



HAL
open science

Research in history and in didactics of mathematics

Renaud Chorlay

► **To cite this version:**

Renaud Chorlay. Research in history and in didactics of mathematics. History and Overview [math.HO]. Université Paris Cité, 2023. tel-04216279

HAL Id: tel-04216279

<https://hal.science/tel-04216279>

Submitted on 24 Sep 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

Note de synthèse
pour l'habilitation à diriger des recherches
présentée à l'université Paris Cité

Recherches en histoire et en didactique
des mathématiques

Renaud Chorlay

Soutenue le 13 mars 2023

Jury

Madame OUVRIER-BUFFET Cécile Université Paris Est – Créteil	Présidente du jury
Monsieur DORIER Jean-Luc Université de Genève (Suisse)	Rapporteur
Monsieur KRÖMER Ralf Bergische Universität Wuppertal	Rapporteur
Madame GUEUDET Ghislaine Université Paris Saclay	Examinatrice
Monsieur POPESCU-PAMPU Patrick Université de Lille	Examineur
Monsieur VANDEBROUCK Fabrice Université Paris Cité	Examineur

Introduction	4
1. Histoire des mathématiques : dynamiques des savoirs savants dans la période contemporaine	7
1.1 Emergence de l'articulation local-global	7
1.1.1 Position du problème	7
a. Une « catégorie des acteurs » tacite et peu localisée au sein des mathématiques ?	7
b. Mathématiques globales et articulation local-global : deux chronologies	8
c. Des facilités à éviter : correction ; prise de conscience	10
1.1.2 Modalités et conditions d'émergence de l'articulation local-global	12
a. Une émergence partiellement localisable	12
b. Une variété d'usages, une « tresse » de sens	15
c. Des évolutions en profondeur du cadre de l'analyse : concepts et règles d'écriture	17
d. Eléments méta concurrents et émergences autonomes	20
1.2 Structures, structuralisme	22
1.2.1 Position du problème	22
a. Une lecture mathématicienne centrée sur les vertus épistémologiques	22
b. Une lecture historienne centrée sur l'histoire de l'algèbre	24
1.2.2 Des problèmes aux structures	26
a. Des problèmes qui résistent (1895-1940)	26
b. L'invention de structure (1940-1952) : résolution de problème, unifications divergentes, circulations transversales	29
1.3 Géométrie et topologie différentielles (1918-1932)	33
1.4 Histoire de l'analyse : lectures épistémologiques	36
1.4.1 Réinterroger l'histoire de la notion de « fonction » au 19 ^{ème} siècle sous l'angle de la « généralité »	36
1.4.2 Signe de f' et variations de f : aspects épistémologiques de la fabrication d'une chaîne déductive longue	40
1,5 Transition : Histoire et didactique	42
2. Didactique des mathématiques	46
2.1 Du côté des élèves	46
2.1.1 Algorithmes numériques : décrire et rendre raison	46
a. Position du problème et choix didactiques macro	46
b. Outils d'analyse	49
c. Résultats	52
2.1.2 Construction de définition : approche par différenciation conceptuelle	55
a. Position du problème et choix didactiques macro	56
b. Aperçu de l'ingénierie	58
c. Aperçu des résultats	60
2.2 Du côté des enseignants	64

2.2.1	Contrôle du niveau d'adidacticité en situation co-didactique	64
2.2.2	Décrire et comprendre les pratiques enseignantes en cours magistral à l'Université	66
a.	Position du problème	66
b.	Choix de méthode	67
c.	Aperçu des résultats	69
2.2.3	Analyse de pratiques enseignantes : conception de séances à support historique	72
a.	Contexte et position du problème	72
b.	Propositions théoriques	74
c.	Aperçu des résultats	75
3.	Perspectives de recherche	78
3.1	Point de vue des méthodes – Point de vue des problèmes	78
3.1.1	« Bourbachiser »	78
3.1.2	« Papa Cartan »	81
3.2	Didactique de l'analyse	84
3.2.1	Cours magistraux : intégration de l'axe enseignant-étudiants	84
3.2.2	De l'ingénierie de recherche à la ressource : réplication, <i>upscaling</i> et réception	85
3.3	Didactique de l'algèbre linéaire	86
	Liste des travaux	90
	Bibliographie	94

Introduction

Cette Note de synthèse reflète un parcours de recherche et un parcours professionnel. La première partie porte sur des travaux d'histoire des mathématiques sur la période contemporaine (19^{ème}-20^{ème} siècles), menés de 2001 (début de la thèse) à 2015, dans le cadre de l'équipe d'histoire et philosophie des sciences REHSEIS, devenue SPHere¹. La didactique des mathématiques était présente comme un thème de travail, secondaire mais réel, depuis le départ (première communication en colloque international de recherche en 2003) ; elle est devenue le thème de recherche principal à partir de mon recrutement comme maître de conférences rattaché à l'équipe LDAR² en 2017.

Les travaux en histoire des mathématiques (partie 1) portent sur les mathématiques pures dans la période 1850-1950. On peut rétrospectivement y lire un axe de questionnement récurrent, celui de l'articulation entre deux niveaux de discours, un niveau objet (celui des définitions, théorèmes, démonstrations) et un niveau *méta*, produit par les mêmes acteurs, visant à décrire et organiser le niveau objet : formulation d'objectifs, valeurs et vertus épistémologiques en jeu dans des valorisations relatives ou dans des arbitrages, découpages de la matière mathématique en îlots de ressemblance et désignation de différences spécifiques. On peut lire ainsi le travail de thèse sur *l'émergence de l'articulation « local-global » dans les théories géométriques, de Bernhard Riemann à la théorie des faisceaux (1851-1952)* (Chorlay, 2007a). Il s'agissait non pas d'utiliser des caractérisations mathématiques actuelles pour sélectionner et organiser, de manière rétrospective, des contenus mathématiques du passé, mais d'étudier l'émergence et la fonction de descripteurs comme « local » et « global » sous la plume des mathématiciens. Défi d'autant plus grand que ces termes interviennent en fonction méta à toutes échelles (depuis la description d'une étape d'une démonstration jusqu'à la dénomination d'une branche des mathématiques) et semblent concerner presque toutes les mathématiques. La mise en œuvre combinée d'approches qualitatives et quantitatives permet cependant d'identifier des lieux d'émergence spécifiques, des conditions d'émergence, ainsi que des modalités de diffusion dans la période 1898-1952. Ce premier travail a conduit à deux prolongements. L'ouvrage *Géométrie et topologie différentielles, 1918-1932* (Chorlay, 2015a) constitue un prolongement direct : recueil de textes patrimoniaux – la plupart traduits de l'Allemand – complétés par de copieux dossiers documentaires visant à en éclairer le contexte, les origines, les variantes, la réception. C'est une autre direction de recherche que représente le second travail, sur l'émergence de la structure de faisceaux dans le contexte de problèmes globaux en théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes (Chorlay, 2010a). Au-delà de l'étude de cas, l'article vise à problématiser la question du structuralisme – en particulier celui revendiqué par Bourbaki dans son texte programmatique *L'architecture des mathématiques* (1948) – comme mode d'organisation et de développement des mathématiques ne se limitant pas à un art d'exposition de produits finis. Pour ce faire, on cherche systématiquement à remonter des produits finis aux processus de production et à élargir la focale pour prendre en compte des contextes autres que celui d'une simple mise à plat de contenus déjà stabilisés. Les liens complexes entre *invention* de structure et *résolution* de problème sont au cœur de cette recherche.

Dans la troisième partie de cette Note, consacrée aux projets de recherche, j'indique plusieurs directions permettant de reprendre ce fil de recherche sur le structuralisme comme pratique à problématiser. Deux angles de problématisation sont envisagés, le premier reprenant le fil de l'articulation entre niveau objet et niveau méta, et formulé en termes de génétique textuelle et d'épistémologie historique. Par exemple, pour étudier comment les descripteurs « général », « rigueur » ou « abstrait » sont mobilisés, parfois de manières concurrentes, pour guider la production théorique, pour décrire et motiver des arbitrages. Le

¹ UMR 7219 (Universités Paris Cité & Panthéon Sorbonne) : <http://www.sphere.univ-paris-diderot.fr/>

² EA 4434 (Universités Paris Cité, Paris-est Créteil, CY Cergy, Lille & Rouen Normandie) : <https://www.ldar.website/>

second fil consiste en l'étude de l'interface entre d'une part la pratique bourbachique et, d'autre part, une manière de pratiquer et d'organiser les mathématiques *a priori* radicalement différente, celle d'Elie Cartan. Il ne s'agit pas d'un projet de comparaison statique entre deux types-idéaux à caractériser, mais d'une étude d'actions de réorganisation et de réécriture, dont les difficultés et les limites révèlent des écarts structureaux.

A côté de ces travaux et projets d'histoire (Sections 1.1, 1.2, 1.3 et 3.1), la Section 1.4 regroupe des travaux plus indépendants et de nature plus épistémologique portant sur l'histoire de l'analyse : notion de fonction générale ; chaîne déductive conduisant à justifier le lien entre le signe de f' et les variations de f . Si le grain de l'étude et les modalités d'administration de la preuve écarte ces travaux de la démarche de l'historien au sens strict, on y retrouve le souci de remonter des produits achevés aux dynamiques de production aussi bien que celui d'étudier les discours des acteurs visant à décrire et organiser la matière mathématique en évolution, ici, par exemple, en termes d'objet « général » ou de théorie « générale » et non plus selon un couple tel « local – global ».

Ces travaux d'histoire ont donné lieu à deux co-encadrements de thèse³.

La partie 2 de la Note de synthèse regroupe les travaux publiés en didactique des mathématiques, essentiellement les cinq articles dans des revues internationales à comité de lecture (Chorlay, 2019a, 2021, 2022a, 2022b ; Chorlay et al., 2022). Le lecteur pourrait être surpris aussi bien du peu de liens apparents entre ces cinq travaux que de leur peu de liens avec les travaux d'histoire des mathématiques. Certes, je souligne dans cette Note des liens multiples et parfois structurants, souvent de nature heuristique. Ce sont moins les thèmes mathématiques travaillés en histoire (articulation local-global en analyse et dans les théories géométriques, structuralisme) qui nourrissent directement la réflexion didactique, qu'un certain nombre d'interrogations et de démarches partagées : analyse des conditions, ressources et contraintes fournissant des clés d'intelligibilité des choix et des comportements d'acteurs rationnels ; articulations et circulations entre deux niveaux de discours chez les acteurs étudiés, un niveau objet et un niveau méta ; intérêt pour les pratiques d'argumentation et d'exposition dans lesquelles les acteurs disent abstraire, unifier, généraliser (ou dire le général).

Ces fils rouges thématiques ou méthodologiques n'effacent pas la double discontinuité entre les travaux d'histoire et de didactique. Discontinuité épistémologique, tout d'abord, relative à la nature des deux domaines. La recherche en didactique possède une dimension empirique pouvant aller jusqu'à l'expérimental (contrôle de paramètres, souci de robustesse et de reproductibilité), une dimension cognitive, une dimension évaluative, une perspective transformative (en particulier par l'identification de leviers pour l'enseignement ou pour le développement professionnel), et un appui sur des cadres théoriques qui la distinguent de l'histoire des sciences⁴. Discontinuité, aussi, quant à mon insertion dans les deux domaines de recherche. Mes travaux en didactique se sont présentés sous la forme de *projets* successifs, chacun mené jusqu'à une publication. Cette démarche m'a permis d'approfondir mon insertion dans la communauté de recherche en didactique en m'intégrant dans des fils de recherche divers quant au contenu mathématique en jeu, quant au type de questions, et quant aux cadres théoriques mobilisés. Du côté des thèmes mathématiques, ils vont des nombres entiers et de la numération positionnelle à l'école élémentaire jusqu'aux fondements de l'analyse (notion de limite) et au commencement de l'algèbre linéaire abstraite au début des études supérieures. Du côté des types de questions, on va de l'ingénierie didactique de recherche (démarche interventionnelle, orientée vers les élèves) à l'étude des pratiques enseignantes en situations (relativement) ordinaires. Du côté des théories,

³ Samson Duran (2019). *Des géométries étasuniennes, à partir de l'étude de l'American Mathematical Society (1888-1920)*. H. Gispert (co-directrice) et R. Chorlay (co-encadrant). Université Paris Sud.

Simon Decaens (2018). *Une histoire de la théorie des treillis au sein de l'American Mathematical Society entre 1933 et 1948*. Co-direction R. Chorlay et J.-J. Szczeciniarz. Université Paris 7 – Paris Diderot.

⁴ Ces aspects généraux n'impliquent bien entendu pas que chaque étude particulière fait jouer un rôle structurant à tous ces éléments.

je me suis d'abord inscrit dans une théorie des situations didactiques étendue par les propositions théoriques de Balacheff (et Ouvrier-Buffet). Pour l'étude des pratiques enseignantes, j'ai successivement mobilisé des références anglo-saxonnes (Schoenfeld, dans une moindre mesure Herbst et Mason), puis des cadres s'inscrivant plus explicitement dans la théorie de l'activité : l'approche documentaire du didactique et la double approche ergonomique et didactique.

La partie 2 de cette Note rend compte de ces travaux en regroupant non pas par thème mathématique mais selon que le regard porte sur les élèves (en situation de description et de justification d'algorithmes numériques (Chorlay et al., 2017 ; Chorlay, 2021), ou en situation de construction de définition (Chorlay, 2019a)) ou sur les enseignants du secondaire (Chorlay, 2019a, 2022a) ou du supérieur (Chorlay, 2022b). De ce fait, les deux facettes de l'ingénierie visant la formulation et la validation en Terminale d'une définition formelle de la notion de suite tendant vers l'infini se retrouvent dans les deux sous-sections, puisqu'à côté de l'analyse des comportements anticipés puis observés des élèves (section 2.1.2) il importait d'étudier le comportement des enseignants pour établir l'existence d'une dimension adidactique dans la situation (section 2.2.1).

Parallèlement aux projets de recherche en histoire (section 3.1), la troisième partie de la Note présente deux directions de recherche en didactique des mathématiques, l'une prolongeant les deux travaux sur les limites (section 3.2), l'autre, nouvelle mais partiellement engagée, portant sur l'enseignement de l'algèbre linéaire dans le supérieur (section 3.3). Un co-encadrement de thèse en didactique des mathématiques a commencé en octobre 2022⁵.

Insérée entre les parties historiques (partie 1) et didactiques (partie 2), une partie intermédiaire (partie 1,5) vise à expliciter, parmi les diverses articulations possibles entre histoire des mathématiques et didactiques des mathématiques, celles qui sont privilégiées dans mon travail (Chorlay et al., 2022 ; Chorlay & de Hosson, 2016 ; Chorlay, 2016b).

Remarque : Dans cette Note, les textes dont l'original est en Allemand ont été traduits ; je ne le signale pas à chaque fois. Les textes en Anglais sont donnés en version originale.

⁵ Alexis Gautreau (en cours, 1^{ère} inscription 2022-2023). *Les exercices de lecture de textes de démonstration favorisent-ils l'apprentissage de la démonstration au cycle 4 ?* C. Hache (co-directeur) & R. Chorlay (co-encadrant). Université Paris-Cité.

1. Histoire des mathématiques : dynamiques des savoirs savants dans la période contemporaine

1.1 Emergence de l'articulation local-global

1.1.1 Position du problème⁶

- a. Une « catégorie des acteurs » tacite et peu localisée au sein des mathématiques ?

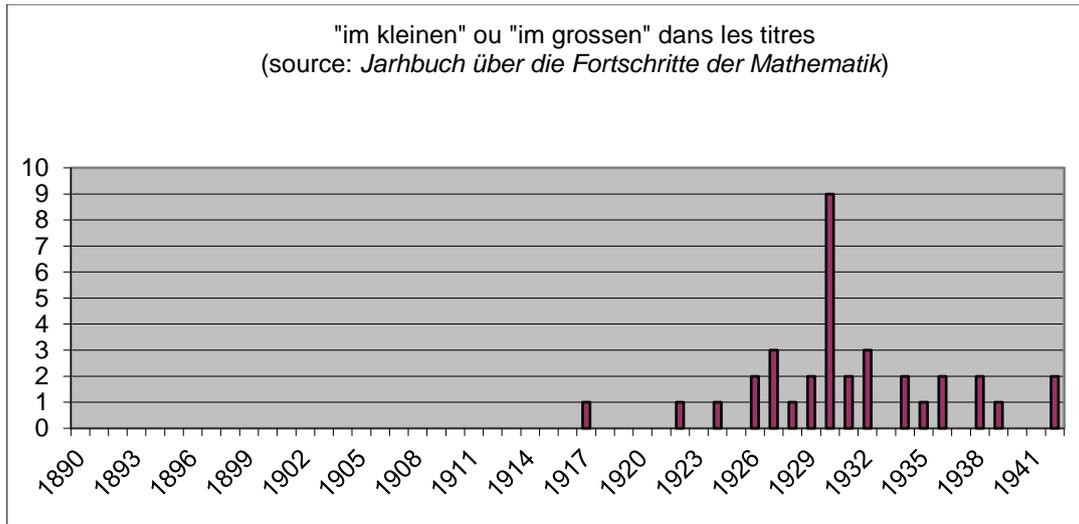
En 1967, le mathématicien étatsunien et pionier de l'étude des problèmes globaux en calcul des variations, Marston Morse, ouvrait une conférence sur l'analyse « *in the large* » par ces mots :

All mathematics is more or less “in the large” or “in the small”. It is highly improbable that any definition of those terms could be given that would be satisfactory to all mathematicians. Nor does it seem necessary or even desirable that hard and fast definitions be given. The German terms im Grossen and im Kleinen have been used for some time with varying meanings. It will perhaps be interesting and useful to the reader to approach the subject historically by way of examples. (Morse, 1989, p.259)

Le contexte étant ici celui d'un colloque de recherche sur les problèmes globaux en géométrie différentielle, il va sans dire que le sens des termes « local » (ou *in the small*, ou *im Kleinen*) et « global » (ou *in the large*, ou *im Grossen*) n'avait guère besoin d'être explicité. Pas plus que Morse ne définissait pour ce public, par exemple, la notion de « submersion ». Mais on saisit immédiatement une différence de nature entre ces non-explicitations : « submersion » est un concept mathématique, relevant d'un domaine particulier, et dont la définition pourrait être explicitée ; « local-global » est un couple de termes utilisé *en* mathématiques, *à propos* des mathématiques, mais une définition ne semble à Morse ni nécessaire ni même possible. Le couple semble relever de ces notions dont les acteurs partagent une connaissance tacite, et dont l'usage se transmet sans qu'une définition ou des règles d'usage n'aient à être explicitées. Nuancions : quoique relevant apparemment d'un niveau *méta* – servant à parler *des* mathématiques plutôt qu'à en faire – par rapport au niveau *objet* des définitions-théorèmes-preuves, l'articulation « local-global » renvoie aussi à des contenus mathématiques précis, ce dont atteste le fait qu'il y aurait sans doute aujourd'hui consensus parmi les mathématiciens sur un énoncé tel que : « Une fonction localement bornée n'est pas toujours globalement (considérez l'exemple de l'identité de \mathbf{R} muni de la métrique usuelle) ; en revanche, une fonction partout localement continue est globalement continue, il n'y a là rien à démontrer puisque la continuité est une propriété locale ». L'articulation local-global s'insère ainsi dans une famille de descripteurs *méta* utilisés par les mathématiciens – de manières variables dans le temps et les espaces sociaux – et qu'on pourrait étudier selon leur plus ou moins grande capacité d'insertion dans leur discours objet, depuis une assez grande capacité (« qualitatif – quantitatif », « constructif - non-constructif », « géométrique ») jusqu'à une bien moindre (« rigoureux », « élégant », « général », « naturel », « abstrait »). Non seulement « local-global » a une forte capacité à circuler entre les niveaux *méta* et objet, mais une définition n'est pas inenvisageable : Morse ne dit pas que ces notions ne sont pas définissables, mais qu'elles sont d'un usage si général dans l'ensemble des mathématiques qu'aucune définition n'est sans doute conforme à *tous* ces usages.

Les éléments fournis par Morse semblent confirmés par des études exploratoires. On peut ainsi lancer une recherche par mots-clés dans le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (ancêtre de *Zentralblatt MATH*), qui recense de 1868 à 1942 les publications mathématiques. En se limitant aux titres, obtient par exemple :

⁶ Cette partie s'appuie fondamentalement sur (Chorlay, 2007a, 2011a).



Cet échantillon semble confirmer l'usage des termes dans de nombreuses branches des mathématiques : géométrie différentielle, théorie des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, théorie des groupes de Lie, théorie des EDP, théorie des nombres, théorie du corps de classe etc. Ainsi que d'usages allant du niveau objet (ainsi pour « *Konvexität im Kleinen* » ou « *connectedness im Kleinen* »⁷) jusqu'au niveau *méta*, par exemple pour décrire l'articulation de questions et de domaines de recherche (ainsi dans l'article de W. Rinow (1932) sur les liens entre géométries différentielles locales et globales).

L'échantillon confirme aussi une certaine historicité de l'usage de ces descripteurs : ils n'ont, semble-t-il, pas toujours été « là », disponibles pour des mathématiciens le trouvant dans les écrits de leurs contemporains ou de leurs pères ; voire s'imposant à eux, car déjà stabilisés dans des termes techniques (convexité locale) ou des désignations de branches des mathématiques (*calculus of variations in the large*). La diffusion de l'usage des termes dans de nombreuses branches suggère que la période apparaissant dans l'échantillon – celle des années 20 – est déjà une période de diffusion, laissant entière la question du moment et du contexte d'émergence.

b. Mathématique globales et articulation local-global : deux chronologies

Une brève digression mathématique permettra non seulement de planter le décor de l'enquête, mais aussi d'attirer l'attention sur un élément de problématisation : la nécessaire distinction entre mathématiques globales et articulation local-global. Plus précisément : les différences de nature et de chronologie entre, d'une part, l'apparition de contenus mathématiques (problèmes, techniques, théorèmes) qui seront à un moment décrits au moyen de l'articulation local-global (quels que soient les termes dans lesquels les acteurs les aient alors décrits) et, d'autre part, l'émergence explicite de cette articulation à un niveau *méta*.

Le cas de l'intégration des formes différentielles est particulièrement important. Si F est une fonction indéfiniment différentiable de deux variables réelles (notés x et y), elle engendre par différenciation une 1-forme différentielle $dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$. La question de la réciproque se pose : toute 1-forme différentielle $\omega = f(x, y)dx + g(x, y)dy$ dérive-t-elle d'une fonction ? On sait depuis le 18^{ème} siècle qu'il n'en est pas ainsi : sous hypothèse (alors implicite) de continue différentiabilité, on a $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) = 0$. Pour dériver d'une fonction, la forme ω doit donc vérifier la condition (nécessaire) $\frac{\partial f}{\partial y} -$

⁷ On appréciera la juxtaposition de l'Anglais et de l'Allemand dans la formation de ce terme technique.

$\frac{\partial g}{\partial x} = 0$. Cette condition nécessaire est-elle suffisante ? La réponse qui se stabilise au 20^{ème} siècle est : oui, localement, mais pas nécessairement globalement. L'existence de « primitives » globales dépend non seulement de la forme différentielle concernée, mais fondamentalement de la topologie du domaine sur lequel elle est étudiée. Ainsi la condition d'intégrabilité s'avère-t-elle suffisante pour une forme définie dans tout le plan réel \mathbf{R}^2 , mais non suffisante pour une forme définie dans tout le plan réel privé d'un point. Le cas de la forme (qu'on écrit plus volontiers en termes complexes) $\omega = \frac{dz}{z}$, définie sur \mathbf{C}^* et non prolongeable à \mathbf{C} , est emblématique. Si elle dérivait d'une fonction holomorphe, la valeur de ses intégrales curvilignes ne dépendrait que des extrémités du chemin d'intégration, ce qui n'est pas le cas puisque son intégrale sur un chemin circulaire entourant l'origine du plan n'est pas nulle. On peut lire ce fait mathématique dans une perspective fonctionnelle : dans \mathbf{C}^* , la fonction logarithme est « ambiguë⁸ » ou « multiforme ». On peut en faire une lecture topologique : le caractère non suffisant de la condition nécessaire d'intégrabilité *révèle* quelque chose de la topologie de \mathbf{C}^* et, plus généralement, l'étude des formes différentielles localement-mais-non-globalement intégrables fournit un moyen de classification topologique des variétés différentielles. En résumant à grand traits, on pourrait dire que ces deux lectures du même « fait » mathématique sont typiques, la première du 19^{ème} siècle, la seconde des 20 et 21^{ème} siècles.

L'exemple précédent permet de rencontrer une *forme* de question assez générale : une condition localement suffisante (ici, d'existence) est-elle globalement suffisante ? Les questions d'inversibilité en fournissent un exemple important : pour une fonction continûment différentiable, le théorème d'inversion locale garantit l'inversibilité locale au voisinage d'un point sous condition d'inversibilité infinitésimale en ce point ; on a là un théorème de passage de l'infinitésimal au local⁹. Cependant, l'inversibilité locale en chaque point ne garantit pas l'inversibilité globale : ainsi la fonction de \mathbf{R} dans l'ensemble des complexes de module 1 donnée par $t \mapsto e^{it}$, ou, plus généralement, l'exponentielle de \mathbf{C} dans \mathbf{C} sont localement inversibles mais non globalement injectives, ni toujours surjectives (pour $\exp z$) ; on rencontre, sous un autre angle, la multivocité du logarithme complexe évoquée ci-dessus.

De même, si l'on considère dans le plan complexe une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients rationnels $Py'' + Qy' + Ry = S$, on connaît la nature de l'ensemble des germes de solutions holomorphes¹⁰ en un point où P n'est ni nulle ni infinie, il s'agit d'un espace vectoriel de dimension 2 sur \mathbf{C} , chaque solution particulière dépendant de deux constantes arbitraires (les conditions initiales). Partant d'un germe de solution en un point non singulier, on peut, le long d'un chemin évitant les singularités, obtenir une solution par prolongement analytique. L'existence locale de solutions et la possibilité du prolongement analytique ne garantissent cependant pas l'existence de solutions dans le plan complexe privé des points singuliers : ici encore, le prolongement analytique le long d'un chemin fermé ne ramène par nécessairement au germe de départ, ni même à la valeur de départ.

⁸ Les termes utilisés en français pour désigner une « fonction » admettant plusieurs valeurs possibles pour une valeur donnée de la variable sont « multiforme » ou « multivoque ». L'Allemand préfère le terme « *mehrdeutig* », qu'on peut traduire par « ambiguë ». Pour le lecteur peu familier des fonctions multiformes, donnons l'exemple de la racine carrée : pour Euler comme pour Cauchy, le symbole $\sqrt{4}$ désigne deux nombres, 2 et -2. La fonction racine carrée a deux « branches », aisément séparables par continuité sur \mathbf{R}^* , mais qui communiquent si l'on travaille dans \mathbf{C} ou \mathbf{C}^* et que l'on tourne autour du point singulier (valeur de ramification) $z = 0$.

⁹ Nous utilisons ici librement des formulations typiques du 19^{ème} siècle, là où l'on pourrait aujourd'hui préférer une formulation en termes d'application linéaire tangente en un point de l'espace de base ; application agissant sur l'espace vectoriel tangent et non sur une partie de l'espace de base, même « petite ». Le passage du point de vue « changement d'échelle » (infinitésimal vs fini) au point de vue « changement d'espace de travail » (espace de base, espace tangent en un point, fibré tangent) relève d'un mouvement historique différent mais connexe à celui de l'émergence de l'articulation local-global.

¹⁰ Nous désignons ainsi une série entière S de rayon de convergence non nulle telle que $S(z-a)$ soit solution de l'équation différentielle sur un voisinage du point non-singulier d'affixe a .

Un quatrième exemple, plus élémentaire mais moins typique du 19^{ème} siècle, suffira. En un point du plan, il existe deux orientations possibles ; c'est là un « fait » mathématique que l'on peut regarder comme parfaitement intuitif, ou que l'on peut rapporter au nombre de composantes connexes du groupe topologique des transformations linéaires inversibles du plan affine réel. Dans le plan, on peut choisir en chaque point l'une des deux orientations d'une manière « cohérente », et déterminer ainsi une orientation « du » plan. Cette possibilité ne s'offre cependant pas pour des objets pourtant localement indistinguables du plan ; ainsi pour la bande de Möbius ou le plan projectif réel.

Avec quelques autres que nous rencontrerons plus loin (uniformisation des fonctions algébriques puis analytiques, problèmes de Cousin), ces exemples jouent un rôle de premier plan dans notre histoire :

- (1) ils sont centraux dans les mathématiques *normales* du 19^{ème} siècle (au sens de Kuhn (2018)),
- (2) au 19^{ème} siècle, les mathématiciens au travail sur ces problèmes ne les décrivent pas comme des problèmes de passage du local au global,
- (3) c'est dans le cadre de l'étude – exposition, reformulation, prolongement – de ces problèmes que l'articulation local-global commence à être utilisée autour de 1900,
- (4) à partir de 1910, la reformulation de ces problèmes au moyen de l'articulation local-global précède et accompagne des développements théoriques autour de la topologie (homotopie, homologie, cohomologie de de Rham) et de structures associées (variété, revêtement, espace fibré sur un autre, faisceau).

Les trois premiers points sont établis dans les deux premières parties de (Chorlay, 2007a) ; le point (3) est établi dans (Chorlay, 2007a) et prolongé dans (Chorlay, 2011a). Le point (4) est étudié dans les parties 4 et 5 de (Chorlay, 2007a), et prolongé dans (Chorlay, 2010a).

Le fait – massif mais négatif – que les auteurs dont nous parlons ne décrivent *pas* leur démarche au moyen de l'articulation local-global ne peut être établi qu'au moyen d'une lecture extensive du corpus dont nous ne pouvons rendre compte ici de la construction. Ce travail est mené dans (Chorlay, 2007a, pp. 25–228).

c. Des facilités à éviter : correction ; prise de conscience.

Les auteurs qui commencent à utiliser l'articulation local-global en font souvent un usage rétrospectif, en particulier pour souligner combien sa méconnaissance a pu conduire à des erreurs mathématiques, par exemple lorsqu'on a cherché à conclure à l'inversibilité en n'utilisant que le théorème d'inversion local, ou que l'on a négligé la multivocité de fonctions obtenues par prolongement analytique.

La dénonciation d'erreurs systématiques de raisonnement peut aller jusqu'au réquisitoire. Il en va ainsi dans la critique que Study adresse, en 1908, à l'œuvre de Lie :

Comme une exigence exotique imposée de l'extérieur, l'indubitable compréhension théorique qu'il a, que ses notions et théorèmes n'ont de validité que dans des régions limitées, n'a jamais vraiment pris racine dans l'esprit à la créativité intuitive de Lie. Elle ne peut guère être ressentie autrement que comme une importune entrave à faire tomber à la première occasion. Ainsi, comme nous l'avons vu, dans l'espace total [*Gesamtraum*], il ne parle pas des invariants multivoques autrement que s'ils étaient univoques ; et chaque élimination d'équations surnuméraires demeure, de sorte qu'une opération possible *im kleinen* (avec certaines

précautions) trouve des applications illicites dans des situations d'un tout autre type. (...) (Study, 1908, p. 141¹¹)

Cette erreur générale et centrale n'est, pour Study, qu'un aspect d'une manière de faire et d'écrire les mathématiques. La critique embrasse large :

Nous pensons entre autres choses à l'usage abusif de certains termes (en général, quelconque, toujours, tous, chaque) ; aux hypothèses « introduites implicitement » (autrement dit implicites) donc aux hypothèses manquantes ; aux définitions sans rives nettes et aux concepts caméléons ; enfin et surtout aux contradictions dont la littérature est pleine. (Study, 1908, p. 132)

Sans multiplier les exemples, signalons une lecture moins polémique mais tout aussi sévère dans la recension par Weyl d'un cours de théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe, au moment où lui-même rédige son *Idee der Riemannschen Fläche* (Weyl, 1913) :

Malheureusement, les parties de l'ouvrage portant sur le domaine bidimensionnel dans son ensemble [*das zweidimensionale Gebiet als Ganzes*] ne sont guère réussies ; un certain vague dans la formation des concepts [*Begriffsbildung*] et dans la conduite des preuves [*Beweisführung*] y contraste singulièrement avec l'exactitude méticuleuse du reste de l'ouvrage. (cité dans (Chorlay, 2011a, p. 38))

Les éléments historiques présentés jusqu'ici amènent à un double constat. Premièrement, celui d'un décalage chronologique entre, d'une part, le développement de théories globales et de techniques de passage du local au global et, d'autre part, l'usage explicite de l'articulation local-global pour décrire et organiser ce travail. Deuxièmement, l'usage explicite de cette articulation – apparemment au début du 20^{ème} siècle – sert non seulement à décrire et organiser ces mathématiques, mais aussi à dénoncer dans l'absence de ces termes le symptôme de mathématiques sinon toujours erronées, du moins toujours en défaut de rigueur. Une pente naturelle pourrait conduire à rendre raison de l'émergence de l'articulation local-global en termes de « prise de conscience » et d'« explicitation » participant d'un mouvement général mené sous la bannière de la « rigueur ».

Un tel narratif nous semble relever de la facilité. Soulignons plusieurs de ses défauts pour mieux indiquer, en creux, les contraintes que nous nous fixons. Ces termes n'ont guère de valeur explicative du fait de leur manque de spécificité ; s'ils peuvent s'appliquer à presque tout, c'est sans doute qu'ils n'expliquent presque rien¹². Ce n'est pas tant la tenue du registre doxographique des discours sur les mathématiques que l'étude des modes d'articulation spécifiques entre discours et pratiques qui peut mettre au jour, sinon des dépendances causales, du moins des co-dépendances intelligibles. En outre, ces termes renvoient à des registres explicatifs qui ne relèvent pas, somme toute, de l'analyse historique : l'analyse des contenus de conscience de Riemann ou Poincaré n'est pas notre projet ; et nous partageons l'approche positiviste de Study : du point de vue méthodologique, nous regardons une définition « implicite » comme une absence de définition. Enfin, l'historien cherche à distinguer les « catégories des acteurs » (« local-global » aussi bien que « rigueur ») de ses propres catégories d'analyse. Cela ne traduit aucune posture de défiance ou de soupçon, et ne reflète que la distinction entre un discours objet (celui des acteurs), à étudier, et un discours méta dans lequel mener l'étude.

¹¹ Sauf mention du contraire, les traductions sont toutes les nôtres. Ici, « im Kleinen » n'est pas en italiques dans le texte original ; nous utilisons les italiques pour faciliter la lecture et signaler un terme d'une langue différente de celle du texte donné.

¹² Cette remarque ne vise pas à dénoncer l'impossibilité de forger des théories appuyées sur des concepts de portée générale et porteurs de compréhension (donc : des concepts). Nous soulignons ici le manque de caractérisation conceptuelle de termes entre guillemets, et expliquons en quoi notre démarche d'historien ne vise pas à préciser le sens de ces concepts pour en faire des outils d'analyse.

Plus généralement, il semble plus riche de chercher à analyser les formes positives de la pratique mathématique que de confirmer (ou infirmer) des diagnostics rétrospectifs formulés en termes d'absence ou de manque. Le repérage rétrospectif de tels « manques » (formulé en termes de catégories qui ne sont pas celles des acteurs historiques étudiés) peut certes servir à formuler la question. Mais si la réponse vise rendre raison des traces laissés par des acteurs du passé en termes d'agentivité (*agency*), alors ce sont les systèmes de ressources et de contraintes (de toutes natures : conceptuelles, sémiotiques, matérielles, sociales) au sein desquels se déploie leur activité qu'il faut reconstituer, pour mieux analyser ensuite à la fois le sens qu'ils donnent à cette activité, et la manière dont leur action modifie en retour le système de ressources et contraintes.

Des pistes pour aller dans ce sens sont indiquées par les auteurs « critiques » des années 1900-1912. Ils soulignent le rôle de conventions d'écritures des mathématiques – de définition des notions comme de conduite des preuves – qui auraient été requalifiés, à cette période, comme relevant d'un style dépassé et pêchant par manque de rigueur. Une autre piste est fournie par Hadamard, qui, non seulement souligne que de nombreux auteurs du 19^{ème} siècle n'ont pas pris garde, par exemple, à la distinction entre inversions locale et globale, mais cherche à en rendre raison en soulignant le rôle de formes positives de la pensée. Hadamard décrit ces mathématiciens comme les héritiers de deux outils merveilleux dont ils exploitaient les ressources : la géométrie analytique et le calcul différentiel. Ces outils guident de manières spécifiques et intelligibles la pratique et le regard ; ils possèdent des angles morts. La prise en compte de l'articulation local-global, dont Hadamard est l'un des pionniers dans les années 1909-1915, ne passe pas par le rejet de ces outils fructueux, mais par un enrichissement de la gamme des outils du mathématicien, qui non seulement élargissent les possibilités d'action mais permettent une meilleure compréhension (rétrospective) de la portée (donc des limites) des différentes démarches (Chorlay, 2011a, p. 42 et suiv.).

1.1.2 Modalités et conditions d'émergence de l'articulation local-global

a. Une émergence partiellement localisable

Les hypothèses formulées sur la base d'une étude uniquement qualitative dans (Chorlay, 2007a) ont été confirmées par l'étude quantitative (Chorlay, 2011a) (discussion méthodologique dans (Goldstein, 1999)). La constitution dans les années 2000 de vastes corpus rétrodigitalisés permet de s'inspirer des méthodes utilisées par les chercheurs du domaine des « humanités numériques¹³ » : après une première phase de recherche de quelques mots-clés dans un corpus de départ (corpus-zéro) dont la constitution doit être contrôlée, les données recueillies font l'objet soit d'un traitement quantitatif (*not-reading*), soit d'un traitement qualitatif (*close-reading*). Le corpus d'étude a été formé pour rendre compte de l'institution « mathématiques savantes » en occident au tournant du 20^{ème} siècle : grandes revues de recherche (par exemple : *Mathematische Annalen*, *Bulletin de la Société Mathématique de France*), actes du congrès international des mathématiciens (depuis le premier, en 1897), publications dont les titres sont référencés et les contenus résumés dans le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, encyclopédie de référence (*Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*). On trouvera les détails de la démarche et la discussion des biais en annexe dans (Chorlay, 2011a).

¹³ Voir, par exemple : (nous empruntons à ces auteurs les termes de *not-reading* et *close-reading*).

Crane, Gregory. 2006. What do you do with a million books? *D-Lib Magazine* 12 (3). doi: [10.1045/march2006-crane](https://doi.org/10.1045/march2006-crane)

Kirschenbaum, Matthew. 2007. The Remaking of Reading: Data Mining and the Digital Humanities. Nat. Sci. Found. Symposium on Next Generation of Data Mining and Cyber-Enabled Discovery for Innovation. <http://www.cs.umbc.edu/~hillol/NGDM07/abstracts/talks/MKirschenbaum.pdf>

En arrêtant l'étude en 1918, on trouve une quarantaine d'occurrence pertinente¹⁴ des termes « local », *im Kleinen* etc. Un si faible effectif n'appelle pas une étude quantitative. La phase suivante du travail a donc consisté en une étude qualitative, ainsi que la prise en compte d'un nouveau corpus, le corpus-étendu, formé des textes auxquels les textes du corpus-zéro renvoient explicitement. Cette dualité de corpus renvoie à la fonction méta de l'articulation local-global, utilisée à *propos* de mathématiques. Ainsi, un article de Poincaré résumé dans un paragraphe de l'*Encyclopädie* intègre-t-il le corpus étendu si le paragraphe rend compte de son contenu en utilisant l'un des mots-clés retenus.

Le faible effectif confirme un phénomène d'émergence : l'articulation local-global n'est pas, avant 1918, d'un usage général parmi les mathématiciens. Mieux, la constitution du corpus-zéro permet d'identifier un contexte d'émergence précis. Le souvenir de Morse se voit confirmé : le couple « *im Kleinen – im Grossen* » commence à être utilisé par le mathématicien étasunien William Osgood, à partir de 1898, dans des publications à haute visibilité, en langues anglaise et allemande. Osgood fait partie de cette première génération des mathématiciens étasuniens dont l'histoire institutionnelle et sociale fait l'objet de travaux de référence¹⁵. Comme beaucoup d'entre eux, Osgood suivit une partie de sa formation en Allemagne (Erlangen, Göttingen), où il travailla sous la conduite de Max Noether et de Felix Klein. De retour aux Etats-Unis, il fut à la fois une figure centrale au sein de la jeune *American Mathematical Society* et un lien entre les communautés de recherche étasuniennes et européennes (quoique germaniste, il connaît parfaitement les travaux de Poincaré). Outre ses travaux de recherche, en particulier en théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, deux de ses publications jouent un rôle important pour notre enquête : d'une part, un cours d'analyse qui, quoique rédigé en Allemand, restera de nombreuses années la référence aux Etats-Unis (*Lehrbuch der Funktionentheorie* (Osgood, 1906)) ; la nature « didactique » et « élémentaire » permet de l'insérer dans la série longue des cours d'analyse post-weierstrassien (de Genocchi-Peano à Goursat en passant par Jordan), permettant ainsi des comparaisons à toutes échelles (du plan de l'ouvrage au détail d'une démonstration). D'autre part, Osgood est invité à rédiger la synthèse ouvrant les volumes sur la théorie des fonctions d'une ou plusieurs variables complexes de l'*Encyclopädie* (Osgood, 1901).

D'emblée l'usage du couple *im Kleinen – im Grossen* par Osgood relève du niveau méta, par exemple dans un commentaire soulignant le lien entre deux théorèmes proches :

Any function $G(z)$ which is single valued and analytic for all finite values of z takes on in general for at least one value of z any arbitrarily assigned value C . There may be one value, a , which the function does not take on. But if there is a second such value, b , the function reduces to a constant. (Osgood 1899, p. 59)

(...) We now turn to the more general form of Picard's theorem: If $F(z)$ is any analytic function of z which in the neighborhood of a point A is single valued and has in this region no other singularities than poles, and if A is an essential singular point of $F(z)$ then there are at most two values which $F(z)$ does not take on in every neighborhood of the point A . (Osgood, 1899, p. 63)

*(...) This theorem, it will be noticed, is concerned with the behavior of a function *im Kleinen*, i.e. throughout a certain arbitrarily small region; while the earlier theorem was one *im Grossen*, the domain of the independent variable being there the whole finite region of the plane. (Osgood 1899, p. 63. Alternance caractères droits / italiques dans l'original)*

¹⁴ « pertinentes » au sens où, par exemple, un compte rendu de réunion dans lequel le choix du « local » et de l'horaire est mentionné est exclu de cette étude.

¹⁵ Parshall, Karen and David Rowe. 1989. *American mathematics comes of age: 1875–1900*. In *A century of mathematics in America, part III*, ed. Peter Duren et al., 1–24. Providence : AMS.

Parshall, Karen and David Rowe. 1994. In *The emergence of the American Mathematical Research Community 1876–1900*, eds. J.J. Sylvester, Felix Klein, and E.H. Moore. Providence: AMS/London: London Mathematical Society.

Soulignons ici un phénomène général : les théorèmes rapportés par Osgood sont bien dus à Picard, mais ce dernier ne les décrivait pas au moyen de l'articulation local-global. Il en va de même des résultats de Riemann, Poincaré ou Hilbert exposés dans ses conférences de 1899 visant à faire connaître aux chercheurs étasuniens l'état de l'art en théorie des fonctions (sous-entendu : analytiques d'une variable complexe). Le même type de qualification rétrospective en termes de local-global, le même type de relation entre le zéro-corpus et le corpus étendu (qui comprend donc des travaux de Riemann, Poincaré, Picard, Hilbert) se retrouve dans le cours de calcul des variations du mathématicien étasunien d'origine allemande Oskar Bolza (deux éditions : 1904 puis 1909) : rare en 1904, et pour qualifier des théorèmes que leurs inventeurs ne décrivaient pas ainsi (en l'occurrence Hilbert), l'usage de *im Kleinen – im Grossen* devient massif en 1909.

Les fonctions de l'usage du couple local-global ne se limitent pas à la qualification de certains résultats, en particulier pour faire ressortir le contraste entre deux résultats d'une même « famille ». Si l'on revient à Osgood, on voit que ces termes sont aussi régulièrement utilisés, toujours sans définition, dans le *Lehrbuch*, pour attirer l'attention du lecteur sur une erreur courante (confusion entre inversion locale et globale), ou indiquer une forme générale de théorème (passer du local au global). Enseignant créatif, Osgood va jusqu'à inventer des théorèmes¹⁶ dans le seul but d'illustrer cette forme théorème et les schémas de preuve associés (Chorlay, 2011a, pp. 16–17).

Fait unique dans notre zéro-corpus, une définition de « *im Kleinen – im Grossen* » est donnée par Osgood. Dans son chapitre de l'*Encyclopädie*, une simple note infrapaginale explique :

Le concept de comportement *im Kleinen* et *im Grossen* d'une fonction joue un rôle important en Analyse, et s'étend à tous les domaines des mathématiques (en particulier à la Géométrie) où un ensemble continu d'éléments forme le substrat des configurations considérées. En théorie des fonctions on entend par comportement *im Kleinen* resp. *im Grossen* d'une fonction son comportement au voisinage d'un point fixé a , (a_1, a_2, \dots, a_n) ou d'un ensemble de points P (§40) [par souci de brièveté on parle tout simplement de comportement *en* le point a , (a_1, a_2, \dots, a_n) ou *en* l'ensemble de points P] resp. dans un domaine T, T', T, T' etc. dont l'étendue est fixée d'avance [*von vornherein*] et non déterminée après coup [*hinterher*] pour répondre aux besoins du problème considéré. Dans de nombreux cas on peut conclure, d'un certain comportement *im Kleinen* en chaque point d'un domaine T', T' , le comportement correspondant *uniforme* (§6) *im Grossen*. (Osgood, 1901, p. 12)¹⁷

On retrouve la spécificité de l'articulation local-global, dont la fonction se situe au niveau méta, mais dont le sens est susceptible d'une définition interne aux mathématiques. Ces lignes d'Osgood ne relèvent pas de la simple métaphore : en 1901, la notion de « voisinage » est susceptible d'une définition technique : nous renvoyons au chapitre 6 de (Chorlay, 2007a) pour une étude de l'évolution du sens et des usages métaphoriques puis techniques de « voisinage » dans le dernier tiers du 19^{ème} siècle. La distinction d'Osgood renvoie à la syntaxe des énoncés explicitement quantifiés dans lesquels l'analyse post-weierstrassienne voit l'un des traits distinctifs de sa « rigueur » : le fait qu'une propriété soit valable

¹⁶ Nous proposons de les qualifier de « *dummy theorems* » (Chorlay, 2011a).

