



HAL
open science

Expliquer à l'aide des preuves

Francesca Poggiolesi

► **To cite this version:**

Francesca Poggiolesi. Expliquer à l'aide des preuves. Philosophie. Université Paris 1 Panthéon Sorbonne, 2022. tel-04203513

HAL Id: tel-04203513

<https://hal.science/tel-04203513v1>

Submitted on 13 Sep 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS 1 PANTHÉON-SORBONNE

MANUSCRIT INÉDIT

proposé en vue d'obtenir

l'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

présenté par

FRANCESCA POGGIOLESI

Chargée de Recherche CNRS

Expliquer à l'aide des preuves

Soutenance : 9 décembre 2022

Membres du jury :

- A. Betti, Professeur à Université d'Amsterdam (rapporteuse),
- P; Egré, DR CNRS IJN,
- B. Halimi, Professeur à Université Paris Cité (rapporteur et Président du jury),
- R. Iemhoff, Professeur à Université d'Utrecht,
- P. Mancosu, Professeur Université de Berkley,
- M. Panza, DR CNRS IHPST,
- P. Wagner, Professeur à Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne.

Table des matières

Préface	5
Remerciements	13
1 Les explications mathématiques	15
1.1 Des explications causales aux explications mathématiques	15
1.2 Histoire de la notion d'explication mathématique	22
1.3 Les principales approches contemporaines des explications mathématiques . .	33
1.3.1 L'approche de Steiner	37
1.3.2 L'approche de Lange	39
1.3.3 L'approche de Pincock	41
1.3.4 L'approche contrefactuelle	45
1.3.5 Conclusions	52
2 Les preuves logiques	55
2.1 Des preuves mathématiques aux preuves formelles	55
2.2 Le calcul de déduction naturelle	58
2.3 Les dérivations analytiques	65
3 Un nouveau modèle des explications mathématiques basé sur les preuves lo-	
giques	71
3.1 Les preuves explicatives en tant qu'arbres de preuve	72
3.2 La complexité conceptuelle	82
3.3 Les arbres de preuve où la complexité conceptuelle augmente	91
3.4 Notre modèle au banc d'essai	93
3.4.1 Les théorèmes du quadrangle, du cercle et du point	94
3.4.2 Le théorème de Pythagore	98

3.4.3 Le produit de la somme des carrés	107
3.4.4 Le théorème de Desargues	112
3.5 Au-delà des preuves mathématiques internes	122
3.6 Dernières remarques	128
Bibliographie	139
Bibliographie	139

Préface

Expliquer pourquoi certaines choses se produisent autour de nous est une activité humaine parmi les plus essentielles. Si notre lave-linge cesse tout à coup de fonctionner, nous tentons d'expliquer pourquoi ; étant témoin d'un accident de voiture, nous tenterons pareillement d'expliquer pourquoi il a eu lieu. On tente, dans le domaine scientifique, d'expliquer pourquoi le virus de la COVID-19 s'est propagé à si grande échelle et si rapidement, mais également pourquoi les changements climatiques se sont déclenchés ou pourquoi les dinosaures se sont éteints il y a de cela des millions d'années. Bien que les explications de ce genre s'étendent à une panoplie de phénomènes — des cas les plus enfantins à des constructions scientifiques élaborées et complexes — elles tirent vraisemblablement toutes leur pouvoir explicatif du fait de rendre compte du réseau de relations causales que l'on retrouve dans le monde. C'est la raison pour laquelle elles sont appelées des *explications causales*. Vu le grand intérêt dont de telles explications sont l'objet, il n'est pas surprenant que les philosophes aient fait de nombreuses tentatives pour en développer une théorie. Ainsi, le concept d'explication causale est devenu, depuis le modèle déductif-nomologique de [Hempel \(1942, 1965\)](#) (modèle DN), l'un des thèmes centraux de la philosophie des sciences, donnant lieu à des débats ininterrompus, et animés, voire vigoureux.

Précisons toutefois que, parmi les « choses » que les êtres humains tentent d'expliquer, on ne trouve pas que des objets, des événements ou des procédés concrets comme le cas du lave-linge ou celui des changements climatiques, mais aussi des faits abstraits comme des concepts ou des idées. Par exemple, si une personne se comporte mal, on doit lui expliquer pourquoi certaines actions sont inappropriés ; de même, si un enfant se demande pourquoi Jean est célibataire, il mérite une explication. Les mathématiciens peuvent n'être satisfaits par aucune preuve du théorème de Pythagore, mais ils peuvent tout de même tenter d'en découvrir une qui explique pourquoi ce théorème est vrai. Tout comme les explications

causales, les explications de ce genre s'étendent à une panoplie de phénomènes — des plus enfantins aux plus complexes. Et, comme les explications causales, elles tirent vraisemblablement toutes leur pouvoir explicatif d'une certaine relation : non une relation causale, mais plutôt une relation que les études sur le sujet en sont venues à appeler une relation de fondation¹, c'est-à-dire la relation entre les fondements ou les raisons d'une vérité et cette vérité même. Les explications portant sur de telles relations peuvent être appelées des *explications conceptuelles*². Parmi les explications conceptuelles, celles que l'on appelle les *explications mathématiques* sortent du lot. Elles comprennent les preuves de théorèmes mathématiques qui mettent en évidence les raisons pour lesquelles les théorèmes qu'elles prouvent sont vrais³. Cependant, même si les explications mathématiques occupent traditionnellement, et depuis longtemps, une place de choix dans les travaux d'illustres mathématiciens et philosophes, elles ont généralement été ignorées ou oubliées dans les études se penchant sur les explications scientifiques. Ce n'est donc que récemment qu'elles sont devenues l'objet d'un intérêt renouvelé, puisqu'elles appartiennent par nature à un nouveau domaine d'investigation portant sur les phénomènes non causaux (voir, à ce sujet, [Fine \(2012\)](#); [Lange \(2017\)](#)).

Lorsqu'il est question des explications, qu'elles soient causales ou mathématiques, deux perspectives complémentaires s'offrent à celui qui veut les étudier. Selon la perspective ontique, on doit déterminer le genre de choses que sont les explications, c'est-à-dire que l'on doit explorer en détail la structure des explications. Selon la perspective épistémique, au contraire, on doit spécifier ce que les praticiens obtiennent comme savoir lorsqu'ils ont une explication. Chaque perspective a donc son enjeu propre : si on adopte la première, il

1. Comme le texte qui suit le montrera, par « relation de fondation », nous ne faisons pas référence à la relation de *grounding* métaphysique au coeur du débat contemporain — par exemple [Fine \(2012\)](#). Nous pensons plutôt à la relation de fondation telle qu'elle fut introduite dans les travaux de Bolzano, comme [Bolzano \(2014\)](#), pour être ensuite reprise dans plusieurs travaux contemporains — par exemple [Casari \(2016\)](#). Pour bien marquer cette distinction, nous utiliserons le mot anglais « *grounding* » lorsqu'il sera question de la relation de *grounding* métaphysique, et le mot « fondation » (selon la traduction standard de [Sebestik \(1992\)](#)) lorsqu'il sera question de la relation de fondation au sens bolzanien. Notons que cette distinction est identique à celle adoptée dans le rapport de synthèse.

2. L'expression *explication conceptuelle*, bien qu'elle ne soit pas d'usage fréquent dans la recherche, se retrouve chez [Betti \(2010\)](#); [Poggioli et Genco \(2022\)](#); [Schneider \(2006\)](#).

3. Comme nous le préciserons davantage à la section 1.1, l'expression *explication mathématique* est plus ambiguë, ayant un sens plus large que celui que nous utilisons ici. Toutefois, dans cet ouvrage, nous traiterons de ces explications seulement dans le sens que nous leur avons donné ci-dessus.

s'agira de la façon dont les explications rendent compte d'une relation causale ou d'une relation de fondation ; si on adopte la seconde, ce sera plutôt la compréhension associée aux explications.

Notre étude des explications mathématiques, dans le présent ouvrage, se situera dans la perspective ontique. Nous présenterons, plus spécifiquement, un modèle rendant compte des caractéristiques d'une preuve mathématique qui explique. Bien que le concept d'explication mathématique se trouve souvent à la périphérie de la recherche contemporaine, nous ne sommes pas les premiers à discuter de la question. Il existe ainsi d'autres modèles qui tentent de rendre compte du pouvoir explicatif de certaines preuves mathématiques selon une perspective ontique. Notre approche se distingue de ces autres tentatives par l'utilisation qu'elle fait d'outils propres à la logique : puisque les explications mathématiques sont des preuves, et que les preuves ont été formalisées dans une branche de la logique appelée *théorie de la démonstration*, nous utilisons les ressources de la théorie de la démonstration pour étudier les explications mathématiques. Afin d'introduire ces outils, il faut d'abord préciser quelques éléments relatifs à la théorie de la démonstration. Le résultat fondamental de cette branche de la logique est ce qu'on appelle le *théorème de normalisation*. Il s'agit, pour l'expliquer en termes des plus généraux, d'un théorème qui donne la priorité aux preuves (formalisées) où l'on retrouve une augmentation de la complexité logique des formules utilisées comme hypothèses de la preuve à la formule qui correspond au théorème à prouver. Notre modèle reprend l'idée générale du théorème de normalisation pour l'étendre au domaine non logique ainsi qu'aux explications mathématiques. Cela nous permet de concevoir les explications mathématiques comme des preuves où il se produit une augmentation de la complexité conceptuelle des hypothèses de la preuve au théorème à prouver⁴. Les preuves explicatives mathématiques sont donc des preuves où l'on va du simple au complexe, c'est-à-dire où des hypothèses plus simples expliquent une conclusion plus complexe. Il convient par contre de remarquer que cette idée n'est pas seulement motivée par les résultats obtenus en théorie de la démonstration : il s'agit également d'une idée qui

4. Comme on le sait, le théorème de normalisation ne s'applique pas nécessairement aux théories mathématiques. Cela ne pose toutefois pas problème au projet que nous poursuivons ici, et ce, pour les deux raisons suivantes. D'abord, parce que nous n'utilisons pas ce théorème tel quel, mais plutôt l'idée générale qui en est la base. Ensuite, parce que ce n'est pas le cas que tout théorème mathématique a nécessairement une preuve explicative (voir, à ce sujet, ([Lange, 2014](#), p.253)).

emporte naturellement la conviction, une idée qui a, en outre, des racines profondément ancrées dans une longue tradition en philosophie et en mathématiques, où l'on retrouve Aristote, Proclus, Leibniz, Arnauld et Nicole, Bolzano, ainsi que Frege.

Nos résultats, comme nous le verrons, justifieront l'utilisation des outils de la logique pour l'analyse des explications mathématiques, ce que promettaient déjà les avantages que la logique confère à l'étude de tout sujet. Nous montrerons ainsi, dans la dernière section de l'ouvrage, que l'analyse logique sert d'appui à une approche nouvelle qui donne un aperçu finement détaillé de la structure des explications mathématiques, et nous permet d'en identifier avec clarté et rigueur les composants principaux — notamment l'*explanans*, l'*explanandum* ou les différentes étapes explicatives. Les approches précédentes des explications mathématiques disent, elles, relativement peu de choses de ces aspects fondamentaux. De surcroît, les explications mathématiques, comme toutes les explications, possèdent une directionnalité ou asymétrie que l'on devrait pouvoir retrouver dans un modèle adéquat et complet. Cette asymétrie constitue, d'ailleurs, la difficulté la plus significative et la plus notoire que présentent les explications mathématiques. S'y attaquant de front, notre approche met en lumière la source de cette difficulté, et rend ainsi compte des intuitions concernant la direction des explications en se basant sur une série de cas figurant dans les études contemporaines portant sur ce problème.

Il est bon de remarquer — après avoir précisé le lien entre notre modèle et les outils proprement logiques — que notre approche unifiera deux traditions : l'une portant sur les explications mathématiques, l'autre sur la théorie de la démonstration. Malgré leurs liens, ces deux domaines se sont jusqu'à maintenant développés en parallèle, et les échanges et la communication entre les deux se font rares. La philosophie compte plusieurs exemples de domaines traditionnellement séparés dont on a éventuellement montré qu'ils étaient étroitement liés. On peut mentionner, pour ne citer que quelques-uns de ces exemples, les applications de la théorie de la révision des croyances à la théorie quantique (voir [Baltag \(2012\)](#)), ou les recherches utilisant la théorie de la numérosité pour rendre compte de la conception bolzaniennne de l'infini (voir [Mancosu \(2016\)](#)). Dans tous les cas où de tels liens émergent entre des domaines que l'on croyait distincts, les interactions ainsi créées ont donné naissance à une pléthore de résultats prometteurs, et ont contribué à jeter un nouvel éclairage sur les traditions impliquées et à y ouvrir de nouvelles perspectives. Cela nous laisse espérer que des résultats similaires puissent se dégager du développement de

notre modèle.

Notons cependant que, bien que nous nous concentrerons ici sur l'apport de la théorie de la démonstration à l'étude des explications mathématiques, notre approche, puisqu'elle vise à unifier ces deux traditions, aurait tout aussi bien pu adopter la perspective inverse. Nous aurions donc pu traiter de la façon dont les explications mathématiques fournissent la possibilité d'une nouvelle application philosophique de la théorie de la démonstration elle-même, ou du développement d'outils visant à étudier les explications au sein de la théorie de la démonstration. Nous espérons que les lecteurs ayant un intérêt pour la théorie de la démonstration prendront conscience du potentiel que recèle le thème de l'explication pour des travaux futurs à poursuivre dans ce domaine, et que cela pourra les enjoinde à s'engager dans cette voie.

Prérequis

Nous tenons pour acquis que le lecteur aura suivi un cours d'introduction à la logique — non parce que cet ouvrage requiert la compréhension de notions spécifiques de logique, mais simplement parce qu'une certaine familiarité avec le processus de formalisation lui sera utile. De plus, comme il est d'usage en philosophie des mathématiques, nous tenons pour acquis que le lecteur possède une connaissance générale des preuves mathématiques et de certaines notions mathématiques de base. L'ouvrage fonctionne, outre cela, de manière autonome et fournit toutes les notions requises pour comprendre divers modèles contemporains des explications mathématiques ainsi que le modèle que nous y développons.

Ce dont nous traitons dans cet ouvrage

L'ouvrage compte trois chapitres.

Dans le *Chapitre 1*, nous présentons l'idée d'explication mathématique en partant de la notion plus large d'explication scientifique et clarifions à quel sens des explications mathématiques nous nous intéressons spécifiquement. Nous survolons ensuite brièvement la notion d'explication mathématique dans l'histoire de la philosophie et des mathématiques, en soulignant le rôle important que joue, au sein

de cette tradition, la notion de complexité conceptuelle. Enfin, nous décrivons les principales approches contemporaines des explications mathématiques. Chacune de ces approches est introduite à l'aide de la même explication mathématique (celle du théorème de Pythagore), cela ayant pour but de faciliter la comparaison, et d'aider le lecteur à mieux saisir les avantages et les inconvénients de chaque approche.

Dans le *Chapitre 2*, nous précisons l'idée de formalisation des preuves mathématiques en traitant d'abord de son histoire, pour ensuite présenter le calcul de déduction naturelle développé par Gentzen au début du siècle dernier. Nous montrons également comment sont construits les arbres de preuve et les dérivations dans le calcul de déduction naturelle, puisqu'ils sont tous deux des ingrédients-clés de notre approche des explications mathématiques. Nous concluons le chapitre en expliquant l'importance de la notion d'analyticité pour le calcul de déduction naturelle.

Dans le *Chapitre 3*, nous présentons notre approche de l'explication mathématique, qui s'appuie sur deux éléments : la formalisation des preuves mathématiques informelles à l'aide d'arbres de preuve, et une notion comparative de complexité conceptuelle qui permet de déterminer si la complexité conceptuelle augmente des hypothèses à la conclusion de ces arbres. Nous précisons ensuite comment formaliser les preuves qui nous intéressent, et nous étudions la notion de complexité conceptuelle. Puis nous mettons notre approche à l'essai en l'appliquant à diverses preuves mathématiques qui sont généralement reconnues comme explicatives. Nous traitons, enfin, de la possibilité d'appliquer notre méthode à d'autres domaines que celui des explications mathématiques.

Ce dont nous ne traitons pas dans cet ouvrage

Nous traiterons ici exclusivement des explications mathématiques qui ont la forme de preuves et qui mettent en évidence les raisons ou les fondements qui montrent pourquoi le théorème qu'elles prouvent est vrai. Nous accordons par là un sens très spécifique à la notion d'explication mathématique et nous en avons bien conscience. Puisque la notion d'explication mathématique en général a déjà fait l'objet de nombreuses études qui en ont donné un portrait fort exhaustif (par exemple, [Lange \(2017\)](#); [Mancosu \(2000, 2018\)](#)), nous nous restreignons à un phénomène plus précis et plus limité, qui peut être clairement

défini et pour lequel nous pouvons développer une approche rigoureuse. Cela signifie donc que toute acception de l'expression « explication mathématique » s'étendant au-delà de celle que nous avons tout juste décrite ne sera pas couverte dans le présent ouvrage.

Nous ne nous arrêterons pas, par exemple, aux preuves qui expliquent à l'aide de diagrammes (voir [De Toffoli \(2017\)](#)), ni aux théories mathématiques qui pourraient jouer un rôle explicatif (voir [D'Alessandro \(2020\)](#)).

Les recherches contemporaines en la matière ont mis en relation avec la notion d'explication mathématique plusieurs concepts, comme la *beauté* (voir [Giaquinto \(2016\)](#)), la *pureté* (voir [Arana et Mancosu \(2012\)](#), ou [Iemhoff \(2017\)](#)), la *profondeur* (voir [Lange \(2015a\)](#)), et le *style* (voir [Mancosu \(2017\)](#)), qui soulèvent tous un grand intérêt. Traiter des liens entre ces concepts et l'explication mathématique dépasserait toutefois de beaucoup la portée de cet ouvrage.

Nous rappelons également, enfin, que nous ne traitons ici des explications mathématiques que d'après une perspective ontique, laissant de côté la question de la relation entre compréhension mathématique et explication mathématique (voir, à ce sujet, [Avigad \(2006\)](#); [Inglis et Mejía-Ramos \(2019\)](#)). Nous suivons en cela les usages des études sur l'explication, où il est courant d'adopter l'une ou l'autre de ces perspectives. Cela dit, nous restons d'avis qu'il est nécessaire, pour rendre compte de ce sujet de la manière la plus achevée possible, d'utiliser les deux perspectives, ce qui nous mène à croire que les développements futurs de la recherche trouveraient une voie des plus profitables dans l'étude des liens entre les explications mathématiques et la compréhension. En ce sens, étant donné la relative proximité entre le raisonnement humain et certaines motivations de la théorie de la démonstration, les conclusions auxquelles nous parvenons ici pourraient fournir un point de départ prometteur à une telle étude.

Remerciements

Ce manuscrit inédit est proposé en vue d’obtenir l’Habilitation à Diriger des Recherches. Je suis vivement reconnaissante à Pierre Wagner de s’être porté garant de mon dossier. Je dois aussi beaucoup à Pierre Wagner pour ses observations et ses remarques, ainsi que, plus généralement, pour sa direction du laboratoire où je travaille, l’IHPST UMR 8590, dont il a fait un lieu des plus intéressants et stimulants où il est aisé de poursuivre et faire croître ses propres recherches.

Je remercie vivement Arianna Betti, Paul Egré, Brice Halimi, Rosalie Iemhoff, Paolo Mancosu et Marco Panza qui ont accepté de faire partie du jury.

Ma gratitude va également à Francesco Genco qui a eu la gentillesse de commenter des versions préliminaires du dernier chapitre de ce manuscrit. Francesco Genco était postdoctorant au sein du projet ANR *IBS* (ANR-18-CE27-0012-01), que je dirige depuis quatre ans. J’en profite pour souligner que cet inédit a pu bénéficier du financement pour ce projet offert par l’ANR, que je remercie pour son soutien.

