrik Inglis. Phase transitions in biology : from bird flocks to population dynamics. *Proceedings of the Royal Society B*, 288(1961) :20211111, 2021.
- [78] Albert Henry. Bourciez (edouard). éléments de linguistique romane. *Revue belge de Philologie et d’Histoire*, 26(3) :593–596, 1948.
- [79] Onésimo Hernández-Lerma. *Adaptive Markov control processes*, volume 79. Springer Science & Business Media, 2012.
- [80] Onésimo Hernández-Lerma et Jean Lasserre. *Further topics on discrete-time Markov control processes*, volume 42. Springer Science & Business Media, 2012.
- [81] Onésimo Hernández-Lerma et Jean B Lasserre. *Discrete-time Markov control processes : basic optimality criteria*, volume 30. Springer Science & Business Media, 2012.
- [82] Raymond Hickey. On the nature of labial velar shift. *Journal of Phonetics*, 12(4) :345–354, 1984.
- [83] Alan Hodgkin et Andrew Huxley. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *The Journal of physiology*, 117(4) :500, 1952.
- [84] Martin Jacobsen. Point process theory and applications : marked point and piecewise deterministic processes.
- [85] Adam Jakubowski. The skorokhod space in functional convergence : a short introduction. In *International conference : Skorokhod Space*, volume 50, pages 11–18, 2007.

- [86] Anna Jaśkiewicz, Janusz Matkowski et Andrzej Nowak. Generalised discounting in dynamic programming with unbounded returns. *Oper. Res. Lett.*, 42(3) :231–233, 2014.
- [87] Anna Jaśkiewicz et Andrzej Nowak. Discounted dynamic programming with unbounded returns : application to economic models. *J. Math. Anal. Appl.*, 378(2) :450–462, 2011.
- [88] Mark Kac. On the average number of real roots of a random algebraic equation. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 49(12) :314–320, 1943.
- [89] Robert Kertz et David Nachman. Persistently optimal plans for nonstationary dynamic programming : the topology of weak convergence case. *Ann. Probab.*, 7(5) :811–826, 1979.
- [90] Rafail Zalmanovich Khas' minskii. The averaging principle for stochastic differential equations. *Problemy Peredachi Informatsii*, 4(2) :86–87, 1968.
- [91] Yuri Kifer. *Large deviations and adiabatic transitions for dynamical systems and Markov processes in fully coupled averaging*. American Mathematical Soc., 2009.
- [92] Steven Krantz et Harold Parks. *The geometry of domains in space*. Springer Science & Business Media, 1999.
- [93] Panqanamala Ramana Kumar. A survey of some results in stochastic adaptive control. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 23(3) :329–380, 1985.
- [94] Thomas Kurtz. Martingale problems for constrained markov processes, 1990.
- [95] Thomas Kurtz. Averaging for martingale problems and stochastic approximation. In *Applied Stochastic Analysis : Proceedings of a US-French Workshop, Rutgers University, New Brunswick, NJ, April 29–May 2, 1991*, pages 186–209. Springer, 2005.
- [96] Charles Lamb. A comparison of methods for constructing probability measures on infinite product spaces. *Canadian mathematical bulletin*, 30(3) :282–285, 1987.
- [97] Adam Ledgeway et Martin Maiden. *The Oxford guide to the Romance languages*, volume 1. Oxford University Press, 2016.
- [98] Simon Levin. Population dynamic models in heterogeneous environments. *Annual review of ecology and systematics*, 7(1) :287–310, 1976.
- [99] Brun-Trigaud Guylaine Léonard, Jean-Léo et Flore Picard. Atlas linguistiques et perspectives dialectométriques. In *Manuel de linguistique occitane*. À paraître.
- [100] Bertil Malmberg. Phonèmes labio-vélaires en espagnol? *Phonetica*, 7(2-3) :85–94, 1961.
- [101] Danica Lee Middlebrook. *Bearings-only tracking automation for a single unmanned underwater vehicle*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2007.
- [102] Glenn Milligan et Martha Cooper. Methodology review : Clustering methods. *Applied psychological measurement*, 11(4) :329–354, 1987.