¹⁷ « *Der Begriff des Verhaltens einer Funktion im Kleinen und im Grossen spielt in der Analysis eine wichtige Rolle und erstreckt sich auf alle Gebiete der Mathematik (namentlich auch auf die Geometrie), wo eine stetige Menge von Elementen das Substrat für die in Betracht zu ziehenden Gebilde bildet. In der Funktionentheorie versteht man unter dem Verhalten einer Funktion im Kleinen resp. im Grossen ihr Verhalten in der Umgebung eines festen Punktes a , (a_1, a_2, \dots, a_n) oder einer Punktmenge P (Nr.40) [der Kürze halber spricht man dann schlechtweg von ihrem Verhalten im a , (a_1, a_2, \dots, a_n) oder in der Punktmenge P] resp. in einem Bereich T, T', T, T' u.s.w., dessen Ausdehnung von vornherein feststeht und nicht erst hinterher den Bedürfnissen des vorgelegten Problems entsprechend bestimmt wird. In vielen Fällen folgt aus einem gegebenen Verhalten im Kleinen in jedem Punkt eines Bereiches T', T' das entsprechende gleichmässig (Nr.6) Verhalten im Grossen. »*

Les domaines T etc. sont ceux discutés dans le passage du texte principal auquel est rattachée cette note *infra*.

sur un domaine fixé au départ ou dans second temps se lit en termes d'ordre des quantificateurs et dans la dépendance entre les variables¹⁸.

b. Une variété d'usages, une « tresse » de sens¹⁹

Quoique relevant de l'histoire conceptuelle, l'étude de l'émergence de l'articulation local-global a donc pu, de manière inattendue et objectivée (autant que possible) par le recours à des méthodes quantitatives, contribuer à éclairer un phénomène historique jusqu'ici étudié sous l'angle social et institutionnel : celui du rôle des circulations de personnes et d'idées entre l'Allemagne et les Etats-Unis sur la période s'étendant de la fondation de l'*American Mathematical Society* jusqu'en 1914.

Sur la période 1898²⁰-1918, les termes *im Kleinen* – *im Grossen* sont repris au-delà des Etats-Unis, mais uniquement en Allemagne. Cette première phase de diffusion permet déjà d'observer une diversification des contextes disciplinaires et des usages. Nous avons déjà noté plusieurs usages méta, déjà distinguables. Certains renvoient à des contenus mathématiques spécifiques et justiciables de la caractérisation syntaxique donnée par Osgood : souligner le contraste entre deux théorèmes, indiquer qu'une démonstration procède par « passage du local au global ». D'autres, comme on l'a vu dans les critiques de Study sur l'œuvre de Lie, visent plus large. Si, au premier abord, les critiques sont formulées en termes de manque de rigueur, une lecture plus précise du texte de Study montre une autre fonction : celle de la défense d'options méthodologiques d'ensemble (étude d'invariants algébriques plutôt que différentiels) et, plus généralement, à la discussion des mérites et des portées comparées de branches des mathématiques (géométrie algébrique vs théorie des fonctions). A ces usages *rétrospectifs* – permettant de décrire des mathématiques *déjà là*, pour éclairer ou mettre en garde le lecteur – succèdent des usages *prospectifs*, accompagnant la formation de nouveaux concepts ou la formulation de nouveaux programmes de recherche. Illustrons ce point par trois exemples dans lesquels l'articulation local-global ne joue pas exactement le même rôle.

En topologie générale, Otto Hahn, puis Tietze et Alexandroff utilisent l'aspect le plus syntaxique de l'articulation et forgent des notions nouvelles par localisation de notions connues : connexité locale, compacité locale, convexité locale etc. (Chorlay, 2011a, pp. 30–32). A un niveau plus général, et partiellement sous l'influence de Study, Wilhelm Blaschke développe progressivement un programme de recherche qu'il baptise *géométrie différentielle globale* (*Differentialgeometrie im Grossen*). Aussi surprenant que cela puisse sembler au lecteur du 21^{ème} siècle, l'usage systématique qu'a Blaschke de l'articulation local-global dans son traité de géométrie différentielle au début des années 1920 est en rupture avec les modes d'exposition jusque-là utilisés pour cette branche des mathématiques (Blaschke, 1923, 1924).

Le cours de Hermann Weyl sur l'*Idée de surface de Riemann* (1913) est l'une des œuvres phares des mathématiques du 20^{ème} siècle. Une partie importante de (Chorlay, 2007a) consiste en l'étude des reformulations et reconceptualisations successives de la proposition riemannienne pour l'étude des fonctions algébriques d'une variable complexe et de leurs intégrales (1854) ; étude qui passe par une comparaison approfondie des travaux de Neumann (1884), Klein (1882) et Weyl (1913). On l'a vu,

¹⁸ Illustrons par un exemple plus élémentaire que ceux d'Osgood : Soit f une fonction numérique définie sur \mathbf{R} :

- f est (globalement) majorée si : $\exists M \in \mathbf{R} \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad |f(x)| < M$

Par localisation, on peut former les propriétés « être localement majorée en (ou : au voisinage d') un point donné A » et « être (partout) localement majorée » :

- $\exists \varepsilon \in \mathbf{R}^{+*} \quad \exists M \in \mathbf{R} \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad |A - x| < \varepsilon \implies |f(x)| < M$
- $\forall B \in \mathbf{R} \quad \exists \varepsilon \in \mathbf{R}^{+*} \quad \exists M \in \mathbf{R} \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad |B - x| < \varepsilon \implies |f(x)| < M$

¹⁹ Nous reprenons l'image de la « tresse », inspirée de Wittgenstein et reprise par des historiens des mathématiques : des fils divers peuvent se nouer en une tresse solide sans qu'aucun fil ne la parcoure tout entière. Cette métaphore invite à considérer les constructions historiques d'entités conceptuelles ayant une certaine robustesse sans pour autant pouvoir être réduites à une définition ou un épisode (Epple, 1994).

²⁰ La première occurrence d'un des termes cibles dans le corpus-zéro date de 1898.

l'articulation *im Kleinen – im Grossen* permet à Weyl de critiquer d'autres exposés de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Non seulement Weyl utilise toute la gamme des usages méta déjà relevés, mais il l'étend en faisant jouer à l'articulation des fonctions heuristiques et de contrôle dans la construction d'un exposé axiomatique. Contrairement à ce que faisaient Riemann, Klein ou Neumann, Hermann Weyl vise en effet une présentation axiomatique de la théorie riemannienne ; il est en cela l'héritier de Hilbert (dont il est l'élève) et le contemporain de Steinitz (en algèbre abstraite) et de Hausdorff (en topologie ensembliste). L'articulation *im Kleinen – im Grossen* lui permet, au niveau méta, de formuler les contraintes auxquelles il souhaite soumettre les axiomes qu'il propose ; et au niveau objet à sélectionner les bonnes définitions et les bons types de démonstrations (*Begriffsbildung, Beweisführung*). En particulier, le fait que les axiomes et définitions ne puissent prescrire que la structure locale des objets considérés (variétés topologiques bidimensionnelles²¹ puis courbes analytiques complexes) permet d'embrasser uniformément des objets localement indistinguables et garantit une partie commune à leur théorie, la partie locale. Le caractère commun de la théorie locale permet des *transferts* de propriétés (*übertragung*), fournit un procédé uniforme de constructions d'objets (en particulier, de différents types de revêtements), offre un cadre permettant de formuler la variété des réponses spécifiques – spécifiques aux différents objets particuliers du type considéré – à des questions communes.

L'examen de la période d'émergence doit compléter l'étude germano-étasunienne en prenant compte le rôle, en France, de Jacques Hadamard. Son usage de plus en plus explicite, autour de 1910, des termes « local » et « passage du local au général » n'est certes pas fondamentalement différent de celui de l'articulation *im Kleinen – im Grossen*. Il semble cependant autonome quant à ses origines, et légèrement différent quant aux sens et à l'usage des termes (Chorlay, 2007a, pp. 431–464). Hadamard s'inscrit moins dans la filiation de Riemann que dans celle de Poincaré (ces deux auteurs jouant d'ailleurs des rôles d'égale importance pour Osgood). Signalons rapidement deux différences quant au fond. Premièrement, Hadamard utilise moins un couple local-global qu'un triplet infinitésimal-local-global :

On peut dire à ce point de vue qu'une première solution est acquise dans la plupart des cas, – et cette conquête, ébauchée dès Newton, est surtout l'œuvre de Cauchy et de Weierstrass : – des relations entre états infiniment voisins, on sait déduire, ce qui est fort différent, la connaissance de tous les états suffisamment voisins d'un état donné. (...) Quoiqu'il en soit, ces premiers résultats, même si l'on n'est pas réduit à s'en contenter servent tout au moins d'intermédiaires obligés pour en obtenir de meilleurs, de sorte que, presque partout, la marche de la science mathématique actuelle comporte deux étapes : la solution locale des problèmes ; le passage de celle-ci à une solution d'ensemble, si cette sorte de synthèse est possible. (Hadamard, 1912²², p. 205).

Deuxièmement, Hadamard utilise ces termes pour proposer une analyse conceptuelle fine de la nature de problèmes et des modes d'attaque pertinents. Son analyse est compatible mais non réductible à la distinction proposée par Osgood, qui reposait sur un critère syntaxique permettant de trier des énoncés (théorèmes ou définitions). Ainsi, dans sa discussion des contributions de Poincaré à la théorie des équations différentielles, Hadamard peut-il expliquer que certains problèmes ne sont « locaux qu'en apparence » ; ou qu'une question peut être « à cheval sur les deux points de vue entre lesquels pivote toute la théorie des équations différentielles » (cité dans (Chorlay, 2011a, p. 48)). A propos de la théorie des équations aux dérivées partielles, même si l'on peut toujours formuler le problème en termes de passage du local au global²³, cette description uniforme masque la vraie nature des problèmes et ne permet pas d'identifier la spécificité des équations aux dérivées partielles elliptiques. Pour elles –

²¹ « bidimensionnelles » au sens réel, donc unidimensionnelles au sens complexe, d'où la désignation des objets soit comme des « surfaces » soit comme des « courbes », selon les points de vue.

²² Ce numéro d'*Acta Mathematica* hommage à Poincaré (mort en 1912) paraît en fait en 1921.

²³ Hadamard n'utilise pas le terme « global », préférant « d'ensemble », « de synthèse » ou « général(e) ».

explique Hadamard –, il faut préférer une formulation intégrale plutôt que différentielle, et chercher d'emblée des solutions globales vérifiant des conditions aux limites sans s'engager dans la démarche de passage du local au global : « C'est ce renversement du principe même qui, en toutes les autres circonstances, guide la marche du calcul intégral : la division de la difficulté en une difficulté locale et une difficulté de synthèse. Une telle division est ici radicalement impossible » (cité dans (Chorlay, 2011, p. 49)).

c. Des évolutions en profondeur du cadre de l'analyse : concepts et règles d'écriture

Cette analyse des modalités et des fonctions de l'articulation local-global dans les premiers textes où elle est utilisée, dans la période 1898-1918, rend d'autant plus vive l'interrogation initiale : comment rendre compte d'un « décalage » chronologique entre niveau objet et niveau méta ? Dans la seconde moitié du 19^{ème} siècle s'accumule une riche matière mathématique (problèmes, concepts, techniques de preuves) qui n'est pas décrite par ses auteurs en termes de local-global, alors que ces termes seront forgés, une ou deux générations plus tard, pour la décrire et l'enrichir.

Avançons des éléments d'intelligibilité. Cela appelle deux remarques de méthode. La première a déjà été faite : préférer des reconstitutions de systèmes de ressources et contraintes aux descriptions conjecturales ou²⁴ tautologiques formulées en termes de manque à voir²⁵, d'erreur²⁶, de concepts implicites et de prises de conscience. La seconde remarque a trait à l'échelle et à la nature du travail. L'étude des usages explicites de l'articulation local-global passait par l'identification de corpus délimitables – l'un petit (le corpus-zéro) l'autre plus vaste (corpus étendu) – et par l'étude de liens objectifs entre les deux. Les textes qui n'utilisent *pas*, et les manières de ne *pas* utiliser local-global ne forment pas un ensemble aussi délimitable. Les occasions où local-global n'est pas mathématiquement pertinent ; les systèmes sémiotiques dans lesquels l'articulation est peu visible ou difficilement dicible ; les éléments méta concurrents à local-global ... autant d'éléments d'intelligibilité du décalage qui nous interroge, autant d'éléments partout denses dans les mathématiques du 19^{ème} siècle. Nous cherchons à répondre à ces défis en changeant d'approche. L'exhaustivité n'étant pas possible – si tant est qu'elle ait un sens – nous procédons par l'identification de quelques « terrains » où affleure la frontière entre deux couches géologiques, l'une contenant des sédiments de local-global, l'autre non. Pour filer la métaphore, on pourrait dire que ce sont des modifications profondes, tectoniques, qui déforment insensiblement les mathématiques – comme système de concepts, de modes d'écritures, de conventions – au point que des mathématiciens du début du 20^{ème} siècle puisse porter sur de vastes pans théoriques un regard à la fois nouveau et « naturellement » informé par l'articulation local-global. L'approche par sondages ou carottages amène à formuler des arguments de plausibilité plus que des conclusions. Même si des corpus de documents historiques forment toujours la matière de l'étude, des éléments mathématiques ou épistémologiques participent à la formulation des hypothèses et appuient les arguments de plausibilité.

L'étude de plusieurs corpus relatifs à l'évolution de l'analyse au 19^{ème} siècle permet de dessiner un mouvement général vers une prise en compte de plus en plus explicite et de plus en plus informée par des concepts nouveaux (construction des réels, bases de la topologie ensembliste) de la notion de *domaine* d'étude des objets fonctionnels. Dans le dernier tiers du 19^{ème} siècle, la mention des domaines devient non seulement souhaitable mais obligatoire, et les conventions d'écriture correcte

²⁴ Le « ou » est inclusif.

²⁵ Phénomène pour lequel Hadamard utilise le terme Grec d'*ablépsie*.

²⁶ Explicitons, pour nous démarquer des positions de type « programme fort » (Bloor) en sociologie des sciences : il ne s'agit pas de dire qu'un mathématicien d'aujourd'hui ne puisse légitimement voir une erreur dans un énoncé donné ; encore moins de nier le fait que, dans certains contextes passés, certains acteurs ont dénoncé des erreurs ayant des causes systémiques dans des travaux de leurs collègues ou de leurs pères ; il s'agit de conserver à la catégorie « erreur » son statut de « catégorie des acteurs », donc d'*objet* d'analyse pour l'historien, sans l'embarquer la gamme des *outils* d'analyse et d'explication.

des mathématiques changent. Ces évolutions rendent possible la distinction syntaxique proposée par Osgood entre propriétés locales et globales. Elles passent par une autonomisation de quatre niveaux de description des relations entre fonctions et domaines : ponctuel, infinitésimal, local, global. Soulignons que la mise au premier plan de ces éléments contribue à renouveler une historiographie des « fondements » ou de la « rigueur » en analyse au 19^{ème} siècle. Le simple fait d'interroger un corpus déjà très étudié sous des angles classiques (fondements, rigueur, quantification, évolution de la notion de fonction, différenciation conceptuelle entre le ponctuel universel et l'uniforme) sous un angle inédit (émergence de l'articulation local-global) met en lumière des phénomènes nouveaux. Il permet aussi d'enrichir la périodisation de l'histoire de l'analyse en montrant ce qui distingue la première génération post-weierstrassienne de la seconde (Chorlay, 2007a, pp. 229–389)

Pour étayer cette lecture, on s'appuie sur des corpus de nature diverses : un corpus principal formé d'exposés portant sur les premières notions d'analyse, des cours de Weierstrass (1988a, 1988b) à celui d'Osgood en passant par ceux de Heine, du Bois Reymond, Darboux, ou Jordan ; différents corpus secondaires permettant de suivre les circulations d'innovations conceptuelles ou sémiotiques entre des contextes de recherche et des contextes d'exposition des premiers éléments, en particulier à propos des notions de voisinage (Chorlay, 2007a, chap.6) et de maximum (Chorlay, 2007a, chap.4).

Les liens entre étude des fonctions de variables réelles et de variables complexes sont ici fondamentaux. On pourrait procéder à *la Kuhn* en décrivant un « paradigme » de l'analyse nous désignons par « monde de la grandeur » ; nous empruntons le terme à Morritz Epple (2003). Dans ce paradigme, les fonctions de variables complexes (implicitement : analytiques) sont vues comme généralisant les polynômes et les fonctions définies implicitement par les polynômes (fonctions algébriques). Pour de telles fonctions, les distinctions entre ponctuel, infinitésimal, local et global se présentent sous un jour particulier : la connaissance exhaustive du comportement en un point (au sens de la connaissance de la valeur de toutes les dérivées) détermine complètement la fonction (prolongement analytique)²⁷ ; une telle fonction *possède* un domaine (par exemple son domaine maximal d'holomorphic), sur lequel elle est en souvent multiforme ; elle *possède* des points singuliers, exclus du domaine d'holomorphic mais dont la connaissance est un point d'entrée privilégié pour l'étude des propriétés et des modes d'écriture. Ces rapides affirmations ne relèvent pas du simple rappel mathématique, elles permettent de rendre compte d'une science « normale » (celle d'un paradigme) qui, par exemple, embrasse des approches aussi différentes que celles de Riemann et de Weierstrass. Elles ne peuvent être ni dépliées ni étayées en quelques lignes. Une belle citation de Poincaré – dans son éloge à la mort de Weierstrass – permet de saisir le caractère « normal » de ce regard sur les fonctions, regard qui embrasse concepts, programmes de recherche, points de vue et registres de représentation. Pour ceux qui ont été éduqués dans ce paradigme, ce regard sur les fonctions est ce avec quoi on pense, donc ce qui va sans dire. C'est lorsqu'on s'en dépend qu'on peut, rétrospectivement, le saisir :

Aujourd'hui (...) on distingue deux domaines, l'un sans limite, l'autre plus restreint, mais mieux cultivé. Le premier est celui de la fonction en général, le second celui de la fonction analytique. Dans le premier, toutes les fantaisies sont permises et à chaque instant nos habitudes sont heurtées et nos associations d'idées rompues ; nous apprenons ainsi à nous défier de certains raisonnements par à peu près qui paraissent convaincants à nos pères ; à nous abstenir de certaines conclusions qui leur auraient paru légitimes. Dans le second, au contraire, ces conclusions sont permises ; mais nous savons pourquoi. (Poincaré, 1899, p. 5)

Apportons quelques éléments plus spécifiques. La distinction entre les quatre niveaux passe par l'usage de la structure syntaxique « la fonction est [propriété] sur [domaine] ». On peut montrer comment, dans

²⁷ En limitant l'étude aux domaines connexes.

le dernier tiers du 19^{ème} siècle, la mise au point de concepts techniques et de notations pour décrire les domaines (ne serait-ce que pour distinguer les types d'intervalles de la droite réelle) s'accompagne d'une évolution des règles de bonne rédaction des mathématiques : ne pas dire sur quel domaine on travail, c'est mal rédiger. Illustrons.

Nous avons mené une étude de cas à propos de l'énoncé : « sur un intervalle fermé et borné, une fonction numérique continue est bornée et atteint ses bornes, elle y a donc un maximum et un minimum ». Ce théorème est énoncé en ces termes dans le manuel d'Osgood (1906) ; il était démontré, en substance, dans les cours de Weierstrass de 1878 (1988a), mais dans un cadre où la désignation du domaine d'étude était encore implicite et non stabilisée. On peut non seulement comparer les deux énoncés, mais aussi comparer les contextes d'énonciation, et suivre la trajectoire du théorème entre 1878 et 1906. Deux éléments suffiront à montrer la distance entre le point de départ et le point d'arrivée (Chorlay, 2007a, chapitre 4).

Premièrement, le contexte de l'énoncé de Weierstrass dépasse de loin celui des premières notions d'analyse. On peut montrer que ce sont en fait des difficultés rencontrées dans des mathématiques avancées qui suscitent et motivent l'interrogation. Dans le contexte élémentaire, il s'agit de savoir si une fonction bornée atteint ses bornes ; un résultat d'existence, donc. C'est dans le cadre du fondement de la théorie des fonctions d'une variable complexe que Weierstrass est amené à étudier ces questions. Riemann avait en effet fondé son exposé sur un théorème d'existence de fonctions harmoniques (de deux variables réelles) vérifiant des conditions aux limites. Ce théorème était démontré en invoquant le « principe de Dirichlet » : l'existence de la fonction recherchée est obtenue en montrant qu'elle minimise un opérateur intégral minoré. Weierstrass souligne une erreur dans ce raisonnement, et construit un exemple proche dans lequel un opérateur positif (donc minoré) n'atteint pas son minimum (du moins dans un domaine formé de fonctions raisonnables)²⁸.

Deuxièmement, une élémentarisation de l'énoncé s'observe dans le cadre de la réception de l'analyse à la Weierstrass, mais on peut montrer que, dans un premier temps, le regard porte exclusivement sur la distinction « atteint / pas atteint » et non sur la nature du domaine d'étude. Ainsi, dans son mémoire sur les fonctions discontinues (1875) Darboux explique-t-il à son lecteur la différence entre borne supérieure et maximum en montrant qu'une fonction discontinue peut avoir l'un sans l'autre. Mais il ne fait pas varier le domaine d'étude pour montrer son importance. Osgood si, qui donne l'exemple d'une fonction affine (non constante) étudiée sur un intervalle borné ouvert.

Le fait que les règles de bonne rédaction en mathématiques évoluent et englobent progressivement une obligation de désignation des domaines d'étude se voit aussi bien dans les contextes élémentaires et didactiques que dans les contextes à la pointe de la recherche. Côté recherche, une illustration frappante est donnée par le traité de Lie sur les groupes de transformations (1888-1893). L'ouvrage est rédigé avec l'aide de Friedrich Engel, qui apporte, outre un soutien moral et une parfaite maîtrise de la langue allemande, des préoccupations rédactionnelles nouvelles. La comparaison avec des exposés antérieurs rédigés par Lie seul montre une prise en compte nouvelle et systématique des domaines associés aux énoncés fonctionnels (Chorlay, 2007a, chapitre 6). Les auteurs annoncent dans la préface : « Pour fonder la théorie de manière plus rigoureuse, une série de développements est nécessaire qu'il est préférable de sauter en première lecture ; ils sont distingués par de plus petits caractères. » (Lie, 1888, p.VIII). On peut observer un texte hybride, où l'alternance entre deux tailles de caractère manifeste l'émergence de nouvelles contraintes de « rigueur », passant par une attention aux domaines et une explicitation du caractère local de la plupart des résultats.

²⁸ Communication à l'Académie des Sciences de Berlin en 1870, reproduite dans (Weierstrass, 1894-1927, vol.II, pp. 49–54).

d. Éléments méta concurrents et émergences autonomes

Une citation d'Elie Cartan permet d'introduire de nouveaux éléments d'intelligibilité ; elle date de 1922. Ce dernier poursuit dans ses *Leçons sur les invariants intégraux* (Cartan, 1971) le travail initié par Poincaré. Après avoir introduit le formalisme des formes différentielles (multiplication, dérivation, intégration), il énonce la propriété fondamentale de l'opérateur de différenciation : « La dérivée de la dérivée d'une forme différentielle extérieure quelconque est identiquement nulle ». Il souligne ensuite : « Ce théorème admet une réciproque, à savoir : Si la dérivée d'une forme différentielle Ω est nulle, la forme Ω peut-être regardée comme la dérivée d'une forme Π dont le degré est inférieur d'une unité à celui de Ω . » (Cartan, 1971, p. 71). On passe donc d'un théorème direct purement infinitésimal et toujours énoncé de la même manière au 21^{ème} siècle, à un énoncé réciproque qui semble formulé pour le moins imprudemment, sa conclusion n'étant en fait que locale. Après une page de démonstration de la réciproque, Cartan glisse une « Remarque » :

Remarque.- Si les coefficients de la forme Ω sont uniformes dans un certain domaine, la condition $\Omega' = 0$ n'est pas toujours suffisante pour assurer l'existence d'une forme Π uniforme dans ce domaine et dont Ω soit la dérivée extérieure. Considérons par exemple le domaine (fermé et sans frontière) à deux dimensions formé par les points d'une sphère Σ , et soit Ω une forme de degré 2 uniforme dans ce domaine (à coefficients admettant des dérivées partielles du premier ordre continu). La dérivée Ω' est manifestement nulle. Néanmoins, s'il existait une forme ω linéaire dont la dérivée ω' fût égale à Ω , on aurait, en intégrant deux fois $\int \omega$ le long d'un même grand cercle de la sphère dans deux sens différents,

$$\iint_{\Sigma} \Omega = 0,$$

l'intégrale étant étendue à toute la surface de la sphère. L'équation précédente donne une condition supplémentaire pour que Ω puisse être regardée comme dérivée exacte d'une forme uniforme sur toute la sphère. (Cartan, 1971, p. 73)

Cet exemple de 1922 permet de souligner, qu'en dépit de notre usage de la notion de science « normale » (Kuhn), nous ne nous inscrivons pas dans une histoire discontinuiste rythmée par l'alternance de périodes normales et de révolutions scientifiques. Si l'émergence de l'articulation local-global s'accompagne bien, ponctuellement, de la dénonciation de certaines erreurs, elle n'est ni rupture, ni principalement correction. Une lente déformation des systèmes de concepts et d'obligations font que l'énoncé et l'explication de Cartan sont à la fois parfaitement justes (dans des mathématiques où les fonctions peuvent être multiformes), mais déjà considérés par d'autres mathématiciens comme datés et un peu dangereux. On peut d'ailleurs étudier comment ces priorités conceptuelles et – quoique plus lentement – les modalités d'écriture des mathématiques se modifient chez Elie Cartan au cours des années 1920, période durant laquelle les questions globales passent au premier plan de ses préoccupations scientifiques (Chorlay, 2009a).

Cet exemple permet aussi de montrer que l'articulation local-global, comme élément de discours méta, est en concurrence avec d'autres éléments de discours qui jouent des fonctions similaires mais découpent la matière mathématique selon d'autres démarcation, attirent l'attention sur d'autres éléments, regroupent selon d'autres ressemblances. Ici, Cartan décrit la situation dans des termes de logique – condition nécessaire mais pas toujours suffisante – sans aller jusqu'à parler de condition nécessaire et localement (mais non globalement) suffisante. Riemann, Klein ou Poincaré n'ont pas non plus manqué de dire ce qu'ils faisaient à mesure qu'ils le faisaient. Pour Klein et Poincaré, ils nous laissent, outre les textes de recherche mathématiques, de nombreux textes moins techniques mais riches en discours méta : préfaces d'ouvrages, discours et conférences, synthèse des travaux. Un exemple frappant est donné par ce passage de Poincaré, où il introduit son travail sur pionnier sur l'étude des courbes définies par une équation différentielle :

Rechercher quelles sont les propriétés des équations différentielles est donc une question du plus haut intérêt. On a déjà fait un premier pas dans cette voie en étudiant la fonction proposée dans

le voisinage d'un des points du plan. Il s'agit aujourd'hui d'aller plus loin et d'étudier cette fonction dans toute l'étendue du plan. Dans cette recherche, notre point de départ sera ce qu'on sait déjà de la fonction étudiée dans une certaine région du plan.

L'étude complète d'une fonction comprend deux parties :

- 1° Partie qualitative (pour ainsi dire), où étude géométrique de la courbe définie par la fonction ;
- 2° Partie quantitative, ou calcul numérique des valeurs de la fonction. (Poincaré, 1881, p.3)

Le thème du passage du local au global est parfaitement lisible pour un lecteur habitué à cette grille de lecture, mais c'est l'articulation quantitatif-qualitatif qui est mise en avant par Poincaré. Dans une analyse rétrospective de ce travail, en 1901, c'est toujours l'étude qualitative des systèmes de courbes intégrales d'une équation différentielle qu'il met en avant :

Mais ce mode d'intégration, qui nous fait connaître les propriétés des équations au point de vue de la théorie des fonctions, ne saurait suffire à lui seul si l'on veut appliquer les équations différentielles, par exemple, à des questions de Mécanique ou de Physique. Nos développements ne nous apprendraient pas, à moins d'un travail considérable, si par exemple la fonction va constamment en croissant, ou si elle oscille entre certaines limites, si elle peut croître au-delà de toute limite. En d'autres termes, si l'on considère la fonction comme définissant une courbe plane, on ne saurait pas quelle est la forme générale de cette courbe. Dans certaines applications, toutes ces questions ont autant d'importance que le calcul numérique, et il y avait là un nouveau problème à résoudre. (Poincaré, 1901, p. 41)

L'étude des corpus permet de repérer d'autres éléments méta concurrents à local-global, en particulier : analyse/synthèse (Hadamard), différentiel/intégral (E. Cartan), analytique/algébrique (Klein, Study).

Une dernière pièce à verser au dossier prolonge le travail sur les éléments méta concurrents et suggère que les notions de local et de global ont pu émerger d'abord indépendamment, avant de former une articulation stable et d'usage courant. En effet, nombre des résultats globaux de Riemann ou Poincaré ont été décrits comme montrant l'importance des domaines d'étude des objets de l'analyse (fonctions, équations différentielles, formes différentielles). Nous avons proposé d'appeler « légalité primitive du lieu » ce thème que l'on retrouve sous la plume de plusieurs auteurs. Ils décrivent comme une nouveauté la prise de conscience (permise par les travaux de Riemann ou Poincaré) du fait que la bonne marche d'étude des problèmes d'analyse ne doit pas partir des fonctions (le cas typique étant celui des fonctions analytiques, dont on cherche le domaine d'holomorphie) mais partir du domaine d'étude, car ce dernier impose des propriétés communes à toutes les fonctions qui y « vivent ». Le thème se retrouve quasiment à l'identique sous la plume de Weyl – à propos des travaux de Riemann²⁹ – et de Hadamard – à propos des travaux de Poincaré :

On rencontre encore ici ou là la conception selon laquelle la surface de Riemann n'est rien d'autre qu'une « image », un moyen (qu'on reconnaît très utile et très suggestif) pour rendre plus présente et intuitive la multiformité des fonctions. Cette conception est totalement fautive. La surface de Riemann est une composante objective indispensable de la théorie, elle en est en fait le fondement. Elle n'est pas non plus ce qu'on distille *a posteriori* avec plus ou moins d'habileté des fonctions analytiques, on doit au contraire la considérer avant toutes choses et comme la terre natale sur laquelle les fonctions peuvent croître et prospérer. (Weyl, 1913, p.vi)

²⁹ Rappelons combien l'approche riemannienne en théorie des fonctions algébriques a longtemps été regardée comme non seulement peu rigoureuse, mais vraisemblablement peu susceptible de le devenir ; y compris par des mathématiciens s'inscrivant dans les pas de Riemann : « En un mot, la méthode de Riemann est avant tout une méthode de découverte, celle de Weierstrass est avant tout une méthode de démonstration. » (Poincaré 1899, p.7) (Chorlay, 2007a, chap.9)

Moins lyrique que Weyl, Hadamard n'en est pas moins clair :

C'est ce que les travaux de M. Poincaré ont établi³⁰. Ils n'ont résolu la question que dans certains cas ; on n'a cependant plus le droit de douter, après eux, qu'il n'existe une théorie des courbes définies par une équation différentielle sur une surface de genre zéro ; une autre – dont il est à peine exagéré de dire qu'elle est sans rapport avec la première – sur une surface de genre un ; et ainsi de suite. (Hadamard, 1909b, p. 826)

Dans le cadre ce thème, ce n'est pas l'articulation local-global qui est mise en avant. Ce rôle premier du domaine pris dans sa totalité est décrit sous l'angle du qualitatif et du topologique (au sens d'*analysis situs*).

Symétriquement, on peut montrer que le « local » émerge dans un mouvement de différenciation conceptuelle indépendant de l'articulation local-global : d'une différenciation entre l'infinitésimal et le local ; entre l'infiniment petit et le limité-mais-fini (Chorlay, 2007a, chap. 6) (Chorlay, 2011a, pp. 28 et suiv.).

1.2 Structures, structuralisme

1.2.1 Position du problème

La question des « structures » et du « structuralisme » dans les mathématiques du 20^{ème} siècle ont fait l'objet d'analyses et de présentations de la part des mathématiciens comme de la part d'historiens des mathématiques. Sans viser aucune exhaustivité, une présentation de certains angles morts de ces deux types de lectures – mathématicienne et historienne – nous permettra de préciser notre propre projet d'histoire.

a. Une lecture mathématicienne centrée sur les vertus épistémologiques

Nous entendons ici par « lecture mathématicienne » ce qu'on trouve dans une série de textes – textes programmatiques, analyse des travaux, conférences de vulgarisation, articles polémiques, souvenirs etc. – rédigés par des mathématiciens, qui informent et conditionnent l'accès à ces questions pour le lecteur du 21^{ème} siècle. On pense, en particulier, aux présentations des méthodes « modernes » en mathématiques de Hasse en 1930 (Hasse, 1986) ou de Weyl en 1932 (Weyl, 1995), à *L'architecture des mathématiques* esquissée par Bourbaki (1948), ou, plus récemment, au bilan proposé par MacLane (1996). Il ne s'agit pas seulement d'en appeler ici au dépassement de ces textes – l'objectif va de soi – mais aussi de montrer comment leur difficulté à saisir certains aspects dessine, en creux, des questions de recherche.

Ces textes s'accordent sur une caractérisation minimale de la démarche structuraliste : étudier les conséquences de systèmes de relations explicites (axiomes) portant sur des ensembles d'éléments dont la nature n'a pas à être prise en compte ; cette caractérisation s'accompagne bien sûr d'exemples paradigmatiques (groupe, corps, espace métrique, ensemble ordonné). Si l'on s'en tient au cas de *L'architecture des mathématiques* – ce n'est pas ici le lieu d'une comparaison des textes – deux autres types d'éléments viennent caractériser cette méthode « moderne ». Tout d'abord une série de caractérisations négatives, dessinant la figure nouvelle par ce qu'elle n'est pas, ou ce avec quoi elle ne

³⁰ L'importance du genre de la surface compacte orientable sur laquelle on étudie la répartition et la nature des singularités d'une équation différentielle polynomiale (de la forme $P(x, y, \frac{dy}{dx})$ où P est un polynôme). Poincaré a en effet montré que, si l'on classe les points singuliers en Nœuds, Foyers et Cols, alors le nombre des points singuliers des différents types est lié au genre g de la surface par la formule C-F-N = $2g-2$.

souhaite pas être confondue : elle se veut le contraire du calcul³¹ (toujours qualifié d'aveugle, de brut...), l'ennemie du fait isolé ou particulier³² ; elle ne souhaite pas non plus être réduite à « l'armature d'une logique formelle, unité d'un squelette sans vie » (Bourbaki, 1948, p. 47). Ensuite, une longue série de vertus épistémologiques lui sont associées : cette méthode moderne fournit « l'intelligibilité profonde » des mathématiques (Bourbaki, 1948, p. 37) en exhibant les structures transverses aux disciplines classiques³³ ; elle construit les bons cadres de formulation et d'attaque des problèmes ; elle substitue au chaos des connaissances dispersées d'une mathématique en croissance rapide de grands axes d'organisation permettant une vue d'ensemble³⁴ ; elle permet, enfin, une merveilleuse économie de pensée et de travail, en évitant de devoir refaire dans chaque contexte des raisonnements fondamentalement identiques³⁵.

Caractérisation minimale (syntaxique), désignation d'un extérieur du structuralisme, liste de vertus ; ce qu'on fait, ce qu'on rejette, ce qu'on gagne à faire ainsi.

Nous souhaitons dans un premier temps mettre entre parenthèses la question des vertus épistémologiques, qui ne nous semble pas fournir le point d'entrée le plus éclairant. D'abord parce que les mêmes exemples techniques et les mêmes vertus peuvent être mises au service de projets (peut-être superficiellement) contradictoires. Un exemple suffit : Bourbaki vante l'aspect transversal de la méthode axiomatique, seule capable d'assurer l'unité retrouvée de mathématiques menacées par une expansion rapide et centrifuge ; au même moment, Hasse voit dans les mêmes méthodes un moyen pour autonomiser l'algèbre par rapport au reste des mathématiques, et la détacher d'une algèbre « classique » trop liée aux nombres complexes et à l'analyse. Ensuite, et surtout, parce que l'invocation de ces vertus nous semble peu spécifique au structuralisme : rares sont, somme toute, les mathématiciens ayant déclaré préférer les résultats isolés, les calculs aveugles et les exposés confus. On retrouve quasiment mot pour mot des expressions de Bourbaki, MacLane ou Hasse chez des auteurs qu'on ne souhaite pas ranger du côté structural, chez Poincaré par exemple³⁶. On cherchera plutôt à saisir la spécificité d'une approche structurale (ou d'approches structurales) en les comparant à d'autres approches, concurrentes, qui ne se réclament pas moins de l'intelligibilité profonde et de la vue d'ensemble. Il ne s'agira donc pas de préciser le sens visé des vertus évoquées, mais, éventuellement, d'étudier dans quelle mesure leur mention permet d'identifier des réseaux ou de cerner des lieux de débat.

³¹ Bourbaki fait sienne la formule de Dirichlet : « substituer les idées au calcul » (Bourbaki, 1948, p. 47).

³² Les deux aspects peuvent être conjoints : « (...) moins que jamais, la mathématique est réduite à un jeu purement mécanique de formules isolées. » (Bourbaki, 1948, p. 43)

³³ Ce thème de l'intelligibilité est aussi celui mis en avant par Weyl : « *We are not very pleased when we are forced to accept a mathematical truth by virtue of a complicated chain of formal conclusions and computations, which we traverse blindly, link by link, feeling our way by touch. We first want an overview of the aim and the road; we want to understand the idea of the proof, the deeper context.* » (Weyl, 1995, p. 453)

³⁴ MacLane et Bourbaki se répondent sur ce point : « *The emphasis on mathematical structure has served wonderfully to organize much of mathematics and to clarify some previously confused topics, such as Galois theory, matrix calculation, differential geometry, and algebraic topology* » (MacLane, 1996, p.183) ; « [l'intuition, désormais] domine d'un seul coup d'œil d'immenses domaines unifiés par l'axiomatique, où jadis semblait régner le plus informe chaos » (Bourbaki, 1948, p.43).

³⁵ A propos de la méthode axiomatique : « Son trait le plus saillant (...) est de réaliser une économie de pensée considérable. Les « structures » sont des outils pour le mathématicien. (...) On pourrait donc dire que la méthode axiomatique n'est autre que le « système Taylor » des mathématiques. » (Bourbaki, 1948, p.42)

³⁶ Ainsi dans sa conférence au congrès international des mathématiciens de 1908 : « Les seuls faits dignes d'attention sont ceux qui introduisent de l'ordre dans cette complexité et la rendent ainsi accessible » (Poincaré, 1908, p. 169), et, quelques lignes plus loin : « Pour obtenir un résultat qui ait une valeur réelle il ne suffit pas de moudre des calculs ou d'avoir une machine à mettre en ordre les choses ; ce n'est pas seulement l'ordre, c'est l'ordre inattendu qui vaut quelque chose » (Poincaré, 1908, p. 170).

La recherche de spécificités nous semble devoir être conduite en se penchant sur les pratiques plutôt que sur les vertus. En un sens, cet aspect des pratiques est un angle mort pour les textes que nous lisons dans ce premier temps. Certes ces textes évoquent les pratiques, mais ces évocations ne nous semblent guère dépasser les généralités. Le travail du mathématicien semble recouvrir trois tâches spécifiques à la nouvelle approche : abstraire, reconnaître, et inventer des structures. Abstraire, tout d'abord : isoler quelques traits simples et communs à de nombreux problèmes ; ce travail, nos auteurs le décrivent comme une phase d'analyse³⁷ et d'abstraction, au sens classique d'oubli des contenus spécifiques. Reconnaître ensuite qu'une structure générale intervient dans une situation particulière ; ainsi, après avoir évoqué l'introduction des espaces fonctionnels et des nombres p -adiques, Bourbaki y voit « autant de moments décisifs dans le progrès des mathématiques, de tournants où un éclair de génie a décidé de l'orientation nouvelle d'une théorie, y révélant une structure qui ne paraissait pas *a priori* y jouer un rôle » (Bourbaki, 1948, p. 43). A l'analyse – qui défait les complexes et isole les pièces simples – succède donc une phase de rapprochement, d'identification d'un commun dans des situations et problèmes à l'habillage varié. Inventer de nouvelles structures, enfin : « Les structures ne sont immuables ni dans leur nombre ni dans leur essence ; il est très possible que le développement ultérieur des mathématiques augmente le nombre des structures fondamentales, en révélant la fécondité de nouveaux axiomes, ou de nouvelles combinaisons d'axiomes, et on peut d'avance escompter des progrès décisifs de ces inventions de structures » (Bourbaki, 1948, p. 45). Quant à savoir *comment* on mène à bien ces belles tâches, ce type de texte ne nous le dit guère : on s'y tient aux critères pragmatiques *a posteriori* de « fécondité »³⁸, à l'évocation de « doigté » d'un chercheur de « grande expérience »³⁹ ou aux considérations psychologiques en termes d'« intuition »⁴⁰. Cette relative incapacité à aborder la question du « comment » est d'autant plus frappante que les auteurs de ces textes sont eux-mêmes engagés dans l'abstraction, la reconnaissance et l'invention de structures.

b. Une lecture historique centrée sur l'histoire de l'algèbre

On le devine dans la liste d'exemples que nous venons de donner : notre projet d'histoire des pratiques – de pratiques dans lesquelles des mathématiciens reconnaissent explicitement, à partir de la fin des années 1920, une « nouvelle manière » – ne se limite pas au cas des structures algébriques. Pour cerner cet aspect du projet, nous nous appuyons de nouveau sur un texte, en l'occurrence la monographie de Leo Corry : *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structure* (1996). Ce travail marque une étape dans l'historiographie, en ceci qu'il ne présente pas l'histoire d'une structure algébrique particulière – histoire de la notion de groupe, de corps, d'idéal, d'espace vectoriel – mais s'attaque au problème historique spécifique de la redéfinition disciplinaire de l'algèbre comme étude des structures algébriques : étude du structuralisme en algèbre donc, et non plus histoire des structures de l'algèbre, ou de l'accumulation de connaissances algébriques appelées de toute éternité à se couler, un jour,

³⁷ Sur ce point, les termes de Weyl et de Bourbaki se répondent : « *One separates in a natural way the different aspects of a subject of mathematical investigation, makes its accessible through its own relatively narrow and easily surveyable group of assumptions, and returns to the complex whole by combining the appropriately specialized partial results. This last synthetic step is purely mechanical. The great art is the first, analytic, step of appropriate separation and generalization.* » (Weyl, 1995, p. 454) ; « Sous quelle forme va se faire cette opération [trouver les idées communes à plusieurs théories] ? C'est ici que la méthode axiomatique va se rapprocher le plus de la méthode expérimentale. Puisant comme elle à la source cartésienne, elle 'divisera les difficultés pour les mieux résoudre'. » (Bourbaki, 1948, p. 38).

³⁸ Ainsi chez Weyl : « *Perhaps the only criterion of the naturalness of a severance and an associated generalization is their fruitfulness.* » (Weyl, 1995, p.454)

³⁹ « *If the process is systematized according to the subject matter by a researcher with a measure of skill and "sensitive fingertips" who relies on all the analogies derived from his experience (...)* » (Weyl, 1932, p.454).

⁴⁰ « Plus que jamais l'intuition règne en maîtresse dans la genèse des découvertes » (Bourbaki 1948, p.43)

spontanément, dans un moule structural. Sa description est appuyée sur la distinction, utile et robuste, entre *body of knowledge* (comme ensemble de connaissances, théorèmes etc.) et *image of knowledge* (comme ensemble de catégories de classement des connaissances, mode de sélection des questions légitimes ou non, importantes ou non etc.). Cette distinction, empruntée à Yehuda Elkana, fait écho à la classique distinction entre discours objet et discours méta. Corry peut ainsi décrire des configurations particulières – par exemple celle représentée par Heinrich Weber, qui étudie les corps de manière abstraite dans des travaux de recherche, mais intègre les connaissances récentes dans un cadre classique lorsqu'il rédige son *Lehrbuch der Algebra* (1895). Corry peut ainsi articuler une accumulation continue du côté du *body of knowledge* et des discontinuités dans l'*image of knowledge*. Troisième point, enfin, dont nous souhaitons souligner l'intérêt, l'approche structurale n'est pas uniquement décrite en termes de noyau dur, caractéristique et minimal (du type : étude décontextualisée des conséquences d'axiomes simples, portant sur des objets auxquels on ne suppose pas de nature propre). La gamme des pratiques caractéristiques – pour Corry – d'une approche structurale est élargie. Elle englobe l'étude systématique des situations en termes de sous-structure, d'extension et de quotient ; en termes de structures produit (au sens informel) et de suites de composition ; en termes, enfin, de théorèmes d'isomorphismes, sur le modèle du théorème de structure des groupes abéliens de type fini.

Cependant, par sa méthode même, l'approche de Corry s'interdit l'accès à certaines questions. Cette approche n'est pas exempte de téléologie, non par naïveté épistémologique, mais par construction : Corry se fixe un point d'arrivée, la *Moderne Algebra* de van der Waerden (1930-1931), et étudie le passé en fonction de ce point d'arrivée. Ceci a plusieurs conséquences. Premièrement, les éléments sont ordonnés selon deux échelles (l'une pour le *body of knowledge* l'autre pour l'*image of knowledge*) linéairement graduées, selon le degré dont ils s'écartent du point d'arrivée, selon la manière dont ils apportent des résultats ou méthodes appelées à figurer dans l'état final. La mise en série linéaire, si elle permet de dessiner le mouvement sur une grande période, invite peu aux comparaisons transversales et amène à gommer les spécificités qualitatives inintégrables à la série longue. Deuxièmement, le corpus étudié par Corry reprend celui que van der Waerden et Noether désignent eux-mêmes, dans les années 1920, comme leur passé ; celui réunissant leurs modèles et leurs ancêtres revendiqués. Il ne reste du coup rien à dire sur les autres : pas d'extérieur, pas de concurrents (juste des formes moins achevées de soi-même), pas de controverses, pas d'effets d'éviction. Troisièmement, après que l'étude initiale de Corry sur Dedekind a présenté assez en détail les travaux de recherche sur les nombres algébriques (et, plus rapidement, ceux sur les corps de fonctions algébriques), l'ouvrage porte largement sur des textes de synthèse : manuels, articles-bilans ou textes programmatiques. Ce type d'étude est d'ailleurs parfaitement justifié si l'on met plutôt l'accent sur l'*image of knowledge*, les textes de synthèse constituant un élément clé pour sa formation, sa diffusion (synchronique) et sa transmission (diachronique). Le lien avec le *body of knowledge* s'en trouve toutefois relégué au second plan (sinon pour souligner la relative autonomie des deux plans d'évolution), et peu de pistes sont données pour l'étude des pratiques d'abstraction, de reconnaissance et d'invention de structure. Le risque est de contribuer à renforcer l'image du structuralisme comme simple méthode d'exposition ; comme manière de rédiger des traités jugés, selon les goûts, très propres ou trop propres ; comme art d'après-coup, de profilage de résultats obtenus ailleurs et par d'autres moyens.

On peut revenir un instant aux lectures mathématiciennes pour souligner que cette image du structuralisme comme art d'exposition plus que de découverte a pu être tenu par des mathématicien pourtant peu suspect de lui être hostile. Ainsi la conférence donnée par Weyl en 1932 pour exposer à des professeurs de Lycée les vertus des méthodes « modernes » en mathématiques se conclue-t-elle sur une note peu enthousiaste :

But I do not want to conceal from you the growing feeling among mathematicians that the fruitfulness of the abstracting method is close to exhaustion. It is a fact that beautiful general concepts do not drop out of the sky. The truth is that, to begin with, there are definite concrete

problems, with all their undivided complexity, and these must be conquered by individuals relying on brute force. Only then come the axiomatizers and conclude that instead of straining to break in the door and bloodying one's hand one should have first constructed a magic key of such and such shape and then the door would have opened quietly, as if by itself. But they can construct the key only because the successful breakthrough enables them to study the lock front and back, from the outside and from the inside. Before we can generalize, formalize and axiomatize there must be mathematical substance. I think that the mathematical substance on which we have practiced formalization in the last few decades is near exhaustion and I predict that the next generation will face a tough time. (Weyl, 1995, pp. 650-651)

La citation est d'autant plus piquante que la « prochaine génération » est celle de Bourbaki.