Jeanne Allard m’a aidée tout au long de la préparation de la version française du manuscrit. Je suis certaine que je n’aurais jamais pu trouver quelqu’un de plus compétent, professionnel, et généreux.

Les idées principales contenues de ce texte ont été présentées lors de plusieurs colloques et ateliers. À ce propos, je veux remercier : Arnon Avron, Paola Cantù, Joachim Frans, Wesley Holliday, Luca Incurvati, et Victor Pambuccian.

J’ai trouvé, au sein de l’équipe « Logique, langage, philosophie des mathématiques » de l’IHPST UMR 8590, dirigée par Marco Panza et Pierre Wagner, un cadre extrêmement stimulant où j’ai pu discuter des questions sur lesquelles porte ce texte avec les directeurs eux-mêmes, ainsi qu’avec Alberto Naibo, Jean Fichot et Marianna Antonutti-Marfori. Par ailleurs, mes réflexions sur les explications se sont également nourries d’échanges avec Andrew Arana, Philippe Huneman et Max Kistler.

Il n'y a pas une seule de mes idées qui n'ait profité des remarques éclairées de Brian Hill.

Je le remercie de tout mon coeur pour son soutien indéfectible de mon travail.

Last but not least, mes remerciements les plus profonds vont à mes enfants Vincent, Ewan et Oliver : leur intelligence, leur patience et leur amour sont les véritables raisons pour lesquelles j'ai pu mener ce manuscrit à bien.

1 Les explications mathématiques

1.1 Des explications causales aux explications mathématiques

Le mot « explication » est employé d'une multitude de façons en français courant. Nous disons ainsi que nous expliquons la signification d'un mot, que nous expliquons comment assembler une bibliothèque Ikea, que nous expliquons ce qui nous mène à prendre telle décision, et ainsi de suite. Parmi ces différents usages, il en est un en particulier qui retient l'attention des philosophes. Il s'agit de l'explication qui rend compte de pourquoi les choses se produisent. Ici, les « choses » peuvent être des événements particuliers tout autant que des « choses » plus générales, comme des phénomènes réguliers ou des motifs répétés dans la nature, et les recherches sur les explications scientifiques en philosophie concernent à la fois les explications des premiers que celles des seconds. Précisons encore davantage. Car, dans l'expression « explication scientifique », le mot « scientifique » ratisse assez large. En discutant de l'explication scientifique, on inclut en effet souvent des cas tirés de la science proprement dite (par exemple, une explication de la trajectoire des planètes qui relève de la mécanique newtonienne) comme des cas plus ordinaires (par exemple, un feu de forêt). Pour clarifier la portée de son objet, la recherche dans ce domaine se pose la question suivante : qu'est-ce qu'une explication scientifique ? Les réponses à cette question prennent la forme de théories ou de modèles qui caractérisent la structure de l'explication scientifique. Bien qu'on puisse trouver des tentatives de modélisation depuis l'époque présocratique jusqu'à l'époque moderne, l'étude contemporaine de l'explication scientifique débute véritablement avec le développement du modèle déductif-nomologique (modèle DN), qui fut introduit sous sa forme la plus détaillée et la plus influente par C. Hempel dans [Hempel \(1942, 1965\)](#) et [Hempel et](#)

Oppenheim (1948).

Comme c'est le cas de la majorité des modèles de l'explication scientifique développés depuis, le modèle DN porte principalement sur l'explication causale. Dans la mesure où une explication scientifique est constituée de deux éléments, nommément un *explanandum* — c'est-à-dire un énoncé décrivant le phénomène à expliquer — et un *explanans* — c'est-à-dire l'ensemble des énoncés utilisés pour rendre compte du phénomène — une explication causale est une explication où l'*explanans* contient une ou plusieurs causes, et où l'*explanandum* est l'effet. La place dominante occupée par les explications causales sur la scène philosophique entraîna un intérêt connexe pour la causalité elle-même. Cela a fait en sorte que, depuis la fin des années 1980, les philosophes ont accompli des progrès considérables dans la compréhension de différents aspects de la causalité, comme le montrent la distinction entre différentes notions de causalité et entre différents processus, mécanismes et modèles causaux, ainsi que le lien entre les causes et divers types d'idéalisations, et celui entre causalité et ordre temporel. En conséquence, pendant plusieurs décennies, les recherches portant sur les explications scientifiques furent dans les faits monopolisées par les explications causales et la causalité.

Ce n'est qu'au courant de la dernière décennie environ que cet intérêt exclusif a été remis en question, les philosophes prenant de plus en plus conscience qu'il existait des exemples convaincants d'explications que les approches causales ne pouvaient saisir adéquatement.

En physique, tout comme en mathématiques ou en métaphysique, plusieurs types d'explications firent ainsi surface qui ne semblaient pas reposer sur un mécanisme causal. Et, de façon bien compréhensible, l'idée se répandit que la causalité — bien qu'elle soit certainement une composante essentielle de l'explication scientifique — ne nous permettait sans doute pas d'obtenir un portrait complet de la situation. Les explications non causales, c'est-à-dire des explications qui vont au-delà de la causalité d'une manière ou d'une autre, émergèrent alors pour constituer bientôt un sujet de recherche florissant.

Il convient d'abord, avant de nous pencher sur les détails concernant les divers types d'explication non causale identifiés, de nous arrêter sur l'effet qu'a eu l'essor de l'explication non causale sur la question que nous évoquions plus haut : qu'est-ce qu'une explication scientifique ? En général, deux positions semblent possibles en guise de réponse¹ : le pluralisme explicatif et le monisme explicatif. Selon la première, les

1. Notons qu'une troisième position est mentionnée dans [Reutlinger et Saatsi \(2018\)](#) : le réductionnisme

explications causales et non causales sont des types d'explication différents et on doit en rendre compte à l'aide de deux théories distinctes de l'explication (ou davantage). L'idée centrale de la position pluraliste, en d'autres mots, est qu'on doit ajouter à une théorie des explications causales des théories supplémentaires pour les explications non causales (une position qui a attiré l'intérêt de [Salmon \(1989\)](#) ; voir aussi, plus récemment, [Lange \(2014\)](#)). Selon la position moniste, par contre, il existe un noyau explicatif commun aux explications causales et non causales et il devrait exister une théorie philosophique unique qui puisse l'identifier. Le moniste maintient donc qu'une seule théorie de l'explication pourrait rendre compte à la fois de l'explication causale et de l'explication non causale, et qu'elle devrait y parvenir en identifiant les caractéristiques qui rendent ces explications explicatives.

Plutôt que d'insister sur les différences entre les approches pluraliste et moniste — comme cela est souvent le cas dans les publications contemporaines à ce sujet, par exemple, dans [Reutlinger et Saatsi \(2018\)](#), mais aussi dans [Reutlinger \(2017\)](#) — nous préférons les voir comme des approches complémentaires. Il est en effet clair que les explications causale et non causale partagent un noyau explicatif commun en cela qu'elles sont toutes deux des explications, mais qu'elles diffèrent également de manière significative en cela qu'elles prennent en compte différents résultats. Or, alors que l'approche pluraliste tente de cerner ce qui distingue les explications causale et non causale, l'approche moniste dirige l'attention sur ce qu'elles ont en commun, la première ayant l'avantage de cerner les caractéristiques propres à chaque domaine, et la seconde, celui de viser une théorie de l'explication robuste et unifiée. Il nous paraît ainsi raisonnable de penser que seul le fait de tenir les deux approches pour complémentaires pourra nous permettre d'obtenir une vue d'ensemble de l'explication scientifique. Nous laisserons donc de côté, dans les pages qui suivent, la question du détail de la relation entre explications causale et non causale, pour travailler plutôt sur le développement d'un modèle pour un type spécifique d'explications non causales et les problèmes qui peuvent en découler. Cela ne nous empêchera toutefois pas de dresser des parallèles avec la notion de causalité et avec les explications causales, ni de nous arrêter à l'occasion sur ce qu'ont également en commun les explications causale et non causale.

causal, c'est-à-dire la négation de l'existence des explications non causales. Comme cette position paraît trop radicale dans le contexte du présent ouvrage, nous n'en traiterons pas davantage.

Ayant spécifié cela, passons à présent au type d'explications non causales qui nous intéressera ici. Plusieurs de ces types ont été identifiés et étudiés, et, parmi ceux-ci, on a dévoué une attention particulière aux explications non causales liées aux mathématiques, également appelées « explications mathématiques ». L'expression « explications mathématiques » étant ambiguë, distinguons les deux significations qu'elle peut avoir : elle pourrait renvoyer aux explications qui sont produites *en* mathématiques, mais elle pourrait aussi renvoyer aux explications qui *utilisent* les mathématiques. Cela mène à la distinction de deux classes. La première contient les pratiques explicatives qui ont cours au sein de la discipline mathématique ; la seconde contient, entre autres, les explications de faits physiques qui utilisent les mathématiques — on retrouve, parmi des exemples bien connus, l'explication de la forme hexagonale des alvéoles d'abeilles, ou l'explication de l'impossibilité de ne traverser précisément qu'une fois les sept ponts de Königsberg (au sujet de laquelle on peut consulter [Mancosu \(2018\)](#) ou voir la section 3.5 ci-dessous). Aucun des exemples appartenant à la seconde classe ne se retrouve dans la première classe et vice versa. On appelle les explications de la première classe des « explications mathématiques internes (ou intramathématiques) », et les explications de la seconde classe des « explications mathématiques externes (ou extramathématiques) » (voir [Colyvan et al. \(2018\)](#); [Mancosu \(2008, 2000\)](#)).

Notre but premier est d'étudier les explications mathématiques de la première classe, c'est-à-dire les explications mathématiques internes. Pourquoi ? Parce que, parmi les explications mathématiques et les explications non causales en général, ce sont de loin les moins étudiées, et qu'elles méritent assurément un examen approfondi. Cependant, l'expression « explication mathématique interne » renvoie elle-même à un large éventail de phénomènes différents. Une explication mathématique interne pourrait constituer en la refonte d'une branche entière des mathématiques tout autant qu'en une explication donnée dans une salle de classe, ou bien en l'explication de la signification d'un symbole tout comme en l'explication de la façon de produire une construction mathématique (sur ces distinctions, voir [D'Alessandro \(2020\)](#)). Il serait, bien sûr, souhaitable de pouvoir ultimement rendre compte de chacun des différents emplois de l'expression « explication mathématique interne ». Mais, afin de mener notre étude, il n'importe pour l'instant que d'établir et de maintenir certaines distinctions conceptuelles de base (tout en gardant à l'esprit qu'il existe souvent des cas limites et de possibles chevauchements entre

catégories) et de nous concentrer sur une catégorie spécifique. Nous nous consacrerons donc aux explications mathématiques internes ayant la forme de preuves de théorèmes mathématiques qui non seulement prouvent que le théorème est vrai, mais qui montrent également pourquoi il est vrai. C'est dire que les explications mathématiques internes ne consisteront pour nous qu'en preuves explicatives, à savoir en preuves qui expliquent le théorème qu'elles prouvent. Divers travaux ont montré que l'idée que certaines preuves mathématiques ont un pouvoir explicatif est répandue parmi les mathématiciens (voir [Mancosu \(2000\)](#))². De plus, cette catégorie d'explications mathématiques internes appartient à une longue et prestigieuse lignée — comme nous pourrions l'observer dans la section 1.2 — qui a elle-même joué un rôle capital dans les études récentes sur le sujet — ce dont nous traiterons dans la section 1.3. Comme le signalent Baron, Colyvan et Ripley :

Jusqu'à maintenant, la tendance a été d'aborder le sujet des explications intramathématiques par le biais d'une investigation de la distinction entre preuves explicatives et non explicatives. Cela est tout naturel, puisqu'il est largement reconnu que certaines preuves sont explicatives quand d'autres ne le sont pas³ ([Baron et al., 2019](#), p. 3).

Rappelons toutefois qu'une preuve mathématique peut expliquer de différentes manières, par exemple en utilisant un diagramme, ou une analogie. Dans cet ouvrage, ouvrant la voie à une nouvelle perspective, nous traiterons exclusivement des *preuves qui expliquent le théorème qu'elles prouvent en révélant les raisons pour lesquelles le théorème est vrai*. Étant donné la grande importance de ce type de preuves pour notre ouvrage, il nous faut les introduire avec circonspection.

Nous avons ouvert cette section en partant de la notion générale d'explication scientifique, pour ensuite faire une distinction entre explications causale et non causale, où les explications causales sont les explications dont l'*explanans* contient la ou les causes, et l'*explanandum*, l'effet. On peut aussi voir les explications causales comme les explications qui suivent à la trace⁴ une relation de causalité existant dans le monde.

2. La majorité (sinon la totalité) des exemples de preuves mathématiques explicatives nous sont justement fournis par les observations et les remarques faites par des mathématiciens dans le cadre de leur travail. C'est d'ailleurs sur de tels cas que nous nous appuyerons dans ce qui suit.

3. Traduction de l'anglais par J. Allard.

4. Le mot habituellement employé dans ce contexte est le verbe anglais « to track », suivant l'usage qui

Depuis l'époque de Bolzano au moins (pour un exemple, voir [Schneider \(2014\)](#)), et de façon plus marquée dans les recherches et publications récentes (comme dans [Schaffer \(2016\)](#)), les philosophes établissent une analogie entre la notion de causalité et celle de fondation en général, cela étant tout spécialement le cas dans le domaine mathématique (voir, à ce sujet, [Detlefsen \(1988\)](#))⁵ : alors que la causalité relie des faits dans le monde de façon à ce que certains sont les causes et certains autres les effets, la fondation relie les vérités mathématiques de façon à ce que certaines sont la vérité de certaines autres. L'analogie entre causalité et fondation ne s'appuie pas uniquement sur le fait qu'elles sont toutes deux des relations de dépendance, mais aussi sur le fait qu'elles partagent de nombreuses propriétés structurelles (comme l'asymétrie ou l'irréflexivité). Il existe d'ailleurs des modèles tentant de produire une théorie unifiée de ces deux relations (on pourra en trouver dans [Schaffer \(2016\)](#)).

Suivant cela, comme il est largement accepté que les explications causales suivent à la trace les relations causales — certains ayant par ailleurs affirmé que toutes les explications suivent à la trace une relation de dépendance (voir ([Kim, 1994](#), p.68)) — il semble raisonnable de penser que les explications mathématiques internes (ou à tout le moins certaines d'entre elles) suivent à la trace une relation de fondation dans le monde mathématique. Cela suggérerait qu'il existe un type d'explications mathématiques internes qui prennent la forme de preuves et qui sont telles que leur *explanans* contient la ou les raisons pour lesquelles la conclusion est vraie, alors que l'*explanandum* correspond à la conclusion elle-même⁶. Nous le verrons dans les sections suivantes : non seulement ce type d'explications mathématiques existe, mais elles font de surcroît partie d'une grande tradition philosophique. De plus, puisqu'il existe entre elles et les explications causales une forte analogie, elles ont certes un statut particulier (elles reproduisent au niveau mathématique la structure que l'on retrouve au niveau causal), mais elles

en est fait dans [Nozick \(1983\)](#). La traduction standard de ce terme technique, inaugurée dans [Dutant et Pascal \(2005\)](#), est « suivre à la trace », que nous reprenons ici.

5. La notion de *grounding métaphysique* est aujourd'hui l'objet d'un intérêt singulier, comme on peut le voir dans [Fine \(2012\)](#). Il nous faut cependant préciser que nous ne comptons pas participer, dans ce texte, à quelque débat métaphysique que ce soit. Par « fondation », nous ferons simplement référence à la relation qui existe en mathématiques entre les raisons d'une vérité et cette vérité elle-même et en traiterons davantage dans la suite du chapitre. Le lecteur intéressé par cette relation pourra également consulter, pour de plus amples informations, les études [Betti \(2010\)](#); [Poggiolini \(2016\)](#); [Rumberg \(2013\)](#).

6. Nous avons également développé cette idée dans l'article [Poggiolini et Genco \(2022\)](#).

promettent également de constituer un objet d'étude fécond dans le domaine des explications non causales, étant donnée l'importance des explications causales pour la question des explications scientifiques.

Clarifions, en terminant, un élément crucial pour le reste de notre ouvrage concernant la perspective que nous avons choisie d'adopter ici. Car, si les preuves mathématiques explicatives forment un vaste domaine d'étude, c'est, d'une part, en raison de la grande variété de preuves que les mathématiciens considèrent comme explicatives, mais aussi, d'autre part, en raison des diverses perspectives s'offrant à nous pour les étudier. Nous avons fait jusqu'à maintenant plusieurs distinctions dans le but de spécifier ce que sont les explications mathématiques pour en faciliter l'analyse. Nous soulignons à présent une dernière, et capitale, distinction, en mentionnant d'abord que les explications en général, et les explications mathématiques en particulier, ont une relation privilégiée avec la compréhension. C'est en effet une chose de savoir que la somme des angles intérieurs d'un quadrangle est de 360° , et c'en est une autre de savoir pourquoi c'est le cas. Dans le premier cas, on ne connaît qu'un fait, alors que, dans le second, on se trouve en présence de quelque chose de plus profond et de plus grande valeur, c'est-à-dire la compréhension de pourquoi ce fait est le cas. On peut donc très bien étudier ce que sont les explications mathématiques en portant attention au genre de compréhension qu'elles procurent lorsque les mathématiciens les développent. Selon une *perspective épistémique*, on tâchera donc de distinguer une preuve qui explique d'une preuve qui ne le fait pas selon la compréhension associée à chacune.

Une telle perspective est pertinente et présente de nombreux avantages— mais ce n'est pas la seule qu'on puisse adopter au sujet des preuves mathématiques explicatives. Pour déterminer ce qu'est une preuve mathématique, on peut également s'appuyer sur sa structure et identifier des caractéristiques récurrentes qui sont la marque de son pouvoir explicatif. On peut ainsi distinguer les preuves qui expliquent des preuves qui ne le font pas au moyen des caractéristiques que l'on retrouve dans les premières, mais pas dans les secondes. On appellera cette seconde perspective la *perspective ontique* (à ce sujet, voir [Kim \(1994\)](#), mais également [Inglis et Mejía-Ramos \(2019\)](#)).

En fait — comme nous le ferons remarquer dans la section 1.3 — parmi les modèles des explications mathématiques produits par la recherche contemporaine, les mieux connus adoptent une perspective ontique. Même si nous sommes d'avis qu'une théorie exhaustive

de l'explication mathématique, et des explications en général, devrait, en dernière analyse, tirer partie à la fois des perspectives ontique et épistémique, nous suivrons ici le mouvement animant les études récentes et ne traiterons de la question des preuves explicatives que d'après une perspective ontique, réservant la perspective épistémique à des recherches ultérieures.

1.2 Histoire de la notion d'explication mathématique

Lorsqu'il s'agit d'étudier les explications mathématiques, deux questions apparentées émergent d'elles-mêmes. La première est : Les explications mathématiques existent-elles réellement ? La seconde est : Si les explications mathématiques existent, quelle est leur structure, c'est-à-dire qu'est-ce qui distingue une preuve qui explique d'une preuve qui ne le fait pas ? Dans cet ouvrage, nous traiterons principalement de la seconde question, ce qui culminera, au dernier chapitre, par la présentation de notre modèle des explications mathématiques. Il nous faut cependant dire que plusieurs philosophes (dont on trouvera les conclusions dans [Lange \(2014\)](#); [Mancosu \(2000\)](#); [Steiner \(1973\)](#)) ont déjà admirablement répondu à la première question en tentant de montrer que les preuves mathématiques explicatives existent, mais aussi qu'elles sont d'une grande importance. Ils ont, entre autres, abordé les explications mathématiques en fournissant un éclairage historique à leur sujet (voir en particulier [Mancosu \(1999, 2001, 2000\)](#)). Dans cette section, nous résumerons brièvement les résultats de ce travail, car nous reconnaissons que l'histoire de la philosophie et l'histoire des mathématiques peuvent donner une idée claire du problème posé par les explications mathématiques, ainsi que situer son importance. En d'autres termes, même si le but principal de ce ouvrage n'est pas de nature historique — ce pourquoi nous n'y incluons pas d'analyse des textes pertinents concernant les explications mathématiques — nous croyons qu'un court compte rendu des racines historiques du problème des preuves mathématiques explicatives peut aider à comprendre le problème lui-même ainsi que son intérêt. Il faut noter que, lorsqu'il n'y aura pas de place à l'ambiguïté, nous nous arrêterons spécialement sur les travaux portant sur les preuves qui expliquent en montrant les raisons pour lesquelles le théorème qu'elles prouvent est vrai. Une telle distinction est peu courante dans les études contemporaines sur l'histoire des preuves mathématiques, mais vu son rôle central dans notre projet, elle mérite une attention particulière. Soulignons enfin que la notion de preuve mathématique

explicative a souvent, au cours de l'histoire, été associée à l'idée d'une augmentation de la complexité conceptuelle du sommet de la preuve vers sa base. C'est là une idée intrigante *per se* — mais elle sera aussi une des composantes principales de notre modèle des explications mathématiques.

