



HAL
open science

Quelques résultats autour de l'équation de Schrödinger

Corentin Audiard

► **To cite this version:**

Corentin Audiard. Quelques résultats autour de l'équation de Schrödinger. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Sorbonne université, 2020. tel-04285467

HAL Id: tel-04285467

<https://hal.science/tel-04285467v1>

Submitted on 15 Nov 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License



Mémoire de synthèse en vue d'obtenir une

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité : Mathématiques

Laboratoire Jacques-Louis Lions | UMR 7598

QUELQUES RÉSULTATS AUTOUR DE L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER

Corentin AUDIARD

soutenance le 08/10/2020 devant le jury composé de

| | |
|--------------------------------------|--|
| Thomas Alazard (examineur) | - ENS Paris-Saclay |
| Fabrice Béthuel (examineur) | - Sorbonne Université |
| Sylvie Benzoni (examinatrice) | - Université Lyon 1 et Institut Henri Poincaré |
| Jean-Yves Chemin (examineur) | - Sorbonne Université |
| Jean-François Coulombel (rapporteur) | - Université Toulouse III |
| Tatsuo Iguchi (rapporteur) | - Keio University |

après rapports de

| | |
|-------------------------|---------------------------|
| Jean-François Coulombel | - Université Toulouse III |
| Tatsuo Iguchi | - Keio University |
| Catherine Sulem | - University of Toronto |

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Remerciements | iii |
| Liste des travaux de l'auteur | v |
| Introduction | vii |
| Notations | xiii |
| 1 Problèmes aux limites sur le demi espace | 1 |
| 1.1 Symétriseurs de Kreiss et méthode d'énergie | 2 |
| 1.1.1 Résultat principal | 4 |
| 1.1.2 Réécriture du problème et notion de solution | 6 |
| 1.1.3 Construction des symétriseurs | 7 |
| 1.1.4 Quelques mots sur le problème mixte | 10 |
| 1.2 Résolution directe pour l'équation de Schrödinger | 13 |
| 1.2.1 Trace du problème de Cauchy ; les espaces \mathcal{H}^s | 16 |
| 1.2.2 Condition de compatibilité | 17 |
| 1.2.3 Estimations et solution | 17 |
| 1.3 Perspectives | 19 |
| 2 Schrödinger en domaine courbe | 21 |
| 2.1 Problème linéaire | 22 |
| 2.2 Effets dispersifs | 24 |
| 2.3 Résolution de problèmes non linéaires | 26 |
| 2.4 Perspectives | 28 |
| 3 Temps d'existence pour les équations d'Euler-Korteweg | 29 |
| 3.1 Existence globale pour un champ de vitesse irrotationnel | 31 |
| 3.1.1 Techniques classiques | 31 |
| 3.1.2 L'équation de Gross-Pitaevskii | 35 |
| 3.1.3 Existence globale pour les équations d'Euler-Korteweg | 39 |
| 3.2 Temps long pour une petite vortacité | 42 |
| 3.2.1 Le système dispersif-hyperbolique | 43 |
| 3.2.2 Le résultat principal | 43 |
| 3.2.3 Une preuve pour un modèle jouet | 44 |
| 3.3 Perspectives | 45 |

| | |
|---|-----------|
| 4 Ondes progressives et système d'Euler-Korteweg | 47 |
| 4.1 Existence de solitons en dimension 2 | 48 |
| 4.1.1 Énergie, moment, vitesse du son | 48 |
| 4.1.2 Résultat principal | 50 |
| 4.1.3 Le cas de l'équation de Schrödinger | 51 |
| 4.1.4 Éléments de preuve du théorème 4.1 | 54 |
| 4.2 Solitons et fronts en dimension 1 | 55 |
| 4.2.1 Existence | 56 |
| 4.2.2 Généralités sur la stabilité | 57 |
| 4.2.3 Stabilité pour Euler-Korteweg | 58 |
| 4.3 Existence de multi-solitons | 60 |
| 4.3.1 Généralités sur les multi-solitons | 60 |
| 4.3.2 Multi-solitons pour le système d'Euler-Korteweg | 62 |
| 4.4 Perspectives | 65 |
| Bibliographie | 67 |

Remerciements

Je suis reconnaissant aux rapporteurs d'avoir accepté le travail de lire ce manuscrit, même si ils m'ont encore confirmé le volume effarant d'erreurs qui se glissent dès que j'écris un texte. Merci donc à Catherine Sulem, dont je regrette beaucoup qu'elle n'ait pas pu faire partie du jury de soutenance, à Tatsuo Iguchi dont la précision de rélecture m'a littéralement ébahi. J'adresse des remerciements particuliers à Jean-François Coulombel, certes pour ses remarques constructives mais surtout parce qu'à chaque fois que nous nous croisons c'est un plaisir de discuter de mathématiques et d'autres sujets.

Merci à Sylvie Benzoni qui a encadré ma thèse il y a maintenant dix ans, j'apprécie encore mieux maintenant l'équilibre délicat qu'elle a su me laisser entre guidage et autonomie. Merci aux trois autres membres du jury, Thomas Alazard, Fabrice Béthuel et Jean-Yves Chemin, de l'honneur qu'ils me font en participant à cette soutenance. J'admire les choix scientifiques de Thomas, s'attaquant à des problèmes qui m'intéressent et que je fuis.

Indépendamment de l'admiration scientifique que j'ai pour Fabrice et Jean-Yves, je me permettrai de noter qu'ils sont également deux piliers du coeur du laboratoire Jacques-Louis Lions, c'est à dire la salle café. Ayman Moussa ayant déjà parfaitement croqué leur rôle dans son HDR, je me contenterai de signaler également la place de Fabrice en tant que leader charismatique du sentier lumineux vers la cantine.

Cela m'amène naturellement à parler du laboratoire Jacques-Louis Lions. C'est un endroit exceptionnel, pas seulement pour sa qualité scientifique, mais aussi pour l'excellente ambiance qui y règne. Même à plus de cent kilomètres du laboratoire, même dans un train rempli en pleine période de coronavirus, c'est toujours un plaisir d'y aller. J'oublierai forcément des gens en les citant nommément, je me contenterai donc d'un grand merci général aux membres du LJLL, en incluant bien sûr celles et ceux qui sont partis depuis mon arrivée.

Je ne sais pas ce qu'il en est dans les autres disciplines, mais la communauté EDPiste en France m'a toujours paru très agréable. Elle est vaste et je serai bien en peine de citer toutes les personnes que j'ai pu croiser et apprécier, mais je peux au minimum penser à ceux avec qui je travaille réellement. Merci donc à Boris Haspot de m'avoir converti au système d'Euler-Korteweg, mais pas encore tout à fait aux espaces de Besov, pour nos discussions décousues et toujours plaisantes, et pour avoir accepté d'encadrer avec moi un premier thésard, Marc-Antoine Vassenet. Merci aussi à Miguel Rodrigues de m'avoir (presque) converti aux subtilités de la stabilité modulationnelle et de m'avoir fait replonger dans l'enfer de la manipulation sur les lignes et colonnes. Enfin même si on ne fait pas de maths nouvelles, j'ai travaillé sur plusieurs cours avec Ramona Anton, toujours avec plaisir.

Pour terminer, j'adresse toute mon affection et ma gratitude à ma famille en général, à Coline en particulier, et à Leto, même si je ne lui dois pour l'instant qu'un peu moins de sommeil et beaucoup plus de joie (parfois l'inverse).

Liste des travaux de l'auteur

Les articles qui ne sont pas décrits dans le mémoire sont indiqués par une étoile. Ceux qui ont été sélectionnés l'ont été pour des raisons de cohérence de l'exposition. Deux actes de conférence ne sont pas mentionnés car ce sont des versions raccourcies de [A1, A10].

Prépublication :

[P1] *On the time of existence of solutions of the Euler-Korteweg system*, soumis.

Publications :

- [A12] *Existence of multi-traveling waves in capillary fluids*, à paraître **Proc. Roy. Soc Edinburgh**, 2019, <https://doi.org/10.1017/prm.2019.51>.
- [A11] *Global Strichartz estimates for the Schrödinger equation with non zero boundary conditions and applications*, **Ann. Inst. Fourier (Grenoble)**, 69 (2019), no. 1, 31–80.
- [A10] *From the Gross-Pitaevskii equation to the Euler Korteweg system, existence of global strong solutions with small irrotational initial data*, avec B. Haspot, **Ann. Mat. Pura Appl.**, (4) 197 (2018), no. 3, 721–760.
- [A9] *Small energy traveling waves for the Euler-Korteweg system*, **Nonlinearity**, 30 (2017), no. 9, 3362–3399.
- [A8] *Global well-posedness of the Euler-Korteweg system for small irrotational data*, **Comm. Math. Phys.**, avec B. Haspot, 351 (2017), no. 1, 201–247.
- [A7] *On the boundary value problem for the Schrödinger equation : compatibility conditions and global existence*, **Anal. PDE**, 8 (2015), no. 5, 1113–1143.
- ★ [A6] *Dispersive schemes for the critical Korteweg-de Vries equation*, **Math. Models Methods Appl. Sci.**, 23 (2013), no. 14, 2603–2646.
- ★ [A5] *Dispersive smoothing for the Euler-Korteweg model*, **SIAM J. Math. Anal.** 44 (2012), no. 4, 3018–3040.

- [A4] On the non-homogeneous boundary value problem for Schrödinger equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 33 (2013), no. 9, 3861–3884
- [A3] *Non-homogeneous boundary value problems for linear dispersive equations*, **Comm. Partial Differential Equations**, 37 (2012), no. 1, 1–37.
- ★ [A2] *On mixed initial-boundary value problems for systems that are not strictly hyperbolic*, **Appl. Math. Lett.**, 24 (2011), no. 5, 757–761.
- ★ [A1] *Kreiss symmetrizer and boundary conditions for the Euler-Korteweg system in a half space*, *J. Differential Equations* 249 (2010), no. 3, 599–620.

Thèse :

- [T] *Problèmes aux limites non homogènes pour des équations dispersives, applications au système d'Euler-Korteweg*, **Thèse de doctorat**, Université Claude Bernard, 2010.

Introduction

L'équation de Schrödinger comme fil rouge

Ce mémoire s'organise autour de deux axes significativement différents ; les problèmes aux limites non homogènes pour les équations dispersives d'une part, l'analyse mathématique du système d'Euler-Korteweg posé sur \mathbb{R}^d d'autre part. À défaut d'unité, le pont entre les deux est l'équation de Schrödinger

$$i\partial_t u + \Delta u = f,$$

dont les qualités d'ubiquité ne sont plus à prouver. Ici f peut être un terme de forçage, un terme de potentiel Vu , une non-linéarité, ou tout ça à la fois. Si mon travail de thèse concernait des problèmes aux limites pour des équations dispersives assez générales, la généralité se payait par des résultats difficiles à énoncer simplement et pas forcément optimaux. L'équation de Schrödinger a plusieurs mérites : c'est un modèle à la fois simple à écrire, riche, à la littérature abondante et bien balisée pour la théorie de Cauchy, en tout cas suffisamment pour donner une idée de ce que serait un "bon" résultat dans le cadre des problèmes aux limites, et quelques idées pour l'atteindre.

Pour une EDP donnée, le champ des problèmes aux limites et en particulier des problèmes aux limites non homogènes est souvent beaucoup moins fourni que celui du problème de Cauchy. Il existe pourtant dedans de nombreuses questions naturelles, qui ont parfois le mérite d'avoir des réponses à la fois simples et jolies. Le premier axe de ce mémoire sera donc de présenter certains de ces aspects, et en particulier de convaincre le lecteur que l'étude des conditions de compatibilité dans des espaces critiques a son charme.

Le second axe se concentre sur le système d'Euler-Korteweg, un modèle un peu plus rugueux

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) & = 0, \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla g(\rho) & = \nabla \left(K(\rho) \Delta \rho + \frac{1}{2} K'(\rho) |\nabla \rho|^2 \right), \end{cases}$$

dont le lien avec l'équation de Schrödinger n'est pas immédiat. Après reformulation il se met sous la forme d'une équation de Schrödinger dégénérée $\partial_t \psi + \nabla(a \operatorname{div} \psi) = f(\psi, \nabla \psi)$. Dans le régime des petites données où la densité est proche d'un état constant (ψ proche de 0), l'analogie s'avère cependant féconde, débouchant sur des résultats d'existence globale, de construction de solitons et multi-solitons, ainsi que leurs propriétés de stabilité orbitale. Les résultats présentés ici sont donc très redevables à l'intense activité qui existe dans le cadre des EDP dispersives non linéaires, et qui est abondamment citée.

Problématique

Avant de détailler le plan, je décris quelques propriétés des problèmes aux limites et des équations dispersives. Ces notions génériques motivent les directions que j'ai étudiées. Le propos est volontairement très élémentaire pour souligner ce qui m'intéresse, plutôt que la technique autour des problèmes.

Quelques spécificités des problèmes aux limites Étant donnée une EDP d'évolution d'ordre 1 en temps, on appellera problème de Cauchy le problème posé sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_t^+$. Le même problème posé dans un ouvert Ω avec un bord est un problème aux limites. Le problème de Cauchy requiert de prescrire $u|_{t=0} = u_0$ tandis que le problème aux limites requiert également des données au bord, on se restreint au cas où ces données au bord sont prescrites par un opérateur linéaire $B(u) = h$. En général, on ne suppose pas l'opérateur local. On appelle u_0 la donnée initiale, h les conditions au bord. Lorsque $h = 0$ le problème est dit homogène, lorsque $u_0 = 0$ on parlera de problèmes aux limites pur, sinon le problème est "mixte".

L'équation d'évolution la plus simple qui soit permet d'illustrer significativement les difficultés liées aux problèmes aux limites : considérons

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_t v - \partial_x v = 0, \\ v|_{t=0} = u_0, \end{cases} \quad (x, t) \in [0, 1] \times \mathbb{R}_t^+.$$

Au vu la conservation de $u(x+t, t)$, respectivement $v(x-t, t)$, la construction d'une solution unique requiert la donnée de $u|_{x=0} = h$, resp. $v|_{x=1}$, et on a clairement l'estimée de "semi-groupe"

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2([0,1])} \leq \|u_0\|_{L^2([0,1])} + \|h\|_{L^2([0,t])}.$$

Deux équations dont la théorie de Cauchy est identique requièrent donc des conditions au bord différentes pour donner un problème aux limites bien posé, et la solution est $C_t L^2$ si les données initiales et au bord sont L^2 également. La classification des conditions aux limites acceptables et la description de leur régularité m'intéressent particulièrement.

Il ne s'agit évidemment pas des seules conditions donnant un problème bien posé. La seule donnée de $\partial_x u|_{x=0} = g$ donne aussi une unique solution continue, en effet $\partial_t u|_{x=0} = -\partial_x u|_{x=0} = -g$ donc par intégration $u(0, t) = u(0, 0) - \int_0^t g(s) ds = u_0(0) - \int_0^t g(s) ds$. Ainsi pour $x < t$

$$u(x, t) = u_0(0) - \int_0^{t-x} g(s) ds. \quad (1)$$

La formule donnant la solution est une fonction *non locale* des données (simplement parce que l'application dite Neuman-Dirichlet $\partial_x u|_{x=0} \rightarrow u|_{x=0}$ est non locale), et on a utilisé la condition de continuité

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(0, t) = \lim_{x \rightarrow 0} u_0(x). \quad (2)$$

La formule (1) permet de sélectionner les solutions faibles limites de solutions régulières ("mild solutions").

Les *conditions de compatibilité* sont une autre spécificité des problèmes mixtes : en reprenant le problème de Dirichlet $\partial_t u + \partial_x u = 0$, $u|_{t=0} = u_0$, $u|_{x=0} = g$, si la solution est continue, nécessairement

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0} u(0, t) = u(0, 0) = u_0(0). \quad (3)$$

Similairement pour u de classe C^k on a $k + 1$ conditions de compatibilité

$$\forall 0 \leq j \leq k, g^{(j)}(0) = \partial_t^j u(0, 0) = (-1)^j \partial_x^j u(0, 0) = (-1)^j u_0^{(j)}(0).$$

Évidemment, ces conditions se généralisent à des EDP plus générales, posées sur des domaines réguliers, et n'importe quel cadre fonctionnel où les traces en $t = 0$ et sur $\partial\Omega$ ont du sens, typiquement H^s , $s > 1/2$.

Le cas "critique" $s = 1/2$ est particulièrement intéressant (mathématiquement) : toujours pour le problème $\partial_t u + \partial_x u = 0$ posé sur $(x, t) \in (\mathbb{R}^+)^2$ avec condition de Dirichlet $u|_{x=0} = g$. Si $u_0 \in H^{1/2}(\mathbb{R}^+)$, $g \in H^{1/2}(\mathbb{R}^+)$, la condition $u_0(0) = g(0)$ n'a pas de sens, cependant la solution faible

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x - t), & t < x, \\ g(t - x), & t \geq x, \end{cases}$$

ne satisfait en général pas $u(\cdot, t) \in H^{1/2}(\mathbb{R}^+)$, il faut imposer la fameuse condition de Lions-Magenes sur le raccord de deux fonctions $H^{1/2}(\mathbb{R}^+)$

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{|u_0(x) - g(x)|^2}{x} dx < \infty \Leftrightarrow u_0 - g \in H_{00}^{1/2}(\mathbb{R}^+).$$

C'est ce qui reste de la condition de compatibilité $u_0(0) = h(0)$ à la régularité critique, et peut se voir comme une inégalité de Hardy fractionnaire.

Le dernier point qui m'a intéressé est le domaine spatial Ω . Sa forme influe significativement les propriétés des solutions. Par exemple dans le cas de l'équation de Schrödinger les estimations de Strichartz classiques du problème de Cauchy peuvent ne pas être satisfaites, tandis que des variantes plus ou moins affaiblies subsistent.

Quatre points ont donc été mis en évidence

- Comment classifier "algébriquement" les conditions au bord donnant un problème bien posé ?
- si u_0 est disons L^2 , quelle régularité imposer sur h pour que la solution u soit $C_t L^2$? Autrement dit pour une régularité de u_0 donnée, quelle est la régularité naturelle des données au bord ?
- Pour monter en régularité, quelles conditions de compatibilité faut il imposer en plus ?
- Quel est le rôle de Ω dans les estimations linéaires ?

C'est pour l'essentiel les questions qui nous occuperont dans les chapitres 1 et 2 sur les problèmes aux limites. Évidemment, des extensions aux problèmes non linéaires arrivent dès que des estimations linéaires un peu satisfaisantes existent, mais ces extensions occupent une place à mon avis un peu anecdotique.

Le système d'Euler-Korteweg Reprenons les équations

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) & = 0, \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla g(\rho) & = \nabla \left(K(\rho) \Delta \rho + \frac{1}{2} K'(\rho) |\nabla \rho|^2 \right). \end{cases} \quad (4)$$

Ici $K : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ est une fonction régulière, dite *coefficient de capillarité*. Un cas particulier du modèle est apparu dès les années 1920 avec Erwin Madelung et la transformation éponyme

[91]. Celle ci convertit les solutions de l'équation de Schrödinger semi-linéaire

$$i\partial_t u + \Delta u = \frac{g(|\psi|^2)}{2}\psi,$$

en solutions de (4) avec $K(\rho) = 1/\rho$, par l'application

$$M : \psi = \sqrt{\rho} e^{i\theta} \rightarrow (\rho, u) = \left(|\psi|^2, \operatorname{Im} \left(\frac{\bar{\psi}}{|\psi|^2} \nabla \psi \right) \right). \quad (5)$$

On parle alors d'équations de l'hydrodynamique quantique (ou QHD pour quantum hydrodynamics). Notons que l'application M est mal définie si ρ s'annule (présence de vide), et n'a pour image que des champs de vitesse irrotationnels. Pour K plus général, la correspondance avec Schrödinger ne tient plus, mais le problème reste pertinent pour la modélisation de fluides capillaires.

Cette correspondance invite à penser (4) comme un système dispersif quasi-linéaire, au moins dans un régime sans vide. La dynamique pour NLS (et pour les EDP dispersives en général) s'articule autour de trois axes majeurs : l'existence globale de solutions "dispersives" (asymptotiquement linéaires), l'explosion en temps fini et entre ces deux extrêmes l'existence d'ondes progressives, des solutions dépendant uniquement de $x \cdot e - ct$, $e \in \mathcal{S}^{d-1}$, souvent vues comme un équilibre entre les effet dispersifs et non linéaires. Génériquement, on s'attend à ce qu'une solution globale se décompose en temps long comme une somme de solitons spatialement décorrelés et une solution "dispersive", c'est la conjecture dite de "résolution en solitons".

Hormis les cas intégrables [70, 81, 126], ce sont des questions très ouvertes, mais qui donnent une idée des résultats à attendre pour la dynamique d'une EDP dispersive.

Je me suis attelé partiellement en collaboration avec Boris Haspot à défricher quelques aspects de la dynamique des solutions du système d'Euler-Korteweg. Nous obtenons dans [A10] ($K = 1/\rho$, $g = \rho - 1$) et [A8] (cas général) l'existence de solutions globales dispersives pour des données petites, irrotationnelles, en dimension au moins 3. Si la vitesse initiale n'est pas irrotationnelle, je montre dans [P1] toujours pour des données initiales petites que le temps d'existence ne dépend que de la taille de la composante rotationnelle de la vitesse, ce qui donne à nouveau le résultat d'existence globale dans la limite zéro vorticité.

Pour la dynamique non linéaire, l'existence de solitons était connue en dimension 1 [13], je prouve dans [A9] leur existence en dimension 2. Ces solitons étant arbitrairement petits ils donnent une obstruction à un résultat d'existence globale similaire à celui de [A8]. Enfin je construis dans [A12] en dimension 1 des solutions qui convergent en temps long vers une somme d'ondes progressives spatialement décorrelés. Il faut préciser que malgré les apparences, un tel résultat n'a pas grand chose à voir avec la résolution en solitons et est beaucoup plus simple : au lieu d'une application "données initiales \rightarrow comportement asymptotique", on construit (avec un raisonnement par compacité peu explicite) une application "comportement asymptotique \rightarrow données initiales".

Les aspects "stabilité" des solitons sont peu présents dans le mémoire pour une raison assez simple : l'énergie naturelle du système est très loin de contrôler assez de dérivées de la solution pour assurer l'existence locale : l'énergie contrôle "en gros" $(\rho - \rho_c, u) \in H^1 \times L^2$, avec ρ_c une constante positive, alors que l'existence requiert $(\rho - \rho_c, u) \in H^{d/2+2+\varepsilon} \times H^{d/2+1+\varepsilon}$. Les techniques usuelles donnent donc au mieux de la stabilité conditionnelle, c'est à dire une stabilité dans l'espace d'énergie jusqu'à l'éventuelle explosion.

Plan du mémoire

Chapitres 1 et 2 : problèmes aux limites Les deux chapitres sont séparés par la forme des domaines considérés. Dans le premier, qui correspond à [A3] et [A11], le domaine est un demi espace ce qui permet des techniques d'analyse de Fourier tandis que le deuxième ([A4] et [A7]) se place sur le complémentaire d'un ouvert étoilé.

La section 1.1 décrit le travail de thèse [A3] basé sur une généralisation des symétriseurs de Kreiss, un outil standard pour les problèmes aux limites hyperboliques. Si ces résultats s'appliquent à une classe large d'équations dispersives linéaires, j'ai choisi de les décrire en détail pour l'équation de Schrödinger pour des raisons de lisibilité. Ils apportent des réponses assez satisfaisantes aux questions de régularité des données au bord et de nature des conditions aux limites admissibles. J'en profite au passage pour prouver une estimation nouvelle de type semi-groupe au paragraphe 1.1.4. Les conditions de compatibilité ne sont pas abordées.

La section 1.2 correspond à [A11], qui se concentre spécifiquement sur l'équation de Schrödinger, toujours sur le demi espace. On obtient des estimations de Strichartz optimales directement par calcul sur une solution explicite (dans l'esprit de [110]), un raffinement des conditions aux limites admissibles, et on décrit les conditions de compatibilité comme une condition nécessaire et suffisante de régularité, y compris pour la régularité critique $H^{1/2}$.

Dans le deuxième chapitre l'analyse est beaucoup moins directe. Les résultats d'existence se limitent à l'équation de Schrödinger avec condition de Dirichlet non homogène. Les conditions de compatibilité sont similaires à celles de [A11]. Des estimations liées aux effets dispersifs (non optimales) sont obtenues par un argument de viriel à la section 2.2. Quelques applications aux problèmes non linéaires sont mentionnées à la section 2.3.

Chapitres 3 et 4 : système d'Euler-Korteweg J'ai choisi une séparation naturelle entre dynamique linéaire et non linéaire.

Dans le chapitre 3 je me concentre sur les résultats d'existence en temps long [A10, A8] et [P1], qui pour l'essentiel reposent sur des estimations linéaires et une propagation de la petitesse des termes non linéaires. La difficulté est bien sûr la propagation de cette petitesse. La section 3.1 traite l'existence globale de solutions dispersives pour les équations d'Euler-Korteweg, à vitesse irrotationnelle. Le système après reformulation est très proche de l'équation de Gross-Pitaevskii, après quelques rappels bibliographiques le paragraphe 3.1.2 est donc dédié à cette équation et à des résultats de Gustavson, Nakanishi et Tsai qui ont été une source d'inspiration importante. La section suivante 3.2 décrit une extension de [A8] au cas rotationnel, où dans la limite zéro vorticité on retrouve le même résultat d'existence globale. Plutôt que de décrire la preuve, assez technique, je décris un résultat dans le même esprit (trivial) sur un modèle jouet.

Le chapitre 4 contient les résultats d'existence sur les ondes progressives de [A9, A12]. La méthode de construction de solitons en dimension 2 est esquissée à la section 4.1, à nouveau la forte analogie avec l'équation de Gross-Pitaevskii est soulignée au paragraphe 4.1.3. Après quelques rappels sur l'existence et la stabilité de solitons en dimension 1 (section 4.2), je décris dans la section 4.3 la construction de multi-solitons pour le système d'Euler-Korteweg.

Notations

Calcul différentiel

La longueur d'un multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$ est $|\alpha| := \sum_1^d \alpha_k$, on note $D = \nabla^t$, et $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_d^{\alpha_d}$. Pour une fonction dépendant du temps et de l'espace (x, t) , $\nabla f(x, t)$ est le gradient uniquement par rapport à la variable x . Au chapitre 1, où on sépare les composantes tangentielle et normale (x, y) de la variable d'espace, on utilise ∇_x pour le gradient selon x , et similairement Δ_x .

La dérivée variationnelle d'une fonctionnelle H en f est notée $\delta H[f]$, la notation $[\cdot]$ distingue les fonctionnelles des fonctions.

Dans le chapitre 1, on note en général un multiplicateur de Fourier par une lettre majuscule, et son symbole par la minuscule. La transformée de Fourier inverse est notée \mathcal{F}^{-1} ou $\check{\cdot}$.

Ensembles

On note

$$\mathbb{C}^{++} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}, \mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$$

Pour distinguer variables d'espace et de temps, on utilise la notation $\mathbb{R}_x^d, \mathbb{R}_t$.

Similairement, pour des problèmes posé sur un demi espace on note $\mathbb{R}_x^{d-1} \times \mathbb{R}_y^+$, avec $x \in \mathbb{R}^{d-1}$ la variable tangentielle et $y \in \mathbb{R}^+$ la variable normale.

Les variables duales de (x, t) par transformée de Fourier-Laplace sont notées $(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{C}^+$, avec $\tau = \gamma + i\delta$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $\delta \in \mathbb{R}$.

Espaces fonctionnels

La norme d'un espace fonctionnel E est notée $\|\cdot\|_E$, sauf pour la notation classique $\|\cdot\|_p$ pour les espaces L^p . La norme euclidienne sur \mathbb{R}^N est simplement notée $|\cdot|$.

On suit les notations habituelles pour les espaces de Sobolev $H^s, W^{k,p}$ (k entier) et Besov $B_{p,q}^s$. $H_{00}^{1/2}(\mathbb{R}^+)$ est l'espace des fonctions $H^{1/2}(\mathbb{R}^+)$ qui se prolongent continûment par 0 en une fonction $H^{1/2}(\mathbb{R})$, muni de la norme

$$\|u\|_{H_{00}^{1/2}} = \|u\|_{H^{1/2}} + \|u/\sqrt{x}\|_{L^2}.$$

L'espace des fonctions intégrables en temps à valeur $W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$ est noté $L^1(\mathbb{R}_t, W^{k,p}(\mathbb{R}_x^d))$.

On utilise la notation habituelle $B_{p,q}^s$ pour les espaces de Besov, on renvoie à [7] pour leur définition.

Enfin, le compteur des équations est remis à 0 à chaque début de chapitre ; pour cette raison un numéro d'équation fait toujours référence au chapitre courant au contraire des théorèmes, lemmes, propositions, corollaires, définitions ou remarques qui, eux, peuvent être invoqués dans tout le manuscrit.

Problèmes aux limites sur le demi espace

Ce chapitre se concentre sur des résultats obtenus par analyse de Fourier pour des systèmes d'équations d'évolution posés sur $\Omega \times \mathbb{R}_t^+ = \mathbb{R}_x^{d-1} \times \mathbb{R}_y^+ \times \mathbb{R}_t^+$, sous la forme générale

$$\begin{cases} P(\nabla_x, \partial_y, \partial_t)u & = f, (x, y, t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_y^+ \times \mathbb{R}_t^+, \\ B[u]|_{y=0} & = h, \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\} \times \mathbb{R}_t^+, \\ u|_{t=0} & = u_0, \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_y^+. \end{cases} \quad (1)$$

Le bord de Ω est $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$, u est une fonction vectorielle de taille k , x et t sont des variables tangentielles, y la variable normale. P est polynomial, d'ordre n en y , B définit les conditions aux limites qu'on va préciser.

Dans [A3] comme dans [A11] on tire profit de la transformée de Fourier-Laplace tangentielle

$$\begin{aligned} u \rightarrow \hat{u}(\xi, y, \tau) &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-\tau t} e^{-ix \cdot \xi} u(x, y, t) dx dt, (\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{C}^{++} \\ &:= \mathbb{R}^{d-1} \times \{\tau : \operatorname{Re} \tau > 0\}. \end{aligned}$$

Pour donner une idée de la problématique considérons le problème aux limites pur $f = 0$, $u_0 = 0$ et notons $U(\xi, 0, \tau) := (\hat{u}(\xi, 0, \tau), \partial_y \hat{u}(\xi, 0, \tau), \dots, \partial_y^{n-1} \hat{u}(\xi, 0, \tau))$, on suppose que la condition au bord s'écrit sous la forme

$$b(\xi, \tau)U(\xi, 0, \tau) = \hat{h}(\xi, \tau),$$

avec b une matrice $p \times nk$ de rang p , où $p \leq n$ est le nombre de conditions aux limites, k la taille de u . Le problème linéaire (1) se réécrit comme un système différentiel

$$\begin{cases} P(i\xi, \partial_y, \tau)U(\xi, y, \tau) = 0, \\ bU(\xi, 0, \tau) = \hat{h}(\xi, \tau). \end{cases} \quad (2)$$

Si pour $(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{C}^{++}$ le polynôme caractéristique $\lambda \mapsto \det(P(i\xi, \lambda, \tau))$ n'admet pas de racine imaginaire pure, il existe des projecteurs $\Pi_{\xi, \tau}^-, \Pi_{\xi, \tau}^+$ sur les espaces stable $E_{\xi, \tau}^-$ et instable $E_{\xi, \tau}^+$ tels que la résolvante $R_{\xi, \tau}(y)$ associée à $P(i\xi, \partial_y, \tau)$ satisfait

$$\forall U_0 \in \mathbb{C}^n, \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} |R_{\xi, \tau}(y) \Pi_{\xi, \tau}^+ U_0| = \lim_{y \rightarrow +\infty} |R_{\xi, \tau}(y) \Pi_{\xi, \tau}^- U_0| = 0.$$

Si l'on cherche des solutions intégrables on doit donc avoir $U(\xi, 0, \tau) \in E_{\xi, \tau}^-$. Le problème est ainsi déplacé vers la résolution des systèmes

$$\begin{cases} bU(\xi, 0, \tau) = \widehat{h}(\xi, \tau), \\ U(\xi, 0, \tau) \in E_{\xi, \tau}^-, \end{cases}$$

qui admet une unique solution si et seulement si

$$\forall (\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{C}^{++}, \quad b(\xi, \tau) \text{ est un isomorphisme } E_{\xi, \tau}^- \rightarrow \text{Im}(b(\xi, \tau)). \quad (\text{KL})$$

C'est la fameuse condition de Kreiss-Lopatinskii (faible), elle n'assure pas que le problème soit bien posé. Évidemment, pour mener à des estimations a priori sur la solution, il faut une version plus quantitative de cette condition, contrôlant par exemple les normes de b, b^{-1} uniformément en (ξ, τ) , ce qui débouche sur la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme (KLU).

On peut alors résoudre le problème (2) par deux approches très différentes.

Méthode de symétriseurs Comme pour le problème de Cauchy, la méthode par symétriseurs consiste à construire un symétriseur matriciel $S(\xi, \tau)$ “qui fait fonctionner la méthode d'énergie” (produit scalaire avec Su et intégration...). Cette stratégie remonte au moins à Kreiss [77], qui a construit les symétriseurs éponymes pour des systèmes strictement hyperboliques. Après quelques rappels bibliographiques, on décrit dans la section 1.1 ce que donne cette approche pour des équations dispersives, cela correspond à un travail réalisé durant ma thèse [A3]. Les résultats ne sont pas aussi flexibles mais permettent tout de même de considérer des problèmes où certains termes d'ordre “pas trop élevé” sont à coefficients variables. Le prototype est l'équation de Schrödinger $\partial_t \psi + a \cdot \nabla \psi + i\Delta \psi$, avec a une fonction réelle régulière.

Méthode directe Avec une formule explicite on obtient des estimées sur la solution par des méthodes d'analyse harmonique. C'est l'approche de la section 1.2, appliquée à l'équation de Schrödinger, elle correspond à [A11]. On obtient alors une description fine des conditions de compatibilité ainsi que des estimations de Strichartz optimales, globales en temps avec les conséquences “usuelles” pour les problèmes non linéaires. Le défaut de cette méthode est bien sûr qu'elle ne s'étend pas aux équations à coefficients variables.

1.1 Symétriseurs de Kreiss et méthode d'énergie

La construction de symétriseurs dits de Kreiss pour les problèmes hyperboliques remonte au début des années 70 avec [77]. Le principe est simple : pour un opérateur $P = \partial_t + \sum A_j \partial_{x_j} + A_y \partial_y$, on dit que $\{y = 0\}$ est non caractéristique si A_y est inversible. Dans ce cas on peut réécrire le problème $Pu = f, Bu = h$, sous la forme

$$\begin{cases} \partial_y U(\xi, y, \tau) = g(\xi, \tau)U, \\ bU(\xi, 0, \tau) = \widehat{h}(\xi, \tau), \end{cases} \quad (3)$$

Kreiss construit une matrice $s(\xi, \tau)$ hermitienne, telle que $\operatorname{Re}(sg) = (sg + (sg)^*)/2$ est symétrique, définie positive, et $s \geq cI - Cb^*b$ de sorte qu'en prenant le produit scalaire de la première équation de (3) avec sU et intégrant en y

$$\|U(\xi, \cdot, \tau)\|_{L_y^2} + |U(\xi, 0, \tau)| \lesssim |\widehat{h}(\xi, \tau)|.$$

Sous la condition dite de Kreiss-Lopatinskii uniforme (voir (KL)) toutes les constantes cachées dans \lesssim sont indépendantes de (ξ, τ) sauf $\operatorname{Re}(SG + (SG)^*) \geq \operatorname{Re}(\tau) := \gamma$, d'où par intégration des estimées dans $e^{\gamma t} L^2$. Grâce au calcul pseudo-différentiel et l'inégalité de Gårding, les estimations restent vraies pour des opérateurs à coefficients variables "assez réguliers", et par des arguments de partition de l'unité elles s'adaptent pour des problèmes posés sur $\Omega \times \mathbb{R}_t^+$, Ω régulier, $\partial\Omega$ non caractéristique.