1.2.2 Des problèmes aux structures

L'article *From problems to structures: The Cousin problems and the emergence of the sheaf concept* (Chorlay, 2010a) propose une étude de cas visant à combler une partie des angles morts identifiés plus haut : repérer (si elles existent) des pratiques mathématiques conduisant à des inventions de structure ; étudier le lien entre résolution de problème et invention de structure pour mettre à l'épreuve des faits les appréciations divergentes de Bourbaki – la reconnaissance et l'invention de structure comme guide pour l'intuition et outil de résolution de problèmes – et Weyl – le structuralisme comme art d'exposition de problèmes résolus par d'autres moyens. Le terrain d'étude est fourni par une petite famille de problèmes en théorie des fonctions de plusieurs variables complexes qui ont été formulés à la fin du 19^{ème} siècle mais ont longtemps résisté aux mathématiciens avant que, dans les années 1940, des percées significatives soient obtenues dans le cadre de la mise au point d'une nouvelle structure, celle de faisceau. Nous avons fait le choix de l'étude des « problèmes de Cousin » sur une période longue (1895-1952) plutôt que dans le strict cadre de son traitement par les faisceaux puis la cohomologie de faisceaux (1940-1952), pour deux raisons. Premièrement, cela permet d'étudier des pratiques liées aux problèmes même lorsqu'on ne les résout pas : manières de formuler, qualifier et décrire les problèmes ; manières de les regrouper en familles de problèmes d'un même type ; manières de leur faire jouer un rôle dans un programme de recherche. Deuxièmement, elle permet d'étudier le structuralisme à sa frontière (avec ce qui n'en relève pas), en saisissant sur un exemple à la fois ses racines et spécificités.

a. Des problèmes qui résistent (1895-1940)

Ces problèmes n'émergent pas *ex nihilo*, mais se présentent comme des généralisations de problèmes déjà résolus. Plus précisément, on cherche à étendre aux fonctions de plusieurs variables complexes et pour des domaines plus variés que \mathbf{C}^n deux théorèmes connus pour les fonctions d'une variable complexe. Un rappel sur ces points de départ est nécessaire à la compréhension des enjeux.

En 1883, Poincaré entreprend de généraliser à deux variables un lemme jouant un rôle technique mais central dans la classification weierstrassienne des fonctions définies (à des singularités isolées près) dans tout le plan d'une variable complexe. Après avoir distingué différents types de points singuliers (pôles et points singuliers essentiels) et montré que les pôles sont isolés, Weierstrass montre que toute fonction méromorphe dans tout le plan complexe peut s'écrire comme le quotient de deux fonctions holomorphes dans tout ce plan (il qualifie une telle fonction d'« entière ») :

Soit $f(x)$ une fonction univoque de x dont ∞ est le seul point singulier essentiel ; dans le cas où elle possède par ailleurs un nombre quelconque (éventuellement infini) de points singuliers inessentiels, il est possible de former une fonction $G_2(x)$ dont la suite des zéros est identique à celle des zéros de la fonction $1/f(x)$. Alors, $G_2(x).f(x)$ est aussi une fonction entière de x ; en la notant $G_1(x)$, on obtient $f(x) = G_1(x)/G_2(x)$. » (Weierstrass, 1876, p. 102).

Le problème est donc ramené à celui de l'existence d'une fonction entière G_2 dont on prescrit le lieu et la multiplicité des zéros (soumis à la condition d'être isolés).

Le second théorème est démontré par Mittag-Leffler en 1882, qui établit la réciproque du théorème sur les pôles isolés : pour tout système de points isolés et tout système de parties principales, il existe une fonction méromorphe⁴¹ dans tout le plan complexe dont ce sont les pôles, et les seuls :

Je suppose données :

1° Une suite infinie de valeurs a_1, a_2, a_3, \dots , toutes inégales et assujetties à la condition

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = \infty,$$

2° Une suite infinie de fractions entières, rationnelles ou transcendentes de la variable y , s'annulant toutes pour $y = 0$:

$$G_1(y) = c_1^{(1)}y + c_2^{(1)}y^2 + c_3^{(1)}y^3 \dots,$$

$$G_2(y) = c_1^{(2)}y + c_2^{(2)}y^2 + c_3^{(2)}y^3 \dots,$$

.....

$$G_\nu(y) = c_1^{(\nu)}y + c_2^{(\nu)}y^2 + c_3^{(\nu)}y^3 \dots$$

Il est alors toujours possible de former une fonction analytique $F(x)$, n'ayant d'autres points singuliers que a_1, a_2, a_3, \dots , et telle que, pour chaque valeur déterminée de ν , la différence $F(x) - G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ ait, en supposant $x = a_\nu$, une valeur finie et déterminée, de telle sorte que, dans le voisinage de $x = a_\nu$, $F(x)$ puisse s'exprimer sous la forme $G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) - P(x - a_\nu)$. (Mittag-Leffler, 1882, p. 414).

Ces deux problèmes se ressemblent-ils ? Quelles sont leurs points communs et leurs différences ? Dépendent-ils logiquement l'un de l'autre (au sens où l'un serait une conséquence, ou un cas particulier, de l'autre) ? Sont-ils généralisables au cas où la variable complexe ne varie pas dans tout le plan (par exemple lorsque qu'elle n'est pas prolongeable au-delà du disque unité) ? Sont-ils généralisables au cas de deux variables ? Autant de questions auxquelles les mathématiciens vont donner des réponses différentes sur une période de 50 ans. Nous ne donnons ici qu'un aperçu, sans entrer dans le cœur des démonstrations.

Dans sa thèse, Pierre Cousin étend les résultats aux polycylindres (domaines de \mathbf{C}^n décomposables en produits de n domaines de \mathbf{C} , donc dans lesquels les n variables sont indépendantes) :

Deux théorèmes importants de M. Weierstrass peuvent être considérés comme des conséquences successives du théorème de M. Mittag-Leffler; le premier est relatif à l'existence d'une fonction entière admettant pour zéros des points donnés à l'avance; le second est relatif à l'expression sous forme d'un quotient de deux fonctions entières d'une fonction d'une variable n'admettant comme points singuliers que des pôles. Ces trois théorèmes forment un ensemble de trois propositions intimement reliées entre elles. (cité dans (Chorlay, 2010a, p. 20))

L'idée de déduire le théorème multiplicatif (Weierstrass) sur les zéros des fonctions holomorphes du théorème additif (Mittag-Leffler) sur les fonctions méromorphes était déjà chez Appel. L'usage du logarithme et de l'exponentielle permet d'utiliser le second résultat pour démontrer le premier. Le regroupement des trois problèmes⁴² est désormais désigné par l'appellation « problèmes de Cousin ».

⁴¹ Cette formulation rapide affaiblit le théorème de Mittag-Leffler, qui dépasse le cas méromorphe (les fonctions G n'ayant pas à être des polynômes).

⁴² Le troisième problème – représentation des fonctions méromorphes comme quotient de deux holomorphes – est toujours conséquence directe du problème multiplicatif ; le raisonnement de Weierstrass s'applique.

On est donc surpris lorsque, en 1913, dans une communication à l'*American Mathematical Society*, Gronwall exhibe un contre-exemple au second théorème de Cousin ! Il se lance alors, avec l'aide d'Osgood, dans une analyse de la démonstration de Cousin pour y repérer l'erreur. Il publie en 1917 un article dans lequel il présente le contre-exemple et donne la preuve de la validité du théorème multiplicatif sous des hypothèses plus restrictives : les composantes du polycylindre sont simplement connexe, sauf au plus une, ce qui permet de contrôler l'apparition d'une multiformité non réductible par passage à l'exponentielle. Une telle hypothèse n'est pas nécessaire pour le théorème additif, seul le théorème multiplicatif semble sensible à la topologie du domaine.

Ce dernier aspect est exploré par le mathématicien japonais Kiyoshi Oka (Chorlay, 2010a, pp. 32–34). Autant le problème additif dépend du cadre analytique complexe (notion de partie principale d'un pôle), autant le théorème multiplicatif peut être formulé dans un cadre plus général : une sous-variété d'un polycylindre de \mathbf{C}^n ayant localement les propriétés des zéros d'une fonction holomorphe est-elle le lieu des zéros d'une fonction *continue* définie dans le polycylindre ? Oka définit donc un « problème généralisé », où les fonctions ne sont supposées que continues⁴³ : ce problème est donc purement topologique. Il montre que ce problème topologique est résoluble sous les conditions données par Gronwall. Passant aux domaines d'holomorphicité, il montre en outre que le problème multiplicatif est *essentiellement* topologique : il exhibe une condition topologique sur le lieu des zéros garantissant la résolubilité du problème généralisé et montre que, lorsqu'elle est vérifiée, le problème analytique l'est aussi.

On peut changer d'angle d'analyse : résoudre les problèmes de Cousin est une chose ; intégrer ces problèmes à des programmes de recherche en théorie des fonctions⁴⁴ en est une autre, en partie indépendante au sens où l'on peut assigner un rôle à un problème sans directement contribuer à le résoudre. On peut ainsi montrer, dans les années 1930, un usage *indirect* des problèmes de Cousin, dans le cadre de programmes de recherche visant à classer les différents types de domaines étudiés en théorie des fonctions (polycylindres, domaines d'holomorphicité ou de méromorphie, domaines étoilés ou cerclés, domaines « convexes » par rapport à différentes classes de fonctions etc.). On peut regarder le fait qu'un des problèmes soit toujours résoluble dans un domaine comme une propriété du domaine, et étudier les liens entre les différentes propriétés. Cette approche se retrouve chez Henri Cartan, qui énonce des résultats tels que : « Théorème 3.- Soit D un domaine pour lequel le premier théorème de Cousin est vrai (...). Si en outre D est étoilé, ou encore si D est un domaine de Hartogs, le deuxième théorème de Cousin est vrai pour D. » (Chorlay, 2010a, p.28). Une synthèse de l'état de ces travaux est publiée par Behnke et Stein en 1937. Ils en résument une partie sous forme de tableau combinatoire⁴⁵ :

	Cousin 1	Cousin 2	Poincaré	Possible ?
1	+	+	+	+
2	+	+	–	–
3	+	–	+	–
4	+	–	–	+
5	–	+	+	+
6	–	+	–	–
7	–	–	+	+
9	–	–	–	+

⁴³ Nous simplifions un peu.

⁴⁴ Dans cette partie nous omettrons de préciser à chaque fois « fonctions analytiques de plusieurs variables complexes ».

⁴⁵ Behnke et Stein suivent les désignations de Cartan, qui appelle « problème de Poincaré » celui de la représentation des fonctions méromorphes comme quotients d'holomorphes.

Lire : on sait qu'il existe des domaines pour lesquels les 3 problèmes sont résolubles ; on sait qu'il n'existe pas de domaines dans lesquels II (multiplicatif) soit résoluble sans que le « problème de Poincaré » le soit (« Poincaré » étant une conséquence de Cousin II).

- b. L'invention de structure (1940-1952) : résolution de problème, unifications divergentes, circulations transversales

Un retour sur un aspect mathématique des problèmes permet de saisir les enjeux de leur reformulation dans le cadre de différentes structures et cadres dans la période 1940-1952. Considérons le problème multiplicatif. A une variable, on sait à quoi ressemble le lieu des zéros d'une fonction holomorphe dans tout le plan complexe : une collection finie ou dénombrable de points isolés, chacun associé à un entier naturel non nul (la multiplicité du zéro). On peut se poser la question réciproque : tout système de ce type est-il le lieu des zéros d'une fonction holomorphe (problème résolu par Weierstrass) ? Le passage à deux variables complexes soulève des difficultés, ne serait-ce que pour formuler la question. Il s'agit de se donner un lieu (dans \mathbb{C}^2) qui possède les propriétés attendues du lieu des zéros d'une fonction holomorphe. Mais un tel lieu est (en termes réels), une variété bidimensionnelle dans l'espace à quatre dimensions ; on n'est loin de la suite de points isolés ! Nous proposons d'emprunter à Proclus le terme d'*ecthèse* (exposition) pour désigner la phase initiale de la démonstration d'un théorème dans laquelle on se donne l'objet à étudier⁴⁶. Ici, l'*ecthèse* demande qu'on se donne un tel lieu. On va le caractériser par le fait qu'il est localement, en tout point P , lieu des zéros d'une fonction f_P définie sur un voisinage U_P de P (f_P est donc définie au produit par une fonction holomorphe nulle part nulle dans U_P près, puisque seuls les zéros comptent). Le problème serait trivialement résolu si les différentes fonctions f_P associées aux différents points P étaient prolongements analytiques les unes des autres, i.e. si elles étaient égales dans les intersections des U_P . Malheureusement, dans $U_P \cap U_{P'}$ on n'a pas nécessairement $f_P = f_{P'}$; on sait seulement que ces deux fonctions ont les mêmes zéros, donc qu'il existe dans l'intersection une fonction $u_{PP'}$, holomorphe et nulle part nulle (donc inversible), telle que $f_P = u_{PP'} \times f_{P'}$.

Cette formulation du problème multiplicatif (Cousin II) est stable de Poincaré jusqu'aux travaux de Cartan des années 1930 (Chorlay, 2010a, pp. 34–44), ce dernier désignant le système des U et des f comme une « donnée de Cousin ». Le contraste est donc frappant lorsqu'en 1940, Cartan reformule l'*ecthèse* en utilisant les notions algébriques d'anneau et d'idéal. Non seulement les problèmes de Cousin s'en trouvent formulés dans un nouveau cadre, mais la reformulation les fait automatiquement apparaître comme des cas particuliers d'une classe de problèmes plus généraux, dont l'identification permet à Cartan de dessiner un nouveau programme de recherche qu'il décrit comme « l'étude globale des idéaux de fonctions analytiques de plusieurs variables complexes ». Les propriétés locales en un point sont rapportées à l'anneau des germes de fonctions analytiques en ce point. En un point P , la fonction f_P n'est pas unique, son produit par une fonction ne s'annulant pas en P joue le même rôle. Cartan reformule ce problème bien connu de non-unicité en disant que les différentes f_P associées à un point P donné engendrent le même idéal principal dans l'anneau des germes de fonctions holomorphes en P . Une « donnée de Cousin » est donc moins un système de fonctions qu'un système d'idéaux principaux, chacun dans un anneau différent (un par point P) ; on y gagne en unicité et en intrinséquerie. Les idéaux associés aux différents points P – Cartan parle d'« idéaux ponctuels » – ne sont pas indépendants : ils vérifient une propriété locale de « cohérence », puisqu'ils sont localement définis par les germes d'une même fonction. Cette reformulation permet la généralisation et la formulation du programme de recherche, exposé dans un article consacré à la solution du problème technique généralisant au cas de plusieurs variables du problème de recollement des fonctions de transition $u_{PP'}$:

Notre théorème semble susceptible de jouer un rôle important dans l'étude globale des idéaux de fonctions holomorphes. Remarquons à ce propos que le « deuxième problème de Cousin » se rapporte à l'étude globale des idéaux qui ont, au voisinage de chaque point, une base formée

⁴⁶ Proclus analyse la structure des démonstrations euclidiennes.

d'une seule fonction. En dehors de ce cas particulier, on n'a pas encore abordé, me semble-t-il, l'étude globale des idéaux. C'est ce que nous ferons systématiquement dans un Mémoire ultérieur. (cité dans (Chorlay, 2010a, p. 34))

Pourquoi, en effet, se limiter aux systèmes cohérents d'idéaux *principaux* ? Cartan montre que son programme de recherche embrasse d'autres problèmes étudiés en théorie des fonctions, mais ne relevant pas de la famille « Cousin ». On se donne un système cohérent d'idéaux lorsqu'on se donne un recouvrement ouvert (U_i) du domaine d'étude, et dans chaque U_i d'une famille (finie) de fonctions analytiques (F_i) soumise à la condition de cohérence suivante : si un point P appartient à $U_i \cap U_j$, alors les (F_i) et les (F_j) engendrent le même idéal dans l'anneau des germes de fonctions analytiques en P . Le problème est alors un problème de passage du local au global : existe-t-il une famille (F) de fonctions définies dans tout le domaine d'étude qui engendre tout le système des idéaux ponctuels ? Cette forme de problème embrasse des questions classiques, par exemple le *Nullstellensatz*, lorsque sur chaque ouvert on se donne une famille de fonctions (F_i) sans zéros communs. On peut d'ailleurs rapprocher ce travail de Cartan des reformulations dans le cadre de l'algèbre abstraite, par van der Waerden, du *Nullstellensatz* algébrique⁴⁷ (Chorlay, 2010a, pp. 41–43).

On peut suivre, dans la période 1940-1948 et dans les travaux (indépendants pendant cette période) de Cartan et Oka, comment la reformulation dans un langage algébrique de l'ecthèse des problèmes de Cousin forme la première matrice et le modèle des axiomes de faisceaux sur un espace topologiques. Dans le cas général, on n'impose plus de nature aux anneaux associés aux ouverts. Des axiomes *ad hoc* doivent réintroduire le caractère local des données, qui était vérifié automatique dans le cas des faisceaux de fonctions (par exemple : l'égalité des restrictions dans tous les ouverts recouvrant un domaine garantit l'égalité des fonctions sur l'ouvert). Nous proposons de distinguer deux fonctions des problèmes rencontrés dans cet épisode : Cousin II est un problème-*pochoir* (*template-problem*), dont la formulation abstraite de l'ecthèse – abstraite au sens où elle est faite dans des langages ne dépendant plus de la nature particulière des objets en jeu – conduit à la description d'une nouvelle structure. La nouvelle formulation permet une généralisation triviale (pourquoi s'en tenir aux idéaux *principaux* ?) qui permet de rassembler une large collection de problèmes connus mais plus ou moins épars dans un nouveau programme de recherche dont ils forment les problèmes *cibles* (*target problems*). Bien entendu, la simple reformulation des problèmes, même éclairante, ne les résout pas ! Au contraire, elle engendre une nouvelle génération de problèmes, rencontrés à l'occasion de la mise au point des rouages de la nouvelle théorie. Nous appelons *internes* ces problèmes, dont plusieurs se présentent à Cartan et Oka, en particulier les problèmes de cohérence de modules ou idéaux associés aux modules ou idéaux faisant l'objet de l'étude (par exemple, en nous permettant un léger anachronisme : des noyaux ou images de morphismes).

L'étude de ce dossier sur la période 1948-1952 met au jour de nouveaux phénomènes que nous ne pouvons rapporter ici que sous l'angle épistémologique.

Premièrement, le lien entre problème(s) et structure n'est pas univoque. En reformulant les problèmes de Cousin dans le cadre d'une « théorie globale des idéaux de fonctions holomorphes », Cartan a subrepticement modifié la notion de *solution* du problème. En effet, sa théorie ne propose pas de contrôle sur la « taille » des idéaux globaux. En ce sens, un résultat positif au sens de la théorie de Cartan (il existe un idéal I de fonction holomorphes dans tout le domaine qui engendre le système des idéaux ponctuels donné) n'apporte pas nécessairement une solution au problème de Cousin classique, car l'idéal I n'est pas nécessairement principal (or c'est bien *une* fonction holomorphe dans tout le domaine qu'on cherchait depuis Weierstrass, Poincaré et Cousin). Non seulement Cartan le reconnaît volontiers en 1950, mais il présente alors une autre formulation de Cousin II, dans le cadre d'une autre structure, celle

⁴⁷ Pour mémoire, paraphrasons la formulation de van der Waerden de 1931 : Si K est un corps algébriquement clos, et f_1, \dots, f_r des éléments de $K[x_1, \dots, x_n]$ sans zéros communs, alors il existe r polynômes A_1, \dots, A_r tels que $\sum A_i f_i = 1$.

d'espace fibré. Reprenant une idée d'André Weil, il montre qu'on peut aussi lire une « donnée de Cousin » comme la donnée d'un fibré principal de groupe (\mathbb{C}^*, \times) sur l'espace étudié. La solution classique du problème trouve sa place dans ce cadre : elle revient à l'étude de l'existence d'une section globale, équivalent à la trivialité du fibré principal (Chorlay, 2010a, pp. 57–58). Le mouvement de généralisation et d'unification ne produit pas une unique hiérarchie de poupées russes ; des ramifications sont possibles, au sein desquelles différents éléments du problème peuvent changer de sens ou de fonction.

Deuxièmement, il existe des degrés aussi bien dans l'abstraction et que dans le structuralisme. Ainsi les théories initiales de Cartan et Oka ne font-elles pas jouer de rôle à la notion de morphisme entre les systèmes cohérents d'idéaux (Cartan) ou les « idéaux holomorphes de domaines indéterminés » (Oka). Cela suggère que l'*image* de l'approche structurale identifiée par Corry – dans laquelle la définition des morphismes et l'établissement de théorèmes d'isomorphismes sont considérés comme caractéristiques – n'était peut-être pas celle que se faisaient nos auteurs. Sur cette période, nos deux auteurs n'utilisent pas non plus la cohomologie des faisceaux, pourtant en cours de construction après 1945. Ces deux faits ne sont pas indépendants. Entre 1945 et 1950, Cartan développe *indépendamment*, d'une part sa théorie des idéaux analytiques, d'autre part la cohomologie des faisceaux sur un espace topologique⁴⁸. Dans cette dernière – développée en parallèle de la cohomologie des groupes – les morphismes jouent un rôle d'emblée fondamental, puisqu'il s'agit d'associer à une suite exacte courte de faisceaux une suite exacte longue de groupes de cohomologie permettant d'étudier à la fois les liens entre faisceaux et les obstructions au passage du local au global. La collaboration entre Cartan et Serre entre 1950 et 1952 conduit à une nouvelle reformulation de la théorie de Cartan, cette fois dans le cadre de la cohomologie des faisceaux, ce qui rebat une partie des cartes. Non seulement la prise en compte de morphismes entre faisceaux – induite par le cadre cohomologique – fait avancer d'un cran dans la démarche structurale, mais elle fait avancer la théorie de Cartan d'un cran dans l'abstraction, au sens suivant. Jusqu'alors, les éléments des anneaux considérés étaient des germes de fonctions : objets des plus classiques⁴⁹. La considération de suites exactes courtes fait ressortir le rôle des structures quotients. Sous ce jour, des données avec lesquelles on travaillait depuis 60 ans sont alors « naturellement » lues comme des exemples d'une telle structure. Ainsi, un lieu de zéros défini localement par des fonctions analytiques détermine-t-il localement non pas une fonction (pas de choix canonique), mais une famille de fonctions définies « à quelque chose près » (à la multiplication près par une fonction jamais nulle), ce que Serre relit comme l'étude de fonctions modulo quelque chose, donc l'étude d'un faisceau quotient⁵⁰. Le nouveau cadre est non seulement plus abstrait et plus conforme aux canons d'un approche structurale ; il permet aussi d'intégrer des résultats anciens – obtenus par d'autres moyens – dans un cadre qui leur assigne une place ou un sens. Ainsi, certains résultats deviennent des conséquences particulières de

⁴⁸ Des témoignages tardifs de Cartan et Serre rapportent la surprise de Cartan lorsque Serre et lui comprennent que la cohomologie des faisceaux est le bon cadre de traitement de sa théorie des idéaux ponctuels de fonctions analytiques. (Chorlay, 2010a, pp. 63)

⁴⁹ Une série entière à plusieurs variables, à coefficients complexes, et de rayon de convergence non nul.

⁵⁰ Citons Serre (cité dans (Chorlay, 2010a, pp. 62–64)) : « Soit X une variété analytique complexe ; on va introduire un certain nombre de faisceaux sur X :

F_a : faisceau des éléments de fonctions holomorphes en tout point de X (ce faisceau muni de l'addition des f.hol.)

F_m : faisceau multiplicatif des éléments de fonctions holomorphes inversibles.

G_a : même définition que F_a , les fonctions méromorphes remplaçant les fonctions holomorphes.

G_m : même définition que F_m , les fonctions méromorphes non nulles remplaçant les fonctions holomorphes non nulles. »

Dans un autre texte, à propos de Cousin II : « Nous allons reformuler ce problème dans le langage des faisceaux : soit G le faisceau des germes de fonctions méromorphes sur X (la loi de composition étant la multiplication), F le sous-faisceau de G formé des germes de fonctions holomorphes inversibles (c'est-à-dire non nulles au voisinage du point considéré), D le faisceau quotient G/F ; il est clair que D est le faisceau des germes de diviseurs. »

théorèmes plus généraux : la trivialité cohomologique des faisceaux analytiques cohérents sur les variétés de Stein implique la résolubilité de Cousin I sur ces espaces. D'autres résultats – ainsi le caractère essentiellement topologique de la résolubilité de Cousin II dans des espaces aux propriétés raisonnables – devient un résultat presque automatique lorsqu'on considère la suite exacte longue de cohomologie associée à l'exponentielle (du groupe additif des germes de fonctions analytiques vers le groupe multiplicatif des germes inversibles) (Chorlay, 2010a, p. 64).

Troisièmement, l'enquête historique permet de montrer l'hétérogénéité d'ensemble théoriques dont la cohérence finale ne permet pas d'imaginer la fabrication progressive. Au cours des années 1950, la cohomologie des faisceaux étend son empire dans les mondes topologiques, analytiques et algébriques, laissant la communauté mathématique stupéfaite devant son unité et son efficacité⁵¹ ; tous les éléments se répondent et s'emboîtent parfaitement, de sorte qu'on ne peut imaginer les uns sans les autres. L'enquête historique permet de dépasser cette sidération. Complétons les éléments déjà présentés par deux autres.

Premier complément, les différents éléments peuvent émerger dans des contextes et selon des chronologies différentes pour peu que l'on distingue différents fils noués dans la théorie finale. Par exemple, de Poincaré à Serre se conserve une forme de problème, qu'on peut présenter très informellement ainsi : « une situation étant connue dans deux ouverts U et V , une condition de compatibilité étant vérifiée dans $U \cap V$, que peut-on dire dans $U \cup V$? ». On peut montrer que cette forme de problème, devenue standard, ne l'était pas à la fin du 19^{ème} siècle, et que les *techniques du lieu* (Chorlay, 2010a, pp. 10–15) associées sont alors spécifiques au contexte de la théorie du potentiel. Quant à l'étiquette de problème « passage du local au global », qui se présente naturellement sous la plume de Cartan, elle n'est pas chez Poincaré. De même, la théorie à saveur algébrique est construite pendant 10 ans par Cartan et Oka sans que les morphismes ni les structures quotients n'y jouent de rôle structurant.

Second complément, plutôt que de dénouer les fils solidement noués dans la trame d'une théorie mature pour les suivre séparément et de manière diachronique, on peut en isoler un et étudier ses circulations latérales de manière synchronique. Changer ainsi de focale passe aussi par un changement de ce qu'on considère comme le « contexte », puisqu'on doit alors prendre en compte des éléments extérieurs au développement de la théorie considérée. Par exemple, les « partitions de l'unité » jouent un moment un rôle technique central dans la cohomologie des faisceaux. On peut montrer (Chorlay, 2010a, pp. 51–54) qu'après avoir été introduites à la fin des années 1930, indépendamment et dans des contextes différents, par Bochner, Whitney (en géométrie différentielle) et Dieudonné (en théorie de l'intégration), elles sont intégrées par Bourbaki dans *Eléments de mathématique*. Elles sont ainsi promues par eux parmi les outils de portée générale en mathématiques. Dans les années 1940, on voit cet outil se diffuser parmi les membres de Bourbaki (et légèrement au-delà), dans des contextes disciplinaires et de recherche variés : intégration dans les groupes topologiques chez Weil, fondements de l'intégration dans les variétés différentielles chez Chevalley, cohomologie des formes différentielles chez de Rham, théorie des distributions chez Schwartz. Cet outil technique circule en même temps que le thème de l'articulation local-global. On peut aussi montrer que cette articulation ne jouait pas de rôle structurant dans les premiers articles de Schwartz sur les distributions, alors que le thème organise l'exposé en 1951⁵². Si l'on reprend l'analyse diachronique centrée sur la cohomologie des faisceaux, on constate que les partitions de l'unité n'y jouent que brièvement un rôle central. D'autres notions les remplacent, qui

⁵¹ On rapporte les paroles d'un participant allemand au colloque de 1953 dans lequel Serre et Cartan présentent leurs résultats : « Nous avons des arcs et des flèches, les français ont des tanks ! » (Chorlay, 2010a, p. 61).

⁵² A titre d'échantillon, Schwartz définit la notion de support d'une distribution et commente : « Cette définition permet de considérer les distributions, comme les mesures ou les fonctions, d'un point de vue local ; on pourra écrire des égalités entre distributions pour un ouvert Ω de \mathbf{R}^n , sans préjuger en rien de ce qui se passe dans l'espace \mathbf{R}^n entier. » (cité dans (Chorlay, 2010a, p. 53))

jouent la même fonction dans l'économie de la théorie (résolutions injectives, projectives, flasques etc.). Large diffusion transversale, rapide remplacement par des équivalents fonctionnels dans un cadre théorique particulier.

1.3 Géométrie et topologie différentielles (1918-1932)

L'ouvrage *Géométrie et topologie différentielles (1918-1932)* (Chorlay, 2015a) est un recueil de textes (*sourcebook*) conçu dans le cadre du programme ANR *Physique et géométrie à la charnière des XIXe et XXe siècles*, dirigé par le professeur Szczeciniarz. La plupart des textes sélectionnés ont fait l'objet d'une traduction, le plus souvent de l'allemand (indiqué ci-dessous par un *), à une occasion de l'anglais (indiqué par un #). Certains chapitres sont construits autour d'un seul texte (titres en italique), les chapitres 3, 4 et 5 en regroupent plusieurs :

1. Hermann Weyl : *Géométrie purement infinitésimale** (1918)
2. Hermann Weyl : *Le problème de l'espace** (1922)
3. Nouvelles recherches en théorie des groupes :
 - Hermann Weyl : *Le fondement groupe-théorique du calcul tensoriel** (1924)
 - Otto Schreier : *Sur des recherches récentes en théorie des groupes continus** (1928)
4. Elie Cartan : Espaces généralisés et repère mobile
 - *Trois Notes aux comptes rendus de l'Académie de Sciences de Paris* (1922)
 - *La théorie des groupes et les recherches récentes en géométrie différentielle* (1925)
5. Elie Cartan : Géométrie et topologie
 - *Les groupes d'holonomie des espaces généralisés et l'analysis situs* (1925)
 - *Sur les nombres de Betti des espaces de groupes clos* (1928)
6. Heinz Hopf : *Géométrie différentielle et forme topologique** (1932)
7. Le calcul des variations global selon Morse (1939)
8. Oswald Veblen et John Henri Whitehead : *Un ensemble d'axiomes pour la géométrie différentielle*# (1931)

Cet ouvrage propose une sélection de textes historiques qui posent les bases des conceptions actuelles dans plusieurs branches des mathématiques : géométrie différentielle (notion de variété différentielle, notion de connexion), topologie différentielle (lien entre courbure et topologie, utilisation systématique des revêtements, théorie de Morse), théorie globale des groupes de Lie. Plusieurs de ces textes constituent des classiques de l'histoire des mathématiques – parfois aussi de la physique – et n'étaient, à notre connaissance, pas disponibles au lecteur non germaniste. D'autres proposent un bilan provisoire d'un domaine de recherche – théorie des groupes de Lie (Schreier), topologie des variétés riemanniennes de courbure constante (Hopf) – et permettent de saisir une étape de son développement.

Après une brève présentation, chaque texte est suivi d'un dossier documentaire dans lequel la part belle est de nouveau faite aux textes sources. Ces compléments permettent d'éclairer les origines d'un problème, de signaler des variantes de formulation, de donner le détail d'une démonstration, de fournir des éléments sur la réception d'un texte. Un traitement d'une plus grande ampleur a été réservé à l'article de Hermann Weyl sur la géométrie purement infinitésimale, du fait de sa difficulté et de son importance pour l'histoire de la physique comme des mathématiques. Les références de littérature secondaire ont en revanche été données avec parcimonie. Les travaux mathématiques, historiques ou philosophiques sur certains des thèmes abordés – fondements mathématiques de la relativité générale et des théories de jauge, géométries non-euclidiennes – sont parfois très nombreux ; nous nous limitons à indiquer au lecteur quelques références récentes donnant des points d'entrée riches et fiables.

Rien ne saurait justifier absolument le découpage thématique et temporel. Un certain mouvement se dessine toutefois, qui prend naissance après 1916, dans les travaux cherchant à prolonger ou renouveler les notions de géométrie différentielle classique dans le sillage de la relativité générale. Deux thèmes se retrouvent dans la plupart des textes.

Le premier thème est celui de la diversité des géométries ou des « espaces généralisés » conduisant les auteurs à s'interroger, d'une part, sur la bonne manière de définir ce qu'est *une* structure géométrique et, d'autre part, sur la bonne manière d'organiser le système *des* géométries. Dans ce cadre, les traditions de recherche issues des travaux de Riemann, d'une part, de Klein et Lie d'autre part, sont reprises et réinterprétées à l'aune des nouveaux développements théoriques. Ainsi, la notion de groupe ne jouait pas de rôle dans *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie* de Riemann (1854) ; elle n'en joue pas non plus dans la théorie des invariants différentiels et du calcul différentiel absolu qui prolonge ce travail, et qui, en 1912-1916, fournit le cadre mathématique de la relativité générale (Einstein, 1916). Par-delà les nombreuses différences – de contenu comme de style – entre Hermann Weyl et Elie Cartan, les deux s'inscrivent dans la perspective du *programme d'Erlangen* (Klein, 1893⁵³), qui proposait d'utiliser la notion de groupe pour définir et organiser les géométries : d'une part, l'action d'un groupe sur un ensemble permet de définir la notion de figure de la géométrie définie par l'action (via les orbites de l'action initiale et des actions sur les espaces associés⁵⁴) ainsi que celle de grandeur géométrique (fonctions définie sur l'espace et constantes sur les orbites, donc des « invariants » de l'action⁵⁵). D'autre part, les liens entre différents groupes – isomorphisme, relation de sous-groupe à groupe, relation de groupe à groupe quotient – déterminent les relations entre les géométries. Cartan comme Weyl regardent l'entrée par les groupes comme plus organisatrice et de portée plus vaste que l'entrée riemannienne par les formes différentielles quadratiques (qui englobe déjà les géométries non-euclidiennes). Les deux approches semblaient cependant incompatibles, ou du moins d'une compatibilité limitée à certains cas déjà étudiés, ainsi celui du « problème de l'espace de Riemann-Helmholtz » visant la caractérisation des algèbres de Lie des isométries locales des espaces riemanniens de courbure constante. Les notions de connexion mises au point par Weyl et Cartan visent à dépasser cette apparente incompatibilité. Ils ne sont certes pas les seuls à poursuivre cet objectif, et les dossiers documentaires complétant les textes sources rendent compte plus largement de cette direction de recherche, avec des contributions de Eddington, Schouten, König, Veblen, Hessenberg ou Thomas.

Le second thème est celui de l'articulation des trois niveaux : infinitésimal, local, global. Les années 1920 sont celles de l'émergence explicite des problèmes globaux dans plusieurs disciplines, ainsi en théorie des groupes de Lie ou en calcul des variations. La notion de revêtement, jusque-là peu connue sinon des spécialistes des questions d'uniformisation des fonctions analytiques, devient un outil partagé. Les modalités d'appropriation de cet outil diffèrent cependant selon les contextes. Weyl le tient de sa connaissance de la théorie de l'uniformisation (1913) et l'importe dans une théorie des groupes de Lie dans laquelle les revêtements n'avaient jusqu'ici joué aucun rôle. On peut faire de cette « importation » deux lectures complémentaires. Elle est motivée par les besoins d'un détour technique dans une démonstration de nature algébrique : pour établir un résultat purement algébrique sur des objets algébriques (les représentations linéaires des algèbres de Lie semi-simples), Weyl passe par une voie détournée nécessitant la construction de formes quadratiques invariantes sous l'action du groupe de Lie (et non de l'algèbre), construction qui utilise un « moyennage » par intégration sur le groupe, ce qui conduit à contrôler sa compacité. Parallèlement à cette lecture technique des circonvolutions d'une longue démonstration, on peut analyser l'impact de cet épisode sur la redéfinition – pour les acteurs – des liens entre un niveau à la fois infinitésimal et algébrique (celui de l'algèbre de Lie) et un niveau

⁵³ Date de rédaction : 1872.

⁵⁴ Par exemple : l'action sur les points induit une action sur les couples de points etc.

⁵⁵ Ainsi la notion d'angle et la grandeur « angle » a-t-elle un sens lorsqu'on considère l'action, sur le plan réel, du groupe des similitudes ; elle disparaît si l'on fait agir toutes les transformations affines.

global nécessitant la prise compte d'une variété différentielle (en particulier de sa topologie : compacité, groupe fondamental et revêtements). Le fait que des groupes de Lie dont les algèbres de Lie sont isomorphes sont eux-mêmes localement mais non nécessairement globalement indistinguables était un angle mort de la théorie, y compris pour des spécialistes comme Cartan. Sa lecture des travaux de Weyl conduit à une évolution de sa manière d'écrire les mathématiques et à la formulation de plusieurs programmes de recherche féconds visant à étudier non seulement les liens entre les aspects infinitésimaux et finis (point de vue classique qui est celui de Cartan jusqu'en 1925), mais entre les aspects infinitésimaux, locaux et globaux (Chorlay, 2009a). La mise au jour de l'importance de la topologie des groupes de Lie permet aussi de considérer les liens entre groupes et topologie sans hypothèses différentielles, comme on le voit dans les premiers travaux sur les groupes topologiques (Schreier). Cette appropriation tardive d'outils et de questions de recherches nouvelles – Cartan a 55 ans en 1925 – contraste avec celle d'un mathématicien d'une autre génération, tel Heinz Hopf. Ce dernier utilise la notion de revêtement dès sa thèse (1925), en reconnaissant d'ailleurs sa dette envers plusieurs travaux de Weyl.

L'enrichissement des liens conceptuels entre les niveaux infinitésimaux, locaux et globaux passe par une série de reconceptualisations et de différenciations conceptuelles. Ainsi, le « fini » qui faisait couple avec « infinitésimal » se différencie-t-il en deux niveaux, locaux et globaux ; de ce fait, le sens de l'« infinitésimal » évolue du simple fait qu'il intervient comme pôle dans une nouvelle organisation conceptuelle. De même, des questionnements globaux sur les groupes de Lie (chez Weyl et Cartan) et les variétés différentielles riemanniennes (chez Hopf) amènent à considérer un niveau plus pauvre en structure – celui des groupes et variétés topologiques sous-jacents –, point de départ de l'autonomisation de l'étude de ces objets hors de toute hypothèse de différentiabilité. On se ferait une idée fautive en ne soulignant que la montée du thème local-global, car la période 1918-1932 voit aussi un travail explicite sur l'infinitésimal, comme en témoigne le titre programmatique de l'article de Weyl, proposant d'édifier une *géométrie purement infinitésimale*. Weyl motive sa proposition en discutant les mérites respectifs de formulations infinitésimales et finies en géométrie différentielle et en physique ; discussion dont on peut suivre l'approfondissement dans les éditions successives de *Espace, Temps, Matière*, de 1918 à 1923, comme on le voit dans le dossier documentaire du *sourcebook*.

Définition et organisation des géométries grâce à la notion de groupe, d'une part ; distinction et articulation des niveaux infinitésimaux, locaux et globaux, d'autre part, sont enfin les deux thèmes qui informent le travail de Veblen et Whitehead sur les fondements de la géométrie différentielle (Veblen & Whitehead, 1932), dans lequel on trouve la présentation à peu près actuelle de la notion de variété différentielle⁵⁶.

Ce rapide survol ne peut guère être dépassé ici. Par sa nature, un *sourcebook* ne cherche pas à répondre à une question de recherche précise mais offre matière à réflexion et recherche à des lecteurs moins spécialistes de la période ou ne lisant pas aisément l'Allemand. Soulignons toutefois que le travail de rédaction du *sourcebook* a dépassé les tâches de sélection des textes et de traduction. Les dossiers documentaires complétant les textes représentent un travail de recherche en soi, présentant des documents peu connus et parfois peu accessibles ; esquissant – par le dialogue entre les textes – des problématiques. Un exemple suffira. Les textes de Cartan présentés au chapitre 4 (trois notes CRAS et une conférence au Congrès International des Mathématiciens) n'ont guère coûté d'efforts à traduire (ils sont en français), mais le dossier documentaire complémentaire de 50 pages permet, par exemple, de problématiser la réception de ces travaux sur les court et moyen termes. Ces éléments sur la réception, sur l'évaluation (élogieuse ou critique), sur l'appropriation (ou non) des questions comme des outils contribuent aussi bien à éclairer les enjeux mathématiques qu'à identifier les collectifs d'acteurs. Les

⁵⁶ Il faudrait mentionner Whitney (1937) et Chevalley (1946) pour décrire la formulation et la stabilisation d'une présentation devenue standard (moins la notion de fibré tangent).

deux marchent de pair, et l'évaluation critique d'une théorie jugée « difficile » reflète aussi souvent l'appartenance des uns et des autres à des collectifs différents, au sein de chacun desquels une culture commune garantit la « facile » circulation des idées et des méthodes. On peut étudier la réception soit au niveau de la proposition théorique dans son ensemble, soit en se concentrant sur l'outil technique privilégié que constitue le calcul différentiel extérieur. Le dossier documentaire permet de suivre à la fois les origines et l'extension du domaine d'usage de ce calcul – de Poincaré et Frobenius à Cartan et Goursat – et les réticences de beaucoup à s'approprier un formalisme peu connu et pour lesquels semblent exister des équivalents plus familiers (Chorlay, 2015a, doc. 2, 3, 4, 5, 7, 8 pp. 172–179). Quant aux options théoriques d'ensemble, les échanges des années 1920 entre Cartan, Schouten, Veblen et Weyl montrent des incompréhensions qui ne vont pas jusqu'à la polémique, et une difficulté à proposer un cadre de synthèse des points de vue⁵⁷. Outre des textes publiés, le *sourcebook* nourrit le dossier documentaire de documents disponibles depuis peu dans les archives de l'Académie de Sciences de Paris, en particulier une correspondance entre Cartan et Weyl (Chorlay, 2015a, pp. 214–215).

1.4 Histoire de l'analyse : lectures épistémologiques

Nous regroupons dans cette section deux travaux indépendants, d'une nature différente et d'une ampleur moindre que ceux présentés jusqu'ici. Quoiqu'adosés à l'histoire des mathématiques, ils sont de nature épistémologique et heuristique : ils proposent des rapprochements de documents historiques visant à rafraîchir le regard sur des notions familières ; ils esquissent un mouvement de la pensée mathématique en faisant se répondre des ensembles de textes dont quelques traits sont stylisés et décrits dans un vocabulaire anhistorique. On ne saurait les considérer comme des travaux aboutis du point de vue de la recherche historique – ce n'était pas là leur objectif – car les voies d'administration de la preuve dans ce domaine n'y sont pas été suivies (examen de corpus construits et contrôlés, établissement de la réalité de liens suggérés par la lecture de textes, insertion dans l'historiographie). Leur vertu est de susciter la curiosité et de suggérer des pistes d'approfondissement, soit historiques, soit didactiques.

1.4.1 Réinterroger l'histoire de la notion de « fonction » au 19^{ème} siècle sous l'angle de la « généralité »

Le chapitre intitulé *Questions of generality as probes into 19th century mathematical analysis* (Chorlay, 2016a) est une contribution à un projet d'ensemble de l'équipe SPHERE⁵⁸ dont Karine Chemla a été

⁵⁷ On peut illustrer ces tentatives de synthèse et les éloges ambigus que reçoit Cartan par ces remarques de Schouten : « Indépendamment de König et par des voies toutes autres, Cartan a réussi en 1922 à généraliser les géométries projectives et conformes. Il semblait toutefois s'écarter complètement de l'idée de transport linéaire. Cette apparence ne provient en fait que du symbolisme exotique [*fremdartig*] qu'il utilise, dont les propriétés d'invariance ne sont pas les mêmes que celles des méthodes ordinaires. Si l'on fait abstraction de ces aspects superficiels, on reconnaît qu'en réalité tout repose sur des transports linéaires, en fait les mêmes que chez König. Cartan en est ensuite arrivé à des généralisations dépassant le cadre des transports linéaires. Les recherches de Cartan constituent la pierre angulaire [*Eckstein*] des conceptions modernes, et les étendent en une totalité à bien des égards close. » (cité dans (Chorlay, 2015a, p. 211)).

Le ton est encore proche sous la plume de Weyl, dans sa recension d'un ouvrage de Cartan en 1938 : “*All of the author's books, including the present one, are highly stimulating, full of original viewpoints, and profuse in interesting geometric details. Cartan is undoubtedly the greatest living master of differential geometry. (...) Nevertheless, I must admit that I found the book, like most of Cartan's papers, hard reading. Does the reason lie only in the great French geometric tradition on which Cartan draws, and the style and contents of which he takes more or less for granted as a common ground for all geometers, while we, born and educated in other countries, do not share it?*” (cité dans (Chorlay, 2015a, p. 216))

⁵⁸ Equipe d'histoire et épistémologie des sciences et des techniques (UMR 7219, Universités Paris Cité et Panthéon Sorbonne, <http://www.sphere.univ-paris-diderot.fr/>).

l'initiatrice. Il a donné lieu à un séminaire d'équipe actif pendant plusieurs années, puis à la préparation d'un ouvrage collectif que David Rabouin, Karine Chemla et moi avons dirigé (Chemla et al., 2016). Le projet trouve son origine dans les travaux de Chemla sur les mathématiques de la Chine ancienne. Elle cherche en effet à dépasser une historiographie des mathématiques anciennes non-occidentales qui a longtemps réservé aux mathématiques hellénistiques (ou qui en héritent) le monopole du souci du général, vu comme un aspect du souci de l'argumentation rationnelle. Par contraste, les longues collections de problèmes résolus (sans que les algorithmes ne soient justifiés) ne semblent répondre qu'à des préoccupations pratiques : leur efficacité suffirait à les justifier aux yeux de leurs auteurs ; leur organisation semble peu systématique et reflèterait les champs d'utilisation (arpentage, héritage, commerce) ou de vagues unités thématiques. La critique de cette lecture traditionnelle ouvre un double chantier de recherche. Du côté des mathématiques anciennes extra-européennes, Chemla montre comment d'autres éléments de discours que des « démonstrations » sont porteurs d'éléments de justification et témoignent d'un souci du général. Elle invite aussi à identifier des formes de systématisme dans l'organisation des collections de problèmes et d'algorithmes. Du côté des mathématiques se réclamant de l'héritage hellénistique, on peut interroger le sens de leur revendication de généralité, étudier la réalité des pratiques se réclamant du général, montrer la diversité des « pratiques du général » et du sens de la généralité dans une tradition « occidentale » qui n'a rien de monolithique.