Dans les *Seconds analytiques*, Aristote décrit son idéal de la connaissance scientifique en termes (entre autres) de connaissance des causes :

Nous pensons connaître scientifiquement chaque chose au sens absolu, et non pas à la manière sophistique par accident, lorsque nous pensons connaître la cause du fait de laquelle la chose est, savoir que c'est bien la cause de la chose et que cette chose ne peut pas être autrement qu'elle n'est (Aristote (2005), I.2 71b10-13).

Les causes — « αἰτίαι » — en question sont les quatre causes aristotéliennes, soit les causes formelle, matérielle, efficiente et finale. Comme il est mentionné dans Mancosu (2018), le grec « αἰτία » est de nos jours mieux rendu par le mot « explication », ce qui fait de la théorie aristotélienne des quatre causes une théorie de quatre types d'explications.

La traduction anglaise donnée par Barnes du passage ci-dessus va justement dans ce sens⁷ :

We think we understand something *simpliciter* (and not in the sophistical way, accidentally) when we think we know of the *explanation* because of which the object holds that it is its *explanation*, and also that it is not possible for it to be otherwise⁸ (Aristotle (1993), I.2 71b10-13).

La connaissance scientifique qui passe par l'explication s'obtient directement au moyen de la démonstration. Toutefois, toutes les démonstrations ne sont pas égales : au chapitre I.13 des *Seconds analytiques*, Aristote distingue les démonstrations « du fait » et les démonstrations « du pourquoi ». Les deux genres de démonstrations sont logiquement cohérentes, mais seules les secondes rendent compte de la structure de dépendance qui sous-tend les phénomènes étudiés, et elles seules nous fournissent une connaissance. C'est donc dire que seules les démonstrations « du pourquoi » sont des démonstrations scientifiques à proprement parler et sont telles que leurs prémisses sont « vraies,

7. Puisqu'il n'existe aucune traduction française où l'on emploie « explication » pour αἰτία, nous utilisons ici exceptionnellement la traduction anglaise.

8. Nous soulignons.

premières, immédiates, plus connues que la conclusion, antérieures à elle et causes [ou explications] de la conclusion » (Aristote (2005), I.2 71b21-23).

Comment ces remarques générales sur la connaissance scientifique sont-elles liées aux mathématiques ? Selon Aristote, c'est dans les sciences mathématiques que l'on trouve les meilleurs exemples de démonstrations scientifiques. On pourrait même affirmer que la théorie de la science présentée dans les *Seconds analytiques* prend pour modèle la géométrie. Et c'est précisément dans le domaine de la géométrie que la notion aristotélicienne de démonstration scientifique est ramenée à l'idée de preuve explicative, c'est-à-dire une preuve qui donne les *fondements* ou les *raisons* du théorème prouvé. Plus précisément, une preuve est explicative dans la mesure où les définitions qu'elle utilise peuvent spécifier les caractéristiques essentielles en vertu desquelles la conclusion est vraie (voir Harari (2008)). Notons que c'est aussi dans le contexte mathématique qu'Aristote introduit un aspect propre aux preuves explicatives et auquel nous reviendrons plus tard : le rejet bien connu de la « μεταβασις εις ἄλλο γένος », selon lequel, dans une preuve explicative, il n'est pas possible de passer d'un genre à un autre (il n'est ainsi pas possible de prouver un théorème géométrique à l'aide de l'arithmétique — voir Aristote (2005), I.7 75a39-40).

Des doutes furent cependant soulevés, dès l'Antiquité, concernant l'idée qu'on trouvait en géométrie, ainsi que, selon toute vraisemblance, en arithmétique, des preuves « explicatives » au sens aristotélicien. Proclus, par exemple, semble adopter une approche plus prudente en admettant que certaines preuves sont explicatives, mais en soutenant que d'autres ne le sont pas.

Nous découvrirons que ce qu'on appelle « démonstration » possède quelques fois les propriétés de la démonstration, prouvant ce qu'on cherche à obtenir à partir de définitions en position de moyens termes — car la démonstration parfaite est telle — mais tentant à d'autres occasions de démontrer d'après des indices sûrs. Cela ne doit pas nous échapper. Car si les travaux des géomètres ont une nécessité absolue en raison de la matière dont ils traitent, ils n'atteignent pas toujours leurs conclusions au moyen des méthodes démonstratives. Car quand, à partir de l'égalité entre l'angle extérieur du triangle et les deux angles intérieurs opposés, il est prouvé que les angles intérieurs d'un triangle sont égaux à deux droits, comment cette démonstration se base-t-elle

sur des causes, et comment le moyen terme n'est-il pas un indice sûr ? Car les angles intérieurs sont égaux à deux droits lorsqu'il n'existe aucun angle extérieur, puisqu'un triangle existe sans que son côté soit prolongé à l'extérieur⁹ (Proclus, 1873, 206.12-26).

La question de l'explication dans les sciences mathématiques donna lieu à un débat animé en philosophie de la connaissance durant la Renaissance et au XVII^e siècle. Ce débat — analysé et décrit en détails dans Mancosu (2000) — n'intéressait pas seulement les commentateurs d'Aristote, mais également les mathématiciens. Une dissension apparut chez les commentateurs du Corpus entre ceux qui niaient la possibilité que les preuves mathématiques puissent expliquer le théorème qu'elles prouvent et ceux qui, à l'opposé, se portaient à la défense de la géométrie en tentant de lui redonner sa place au sein des sciences explicatives. On trouvait, dans le premier groupe, Piccolomini et Pereyra qui affirmaient que les preuves mathématiques ne pouvaient être explicatives en se basant sur des théorèmes des *Éléments* d'Euclide qu'on pouvait difficilement interpréter comme comportant des preuves utilisant des causes. Le second groupe comptait bon nombre de commentateurs tels que Clavius, Biancani et Barrow, qui tentaient consciencieusement de classer les preuves (tout particulièrement celles employées dans les *Éléments*) selon qu'elles étaient explicatives ou non.

Une distinction similaire s'instaura chez les mathématiciens. D'un côté, plusieurs géomètres, comme Rivault de Fleurance, dont on cite ici une scholie à l'introduction du traité d'Archimède *De la quadrature des paraboles*, prirent conscience que de nombreuses preuves des mathématiques classiques ne satisfaisaient pas aux critères déterminés par Aristote pour les démonstrations scientifiques, et en vinrent ainsi à la conclusion que le but de la géométrie n'était pas de prouver pourquoi un théorème est vrai, mais uniquement de prouver qu'il est vrai.

Il est en outre à noter que les géomètres ne font pas usage des causes de la chose, mais des causes par lesquelles la chose est connue. En effet, il leur suffit d'avoir démontré que la chose est telle, sans chercher comment elle est faite¹⁰ Archimède (1615).

De l'autre côté, des mathématiciens prestigieux comme Cavalieri, Guildin, Torricelli et

9. Traduction du grec par J. Allard.

10. Traduction du latin par J. Allard.

Barrow ne s'arrêtèrent pas au fait que la majorité des preuves géométriques ne sont pas explicatives. Ils tentèrent plutôt précisément de développer de nouvelles approches de la géométrie qui se rapprocheraient de l'idéal aristotélicien des explications en mathématiques. Comme le dit Mancosu :

Il faut remarquer que, alors que durant la première moitié du XVII^e siècle les tentatives pour développer des mathématiques causales étaient en lien avec les recherches les plus innovatrices (géométrie des indivisibles, théorie des centres de gravité, géométrie analytique), durant la seconde moitié du siècle, ce projet incluait également plusieurs tentatives pour remanier les parties les plus élémentaires des mathématiques de manière « causale »¹¹ (Mancosu, 2000, p. 112).

On observe chez Arnauld et Nicole, et aussi, dans une moindre mesure, chez Descartes, qu'une grande attention est dédiée aux preuves explicatives. Ces penseurs se consacrèrent à bonifier la « pureté de la méthode » héritée d'Aristote, conçue comme la stricte indépendance des preuves produites à l'intérieur d'une même science, mais ils le firent à partir de concepts appartenant à différents domaines théorétiques. Leur attention se tourna en effet plutôt vers un élément connexe : un « principe d'analyticité », auquel, selon eux, toute preuve explicative devrait obéir. Avant de nous pencher sur ce qu'ils entendaient par là, disons d'abord un mot de ce principe lui-même. La première signification associée au principe d'analyticité est directionnelle (par exemple, voir Hintikka (1965)). Alors qu'une preuve synthétique est descendante — c'est-à-dire qu'elle débute avec les éléments du haut et poursuit son chemin jusqu'à la conclusion, tout en bas — une preuve est analytique si, pour un théorème donné, nous espérons réussir à la mener à bien en procédant de la base vers le sommet, c'est-à-dire de manière ascendante. Dans le cadre de ce procédé, « ascendant » ou « de la base vers le sommet » signifie que l'on remonte dans la preuve (ou, plus précisément, dans l'arbre de preuve) en procédant à rebours (c'est-à-dire en allant de la conclusion vers les prémisses) jusqu'à ce que l'on atteigne les éléments de base. Exprimée en ces termes, la contraposition analytique-synthétique n'indique rien de plus que deux lectures possibles d'un même objet logique. Ainsi, bien que cette distinction soit importante du point de vue de l'heuristique mathématique, il ne semble pas adéquat de l'utiliser pour saisir la structure logique des preuves. Toutefois, la

11. Traduction de l'anglais par J. Allard.

situation est bien différente lorsque l'on se tourne vers la seconde signification de ce principe, selon laquelle on considère la contraposition analytique-synthétique, et plus précisément le principe d'analyticité, dans un contexte axiomatique¹². On peut alors utiliser cette contraposition pour décrire une caractéristique plus proéminente : dans une théorie déductive, une preuve analytique est une preuve qui va des ingrédients simples jusqu'à des expressions plus complexes. On peut donc dire qu'une démonstration analytique est une démonstration où la préoccupation principale est de réduire des éléments complexes en éléments simples (si on la lit de la base vers le sommet), et où, par comparaison, on se préoccupe moins de la possible longueur du processus inférentiel¹³. C'est en ce dernier sens, c'est-à-dire en référant à l'augmentation de la complexité des prémisses à la conclusion, que Descartes (dans une certaine mesure), dans ses *Regulae ad directionem ingenii*, ainsi qu'Arnauld et Nicole, attribuaient une marque d'analyticité à chaque processus explicatif — et surtout aux définitions et preuves mathématiques. Chez

Descartes, cette idée est évoquée dans le passage suivant :

Pour distinguer les choses les plus simples de celles qui sont compliquées et pour les chercher avec ordre, il faut, dans chaque série de choses où nous avons déduit directement quelques vérités d'autres vérités, voir quelle est la chose la plus simple, et comment toutes les autres en sont plus, ou moins, ou également éloignées (Descartes, 2004, Règle sixième).

Elle est exprimée plus en détail chez Arnauld et Nicole :

Ce que nous avons dit dans le chapitre précédent nous a déjà donné quelque idée de la méthode de composition, qui est la plus importante, en ce que c'est celle dont on se sert pour expliquer toutes les sciences.

Cette méthode consiste principalement à commencer par les choses les plus générales et les plus simples, pour passer aux moins générales et plus composées. On évite par là les redites ; puisque si on traitait les espèces avant le genre, comme il est impossible de bien connaître une espèce sans en connaître le genre, il faudrait expliquer plusieurs fois la nature du genre dans la nature de chaque espèce (Arnauld et Nicole, 1993, p. 288).

12. Voir Casari (1987).

13. On trouvera une présentation couvrant en détail la riche distinction analytique-synthétique dans Otte et Panza (1997).

On découvre un autre défenseur des preuves explicatives en la personne de Leibniz, qui chercha à fonder une théorie de ce type de preuves sur ce qu'on pourrait appeler un ordre objectif des vérités mathématiques, où ces vérités sont hiérarchisées suivant leur complexité, une preuve explicative ne faisant que montrer quel segment de cette hiérarchie la sous-tend. En d'autres mots, une preuve explicative explique la vérité de ce qu'elle prouve en montrant les autres vérités mathématiques (ou l'autre vérité mathématique) qui constituent son fondement et qui occupent un rang indiquant une plus grande simplicité dans la hiérarchie des vérités. Dans les *Nouveaux essais sur l'entendement humain*,

Leibniz affirme ceci :

La *raison* est la vérité connue dont la liaison avec une autre moins connue fait donner notre assentiment à la dernière. Mais, particulièrement et par excellence, si c'est la cause non seulement de notre jugement, mais de la vérité même [...] (Leibniz, 1921, (IV xvii 3)).

Un tel ordre des vérités est, selon Leibniz, naturel et ne doit pas être confondu avec l'ordre de la découverte, de la croyance ou de la connaissance.

Une position similaire est reprise et développée en profondeur par le philosophe et mathématicien Bernard Bolzano. Selon Bolzano, qui fait explicitement référence à Aristote¹⁴, il existe des preuves mathématiques qui montrent simplement qu'un théorème est vrai (*Gewissmachung*), et des preuves qui expliquent pourquoi il est vrai (*Begründung*). Ces dernières sont supérieures aux premières en cela qu'elles révèlent les fondements ou les raisons objectives de leur conclusion. Les preuves explicatives sont donc des preuves qui reflètent une relation ontologique entre les propositions constituant les prémisses et celle constituant la conclusion d'une preuve. Cette relation ontologique est ce qu'on appelle l'*Abfolge*, ou la relation du fondement à la conséquence, et fut identifiée dès les premiers travaux de Bolzano. L'idée centrale en est que, dans une exposition scientifique des mathématiques, il nous faut aller au-delà des multiples possibilités logiques de dérivations entre les propositions mathématiques et viser plutôt un ordre unique et objectif des fondements et des conséquences dans les vérités mathématiques.

Dans le royaume de la vérité, c'est-à-dire dans l'ensemble de tous les jugements vrais, règne une certaine *connexion objective*, indépendante du fait

14. P. Mancosu note, dans Mancosu (1999), la présence d'un fil rouge liant Aristote, Arnauld et Bolzano.

qu'elle est ou non *reconnue subjectivement* par nous, et en vertu de laquelle certains de ces jugements sont des raisons des autres et ceux-ci des conséquences des premiers. Il me semble que le véritable *but* poursuivi dans un exposé scientifique est de représenter cette connexion objective des jugements, c'est-à-dire de choisir et d'ordonner un ensemble de jugements de telle sorte que tout jugement qui est indiqué comme conséquence soit aussi indiqué comme tel et réciproquement [Bolzano \(1990\)](#).

Bolzano fit, avec sa *Wissenschaftslehre*, une tentative monumentale pour donner des assises plus stables à de telles idées en s'essayant à développer une théorie détaillée des preuves explicatives et de la notion connexe d'*Abfolge*. Comme on le retrouve dans [Kitcher \(1975\)](#); [Mancosu \(1999\)](#); [Betti \(2010\)](#), cela devrait nous conduire à reconnaître en Bolzano le premier penseur qui développa une théorie des explications mathématiques. Cet ouvrage n'étant pas le lieu approprié pour présenter cette théorie dans son ensemble¹⁵, nous ferons ici seulement la remarque que, dans le cadre de ses réflexions, Bolzano s'intéressa à l'analyticité des preuves explicatives. Il le fit tout d'abord en critiquant le rejet par Aristote de la « *μετάβασις εἰς ἄλλο γένος* », puisque, par exemple, les propriétés des quantités spatiales trouvent leur raisons objectives dans les propriétés des quantités générales. Le théorème bolzanien sur les zéros des fonctions continues montre ainsi que la raison pour laquelle chaque droite continue d'une courbe simple dont l'ordonnée est positive en a et négative en b doit croiser l'axe des abscisses à un point situé entre a et b est le fait que chaque fonction de x qui est continue dans l'intervalle ab , et qui a à ses extrêmes des valeurs à signes opposés, est telle que, pour un c , ($a < c < b$), $f(c) = 0$. Une preuve explicative d'un théorème géométrique pourrait, par conséquent, bien impliquer une « *μετάβασις εἰς ἄλλο γένος* ». Cependant, une telle preuve doit aussi être analytique, en cela que ses fondements doivent être plus simples que sa conclusion. Pourtant, si l'on reprend ce même théorème, tenter de le prouver en faisant appel au théorème fondamental de l'algèbre mènera à un échec :

Une telle preuve ne peut être dite explicative, puisque la seconde proposition exprime une vérité qui est clairement plus complexe que celle que nous examinons ; il est donc possible d'expliquer celle-là à l'aide de celle-ci, mais l'inverse ne tient pas ([Bolzano, 2014](#), §165).

15. À ce sujet, voir [Bolzano \(2014\)](#). Nous y reviendrons toutefois lorsque nécessaire.

Les preuves mathématiques — conçues comme des processus liant une conclusion à ses fondements objectifs — sont telles, pour Bolzano, qu'elles procèdent du simple au complexe : les vérités de deux éléments conjoints expliquent la vérité de la conjonction, mais pas inversement.

Il faut noter que Bolzano n'était pas seulement un philosophe éclairé, mais également un brillant mathématicien : ses convictions philosophiques au sujet des preuves explicatives eurent des conséquences significatives sur son travail en mathématiques, comme il le mentionne dans les remarques introductives de son essai de 1817 sur le théorème des valeurs intermédiaires (voir [\(Mancosu, 1999, p. 436\)](#)).

Un contemporain de Bolzano, Cournot, consacra également une attention toute spéciale aux explications en mathématiques et à la distinction connexe entre les démonstrations qui expliquent et les démonstrations qui ne le font pas¹⁶.

Cependant, quiconque est un peu versé dans les mathématiques distingue, parmi les différentes démonstrations qu'on peut donner d'un même théorème, toutes irréprochables au point de vue des règles de la logique et rigoureusement concluantes, celle qui donne la vraie raison du théorème démontré, c'est-à-dire celle qui suit dans l'enchaînement logique des propositions l'ordre selon lequel s'engendrent les vérités correspondantes, en tant que l'une est la raison de l'autre. Tant qu'une telle démonstration n'est pas trouvée, l'esprit ne se sent pas satisfait : il ne l'est pas, parce qu'il ne lui suffit point d'étendre son savoir en acquérant la connaissance d'un plus grand nombre de faits, mais qu'il éprouve le besoin de les disposer suivant leurs rapports naturels, et de manière à mettre en évidence la raison de chaque fait particulier. En conséquence, on dit qu'une démonstration est indirecte, lorsqu'elle intervertit l'ordre rationnel ; lorsque la vérité, obtenue à titre de conséquence dans la déduction logique, est conçue par l'esprit comme renfermant au contraire la raison des vérités qui lui servent de prémisses logiques ([\(Cournot, 1912, §24\)](#)).