Essentiellement le résultat de Kreiss se lit ainsi :

Théorème 1.1 (Kreiss [77]). *On considère le problème*

$$\begin{cases} \partial_t U + \sum A_j(x, y, t) \partial_j U = f, (x, y, t) \in \mathbb{R}_x^{d-1} \times \mathbb{R}_y^+ \times \mathbb{R}_t^+, \\ B(U)|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_t^+} = h, \\ U|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Si le problème est strictement hyperbolique, non caractéristique, à coefficients réguliers, constants à l'infini et B satisfait la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme, pour γ assez grand il existe une unique solution $U \in e^{\gamma t} L^2(\mathbb{R}_x^{d-1} \times \mathbb{R}_y^+ \times \mathbb{R}_t^+)$ telle que

$$\|e^{-\gamma t} U\|_{L^2(\mathbb{R}_x^{d-1} \times \mathbb{R}_y^+ \times \mathbb{R}_t^+)} \lesssim \|e^{-\gamma t} h\|_{L^2(\mathbb{R}_x^{d-1} \times \mathbb{R}_t^+)} + \|e^{-\gamma t} f\|_{L^2(\mathbb{R}_x^{d-1} \times \mathbb{R}_y^+ \times \mathbb{R}_t^+)}.$$

Du fait de sa robustesse, cette méthode a été étendue dans de nombreuses directions : classes de problèmes hyperboliques plus généraux (bord caractéristique [93], constamment hyperboliques [103]), versions affaiblies de la condition de Kreiss-Lopatinskii [41, 113], lois de conservation visqueuses [105], ou même l'analyse de schémas numériques [42, 64].

Un des défauts notables (même pour les problèmes hyperboliques) est que le passage d'un problème aux limites sans donnée initiale (ou donnée zéro) à un problème aux limites mixte (donnée au bord+donnée initiale) n'est jamais trivial. La première avancée est due à J.Rauch [111] qui montre que le problème mixte strictement hyperbolique à donnée initiale L^2 est bien posé. La preuve, peu intuitive, consiste à appliquer une méthode d'énergie à la Leray-Gårding [47] qui donne des estimées de semi groupe dans H^n , avec n la taille du système, puis développe un argument de dualité assez long.

J'avais généralisé en thèse l'approche de Rauch pour les systèmes hyperboliques à multiplicité constante [A2]. Récemment, G. Métivier a obtenu une nouvelle preuve [104] la fois plus générale et naturelle. Celle-ci remplace la méthode d'énergie de Leray-Gårding (qui est plus adaptée pour les problèmes scalaires) par une stratégie adaptée aux systèmes qui remonte à Lax-Friedrichs [46].

Dans la suite de cette section, je décris les résultats principaux de [A3] qui adapte la construction de symétriseurs à des systèmes dispersifs. Pour des raisons de lisibilité j'ai choisi d'énoncer le résultat principal en toute généralité, mais de donner les principales étapes de la preuve sur le cas simple de l'équation de Schrödinger.

1.1.1 Résultat principal

Essentiellement, on montre dans [A3] qu'une classe de problèmes dispersifs avec des conditions au bord qui satisfont la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme est bien posée dans des espaces de type H^s à poids en temps.

Il faut trois briques pour énoncer le théorème : opérateurs étudiés, multiplicateurs de Fourier-Laplace tangentiels et espaces de Sobolev à poids en temps.

Définition 1.1 (Classe d'opérateur). *On considère des variables $(\tau, \Xi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^d$. Pour $p > 1$ entier, le p -degré d'un monôme $\tau^k \Xi^\alpha$ est $kp + |\alpha|$. Le p -degré d'un polynôme est le plus grand p degré de ses monômes. Un polynôme est p -homogène si tous ses monômes ont même p degré. La p -partie principale est la somme des monômes de p -degré maximal. Pour un opérateur différentiel matriciel de taille $n \times n$*

$$P(D, \partial_t) = \sum_{0 \leq k \leq m} \sum_{0 \leq |\alpha| \leq p(m-k)} A_{\alpha, k} \partial_t^k D^\alpha. \quad (4)$$

avec $A_{0, m}$ inversible, $A_{0, \dots, 0, mp, 0}$ inversible (bord non caractéristique), l'opérateur est dit strictement dispersif lorsque

- Les racines en τ de $\chi_P(\tau, \Xi) = \det(P(i\Xi, \tau))$ sont imaginaires pures pour $\Xi \in \mathbb{R}^d$.
- Les racines en τ de la p -partie principale de $\chi_P(\tau, \Xi)$ sont imaginaires pures et distinctes pour $\Xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Cette notion de quasi-homogénéité apparaît dès les années 70 dans des travaux de Gindikin et Volevic [124], sous une forme moins générale.

Définition 1.2 (multiplicateur tangentiels). *On appelle multiplicateur de Fourier-Laplace tangentiel un opérateur $M(\nabla_x/i, \partial_t)$ défini par l'action de son symbole $m(\xi, \tau)$*

$$\widehat{Mu}(\xi, y, \tau) = m(\xi, \tau) \widehat{u}(\xi, y, \tau).$$

Le symbole m est défini sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{C}^{++}$, il est dit p -homogène d'ordre s lorsque

$$\forall \lambda > 0, m(\lambda\xi, \lambda^p\tau) = \lambda^s m(\xi, \tau) \quad (5)$$

Il est dit univoque lorsque m est holomorphe en la variable τ .

Remarque 1.1. D'après le théorème de Paley-Wiener, l'action d'un opérateur univoque ne dépend pas de γ (sous des conditions de bornes qu'on ne détaillera pas). Ce n'est évidemment pas le cas en général.

Définition 1.3 (Condition de Kreiss-Lopatinskii). *Soit un problème aux limites*

$$\begin{cases} P(D, \partial_t)u = f, & (x, y, t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_t^+, \\ B(u)(x, t) = h(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t^+. \end{cases}$$

On suppose P de la forme (4), d'ordre mp , strictement dispersif, et que B s'écrit sous la forme

$$\widehat{B}(u)(\xi, \tau) = \sum_{j=0}^{mp-1} b_j(\xi, \tau) \partial_y^j \widehat{u}(\xi, 0, \tau),$$

avec $b_j(\xi, \tau)$ des symboles matriciels p -homogènes d'ordre $mp - 1 - j$ et univoques. $E_{\xi, \tau}^-$ est l'espace stable associé à la partie p -principale de $P(i\xi, \partial_y, \tau)$, Soit $\mathcal{B}(\xi, \tau)$ l'opérateur $(\mathbb{C}^n)^{mp} \mapsto \text{Im}(\mathcal{B})$, $(v_0, \dots, v_{mp-1}) \rightarrow \sum b_j(\xi, \tau)v_j$, on dit que B satisfait la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme lorsque

$$\forall (\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{C}^{++}, \mathcal{B} : E_{\xi, \tau}^- \rightarrow \text{Im}(\mathcal{B}) \text{ est un isomorphisme,}$$

et $\mathcal{B}, \mathcal{B}^{-1}$ sont bornés uniformément sur $\{(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{C}^{++} : |\xi|^p + |\tau| = 1\}$.

On montre (on le verra dans le cas de l'équation de Schrödinger) que $E_{\xi, \tau}^-$ se prolonge continûment sur le compact $\{|\tau| + |\xi|^p = 1, \text{Re}(\tau) \geq 0\}$. Ainsi la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme se ramène à l'inversibilité ponctuelle de \mathcal{B} pour (ξ, τ) dans ce compact.

Définition 1.4 (Espaces fonctionnels). On note $L_\gamma^2 = e^{\gamma t} L^2 = \{u : \|u\|_{L_\gamma^2} := \|e^{-\gamma t} u\|_{L^2} < \infty\}$. Pour $\tau = \gamma + i\delta$, on note $\lambda_p(\xi, \tau) = (|\xi|^p + |\tau|)^{1/p}$, et on définit les espaces de Sobolev anisotropes pour k entier

$$H_\gamma^{k,p}(\mathbb{R}_x^{d-1} \times \mathbb{R}_y^+ \times \mathbb{R}_t) = \left\{ u : \sum_{j=0}^k \iint_{\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_y^+ \times \mathbb{R}} \lambda_p^{2(k-j)}(\xi, \tau) |\partial_y^j \hat{u}(\xi, y, \tau)|^2 d\xi dy d\delta < \infty \right\}.$$

Pour $k \in \mathbb{R}^+$, $H_\gamma^{k,p}(\mathbb{R}_x^{d-1} \times \mathbb{R}_y^+ \times \mathbb{R}_t^+)$ est défini par interpolation/restriction.

Pour $k \in \mathbb{R}$, on définit similairement $H_\gamma^{k,p}(\mathbb{R}_x^{d-1} \times \mathbb{R}_t)$. $H_{0,\gamma}^{k,p}(X \times \mathbb{R}_t^+)$, $X = \mathbb{R}_x^{d-1}, \mathbb{R}_x^{d-1} \times \mathbb{R}_y^+$ est composé des fonctions $H_\gamma^{k,p}$ dont le prolongement par 0 pour $t \leq 0$ est dans $H_\gamma^{k,p}$.

Remarque 1.2. Ces espaces correspondent aux fonctions qui ont k dérivées spatiales et k/p dérivées temporelles dans L_γ^2 . L'espace $H_{0,\gamma}^{k,p}(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_y^+ \times \mathbb{R}_t^+)$ ne coïncide pas avec la fermeture de $C_c^\infty(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_y^+ \times \mathbb{R}_t^{+*})$, c'est par contre le cas pour $H_{0,\gamma}^{k,p}(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t^+)$ sauf dans le cas "critique" $k/p \equiv 1/2[\mathbb{Z}]$ (à cause du même genre d'obstruction que pour l'espace $H_{00}^{1/2}$).

Remarque 1.3. On montre que la trace en $y = 0$ d'une fonction de $H_\gamma^{k,p}(\mathbb{R}_x^{d-1} \times \mathbb{R}_y^+ \times \mathbb{R}_t)$ est dans $H_\gamma^{k-1/2,p}(\mathbb{R}_x^{d-1} \times \mathbb{R}_t)$. L'hypothèse d'homogénéité sur les (b_j) signifie que B agit continûment $H_\gamma^{mp,p} \rightarrow H_\gamma^{1/2,p}$.

Pourtant, du fait de la régularisation dispersive (voir par exemple [74], théorème 4.1), si on cherche une solution $u \in H_\gamma^{mp,p}$, du problème $Pu = 0$, $Bu = h$, l'espace naturel pour h n'est pas $H_\gamma^{1/2,p}$ mais l'espace plus régulier $H_\gamma^{(p+1)/2,p}$. Le théorème ci-dessous détaille cela.

Théorème 1.2 ([A3]). Soit P strictement dispersif de degré mp , on considère le problème

$$\begin{cases} P(D, \partial_t)u = f, & (x, y, t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_y^+ \times \mathbb{R}_t^+, \\ B(u)|_{y=0} = h, & (x, t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+, \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Si B satisfait la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme, alors pour $(h, f) \in H_{0,\gamma}^{k-\frac{p-1}{2},p} \times L^2(\mathbb{R}_y, H_{0,\gamma}^{k,p})$, il existe une unique solution¹ $u \in H_{0,\gamma}^{k+p(m-1),p}$ satisfaisant de plus

$$\gamma \|u\|_{H_{0,\gamma}^{k+p(m-1),p}}^2 + \sum_{j=0}^{mp-1} \|\partial_y^j u|_{y=0}\|_{H_{0,\gamma}^{k+p(m-1)+(p-1)/2-j,p}}^2 \lesssim \frac{\|f\|_{H_{0,\gamma}^{k,p}}^2}{\gamma} + \|h\|_{H_{0,\gamma}^{k-(p-1)/2,p}}^2. \quad (6)$$

1. Les solutions sont définies (comme pour les problèmes hyperboliques) comme satisfaisant un problème dual qui intègre les conditions au bord.

1.1.2 Réécriture du problème et notion de solution

À partir de maintenant on considère uniquement l'équation de Schrödinger (correspondant donc à $p = 2$)

$$\begin{cases} \partial_t u + a \cdot \nabla u + i\Delta u = f, & (x, y, t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ B_1 u|_{y=0} = h, \\ u|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

avec $a = (a_1, \dots, a_d) = (a_x, a_d)$ constant, $B_1 = (B_1^j)_{j=1,2}$ composé de multiplicateurs d'ordre $2 - j$.

On note $\tau = \gamma + i\delta$, et on définit Λ le multiplicateur de symbole $\lambda(\xi, \tau) = (|\xi|^2 + |\gamma + i\delta|)^{1/2}$, $\check{U} = \begin{pmatrix} \Lambda u \\ \partial_y u \end{pmatrix}$, le système se réécrit

$$\begin{cases} \partial_y \check{U} = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda \\ (i\partial_t - \Delta_x + ia_x \cdot \nabla_x)\Lambda^{-1} & ia_d \end{pmatrix} \check{U} + \begin{pmatrix} 0 \\ -if \end{pmatrix} := G\check{U} + \mathfrak{f}, \\ B(\check{U}) = h. \end{cases}$$

avec $B(v_1, v_2) = B_1(\Lambda^{-1}v_1, v_2)$ de sorte que les deux composantes de B sont d'ordre 0. En terme de quasi-homogénéité, l'opérateur G est d'ordre 1, sa partie principale est

$$\begin{pmatrix} 0 & \Lambda \\ (i\partial_t - \Delta_x)\Lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Les solutions sont définies par dualité : en prenant le produit scalaire de $\partial_y \check{U} = G\check{U} + \mathfrak{f}$ avec φ régulière,

$$\int_{\Omega \times \mathbb{R}_t} \mathfrak{f} \cdot \overline{\varphi} dx dy dt = \int_{\Omega \times \mathbb{R}_t} \check{U} \cdot \overline{(-\partial_y \varphi - G^* \varphi)} dx dy dt - \int_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_t} \check{U} \cdot \overline{\varphi} dx dt.$$

On montre alors² l'existence de trois opérateur M, B', M' du type de B tels que

$$\int_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_t} \check{U} \cdot \overline{\varphi} = \int_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_t} B\check{U} \cdot \overline{M\varphi} + M'\check{U} \cdot \overline{B'\varphi} dx dt,$$

ce qui mène naturellement à la définition :

Définition 1.5. On appelle solution du problème aux limites (7) posé sur \mathbb{R}_t une fonction $u \in H_\gamma^{1,2}(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_t)$ telle que pour φ régulière satisfaisant $B'\varphi = 0$

$$\int_{\Omega \times \mathbb{R}_t} \mathfrak{f} \cdot \overline{\varphi} dx dy dt + \int_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_t} h \cdot \overline{M\varphi} dx dt = \int_{\Omega \times \mathbb{R}_t} \check{U} \cdot \overline{(-\partial_y \varphi - G^* \varphi)} dx dy dt.$$

Remarque 1.4. Le problème dual est donc

$$\begin{cases} -\partial_y \varphi = G^* \varphi + \mathfrak{f}_1, \\ B'\varphi = 0. \end{cases}$$

2. Ici on peut prendre $b' = (-\overline{b_2} \quad \overline{b_1})$.

Condition de Kreiss-Lopatinskii On considère le problème avec $f = 0$. Après une transformation de Fourier-Laplace tangentielle, en notant $U = \widehat{U}$

$$\begin{cases} \partial_y U = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ (i\tau + |\xi|^2 - a_x \cdot \xi)\lambda^{-1} & ia_d \end{pmatrix} U = gU, \\ bU = b_1 U_1 + b_2 U_2 = \widehat{h}, \end{cases}$$

avec b_1, b_2 0-homogènes. La partie principale de g est $\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ (i\tau + |\xi|^2)\lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix}$. Par homogénéité, on peut mener les calculs pour $\lambda = 1$: pour $\gamma > 0$, les valeurs propres sont $\mu_{\pm} = \pm\sqrt{i\gamma - \delta + |\xi|^2}$ avec $\sqrt{\cdot}$ la racine définie sur $\{\text{Im}(z) \geq 0\} \rightarrow \mathbb{C}^+$, les vecteurs propres associés sont $V_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_{\pm} \end{pmatrix}$. L'espace stable est $E_{\tau, \xi}^- = \text{vect}(V_-)$, qui se prolonge trivialement en $\text{Re}(\tau) = 0$ par $\text{vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{|\xi|^2 - \delta} \end{pmatrix}$.

Proposition 1.1. *La condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme s'écrit*

$$\forall (\xi, \tau) : |\xi|^2 + |\tau| = 1, \text{Re}(\tau) \geq 0, |BV_-| = |b_1(\xi, \tau) - b_2(\xi, \tau)\sqrt{i\tau + |\xi|^2}| > 0. \quad (\text{KLU})$$

Pour le problème dual, puisque $(L_{\gamma}^2)' = L_{-\gamma}^2$, il est naturel de définir la condition de Kreiss-Lopatinskii "rétrograde" avec les mêmes calculs, mais pour $\tau \in \mathbb{C}^-$.

Proposition 1.2. *La condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme rétrograde pour le problème associé à $-G^*, B'$ est*

$$\forall (\xi, \tau) : |\xi|^2 + |\tau| = 1, \text{Re}(\tau) \leq 0, |B'V'_-| = |\overline{b_2} \text{Ra}(i\tau + |\xi|^2) - \overline{b_1}| > 0, \quad (\text{rKLU})$$

avec Ra la racine définie sur $\text{Im}(z) \leq 0$ à valeur dans $\text{Re}(z) \geq 0$.

Remarque 1.5. Pour $\gamma \geq 0$, $\sqrt{-\delta + i\gamma + |\xi|^2} = \overline{\text{Ra}(-\delta - i\gamma + |\xi|^2)}$, donc le problème adjoint satisfait la condition de Kreiss-Lopatinskii si et seulement si c'est le cas du problème initial. Cette observation est vraie pour les problèmes généraux du paragraphe précédent.

Remarque 1.6. On voit déjà ici les points pathologiques (dits points glancing) : en général $E_{\tau, \xi}^- \oplus E_{\tau, \xi}^+ = \mathbb{C}^2$, sauf si $\gamma = 0, |\xi|^2 - \delta = 0$ les vecteurs propres dégénèrent avec $V_- = V_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.1.3 Construction des symétriseurs

Contrairement au cas des systèmes hyperboliques, les symétriseurs ne satisfont pas $sg \gtrsim \gamma$, on peut le comprendre facilement en regardant ce qui se passe en dimension 1 avec $a = 0$. La matrice g devient simplement $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i(\gamma + i\delta) & 0 \end{pmatrix}$ elle se diagonalise en $d = \begin{pmatrix} -\sqrt{i\gamma - \delta} & 0 \\ 0 & \sqrt{i\gamma - \delta} \end{pmatrix}$ avec $\sqrt{\cdot} : \text{Im}(z) > 0 \rightarrow \text{Re}(z) > 0$. Pour rendre sa partie symétrique positive on utilise le symétriseur $s = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui donne $\text{Re}(sd) = \begin{pmatrix} \text{Re}(\sqrt{i\gamma - \delta}) & 0 \\ 0 & \text{Re}(\sqrt{i\gamma - \delta}) \end{pmatrix}$ mais dans la limite $\delta \rightarrow +\infty$,

$$\text{Re}(\sqrt{i\gamma - \delta}) \sim_{+\infty} \frac{\gamma}{2\sqrt{\delta}}.$$

Proposition 1.3. *Notons $b = (b_1 \ b_2)$. Pour γ assez grand, il existe une matrice $s(\xi, \tau)$ hermitienne, $C > 0$ telle que*

$$\forall (\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \{Re(\tau) \geq \gamma\}, \quad Re(sg) \gtrsim \frac{Re(\tau)}{\lambda(\xi, \tau)}, \quad (8)$$

$$s(\xi, \tau) \geq I - Cb^*b, \quad (9)$$

où $Re(M) = (M + M^*)/2$, et les constantes sont indépendantes de ξ, τ .

L'intérêt d'un symétriseur est bien sûr l'estimation a priori suivante, qu'on obtient directement par intégration de $\lambda^{2k-1} s \partial_y U \cdot U = \lambda^{2k-1} s g U \cdot U + \lambda^{2k-1} s U \cdot \hat{f}$.

Corollaire 1.1. *Pour $k \in \mathbb{R}^+$, φ régulière, nulle pour $t \leq 0$, on a*

$$\gamma \|\varphi\|_{H_{0,\gamma}^{k,2}(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_t)}^2 + \|(\Lambda \varphi|_{y=0}, \partial_y \varphi|_{y=0})\|_{H_{0,\gamma}^{k-1/2,2}}^2 \lesssim \frac{\|(\partial_t + a \cdot \nabla + i\Delta)\varphi\|_{H_{0,\gamma}^{k,2}}^2}{\gamma + \|B\varphi\|_{H_{0,\gamma}^{k-1/2,2}}^2}. \quad (10)$$

La construction de symétriseurs est essentiellement un problème d'algèbre. Elle contient deux difficultés, à des niveaux très différents : dans le cas général, il y a des questions de géométrie des zéros de polynômes à plusieurs variables, et une fois ces points clarifiés il reste de l'analyse matricielle plus élémentaire, mais non triviale. Le cas de l'équation de Schrödinger a bien sûr le mérite de permettre de se concentrer sur la seconde partie, puisque tous les calculs de la première partie se font par quadrature. C'est pourquoi j'ai choisi d'inclure une description détaillée de la construction de symétriseurs dans ce cas, non seulement pour convaincre de sa nature élémentaire, mais aussi car la construction montre comment les résultats s'étendent au cas de coefficients variables.

Posons $\varepsilon = 1/\lambda$, on peut réécrire

$$g = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{i\tau}{\lambda^2} + \left(\frac{|\xi|}{\lambda}\right)^2 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a_x \cdot \frac{\xi}{\lambda} \varepsilon & ia_d \varepsilon \end{pmatrix} = \lambda(g_h + \varepsilon g_r), \quad (11)$$

avec $g_h(r\xi, r^2\tau) = g_h(\xi, \tau)$ quasi-homogène. En utilisant les coordonnées $(\xi, \tau) \rightarrow (\xi/\lambda, \tau/\lambda^2, 1/\lambda)$ on se ramène par homogénéité à construire un symétriseur pour $\lambda = 1$ et $\varepsilon \leq 1/\gamma \ll 1$. Il s'agit donc de construire s tel que

$$\forall (\xi, \tau, \varepsilon) \in \{|\xi|^2 + |\tau| = 1\} \times [0, \varepsilon_0], \quad Re(sg) \gtrsim Re(\tau).$$

En $(\xi_0, \tau_0, 0)$, il y a trois cas :

- Point elliptique $Re(\tau_0) > 0$ ou $|\xi_0|^2 - \delta_0 > 0$, alors il existe deux valeurs propres de parties réelles opposées et g est diagonalisable,
- Point hyperbolique $Re(\tau_0) = 0$ et $|\xi_0|^2 - \delta_0 < 0$, alors il existe deux valeurs propres imaginaires pures et g est diagonalisable,
- Point glancing $Re(\tau_0) = 0$, et $|\xi_0|^2 - \delta_0 = 0$, alors $g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, bloc de Jordan.

En un point elliptique, il suffit de diagonaliser $g = P^{-1}\text{diag}(\mu_-, \mu_+)P$ et de prendre $s = P^*\text{diag}(-1, \kappa)P$, κ grand. En effet pour $u = a_+V_+ + a_-V_-$, V_+, V_- vecteurs propres, on a facilement d'après (KLU) $|u|^2 \leq C(|b \cdot u|^2 + |a_+|^2)$, et

$$\begin{aligned} \langle su, u \rangle &= \kappa|a_+|^2|V_+|^2 - |a_-|^2|V_-|^2 \geq \frac{\kappa}{C}|u|^2 - |a_-V_-|^2 - \kappa|b \cdot u|^2 \geq |u|^2 - C'|b \cdot u|^2, \\ \text{Re}(sg) &= P^*\text{diag}(\text{Re}(-\mu_-), \kappa\text{Re}(\mu_+))P > 0. \end{aligned}$$

En un point hyperbolique, $g = P^{-1}\text{diag}(\mu_1, \mu_2)P$, on vérifie sur les formules que pour $\text{Re}(\tau) > 0$ les deux valeurs propres deviennent de parties réelles opposées, avec disons $\text{Re}(-\mu_1) \gtrsim \gamma$, $\text{Re}(\mu_2) \gtrsim \gamma$. On peut alors appliquer le même raisonnement.

En un point glancing, $\tau_0 = i|\xi_0|^2$, $\varepsilon_0 = 0$, on fait un premier changement de base pour $(\xi, \gamma + i\delta, \varepsilon)$ au voisinage de $(\xi_0, \tau_0, 0)$, en posant $e'_1 = -ig(\xi, \tau, \varepsilon)e_2$, $e'_2 = e_2$ ce qui transforme g en

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ia_d\varepsilon & 0 \\ -i(|\xi|^2 - \delta - a_x \cdot \varepsilon\xi) & 0 \end{pmatrix} := N + \gamma D + R,$$

avec N nilpotente, D au coefficient inférieur gauche réel non nul, et R une matrice de reste à coefficients imaginaires purs. C'est la fameuse structure par blocs mise en évidence par Majda-Osher [93] pour les problèmes hyperboliques, voir aussi Majda [92].

À ce stade la construction d'un symétriseur suit celle de Kreiss [77]

$$s = \begin{pmatrix} 0 & e_1 \\ e_1 & e_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & ic \\ -ic & 0 \end{pmatrix} = E + F + \gamma A, \quad c \in \mathbb{R}.$$

On voit que pour $e_1, e_2 > 0$, $f = a_d\varepsilon e_1 - e_2(|\xi|^2 - \delta - a_x \cdot \xi\varepsilon)$,

$$\begin{aligned} \text{Re}((E + F)(N + R)) &= 0, \quad \text{Re}(ED + AN) = \begin{pmatrix} e_1 & e_2/2 \\ e_2/2 & c \end{pmatrix}, \\ \Rightarrow \text{Re}(s\tilde{g}) &= \text{Re}((E + F + \gamma A)(N + \gamma D + R)) = \gamma \begin{pmatrix} e_1 & e_2/2 \\ e_2/2 & c \end{pmatrix} + o(\gamma). \end{aligned}$$

Pour c assez grand (par exemple e_2^2/e_1) et un voisinage assez petit, on a bien $\text{Re}(sg) \gtrsim \gamma$, c'est à dire (8).

Enfin, la condition de Kreiss-Lopatinskii en un point glancing est $|b_1| > 0$, donc pour $u \in \mathbb{C}^2$, $b^*bu \cdot u \geq \alpha|u_1|^2 - \beta|u_2|^2$. Quitte à rétrécir le voisinage de $(\xi_0, \delta_0, 0)$ et augmenter e_2 on trouve (9)

$$\begin{aligned} su \cdot u &= e_2|u_2|^2 + 2\text{Re}(e_1u_1\bar{u}_2 + ic\gamma u_2\bar{u}_1) + f|u_1|^2 \geq \frac{e_2}{2}|u_2|^2 - |u_1|^2 \\ &\geq \frac{e_2}{4}|u|^2 - \frac{1}{\alpha}b^*bu \cdot u. \end{aligned}$$

Vers les problèmes à coefficients variables Si maintenant a est une fonction régulière de (x, t) , on peut toujours définir formellement la matrice $g(\xi, \tau, x, t) = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{i\tau + |\xi|^2 - a_x \cdot \xi}{\lambda^2} & \frac{a_d}{\lambda} \end{pmatrix}$ et la construction précédente fournit $s(\xi, \tau, x, t)$ aussi régulier que a . Il est donc naturel de définir S, G comme des opérateurs pseudo-différentiels (anisotropes, comme dans [80] ou plus

récemment [120]). Sans chercher à lui donner un sens précis, notons Op l'application qui à un symbole associe un opérateur. Cette approche n'est fructueuse que si on a une inégalité de Gårding pour $Op(\text{Re}(sg))$. La difficulté est que sg est formellement d'ordre 1 alors que le minorant γ/λ est d'ordre -1 . En reprenant (11), on voit que $G = G_1 + G_0$ est la somme d'un opérateur quasi-homogène d'ordre 1 *indépendant de* (x, t) et d'un opérateur d'ordre 0. De même, on voit que $s = s_0 + s_{-1}$. On a donc

$$\text{Op}(s) \circ G = \text{Op}(s_0 g_1) + \text{Op}(s_{-1}) \circ G + \text{Op}(s_0) \circ G_1.$$

L'estimation d'énergie s'obtient par une partition des fréquences : au voisinage d'un point hyperbolique ou glancing, $\text{Re}(s_0 g_1) = 0$ de sorte que l'opérateur est en fait d'ordre 0 et on peut utiliser après localisation une inégalité de Gårding précisée (à paramètre, voir par exemple [17] appendice C.2 dans le cas isotrope). Au voisinage d'un point elliptique la situation est encore plus favorable puisque $\text{Re}(sg) \gtrsim \lambda$, on peut donc utiliser des estimées elliptiques.

Remarque 1.7. Le point clé est l'identité $\sigma(\text{Op}(s_0)\text{Op}(g_1)) = \text{Op}(s_0 g_1)$ vraie seulement parce que s_0, g_1 sont indépendants de x, t et les coefficients variables apparaissent sur des termes d'ordre inférieur. Cette approche échoue donc par exemple avec un laplacien à coefficients variables, en particulier elle ne permet pas de passer à des problèmes posés sur des domaines plus généraux par redressement du bord.

1.1.4 Quelques mots sur le problème mixte

Pour revenir au cas général, le problème mixte a la forme

$$\begin{cases} P(D, \partial_t)u = f, & (x, y, t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_t^+, \\ B(u) = B(u|_{y=0}, \partial_y u|_{y=0}, \dots, \partial_y^{mp-1} u|_{y=0}) = h, & (x, t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+, \\ u|_{t=0} = u_0, \partial_t u|_{t=0} = u_1, \dots, \partial_t^{m-1} u|_{t=0} = u_{m-1}. \end{cases}$$

L'estimée de base (6) pour le problème avec données initiales nulles est

$$\gamma \|u\|_{H_\gamma^{p(m-1), p}} + \sum_{j=0}^{mp-1} \|\partial_y^j u\|_{y=0} \Big|_{H_\gamma^{p(m-1) + \frac{p-1}{2} - j, p}} \lesssim \|Pu\|_{L_\gamma^2} + \|B(u)\|_{H_\gamma^{-\frac{p-1}{2}, p}}. \quad (12)$$

Le coeur de la difficulté pour résoudre le problème mixte est d'obtenir une estimation ponctuelle en temps lorsque $(u_j)_{0 \leq j \leq m-1} = 0$. En notant $\Omega_T = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_y^+ \times [0, T]$, on définit les espaces $H^{s,p}(\Omega_T)$, $H^{s,p}(\partial\Omega_T)$ par restriction. Comme on travaille sur des intervalles de temps bornés, on ne se préoccupe pas dans cette partie de la dépendance en γ et on utilise les espaces de Sobolev sans poids.

Lemme 1.1. *La solution du problème aux limites à données initiales nulles satisfait*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m-1} \|\partial_t^k u(t)\|_{H^{p(m-k-1)}(\Omega)} + \|u\|_{H^{mp-1, p}(\Omega_T)} + \sum_{j=0}^{mp-1} \|\partial_y^j u|_{y=0}\|_{H^{p(m-1) + \frac{p-1}{2} - j, p}(\partial\Omega_T)} \\ \lesssim \|Pu\|_{L^2(\Omega_T)} + \|B(u)\|_{H^{-\frac{p-1}{2}, p}(\partial\Omega_T)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Une procédure de dualité classique (mais non triviale voir Rauch [111], ou [A3] pour l'équation de Schrödinger) permet alors de montrer que le problème aux limites mixte admet une

unique solution satisfaisant (13). Par ailleurs la méthode de Rauch permet de se ramener à obtenir l'estimation pour des équations scalaires (l'observation clé étant qu'en multipliant le système par la transposée de la comatrice de P , on obtient le système diagonal $\det(P)u = \text{comat}(P)^t f$).

Au vu de l'estimée (12) obtenue grâce aux symétriseurs de Kreiss³, les termes à gauche dans (13) sont déjà contrôlés, à l'exception du premier, il s'agit donc essentiellement de prouver

$$\sum_{j=0}^{m-1} \|\partial_t^j u(t)\|_{H^{p(m-j-1)}} \lesssim \|Pu\|_{L^2(\Omega_T)} + \|u\|_{H^{p(m-1),p}(\Omega_T)} + \sum_{j=0}^{mp-1} \|\partial_y^j u|_{y=0}\|_{H^{p(m-1)+\frac{p-1}{2}-j,p}(\partial\Omega_T)}, \quad (14)$$

dans le cas d'une équation scalaire.

Une preuve complète (estimée ponctuelle et construction par dualité) dans le cas spécial de l'équation de Schrödinger est incluse dans [A3], mais à l'époque je n'avais pas prouvé l'estimée (13) dans le cas général. Ce mémoire est l'occasion de revenir sur ce problème. Pour simplifier la présentation, on fait les hypothèses suivantes :

Hypothèses de simplification

[A1] On suppose le problème scalaire.

[A2] On suppose que P est p -homogène, strictement dispersif à coefficients constants.

On peut toujours se ramener à [A1] en appliquant à Pu l'opérateur différentiel $\text{comat}(P)^t$, on en retire une matrice diagonale. Rappelons que dans le contexte " p -homogène" l'ordre d'un opérateur différentiel est celui obtenu en comptant qu'une dérivée en temps vaut p dérivée ($p = 2$ pour l'équation Schrödinger, 3 pour KdV). La méthode de Leray-Gårding consiste à utiliser le "bon multiplicateur" $(\partial_\tau P)(\partial_t, D)u$ avec $\partial_\tau P$ l'opérateur différentiel de symbole $\partial_\tau P(\tau, i\xi)$.