On le voit, le chantier de recherche est doublement double : il invite à approfondir aussi bien l'étude des mathématiques anciennes non-occidentales que celle de « la » tradition scientifique occidentale ; il porte à la fois sur les pratiques scientifiques se réclamant du général et sur la « généralité » comme valeur épistémologique (son sens, le sens de son usage). Ce dernier point inscrit le travail dans la lignée des travaux d'épistémologie historique, plutôt anglo-saxons et portant sur les sciences de la nature⁵⁹, visant à historiciser les catégories épistémologiques (« expérience », « précision », « objectivité »⁶⁰, « phénomène naturel »⁶¹, « crédibilité »⁶²). Ces aspects sont détaillés dans la préface (Chemla, Chorlay, & Rabouin, 2016b), dans laquelle le terme de « *epistemological culture* » est préféré à celui de configuration épistémologique retenu dans le chapitre (Chorlay, 2016a). Le premier terme renvoie à une démarche plus historique, visant à contextualiser la généralité comme catégorie des acteurs ; le second à l'identification rétrospective de différents ensembles cohérents (en eux-mêmes) et en contraste (les uns avec les autres). La préface introduit aussi une distinction qui émerge de la lecture de l'ensemble de l'ouvrage, dont les 17 chapitres proposent des études de cas dans les différentes sciences (mathématiques, physique, sciences de la vie) et couvrent une large période temporelle (de la période hellénistique aux années 1960). Cette distinction entre deux vertus pouvant être prêtées à une à une catégorie épistémologique évaluée positivement, dont la « généralité » n'est qu'un exemple : vertu « épistémique » (*epistemic*) lorsqu'on estime que le souci du général conduit à savoir *plus*, vertu « épistémologique » (*epistemological*) lorsqu'il accompagne le projet de savoir *mieux* (Chemla et al., pp.4 et suiv.).

Dans cet ouvrage, notre chapitre sur la notion de fonction propose de reprendre le corpus classique initialement formé dans le but d'étudier soit la question des fondements de l'analyse et soit l'évolution de la notion de fonction (Youschkevitch, 1976 ; Volkert, 1988 ; Dugac, 2003 ; Jahnke, 2003), et vise à montrer en quoi son approche selon un nouvel angle – celui du général – en renouvelle la lecture. Repartons d'un texte de Poincaré déjà cité dans un autre contexte. On appréciera ici en quoi il vante les

⁵⁹ Le terme « épistémologie historique » renvoie ici à une tradition de recherche différente de celle classiquement désignée sous le vocable d'« épistémologie historique à la française ». Voir, par exemple : Drouin, A.-M. (1991). A propos de l'expression : l'enfant épistémologue. *ASTER*, 12, 27–37. Ce courant plus anglo-saxon est discuté, par exemple, dans un numéro spécial de *Erkenntniss*, 75(3), 2011.

⁶⁰ Daston, L., & Galison, P. (2007). *Objectivity*. Zone Books.

⁶¹ Daston, L. (Ed.). (2000). *Biographies of scientific objects*. Chicago: University of Chicago Press.

⁶² Shapin, S. (1995). *A social history of truth. Civility and science in seventeenth-century England*. University of Chicago Press.

deux vertus, épistémique et épistémologique, d'une prise en compte du domaine de la « fonction en général » :

Au commencement du siècle [le 19^{ème}], l'idée de fonction était une notion à la fois trop restreinte et trop vague. ... Aujourd'hui tout est bien changé ; on distingue deux domaines, l'un sans limites, l'autre plus restreint, mais mieux cultivé. Le premier est celui de la fonction en général, le second celui de la fonction analytique. Dans le premier, toutes les fantaisies sont permises et à chaque instant nos habitudes sont heurtées et nos associations d'idées rompues ; nous y apprenons ainsi à nous défier de certains raisonnements par à peu près qui paraissaient convaincants à nos pères. Dans le second, au contraire, ces conclusions sont permises ; mais nous savons pourquoi ; il a suffi de placer au début une bonne définition ; et on a vu reparaître une rigoureuse logique. (Poincaré, 1899, p.5)

Cette citation surprend doublement. Premièrement, il est usuel de considérer que les domaines d'objets vastes et aux limites floues accompagnent l'absence de définition, alors que les définitions précises délimitent des domaines spécifiques. Ici, cependant, notions « restreintes » et « vagues » vont ensemble ! Deuxièmement, on s'attendrait à ce qu'après ce paragraphe l'auteur révèle enfin à son lecteur cette « bonne définition » qui aurait changé le cours des choses. Il n'en est rien. L'étude de l'ensemble du corpus montre à la fois les limites (conceptuelles et sémiotiques) contraignant les possibilités de définition de la notion de « fonction générale » au 19^{ème} siècle, la manière dont la notion générale est longtemps désignée autrement que par une définition, et le rôle que la référence aux fonctions générales (ou « en général ») joue dans une réorganisation d'ensemble du mode d'exposition de l'analyse dans le dernier tiers du siècle.

Développons un peu ce dernier point. Dans le dernier tiers du siècle, la fonction générale est ce dont on ne peut rien dire : puisque complètement arbitraire, elle ne possède aucune propriété, n'est justiciable d'aucune formule. Elle ne peut être désignée que métaphoriquement grâce à l'image d'un tableau de valeurs dans lequel les différents couples sont totalement indépendants les uns des autres. Cette métaphore de l'« arbitraire » n'est d'ailleurs pas sans histoire, et c'est l'accumulation active des fonctions « pathologiques » (par exemple : continue mais nulle part dérivable) qui conduit à abandonner à son profit des images plus anciennes évoquant la courbe librement tracée par la main. Nous ne sommes pas encore dans un paradigme ensembliste, où, sans aller jusqu'à une théorie des ensembles, on trouve des choses à dire à propos de la simple notion de fonction (images-antécédents, injectivité, surjectivité, action induite sur les ensembles de parties etc.). Mais l'évocation de cette fonction sans propriété sert de point de départ à l'exposé systématique du monde des fonctions puisque c'est en ajoutant progressivement des propriétés (intégrabilité, continuité, dérivabilité, analyticité) que l'on forme les classes enchâssées de fonctions dont une connaissance est possible⁶³.

Ces éléments d'une configuration épistémologique identifiable dans l'analyse de la fin du 19^{ème} siècle contrastent avec une autre, identifiable dans des écrits du début du même siècle et non moins soucieuse de généralité et de systématique. Le sens du « général » et les voies de la systématique y diffèrent cependant, comme le montre les lectures de Lagrange, Lacroix ou Ampère. Une comparaison Lagrange / Jordan est ici parlante (Chorlay, 2016a, pp. 398–400). Dans la configuration fin-de-siècle, les classes de fonctions sont décrites en partant de la plus vaste et l'exposé avance par la définition de propriétés de plus en plus fortes. Chez Lagrange, l'exposé part des fonctions les plus particulières et simples (polynômes et séries entières) et suggère l'extension du domaine d'objets soit en désignant de modes de construction possible (par exemple : par intégration), soit en relâchant certaines contraintes syntaxiques (on pourrait, dans les développements en série, autoriser les exposants négatifs ou fractionnaires). Caractérisation par des propriétés et mouvement du général au particulier chez Jordan ; définition génétique (une fonction est ce qu'on l'on peut engendrer par certains procédés à partir de certains éléments simples) allant du particulier vers un général aux limites indicibles chez Lagrange. Ce contraste

⁶³ Nous renvoyons ici à l'analyse de travaux de du Bois Reymond, Darboux et Jordan.

est solidaire d'autres différences, et c'est en cela qu'on peut parler de *configurations épistémologiques* associant des éléments divers mais solidaires. Ainsi l'opposition « cas général / cas particulier » recouvre chez Ampère et Lagrange autre chose que chez Jordan. Dans la configuration fin-de-siècle, « général » signifie universel : le cas général est celui commun à tous. Ampère et Lagrange écrivent dans le cadre de la « généralité de l'algèbre », construit au 16^{ème} siècle, et contre lequel, quelques années après Lagrange, Cauchy s'inscrit en faux⁶⁴. Dans ce cadre, la désignation d'une variable par une lettre permet d'écrire des relations dont on n'exige pas qu'elles soient universellement valides (au sens de : valides pour toutes les valeurs particulières dont est susceptible la variable). Ainsi voit-on Ampère, au cours d'une démonstration visant à démontrer un résultat qu'il dit général, affirmer à plusieurs étapes que ce qu'il avance ne cesse pas d'être général même s'il cesse d'être vérifié pour certaines valeurs de la variable (à chaque fois en nombre fini). La distinction « cas général / cas particulier » renvoie à une articulation « indéterminé (exprimé par une lettre) / déterminé (numérique) ». Autre pratique qui deviendra illégitime, voire choquante, à la fin du siècle : Lagrange organise son exposé de la théorie des fonctions en partant du développement de toute fonction en série entière⁶⁵. Cela reflète son mode d'exposition et non une naïveté, comme en témoigne la démonstration dans laquelle il s'engage après quelques pages :

Mais pour ne rien avancer gratuitement, nous commencerons par examiner la forme même de la série qui doit représenter le développement de toute fonction $f(x)$ lorsqu'on y substitue $x+i$ à la place de x , et que nous avons supposée ne devoir contenir que des puissances entières et positives de i .

Cette supposition se vérifie en effet par le développement des différentes fonctions connues ; mais personne, que je sache, n'a cherché à le démontrer *a priori*, ce qui me paraît d'autant plus nécessaire, qu'il y a des cas particuliers où elle ne peut pas avoir lieu. (cité dans (Chorlay, 2016a, p. 396))

Lagrange écrit bien que la démonstration lui semble d'autant plus nécessaire que l'on connaît des contre-exemples à la propriété à démontrer ! L'étude de sa « démonstration » montre le même partage « général/particulier » de type « indéterminé/déterminé » que chez Ampère. Un troisième élément permet de compléter la mise en contraste des deux configurations. Nous reprenons ici une distinction introduite en didactique par John Mason (1982, chap.5) entre trois situations de communication visant à modifier la valeur épistémique d'un énoncé pour un interlocuteur⁶⁶ : « *convince yourself / convince a friend / convince a sceptic* » ; triplet de qu'on peut rapprocher de « conjecturer / expliquer / démontrer ». Sous cet angle, les traités d'analyse de Lacroix ou Lagrange relèvent parfois plus de l'explication que de la démonstration. Par contraste, la recherche systématique de contre-exemples et l'effort pour

⁶⁴ « Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. Les raisons de cette espèce, quoique assez communément admises, surtout dans le passage des séries convergentes aux séries divergentes, et des quantités réelles aux expressions imaginaires, ne peuvent être considérées, ce me semble, que comme des inductions propres à faire pressentir quelquefois la vérité, mais qui s'accorde peu avec l'exactitude tant vantée des sciences mathématiques. On doit même observer qu'elles tendent à faire attribuer aux formules algébriques une étendue indéfinie, tandis que, dans la réalité, la plupart de ces formules subsistent uniquement sous certaines conditions, et pour certaines valeurs des quantités qu'elles renferment » (cité dans (Chorlay, 2016a, p. 401))

⁶⁵ Lagrange ouvre sa *Théorie des fonctions analytiques* sur : « Considérons donc une fonction $f(x)$, d'une variable quelconque x . Si à la place de x on y met $x+i$, i étant une quantité quelconque indéterminée, elle deviendra $f(x+i)$, et, par la théorie des séries, on pourra la développer en une série de cette forme $f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \dots$, dans laquelle les quantités $p, q, r \dots$, coefficients des puissances de i , seront de nouvelles fonctions de x , dérivées de la fonction primitive de x et indépendantes de l'indéterminée i . » (cité dans (Chorlay, 2016a, p. 396))

⁶⁶ Dans le cas du « *convince yourself* » l'interlocuteur coïncide avec l'émetteur, dans le cadre d'un dialogue intérieur.

débusquer des lemmes cachés sont des traits caractéristiques et revendiqués d'auteurs qui s'inscrivent en rupture avec cette configuration⁶⁷.

Ce travail heuristique autour du thème de la généralité (objets généraux, cas généraux, raisonnement à validité générale) permet aussi de caractériser une nouvelle vague de développements théoriques qui, au tournant du 20^{ème} siècle, permettent de reconceptualiser la notion de fonction générale et, en un sens, de venger Lagrange. Les travaux d'Emile Borel permettent d'illustrer ce point. Il utilise les notions de topologie ensembliste et de théorie de la mesure pour montrer que, dans de nombreux cas, les points singuliers d'une fonction, ou les fonctions « pathologiques » au sein d'un ensemble de fonctions, sont des cas si particuliers qu'ils peuvent être négligés. Par exemple, les polynômes ne sont bien sûr que des cas particuliers de fonctions (localement) intégrables, mais les théorèmes d'approximation de Weierstrass et la théorie de la mesure montrent qu'ils forment une classe suffisamment générale : « L'intégrale de y peut être définie comme la limite des intégrales des polynômes $P(x)$ Cet exemple montre comment la notion de mesure permet de débarrasser la théorie des fonctions de variable réelle de la plupart des complications qui y avaient été introduites par le développement logique de l'analyse. » (Cité dans (Chorlay, 2016a, p. 405)). On rencontre dans cet exemple un nouveau sens de « général ». Du point de vue « logique », une classe de fonction qui en contient une autre présente une plus grande généralité. Mais l'étude d'autres liens que ceux d'inclusion permettent d'enrichir le questionnaire : de combien plus général ? le cas particulier n'est-il pas *suffisamment* général dans tel ou tel contexte ? La réponse à ces questions devient mathématique (relève donc du niveau objet et non plus seulement du niveau méta) et dépend du contexte. La « place » que prend la petite classe de fonctions au sein de la grande classe peut être évaluée par différents outils (densité, mesure). Selon le contexte, les cas particuliers seront suffisamment généraux pour être les seuls à considérer ; dans d'autres cas ils seront négligeables. Nous avons proposé d'introduire le terme d'« *embedded generality* » pour désigner cette prise en compte mathématique et contextuelle du degré de généralité relative d'objets mathématiques. Elle s'oppose à ce que Borel ou Poincaré appellent la généralité « logique », qui ne reflète « que » les inclusions entre classes d'objets et les implications entre propriétés (Chorlay, 2016a, pp. 403–408).

1.4.2 Signe de f' et variations de f : aspects épistémologiques de la fabrication d'une chaîne déductive longue (Chorlay 2013a, 2014)

Nous complétons cette partie sur les lectures épistémologiques de l'histoire de l'analyse par un aperçu sur un travail de moindre ampleur, adossé à un corpus réuni par Dugac⁶⁸. Le travail est de nouveau de nature heuristique et épistémologique : la lecture du dossier documentaire offre des points de vue inédits

⁶⁷ Cauchy n'est pas le seul représentant de cette posture épistémologique. La position de « sceptique systématique » est bien celle revendiquée par Abel en 1826, dans des lettres à des amis (Chorlay, 2016a, p. 386 et 400) : « Je crois que tu ne pourras me proposer qu'un très petit nombre de théorèmes contenant des séries infinies, à la démonstration desquels je ne puisse faire des objections bien fondées. Fais cela, et je te répondrai. » Abel partage la critique de Cauchy : il faut rompre avec des généralisations abusives et délimiter les classes de fonctions étudiées : « Je consacrerai toute mes forces à répandre de la lumière sur l'immense obscurité qui règne aujourd'hui dans l'analyse. Elle est tellement dépourvue de tout plan et de tout système, qu'on s'étonne seulement qu'il y ait tant de gens qui s'y livrent – et, ce qui pis est, elle manque absolument de rigueur. Dans l'Analyse supérieure bien peu de propositions sont démontrées avec une rigueur définitive. Partout on trouve la malheureuse manière de conclure du spécial au général, et ce qu'il y a de merveilleux, c'est qu'après un tel procédé on ne trouve que rarement ce qu'on appelle des paradoxes. Il est vraiment très intéressant de rechercher la raison de ceci. Cette raison, à mon avis, il faut la voir dans ce que les fonctions dont s'est jusqu'ici occupée l'analyse, peuvent s'exprimer pour la plupart par des puissances. Quand il s'y en mêle d'autres, ce qui, il est vrai, n'arrive pas souvent, on ne réussit plus guère, et pour peu qu'on en tire de fausses conclusions, il en naît une infinité de propositions vicieuses qui se tiennent les unes les autres. »

⁶⁸ Dugac, P. (1979). *Histoire du théorème des accroissements finis* (polycopié). Paris : Université Pierre et Marie Curie.

sur des objets sans doute familiers au lecteur, invite à repérer des types d'actions rationnelles mises en œuvre par les acteurs. Ce travail a aussi été conçu dans une perspective de formation, puisqu'il porte sur des contenus mathématiques enseignés en L1 et au programme des concours de l'enseignement secondaire.

Dans les traités d'analyse, on observe depuis la fin du 19^{ème} siècle une chaîne déductive longue aboutissant au théorème reliant – sur un intervalle – les variations d'une fonction dérivable au signe de sa dérivée. Le théorème se déduit de l'égalité des accroissements finis, qui se déduit du théorème de Rolle, qui se déduit de l'existence d'extrema pour les fonctions numériques continues sur les intervalles fermés et bornés, qui dépend de la complétude de \mathbf{R} . En un sens, cette situation ressemble à celle rencontrée plus haut à propos de la cohomologie des faisceaux dans les années 1950 : le « produit fini » s'impose par sa cohérence. Il n'offre aucune prise au lecteur désireux d'imaginer d'autres manières de faire ; ou désireux de comprendre comment les différents éléments ont pu émerger indépendamment. Comme on s'y attend, le dossier documentaire montre que l'enchaînement des propositions dans la chaîne déductive finalement stabilisée ne reflète en rien la chronologie de la formulation ou de la démonstration des différents éléments.

Le dossier historique montre d'abord que d'autres démonstrations ont été cherchées et publiées, par exemple par Lagrange – qui cherche à établir le résultat en considérant la fonction f comme la limite de ses approximations affines par morceaux données par la méthode d'Euler – ou Cauchy – qui se contente d'utiliser habilement la définition du nombre dérivé. La démonstration reposant sur le théorème de Rolle est due à Ossian Bonnet (1819-1892) et paraît dans les années 1860 dans les manuels de Joseph Serret. Elle n'est cependant pas insérée dans la chaîne déductive longue, et l'on peut suivre les différents épisodes qui, dans le dernier tiers du siècle, contribuent à la former. Ces épisodes permettent d'illustrer des types d'actions rationnelles déjà identifiés par des chercheurs s'inscrivant dans une perspective épistémologique. Ainsi voit-on Peano critiquer la démonstration donnée par Jordan de l'égalité des accroissements finis en ayant recours à des actions décrites par Lakatos (1976) : d'une part, la production d'un contre-exemple local (i.e. invalidant un pas de la déduction et non la propriété démontrée) ; d'autre part, un travail d'analyse de preuve (*proof analysis*) qui identifie un lemme caché (une propriété utilisée sans n'avoir été ni explicitée ni vérifiée). *Fair play*, Jordan intègre la critique aux éditions ultérieures et avance par différenciation conceptuelle, distinguant la différentiabilité de l'uniforme différentiabilité.

La présence dans la chaîne déductive longue du théorème du maximum renvoie au travail sur ce thème décrit plus haut (section 1.1.2.c de cette Note). Elle permet aussi de le compléter. Serret utilise l'existence d'un maximum sans pour autant la démontrer : pour lui, elle *va sans dire*, au sens où il ne peut imaginer qu'une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $f(a) = f(b)$ ne passe pas, à un moment, par un maximum ou un minimum. On peut montrer que ce mode d'argumentation visant à convaincre le lecteur de l'existence de certains objets en l'invitant à imaginer la situation pour constater qu'il ne peut imaginer que quelque chose n'ait pas lieu, n'est pas spécifique à Serret. Il se retrouve dans de nombreux cours d'analyse, par exemple chez Lacroix ou Cauchy, et illustre la prégnance des situations de justification du type *convince a friend*. Dans le cas présent, l'argument renvoie au théorème en acte⁶⁹ selon lequel une fonction continue est monotone par morceaux ; théorème en acte lui-même solidaire d'un registre sémiotique que nous avons appelé le *style narratif* : la variable x parcourant l'intervalle de a vers b , pour que la fonction f revienne à la valeur de départ $f(a)$ lorsque x arrive en b , il « faut bien » changer de sens de variation à un moment, donc passer par un extremum local. De nouveaux, l'entreprise de fabrication de fonctions pathologiques produira des contre-exemples locaux – ici des fonctions continues mais non monotones par morceaux – nécessitant le remplacement dans la démonstration de l'argument narratif par un équivalent fonctionnel, de nature différente mais jouant le même rôle. L'existence de maxima ne

⁶⁹ Cette notion de didactique n'est pas utilisée dans les textes (Chorlay, 2013a, 2014). Elle désigne une croyance d'un acteur à propos des propriétés d'un domaine d'objets, croyance sur laquelle un observateur fait des hypothèses à partir de l'observation des comportements de l'acteur (Balacheff, 2022).

dépend en fait nullement de la locale monotonie, et la démonstration weierstrassienne de l'existence du maximum (adossée à une construction de \mathbf{R} garantissant le théorème des intervalles emboîtés) remplace l'élément invalidé dans l'économie de la démonstration.

1,5. Transition : histoire et didactique

On pourrait s'étonner du peu de liens entre les travaux en histoire et en didactique. Les raisons en sont en partie contingentes et reflètent un parcours professionnel. Les travaux de recherche en histoire présentés en 1.1, 1.2 et 1.3 rayonnent à partir du travail de thèse selon des modalités classiques : extension du corpus d'étude, enrichissement des méthodes d'enquête, approfondissement d'un point, formulation d'une nouvelle problématique suggérée par des travaux antérieurs ou repérée comme un angle mort de l'historiographie. Par contraste, mon intérêt pour les questions didactiques naît de circonstances convergentes : questionnements d'un enseignant de Lycée (1997-2007), besoins ressentis par un formateur d'enseignants (à l'IREM depuis 2003, dans le master de didactique de Paris 7 depuis 2009, à l'INSPE depuis 2010), effets de la proximité géographique et institutionnelle des équipes de recherches SPHERE et LDAR. Dans ces contextes, j'ai choisi de faire passer les questionnements didactiques du second au premier plan après la publication du *sourcebook* (2015).

Le but de cette section de transition n'est pas de créer l'illusion d'une nécessité impérieuse derrière l'indéniable autonomie des deux directions de recherche, ni de feindre des filiations entre travaux. Il s'agit plutôt de rendre compte d'une insertion dans les débats de recherche sur les liens entre histoire et didactique ; insertion dont témoigne une série de publications (Chorlay & de Hosson, 2016), (Chorlay, 2016b), (Chorlay, Clark & Tzanakis, 2022). Une transition permettant un pas de côté réflexif, et non une introduction à la section proprement didactique de cette Note, car le contenu de cette section ne dérive pas des travaux d'histoire ni ne s'inscrit dans un champ de recherche intersectionnel.

Nous plaçons ici notre propos à la confluence de deux lignes de réflexion : l'une menée par des historiens soucieux des *usages* sociaux de l'histoire des sciences ; l'autre profondément inscrite dans la tradition française de recherche en didactique des sciences qui accorde un rôle structurant à l'histoire et à l'épistémologie des savoirs.

Du côté des historiens, les réflexions de Michael Fried (2001, 2008, 2018) prolongent celles d'Ivor Grattan-Guinness (2004a, 2004b) sur les usages de l'histoire des mathématiques. Grattan-Guinness propose de distinguer deux grands types de relation aux mathématiques du passé, qu'il appelle respectivement *history* et *heritage*. La première est celle de l'historien, guidé par les questions « *What happened in the past ?* » (et dans une certaine mesure « *Why did it happen ?* ») et pour lequel l'anachronisme est à bannir absolument, non seulement parce qu'il apporte de mauvaises réponses, mais parce qu'il empêche de se poser les bonnes questions. La seconde est celle d'autres usagers de l'histoire – mathématiciens, didacticiens, philosophes – guidés par la question « *How did we get here ?* » : enquête sur l'héritage ; enquête sur le passé d'un présent, d'un présent qui lui adresse *ses* questions. La première section du chapitre de Chorlay et de Hosson (2016) est alignée sur la position de Grattan-Guinness :

The distinction between history and heritage is often sensed by people who study some mathematics of the past and feel that there are fundamentally different ways of doing so. Hence the disagreements can arise; one man's reading is another man's anachronism, and his reading in the first one's irrelevance. (...) The claim put forward here is that both history and heritage are legitimate ways of handling the mathematics of the past; but muddling the two together, or asserting that one is subordinate to the other, is not. (Grattan-Guinness, 2004a, p. 1).

Sur cette base, Fried affine la caractérisation des usages de l'histoire des mathématiques (Fried, 2018), ou analyse les types d'anachronismes qui menacent particulièrement les usages de l'histoire dans une

perspective didactique (Fried, 2001, 2008). Introduisons ici une distinction simple mais qui nous semble fondamentale, entre :

- d'une part, des usages de l'histoire des mathématiques pour la réflexion didactique et,
- d'autre part, une réflexion (informée par l'histoire ou⁷⁰ la didactique) sur l'usage de l'histoire des mathématiques dans leur enseignement.

Fried approfondit depuis de nombreuses années une réflexion théorique et méthodologique sur la possibilité d'un usage historien⁷¹ des mathématiques dans l'enseignement (2^{ème} branche de l'alternative ci-dessus), soulignant les difficultés d'une démarche qui lui semble cependant désirable dans le cadre d'une perspective « humaniste ». Ce n'est pas dans cette direction que porte ma réflexion. En particulier, je ne regarde pas mon travail de production de ressources pour la classe (Chorlay, 2010b, 2018b, 2018c) comme relevant ni de la recherche en didactique, ni d'un projet d'introduction d'éléments d'histoire des sciences dans leur enseignement.

C'est l'autre ligne de réflexion – celle portant sur l'histoire comme ressource pour la recherche en didactique – qui est poursuivie dans (Chorlay & de Hosson, 2016). Ce petit texte méthodologique est aussi un texte d'intervention, rédigé par deux chercheurs aux parcours différents qui enseignent ensemble dans un master de didactique, visant à poursuivre une discussion de recherche constitutive de la tradition didactique française mais qui ne semble guère connue des étudiants ou doctorants⁷². Une tradition dans laquelle les mathématiques du passé sont à la fois l'objet d'une *connaissance* – relative aux « genèses »⁷³ de notions particulières ou de la mise en place des mathématiques comme activité rationnelle institutionnalisée et réglée – et l'occasion d'une *expérience* – utile voire nécessaire – au chercheur en didactique. Du côté des connaissances relatives à une notion particulière, un exemple « historique » est fourni par Guy Brousseau :

Pour organiser une genèse expérimentale qui donne un sens convenable à la notion de décimal, il faut faire une étude épistémologique afin de mettre en évidence les formes sous lesquelles le décimal s'est manifesté et leur statut cognitif. (Brousseau, cité dans (Dorier, 2000b, p.20))

Bien entendu, l'évocation finale du « statut cognitif » montre tout ce qui sépare le questionnement didactique de celui de l'historien ; ou même d'un rapport à l'histoire de type *heritage* et d'un intérêt *épistémologique* pour les mathématiques du passé, d'un passé considéré dans ce qu'il peut nous apprendre ou nous suggérer dans le cadre d'un questionnement qui n'est pas celui de l'historien. Pour ce qui est de la connaissance des mathématiques comme activité rationnelle institutionnalisée et réglée, Michèle Artigue illustre cet aspect en 1990 par l'exemple de la notion de « rigueur » :

L'analyse épistémologique [implicitement : des mathématiques du passé] est, me semble-t-il nécessaire au didacticien pour l'aider à mettre à distance et sous contrôle le « représentations épistémologiques » des mathématiques induites par l'enseignement, (...) en aidant à redonner une historicité également à des notions métamathématiques comme celle de rigueur alors que

⁷⁰ « ou » inclusif.

⁷¹ Au sens de la polarité *history/heritage*.

⁷² Je rends ici compte d'une expérience et non d'un résultat de recherche ! J'ai par exemple été amené à échanger avec des doctorants en didactiques des mathématiques à l'occasion de mon invitation comme l'un des deux chercheurs « seniors » dans le cadre du Week-end annuel des jeunes chercheurs en didactique (WEJCH) en 2012 (thème de l'année : épistémologie et didactique).

⁷³ Je reprends ici le terme couramment utilisé en didactique dans ce contexte, en particulier pour discuter des liens entre « genèse » historique et « genèse » artificielle ou expérimentale (dans un cadre didactique) de telle ou telle notion. Les guillemets indiquent que le terme est cité et non repris à notre compte, du fait des images continuistes et organicistes qu'il suggère. On notera que la citation de Brousseau évite clairement ces glissements, en parlant de « formes de manifestation » (au pluriel) et non de genèse historique. L'intérêt de cette approche par épisodes significatifs plutôt que par « étapes » ou « genèses » est souligné dans (Chorlay & de Hosson, 2016, pp. 174–178).

l'enseignement cultive la fiction d'une rigueur éternelle et parfaite des mathématiques. (Artigue, 1990, p. 243)

Artigue aborde aussi dans cette citation le rôle de l'*expérience* que représente pour le didacticien le décentrement permis par l'étude de l'histoire, dont elle va jusqu'à dire qu'il est nécessaire⁷⁴. Elle rejoint en cela l'appel d'Yves Chevallard à mener une enquête sur la genèse des savoirs savants permettant au didacticien – entre autres fonctions – de se « déprendre de sa familiarité pour son objet d'étude, et d'exercer sa vigilance épistémologique » (cité dans (Dorier, 2000b, p.9)). On peut reprendre ici la distinction introduite en section 1.4.a : vertu épistémique (savoir plus), vertu épistémologique (savoir mieux, savoir ce qu'on sait). On pourrait compléter dans trois directions : celle de l'histoire de l'enseignement et du lien avec l'étude de la transposition didactique des savoirs savants ; celle du rôle d'autres connaissances que celle de l'histoire pouvant jouer des fonctions analogues de soutien à l'enquête didactique, à commencer par les connaissances mathématiques (Chorlay & de Hosson, 2016, p. 173) ; celle enfin, complétant l'analyse des vertus « négatives » du passage par l'histoire comme hygiène de la pensée (vigilance épistémologique, mise sous contrôle de conceptions) par celle des vertus heuristiques⁷⁵. Illustrons ce dernier aspect.

Nous proposons plus haut de distinguer nettement entre, d'une part, des usages de l'histoire des mathématiques pour la réflexion didactique et, d'autre part, une réflexion didactique sur l'usage de l'histoire des mathématiques dans leur enseignement. Les travaux de Dorier (2000a, 2000b) sur l'algèbre linéaire et ceux de Hosson (2004, 2011) sur les liens entre lumière et vision (en didactique des sciences physiques) se situent à l'interface entre les deux. Nous en soulignons les points forts dans (Chorlay & de Hosson, 2016, pp. 178–185). Dans ces travaux, l'enquête proprement historique, quoique subordonnée au projet didactique, est menée avec un degré d'autonomie faisant l'objet d'une constante réflexion méthodologique. Cette enquête historique remplit deux fonctions. D'une part, elle nourrit la réflexion, aussi bien quant à la nature des savoirs en jeu (par exemple pour établir leur fonctions Formalisatrice, Unificatrice, Généralisatrice⁷⁶ et Simplificatrice dans le cas de l'algèbre linéaire) que pour identifier des obstacles épistémologiques (ainsi celui reposant sur le modèle du « rayon visuel » (de Hosson, 2004)). D'autre part, elle suggère des leviers d'action et d'intervention didactique : soit par l'identification d'un terrain d'exploration privilégié (celui des équations linéaires) susceptible de constituer un milieu fournissant des points d'appui pour une construction de connaissances passant par un changement de posture et de niveau de questionnement (levier méta) ; soit par identification d'un

⁷⁴ Cette « nécessité » est déjà mise en avant par Brousseau à l'occasion d'un critique sévère de la problématisation de l'enquête historico-épistémologico-didactique menée par Glaeser sur les négatifs. Non seulement Brousseau met en garde contre le mélange des genres, mais il souligne que les questions de l'historien « sont nécessaires pour entrer dans l'intimité de la construction des connaissances, mais Glaeser ne les a pas posées... » (cité dans (Artigue, 1990, p. 352)).

⁷⁵ Ainsi dans (Chorlay & de Hosson, 2016, p. 163) concluons-nous l'étude d'un petit dossier « dépaysant » par ces remarques : *“This interplay between the familiar and the not-so-familiar (yet understandable) may feel disorienting at first, but this disorienting effect is a positive effect, as Artigue stressed. It has a critical function, helping the researcher to distance himself from his own mathematical culture; and a heuristic function, suggesting new viewpoints on seemingly familiar notions, for instance on the role of symbolism in algebra, or the role of real numbers in geometry (as measures and as coordinates). At least two other functions can be mentioned. First, it helps identify problems to which there are no straightforward answers. For instance, what should we consider to be the geometrical analogue of multiplication, at least for one-dimensional objects? In particular, should the analogue of the product be one-dimensional or two-dimensional? A long series of different – yet mathematically sound – constructions provide different answers to this question, including dimension changing solutions (going down with the dot product, or up with the exterior product). Secondly, it helps question the notion of identity. It could be argued that, from a purely mathematical point of view, Euclid and Descartes rely on the same content associated to fig.1; this probably makes sense, but it is probably not very helpful, either to the historian or to the researcher in mathematics education. Indeed, researchers in both fields aim at analyzing how content depends on – for instance – semiotic resources, or intended use.”*

⁷⁶ Nous utiliserons désormais l'acronyme FUG.

levier de problématisation (celle que permet une prise en compte quantitative de la lumière grâce à la notion d'intensité lumineuse) permettant de dépasser l'obstacle. Dans ces propositions d'intervention didactique, il n'est pas nécessaire que les éléments d'histoire des sciences ayant nourri la réflexion du chercheur apparaissent dans le cadre des interventions en classe, au collège (Hosson) ou en Licence (Dorier).

On verra dans la section « didactique » de cette Note que certains de nos travaux font écho à ces démarches, sans relever de la même systématisme. Par exemple, la connaissance de l'histoire de l'analyse au 19^{ème} siècle permet de discuter du caractère FUG de la notion de limite, et d'identifier un levier de problématisation. Ce levier est un élément clé d'une ingénierie didactique qui ne fait pourtant aucune place à l'histoire des mathématiques *dans* la classe (Chorlay, 2019a).

Une seconde distinction mérite d'être introduite pour lever certaines ambiguïtés. Il semble que pour beaucoup d'acteurs intéressés par les liens entre histoire des mathématiques et enseignement, on puisse indifféremment parler d'« usage en classe » de l'histoire des mathématiques ou d'« utilisation de documents historiques en classe ». Ou, plus précisément, que toute travail scolaire s'appuyant sur un document historique participe d'un projet visant à introduire en classe des éléments d'histoire des mathématiques. Le *survey paper* introduisant le numéro spécial de *ZDM – Mathematics Education* (Chorlay et al., 2022) cherche à alerter sur ce qui nous semble une confusion. Nous souhaitons défendre l'idée selon laquelle un travail mené en classe ou en formation à partir d'un document historique peut servir bien d'autres objectifs que ceux d'instruire en histoire des sciences, de sensibiliser à la dimension historique et humaine des savoirs mathématiques, de motiver les élèves etc. Je ne me prononce pas sur ces listes d'objectifs déjà bien repérés (Fauvel & van Maanen, 2000 ; Furinghetti et al., 2006 ; Jankvist, 2009). En tout état de cause, lorsque mes travaux de recherche en didactique ont porté sur des situations d'enseignement dans lesquelles des documents issus de mathématiques du passé font l'objet d'un usage explicite, la problématique n'a jamais porté sur les vertus ou les conditions de possibilité de l'introduction de l'histoire des sciences dans la classe. Les problématisations didactiques ont porté sur la question de la lecture de textes mathématiques (Chorlay, 2018b), sur l'argumentation dans des contextes algorithmiques (Chorlay et al., 2017 ; Chorlay, 2021), ou sur l'analyse des pratiques enseignantes (Chorlay, 2022b). Ces travaux répondent à un appel que je lançais en 2016 lors du colloque international du réseau HPM (*History and Pedadogy of Mathematics*⁷⁷) (Chorlay, 2016b). Je souhaitais y proposer un renouvellement des questionnaires classiquement travaillés dans le cadre de cette communauté, invitant à (1) mener un travail de recherche proprement didactique (quoiqu'informé par l'histoire), à dimension empirique, sur la réception par les enseignants des ressources de nature ou à coloration historique et sur les éventuels effets d'apprentissage et, (2) à construire des questionnement didactiques transversaux, dépassant les interrogations trop spécifiques au réseau HPM. Le *survey paper* (Chorlay et al., 2022) suggère quelques évolutions dans ce sens⁷⁸.

⁷⁷ <http://www.clab.edc.uoc.gr/hpm/about%20HPM.htm>

⁷⁸ Fort timides, et dont je ne prétends pas qu'elles doivent quoi que ce soit à (Chorlay, 2016b) !

2. Didactique des mathématiques

2.1 Du côté des élèves

2.1.1 Algorithmes numériques : décrire et rendre raison

a. Position du problème et choix didactiques macro

Nous regroupons dans cette section deux travaux portant sur des situations exploratoires visant à étudier dans quelle mesure la dévolution de tâches d’études d’algorithmes numériques à des élèves de cycle 3 (fin d’école primaire et première année du secondaire) conduit à des activités de formulation, d’évaluation (Chorlay, et al., 2017) ou⁷⁹ de justification (Chorlay, 2021). Nous parlons de situations *exploratoires*, d’une part pour souligner qu’elles ne s’appuient pas sur des résultats stabilisés disponibles dans une vaste littérature de recherche, d’autre part pour les distinguer d’ingénieries didactiques. Les situations sont volontairement plus ouvertes que dans une ingénierie, et l’on ne cherche pas à construire un milieu antagoniste. Les études visent à générer des données de recherche et non des apprentissages pour les élèves.

Ce terrain de recherche – les algorithmes numériques à l’école primaire – peut sembler bien éloigné de ceux décrits jusqu’ici, d’autant plus que leurs liens avec l’histoire des mathématiques renvoient aux mathématiques médiévales. Certes, ces terrains et questions de recherche se sont ouverts du fait des circonstances, certaines plus structurelles : mission de formation des enseignants de l’école primaire en INSPE et cours d’introduction à l’histoire des mathématiques (master MEEF second degré et master de didactique des mathématiques) m’amenant à travailler sur des mathématiques antérieures au 19^{ème} siècle. D’autres presque accidentelles : je n’avais jamais ouvert le *Livre du calcul indien* d’al-Khwarizmi (1992) jusqu’à ce que je m’engage à proposer une conférence plénière sur le thème « nombres et calculs » à la CORFEM en 2017 (Chorlay, 2017b). L’intérêt pour ces questions a cependant des racines plus profondes. Comme je l’expliquai plus haut (section 1.4.1), le travail au sein de l’équipe SPHere m’a permis de découvrir des chantiers de recherche en histoire des mathématiques anciennes et extra-européennes⁸⁰. Face à des corpus constitués de collections de problèmes et d’algorithmes de résolution donnés apparemment sans justification, les chercheurs montrent comment l’analyse des textes, à différentes échelles (du choix d’un terme ou de l’ordre entre deux lignes, jusqu’à la structure d’ensemble de l’ouvrage), permet d’attester de soucis de systématisme et de justification, certes exprimés différemment de ceux d’Euclide⁸¹. Mon acculturation à ces questions de recherche dans le cadre de SPHere m’a non seulement ouvert des perspectives de recherche en didactique, mais aussi en histoire des mathématiques sur la période contemporaine. J’y reviendrai dans la partie de cette Note consacrée aux projets de recherche (partie 3).

Le principal travail de cette partie a conduit à l’article *Can students justify the correctness of an arithmetic algorithm – a case-study at the primary-secondary transition* (2021a)⁸². Il partage plusieurs caractéristiques fondamentales avec l’autre travail, *Tâches algorithmiques en cycle 3 : trois séances sur*

⁷⁹ Comme toujours : « ou » inclusif.

⁸⁰ Ce champ de recherche ne se limite d’ailleurs pas aux mathématiques ne se rattachant pas à la tradition hellénistique. Voir, par exemple : Bernard, A., & Christianidis, J. (2012). A new analytical framework for the understanding of Diophantus’s *Arithmetica* I-III. *Archive for History of Exact Sciences*, 66, 1–69.

⁸¹ Rappelons que la même interrogation de recherche conduit à réinterroger le sens et les modalités de mise en œuvre des soucis de systématisme et de justification, y compris chez Euclide. En témoigne, parmi de nombreux exemples, le chapitre de David Rabouin dans (Chemla et al., 2016). Voir aussi : Chemla, K. (Ed.). (2012). *The history of mathematical proof in ancient traditions*. Cambridge University Press.

⁸² Ce travail a été mené avec la collaboration de deux enseignantes du premier degré (Caroline Bobin et Dominique Héguiphall) et d’un enseignant du second degré (Alexis Gautreau).

la multiplication par jalousie (Chorlay et al., 2017)⁸³. Dans les deux cas, une situation d'exploration est conçue à partir d'une technique opératoire portant sur les nombres entiers naturels et exposée dans des documents médiévaux. L'une des deux, la multiplication par jalousie, est bien connue ; elle a fait l'objet de travaux en didactique (en particulier de Brousseau). Rappelons-en la disposition, dans le cas de la multiplication de 934×314 , de produit $293\ 276$:

		9	3	4		
	2	0	1			
2	7	9	2	3		
	0	0	0			
9	9	3	4	1		
	3	1	1			
3	6	2	6	4		
	2	2	6			

Figure 1. Une multiplication *per gelosia* dans l'arithmétique de Trévis (1478)⁸⁴

Moins connue, la seconde technique opératoire permet de diviser les entiers par deux (on peut parler de « médiation »). Par exemple, la moitié de 6842 n'est autre que 3421 (il suffit de prendre la moitié chiffre-à-chiffre et l'ordre n'a pas d'importance). La situation se complique quand se présente un chiffre⁸⁵ impair. Dans son *Livre du calcul indien*, al-Khwarizmi prescrit alors de partir de la position des unités et de reporter d'éventuelles retenues de 5 vers la droite⁸⁶ :

Lorsque tu veux diviser un nombre quelconque par deux, commence par la première position et divise-la par deux. S'il s'y trouve un nombre impair, divise en deux les pairs, et il restera un que tu diviseras par deux, c'est-à-dire que tu diviseras en deux moitiés, et tu établiras une moitié, qui est fraction trente de soixante⁸⁷ (...). Ensuite, tu diviseras par deux la position suivante, si son nombre est pair. S'il est impair, prends la moitié du pair et pose-là à sa place ; établis cinq comme moitié du un restant et pose-le dans la position qui est avant celle-ci. (...) Opère de même dans toutes les positions. (al-Khwarizmi, 1992, p. 32 du *Dixit algorizmi*).

Dans les deux cas, le travail confié aux élèves a porté sur des tâches de formulation, d'évaluation de la correction et, pour la division par deux, de justification de l'algorithme. Les situations n'avaient donc pas pour objectif de faire découvrir aux élèves eux-mêmes ces techniques opératoires, ni de les leur enseigner comme des outils à insérer dans leur arsenal scolaire. On peut reprendre ici la distinction, utile et robuste, entre *objet épistémique* et *objet technologique*, que nous retrouverons d'ailleurs plus loin. L'historien et philosophe des sciences Hans-Jörg Rheinberger (1997) a proposé de distinguer deux fonctions jouées par les « objets » (au sens large) rencontrés dans les pratiques scientifiques : d'un côté, les objets épistémiques (virus, nombres premiers⁸⁸, gluons) sont étudiés dans le cadre d'une pratique scientifique; de ce fait même, ils sont partiellement inconnus, leurs contours sont parfois flous, leurs définitions révisables, et leur fonction est d'engendrer des questions (*question-generating objects*). Par

⁸³ Ce travail a été conçu en collaboration avec François Mailloux et Blandine Masselin, alors enseignants dans le secondaire, et prolonge un premier travail mené sous ma direction dans le cadre du master de didactique de l'Université Paris Diderot en 2014-2015. La publication (Chorlay et al., 2017) est du niveau « interface ».

⁸⁴ Chabert, J.-L. (Ed.). (1993). Histoire d'algorithmes – du caillou à la puce. Belin. p. 32.

⁸⁵ Nous nous autorisons l'abus de langage permettant de ne pas dire « chiffre désignant un nombre impair ».

⁸⁶ Nous supposons les nombres écrits en ligne, avec l'unité à droite, selon la convention occidentale actuelle.

⁸⁷ La demi unité fait l'objet d'un traitement spécifique : al-Khwarizmi suit la tradition des astronomes et exprime la partie inférieure à l'unité en base soixante : la demi-unité est donc désignée comme « 30 soixantièmes » et non « 5 dixièmes ».

⁸⁸ Le couple « objet épistémique / objet technique » a par exemple été utilisé en histoire des mathématiques dans le travail de M. Epple sur l'histoire de la théorie des nœuds.

Epple, M. (1999). *Die Entstehung der Knotentheorie*. Vieweg.

contraste, les objets technologiques (microscopes, synchrotrons) peuvent fonctionner comme des boîtes noires puisque leur fonction est d'engendrer des réponses (*answer-generating objects*). La différence est de fonction – donc dépendante du contexte – et non de nature. Dans nos deux études, l'objectif est d'étudier dans quelle mesure des élèves peuvent regarder des techniques opératoires comme des objets épistémiques ; des objets à questionner, à évaluer, à justifier plutôt qu'à utiliser.

Dans les deux cas, l'analyse des programmes montre que les élèves de CM1-CM2-6^{ème} disposent globalement *a priori* des mêmes ressources. Ressources conceptuelles relatives au codage positionnel en base 10, connaissance d'autres techniques opératoires codées dans ce système et en dépendant, théorème en acte relatif à la distributivité de certains opérateurs ; non disponibilité d'une formulation générale et explicite de la distributivité de \times et \div sur $+$ et $-$, ni du recours au registre littéral pour dire le général, d'où l'importance qu'il y a à faire jouer à des exemples un rôle générique.

Dans les deux cas, le lien *en classe* avec l'histoire des mathématiques était faible⁸⁹ ou nul ; lorsque non-nul, il n'affectait ni le questionnement didactique ni le recueil des données. L'interrogation didactique ne portait pas non plus sur la lecture de textes mathématiques. De fait, dans les deux cas, nous avons choisi le même artifice pour soumettre l'algorithme aux élèves : un adulte (en direct ou dans une vidéo) réalise au tableau l'algorithme, en silence. Bien sûr, aucune présentation introductive de la technique n'a précédé cette *performance*, les élèves ont juste à être attentifs et à essayer d'identifier ce que « fait » le « calcul » qu'ils vont voir, et qu'ils n'ont jusqu'ici jamais vu. La présentation en vidéo permet de communiquer la chronologie des opérations, essentielle pour la saisie de l'algorithme.

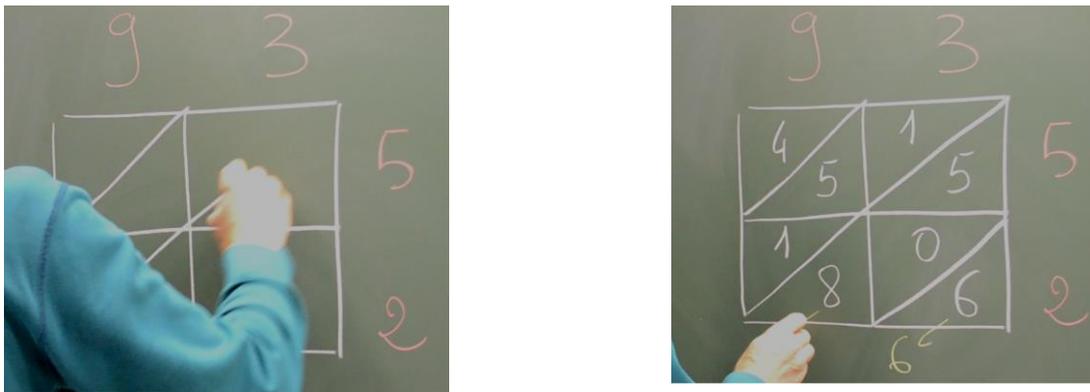


Figure 2. Deux arrêts sur image – Vidéo lançant le travail sur la multiplication par jalousie⁹⁰.