- [103] Andrzej Nowak. On the weak topology on a space of probability measures induced by policies. *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, 36(3-4) :181–186 (1989), 1988.
- [104] Diarmuid Ó Sé. Varia iii. *Ériu*, 41 :133–136, 1990.
- [105] Khashayar Pakdaman, Michèle Thioullien et Gilles Wainrib. Asymptotic expansion and central limit theorem for multiscale piecewise-deterministic markov processes. *Stochastic Processes and their Applications*, 122(6) :2292–2318, 2012.
- [106] Etienne Pardoux et Alexander Veretennikov. On poisson equation and diffusion approximation 2. *The Annals of Probability*, 31(3) :1166–1192, 2003.
- [107] Grigoris Pavliotis et Andrew Stuart. *Multiscale methods : averaging and homogenization*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [108] Giovanni Battista Pellegrini. Substrata. In *Volume 1 Romance Comparative and Historical Linguistics*, pages 43–74. De Gruyter Mouton, 2011.
- [109] Martin Puterman. Markov decision processes. *Handbooks in operations research and management science*, 2 :331–434, 1990.
- [110] Stephen Rice. Mathematical analysis of random noise. *The Bell System Technical Journal*, 23(3) :282–332, 1944.
- [111] Martin Riedler. *Spatio-temporal stochastic hybrid models of biological excitable membranes*. PhD thesis, Heriot-Watt University, 2011.
- [112] Martin Riedler. Almost sure convergence of numerical approximations for piecewise deterministic markov processes. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 239 :50–71, 2013.
- [113] Joel Rini. When spanish h-went silent. how do we know? *Bulletin of Spanish Studies*, 87(4) :431–446, 2010.
- [114] George Roussas. Extension to markov processes of a result by a. wald about the consistency of the maximum likelihood estimate. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 4(1) :69–73, 1965.
- [115] Patrick Sauzet. Assimilations vocaliques en occitan. *Hommage à Jacques Allières*, 2 :573–592, 2002.
- [116] Manfred Schäl. Conditions for optimality in dynamic programming and for the limit of n -stage optimal policies to be optimal. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 32(3) :179–196, 1975.
- [117] Manfred Schäl. On dynamic programming : compactness of the space of policies. *Stochastic Processes Appl.*, 3(4) :345–364, 1975.
- [118] Manfred Schäl. On dynamic programming and statistical desision theory. *Ann. Statist.*, 7(2) :432–445, 1979.

- [119] Manfred Schäl. Estimation and control in discounted stochastic dynamic programming. *Stochastics : An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 20(1) :51–71, 1987.
- [120] Jean Séguy, Jacques Allières et Xavier Ravier. Atlas linguistique et ethnographique de la gascogne. 1954.
- [121] Morton Slater. Lagrange multipliers revisited. In *Traces and emergence of nonlinear programming*, pages 293–306. Springer, 2013.
- [122] Marta Tyran-Kamińska. Substochastic semigroups and densities of piecewise deterministic markov processes. *Journal of mathematical analysis and applications*, 357(2) :385–402, 2009.
- [123] Alexander Veretennikov. On large deviations in the averaging principle for sdes with a "full dependence". *Annals of probability*, pages 284–296, 1999.
- [124] Gilles Wainrib, Michèle Thieullen et Khashayar Pakdaman. Reduction of stochastic conductance-based neuron models with time-scales separation. *Journal of computational neuroscience*, 32(2) :327–346, 2012.
- [125] Walther von Wartburg. *Französisches Etymologisches Wörterbuch*. Mise en ligne par l'Atilf : <https://lecteur-few.atilf.fr>, 2014.
- [126] Wolfram Wiesemann, Daniel Kuhn et Berç Rustem. Robust markov decision processes. *Mathematics of Operations Research*, 38(1) :153–183, 2013.
- [127] George Yin et Qing Zhang. *Continuous-time Markov chains and applications : a singular perturbation approach*, volume 37. Springer, 2012.
- [128] August Zapała. Unbounded mappings and weak convergence of measures. *Statistics & Probability Letters*, 78(6) :698–706, 2008.