Tout comme Bolzano appuyait sa théorie de l'explication mathématique sur la notion d'*Abfolge*, Cournot s'appuie sur la notion d'*ordre rationnel* pour rendre compte de l'explication mathématique. Les relations d'*Abfolge* et d'ordre rationnel ont plusieurs points en commun : elles lient toutes deux une vérité à sa raison, elles sont toutes deux

16. Voir [Mancosu \(1999\)](#) pour une analyse détaillée et une comparaison des travaux de Cournot et Bolzano.

objectives et basées sur une relation de conséquence logique (sans y être réductibles). En outre, toutes deux sont d'origine aristotélicienne et toutes deux sont parallèles à la causalité : alors que la causalité lie des faits dans le monde, l'*Abfolge* et l'ordre rationnel lient des vérités dans le monde abstrait, par exemple, celui des mathématiques. Il y a toutefois des différences importantes entre ces deux notions malgré leurs similitudes. Premièrement, la relation d'*Abfolge* est asymétrique et lie des vérités structurées en une hiérarchie stricte, quand la relation d'ordre rationnel est symétrique, ce qui remet en question le fait qu'elle puisse rendre fidèlement le concept informel d'explication. Deuxièmement, alors que Bolzano croyait que la notion d'*Abfolge* n'était pas primitive (ou, à tout le moins, que la notion formelle d'*Abfolge* ne l'était pas) et tentait de l'analyser, Cournot était plutôt d'avis que la notion d'ordre rationnel pouvait seulement être saisie par notre intuition philosophique, sans pouvoir être analysée au moyen d'un argument rationnel :

[...] il n'y a aucun moyen de démontrer rigoureusement que tel arrangement entre des vérités théoriques est conforme à l'ordre rationnel ou s'en écarte. Ici intervient le sens philosophique, dont les appréciations ne peuvent être précisément confirmées ou réfutées, ni imposées à la raison d'autrui (Cournot, 1912, §247).

D'après M. Detlefsen dans Detlefsen (1988), le dernier penseur qu'il faut mentionner au sujet de l'explication mathématique est Frege. Ce dernier croyait, à la suite de Leibniz et de Bolzano, en un ordre objectif des vérités qui servait de base à la distinction entre deux types de preuves et, par conséquent, entre deux types de connaissance. Il existe des preuves qui établissent qu'une proposition résiste à tout type de doute en montrant que cette proposition est vraie, et des preuves qui montrent les fondements du théorème qu'elles prouvent. Si l'on cherche à obtenir une authentique compréhension de pourquoi un théorème est vrai, seules ces dernières peuvent nous fournir une telle connaissance en situant le théorème dans la hiérarchie de fondation à laquelle il appartient.

C'est que la preuve n'a pas pour seule fin de libérer une proposition du doute ; elle permet en outre de pénétrer la dépendance relative des vérités. [...] Plus on poursuivra la recherche, moins nombreuses seront les vérités fondamentales auxquelles on pourra tout ramener, et cette simplification est déjà en elle-même un but digne d'efforts (Frege, 1969, §2).

Cela conclut notre présentation des philosophes et mathématiciens de renom qui défendirent l'idée des explications mathématiques conçues comme des preuves qui montrent les raisons ou les fondements de la vérité qu'elles prouvent. Notons que cette présentation ne se voulait pas exhaustive — il est ainsi possible que nous ayons négligé certains philosophes et mathématiciens ayant dédié attention et intérêt aux preuves explicatives — mais que, comme nous l'avons souligné plus haut, notre but était plus simplement de faire ressortir de ce parcours historique le poids et l'importance de l'idée d'explication mathématique. Detlefsen souligne lui aussi le puissant attrait de cette idée :

Cette conception est séduisante tout particulièrement parce qu'elle tente de faire en mathématiques ce que la causalité fait dans les sciences de la nature, c'est-à-dire la sortir de l'esprit du mathématicien pour la fonder sur une caractéristique d'une réalité objective et indépendante (*mind-independent*). Ce faisant, elle cherche à trouver une base dans l'objet d'étude d'une science — plutôt que dans les expériences psychologiques des praticiens de cette science — pour ces différences ressenties concernant la qualité explicative des preuves, que même ceux qui ne possèdent qu'une expérience limitée des mathématiques semblent percevoir. Elle vise donc à justifier les préférences ainsi développées, tout comme leur inclusion en tant que standard dans la pratique scientifique, en faisant référence à la nature de l'objet étudié plutôt qu'aux esprits qui l'étudient. En menant cela à bien, elle fait de telles préférences des caractéristiques objectivement justifiées de l'enquête mathématique plutôt que de simples biais « professionnels » de ceux qui la pratiquent¹⁷ (Detlefsen, 1988, p. 99).

Étant donnée la force d'attraction d'une telle conception, ainsi que le nombre de penseurs illustres l'ayant défendue, il est surprenant que le sujet des explications en mathématiques ait été pour l'essentiel ignoré en philosophie pendant plusieurs décennies. Il est tout aussi étonnant que, malgré un intérêt grandissant à son égard en philosophie contemporaine, les études publiées semblent oublier ou ignorer les réflexions contenues dans les travaux les ayant précédées. Dans la section qui suit, délaissant l'enquête historique, nous résumerons les principales approches contemporaines des explications en mathématiques. La différence entre les approches contemporaines et celles appartenant à l'histoire de la philosophie prendra forme d'elle-même. Nous reviendrons, en un certain sens, sur les

17. Traduction de l'anglais par J. Allard.

idées que nous avons couvertes dans cette section dans la dernière partie de cet ouvrage, où nous présenterons un modèle des explications en mathématiques — et spécifiquement un modèle des preuves explicatives — dont le but est justement de donner une nouvelle vie aux idées évoquées ci-dessus.

1.3 Les principales approches contemporaines des explications mathématiques

Dans cette section, nous couvrirons les principales approches contemporaines des explications mathématiques et, en particulier, les travaux cherchant à modéliser la notion de preuve qui explique en mathématiques. (Si cela semble dépasser le cadre du type de preuves explicatives auquel nous nous intéressons, c'est parce qu'il nous est impossible de nous limiter aux travaux portant strictement sur les preuves qui expliquent en montrant les raisons, puisque, à notre connaissance, presque aucune étude contemporaine n'est à ce point précise.) Nous présenterons ces travaux en illustrant l'application de chaque modèle à la même preuve, en l'occurrence une preuve du *théorème de Pythagore* considérée par plusieurs comme une preuve explicative. Cette méthode d'exposition diffère des pratiques habituelles dans ce champ de recherche, où des approches différentes sont souvent appliquées à différentes preuves, les auteurs sélectionnant en général une preuve à laquelle leur modèle s'applique singulièrement bien. Ici, toutefois, le but est plutôt de comparer les caractéristiques, les avantages et les défauts de plusieurs approches existantes, et nous croyons que, en utilisant la même preuve, les propriétés de chacune d'entre elles apparaîtront plus naturellement. Il nous reste à dire ce qui, parmi tous les théorèmes, a motivé notre choix du théorème de Pythagore. Cette raison est triviale : le théorème de Pythagore est un théorème bien connu dont les preuves sont simples, donc l'analyse en sera sans doute plus facile à suivre.

Nous consacrons le reste de cette section à un rappel du théorème de Pythagore et à une présentation de deux de ses preuves : une d'entre elles est considérée comme une preuve qui montre simplement que le théorème est vrai ; la seconde, elle, est considérée comme une preuve explicative du théorème de Pythagore (d'après [Bouligand \(1937\)](#), [Steiner \(1973\)](#) et [Mancosu \(2001\)](#)). Afin de mieux mettre en lumière les caractéristiques de chaque preuve, nous avons décidé de les décrire toutes les deux. Il est toutefois à noter

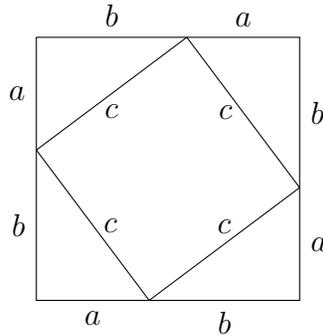


FIGURE 1.1 – Arrangement de quatre triangles rectangles à l’intérieur d’un carré.

que, dans la suite de l’ouvrage, nous nous concentrons sur la preuve explicative¹⁸.

Théorème de Pythagore. Pour tout triangle rectangle ABC dont l’angle droit est A , le carré BC^2 de l’hypoténuse BC est égal à la somme des carrés AB^2 et AC^2 des côtés AB et AC du triangle, respectivement.

Preuve. Prenons un triangle rectangle ABC où l’hypoténuse BC est appelée c et les autres côtés AB et BC sont appelés a et b , respectivement. Prenons ensuite le carré q aux côtés $a + b$ construit sur quatre exemplaires du triangle ABC comme dans la figure 1.1

ci-dessus. L’aire du carré intérieur q' aux côtés c est, de toute évidence, égale à la différence entre l’aire du carré q et les aires des quatre exemplaires de triangle rectangle, c’est-à-dire que $Aire(q') = Aire(q) - 4(Aire(ABC))$. Puisque nous savons que l’aire de q' est c^2 , que l’aire de q est $(a + b)^2$ et que l’aire de tout triangle t est $\frac{ab}{2}$, nous obtenons

$$c^2 = (a + b)^2 - 4\left(\frac{ab}{2}\right).$$

En simplifiant le produit et la fraction, nous obtenons l’égalité

$$c^2 = (a + b)^2 - 2ab,$$

puis, en reformulant le carré de la somme, nous obtenons l’égalité

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab - 2ab,$$

dont le résultat est l’égalité recherchée : $c^2 = a^2 + b^2$,
c’est-à-dire $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Preuve explicative. Prenons un triangle rectangle ABC dont l’angle droit est A et traçons-y une hauteur AH tombant sur son hypoténuse BC , tel qu’illustré à la figure 1.2 ci-dessous. Nous remarquons d’abord que le triangle résultant AHC , contenu dans ABC , est semblable à ABC puisqu’ils ont tous deux un angle droit et qu’ils ont en commun

18. Nous y revenons tout spécifiquement dans la section 3.4.2.

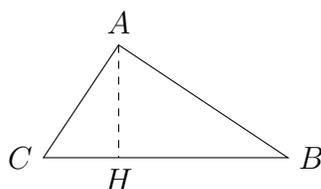


FIGURE 1.2 – Un triangle rectangle dont la hauteur est AH .

l'angle C ¹⁹. La similitude entre les triangles ABC et AHC implique l'égalité suivante :

$$\frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC}$$

qui peut à son tour s'exprimer ainsi : $AC^2 = CH \cdot BC$.

Symétriquement, le triangle ABH contenu en ABC est semblable à ABC puisqu'ils ont tous deux un angle droit et qu'ils ont en commun l'angle B . La similitude entre les triangles ABC et ABH , pareillement, implique l'égalité suivante :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB}$$

que l'on peut également exprimer ainsi : $AB^2 = BH \cdot BC$. Ayant établi que $AC^2 = CH \cdot BC$ et que $AB^2 = BH \cdot BC$, nous pouvons les combiner pour obtenir

$$AC^2 + AB^2 = CH \cdot BC + BH \cdot BC, \text{ ce qui équivaut à}$$

$$AC^2 + AB^2 = (CH + BH)(BC). \text{ Cela nous mène directement à notre conclusion}$$

$$AC^2 + AB^2 = BC^2, \text{ puisque nous avons montré par construction que}$$

$$CH + BH = BC^{20}.$$

Le premier mathématicien à avoir défendu l'idée que la seconde preuve était explicative est G. Bouligand, dans (Bouligand, 1937, p. 258). Alors que d'autres preuves du théorème

19. Comme en déterminant deux angles d'un triangle, nous déterminons aussi le troisième, l'égalité des angles droits des deux triangles et de leur angle C implique que l'angle B de ABC et l'angle A de AHC sont égaux. Cela, à son tour, implique que les deux triangles sont semblables de par la définition de la similitude.

20. Nous avons, en lisant cette preuve explicative, une solide intuition qu'il s'agit en réalité d'une preuve qui montre la raison pour laquelle le théorème est vrai — nous pourrions donner substance et clarté à cette intuition dans la dernière partie de cet ouvrage.

de Pythagore pourraient nous convaincre de la vérité du théorème sans clarifier pourquoi cela est le cas, celle que nous venons tout juste de présenter, selon lui, les raisons pour lesquelles le théorème est vrai. Bouligand et Steiner maintiennent tous deux que le caractère explicatif de cette preuve provient d'un de ses aspects qui est plus général, et il suffira d'une première et rapide comparaison des deux preuves pour clarifier en quoi consiste cette généralité. Car, là où la preuve non explicative s'appuie spécifiquement sur la construction d'un carré, la preuve explicative s'appuie, elle, sur une propriété générale des figures semblables. À la différence de la première preuve, la seconde explique une propriété des triangles rectangles au moyen d'une autre propriété que possèdent les figures semblables : en fait, la dernière propriété constitue la raison pour laquelle la première est vraie.

Bien des théorèmes sont susceptibles de différentes démonstrations. Les plus éducatives sont naturellement celles qui font comprendre les *raisons* profondes des résultats qu'on se propose d'établir. En pareille matière, la notion du domaine de causalité fournit un guide (Nous soulignons.) (Bouligand, 1932, p.6).

Chacune des sections suivantes sera dédiée à un modèle contemporain des explications mathématiques. Nous illustrerons le fonctionnement de chacun en montrant comment il rend compte du pouvoir explicatif de la preuve explicative ci-dessus²¹. Ce faisant, nous couvrirons tous les modèles contemporains les plus notoires (à notre connaissance), à l'exception de trois. Deux d'entre eux sont les modèles présentés dans Weber et Verhoeven (2002) et Wilhelm (2022), dont nous ne traiterons pas ici parce que, même s'ils traitent de la question des preuves explicatives, leur principal but est de comparer le pouvoir explicatif de différentes preuves, ce qui leur confère une portée allant bien au-delà de l'objet de notre propre étude. Le troisième des modèles que nous omettrons est celui présenté dans Kitcher (1981). Bien que ce modèle célèbre ait joué un rôle précurseur dans l'étude des explications en mathématiques, nous n'en traiterons pas puisque Kitcher lui-même ne traite jamais directement de la question des preuves qui expliquent en

21. Il est important de souligner que nous avons d'emblée vérifié notre application de chacun de ces modèles à la preuve explicative du théorème de Pythagore auprès de leurs auteurs respectifs (à l'exception du modèle de Steiner) au cours d'échanges privés. Remarquons toutefois que, dans le cas du modèle de Lange, l'application à notre preuve a reçu l'aval de l'auteur, mais que celui-ci ne s'est pas prononcé sur la validité des conclusions que nous tirons dans cet ouvrage.

mathématiques²², et, en outre, parce que son approche implique une perspective épistémique sur les explications mathématiques.

1.3.1 L'approche de Steiner

Souvent considéré comme un pionnier dans le domaine des explications mathématiques, Steiner est certainement le premier à avoir renouvelé et stimulé l'intérêt pour les preuves explicatives en mathématiques après qu'on les ait négligées pendant des décennies. Il emploie les premières pages de son réputé article « Mathematical Explanation », n'ayant sans doute pas connaissance des travaux sur cette question effectués auparavant en philosophie, à insister sur le fait que parler d'explications en mathématiques a bel et bien du sens.

Longtemps, les philosophes se sont interrogés sur l'explication dans les sciences naturelles. S'ils ont négligé d'étendre leurs interrogations en la matière aux sciences mathématiques, peut-être faut-il blâmer la distinction persistante entre « les faits » (*matters of fact*) et les « relations entre les idées », dont le corollaire implique que les mathématiques n'ont rien à expliquer (puisqu'elles appartiennent à la seconde catégorie). [...] Mais les explications mathématiques existent. Les mathématiciens distinguent couramment les preuves qui ne font que démontrer des preuves qui expliquent²³ (Steiner, 1973, p. 137).

Une fois la légitimité des explications mathématiques établie, Steiner se met à la recherche des critères qui pourraient caractériser les preuves explicatives. Après en avoir considérés plusieurs, comme l'abstraction, la généralité et la possibilité de visualisation, il les rejette tous au profit de l'idée que « pour expliquer le comportement d'une entité, on déduit ce comportement de l'essence ou de la nature de l'entité » (Steiner, 1973, p. 143). Cette idée peut à première vue sembler intuitive et intéressante — or, elle se révèle fort problématique. Comme Steiner lui-même le remarque, elle mène d'abord aux difficultés, que l'on connaît bien, liées aux concepts d'essence et de propriété essentielle (ou nécessaire). De plus, de tels concepts risquent d'avoir peu de prise en mathématiques

22. En vérité, les travaux de Kitcher ne mentionnent pas explicitement les explications mathématiques et nous ne pouvons que reconstituer sa position à ce sujet à partir de propos sur les mathématiques tenus dans ses articles sur l'explication scientifique.

23. Traduction de l'anglais par J. Allard.

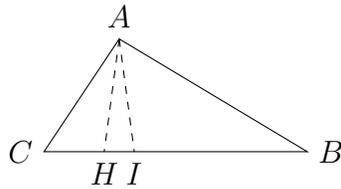


FIGURE 1.3 – Un triangle obtusangle.

puisque toutes les vérités mathématiques sont considérées comme nécessaires. C'est ainsi que Steiner, plutôt que de parler d'« essence », parle de « propriété caractéristique », c'est-à-dire « une propriété appartenant uniquement à une entité ou une structure donnée au sein d'une famille ou d'un domaine de telles entités ou structures », la notion de famille n'étant pas autrement définie. Pour Steiner, la différence entre les preuves explicatives et non explicatives se trouve donc dans les propriétés caractéristiques que les premières, mais pas les secondes, possèdent. Ce n'est pas tout : une preuve explicative doit aussi être généralisable. C'est-à-dire qu'en faisant varier un aspect donné d'une telle preuve (et, par là, une propriété caractéristique particulière), on doit engendrer un éventail de théorèmes correspondants, qui sont prouvés, et expliqués, par un éventail de « déformations » de la preuve originale.

Steiner applique lui-même son modèle de la preuve explicative au cas du théorème de Pythagore présenté ci-dessus. La preuve qui est jugée explicative est telle parce qu'elle utilise une propriété caractéristique des triangles rectangles, nommément la propriété de pouvoir être décomposé en deux triangles qui sont semblables l'un à l'autre et semblables au triangle principal. La première condition associée aux preuves explicatives est ainsi remplie. La seconde condition semble également remplie pour peu qu'on suive le raisonnement suivant (qu'on trouvera dans (Steiner, 1973, p. 150)). Prenons un triangle ABC où l'angle droit varie. Tentons de construire deux triangles I et II qui sont semblables l'un à l'autre et semblables au triangle principal en traçant les lignes AH et AI (voir la figure 1.3). On pourrait remarquer que, si l'angle de ABC subit une variation de 90° à 180° , alors I et II sont superposés, alors que si l'angle de ABC subit une variation de 60° à 90° , alors I et II ne remplissent pas le triangle principal. Cela crée une différence correspondante entre les carrés construits sur les côtés des triangles et le carré construit sur l'ancienne hypoténuse. Nous pourrions, par exemple, prouver que, pour tous

les triangles obtusangles ABC avec un angle obtus A , $BC^2 > AB^2 + AC^2$. Ainsi, comme l'affirme Steiner : « La propriété caractéristique du triangle rectangle est alors simplement la coïncidence des droites x et y . »

Le modèle de Steiner a été l'objet de nombreuses discussions et critiques (pour des exemples, voir [Weber et Verhoeven \(2002\)](#); [Pincock \(2015b\)](#); [Salvereda \(2017\)](#); [Gijsbers \(2017\)](#)). À notre connaissance, deux contre-exemples ont été mis au point. Le premier a été présenté dans [Resnik et Kushner \(1987\)](#), dont les auteurs s'opposaient également à la distinction entre preuves explicative et non explicative. Le second contre-exemple a été développé dans [Hafner et Mancosu \(2005\)](#), où J. Hafner et P. Mancosu commencent par rejeter le contre-exemple de Resnik et Kushner parce qu'il attribue un caractère explicatif à une preuve non sur la base des évaluations faites par des mathématiciens, mais plutôt en s'appuyant sur les intuitions des auteurs. Ils proposent ensuite un nouveau contre-exemple au modèle de Steiner en se basant sur un cas d'explication en analyse réelle — reconnu comme tel dans la pratique mathématique — qui porte sur la preuve du critère de convergence de Kummer.