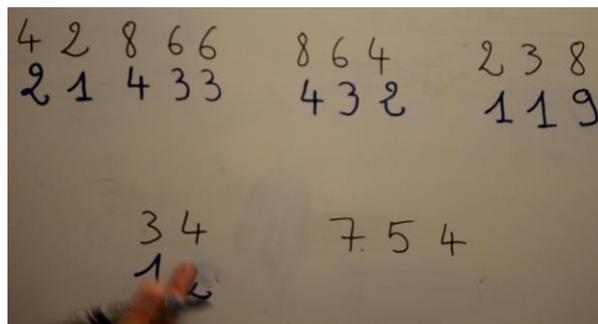


Figure 3. Arrêt sur image – Vidéo lançant la séance « division par deux »⁹¹

⁸⁹ Quelques éléments historiques pouvaient être communiqués aux élèves en fin de travail.

⁹⁰ La vidéo de 1'30 montre toutes les étapes du calcul de 93 par 52, à partir d'un tableau vide. La disposition des deux facteurs et le tracé de la grille sont donc présentés comme des étapes de l'algorithme, avant toute phase de calcul (multiplications puis additions).

⁹¹ Les 5 nombres en noir sont présents au départ. Le calculateur les divise par deux selon la technique d'al-Khwarizmi, le résultat est placé en bleu, en dessous. La vidéo de 1'20 est ici arrêtée au moment où le calculateur

Enfin, les deux travaux sont motivés par une interrogation de portée générale sur la place de l'enseignement du calcul. Comme le soulignait en 2003 la « commission Kahane » :

(...) dans la période récente, le développement des technologies informatiques a profondément modifié les pratiques associées au calcul, tant les pratiques quotidiennes et sociales que les pratiques scientifiques. La plupart des algorithmes de calcul dont l'apprentissage occupait un temps important de la scolarité, notamment dans l'enseignement obligatoire, sont aujourd'hui implantés dans les calculatrices les plus simples. En revanche, le calcul pose des questions nouvelles liées notamment (...) à la performance des algorithmes utilisés au-delà de leur seule effectivité..., des questions qui n'étaient pas des enjeux de l'enseignement jusqu'ici. La puissance de calcul des nouveaux outils modifie aussi profondément l'économie du calcul et pose, dans des termes renouvelés, celle de la gestion des rapports entre calcul et raisonnement, en favorisant explorations, simulations, expérimentations. (cité dans (Charnay, 2007, p. 204))

b. Outils d'analyse

La nature même du questionnement place ces travaux à l'intersection de deux thèmes de recherche en didactique : celui portant sur la maîtrise du principe de la numération décimale en fin d'école primaire, et celui portant sur la justification avant l'enseignement de la démonstration et la mise à disposition de systèmes sémiotiques permettant un traitement uniforme et général (ici, le calcul littéral).

Pour ce qui est de la mise en fonctionnement par les élèves de « connaissances⁹² » relatives à la numération décimale, nous avons combiné des résultats stabilisés sur l'enseignement de la numération décimale avec la notion de « conception » proposée par Nicolas Balacheff (2010, 2022) (Balacheff & Pedemonte, 2016), dans le prolongement du travail de Gérard Vergnaud sur les champs conceptuels. Une « conception » modélise pour le chercheur les modalités d'engagement d'un élève (générique ou particulier) dans une classe de situations. Du point de vue des mathématiques, cet engagement peut être efficace ou non (s'il vise la résolution d'un problème), et reposer sur des croyances valides ou non. Il est modélisé par quatre éléments : une classe de situations de référence problématiques⁹³, domaine d'application dans lequel un concept prend sens et permet d'agir ; un système de représentation (aspect sémiotique) ; un ensemble d'opérateurs (actions modifiant l'état du milieu) ; enfin, une structure de contrôle, comprenant des outils d'évaluation de l'état du milieu (en particulier pour reconnaître si le problème est résolu ou non), des outils de décision quant au choix de la prochaine action, des outils de contrôle de la bonne mise en œuvre d'un opérateur⁹⁴. Cette structure de contrôle recouvre en particulier des théorèmes-en-acte, propositions tenues pour vraies par le sujet⁹⁵.

Le travail sur la division par deux (Chorlay, 2021) a pu s'appuyer sur l'identification de quatre conceptions (C1 à C4) de la numération décimale des entiers naturels⁹⁶. Les conceptions C3 et C4, toutes deux mathématiquement correctes, jouent ici un rôle particulièrement important :

efface le 2 (issue de la division de 4) pour le remplacer par 7 (2+5) du fait de la retenue de 5 unités issue de la division par deux de la dizaine surnuméraire (3 dizaines est décomposé en 2d+1d, sa moitié est donc 1d plus la moitié de 1d, elle-même égale à 5u).

⁹² Le terme entre guillemet ne préjuge pas ici de la validité mathématique.

⁹³ On peut parler d'une classe de problèmes.

⁹⁴ On distingue ainsi : contrôles référents / contrôles d'instrumentation / contrôles locaux.

⁹⁵ Ces "propositions" peuvent relever des hypothèses de modélisation du chercheur et non du discours des acteurs. Elles aussi sont relatives à une classe de situations (dépendance au contexte) et peuvent être mathématiquement incorrectes (Balacheff, 2022).

⁹⁶ La littérature sur ce thème est immense. Nous nous sommes particulièrement appuyés sur :

HOUEMENT, C., & TEMPIER, F. (2019). Understanding place value with numeration units. *ZDM – Mathematics Education*, 51(1), 25–37.

THANHEISER, E. (2012). Understanding multidigit whole numbers: The role of knowledge components, connections, and contexts in understanding regrouping 3+-digit numbers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31, 220–234.

- Dans C3, le principe positionnel permet d'exprimer la valeur des différents chiffres par rapport à l'unité.
- C4 englobe C3, puisqu'elle recouvre l'usage tactiquement pertinent des relations multiplicatives entre toutes les unités de numération. Selon le contexte, 5 centaines peut être vu comme 500 unités (comme dans C3), mais aussi 50 dizaines, voire 0,5 milliers.

L'étude de la mobilisation en situation de « connaissances » est complétée par la distinction entre connaissances *mobilisables* par l'élève lorsqu'elle est explicitement mentionnée (dans la consigne, dans les interventions de l'enseignant) et les connaissances *disponibles* pour un élève capable de les identifier sans indications comme des outils pertinents dans une situation donnée (Hache & Robert, 2013). Contrairement aux conceptions, la distinction entre connaissances disponibles ou seulement mobilisables est en général réservée aux contenus mathématiquement corrects. Il n'y aura pas de confusion ici puisque nous travaillerons essentiellement avec les conceptions C3 et C4. Dans l'étude, l'analyse didactique a porté sur les productions des élèves lors de la phase de travail autonome sur des tâches de description ou de justification de l'algorithme, dans un contexte où aucune information n'était apportée par l'enseignant. Ce sont donc les connaissances mobilisables qui sont donc étudiées. Les phases de mise en commun ont aussi été captées en vidéo et donnent des aperçus sur les connaissances disponibles, mais elles ne sont pas au cœur de l'analyse.

Les connaissances sur la numération positionnelle fournissent des ressources pour les tâches de justification, mais, dans ce contexte, la nature et les possibilités d'engagement dans une forme de justification demandent à être précisés. Le contexte ne permettait pas aux élèves de s'engager dans une démarche de démonstration (*mathematical proof*) : plusieurs éléments caractéristiques généraux ne sont pas même mobilisables au cycle 3 (en particulier : une théorie de référence⁹⁷ justifiant la commutation de l'opération « moitié » avec l'addition ; des schémas de preuve⁹⁸) ; pas plus que ne sont mobilisables les ressources sémiotiques permettant de désigner et manipuler des décompositions décimales d'entiers quelconques. Ces points ont été contrôlés en comparant avec une démonstration de la correction de l'algorithme proposée par un chercheur en informatique théorique. Au-delà des outils pour démontrer, la situation ne motivait pas une telle démarche. En reprenant ici le triplet *convince yourself / a friend / a sceptic*, la production de démonstration prend son sens dans un cadre dialogique où un sceptique systématique mais rationnel demande qu'on rende raison de tout ce sur quoi il peut soulever un doute ou une objection. Dans la situation de classe mise en place, aucun acteur ne joue ce rôle de sceptique. Par ailleurs, aucun scepticisme n'habite les élèves : après vérification sur quelques exemples, le professeur institutionnalise la correction de l'algorithme, dont les élèves sont déjà convaincus. En revanche, le mécanisme des « retenues de 5 vers la droite » suscite la curiosité des élèves, non pas parce qu'ils doutent de sa validité, mais bien parce qu'ils n'en doutent pas : son efficacité n'a d'égale que son mystère ! L'algorithme s'avère « *question-generating* ». La demande de justification est lue moins comme une demande de validation de l'énoncé que comme une demande d'explication sur l'origine et l'efficacité de cette retenue. Désir de comprendre qui est peut-être une forme du « désir de savoir », et non, ici, « désir de certitude » (Balacheff, 1987, pp. 154–155)

Cette étude nous place donc sur le terrain des formes possibles d'engagement dans la justification avant – ou en dehors – de la démonstration. Là où la démonstration vise la certification de la validité d'un énoncé (sur fond de situation de communication agonistique), l'*explication* vise à *rendre raison* de cette

TEMPIER, F. (2016). Composer et décomposer : un révélateur de la compréhension de la numération chez les élèves. *Grand N*, 98, 67–90.

THANHEISER, E. (2012). Understanding multidigit whole numbers: The role of knowledge components, connections, and contexts in understanding regrouping 3+-digit numbers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31, 220–234.

⁹⁷ Nous suivons sur ce point la position théorique de Maria-Alessandra Mariotti (par exemple (Balacheff & Mariotti, 2008)).

⁹⁸ La structure itérative de l'algorithme appelle une preuve par récurrence.

validité, pour soi ou pour un partenaire qui collabore (*yourself / a friend*)⁹⁹. Là où la démonstration certifie la validité d'un énoncé en le rattachement – par un enchaînement déductif – à une théorie de référence dont les éléments sont explicites, l'explication vise à rattacher l'énoncé-cible à du *déjà-là*. Ce rattachement ne prend pas nécessairement les formes de la déduction ; le *déjà-là* peut relever de la conception (possiblement erronée, implicite, non formulable en toute généralité etc.). On doit bien entendu positionner le questionnement de cette étude par rapport à la taxonomie des modes de justification proposée par Balacheff (1987). Notons cependant cette dernière vise à décrire les démarches de justification, alors que les élèves lisent ici la tâche différemment : expliquer d'où viennent les « retenue de 5 vers la droite », cette explication embarquant (implicitement) une justification de la validité de cette manœuvre. En ce sens, les modalités empiriques de justification (empirisme naïf et expérience cruciale) ne sont pas ici pertinentes : la conviction des élèves en validité de l'algorithme est déjà acquise, et aucun exemple ne rend raison de la retenue (puisque'il faut la rattacher à autre chose qu'elle). Puisque la démonstration est hors de propos, l'analyse *a priori* suggère des engagements possibles des élèves selon les modalités de l'exemple à valeur générique et de l'expérience de pensée, qui diffèrent principalement selon les ressources sémiotiques mobilisées pour dire le général¹⁰⁰.

L'analyse *a priori* montre que la validité de l'algorithme repose essentiellement sur quatre propriétés¹⁰¹ : le fait que le codage chiffré renvoie à une décomposition additive par rapport à des unités de numération (unités, dizaines, etc.), la distributivité de l'opérateur de médiation sur l'addition, l'invariant selon laquelle la moitié d'une unité de numération quelconque est égale à 5 unités du rang immédiatement inférieur, le fait que tout entier impair peut se décomposer comme « 1 + un entier pair ». Les possibilités offertes à des élèves de cycle 3 pour faire référence à l'une quelconque de ces propriétés sont détaillées dans (Chorlay, 2021). Cette analyse *a priori* s'appuie, à titre heuristique, sur les travaux menés en particulier par Chemla sur la manière dont « *the text for an algorithm can refer to reasons for its correctness* » (Chemla, 2010, p. 255). Nous entendons ici « texte » au sens général de production graphique. Dans le cas d'un algorithme posé, la disposition des éléments ou le choix des éléments à montrer ou cacher peuvent témoigner d'un souci de l'explication, d'une volonté d'exhiber un lien rattachant à un *déjà-là* connu et accepté. Entre autres stratégies de justification d'un algorithme identifiées par Chemla, certaines nous semblent *a priori* pouvoir éclairer les actions des élèves : justification par plongement sémantique (un contexte d'interprétation donne à chaque étape un sens reconnu comme valide dans le contexte), mais aussi justification non nécessairement sémantique, par exemple lorsqu'un algorithme à justifier est montré comme équivalent à un autre (justifié par ailleurs). L'équivalence de deux algorithmes peut-elle-même être justifiée soit de manière sémantique (par exemple, en montrant qu'ils fournissent tous deux *la* solution à un même problème¹⁰²), soit de manière non-sémantique, par exemple en montrant que l'un est une version *repliée* d'un algorithme plus *déplié*

⁹⁹ Ce n'est pas le lieu d'un développement général sur les fonctions possibles de la démonstration (par exemple : « *Certainty, insight and understanding, unification and systematization, communication of knowledge, discovery* » (De Villiers, 1990) ; c'est qui soulignons), et sur l'étude des caractéristiques qui font que certaines démonstrations sont considérées comme explicatives et d'autres moins.

¹⁰⁰ « L'exemple générique consiste en l'explicitation des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformation sur un objet présent non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe d'individus. La formulation dégage les propriétés caractéristiques et les structures d'une famille en restant attachée au nom propre et à l'exhibition de l'un de ses représentants. (...) L'expérience mentale invoque l'action en l'intériorisant et en la détachant de sa réalisation sur un représentant particulier. Elle reste marquée par la temporalité anecdotique, mais les opérations et les relations fondatrices de la preuve sont désignées autrement que par le résultat de leur mise en œuvre. » (Balacheff, 1987, pp. 164–165)

¹⁰¹ On peut donner des formulations différentes des propriétés, et ce n'est probablement pas sans impact didactique. Nous ne pouvons en rendre compte dans cette note et renvoyons à (Chorlay, 2021).

¹⁰² C'est le cas dans la 2^{ème} justification que Liu Hui donne, dans son commentaire aux *Neuf chapitres sur les procédures mathématiques*, de l'algorithme de multiplication des fractions (Chorlay, 2017a).

(i.e. comportant plus d'étapes) lui-même justifié par ailleurs. On retrouve au passage l'étymologie du terme « explication » : dépliement.

c. Résultats

Le travail a été mené en classe à cinq occasions : deux fois en 6^{ème} (grade 6), deux fois en CM2 (grade 5), et une fois (selon un protocole légèrement différent) en fin de CE2 (grade 3). Le travail étant exploratoire, le traitement des données n'a pas été quantitatif. Il a visé à repérer et caractériser les modes de justifications observables dans la population, sur la base de l'analyse *a priori*. L'analyse des productions écrites a été croisée avec les éléments apportés lors des échanges oraux des phases collectives en classe, ainsi que lors d'une brève série d'entretiens post-séance avec un échantillon d'élèves. Nous rendons compte ici de la gamme des productions sans pouvoir reproduire les analyses justifiant les classements.

Deux productions relèvent de l'expérience de pensée, s'appuyant sur la conception C4. La production de l'élève K est la plus complète ; elle est aussi remarquablement proche du texte d'al-Khwarizmi :

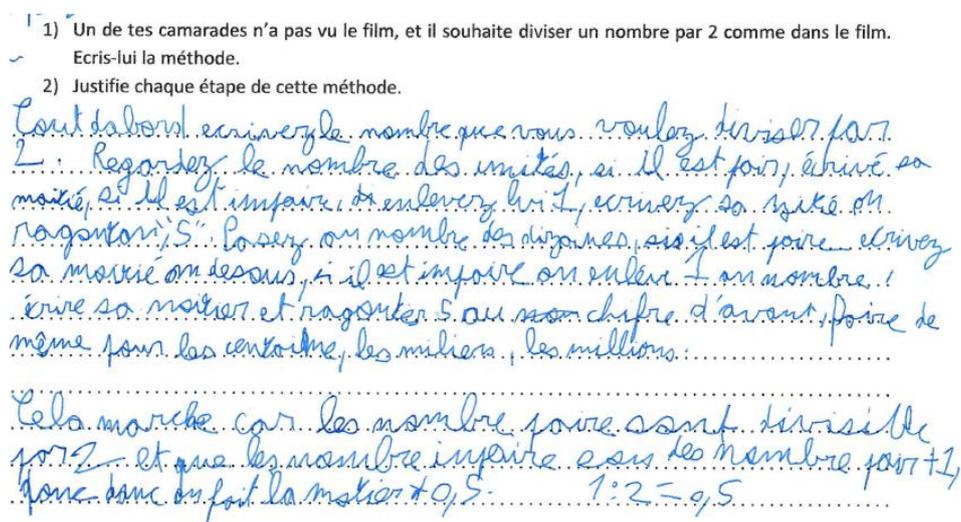


Figure 4. Copie de K (6^{ème})

Une autre justification reposant sur la conception C4 passe par un dépliement de l'algorithme. L'élève procède au niveau de généralité caractérisant l'expérience de pensée ; on pourrait aussi le présenter sur un exemple à valeur générique, plusieurs dispositions graphiques pouvant d'ailleurs rendre compte de l'étape supplémentaire de report à droite de dizaines (préalables la médiation, ici de 9054) :

$$\begin{array}{r}
 8 \quad +10 \quad 4 \quad +10 \\
 \cancel{9} \quad 0 \quad \cancel{5} \quad 4 \\
 4 \quad 5 \quad 2 \quad 7
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 9 \quad 0 \quad 5 \quad 4 \\
 8 \quad 10 \quad 4 \quad 14 \\
 4 \quad 5 \quad 2 \quad 7
 \end{array}$$

Figure 5. Nos variantes graphiques de la justification rhétorique de M¹⁰³ (6^{ème}).

¹⁰³ L'élève M propose une explication dans le registre rhétorique : « Si le nombre qu'on a choisi comporte (des) nombre(s), impair(s), il faut rajouter une dizaine au nombre d'avant qui deviendra une retenue au nombre impaire, quand on divise par 2. » Un bref entretien avec le chercheur a permis de confirmer l'interprétation de ce texte. On notera la proximité avec un algorithme connu, celui de la soustraction par « emprunt » au rang immédiatement supérieur.

Plus courantes sont les justifications par exemple à valeur générique et s'appuyant sur une conception C3. Le rôle de la distributivité de l'opérateur de médiation est plus visible dans les dispositions en ligne (figure 6), plus implicite dans les dispositions verticales (figure 7) :

Cette méthode est juste car décomposer chacun des chiffres du nombre revient à décomposer le nombre.

$(8 : 2) + (2 : 2) + (6 : 2) \approx (800 : 2) + (20 : 2) + (6 : 2)$. Et pour le 5 c'est comme si on soulevait 10 et comme on divise par 2 $10 : 2 = 5$.

Figure 6. Distributivité en acte de la médiation sur l'addition¹⁰⁴ (6^{ème})

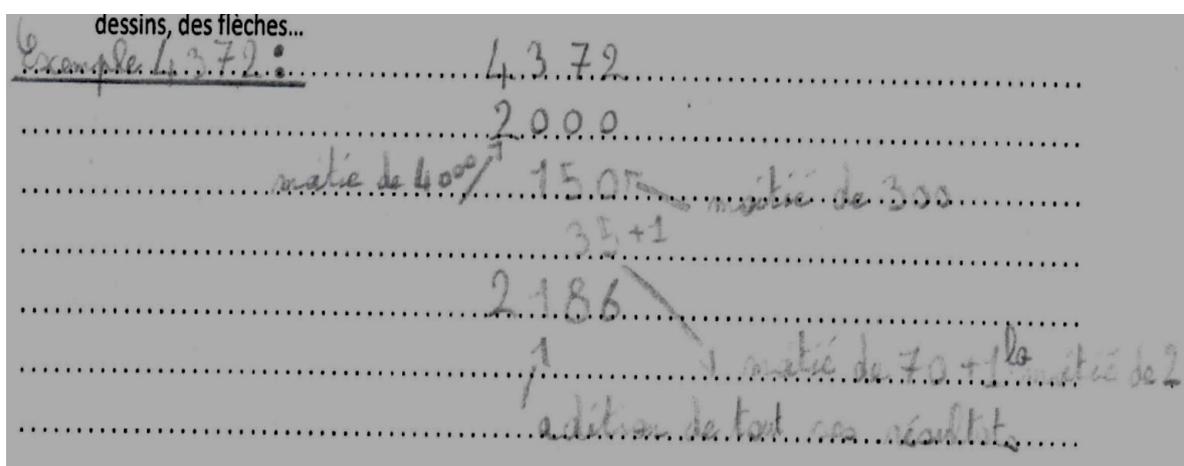


Figure 7. Médiation de 4000, de 300, de 70 et de 2. (6^{ème})

L'algorithme indiqué par les élèves dans ces copies est certes correct, mais son équivalence à l'algorithme à expliquer n'est pas établie explicitement.

Cette équivalence est en revanche explicitée dans un troisième type de réponse, assez courant, qui déplie l'algorithme en faisant apparaître des circulations de nombres décimaux (non entiers) sous-jacentes aux circulations d'entiers visibles dans l'algorithme replié :

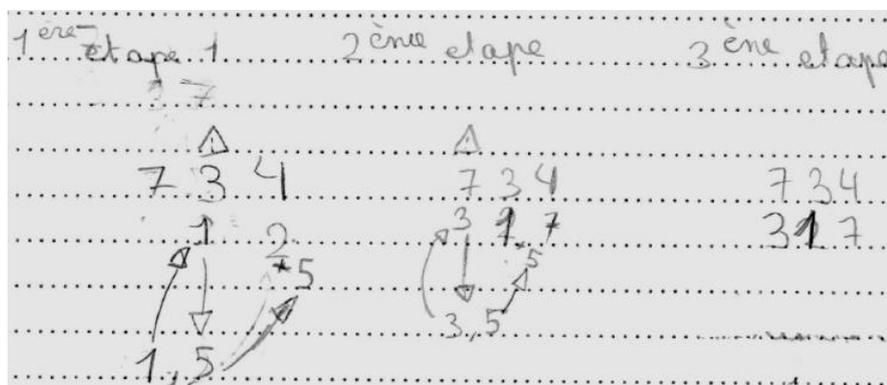


Figure 8. Dépliage dans D

¹⁰⁴ On notera que l'élève estime qu'il y a quelque chose à justifier même dans les cas sans retenues, comme pour 826.

Soulignons que la qualité de l'explication ne peut être déterminée à partir de la seule trace graphique (figure 8). Les échanges oraux avec les élèves ont montré que la circulation des chiffres « 5 » depuis les « 1,5 » et « 3,5 » vers les colonnes de droites n'étaient pas justifiables par beaucoup d'élèves, et ne semblaient pas nécessiter de justification : l'apparition de « 5 » par médiation, dans **D**, des entiers impairs à un chiffre, et leur présence « à droite » satisfait leur besoin de cohérence et d'explication. Pressés d'expliquer pourquoi, dans cette circulation des « 5 » d'une colonne à l'autre, la virgule disparaît, peu d'élèves mobilisent des changements d'unité (0,5 centaines c'est 5 dizaines) ou savent lire l'opérateur « $0,5 \times \dots$ » comme l'opérateur de médiation. Les chiffres – simples signes graphiques – circulent d'une manière cohérente sur le papier sans que des propriétés mathématiques soient mobilisables pour en rendre compte. Il semble même que les élèves pensent justifier la circulation des 5 en exerçant un contrôle (au sens de Balacheff) erroné. Lorsque l'enseignement leur soumet la proposition d'un dépliement correct mais inhabituel du type

$$\begin{array}{ccc} 7 & 3 & 4 \\ 3,5 & 1,5 & 2 \end{array}$$

il est rejeté comme incorrect ; l'opérateur « report des '5' vers la droite avec disparition de la virgule » est alors choisi pour remédier à l'inconfort face à des écritures en rupture avec des habitudes scolaires. Les limites de la conception C3 et des contrôles incorrects s'ajoutent à l'épuisement du désir de savoir.

Par sa nature exploratoire, ce travail vise à enrichir la gamme des outils de recherche sur ces questions (conceptions de la numération décimale, notion d'explication, modalités d'explication des algorithmes), à apporter des réponses partielles, à suggérer des pistes de recherche ou d'action. En particulier, les données analysées dans (Chorlay, 2021) peuvent servir de point de départ à des ingénieries didactiques visant le passage d'une conception C3 à une conception C4.

Un résultat central est que, dans certaines conditions, les élèves de cycle 3 peuvent regarder les algorithmes numériques comme des objets épistémiques et non seulement comme des objets technologiques, ouvrant ainsi un champ de recherche et d'action répondant aux suggestions de la commission Kahane. Le travail – plus modeste – sur la multiplication par jalousie (Chorlay et al., 2017) confirme ce point. L'analyse *a priori* avait conduit à choisir de dévoluer aux élèves non pas une tâche de justification, mais une tâche d'évaluation des qualités ou défauts d'algorithmes. Plus précisément, à la troisième séance, les élèves de CM2 maîtrisaient deux techniques de multiplication des entiers, celle qu'ils avaient apprise en CE1-CE2 et la technique qu'ils venaient de découvrir. Nous leur avons demandé s'ils préféraient l'une ou l'autre technique, et pourquoi. Nous confiions donc une tâche possédant deux niveaux : il s'agissait bien sûr de comparer des techniques opératoires ; il s'agissait aussi de déterminer des points de comparaison et des critères d'évaluation, tâche complexe et inhabituelle. Les élèves étaient ici motivés par le fait qu'ils préfèrent la technique par jalousie, et sont désireux de convaincre du bien-fondé de leur préférence. Nos données montrent que, à l'échelle d'une classe, tous les points de comparaison pertinents identifiés dans l'analyse *a priori* (et dans les travaux de Brousseau sur la question) peuvent être relevés par les élèves. En particulier, la multiplication par jalousie semble plus « sûre » au sens ou plusieurs aspects conduisant à des erreurs dans la technique usuelle ne s'y présentent pas (présence de retenus additives dans la phase multiplicative, zéros à « ajouter » lorsque le multiplicateur est à plusieurs chiffres, difficulté à identifier l'origine d'une erreur dans la trace écrite finale). Certains élèves s'engagent aussi dans des tâches de comparaison en complexité, soit évaluée en temps soit évaluée en nombre d'opérations élémentaires.

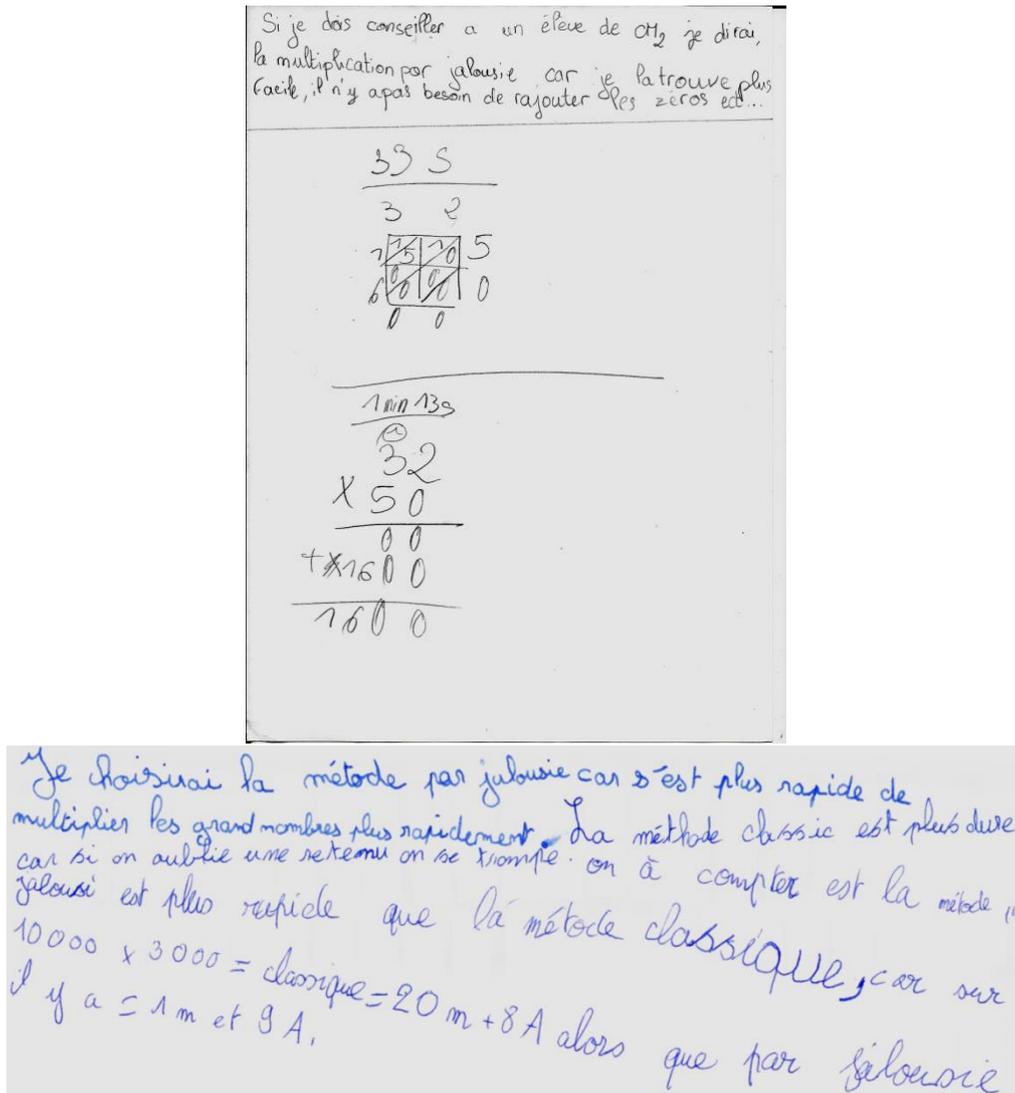


Figure 9. Comparaisons par chronométrage (haut) ou dénombrement des étapes¹⁰⁵ (bas).

2.1.2 Construction de définition : approche par différenciation conceptuelle

De même que le travail précédent pouvait s'appuyer sur un vaste ensemble de résultats stabilisés portant sur la numération décimale, de nombreux travaux portant sur l'enseignement de la notion de limite fournissent l'assise de l'article *A pathway to a student-worded definition of limits at the secondary-tertiary transition* (Chorlay, 2019a). Sur plus de quarante ans, ces travaux présentent un aspect cumulatif : les mêmes difficultés d'enseignement – nombreuses et d'origines multiples – sont repérées ; la gamme des tactiques d'intervention didactique est progressivement enrichie. Contrairement au travail exploratoire sur la justification des techniques opératoires, il s'agit bien ici d'une ingénierie didactique, conçue et analysée dans ce cadre. Plus spécifiquement, il s'agit d'une ingénierie didactique visant la formulation et la décision de validation d'une définition de la notion de « suite tendant vers $+\infty$ » dans des conditions d'enseignement ordinaires (classes de terminale scientifique en classe entière, séance de deux heures, sans travail spécifique en amont¹⁰⁶). La recherche a porté à la fois sur la conception de

¹⁰⁵ Il va sans dire que l'exemple $10\,000 \times 3\,000$ n'est ni bien choisi ni bien analysé.

¹⁰⁶ Ce travail se distingue donc fondamentalement de plusieurs travaux construisant des cheminements cognitifs étalés sur un temps long et sans visée d'adaptabilité en conditions ordinaires, en particulier :

l'ingénierie et sur l'analyse des pratiques enseignantes dans la conduite d'une situation à dimension adidactique (González-Martín et al., 2014). Nous rendons compte ici du premier aspect, réservant le second à la section consacrée à l'analyse des pratiques enseignantes (section 2.2).

a. Position du problème et choix didactiques macro

Notre objectif était d'amener un groupe d'élèves à la formulation puis à une décision collective de validation d'un des énoncés équivalents¹⁰⁷ caractérisant $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$:

Définition usuelle, forme implicative : $\forall M \in \mathbb{R} \exists n_M \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_M \Rightarrow u_n \geq M$

Définition usuelle mais non implicative : $\forall M \in \mathbb{R} \exists n_M \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \cap [n_M; +\infty[\quad u_n \geq M$

Définition fini/infini¹⁰⁸ : $\forall M \in \mathbb{R} \quad u_n \geq M$ sauf pour un nombre fini (ou nul) de valeurs de n

La situation d'enseignement est ordinaire, dans les conditions d'enseignement du lycée en France dans les deux années d'expérimentation (2016-17 et 2017-18) : des programmes d'enseignement dans lesquels l'objectif central est celui d'une familiarisation des élèves de Terminale scientifique avec une « notion intuitive de limite » (avec ses conjectures graphiques ou numériques, ses formulations métaphoriques dans le registre rhétorique) et d'une certaine maîtrise d'un corpus technique, celui de l'algèbre des limites (limites de suites de référence, opérations sur les limites, lien avec les comparaisons entre suites). Il est prescrit qu'une définition soit rencontrée par les élèves, et qu'elle soit utilisée pour démontrer quelques-unes des propriétés (par exemple : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$). La théorie anthropologique du didactique décrit la situation comme celle d'une articulation prescrite par les programmes entre des techniques et une technologie¹⁰⁹. Sur ce point, les conclusions d'une étude empirique menée en Espagne (Barbé et al., 2005) s'appliquent vraisemblablement à la France : ce discours technologique reste largement dans le *topos* de l'enseignant, et les praxéologies observées montrent plus un découplage qu'une articulation entre les niveaux technique et technologique.

Dans les quatre mises en œuvre de l'ingénierie (chaque année dans deux classes), aucun travail particulier n'avait été fait en amont de la séance destinée à faire formuler une définition : les élèves disposaient d'une certaine familiarité avec l'approche « intuitive » des limites et les techniques au programme (admises sans démonstration) ; leur maîtrise de la logique des prédicats relevait aussi de la familiarité avec les notions d'implication, de réciproque, de quantificateur universel et existentiel. En

Job, P. (2011). *Etude du rapport à la notion de définition comme obstacle épistémologique du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales/adidactique* [Thèse non publiée]. Université de Liège.

Swinyard, C. (2011). Reinventing the formal definition of limit: the case of Amy and Mike. *The Journal of Mathematical Behavior*, 30, 93–114.

Lecorre, T. (2016). *Des conditions de conception d'une ingénierie relative à la définition de la notion de limite : Élaboration d'un cadre basé sur un modèle de rationalité pour l'accès aux objets mathématiques complexes* [Thèse non publiée]. Université Grenoble Alpes.

¹⁰⁷ On peut bien entendu faire varier les formulations encore plus, sans doute avec un impact didactique (par exemple le fait d'indiquer la « dépendance » de n envers M par l'usage d'un indice). La question du mélange entre les registres rhétoriques et celui de la logique des prédicats serait à approfondir.

¹⁰⁸ Cette définition (sous une autre formulation) est étudiée dans (Roh & Lee, 2017).

¹⁰⁹ On peut analyser cette prescription dans plusieurs cadres : ménager un point de rencontre entre deux paradigmes de l'analyse, un point de rencontre entre *calculus* et *analysis*, entre une praxéologie de type 1 (modélisation) et de type 2 (analyse). Voir, en particulier :

Montoya-Delgado, E., & Vivier, L. (2016). Mathematical Working Spaces and Paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis, *ZDM – Mathematics Education*, 48(6), 739–754.

Schneider, M. (2008). Entre recherche et développement : quel choix de valeurs pour l'ingénierie curriculaire ? In J. Traglova, G. Aldon, G. Gheudet and Y. Matheron (Eds.), *Ressources pour l'enseignement des mathématiques : conception, usage, partage* (pp. 21–36). INRP.

particulier, rien ne les préparait à bien interpréter – encore moins à produire – des énoncés à quantificateurs enchâssés¹¹⁰.

Dans ces conditions, la revue de littérature permet de faire des hypothèses sur le *concept image*¹¹¹ des étudiants en amont de l'ingénierie. Retenons deux éléments. D'une part l'approche « intuitive » n'est pas congruente à la définition formelle. Dérivant de formulations rhétoriques simplificatrices et des modes de conjecture usuels, elle embarque un point de vue dynamique ; du point de vue cognitif la limite est ici un *procept* au sens de Tall (1991), saisie comme processus et comme objet/concept. Les définitions formelles, statiques, n'expriment pas directement cette sémantique de mouvement ou d'évolution, et peuvent donc ne pas satisfaire des attentes d'élèves. On peut identifier un point de non-congruence plus spécifique : la notion intuitive est *x-first* (le comportement – apparemment autonome – de la variable semble déterminer celui de la fonction¹¹²) alors que la définition formelle est *y-first* (les contraintes sur les valeurs de la fonction apparaissent d'abord, les conditions sur la variable leurs sont subordonnées)¹¹³. D'autre part, les études montrent toutes que le *concept image* comprend des théorèmes en acte erronés (*misconceptions*), en particulier ceux de la famille « réduction monotone » (Robert, 1982) (Davis & Vinner, 1986).

Ces résultats de recherche nous ont conduit à faire l'hypothèse que les étudiants partaient d'un *concept image* de « suite tendant vers $+\infty$ » dans lesquels trois notions mathématiques distinctes entretiennent des relations de proximité implicites :

1. Tendre vers $+\infty$
2. Ne pas être majorée
3. Être croissante (au moins à partir d'un certain rang)

Sur la base de cette hypothèse, la stratégie retenue pour l'ingénierie est d'amener les élèves à expliciter ces trois notions et leurs relations¹¹⁴. Soulignons plusieurs facettes de ce choix de stratégie (choix macro).

Premièrement, cette stratégie s'appuie sur nos travaux sur l'histoire et l'épistémologie de l'analyse, qui montrent l'importance des processus de *différenciation conceptuelle* dans l'apparition de concepts. Dans certaines circonstances, des acteurs sont conduits à distinguer deux notions là où leurs prédécesseurs n'en voyaient qu'une. Le phénomène peut s'analyser en termes de raisons et de ressources. Les raisons de différencier peuvent relever du désir de savoir mieux sans nécessairement corriger des erreurs¹¹⁵, ou de l'impérieuse nécessité d'une analyse critique de la preuve d'un « résultat » auquel a été opposé un contre-exemple¹¹⁶. Du côté des ressources, on retient en particulier l'usage progressive d'un symbolisme

¹¹⁰ Sur ces difficultés, voir par exemple : Durand-Guerrier, V., & Arsac, G. (2005). An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule. *Educational Studies in Mathematics*, 60(2), 149–172.

¹¹¹ “We shall use the term *concept image* to describe the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. (...) it needs not be coherent (...).” (Cité dans (Tall 1991, p.7)). On pourrait bien sûr chercher à affiner l'analyse dans un cadre théorique à grain plus fin, comme celui des conceptions.

¹¹² Reformulons : La variable tend vers l'infini (évolution autonome), ce qui a un impact sur la fonction ou la suite.

¹¹³ La distinction entre « *x-first perspective* » et « *y-first perspective* » est courante dans la littérature en langue Anglaise sur la question, et recoupe la distinction entre formulations co-variantes et contra-variantes de Robert et Robinet. Voir (Chorlay, 2019a.)

¹¹⁴ En l'occurrence : (3) n'est ni nécessaire ni suffisante pour (1), (1) \Rightarrow (2) mais la réciproque est fautive. Nous ne visons pas, dans l'unique séance de l'ingénierie, à formuler et/ou valider l'implication (2) et (3) \Rightarrow (1).

¹¹⁵ Notre travail sur l'évolution des usages du terme « voisinage » dans le dernier tiers du 19^{ème} siècle peut illustrer ce phénomène (Chorlay, 2007a, chap.6).

¹¹⁶ Voir plus haut le cas de la continue différentiabilité.

relevant du calcul des prédicats ou de formes rhétoriques fonctionnellement équivalentes¹¹⁷. La liste des concepts d'analyse ayant ainsi été précisés est longue, et bien illustrée par la distinction dans les cours de Weierstrass entre « continuité en un point », « continuité sur un domaine (en chaque point de ce dernier) » et « continuité uniforme sur un domaine » (Weierstrass, 1988a, 1988b). L'ingénierie va chercher à créer un milieu susceptible de reproduire ces raisons (désir de savoir mieux, de réagir à des contre-exemples) et certaines ressources (calcul des prédicats, support graphique de l' ε -strip¹¹⁸).

Du point de vue théorique, cette approche par différenciation conceptuelle est à articuler à celles proposées dans deux autres familles de travaux. D'une part, elle diffère de la stratégie consistant à utiliser le « levier méta » pour l'enseignement d'une notion FUG (Formalisatrice, Unificatrice, Généralisatrice) (Dorier, 2000a). Nous détaillons dans (Chorlay, 2019a) les arguments justifiant ce choix, en particulier le fait que le caractère FUG de la notion de limite nous semble décisif dans le supérieur mais peu porteur au Lycée. D'autre part, la stratégie de différenciation conceptuelle vient s'ajouter à la gamme des stratégies mises en avant dans les travaux de Cécile Ouvrier-Bufferet sur les situations de construction de définition. Nous discutons aussi dans (Chorlay, 2019a) pourquoi notre ingénierie combine différenciation conceptuelle et des tâches de tri (visant à faire expliciter une définition comme critère de tri) mais n'intègre pas des tâches d'analyse de preuve visant à la formulation d'une *proof-generated concept* (Lakatos, 1976).

Deuxièmement, l'ingénierie porte bien sur le triplet de notions (1. limite $+\infty$, 2. non-majoration, 3. croissance). La formulation et la décision de validation d'une définition de la limite $+\infty$ est une facette d'un travail plus général d'explicitation conceptuelle – des trois concepts et de leurs relations. C'est donc l'ensemble du *concept image* que l'on cherche à faire évoluer dans le sens d'une conceptualisation explicite et correcte. Les conceptions erronées liées aux confusions entre notions sont donc regardées non seulement comme des erreurs à combattre, mais des points d'appui pour la construction d'un cheminement socio-cognitif (création d'un déséquilibre socio-cognitif, constitution d'un milieu antagoniste).

Troisièmement, le lien entre « non-majoration » (propriété 2) et « limite $+\infty$ » (propriété 1) joue un rôle central. Avec trois quantificateurs enchâssés, la formulation de (1) ne nous semble pas accessible dans les conditions d'enseignement décrites plus haut. Par contre, les définitions formelles de « majoré » et « non majoré » nous le semblent. Dans l'ingénierie, nous introduisons dans le milieu définition formelle de « non majoré »

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_M \in \mathbb{N} \quad u_{n_M} \geq M$$

comme ressource à partir de laquelle « bricoler » une définition formelle de la limite infinie. Cette définition de « non-majoré » permet non seulement de passer dans le registre du calcul des prédicats, mais aussi de partir d'une formulation *y-first*, là où de nombreux travaux ont souligné l'extrême difficulté à susciter un changement de point de vue depuis *x-first* vers *y-first*¹¹⁹.

b. Aperçu de l'ingénierie

La déclinaison des choix macro en une série de choix micro est détaillée dans (Chorlay, 2019a). Nous renvoyons aussi à cet article pour les références aux autres ingénieries ou expériences d'enseignement

¹¹⁷ Soulignons que Weierstrass et ses élèves n'utilisent pas de symbolisme, c'est dans le registre rhétorique qu'ils travaillent. Cet usage de la langue naturelle ne relève bien entendu pas d'un usage ordinaire de la langue.

¹¹⁸ Nous reprenons ici le terme utilisé dans (Roh & Lee, 2017) pour désigner la représentation graphique des premiers termes de la suite dans un repère cartésien dans lequel est aussi représentée une bande « horizontale », centrée sur une valeur libre et de largeur libre 2ε . De nombreux autres travaux de recherche ont utilisé cet outil, qui est d'ailleurs largement repris dans de nombreux manuels actuels en Lycée.

¹¹⁹ On pense en particulier à (Swinyard, 2011). Comme chez Robert ou Roh et Lee, nous utilisons aussi l' ε -strip pour forcer le point de vue *y-first*.

dont nous reprenons des éléments ; en particulier : tâche de tri, ε -strip, tâche d'évaluation de candidats-définitions, débat scientifique autour d'affirmations reflétant des conceptions erronées. Nous n'indiquons ici que les grandes phases de la séance de 2 heures, en ne détaillant les motivations des choix micro que pour la première phase.

Phase 1 : Tâche de tri – élèves travaillant en autonomie en binômes puis mise en commun – calculatrice graphique autorisée.

Parmi les suites définies ci-dessous, quelles sont celles dont vous diriez qu'elles tendent vers $+\infty$?

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$\begin{array}{lll}
 a_n = \frac{n}{100} - 1000 & b_n = 10000 - 1000 \times \left(\frac{9}{10}\right)^n & c_n = \sqrt{\sqrt{n}} \\
 d_n = (-1)^n \times n & e_n = 10 \times (-1)^n + n & f_n = ((-1)^n + 1) \times n \\
 g_n = ((-1)^n + 2) \times n & h_n = 1000n - \frac{n^2}{1000} & i_n = \left| \frac{1000}{\cos(n)} \right|
 \end{array}$$

Rangez ces suites dans le tableau suivant ; lorsque vous rangez une suite dans la colonne du milieu, notez la raison pour laquelle vous le faites.

Je pense que la suite tend vers $+\infty$	Je ne sais pas	Je pense que la suite ne tend pas vers $+\infty$

Figure 10. Tâche de tri de suites selon le critère « tend vers $+\infty$ »

Cette phase a deux objectifs. Premièrement, familiariser les élèves avec un petit nombre de suites qui vont constituer une partie essentielle du milieu. A partir de la phase 2, la tâche sera de formuler une définition pour laquelle les suites a , c , e et g sont des *exemples* des suites qui tendent vers $+\infty$ (quoique ni e ni g ne soient croissantes au voisinage de $+\infty$), et les suites b , d , f des *non-exemples* de suites tendant vers $+\infty$ (quoique de b soit strictement croissante, et que ni d ni f ne soient majorées). Deuxième objectif, amener les élèves à formuler le besoin d'une définition pour trancher une incertitude quant au bon classement de certaines suites ; incertitude à l'origine d'un dissensus dans la classe, lors du moment de mise en commun en fin de phase 1.

Nous identifions donc comme levier de problématisation la question de l'unicité de la limite et faisons l'hypothèse que, dans les conditions d'enseignement données, des élèves souhaiteront défendre le point de vue selon lequel les suites d et f tendent vers l'infini ; certes pas *seulement* vers l'infini, d tendant *aussi* vers $-\infty$, et f *aussi* vers 0. La connaissance de l'histoire des mathématiques contribue à l'identification de ce levier de problématisation. L'unicité de la limite n'a pas toujours été regardée comme nécessaire. Ainsi, Cauchy, pour qui la notion de limite joue indéniablement un rôle unificateur et généralisateur (Chorlay, 2016a), s'appuie sur une notion de limite pour laquelle, par exemple¹²⁰ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \pm\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x = [-1, 1].$$

Au cours du 19^{ème} siècle, la différenciation conceptuelle entre limite et valeur d'adhérence accompagne le choix d'une définition de limite garantissant l'unicité, sur fond d'une préférence progressive pour une définition de fonction excluant la multivocité. Entendons-nous bien : Cauchy ne se trompe pas, il fait un choix différent de celui qui se stabilisera au tournant du 20^{ème} siècle. Cette excursion historique montre non seulement l'origine du levier de problématisation, mais détermine aussi un choix micro dans

¹²⁰ Cauchy, A.-L. (1989). *Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique, Première partie : Analyse Algébrique* (réimpression de l'édition originale de 1821). Gabay. p.26. Notations modernisées.

l'ingénierie. Le fait que la définition visée dans l'ingénierie implique l'unicité de la limite, et fasse donc des suites d et f des non-exemples de suites tendant vers $+\infty$, ne résulte pas d'une nécessité mathématique mais d'un choix des mathématiciens. Elle ne peut donc, par principe, émerger de l'interaction adidactique des élèves avec le milieu ; dissensus oui, et non contradiction (Balacheff, 1987, p. 149). C'est l'enseignant qui, en fin de phase 1, impose cette condition en disant qu'elle correspond aux attentes des mathématiciens et des programmes d'enseignement.