Lemme 1.2. *Pour $\varphi \in C^m([0, T])$, on a*

$$\text{Re}(P(i\xi, \partial_t)\varphi \overline{\partial_\tau P(i\xi, \partial_t)\varphi}) = \partial_t Q(\varphi),$$

avec Q une forme quadratique en $(\partial_t^n \varphi)_{0 \leq n \leq m-1}$ satisfaisant l'estimation ponctuelle

$$Q(\varphi) \gtrsim \sum_{n=0}^{m-1} |\xi|^{2p(m-n-1)} |\partial_t^n \varphi|^2. \quad (15)$$

Démonstration. Par hypothèse, $P = \prod_{k=1}^m (\partial_t - i\lambda_k(\xi))$ où les λ_j sont réels, distincts deux à deux, et homogènes de degré p . Ainsi

$$2\text{Re}(P(i\xi, \partial_t)u \overline{\partial_\tau P(i\xi, \partial_t)u}) = \sum_{n=1}^m \partial_t \left| \prod_{k \neq n} (\partial_t - i\lambda_k)u \right|^2.$$

La famille $(\prod_{k \neq n} (X - i\lambda_k))_{1 \leq k \leq m}$ étant une base de $\mathbb{C}_{m-1}[X]$, on obtient par un argument d'homogénéité

$$\sum_{n=1}^m \left| \prod_{k \neq n} (\partial_t - i\lambda_k)u \right|^2 \gtrsim \sum_{j=0}^{m-1} |\xi|^{2p(m-j-1)} |\partial_t^j u|^2.$$

□

3. Ou plutôt un de ses avatars sur l'intervalle de temps $[0, T]$

Si le problème était posé sur \mathbb{R}^d (ou si u se prolongeait régulièrement par 0 sur Ω^c) on déduirait directement du lemme l'estimation attendue. Ici on commence par montrer

$$\operatorname{Re}(P(D, \partial_t)u \overline{\partial_\tau P(D, \partial_t)u}) = \partial_t Q_0((\partial_t^n u)_{0 \leq n \leq m-1}) + \sum_{l=1}^d \partial_l Q_l((\partial_t^n u)_{0 \leq n \leq m-1}), \quad (16)$$

$$\text{avec } Q_0((\varphi_n)) = \sum_{kp+|\alpha|=jp+|\beta|=p(m-1)} a_{\alpha,\beta,k,j}^0 \partial^\alpha \varphi_k \overline{\partial^\beta \varphi_j}, \quad (17)$$

$$\forall 1 \leq l \leq d, Q_l((\varphi_n)) = \sum_{\substack{kp+|\alpha|, jp+|\beta| \leq pm-1 \\ kp+jp+|\alpha|+|\beta|=p(2m-1)-1}} a_{\alpha,\beta,k,j}^l \partial^\alpha \varphi_k \overline{\partial^\beta \varphi_j}, \quad (18)$$

$$(19)$$

$$\exists C : \forall (\varphi_n)_{0 \leq n \leq m-1} \in (C_c^\infty(\Omega))^m, \int_{\Omega} Q_0((\varphi_n)) dx dy \geq \frac{1}{C} \sum_{n=0}^{m-1} \|\varphi_n\|_{H^{p(m-1-n)}(\Omega)}^2 - C \sum_{n=0}^{m-2} \|\varphi_n\|_{L^2}^2, \quad (20)$$

avec des coefficients $a_{\alpha,\beta,k,j}^l$ sans importance. Au vu du lemme 1.2, l'inégalité (20) est automatique si (16) est vraie. Pour obtenir cette forme, on remarque d'abord que $P(i\xi, \partial_t) = \sum \partial_t^k c_{\alpha,k} i^{|\alpha|} \xi^\alpha = \prod (\partial_t - i\lambda_j)$, donc $c_{\alpha,k} \in i^{k+|\alpha|-m} \mathbb{R}$. On utilise la notation unifiée $\partial_t = \partial_0$, plus pratique. Pour un multi-indice $(\alpha_0, \dots, \alpha_d)$, on pose $d(\alpha) = p\alpha_0 + \sum_1^d \alpha_l$. Tous les termes dans $\operatorname{Re}(P(D, \partial_t)u \overline{\partial_\tau P(D, \partial_t)u})$ sont de la forme

$$a \partial^\alpha u \partial^\beta \bar{u} + \bar{a} \partial^\alpha \bar{u} \partial^\beta u, \quad d(\alpha) = pm, \quad d(\beta) = p(m-1), \quad a \in i^{|\beta|+|\alpha|-1} \mathbb{R}.$$

On utilise alors itérativement l'identité $(\partial_j f)g = \partial_j(fg) - f\partial_j g$, de façon à obtenir en exactement $|\alpha - \beta|$ itérations

$$a \partial^\alpha u \overline{\partial^\beta u} = \sum_{j=0}^d \partial_j Q_j^{\alpha,\beta}(u) + (-1)^{|\alpha-\beta|} a \partial^\beta u \overline{\partial^\alpha u}.$$

avec (Q_j) comme dans (17),(18). Comme $|\alpha - \beta|$ a la même parité que $|\alpha| + |\beta|$ et $a \in i^{|\alpha|+|\beta|-1} \mathbb{R}$ on conclut

$$a \partial^\alpha u \overline{\partial^\beta u} + \bar{a} \partial^\alpha \bar{u} \partial^\beta u = \sum_{j=0}^d \partial_j Q_j^{\alpha,\beta}(u) + ((-1)^{|\alpha-\beta|} a + \bar{a}) \partial^\beta u \overline{\partial^\alpha u} = \sum_{j=0}^d \partial_j Q_j^{\alpha,\beta}(u).$$

On peut maintenant terminer la preuve.

Démonstration du lemme 1.1. On rappelle que $\Omega_t = \Omega \times [0, t]$, $\partial\Omega_t = \partial\Omega \times [0, t]$, on notera la norme des traces

$$\mathcal{T}(u) = \sum_{j=0}^{mp-1} \|\partial_y^j u|_{y=0}\|_{H^{p(m-1)+\frac{p-1}{2}-j,p}(\partial\Omega_t)}.$$

D'une part pour $t \leq T$

$$\int_{\Omega_t} \operatorname{Re}(Pu(s) \overline{(\partial_\tau P)u(s)}) dx dy ds \lesssim \|Pu\|_2 \|u\|_{H^{p(m-1),p}(\Omega_T)}, \quad (21)$$

d'autre part

$$\int_{\Omega_t} \operatorname{Re}(Pu(s)\overline{(\partial_\tau P)u(s)}) dx dy ds = \int_{\Omega} Q_0(u)(t) dx dy - \int_{\partial\Omega_t} Q_d(u) dx dt. \quad (22)$$

Les fonctions $\partial_t^n u(t)$ ne sont pas nulles au bord, mais les traces sont contrôlées

$$\forall 0 \leq n \leq m-2, \quad r < p(m-1-n), \quad \|\partial_t^n \partial_y^r u(t)|_{y=0}\|_{H^{p(m-1-n)-\frac{1}{2}-r}(\partial\Omega)} \lesssim \mathcal{T}(u).$$

Pour $0 \leq n \leq m-1$ on fixe $u_n \in H^{p(m-1-n)}(\Omega)$ un relèvement associé à $(\partial_t^n \partial_y^r u(t)|_{y=0})_{0 \leq r < p(m-1-n)}$, avec la convention $u_{m-1} = 0$, on a d'après la théorie classique des traces

$$\|u_n\|_{H^{p(m-1-n)}(\Omega)} \lesssim \mathcal{T}(u).$$

Pour $0 \leq n \leq m-1$, $\partial_t^n u(t) - u_n \in H_0^{p(m-1-n)}$ donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Q_0((\partial_t^n u(t))) dx dy &= \int_{\Omega} Q_0((\partial_t^n u(t) - u_n) + (u_n)) dx dy \\ &\geq \frac{1}{C} \sum_0^{m-1} \|\partial_t^n u(t) - u_n\|_{H^{p(m-1-n)}}^2 - C \sum_0^{m-2} \|\partial_t^n u(t) - u_n\|_{L^2}^2 \\ &\quad - C \left(\sum_0^{m-1} \|\partial_t^n u(t) - u_n\|_{H^{p(m-1-n)}} + \|u_n\|_{H^{p(m-1-n)}} \right) \left(\sum_{n=0}^{m-1} \|u_n\|_{H^{p(m-1-n)}} \right) \\ &\geq \frac{1}{2C} \sum_0^{m-1} \|\partial_t^n u(t)\|_{H^{p(m-1-n)}}^2 - C'(\mathcal{T}(u) + \|u\|_{H^{p(m-1),p}}^2), \end{aligned} \quad (23)$$

où on a entre autre utilisé l'estimée de trace $\|\partial_t^n u(t)\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|u\|_{H^{p(m-1),p}(\Omega_T)}$ pour $n < m-1$. Pour les termes de bord génériques (voir (17)), on utilise la notation $\alpha = (\alpha', \alpha_d)$,

$$\left| \int_{\partial\Omega_t} \partial_t^k \partial_y^\alpha u|_{y=0} \overline{\partial_t^j \partial_y^\beta u|_{y=0}} dx dt \right| \lesssim \|\partial_y^{\alpha_d} u|_{y=0}\|_{H^{s+|\alpha'|+kp,p}} \|\partial_y^{\beta_d} u|_{y=0}\|_{H^{-s+|\beta'|+jp,p}},$$

sous réserve que $|s| < p/2$. Le choix (licite) $s = p(m-1) + \frac{p-1}{2} - pk - |\alpha|$ donne

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Omega_t} \partial_t^k \partial_y^\alpha u|_{y=0} \overline{\partial_t^j \partial_y^\beta u|_{y=0}} dx dt \right| &\lesssim \|\partial_y^{\alpha_d} u|_{y=0}\|_{H^{p(m-1)+\frac{p-1}{2}-\alpha_d,p}} \|\partial_y^{\beta_d} u|_{y=0}\|_{H^{p(m-1)+\frac{p-1}{2}-\beta_d,p}} \\ &\lesssim \mathcal{T}(u)^2. \end{aligned}$$

En sommant, $|\int_{\partial\Omega_t} Q_d(u) dx dt| \lesssim \mathcal{T}(u)^2$, cette inégalité en conjonction avec (21),(22), (23) et l'estimation obtenue grâce aux symétriseurs de Kreiss (12) termine la preuve. \square

1.2 Résolution directe pour l'équation de Schrödinger

On garde la convention précédente sur les variables d'espace $(x, y) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$, $\Delta = \Delta_x + \partial_y^2$. Pour résoudre

$$\begin{cases} \partial_t u + i\Delta u = f, & (x, y, t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_y^+ \times \mathbb{R}_t^+, \\ u|_{t=0} = u_0, \\ B(u)|_{y=0} = g, \end{cases} \quad (24)$$

on peut naturellement découpler en un problème de Cauchy et un problème aux limites pur

$$\begin{cases} \partial_t v + i\Delta v = \tilde{f}, & (x, y, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_t^+, \\ v|_{t=0} = \tilde{u}_0, \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} \partial_t w + i\Delta w = 0, & (x, y, t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_t^+, \\ w|_{t=0} = 0, \\ B(w)|_{y=0} = g - B(v)|_{y=0}. \end{cases} \quad (26)$$

avec \tilde{u}_0, \tilde{f} des prolongements réguliers de u_0, f . Par transformée de Fourier(-Laplace), comme on l'a vu à la section précédente il est assez simple d'obtenir des formule explicites, bien sûr le coeur du problème est ensuite d'obtenir des estimées sur ces formules.

En dimension 1, on peut citer Fokas-Himonas [45], Bona-Sun-Zhang [24], qui se limitent aux conditions au bord type Dirichlet ou Neumann. La régularité naturelle des données au bord est bien comprise : pour le problème de Cauchy l'effet régularisant dit de Kato (voir [74]) donne l'estimée optimale

$$\|e^{-it\partial_y^2} u_0|_{y=0}\|_{\dot{H}^{s/2+1/4}(\mathbb{R}_t)} \lesssim \|u_0\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}_y)}, \quad (27)$$

la régularité canonique avec données de Dirichlet est donc

$$(u_0, g) \in H^s(\mathbb{R}_y) \times H^{s/2+1/4}(\mathbb{R}_t).$$

Elle est cohérente avec les estimées obtenues par la méthodes de symétriseurs (voir (6) avec $p = 1, m = 2$).

En dimension supérieure, les estimées de trace pour le problème de Cauchy sont moins pratiques et font apparaître un espace de Bourgain qu'on notera par la suite \mathcal{H}^s (défini au paragraphe 1.2.1). Elles se lisent comme en dimension 1

$$\|e^{it\Delta} u|_{y=0}\|_{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^{d-1})} \lesssim \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_y)}. \quad (28)$$

Le premier article à travailler dans ce cadre fonctionnel est dû à Ran-Sun-Zhang [110] (voir aussi l'effet régularisant classique pour le problème de Cauchy [85] section 4.3). Il traite l'équation de Schrödinger en dimension 2 avec données au bord de Dirichlet $B(u) = u|_{y=0}$. La régularité des données au bord y est exactement celle attendue au vu des estimées de trace pour les solutions du problème de Cauchy, et la solution construite satisfait des estimations de Strichartz locales en temps.

Je décris ici les résultats de [A11] qui améliore [110] aux niveaux suivants :

- Le problème est traité en toute dimension (la différence entre $d = 2$ et d quelconque est cependant anecdotique),
- On traite toute condition au bord qui satisfait la condition de Kreiss-Lopatinskii,
- Les estimations de Strichartz sont globales en temps,
- Dans le cas des conditions aux limites de Dirichlet, on résout le problème avec les conditions de compatibilité naturelles,
- Le contrôle du terme de forçage f utilise un argument de dualité qui simplifie significativement [110].

Par ailleurs l'intérêt par rapport à **[A3]** est évidemment les estimations de Strichartz, mais plus subtilement la condition de Kreiss-Lopatinskii dégagée est moins restrictive : rappelons que la condition de Lopatinskii uniforme (KLU) est

$$\forall (\xi, \tau) \in (\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{C}^+) \setminus \{0\} : c \leq |b_1 - b_2 \sqrt{i\tau + |\xi|^2}| \leq \frac{1}{c}, \quad (29)$$

avec b_1, b_2 homogènes d'ordre respectif 1 et 0. Dans **[A11]** c'est exactement la même, mais avec b_1, b_2 d'ordre respectif 0 et -1 . Cette différence n'est absolument pas anecdotique, car elle permet d'inclure la condition de Neumann $b_1 = 0$, $b_2 = (i\tau + |\xi|^2)^{-1/2}$ et "transparente" $b_1 = 1$, $b_2 = -(|\xi|^2 + i\tau)^{-1/2}$ (voir par exemple Antoine-Besse [3]).

Les deux principaux théorèmes distinguent le cas des conditions aux limites de Dirichlet du cas général. Comme ce dernier utilise des opérateurs non locaux je ne sais pas actuellement quelles seraient les conditions de compatibilité naturelle.

Théorème 1.3 (**[A11]**). *Si B satisfait la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme, pour $s \in [0, 2]$, et $2/p_1 + d/q_1 = d/2$, $p_1 > 2$,*

$$(u_0, f, g) \in H_0^s(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+) \times (L^{p_1}(\mathbb{R}_t^+, B_{q_1,2}^s) \cap B_{p_1,2}^s(\mathbb{R}_t^+, L^{q_1})) \times \mathcal{H}_0^s(\mathbb{R}^+),$$

(si $s = 1/2$, $(u_0, g) \in H_{00}^{1/2} \times \mathcal{H}_{00}^{1/2}$), alors le problème (24) a une unique solution $u \in C(\mathbb{R}^+, H^s)$, et pour (p, q) avec $p > 2$, $\frac{2}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2}$, elle satisfait

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}_t^+, B_{q,2}^s) \cap B_{p,2}^{s/2}(\mathbb{R}_t^+, L^q)} \lesssim \|u_0\|_{H^s} + \|f\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}_t^+, B_{q_1,2}^s) \cap B_{p_1,2}^{s/2}(\mathbb{R}_t^+, L^{q_1})} + \|g\|_{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}_t^+)}.$$

Les solutions sont causales, au sens où pour $t > 0$, si $(u_i)_{i=1,2}$ sont des solutions de données (u_0, f_i, g_i) avec $f_1|_{[0,t]} = f_2|_{[0,t]}$, $g_1|_{[0,t]} = g_2|_{[0,t]}$, alors $u_1|_{[0,t]} = u_2|_{[0,t]}$.

Remarque 1.8. Les solutions de basse régularité, pour lesquelles $u|_{y=0}$ n'a pas de sens, sont définies comme des limites de solutions régulières, avec une suite de données $(u_{0,n}, f_n, g_n)$ convergeant vers (u_0, f, g) .

Dans ce premier résultat, les conditions de compatibilité sont dites triviales : les données sont plates dans le coin $y = t = 0$. Dans le cas des conditions de Dirichlet, l'existence d'une solution $C_t H^s$, $s > 1/2$ requiert

$$g|_{t=0} = u|_{t=y=0} = u_0|_{y=0}. \quad (30)$$

On montre que si $s > 1/2$, la trace $g|_{t=0}$ a aussi du sens si $g \in \mathcal{H}^s$. Pour $s < 1/2$ il n'y a besoin d'aucune condition de compatibilité. Enfin pour le cas critique $s = 1/2$ la trace n'est pas définie, mais il y a une condition de compatibilité non locale (voir (32) p.17) dans l'esprit de l'espace de Lions-Magenes $H_{00}^{1/2}(\mathbb{R}^+)$, ensemble des fonctions $H^{1/2}(\mathbb{R}^+)$ dont le prolongement par 0 est $H^{1/2}(\mathbb{R})$.

La version du théorème 1.3 avec conditions de compatibilité se lit ainsi :

Théorème 1.4 (**[A11]**). *Si $B(u) = u|_{y=0}$, pour $s \in [0, 2]$, $\frac{2}{p_1} + \frac{d}{q_1} = \frac{d}{2}$, $p_1 > 2$,*

$$(u_0, f, g) \in H^s(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+) \times (L^{p_1}(\mathbb{R}_t^+, B_{q_1,2}^s) \cap B_{p_1,2}^s(\mathbb{R}_t^+, L^{q_1})) \times \mathcal{H}^s(\mathbb{R}_t^+),$$

satisfaisant la condition de compatibilité (31) si $s > 1/2$, (32) si $s = 1/2$, alors (24) a une unique solution $u \in C(\mathbb{R}_t^+, H^s)$. Pour $p > 2$, $\frac{2}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2}$ elle satisfait

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}_t^+, B_{q,2}^s) \cap B_{p,2}^{s/2}(\mathbb{R}_t^+, L^q)} \lesssim \|u_0\|_{H^s} + \|f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}_t^+, B_{q',2}^s) \cap B_{p',2}^s(\mathbb{R}_t^+, L^{q'})} + \|g\|_{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}_t^+)}.$$

Les espaces \mathcal{H}^s sont décrits au paragraphe 1.2.1, les conditions de compatibilité au paragraphe 1.2.2, enfin au paragraphe 1.2.3 on donne une idée rapide de la construction de solutions, en se limitant aux apports spécifiques de [A11] par rapport à [110].

1.2.1 Trace du problème de Cauchy ; les espaces \mathcal{H}^s

Définition 1.6. On définit

$$\|g\|_{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t)}^2 = \int_{\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}} \sqrt{|\xi|^2 - \delta} (1 + |\xi|^2 + |\delta|)^s |\widehat{g}(\xi, \delta)|^2 d\xi d\delta,$$

qui est un espace inclus dans \mathcal{S}' , et s'identifie pour $s \geq 0$ à

$$\{g : e^{it\Delta_x} g \in \dot{H}^{s/2+1/4}(\mathbb{R}_t, L^2) \cap \dot{H}^{1/4}(\mathbb{R}_t, H^s)\}.$$

L'espace $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t^+)$ est défini par restriction, l'espace $\mathcal{H}_0^s(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t^+)$ est la fermeture de $C_c^\infty(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t^{+*})$, l'espace $\mathcal{H}_{00}^{1/2}(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t^+)$ est l'ensemble⁴ des fonctions dont le prolongement par 0 pour $t < 0$ est dans $\mathcal{H}^{1/2}(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t)$.

Pour alléger les notations, on écrit $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}_t^+)$, ou \mathcal{H}^s en l'absence d'ambiguïté, pour $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t^+)$.

Pour motiver cette définition, considérons $e^{-it\Delta} u_0$ une solution du problème de Cauchy avec $f = 0$, sa trace en $y = 0$ s'écrit simplement

$$\begin{aligned} \forall (x, y, t) \in \mathbb{R}^{d+1}, (e^{-it\Delta} u_0)(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \iint e^{i(|\xi|^2 + \eta^2)t} e^{ix \cdot \xi + iy\eta} \widehat{u}_0(\xi, \eta) d\xi d\eta, \\ \Rightarrow (e^{-it\Delta} u_0)(x, 0) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \iint e^{i(|\xi|^2 + \eta^2)t} e^{ix \cdot \xi} \widehat{u}_0(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

On considère l'intégrale sur $\eta \geq 0$, et on fait le changement de variables $\delta = \eta^2 + |\xi|^2$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}^+} e^{i(|\xi|^2 + \eta^2)t} e^{ix \cdot \xi} \widehat{u}_0(\xi, \eta) d\eta d\xi &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{|\xi|^2}^{\infty} e^{i\delta t} e^{ix \cdot \xi} \frac{\widehat{u}_0(\xi, \sqrt{|\xi|^2 - \delta})}{2\sqrt{|\xi|^2 - \delta}} d\delta d\xi \\ &:= (2\pi)^d \mathcal{F}_{x,t}^{-1}(\psi). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_{x,t}^{-1}(\psi)\|_{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}_t)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} \sqrt{|\delta + |\xi|^2|} (1 + |\delta| + |\xi|^2)^s |\psi(\xi, \delta)|^2 d\delta d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{|\xi|^2}^{\infty} \sqrt{|\delta + |\xi|^2|} (1 + |\delta| + |\xi|^2)^s \left| \frac{\widehat{u}_0(\xi, \sqrt{|\xi|^2 - \delta})}{2\sqrt{|\xi|^2 - \delta}} \right|^2 d\delta d\xi \\ &\lesssim \iint_{\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+} (1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^s |\widehat{u}_0(\xi, \eta)|^2 d\eta d\xi \sim \|u_0\|_{H^s}^2. \end{aligned}$$

4. La topologie change, voir le paragraphe 1.2.2.

Avec des calculs similaires pour $\eta \leq 0$, on conclut

$$\|e^{-it\Delta}u_0|_{y=0}\|_{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}_t)} \lesssim \|u_0\|_{H^s}.$$

La proposition suivante donne un sens aux conditions de compatibilité :

Proposition 1.4. *Si $s > 1/2$, $\mathcal{H}^s(I) \hookrightarrow C(I, H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{d-1}))$.*

Une fonction $g \in \mathcal{H}^{1/2}(\mathbb{R}_t^+)$ appartient à $\mathcal{H}_0^{1/2}(\mathbb{R}_t^+)$ si et seulement si

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{|(e^{it\Delta_x}g)(x, t)|^2}{t} dx dt < \infty,$$

autrement dit $e^{it\Delta}g \in \dot{H}_0^{1/2}L^2 \cap \dot{H}^{1/4}H^{1/2}$, où $\dot{H}_0^{1/2}$ est l'espace de Lions-Magenes. Pour $\theta \in]0, 1[\setminus \{1/4\}$, on a par interpolation complexe

$$\mathcal{H}_0^{2\theta} = [\mathcal{H}_0^0, \mathcal{H}_0^2]_\theta,$$

et $[\mathcal{H}_0^0, \mathcal{H}_0^2]_{1/4} = \mathcal{H}_0^{1/2}$.

1.2.2 Condition de compatibilité

Pour la condition au bord de Dirichlet, $u|_{y=0} = g$, au vu de la propriété 1.4, la condition de compatibilité

$$u_0|_{y=0} = g|_{t=0}, \tag{31}$$

a du sens si $u_0 \in H^s$, $g \in \mathcal{H}^s$, $s > 1/2$, et dans ce cas les deux traces sont $H^{s-1/2}(\partial\Omega)$.

Pour $s < 1/2$ aucune condition n'est requise, pour $s = 1/2$, on requiert la condition de compatibilité globale

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_0^\infty \frac{|e^{iy^2\Delta_x}g(x, y^2) - u_0(x, y)|^2}{y} dy dx < \infty. \tag{32}$$

C'est un avatar de la condition classique de Lions-Magenes [86] : pour $\varphi \in H^1((\mathbb{R}^+)^2)$, si $\varphi_x = \varphi|_{x=0}$, $\varphi_y = \varphi|_{y=0}$ alors $\int_0^\infty \frac{|\varphi_x(t) - \varphi_y(t)|^2}{t} dt < \infty$ avec deux twists : l'anisotropie qui cause le y^2 et l'évolution de Schrödinger qui cause le facteur $e^{iy^2\Delta_x}$.

Pour $s \geq 5/2$ il faudrait rajouter des conditions de compatibilité, qui n'ont pas été décrites dans [A11]. Ce n'est pas un point difficile, et on y revient dans le chapitre 2.

1.2.3 Estimations et solution

Pour résoudre le problème aux limites pur (26) on utilise une transformée de Laplace, en notant abusivement $\widehat{w}(y) := \widehat{w}(\xi, y, \tau)$

$$\begin{cases} \partial_y^2 \widehat{w}(y) = (i\tau + |\xi|^2) \widehat{w}(y), \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} \widehat{w}(y) = 0, \\ b_1(\xi, \tau) \widehat{w}(0) + b_2(\xi, \tau) \partial_y \widehat{w}(0) = \widehat{g}. \end{cases}$$

La racine carrée est choisie de sorte que $\operatorname{Re}(\sqrt{i\tau + |\xi|^2}) \geq 0$. La deuxième équation impose $\widehat{w}(y) = \alpha e^{-y\sqrt{i\tau + |\xi|^2}}$, ce qui donne la relation dite de Dirichlet-Neumann $\partial_y \widehat{w}(0) =$

$-\sqrt{i\tau + |\xi|^2}\widehat{w}(0)$. Ainsi $\widehat{w}(0) = \widehat{g}/(b_1 - b_2\sqrt{i\tau + |\xi|^2})$. On voit immédiatement que la condition de Kreiss-Lopatinskii (29) assure

$$w|_{y=0} \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t) \Leftrightarrow g \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t).$$

Autrement dit on peut résoudre le problème comme un problème avec condition de Dirichlet.

Remarque 1.9. Si au lieu du problème posé pour $t \in \mathbb{R}$ on considère le problème pour $t \in \mathbb{R}^+$ avec $u|_{t=0} = 0$, la même analyse s'applique en prolongeant g par 0 pour $t < 0$, et le théorème de Paley-Wiener assure que $u = 0$ pour $t < 0$. Cependant le prolongement par 0 de g pour $t < 0$ n'est dans \mathcal{H}^s que si $g \in \mathcal{H}_0^s$ ($\mathcal{H}_{00}^{1/2}$ si $s = 1/2$). Cette condition joue un rôle essentiel dans l'utilisation des conditions de compatibilité.

Les estimées de Strichartz s'obtiennent par des techniques d'analyse classiques (essentiellement une variante de l'argument TT^*) sur la formule

$$u(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}} e^{-y\sqrt{-\delta + |\xi|^2}} \frac{e^{it\delta + x \cdot \xi} \widehat{g}(\xi, \delta)}{b_1 - b_2\sqrt{-\delta + |\xi|^2}} d\delta d\xi.$$

Je développe maintenant deux points particuliers propres aux problèmes aux limites : l'estimée de trace pour $\int_0^t e^{-i(t-s)\Delta} f(s) ds$ et la façon dont les conditions de compatibilité apparaissent au moment de résoudre le problème mixte.

Trace pour le problème inhomogène On a vu que $\|(e^{-it\Delta} u_0)|_{y=0}\|_{\mathcal{H}^s} \lesssim \|u_0\|_{H^s}$. Le lecteur un peu habitué aux équations dispersives est sans doute amené à penser qu'une estimée similaire pour le terme inhomogène $\int_0^t e^{-i(t-s)\Delta} f(s) ds$ tombe gratuitement par application du lemme de Christ-Kiselev [36].

Ce n'est pas le cas pour au moins deux raisons.

La première est technique : le lemme de Christ-Kiselev s'applique pour rester flou dans un cadre L_t^p , alors que l'espace \mathcal{H}^s comporte de la régularité en temps.

La deuxième est (un peu) plus profonde : prenons s très grand, $f \in L_t^1 H^s$ (la régularité usuelle pour le problème de Cauchy), la fonction $u = \int_0^t e^{-i(t-s)\Delta} \Delta f(s) ds$ est Lipschitz en temps (à valeur ce qu'on veut quitte à prendre s assez grand), donc

$$\partial_t u|_{y=0} = \underbrace{-i\Delta u|_{y=0}}_{\text{Lipschitz}} + \underbrace{f|_{y=0}}_{L^1 H^{s-1/2}},$$

de sorte qu'on ne peut pas espérer $\partial_t u \in \mathcal{H}^s$, s grand avec seulement $f \in L_t^1 H^s$. La condition du théorème 1.3 $f \in L^{p_1'} B_{q_1', 2}^s \cap B_{p_1', 2}^{s/2} L^{q_1'}$ est certainement trop restrictive, mais une version avec "un peu" de régularité en temps semble inévitable.

L'estimation pour $s = 0$ peut cependant s'obtenir par un argument simple de dualité : si v est la solution du problème de Neumann rétrograde

$$\begin{cases} \partial_t v + i\Delta v = 0, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} v = 0, \\ \partial_y v|_{y=0} = g \in (\mathcal{H}^0)', \end{cases}$$

on la prolonge sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_t^+$ en une fonction paire en y , de sorte que $\partial_t v + i\Delta v = 2ig \otimes \delta_{y=0}$. En “intégrant” contre $u = \int_0^t e^{-i(t-s)\Delta} f(s) ds$ on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_t^+} f \bar{v} dx dy dt = 2i \iint_{\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t} u|_{y=0} \bar{g} dx dt.$$

L’estimée sur le problème aux limites $\|v\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|g\|_{(\mathcal{H}^0)^\prime}$ donne directement

$$\left\| \int_0^t e^{-i(t-s)\Delta} f(s) ds|_{y=0} \right\|_{\mathcal{H}^0} \lesssim \|f\|_{L_t^{p'} L_x^{q'}}.$$

Les estimées en régularité supérieure s’obtiennent par dérivation/interpolation.

La solution et les conditions de compatibilité La solution du problème mixte (24) s’obtient par superposition des solutions du problème de (25) et du problème aux limites pur (26). Les conditions de compatibilité apparaissent ainsi : pour que la solution de (26) soit $C_t H^s$, il faut que le prolongement par 0 de $g - B(v)$ soit $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}_t)$ (voir la remarque 1.9). Pour les conditions de Dirichlet $s > 1/2$, on retrouve (31),

$$0 = (g - v|_{y=0})|_{t=0} = g|_{t=0} - u_0|_{y=0}.$$

Le cas $s = 1/2$ est moins trivial : il s’agit de justifier l’équivalence entre $g - v|_{y=0} \in \mathcal{H}_{00}^{1/2}$ et la relation de compatibilité (32), autrement dit (en omettant pour simplifier le forçage f)

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_0^\infty \frac{|e^{it\Delta_x} (g(x, t) - (e^{-it\Delta} u_0)|_{y=0})|^2}{t} dt dx < \infty \\ \Leftrightarrow & \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_0^\infty \frac{|e^{is^2\Delta_x} g(x, s^2) - u_0(x, s)|^2}{s} ds dx < \infty. \end{aligned}$$

En écrivant $\|e^{it\Delta_x} (g(x, t) - (e^{-it\Delta} u_0)|_{y=0})\|_{L_x^2} = \|e^{it\Delta_x} g(x, t) - (e^{-it\partial_y^2} u_0)|_{y=0}\|_{L_x^2}$, et après le changement de variable $t \rightarrow s^2$ on voit qu’il suffit de vérifier

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{|u_0(x, s) - (e^{-is^2\partial_y^2} u_0)|_{y=0}|^2}{s} ds dx < \infty.$$

Cette dernière inégalité est vraie pour toute fonction $u_0 \in H^{1/2}(\mathbb{R}^d)$, et se prouve en combinant la régularisation de Kato et une inégalité de Hardy fractionnaire, voir [A11] section 3.3 pour plus de détails.

1.3 Perspectives

Si les résultats de la section 1.2 peuvent s’étendre à d’autres équations, ce n’est pas quelque chose que je compte faire pour l’instant car je vois mal les résultats vraiment nouveaux que cela apporterait. Je suis intéressé par le petit écart entre la régularité des données au bord dans la section 1.1 et celle de la section 1.2 (pour mémoire $H^{1/2,2} = \{g : \iint \sqrt{|\xi|^2 + |\delta|} |\hat{g}|^2 d\xi d\delta < \infty\}$ contre $\mathcal{H}^0 = \{g : \iint \sqrt{|\xi|^2 + \delta} |\hat{g}|^2 d\xi d\delta < \infty\}$). Il y a au moins deux problèmes directement abordables : peut on raffiner la méthode de symétriseurs pour récupérer l’espace \mathcal{H}^0 dans les estimations “d’énergie”, et plus finement quel est l’effet des termes d’ordre inférieur ? A mon

avis en poussant la construction de symétriseurs la réponse à la première question est positive tandis qu'on doit pouvoir montrer que des termes d'ordre inférieur rendent le problème mal posé dans l'espace \mathcal{H}^0 .

Ces questions sont liées à l'usage des conditions aux limites dites transparentes : dans la section 1.2 on a vu que le problème est bien posé pour les conditions aux limites transparentes, un résultat qui n'est pas obtenu par la méthode de symétriseurs. Les conditions aux limites utilisées en pratique sont des versions modifiées ("absorbantes") et il serait intéressant de voir dans quelle mesure cette modification a un effet stabilisant. Ces conditions changent la version exacte de deux manières : d'une part les conditions sont en fait calculées pour des domaines courbes, ce qui amène des modifications subtiles prenant en compte la courbure de la frontière (Antoine-Besse-Klein [4]) et d'autre part même en dimension 1 elles sont remplacées par une version approchée numériquement (Antoine-Besse-Ehrhardt [3]). Ce sont des problèmes qui s'inscrivent naturellement dans le cadre du projet ANR NABUCO porté par J.-F. Coulombel dont je fais partie. Un dernier point m'intéressant est la description des conditions de compatibilité pour des conditions aux limites générales, ou au moins pour les conditions transparentes et de Neumann. Je m'attends à ce que le cas Neumann soit plus simple car il s'agit d'une condition aux limites locale. A l'inverse il n'est pas impossible qu'on ne puisse pas écrire d'autres conditions de compatibilité que celles triviales de "platitudo" dans le coin $y = t = 0$, une assertion qui mériterait d'être quantifiée.

L'équation de Schrödinger sur le complémentaire d'un compact étoilé

Le contenu de ce chapitre correspond aux articles [A4] et [A7] qui améliore le premier. Comme dans le chapitre précédent 1 on étudie le problème aux limites sur l'équation de Schrödinger, avec une attention particulière à la régularité des conditions au bord, aux conditions de compatibilité et aux effets dispersifs.

Le problème posé dans un domaine à bord courbe est plus difficile que le demi espace, on se restreint donc aux conditions aux limites de Dirichlet :

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = f, \\ u|_{t=0} = u_0, \\ u|_{\partial\Omega \times [0, T]} = g, \end{cases} \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T]. \quad (1)$$

Rappelons qu'un ensemble U est étoilé lorsqu'il existe un point c tel que pour $x \in U$, le segment $[c, x]$ est inclus dans U . On suppose ici que Ω est le complémentaire d'un compact étoilé C^∞ . Lorsque $g = 0$, la résolution du problème linéaire ne pose aucune difficulté grâce au semi groupe $e^{it\Delta_D}$, où Δ_D est le Laplacien Dirichlet, de domaine $H^2 \cap H_0^1$. Cependant l'obtention d'estimations de Strichartz est considérablement plus difficile que pour le problème de Cauchy et dépend de la géométrie du domaine.

Pour les discuter il est nécessaire de faire quelques rappels de numérogie¹ : en dimension 2 et plus une estimation de Strichartz classique (optimale, invariante par scaling) a la forme

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_{L^p L^q} \lesssim \|u_0\|_{L^2}, \quad \frac{2}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2}, \quad p > 2, \quad (2)$$

et plus généralement $\|e^{it\Delta} u_0\|_{L^p L^q} \lesssim \|u_0\|_{H^s}$, $\frac{2}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2} - s$, $p > 2$. Sur \mathbb{R}^d , l'estimation (2) est une conséquence de l'estimation dite de dispersion (voir par exemple [28] section 2.3)

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_\infty \lesssim \|u_0\|_1 / t^{d/2}. \quad (3)$$

1. On ne discutera pas les subtilités des indices "endpoint" $(2, 2d/(d-2))$.

Une estimation avec $\frac{2}{p} + \frac{d}{q} - \frac{d}{2} + s = r > 0$ est dite “avec perte (de r dérivées)”.

La première estimation de Strichartz (avec $1/p$ perte de dérivées) pour le problème aux limites homogène est due à Burq-Gerard-Tzvetkov[25], Ω est le complémentaire d’un obstacle non captant. Pour schématiser si le bord de l’obstacle était un miroir tout rayon de lumière se reflétant selon les lois de l’optique finirait par partir à l’infini. Cette classe de domaine contient (strictement) les complémentaires de compact étoilé. Ce champ de recherche a ensuite été très actif avec notamment [5, 22], jusqu’à des estimations sans pertes dues à Blair-Smith-Sogge [23] ($s > 0$ obstacle non captant général), Ivanovici [67] ($s = 0$, obstacle strictement convexe).

Toutes les preuves utilisent de façon cruciale des localisations spectrales (relativement au laplacien-Dirichlet Δ_D) et des constructions de paramétrices, deux outils qui s’exportent mal au cas inhomogène. Paradoxalement l’estimation de dispersion (3) n’a été abordée que beaucoup plus récemment par Ivanovici-Lebeau [68].