1.3.2 L'approche de Lange

Dans le domaine des explications mathématiques, M. Lange est l'un des philosophes contemporains les plus prolifiques. Outre la publication de plusieurs articles sur le sujet (voir, par exemple, [Lange \(2014, 2015b\)](#)), on lui doit également l'ouvrage *Because Without Cause* qui traite du problème général des explications non causales, et dont les chapitres 7 et 9 portent spécifiquement sur les preuves explicatives en mathématiques (voir [Lange \(2017\)](#)). Les travaux de Lange sont sans doute surtout caractérisés par l'extrême richesse et la grande variété du bassin d'exemples utilisés. C'est sur la base de cette variété de cas que Lange maintient qu'il n'existe pas de forme générale caractérisant l'ensemble des preuves explicatives : il existerait plutôt des classes différentes de preuves explicatives.

Lange identifie d'abord, pour en arriver à cette conclusion, divers traits saillants des théorèmes mathématiques, qui (selon le contexte dont il est question) rendent compte de la distinction entre les preuves explicative et non explicative. Il apparaît que les deux traits les plus communs sont la symétrie et la simplicité, comme le suggère le titre du chapitre 8 de [Lange \(2017\)](#). Présentons-les tour à tour. Concernant la symétrie, Lange expose clairement qu'une preuve peut être explicative si elle mène à un résultat mathématique qui

présente une symétrie notable et si la preuve montre comment cette symétrie provient d'une symétrie similaire au sein du problème.

Ce que je propose prédit qu'on trouve, dans la pratique des mathématiques, de nombreux autres exemples où l'explication d'un résultat se distingue d'une simple preuve de ce résultat seulement lorsque celui-ci manifeste une étonnante symétrie — et où ce sont uniquement les preuves exploitant une telle symétrie dans un problème qui sont reconnues comme expliquant pourquoi la solution est adéquate²⁴ (Lange, 2017, p. 235).

Ensuite, Lange donne plusieurs exemples de preuves (provenant des probabilités, de l'analyse réelle, de la théorie des nombres, des nombres complexes et de la géométrie) qui expliquent une symétrie en invoquant une autre. Rappelons qu'il n'entend toutefois pas suggérer qu'une preuve peut expliquer uniquement en faisant appel à la symétrie. L'autre trait qui peut servir à éclairer ce qui rend une preuve explicative est la simplicité. Si l'on a affaire à un résultat simple et si l'on trouve une preuve qui ramène ce résultat simple à un aspect du problème qui est similaire et lui-même simple, alors on peut dire qu'une telle preuve explique pourquoi le résultat est vrai.

Un résultat particulièrement simple appelle typiquement une preuve qui exploite des caractéristiques du problème étant semblablement simples²⁵ (Lange, 2017, p. 238).

C'est à l'aide d'études de cas tirés de la géométrie et de l'analyse combinatoire que Lange défend la caractéristique de simplicité des preuves explicatives. Avec la symétrie, la simplicité est le trait le plus saillant et le plus récurrent des preuves explicatives. Lange identifie fréquemment ces deux caractéristiques dans les preuves explicatives en comparant ces dernières à des preuves qui n'expliquent pas : la symétrie et la simplicité se dégagent ainsi spontanément des premières, mais non des secondes.

Selon Lange, ce ne sont pas là tous les traits saillants des preuves explicatives : elles peuvent également s'appliquer de la même manière à plusieurs cas — qu'elles unifient — et elles peuvent généraliser une propriété donnée. Lange note aussi qu'il est erroné d'affirmer que tout résultat mathématique a une preuve explicative. Certains résultats n'ont aucune explication, soit parce qu'en chercher une n'a pas de sens (lorsque le résultat

24. Traduction de l'anglais par J. Allard.

25. Traduction de l'anglais par J. Allard.

en question n'exprime pas de propriété remarquable, par exemple), soit parce qu'aucune preuve explicative n'en a été découverte jusqu'à maintenant.

Voyons maintenant si la preuve explicative du théorème de Pythagore est bel et bien explicative selon l'approche de Lange. Tout d'abord, il nous faut noter que le théorème de Pythagore ne montre aucune symétrie et que sa preuve explicative — détaillée ci-dessus à la section 1.3 — ne peut donc être explicative parce qu'elle met en lien une symétrie avec une autre symétrie. La preuve ne semble pas généraliser une propriété quelconque (elle s'appuie, au contraire, sur une caractéristique très particulière des triangles rectangles), et elle ne s'applique pas de la même manière à plusieurs cas de façon à les unifier. Pour ce qui est de la simplicité, la preuve est certes simple, mais si on la compare à la preuve non explicative — elle aussi présentée à la section 1.3 — il est difficile de déterminer laquelle des deux est la plus simple. Par conséquent, il semble que l'approche de Lange ne puisse pas rendre compte du pouvoir explicatif de la preuve explicative du théorème de Pythagore. Cette dernière pourrait ainsi constituer un contre-exemple à l'approche des preuves explicatives développée par Lange²⁶.

Mentionnons en terminant que l'approche de Lange a été commentée et critiquée dans plusieurs articles, incluant dans [Salvereda \(2017\)](#); [Mancosu \(2018\)](#); [Inglis et Mejía-Ramos \(2019\)](#); [D'Alessandro \(2020\)](#).

1.3.3 L'approche de Pincock

Pincock a lui aussi produit des contributions cruciales à la recherche sur la question des explications en mathématiques, et il s'est, de surcroît, concentré sur la question plus précise des explications scientifiques faisant appel à des outils mathématiques (voir, par exemple, [Pincock \(2012, 2015a\)](#)). Nous ferons ici porter notre attention sur l'approche qu'il met de l'avant dans [Pincock \(2015b\)](#). Selon cette approche, une preuve est explicative lorsqu'elle décrit une dépendance ontologique entre différents domaines mathématiques ou lorsqu'elle se base sur une telle dépendance. Cette relation de

26. Il nous faut remarquer que l'approche proposée par Lange diffère de toutes les autres approches dans la mesure suivante. Les analyses des divers exemples de preuves explicatives présentés par Lange suivent de si près leur cas propre et le traitement que Lange en donne qu'il semble que tout nouvel exemple ne peut être qu'analysé *ad hoc* par Lange lui-même. Les conséquences de cela sont que, d'une part, il n'est pas certain que Lange approuve de notre conclusion concernant la preuve explicative du théorème de Pythagore, mais également que, d'autre part, il s'agit évidemment là d'une limite importante de l'approche qu'il propose.

dépendance devient évidente lorsqu'on procède à une nouvelle classification des entités impliquées, laquelle nous donne davantage d'informations sur ces dernières, une telle classification étant « au coeur de la preuve ».

Afin de nous faire mieux saisir la relation ontologique qui sous-tend les preuves explicatives, Pincock nous invite à la concevoir d'après la division frégréenne²⁷ des vérités mathématiques en une hiérarchie où certaines vérités fondent ou sont la raison pour laquelle une autre vérité est telle. Ainsi une preuve explicative est une preuve qui s'appuie sur la relation de fondation entre certaines vérités, et qui est telle que certaines vérités sont les raisons objectives d'autres vérités.

Pincock tente de fournir une description formelle plus détaillée de cette relation. À cette fin, il introduit une biconditionnelle qui relie les composantes de faits de différents types qui ont entre eux une certaine relation R . Plus précisément, posons que $X_i(x)$ décrit la composante x d'un fait de type X , où i est un index utilisé pour distinguer ce fait d'un autre fait appartenant au même type. Nous obtenons une relation de dépendance objective entre des faits de type X et des faits de type Y lorsque, pour tout x et tout y , si $R(x, y)$, alors $X_i(x) \leftrightarrow Y_i(y)$. C'est-à-dire que

[pour] un ensemble dûment restreint de faits de type X et Y , une fois qu'il y a une relation R entre deux objets appropriés, les faits de ce genre sont jumelés de la façon suivante : un fait d'un type n'est présent que dans le cas où un fait de l'autre type l'est. Cela suggère qu'il y a une relation de dépendance objective entre les faits de type X et les faits de type Y . Il est clair que, lorsque toutes les relations R sont en place, la présence du fait X est suffisante pour que le fait Y soit présent. Mais, en un autre sens, le fait X est également nécessaire à l'obtention du fait Y . C'est là la force de la biconditionnelle²⁸ (Pincock, 2015b, p. 12).

La relation de dépendance ontologique ayant été décrite par une biconditionnelle particulière, il faut maintenant s'intéresser à une question connexe, c'est-à-dire qu'il nous faut déterminer quelle partie de la biconditionnelle joue le rôle du fondement et quelle partie, celui de la conclusion. Pincock a ici recours à la notion d'abstraction (bien qu'il reconnaisse la possibilité que d'autres notions puissent remplir cette fonction — voir

27. Mais aussi aristotélicienne, leibnizienne et bolzanienne, comme nous l'avons vu dans la section 1.2.

28. Traduction de l'anglais par J. Allard.

(Pincock, 2015b, p. 11)), qui indique la directionnalité ou l'asymétrie de la relation de dépendance²⁹. Les fondements explicatifs sont alors donnés par les faits du type X dont les composantes x sont plus abstraites que les composantes y . Selon l'analyse de Pincock

[pour] que cette proposition fonctionne, les objets doivent être partiellement ordonnés selon leur abstraction. Afin de clarifier cet ordre, j'en appelle à l'idée globalement structuraliste que certaines objets peuvent avoir d'autres objets comme instances. Lorsque a a b comme instance, j'affirme que a est plus abstrait que b . Cette relation d'instantiation est non réflexive, asymétrique et transitive. Le cas qui est sans doute le plus clair de ce que j'ai ici en tête est la relation type-jeton³⁰ (Pincock, 2015b, p. 12).

En résumé, les preuves explicatives (ou un certain type de preuves explicatives) sont pour Pincock des preuves mathématiques abstraites, c'est-à-dire des preuves qui s'appuient sur une relation de dépendance ontologique où les fondements sont plus abstraits que la conclusion.

Dans son article, Pincock s'appuie sur l'étude d'un cas pour clarifier son approche des preuves explicatives abstraites³¹. Ce cas est une application canonique de la *théorie de Galois* : la preuve que les équations quintiques (ou équations polynomiales du cinquième degré) ne peuvent être résolues par des nombres rationnels. Conformément à notre façon de procéder, nous appliquerons ici l'approche de Pincock à la preuve explicative du théorème de Pythagore présentée à la fin de la section 1.3.

Afin de déterminer si cette preuve explicative est en effet explicative, selon le modèle de Pincock, nous devons d'abord déterminer si la preuve fait appel à une relation de dépendance entre des objets provenant de domaines mathématiques différents. Cela semble être le cas. La preuve comporte en effet une classification révélatrice des polygones (ce qui, pour Pincock, constitue la justification requise) : un polygone est un triangle rectangle seulement s'il peut être décomposé en deux polygones qui sont semblables entre eux et semblables au plus grand polygone lui-même.

29. Notons, pour plus de clarté, que l'abstraction fournit également à la relation de fondation son unité. Nous ne couvrirons cependant pas cet aspect ici afin de ne pas alourdir le texte.

30. Traduction de l'anglais par J. Allard.

31. Il mentionne aussi un autre cas à la fin de son article, qui consiste en la preuve explicative du théorème suivant : un objet est un polyèdre convexe régulier si, et seulement si, c'est un tétraèdre, un octaèdre, un cube, un icosaèdre ou un dodécaèdre.

Comme nous avons maintenant la démonstration qu’une relation ontologique sous-tend la preuve explicative du théorème de Pythagore, voyons en quoi consiste cette relation ontologique, c’est-à-dire à quelle biconditionnelle cette relation correspond. Voici notre proposition. Représentons par $X(x)$ le fait que x est un triangle rectangle et par $Y(x, z)$ le fait que x et z sont des figures semblables. Appelons $R(x, y, z)$ la relation que l’on obtient si, et seulement si, x est un triangle qui contient les triangles y, z lorsque l’on trace la hauteur sur le côté long. Alors la relation ontologique qui sous-tend la preuve explicative du théorème de Pythagore est la suivante : pour tout x, y, z , si $R(x, y, z)$, alors $X(x) \leftrightarrow Y(x, y) \wedge Y(x, z)$. De façon plus prosaïque, on obtient que pour tout x, y et z , si x contient les triangles y et z lorsque l’on trace la hauteur sur le côté long, alors x est un triangle rectangle si, et seulement si, x est semblable à y et x semblable à z .

Pour pouvoir affirmer que la preuve explicative du théorème de Pythagore est identifiée comme explicative par le modèle de Pincock, la dernière étape à franchir consiste à déterminer si les deux côtés de la biconditionnelle formalisant la relation de dépendance ontologique qui sous-tend la preuve peuvent être vus comme les raisons et la conclusion qui leur correspond. La stratégie est de faire appel au critère d’abstraction : il faut, plus précisément, soutenir l’argument que les fondements de la preuve sont plus abstraits que sa conclusion. La manière dont il nous faudrait procéder pour cette dernière étape est moins évidente. Toutefois, deux voies d’analyse raisonnables apparaissent. D’une part, on pourrait faire porter le poids de l’argument sur la décomposabilité et dire, d’abord, que toutes les figures planes peuvent être divisées en parties, si bien que la divisibilité en parties est une caractéristique abstraite ou générique des figures planes. On pourrait soutenir, ensuite, que, parmi les figures planes, les triangles rectangles ont une propriété de décomposabilité très spécifique. D’autre part, on pourrait aussi faire porter le poids de l’argument sur la similitude des triangles et considérer que les triangles rectangles, décomposés en deux triangles qui sont semblables entre eux et semblables aux triangles originaux, sont une instance particulière de triangles semblables. Puisque l’abstraction se décrit comme le propre d’objets qui ont d’autres objets pour instances, cette propriété pourrait suffire à obtenir le résultat souhaité ici. Ces voies d’analyse semblent toutes deux prometteuses et chacune d’entre elle nous permettrait de déterminer si la preuve explicative du théorème de Pythagore est une preuve explicative abstraite au sens de Pincock. Toutefois, il nous semble que l’article [Pincock \(2015b\)](#) ne nous fournit pas

suffisamment de détails concernant l'abstraction pour nous permettre de développer ces idées et de formuler un avis final sur la question.

1.3.4 L'approche contrefactuelle

La dernière approche contemporaine que nous présentons dans cette section est l'approche que l'on nomme « contrefactuelle³² ». L'approche contrefactuelle a une histoire longue et féconde dans le domaine des explications causales. Hume fut le premier à décrire la causalité en termes contrefactuels :

[...] nous pouvons définir une cause ainsi : *c'est un objet suivi d'un autre objet et tel que les objets semblables au premier sont suivis d'objets semblables au second*. Ou en d'autres termes : *tel que, si le premier objet n'avait pas été, le second n'aurait jamais existé* (Hume, 2002, §VII).

Mais il a fallu attendre les travaux de D. Lewis, dans Lewis (1973), pour que le lien entre causalité et contrefactuels — et, par conséquent, entre explications causales et contrefactuelles — soit abordé et exploré adéquatement. Remarquons que ce lien repose sur l'idée de variation : un phénomène *A* est la cause d'un phénomène *B* si quelque variation de *A* affecte *B*. En termes contrefactuels, deux phénomènes *A* et *B* peuvent être considérés comme cause et effet, respectivement, lorsque c'est le cas que, si *A* était différent, *B* serait également différent. L'approche contrefactuelle des explications causales a récemment été reprise dans Woodward et Hitchcock (2003), où les auteurs utilisent le *structural equation framework*³³ introduit dans Pearl (2000) comme base de leur théorie des explications scientifiques.

L'idée que les contrefactuels puissent jouer un rôle similaire pour les explications en mathématiques a toujours rencontré une certaine résistance. Selon Lange, la source d'une telle résistance se trouve dans le type de nécessité attachée aux hypothèses explicatives dans l'explication mathématique : « elles possèdent une sorte de nécessité particulièrement forte et montrent donc une résistance pareillement forte à tout

32. Bien que le mot « contrefactuelle » ne soit pas répertorié en français, il est fréquemment utilisé comme traduction libre de l'anglais *counterfactual*. Nous nous conformerons à cet usage dans le présent texte, non seulement pour ce qui est de *counterfactual*, mais aussi pour d'autres termes d'emploi similaire.

33. Dans cet ouvrage, tout comme dans le rapport de synthèse, nous utilisons exceptionnellement certaines expressions anglaises lorsque leur traduction française est peu usitée.

changement » (Lange, 2017, p. 88). Ce n'est que dernièrement que cette résistance a été vaincue, des chercheurs s'étant attelés à l'étude des applications des contrefactuels à l'explication mathématique, et plus spécifiquement aux preuves explicatives en mathématiques. La motivation principale de telles études est de progresser en direction de l'objectif final que représente une théorie unifiée des explications applicables dans des contextes causal et non causal. Cela implique que les chercheurs qui tentent de développer une approche contrefactuelle des explications en mathématiques adoptent généralement une conception moniste des explications (au sujet de cette conception, voir la section 1.1). Dans les pages qui suivent, nous présenterons en détail les travaux en la matière de Baron, Colyvan et Ripley publiés dans Baron *et al.* (2019). Notons que cette question a également été abordée de manière plus informelle dans Reutlinger *et al.* (2020).

Selon l'approche contrefactuelle, l'évaluation du pouvoir explicatif d'une preuve se résume à l'évaluation des deux contrefactuels suivants. Un fait mathématique F explique un autre fait mathématique G si, et seulement si :

$CF1$: Si F n'avait pas été le cas, G n'aurait pas été le cas.

$CF2$: Si G n'avait pas été le cas, F n'aurait pas été le cas.

Le premier contrefactuel, $CF1$, qui doit être vrai, rend directement compte du pouvoir explicatif de la relation entre F et G ; le second contrefactuel, $CF2$, doit être faux, puisqu'il sert à garantir l'asymétrie de la preuve, c'est-à-dire qu'il sert uniquement à montrer que ce n'est pas le cas que G explique F .

Les contrefactuels impliqués ayant été identifiés, une théorie des contrefactuels doit aussi spécifier : (i) l'approche qu'elle adopte relativement aux conditions de vérité des contrefactuels, et (ii) la façon dont elle évalue les contrefactuels. Baron, Colyvan et Ripley couvrent à la fois les points (i) et (ii) et nous résumons brièvement leur analyse dans les paragraphes qui suivent.

Concernant (i), Baron, Colyvan et Ripley adoptent une sémantique basée sur la proximité (voir, à ce sujet, Lewis (1973)) qui s'étend à la fois aux mondes possibles et impossibles (voir Beall *et al.* (2012); Mares (1997); Nolan (2001); Priest (2002)). Selon une telle approche, la vérité d'un contrefactuel est définie de la façon suivante :

Definition 1.1. *Un contrefactuel de la forme $A > B$ est vrai dans un monde i si, et seulement si, il existe un monde possible ou impossible dans lequel A et B sont vrais est plus proche de i que tout monde possible ou impossible où A est vrai et B est faux, s'il existe*

des mondes possibles ou impossibles où A est vrai.

En mathématiques, la relation de proximité entre mondes s'interprète en termes de similitude. Ainsi, les mondes les plus proches sont les mondes dans lesquels les propriétés intrinsèques des faits mathématiques actuels sont préservées. Les propriétés extrinsèques, par contre, n'ont pas d'impact sur la proximité entre mondes. La distinction entre propriétés intrinsèque et extrinsèque est la suivante :

La propriété P est intrinsèque si, et seulement si, pour tout couple de doubles, soit les deux possèdent P, soit ni l'une ni l'autre³⁴ (Lewis, 1983, p. 355-356).