Phase 2 : Les élèves ont 5 minutes, par binôme, pour proposer une définition générale de la notion de suite tendant vers $+\infty$ satisfaisant aux conditions explicitées en fin de phase 1 (unicité, répartition attendue en exemples et non-exemples). Nous ne faisons bien entendu pas l'hypothèse que quoi que ce soit d'approchant la définition visée apparaisse dans cette phase. Les candidat-définitions vont enrichir le milieu pour les phases suivantes.

Phase 3 : Une sélection de candidats-définitions est projetée en vue d'un débat scientifique collectif. Chacune d'entre elles fait l'objet d'un débat en vue d'une décision de validation¹²¹. Nous faisons l'hypothèse que les élèves ont les ressources (connaissances disponibles ou mobilisables, *feedback* du milieu) pour rejeter les candidats-définitions avec des arguments pertinents. Ce processus doit amener à expliciter les liens entre les propriétés 1, 2 et 3.

Phase 4 : La phase 3 doit conduire à reconnaître que « non majoré » est une condition nécessaire mais non suffisante pour « tend vers $+\infty$ ». Partant de la définition formelle de « non majorée », la tâche confiée aux élèves est de la modifier pour atteindre une définition formelle de « tend vers $+\infty$ ».

c. Aperçu des résultats

Les données (enregistrements audios, traces écrites, photographies du tableau) ont été recueillies à quatre reprises.

La phase 1 conduit de manière stable au dissensus attendu. Il subsiste même après des échanges d'arguments entre défenseurs des deux points de vue (d'une suite qui semble tendre vers $+\infty$ et autre chose, dit-on qu'elle tend vers $+\infty$?), ainsi que le confirment des phases de vote. Les élèves identifient aussi bien l'origine du dissensus : il ne réside pas dans une mauvaise compréhension du comportement de telle ou telle suite, mais bien dans le manque d'un critère de tri non ambiguë et consensuel ; il y a une lacune dans le savoir jusqu'ici institutionnalisé. La reconnaissance de la nécessité d'un critère de tri n'est cependant pas toujours formulée comme une demande de « définition ».

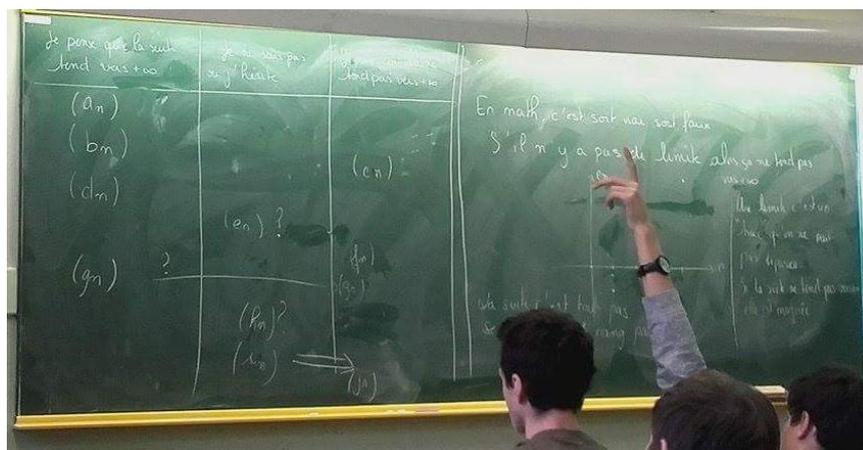


Figure 11. Débat autour du tri des suites.

¹²¹ Nous nous inscrivons ici dans la classe des situations de *décision* proposée par Balacheff (1987, pp. 152 et suiv.)

La phase 2 conduit à des propositions reflétant bien les ressources disponibles et la modélisation du *concept image* des étudiants de l'analyse *a priori*. La phase 3 peut donc être lancée avec une sélection de candidats-définitions issue du travail des élèves, par exemple :

① Pour qu'une suite tende vers $+\infty$, il faut que $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} > U_n$.

② La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si, et seulement si pour tout entier naturel n , (u_n) est croissante et non majorée.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \geq u_n$ et (u_n) non majorée

③ La suite (u_n) tend vers $+\infty$ ~~si quand n tend vers $+\infty$ u_n~~ quand elle n'est pas majorée.

④ suite (u_n) tend vers $+\infty$:
suite croît en se rapprochant de plus en plus de $+\infty$ mais
→ jamais s'atteint.

⑤ Une suite (u_n) qui tend vers $+\infty$ est une suite dont les termes sont croissants de manière à ce qu'on ne puisse déterminer le dernier terme de cette suite

Figure 12. Candidats-définitions pour « $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ »

La phase 3 se déroule conformément à l'analyse *a priori*. Les suites rencontrées en phase 1 sont bien utilisées pour invalider les candidats ne conduisant pas au tri visé entre exemples et non-exemples. Les relations correctes entre les propriétés 1, 2 et 3 sont explicitées (ainsi que l'implication « 2 et 3 \Rightarrow 1 »). On voit aussi les élèves s'engager dans une nouvelle gamme d'actions : reformulation et conversions entre registres (entre registre rhétorique et calcul des prédicats) ; affaiblissement de conditions qui apparaissent comme trop fortes (par exemple : croissance \rightarrow croissance à partir d'un certain rang) ; tactiques identifiées par Lakatos, telles que l'« exclusion de monstre » (*monster barring*), consistant en l'ajout d'une clause restrictive à un candidat-définition permettant d'exclure un non-exemple spécifique¹²².

La phase 4 s'est déroulée de manière proche sur les quatre expérimentations. Elle a toujours conduit à la formulation et à la décision de validation d'une définition mathématiquement correcte (mais souvent non usuelle) de la limite $+\infty$. On peut le voir dans le *verbatim* suivant. Il commence lorsqu'il est acquis – dans le débat – que « non majoré » (écrit au tableau dans le registre du calcul des prédicats) est une condition nécessaire mais non suffisante pour « tend vers $+\infty$ ». S'appuyant sur le registre graphique,

¹²² Par exemple : on cherche une définition de la limite $+\infty$ faisant de la suite de terme général $(-1)^n \times n$ un non-exemple. Elle vérifie pourtant la condition nécessaire « non majorée ». Des élèves proposent de l'exclure en avançant le candidat-définition « non majorée mais minorée » (*monster barring*). Le milieu offre des ressources pour invalider ce nouveau candidat, grâce à la suite de terme général $(1 + (-1)^n) \times n$.

les élèves formulent dans le registre rhétorique l'idée selon laquelle la suite doit en outre « rester au-dessus » de la valeur seuil quantifiée universellement (pour éliminer les non-exemples *d* et *f*) :

Ens. : à « rester au-dessus ». Donc qu'est-ce qu'il faut changer dans cette phrase ?

Elève 1 : monotone ?

Elève 2 : strictement croissante

Ens. : non, on a dit que la monotonie, ce n'était pas une condition pour notre définition. Comment est-ce que vous pouvez le traduire : « il faut qu'elle reste au-dessus » ? Allez, je suis sûr que tout le monde peut le faire. ... Maxime

Maxime : $u(n+1)$ supérieur à M ... quel que soit

Ens. : alors attend, écris-moi une phrase complète s'il te plaît. [sous la dictée] « pour tout M appartenant à \mathbb{R} , il existe n appartenant à grand \mathbb{N} » alors on va l'appeler n indice M pour dire qu'il dépend, parce qu'à chaque fois que je choisis un M , c'est pas forcément le même, on est d'accord ? [Maxime : oui] donc « il existe un indice, un rang ... » [sous la dictée] « $u(n_M)$ supérieur à M , et $u(n_M+1)$ supérieur à M ».

Ens. : alors, qu'est-ce que vous en pensez ? [silence] ... faites des dessins, faites des dessins... tu voulais l'empêcher de redescendre, hein ?

Maxime : mais oui, mais ça veut dire qu'après $u(n+1)$ ça devient $u(n)$ et, le $u(n+1)$ suivant ça sera toujours supérieur...

Ens. : alors, tu es d'accord que comme ça ça va pas, parce que là y'en a qu'un ... est-ce que vous voyez ce que veut faire Maxime ?

Maxime : ... $u(n+x)$

On voit ici un usage de ressources et un cheminement cognitif non anticipés dans l'analyse *a priori*. Une ressource est offerte par le registre symbolique, qui permet de complexifier des formules par modification et enchâssement. A partir de « u_{n_M} », il permet de produire « u_{n_M+1} » puis « u_{n_M+x} ». Une ressource conceptuelle inattendue intervient aussi : ayant étudié la démonstration par récurrence peu avant, l'élève cherche à exprimer l'idée d'une propriété qui se propage « vers la droite » en proposant qu'elle soit vérifiée pour « u_{n_M} et u_{n_M+1} ». Les *verbatim* d'autres réalisations de l'ingénierie confirment cette interprétation. La classe décide de valider cette définition, correcte¹²³ quoique inhabituelle, dans laquelle l'idée selon laquelle une condition doit être vérifiée pour un rang n_M et pour tous ceux qui sont « plus grands » est formulée de manière additive :

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_M \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad u_{n_M+x} > M$$

Après 10 minutes d'échange, les élèves arrivent à une formulation classique :

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_M \in \mathbb{N} \quad t.q. \quad \forall n > n_M \quad u_n > M$$

Dans (Chorlay, 2018a), cette recherche a fait l'objet d'un petit travail complémentaire à celui d'ingénierie didactique présenté jusqu'ici. Ce complément a porté sur des tâches de compréhensions de propriétés des suites énoncées dans le registre formel, de reconnaissance d'une définition de la limite $+\infty$, et de production de contre-exemples à des propositions erronées. On cherche ainsi à évaluer des capacités et connaissances relatives aux propriétés des limites par une méthode peu répandue, qui diffère de deux approches plus classiques : entretien d'explicitation ou production de démonstrations utilisant les définitions. Un même questionnaire a été administré à trois populations d'élèves : (1) une classe de Terminale française, (2) une classe de L1 Mathématiques de l'université de Mons (Belgique), et (3) une classe de L1 Maths-Info de Mons. Les premiers avaient expérimenté notre ingénierie en novembre 2017 et ont passé le questionnaire en juin 2018 (effectif 31) ; les deuxièmes avaient reçu un enseignement universitaire sur lequel nous n'avons pas de données (effectif 50) ; les troisièmes avaient vécu

¹²³ Après une demande explicite de l'enseignant de quantification de la nouvelle variable introduite.

l'ingénierie d'Aline Robert¹²⁴ (effectif 17). L'idée était de comparer l'impact de trois enseignements différents, mais la taille des populations et des biais quant à la maîtrise du calcul des prédicats n'ont pas permis d'atteindre ce type de conclusions. Les données confirment cependant certains résultats de l'ingénierie, et éclairent la question des ressources en logique nécessaires à sa mise en œuvre.

Le questionnaire était du type « Vrai/Faux ? Justifiez (uniquement si vous répondez « Faux ») », conçu à partir des cinq implications suivantes puis de quatre des réciproques :

- n°1 Si $\lim u_n = +\infty$ alors $\forall A \in \mathbf{R} \exists n_A \in \mathbf{N}$ tel que $u(n_A) > A$
- n°2 Si $\lim u_n = +\infty$ alors $\forall A \in \mathbf{R} \forall n \in \mathbf{N} u(n) > A$
- n°3 Si $\lim u_n = +\infty$ alors $\exists A \in \mathbf{R} \exists n_A \in \mathbf{N}$ tel que $u(n_A) > A$
- n°4 Si $\lim u_n = +\infty$ alors $\exists A \in \mathbf{R} \forall n \in \mathbf{N}, u(n) > A$
- n°5 Si $\lim u_n = +\infty$ alors $\forall A \in \mathbf{R} \exists n_A \in \mathbf{N}$ tel que pour entier n supérieur à n_A $u(n) > A$

Les données ont fait l'objet d'un traitement quantitatif après codage et permettent de dégager plusieurs éléments saillants (détaillés dans (Chorlay, 2018a)) :

- Les conceptions usuelles erronées, en particulier entre « limite $+\infty$ » et « non majoré » résistent à certains enseignements alors que d'autres semblent avoir un impact significatif. Ainsi, tous les étudiants du groupe 3 déclarent vraie la réciproque de l'implication n°1, alors que dans le groupe 2, parmi les 33 étudiants ayant bien répondu sur les cinq propositions directes, 17 ont bien déclaré que « non majoré \Rightarrow tend vers $+\infty$ » est faux.
- Ce type questionnaire – à la fois d'un bon niveau conceptuel sur les propriétés des suites et rédigé de manière très formelle – n'est pas inadapté aux niveaux d'enseignement concernés. Dans le groupe 2, par exemple, 17 des 50 copies sont entièrement correctes (y compris dans leur capacité à exhiber des contre-exemples pertinents).
- Les données recueillies se prêtent mal à l'analyse quantitative car beaucoup d'élèves du groupe 1 ont réinterprété la tâche. Face à une proposition jugée fausse, beaucoup n'ont pas cherché à l'invalider par un contre-exemple, mais préfèrent expliquer au correcteur ce qui ne va pas dans la question et comment la modifier pour fabriquer une affirmation valide.

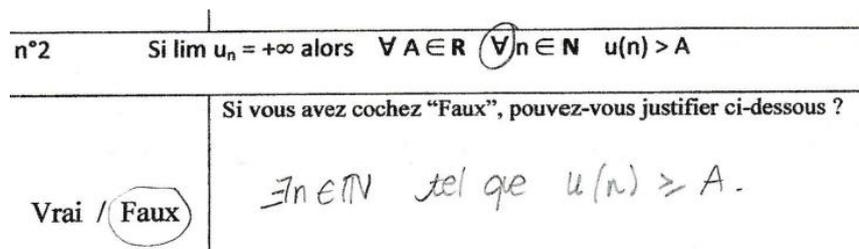


Figure 13. Exemple de réinterprétation de la tâche dans ce cas « Faux »

Les données recueillies dans le groupe 1 suggèrent donc un fort taux de reconnaissance de la définition ; d'une reconnaissance qui dépasse la simple mémorisation, comme en témoigne la capacité à interpréter ou modifier les quantificateurs. Cela suggère aussi qu'une certaine familiarité avec la logique est suffisante pour démontrer une réelle compréhension des notions et de leurs formulations dans le registre

¹²⁴ Bridoux, S. (2016). Introduire la notion de convergence avec une ingénierie des années 1980 : rêve ou réalité didactique pour l'enseignant ? In E. Nardi, C. Winslow, T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of INDRUM 2016* (pp. 53–62). Université de Montpellier.

du calcul des prédicats, quand bien même des tâches de démonstrations reposant sur les définitions seraient peu accessibles aux élèves. Réciproquement, les étudiants des groupes 2 et 3 avaient reçu un enseignement explicite en logique en début de L1. Ils montrent dans le questionnaire des compétences supérieures sur ce point à celles des élèves du groupe 1 (formulation de la réciproque d'une implication, négation de quantificateurs), mais non corrélées à une meilleure connaissance des propriétés des suites.

2.2 Du côté des enseignants

2.2.1 Contrôle du niveau d'adidacticité en situation co-didactique.

Si l'on déplace le regard des élèves vers l'enseignant, l'ingénierie sur les limites soulève des questions didactiques d'intérêt général. Les nombreux travaux relevant d'approches socio-constructivistes – en particulier la Théorie des Situations Didactiques (TSD) et la *Realistic Mathematics Education (RME)* – ont parfois peu prêté attention au rôle des enseignants ou accompagnants. Ainsi, dans le cadre *RME*, ce n'est qu'en conclusion d'un article décrivant en détail le cheminement cognitif de deux étudiants que l'auteur signale en passant :

This is not to say that students can necessarily reinvent such a complicated idea without support – the reinvention principle is not intended to suggest that students should reinvent everything for themselves. Intentional, carefully planned guidance by the researcher/teacher does not have to be at odds with the goal of guided reinvention, which is for students to feel ownership of, and responsibility for, the mathematics they learn. To be clear, Amy and Mike's reinvention efforts were scaffolded in significant ways – as the researcher, I intervened on multiple occasions to guide them towards paths I felt might be productive. (Swinyard, 2011, p. 112. C'est nous qui soulignons).

La nécessité d'une analyse didactique prenant en compte l'intervention de l'enseignant, en particulier pour les contenus mathématiques du secondaire-supérieur et du supérieur (Robert, 1998) est désormais reconnue. Ainsi, en TSD, rappelant qu'une certaine *adidacticité* de la situation doit garantir une nécessaire *autonomie* et *responsabilité* des élèves, on a pu proposer d'intégrer à l'analyse le rôle de l'enseignant en dans des situations « à dimension adidactique » ou co-didactiques. Comme le soulignent Gonzales-Martin et al. (2014) :

The conditions above allow students to take an important part of the responsibility for producing their own knowing. However, especially at university level, these conditions have to be thoroughly adjusted, taking into account the targeted mathematical knowledge and the possible Situations associated with it, as well as the students' previous knowledge, and adequate elements with which they can interact. In this sense, the teacher can play a more active role. (Gonzales-Martin et al., 2014)

Plusieurs ingénieries relatives aux limites ont d'ailleurs réintégré le discours enseignant dans l'ensemble des données à analyser¹²⁵, ou ont complété l'analyse des niveaux de milieu en intégrant explicitement des niveaux non-adidactiques¹²⁶.

Notre ingénierie s'inscrivant dans le cadre la TSD, il était nécessaire de décrire les rôles respectifs des élèves et de l'enseignant à la fois pour rendre visible le rôle de ce dernier et pour certifier l'existence d'une réelle dimension adidactique dans le déroulement. Dans ce but, nous nous sommes appuyés sur

¹²⁵ (Bridoux, 2016, op.cit.)

¹²⁶ Bloch, I., & Gibel, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques. Etude des niveaux de preuve dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 31(2), 191–228.

les travaux d’Ouvrier-Bufferet (en particulier (2013)) offrant des outils d’analyse des activités de construction de définition formulés en termes de conceptions. Plus haut, la description des choix didactiques macro relatifs à l’ingénierie proposait d’ajouter les problèmes de différenciation conceptuelle aux types de problèmes donnant sens et occasion à l’activité de définition. Ici, nous proposons d’adapter et de compléter la proposition d’Ouvrier-Bufferet en utilisant les notions d’opérateur et de contrôle pour analyser les actions des deux catégories d’acteurs engagés dans la situation co-didactique, les élèves et l’enseignant. Les opérateurs et contrôles repérés dans nos données sont émergents, mais recourent largement ceux identifiés dans les analyses didactiques et épistémologiques d’Ouvrier-Bufferet. Le codage permet de distinguer, pour chaque contrôle ou opérateur : (1) s’il est mis en œuvre par un élève (non-souligné) ou par l’enseignant (souligné), et (2) s’il est mis en œuvre ou seulement indiqué par l’acteur (par exemple lorsque l’enseignant invite les élèves à utiliser un opérateur, on code alors HO¹²⁷ au lieu de O).

On peut illustrer cette méthode d’analyse sur deux brefs épisodes déjà évoqués. Une présentation en deux colonnes dans (Chorlay, 2019a) place l’analyse en face du *verbatim* (en *italiques*) ou d’un résumé des échanges (en caractères droits) :

<p><i>Teach.: So, another pair of students has a new definition to suggest, let’s call it definition 6. Let’s see what’s on your worksheet: [copying onto the blackboard]</i></p> <p style="text-align: center;">$\forall M \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} u_n > M$</p> <p>[The teacher rephrased as “not bounded above”]</p> <p><i>Teach.: So, is the idea of not being bounded above an important one in order to capture “tending to $+\infty$”? Shall we keep it? ... We said earlier that, if it’s not a sufficient condition, it means we have to ... to what? ... We need another one, we need to add an extra condition, agreed? So, what would you suggest?</i></p> <p>[A student suggested adding “and bounded below”, explicitly targeting non-example (e_n)]</p>	<p><u>O</u>: Suggest a new candidate definition.</p> <p><u>O</u>: <u>Change semiotic registers formal \rightarrow rhetorical.</u></p> <p><u>C</u>: <u>Spot a necessary but not sufficient condition.</u></p> <p><u>HO</u>: <u>Strengthen the condition.</u></p> <p><u>O</u>: Add an extra condition. Monster-barring.</p>
<p>(...)</p>	
<p><i>Maxime: $u_{n+1} > M$ [oral emphasis on “+1”]</i></p> <p><i>Teach.: I need a complete sentence here. [being dictated to, the teacher wrote on the blackboard]</i></p> <p style="text-align: center;">$\forall M \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}$</p> <p><i>We’ll call it n_M to say that it depends on M, because every time I pick an M, it doesn’t have to be the same, right? So...</i></p> <p style="text-align: center;">$\forall M \in \mathbb{R} \exists n_M \in \mathbb{N} s. t. u_{n_M} > M$ and $u_{n_M+1} > M$</p> <p><i>Teach.: [to the class] So, what do you think ... you can draw if it helps ... [to Maxime] you wanted to prevent it from going down, is that it?</i></p>	<p><u>O</u>: Add a condition.</p> <p><u>O</u>: <u>Use the affordances of the formal register to make relationships between variables more explicit.</u></p> <p><u>HO</u>: <u>Ask for clarification.</u></p> <p><u>O</u>: Switch to the rhetorical register to express the intended meaning of the formal proposition. A</p>

¹²⁷ Le « H » renvoie au verbe anglais *to hint* (indiquer, faire allusion à) aussi bien qu’au substantif *hint* (piste, indice).

<p><i>Maxime: Yes, but it means that afterward, u_{n+1} becomes u_n, and the next u_{n+1} will still be greater ...</i></p> <p><i>Teach.: So, you agree that this will not do because here there’s only one ... [to the class] Do you guys see what Maxime is trying to do?</i></p> <p><i>Maxime: u_{n+x}</i></p>	<p>similar attempt to formally capture the “for all terms after u_n” – reminiscent of the proof-by-induction scheme – was also observed in (Martin, Oehrtman and Swinyard 2014, p. 138).</p> <p><u>C: Condition too weak.</u></p> <p><u>O: Focus on the part of the formal proposition which fails to capture the intended meaning.</u></p> <p>O: Use the affordances of the formal register to introduce a new indeterminate in order to additively express “as from rank n” or “for ranks greater than n”.</p>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Tableau 1. Codage d’une situation co-didactique

Outre la garantie d’un certain niveau d’adidacticité, cet outil permet une analyse qualitative du rôle des deux acteurs : la classe, l’enseignant. L’analyse, détaillée dans (Chorlay, 2019a) montre que les élèves utilisent bien la liste des suites pour mettre à l’épreuve les candidats-définitions, le milieu joue ici son rôle. Les élèves sont aussi autonomes dans des modifications de candidats-définitions (en particulier par affaiblissement ou renforcement de conditions) ou l’introduction de nouveaux candidats. En revanche, le passage au registre graphique (en termes de contrôle et d’opérateur) et la demande de contrôle logique¹²⁸ (expliciter le sens d’une implication formulée vaguement, préciser la quantification sur une variable nouvellement introduite) sont largement à la charge de l’enseignant. Sur ce dernier aspect, c’est le contrôle qui est largement à la charge de l’enseignant, les élèves mettent correctement en œuvre les opérateurs indiqués.

2.2.2 Décrire et comprendre les pratiques enseignantes en cours magistral à l’Université

a. Position du problème

L’ingénierie de niveau Terminale-L1 sur les limites s’est appuyée à la fois sur la littérature de recherche sur l’enseignement de cette notion et sur celle portant sur les situations de construction de définition. Sur cette base, un nouveau projet a été lancé dans le cadre du groupe « Enseignants du supérieur » du LDAR¹²⁹, dans le sillage d’un premier travail portant sur la comparaison de plusieurs cours magistraux de contenus proches (Bridoux et al., 2020)¹³⁰. Contrairement au travail sur l’ingénierie, il s’agit ici d’étudier des enseignements « ordinaires », au sens où le(s) chercheur(s) en didactique ne jouent aucun rôle, ni quant au format ni quant aux contenus. Le terme « ordinaire » ne recouvre aucune évaluation, et ne préjuge pas de l’éventuel usage autonome, par les enseignants, de ressources issues de la recherche. Autre différence, le format « cours magistral » (CM, ou *lecture*) est caractérisé par l’absence d’adidacticité et la quasi absence d’interaction avec les étudiants. Ici, le format est « uni-vocal » : « *The teacher is a lecturer who exposes the mathematics for the students who listen, copy from the board and go away to make their own meanings from the experience* » (Jaworski et al., 2017, p. 169).

La revue de littérature souligne la variété de pratiques effectives compatibles avec un format « cours magistral » et un enseignement académique couramment désigné par le sigle DTP (*Definitions* –

¹²⁸ Ces observations recourent en particulier celles de Fischbein et Mariotti (1997).

¹²⁹ <https://www.ldar.website/enseignants-du-superieur>

¹³⁰ Outre le soutien du groupe « enseignants du supérieur », le travail présenté dans cette section a été lancé en collaboration avec Zoé Mesnil (Chorlay & Mesnil, 2020). Je l’en remercie.

Theorems – Proofs). Cette revue de littérature permet d’identifier deux angles morts. D’une part, les exposés de démonstrations ont été beaucoup plus étudiés que les situations d’introduction de concepts via des définitions (souligné dans (Lew et al., 2016)). D’autre part, les outils de description de cette diversité, et – au-delà de la description – les cadres d’analyse permettant d’en rendre raison sont encore émergents dans la recherche internationale sur l’enseignement supérieur au format CM. En outre, la plupart des études issues du monde anglo-saxon ont recours à des catégories d’analyse *émergentes* plutôt qu’à une analyse *a priori*. L’article *Accounting for the variability of lecturing practices in situations of concept introduction* (Chorlay, 2022b) cherche donc à décrire et rendre raison de la diversité de pratiques enseignantes dans trois cours magistraux introduisant une même définition (suites convergentes), sur la base d’une analyse *a priori* (et non de catégories émergentes). Il s’agit d’une analyse *a priori* des actions possibles des enseignants dans la situation d’enseignement, même si elle repose sur des hypothèses sur les enjeux de conceptualisation pour les étudiants. On le voit, le thème des limites n’est ici qu’un contexte. L’article porte sur les pratiques enseignantes et a une forte dimension méthodologique.

b. Choix de méthode

Le premier objectif est ici de décrire la dispersion de pratiques observées dans trois cours magistraux en L1, de 1h30 chacun, portant sur le même contenu déclaré – la notion de limite d’une suite réelle ou complexe convergente – et dans des conditions d’enseignement proches. Au-delà de la description, le second objectif est de rendre raison de la diversité des pratiques observées en les croisant avec les données recueillies lors d’entretiens pré- et post- séance avec les trois enseignants. Il s’agit donc de croiser les pratiques observées et le discours des acteurs sur leur pratique, en reprenant à notre compte un objectif de recherche général relatif à l’étude des pratiques enseignantes ; objectif qu’Alan Schoenfeld présente ainsi :

The question is not ‘what does a teacher know’ or ‘what does a teacher say he or she believes’ but, ‘how do a teacher’s knowledge and beliefs play out in the classroom?’. (...) What teachers say they believe and what they actually do in the classroom can be very different things (...). Hence some form of triangulation is essential. (Schoenfeld, 2013, p. 619).

Cette « triangulation » s’appuie sur une conversation entre enseignants¹³¹ et didacticien adossée aux résultats de la recherche en didactique, dans l’esprit évoqué dans cette citation :

Many mathematicians have a clear idea of what constitutes a good education in mathematics. These ideas, however, may or may not align with those of a mathematics educator. This leads us to ask, how might we invite mathematicians into a conversation about education, especially in a way that is respectful of their teaching culture and is informed by contemporary mathematics education literature? (Oates & Maciejewski, 2016, p. 391)

En particulier, on cherche à objectiver la « lecture » (« *reading* » (Mason, 2016)) de la situation par les deux catégories d’acteurs, des enseignants observés d’une part, un didacticien observateur d’autre part. Cette notion de « lecture » d’une situation par ses acteurs est précisée par Herbst ; elle recouvre : « *categories of perception and appreciation ; (...) perception of the moments, actions (...) and objects that are salient [to them]* » (adapté de (Herbst et al., 2011, p. 218)). Bien que cet aspect ne soit pas souligné dans (Chorlay, 2022b), aussi bien cet intérêt pour les « catégories des acteurs » – catégories de perception et d’évaluation, au-delà de la question des connaissances – que la nécessité méthodologique de distinguer le discours de l’analyste des discours étudiés – quand bien même ils porteraient sur les mêmes objets – prolonge en didactique les préoccupations de l’historien.

On le devine dans ces quelques citations, ce travail s’inscrit dans une tradition de recherche anglo-saxonne (Schoenfeld, Mason, Herbst) cherchant à décrire et rendre raison des pratiques enseignantes *in situ* ; d’une tradition généraliste, non-spécifique à l’enseignement supérieur. Le point de départ est fourni par Schoenfeld, qui cherche à

¹³¹ Dans cette étude, deux des enseignants sont chercheurs en mathématiques pures, l’un est enseignant de statut secondaire (PRAG).

construct a model of an individual's decision-making that is entirely consistent with the individual's behavior on a moment-by-moment basis (...)

en combinant quatre

categories of the individual's knowledge and activity: (1) resources (most centrally, knowledge), (2) goals, (3) orientations (i.e., beliefs, values, preferences, etc.), (4) decision-making for routine decisions; and for non-routine decisions, as modeled by a form of subjective expected utility. (adapté de (Schoenfeld, 2013, p. 608)).

Nous traduirons « *expected utility* » par « espérance d'utilité ». Elle renvoie aux catégories de perception et d'évaluation déjà évoquées. L'adaptation à notre terrain d'enquête demande que l'on précise ce que nous entendons par « décision » (*decision-making*), « comportement » (*behavior*) et « connaissances » (*knowledge*)

Nous appuyant sur la théorie de l'activité, nous distinguerons les « comportements » identifiés par l'observateur des « actions » que l'acteur (ici, les enseignants) peut expliciter, reconnaître comme siennes et associer à un objectif¹³². Il y a ici un petit glissement, puisque nous utilisons *decision-making* (Schoenfeld) comme synonyme d'action (Leontiev). Cela se justifie localement par le fait que nous écartons de l'étude ce que Schoenfeld appelle les « *routine* » et « *in-the-moment decisions* », fondamentales pour l'analyse d'une situation de classe plurivocale mais moins pour un cours magistral.

Un point de méthode fondamental de ce travail réside dans l'inclusion de l'absence de certains comportements (par exemple : ne pas faire de figure, ne pas mentionner une erreur courante) parmi les observables. Il ne s'agit bien entendu pas d'une complète nouveauté : les décisions se reflètent dans des comportements « *enacted or suppressed* » (Mason, 2016, p. 221 ; nous soulignons) ; le discours des enseignants sur leur pratique permet d'étudier « *the principles or values members of a practice use to justify or otherwise discard possible actions in an instructional situation* » (Herbst et al. 2011, p. 219 ; nous soulignons).

Ce projet d'enquête nécessite donc de pouvoir intégrer des « non-comportements » (i.e. l'absence de certains comportements) parmi les observables. C'est ce que permet la délimitation *a priori* d'un ensemble d'actions « possibles » (comme le souligne Herbst). Faisant fond sur la littérature didactique sur les limites et, plus généralement, sur les situations d'introduction de concepts via des définitions, nous identifions quatre familles d'observables que nous ne décrivons ici qu'en une phrase chacune :

- Les comportements susceptibles d'avoir un impact (positif ou négatif) sur la conceptualisation par les élèves de la notion de limite de suite.
- Les tactiques d'exposition de la définition formelle.
- L'usage d'un espace d'exemples (incluant non-exemples et contre-exemples).
- L'éventuel discours *méta*, portant soit sur la nature ou les raisons d'être du concept étudié, soit sur le fait de définir et le rôle des définitions.

Au-delà des comportements observés (y compris des non-comportements, désormais observables), la *triangulation* avec le discours des acteurs doit, dans un second temps, permettre d'identifier ceux de ces comportements qui reflètent des décisions (explicitables, revendiquées et associées à un but). Nous ne pousserons pas l'enquête du côté des croyances, valeurs, ou de l'image des mathématiques, et préférons nous concentrer sur les connaissances disponibles aux enseignants et les espérances d'utilité. Les entretiens ont particulièrement cherché à étudier les connaissances disponibles dans deux directions. Premièrement – c'est bien classique – celles relatives aux difficultés d'enseignement de la notion de

¹³² "We call a process an action when it is subordinated to the idea of achieving a result, i.e., a process that is subordinated to a conscious goal" (Leontiev, 1981), cité dans : Treffert-Thomas, S. (2015). Conceptualising a university teaching practice in an activity theory perspective. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20(2), 53–77. p. 63

limite. Deuxièmement, celles relatives à l’« arsenal pédagogique » (Harel & Sowder, 2009) ; à la gamme des « *action plans* » (Schoenfeld, 2011) que l’enseignant sait pouvoir être mis en œuvre pour faire face aux enjeux qu’il identifie. Plusieurs études suggèrent que ces connaissances spécifiques sont le principal facteur limitant qui modèle les décisions. Ainsi, que ce soit dans le domaine de la preuve (Weber, 2012 ; Lai & Weber, 2014) ou de la construction de définition (Ouvrier-Buffer, 2015), des enseignants-chercheurs reconnaissent ne pas savoir quoi faire pour faire face à des difficultés qu’ils identifient, ou pour traduire dans la pratique d’enseignement des orientations et objectifs qu’ils valorisent comme chercheurs.

Les entretiens post-séance ont été des entretiens semi-directifs. La trame d’entretien était commune pour les trois enseignants, conçue à partir de la transcription des vidéos de cours et de l’analyse des comportements observés selon les quatre familles d’observables identifiées plus haut. Les enseignants étaient invités à revenir sur ces comportements (la vidéo était à disposition), à expliciter s’ils les revendiquaient comme fruit d’une décision et, le cas échéant, ce qui la motivait. Les entretiens dépassaient l’auto-confrontation puisqu’ils invitaient aussi les enseignants à réagir aux comportements de leurs collègues, en particulier lorsqu’ils différaient des leurs.

c. Aperçu des résultats

Le tableau ci-dessous reflète l’analyse des vidéos de cours par l’observateur. Pour chacun des trois enseignants (C, F et B) on code Y ou N selon qu’un comportement est observé ou non.

Focus-points – Observed behavior	Teacher		
	C	F	B
Informal formulations given before or alongside the formal definition	Y	Y	Y
x-first, dynamic or causal formulations used (orally or in writing)	N	Y	N
Common misconceptions on convergence explicitly mentioned	N	N	Y
Diagram(s) used to illustrate the definition	Y	N	Y
ε -strip diagram used	N	N	Y
Meaning of the nested quantifiers explained	Y	Y	Y
Necessity of the third quantifier explained	N	N	Y
Necessary shift of viewpoints on the first quantifier depending on context	N	N	N
Several correct definitions mentioned	N	N	N
Several correct definitions proven to be equivalent	N	N	N
Incorrect definition mentioned	N	N	Y
Incorrect definition proven to be incorrect	N	N	N
Example displayed (but not studied)	N	Y	N
Worked example	Y	N	Y

Generic example used to introduce the definition	N	N	Y
Non-example displayed (but not studied)	N	N	Y
Non-example proven to be one. Negation of the definition spelled out.	N	Y	N
Example(s) used to fight a common misconception regarding convergence	N	N	Y
<i>Raison d'être</i> of the notion of convergence mentioned	Y	Y	Y
Meta-level discourse on defining	N	N	Y

Tableau 2. Comportements et non-comportements observés

Les entretiens post-séances conduisent à trier les comportements observés, selon que les enseignants les revendiquent comme reflétant une décision (*owned*, en anglais, codé sur fond blanc), ou non (codé sur fond noir). Les entretiens n'ont pas permis d'aborder tous les aspects (lignes supprimées ou cellules grisées).

	Teacher		
	C	F	B
Informal formulations given before or alongside the formal definition	Y	Y	Y
x-first, dynamic or causal formulations used (orally or in writing)	N	Y	N
Diagram(s) used to illustrate the definition	Y	N	Y
ε -strip diagram used	N	N	Y
Meaning of the nested quantifiers explained	Y	Y	Y
Necessary shift of viewpoints on the first quantifier depending on context	N	N	N
Several correct definitions mentioned	N	N	N
Several correct definitions proven to be equivalent	N	N	N
Incorrect definition mentioned	N	N	Y
Non-example proven to be one. Negation of the definition spelled out.	N	Y	N
Example(s) used to fight a common misconception regarding convergence	N	N	Y
<i>Raison d'être</i> of the notion of convergence mentioned	Y	Y	Y

Tableau 3. (non-)comportements reflétant des décisions (fond blanc) ou non (fond noir)

Ce travail ayant une forte coloration méthodologique, ses « résultats » tiennent en particulier dans la capacité de la méthode suivie à générer des données à la fois à grain fin et formant un ensemble structuré. Avant d'entrer dans l'étude des connaissances d'*action plans* et des espérances d'utilité guidant les décisions des enseignants, ces tableaux permettent déjà de décrire avec un certain relief les actions des enseignants. Les quatre cas de figure se présentent : revendiquer un comportement (le plus courant), revendiquer un non-comportement (par exemple : C et F disent éviter les métaphores dynamiques, qu'ils

estiment trompeuses), ne pas revendiquer un comportement (F revient sur la « raison d'être » de la notion de convergence mentionnée en cours pour dire que, contrairement à ce qu'il a dit aux étudiants, cette notion n'est pas pour lui le « cœur de l'analyse »), ne pas revendiquer un non-comportement (C regrette de ne pas avoir donné l'exemple des suites constantes).

La catégorie des non-comportements non-revendiqués est particulièrement intéressante car elle renvoie souvent à l'absence de certaines connaissances. Ainsi, ni C ni F ne se sont appuyés sur un ε -strip diagram pour introduire ou illustrer la définition de la convergence. Lorsque l'applet utilisée en cours par B leur est présentée (ci-dessous), ils reconnaissent ne pas connaître ce diagramme, et disent l'évaluer très positivement.

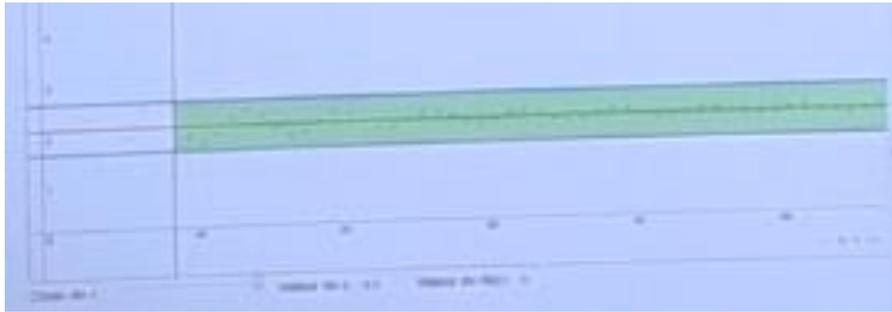


Figure 14. ε -strip diagram utilisé par B

On voit dans ce cas comment la mise au jour de l'origine de la dispersion des pratiques dans la diversité des connaissances d'*action plans* ouvre des pistes pour la formation des enseignants.

Par ailleurs, on mesure l'intérêt d'utiliser deux facteurs explicatifs (connaissances d'*action plans* et espérance d'utilité) pour rendre compte de la diversité des situations : tout ne relève pas des connaissances d'*action plans*. Ainsi, les trois enseignants *connaissent* les métaphores dynamiques, mais C et B estiment qu'elles sont plus trompeuses qu'éclairantes, alors que F revendique leur utilité pour transmettre le « sens intuitif » de la notion de convergence. Bien entendu, on pourrait ici relire la situation en termes de connaissances, mais de connaissances relatives aux difficultés usuelles des élèves plutôt que d'*action plans*. L'étude des espérances d'utilité permet aussi d'informer un didacticien souhaitant proposer une formation d'enseignants. Ainsi, si la découverte du ε -strip diagram suscite des réactions très positives, la découverte de définitions alternatives (définition fini/infini, cf. Section 2.1.2 de cette Note) suscite une réaction très positive chez F mais mitigée chez C et F. De même, la présentation par le chercheur de difficultés anticipables relatives aux changements de point de vue sur le premier quantificateur \forall suscite chez les trois un même désintérêt poli, alors que les vidéos montraient ce changement à l'œuvre dans les séances. Enfin, certaines différences d'appréciations ne renvoient pas à ce que l'observateur peut attribuer à l'absence de connaissances didactiques (relatives à des *action plans* ou aux étudiants), faute d'un savoir didactique de référence. On peut illustrer ce point par les choix des exemples illustrant la définition de la convergence. Sur ce point, C et B ont des comportements différents : C choisit de démontrer la convergence vers 0 de la suite de terme général $\frac{1}{n}$ (pour $n > 0$) ; cela lui permet de montrer l'utilité de l'axiome d'Archimède, étudié à la leçon précédente. B choisit de démontrer la convergence vers 1 de la suite de terme général $\frac{1-n}{1+n}$ pour montrer la dépendance envers le paramètre ε de l'ensemble des solutions dans \mathbf{N} de l'inéquation $\left| \frac{1-n}{1+n} - 1 \right| < \varepsilon$. Dans les entretiens, les deux enseignants revendiquent leurs choix respectifs comme le mieux à même de faire comprendre la définition ; confrontés au choix de leur collègue, ils expriment leur scepticisme. Par exemple, C attribue à l'étude de la suite de terme général $\frac{1}{n}$ plusieurs vertus : elle fait le lien avec le cours de la semaine précédente sur les propriétés de \mathbf{R} ; elle fait le lien avec l'expérience des limites acquise en Lycée, en montrant que des résultats intuitifs et admis à ce niveau peuvent maintenant être démontrés ; C estime

que cet exemple est particulièrement « simple » puisqu'il montre comment utiliser la définition sans s'encombrer de calculs. L'appréciation de B est contraire, qui juge le cas de $\frac{1}{n}$ « trop évident » et « pas très alléchant pédagogiquement ». Ces divergences d'appréciations suggèrent des leviers de problématisation pour une éventuelle action de formation.

2.2.3 Analyse de pratiques enseignantes : conception de séances à support historique

a. Contexte et position du problème

Les programmes des filières du Lycée général mis en œuvre aux rentrées 2019 et 2020 font une part importante et inhabituelle à l'histoire des mathématiques. Les consignes générales sont données en préambule :

Il peut être judicieux d'éclairer le cours par des éléments de contextualisation d'ordre historique, épistémologique ou culturel. L'histoire peut aussi être envisagée comme une source féconde de problèmes clarifiant le sens de certaines notions. Les items « Histoire des mathématiques » identifient quelques possibilités en ce sens. Pour les étayer, le professeur peut s'appuyer sur l'étude de documents historiques.¹³³

Les différentes parties du programme évoquent ensuite de nombreux thèmes et noms de mathématiciens, mais donnent peu d'indications explicites¹³⁴ de mise en œuvre.

Cette situation institutionnelle fournit le contexte et l'occasion d'une nouvelle recherche sur les pratiques enseignantes, sur un terrain et avec des outils théoriques différents de ceux explorés précédemment (enseignement de définitions dans des contextes d'ingénierie ou de cours magistraux ordinaires). Plus précisément : en réaction à ces programmes, la commission inter-IREM *Epistémologie des mathématiques* a lancé la rédaction d'un ouvrage destiné aux enseignants et offrant une sélection de situations d'enseignements conçues par les membres de la commission et testées en classe, dans l'esprit de publications précédentes¹³⁵. J'ai été à l'initiative d'un de ces chapitres. Deux types de travaux se sont donc superposés sans se confondre : d'une part un projet éditorial, collectif, visant une production de ressources pour l'enseignement ; d'autre part un projet de recherche sur les pratiques des enseignants du secondaire engagé dans ce projet éditorial.

La séparation des deux projets a été garantie par un protocole de travail spécifique accepté par les participants :

Phase 0 : J'ai sélectionné une source historique susceptible de servir de support à des travaux en classe au Lycée dans le cadre des programmes actuels. Une source offrant des possibilités multiples et ouvertes, de sorte que les enseignants aient à faire des choix.

Les cinq enseignants du secondaire ayant accepté de participer aux projets ont travaillé séparément, sans communication les uns avec les autres :

¹³³ MEN (2019). Programme de mathématiques des secondes générales et technologiques. BOEN n°1 du 22 janvier 2019.

¹³⁴ Un lecteur averti des ressources disponibles sur l'histoire des mathématiques dans la classe – en particulier des ressources IREM – voit dans la plupart de ces indications laconiques des références à des travaux publiés. En l'absence de bibliographie ou de document-ressource, ces indications sont vraisemblablement peu éclairantes pour le novice.

¹³⁵ Par exemple :

Barbin, E. (Ed.). (2018). *Let history into the mathematics classroom*. Springer.

Moyon, M. & Tournès, D. (Eds.). (2018). *Passerelles – Enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3*. IREM et ARPEME

Phase 1 : Séance de travail de 2h entre l'enseignant et moi : découverte du texte, *brainstorming* sur son contenu mathématique et les liens possibles avec le programme. Aucun choix de mise en œuvre n'est discuté. La séance est menée de la même manière avec les 5 enseignants pour assurer la comparabilité des trajectoires.

Phase 2 : Travail en autonomie des enseignants.

Phase 3 : Réalisation par chaque enseignant de la séance ou de la séquence qu'il a conçu. Un entretien pré-séance porte sur les choix faits par l'enseignant, les questions qu'il s'est posé, les difficultés qu'il a pu rencontrer dans le travail de conception, les objectifs qu'il a retenus, les éventuelles ressources complémentaires utilisées. Les séances sont enregistrées (audio ou vidéo). Un entretien post-séance porte sur la comparaison entre les objectifs et le déroulé. Je recueille aussi des documents écrits annexes, en particulier des versions préliminaires du document de travail conçu pour les élèves.

Cette étude porte donc sur un terrain peu fréquenté par les travaux de la communauté HPM (*History and Pedagogy of Mathematics*) et contribue à réaliser le programme de recherche exposé dans (Chorlay, 2016b) (voir section 1,5 de cette Note). En dépit de l'intervention initiale du chercheur – qui vise à contrôler certains paramètres permettant de rendre les 5 trajectoires comparables –, il ne s'agit pas d'un travail de développement *collaboratif* de ressources pour l'enseignement, du fait de l'autonomie des enseignants envers le chercheur et de l'indépendance des enseignants entre eux. Par ailleurs, les questions de recherche ne portent pas sur l'impact sur les élèves mais sur les pratiques d'enseignants engagés dans une tâche de *task-design* et dans des conditions ordinaires (classes, programme, temps). Nous appelons dans (Chorlay, 2016b) à mieux inscrire les travaux de la communauté HPM dans des questionnements plus largement partagés dans la communauté didactique, et – de ce fait – non entièrement spécifiques aux situations impliquant l'histoire des mathématiques ou des documents historiques. C'est donc à dessein que les questions de recherche de (Chorlay, 2022a) sont reprises d'un travail s'inscrivant dans le cadre de l'approche documentaire du didactique (Gueudet et al., 2016, p. 187) :

- Quels sont les choix faits par les enseignants dans leur élaboration puis leur mise en œuvre autonome de moments d'enseignement construits à partir d'une source historique primaire ?
- Quels sont les facteurs informant ces choix ?