Dans [A4, A7,] on obtient des estimations de Strichartz pour des indices (p, q) avec $1/p$ perte de dérivées grâce à un calcul de viriel, une approche plus directe (et élémentaire). Pour être plus précis, le calcul de viriel donne un autre effet dispersif célèbre : le gain local d’une demi dérivée (voir [39]). On en déduit alors des estimations de Strichartz avec perte. Cette méthode a été initialement mise en oeuvre pour l’équation de Schrödinger à coefficients constants hors d’un compact par Staffilani-Tataru [117], puis Burq-Gerard-Tzvetkov pour le problèmes aux limites avec données Dirichlet ou Neumann homogène.

Enfin, pour les applications au problème non linéaire, comme toujours la présence d’un bord brouille la situation. L’équation de Schrödinger défocalisante $i\partial_t u + \Delta u = |u|^a u$ est globalement bien posée dans $H^1(\mathbb{R}^d)$ pour $a < 4/(d-2)$ en utilisant le fait qu’elle est localement bien posée et la conservation de l’énergie (positive) $\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2/2 + |u|^{a+1}/(a+1)dx$. Sur un domaine, le deuxième argument ne fonctionne bien sûr plus, et les différents résultats de [A7] ne sont pas unifiés du tout.

Dans les sections suivantes, on décrit donc trois points : le problème linéaire et les conditions de compatibilité 2.1, les estimations dispersives 2.2, enfin les applications non linéaires 2.3. Ces trois points sont largement décorrélés et doivent pouvoir être lus presque indépendamment.

2.1 Problème linéaire

On reprend les notations du chapitre précédent sur les espaces de Sobolev anisotropes $H^{s,2} = L^2 H^s \cap H^{s/2} L^2$. L’espace $H_{00}^{1/2}$, interpolé entre L^2 et H_0^1 coïncide avec $H_D^{1/2}$, le domaine de $(-\Delta_D)^{1/4}$.

Il n’est pas difficile de définir des conditions de compatibilité d’ordre arbitraire : la condition d’ordre 0 est $u_0|_{\partial\Omega} = g|_{t=0}$. On définit ensuite itérativement $\varphi_0 = u_0$, $\varphi_{n+1} = (\partial_t^n f|_{t=0} - \Delta \varphi_n)/i$.

Condition de compatibilité locale La condition de compatibilité “locale” d’ordre n est

$$\partial_t^n g|_{t=0} = \varphi_n|_{\partial\Omega}, \tag{CCn}$$

qui a du sens lorsque $g \in H^{s+1/2,2}(\partial\Omega \times [0, T])$, $u_0 \in H^s$, $f \in H^{s-1/2,2}(\Omega \times [0, T])$, $s > \frac{1}{2} + 2n$.

Condition de compatibilité globale Dans le cas critique $s = 1/2$, on redresse localement le bord et on utilise une partition de l’unité de sorte que $\varphi_n, \partial_t^n g$ sont associés à des fonctions

$(\varphi_{n,j}, \partial_t^n g_j)$ et le domaine remplacé par $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+$. La condition de compatibilité “globale” d’ordre n est définie par

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+} |\varphi_{n,j}(x', y) - \partial_t^n g_j(x', y^2)|^2 \frac{dx' dy}{y} < \infty, \quad (\text{CCGn})$$

lorsque $s = \frac{1}{2} + 2n$. Il y a une similarité évidente avec (32), qui est plus fine du fait de l’inclusion $H^{s+1/2,2} \subset \mathcal{H}^s$.

Le théorème d’existence Dans la suite, on dit que les conditions de compatibilité sont satisfaites lorsque toutes les conditions qui ont du sens sont satisfaites.

Pour des raisons techniques, les résultats linéaires sont restreints à des forçages f à support compact en espace indépendamment de t :

$$\exists \chi \in C_c^\infty(\bar{\Omega}) : \chi f = f. \quad (4)$$

Cela n’empêche pas la résolution de problèmes non linéaires, comme décrit à la section 2.3.

On dit que $u \in C([0, T], (H_D^{1/2})')$ est une solution de transposition de (1) lorsque pour $v = \int_T^t -ie^{i(t-s)\Delta_D} f_1(s) ds$ solution de l’équation de Schrödinger avec condition de Dirichlet homogène, forçage f_1 et donnée “initiale” $v(T) = 0$ on a

$$\int_0^T \langle u, f_1 \rangle_{(H_D^{1/2})', H_D^{1/2}} dt = \langle f, \chi v \rangle_{L_T^2 H^{-1}, L_T^2 H_0^1} + i \langle u_0, v(0) \rangle_{(H_D^{1/2})', H_D^{1/2}} + \langle g, \partial_n v \rangle_{L^2}. \quad (5)$$

Théorème 2.1. *Soit $(u_0, f, g) \in H^s(\Omega) \times H^{s-1/2,2}(\Omega \times \mathbb{R}_t) \times H^{s+1/2,2}(\partial\Omega \times \mathbb{R}_t^+)$, f satisfaisant (4). Pour $s \geq -1/2$, si les conditions de compatibilité sont satisfaites alors il existe une unique solution de transposition $u \in C_t H^s$.*

Le théorème pour $s = -1/2$ est une conséquence assez directe des estimées classiques (voir par exemple [90] pour la dérivée normale, [25] pour l’effet régularisant) pour le problème homogène

$$\forall T > 0, \|\chi v\|_{L_T^2 H_0^1(\Omega)} + \|\partial_n v\|_{L^2(\partial\Omega \times [0, T])} \lesssim \|f\|_{L_T^2 H_D^{1/2}}. \quad (6)$$

L’apport principal de [A7] par rapport à [A4] est de traiter les conditions de compatibilité naturelles ([A4] se limite à des données s’annulant dans le coin $\partial\Omega \times \{t = 0\}$). Pour monter en régularité supérieure on utilise sans surprise un argument de dérivation interpolation, qui pose quelques difficultés inhérentes à la faible régularité des solutions et la présence des conditions de compatibilité. Le premier problème se surmonte par densité en travaillant sur des solutions régulières, le prix à payer étant la construction de données régulières $(u_{0,n}, g_n, f_n)$ approchant (u_0, f, g) et satisfaisant des conditions de compatibilité d’ordre élevé², dans l’esprit de Rauch-Massey [112]. Le deuxième problème requiert d’identifier l’espace interpolé

$$[(H_D^{1/2})'(\Omega) \times L^2(\partial\Omega \times [0, T]), \{(u_0, g) \in H^{3/2}(\Omega) \times H^{2,2} : u_0|_{\partial\Omega} = g|_{t=0}\}]_\theta.$$

Evidemment on s’attend à ce que ce soit

$$X^{2\theta} := \{(u_0, g) \in H^{2\theta-1/2}(\Omega) \times H^{2\theta,2} : (u_0, g) \text{ satisfait les conditions de compatibilité}\},$$

2. Lorsqu’on choisit les conditions de compatibilité triviales $u_0 \in H_0^s$, $g \in H_0^{s+1/2,2}$ cette construction est immédiate puisqu’il suffit alors d’utiliser l’approximation par des fonctions C_c^∞ .

mais à ma connaissance ce n'est pas trivial.

Dans [A7] on commence par se ramener à l'interpolation de $[H^s \times H^{s+1/2,2}, \{(u_0, g) \in H^{3/2}(\Omega) \times H^{2,2} : u_0|_{\partial\Omega} = g|_{t=0}\}]_\theta$, puis l'identification se fait par des arguments (classique en interpolation) de corétraction/rétraction :

Lemme 2.1. *Il existe des opérateurs de trace et de relèvement*

$$\mathcal{T} : H^{s,2}(\Omega \times [0, T]) \rightarrow H^{s-1}(\Omega) \times H^{s-1/2,2}(\partial\Omega \times [0, T]), \quad (7)$$

$$u \rightarrow (u|_{t=0}, u|_{\partial\Omega}), \quad (8)$$

$$\mathcal{R} : H^{s-1}(\Omega) \times H^{s-1/2,2}(\partial\Omega \times [0, T]) \rightarrow H^{s,2}(\Omega \times [0, T]), \quad (9)$$

$$(u_0, g) \rightarrow R(u_0, g), \quad (10)$$

tels que \mathcal{T}, \mathcal{R} ne dépendent pas de $s > 1$, et $\mathcal{T} \circ \mathcal{R} = I_d$.

L'intérêt du lemme est qu'il permet d'identifier l'espace recherché à l'image par \mathcal{T} de $[H^{s+1,2}, H^{5/2,2}]_\theta = H^{s+1/2+\theta(2-s),2}$, qui est exactement $X^{s+\theta(2-s)}$ (Lions-Magenes [87]).

La construction de \mathcal{R} est un peu plus difficile que celle de \mathcal{T} , et est dans une certaine mesure un problème d'EDP : on construit facilement un relèvement $R_1(g)$ dans $H^{s,2}$, puis par superposition il s'agit de construire un relèvement $u_0 - R_1(g)|_{t=0} \in H^{s-1,2}$ qui est de plus nul sur $\partial\Omega \times [0, T]$, ce qui se fait en utilisant le calcul fonctionnel sur $-\Delta_D$, voir l'appendice de [A7] pour plus de détails.

2.2 Effets dispersifs

Les estimations de Strichartz se lisent comme suit :

Proposition 2.1. *Pour $\varepsilon > 0, T < \infty, 1/2 \leq s < 2, (u_0, f, g) \in H^s \times H^{s-1/2,2} \times H^{s+1/2+\varepsilon,2}$ satisfaisant les conditions de compatibilité et (4), la solution $u \in C_T H^s$ de (1) satisfait les estimations de Strichartz avec perte de $1/p$ dérivée*

$$\forall p \geq 2, \frac{1}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2}, \quad \|u\|_{L_T^p W^{s,q}(\Omega)} \lesssim \|u_0\|_{H^s} + \|f\|_{H^{s-1/2,2}} + \|g\|_{H^{s+1/2+\varepsilon,2}}. \quad (11)$$

La preuve repose sur deux blocs très différents :

1) Effet régularisant L'effet régularisant est le suivant

$$\|\nabla u / (1 + |x|^2)^{3/4}\|_{L^2(\Omega \times [0, T])} + \|\partial_n u\|_{L^2(\partial\Omega \times [0, T])} \lesssim \|g\|_{H^{1+\varepsilon,2}(\partial\Omega \times [0, T])} + \|u_0\|_{H^{1/2}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega \times [0, T])}, \quad (12)$$

qui est donc à la fois une régularisation de u et de la dérivée normale de u . La preuve se fait en deux temps grâce à la fonctionnelle

$$I(u) = 2\text{Im} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla h \bar{u} dx, \quad (13)$$

avec deux fonctions h bien choisies. On vérifie par le calcul l'identité

$$\frac{d}{dt} I(u(t)) = 4\text{Re} \int_{\Omega} \nabla^2 h (\nabla u, \nabla u) dx + \int_{\partial\Omega} -2\partial_n h |\partial_n u|^2 + 2\partial_n h |\nabla_{\tau} u|^2 - 2i\partial_n h \partial_t u \bar{u} dS + R, \quad (14)$$

avec R des termes d'ordre inférieur sans importance, et ∇_τ le gradient sur $\partial\Omega$.

Dans un premier temps on fait le choix $h = \sqrt{1 + |x|^2}$. Quitte à supposer Ω^c étoilé par rapport à l'origine³, on a $\partial_n h \leq 0$ et on vérifie à la main

$$\frac{d}{dt}I(u(t)) \gtrsim \|\nabla u / (1 + |x|^2)^{3/4}\|_{L^2(\Omega)} + J(f, g), \quad (15)$$

où les termes dans J peuvent être bornés de façon compatible avec (12), ce qui donne “presque” la première moitié de la majoration, si $\int \nabla u \cdot \nabla h \bar{u} dx \lesssim \|u\|_{H^{1/2}}^2$. Cette dernière inégalité n'est hélas pas vraie car ∇ n'envoie pas $H^{1/2}$ dans $H^{-1/2}$, mais dans $(H_D^{1/2})'$. Ce petit défaut se corrige (un peu laborieusement) en concédant une légère perte de dérivée sur g .

Dans un deuxième temps, on prend h régulière à support compact satisfaisant $\partial_n h < 0$, ce qui donne le contrôle sur $|\partial_n u|^2$.

L'analogie de (12) en régularité H^s peut également s'obtenir par dérivation/interpolation.

2) De l'effet régularisant aux estimations de Strichartz Pour obtenir les estimations de Strichartz (11), l'idée dans [117] et [25] est de séparer la solution de (1) en une partie supportée près de l'obstacle, et une partie supportée loin de l'obstacle. Pour $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\chi = 1$ près de $\partial\Omega$, l'effet régularisant (12) et les injections de Sobolev assurent

$$\|\chi u\|_{L_T^p W^{s,q}} \lesssim \|g\|_{H^{s+1/2+\varepsilon,2}} + \|u_0\|_{H^s} + \|f\|_{H^{s-1/2,2}}.$$

Quitte à agrandir $\text{supp}(\chi)$ de sorte que $(1 - \chi)f = 0$, la fonction $(1 - \chi)u$ satisfait

$$i\partial_t((1 - \chi)u) + \Delta((1 - \chi)u) = -2\nabla\chi \cdot \nabla u - (\Delta\chi)u,$$

ce qui peut sembler mal engagé car le terme $\nabla\chi \cdot \nabla u$ correspond à une perte d'une dérivée. Cependant, en prolongeant $(1 - \chi)u$ par 0 sur Ω^c , cette équation peut se traiter comme un problème de Cauchy plutôt qu'un problème mixte, pour lequel l'arsenal d'estimées dispersives est beaucoup plus vaste. C'est un argument élégant dans [25] que je rappelle rapidement : l'effet régularisant classique donne $\|(1 - \Delta)^{1/4}(\chi e^{it\Delta}\varphi)\|_{L^2(\mathbb{R}_t, H^s)} \lesssim \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}$, par dualité

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{-i\tau\Delta}(\chi(1 - \Delta)^{1/4}F(\tau))d\tau \right\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|F\|_{L^2(\mathbb{R}_t, H^s)},$$

et l'estimation de Strichartz usuelle donne pour $2/p + d/q = d/2$

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-\tau)\Delta}(\chi(1 - \Delta)^{1/4}F(\tau))d\tau \right\|_{L^p W^{s,q}} \lesssim \|F\|_{L^2(\mathbb{R}_t, H^s)}.$$

Le lemme de Christ-Kiselev assure que la même inégalité est vraie avec \int_0^t au lieu de $\int_{\mathbb{R}}$. En prenant $(1 - \Delta)^{1/4}F = (-2\nabla\chi \cdot \nabla u - (\Delta\chi)u)1_{[0,T]}$ et $s = 1/2$ il vient

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(\chi(1 - \Delta)^{1/4}F(s))ds \right\|_{L^p W^{1/2,q}} \lesssim \|2\nabla\chi \cdot \nabla u + (\Delta\chi)u\|_{L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d)}.$$

L'effet régularisant obtenu par le calcul de viriel (12) assure finalement

$$\|2\nabla\chi \cdot \nabla u + (\Delta\chi)u\|_{L^2(\mathbb{R}_t, L^2)} \lesssim \|g\|_{H^{1+\varepsilon,2}} + \|u_0\|_{H^{1/2}} + \|f\|_{L^2}.$$

Des déclinaisons H^s s'obtiennent également par dérivation/interpolation.

3. C'est le seul moment où on utilise que Ω^c est étoilé. Dans [A4] on supposait Ω^c strictement convexe, et on utilisait pour h la jauge du convexe Ω^c ce qui donnait une meilleure inégalité $\partial_n h < 0$ et donnait directement (12) en une seule étape.

Remarque 2.1. La partie $(1 - \chi)u$ à support éloigné de l'obstacle satisfait donc une estimation de Strichartz sans perte (en terme de scaling, gain d'une dérivée), tandis que la partie près de l'obstacle bénéficie au mieux du gain d'une demi dérivée.

2.3 Résolution de problèmes non linéaires

Contrairement au chapitre précédent j'accorde un peu plus de place au non linéaire, car c'est cela qui m'avait initialement motivé à étudier le problème avec des conditions de compatibilité naturelles. En effet la procédure de résolution classique d'une EDP non linéaire est d'énoncer un résultat d'existence locale, puis un théorème d'existence de solutions *maximales*. Par ailleurs, la résolution dans l'espace "d'énergie", ici H^1 , a en général un rôle privilégié.

Or cette dernière étape échoue si l'existence locale n'est formulée que dans le cas des conditions de compatibilités triviales, puisque la propriété $u \in H_0^1$ n'est évidemment pas propagée par le flot!

Si les résultats de [A7] ne sont hélas pas très unifiés, ils concernent tous le problème

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = F(u), \\ u|_{t=0} = u_0, \\ u|_{\partial\Omega \times [0, T]} = g, \end{cases} \quad (16)$$

avec F une nonlinéarité similaire à $|u|^a u$, $a > 0$: $|\nabla^k F(z)| \lesssim |z|(1 + |z|)^{a-k}$, $k = 0, 1$.

Rappelons que dans la théorie standard pour le problème de Cauchy (voir par exemple [28]), il existe une unique solution maximale pour $a < 4/(d - 2)$. Si le problème est défocalisant $F(u) = |u|^a u$, la solution est globale par existence locale, conservation du moment $\int_{\mathbb{R}^d} |u|^2/2 dx$ et de l'énergie $\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2/2 + |u|^{a+2}/(a + 2) dx$.

Théorème 2.2 (Existence locale). *Pour $\varepsilon > 0$, $(u_0, g) \in H^1(\Omega) \times H^{3/2+\varepsilon, 2}(\partial\Omega \times [0, T])$, $u_0|_{\partial\Omega} = g|_{t=0}$.*

- 1) *Si Ω est le complémentaire d'un compact étoilé, pour $a < 2/(d - 2)$ il existe une unique solution maximale.*
- 2) *Si Ω est le complémentaire d'un compact strictement convexe, pour $a < 3/(d - 2)$ il existe une unique solution maximale.*

Théorème 2.3 (Existence globale). *Sous les hypothèses du théorème 2.2, si $F(u) = |u|^a u$ (nonlinéarité défocalisante) la solution est globale dans les cas suivants*

- 1) *Si $g \in H^{2, 2}$, Ω est le complémentaire d'un compact étoilé, $a < 2/(d - 2)$.*
- 2) *Si $g \in H^{2+\varepsilon, 2}$, Ω est le complémentaire d'un compact strictement convexe, $a < 4/(d - 2)$.*
- 3) *Si $g \in H^{3/2+\varepsilon, 2}$, Ω est le complémentaire d'un compact étoilé, $d = 2$, $a < 11/9$.*

La première difficulté qui apparaît est le fait que toutes les estimations linéaires concernent le problème avec un forçage à support compact. On se débarrasse de cette difficulté en séparant le problème en deux morceaux : si $\tilde{g} \in H^{2+\varepsilon, 2}(\Omega \times [0, T])$ est un relèvement de g ,

$$\begin{cases} i\partial_t v + \Delta v = F(\tilde{g}), \\ v|_{t=0} = u_0, \\ v|_{\partial\Omega} = g, \end{cases} \quad \begin{cases} i\partial_t w + \Delta w = F(w + v) - F(\tilde{g}), \\ w|_{t=0} = 0, \\ w|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

On peut choisir \tilde{g} à support compact, de sorte que résoudre dans H^1 le premier problème demande simplement de vérifier une règle de composition $F(\tilde{g}) \in H^{1/2, 2}$.

Le deuxième problème est un problème aux limites homogènes qui se résout de façon standard par point fixe sur la formule

$$w(t) = \int_0^t e^{i(t-s)\Delta_D} (F(w+v) - F(\tilde{g})) ds.$$

La limitation $a < 2/(d-2)$ correspond au fait que les estimations de Strichartz viennent du gain d'une demi dérivée, alors que les estimations classiques correspondent (en terme de scaling) à un gain d'une dérivée.

De façon moins attendue, lorsque Ω^c est convexe, on peut exploiter le fait que d'une part les estimations sur le problème aux limites non homogène ne font gagner qu'une demi dérivée, mais d'autre part les estimations de Strichartz pour le problème homogène sont sans pertes [67], ce qui améliore les exposants atteignables $a < 3/(d-2)$.

Les questions d'existence globale sont un peu plus intéressantes : le moment comme l'énergie ne sont pas conservés, on a seulement

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{|u|^2}{2} dx = -\text{Im} \int_{\partial\Omega} \partial_n u \bar{g} dS, \quad (18)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{|u|^{a+2}}{a+2} dx = \text{Re} \int_{\partial\Omega} \partial_n u \overline{\partial_t g} dS. \quad (19)$$

On devine assez facilement pourquoi l'existence globale s'obtient lorsque $g \in H^{2,2}$: l'estimation de viriel (12) donne un contrôle L^2 de $\partial_n u$, et $g \in H^{2,2}$ assure $\partial_t g \in L^2$ ce qui assurerait le contrôle des termes de bord dans les conservations du moment et de l'énergie. En pratique c'est un peu plus compliqué à cause du terme $\|f\|_2$, et on montre en fait une identité de viriel *non linéaire* comme dans (14) pour laquelle les terme associés au forçage ont en fait un bon signe (grâce à la nonlinéarité défocalisante).

Si l'obstacle est strictement convexe, une petite astuce permet d'atteindre le rang optimal $a < 4/(d-2)$: on est en effet limité par la régularité de v dans (17), c'est à dire la solution "près de l'obstacle", mais du fait que $u_0|_{\partial\Omega} = g|_{t=0} \in H^{1+\varepsilon,2}$, la donnée initiale "sur l'obstacle" est plus régulière qu'une trace de fonction H^1 , ce qu'on peut utiliser pour améliorer la régularité de v .

Enfin, le cas 3) dans le théorème 2.3 (avec le niveau de régularité naturel) est plus laborieux. On utilise dans (19) l'inégalité de dualité

$$\left| \int_{\partial\Omega \times [0,T]} \partial_n u \partial_t g dS dt \right| \lesssim \|\partial_t g\|_{H^{-1/2+\varepsilon,2}} \|\partial_n u\|_{H^{1/2-\varepsilon,2}} \lesssim \|g\|_{H^{3/2+\varepsilon,2}} \|\partial_n u\|_{H^{1/2-\varepsilon,2}},$$

mais il n'y a pas d'argument de viriel pour borner $\|\partial_n u\|_{H^{1/2-\varepsilon,2}}$, et on est réduit (schématiquement) à utiliser des estimations linéaires du type $\|\partial_n u\|_{H^{1/2,2}} \lesssim \|u_0\|_{H^1} + \|g\|_{H^{3/2+\varepsilon,2}} + \| |u|^a u \|_{H^{1/2,2}}$. Ces estimées combinées avec l'estimation d'énergie donnent finalement un contrôle de la norme H^1 de la solution sous réserve que

$$\| |u|^a u \|_{H^{1/2,2}} \lesssim C(g, u_0, \|u\|_{L^2}) \|u\|_{L^\infty H^1}^{m(a)},$$

avec un $m(a)$ explicite qui doit satisfaire $m(a) < 2$ pour pouvoir fermer les estimations. On vérifie dans [A7] que la condition $m(a) < 2$ est satisfaite si $a < 11/9$. J'ai peu de doutes sur le fait que cette restriction est technique et améliorabile.

2.4 Perspectives

Comme au chapitre précédent il y a un écart entre l'espace de données au bord $H^{1/2,2}$ et celui mis en évidence dans 1.2 \mathcal{H}^0 . Il serait intéressant de considérer le problème posé sur le complémentaire d'une boule, en effet dans ce cadre on peut calculer la solution de façon (à peu près) explicite, ce qui permettrait éventuellement de mettre en évidence une première version de l'espace \mathcal{H}^0 dans un domaine courbe.

Le problème de l'interpolation des espaces $X^{2\theta}$ mentionné à la fin de la section 2.1 est une question générale d'analyse qui apparaît naturellement pour n'importe quel problème aux limites, et qui n'est abordée que dans quelques cas particuliers anciens (Lions-Magenes [87]). J'aimerais développer une méthode d'analyse plus robuste pour résoudre ce type de problèmes, peut être dans l'esprit du lemme 2.1 qui me paraît proche d'idées développées par H. Amann [2].

Des perspectives plus lointaines sont l'amélioration des estimations de Strichartz décrites dans la section 2.2, en effet les meilleurs résultats pour le problème de Dirichlet homogène posé sur le complémentaire d'un obstacle non captant donnent des estimations de Strichartz sans pertes (Blair-Smith-Sogge [23]).

Enfin, et c'est une question qui concerne également le premier chapitre, la régularité du terme de forçage f (dans $i\partial_t u + \Delta u = f$) n'est certainement pas la bonne, en particulier elle demande sans doute trop de régularité en temps, même si (contrairement au problème de Cauchy) un peu de régularité est nécessaire. Je compte quantifier plus précisément cette régularité, ce qui me paraît d'autant plus important que certains résultats de la littérature oublient -à mon avis à tort- cette régularité.

Temps d'existence pour les équations d'Euler-Korteweg

Dans ce chapitre on décrit des travaux en collaboration avec Boris Haspot [A8, A10], ainsi que [P1]. Le système d'Euler-Korteweg s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla g(\rho) = \nabla \left(K(\rho) \Delta \rho + \frac{1}{2} K'(\rho) |\nabla \rho|^2 \right), \end{cases} \quad (x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, T[. \quad (\text{EK})$$

Ce sont les équations de conservation de la masse et du moment, où des forces de capillarité apparaissent dans le terme de droite de la seconde équation. Pour une dérivation physique on renvoie à [121]. Le “coefficient de capillarité” K est supposé régulier, positif $\mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$.

Ces équations apparaissent dans la modélisation d'un fluide non visqueux compressible soumis à des forces de capillarité (*fluides de Korteweg*, ou *capillaires*), ainsi que dans le contexte des *fluides quantiques*. Erwing Madelung a en effet observé dans les années 30 l'équivalence formelle entre l'équation de Schrödinger

$$i\partial_t \psi + \Delta \psi = \frac{g(|\psi|^2)}{2} \psi,$$

et le système (EK) avec $K = 1/\rho$. Dans ce cas, le terme de droite dans l'équation de moment est appelé pression quantique. La transformation dite de Madelung passant de l'équation de Schrödinger au système d'Euler-Korteweg est

$$\rho = |\psi|^2, \quad u = \operatorname{Im}(\nabla \psi \bar{\psi} / |\psi|^2), \quad (1)$$

autrement dit si on peut écrire $\psi = \sqrt{\rho} e^{i\theta}$, on a $u = \nabla \theta$. Même si on s'intéressera peu à cette transformation dans le reste du chapitre, on voit qu'elle est singulière lorsque ψ s'annule (vortex dans le vocabulaire Schrödinger, vide dans le vocabulaire fluide), et de fait l'annulation de ρ est un évènement qu'on aura à coeur d'éviter dans tout le chapitre. L'article de synthèse [27]

discute abondamment ce sujet.

L'analyse mathématique rigoureuse du modèle d'Euler-Korteweg a été initiée en 2006 par Benzoni-Danchin-Descombes [11], avec le premier résultat d'existence locale et d'unicité sans condition particulière sur K ou g , en dimension 1. Les mêmes auteurs ont ensuite généralisé ce résultat en toute dimension avec le théorème suivant :

Théorème 3.1 (Benzoni-Danchin-Descombes [12]). *Soit $(\underline{\rho}, \underline{u})$ une solution régulière, bornée de (EK) sur $[0, \underline{T}]$, $\underline{\rho} \geq \alpha > 0$ telle que*

$$(\nabla^2 \underline{\rho}, \nabla \underline{u}) \in C([0, \underline{T}], H^{s+3}),$$

$s > d/2 + 1$. Pour des données initiales (ρ_0, u_0) telles que

$$\rho_0 - \underline{\rho}(0) \in H^{s+1}, \quad u_0 - \underline{u}(0) \in H^s, \quad \rho_0 \geq \beta > 0,$$

alors il existe $0 < T \leq \underline{T}$ tel que le problème (EK) admet une unique solution sur $[0, T[\times \mathbb{R}^d$ dans l'ensemble $(\underline{\rho}, \underline{u}) + C([0, T[, H^{s+1} \times H^s) \cap C^1([0, T[, H^{s-1} \times H^{s-2})$.

Si $T < \underline{T}$, la solution se prolonge au delà de T si

$$\left\{ \begin{array}{l} \inf_{[0, T[\times \mathbb{R}^d} \rho \geq \gamma > 0, \\ \int_0^T \|\Delta \rho(t)\|_\infty + \|\text{rot}(u(t))\|_\infty + \|\text{div}(u(t))\|_\infty dt < \infty, \\ \exists \alpha \in]0, 1[: \sup_{[0, T[} \|\rho(t)\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^d)} < \infty. \end{array} \right. \quad (2)$$

De plus, si $\text{rot}(u_0) = 0$, alors $\text{rot}(u) = 0$ pour $t \in [0, T[$ et la troisième condition dans (2) n'est pas nécessaire.

Un point essentiel est la preuve d'estimations d'énergie sans perte de dérivée, qui repose elle-même sur une reformulation de (EK) initialement introduite par F.Coquel. Décrivons la rapidement : à l'ordre principal, le système se lit comme

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \rho \text{div}(u) = (\dots), \\ \partial_t u - K(\rho) \nabla \Delta \rho = (\dots), \end{cases}$$

ce qui invite à “symétriser” les équations en posant $w := \sqrt{K/\rho} \nabla \rho := \nabla l$. Quelques calculs plus tard

$$\begin{cases} \partial_t w + \nabla(u \cdot w) + \nabla(a(\rho) \text{div} u) = 0, \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u - w \cdot \nabla w - \nabla(a(\rho) \text{div} w) + \nabla g(\rho) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

avec $a(\rho) = \sqrt{\rho K}$, soit en posant $z = u + iw$, $\tilde{g}(l) = g(\rho)$

$$\partial_t z + u \cdot \nabla z + i \nabla z \cdot w + i \nabla(a \text{div} z) + \tilde{g}' \text{Im}(z) = 0 \quad (4)$$

Puisque $i \nabla(a \text{div} \cdot)^* = -i \nabla(a \text{div} \cdot)$, $(u \cdot \nabla \cdot)^* = -(u \cdot \nabla + \text{div}(u)) \cdot$, $(i \nabla(\cdot) \cdot w)^* = i \nabla w \cdot (\cdot) + iw \text{div}(\cdot)$ le système a une structure antisymétrique perturbée par le terme $i \nabla z \cdot w$. Sa présence rend l'obtention d'estimations d'énergie délicates. Elles se font en dérivant¹ $\|\varphi_s(-\Delta)^s z\|_{L^2}^2$, φ_s une

1. Pour être précis c'est un peu plus compliqué, l'estimation de la composante irrotationnelle de z et celle de la composante solénoïdale requiert des fonctions différentes.

fonction de jauge bien choisie pour $s \geq 0$.

Le système (4) n'est pas exactement une équation de Schrödinger quasilinéaire qui serait plutôt $\partial_t \psi + i \operatorname{div}(a \nabla \psi)$. L'opérateur $\nabla(a \operatorname{div} \cdot)$ est à voir comme une version dégénérée de $\operatorname{div}(a \nabla \cdot)$. On verra par ailleurs que le terme $\tilde{g}' \operatorname{Im}(z)$ joue un rôle important dans la dynamique en temps. Dans tout ce chapitre on se place au voisinage d'un état constant ρ_c , et on fait l'hypothèse de stabilité

$$g'(\rho_c) > 0. \quad (\text{S})$$

Cette hypothèse classique assure l'hyperbolicité des équations d'Euler, pour les équations d'Euler-Korteweg elle assure la stabilité à basse fréquence du linéarisé comme décrit au paragraphe 3.1.3.

Les estimations d'énergie de [12] et les estimations dispersives pour le linéarisé sont le point de départ de l'estimation du temps d'existence des solutions de (EK). Dans tout ce chapitre on travaille sur des données petites. Dans la dynamique de (4), et plus généralement pour toute EDP non linéaire dispersive, il y a une compétition entre la décroissance due à l'évolution linéaire et les interactions non linéaires qui peuvent conduire à l'explosion en temps fini des solutions. Le schéma général qu'on peut avoir en tête est

grande dimension \Rightarrow forte décroissance linéaire \Rightarrow existence globale facile à petite donnée.

Malheureusement, la dimension pertinente est 3 et on verra dans la section 3.1 que l'analyse n'est facile qu'à partir de la dimension 5. On montre dans la section 3.1 l'existence globale pour des données initiales petites et irrotationnelles en dimension au moins 3, dans la section 3.2 on obtient une minoration du temps d'existence qui ne dépend que de la composante solénoïdale de u_0 (toujours en dimension au moins 3).

3.1 Existence globale pour un champ de vitesse irrotationnel

Le cas irrotationnel est plus favorable que le cas général. Si la vitesse initiale est irrotationnelle, elle le reste pour tout temps, cette propriété bien connue pour les équations d'Euler a une preuve identique pour les équations d'Euler-Korteweg simplement parce que $\operatorname{rot}\left(\nabla\left(K\Delta\rho + \frac{1}{2}K'|\nabla\rho|^2\right)\right) = 0$. Suivant [12], on définit la fonction l (à une constante près) par $\nabla l = \sqrt{K/\rho} \nabla \rho$. Pour u irrotationnel on pose alors $u = \nabla \phi$ de sorte que $z := \nabla \phi + i \nabla l := \nabla \psi$, et ψ satisfait l'équation "intégrée" de (4)

$$\partial_t \psi + \frac{\nabla \psi \cdot \nabla \psi}{2} + g(\rho) + ia(\rho) \Delta \psi = 0. \quad (5)$$

Ainsi dans ce cas on récupère une équation de Schrödinger non dégénérée.

On commence par décrire au paragraphe 3.1.1 quelques techniques d'analyse à petites données des EDP dispersives, puis on souligne dans 3.1.2 les ressemblances entre (5) et l'équation de Gross-Pitaevskii, enfin au paragraphe 3.1.3 on énonce précisément le résultat de [A8] avec un schéma de preuve.

3.1.1 Techniques classiques

Avant de passer au cas particulier de l'équation de Schrödinger, commençons par quelques généralités sur la théorie du scattering. Soit une EDP générale

$$\partial_t \psi = A\psi + f(\psi),$$

avec A antisymétrique sur un espace de Hilbert. Sans chercher à être précis sur le cadre fonctionnel, une solution est dite *dispersive* (scatter en anglais), ou *asymptotiquement linéaire* lorsqu'il existe ψ_∞ tel que

$$\psi(t) \sim_{t \rightarrow \infty} e^{At} \psi_\infty.$$

La notion de solution dispersive a été introduite par Segal pour l'équation de Klein-Gordon. Le principe général est qu'en dépit du fait que l'opérateur e^{tA} est unitaire sur H , une décroissance cachée dans d'autres espaces permet d'obtenir des bornes uniformes en temps si les données initiales sont assez petites. En général la décroissance linéaire est algébrique en temps, ainsi plus la nonlinéarité est "forte" (penser à $|\psi|^\alpha$, α grand), plus la décroissance de la nonlinéarité est forte et les estimations a priori sont faciles à fermer. La deuxième généralité est que plus la dimension est grande, plus la décroissance est forte, par exemple pour l'équation de Schrödinger l'estimée de dispersion est

$$\|e^{it\Delta} \psi_0\|_{L^p} \lesssim \frac{\|\psi_0\|_{L^{p'}}}{t^{d(1/2-1/p)}}. \quad (6)$$

La difficulté pour construire une solution globale à *petites données* est donc pour schématiser décroissante en la nonlinéarité et la dimension.

Le cas semilinéaire La théorie du scattering pour l'équation de Schrödinger est initiée par Ginibre et Velo [53] par des méthodes d'énergie ingénieuses pour des nonlinéarités défocalisantes. Avec la découverte des estimations dites de Strichartz [119], les premiers résultats sans restriction sur la nonlinéarité (hormis sa force) sont obtenus par Strauss [118] pour l'équation de Schrödinger semilinéaire. Rappelons que les estimations de Strichartz se lisent

$$\forall p > 2, \frac{2}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2}, \|e^{it\Delta} \psi_0\|_{L^p(\mathbb{R}_t, L^q(\mathbb{R}^d))} \lesssim \|\psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad (7)$$

l'intégrabilité en temps est une forme de décroissance.