Il faut signaler que, en étendant aux mathématiques l'approche lewisienne des contrefactuels basée sur la similitude, le risque suivant apparaît : puisque la variation des contrefactuels en mathématiques peut mener à l'incohérence, les mondes impossibles utilisés pour évaluer de tels contrefactuels seront des mondes incohérents et, par conséquent, des mondes triviaux où toute affirmation ainsi que sa négation sont vraies. On peut toutefois éviter ce problème en considérant les mondes comme fermés sous une logique paracohérente quelconque, c'est-à-dire une logique qui tolère la contradiction. De cette façon, les mondes contiennent des incohérences, mais sans être triviaux. Comme nos auteurs l'affirment :

La vérité d'un contrefactuel mathématique peut ainsi être comprise d'après les structures incohérentes les plus rapprochées lorsque nécessaire, c'est-à-dire d'après celles qui montrent un degré élevé de similitude intrinsèque avec les mathématiques actuels malgré leur incohérence (Baron *et al.*, 2019, p. 5).

Le point (i), c'est-à-dire ce qui rend les contrefactuels vrais selon l'approche de Baron, Colyvan et Ripley, étant clarifié, passons maintenant au point (ii), c'est-à-dire la méthode proposée par ces auteurs pour évaluer les contrefactuels. L'évaluation d'un contrefactuel est une procédure qui requiert une imagination relativement abondante. Il nous faut d'abord désigner certains faits que nous tenons pour fixes, soit des faits qui ne varient pas sous l'effet du changement contrefactuel³⁵. Ensuite, prenant en compte les faits que nous tenons pour fixes, nous devons faire varier autant d'autres faits que nécessaire de façon à

34. Traduction de l'anglais par J. Allard.

35. Voir (Baron *et al.*, 2019, p. 6) pour davantage de clarification concernant les faits qui doivent être tenus pour fixes et ceux qui ne doivent pas l'être.

rendre vrai l'antécédent d'un contrefactuel donné ; un tel processus de variation est appelé « manipulation » (en anglais, *twiddling*). Enfin, nous appliquons les implications de cette manipulation aux faits qui ne sont pas tenus pour fixes, c'est-à-dire que nous les « ramifions » parmi les faits que nous ne tenons pas pour fixes.

Pour voir cela en action, supposons qu'on frotte une allumette et qu'elle s'allume. Songeons à présent au contrefactuel : si l'allumette n'avait pas été frottée, elle ne se serait pas allumée. Pour évaluer ce contrefactuel, nous tenons pour fixes autant de choses que nous le pouvons concernant la nature intrinsèque de l'allumette et les lois de la nature compatibles avec la réalisation de l'antécédent. Nous tenons donc pour fixes les lois gouvernant la combustion et la friction pour nous assurer que l'allumette contrefactuelle se comporte autant que possible comme l'allumette actuelle. Nous tenons également pour fixe le fait que l'allumette est faite de bois, que son extrémité est couverte de sulfure de phosphore, et qu'elle est d'une forme et d'une taille particulières, puisque ce sont toutes là des propriétés intrinsèques de l'allumette. Nous excluons par contre les scénarios où l'allumette est faite, disons, de pierre, car ils ne sont pas pertinents pour le contrefactuel qui nous intéresse, ni ne sont nécessaires à la réalisation de l'antécédent du contrefactuel. En tenant ainsi fixes les faits pertinents, nous exécutons ensuite une manipulation : nous faisons tous les changements requis afin d'empêcher que l'allumette soit frottée. Enfin, nous reportons les implications de cette manipulation sur les faits que nous ne tenons pas pour fixes. Si, après la ramification, l'allumette s'allume tout de même malgré qu'elle n'ait jamais été frottée, alors le contrefactuel est faux. Si elle ne s'allume pas, ce n'est pas le cas. Le même tableau général s'applique aux contrefactuels intramathématiques. Premièrement, nous maintenons fixes certains faits. Tout comme dans le cas physique ordinaire, le but de tenir ces faits pour fixes est de tâcher de nous assurer d'un degré élevé de similitude intrinsèque entre la situation actuelle et toute situation contrefactuelle que nous finissons par prendre en compte (Baron *et al.*, 2019, p. 7).

Afin de souligner et de clarifier les spécificités de leur modèle, Baron, Colyvan et Ripley le mettent à l'épreuve à l'aide d'un exemple d'explication mathématique, provenant de Lange, qui porte sur les trapèzes isocèles. Ici, comme à notre habitude, nous allons

discuter du fonctionnement de ce modèle en partant de notre preuve explicative du théorème de Pythagore.

Pour pouvoir appliquer le modèle contrefactuel à la preuve explicative du théorème de Pythagore, nous devons d'abord identifier les deux faits mathématiques de cette preuve — appelons les S et E — qui sont tels que S explique E . Nous devons donc identifier dans la preuve explicative deux faits mathématiques S et E où E est l'*explanans* et E l'*explanandum*. Il semble raisonnable de dire que, dans la preuve explicative du théorème de Pythagore, nous nous trouvons dans la situation suivante (ici, nous faisons référence aux lettres utilisées dans la figure 1.2, à la section 1.3) :

S : Le triangle rectangle ABC est semblable à la fois à ABH et à ACH .

E : $AC^2 + AB^2 = BC^2$.

Ensuite, pour évaluer le lien explicatif entre S et E , nous devons prendre en considération les deux contrefactuels suivants :

$CF1$: S'il n'y avait pas eu S , il n'y aurait pas eu E .

$CF2$: S'il n'y avait pas eu E , il n'y aurait pas eu S .

Précisons que dans notre cas, alors que $CF1$ doit être vrai, $CF2$ doit être faux, car $CF1$ rend compte du pouvoir explicatif de la preuve, quand la fausseté de $CF2$ sert à en montrer l'asymétrie, c'est-à-dire qu'il sert à montrer que, si nous permutons l'*explanans*, S , et l'*explanandum*, E , et vice versa, la preuve ne serait plus explicative. Lors de notre évaluation de $CF1$ et de $CF2$, nous devons nous appuyer sur certaines positions concernant les dépendances existant entre les faits mathématiques. Tout particulièrement, nous devons tenir pour fixes autant de faits que possible, mais nous ne tenons pas pour fixe un fait mathématique qui dépend de l'antécédent, afin que les changements opérés puissent se ramifier adéquatement.

Avec ces considérations à l'esprit, pour évaluer $CF1$, on pourrait construire un triangle aigu où la hauteur AH est tracée sur le côté long BC et telle que ni le triangle ABH , ni le triangle ABC ne sont semblables au triangle ABC (comme l'illustre la figure 1.4). De là, il peut être démontré par l'absurde³⁶ que BC^2 n'est pas égal à $AC^2 + AB^2$. Ainsi, il existe une situation, ou un monde possible, où l'antécédent et le conséquent de $CF1$ sont vrais et ce monde semble être plus près du monde actuel que tout autre monde où S est

36. Nous en omettons la preuve, qui est courte et triviale.

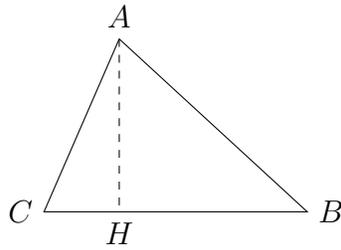


FIGURE 1.4 – Un triangle aigu avec différents triangles.

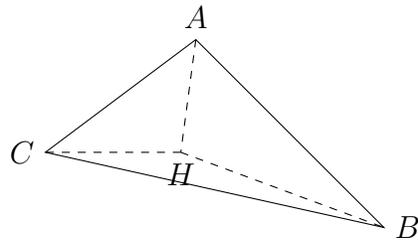


FIGURE 1.5 – Variation (b).

vrai, mais E , faux. De cela, nous pouvons conclure que le contrefactuel $CF1$ est vrai.

Passons maintenant au $CF2$. Pour que ce contrefactuel soit faux, il doit exister une variation qui annule l'égalité entre $AC^2 + AB^2$ et BC^2 tout en maintenant la similitude des triangles ABC , ACH et ABH . Trois options se présentent à nous. (a) La variation la plus simple à laquelle on puisse penser est de faire varier le caractère rectangle du triangle, et ainsi d'utiliser un triangle aigu ou obtus. Dans ce cas, par contre, non seulement l'égalité entre $AC^2 + AB^2$ et BC^2 est-elle annulée, mais la similitude entre les trois triangles ABC , ACH et ABH l'est aussi. (b) Une autre stratégie possible est de faire varier le triangle de façon à ce qu'il ne soit plus rectangle, mais aussi de façon à ce que AH ne soit

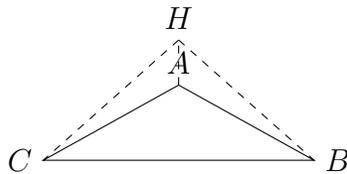


FIGURE 1.6 – Variation (c).

plus en contact avec BC , et se trouve plutôt au milieu du triangle (voir la figure 1.5). Dans cette variation, la position et la longueur de AH ne changent pas, mais le triangle change de façon à ce que H ne se trouve plus sur BC . Toutefois, même dans un tel cas, il peut être démontré que³⁷ la similitude entre les trois triangles ABC , ACH et ABH est absente, tout comme l'égalité entre $AC^2 + AB^2$ et BC^2 . (c) Une troisième variation implique de changer la position de AH ainsi que le triangle utilisé. D'abord, on peut faire varier ABC de façon à ce que l'angle $B\hat{A}C$ soit de 120° et les deux autres angles, de 30° .

Ensuite, on trace une droite vers le haut de A à un point H , de manière à former deux autres triangles, tous deux semblables entre eux et semblables au triangle original (voir la figure 1.6). Dans ce cas, nous obtenons qu'il n'est pas le cas que E , c'est-à-dire que $AC^2 + AB^2$ n'est pas égal à BC^2 puisque ABC n'est plus un triangle rectangle, mais qu'il est le cas que S , c'est-à-dire qu'il est le cas que ABC est semblable à ACH et ABH . En d'autres mots, la variation (c) est la seule où le contrefactuel se révèle être faux. Quelles conclusions pouvons-nous tirer de ces observations ? Toute conclusion que nous pourrions vouloir tirer dépend de la manière dont nous évaluons la relation de proximité entre mondes. En effet, si les mondes des variations (a) à (c) sont tous considérés comme étant également proches du monde actuel, alors le contrefactuel est faux parce que le conséquent est faux dans le monde de la variation (c). D'autre part, si les mondes (a) et (b) sont considérés plus proches du monde actuel que le monde (c) — parce que (c) représente la variation dans laquelle le monde est le plus différent du monde actuel — alors le contrefactuel est vrai puisque le conséquent est vrai dans les mondes (a) et (b), et il en ressort un problème de symétrie pour l'approche contrefactuelle. Comme la question de la proximité des mondes donne toujours lieu à des désaccords d'envergure, nous laissons la porte ouverte à l'évaluation de telles possibilités.

Concluons cette section en notant que les études [Lange \(2021\)](#); [Kasirzadeh \(2022\)](#) ont discuté du modèle contrefactuel et en ont critiqué certains aspects.

37. Ici encore, nous omettons la preuve, qui repose sur le fait que le triangle résultant de la variation n'est plus rectangle et que c'est là la propriété requise pour que les trois triangles soient tous semblables, afin de ne pas surcharger le texte.

1.3.5 Conclusions

Notre présentation des principales approches contemporaines des explications mathématiques étant maintenant complète, nous avons pu constater que chaque approche — à l'exception de celle de Steiner — a apparemment des difficultés à rendre compte de la preuve explicative du théorème de Pythagore. Dans le cas de Lange, il semble qu'aucune des caractéristiques marquantes introduites afin de rendre compte du pouvoir explicatif de la preuve ne s'applique à notre preuve. Les cas de Pincock et de l'approche contrefactuelle présentent des difficultés plus subtiles. Les deux approches sont sensibles au pouvoir explicatif de la preuve : elles reconnaissent toutes les deux aisément l'existence d'une relation de dépendance explicative — et dans le cas de l'approche contrefactuelle, une dépendance entre l'*explanans* et l'*explanandum* de l'explication. Toutefois, elles semblent également toutes deux avoir des difficultés avec l'asymétrie d'une telle relation. En effet, dans le cas de Pincock, il n'est pas certain que nous soyons bien en présence d'une relation de dépendance « abstraite », et ce qui détermine la directionnalité de la relation reste à établir. Dans le cas de l'approche contrefactuelle, on peut remettre en doute le fait qu'une relation allant de l'*explanandum* vers l'*explanans* ne tienne pas lieu de relation explicative.

L'approche présentée par Pincock et celle présentée par les « contrefactualistes » font toutes deux montre d'une plus grande rigueur dans l'analyse des preuves explicatives que les approches de Steiner et Lange. En effet, chez ces derniers, les modèles des preuves explicatives se réduisent à certaines notions non systématiques comme celle de propriété caractéristique, de symétrie ou de simplicité, quand l'analyse des preuves explicatives telle qu'on la retrouve à la fois chez Pincock et dans l'approche contrefactuelle s'appuie plutôt sur des rouages sophistiqués et plus formels. De plus, alors que Steiner et Lange ne font mention ni de la manière d'identifier l'*explanans* et l'*explanandum* d'une preuve explicative, ni d'une relation de dépendance qui sous-tendrait la preuve, ni du problème de la détermination de la directionnalité d'une explication, l'approche de Pincock et l'approche contrefactuelle portent attention à ces aspects de la question.

Un autre point commun entre l'approche de Pincock et celle des contrefactualistes est qu'elles s'appuient toutes deux sur la transition d'une preuve mathématique informelle vers une preuve plus formalisée : dans le cas de Pincock, cela correspond à la formulation d'une relation de dépendance, tandis que dans le cas de l'approche contrefactuelle, cela se

retrouve dans la formulation et l'évaluation de deux contrefactuels. Cette transition n'est pas exempte d'ambiguïté et elle demeure potentiellement sujette à discussion. Par exemple, reprenons l'application de l'approche contrefactuelle à la preuve explicative du théorème de Pythagore (voir, en référence, la section précédente pour la présentation détaillée). En appliquant cette approche à notre preuve, nous avons d'abord identifié les énoncés S et E , pour ensuite développer les contrefactuels qui seraient évalués en utilisant S et E . Toutefois, la sélection initiale de S et E ne s'est pas faite de manière neutre : en lieu et place de S , nous aurions tout aussi bien pu sélectionner l'énoncé S' ci-dessous.

S' : Le triangle rectangle ABC est divisé en deux triangles par la hauteur AH et est semblable aux deux triangles ABH et ACH .

La différence entre S et S' est que c'est seulement le dernier des deux énoncés qui tient compte du rôle joué par la hauteur du triangle rectangle dans le théorème de Pythagore. La question de savoir si cet élément devrait faire partie ou non de l'antécédent du contrefactuel de la preuve explicative est évidemment discutable. On peut, par contre, être certain que l'utilisation de S' plutôt que de S dans l'analyse de la preuve explicative du théorème de Pythagore produit un résultat différent : la preuve devient incontestablement symétrique³⁸. Ainsi, passer du niveau informel de la preuve à un niveau plus formel semble nous faire avancer utilement vers une analyse plus rigoureuse de la preuve informelle. Il faut toutefois noter qu'une telle transition peut entraîner certains problèmes si on manque de prudence lors de son exécution.

Nous concluons ces remarques en revenant sur la différence entre les réflexions sur les preuves explicatives émergeant de la tradition d'Aristote, Arnauld et Nicole, Leibniz, Bolzano et bien d'autres, et celles que l'on retrouve dans les approches contemporaines. Il est aisé de noter que certaines des idées récurrentes au sein de cette tradition sont absentes des recherches récentes. En effet, mis à part chez Pincock, en règle générale, on n'observe dans les discussions contemporaines sur cette question aucune référence à un ordre ou une hiérarchie des vérités qui régulerait les mathématiques et constituerait la structure discernable derrière les preuves explicatives. L'attention des philosophes contemporains ne se porte de surcroît aucunement sur la relation de dépendance fondationnelle qui relie

38. Afin de ne pas surcharger le texte, nous ne traiterons pas du raisonnement qui mène à cette conclusion. Le lecteur pourra facilement le reconstruire par lui-même en s'appuyant sur les observations de la section précédente.

les vérités mathématiques et soutient les preuves explicatives. Comme nous l'avons vu dans la première section, les études portant sur les explications causales s'intéressent également à l'analyse de la relation de causalité elle-même. Par analogie, nous pourrions nous attendre à un intérêt similaire pour la relation entre fondement et conclusion de la part des études des explications mathématiques. Il est pourtant sidérant que, malgré un fort penchant de la recherche contemporaine pour l'étude de la relation de *grounding métaphysique*, seulement quelques rares philosophes (comme on le voit dans [Betti \(2010\)](#); [Mancosu \(1999\)](#)) ont tenté d'établir des ponts entre la recherche sur les explications mathématiques et la recherche sur le *grounding*.

Les derniers grands absents des discussions contemporaines sur les explications mathématiques, en dernier lieu, sont, d'une part, l'analyticité des preuves explicatives — une notion que l'on retrouve d'Aristote à Bolzano alors que, de nos jours, l'idée que la complexité doit augmenter des prémisses à la conclusion d'une preuve explicative n'est mentionnée nulle part, puisque l'on se concentre plutôt sur d'autres aspects — et, d'autre part, des notions de base, ingrédients-clés de toute étude des explications scientifiques, comme celles d'*explanans* et d'*explanandum*, ou comme le problème de l'asymétrie des explications, qui sont ignorées ou négligées dans les discussions contemporaines (à la seule exception de l'approche contrefactuelle). Les caractéristiques essentielles du modèle que nous présenterons dans la dernière partie de cet ouvrage visent précisément à renverser cette tendance et à redonner à ces idées le prestige qui leur revient.

2 Les preuves logiques

2.1 Des preuves mathématiques aux preuves formelles

En mathématiques, produire des preuves correctes de théorèmes vrais est une activité cruciale. La notion de preuve est donc, cela va de soi, une des pierres de touche de cette discipline. Comme le remarque E. Casari dans [Casari \(1987\)](#), deux interrogations nous viennent spontanément lorsqu'il est question de la notion de preuve mathématique. La première consiste à nous demander quel est le but d'une preuve, et la seconde à nous demander quelle est sa forme. Toute réponse que l'on donne à la seconde question implique bien sûr une réponse (au moins partielle) à la première : si nous ignorons ce qu'une preuve a pour but d'accomplir, il nous sera difficile de distinguer ce qui est une preuve de ce qui ne l'est pas.

La question du but de la preuve nous ramène au propos de la section 1.2 : nous avons alors mentionné que les philosophes, au moins depuis l'époque d'Aristote, font une distinction entre les preuves qui n'expliquent pas et ne font que montrer que le théorème est vrai, et les preuves qui sont explicatives en cela qu'elles montrent les raisons ou les fondements de la vérité d'un théorème. Les premières sont appelées *preuves-que* ou *preuves certificatives*, alors que les secondes sont appelées *preuves-pourquoi* ou *preuves explicatives*. Comme nous avons déjà couvert en détail la distinction entre ces deux types de preuves et l'intérêt particulier que présente le second dans la première partie du présent ouvrage, nous ne voyons pas la nécessité d'ajouter ici à cette étude déjà exhaustive. La seconde question concerne, elle, la forme des preuves. Plus spécifiquement, elle vise à déterminer si les preuves mathématiques possèdent une forme selon le but qu'elles poursuivent, c'est-à-dire s'il est possible d'identifier des caractéristiques qui, indépendamment du contenu spécifique de la preuve, garantissent son efficacité et sa

légitimité dans l'atteinte de son but. Deux réponses à cette question ont été proposées et, étant opposées, elles ont mené au développement de deux perspectives distinctes que l'on peut appeler la perspective *cartésienne* ou *intuitionniste*, et la perspective *aristotélicienne* ou *logique*, respectivement (voir, à ce sujet, [Casari \(1987\)](#)).