La contribution à une réflexion non-spécifique au contexte HPM sur l'usage des ressources et les pratiques enseignantes n'empêche en rien ce travail de contribuer à des questions spécifiques au contexte HPM, par ailleurs très peu travaillées. Ici, la source utilisée est du type que l'on trouve dans plusieurs publications de type *Sourcebook*, dans lesquelles des extraits de grands textes mathématiques du passé sont sélectionnés et brièvement introduits, pour un public de curieux (mathématiciens, enseignants, historiens) et sans préjuger d'usages possibles¹³⁶. La capacité d'enseignants à construire des situations d'enseignement à partir de ce type de ressources « brutes » n'a, à notre connaissance, pas été étudiée.

Cette étude de conception de moments d'enseignement à visée ou à support historique dans des conditions « ordinaires » s'inscrit aussi dans le travail du groupe DidHisSeM¹³⁷ au sein du laboratoire LDAR. Une autre étude que celle présentée ici a donné lieu à communication en colloque (Crépin-Obert

¹³⁶ Par exemple :

Chabert, J.-L. (Ed.). (1999). *A history of algorithms: From the pebble to the microchip*. Springer.

Katz, V. J. (Ed.). (2007). *The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam: A sourcebook*. Princeton University Press.

Stedall, J. (2008). *Mathematics emerging: A sourcebook, 1540-1900*. Oxford University Press.

¹³⁷ Didactique et Histoire : Sciences et Mathématiques. <https://www.ldar.website/themes-de-recherche>

et al., 2021), sur des comparaisons de pratiques enseignantes en mathématiques, physique-chimie et sciences de la vie et de la Terre.

b. Propositions théoriques

Les outils de problématisation et d'analyse n'ont pas été les mêmes que ceux retenus dans les deux études précédentes. Contrairement aux cas précédents, la trajectoire des cinq enseignants partait ici de deux documents communs – le programme de 2019 et une source historique – invitant à s'inspirer des études s'inscrivant dans le cadre de l'approche documentaire du didactique. En outre, ni le contrôle de l'adidacticité ni la connaissance d'*action plans* bien repérés dans la littérature n'étaient ici des enjeux centraux. Nous avons donc croisé deux cadres généralistes pour l'étude des pratiques enseignantes, puis cherché des axes d'observation spécifiques aux enjeux HPM.

Les deux cadres généralistes utilisés s'inscrivent tous deux dans la théorie de l'activité. L'approche documentaire du didactique permet d'étudier la manière dont les enseignants s'engagent dans un travail documentaire : recherche de ressources (au sens large du terme), sélection de ressources, modification de ressources, sélection/conception de tâches, planification de leur succession et gestion du temps didactique (Gueudet & Trouche, 2009, p. 201). Par ce travail documentaire, les enseignants font d'un artefact – ici quelques pages des *Eléments d'algèbre* de Euler (Euler, 1774, pp. 677–680) – un document, en mettant en œuvre des schémas d'usage ; schémas que l'on peut chercher à décrire, à faire expliciter, à corrélérer à des facteurs influant sur l'activité professionnelle. Sur ce dernier point nous avons eu recours à la double approche ergonomique et didactique du travail enseignant (Robert & Rogalski, 2005 ; Vandebrouck, 2013). Elle propose de saisir les pratiques professionnelles de l'enseignant selon cinq axes d'observations (ou composantes) : (1) composante personnelle (fruit du parcours personnel et professionnelle, elle se reflète dans les connaissances, orientations et croyances – pour reprendre les catégories de Schoenfeld), (2) composante institutionnelles (système scolaire, programmes), (3) composante sociale (public scolaire, sociabilités professionnelles), (4) composante cognitive (conception et mise en œuvre de parcours cognitifs pour les étudiants, de l'échelle micro à celle de l'année), (5) composante médiative (organisation du travail de la classe, répartition du temps et de la parole, répartition des responsabilités vis-à-vis de l'enjeu mathématique). Les trois premières composantes ont aussi valeur de *déterminants* – sinon causaux, du moins explicatifs – par rapport aux pratiques décrites selon les composantes 4 et 5.

Dès (Chorlay, 2016b) nous appelions non seulement à aborder les terrains HPM avec des outils didactiques généraux, mais aussi à identifier des enjeux d'enseignement non totalement spécifiques au terrain HPM. En particulier, nous soulignons déjà combien des vertus supposées du travail sur document historique (Furinghetti et al., 2006) recoupent certaines vertus associées, par exemples, aux problèmes ouverts. Nous avons ici choisi de nous appuyer sur les travaux de Mary Stein (Henningsen & Stein, 1997) qui, dans la lignée des travaux de Schoenfeld sur les problèmes ouverts, étudient de manière empirique les facteurs conduisant à atteindre – ou non – une mise en activité des élèves au niveau décrit dans cette tradition de recherche par les termes « *high cognitive demand* » et « *do mathematics* » :

(...) *in essence do what makers and users of mathematics do: framing and solving problems, looking for patterns, making conjectures, examining constraints, making inferences from data, abstracting, inventing, explaining, justifying and so on.* (Grover et al., 1996, p. 456)

L'observation de cohortes de séances *potentiellement* exigeantes du point de vue cognitif permet aux auteurs d'identifier des facteurs critiques permettant d'expliquer leur actualisation (ou non). En particulier : la bonne identification des pré-requis, la quantité de temps, le degré d'autonomie laissé aux élèves, la nature des questions de l'enseignant ; ces facteurs reflètent eux-mêmes des aspects de la composante personnelle. En particulier, dans les situations que les enseignants considèrent comme exigeantes – pour les élèves – et inhabituelles – pour les élèves comme pour eux – les chercheurs ont

observé que les enseignants anticipaient un échec des élèves et ajustaient la composante médiative d’une manière qui abaisse l’exigence cognitive de la situation (typiquement : passer en cours dialogué en ne laissant aux élèves que la tâche de répondre à une suite de questions ponctuelles). Les séances à support historique nous ont semblé justiciables d’une analyse du même type que les séances cognitivement exigeantes étudiées par ces auteurs.

Un dernier apport théorique a cherché à ajuster ces perspectives générales en intégrant une observable plus spécifique au terrain HPM, quoique non entièrement spécifique. Nous reprenons de l’historien et philosophe des sciences Hans-Jörg Rheinberger (1997) la distinction entre *objet épistémique* et *objet technique* (voir section 2.1.1). Parmi les « choses » (*things, Dinge*) rencontrées dans les sciences, certaines sont les objets d’étude (nombres premiers ou virus), d’autres des outils (ordinateurs ou cyclotrons). Etant partiellement inconnus, les premiers objets ont des contours flous, font l’objet de redéfinitions en cours de travail, et ont pour fonction d’engendrer des questions (*question-generating objects*) ; par contraste, les objets techniques fonctionnent comme des boîtes-noires, stables, ayant pour fonction de produire des réponses (*answer-generating objects*). Il nous semble pertinent d’analyser dans quelle mesure les pratiques enseignantes de conception et de mise en œuvre de séances reposant sur un objet scientifique – quelques pages d’Euler – font jouer à cet objet un rôle technique (il expose un algorithme à utiliser) et/ou un rôle épistémique (il suscite des multiples questions, il fait l’objet d’une curiosité en tant qu’échantillon de mathématiques et qu’objet du passé). On pourra reconnaître dans certains schémas d’usage de l’artefact ceux qui font jouer l’une ou l’autre fonction au texte, et chercher à identifier les composantes explicatives.

c. Aperçu des résultats.

Les données ont été traitées de manière comparative, pour faire ressortir les points communs et les différences de pratiques observées (incluant les réponses lors des entretiens pré- et post-) selon les différentes observables. Ces observables ont été déterminées *a priori* en combinant d’une part les apports de la recherche (sur les situations à haute exigence cognitive et sur les fonctions épistémiques ou techniques d’objets scientifiques), d’autre part une analyse du contenu mathématique du texte (croisé avec les notions et objectifs des programmes de lycée général). L’analyse mathématique du texte, détaillée dans (Chorlay, 2022a), visait à établir sa capacité à fournir des occasions de conception et de dévolution de tâches cognitivement exigeantes, et à montrer que la grande gamme de ces possibilités était sans doute incompatible avec des conditions d’enseignement ordinaires, conduisant ainsi les enseignants à faire des choix.

En un mot, le texte¹³⁸ porte sur la résolution approchée d’équations polynomiales par la méthode de Newton, d’abord détaillée sur le cas du nombre $\sqrt{20}$. Le texte est de nature algorithmique, exposé sur un exemple dont on devine les généralisations possibles. La validité de la méthode n’est pas démontrée, mais une argumentation heuristique soutient son exposé. Notons qu’on retrouve une question générale évoquée plus haut (à propos de la division par 2 d’après al-Khwarizmi), celle de la place d’éléments de justification dans les exposés d’algorithmes. Se limitant au cas des polynômes, Euler n’utilise pas explicitement la dérivation (pas plus, d’ailleurs, que Newton). La « méthode de Newton » consiste en l’itération d’approximations affines locales, obtenues par changements de variables et par troncature affine des polynômes ainsi engendrés. Les questions algorithmiques et de théorie des nombres s’entremêlent, car l’irrationalité de $\sqrt{20}$ se reflète dans la non-terminaison de l’algorithme (si on l’initie avec une valeur rationnelle). Newton et Euler ne sont pas les seuls mathématiciens potentiellement associés au texte, puisque la suite des approximations est aussi celle de Héron d’Alexandrie.

¹³⁸ Rappelons que le texte est disponible en ligne :

Euler, L. (1774), *Eléments d’algèbre, tome 1^{er}, traduits de l’allemand avec des notes et additions* [par Jean Bernoulli]. Lyon : Bruyset Père & Fils. pp. 677–680. Consultable sur gallica.bnf.fr

Ce travail est exploratoire au sens où nous n'en connaissons pas d'autre étudiant les mêmes phénomènes : conception de séances en autonomie par des enseignants à partir d'une ressource du type de celles mise à disposition dans des *sourcebooks* d'histoire des mathématiques. D'où l'intérêt d'un rattachement à des cadres didactiques généraux, permettant d'insérer dans une conversation scientifique d'ensemble des résultats qui n'auraient pu, sans cela, qu'apparaître comme isolés. Soulignons quelques résultats :

- Les enseignants font des choix très semblables, à la fois dans ce qu'ils retiennent (aspects algébriques et algorithmiques, allant jusqu'à la programmation en Python) et dans ce qu'ils ne retiennent pas (lien avec la dérivation ou les limites, lien avec la théorie des nombres). La composante institutionnelle en rend bien compte, si l'on fait intervenir outre les programmes actuels des choix des programmes stables depuis une vingtaine d'année. Ainsi, le fait de ne plus présenter, depuis les années 2000, l'approximation affine locale comme l'un des aspects de la dérivation peut expliquer que ce changement de point de vue ne semble pas disponible aux enseignants.
- Nous identifions des schèmes d'usage de documents historiques en classe, de deux échelles de temps :
 - Pour ce qui est de l'insertion de la séance à l'échelle de l'année, on peut distinguer *a priori* trois schèmes d'usage possible d'une séance construite autour d'un document historique : *forward-looking* (pour introduire une notion ou une procédure nouvelle), *topic-specific backward-looking* (pour trouver une application de fin de chapitre, montrant la richesse d'une notion récemment étudiée), *non-specific backward-looking* (pour revenir sur plusieurs notions et amener les élèves à faire des liens). Les cinq enseignants ont fait ce dernier choix, pour revenir sur les racines carrées, les ensembles de nombres, et l'algorithmique-programmation.
 - A l'échelle de la séance, les données montrent deux schèmes distincts et symétriques quant à la lecture de texte : le choix *zoom-out* part de la lecture ligne à ligne pour finir vers des questions de compréhension plus générale et plus ouvertes (quel est l'objectif du texte ? quels en sont les étapes ? est-il clair / compréhensible / rigoureux / démonstratif ?) ; le choix *zoom-in* commence par une première lecture générale et réserve le ligne-à-ligne pour une deuxième phase. Une seule enseignante a fait le choix du *zoom-in*, ce qui reflète un élément de ses composantes sociales et personnelles : membre d'un groupe IREM travaillant sur les liens entre français et mathématiques, elle est acculturée à des modes de lecture de texte et à des concepts de didactique de la compréhension de texte.
 - Le premier point semblerait indiquer des choix de contenus *a minima*, avec une dévolution de tâche calculatoires et de programmation. Le texte fonctionnerait ici comme objet technique, comme un mode d'emploi indiquant un algorithme à appliquer, d'abord à la main, puis en le programmant. Les données montrent cependant que 4 des 5 séances ne se limitent pas à cette fonction technique, et cherchent à faire jouer au texte le rôle d'objet de curiosité et de réflexion. Cette analyse repose aussi bien sur l'étude des fiches-élèves que sur celle des déroulés. L'allocation d'un certain temps consacré au retour réflexif sur le texte est ici un facteur déterminant ; c'est d'ailleurs celui qui manque dans la séance que nous qualifions de purement technique. En croisant les déroulés avec les entretiens, on met au jour un autre facteur clé visant à garantir l'exigence cognitive de la situation et la fonction épistémique de l'objet d'étude. On le saisit le plus nettement dans les données relatives à l'enseignante T1. La comparaison des différents brouillons de fiche-élève montre qu'elle a progressivement supprimé des questions. Cela pourrait refléter le fait qu'elle estime ces questions peu importantes : le temps étant compté, elles sont éliminées. Les entretiens montrent que c'est le contraire qui se joue, ce qui révèle un schème général de conception de séance : l'enseignante

estime qu'il est plus intéressant d'amener les élèves à poser eux-mêmes une question que de leur demander de répondre à des questions posées par l'enseignante. Dans la conception de séance, celle-ci arbitre entre trois possibilités : questions posées dans la fiche-élève, questions posées à l'oral par l'enseignante, questions dont on attend que l'objet d'étude les suscite chez les élèves. Outre la nature de la question (technique ou épistémique), d'autres facteurs interviennent dans cet arbitrage. Ainsi, certaines questions appellent des réponses qui ne sont pas de nature mathématique au sens strict (« ce texte est-il rigoureux ? ») ; pour celles-là, l'enseignante préfère ne pas les coucher par écrit, quand bien même elle a la ferme intention de faire réfléchir les élèves dessus.

- La littérature montre que l'inquiétude d'enseignants face à des séances qu'ils estiment inhabituelles et ardues est l'un des principaux facteurs conduisant à abaisser l'exigence cognitive de la situation. Les entretiens montrent que les quatre enseignants ayant maintenu le haut niveau cognitif de la situation ne la lisent pas comme une séance difficile, ni pour les élèves ni pour eux. Parmi les différentes potentialités du texte, ils ont choisi de limiter les contenus les plus techniques à des choses déjà assez familières des élèves, à la fois pour les mettre en relation et pour laisser du temps pour aborder des questions ouvertes dans le cadre d'une démarche d'interrogation et de réflexion. Même si le travail sur texte historique est vu comme inhabituel, voire très inhabituel, les enseignants ne voient pas là une source de grande difficulté, car, pour eux, cette séance inhabituelle s'insère dans un réseau d'autres séances inhabituelles et visant des objectifs semblables (du type « *do mathematics* ») : problèmes ouverts, problèmes de modélisation, narrations de recherche, situations de construction de définition. Ces enseignants expérimentés ont une pratique routinière des séances non-routinières, et l'aspect « historiques » de cette séance non-routinière n'est pas nécessairement vu comme très saillant.
- Ce dernier point pourrait étonner, et l'on s'interroge légitimement sur la question de la place de l'histoire des mathématiques dans ce projet. Nous détaillons dans (Chorlay, 2022a) les raisons pour lesquelles ce texte particulier nous semble avoir un faible potentiel quant à l'introduction d'éléments d'histoire des sciences de la classe. Cela nous permet de revenir sur la distinction que nous faisons plus haut (partie 1,5 de cette Note) : un travail sur document historique peut être déconnecté de tout objectif d'enseignement de l'histoire des sciences.

Rappelons, pour finir, ce que cette étude est et n'est pas. Elle est exploratoire en deux sens : du point de vue empirique, elle documente des pratiques non décrites dans la littérature de recherche ; du point de vue théorique, elle vise à identifier un réseau de concepts permettant d'insérer des questions spécifiques à la communauté HPM dans des problématiques générales de description et d'analyse de pratiques enseignantes. En revanche, l'étude ne porte ni sur l'impact des séances sur les élèves, ni sur d'éventuels critères d'évaluation de la qualité des séances. Enfin, même si la situation de conception et d'enseignement a été décrite comme « ordinaire » (modulo le choix de l'artefact initial par le chercheur), les cinq enseignants ne constituent en rien un échantillon représentatif ou typique. Les cinq enseignants ayant choisi de s'engager dans la production d'un chapitre pour un ouvrage du réseau des IREM étaient, pour quatre d'entre eux, déjà engagés soit dans ce réseau soit dans des collaborations de recherche avec des didacticiens.

3. Perspectives de recherche

3.1 Point de vue des méthodes – Point de vue des problèmes

Je regroupe sous le chapeau « point de vue des méthodes – point de vue problèmes » une série de projets de recherche historiques portant sur le structuralisme en mathématiques. Ces termes sont empruntés à Bourbaki : en 1951, à l'occasion de débats internes sur le futur livre d'analyse fonctionnelle, ils notent en compte rendu de réunion

On y [en analyse fonctionnelle] trouve deux points de vue, celui des méthodes, qui est bourbachisable (algèbres normées, spectres, etc.), – et celui des problèmes qui ne l'est pas (équations différentielles et aux dérivées partielles). Nous nous bornerons au premier¹³⁹.

Le projet, d'une nature non évaluative, vise à étudier le structuralisme représenté en particulier par Bourbaki : (1) en articulant les pratiques et les discours des acteurs sur leurs pratiques, avec un accent sur les tensions et les dynamiques (2) en étudiant les frontières de cette pratique, ses interactions avec des pratiques organisées et décrites différemment, les limites qu'elle se reconnaît (« nous nous bornerons au premier ») ou qu'on lui reconnaît.

3.1.1 « Bourbachiser »

Cette citation sur les deux points de vue permet de souligner plusieurs caractéristiques de nos projets en histoire contemporaine :

- Ouvrir le corpus étudié, en particulier en s'appuyant sur des fonds d'archives très importants, parfois disponibles depuis peu, et encore peu exploités (pour la partie 1953-2009)¹⁴⁰. La variété des documents disponibles (brouillons et rédactions provisoires, plans successifs, comptes rendus de débats et de décisions, rapports sur certains points, correspondances privées) permet d'étudier les dynamiques de rédaction à différentes échelles ainsi que le discours des acteurs sur leur pratique. Ces fonds d'archives suscitent d'ailleurs un regain d'intérêt chez les historiens¹⁴¹.
- Ne pas se limiter aux travaux et débats sur les aspects élémentaires des « structures mères » (algébriques, topologiques et d'ordre) mais montrer les liens entre le travail de sélection et de structuration de contenus à intégrer dans les *Eléments de mathématique* et l'activité des membres de Bourbaki comme mathématiciens actifs sur différents fronts de la recherche (géométrie et topologie algébrique, analyse, théorie des nombres, groupes et algèbres de Lie). Ce travail de sélection, de mise en ordre (en particulier par le choix d'un plan) et de

¹³⁹ *La tribu*, n°25. Compte rendu du Congrès œcuménique de Pelvoux (25 juin - 8 juillet 1951).

¹⁴⁰ Dans cette partie, toutes les références des citations renvoient au fond de l'Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki (<http://sites.mathdoc.fr/archives-bourbaki/>). Beaucoup d'autres documents sont à considérer, comme la correspondance entre Henri Cartan et Jean-Pierre Serre (édités par M. Audin, Société Mathématique de France, 2011), ainsi que d'autres fonds d'archive (liste non-exhaustive) : Fonds Delsarte et Bourbaki (Institut Elie Cartan, Université de Lorraine), fonds d'archives personnelles déposés à l'Académie des Sciences de Paris (Dieudonné).

¹⁴¹ Un regain d'intérêt illustré par :

- La thèse récente de Gatién Ricotier (2021) sur les *Projets collectifs et personnels autour de Bourbaki dans les années 1930 à 1950*.
- La thèse en cours de Camille Rolland, pour l'instant centrée sur l'algèbre linéaire : *Le structuralisme en acte. Une étude génétique du livre d'algèbre* (Archives Henri-Poincaré, UMR 7117, Université de Lorraine, Université de Strasbourg. Direction : Christophe Eckes).

Cette seconde thèse s'inscrit dans un projet plus général visant à croiser histoire des mathématiques et génétique textuelle, sous l'impulsion de C. Eckes et E. Haffner.

« simplification » est une constante du travail du groupe, qui se donnait comme projet initial de « fixer pour 25 ans les matières du certificat de calcul différentiel et intégral en rédigeant en commun un traité d'Analyse. [André Weil ajoute] Il est entendu que ce sera un traité aussi moderne que possible. » (Réunion du 10/12/1934). Rappelons que ce lien avec des domaines ni élémentaires ni algébriques est manifeste dès les premières années du groupe, pendant lesquelles les questions les plus discutées sont : (1) Quelle théorie de l'intégration retenir (par la mesure ou par les fonctionnelles linéaires) ? (2) Quelle place accorder aux formes différentielles¹⁴² ? (3) La théorie des espaces de Banach va-t-elle devenir un outil utile à tous les mathématiciens (auquel cas il faut l'intégrer) ou non ? Les archives témoignent de ce travail d'évaluation de l'état et des mérites comparés de différentes approches, travail qui s'étend sur plusieurs décennies. Illustrons, par un simple échantillon :

La théorie des groupes d'homotopie supérieurs (Hurewicz) et celle des espaces fibrés apparaissent au Congrès comme pleines d'intérêt et d'avenir, mais leur état présent semble trop larvaire pour pouvoir dès maintenant faire l'objet d'un exposé didactique. Ici encore, on attendra pour prendre une décision plus motivée un rapport détaillé de Charles [Ehresmann] sur ces théories. (*La Tribu* n°10, avril 1944, p. 2).

- La citation sur les deux points de vue introduit le néologisme « bourbachisable », donc le verbe « bourbachiser ». Elle invite donc à l'étude du *travail* mené au sein du collectif (plutôt que du seul produit), de ses modalités, de ses régulations, des tensions et limites qu'il met au jour, de ses liens avec d'autres projets individuels ou collectifs¹⁴³. Elle invite à comparer d'une part les termes utilisés par les acteurs pour décrire et justifier projets et choix, d'autre part les choix effectivement menés à bien, avortés, ou simplement abandonnés en cours de route. Sans d'ailleurs préjuger du fait que les pratiques reflètent des choix et des décisions : contraintes et ressources peuvent modeler les pratiques indépendamment – voire en dépit – des valeurs et des objectifs proclamés.

Dans ce cadre, mentionnons plusieurs terrains d'enquête plus spécifiques. Les archives montrent que les discussions et choix s'appuient sur des catégories épistémologiques. Rien d'étonnant, certes, à ce que les auteurs évoquent régulièrement la « généralité », la « simplicité », la « rigueur », « l'utilité » ou l'« abstraction ». Ces sources invitent à un travail d'épistémologie historique visant à étudier le sens que les acteurs donnent à ces termes, un sens qui se révèle à la fois dans les débats explicites – et parfois contradictoires – à leur propos, et dans les choix de rédaction qu'ils sont censés guider. Des termes qui circulent dans des collectifs divers, y compris à l'échelle internationale. Soulignons plusieurs points nous semblant mériter l'étude :

- La question du *général* est l'une des constantes du discours bourbachique et contribue à donner sa physionomie à l'ensemble du projet : élimination des théories particulières, exposé allant du général au particulier. Dès le départ on peut lire :
La parole est alors donnée à Mandelbrojt qui énonce assez péniblement un principe de généralité qu'il désire voir adopter. En bref il s'agit de convenir qu'en aucun cas on n'exposera, dans le cours même de la rédaction, et dans le but d'énoncer une proposition avec son maximum de généralité, des théories trop particulières ou trop spéciales (...). L'idéal, pour l'orateur, serait que toutes les théories générales et abstraites nécessaires, soient présentées dès le début du traité. (*Réunion bourbachique* du 13/1/1935, p. 3)

¹⁴² Ces points sont débattus longtemps. Par exemple, on lit encore en 1950 : « Weil réclame, avant tout, que l'on ait un système de notations permettant d'écrire, sans trop d'abus de langage, des formules ressemblant à $\sin x$, dx , $d(xy) = x \cdot dy + dx \cdot y$ (dans un groupe de Lie), et à toutes les formules de Papa Cartan, dont le succès montre qu'elles veulent sûrement dire quelques choses. » (*La Tribu* n°22, 1950, p. 25).

¹⁴³ Un exemple important est donné par la question de la place de la théorie des catégories dans les *Eléments*, au moment où plusieurs des membres de Bourbaki la mettent au premier plan dans leurs travaux (Cartan et Eilenberg, puis Serre, Cartier et Grothendieck) (Krömer, 2006, 2007).

Mais, dans de nombre cas, la question du bon *degré* de généralité se pose. Ainsi sur les espaces de Banach :

Il faut avouer que les espaces de Banach, pour intéressants et utiles qu'ils se soient déjà montrés, n'ont pas amené encore en analyse la révolution que certains attendaient. (...) Peut-être cependant sont-ils à la fois trop généraux pour se prêter à une théorie aussi précise que celle de l'espace de Hilbert, et trop particuliers pour l'étude des opérateurs les plus intéressants. (Weil, 1948, p. 316)

Un travail de grande ampleur est nécessaire pour approfondir la remarque de Christian Houzel :

Bourbaki n'a jamais cherché la généralité maximale. Au contraire, les Bourbakis ont visé la généralité minimale qui puisse englober ce qu'ils connaissaient : c'est d'ailleurs pourquoi le niveau de généralité a évolué avec les rééditions successives du traité. (cité dans (Mashaall, 2000, p. 80))

- Le discours des acteurs se construit aussi autour de catégories dévalorisées, telles que le « particulier », ou le « calcul » (opposé, rhétoriquement, au « concept »). Plus surprenant, on trouve régulièrement une dévalorisation de la « rigueur » ; ainsi dès le départ, par André Weil : Il faut ôter de l'esprit d'un certain nombre de mathématiciens (...) un certain préjugé de rigueur. (...) dans la plupart des traités classiques [d'analyse], les théorèmes fondamentaux : moyens de calculs, théorèmes d'existence, etc... ; sont présentés avec un luxe de précautions impressionnant ; les hypothèses demandées sont souvent surabondantes, et il y aura lieu, dans bien des cas, de revenir sur tous ces théorèmes. Il importe de donner aux usagers une collection d'outils, ces outils devant être aussi robustes et universels que possible. (*Réunion bourbachique* du 13/1/1935 (p. 4))

La « rigueur » est ici associée aux « particulier », au « détail » et au « calcul » ; elle s'oppose au général (par exemple (Weil, *Ensembles*, état 2)). Un premier travail exploratoire¹⁴⁴ suggère que cette dévalorisation de la « rigueur » permet à Bourbaki de se distinguer des rédacteurs des traités d'analyse des générations précédentes et du sens que la rigueur a pris en analyse à la fin du 19^{ème} siècle : eux sont « modernes » ; la « rigueur », c'est la modernité d'hier.

D'autres dévalorisations peuvent aussi surprendre, ainsi lorsque Bourbaki critique sévèrement les exposés trop abstraits, et demande plus d'exemples et de figures :

Le Congrès étant fort réticent quant aux structures, a trouvé cette introduction pédantesque. (...) On donnera de nombreux exemples. (...) Enfin Dieudonné (oui !!) demande des diagrammes pour éclairer la question. (*La Tribu*, n°28, 1952, p. 10).

On voit donc Bourbaki se confronter à la question des limites de l'abstraction légitime et fructueuse. Ces débats internes pourraient utilement être mis en regard des critiques reçues par Bourbaki, elles-mêmes reprenant souvent la charge d'*abstract nonsense*.

- Un point de tension se manifeste entre la vocation initiale du traité – montrer l'unité des mathématiques – et des sensibilités personnelles qui renvoient aux spécificités de différents domaines de recherche. On le sait, le thème de l'unité de la mathématique est le fil rouge du texte programmatique sur l'*Architecture des mathématiques* (Bourbaki, 1948) ; il est présent dès le départ, comme André Weil l'explique dans une lettre à sa sœur :
Mais tu ne vois sans doute pas que les mathématiques modernes ont pris, non seulement une étendue, mais une complexité telle qu'il est devenu urgent, *si* la mathématique doit

¹⁴⁴ Un premier travail – exploratoire – sur ce thème a été exposé à l'occasion du PHILMATH-INTERSEM (Juin 2019) : *Did Bourbaki care about rigour?*

subsister et ne pas se dissocier en un tas de petits bouts de recherches, d'accomplir un énorme travail d'unification (...). C'est tout le sens de Bourbaki. (Weil, 1972, p. 254).

Loin d'être donnée – ou aisément garantie par une approche fondée sur la notion de structure – l'unité est à construire par un *travail* d'unification. Mais dans chaque cas particulier, des tensions peuvent se présenter : « Par tempérament je suis né arithméticien et algébriste, quelque peu géomètre, point du tout analyste » (Weil, 1979, p. 550) Ces ancrages personnels donnent lieu à des débats, doutes ou divergences : « Chevalley tient à la séparation entre problèmes algébriques et problèmes arithmétiques (ces derniers englobant : modules, divisibilité, anneaux locaux). Il est peut-être intéressant de les grouper ensemble, et assez tard dans le livre d'Algèbre (...). » (Congrès de Strasbourg et Paris, juin 1946).

- La question de la géométrie, son sens et sa place, dans le travail bourbachique, ouvre sur plusieurs questions importantes. Des chapitres de géométrie élémentaire sont envisagés dès le départ (discussions au Congrès de Dieulefit, 1938), mais la place et le contenu ne se stabilise pas dans l'architecture (mouvante) des *Eléments*, tiraillée entre des aspects élémentaires (algèbre linéaire et multilinéaire, action de groupe) et la perspective d'inclure dans les *Elément* un traitement « moderne » de géométrie différentielle. Au début des années 1950, la partie « élémentaire » finit par donner lieu à trois rédactions (état 1 : 123 pages ; état 2 : 157 pages ; état 3 : 82 pages), par des auteurs différents, et montrant des remaniements considérables. Une étude de cas portant sur ces manuscrits doit permettre de donner chair, au plus près des textes, aux multiples tensions identifiées plus haut.

A terme, des ouvertures sont possibles dans deux directions. Une ouverture vers des questions d'histoire de l'enseignement est possible, en faisant la jonction avec les travaux récents ou en cours sur les origines du mouvement des mathématiques modernes¹⁴⁵. Dans une autre direction, on peut s'interroger sur les descriptions de l'approche de Bourbaki comme « géométrisation », comme dans :

Si l'on tente de trouver une « signature » à l'œuvre mathématique de Laurent Schwartz en analyse, on ne peut manquer d'évoquer l'œuvre de Bourbaki (...). En effet, sa façon de mettre en œuvre les résultats abstraits et généraux de l'analyse fonctionnelle, cette gigantesque opération de géométrisation des objets traditionnels de l'analyse (...) est dans la plus pure tradition bourbakiste (...). (Bourguignon, 2002, p. 34¹⁴⁶).

3.1.2 « Papa Cartan »

Un approfondissement de l'étude de l'œuvre mathématique d'Elie Cartan est elle aussi rendue possible par la mise à disposition assez récente de fonds d'archives encore peu exploités¹⁴⁷. Nous proposons d'approfondir l'étude de cette œuvre sous un angle qui peut sembler paradoxal, celui de ce qui la relie et la distingue du structuralisme à la Bourbaki. C'est bien la tension entre, d'une part, un écart considérable dans les manières de faire et d'écrire les mathématiques, et, d'autre part, des points de jonctions problématiques mais nombreux, qui suggère que cet angle d'attaque et ce travail comparatif peuvent être éclairants.

Rappelons que les liens avec « Papa Cartan » (Elie Cartan, père de Henri Cartan, étant désigné ainsi dans les comptes rendus des réunions bourbachiques où il est invité) ne se limitent pas au soutien moral

¹⁴⁵ Voir l'exposé récent de Wendy Goemans et Dirk de Bock: *The "best" axiom system for teaching geometry to secondary school students: A source of controversy in the early 1960s*, présenté au colloque CERME12.

Plus généralement, aux travaux de Dirk de Bock : <https://www.kuleuven.be/wieiswie/nl/person/00002527>

¹⁴⁶ Bourguignon, J.-P. (2002). Laurent Schwartz, 1915-2002. *La jaune et la rouge*, 580, 33–35.

¹⁴⁷ Déposé à l'Académie des Sciences en 2009, ce fond a fait l'objet d'un travail de mise en ordre : Haffner, E. (2017). Textes & Documents : Esquisse d'une cartographie des cahiers d'Elie Cartan. *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 23(1), 125–182.

et institutionnel d’un mandarin envers un groupe de jeunes turcs. L’œuvre du discret protecteur est l’objet non seulement d’une grande admiration mais aussi d’un travail d’appropriation :

(...) *Cartan’s work was taken (at the suggestion of A. Weil) in 1936 to be the central theme of the seminar organized by Julia*¹⁴⁸. *In 1939, at the celebration of Cartan’s scientific jubilee, J. Dieudonné could rightly say to him “ (...) vous êtes un ‘jeune’, et vous comprenez les ‘jeunes’”* (Chern & Chevalley, 1952, p. 218)

Le projet bourbachique initial étant de rédiger un traité d’analyse « moderne », ce sont les contributions de Cartan à la théorie des équations aux dérivées partielles, des invariants intégraux, à la géométrie différentielle et à la théorie des groupes et algèbres de Lie qui sont souvent regardées comme incarnant cette modernité. En témoignent les échanges, dès 1935, sur l’algèbre extérieure et les formes différentielles, ainsi que la commande à Ehresmann (élève de Cartan) d’un rapport sur la géométrie différentielle.

Le travail de lecture et d’appropriation de l’œuvre de Cartan s’avère cependant difficile, et l’on peut lire dans la citation de 1951 opposant le « point de vue des méthodes » au « point de vue des problèmes » une forme de bilan du rapport entre Bourbaki et Cartan, prenant acte d’une profonde hétérogénéité des pratiques. Cartan avance *dans* et *par* le calcul (notion toujours connotée négativement chez Bourbaki) ; loin d’exposer du général au particulier, il procède par séries d’exemples dont la disposition et l’articulation dévoilent progressivement des méthodes dont un ou deux grands théorèmes de structure ne rendraient pas compte¹⁴⁹. Plus précisément, les « grands théorèmes » sont bien présents, mais interviennent en cours d’exposé de ce qui se présente avant tout comme le déroulement d’une « méthode », voire d’un « algorithme »¹⁵⁰. Outre son intérêt pour affiner la comparaison des pratiques entre Bourbaki et Elie Cartan, l’étude de la structure des traités de Cartan permet de nouer des fils avec des questions travaillées par les historiens de mathématiques plus anciennes¹⁵¹, sur la structure des textes d’algorithmes et les modalités d’exposition par séries de problèmes¹⁵² ; d’approfondir, aussi, des questions partagées par l’historien et le didacticien, sur les fonctions des exemples et les modes d’expression du général.

Le déplacement du regard vers l’œuvre d’Elie Cartan et sa réception permet donc de multiplier les angles et d’approfondir d’autres questions déjà rencontrées à propos de Bourbaki. Mentionnons-en encore deux.

Premièrement, Bourbaki n’est pas le seul à chercher à s’approprier les travaux d’Elie Cartan tout en souhaitant les refondre et les réécrire dans des cadres théoriques ou selon des canons de rédaction profondément différents de ceux du maître. La catégorie analytique de « réécriture » est bien ici pertinente, pour une série de textes dont le but n’est pas d’abord de prolonger le travail mathématique, mais bien d’exposer un contenu – supposé invariant – dans un cadre différent. Outre Bourbaki, plusieurs exemples importants peuvent être étudiés : livre de Kähler sur la théorie des systèmes d’équations

¹⁴⁸ Futur « séminaire Bourbaki ».

¹⁴⁹ Bourbaki n’est pas le seul à avoir du mal à isoler et formuler les idées générales que Cartan expose à travers des séries d’exemples. Weyl confesse : “*I did not quite understand how he does this in general, though in the examples he gives the procedure is quite clear.*” (Weyl, 1938, p. 601)

¹⁵⁰ Ces aspects ressortent d’un travail exploratoire portant en particulier sur (Cartan, 1935), et exposé dans le cadre des rencontres « Des sources en histoire des mathématiques » organisées au CIREM (4-8/11/2013) par le GDR 3398 « Histoire des mathématiques ».

¹⁵¹ Des points de jonctions de ce type entre historiens de périodes éloignées ont déjà donné à des travaux, rares mais riches, comme en témoigne la thèse d’Anne Robadey sur les modalités d’exposition de Poincaré (2006).

¹⁵² Soulignons que ces questions sont aussi travaillées à l’interface entre histoire et didactique des mathématiques : Gosztonyi, K. (2022), *Series of problems in Clairaut’s Elements of geometry* : interaction between historical analysis and mathematics education research. *ZDM – Mathematics Education*, 54(7). Online first : <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01441-8>

différentielles (1934)¹⁵³ ; tentative de Hermann Weyl dans sa recension de la théorie du repère mobile : « *The chief aim of this review shall be to bring out the axiomatic foundation of the theory.* » (Weyl, 1938, p. 598). Comme Bourbaki, Weyl admire le contenu mais déplore le mode d'exposition de Cartan :

All of the author's books (...) are highly stimulating, full of original viewpoints, and profuse in interesting geometric details. Cartan is undoubtedly the greatest living master of differential geometry. This review is incomplete in so far as it has tried to lay bare the roots, rather than describe the rich foliage of the tree which his book unfolds before his reader. (...) Nevertheless, I must admit that I found the book, like most of Cartan's papers, hard reading. Does this reason lie in the great French geometric tradition on which Cartan draws, and the style and content of which he takes more or less for granted as common ground for all geometers, while we, born and educated in other countries, do not share it? (Weyl, 1938, p.601)

Cette citation de Weyl ouvre sur le second axe de questionnement, sur le sens de la catégorie « géométrie » : tradition(s) géométrique(s), intuition géométrique, géométrisation. Weyl n'est pas le seul à décrire Cartan comme *avant tout* ou *profondément* géomètre :

Raised in the French geometrical tradition, Cartan had a constant interest in differential geometry. He had the unusual combination of a vast knowledge of Lie groups, a theory of differential systems whose invariant character was particularly suited for geometrical investigation, and, most important of all, a remarkable geometrical intuition. As a result, he was able to see the geometrical content of very complicated calculations, and even to substitute geometrical arguments for some of the computations. The latter practice has often been baffling to his readers. But it is an art whose presence is usually identical with the vigor of a geometrical thinker. (Chern, & Chevalley, 1952, p. 220)

La question devient intéressante quand on croise avec l'usage par Cartan lui-même des termes du même champ lexical. Ce dernier invite régulièrement son lecteur à bannir « autant que possible l'intuition géométrique » (Cartan, 1936). Comme on le voit dans la citation ci-dessous, il mobilise des catégories plus fines que celles de ses lecteurs et les articule explicitement – mais d'une manière qui reste à comprendre – aux questions de généralité, de méthode, et de classification des problèmes selon leur « nature » :

Dans la communication [119] au Congrès de Bologne (1928), j'ai donné à la théorie des systèmes mécaniques à liaisons non holonomes une forme géométrique intrinsèque s'inspirant des mêmes considérations. Mais il se passe ici quelque chose de remarquable. Le problème d'équivalence que pose la théorie de ces systèmes mécaniques, étudié par ma méthode générale, conduit à une suite indéfinie de cas qui ne peuvent pas être rangés dans un seul et même schéma géométrique. Chaque cas peut être géométrisé, mais la géométrisation devient de plus en plus artificielle et n'atteint jamais la totalité des cas possibles. Mes méthodes générales permettent donc de fournir des schémas de géométrisation, quand ils existent, et de montrer l'inutilité de ces schémas, quand la nature même de la question s'y oppose. (Cartan, 1931/1974, p. 81)

¹⁵³ Le projet de réécriture est présenté dans l'introduction : « (...) l'usage de la notion d'idéal différentiel permet, me semble-t-il, une simplification conceptuelle ; mais il s'agit pour l'essentiel dans ce qui suit d'une présentation de la théorie de Cartan (étendue sur des détails). Dans la mesure du possible nous conserverons les termes de Cartan, pour que cet ouvrage réponde à son objectif, et constitue un commentaire à l'œuvre – d'accès difficile – du grand mathématicien français. » (Kähler, 1934, p. 2 ; notre traduction).

3.2 Didactique de l’analyse

Les deux travaux sur la définition de la notion de limite de suite conduisent naturellement à deux familles de questions, l’une relative à la réception par les élèves/étudiants de cours magistraux, l’autre relative à la robustesse et aux conditions de diffusion de l’ingénierie (Chorlay, 2019a).

3.2.1 Cours magistraux : intégration de l’axe enseignant-étudiants

L’étude comparative sur trois cours magistraux exposant la définition formelle de la limite d’une suite numérique (Chorlay, 2022b) portait exclusivement sur les pratiques enseignantes. Plus précisément, sur les connaissances et les évaluations (par les enseignants) de différents leviers d’action (*action plans*) classiques : usage de figures et de métaphores ; appui sur des définitions alternatives ou erronées ; nature et fonction des exemples ; discours méta portant soit sur la notion spécifique en jeu soit sur le rôle des définitions. Par ailleurs, la démarche était non évaluative (du moins pas directement). Il semble cependant naturel de confronter les évaluations d’utilité des différents enseignants – en particulier lorsqu’elles divergent soit entre enseignants soit par rapport à la littérature didactique – et les impacts potentiels ou avérés sur les étudiants en termes d’apprentissage.

Les données déjà recueillies sont susceptibles d’analyses plus complètes permettant de décrire plus finement les apprentissages *potentiels* dont les pratiques effectives des enseignants sont porteuses. En particulier, l’analyse du discours¹⁵⁴ des enseignants en termes de « proximités-en-acte » (Robert & Vandebrouck, 2014, 2021) est particulièrement adaptée à une étude des moments d’exposition de connaissances centrée sur l’axe enseignant-étudiants, là où (Chorlay 2022b) visait l’étude de la dispersion des pratiques entre enseignants. S’appuyant sur la notion de zone proximale de développement (ZPD, (Vygotski, 1934/1997)), on cherche ici à décrire ce qui, dans l’activité de l’enseignant, vise à « rapprocher » les connaissances nouvelles visées par l’enseignement des connaissances « déjà-là » pour les étudiants. Ce « déjà-là », les intentions de rapprochements sous-jacentes aux actions de l’enseignant, ainsi que les activités qu’elles sont susceptibles de déclencher chez les étudiants font l’objet d’hypothèses et de modélisations par l’observateurs. Un croisement avec un axe particulier-général invite à distinguer dans le discours de l’enseignant trois familles de proximités : ascendantes (visant à relier un cas particulier à la notion générale et abstraites), descendante (montrant le général dans le particulier, l’exemple, le cas) et horizontales (reliant deux éléments de même degré de généralité). Ces outils doivent en particulier permettre de jeter une lumière nouvelle sur l’usage des exemples, des figures et des métaphores. Une étude empirique complémentaire sur les situations d’apprentissages venant après le cours magistral (TD, évaluations) permettrait de tester des hypothèses formulées dans le cadre de cette approche. On pense à la question, non tranchée, de l’utilité ou inutilité des « proximités anticipatrices » par lesquelles les enseignants cherchent à prévenir les étudiants contre des idées fausses qu’ils pourraient se faire ou des erreurs qu’ils pourraient commettre (Robert & Vandebrouck, 2014) ; cette question invite à revenir sur ce que dans (Chorlay, 2022b) nous désignons comme la « place du négatif ». On pense aussi à l’hypothèse du fonctionnement cognitif des notions introduites en cours comme « pseudo-concepts » (Bridoux et al., 2016), susceptibles de fournir le support d’un processus de conceptualisation dont l’échelle temporelle reste à déterminer.

Passons du potentiel à l’actuel. Une étude empirique de la réception du cours magistral par les étudiants nous semble nécessaire, aussi bien pour tester certaines des hypothèses didactiques sur lesquelles repose (Chorlay, 2022b) que pour tester les évaluations d’utilité de tel ou tel *action plan* qui guidaient de

¹⁵⁴ On peut entendre ce terme *latu sensu*, en enrichissant l’analyse par une étude portant attention aux différents registres sémiotiques utilisés (registre rhétorique à l’oral et à l’écrit, formalisme mathématique, diagrammes, gestes) et à leurs relations.

manière décisive les choix des enseignants. Bien sûr, une étude des situations d'apprentissages venant après le cours magistral contribuerait à éclairer ces points en offrant des occasions d'observer l'activité des élèves (au-delà de : écouter le cours magistral et recopier le tableau). Cette démarche aurait cependant l'inconvénient d'étudier d'autres situations d'apprentissages que celle du cours magistral au sens strict. Des approches par questionnaires ou par entretiens avec des étudiants immédiatement après le cours permettraient de palier ce défaut. Une analyse plus fine nous semble être permise par la méthode de recueil de données utilisée par Lew et al. (2016). Les auteurs filment un épisode de cours magistral, en l'occurrence une démonstration d'analyse en L3. L'enseignant et six autres mathématiciens visionnent la vidéo – indépendamment – et sont invités à l'analyser en termes de phases : découpage, caractérisation de chaque phase par son objectif et son idée principale. La cohérence des sept analyses tient lieu d'analyse *a priori* et rend compte du point de vue mathématicien sur cet exposé de démonstration. Un petit échantillon d'étudiants ayant suivi le cours est ensuite convié (un par un) à des entretiens cliniques avec les chercheurs, la vidéo de l'épisode étant mise à disposition. Cette étude, que les auteurs reconnaissent comme exploratoire, vise à

(...) examine whether the students identify the main points that a mathematics professor is trying to convey in a lecture, and, if they do not, to consider the factors that could be contributing to this phenomenon. (...) Significantly more theoretical work is needed on the processes involved in how students interpret what their professors are saying, connect it to their own mathematical understanding, and refine their mathematical models as a consequence of what they have heard or interpreted. (Lew et al., 2016, p. 163, 167).

Dans cette étude, les entretiens avec les étudiants procèdent en quatre phases, permettant d'identifier précisément des éléments particulièrement susceptibles de déclencher compréhension ou explicitation¹⁵⁵. Ce protocole nous semble à la fois très riche, et à adapter à notre étude de cas. En effet, nos observables ne sont pas des « idées principales » mais les effets de conceptualisation attendus de la mise en œuvre de quatre leviers d'action classiques. Les analyses de (Chorlay, 2022b) permettent d'identifier une série de points à tester, liés aux divergences entre évaluations d'utilité soit entre enseignants soit avec les travaux en didactique : impact des métaphores, des diagrammes, des exemples ; interactions entre définitions et théorèmes. Les analyses sémiotiques et en termes de proximité permettront d'élargir la gamme des observables. En outre, des éléments apparaissant dans les trois vidéos mais non étudiés dans (Chorlay, 2022b) suggèrent que les difficultés des étudiants relèvent en partie de malentendus globaux et assez indépendant des caractéristiques spécifiques de la notion en jeu, en particulier sur la fonction des exemples. Cela rejoint les analyses de Lew et al. (2016) montrant les difficultés des étudiants à repérer la fonction que les enseignants assignent à certaines parties du discours (par exemple : faire un diagnostic de la situation pour sélectionner les outils pertinents, indiquer que telle manœuvre technique a valeur de méthode).