Dans [118], la condition de force de la nonlinéarité $|f(\psi)| = O(|\psi|^\alpha)$ fait apparaître l'indice dit de Strauss

$$\alpha_S(d) = \frac{\sqrt{d^2 + 12d + 4} + d + 2}{2d}.$$

Pour $\alpha > \alpha_S$, le scattering à petites données est automatique, tandis que le cas $\alpha = \alpha_S$ est encore partiellement ouvert. Un intérêt des estimations de Strichartz par rapport aux estimations de dispersion est qu'elles permettent de prendre des données initiales dans l'espace d'énergie H^1 , tandis que les estimations de dispersion requièrent l'usage supplémentaire d'espaces construits sur $L^{p'}$, $p' < 2$. Pour une idée de la preuve, il s'agit de propager l'ansatz

$$\|\psi\|_X := \sup_{[0, T]} \|\psi(t)\|_{L^2} + t^{d(1/2-1/p)} \|\psi(t)\|_{L^p} \leq \varepsilon,$$

pour p bien choisi, ε assez petit. Par exemple, si $p = \alpha + 1$, et en notant le taux de décroissance $m = d(\alpha - 1)/(2(\alpha + 1))$, l'ansatz injectée dans la formule de Duhamel donne

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(\psi(s)) ds \right\|_{L^{\alpha+1}} \lesssim \int_0^t \frac{\|u\|_{L^{\alpha p'}}^\alpha}{(t-s)^m} ds \lesssim \int_0^t \frac{\varepsilon^\alpha}{(t-s)^m s^{\alpha m}} ds.$$

Modulo les problèmes d'intégrabilité en 0 et t , on a une décroissance en $O(1/t^{m(\alpha+1)-1})$, qui est meilleure que celle de X si $m(\alpha + 1) - 1 > m$. On vérifie aisément que cette condition est équivalente à $\alpha > \alpha_S$.

Remarque 3.1. L'indice $\alpha = 2$ est le plus important car les nonlinéarités qui apparaissent en général en linéarisant une EDP sont quadratiques. Or $\alpha_S(3) = 2$, autrement dit les nonlinéarités quadratiques sont critiques en dimension 3.

Le cas quasilinear Les premiers résultats d'existence globale pour l'équation de Schrödinger quasilinear sont obtenus indépendamment par Klainerman et Ponce [75] et Shatah [114]. Par rapport au cas semilinear un ingrédient supplémentaire est utilisé : l'existence d'estimations d'énergie, évidemment nécessaire puisque du fait des pertes de dérivées le problème quasilinear est en général mal posé. Pour un problème

$$i\partial_t\psi + \Delta\psi = \mathcal{N}(\psi, \nabla\psi),$$

avec $|\mathcal{N}(\psi, \nabla\psi)| = O(|\psi| + |\nabla\psi|)^\alpha$, on peut penser à des estimations de la forme

$$\forall N \geq 0, \|\psi\|_{H^N} \lesssim \|\psi_0\|_{H^N} \exp\left(C \int_0^t \|\psi\|_{W^{1,\infty}}^{\alpha-1} ds\right).$$

Il y a donc deux nouveautés : d'une part des pertes de dérivée apparaissent dans la formule $\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} \mathcal{N}(\psi, \nabla\psi) ds$, d'autre part l'intégrabilité en temps de $\|\psi\|_{W^{1,\infty}}^{\alpha-1}$ est requise. Les pertes de dérivées sont "rattrapées" grâce aux estimations d'énergie, et en fait la "vraie" limitation est le taux de décroissance accru : si u décroît comme $1/t^m$ dans un espace s'injectant dans $W^{1,\infty}$, on doit avoir $m(\alpha - 1) > 1$, ce qui impose la condition dans [75]

$$\alpha > \alpha_{KP}(d) = \frac{\sqrt{2d+1} + d + 1}{d} > \alpha_S(d).$$

Remarque 3.2. Pour des nonlinéarités quadratiques, c'est cette fois la dimension 4 qui est critique.

Des méthodes plus sophistiquées Pour des nonlinéarités "surcritiques" (α moins grand que l'indice critique) l'existence de solutions globales n'est pas proscrite, mais va dépendre de la structure de la nonlinéarité. Ainsi le scattering à petites données pour le problème

$$i\partial_t\psi + \Delta\psi = |\psi|^2, \tag{8}$$

est toujours ouvert, tandis qu'il a été positivement résolu assez récemment par Germain-Masmoudi-Shatah [50] si la nonlinéarité est ψ^2 ou $\bar{\psi}^2$.

En 1985, Shatah[115] met en oeuvre une méthode de formes normales, en gros un changement de variable qui augmente l'ordre de la nonlinéarité. L'article concerne l'équation de Klein-Gordon et se prête moins bien à l'équation de Schrödinger, même si on peut citer un résultat similaire de Cohn [37] avec la nonlinéarité $\nabla\bar{\psi} \cdot \nabla\bar{\psi}$. Cette approche peut se voir comme un cas particulier de la méthode des résonances espace-temps (voir Lannes [79]), qui nous occupera pour le reste de ce paragraphe.

Pour simplifier la discussion, on considère les EDP

$$i\partial_t\psi + \Delta\psi = i\psi^\pm\psi^\pm,$$

où par convention $\psi^+ = \psi$, $\psi^- = \bar{\psi}$. Comme une solution dispersive est asymptotiquement linéaire, il est naturel de considérer le profil $\varphi(t) = e^{-it\Delta}\psi(t)$, qui satisfait

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t e^{-is\Delta} (e^{is\Delta}\varphi(s))^\pm (e^{is\Delta}\varphi(s))^\pm ds.$$

La transformée de Fourier du terme intégral s'écrit

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} e^{is|\xi|^2 \mp |\eta|^2 \mp |\xi - \eta|^2} \widehat{\varphi}^\pm(\eta, s) \widehat{\varphi}^\pm(\xi - \eta, s) d\eta ds := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} e^{is\Omega_{\pm\pm}(\eta, \xi)} \widehat{\varphi}^\pm(\eta, s) \widehat{\varphi}^\pm(\xi - \eta, s) d\eta ds,$$

et on voit deux possibilités pour améliorer l'intégrabilité en temps : intégrer par partie en la variable de temps s ou de phase η (improprement qualifiée d'IPP en espace).

Par l'identité

$$\partial_t(e^{-it\Delta}\psi) = e^{-it\Delta}(\psi^\pm\psi^\pm),$$

l'intégration par partie en temps augmente la force de la nonlinéarité, comme avec une forme normale. L'intégration par partie en η utilise l'identité

$$e^{is\Omega_{\pm\pm}} = \frac{\nabla_\eta \Omega_{\pm\pm}}{is|\nabla_\eta \Omega_{\pm\pm}|^2} \cdot \nabla_\eta e^{is\Omega_{\pm\pm}},$$

où le facteur $1/s$ donne un gain de décroissance en temps. Le prix à payer est la division par $|\nabla_\eta \Omega_{\pm\pm}|$.

Évidemment, ces calculs formels ne sont fructueux que si $\Omega_{\pm\pm}$ et $\nabla_\eta \Omega_{\pm\pm}$ ne s'annulent "pas trop". On appelle résonance en temps, respectivement espace², les ensembles

$$\mathcal{T}_{\pm\pm} = \{(\xi, \eta) : \Omega_{\pm\pm}(\eta, \xi) = 0\}, \quad \mathcal{S}_{\pm\pm} = \{(\xi, \eta) : \nabla_\eta \Omega_{\pm\pm}(\eta, \xi) = 0\}.$$

L'ensemble des résonance est alors $\mathcal{R}_{\pm\pm} = \mathcal{T}_{\pm\pm} \cap \mathcal{S}_{\pm\pm}$.

On vérifie facilement sur notre exemple que $\mathcal{R}_{++} = \mathcal{R}_{--} = \{\xi = \eta = 0\}$ tandis que $\mathcal{R}_{+-} = \{\xi = 0\}$. Le fait que ce dernier soit un ensemble beaucoup plus grand que les deux autres peut expliquer le fait que le scattering pour le problème (8) soit resté un problème ouvert.

Remarquons enfin que la conversion de cette discussion formelle en vrais résultats requiert des estimations pour les multiplicateurs bilinéaires (singuliers)

$$(f, g) \rightarrow \mathcal{F}^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\chi_1(\eta, \xi)}{\Omega_{\pm\pm}} \widehat{f}(\eta) \widehat{g}(\xi - \eta) d\eta, \quad \mathcal{F}^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\chi_2(\eta, \xi)}{|\nabla_\eta \Omega_{\pm\pm}|} \widehat{f}(\eta) \widehat{g}(\xi - \eta) d\eta,$$

avec χ_1, χ_2 des fonctions localisées en dehors, respectivement, des résonances temps/espace. Cette stratégie a été introduite indépendamment par Gustafson-Nakanishi-Tsai pour l'équation de Gross-Pitaevskii [63] et Germain-Masmoudi-Shatah [50] pour l'équation de Schrödinger, dans les deux cas en dimension 3 avec des nonlinéarités quadratiques.

Elle a coïncidé (pour ne pas dire relancé) avec une activité intense sur les questions d'existence globale pour les EDP dispersives quasilineaires, débouchant sur de nombreux résultats d'existence globale pour des modèles variés : équation des vagues (water waves) avec ou sans capillarité [1, 44, 51, 52, 66], Euler-Poisson [60], Euler-Maxwell [43]...

On verra au paragraphe suivant qu'au moins dans le régime à petites données, le système d'Euler-Korteweg peut se voir comme une version quasi-linéaire de l'équation de Gross-Pitaevskii, on y décrit donc plus précisément la théorie du scattering pour cette équation en dimension 3 de [63]. Ces résultats sont utilisés dans [A10] pour construire des solutions globales dispersives du système d'Euler-Korteweg dans le cas particulier $K = 1/\rho$. On décrit ensuite au paragraphe 3.1.3 le résultat principal de scattering pour le système d'Euler-Korteweg de [A8].

2. En fait pour être complet, on peut aussi faire le changement de variable $\zeta = \xi - \eta$ et intégrer par partie en ζ , il faudrait donc inclure l'ensemble $\nabla_\zeta \Omega_{\pm\pm} = 0$.

3.1.2 L'équation de Gross-Pitaevskii

L'équation de Gross-Pitaevskii est

$$i\partial_t\psi + \Delta\psi = (|\psi|^2 - 1)\psi. \quad (9)$$

Contrairement à l'équation de Schrödinger non linéaire "habituelle", il est naturel de considérer des solutions telles que

$$\lim_{|x|\rightarrow\infty} |\psi| = 1.$$

C'est un modèle très riche, avec beaucoup de structure, mais cette structure n'est pas utile ici et sera décrite au chapitre 4.

Evidemment, $(x, t) \rightarrow 1$ est solution constante, l'équation sur $\theta := \theta_1 + i\theta_2 := \psi - 1$ est

$$i\partial_t\theta + \Delta\theta - 2\theta_1 = |\theta|^2(1 + \theta) + 2\theta_1\theta := F(\theta). \quad (10)$$

Reprenons maintenant l'équation (5)

$$\partial_t\psi + \frac{\nabla\psi \cdot \nabla\psi}{2} + g(\rho) + ia(\rho)\Delta\psi = 0, \quad \nabla\psi = u + i\nabla l.$$

La fonction l a été définie par le changement de variable $\nabla l = \sqrt{K/\rho}\nabla\rho$, on note abusivement $g(\rho) = g(l)$, $a(\rho) = a(l)$. Quitte à faire un changement d'échelle et grâce à l'hypothèse de stabilité (S) $g'(\rho_c) > 0$ on peut supposer

$$\lim_{|x|\rightarrow\infty} l = 0, \quad a(l = 0) = 1, \quad g'(l = 0) = 2. \quad (11)$$

L'équation (5) devient

$$\partial_t\psi + 2\text{Im}(\psi) + i\Delta\psi = -\frac{\nabla\psi \cdot \nabla\psi}{2} + g'(0)\text{Im}(\psi) - g(\text{Im}(\psi)) + i(1 - a)\Delta\psi. \quad (12)$$

Quitte à poser $z = i\bar{\psi}$, on voit que les linéarisés de (10) et (12) sont tous deux

$$i\partial_t\theta + \Delta\theta - 2\theta_1 = 0.$$

Il faut cependant souligner que la conjugaison change le sens du temps, donc l'évolution linéarisée pour (10) est l'inverse de celle de (12).

Les questions de scattering pour l'équation de Gross-Pitaevskii ont été étudiés dans une série d'articles [61–63] par Gustafson, Nakanishi et Tsai.

Leur résultat principal est le scattering en dimension 3 pour des petites données H^1 :

Théorème 3.2 ([63]). *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour $\theta_0 \in H^1$ satisfaisant*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle x \rangle^2 (\text{Re}(\theta_0))^2 + |\nabla\theta_0|^2 dx \leq \varepsilon,$$

alors le problème (10) admet une unique solution globale.

De plus, en notant $U = \sqrt{-\Delta/(2 - \Delta)}$, $H = \sqrt{-\Delta(2 - \Delta)}$, $v = \theta_1 + iU\theta_2$, alors $e^{itH}v \in \langle x \rangle^{-1}H^1$ et il existe $v_\infty \in \langle x \rangle^{-1}H^1$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\langle x \rangle (e^{itH}v(t) - v_\infty)\|_{H^1} = 0.$$

Le problème pose plusieurs difficultés :

- 1) La présence du terme $-2\theta_1$ change la relation de dispersion, à mi chemin entre l'équation de Klein-Gordon et l'équation de Schrödinger.
- 2) Le changement de variable $\theta \rightarrow \theta_1 + iU\theta_2$ n'est pas inversible dans H^1 .
- 3) L'équation (10) contient des nonlinéarités quadratiques, elle est critique en dimension 3 (4 pour la version quasilinéaire (12), voir le paragraphe 3.1.1).
- 4) Les nonlinéarités quadratiques contiennent la "mauvaise" nonlinéarité $|\theta|^2$, ce qui donne un "gros" ensemble de résonances espace temps $\{(\xi, \eta) : \xi = 0\}$.

Le schéma de preuve dans [63] est de réécrire l'équation (10) dans de nouvelles variables qui désingularisent l'application $\theta \rightarrow \theta_1 + iU\theta_2$, obtenir des estimations dispersives pour le problème linéarisé, et utiliser ces estimations dispersives en conjonction avec la méthode des résonances espace-temps et un lemme de continuité pour des multiplicateurs bilinéaires peu réguliers pour prouver le scattering à petites données. Ces différents éléments sont importants pour l'article [A10], je les décris donc ci-dessous.

Diagonalisation des équations Soit $U = \sqrt{-\Delta/(2 - \Delta)}$. Dans [63], les auteurs définissent le changement de variable

$$v = \theta_1 + iU\theta_2. \quad (13)$$

Avec ce dernier, l'équation (10) devient

$$i\partial_t v - \sqrt{-\Delta(2 - \Delta)} v = U\text{Re}(F(v_1 + iU^{-1}v_2)) + i\text{Im}(F(v_1 + iU^{-1}v_2)),$$

qui contient les termes singuliers $U^{-1}v_2$.

Forme normale L'idée qui apparaît dès [61] est d'utiliser un changement de variable qui désingularise la nonlinéarité. Le changement de variable est ensuite raffiné dans [62] et [63], où les auteurs remarquent qu'il est possible à la fois de supprimer les singularités, et d'améliorer la structure de la nonlinéarité pour appliquer la méthode de résonances espace-temps. Pour être plus précis, le changement de variable consiste à poser

$$Z = v + B_1[v_1, v_1] + B_2[v_2, v_2],$$

B_1, B_2 des multiplicateurs de Fourier bilinéaires $(f, g) \rightarrow \int B(\eta, \xi - \eta) \widehat{f}(\eta) \widehat{g}(\xi - \eta) d\eta$. Il n'est pas très instructif de préciser le choix de B_1, B_2 . Le point important est que non seulement les termes quadratiques ne sont plus singuliers, mais il y a aussi un gain plus subtil : les résonances espace-temps étant localisées en $\xi = 0$, il est souhaitable que les termes quadratiques s'annulent à ces fréquences (on peut penser à la "null condition" de la méthode des champs de vecteurs), et c'est précisément ce qui se passe : ils sont de la forme $\sqrt{-\Delta} Q(v)$, avec Q un terme quadratique compliqué mais non singulier.

On reviendra là dessus plus en détail au paragraphe 3.1.3 pour les équations d'Euler-Korteweg.

Estimées dispersives Par des arguments classiques de phase stationnaire, Gustafson et al obtiennent des estimées linéaires similaires à celles pour l'équation de Schrödinger :

Proposition 3.1 ([63]). *Pour $s \in \mathbb{R}$, $2 \leq p \leq \infty$, $U = \sqrt{-\Delta/(2-\Delta)}$, $H = \sqrt{-\Delta(2-\Delta)}$,*

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \|e^{itH}\psi_0\|_{L^p} \lesssim \frac{\|U^{(d-2)(1/2-1/p)}\psi_0\|_{L^{p'}}}{|t|^{d(1/2-1/p)}}, \quad (14)$$

et pour $2/p + d/q = d/2$, $(p, q) \neq (2, \infty)$,

$$\|e^{itH}\psi_0\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|U^{\frac{d-2}{2}(1/2-1/p)}\psi_0\|_{L^2}. \quad (15)$$

Remarque 3.3. (i) Divers avatars de (14),(15) existent dans les espaces de Sobolev, Besov, Lorentz. On renvoie par exemple à [63].

(ii) Le facteur $U^{(d-2)(1/2-1/p)}$ est un gain de “régularité” à basse fréquence. Il est lié au symbole $|\xi|\sqrt{2+|\xi|^2}$ qui ressemble à un cône de révolution près de 0, avec plus de courbure que le symbole de Schrödinger $|\xi|^2$.

Multiplicateurs bilinéaires peu réguliers Le célèbre théorème de Coifman-Meyer [38] énonce que les multiplicateurs bilinéaires de la forme

$$B[f, g] = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} B(\eta, \xi - \eta) \widehat{f}(\eta) \widehat{g}(\xi - \eta) d\eta d\xi,$$

satisfont la même estimation de Hölder que les produits classiques : si $|\partial^\alpha B(\eta, \xi - \eta)| \lesssim (|\xi| + |\eta|)^{-|\alpha|}$ pour suffisamment de dérivée, alors

$$\|B[f, g]\|_{L^r} \lesssim \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \quad 1 < p, q \leq \infty,$$

Divers raffinements du théorème étendent le champ des indices admissibles, mais les multiplicateurs qui apparaissent dans l’analyse des équations de Gross-Pitaevskii ou Euler-Korteweg sont trop irréguliers pour pouvoir utiliser ce résultat. Dans [63], Gustafson et al obtiennent une version admirablement flexible, mêlant estimation de Strichartz et une régularité précisément quantifiée sur B (voir le lemme 10.1 et le corollaire 10.3). Ce résultat est légèrement étendu par Guo et Pausader dans [60], sous une forme qui s’est avérée suffisante pour notre contexte.

Avant de l’énoncer, il faut mettre en place quelques notations : un opérateur agissant indifféremment par les formules

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} B(\eta, \xi - \eta) \widehat{f}(\eta) \widehat{g}(\xi - \eta) d\eta d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} B(\xi - \zeta, \zeta) \widehat{f}(\xi - \zeta) \widehat{g}(\zeta) d\zeta d\xi.$$

On considère B à la fois comme une fonction de (η, ξ) et (ζ, ξ) , avec les notations en découlant $\nabla_\eta B, \nabla_\zeta B$. On définit la norme

$$\|B\|_{[B^s]} = \min \left(\|B\|_{\widetilde{L}_\xi^\infty \dot{B}_{2,1,\eta}^s}, \|B\|_{\widetilde{L}_\xi^\infty \dot{B}_{2,1,\zeta}^s} \right),$$

où $\widetilde{L}_\xi^\infty \dot{B}_{2,1,\eta}^s$ est l’espace de Chemin-Lerner, voir par exemple [7] paragraphe 2.6.3 pour leur définition. Le lecteur ne désirant pas connaître en détail ces espaces peut les confondre sans trop y perdre (dans notre contexte!) avec $L_\xi^\infty H_\eta^s$.

Lemme 3.1 ([60]). *Pour $0 \leq s \leq d/2$, $2 \leq p, q, r \leq \frac{2d}{d-2s}$, tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2} - \frac{s}{d}$,*

$$\|B[f, g]\|_{L^r} \lesssim \|B\|_{[B^s]} \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}. \quad (16)$$

Pour $\frac{1}{2} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2} - \frac{s}{d}$, $2 \leq r', q \leq \frac{2d}{d-2s}$,

$$\|B[f, g]\|_{L^r} \lesssim \|B\|_{[B^s]} \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^q}. \quad (17)$$

Remarque 3.4. L'inégalité type Hölder usuelle se retrouve dans (17) pour $s \geq d/2$. Pour s plus petit l'indice q décroît.

Or d'après l'inégalité de dispersion $\|e^{itH}\psi_0\|_p \lesssim \|\psi\|_{p'}/t^{d(1/2-1/p)}$ une solution dispersive devrait décroître d'autant plus vite dans L^p que p est grand. En ce sens l'irrégularité des opérateurs B dans (16), (17) se paye par une perte de décroissance.

Ces différents outils permettent de mettre en oeuvre la méthode de résonances espace-temps esquissée au paragraphe 3.1.1, et donne la preuve du théorème 3.2.

Application aux équations de l'hydrodynamique quantique Le théorème d'existence globale et scattering 3.2 pour l'équation de Gross-Pitaevskii fournit des solutions globales telle que $v - 1$ reste petit dans $H^1(\mathbb{R}^3)$.

Cela invite naturellement à utiliser de telles solutions pour construire des solutions globales pour le système d'Euler-Korteweg dans le cas spécial $K(\rho) = 1/\rho$, $g(\rho) = \rho - 1$, formellement équivalent à l'équation de Gross-Pitaevskii par la transformée de Madelung (1). Cependant la norme $H^1(\mathbb{R}^3)$ ne contrôle pas la norme L^∞ , de sorte qu'a priori ψ peut s'annuler et la transformée de Madelung est singulière. Dans [A10] avec B. Haspot nous prouvons une version "grande régularité" du théorème 3.2, qui permet en particulier d'avoir la petitesse L^∞ de $\psi - 1$:

Théorème 3.3 (A-Haspot [A10]). *Soit $d = 3$, $r_0 = \rho_0 - 1$, $u_0 = \nabla\varphi_0$. On suppose $\rho_0 \in L^\infty$ avec $\rho_0 \geq c > 0$, $\langle x \rangle \nabla \sqrt{\rho_0} \in L^2$, $\langle x \rangle u_0 \in L^2$, $r_0 \in L^2$, $\cos \theta_0 - 1 \in L^2$ et $|x|(\sqrt{\rho_0} \cos \theta_0 - 1) \in L^2$. Soit $\psi_0 = \sqrt{\rho_0} e^{i\theta_0} - 1$, on suppose $\psi_0 \in H^{\frac{5}{4}+\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$ et $(1 + |\xi|^{\varepsilon_1})\hat{\psi}_0 \in L^1$ with $\varepsilon_1 > 0$. Il existe $\delta > 0$ dépendant de $\|\psi_0\|_{H^{\frac{5}{4}+\varepsilon}}$ et $\|(1 + |\xi|^{\varepsilon_1})\hat{\psi}_0\|_{L^1}$ tel que si :*

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\langle x \rangle^2 (|\nabla \sqrt{\rho_0}|^2 + \rho_0 |u_0|^2) + \langle x \rangle^2 (\sqrt{\rho_0} \cos(\theta_0) - 1)^2) dx < \delta, \quad (18)$$

alors il existe une solution globale (ρ, u) des équations d'Euler-Korteweg avec :

$$\max(\rho, \frac{1}{\rho}) \in L^\infty(\mathbb{R}, L^\infty(\mathbb{R}^3)), \quad \rho \in 1 + L_{loc}^\infty(H^{\frac{5}{4}+\varepsilon}(\mathbb{R}^3)) \quad \text{et} \quad u \in L_{loc}^\infty(H^{2\varepsilon}(\mathbb{R}^3)).$$

Si $\psi_0 \in H^{3/2+1+\varepsilon}$ la solution est unique et a la régularité additionnelle

$$\rho \in 1 + L_{loc}^\infty(H^{3/2+1+\varepsilon}(\mathbb{R}^3)) \quad \text{et} \quad u \in L_{loc}^\infty(H^{3/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3)) \cap L_{loc}^2(B_{6,2}^{3/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3)).$$

Remarque 3.5. Ces solutions sont dispersives, mais ce n'est pas mentionné dans [A10]. Un énoncé plus précis et général sera donné au théorème général 3.4.

Remarque 3.6. L'existence globale de solutions faibles était déjà connue dans un cadre moins restrictif autorisant la présence de vide, voir Antonelli-Marcati [6], Carles-Danchin-Saut [27], c'est la partie unicité du théorème qui est vraiment intéressante.

La solution construite est au niveau de régularité $(\rho - 1, u) \in H^{s+1} \times H^s$, $s > 3/2$, ce qui est une dérivée de moins que dans le théorème d'existence locale 3.1 de [12]. Ce gain vient de l'utilisation d'estimations de Strichartz.

3.1.3 Existence globale pour les équations d'Euler-Korteweg

On énonce ici un résultat de stabilité asymptotique de l'état constant $(\rho_c, 0)$, dans le cas général $K > 0$ quelconque, et g satisfaisant seulement la condition de stabilité (S), $g'(\rho_c) > 0$. Pour alléger l'exposition et garder les mêmes notations qu'au paragraphe sur les estimations dispersives, on supposera que $\rho_c = 1$ et $g'(1) = 2$ (on peut s'y ramener par changement de variable). La reformulation des équations d'Euler-Korteweg (12) décrite au paragraphe 3.1.2 est

$$\partial_t \psi + 2\text{Im}(\psi) + i\Delta\psi = -\frac{\nabla\psi \cdot \nabla\psi}{2} + 2\text{Im}(\psi) - g(\rho) + i(1-a)\Delta\psi,$$

où $\psi = \phi + il$, $\nabla\phi = u$ est la vitesse et $\nabla l = \sqrt{K/\rho}\nabla\rho$, et on confond abusivement g en tant que fonction de $\text{Im}\psi$ au lieu de ρ . Le linéarisé se diagonalise en posant $v = U\phi + il$, ce qui donne

$$\partial_t v - iHv = \mathcal{N}(v), \quad (19)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(v) = & U((a(v_2) - 1)\Delta v_2 - \frac{1}{2}(|\nabla U^{-1}v_1|^2 - |\nabla v_2|^2) + (2v_2 - g(v_2))) \\ & + i(-\nabla U^{-1}v_1 \cdot \nabla v_2 - (1 - a(v_2))Hv_1). \end{aligned}$$

Ce changement de variable est le même que pour l'équation de Gross-Pitaevskii, mais il a ici une interprétation naturelle : la vitesse u est la variable physique, de sorte que poser $v_1 = U\phi$ remet (à basse fréquence) le potentiel au niveau de u . On voit d'ailleurs qu'il ne crée pas de terme singulier dans la nonlinéarité, tous les facteurs U^{-1} étant systématiquement compensés par un gradient. On peut maintenant énoncer le résultat principal :

Théorème 3.4 (A-Haspot [A8]). *On suppose u_0 irrotationnel.*

Pour $d \geq 5$, il existe $\varepsilon > 0$, $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, $k > 2 + d/4$, $2n + 1 \geq k + 2 + d/2$ tels que si

$$\|u_0\|_{H^{2n} \cap W^{k-1,4/3}} + \|\rho_0 - \rho_c\|_{H^{2n+1} \cap W^{k,4}} \leq \varepsilon, \quad (20)$$

alors la solution du système d'Euler-Korteweg (EK) est globale, reste $O(\varepsilon)$ dans $H^{2n} \times H^{2n+1}$ et il existe v_∞ tel que

$$\|v - e^{itH}v_\infty\|_{L^2} = O(t^{1-d/2}).$$

Si $d = 3, 4$, il existe $\varepsilon > 0$, $k > 2 + d/4$, $n \in \mathbb{N}$ (grand), $p > 2d/(d-2)$ tels que si

$$\|u_0\|_{H^{2n} \cap W^{k-1,p'}} + \|\rho_0 - \rho_c\|_{H^{2n+1} \cap W^{k,p'}} + \|x(\rho_0 - \rho_c)\|_{L^2} + \|xu_0\|_{L^2} \leq \varepsilon, \quad (21)$$

alors la solution du système d'Euler-Korteweg est globale, reste $O(\varepsilon)$ dans $H^{2n} \times H^{2n+1}$ et il existe v_∞ tel que

$$\forall s < 2n + 1, \lim_{t \rightarrow \infty} \|v - e^{itH}v_\infty\|_{H^s} = 0.$$

Remarque 3.7. (i) Les résultats sont quasiment identiques quelle que soit la dimension, mais la preuve est beaucoup plus difficile en dimensions 3 et 4, la dimension critique étant 4.

(ii) L'indice de régularité n en dimensions 3 et 4 pourrait être quantifié, mais est assez grand (plus que vingt). On peut aussi montrer $\|x(e^{-itH}v - v_\infty)\|_{L^2} = O(t^{-\alpha})$ avec α très petit, mais quantifiable.

(iii) Le théorème montre que pour des données initiales assez petites la solution est asymptotiquement linéaire. On verra au chapitre suivant l'existence de solitons arbitrairement petits en dimension 2, ce qui est une indication que $d \geq 3$ n'est pas une limitation technique. Cela ne proscrie cependant pas l'existence de solutions asymptotiquement linéaires. Par exemple l'existence de solitons arbitrairement petits en dimension 2 est connue pour l'équation de Gross-Pitaevskii (Béthuel-Gravejat-Saut [19]) tandis que Gustafson et al ont construit dans [62] "l'opérateur d'onde" qui à une solution linéaire $e^{itH}\psi_\infty$ associe une solution non linéaire convergeant en temps long vers $e^{itH}\psi_\infty$, pour ψ_∞ petit.

La preuve dans [A8] mélange la méthode d'énergie dispersion à la Klainerman-Ponce [75] avec l'analyse des résonances espace-temps, dans l'esprit de ce qui a été fait par exemple par Germain-Masmoudi-Shatah [51] pour l'équation des vagues. Le coeur du travail est l'analyse de l'équation (19) $\partial_t v - iHv = \mathcal{N}(v)$.

Sans surprise, il faut coïncider près de 0 une certaine norme de v . En dimension 5 et plus il s'agit de

$$N_d(v) = \|v(t)\|_{H^{2n+1}} + \langle t \rangle^{d/4} \|v(t)\|_{W^{k,4}}, \quad (22)$$

en dimension 3 et 4

$$N_d(v) = \|v(t)\|_{H^{2n+1}} + \langle t \rangle^{d(1/2-1/p)} \|v(t)\|_{W^{k,p}} + \|xe^{-itH}v(t)\|_{L^2}. \quad (23)$$

Il n'est pas difficile de vérifier que les conditions de petitesse sur (ρ_0, u_0) se traduisent par la petitesse de v_0 pour ces normes. La petitesse de $N_d(u)$ donne alors à la fois l'existence globale, mais également la convergence dans L^2 de l'intégrale $\int_0^\infty e^{i(t-s)H} \mathcal{N}(v)(s) ds$ (avec une estimation explicite du reste \int_t^∞) ce qui montre que la solution disperse.

L'énergie Le contrôle de la norme H^{2n+1} provient d'une amélioration des estimations d'énergie de [12], dont l'énoncé est le suivant :

Proposition 3.2. *Pour $2n > d/2 + 1$, si $u_0 = \nabla \phi_0 \in H^{2n}$, $l_0 \in H^{2n+1}$, $\inf_{(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,T]} \rho \geq m > 0$ alors il existe une constante $c > 0$, une fonction continue localement bornée C telles que*

$$\begin{aligned} & \|u(t)\|_{H^{2n}} + \|l(t)\|_{H^{2n+1}} \\ & \leq c(\|\nabla \phi_0\|_{H^{2n}} + \|l_0\|_{H^{2n+1}}) \exp\left(\int_0^t C(\|\rho\|_{L^\infty}, \left\|\frac{1}{\rho}\right\|_{L^\infty}, \|v\|_{L^\infty}) \right. \\ & \quad \left. \times (\|u(s)\|_{W^{1,\infty}} + \|l(s)\|_{W^{2,\infty}}) ds\right). \end{aligned}$$

L'intérêt principal de cette proposition est le corollaire immédiat

Corollaire 3.1. *Sous les mêmes hypothèses que la proposition 3.2, il existe c, C, ε tels que si $\sup_{[0,T]} N_d(v) \leq \varepsilon$*

$$\sup_{[0,T]} \|v(t)\|_{H^{2n+1}} \leq c \|v_0\|_{H^{2n+1}} \exp(C \sup_{[0,T]} N_d(v))$$

Les estimations d'énergie dans [12] sont obtenues sans hypothèse sur le signe de g' , le terme ∇g dans (EK) étant simplement traité comme un forçage. Pour schématiser, on peut penser au problème linéarisé

$$\begin{cases} \partial_t l + \Delta \phi = 0, \\ \partial_t \phi - \Delta l + 2l = 0. \end{cases}$$

L'approche directe consisterait à multiplier la première équation par l , la deuxième par ϕ et intégrer ce qui donne

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|l\|_{L^2}^2 + \|\phi\|_{L^2}^2) \leq 2\|l\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2},$$

ce qui donne seulement une borne avec une croissance exponentielle en temps. L'estimation exploitant la structure du système consiste à multiplier la première équation par $(-\Delta + 2)l$, la deuxième par $-\Delta \phi$, ce qui donne la loi de conservation

$$\frac{d}{dt} (\|\nabla l\|_{L^2}^2 + 2\|l\|_{L^2}^2 + \|\nabla \phi\|_{L^2}^2) = 0.$$

Cette remarque assez évidente en conjonction avec les méthodes de jauge de [12] donne la preuve de la proposition 3.2. Cette approche est aussi exploitée (indépendamment) par Benzoni et Chiron [10] pour l'étude de régimes asymptotiques de l'équation d'Euler-Korteweg.

La dispersion Il s'agit maintenant de coincer la deuxième moitié de la quantité $N_d(v)$. Comme attendu, en dimension 5 et plus c'est en fait assez facile : tous les termes non linéaires peuvent être bornés par des variantes de l'estimée

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)H} |\nabla v|^2 ds \right\|_{W^{k,4}} \lesssim \int_0^t \frac{\|\nabla v\|_{W^{k,4/3}}^2}{(t-s)^{d/4}} ds \lesssim \int_0^t \frac{\|v\|_{H^{2n+1}} \|v\|_{W^{k,4}}}{(t-s)^{d/4}} ds, \quad (24)$$

qui (modulo des soucis insignifiants en $s = 0, t$) se borne par $N_d(v)^2 / \langle t \rangle^{d/4}$. On obtient ainsi

$$\|v\|_{W^{k,4}} \lesssim N_d(v) / \langle t \rangle^{d/4}.$$

Avec la proposition 3.2 cela suffit pour coincer $N_d(v)$.

En dimension 3 et 4 le principe est de faire la même chose, mais en ayant au préalable découpé le plan de phase (ξ, η) en zones non résonantes temps ou espace et préparé le terme intégral de la formule de Duhamel en effectuant une intégration par partie en s ou η (ou ζ). La mise en pratique est beaucoup plus difficile.