Pour la perspective cartésienne — qui fut également adoptée, bien qu'en termes différents, par Kant et Brouwer — les preuves mathématiques n'ont pas de forme selon leur but. Il n'est donc pas possible d'identifier des caractéristiques communes des preuves mathématiques qui garantiraient leur efficacité et leur légitimité. Pour paraphraser Descartes (voir [Descartes \(2004\)](#)), il n'y a pas de forme qui autoriserait la raison à prendre des vacances : chaque preuve doit être analysée et évaluée dans son unicité propre et conjointement avec son contenu.

La perspective aristotélicienne a, de son côté, dominé les pensées grecque et médiévale, avant d'être reprise par Leibniz, puis de jouer un rôle central dans les travaux de Hilbert, Russell et Frege. Les preuves mathématiques, dans une telle perspective, ont bien une forme : ce sont des chaînes d'inférences logiques.

Ainsi une démonstration solide en est une qui suit la forme prescrite par la logique¹ ([Leibniz \(1900\)](#), p. 625).

Non seulement une telle forme garantit la légitimité des preuves et fournit la raison de leur efficacité, mais elle peut même être identifiée et ainsi devenir (comme nous le verrons sous peu) un objet d'étude à part entière.

Les forces et les faiblesses propres à ces deux perspectives se complètent. Ainsi, la perspective aristotélicienne produit une théorie des preuves des plus simples et qui mène à des analyses d'une grande perspicacité. C'est de cette façon qu'elle nous a permis d'amasser des connaissances stupéfiantes concernant les preuves elles-mêmes. Il reste toutefois problématique de la mettre en relation avec des preuves mathématiques réelles, puisque celles-ci se présentent rarement sous la forme que cette perspective propose. La position cartésienne, à l'inverse, est de soi plus proche des preuves telles qu'on les retrouve dans la pratique mathématique. Mais elle achoppe dès qu'il est question de rendre compte de la nature, de l'efficacité et de la légitimité des preuves mathématiques. Quel est le lien entre les objets de nos deux questions — c'est-à-dire entre le but d'une preuve et sa forme ? Quelques remarques mises à part (voir, en exemple, les sous-titres de

1. Traduction du latin par J. Allard.

[Bouveresse \(2006\)](#)), la perspective cartésienne est généralement associée aux preuves certificatives, et le développement d'une preuve vise, selon elle, à garantir la vérité de l'assertion démontrée, sans plus. La dichotomie entre preuves certificatives et explicatives est plus nuancée selon la perspective aristotélicienne. Son point de vue sur les premières est ainsi plutôt souple : une forme démonstrative y sera tenue pour admissible tant et aussi longtemps que ses différentes étapes sont composées d'inférences logiques. Bien sûr, des types de formes démonstratives différents seront admissible dépendant de l'idée que l'on se fait de ce qui constitue une inférence logique. Cependant, une fois notre concept d'inférence logiquement valide fixé, toute forme démonstrative qui en provient sera considérée comme acceptable.

En ce qui concerne les preuves explicatives, par contre, les choses prennent une toute autre tournure : non seulement une preuve qui fournit une explication doit-elle contenir des liens inférentiels entre les prémisses et la conclusion, mais elle doit aussi rendre compte de l'asymétrie qui est propre à l'explication et qui détermine la direction allant des fondements vers la conclusion. L'inférence, dans une preuve explicative, n'est donc pas légitime uniquement en vertu de la notion de validité logique — elle doit, ce qui est plus crucial encore, être compatible avec l'idée que les prémisses donnent les fondements de la conclusion.

Parmi les pas de géants faits en logique au XX^e siècle, des progrès considérables ont été accomplis dans l'identification de la forme des preuves certificatives. Nous croyons que la meilleure formalisation des aspects logiques des preuves certificatives est, au-delà des travaux effectués en ce sens par Frege, Russell et Hilbert, celle qui utilise la notion de dérivation développée dans le cadre du calcul de déduction naturel introduit par Gentzen.

Afin que les dérivations en calcul de déduction naturelle que nous utiliserons dans la dernière partie pour produire un modèle des preuves explicatives en mathématiques soient aussi bien comprises que possible, nous consacrerons la suite de cette section à présenter cet outil².

2. Les articles [Poggiolesi \(2018, 2020, 2021b\)](#); [Poggiolesi et Francez \(2021\)](#) proposent une théorie de la forme logique des preuves explicatives. Cette théorie ayant été décrite en détail dans le rapport de synthèse, nous ne nous la répétons pas ici. Le lecteur pourra cependant noter que nous nous inspirons de ce compte rendu et de ces publications lors de la présentation de notre modèle pour les preuves explicatives. Lorsque nous le ferons, nous signalerons l'article, le chapitre ou le volume approprié. Nous espérons que, une fois parvenu au terme de cet ouvrage, le lecteur aura une vision claire du lien entre la forme logique des preuves

Notons, enfin, que nous avons jusqu'ici (pour éviter une surcharge conceptuelle du texte) considéré la preuve comme un processus rationnel isolé. Mais les preuves ne viennent pas nécessairement seules. Au contraire, elles sont intimement liées à la notion de théorie³, une telle relation étant visible lorsque l'on parle, par exemple, d'une théorie où une preuve puise ses éléments. On peut, bien sûr, faire, au sujet des théories, des distinctions et des remarques analogues à celles que nous avons faites au sujet des preuves. Lorsqu'il est question de la forme des théories, nous pouvons ainsi distinguer la systématisation d'une théorie privilégiant plutôt une perspective certificative d'une systématisation privilégiant plutôt une perspective explicative. En somme, non seulement les preuves et les théories vont de pair, mais elles semblent aussi gagner à ce qu'on les étudie ensemble (sur ce point, voir [Casari \(1987\)](#); [de Jong et Betti \(2010\)](#)). C'est pourquoi, dans les pages qui suivent, nous étudierons les preuves en les mettant explicitement en relation avec des théories. Notre exposé, espérons-nous, jettera un nouvel éclairage sur la grande valeur des théories pour l'analyse des preuves.

2.2 Le calcul de déduction naturelle

Ce qui a été dit jusqu'à maintenant implique deux notions connexes dont nous voulons extraire la forme, soit les notions de théorie et de preuve. De nos jours, les théories sont formalisées par ce que l'on appelle des *systèmes formels*, et les preuves sont formalisées par ce que l'on appelle des *dérivations* dans des systèmes formels. Pour mieux présenter ces deux types de formalisations, introduisons tout d'abord la notion de *langage formel*. Un tel langage est produit en deux étapes : la clarification de son alphabet, c'est-à-dire le bagage symbolique dont il est constitué, et l'identification des combinaisons qui, parmi toutes celles qui sont possibles dans son alphabet, ont une fonction expressive, c'est-à-dire les formules. Illustrons notre propos avec un exemple de langage formel, celui de la logique classique.

Definition 2.1. *Le langage propositionnel classique \mathcal{L}_c est composé d'un ensemble d'atomes propositionnels, p, q, r, \dots , ainsi que des connecteurs \neg, \wedge, \vee et \rightarrow . Une formule A se définit par induction de la manière suivante :*

certificatives, celle des preuves explicatives et notre modèle des preuves explicatives mathématiques.

3. Les preuves sont également liées à la notion de définition. Traiter du lien entre preuves et définitions nous éloignerait toutefois de notre objectif principal. Nous devons donc laisser cela de côté.

- Tout atome propositionnel est une formule.
- Si A est une formule, alors $\neg A$ est une formule.
- Si A et B sont des formules, alors $A \wedge B$, $A \vee B$ et $A \rightarrow B$ sont toutes des formules.

Nous tenons le symbole \perp pour défini par la conjonction de A et de $\neg A$ pour toute formule A .

Passons à présent à la notion de système formel. On obtient un système formel lorsque l'on sélectionne, parmi toutes les formules d'un langage formel, celles qui tiennent le rôle d'axiomes, et lorsque l'on détermine certaines règles d'inférence. La règle d'inférence qui est sans doute la plus connue est le *modus ponens*, qui détermine que, d'une formule α et d'une formule $\alpha \rightarrow \beta$, on peut inférer la formule β . Une dérivation dans un système formel n'est rien d'autre qu'une série de formules du langage formel que l'on obtient en combinant les axiomes et les règles d'inférence propres au système formel en question⁴.

Les premiers systèmes formels — ceux que l'on appelle aujourd'hui les *systèmes à la Hilbert* — ont été mis au point au début du XX^e siècle par les logiciens Frege, Russell, Whitehead et Hilbert (voir [Mancosu et al. \(2021\)](#)). Ils sont composés d'un grand nombre d'axiomes et de peu de règles d'inférence, voire d'une seule. Au cours de la décennie allant de 1920 à 1930, les logiciens polonais Łukasiewicz et Jąskowski jugèrent ce type de formalisation de plus en plus insatisfaisant. Les dérivations qui peuvent y être produites sont en effet très compliquées et trop éloignées des formes inférentielles utilisées en mathématiques (voir, à ce sujet, [Anellis \(1991\)](#)). Une méthode pour construire des dérivations qui serait plus naturelle fut alors réclamée. Remplissant précisément cette fonction, les calculs de déduction naturelle (un autre type de système formel) furent présentés par Gentzen en 1934-1935. L'appellation *natürliches Schließen* (déduction naturelle) est le fait de Gentzen lui-même, qui justifia de la manière suivante l'introduction en logique de ce nouveau système formel :

Mon premier point de vue fut le suivant. La formalisation du raisonnement logique, telle qu'elle a été développée en particulier par Frege, Russell et Hilbert, est relativement fort éloignée du mode de raisonnement qui est utilisé en réalité dans les démonstrations mathématiques. On vise de la sorte à obtenir certains

4. Pour une définition plus précise de la notion de *dérivation*, le lecteur pourra consulter [Troelstra et Schwichtenberg \(1996\)](#).

avantages formels appréciables. J'ai voulu d'abord construire un formalisme qui soit le plus près possible du raisonnement réel. C'est ainsi que j'ai obtenu un « *calcul de la déduction naturelle* » (Gentzen, 1955, p. 4).

La différence principale entre les calculs de déduction naturelle et les systèmes à la Hilbert est l'inversion du ratio entre les axiomes et les règles d'inférence. Là où les systèmes à la Hilbert sont composés d'un grand nombre d'axiomes et de peu de règles d'inférences, ou d'une seule, les calculs de déduction naturelle sont composés d'un grand nombre de règles d'inférence et de peu d'axiomes, voire d'aucun. C'est précisément cette inversion qui génère, comme Gentzen l'affirme, un formalisme se rapprochant davantage du raisonnement humain.

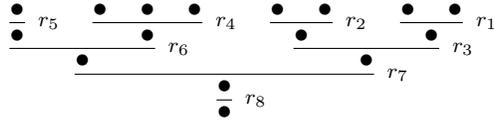
Nous en venons maintenant à la présentation détaillée du calcul de déduction naturelle.

Comme nous l'avons mentionné, la pièce maîtresse de ce calcul sont ses règles d'une extrême simplicité. Chaque règle est d'abord associée à une constante logique du langage formel sur lequel le calcul est basé : une règle peut soit introduire une nouvelle constante dans le discours inférentiel — auquel cas, on l'appelle *règle d'introduction* — soit éliminer une constante du discours inférentiel — on l'appelle alors une *règle d'élimination*. Pour nous servir d'exemple, prenons le langage formel classique (voir la définition 2.1) et ses constantes logiques, à savoir la négation (\neg), la conjonction (\wedge), la disjonction (\vee) et l'implication (\rightarrow). Nous aurons, pour chacune de ces constantes, au moins une règle d'introduction et au moins une règle d'élimination. L'ensemble de ces règles constitue le calcul de déduction naturelle pour la logique classique.

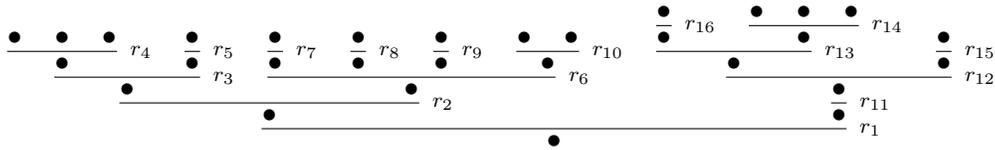
Une fois cet ensemble de règles établi, il nous faut ensuite indiquer comment utiliser les règles pour construire des dérivations. Celles-ci prennent la forme d'arbres dans lesquels les hypothèses ou prémisses sont les feuilles, et la conclusion de la dérivation, la racine, et où chaque règle utilisée dans la preuve relie les noeuds⁵ correspondant aux prémisses de la règle au noeud correspondant à la conclusion de la règle. Voici deux exemples de dérivations en forme d'arbres, où les noeuds représentent des formules reliées par la règle correspondante indiquée par r_i .

Exemple (i)

5. Concernant la traduction de l'anglais « node » par « noeud », le lecteur pourra consulter la note 32 du chapitre 1.



Exemple (ii)



Ces arbres peuvent être considérés comme la structure sous-jacente des preuves mathématiques. En d’autres mots, on peut les voir comme le squelette de tout argument mathématique correct. Lorsqu’on y ajoute les formules, ils représentent la forme des preuves mathématiques selon leur but, forme dont nous avons traitée à la section précédente.

Afin de préparer le terrain pour ce qui va suivre, arrêtons-nous un moment aux règles d’introduction et d’élimination constituant un calcul de déduction naturelle pour y introduire une distinction supplémentaire : il s’agit de la distinction entre les règles où l’hypothèse peut être désactivée et celles où il n’y a aucune désactivation. Nous appelons les premières les règles $\mathcal{D}\mathfrak{N}$ et les secondes les règles $\mathfrak{N}\mathcal{D}\mathfrak{N}$. Puisqu’elles sont plus simples, commençons par quelques exemples de règles $\mathfrak{N}\mathcal{D}\mathfrak{N}$ en présentant ci-dessous les règles qui introduisent et éliminent la conjonction. La règle $\wedge I$ est la suivante :

$$\frac{\begin{array}{c} d_1 \\ \vdots \\ A \end{array} \quad \begin{array}{c} d_2 \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \wedge B} \wedge I$$

Selon cette règle, si nous avons une dérivation d_1 de la formule A et une dérivation d_2 de la formule B , nous pouvons alors obtenir une dérivation de la formule $A \wedge B$. Dans le cas de l’élimination de la conjonction, nous avons deux règles : chacune d’entre elles nous permet d’inférer ou de dériver un des deux éléments conjoints.

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots_d \\ A \wedge B \end{array}}{A} \wedge E_1 \qquad \frac{\begin{array}{c} \vdots_d \\ A \wedge B \end{array}}{B} \wedge E_2$$

Selon ces règles, si nous avons une dérivation d de $A \wedge B$, alors nous pouvons avoir à la fois une dérivation de A et une dérivation de B . Parmi les autres règles $\mathcal{ND}\mathcal{H}$ classiques, on trouve les règles qui introduisent la disjonction ainsi que la règle qui élimine l'implication (voir la figure 2.1 ci-dessous).

Passons maintenant aux règles \mathcal{DH} qui impliquent une désactivation des hypothèses. Même si ces règles restent simples, elles ont une caractéristique particulière qui doit être explicitée. Comme nous l'avons vu à l'instant, les règles $\mathcal{ND}\mathcal{H}$ correspondent à une seule action inférentielle, c'est-à-dire l'introduction ou l'élimination d'une constante logique.

Les règles \mathcal{DH} , elles, impliquent non seulement l'action inférentielle consistant à introduire ou éliminer une constante logique, mais aussi une deuxième action inférentielle par laquelle on remonte dans la dérivation pour effacer, ou plutôt désactiver les hypothèses qui sont présentes dans la racine de la dérivation, ou bien qui jouent un rôle particulier dans la dérivation elle-même. Pour en clarifier le fonctionnement, donnons en exemple la règle introduisant la constante logique d'implication matérielle. Cette règle a la forme suivante :

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots_d \\ B \end{array}}{A \rightarrow B} \rightarrow I$$

Il faut lire cette règle ainsi. Supposons que nous ayons une dérivation qui utilise l'hypothèse A pour obtenir la formule B . Non seulement nous pouvons alors inférer et dériver la formule $A \rightarrow B$, mais nous devons également retourner dans la dérivation, qui est la prémisse de la règle, et désactiver, ou effacer, la formule A . C'est donc dire que, si nous dérivons la formule B à partir de l'hypothèse A , nous pouvons inférer la formule $A \rightarrow B$ — mais, si nous faisons une telle inférence, nous devons ensuite effacer les occurrences de la formule A . Car la dérivation de la formule $A \rightarrow B$ ne dépend plus de l'hypothèse A , ou, dit autrement, l'hypothèse A a été désactivée dans la dérivation de la formule $A \rightarrow B$.

FIGURE 2.1 – Règles des calculs de déduction naturelle

Règles d'introduction	Règles d'élimination
$\frac{\begin{array}{c} A \\ d \\ \vdots \\ \perp \\ \hline \neg A \end{array}}{\neg I}$	$\frac{\begin{array}{c} \neg A \\ d \\ \vdots \\ \perp \\ \hline A \end{array}}{\neg E}$
$\frac{\begin{array}{cc} d_1 & d_2 \\ \vdots & \vdots \\ A & B \\ \hline A \wedge B \end{array}}{\wedge I}$	$\frac{\begin{array}{c} d \\ \vdots \\ A \wedge B \\ \hline A \end{array}}{\wedge E_1} \quad \frac{\begin{array}{c} d \\ \vdots \\ A \wedge B \\ \hline B \end{array}}{\wedge E_2}$
$\frac{\begin{array}{c} A \\ d \\ \vdots \\ B \\ \hline A \rightarrow B \end{array}}{\rightarrow I}$	$\frac{\begin{array}{cc} d_1 & d_2 \\ \vdots & \vdots \\ A \rightarrow B & A \\ \hline B \end{array}}{\rightarrow E}$
$\frac{\begin{array}{c} d \\ \vdots \\ A \\ \hline A \vee B \end{array}}{\vee I_1} \quad \frac{\begin{array}{c} d \\ \vdots \\ B \\ \hline A \vee B \end{array}}{\vee I_2}$	$\frac{\begin{array}{ccc} d_1 & A & B \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A \vee B & C & C \\ \hline C \end{array}}{\vee E}$

Utilisons un exemple concret afin d'illustrer comment se comporte la règle de l'implication matérielle dans les calculs de déduction naturelle. Prenons comme hypothèse de départ l'énoncé « demain, il pleuvra ». Supposons que l'on dérive d'une telle hypothèse l'énoncé « demain, la chaussée sera mouillée ». De cette dérivation, nous pouvons inférer l'énoncé « s'il pleut demain, alors la chaussée sera mouillée ». Cet énoncé ne dépend plus de quelque hypothèse — car notre hypothèse de départ, « demain, il pleuvra », a été absorbée dans la conclusion. Parmi les règles $\mathcal{D}\mathcal{N}$ se trouvent aussi la règle qui élimine la disjonction, ainsi que les deux règles qui introduisent et éliminent la négation (voir la figure 2.1).

Ayant présenté ses éléments constitutifs, nous pouvons maintenant fournir un exemple de dérivation dans le calcul de déduction naturelle :

$$\frac{\frac{\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I \quad C}{(A \wedge B) \wedge C} \wedge I}{B \rightarrow ((A \wedge B) \wedge C)} \rightarrow I}{A \rightarrow (B \rightarrow ((A \wedge B) \wedge C))} \rightarrow I$$

Si nous lisons cette dérivation de haut en bas, nous commençons avec les hypothèses (non désactivées) A et B , et nous leur appliquons la règle qui introduit la conjonction, obtenant ainsi $A \wedge B$. Nous ajoutons ensuite une autre hypothèse C et, avec C et $A \wedge B$, nous obtenons $(A \wedge B) \wedge C$ en appliquant la règle $\wedge I$. Puis, après avoir désactivé l'hypothèse B , nous dérivons la formule $B \rightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$ à l'aide de la règle $\rightarrow I$. Enfin, en appliquant à nouveau la règle $\rightarrow I$, nous dérivons la formule $A \rightarrow (B \rightarrow ((A \wedge B) \wedge C))$. Nous avons ainsi montré qu'il existe une dérivation de $A \rightarrow (B \rightarrow ((A \wedge B) \wedge C))$ à partir de l'hypothèse non désactivée C .