3.2.2 De l'ingénierie de recherche à la ressource : répliation, *upscaling* et réception

L'ingénierie didactique présentée dans (Chorlay, 2019a) conduisait à la formulation et à la validation, dans des conditions ordinaires (de durée, de public), d'une définition correcte de la notion de suite tendant vers $+\infty$. Les deux enseignants du secondaire co-concepteurs de l'ingénierie continuent à l'utiliser dans leurs classes, d'une manière qu'ils jugent satisfaisante¹⁵⁶ et que (Chorlay, 2019a) a cherché

¹⁵⁵ Des rapprochements méthodologiques avec les travaux en didactique de la physique sur les entretiens d'explicitation et les conditions d'émergence de l'esprit critique pourraient être envisagés.

Décamp, N., & Viennot, L. (2020). *Developing critical thinking in Physics: The apprenticeship of critique*. T. 7. Contributions from Science Education Research. Springer.

¹⁵⁶ Par exemple, la mise en œuvre en novembre 2022 a conduit à de nouvelles candidatures de définitions produites par les élèves (ces possibilités avaient été identifiées dans l'analyse *a priori*) :

- $\forall A \in \mathbf{R}$ il existe un nombre fini de termes de (u_n) inférieurs ou égaux à A.

à objectiver. En dépit de sa présentation dans des journées de diffusion de la recherche (Alory et al., 2021), la question de sa diffusion reste entièrement ouverte. Cette question est aussi multiforme et rencontre des interrogations générales en didactique des mathématiques. Se posent en effet plusieurs questions non indépendantes :

- Une question de robustesse, dans laquelle on cherche à vérifier l’indépendance de résultats positifs envers les différents paramètres spécifiques des mises en œuvre contrôlées. Nous suivons la proposition de Schoenfeld qui avançait trois critères d’évaluation de la qualité d’une recherche en didactique des mathématiques : la fiabilité (*trustworthiness*), l’importance, la généralisabilité (cité dans (Aguilar et al., 2021)). Le travail sur ce dernier aspect permet de contribuer au champ de recherche sur la répliquabilité des ingénieries, dans des conditions contrôlées mais variables.
- Une question de changement d’échelle (*upscaling*) et de passage d’un produit de recherche à une ressource pour l’enseignement et la formation. Cette question s’articule bien entendu à la précédente, et la création en 2021 de la revue *Implementation and Replication Studies in Mathematics Education* témoigne de l’actualité du thème pour la communauté didactique¹⁵⁷. La question des modalités et des collectifs de travail permettant le développement de ressources fait l’objet de nombreux travaux. La synthèse de Burkhardt et Schoenfeld (2021) ne prend d’ailleurs pas en compte la réflexion menée dans le cadre de la théorie des situations didactiques sur les ingénieries didactiques de développement (Margolinas et al. 2011) (pour une étude de cas sur la réception et les adaptations d’une ressource par les enseignants : (Tempier, 2016)).
- La question de la réception des ressources par les acteurs du système éducatif est à étudier. Avant même le développement d’une ressource, les données analysées dans (Chorlay, 2022b) invitent à prolonger l’étude des modalités d’évaluations par les enseignants d’*action plans* qu’ils ne connaissent pas ou dont ils évaluent négativement soit l’impact soit la faisabilité. Cet approfondissement de l’étude des catégories de perceptions et d’évaluations permet de faire le lien avec les recherches sur les situations de constructions de définition, en particulier autour des tâches de tri (d’objets ou de candidats-définition) et des tâches d’évaluations de candidats-définition (passant aussi par la fréquentation de candidats-définitions erronés).

Outre un thème mathématique commun – les définitions des limites de suite numériques –, les travaux envisagés dans les sections 3.2.1 et 3.2.2 contribuent de deux manières différentes à l’identification de leviers de développement professionnels des enseignants, soit par la confrontation avec les perceptions étudiantes, soit par l’identification de conditions d’acceptabilité de ressources.

3.3 Didactique de l’algèbre linéaire

Depuis 2021 et en collaboration avec Nicolas Grenier-Boley¹⁵⁸, un travail sur l’enseignement des bases de l’algèbre linéaire abstraite a été engagé : notion d’espace vectoriel, propriété des familles de vecteurs, applications linéaires (propriétés, sous-espaces associés)¹⁵⁹. Contrairement au thème précédent, cette étude n’envisage pas d’ingénierie didactique et ne porte pas sur l’étude des pratiques enseignantes ; du moins dans un premier temps. Une étude exploratoire a été menée auprès de petits échantillons

-
- $\forall A \in \mathbf{R} \quad \exists p \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geq p, u_n > A$
 - (u_n) est minorée par une suite (v_n) croissante non majorée

¹⁵⁷ Des numéros spéciaux de revues de référence avaient préparé ce lancement, en particulier : *Journal for Research in Mathematics Education*, 49(1), 2018 ; *ZDM – Mathematics Education*, 53(5), 2021.

¹⁵⁸ <https://cv.archives-ouvertes.fr/nicolas-grenier-bole>

¹⁵⁹ On en lit les contours, par exemple, dans le programme de mathématiques des classes préparatoires MPSI : parties « espaces vectorielles et applications linéaires » et « matrices ». https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE1-MEN-MESRI-4-2-2021/64/8/spe779_annexe_1373648.pdf

d'étudiants, visant à tester certaines hypothèses et à affiner le projet de recherche¹⁶⁰. Je présente ici ce premier travail, ainsi que les perspectives qu'il ouvre aussi bien du côté des étudiants que des enseignants.

Ce travail est né en réaction à la lecture d'un numéro de *ZDM – Mathematics Education* (51(7), 2019) consacré au thème : *Research on teaching and learning in linear algebra*. En dépit de la variété des différentes contributions, ce numéro ne fait pas à la question de l'abstraction la place qu'elle nous semble mériter :

- Ce numéro porte sur un modèle d'enseignement étasunien (par exemple : (Strang, 2006)) de nature essentiellement (voire exclusivement) procédurale et extrinsèque : l'algèbre linéaire y est enseignée comme une théorie des tableaux de nombres et des propriétés que l'on peut mettre au jour en les transformant selon la méthode du pivot ; des liens avec les équations linéaires et les vecteurs-flèches sont rencontrés. On peut certes analyser une forme d'enseignement sans l'adouber, d'autant plus que les articles montrent des effets peu convaincants en termes de conceptualisation ; d'une conceptualisation évaluée dans des tâches de résolution de problème ou de changement de registres, ainsi que dans des entretiens d'explicitation. On peut cependant s'étonner que les chercheurs ne problématisent pas la question de l'abstraction, comme obstacle¹⁶¹, levier, ou simplement comme paramètre sur lequel jouer dans l'enseignement.
- La lecture de ce numéro spécial suggère que les réflexions et résultats des nombreux travaux des années 1990 synthétisés dans (Dorier, 2000a) ont largement été oubliés. Ces auteurs (Dorier, Robert, & Rogalski, 2002; Sierpiska, 2000) ont avancé l'idée selon laquelle un passage explicite par l'abstraction, loin d'aggraver la difficulté de l'apprentissage de l'algèbre linéaire, constituait un levier utile voire un passage nécessaire pour cet apprentissage : arguments épistémologico-didactiques (notion de concept FUG, levier méta) chez Dorier et al., arguments épistémologico-mathématiques (l'algèbre linéaire comprenant la théorie de la représentation de ses objets) chez Sierpiska.

A titre heuristique et exploratoire, nous avons souhaité montrer que des exercices « abstraits » peuvent être au moins aussi bien réussis par des étudiants que des exercices moins « abstraits ». Dans cette étude préliminaire, l'objectif n'est pas de proposer une caractérisation épistémologique ou didactique d'une notion de « théorie abstraite » ou d'« exercice abstrait » (ou d'exercice « plus ou moins abstraits » qu'un autre). Une étude empirique menée sur un petit corpus de textes¹⁶² relatifs à l'enseignement supérieur (de l'algèbre linéaire ou au-delà) a permis de relever les usages des termes « abstrait » et « abstraction ». Les résultats de cette étude sémantique montrent la polysémie de termes qui servent en général à désigner l'un des deux pôles dans une série de *polarités*. Ces polarités vont du très général au très spécifique à l'algèbre linéaire ; elles ne sont pas toutes indépendantes :

- « abstrait » s'oppose à « intuitif », dans plusieurs sens du terme « intuitif » :
 - Abstrait vs intuitif-au-sens-de-familier,
 - Abstrait vs intuitif-au-sens-de-susceptible-de-représentation-visuelle.
- Un travail de démonstration est considéré comme plus « abstrait » qu'un travail procédural, en particulier qu'un travail passant par du « calcul ».
- Un objet est considéré comme plus abstrait lorsqu'il est caractérisé par des propriétés, moins abstrait lorsqu'il est donné par un procédé de construction, une figure, une formule.

¹⁶⁰ Travail présenté à l'occasion de la 21^{ème} Ecole d'été de didactique des mathématiques (2021 ; actes à paraître), sous le titre : *L'algèbre abstraite est-elle difficile parce qu'elle est abstraite ?*

¹⁶¹ Les étudiants interrogés dans les études menées par Dorier, Robert, Robinet et Rogalski dans les années 90 attribuaient majoritairement leurs difficultés en algèbre linéaire à son caractère « abstrait » (Dorier, 2000, p. 94).

¹⁶² Corpus : Dorier (2000a), *ZDM – Mathematics Education* 51 (7) (2019), (Hazzan, 1999), Strang (2006), ainsi que les rapports du jury de l'agrégation de mathématiques sur la période 2004-2020.

- Plus spécifiquement, en algèbre linéaire :
 - Un travail en petite dimension (2 ou 3) est considéré comme moins abstrait qu'un travail en plus grande dimension, ou sans hypothèse de finitude.
 - Un travail « en coordonnées » ou « extrinsèque » est considéré comme moins abstrait qu'un travail « sans coordonnées » ou « intrinsèque ».

Nous avons sélectionné trois exercices aux caractéristiques différentes :

Exercice 1

On considère l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans lui-même définie par

$$f(x,y,z) = (-2y, 2x+4z, x+2y+2z).$$

1. Déterminer une base du noyau de f (si celui-ci n'est pas réduit au vecteur nul).
2. Déterminer une base de l'image de f (si celle-ci n'est pas réduite au vecteur nul).
3. Déterminer une équation cartésienne (ou un système d'équations cartésiennes) caractérisant le noyau de f .
4. Déterminer une équation cartésienne (ou un système d'équations cartésiennes) caractérisant l'image de f .

Exercice 2 :

Soit E un espace vectoriel sur un corps K , et f un endomorphisme de E . On note f^2 l'endomorphisme $f \circ f$.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. a. Montrer que $\text{Ker}(f) \subseteq \text{Ker}(f^2)$.
b. Cette inclusion peut-elle être stricte ? Justifier.
2. Montrer l'équivalence : $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \Leftrightarrow \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$.

Exercice 3: Vrai/Faux ? Justifier

Soit E un espace vectoriel de dimension finie au moins égale à trois, $\{u, v, w\}$ une famille de vecteurs de E , et f un endomorphisme de E . Sous ces seules hypothèses, peut-on affirmer :

Affirmation 1 : si les vecteurs de la famille $\{u, v, w\}$ sont deux à deux indépendants alors la famille est libre.

Affirmation 2 : si $\{u, v, w\}$ est libre, alors $\{f(u), f(v), f(w)\}$ est libre.

Affirmation 3 : si $\{f(u), f(v), f(w)\}$ est libre, alors $\{u, v, w\}$ est libre.

Document 1. Fiche d'exercices en algèbre linéaire

L'analyse *a priori* de ces exercices demande à être approfondie, par exemple avec les outils de (Robert, 1998). On voit cependant le contraste entre les exercices 1 et 2, le second étant plus « abstrait » dans

tous les sens du terme relevés plus haut. Le 3^{ème} exercice (repris de (Dorier, 2000a, p.101 et suiv.)) est intermédiaire, avec des contre-exemples aisés à construire en petite dimension, voire avec une figure. Les exercices ont été donnés à trois petites cohortes, en Maths Spé, en M1 MEEF (prépa-Capes) et en M2 agrégation. Les données¹⁶³ confirment que la question 2 de l'exercice 2 (pourtant la plus « abstraite ») est plutôt mieux réussie que les questions 3 et 4 de l'exercice 1 (passage du point de vue paramétrique au point de vue cartésien (Dias, 1998)) et que l'exercice 3. La question la moins réussie est la question 1b de l'exercice 2, ce qu'anticipait l'analyse *a priori*. Un recueil de donnée à plus grande échelle est nécessaire pour asseoir ces résultats quantitatifs.

Cette exploration ouvre plusieurs pistes de recherche :

Cette étude de cas suggère que ce ne sont pas l'« abstraction » ou le « formalisme » (du calcul des prédicats) *en eux-mêmes* qui sont source de difficulté, puisque l'exercice le plus formel et abstrait est loin d'être le moins bien réussi. Cela invite à mieux caractériser ce qui dans les tâches ou contextes « abstraits » est source de difficultés, et ce qui ne l'est pas. En particulier, on peut chercher à caractériser la question Exo2Q2 – qui s'avère ne pas être source de difficultés – comme relevant de ce que Bourbaki appelait « l'âne qui trotte ». Cette expression, attribuée à Pierre Samuel, désignait un argument qui se déroule « automatiquement ». Elle a donné son nom à deux « congrès » Bourbaki : *Congrès de la motorisation de l'âne qui trotte* (été 1952) et *Congrès de l'incarnation de l'âne qui trotte* (oct. 1952). Des outils pour une caractérisation didactique de telles démonstrations sont donnés, par exemple, dans Selden & Selden (2009). Cette étude permettrait aussi d'investir une question classique, celle de la distinction entre preuves syntaxiques et preuves sémantiques (Weber & Alcock, 2004), d'autant plus que l'analyse *a priori* identifie aussi des preuves « sémantiques » de cet énoncé.

Les réponses à l'exercice 3 montrent la résistance de difficultés largement spécifiques aux concepts d'algèbre linéaire et repérées dans toutes les études, de (Dorier, 2000a) à *ZDM – Mathematics Education* 51(7) (2019). Une littérature importante permet d'éclairer les ressorts épistémologiques, didactiques et cognitifs de ces difficultés, et pourrait être prolongée par une étude en termes de conceptions (Balacheff, 2022), en vue de la mise au point d'une intervention didactique.

Ces trois exercices invitent à mieux caractériser les enjeux didactiques associées au type de tâche « production d'objet sous contraintes », représenté ici par la question 1.b de l'exercice 2 et par les recherches de contre-exemples de l'exercice 3. Plusieurs hypothèses se présentent pour expliquer les difficultés des étudiants : (1) caractère inhabituel de ces tâches, (2) pauvreté de l'*exemple space* mobilisable (Fukawa-Conelly & Newton, 2014), (3) faiblesse des *contrôles* mis en œuvre par les étudiants dans ces tâches de production (Balacheff, 2022)¹⁶⁴. L'approfondissement de cette question dans cette étude de cas doit contribuer à une réflexion générale sur ce type de tâche ; un type de tâche inhabituel et dont on peut faire l'hypothèse qu'il est porteur de difficultés et de potentialités *spécifiques*.

Un travail complémentaire a été engagé sur la perception et l'évaluation de ces trois exercices par des enseignants du supérieur. On vise à la fois à étudier leur rapport déclaré à l'abstraction dans un contexte d'enseignement spécifique, et à mettre en regard leurs anticipations des comportements d'étudiants avec les comportements observés. Un premier entretien, exploratoire, a été mené en avril 2022.

¹⁶³ Actes de la 21^{ème} Ecole d'été de didactique des mathématiques (2021) ; à paraître.

¹⁶⁴ A titre d'exemple, les données de l'étude exploratoire montrent que la question 1b de l'exercice 2 suscite des réponses illustrant le peu de contrôle de la linéarité des situations. Pour montrer que l'inclusion peut-être stricte, des étudiants se placent en dimension 1 et proposent de considérer la fonction qui à x associe $x+2$, ou une fonction f telle que $f(2) = 4$ et $f(4) = 0$, ou la fonction caractéristique de \mathbb{R}^* dans $\mathbb{R} \dots$ pourtant toutes grossièrement non linéaires.

Liste des travaux

- *Articles dans des revues internationales à comité de lecture*

Chorlay, R., Clark, K., & Tzanakis, C. (2022). History of mathematics in mathematics education – Recent developments in the field. *ZDM – Mathematics Education*, 54(7). Online first. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01442-7>

Chorlay, R. (2022a). From the historical text to the classroom session: Analyzing the work of teachers-as-designers. *ZDM – Mathematics Education*, 54(7). Online first. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01434-7>

Chorlay, R. (2022b). Accounting for the variability of lecturing practices in situations of concept introduction. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(5), 1071–1091. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.2014584>

Chorlay, R. (2021). Can students justify the correctness of an arithmetic algorithm? A case-study at the primary-secondary transition. *Recherche en didactique des mathématiques*, 41(2), 177–216.

Chorlay, R. (2019a). A pathway to a student-worded definition of limits at the secondary-tertiary transition. *International Journal for Research in Undergraduate Mathematics Education*, 5(3), 267–314.

Chorlay, R. (2011a). “Local – Global”: The First Twenty Years. *Archive for History of Exact Sciences*, 65(1), 1–66.

Chorlay, R. (2010a). From Problems to Structures: The Cousin Problems and the Emergence of the Sheaf Concept. *Archive for History of Exact Sciences*, 64(1), 1–73.

Chorlay, R. (2009a). Passer au global : le cas d'Élie Cartan, 1922-1930. *Revue d'histoire des mathématiques*, 15(2), 231–316.

- *Articles dans des revues nationales à comité de lecture*

Chorlay, R. (2009b). Des problèmes aux structures : Henri Cartan et les problèmes de Cousin. *Gazette des Mathématiciens*, 120, 9–19.

- *Ouvrages individuels et direction d'ouvrages collectifs*

Chemla, K., Chorlay, & R., Rabouin, D. (2016a). *The Oxford Handbook of Generality in Mathematics and the Sciences*. Oxford University Press. 507p.

Chorlay, R. (2015a). *Géométrie et topologie différentielles, 1918 – 1932. Textes traduits et présentés par R. Chorlay*. Hermann. 366p.

- *Chapitres d'ouvrages*

Chorlay, R., de Hosson, C. (2016). History of Science, Epistemology and Mathematics Education Research. In B. Hodgson, A. Kuzniak, J.-B. Lagrange (Eds.), *The Didactics of Mathematics: Approaches and Issues. A Homage to Michèle Artigue* (pp. 155-189). Springer International Publishing Switzerland.

Chorlay, R. (2016a). Questions of Generality as Probes into 19th Century Analysis. In Karine Chemla, Renaud Chorlay, David Rabouin (Eds.), *The Oxford Handbook of Generality in Mathematics and the Sciences* (pp. 385-410). Oxford University Press.

Chemla, K., Chorlay, R., Rabouin, D. (2016b). Prologue: Generality as a component of an epistemic culture. In K. Chemla, R. Chorlay, D. Rabouin (Eds.), *The Oxford Handbook of Generality in Mathematics and the Sciences* (pp. 1-41). Oxford University Press.

- *Thèse*

Chorlay, R. (2007a). *L'émergence du couple local-global dans les théories géométriques, de Bernhard Riemann à la théorie des faisceaux (1851-1952)* [thèse non publiée]. Université Paris VII – Paris Diderot.

- *Articles dans revues nationales de type « interface » (classement HCERES)*

Chorlay, R., Mailloux, F., Masselin, B. (2017). Tâches algorithmiques en cycle 3 : trois séances sur la multiplication par Jalousie. *Grand N*, 100, 33–56.

Chorlay, R. (2014). Signe de f' et variations de f : la fabrique d'une chaîne déductive longue. *Petit x*, 94, 27–48.

- *Actes publiés de conférences internationales, congrès et colloques.*

Chorlay, R. (2022c). Investigating the potential of a historical document for task-design. A paraître dans les actes de CERME 12 (Bolzano, 2-5/2/2022).

Crépin-Obert, P., Canac, S., Chorlay, R., Roux, C. Decamp, N. Javoy, S., & Kermen, I. (2021). Analyse de séances “ordinaires” intégrant l'histoire des sciences. Regards croisés sur quatre pratiques enseignantes en sciences et en mathématiques. In M.N. Hindryckx et C. Poffé (Eds.), *Actes des onzièmes rencontres scientifiques de l'Association pour la Recherche en Didactique des Sciences et Technologies* (pp. 55–62). ADIS et ARDIST.

Chorlay, R. & Mesnil, Z. (2020). From an analysis of content to an analysis of ordinary lecturing practices: A case-study in mathematical analysis. INDRUM 2020, Université de Carthage, Université de Montpellier, Sep 2020, Cyberspace (virtually from Bizerte), Tunisia. (hal-03113842)

Chorlay, R. (2019b). Justifying a calculation technique in years 3 and 6. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 11)*. Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02421849>

Chorlay, R. (2019c). Justifier une technique opératoire au cycle 3 : le cas de la division par 2. In M. Abboud (Éd.), *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2018* (pp.311-318). IREM de Paris.

- Chorlay, R. (2018a). An empirical study of the understanding of formal propositions about sequences, with a focus on limits. In V. Durand-Guerrier et al. (Eds.), *Proceedings of INDRUM 2018, Second conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (pp. 24–33). University of Agder and INDRUM.
- Chorlay, R. (2017a). Mathematical analysis of informal arguments: A case-study in teacher-training context. In T. Dooley, G. Guedet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 10)* (pp. 1701–1708). DCU Institute of Education and ERME.
- Chorlay, R. (2016b). Historical sources in the classroom and their educational effects. In L. Radford, F. Furinghetti & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between History and Pedagogy of Mathematics (HPM 2016, 18-22 July 2016)*. IREM de Montpellier, 5–23.
- Chorlay, R., Ouvrier-Buffet, C. (2016). Comparaisons de schémas de genèses didactiques de définitions, le cas de la limite d'une suite. In E. Nardi, C. Winsløw, T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of INDRUM 2016 - First conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (pp. 173–174). Université de Montpellier & INDRUM.
- Chorlay, R. (2015b). Why is it difficult to learn from history? In K. Krainer, N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9)* (pp. 1797–1803). Charles University and ERME.
- Chorlay, R. (2013a). The Making of a Proof-Chain: Epistemological and Didactical Perspectives. In B. Ubuz, Ç. Haser, M.-A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 106–115). Ankara (Turkey): Middle East Technical University and ERME.
- Chorlay, R., & Horng, W.-S. (2012). Report on Topic Study Group 20 “The role of history of mathematics in mathematics education”. In Sung Je Cho (Ed.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, 8-15 July 2012, Seoul (Korea) (pp. 485–487). Springer.
- Chorlay, R. (2009c). Designing Mixed Structures. *European Mathematical Society: Oberwolfach Reports* 6(1), 474–478.
- Chorlay, R. (2009d). From historical analysis to classroom work: function variation and long-term development of functional thinking. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 6)*. Institut National de Recherche Pédagogique and ERME.
- Brin, P., & Chorlay, R. (2006). La multiplicité des points de vue en Analyse élémentaire comme construit historique. In N. Bednarz, C. Mary (Eds.), *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2006* (non paginé). Université de Sherbrooke et EMF. <http://emf.unige.ch/emf-2006/>
- Chorlay, R. (2006). *L'Analysis situs de Poincaré : les limites d'une synthèse classique*. In Actes du Congrès de la Société Française d'Histoire des Sciences et des Techniques (Poitiers, 20-22 mai 2004). Cahier d'histoire et de philosophie des sciences, numéro hors-série (2006), 32–39.
- Chorlay, R., & A.-M. Pajus (2003). Jouer de la multiplicité des points de vue. In *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone*, Tozeur (Tunisie), 12/2003 (non paginé). <http://emf.unige.ch/emf-2003/>

- *Diffusion de la recherche – Enseignement*

- Alory, S., Chorlay, R. & Josse, V. (2021). Une ingénierie visant la formulation d'une définition de la limite d'une suite en Terminale. Actes du 27^{ème} colloque de la CORFEM (pp. 118–130). IREM de Strasbourg.
- Chorlay, R. (2018b). Doubler le carré avec Platon. In M. Moyon, D. Tournès (Eds.), *Passerelles – Enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3* (pp. 122–147). IREM et ARPEME. Cet ouvrage a reçu en 2019 le **prix du livre d'enseignement scientifique décerné par l'Académie des Sciences**.

- Chorlay, R. (2018c). When Leibniz plays dice. In E. Barbin (Ed.), *Let history into the mathematics classroom* (pp. 115–127). Springer International Publishing. [édition internationale de Chorlay (2010b) ci-dessous]
- Chorlay, R. (2017b). Nombres et calculs : quelques éléments de mise en perspective issus de l'histoire des sciences. Actes du 24^{ème} colloque CORFEM, Université de Bordeaux, 12-13/6/2017. <https://www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique442>
- Brisac, J. & Chorlay, R. (2016). Evaluer la formation à l'enseignement : le cas d'« Enseigner l'analyse ». Actes du 23^{ème} colloque CORFEM, Université de Bordeaux, 12-13/6/2016. <https://www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique442>
- IREM de Paris – Groupe. « analyse » (2015). *Autour de la notion de dérivée en classe de 1^{ère} scientifique*. Brochure n°97, IREM de Paris.
- Chorlay, R. (2011b). *The Multiplicity of Viewpoints in Elementary Function Theory: Historical and Didactical Perspectives*. In V. Katz and K. Tzanakis (Eds.), *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education* (pp. 55–63). Providence: The Mathematical Association of America. [édition internationale de Chorlay (2007b), ci-dessous]
- Chorlay, R. (2010b). *Quand Leibniz joue aux dés*. In E. Barbin (Ed.), *De grands défis mathématiques, d'Euclide à Condorcet* (pp. 99–115). IREM & Adapt-Vuibert.
- Chorlay, R. (2007b). *La multiplicité des points de vue en Analyse élémentaire comme construit historique*. In E. Barbin et D. Bénard (Eds.), *Histoire et enseignement des mathématiques : erreurs, rigueurs, raisonnements* (pp. 203–227). INRP.
- Chorlay, R. (2004). L'idée de géométrie différentielle intrinsèque de Gauss à Einstein. *Bulletin de l'Union des Professeurs de Spéciale*, 208, 11–24
- Chorlay, R. (2003). *Les fonctions implicites : de la notion au théorème*. Brochure Mnémosyne 18 (pp. 15–58). Paris : IREM Paris 7.

- *Conférences ou exposés invité.e.s* (sans actes)

- Chorlay, R. (2019d). A pathway to a student-worded definition of limits at the secondary-tertiary transition. *2019 Conference of Joint Societies for Mathematics Education: KSESM, KSME*. Suwon (Corée du Sud), Ajou University.
- Chorlay, R. (2013b). Bourbaki lecteur d'Elie Cartan. *Joint mathematical meeting European Mathematical Society – Danish Mathematical Society*, Aarhus University (Denmark), 5-7/4/2013.
- Chorlay, R. (2012). Poincaré et la topologie. *Colloque à l'occasion du centenaire de la disparition d'Henri Poincaré*. Institut Elie Cartan – Archives Poincaré. Metz et Nancy, 12-14/12/2012.
- Chorlay, R. (2011c). Groupes de symétrie en géométrie : renouvellement des perspectives dans les années 1920. *Colloque à l'occasion du bicentenaire de la naissance d'Evariste Galois I.H.P.*, 24-27/10/2011. <http://www.galois.ihp.fr/manifestations/colloque/>
- Chorlay, R. (2010c). On the use of problems: The case of the Cousin problems (1883-1952). *Conférence Cultures and Elements of Practice in Mathematics, 1800 – 1930*. K. Chemla, A. Qu (org.), Northwestern University, Xi'an (R. P. de Chine), 11-17/8/2010
- Chorlay, R. (2009e). Riemann – Weierstrass on the Foundations of Complex Analysis: A Focus on Cooperative Aspects. Invited special session on History of Mathematics, J. Dauben, K. Parshall et al. (orgs.), *Joint Annual Meeting AMS – MAA, Washington D.C.*, 5-8/1/2009.

Bibliographie

- Aguilar, M.S., Jankvist, U, Koichu, B., & Mistfeld, M. (2021). Editorial: What to replicate? *Implementation and Replication Studies in Mathematics Education*, 141–153.
- Al-Khwarizmi (1992). Le calcul indien (algorismus). Edition critique, traduction et commentaires de André Allard. Librairie A. Blanchard & Société des Etudes Classiques.
- Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherche en didactique des mathématiques*, 10(2), 241–286.
- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147–176.
- Balacheff, N. (2010). Bridging knowing and proving in mathematics: A didactical perspective. In G. Hanna, H.-N. Jahnke & H. Pulte (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics. Philosophical and Educational Perspectives* (pp. 115–135). Springer.
- Balacheff, N. (2022). Apports de la théorie des champs conceptuels à la didactique des mathématiques [exposé non publié]. Ecole thématique CNRS *Didactiques et épistémologie des mathématiques et leurs interactions pour la médiation et l'enseignement supérieur*, Autrans (38), 4-7 avril 2022.
- Balacheff, N., & Mariotti, M.A. (2008). Introduction to the special issue on didactical and epistemological perspectives on mathematical proof. *ZDM – Mathematics Education*, 40(3), 341–344.
- Balacheff, N., & Pedemonte, B. (2016). Establishing links between conceptions, argumentation and proof through the cK ϕ -enriched Toulmin model. *The Journal of Mathematical Behavior*, 41, 104–122.
- Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L., & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: the case of limits of functions in Spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics*, 59, 235–268.
- Blaschke, W. (1923). *Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. II Affine Differentialgeometrie (1ste und 2te Auflage)*. Springer.
- Blaschke, W. (1924). *Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie I (2te Auflage)*. Springer.
- Bolza, O. (1904). *Lectures on the Calculus of Variations*. The University of Chicago Press.
- Bolza, O. (1909). *Vorlesungen über Variationsrechnung*. Teubner.
- Bourbaki, N. (1948). *L'architecture des mathématiques*. In F. le Lionnais (Ed.), *Les grands courants de la pensée mathématique* (pp. 35–47). Cahiers du Sud.
- Bridoux, S., Grenier-Boley, N., Hache, C., & Robert, A. (2016). Les moments d'exposition des connaissances – Analyses et exemples. *Annales de Didactiques et Sciences Cognitives*, 21, 187–233.
- Bridoux, S., de Hosson, C. & Nihoul, C. (2020). Pratiques in situ d'enseignants universitaires et confrontation avec le vécu des étudiants : une étude de cas. In T. Hausberger, M. Bosch & F. Chellougui (Eds.), *Proceedings of the Third Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2020)* (pp. 179–188). INDRUM.
- Burkhardt, H., & Schoenfeld, A. (2021). Not just “implementation”: the synergy of research and practice in an engineering research approach to educational design and development. *ZDM – Mathematics Education*, 53(5), 991–1005.
- Corry, L. (1996). *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structure*. Science Networks – Historical Studies 17. Birkhäuser.
- Cartan, E., (1931/1974). *Notice sur les travaux scientifiques, suivi de Le parallélisme absolu et la théorie unitaire du champ*. Gauthier-Villars.
- Cartan, E. (1936). *La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisés*. Actualités scientifiques et industrielles, 194. Hermann.
- Cartan, E. (1971). *Leçons sur les invariants intégraux* (3^{ème} tirage). Hermann.
- Charnay, R. (2007). La division, le plus tôt possible ? La division, le mieux possible ! *Bulletin de l'APMEP*, 469, 202–212.

- Chemla, K. (2010). Proof in the wording: Two modalities from ancient Chinese algorithms. In G. Hanna, H.-N. Jahnke & H. Pulte (Eds.), *Explanation and proof in mathematics. Philosophical and educational perspectives* (pp. 253–285). Springer.
- Chern, S.-S., & Chevalley, C. (1952). Elie Cartan and his mathematical work. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 58, 217–250.
- Darboux, G. (1875). Mémoire sur les fonctions discontinues. *Annales scientifiques de l'E.N.S.*, 5 (2ème série), 57–112.
- Davis, R.B., & Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behavior*, 5, 281–303.
- De Villiers, M. (1990). The role and function of proofs in mathematics. *Pythagoras*, 24, 17–24.
- Dias, M. (1998). *Les problèmes d'articulation entre points de vue « cartésien » et « paramétrique » dans l'enseignement de l'algèbre linéaire*. Thèse de Doctorat. Université Paris 7.
- Dorier, J.-L. (Ed.). (2000a). *On the Teaching of Linear Algebra*. Kluwer Academic Publisher.
- Dorier, J.-L. (2000b). Recherche en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire – Perspectives théoriques sur leurs interactions. *Les cahiers du laboratoire Leibniz*, 12.
- Dorier, J.L., Robert, A., & Rogalski, M. (2002). Some comments on 'the role of proof in comprehending and teaching elementary linear algebra' by F. Uhlig. *Educational Studies in Mathematics*, 51(3), 185–191.
- Dugac, P. (2003). *Histoire de l'analyse : autour de la notion de limite et de ses voisinages*. Vuibert.
- Epple, M. (1994). Das bunte Geflecht der mathematischen Spiele. *Mathematische Semesterberichte*, 41, 113–133.
- Epple M. (2003). The End of the Science of Quantity: Foundations of Analysis, 1800-1910. In Jahnke H.N. (Ed.), *A History of Analysis. History of Mathematics* 3 (pp. 291–324). AMS.
- Einstein, A. (1916). Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, 49(7), 769–822.
- Euler, L. (1774), *Elémens d'algèbre, tome 1^{er}, traduits de l'allemand avec des notes et additions* [par Jean Bernoulli]. Lyon : Bruyset Père & Fils.
- Fauvel, J., & van Maanen, J. (2000). *History in mathematics education: The ICMI study*. Kluwer Academic.
- Fischbein, E., & Mariotti, M. A. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 34(3), 219–248
- Furinghetti, F, Jahnke, H.N., & van Maanen, J. (2006). Mini-workshop on studying original sources in mathematics education. *Oberwolfach Reports*, 3(2), 1285–1318.
- Fried, M. N. (2001). Can mathematics education and history of mathematics coexist? *Science & Education*, 10(4), 391–408.
- Fried, M. (2008). History of Mathematics in Mathematics Education: A Saussurean Perspective. *The Mathematics Enthusiast*, 5(2&3), 185–198.
- Fried, M. N. (2018). Ways of relating to the mathematics of the past. *Journal of Humanistic Mathematics*, 8(1), 3–23.
- Fukawa-Connelly, T., & Newton, C. (2014). Analyzing the teaching of advanced mathematics courses via the enacted example space. *Educational Studies in Mathematics*, 87(3), 323–349.
- Goldstein, C. (1999). Sur la question des méthodes quantitatives en histoire des mathématiques : Le cas de la théorie des nombres en France (1870-1914). *Acta historiae naturalium technicarum*, 3 (new series), 187–214.
- González-Martín, A., Bloch, I., Durand-Guerrier, V., & Maschietto, M. (2014). Didactic Situations and Didactical Engineering in university mathematics: cases from the study of Calculus and proof. *Research in Mathematics Education*, 16(2), 117–134.
- Grattan-Guinness, I. (2004a). History or heritage? An important distinction in mathematics for mathematics education. *The American Mathematical Monthly*, 111(1), 1–12.
- Grattan-Guinness, I. (2004b). The mathematics of the past: distinguishing its history from our heritage. *Historia Mathematica*, 31, 163–185.
- Gray, J. (1986). *Linear differential equations and group theory from Riemann to Poincaré*. Birkhäuser.

- Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for teachers? *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 199–218.
- Gueudet, G., Pepin, B., Sabra, H., & Trouche, L. (2016). Collective design of an e-textbook: Teachers' collective documentation. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19(2–3), 187–203.
- Hache, C., & Robert, A. (2013). Why and how to understand what is at stake in a mathematics class. In F. Vandebrouck (Ed.), *Mathematics classrooms: Students' activities and teachers' practices* (pp. 23–74). Sense Publishers.
- Hadamard, J. (1912). L'œuvre mathématique de Poincaré. *Acta Mathematica*, 38, 203–287
- Harel, G., & Sowder, L. (2009). College instructors' views of students vis-à-vis proof. In M. Blanton et al. (Eds), *Teaching and Learning Proof across the Grades: A K-16 Perspective* (pp. 275–289). Routledge / Taylor and Francis.
- Hasse, H. (1986). The Modern Algebraic Method (trad. A. Shenitzer du texte de 1930). *Mathematical Intelligencer*, 8(2), 18–23.
- Hazzan, O. (1999). Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 40(1), 71–90.
- Herbst, P., Nachieli, T., & Chazan, D. (2011). Studying the practical rationality of mathematics teaching: What goes into “installing” a theorem in geometry. *Cognition and Instruction*, 29(2), 218–255.
- Hosson, C. (2004). *Contribution à l'analyse des interactions entre histoire et didactique des sciences. Elaboration d'un support d'enseignement du mécanisme optique de la vision pour l'école primaire et le collège et premiers éléments d'évaluation* [Thèse non publiée]. Université Paris-Diderot - Paris VII.
- Hosson, C. (2011). *L'histoire des sciences : un laboratoire pour la recherche en didactique et l'enseignement de la physique* [Note de synthèse d'habilitation à diriger des recherches]. Université Paris-Diderot - Paris VII.
- Jahnke, H.N. (Ed.). *A History of Analysis*. History of Mathematics 3. AMS
- Jankvist, U. T. (2009). A categorization of “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 235–261.
- Jaworski, B., Mali, A., Petropoulou, G. (2017). Critical theorising from studies of undergraduate mathematics teaching for students' meaning making in mathematics. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 3, 168–197.
- Kähler, E. (1934). *Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen*. Teubner.
- Klein, F. (1893). Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen (dit Programme d'Erlangen). *Mathematische Annalen*, 43, 63–100.
- Klein, F. (1875). Ueber den Zusammenhang der Flächen, *Mathematische Annalen*, 9, 476–482.
- Klein, F. (1882). *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale*. Teubner.
- Krömer, R. (2006). La ‘machine Grothendieck’ se fonde-t-elle seulement sur des vocables métamathématiques ? Bourbaki et les catégories au cours des années 1950. *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 12, 119–162.
- Krömer, R. (2007). *Tool and object. A history and philosophy of Category theory*. Science Network Historical Studies 32. Birkhäuser.
- Kuhn, T. (2018). *La structure des révolutions scientifiques* (trad. L. Meyer). Flammarion. 1^{ère} édition étasunienne : 1962.
- Lai, Y., & Weber, K. (2014). Factors mathematicians profess to consider when presenting pedagogical proofs. *Educational Studies in Mathematics*, 85(1), 93–108.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations*. Cambridge University Press.
- Lew, K., Fukawa-Connelly, T., Mejia-Ramos, J.P., & Weber, K. (2016). Lecture in advanced mathematics: Why students might not understand what the mathematics professor is trying to convey. *Journal for Research in Mathematics Education*, 47(2), 162–198.
- Lie S., (1888, 1890, 1893). *Theorie der Transformationsgruppen I, II, III (unter Mitwirkung von Dr. F. Engel)*. Réimpression de la seconde édition: Chelsea Pub. Co., NY, 1970.
- Mac Lane, S. (1996). Structures in Mathematics. *Philosophia Mathematica*, 3(4), 174–183.
- Margolinas, C., Abboud-Blanchard, M., & Bueno-Ravel, L. (2011). *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. La Pensée Sauvage.

- Mashaal, M. (2000). *Bourbaki – Une société secrète de mathématiciens*. Pour la science (fev.-mai 2000), collection « Les génies de la science ».
- Mason, J. (1982) (with L. Burton and K. Stacey). *Thinking Mathematically*. Addison-Wesley.
- Mason, J. (2016). Perception, interpretation and decision-making: Understanding gaps between competence and performance – A commentary. *ZDM–Mathematics Education*, 48, 219–226.
- Merker, J. (2010). Le problème de l'espace : Sophus Lie, Friedrich Engel et le problème de Riemann-Helmholtz. Hermann.
- Mittag-Leffler, G. (1882). Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. *C.R.A.S.*, 94, 414–416.
- Möbius, A.F. (1865). Ueber die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders. *Berichte über der Verhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wiss. math.-phys. Klasse*, 17, 31–68.
- Morse, M. (1989). What is Analysis in the Large? In S.-S. Chern (Ed.), *Global Differential Geometry* (pp. 259–269). The Mathematical Association of America.
- Neumann, C. (1884). *Vorlesungen über Riemann's Theorie der abelschen Integrale* (2^{te} Auflage). Teubner.
- Oates, G., & Maciejewski, W. (2016). Research mathematicians & mathematics educators: Collaboration for change. In C. Csikos, A. Rausch, & J. Szitanyi (Eds.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol.1 (pp. 389–392). PME.
- Osgood, W. (1899). Selected Topics in the general theory of functions (Six Lectures delivered before the Cambridge Colloquium, August 22–27, 1898). *Bulletin of AMS*, 5, 59–87.
- Osgood, W. (1901). *Analysis der komplexen Größen. Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen (a) einer und (b) mehrerer komplexen Größen*. Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen II(2) (pp. 1–114). Teubner.
- Osgood, W. (1906). *Lehrbuch der Funktionentheorie*. Teubner.
- Ouvrier-Buffet., C. (2013). *Modélisation de l'activité de définition en mathématiques et de sa dialectique avec la preuve. Etude épistémologique et enjeux didactiques* [Note de synthèse en vue de l'Habilitation à Diriger des Recherches, non publié]. Université Paris Diderot – Paris VII.
- Ouvrier-Buffet, C. (2015). Quelles sont les conceptions d'élèves, d'enseignants, de mathématiciens contemporains sur la définition ? *Repères IREM*, 100, 5–24.
- Poincaré, H. (1881-82). Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de Mathématiques* 7 (3^{ème} série) (1881), 375–422 et 8 (3^{ème} série) (1882), 251–296
- Poincaré, H. (1895). Analysis situs, *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 1 (2^{ème} série), 1–128.
- Poincaré, H. (1899). L'œuvre mathématique de Weierstrass. *Acta Mathematica*, 22, p.1–18.
- Poincaré, H. (1901). Analyse des travaux scientifiques de Henri Poincaré faite par lui-même. *Acta Mathematica*, 38, 3–131.
- Poincaré H., 1908. L'avenir des mathématiques. *Atti del IV congresso internazionale dei matematici, vol.1* (Roma, 6-11 Aprile 1908), Accademia dei Lincei, Rome. pp.167–182.
- Rheinberger, H.-J. (1997). *Towards a history of epistemic things: Synthesizing proteins in the test tube*. Stanford University Press.
- Riemann, B. (1898). *Œuvres mathématiques de Riemann* (traduites par L. Laugel). Gauthier-Villars.
- Rinow, W. (1932). Über Zusammenhänge zwischen der Differentialgeometrie im Grossen und im Kleinen. *Mathematische Zeitschrift*, 35, 512–528.
- Robert, A. (1982). *L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur* [Thèse non publiée]. Université Paris VII.
- Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 139–190.
- Robert, A., & Rogalski, J. (2005). A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th-grade class. *Educational Studies in Mathematics*, 59(1–3), 269–298.
- Robert, A., & Vandebrouck, F. (2014). Proximités en acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 34(2/3), 239–285.

- Robert, A., & Vandebrouck, F. (2021). Proximités discursives, ou comment apprécier le rapprochement des activités des élèves et de leurs connaissances. In *Actes du 27^{ème} colloque de la CORFEM* (pp. 63–87), IREM de Nantes.
- Roh, K.H., & Lee, Y.H. (2017). Designing tasks of introductory real analysis to bridge the gap between students' intuition and mathematical rigor: the case of the convergence of a sequence. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 3(1), 34–68.
- Saint-Gervais, H.P. (2010). *Uniformisation des surfaces de Riemann. Retour sur un théorème centenaire*. ENS Editions.
- Schoenfeld, A.H. (2011). *How We Think. A Theory of Goal-oriented Decision Making and its Educational Applications*. Routledge.
- Schoenfeld, A.H. (2013). Classroom observation in theory and practice. *ZDM – Mathematics Education*, 45(4), 607–621.
- Schoenfeld, A.H. (2016). Making sense of teaching. *ZDM – Mathematics Education*, 48 (1-2), 239–246.
- Selden, A., & Selden, J. (2009). Teaching proving by coordinating aspects of proofs with students' abilities. In *Teaching and learning proof across all the grades: A K-16 perspective* (pp. 339–354). Reston (VA): NCTM.
- Sierpiska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In Dorier (2000a), 209–231.
- Strang, G. (2006). *Linear algebra and its applications* (4th edition). Thomson Brooks / Cole.
- Study, E. (1908). Kritische Betrachtungen über Lies Invariantentheorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen. *Jahresbericht der Deutschen–Mathematiker–Vereinigung*, 17, 125–142.
- Swinyard, C. (2011). Reinventing the formal definition of limit: the case of Amy and Mike. *The Journal of Mathematical Behavior*, 30, 93–114.
- Tall, D. (Ed.) (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publications.
- Tempier, F. (2016). New perspectives for didactical engineering. An example for the development of a resource for teaching decimal number system. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19(2-3), 261–276.
- Vandebrouck, F. (Ed.). (2013). *Mathematics classrooms: Students' activities and teachers' practices*. Sense Publishers.
- Volkert, K. (1988). *Geschichte der Analysis*. Wissenschaftsverlag
- Van der Waerden, B.L. (1931-1932). *Moderne Algebra. Erster Theil* (1930), *Zweiter Theil* (1931). Springer.
- Veblen, O. & Whitehead, J.H.C. (1932). *The Foundations of Differential Geometry*. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics 29. Cambridge University Press.
- Vygotski, L. (1934/1997). *Pensée et langage*. La dispute.
- Weber, K., & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics*, 56(2-3), 209–234.
- Weber, K. (2012). Mathematicians' perspectives on their pedagogical practice with respect to proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 43(4), 463–482.
- Weil, A. (1948). L'avenir des mathématiques. In F. le Lionnais (Ed.), *Les grands courants de la pensée mathématique* (pp. 307–320). Editions des Cahiers du Sud.
- Weil, A. (1979). *Oeuvres Scientifiques – Collected Papers I, 1936-1951*. Springer.
- Weil, S. (1972). *Cahiers II*. Plon.
- Weierstrass, K. (1876). Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen. In (Weierstrass 1894-1927), vol. 2, 77–124.
- Weierstrass, K. (1894-1927). *Mathematische Werke* (5 vol.). Mayer & Müller.
- Weierstrass, K. (1988a). *Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen (Vorlesungen Berlin 1878, in einer Mitschrift von A. Hurwitz)*. Dokumente zur Geschichte der Mathematik. DMV – Vieweg und Sohn.
- Weierstrass, K. (1988b). *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre (Vorlesungen gehalten in Berlin, 1886)*. Teubner Archiv zur Mathematik 9, Teubner.
- Weyl, H. (1912). Review of Nielsen „Elemente der Funktionentheorie“. *JDM-V* 21, 96–97.
- Weyl, H. (1913). *Die Idee der Riemannschen Fläche*. Teubner.

- Weyl, H. (1938). Review of *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile*, by Elie Cartan. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 44, 598–601.
- Weyl, H. (1995). Topology and Abstract Algebra as Two Roads of Mathematical Comprehension (trad. A. Shenitzer du texte de 1932), *Amer. Math. Monthly*, 105(5), 453–460, et 106(7), 646–651.
- Youschkevitch, A.P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for History of Exact Sciences*, 16(1), 37–85.