À défaut de rentrer dans le détail, dans le reste du paragraphe je motive la présence d'une norme à poids ainsi que l'usage d'une forme normale. Reprenons l'étude d'un terme quadratique typique $\nabla v^\pm \cdot \nabla v^\pm$ en suivant les notations du paragraphe 3.1.1 :

$$\int_0^t e^{i(t-s)H} \nabla v^\pm \cdot \nabla v^\pm ds = -\mathcal{F}^{-1} e^{itH(\xi)} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} e^{is\Omega_{\pm\pm}} \eta \cdot (\xi - \eta) \widehat{f}^\pm(\eta) \widehat{f}^\pm(\xi - \eta) d\eta,$$

$$\text{où } \Omega_{\pm\pm} = -H(\xi) \mp H(\eta) \mp H(\xi - \eta), \quad f = e^{-itH} v.$$

Lorsque $1/|\nabla_\eta \Omega_{\pm\pm}|$ satisfait des bornes adaptées pour appliquer le lemme 3.1 sur une partie de $\mathbb{R}_\eta^d \times \mathbb{R}_\xi^d$, on localise au voisinage de cette partie avec une fonction de troncature $\chi(\eta, \xi)$ et une intégration par partie en η donne le terme

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{is\Omega_{\pm\pm}}}{is} \operatorname{div}_\eta \left(\chi \frac{\nabla_\eta \Omega_{\pm\pm}}{|\nabla_\eta \Omega_{\pm\pm}|^2} \eta \cdot (\xi - \eta) \widehat{f}^\pm(\eta) \widehat{f}^\pm(\xi - \eta) \right) d\eta.$$

Le gain d'intégrabilité en temps provient du nouveau facteur $1/s$, mais on récupère par ailleurs le facteur $\nabla_\eta \widehat{f^\pm}(\eta) = \mathcal{F}(xf^\pm/i)$ qui requiert donc des bornes à poids en espace.

Enfin sans rentrer dans le détail de l'analyse des résonances, remarquons que l'ensemble des résonances contient $\{(\xi, \eta) : \xi = 0\}$, en effet

$$H(0) - H(\eta) + H(0 - \eta) = 0, \quad -\nabla_\eta(H(0) - H(\eta) + H(\eta)) = 0, \quad (25)$$

et l'annulation est particulièrement forte près de $\xi = \varepsilon\eta$, $|\eta| \ll 1$, en effet $H(\varepsilon\eta) - H(\eta) + H((1 - \varepsilon)\eta) = O(\varepsilon|\eta|^3)$. Pour pouvoir mettre à profit le lemme 3.1 de multiplicateurs singuliers, on prépare les termes non linéaires avec la forme normale suivant :

Lemme 3.2. *Soit B le multiplicateur de Fourier bilinéaire de symbole $\frac{(a'(0) - 1)\eta \cdot (\xi - \eta)}{2(2 + |\eta|^2 + |\xi - \eta|^2)}$, on définit $l_1 = l - B[\phi, \phi] + B[l, l]$, cette nouvelle variables satisfait l'EDP*

$$\partial_t l_1 + \Delta \phi = -a'(0)\operatorname{div}(l\nabla\phi) + R,$$

où R contient des termes non linéaires au moins cubiques.

L'EDP satisfaite par $z := U\phi + il_1 := \phi_1 + il_1$ est

$$\begin{aligned} \partial_t z - iHz &= U \left(\alpha l_1 \Delta l_1 - \frac{1}{2} (|\nabla U^{-1} \phi_1|^2 - |\nabla l_1|^2 - g''(0)l_1^2) + (-\Delta + 2)b(U^{-1}\phi, l_1) \right) \\ &\quad - ia'(0)\operatorname{div}(l_1 \nabla U^{-1} \phi_1) + R, \end{aligned} \quad (26)$$

où R contient des termes au moins cubiques, $b(f, g) := -B[f, f] + B[g, g]$.

La preuve du lemme est un calcul direct, la forme précise de (26) importe peu, le seul point notable est qu'en facteur de chaque non linéarité quadratique il y a U ou ∇ , deux multiplicateurs dont le symbole s'annule en $\xi = 0$. Cette bonne structure compense partiellement les résonances en $\xi = 0$, (25), et s'avère suffisante pour coïncider $\langle t \rangle^{d(1/2-1/p)} \|v\|_{W^{k,p}} + \|xe^{-itH}v\|_{L^2}$.

3.2 Temps long pour une petite vorticité

Si la vitesse n'est pas irrotationnelle, le système (4) n'est plus un système dispersif, mais plutôt un système couplé dispersif-hyperbolique. Il y a moins de littérature pour ce type de problèmes, et pour l'instant pas de résultat d'existence globale à petite données. La difficulté est qu'une équation hyperbolique quasilineaire peut développer des chocs en temps finis, aussi petite que soit la donnée initiale, donc on est a priori limité par le temps d'existence pour la partie hyperbolique du système.

Cette observation indique cependant un résultat prévisible : si le problème à petites données irrotationnelles est globalement bien posé, le temps d'existence dans le cas général ne va dépendre que de la "partie rotationnelle" des données initiales. Ce résultat est l'objet de la prépublication [P1] qu'on décrit dans la suite.

À ma connaissance, le seul résultat similaire publié est un article assez technique de Ionescu et Lie [65] sur le système d'Euler-Maxwell en dimension 3. Le cas des équations d'Euler-Poisson a été annoncé en conférence (Nonlinear phenomena in dispersive equations, mai 2018, Lille <https://indico.math.cnrs.fr/event/2946/contributions/1714/>) par O. Pocovnicu, un preprint de D. Ginsberg sur l'existence en temps long pour l'équation des vagues existe également [54].

3.2.1 Le système dispersif-hyperbolique

On note $\mathbb{Q} = \Delta^{-1}\nabla\text{div}$ le projecteur sur les champs irrotationnels, $\mathbb{P} = I - \mathbb{Q}$ le projecteur sur les champs solénoïdaux. Ils satisfont entre autres

$$\text{div} \circ \mathbb{P} = 0, \quad \text{rot} \circ \mathbb{Q} = 0, \quad \text{div} \circ \mathbb{Q} = \text{div}, \quad \mathbb{Q} \circ \nabla = \nabla, \quad \nabla \text{div} \circ \mathbb{Q} = \Delta.$$

Reprenons la formulation des équations d'Euler-Korteweg (3)

$$\begin{cases} \partial_t w + \nabla(u \cdot w) + \nabla(\text{adiv}u) = 0, \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u - w \cdot \nabla w - \nabla(\text{adiv}w) + \nabla g(\rho) = 0. \end{cases}$$

En utilisant $\mathbb{Q}u \cdot \nabla \mathbb{Q}u = \nabla(|\mathbb{Q}u|^2/2)$, le système satisfait par $(w, \mathbb{Q}u, \mathbb{P}u)$ est

$$\begin{cases} \partial_t w + \nabla(u \cdot w) + \nabla(\text{adiv}\mathbb{Q}u) & = 0, \\ \partial_t \mathbb{Q}u + \mathbb{Q}(u \cdot \nabla \mathbb{P}u + \mathbb{P}u \cdot \nabla \mathbb{Q}u) + \frac{1}{2}\nabla(|\mathbb{Q}u|^2 - |w|^2) - \nabla(\text{adiv}w) + g'w & = 0, \\ \partial_t \mathbb{P}u + \mathbb{P}(u \cdot \nabla \mathbb{P}u + \mathbb{P}u \cdot \nabla \mathbb{Q}u) & = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Le cas irrotationnel $\mathbb{P}u = 0$ a été traité à la section précédente : la troisième équation est éliminée et les deux premières donnent une équation de Schrödinger quasilinéaire, globalement bien posée pour des données petites en dimension 3 et plus.

Si $\mathbb{P}u \neq 0$, les deux premières équations sont toujours à l'ordre principal les parties réelles et imaginaires d'une équation de Schrödinger. En effet comme w est un gradient

$$\nabla(\text{adiv}(\mathbb{Q}u)) = a\Delta\mathbb{Q}u + (\nabla a)\text{div}(\mathbb{Q}u), \quad \nabla(\text{adiv}w) = a\Delta w + (\nabla a)\text{div}w,$$

On désigne donc les deux premières équations dans (27) comme la partie dispersive. La troisième équation se voit comme une équation de transport quasilinéaire

$$\partial_t \mathbb{P}u + \mathbb{P}(u \cdot \nabla \mathbb{P}u) = -\mathbb{P}(\mathbb{P}u \cdot \nabla \mathbb{Q}u).$$

Dans le couplage dispersif/hyperbolique, la structure des nouveaux termes non linéaires de la partie dispersive est sans importance, par contre il est essentiel que les termes non linéaires de la partie transport contiennent tous $\mathbb{P}u$.

Dans la suite, on appelle dispersifs les termes $\mathbb{Q}u, w$ et leurs dérivées, et hyperboliques $\mathbb{P}u$ et ses dérivées. Les nonlinéarités ne dépendant que de $\mathbb{Q}u, w$, resp. $\mathbb{P}u$ sont dites purement dispersives, resp. purement transport, les autres termes sont dits dispersif-transport.

3.2.2 Le résultat principal

Comme dans le cas irrotationnel, on se place au voisinage d'un état constant ρ_c stable au sens où $g'(\rho_c) > 0$.

Dans la section 3.1.3 il était pratique de travailler sur le potentiel ϕ de u , ce n'est pas adapté au cas irrotationnel, on utilise des variables un peu différentes de celles de la section 3.1.3 :

$$l = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \nabla \rho, \quad \psi = \mathbb{Q}u + iU^{-1}\nabla l.$$

La variable ψ remplace la variable $v = U\phi + il$ de (19), elles sont liées par la formule $\psi = U^{-1}\nabla v$. On note $\mathcal{H}^s = H^{s+1} \times H^s$, $\mathcal{W}^{s,p} = W^{s+1,p} \times W^{s,p}$.

Théorème 3.5 ([P1]). *Pour $d \geq 5$, il existe $(\varepsilon_0, c, n, k) \in (\mathbb{R}^{+*})^2 \times \mathbb{N}^2$ tels que pour $\delta \leq \varepsilon_0$, si*

$$\|(\rho_0 - \rho_c, u_0)\|_{\mathcal{H}^{2n} \cap \mathcal{W}^{k,4}} \leq \varepsilon_0, \quad \|\mathbb{P}u_0\|_{W^{k,4}} \leq \delta$$

alors la solution de (27) existe sur un intervalle de temps $[0, T]$,

$$T \geq \frac{c}{\delta},$$

et sur cet intervalle

$$\|(\rho(t) - \rho_c, u(t))\|_{\mathcal{H}^{2n}} \lesssim \|(\rho_0 - \rho_c, u_0)\|_{\mathcal{H}^{2n}}, \quad \|\psi\|_{W^{k,4}} \lesssim \frac{\varepsilon}{\langle t \rangle^{d/4}} + \delta, \quad \|\mathbb{P}u\|_{W^{k,4}} \lesssim \delta.$$

Pour $d = 3, 4$, il existe $(\varepsilon_0, c, n, k) \in (\mathbb{R}^{+})^2 \times \mathbb{N}^2$, $p > \frac{2d}{d-2}$ tels que pour $\delta \leq \varepsilon_0$, si*

$$\|(\rho_0 - \rho_c, u_0)\|_{\mathcal{H}^{2n} \cap \mathcal{W}^{k,p'}} + \| |x|(\rho_0 - \rho_c, \mathbb{Q}u_0) \|_{L^2} \leq \varepsilon_0, \quad \|\mathbb{P}u_0\|_{W^{k,p'} \cap W^{k,p}} + \| |x| \mathbb{P}u_0 \|_{L^2} \leq \delta,$$

alors la solution de (27) existe sur un intervalle de temps $[0, T]$ avec

$$T \geq \frac{c}{\delta},$$

et sur cet intervalle

$$\begin{aligned} \|(\rho(t) - \rho_c, u)\|_{\mathcal{H}^{2n}} + \| |x| e^{-itH} \psi(t) \|_{L^2} &\lesssim \varepsilon_0, \quad \|\psi\|_{W^{k,p}} \lesssim \delta + \frac{\varepsilon}{\langle t \rangle^{d(1/2-1/p)}}, \\ \|\mathbb{P}u\|_{W^{k,p'} \cap W^{k,p}} + \| |x| \mathbb{P}u \|_{L^2} &\lesssim \delta. \end{aligned}$$

Remarque 3.8. (i) Le théorème est (subtilement) moins bon en dimensions 3 et 4 : pour des raisons sans doute techniques je ne sais pas propager la petitesse \mathcal{H}^{2n} sur des temps longs indépendamment de cette petitesse, le temps que donne la preuve est d'ordre ε_0/δ pour ε_0 assez petit mais indépendant de δ . Mais il n'est pas clair qu'on a sur cet intervalle de temps $\|(\rho(t) - \rho_c, u(t))\|_{\mathcal{H}^{2n}} \lesssim \|(\rho_0 - \rho_c, u_0)\|_{\mathcal{H}^{2n}}$.

(ii) Le théorème est le meilleur résultat "grossier" possible, au sens où le temps d'explosion de l'équation différentielle $x' = x^2$ est d'ordre $1/x(0)$.

Le schéma de preuve est similaire à celui du cas irrotationnel, et les bornes données dans le théorème sont naturellement les quantités "coincées" sur l'intervalle $[0, T]$.

Il y a essentiellement trois nouvelles difficultés : l'inégalité d'énergie (voir la proposition 3.2) doit être prouvée dans le cas rotationnel³, il faut de nouvelles estimations "d'énergie" pour l'équation de transport, et les nouveaux termes quadratiques transport-transport et transport-dispersif doivent être bornés comme l'étaient les termes purement dispersifs à la section 3.1.3.

Décrire plus en détail la procédure serait fastidieux et sans doute peu instructif, mais il est très facile de l'expliquer sur un modèle jouet, ce qu'on fait au paragraphe suivant.

3.2.3 Une preuve pour un modèle jouet

Les équations d'Euler-Korteweg se réécrivent dans les variables $\psi = \mathbb{Q}u + iU^{-1}\nabla l$

$$\begin{cases} \partial_t \psi - iH\psi = \mathcal{N}(\psi, \mathbb{P}u), \\ \partial_t \mathbb{P}u + \mathbb{P}(u \cdot \nabla \mathbb{P}u) = -\mathbb{P}(\mathbb{P}u \cdot \nabla \mathbb{Q}u). \end{cases}$$

3. J'ai appris après la rédaction de l'article que c'est fait dans [10].

La première équation est une équation d'évolution avec un mécanisme linéaire d'amortissement (la dispersion), la deuxième équation admet des estimations d'énergie, et tous ses termes non linéaires contiennent $\mathbb{P}u$. Le modèle le plus simplifié qu'on puisse imaginer correspondant à cette description est

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) = x^2 + y^2 + xy, \\ y'(t) = y(x + y). \end{cases} \quad (28)$$

Sa dynamique pour x, y petits est aisément intuitée : tant que $y \ll x \ll 1$, la première équation fait décroître exponentiellement x , puis une fois $x \asymp y$, x stationne vers cette valeur. Sur la deuxième équation y' est majoré par y^2 plus le produit de y par une fonction intégrable en temps, donc sur des temps d'ordre $1/y(0)$, $y(t)$ reste d'ordre $y(0)$.

Pour résumer, on a la propriété suivante :

Proposition 3.3. *Soit $(\varepsilon, \delta) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ tels que $|x(0)| \leq \varepsilon$, $|y(0)| \leq \delta \leq \varepsilon$. Pour ε, δ suffisamment petits, il existe $c > 0$ tels que la solution de (28) existe sur un intervalle de temps $[0, T]$ avec $T \geq c/\delta$.*

Démonstration. Il suffit d'insérer dans (28) l'ansatz

$$|x(t)| \leq \delta + 2\varepsilon e^{-t}, \quad |y(t)| \leq 2\delta \quad (29)$$

qui donne pour ε, δ assez petits (1/16 convient) et $t \leq c/\delta$ ($c = 1/12$ convient)

$$|x(t)| \leq \frac{3}{8}\delta + \frac{3}{2}\varepsilon e^{-t}, \quad |y(t)| \leq \frac{7}{4}\delta,$$

ce qui assure par connexité que la borne (29) est vraie sur $[0, c/\delta]$. \square

Avec ce point de vue, et en ayant bien compris le cas irrotationnel, l'énoncé comme le schéma de preuve du théorème 3.5 sont clairs : la décroissance e^{-t} est remplacée par $\langle t \rangle^{d(1/2-1/p)}$ (dont la seule propriété importante est l'intégrabilité), la valeur absolue par divers espaces fonctionnels bien choisis et on mime la preuve de la proposition 3.3.

Notons cependant que même en grande dimension la petitesse de $\|\mathbb{P}u\|_{H^{2n}}$ n'est pas propagée, ce terme est du même ordre que $\|\mathbb{Q}u\|_{H^{2n}}$. C'est lié au fait que dans les estimations d'énergie de chacun de ces termes des pertes de dérivées apparaissent, et ne se compensent qu'en couplant les estimations.

3.3 Perspectives

En anticipant sur le chapitre suivant, il existe en dimension 2 des solitons d'énergie arbitrairement petite sous réserve que $3 + \rho_c g''(\rho_c)/g'(\rho_c) \neq 0$. Sous cette condition, la limite $d \geq 3$ pour le scattering semble donc optimale, cependant si cette quantité s'annule la structure non linéaire dégénère et il serait intéressant de voir si la dispersion à petites données est alors vraie en dimension 2, voire 1.

Il n'y a actuellement pas d'analogue pour Euler-Korteweg au résultat classique de singularités en temps fini pour les équations d'Euler (Sideris [116]). Avant de pouvoir utiliser l'argument de viriel, il y a au moins deux directions à creuser : soit étudier le problème posé dans un domaine borné, ce qui aurait le mérite de faire le pont avec les problèmes aux limites des chapitres précédents, soit étudier le problème à frontière libre dans l'esprit de Jang-Masmoudi [69]. Dans

les deux cas il faudrait sans doute faire des hypothèses simplificatrices sur K (éventuelles bornes près de 0).

Dans un champ plus éloigné, l'existence globale de solutions faibles a été obtenu dans divers cas : hydrodynamique quantique ($K = 1/\rho$) [6], Navier-Stokes-Korteweg [78]. L'effet régularisant de la capillarité et de la viscosité jouent un rôle essentiel, et ont notamment débouché sur la construction de solutions faibles pour les équations de Navier-Stokes par limite zéro capillarité [122], l'approche opposée d'une limite zéro viscosité est bien sûr une direction intéressante.

Plus prospectif encore, il serait intéressant de construire une solution singulière pour une version modifiée de la dernière équation du système (27), et d'en déduire l'existence de solutions singulières pour le système total. Cela supposerait de faire une preuve un peu dans l'esprit de la section 3.2 (article [P1]) où on réussirait à contrôler la partie irrotationnelle de la vitesse tandis que la partie rotationnelle exploserait.

Ondes progressives et système d'Euler-Korteweg

Les résultats présentés ici correspondent à [A9, A12].

Dans le chapitre 3 on s'est intéressé aux mécanismes linéaires régissant la dynamique des solutions du système d'Euler-Korteweg

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) & = 0, \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla g(\rho) & = \nabla \left(K \Delta \rho + \frac{1}{2} K' |\nabla \rho|^2 \right). \end{cases} \quad (\text{EK})$$

Ce chapitre a le point de vue opposé, les ondes progressives correspondant à une dynamique non linéaire.

Ce sont des solutions régulières, de la forme $(\rho, u)(x, t) = (\underline{\rho}(x - \mathbf{c}et), \underline{u}(x - \mathbf{c}et))$, $|\mathbf{e}| = 1$ est la direction de propagation de l'onde. On appelle profils les fonctions $\underline{\rho}, \underline{u}$ mais on ne suivra pas cette notation, confondant abusivement une onde progressive $f(x, t)$ avec son profil \underline{f} .

En dimension 2 on s'intéresse à des profils localisés tels que $u \in L^2$ et il existe $\rho_c > 0$: $\rho - \rho_c \in L^2$, en dimension 1 on s'autorise des profils dont les limites en $\pm\infty$ existent et peuvent être différentes, mais dont les dérivées sont exponentiellement décroissantes à l'infini. Pour des profils de limites identiques on parlera de solitons, tandis que les profils de limites différentes à l'infini seront appelés fronts.

L'existence de fronts et solitons en dimension 1 a été obtenue par Benzoni-Danchin-Descombes [13] en 2005. Bien que le problème initial soit un système d'équations différentielles d'ordre 3, il se ramène à une unique équation différentielle intégrable grâce à plusieurs intégrales premières sur lesquelles on reviendra. Les fronts sont toujours stables, et un critère de stabilité à la Grillakis-Shatah-Strauss [59] est connu pour les solitons (de belles généralisations ont été obtenues plus récemment par Benzoni-Rodrigues dans le cas d'ondes périodiques [15, 16]). Il s'agit d'un critère de stabilité conditionnelle ; en l'occurrence il énonce que si $(\rho(0), u(0))$ est proche d'un soliton alors la solution associée en reste proche (modulo les invariances de l'équation) dans $H^1 \times L^2$. Malheureusement cette norme n'assure pas l'existence locale, de sorte

que la solution reste proche “tant qu'elle existe” seulement.

La construction de solitons pour les équations de Schrödinger non linéaires est un sujet classique, qui fait intervenir des outils désormais standard de méthodes variationnelle ou méthodes perturbatives. Par des techniques variationnelles je construis dans [A9] des “petits” solitons en dimension 2. En dimension 1, même si la stabilité inconditionnelle d'un soliton semble un problème hors de portée actuellement, la construction de solutions exotiques comme les “multi-solitons” donne des exemples de solutions globales non triviales. C'est le sujet de l'article [A12] où je construis des solutions de type multi-solitons-fronts pour les équations d'Euler-Korteweg. Ces deux points sont abordés aux sections 4.1 et 4.3. La section 4.2 contient la construction de solitons et fronts pour le système d'Euler-Korteweg ainsi que quelques généralités sur la stabilité orbitale. Elle est nécessaire pour la lecture de la section 4.3.

4.1 Existence de solitons en dimension 2

L'existence de solitons repose sur la minimisation d'une énergie à moment fixé, la vitesse du soliton est alors le multiplicateur de Lagrange associé au minimiseur.

4.1.1 Énergie, moment, vitesse du son

On a vu au chapitre 3 que le linéarisé (irrotationnel) des équations d'Euler-Korteweg est identique au linéarisé de l'équation de Gross-Pitaevskii. Lorsque $K = 1/\rho$, la transformation de Madelung (1) indique que cette similarité va plus loin : les équations sont en fait équivalentes pour des solutions régulières sans vide. Pour un coefficient K général, l'équivalence ne tient plus ; cependant des similarités structurelles persistent.

Énergie et moment de l'équation de Schrödinger On considère la classe d'équations de Schrödinger non linéaires

$$i\partial_t\psi + \Delta\psi = \frac{g(|\psi|^2)}{2}\psi, \quad (1)$$

avec $g(\rho_c) = 0$, on fait aussi l'analogie de l'hypothèse de stabilité (S) $g'(\rho_c) > 0$. Le facteur 1/2 est là pour une cohérence de notation avec le système d'Euler-Korteweg obtenu par la transformée de Madelung (voir (1)).

Un soliton se propageant l'axe des x_1 est solution de

$$-ic\partial_1\psi + \Delta\psi = \frac{g(|\psi|^2)}{2}\psi. \quad (2)$$

L'EDP d'évolution (1) se lit dans un formalisme hamiltonien

$$\partial_t\psi = J\delta H[\psi],$$

où l'opérateur antisymétrique J est simplement la multiplication par $-i$, et si on note G la primitive de g s'annulant en ρ_c , δH est la dérivée variationnelle de la fonctionnelle d'énergie

$$H[\psi] = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\nabla\psi|^2}{2} + \frac{G(|\psi|^2)}{4} dx.$$

Rappelons que la dérivée variationnelle d'une fonctionnelle $\mathcal{F}[U] = \int F(U, \nabla_x U) dx$ est

$$\delta\mathcal{F}(U, \nabla U) := \nabla_U F(U, \nabla_x U) - \sum_1^d \partial_{x_j} (\nabla_{\partial_{x_j} U} F(U, \nabla_x U)),$$

et représente pour le produit scalaire L^2 la différentielle de \mathcal{F} .

L'énergie d'une solution est formellement conservée¹, mais il existe une autre quantité importante liée à l'invariance par translation des équations : le moment. On le trouve par le calcul formel suivant : si $\psi_r(x) = \psi(x + r)$

$$H[\psi_r] = H[\psi] \Rightarrow \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} \delta H \nabla \bar{\psi} dx = 0,$$

on en déduit pour ψ solution de (1) la conservation du moment

$$P_{GP}^{\vec{r}}(\psi) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{(\psi - 1)} \nabla \psi dx. \quad (3)$$

Pour un soliton se déplaçant dans la direction de l'axe x_1 , la première composante du moment a un rôle privilégié, on la note

$$P_{GP}[\psi] = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{(\psi - 1)} \partial_1 \psi dx. \quad (4)$$

On a $\delta P_{GP} = -i \partial_1 \psi$, de sorte que le moment donne une écriture variationnelle de (2)

$$c \delta P_{GP}[\psi] = \delta H[\psi].$$

Énergie et moment des équations d'Euler-Korteweg Si $U = (\rho, u)$, u irrotationnel, on a formellement

$$\partial_t U = J \delta E[U], \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{div} \\ -\nabla & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\rho |u|^2 + K |\nabla \rho|^2}{2} + G(\rho) dx, \quad (5)$$

avec G une primitive de g . Le moment associé à l'invariance par translation est cette fois

$$\vec{P}(\rho, u) = \int_{\mathbb{R}^d} (\rho - \rho_c) u dx. \quad (6)$$

Remarquons au passage que lorsque $K = 1/\rho$, l'énergie et le moment pour Euler-Korteweg sont identiques à ceux de NLS en remplaçant $\psi = \sqrt{\rho} e^{i\phi/2}$, $\nabla \phi = u$.

Dans le cas irrotationnel $u = \nabla \phi$, on peut écrire une autre formulation de l'énergie et du moment qui semble moins naturelle mais qu'on privilégiera dans la suite : si $U = (\rho, \phi)$

$$\partial_t U = J \delta E[U], \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$E = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\rho |\nabla \phi|^2 + K |\nabla \rho|^2}{2} + G(\rho) dx, \quad \vec{P} = \int_{\mathbb{R}^d} (\rho - \rho_c) \nabla \phi dx. \quad (8)$$

Comme pour l'équation de Schrödinger, on notera

$$P(\rho, \phi) = \int_{\mathbb{R}^d} (\rho - \rho_c) \partial_1 \phi dx. \quad (9)$$

L'équation d'un soliton s'écrit alors sous une forme variationnelle

$$-c \partial_1 U = J \delta E[U] \Leftrightarrow c \delta P[U] = \delta E[U].$$

1. Pour une discussion fine sur l'espace d'énergie, voir [49].

Vitesse du son Comme pour les équations d'Euler classiques, la vitesse du son est

$$c_s = \sqrt{\rho_c g'(\rho_c)}. \quad (10)$$

Par transformée de Madelung, on peut définir la vitesse du son d'une équation de Schrödinger non linéaire comme celle du système d'Euler-Korteweg associé, cette vitesse vaut $\sqrt{2}$ pour l'équation de Gross-Pitaevskii. Une règle générale est qu'il n'existe pas de soliton de vitesse plus grande que la vitesse du son. Pour l'équation de Gross-Pitaevskii, le résultat a été obtenu par P. Gravejat [55] (voir [56] pour une version interdisant les ondes soniques en dimension 2). Il est généralisé à des non linéarités de la forme $g(|\psi|^2)\psi$ par M. Maris [94].

4.1.2 Résultat principal

Un soliton se déplaçant dans la direction de l'axe x_1 satisfait

$$\begin{cases} -c\partial_1\rho + \operatorname{div}(\rho\nabla\phi) = 0, \\ -c\partial_1\phi + \frac{|\nabla\phi|^2}{2} - K\Delta\rho - \frac{K'|\nabla\rho|^2}{2} + g(\rho) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Dans le formalisme variationnel de (5), on voit que ce système est de la forme

$$\delta E[U] = c\delta P[U],$$

ce qui invite à construire les solitons par minimisation de E à P fixé. L'énergie E a hélas un défaut de coercivité, elle ne contrôle pas la norme $H^1 \times L^2$ de $(\rho - \rho_c, \nabla\phi)$. Pour pallier à ce défaut, on introduit une énergie modifiée : comme $g'(\rho_c) > 0$, il existe \tilde{g} définie sur \mathbb{R} telle que $\tilde{g} = g$ au voisinage de ρ_c et pour $\rho \in \mathbb{R}$, $\tilde{g} \asymp \rho - \rho_c$, on note \tilde{G} la primitive de \tilde{g} s'annulant en ρ_c , et on a

$$\tilde{G}(\rho) \asymp (\rho - \rho_c)^2.$$

On fixe également χ une fonction de troncature bornée inférieurement et telle que $\chi(\rho) = \rho$ au voisinage de ρ_c . L'énergie modifiée est définie par

$$\tilde{E}(\rho, \phi) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2}(\chi(\rho)|\nabla\phi|^2 + K(\chi(\rho))|\nabla\rho|^2) + \tilde{G}(\rho)dx, \quad (12)$$

elle satisfait $\tilde{E}(\rho, \phi) \gtrsim \|\rho - \rho_c\|_{H^1}^2 + \|\nabla\phi\|_{L^2}^2$. Le résultat principal de [A9] s'énonce comme suit :

Théorème 4.1 ([A9]). *Soit $\rho_c \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que*

$$g'(\rho_c) > 0, \quad 3 + \frac{\rho_c g''(\rho_c)}{g'(\rho_c)} \neq 0, \quad (13)$$

pour $p > 0$ on définit

$$\tilde{E}_{\min}(p) := \inf_{(\rho, \phi) \in (\rho_c + H^1) \times \dot{H}^1, P(\rho, \phi) = p} \tilde{E}(\rho, \phi). \quad (14)$$

Il existe $p_0 > 0$ tel que pour $0 \leq p \leq p_0$, l'infimum est atteint en un minimiseur $(\rho_p, \phi_p) \in \cap_{j \geq 0} (\rho_c + H^j) \times \dot{H}^j$, ce minimiseur est une solution de (11) pour un certain $c_p > 0$. De plus, si $c_s = \sqrt{\rho_c g'(\rho_c)}$, alors

$$\exists \alpha, \beta > 0 : \forall 0 \leq p \leq p_0, \quad c_s p - \beta p^3 \leq \tilde{E}_{\min}(p) = E(\rho_p, \phi_p) \leq c_s p - \alpha p^3, \quad (15)$$

$$c_s - \beta p^2 \leq c_p \leq c_s - \alpha p^2. \quad (16)$$

Remarque 4.1. Il n'est pas clair que (ρ_p, ϕ_p) est un minimiseur sous contrainte de E . C'est cependant bien une solution de (11) car les estimations a priori obtenues durant sa construction assurent $\chi(\rho_p) = \rho_p$, $\tilde{g}(\rho_p) = g(\rho_p)$.

Remarque 4.2. L'hypothèse $3 + \frac{\rho_c g''(\rho_c)}{g'(\rho_c)} \neq 0$ n'est sans doute pas technique. Dans le cas de l'équation de Schrödinger non linéaire elle est a été mise en évidence par Chiron et Maris [34] comme une condition nécessaire et suffisante pour la stricte concavité de l'application moment \rightarrow énergie près de 0, une propriété essentielle pour utiliser une méthode de concentration compacité. Si $3 + \frac{\rho_c g''(\rho_c)}{g'(\rho_c)} = 0$, la dispersion à petites données pour (EK) en dimension 2 est donc plausible, mais est une question ouverte, même lorsque $K = 1/\rho$.

4.1.3 Le cas de l'équation de Schrödinger

D'après la transformation de Madelung déjà mentionnée (1), l'équation de Schrödinger non linéaire est formellement équivalente au système d'Euler-Korteweg. Rappelons qu'elle s'écrit

$$i\partial_t \psi + \Delta \psi = \frac{g(|\psi|^2)}{2} \psi.$$

On suppose satisfaite la condition "aux limites" $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |\psi| = \sqrt{\rho_c}$, avec $g(\rho_c) = 0$.

Pour $g(r) = r - 1$ il s'agit de l'équation de Gross-Pitaevskii, mais la littérature n'est pas restreinte à ce cas.

Sur la base de calculs formels et numériques, une liste de conjectures notables, retenues comme "le programme de Roberts", a été donnée dans les années 80 pour l'équation de Gross-Pitaevskii [71, 72], et a guidé également les recherches dans le cas général. Elles concernent l'existence, la stabilité et les propriétés qualitatives des solitons. En particulier, on s'attend à ce que dans le plan moment-énergie (P, H) , il existe une branche de solitons correspondant aux minimiseurs de l'énergie à moment fixés, ainsi qu'à l'existence de solitons pour toute vitesse dans $]0, c_s[$ (mais pas forcément sur cette branche).

En dimension un, du fait de la structure hamiltonienne le problème se ramène à une équation différentielle intégrable pour laquelle il n'est pas difficile de décrire assez précisément les solutions, même si la forme des branches de solitons, l'interprétation variationnelle et les questions de stabilité ne sont pas triviales. On pourra se référer à Chiron [31, 32].

Existence de solitons en dimension supérieure à 1 Le premier résultat rigoureux est dû à Béthuel et Saut [21], qui construisent des solitons sur un petit intervalle de vitesses $]0, \varepsilon]$ en dimension 2. L'approche est variationnelle et repose sur un lemme du col. Un résultat similaire est obtenu en dimension 3 par Béthuel-Orlandi-Smets [20]. Dans les deux cas ce sont des solitons dont le moment et l'énergie sont grands, et ils admettent des zones de vide, ce qui n'encourage pas à étudier leur analogue pour le système d'Euler-Korteweg.

L'approche par minimisation de l'énergie à moment fixée est introduite par Béthuel-Gravejat-Saut [19]. Notons $H_{\min}(p)$ l'infimum de $E(\psi)$ à moment fixé égal à p . Il existe un minimiseur pour tout moment non nul en dimension 2 et 3, ce qui donne une branche, parfois qualifiée de branche de Roberts, dans le plan moment-énergie. Leur approche suit la méthode classique de concentration-compacité de P.-L. Lions [88], qu'ils implémentent pour des raisons techniques en considérant des suites de minimiseurs sur des tores de plus en plus grands. C'est également la méthode qu'on suit dans [A9] et qu'on décrira un peu plus en détail au paragraphe suivant. Il est à noter que la vitesse étant obtenue comme un multiplicateur de Lagrange, on ne connaît

pas sa régularité en tant que fonction de p hormis qu'il s'agit d'une application croissante (c'est une conséquence de la concavité de $H_{\min}(p)$). La dimension 2 est de plus très différente de la dimension 3. Dans le premier cas il existe des solitons de moment et énergie arbitrairement petits, on s'attend à ce que la branche des minimiseurs contient toutes les vitesses. Dans le deuxième il existe une énergie minimale, les vitesses sont incluses dans un intervalle $]0, a[$, $a < c_s$.

L'existence de solitons pour $c \in]0, c_s[$ et une large classe de non-linéarités est finalement prouvée en dimension 3 et plus par Maris [95], ces solitons sont obtenus par une minimisation sous contrainte différente, liée à une identité de Pohozaev. Ce résultat clarifie aussi le rôle un peu artificiel du point d'énergie minimale dans le plan moment-énergie, laissant penser que "la" courbe vitesse \rightarrow énergie est régulière sur $]0, c_s[$. Ainsi la présence d'un point de rebroussement dans la figure 4.1 ne serait que l'effet d'un mauvais paramétrage.

Pour terminer sur les questions d'existence, la minimisation à moment fixé de [19] a été revisitée récemment par Chiron et Maris [34]. Ils la généralisent à une large classe de non linéarités, et parviennent à résoudre directement le problème de minimisation, sans passer par l'étape de minimisation sur des tores. L'intérêt de ce dernier point est que la précompacité des suites minimisantes assure la stabilité orbitale des solitons dans l'ensemble des minimiseurs, d'après un argument classique de Cazenave et Lions [29].

Enfin, pour ne pas être trop incomplet, il faut mentionner que les solitons peuvent être également construits par des méthodes perturbatives radicalement différentes de l'approche variationnelle, voir par exemple Wei et al [83] et les références de cet article.

Aspects qualitatifs Indépendamment de la dimension, un soliton obtenu par minimisation se propageant selon l'axe x_1 est symétrique par rapport à cet axe, c'est à dire qu'à translation près il ne dépend que de $(x_1, |x_\perp|)$, $(x_1, x_\perp) \in \mathbb{R}^d$.

De façon un peu surprenante, les solitons sont d'énergie finie mais pas dans $1 + H^1$, même à multiplication près par un complexe de module 1. Le problème se situe dans la décroissance trop lente à l'infini des solitons, voir à ce sujet Gravejat [57]. Ce défaut d'intégrabilité rend la définition du moment plus technique.

Enfin il y a deux limites remarquables : la limite $c \rightarrow 0$ et la limite transonique $c \rightarrow c_s$. La première n'est pas forcément pertinente pour le système d'Euler-Korteweg mais elle éclaire le théorème 4.1. Les résultats diffèrent selon que la dimension est 2 ou 3. Bien qu'un certain nombre de résultats vrais en dimension 3 ont un analogue en dimension supérieure j'ai choisi de ne pas en parler pour ne pas alourdir le propos.

Dimension 2 Les solitons construits par un lemme du col forment deux vortex à distance d'ordre $2/c$ [21], ce résultat est limité à l'équation de Gross-Pitaevskii. On suppose, mais c'est un problème ouvert, que ce sont les mêmes solitons que ceux obtenus par minimisation à moment fixé dans la limite $p \rightarrow \infty$. Du fait de l'existence de vortex on ne peut pas écrire $\psi = \sqrt{\rho} e^{i\phi}$ avec ρ, ϕ continues, aussi régulier que soit ψ . C'est une obstruction évidente à l'extension du théorème 4.1 au delà de petites données. Même si ça ne signifie pas qu'il ne peut pas exister de solitons au système d'Euler-Korteweg de grand moment, dans un tel régime ils seront forcément très singuliers.

Dans la limite dite transonique $c \rightarrow c_s$, pour l'équation de Gross-Pitaevskii, Jones et al conjecturent la convergence des solitons après changement d'échelle vers des solitons de l'équation de Kadomtsev-Petviashvili I au sens suivant ; si $c = \sqrt{2 - \varepsilon^2}$, et ψ_ε est un minimiseur associé,

en posant

$$\psi_\varepsilon(x_1, x_2) = \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{6}A\right)e^{i\frac{\varepsilon}{6\sqrt{2}}\phi}(z_1, z_2)$$

où $(z_1, z_2) = (\varepsilon x_1, \varepsilon^2 x_2 / \sqrt{2})$ sont des variables rééchelonnées, on voit en écrivant l'EDP et en groupant les termes par puissance de ε que $\partial_1 \phi = A + O(\varepsilon^2)$ et A approche un état fondamental de KPI

$$\partial_1 A - A\partial_1 A + \partial_1^{-1}\partial_2^2 A - \partial_1^3 A = O(\varepsilon^2).$$

On parle alors d'ondes de raréfaction.

La première preuve rigoureuse en dimension 2 est due à Béthuel, Gravejat et Saut dans [18] pour l'équation de Gross-Pitaevskii. Elle est étendue au cas général par Chiron et Maris [33], sous une condition analogue à (13). Dans ce régime, l'énergie satisfait $H_{\min}(p) \sim c_s p$, et en particulier tend vers 0, ce qu'on voit aisément en branchant l'ansatz dans la définition de l'énergie et du moment. Le théorème 4.1 de [A9] est une extension de ces travaux pour le système d'Euler-Korteweg.

Indépendamment de la dimension, la branche des minimiseurs est concave, ce qui est une indication de stabilité cohérente avec les résultats de [34]. On la pense de plus régulière, de sorte que les vitesses dE/dP forment bien un intervalle, mais c'est une conjecture.

L'existence et le nombre d'autres branches en plus de celle correspondant aux minimiseurs ne sont pas clairs. Des calculs numériques menés récemment par Chiron et Scheid [35] invitent à penser qu'il pourrait en exister autant que de solitons de KPI, ce qui invite bien sûr à construire ces branches supplémentaires par des méthode perturbatives près d'un soliton de KPI correctement rééchelonné, c'est un problème actuellement ouvert.

Dimension 3 Dans la limite $c \rightarrow 0$, les solitons forment des anneaux de vorticité [20] de rayon $1/\varepsilon$ si $c \sim \varepsilon |\log(\varepsilon)|$. Qualitativement, c'est une propriété complètement similaire à la dimension 2. La preuve dans [20] est cependant très différente de la dimension 2, et plus dans l'esprit de [19]. Une preuve par lemme du col (qui donne un intervalle de vitesses) se trouve aussi dans [30]. Comme en dimension 2, il semble difficile de construire des solitons similaires pour le système d'Euler-Korteweg dans ce régime (du moins par des méthodes variationnelles où la régularité elliptique est souvent importante).

La limite transonique $c \rightarrow c_s$ a des différences et des ressemblances remarquables avec la dimension 2 : dans [33], Chiron et Maris prouvent que les solitons ont encore une asymptote de la forme $(1 + \varepsilon^2 A)e^{i\varepsilon\phi}$, et convergent vers un état fondamental de KPI. Au plan technique les estimées elliptiques nécessaire pour obtenir la convergence sont significativement plus délicates mais c'est surtout l'énergie des solutions qui change radicalement pour une raison d'échelle très simple :

$$\|\varepsilon^2 A(\varepsilon x_1, \varepsilon^2 x_2)\|_{L^2} \asymp \varepsilon, \|\varepsilon^2 A(\varepsilon x_1, \varepsilon^2 x_2, \varepsilon^2 x_3)\|_{L^2} \asymp \varepsilon^{-1}.$$

Ainsi dans la limite transonique $\|\psi - 1\|_{L^\infty} \rightarrow 0$, mais $H[\psi] \rightarrow \infty$ du fait de l'étalement spatial. Par ailleurs, la structure des branches de solutions dans le plan (P, H) est plus subtile : il existe une branche "basse" correspondant aux minimiseurs, dont la limite $p \rightarrow \infty$ correspond à la limite $c \rightarrow 0$. La branche basse cesse de correspondre aux minimiseurs à partir du moment p_0 où elle croise la droite $E = \sqrt{2}p$. Il existe aussi au moins une branche "haute" qui correspondrait aux solitons construits dans [95], dont la limite $p \rightarrow \infty$ correspond à la limite transonique. Les deux branches se rejoignent en un point d'énergie minimale, voir la figure 4.1 (aimablement fournie par Philippe Gravejat).

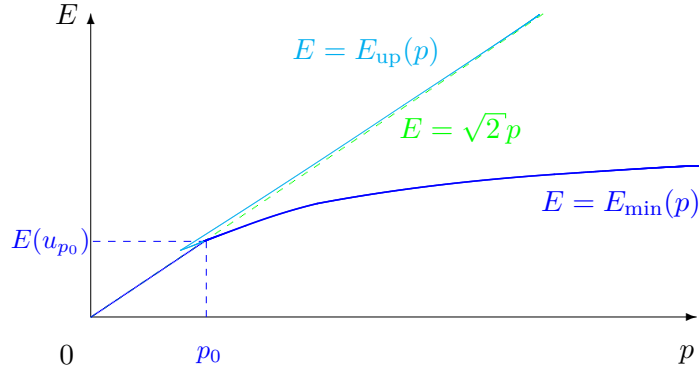


FIGURE 4.1 – Graphe énergie-moment des ondes progressives de Gross-Pitaevskii

4.1.4 Éléments de preuve du théorème 4.1

Quelques simplifications Quitte à faire un changement d'échelle, on peut supposer

$$\rho_c = 1, \quad g'(\rho_c) = 1, \quad (17)$$

ce qui implique en particulier que la vitesse du son vaut 1, le moment et l'énergie modifiée sont (voir (12))

$$\tilde{E}[\rho, \phi] = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\chi |\nabla \phi|^2 + K(\chi(\rho)) |\nabla \rho|^2}{2} + \tilde{G}(\rho) dx, \quad P[\rho, \phi] = \int_{\mathbb{R}^2} (\rho - 1) \partial_1 \phi dx.$$

Plusieurs arguments pour la construction de soliton de l'équation de Gross-Pitaevskii dans [19] s'appuient la formulation fluide, et la présence de vorticité requiert des arguments topologiques délicats pour utiliser cette formulation "hors de la vorticité". En travaillant ici sur des solitons supposément proches de 1 et directement sur une formulation fluide, on évite ces difficultés. Enfin, les problèmes de définition du moment dans des espaces peu naturels sont également évités puisque l'énergie et le moment sont clairement bien définis pour $(\rho - 1, \nabla \phi) \in H^1 \times L^2$.

Quelques difficultés Le schéma de preuve est de résoudre le problème de minimisation sur des grands tores $\mathbb{T}_n^2 = (\mathbb{R}/(2n\pi\mathbb{Z}))^2$

$$\inf \{ \tilde{E}[\rho, \phi], (\rho - 1, \nabla \phi) \in H^1(\mathbb{T}_n^2) \times L^2(\mathbb{T}_n^2) \}.$$

Pour tout n , la solution (ρ_n, ϕ_n) satisfait (11) sur \mathbb{T}_n^2 . Ce système donne des estimées a priori sur les solutions, permettant d'obtenir la compacité locale de $(\rho_n, \nabla \phi_n)$.

Contrairement au cas de NLS, le système d'équations elliptiques est quasi-linéaire, ce qui rend moins simple l'obtention d'estimées a priori. Pour schématiser, au lieu de $\Delta \psi = \psi^2 + f$ on a

$$\Delta \psi = |\nabla \psi|^2 + f,$$

et le seul contrôle donné par l'énergie est la petitesse de ψ dans H^1 , qui est "critique" dans \mathbb{R}^2 . Cependant si on suppose a priori que $\psi \in H^2$, on a par injection de Sobolev et interpolation

$$\|\Delta \psi\|_2 \leq \|\nabla \psi\|_4^2 + \|f\|_2 \lesssim \|\nabla \psi\|_2 \|\Delta \psi\|_2 + \|f\|_2 \Rightarrow \|\Delta \psi\|_2 \lesssim \|f\|_2.$$

On passe ainsi d'une borne H^1 à une borne H^2 , par itération la solution est C^∞ ... si initialement elle est H^2 .

Pour construire des solutions régulières, il faut donc rajouter une étape : au lieu de minimiser l'énergie \widetilde{E} , on minimise $\widetilde{E}^\varepsilon$ où est rajouté $\int \varepsilon(|\Delta\phi|^2 + |\Delta\rho|^2)dx$, puis on fait tendre ε vers 0 en s'assurant que si le moment est assez petit, les estimées sont uniformes en ε .

Compacité de la suite (ρ_n, ϕ_n) La fin de l'argument est assez classique : il s'agit d'appliquer un argument de concentration-compacité (voir P.-L. Lions [88]), dont on rappelle rapidement le principe. Pour ψ_n une suite bornée dans H^1 , le défaut de compacité de l'injection $H^1(\mathbb{R}^2) \subset L^2(\mathbb{R}^2)$ peut se manifester de deux manières :

[A1] “dichotomie” lorsqu’une suite se sépare en deux parties (ou plus) s'éloignant l'une de l'autre,

[A2] “étalement” lorsque $(\rho_n, \phi_n)(x) = (r_n, f_n)(x/\lambda_n)$, $\lambda_n \rightarrow \infty$.

Le mécanisme qui interdit ces comportements est la concavité de l'énergie minimale $p \rightarrow \widetilde{E}_{\min}(p)$, ou plutôt sa sous-additivité, qui en est une conséquence. La concavité découle d'arguments de symétrie très généraux, tandis que la *stricte* sous additivité utilise des estimations fines de $\widetilde{E}_{\min}(p)$. Ces estimations sont obtenues grâce à des “quasi-minimiseurs”, qui sont inspirés de la limite KPI pour les solitons de NLS.

Admettons donc que \widetilde{E}_{\min} est strictement sous additive, et supposons par l'absurde que la dichotomie a lieu, disons (ρ_n, ϕ_n) se sépare en $(\rho_n^1, \phi_n^1) + (\rho_n^2, \phi_n^2)$, on a d'une part

$$p = P[\rho_n, \phi_n] \sim P[\rho_n^1, \phi_n^1] + P[\rho_n^2, \phi_n^2] := p_1 + p_2,$$

et d'autre part

$$\widetilde{E}_{\min}(p) = \widetilde{E}[\rho_n, \phi_n] \sim \widetilde{E}[\rho_n^1, \phi_n^1] + \widetilde{E}[\rho_n^2, \phi_n^2] \geq \widetilde{E}_{\min}(p_1) + \widetilde{E}_{\min}(p_2), \quad (18)$$

ce qui contredit la stricte sous-additivité.

Bien sûr on passe sous silence diverses difficultés techniques : notamment le lien entre l'énergie minimale sur les tores et sur \mathbb{R}^2 , la construction rigoureuse des “profils” dans l'argument de dichotomie, le contrôle de la vitesse (qui dépend de n), ainsi que l'interdiction de l'étalement. Certains points se traitent par des arguments génériques, mais d'autres utilisent réellement la structure des équations d'Euler-Korteweg. Par exemple les estimations de la vitesse reposent sur des identités de Pohozaev propres à la forme explicite de l'énergie et du moment. De même, lorsqu'on élimine le scénario d'étalement, on montre par des estimations d'énergie localisées que la partie “étalée” du soliton a une énergie équivalente au produit de son moment et sa vitesse. Ce point est essentiel pour un argument de sous additivité similaire à (18).

4.2 Solitons et fronts en dimension 1

Dans cette section on décrit rapidement les résultats propres à la dimension 1 sur l'existence et la stabilité de solitons et de fronts, avec un court rappel bibliographique sur la stabilité orbitale des solitons. Les résultats sur les solitons d'Euler-Korteweg viennent de [13], à quelques détails près autour de la stabilité contenus dans [A9, A12]

4.2.1 Existence

On considère des solutions régulières de la forme $(\rho, u)(x - ct)$, avec $\lim_{\pm\infty}(\rho, u) = (\rho_{\pm}, u_{\pm})$, et pour $k \geq 1$, $\lim_{\pm\infty}(\rho^{(k)}, u^{(k)}) = (0, 0)$.

Proposition 4.1 (existence de fronts [13]). *Si (ρ, u) est un front, il existe $(j, q) \in \mathbb{R}^2$ tels que*

$$\begin{cases} \rho(u - c) = j, \\ \frac{(u - c)^2}{2} + g(\rho) - K\partial_x^2\rho - \frac{1}{2}K'(\partial_x\rho)^2 = q. \end{cases} \quad (19)$$

Inversement, soit $f(\rho, j, q) = j^2/(2\rho^2) - q + g(\rho)$, $F(\rho, j, q) = \int_{\rho_-}^{\rho} f(r, j, q)dr$, si

$$f(\rho_+, j, q) = f(\rho_-, j, q) = F(\rho_+, j, q) = 0, \quad f'(\rho_{\pm}) > 0, \quad (20)$$

et f change de signe exactement une fois sur $[\rho_-, \rho_+]$, alors il existe un front.

La condition $f'(\rho_{\pm}) > 0$ est équivalente à la condition de subsonicité

$$(u_{\pm} - c)^2 < \rho_{\pm}g'(\rho_{\pm}).$$

Les identités (19) sont un calcul, la première équation montre que u se déduit directement de ρ . Cela mène à résoudre l'équation différentielle

$$K\partial_x^2\rho + \frac{1}{2}K'(\partial_x\rho)^2 = f(\rho, j, q) \Rightarrow \frac{1}{2}K(\partial_x\rho)^2 = F(\rho, j, q), \quad (21)$$

les conditions (20) assurent l'existence d'une solution reliant ρ_- à ρ_+ ("orbite hétérocline"). On peut également les interpréter comme assurant le fait que ρ_{\pm} sont des points selle de la première équation dans (21).

L'existence de solitons est un cas particulier contenu dans la proposition précédente mais dont les particularités valent d'être énoncées à part :

Proposition 4.2 (existence de solitons [13]). *Soit un soliton de limite à l'infini (ρ_+, u_+) , on suppose $g(\rho_+) = 0$, alors $q = j^2/(2\rho_+^2)$, et*

$$f(\rho, j, q) = \frac{j^2}{2\rho^2} - \frac{j^2}{2\rho_+^2} + g(\rho).$$

Si $(u_+ - c)^2 < \rho_+g'(\rho_+)$ et g est bornée au voisinage de 0, il existe un soliton, tel que ρ est solution du problème

$$\begin{cases} \frac{1}{2}K(\partial_x\rho)^2 = G(\rho) - \frac{(u_+ - c)^2}{2\rho}(\rho_+ - \rho)^2, \\ \lim_{\pm\infty}\rho = \rho_+, \end{cases}$$

avec G la primitive de g s'annulant en ρ_+ .

À ρ_+ fixé, les solitons forment une branche dépendant de façon régulière de c . En particulier, étant donné un front de limite (ρ_+, u_+) en $+\infty$, il existe toujours un soliton de même limite plus rapide.

La solution ρ satisfait $\rho \leq \rho_+$, et son minimum ρ_{\min} est $\sup\{\rho < \rho_+ : G(\rho) - \frac{(u_+ - c)^2}{2\rho}(\rho_+ - \rho)^2 = 0\}$ (l'existence de cette quantité est le seul point où on utilise la bornitude de g près de 0). Dans la littérature de l'équation de Schrödinger ce profil est qualifié de "bulle". Avant l'analyse du système d'Euler-Korteweg l'existence et la stabilité de bulles pour l'équation de Schrödinger était déjà bien documentée [8, 9, 84]. On conjecture en général que les solitons sont stables si leur vitesse (c'est à dire $c - u_+$) est assez proche de la vitesse du son.

4.2.2 Généralités sur la stabilité

Ce paragraphe ne parle que de résultats anciens et très connus, mais nécessaires pour décrire le paragraphe 4.2.3 et la section 4.3. Pour une équation hamiltonienne

$$\partial_t U + J\delta H[U] = 0, \quad (22)$$

en présence d'invariances on ne peut pas espérer qu'une donnée initiale proche d'un soliton reste proche uniformément en temps. Par exemple dans notre cas, fixons $U_{c_0} = (\rho_{c_0}, u_{c_0})$ un soliton de vitesse c_0 . Pour des solitons correctement choisis l'application $c \rightarrow U_c$ est régulière, donc pour $c - c_0 \ll 1$, on a $\|U_{c_0}(\cdot) - U_c(\cdot)\|_{H^1 \times L^2} \ll 1$, mais évidemment il n'est pas possible d'avoir

$$\|U_{c_0}(\cdot - c_0 t) - U_c(\cdot - ct)\|_{H^1 \times L^2} \ll 1$$

uniformément en temps si $c \neq c_0$.

Ce défaut est lié au fait que l'équation est invariante par translation. Le bon concept dégagé rigoureusement dans les années 80 est la stabilité "modulo les invariances", usuellement qualifiée de stabilité orbitale, ou modulationnelle, voir entre autres Cazenave-Lions [29], Grillakis-Shatah-Strauss [59], Weinstein [125], ainsi que des travaux antérieurs de physiciens [73].

Pour décrire un peu plus en détail le principe et fixer les idées, supposons que (22) est invariante par translation, le moment associé à cette invariance est $^2 P = \frac{1}{2} \int \langle J^{-1} \partial_x U, U \rangle dx$. Un soliton U_c de vitesse c satisfait

$$-c \partial_x U + J\delta H[U] = 0 \Leftrightarrow (\delta H - c\delta P)[U] = 0. \quad (23)$$

Une fonction de Lyapunov naturelle est donc $E = H - cP$, ou plus précisément $U \rightarrow E[U] - E[U_c]$. Comme $\delta E[U_c] = 0$, on a près de U_c ,

$$E[U] - E[U_c] \simeq \langle \delta^2 E[U_c](U - U_c), U - U_c \rangle, \quad (24)$$

ce qui réduit la stabilité non linéaire à une (forme affaiblie de) coercivité de la forme quadratique associée à $\delta^2 E[U_c]$.

Remarque 4.3. Après changement de variable $x \rightarrow x - ct$, le linéarisé du problème (22) près de U_c s'écrit $\partial_t V + J\delta^2(H - cP)[U_c]V = 0$, qui est un problème associé au hamiltonien $\frac{1}{2} \langle \delta^2(H - cP)[U_c]V, V \rangle$. Cela souligne le lien entre stabilité linéaire et non linéaire, voir le paragraphe 4.3 pour plus de détails sur le semi-groupe engendré par $J\delta^2 E[U_c]$.

Il y a deux défauts de coercivité dans (24), d'une part du fait de l'invariance par translation le noyau est non trivial (il contient $\partial_x U_c$), d'autre part d'après (23) U_c est un point critique de $U \rightarrow (H - cP)[U]$, mais ce n'est en général pas un minimum local, il y a aussi une valeur propre négative. Les hypothèses classiques consistent à supposer que ce sont les deux seuls défauts :

2. Évidemment cela suppose que J^{-1} est inversible, ce qui n'est en général pas le cas. En particulier pour Euler-Korteweg $J = \begin{pmatrix} 0 & \partial_x \\ \partial_x & 0 \end{pmatrix}$, même si on retrouve formellement le moment $\int_{\mathbb{R}} (\rho - \rho_+) u dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\rho - \rho_+ \quad u) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho - \rho_+ \\ u \end{pmatrix} dx$.

Hypothèses spectrales On considère $\delta^2 E[U_c]$ comme un opérateur non borné sur L^2 , on suppose :

[A1] Le noyau est réduit à $\text{vect}(\partial_x U_c)$.

[A2] $\delta^2 E[U_c]$ a une unique valeur propre négative associée à un vecteur propre U^- .

[A3] $\delta^2 E$ définit une forme quadratique bornée sur un espace de Hilbert X , dans lequel (22) est localement bien posé, et il existe $\alpha, C > 0$

$$\langle \delta^2 E[U_c]V, V \rangle \geq \alpha \|V\|_X^2 - C(\langle V, \partial_x U_c \rangle^2 + \langle V, U^- \rangle^2). \quad (25)$$

Remarque 4.4. Dans le cas du système d'Euler-Korteweg, $X = H^1 \times L^2$. Les hypothèses sont satisfaites hormis le fait que le problème est bien posé dans cet espace.

La modulation La modulation sert à supprimer la partie “noyau” du défaut de coercivité de $\delta^2 E[U_c]$. Sous des hypothèses génériques, on montre que si $\inf_s \|U_c(\cdot - s) - U\| \ll 1$, alors cet inf est atteint en un point $s(U)$ tel que $\langle U_c(\cdot - s) - U, \partial_x U_c(\cdot - s) \rangle = 0$, autrement dit $U_c - U(\cdot + s) \in \text{Ker}(\delta^2 E[U_c])^\perp$.

Le moment d'instabilité La valeur propre négative est une source d'instabilité potentielle, mais d'autre part la conservation de P contraint la dynamique. Le moment d'instabilité est défini comme $m(c) = E[U_c]$. Si les solitons dépendent régulièrement de c , on peut définir $m''(c)$, qui vaut aussi $-dP/dc$ du fait de l'identité $\delta E[U_c] = 0$. Si cette quantité est positive, on peut montrer par des arguments élémentaires (voir par exemple le théorème 3.3 de [59]) que la forme quadratique $\delta^2 E[U_c]$ est définie positive sur $(\partial_x U_c, \delta P[U_c])^\perp$, ce qui mène à la variante de (25)

$$\langle \delta^2 E[U_c]V, V \rangle \geq \alpha \|V\|_X^2 - C(\langle V, \partial_x U_c \rangle^2 + \langle V, \delta P[U_c] \rangle^2). \quad (26)$$

Stabilité non linéaire On fixe $s(U)$ le paramètre de modulation.

Par construction $\langle \partial_x U_c(\cdot - s), U_c(\cdot - s) - U \rangle = 0$ et par développement de Taylor,

$$E[U] - E[U_c] = E[U(\cdot + s)] - E[U_c] = \langle \delta^2 E[U_c](U(\cdot + s) - U_c), U(\cdot + s) - U_c \rangle + o(\|U_c - U(\cdot + s)\|_X).$$

Si de plus³ $P[U] = P[U_c]$, on a $\langle \delta P[U_c], U(\cdot + s) - U_c \rangle = o(\|U(\cdot + s) - U_c\|_X)$, ainsi d'après la condition de coercivité (25)

$$E[U] - E[U_c] \gtrsim \|U(\cdot + s) - U_c\|_X^2.$$

La stabilité modulo translation s'obtient alors par les arguments habituels.

4.2.3 Stabilité pour Euler-Korteweg

Comme dans le paragraphe précédent, les solitons ont pour limite à l'infini (ρ_+, u_+) , ils sont paramétrés par leur vitesse c .

On utilise une notion de stabilité très faible : la stabilité orbitale conditionnelle. Pour des liens avec la stabilité linéaire, voir [14].

3. On peut souvent supposer cela par des arguments d'échelle, mais pas toujours. Voir par exemple Chiron [32] lemme 3.1 pour l'équation de Schrödinger en dimension 1.

Définition 4.1. *Un soliton $(\underline{\rho}, \underline{u})$ est stable si pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute solution régulière (ρ, u) définie sur $[0, T]$, avec $\inf_s \|(\underline{\rho}, \underline{u}) - (\rho|_{t=0}, u|_{t=0})(\cdot - s)\|_{H^1 \times L^2} \leq \delta$, alors*

$$\forall t \in [0, T], \inf_s \|(\underline{\rho}, \underline{u}) - (\rho(t), u(t))(\cdot - s)\|_{H^1 \times L^2} \leq \varepsilon.$$

On ne détaillera pas la notion de stabilité pour les fronts, similaire, plus lourde à écrire, et peu intéressante car tout front est stable.

On définit l'énergie et le moment "renormalisés"

$$H = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \rho u^2 - \rho_+ u_+^2 + K(\partial_x \rho)^2 + 2G(\rho) dx, \quad P = \int_{\mathbb{R}} (\rho - \rho_+)(u - u_+) dx. \quad (27)$$

Ces quantités sont bien définies pour les solitons (ils convergent exponentiellement vers leur limite), de plus les solitons dépendant régulièrement de c (proposition 4.2), cela définit des fonctions de $H(c), P(c)$ régulières. Dans ce contexte on note $'$ la dérivée par rapport à c .

Un soliton satisfait le système

$$\begin{cases} -c(u - u_+) + u^2/2 + g(\rho) - K\partial_x^2 \rho - \frac{1}{2}K'(\partial_x \rho)^2 & = u_+^2/2 + g(\rho_+) := \lambda_1, \\ -c(\rho - \rho_+) + \rho u & = \rho_+ u_+ := \lambda_2. \end{cases}$$

Le système se réécrit sous forme abstraite

$$\delta H - c\delta P = \lambda_1 \delta P_1 + \lambda_2 \delta P_2, \quad (28)$$

où $P_1 = \int \rho - \rho_+ dx$, $P_2 = \int u - u_+ dx$.

Dans l'esprit de Grillakis-Shatah-Strauss [59], le *moment d'instabilité* est défini comme

$$m(c) = H - cP - \lambda_1 P_1 - \lambda_2 P_2. \quad (29)$$

Théorème 4.2 ([13],[A9]). *Un soliton est conditionnellement stable si et seulement si $m''(c) > 0$. Cette condition est équivalente à $P'(c) < 0$.*

Le *si* est le résultat principal, et est obtenu dans [13]. Dans Grillakis et al [59] la condition $m''(c) > 0$ est une équivalence à la stabilité, sous réserve que J soit inversible. Ce n'est pas le cas pour notre problème et requiert une légère modification de la preuve pour le *seulement si* (comme dans [84] pour l'équation de Schrödinger). Enfin l'équivalence avec $P'(c) < 0$ vient simplement de l'identité

$$m'(c) = -P(c),$$

qui est une conséquence immédiate de la définition de m et (28). Des calculs numériques dans [13] laissent penser (comme dans [9]) que les solitons les plus rapides sont stables, on le prouve rigoureusement pour les solitons "bulles" :

Proposition 4.3 ([A12]). *Si $\rho_+ g''(\rho_+) + 3g'(\rho_+) > 0$, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, les solitons de vitesse $c - u_+ = \sqrt{\rho_+ g'(\rho_+) (1 - \varepsilon)}$ sont stables au sens où $P'(c) < 0$.*

Remarque 4.5. La condition $3g'(\rho_c) + \rho_c g''(\rho_c) > 0$ est similaire à celle qui apparaît dans le théorème 4.1 sur l'existence de solitons en dimension 2. Cette condition semble assurer que dans la limite transonique les ondes sont de faible amplitude, avec $0 < \rho_+ - \rho \ll 1$, mais à ma connaissance ce n'est pas mentionné dans la littérature.

La situation est dégénérée dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, en effet on a $P = O(\varepsilon^{3/2})$. On prouve en fait $P' \asymp -\varepsilon^{1/2}$ au voisinage de 0. La preuve, élémentaire, repose sur l'intégrabilité de l'équation, dont on tire la formule explicite

$$P = 2 \int_{\rho_{\min}}^{\rho_+} \frac{(\rho - \rho_+)^2 (c - v_+)}{\rho} \sqrt{\frac{K}{2F}} d\rho,$$

ainsi que la factorisation $F = (\rho - \rho_+)^2 (\rho - \rho_m) \varphi(\rho)$ où φ ne s'annule pas sur $[\rho_{\min}, \rho_+]$.

4.3 Existence de multi-solitons

À défaut de stabilité inconditionnelle pour les solitons, on s'intéresse ici à une autre classe de solutions globales particulières : des solutions qui ressemblent en temps long à plusieurs solitons s'éloignant les uns des autres. Au paragraphe 4.3.1 on décrit une partie de la littérature ainsi que quelques idées de base, le paragraphe 4.3.2 décrit plus en détail le cas du système d'Euler-Korteweg avec les résultats contenus dans [A12].

4.3.1 Généralités sur les multi-solitons

La stabilité d'une somme de solitons est à l'existence de solutions convergeant vers cette somme ce qu'à l'existence de solutions dispersives est la dispersion à petite donnée : des problèmes liés mais différents, et de difficultés inégales. Le sujet est assez vaste de sorte que ce paragraphe ne peut qu'effleurer quelques idées notables (surtout celles qui se sont avérées utiles pour [A12]), on renvoie pour une recension plus complète à l'article de synthèse [76].

Comme au paragraphe 4.2.2, on fixe une EDP de la forme (22) $\partial_t U = J\delta H[U]$. On suppose qu'elle admet des solitons U_{c_1}, \dots, U_{c_n} de vitesses $c_1 < c_2 < \dots < c_n$, de limite nulle à l'infini. Quitte à traduire, $\forall k, \lim_{\infty} U_{c_k}(x) = 0$. Une solution multi-soliton est une solution de (22) définie pour $t \in [T_0, \infty[$ et satisfaisant

$$\|U(t) - \sum_{k=1}^n U_{c_k}\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, \quad (30)$$

pour une norme ad hoc.

Les multi-solitons ne sont pas des solutions "génériques". D'une part il est possible d'en fabriquer à partir de solitons instables (voir [40]), d'autre part on s'attend (notamment par des calculs explicites dans le cas d'EDP intégrables) à ce que les solutions génériques aient une composante dispersive évoluant comme une solution linéaire, ce qui n'est pas le cas d'un multi-soliton.

La construction de multi-solitons remonte (au moins) à l'article célèbre de Gardner-Green-Kruskal-Miura [48], qui traitait le cas de l'équation de Korteweg de Vries en utilisant son intégrabilité.

Pour des équations non intégrables, paradoxalement, les résultats sur la stabilité de sommes de solitons sont antérieurs aux résultats d'existence à l'exception notable de la construction de solutions explosives pour l'équation de Schrödinger L^2 critique, dont se déduit dans ce cas spécial l'existence de multi-solitons, voir [102].

Pour NLS, la stabilité de multi-solitons est obtenue par Buslaev-Perelman [26] sous des conditions de décroissance algébrique des données initiale. Le premier résultat dans des espaces de Sobolev

sans poids semble être celui de Martel-Merle-Tsai [100] sur l'équation de KdV généralisée sous critique

$$\partial_t u + \partial_x(u^k) + \partial_x^3 u = 0, \quad k < 5. \quad (31)$$

Théorème 4.3 (Martel-Merle-Tsai [100]). *Pour $k = 2, 3, 4$, $0 < c_1 < \dots < c_N$, Q_{c_j} des solitons à distance au moins L les uns des autres (voir la figure 4.2), $\alpha > 0$ assez petit, si*

$$\|u_0 - \sum_{j=1}^N U_{c_j}\|_{H^1} \leq \varepsilon, \quad (32)$$

alors il existe $C, \alpha > 0$, $(x_j(t))$ tels que la solution $u(t)$ de (31) satisfait

$$\|u(t) - \sum_{j=1}^N U_{c_j}(\cdot - x_j(t))\|_{H^1} \leq C(\varepsilon + e^{-\alpha L}). \quad (33)$$

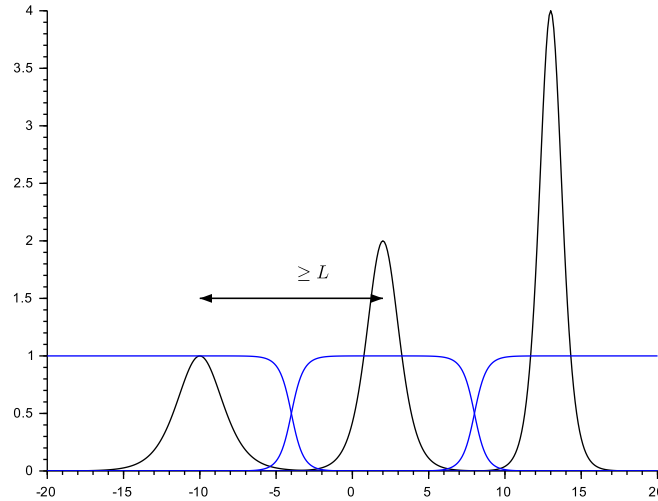


FIGURE 4.2 – Trois solitons à distance au moins L , en bleu la partition de l'unité associée. Les vitesses sont croissantes de gauche à droite.

La preuve ne donne cependant pas explicitement $x_j(t)$, ni l'existence d'une solution convergant vers $\sum U_{c_j}$.

Existence de multi-solitons Pour KdV sous critique et critique, l'existence est obtenue par Martel [96] avec une méthode de compacité dans l'esprit de [102] qui est la matrice de plusieurs autres résultats d'existence de multi-solitons, entre autres pour NLS sous critique [97], gKdV surcritique [40]...

On note $S(t)$ une somme de solitons s'éloignant les uns des autres, et déjà très éloignés à $t = 0$ (figure 4.2). La preuve se fait en deux étapes de difficultés inégales, qui se résument grossièrement ainsi :

1. Pour tout n , la solution de donnée “initiale” $u_n|_{t=n} = S(n)$ existe sur $[0, n]$, et satisfait

$$\|u_n(t) - S(t)\| \lesssim e^{-\alpha t}, \quad (34)$$

(avec $\|\cdot\|$ une norme ad hoc associée souvent associée à l'énergie).

2. La suite $u_n(0)$ converge vers une donnée initiale $u(0)$, la solution correspondante est globale et satisfait $\|u(t) - S(t)\| \lesssim e^{-\alpha t}$.

Le second point repose sur des arguments d'analyse standard (injections compactes, semi-continuité inférieure pour la convergence faible...). Il est également important que le problème soit bien posé dans l'espace associé à $\|\cdot\|$.

Le premier point est en général plus difficile. L'approche dans [40, 97] est de mimer la stabilité d'un seul soliton, en remplaçant la fonctionnelle $U \rightarrow (E - cP)[S + U] - (E - cP)[S] \simeq \langle (\delta^2 H - c\delta^2 P)[S]U, U \rangle$ par une somme de versions localisées près des solitons. Plus précisément si $(\phi_j)_{1 \leq j \leq N}$ est une partition de l'unité qui localise au voisinage des (U_{c_j}) (figure 4.2), l'énergie modifiée est

$$\tilde{E}(U) = \langle \delta^2 H[S]U, U \rangle - \sum_{j=1}^N c_j \langle \varphi_j \delta^2 P[S]U, U \rangle. \quad (35)$$

Cette quantité est presque conservée à deux points près : l'erreur commise dans l'approximation $(H - cP)[S + U] - H[S] - cP[S] \simeq \langle (\delta^2 H - c\delta^2 P)[S]U, U \rangle$, et les interactions liées à la somme de solitons. Si ceux-ci décroissent exponentiellement⁴ et sont éloignés les uns des autres, on a alors

$$d\tilde{E}/dt = o(\|U\|^2) + O(e^{-\alpha(t+L)}\|U\|). \quad (36)$$

Comme pour les solitons (paragraphe 4.2.2), l'énergie contrôle $\|U\|$ “à quelques directions près”, ces directions sont alors contrôlées soit par modulation (il faut alors contrôler les paramètres de modulation), soit en écrivant le système différentiel satisfait par les coordonnées de la solution dans ces directions. Quelle que soit l'approche, on obtient une estimée pour les paramètres similaire à (36), ce qui permet d'établir (34) par des arguments d'EDO élémentaires.

Quelques compléments Pour NLS, l'existence de profils asymptotiques avec une infinité de solitons a été obtenue par Le Coz-Tsai [82] par une approche directe avec un point fixe utilisant les estimations de Strichartz. Elle requiert cependant que les solitons s'éloignent les uns des autres suffisamment vite.

Il existe également plusieurs résultats sur les multi-solitons dans un régime d'interaction forte (vitesses proches et faible distance). Avec pour données initiales la somme de deux solitons, les interactions sans collision peuvent par exemple modifier la vitesse de ces solitons ou rajouter des termes petits mais qui ne tendent pas vers zéro, voir entre autres l'interaction sans collision pour gKdV [99, 107, 123], et pour NLS [101, 108]. Enfin la collision de deux solitons reste un problème majoritairement ouvert sauf dans quelques cas particuliers, [98, 109].

4.3.2 Multi-solitons pour le système d'Euler-Korteweg

Les équations d'Euler-Korteweg présentent deux spécificités par rapport à la majorité de la littérature existante : il n'y a pas de théorie d'existence et d'unicité dans l'espace d'énergie, et parmi les ondes progressives il existe des solitons et des fronts de limites différentes en

4. C'est le cas dans les articles cités, et pour le système d'Euler-Korteweg en dimension 1.

$\pm\infty$ (voir la section 4.2). Ce ne sont pas des difficultés complètement nouvelles, l'existence de solutions front-soliton a été obtenue pour l'équation de Schrödinger par Le Coz-Tsai [82], et des multi-solitons ont été construits pour l'équation des vagues (water waves) par Ming-Rousset-Tzvetkov [106]. La construction de multi-solitons pour l'équation des vagues pose des difficultés techniques similaires au cas du système d'Euler-Korteweg.

Notations On note $U_c = (\rho_c, u_c)$ une onde progressive de vitesse c , que ce soit un soliton ou un front, et

$$U_{c,\pm} = \lim_{\pm\infty} U_c.$$

Si U_c est un soliton, on note $V_c = U_c - U_{c,+}$. On fixe $c_1 < c_2 < \dots < c_n$, $L_2, \dots, L_n \in \mathbb{R}^{+*}$, U_{c_1} un soliton ou un front, (U_{c_k}) des solitons tels que $\forall 2 \leq k \leq n$, $U_{c_k,+} = U_{c_1,+} := (\rho_+, u_+)$, on définit le profil

$$S(x, t) = U_{c_1}(x - c_1 t) + \sum_{k=2}^n V_{c_k}(x - c_k t - L_k). \quad (37)$$

Définition 4.2. Une multi-onde progressive est une solution globale du système d'Euler-Korteweg qui converge pour $t \rightarrow \infty$ vers $S(\cdot, t)$.

On se limite au cas de solitons stables, au sens où ils satisfont $dP[U_c]/dc < 0$ (voir le théorème 4.2 et (27) pour la définition de P). Rappelons que la condition de subsonicité de la proposition 4.1 est $c_1 - u_+ < \sqrt{\rho_+ g'(\rho_+)}$, tandis que la proposition 4.3 assure l'existence de solitons stables avec $c_k - u_+$ arbitrairement proche de $\sqrt{\rho_+ g'(\rho_+)}$, donc qu'on peut choisir plus rapides que le front. Ainsi l'ensemble des cas considérés n'est pas vide.

Proposition 4.4. Il existe des profils (37) front-solitons stables.

On définit $\mathcal{H}^N = H^{2N+1} \times H^{2N}$, le théorème principal de [A12] est le suivant :

Théorème 4.4 ([A12]). Pour $N \geq 3$, il existe $L > 0$ tels que si $\forall 2 \leq k \leq n$, $L_k \geq L$, alors il existe une solution globale U de (EK), telle que $U - S \in C(\mathbb{R}^+, \mathcal{H}^{2N})$ et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|U(t) - S(t)\|_{\mathcal{H}^{2N}} = 0.$$

Remarque 4.6. Pour $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ arbitraires, une modification de la preuve donnerait l'existence de multi-solitons de la forme $U_{c_1}(x - c_1 t - x_1) + \sum_{k=2}^n V_{c_k}(x - c_k t - x_k)$ sur un intervalle de temps $[T_0, \infty[$, T_0 assez grand. Pour des paramètres donnés, l'unicité d'une multi-onde est un problème ouvert.

Quelques éléments de preuve Pour rester concis, et comme l'écriture explicite du système n'apporte rien, on utilise l'écriture formelle "hamiltonienne"

$$\partial_t U = J \partial_x \delta H[U].$$

Le schéma de preuve suit celui donné au paragraphe précédent 4.3.1; pour $M \rightarrow \infty$ on construit une solution $U_M \in C([0, M], \mathcal{H}^{2N})$, N grand, avec $U_M(M) = S(M)$, et qui satisfait $\|U_M(t) - S(t)\|_{\mathcal{H}^{2N}} \lesssim e^{-\alpha t}$ sur $[0, M]$, un argument de compacité élémentaire en faisant $M \rightarrow \infty$ donne alors l'existence d'une multi-onde.

Usage d'une solution approchée Pour construire U_M , l'idée est de partir d'une solution approchée U_M^a satisfaisant

$$\partial_t U_M^a = J\partial_x \delta H[U_M^a] + f_M^a, \quad (38)$$

avec un terme d'erreur f_M^a exponentiellement décroissante en temps, et de montrer que la solution exacte satisfaisant $U_M(M) = U_M^a(M)$ reste proche de U_M^a sur $[0, M]$, et donc en particulier qu'elle existe sur un tel intervalle. Les estimations d'énergie introduites dans [12] sont l'outil naturel : après quelques modifications ad hoc, et avec un lemme de Gronwall on trouve :

Lemme 4.1. *Soit U une solution (EK), U_M^a une solution de (38). Il existe une norme $\tilde{\|\cdot\|}_{\mathcal{H}^{2N}}$ équivalente à la norme \mathcal{H}^{2N} et $\varepsilon_0 > 0$ tels que si $\|U(t) - U_M^a(t)\|_{\mathcal{H}^{2N}} \leq \varepsilon_0$, alors*

$$\left| \frac{d}{dt} \tilde{\|U(t) - U_M^a(t)\|_{\mathcal{H}^{2N}}^2} \right| \leq C(\tilde{\|U - U_M^a\|_{\mathcal{H}^{2N}}^2 + \|f_M^a\|_{\mathcal{H}^{2N}}^2).$$

Si de plus $\|f_M^a\|_{\mathcal{H}^{2N}} \leq \varepsilon e^{-\alpha t}$ avec ε assez petit et $\alpha > C$, alors la solution de (EK) satisfaisant $U(M) = U^a(M)$ existe sur $[0, M]$ avec

$$\forall t \in [0, M], \quad \|U(t) - U_M^a(t)\|_{\mathcal{H}^{2N}} \lesssim \varepsilon e^{-\alpha t}.$$

La fonction S est elle même une solution approchée, mais la décroissance de son terme d'erreur est trop faible pour utiliser le lemme.

Construction de la solution approchée La stratégie de Ming-Rousset-Tzvetkov [106] pour l'équation des vagues consiste à construire une solution approchée plus précise à partir de S en résolvant une cascade de systèmes linéaires approchant de mieux en mieux le problème non linéaire, dans l'esprit de Grenier [58].

Dans [A12] j'ai une approche un peu différente basée sur une méthode de Newton, mais le coeur du problème ne change pas. Il s'agit de prouver des estimées de résolvante sur le linéarisé de (EK) près d'une perturbation de S , en effet la méthode de Newton s'écrit

$$U_0 = S, \quad \begin{cases} \partial_t(U_{k+1} - U_k) = J\partial_x \delta^2 H[U_k](U_{k+1} - U_k) - (\partial_t U_k - J\partial_x \delta H[U_k]), \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} U_{k+1} - U_k = 0. \end{cases} \quad (39)$$

Le terme $(\partial_t U_k - J\partial_x \delta H[U_k])$ est l'erreur de la k -ème approximation. Son taux de décroissance en temps est doublé à chaque itération, mais pour résoudre l'EDP linéaire on a besoin que la croissance linéaire soit plus lente que le taux de décroissance du forçage.

Estimées de résolvante Pour résoudre le système (39) associé à la méthode de Newton, on utilise l'estimation de résolvante suivante, qui est le coeur de [A12] :

Proposition 4.5. *Soit U la solution du problème linéaire*

$$\partial_t U = J\partial_x \delta^2 H[S + \eta]U,$$

avec $\|\eta\|_{X^{2N}} := \|\eta\|_{L_t^\infty \mathcal{H}^{2N+1}} + \|\partial_t \eta\|_{L_t^\infty \mathcal{H}^{2N}} \ll 1$. Il existe $C_n, C_{e,N}$ tels que pour $\varepsilon = 1/L + \|\eta\|_{X^{2N}}$,

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}^{2N}} \leq C_N(1 + |t - s|)e^{C_{e,N}\varepsilon^{1/4}|t-s|}\|U(s)\|_{\mathcal{H}^{2N}}. \quad (40)$$

Remarque 4.7. La proposition clarifie la condition de séparation des ondes $L_k \geq L$ dans le théorème 4.4 : le taux de croissance linéaire peut être rendu aussi petit qu'on veut quitte à prendre L assez grand. La petitesse de $U_k - S$ dans la méthode de Newton est également une conséquence de la bonne séparation des ondes.

Dans [106] comme dans [A12], ces estimées sont obtenues grâce à la fonctionnelle (35) décrite au paragraphe précédent $\tilde{E}[U] = \langle \delta^2 H[S + \eta]U, U \rangle - \sum c_j \langle \varphi_j \delta^2 P[S + \eta]U, U \rangle$. Précisément, lorsqu'il n'y a qu'un soliton, on a conservation de l'énergie $\frac{d}{dt} \langle \delta^2 H[U_c]U, U \rangle - c \langle \delta^2 P[U_c]U, U \rangle$, tandis qu'à plusieurs solitons interagissant faiblement, et avec une petite perturbation η , on récupère une quasi-conservation de l'énergie :

$$\left| \frac{d}{dt} \tilde{E}[U] \right| \lesssim \left(\frac{e^{-\alpha t}}{L} + \|\eta(t)\|_{\mathcal{H}^2} + \|\partial_t \eta\|_{\mathcal{H}^1} \right) \|U(t)\|_{\mathcal{H}^0}^2.$$

Similairement, on montre la coercivité de \tilde{E} dans \mathcal{H}^0 dans l'esprit de la coercivité à un seul soliton (26), ce qui débouche sur l'estimation (40) dans le cas $N = 0$. Les estimées d'ordre supérieur s'obtiennent alors par des arguments élémentaires en dérivant l'équation.

4.4 Perspectives

Deux directions m'intéressent : la description qualitative des ondes progressives et des constructions différentes, éventuellement plus robustes.

Pour la description qualitative, il s'agirait de montrer des propriétés de symétrie, l'inexistence d'onde supersonique, et la description de la limite transonique, dans l'esprit de [18, 19, 55]. L'inexistence d'onde supersonique repose pour l'équation de Gross-Pitaevskii sur une reformulation par transformée de Fourier de l'équation satisfaite par le soliton, il n'est pas clair si la structure quasi-linéaire du système d'Euler-Korteweg interdit cette approche.

En ce qui concerne la construction, l'existence d'ondes en dimension 3 pour une capillarité générale est encore un problème ouvert, même si dans le cas de l'hydrodynamique quantique des ondes de norme L^∞ petite ont été construites par Chiron-Maris [34]. Le fait que ces ondes sont d'énergie grande en dimension 3 est une obstruction technique importante. Je m'intéresse à une approche perturbative qui reposerait plutôt sur le fait que dans la limite transonique les ondes progressives sont décrites par une limite KP [18, 33]. Cela suppose une bonne connaissance du linéarisé de KP (en particulier son noyau), un résultat récent de Wei [89] sur ce point est particulièrement intéressant.

Bibliographie

- [1] T. ALAZARD AND J.-M. DELORT, *Global solutions and asymptotic behavior for two dimensional gravity water waves*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4), 48 (2015), pp. 1149–1238.
- [2] H. AMANN, *Anisotropic function spaces and maximal regularity for parabolic problems. Part 1 : function spaces*, Jindřich Nečas Center for Mathematical Modeling Lecture Notes, 6, Matfyzpress, Prague, 2009.
- [3] X. ANTOINE, A. ARNOLD, C. BESSE, M. EHRHARDT, AND A. SCHÄDLE, *A review of transparent and artificial boundary conditions techniques for linear and nonlinear Schrödinger equations*, Commun. Comput. Phys., 4 (2008), pp. 729–796.
- [4] X. ANTOINE, C. BESSE, AND P. KLEIN, *Absorbing boundary conditions for the two-dimensional Schrödinger equation with an exterior potential. Part I : Construction and a priori estimates*, Math. Models Methods Appl. Sci., 22 (2012).
- [5] R. ANTON, *Strichartz inequalities for Lipschitz metrics on manifolds and nonlinear Schrödinger equation on domains*, Bull. Soc. Math. France, 136 (2008), pp. 27–65.
- [6] P. ANTONELLI AND P. MARCATI, *On the finite energy weak solutions to a system in quantum fluid dynamics*, Comm. Math. Phys., 287 (2009), pp. 657–686.
- [7] H. BAHOURI, J.-Y. CHEMIN, AND R. DANCHIN, *Fourier analysis and nonlinear partial differential equations*, vol. 343 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Springer, Heidelberg, 2011.
- [8] I. V. BARASHENKOV AND V. G. MAKHANKOV, *Soliton-like “bubbles” in a system of interacting bosons*, Phys. Lett. A, 128 (1988), pp. 52–56.
- [9] I. V. BARASHENKOV, I. V. PUZYNIN, T. ZHANLAV, AND T. L. BOYADJIEV, *Stability of the moving bubbles in the Bose condensate*, in Solitons and applications (Dubna, 1989), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1990, pp. 281–297.
- [10] S. BENZONI-GAVAGE AND D. CHIRON, *Long wave asymptotics for the Euler-Korteweg system*, Rev. Mat. Iberoam., 34 (2018), pp. 245–304.
- [11] S. BENZONI-GAVAGE, R. DANCHIN, AND S. DESCOMBES, *Well-posedness of one-dimensional Korteweg models*, Electron. J. Differential Equations, (2006), pp. No. 59, 35 pp. (electronic).

- [12] —, *On the well-posedness for the Euler-Korteweg model in several space dimensions*, Indiana Univ. Math. J., 56 (2007), pp. 1499–1579.
- [13] S. BENZONI-GAVAGE, R. DANCHIN, S. DESCOMBES, AND D. JAMET, *Structure of Korteweg models and stability of diffuse interfaces*, Interfaces Free Bound., 7 (2005), pp. 371–414.
- [14] —, *Stability issues in the Euler-Korteweg model*, AMS, 220 (2007), pp. 103–127.
- [15] S. BENZONI-GAVAGE, C. MIETKA, AND L. M. RODRIGUES, *Co-periodic stability of periodic waves in some Hamiltonian PDEs*, Nonlinearity, 29 (2016), pp. 3241–3308.
- [16] S. BENZONI-GAVAGE, P. NOBLE, AND L. M. RODRIGUES, *Slow modulations of periodic waves in Hamiltonian PDEs, with application to capillary fluids*, J. Nonlinear Sci., 24 (2014), pp. 711–768.
- [17] S. BENZONI-GAVAGE AND D. SERRE, *Multidimensional hyperbolic partial differential equations, First-order systems and applications*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, Oxford, 2007.
- [18] F. BÉTHUEL, P. GRAVEJAT, AND J.-C. SAUT, *On the KP I transonic limit of two-dimensional Gross-Pitaevskii travelling waves*, Dyn. Partial Differ. Equ., 5 (2008), pp. 241–280.
- [19] —, *Travelling waves for the Gross-Pitaevskii equation. II*, Comm. Math. Phys., 285 (2009), pp. 567–651.
- [20] F. BETHUEL, G. ORLANDI, AND D. SMETS, *Vortex rings for the Gross-Pitaevskii equation*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 6 (2004), pp. 17–94.
- [21] F. BÉTHUEL AND J.-C. SAUT, *Travelling waves for the Gross-Pitaevskii equation. I*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., 70 (1999), pp. 147–238.
- [22] M. D. BLAIR, H. F. SMITH, AND C. D. SOGGE, *On Strichartz estimates for Schrödinger operators in compact manifolds with boundary*, Proc. Amer. Math. Soc., 136 (2008), pp. 247–256 (electronic).
- [23] —, *Strichartz estimates and the nonlinear Schrödinger equation on manifolds with boundary*, Math. Ann., 354 (2012), pp. 1397–1430.
- [24] J. L. BONA, S.-M. SUN, AND B.-Y. ZHANG, *Nonhomogeneous boundary-value problems for one-dimensional nonlinear Schrödinger equations*, J. Math. Pures Appl. (9), 109 (2018), pp. 1–66.
- [25] N. BURQ, P. GÉRARD, AND N. TZVETKOV, *On nonlinear Schrödinger equations in exterior domains*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 21 (2004), pp. 295–318.
- [26] V. BUSLAEV AND G. PERELMAN, *On the stability of solitary waves for nonlinear Schrödinger equations*, in Nonlinear evolution equations, vol. 164 of Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, pp. 75–98.

-
- [27] R. CARLES, R. DANCHIN, AND J.-C. SAUT, *Madelung, Gross-Pitaevskii and Korteweg*, Nonlinearity, 25 (2012), pp. 2843–2873.
- [28] T. CAZENAIVE, *Semilinear Schrödinger equations*, vol. 10 of Courant Lecture Notes in Mathematics, New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 2003.
- [29] T. CAZENAIVE AND P.-L. LIONS, *Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations*, Comm. Math. Phys., 85 (1982), pp. 549–561.
- [30] D. CHIRON, *Travelling waves for the Gross-Pitaevskii equation in dimension larger than two*, Nonlinear Anal., 58 (2004), pp. 175–204.
- [31] ———, *Travelling waves for the nonlinear Schrödinger equation with general nonlinearity in dimension one*, Nonlinearity, 25 (2012), pp. 813–850.
- [32] ———, *Stability and instability for subsonic traveling waves of the nonlinear Schrödinger equation in dimension one*, Anal. PDE, 6 (2013), pp. 1327–1420.
- [33] D. CHIRON AND M. MARIŞ, *Rarefaction pulses for the nonlinear Schrödinger equation in the transonic limit*, Comm. Math. Phys., 326 (2014), pp. 329–392.
- [34] ———, *Traveling waves for nonlinear Schrödinger equations with nonzero conditions at infinity*, Arch. Ration. Mech. Anal., 226 (2017), pp. 143–242.
- [35] D. CHIRON AND C. SCHEID, *Multiple branches of travelling waves for the Gross-Pitaevskii equation*, Nonlinearity, 31 (2018), pp. 2809–2853.
- [36] M. CHRIST AND A. KISELEV, *Maximal functions associated to filtrations*, J. Funct. Anal., 179 (2001), pp. 409–425.
- [37] S. COHN, *Global existence for the nonresonant Schrödinger equation in two space dimensions*, Canad. Appl. Math. Quart., 2 (1994), pp. 257–282.
- [38] R. R. COIFMAN AND Y. MEYER, *Au delà des opérateurs pseudo-différentiels, with an English summary*, vol. 57 of Astérisque, Société Mathématique de France, Paris, 1978.
- [39] P. CONSTANTIN AND J.-C. SAUT, *Local smoothing properties of dispersive equations*, J. Amer. Math. Soc., 1 (1988), pp. 413–439.
- [40] R. CÔTE, Y. MARTEL, AND F. MERLE, *Construction of multi-soliton solutions for the L^2 -supercritical $gKdV$ and NLS equations*, Rev. Mat. Iberoam., 27 (2011), pp. 273–302.
- [41] J.-F. COULOMBEL, *Weakly stable multidimensional shocks*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 21 (2004), pp. 401–443.
- [42] ———, *Stability of finite difference schemes for hyperbolic initial boundary value problems*, in HCDTE lecture notes. Part I. Nonlinear hyperbolic PDEs, dispersive and transport equations, vol. 6 of AIMS Ser. Appl. Math., Am. Inst. Math. Sci. (AIMS), Springfield, MO, 2013, p. 146.
- [43] Y. DENG, A. D. IONESCU, AND B. PAUSADER, *The Euler-Maxwell system for electrons : global solutions in 2D*, Arch. Ration. Mech. Anal., 225 (2017), pp. 771–871.

- [44] Y. DENG, A. D. IONESCU, B. PAUSADER, AND F. PUSATERI, *Global solutions of the gravity-capillary water-wave system in three dimensions*, Acta Math., 219 (2017), pp. 213–402.
- [45] A. S. FOKAS, A. A. HIMONAS, AND D. MANTZAVINOS, *The nonlinear Schrödinger equation on the half-line*, Trans. Amer. Math. Soc., 369 (2017), pp. 681–709.
- [46] K. O. FRIEDRICHS AND P. D. LAX, *Boundary value problems for first order operators*, Comm. Pure Appl. Math., 18 (1965), pp. 355–388.
- [47] L. GÅRDING, *Solution directe du problème de Cauchy pour les équations hyperboliques*, in La théorie des équations aux dérivées partielles. Nancy, 9-15 avril 1956, Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, LXXI, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1956, pp. 71–90.
- [48] C. S. GARDNER, J. M. GREENE, M. D. KRUSKAL, AND R. M. MIURA, *Method for solving the Korteweg-de Vries equation*, Phys. Rev. Lett., 19 (1967), pp. 1095–1097.
- [49] P. GÉRARD, *The Cauchy problem for the Gross-Pitaevskii equation*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 23 (2006), pp. 765–779.
- [50] P. GERMAIN, N. MASMOUDI, AND J. SHATAH, *Global solutions for 3D quadratic Schrödinger equations*, Int. Math. Res. Not. IMRN, (2009), pp. 414–432.
- [51] ———, *Global solutions for the gravity water waves equation in dimension 3*, Ann. of Math. (2), 175 (2012), pp. 691–754.
- [52] ———, *Global existence for capillary water waves*, Comm. Pure Appl. Math., 68 (2015), pp. 625–687.
- [53] J. GINIBRE AND G. VELO, *Scattering theory in the energy space for a class of nonlinear Schrödinger equations*, J. Math. Pures Appl. (9), 64 (1985), pp. 363–401.
- [54] D. GINSBERG, *On the lifespan of three-dimensional gravity water waves with vorticity*, preprint.
- [55] P. GRAVEJAT, *A non-existence result for supersonic travelling waves in the Gross-Pitaevskii equation*, Comm. Math. Phys., 243 (2003), pp. 93–103.
- [56] ———, *Limit at infinity and nonexistence results for sonic travelling waves in the Gross-Pitaevskii equation*, Differential Integral Equations, 17 (2004), pp. 1213–1232.
- [57] ———, *Asymptotics for the travelling waves in the Gross-Pitaevskii equation*, Asymptot. Anal., 45 (2005), pp. 227–299.
- [58] E. GRENIER, *On the nonlinear instability of Euler and Prandtl equations*, Comm. Pure Appl. Math., 53 (2000), pp. 1067–1091.
- [59] M. GRILLAKIS, J. SHATAH, AND W. STRAUSS, *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I*, J. Funct. Anal., 74 (1987), pp. 160–197.
- [60] Y. GUO AND B. PAUSADER, *Global smooth ion dynamics in the Euler-Poisson system*, Comm. Math. Phys., 303 (2011), pp. 89–125.

-
- [61] S. GUSTAFSON, K. NAKANISHI, AND T.-P. TSAI, *Scattering for the Gross-Pitaevskii equation*, Math. Res. Lett., 13 (2006), pp. 273–285.
- [62] ———, *Global dispersive solutions for the Gross-Pitaevskii equation in two and three dimensions*, Ann. Henri Poincaré, 8 (2007), pp. 1303–1331.
- [63] ———, *Scattering theory for the Gross-Pitaevskii equation in three dimensions*, Commun. Contemp. Math., 11 (2009), pp. 657–707.
- [64] B. GUSTAFSSON, H.-O. KREISS, AND A. SUNDSTRÖM, *Stability theory of difference approximations for mixed initial boundary value problems. II*, Math. Comp., 26 (1972), pp. 649–686.
- [65] A. D. IONESCU AND V. LIE, *Long term regularity of the one-fluid Euler-Maxwell system in 3D with vorticity*, Adv. Math., 325 (2018), pp. 719–769.
- [66] A. D. IONESCU AND F. PUSATERI, *Global solutions for the gravity water waves system in 2d*, Invent. Math., 199 (2015), pp. 653–804.
- [67] O. IVANOVICI, *On the Schrödinger equation outside strictly convex obstacles*, Anal. PDE, 3 (2010), pp. 261–293.
- [68] O. IVANOVICI AND G. LEBEAU, *Dispersion for the wave and the Schrödinger equations outside strictly convex obstacles and counterexamples*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 355 (2017), pp. 774–779.
- [69] J. JANG AND N. MASMOUDI, *Well-posedness of compressible Euler equations in a physical vacuum*, Comm. Pure Appl. Math., 68 (2015), pp. 61–111.
- [70] R. JENKINS, J. LIU, P. PERRY, AND C. SULEM, *Soliton resolution for the derivative nonlinear Schrödinger equation*, Comm. Math. Phys., 363 (2018), pp. 1003–1049.
- [71] C. JONES, S. PUTTERMAN, AND P. ROBERTS, *Motions in a bose condensate. V. Stability of solitary wave solutions of non-linear schrodinger equations in two and three dimensions*, J. Phys. A, Math. Gen., 19 (1986), pp. 2991–3011.
- [72] C. A. JONES AND P. H. ROBERTS, *Motions in a bose condensate. IV. Axisymmetric solitary waves*, Journal of Physics A : Mathematical and General, 15 (1982), pp. 2599–2619.
- [73] J. P. KEENER AND D. W. MCCLAUGHLIN, *Solitons under perturbations*, Phys. Rev. A (3), 16 (1977), pp. 777–790.
- [74] C. E. KENIG, G. PONCE, AND L. VEGA, *Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations*, Indiana Univ. Math. J., 40 (1991), pp. 33–69.
- [75] S. KLAINERMAN AND G. PONCE, *Global, small amplitude solutions to nonlinear evolution equations*, Comm. Pure Appl. Math., 36 (1983), pp. 133–141.
- [76] M. KOWALCZYK, Y. MARTEL, AND C. MUÑOZ, *On asymptotic stability of nonlinear waves*, in Séminaire Laurent Schwartz—Équations aux dérivées partielles et applications. Année 2016–2017, Ed. Éc. Polytech., Palaiseau, 2017, pp. Exp. No. XVIII, 27.

- [77] H.-O. KREISS, *Initial boundary value problems for hyperbolic systems*, Comm. Pure Appl. Math., 23 (1970), pp. 277–298.
- [78] I. LACROIX-VIOLET AND A. VASSEUR, *Global weak solutions to the compressible quantum Navier-Stokes equation and its semi-classical limit*, J. Math. Pures Appl. (9), 114 (2018), pp. 191–210.
- [79] D. LANNES, *Space time resonances [after Germain, Masmoudi, Shatah]*, Séminaire Bourbaki. Vol. 2011/2012. Exposés 1043–1058, Astérisque, (2013), pp. Exp. No. 1053, ix, 355–388.
- [80] R. LASCAR, *Propagation des singularités des solutions d'équations pseudo-différentielles quasi homogènes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 27 (1977), pp. vii–viii, 79–123.
- [81] P. D. LAX, *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*, Comm. Pure Appl. Math., 21 (1968), pp. 467–490.
- [82] S. LE COZ AND T.-P. TSAI, *Infinite soliton and kink-soliton trains for nonlinear Schrödinger equations*, Nonlinearity, 27 (2014), pp. 2689–2709.
- [83] T.-C. LIN, J. WEI, AND J. YANG, *Vortex rings for the Gross-Pitaevskii equation in \mathbb{R}^3* , J. Math. Pures Appl. (9), 100 (2013), pp. 69–112.
- [84] Z. LIN, *Stability and instability of traveling solitonic bubbles*, Adv. Differential Equations, 7 (2002), pp. 897–918.
- [85] F. LINARES AND G. PONCE, *Introduction to nonlinear dispersive equations*, Universitext, Springer, New York, 2009.
- [86] J.-L. LIONS AND E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1*, Travaux et Recherches Mathématiques, No. 17, Dunod, Paris, 1968.
- [87] ———, *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 2*, Travaux et Recherches Mathématiques, No. 18, Dunod, Paris, 1968.
- [88] P.-L. LIONS, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. I*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 1 (1984), pp. 109–145.
- [89] Y. LIU AND J. WEI, *Nondegeneracy, Morse index and orbital stability of the KP-I lump solution*, Arch. Ration. Mech. Anal., 234 (2019), pp. 1335–1389.
- [90] E. MACHTYNGIER, *Exact controllability for the Schrödinger equation*, SIAM J. Control Optim., 32 (1994), pp. 24–34.
- [91] E. MADELUNG, *Quantentheorie in hydrodynamischer form*, Zeitschrift für Physik, 40 (1927), pp. 322–326.
- [92] A. MAJDA, *The stability of multidimensional shock fronts*, Mem. Amer. Math. Soc., 41 (1983), pp. iv+95.
- [93] A. MAJDA AND S. OSHER, *Initial-boundary value problems for hyperbolic equations with uniformly characteristic boundary*, Comm. Pure Appl. Math., 28 (1975), pp. 607–675.

-
- [94] M. MARIŞ, *Nonexistence of supersonic traveling waves for nonlinear Schrödinger equations with nonzero conditions at infinity*, SIAM J. Math. Anal., 40 (2008), pp. 1076–1103.
- [95] ———, *Traveling waves for nonlinear Schrödinger equations with nonzero conditions at infinity*, Ann. of Math. (2), 178 (2013), pp. 107–182.
- [96] Y. MARTEL, *Asymptotic N -soliton-like solutions of the subcritical and critical generalized Korteweg-de Vries equations*, Amer. J. Math., 127 (2005), pp. 1103–1140.
- [97] Y. MARTEL AND F. MERLE, *Multi solitary waves for nonlinear Schrödinger equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 23 (2006), pp. 849–864.
- [98] ———, *Description of two soliton collision for the quartic gKdV equation*, Ann. of Math. (2), 174 (2011), pp. 757–857.
- [99] ———, *Inelastic interaction of nearly equal solitons for the quartic gKdV equation*, Invent. Math., 183 (2011), pp. 563–648.
- [100] Y. MARTEL, F. MERLE, AND T.-P. TSAI, *Stability and asymptotic stability in the energy space of the sum of N solitons for subcritical gKdV equations*, Comm. Math. Phys., 231 (2002), pp. 347–373.
- [101] Y. MARTEL AND P. RAPHAËL, *Strongly interacting blow up bubbles for the mass critical nonlinear Schrödinger equation*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4), 51 (2018), pp. 701–737.
- [102] F. MERLE, *Construction of solutions with exactly k blow-up points for the Schrödinger equation with critical nonlinearity*, Comm. Math. Phys., 129 (1990), pp. 223–240.
- [103] G. MÉTIVIER, *The block structure condition for symmetric hyperbolic systems*, Bull. London Math. Soc., 32 (2000), pp. 689–702.
- [104] ———, *On the L^2 well posedness of hyperbolic initial boundary value problems*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 67 (2017), pp. 1809–1863.
- [105] G. MÉTIVIER AND K. ZUMBRUN, *Large viscous boundary layers for noncharacteristic nonlinear hyperbolic problems*, Mem. Amer. Math. Soc., 175 (2005), pp. vi+107.
- [106] M. MING, F. ROUSSET, AND N. TZVETKOV, *Multi-solitons and related solutions for the water-waves system*, SIAM J. Math. Anal., 47 (2015), pp. 897–954.
- [107] T. MIZUMACHI, *Weak interaction between solitary waves of the generalized KdV equations*, SIAM J. Math. Anal., 35 (2003), pp. 1042–1080.
- [108] T. NGUYEN, *Existence of multi-solitary waves with logarithmic relative distances for the NLS equation*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 357 (2019), pp. 13–58.
- [109] G. PERELMAN, *Two soliton collision for nonlinear Schrödinger equations in dimension 1*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 28 (2011), pp. 357–384.
- [110] Y. RAN, S.-M. SUN, AND B.-Y. ZHANG, *Nonhomogeneous boundary value problems of nonlinear Schrödinger equations in a half plane*, SIAM J. Math. Anal., 50 (2018), pp. 2773–2806.

- [111] J. RAUCH, *l^2 is a continuable initial condition for Kreiss' mixed problems*, Comm. Pure Appl. Math., 25 (1972), pp. 265–285.
- [112] J. B. RAUCH AND F. J. MASSEY, III, *Differentiability of solutions to hyperbolic initial-boundary value problems*, Trans. Amer. Math. Soc., 189 (1974), pp. 303–318.
- [113] M. SABLÉ-TOUGERON, *Existence pour un problème de l'élastodynamique Neumann non linéaire en dimension 2*, Arch. Rational Mech. Anal., 101 (1988), pp. 261–292.
- [114] J. SHATAH, *Global existence of small solutions to nonlinear evolution equations*, J. Differential Equations, 46 (1982), pp. 409–425.
- [115] ———, *Normal forms and quadratic nonlinear Klein-Gordon equations*, Comm. Pure Appl. Math., 38 (1985), pp. 685–696.
- [116] T. C. SIDERIS, *Formation of singularities in three-dimensional compressible fluids*, Comm. Math. Phys., 101 (1985), pp. 475–485.
- [117] G. STAFFILANI AND D. TATARU, *Strichartz estimates for a Schrödinger operator with nonsmooth coefficients*, Comm. Partial Differential Equations, 27 (2002), pp. 1337–1372.
- [118] W. STRAUSS, *Nonlinear scattering theory at low energy*, J. Func. Anal., 41 (1981), pp. 110–133.
- [119] R. S. STRICHARTZ, *Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations*, Duke Math. J., 44 (1977), pp. 705–714.
- [120] J. SZEFTTEL, *Réflexion des singularités pour l'équation de Schrödinger*, Comm. Partial Differential Equations, 29 (2004), pp. 707–761.
- [121] C. TRUESDELL AND W. NOLL, *The non-linear field theories of mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, third ed., 2004.
- [122] A. F. VASSEUR AND C. YU, *Existence of global weak solutions for 3D degenerate compressible Navier-Stokes equations*, Invent. Math., 206 (2016), pp. 935–974.
- [123] N. T. VINH, *Strongly interacting multi-solitons with logarithmic relative distance for the $gKdV$ equation*, Nonlinearity, 30 (2017), pp. 4614–4648.
- [124] L. R. VOLEVIČ AND S. G. GINDIKIN, *Energy estimates in a mixed problem for $(2b + 1)$ -hyperbolic equations*, Akad. Nauk SSSR Inst. Prikl. Mat. Preprint, (1978), p. 63.
- [125] M. I. WEINSTEIN, *Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations*, Comm. Pure Appl. Math., 39 (1986), pp. 51–67.
- [126] V. E. ZAKHAROV AND A. B. SHABAT, *Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media*, Ž. Èksper. Teoret. Fiz., 61 (1971), pp. 118–134.