Les dérivations en calculs de déduction naturelle représentent la forme propre aux preuves mathématiques, et dont l'existence est défendue depuis l'époque d'Aristote. Elles constituent, dans la formalisation qu'en donna Gentzen, un domaine de recherche riche et parmi les plus fertiles que l'on appelle *théorie de la démonstration*, au sein duquel les dérivations sont devenues un objet d'étude et d'analyse en soi. Nous discuterons d'ailleurs, dans la section suivante, de résultats significatifs ayant été démontrés au sujet des dérivations en calculs de déduction naturelle.

Nous terminons pour l'instant cette section en revenant sur une caractéristique importante des règles des calculs de déduction naturelle. Nous avons mentionné que ces règles portent sur des constantes logiques qu'elles introduisent ou éliminent. De là, chaque constante logique est associée à au moins un couple de règles de déduction naturelle. Comme de nombreux travaux l'ont souligné (voir [Sambin *et al.* \(2000\)](#); [Schroeder-Hesiter \(1993\)](#); [Marin *et al.* \(2022\)](#)), ces règles peuvent être vues comme syntaxiquement analogues à l'équivalence déterminant la définition sémantique de la constante logique concernée. Prenons en exemple le cas de la conjonction, et concentrons-nous spécifiquement sur l'équivalence qui définit sémantiquement la conjonction via des valeurs de vérité :

A est vrai et B est vrai si, et seulement si, $A \wedge B$ est vrai.

On peut exprimer cette définition d'une autre façon à l'aide des règles $\wedge I$, $\wedge E_1$ et $\wedge E_2$.

On peut voir la règle $\wedge I$, notamment, comme le reflet, au niveau de la théorie de la démonstration, de l'équivalence qui procède de la gauche vers la droite, c'est-à-dire l'équivalence où, si A est vrai et B est vrai, alors $A \wedge B$ est vrai. Prises ensemble, les règles $\wedge E_1$ et $\wedge E_2$ peuvent être considérées comme le reflet de l'équivalence sémantique définitionnelle qui procède de la droite vers la gauche, c'est-à-dire l'implication où si $A \wedge B$ est vrai, alors A est vrai et B est vrai. Même si la correspondance entre les règles d'introduction et d'élimination et l'équivalence définitionnelle n'est pas aussi évidente pour les autres connecteurs, le calcul peut toujours être remanié afin de lui donner une forme dans laquelle la correspondance est vraie (tant et aussi longtemps qu'il existe un théorème de complétude et de correction liant le calcul et la définition sémantique). Il existe, de fait, un vaste et influent domaine de recherches appelé *proof-theoretic semantics*⁶ (voir [Schroeder-Heister \(2018, 1991\)](#)) où les définitions des constantes logiques peuvent être conçues comme des règles du calcul de déduction naturelle et exprimées à l'aide de ces règles. Un élément-clé de notre approche des explications mathématiques, comme nous le verrons dans la suite de l'ouvrage, repose sur cette correspondance entre les règles des calculs de déduction naturelle et les équivalences qui peuvent, comme c'est le cas en logique, correspondre à des définitions sémantiques.

2.3 Les dérivations analytiques

Nous avons présenté déjà la distinction entre analytique et synthétique relativement aux preuves dans la section 1.2, et avons noté à cette occasion que plusieurs philosophes accordent une grande valeur au caractère analytique des preuves explicatives. Rappelons brièvement le trait saillant de cette distinction du point de vue de la logique. Dans une théorie déductive, les preuves synthétiques sont caractérisées par la concision. Les preuves analytiques, en revanche, sont plutôt caractérisées par la réduction progressive de la complexité de la conclusion aux prémisses. Cela signifie que les preuves synthétiques ont l'avantage d'être courtes, mais que les preuves analytiques ont celui d'être autosuffisantes, puisque chaque élément qui apparaît dans la preuve fait partie de sa conclusion. Gentzen est un des défenseurs de la singulière importance des preuves analytiques. Il résume les caractéristiques de ces dernières dans un passage célèbre :

6. Voir la note 33 du chapitre 1.

On peut formuler les propriétés les plus essentielles d'une telle démonstration normale à peu près de la façon suivante : elle ne comporte pas de détours. On n'y introduit aucun concept qui ne soit contenu dans son résultat final et qui, par conséquent, ne doive pas nécessairement être utilisé pour obtenir ce résultat (Gentzen, 1955, p. 4-5).

Si l'expression « démonstration normale » est comprise comme signifiant « preuve analytique » (nous approfondirons cette interprétation dans un moment), alors ce passage affirme que la caractéristique principale des preuves analytiques est que tout élément qui apparaît dans une telle preuve est nécessaire à la dérivation de la conclusion. Gentzen, comme ses prédécesseurs, réserve donc de toute évidence une place d'honneur aux preuves analytiques. Contrairement à ceux de ses prédécesseurs, ses travaux ne portent cependant pas sur des preuves mathématiques réelles, mais plutôt sur leur version formalisée, c'est-à-dire sur des dérivations dans des systèmes formels. C'est en travaillant dans ce contexte logique qu'il a été à même de clarifier et de bonifier la notion d'analyticité d'une preuve. Nous présentons dans cette section les progrès qu'il a accomplis en ce sens.

Dans cette section et la précédente, qui donnait l'état de la recherche courante sur le sujet, nous avons vu trois façons différentes de caractériser les preuves analytiques. Dans de telles preuves, (i) la complexité augmente lorsqu'on va des prémisses vers la conclusion, (ii) tout élément apparaissant dans le corps de la preuve est contenu dans la conclusion, et (iii) tout élément apparaissant dans le corps de la preuve est nécessaire à la dérivation de la conclusion. Nous allons maintenant montrer que les notions de complexité logique, de sous-formule et de preuve normale fournissent, respectivement, une formalisation rigoureuse de ces trois propriétés. Cette formalisation montre clairement que (i)-(iii) ne sont rien d'autre que les trois faces d'une même médaille⁷.

La première notion que nous présentons pour traiter de la formalisation de l'idée d'analyticité est celle de *complexité logique*, qui consiste simplement en une manière de rendre compte de la complexité d'une formule A dans un langage formel \mathcal{L} .

7. Nous traitons ici des conclusions de Gentzen dans le cadre des calculs de déduction naturel, puisque ce sont les calculs qui nous intéressent dans cet ouvrage. Remarquons toutefois que ces mêmes résultats peuvent être obtenus dans le cadre de ce qu'on appelle les *calculs de séquents* : en fait, Gentzen créa les calculs de séquents afin de démontrer des résultats analytiques pour les dérivations (voir, à ce sujet, Mancosu *et al.* (2021)).

Concrètement, la complexité d'une formule est déterminée en faisant le décompte des connecteurs logiques que l'on y rencontre. Revenons en guise d'illustration sur les formules du langage de la logique classique que nous avons présentées dans la définition 2.1, et établissons la complexité logique de chacune.

Definition 2.2. *La complexité d'une formule A du langage \mathcal{L}_c , $lc(A)$, est définie par induction de la façon suivante :*

- $lc(p) = 0$,
- $lc(\neg A) = lc(A) + 1$,
- $lc(A \circ B) = lc(A) + lc(B) + 1$ ⁸.

Sur cette base, donnons quelques exemples de complexité logique. Si A est la formule $(p \wedge q) \vee \neg\neg r$, alors $lc(A)$ est de 4 ; si A est une formule de la forme $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg\neg r$, alors $lc(A)$ est de 5.

La notion bien connue de *sous-formule* suit de près la notion de complexité logique. La relation de sous-formule est une façon naturelle de formaliser l'idée que, pour deux formules A et B , A est moins complexe que B ou, mieux encore, que A est contenu dans B selon la notion de complexité logique présentée ci-dessus. Elle est définie par induction de la façon suivante :

Definition 2.3. *Prenons les formules du langage \mathcal{L}_c A et B . A est une sous-formule de B si, et seulement si, l'une des options suivantes est bien le cas :*

- $A = B$,
- $B = \neg C$ et A est une sous-formule de C ,
- $B = (C \circ D)$ et A est une sous-formule de C ou une sous-formule de D .

Étudions quelques exemples de sous-formules. Appelons A la formule $(p \wedge q) \vee \neg\neg r$ (dont la complexité logique est de 4). Ses sous-formules (immédiates) sont $(p \wedge q)$ et $\neg\neg r$ qui ont, respectivement, une complexité logique de 1 et de 2. Ainsi, même si on les prend ensemble, c'est-à-dire que l'on additionne leur complexité, ces deux sous-formules sont logiquement moins complexes que A . Les atomes p, q, r , mais aussi la formule $\neg r$, sont d'autres sous-formules de la formule A . Appelons B la formule $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg\neg r$ (dont la complexité logique est de 5). Ses sous-formules (immédiates) sont $\neg(p \rightarrow q)$ et $\neg\neg r$ ayant chacune une complexité logique de 2 et étant, même si on les prend ensemble,

8. Où $\circ = \wedge, \vee, \rightarrow$.

logiquement moins complexes que A . Parmi les autres sous-formules de B , on compte $p \rightarrow q$ et $\neg r$, mais aussi les formules atomiques p, q, r .

Les notions de complexité logique et de sous-formule, ainsi que celle de dérivation, confèrent une base plus solide aux propriétés (i) et (ii) des preuves analytiques, respectivement. Pour (i) — c'est-à-dire la propriété que possèdent les preuves analytiques de voir leur complexité augmenter du haut vers le bas — on a le pendant formel suivant :

dans les dérivations analytiques (où toutes les prémisses ont été désactivées), la complexité logique augmente du haut vers le bas. Pour (ii) — c'est-à-dire la propriété des preuves analytiques de voir tout élément apparaissant en elles être également contenu dans

la conclusion — on a le pendant formel suivant : dans les dérivations analytiques (où toutes les prémisses ont été désactivées) chaque formule apparaissant dans la dérivation est une sous-formule de la conclusion. Il nous faut insister sur le rôle décisif d'une telle formalisation. Car, bien que les idées informelles de l'augmentation de la complexité et celle, connexe, de l'inhérence des concepts soient attrayantes et paraissent claires sur le plan intuitif, elles demeurent en elles-mêmes assez vagues et ouvrent, par là, la porte à de possibles confusions ou désaccords. Mais, grâce aux travaux de Gentzen, cela n'est plus nécessairement le cas, puisque les notions formelles de complexité logique et de sous-formule systématisent adéquatement ces intuitions tout en en améliorant la rigueur. Nous en sommes à présent à la propriété (iii), à savoir celle où tout élément apparaissant dans le corps d'une preuve analytique est nécessaire à la dérivation de la conclusion. Pour expliquer comment Gentzen formalise cette dernière propriété, partons d'un cas précis de dérivation — ici, une application consécutive des règles d'introduction et d'élimination de la conjonction :

$$\frac{\frac{\begin{array}{c} \vdots_{d_1} \\ A \end{array} \quad \frac{\begin{array}{c} \vdots_{d_2} \\ B \end{array}}{A \wedge B} \wedge I}{B} \wedge E_2$$

Il est facile de remarquer que ce schéma inférentiel génère une redondance : nous obtenons en conclusion la formule B dont nous disposons déjà dans la conclusion de la dérivation d_2 . Si nous l'exprimons différemment, cette dérivation contient une formule qui a été introduite sans la moindre nécessité. La formule $A \wedge B$ ne joue donc aucun rôle essentiel dans la dérivation de B puisque B apparaissait déjà comme conclusion de d_2 . Ce

phénomène se produit dans tous les cas où une règle d'introduction est suivie de la règle d'élimination correspondante. Voyons maintenant ce qu'il en est de l'implication :

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B} \xrightarrow{\rightarrow I} \frac{A}{B} \xrightarrow{\rightarrow E}$$

Dans ce cas également, nous dérivons une formule B dont nous disposons déjà en conclusion de la dérivation allant de A à B . La formule $A \rightarrow B$ a donc été introduite sans réelle nécessité : elle n'est pas nécessaire à la dérivation de la conclusion. En 1965,

Prawitz (dans Prawitz (1965)) isola tous les schémas inférentiels générant des redondances dans des dérivations en calculs de déduction naturelle et utilisa l'expression *dérivation normale* pour désigner les dérivations dont de tels schémas sont absents. Ces dérivations normales constituent ainsi une formalisation rigoureuse de la propriété (iii) des preuves analytiques, puisque ce sont des dérivations où tout élément est nécessaire à la dérivation de la conclusion et qui ne contiennent aucune redondance, le concept de redondance étant formellement identifié par des schémas inférentiels spécifiques.

Un des résultats fondamentaux de la théorie de la démonstration — qui confirme du même coup la grande valeur des preuves analytiques dans l'histoire de la philosophie et des mathématiques — est ce qu'on appelle le *théorème de normalisation*. D'après ce

théorème, toute dérivation dans les calculs de déduction naturelle peut être transformée en une dérivation normale, c'est-à-dire une dérivation où l'on ne rencontre aucune redondance, mais également où la complexité logique augmente du haut vers le bas (si toutes les prémisses ont été désactivées) et où toute formule apparaissant dans le corps de la dérivation est une sous-formule d'une formule apparaissant dans sa conclusion. À l'aide du théorème de normalisation et de la notion de preuve normale, nous pouvons donc non seulement obtenir une éventuelle systématisation de la notion de preuve analytique (telle qu'elle est caractérisée par (i)-(iii)) qui soit claire et rigoureuse, mais nous savons en outre qu'il est toujours possible de rendre analytique une dérivation non analytique.

Nous concluons cette section en rappelant le lien entre les résultats de la normalisation dans les calculs de déduction naturelle (que nous venons de présenter) et l'importance, dans la tradition philosophique, des preuves analytiques, tout particulièrement en ce qui

concerne les preuves explicatives (voir la section 1.2). Il serait bien sûr faux d'affirmer que les travaux entourant la notion de dérivation normale et le théorème de normalisation ont été motivés par la distinction entre les preuves certificative et explicative, ou par l'importance de ces dernières. Il ne fait toutefois aucun doute que plusieurs chercheurs ont identifié la connexion étroite liant les dérivations normales et les preuves explicatives (voir, par exemple, [Buhl \(1958\)](#); [Berg \(1962\)](#); [Casari \(2016\)](#); [Rumberg \(2013\)](#)). Le moins que l'on puisse dire, c'est que les dérivations normales possèdent plusieurs propriétés qu'on attribue également aux preuves explicatives. Au cours des cinq dernières années, de nombreux travaux qui poursuivaient dans cette voie ont ainsi vu le jour (voir [Poggiolesi \(2016, 2018, 2021a,b\)](#)). Dans ces études, nous avons utilisé des preuves normales comme première étape fondamentale menant à la formalisation des preuves explicatives, une formalisation que nous avons finalement obtenue au moyen de la notion d'*explication formelle*⁹. Dans la dernière partie de cet ouvrage, nous ferons usage des principales découvertes à la source des dérivations normales (ainsi que d'extraits de nos recherches sur l'explication formelle) pour produire un modèle des preuves mathématiques explicatives que nous avons rencontrées dans la pratique mathématique.

9. Nous ferons référence à notre travail sur cette notion lorsque notre propos l'exigera.

3 Un nouveau modèle des explications mathématiques basé sur les preuves logiques

Les explications mathématiques, telles que nous les étudions dans cet ouvrage, sont des preuves mathématiques qui montrent les raisons pour lesquelles le théorème qu'elles prouvent est vrai (voir la section 1.1). Les preuves mathématiques ont, de leur côté, été l'objet de formalisation logique depuis le début du XX^e siècle au moins, ce programme ayant donné lieu à une pléiade de résultats plus impressionnants les uns que les autres (voir la section 2.2). Et si la formalisation des preuves mathématiques pouvait contribuer à une meilleure analyse de la notion d'explication mathématique? L'approche que nous présentons dans la dernière section de cet ouvrage a pour toute première étape de donner à cette question une réponse positive. C'est dire que nous réorienterons notre analyse de l'explication mathématique de la pratique mathématique (informelle) vers le domaine de la logique formelle¹. Comme toute analyse logique, un tel changement d'orientation promet d'apporter à notre objet d'étude clarté et détail, mais également, et de manière plus fondamentale, il nous permettra d'identifier avec rigueur les *raisons* pour lesquelles un théorème auquel nous nous intéressons est vrai.

Une fois que l'étude des explications mathématiques est entreprise d'un point de vue formel, si le but est de saisir leur nature, la question cruciale devient celle d'identifier les

1. Notre approche est, dans cette mesure, semblable à celle de [Wilhelm \(2022\)](#). Deux différences significatives nous empêchent toutefois de nous livrer à une comparaison plus exhaustive. Premièrement, là où nous utilisons (comme nous le montrerons dès la section suivante) des outils développés par les calculs de déduction naturelle, qui permettent une analyse fine de la structure des preuves, Wilhelm, lui, utilise les outils provenant des systèmes à la Hilbert. Deuxièmement, Wilhelm se contente d'une approche permettant de comparer le caractère explicatif de preuves différentes, alors que nous étudions la structure de preuves mathématiques explicatives que nous considérons séparément les unes des autres.

propriétés qui les caractérisent. Nul besoin, toutefois, comme nous l’avons vu dans la section 1.2, de réinventer la roue : la notion de complexité conceptuelle a été associée au pouvoir explicatif des preuves depuis l’époque d’Aristote, et le fut à nouveau dans les travaux de Leibniz, Bolzano et Frege (entre autres). Nous appuyant sur cette tradition de renom et suivant l’inspiration des travaux de Gentzen, où on retrouve sa plus récente incarnation formelle (voir la section 2.3), nous mènerons ici une étude exhaustive de la complexité conceptuelle. Nous proposerons ensuite, sur la base de cette étude, un modèle des explications mathématiques selon lequel, si une preuve mathématique est une explication, alors il en existe une formalisation au sein de laquelle la complexité conceptuelle augmente des *raisons* à la *conclusion*.

Les deux ingrédients-clés du modèle des explications mathématiques que nous décrivons ici sont la formalisation à l’aide d’outils logiques (plus précisément, des arbres de preuve) et la propriété de complexité conceptuelle. Tout deux paraissent naturels et intuitifs, tout deux ont leurs racines dans des traditions philosophiques majeures et tout deux élèvent l’analyse à un niveau plus rigoureux. Cela étant dit, il nous faut noter que, dans toute modélisation de notions philosophiques, il est (souvent) nécessaire de faire des compromis concernant la simplicité et la rigueur. Les modèles qui mettent de l’avant des propriétés qui sont plus simples et dont la portée est plus grande, comme ceux de Steiner ou Lange (voir les sections 1.3.1 et 1.3.2, respectivement), sont plus aisés à comprendre et sont plus facilement applicables à des nouveaux cas d’explications mathématiques — mais, en contrepartie, ils peuvent manquer de précision et d’exactitude. À l’opposé, les modèles qui favorisent une grande rigueur sont plus difficiles à comprendre et leur application éventuelle est plus ardue — mais ils peuvent fort bien produire une analyse plus détaillée et plus raffinée. L’approche que nous présentons ici appartient à cette dernière catégorie ; elle aura donc ses avantages et ses inconvénients.

3.1 Les preuves explicatives en tant qu’arbres de preuve

Cette section est consacrée à la présentation de la première étape de notre approche, qui consiste en la transition d’une version informelle des preuves mathématiques à une version formelle. Les explications mathématiques, du moins selon la perspective que nous adoptons dans cette étude, ne sont rien d’autre que des preuves mathématiques. Comme l’étude des preuves mathématiques à l’aide d’outils logiques est déjà au cœur de vastes et

profitables recherches — un domaine connu et reconnu sous le nom de *théorie de la démonstration* (voir à ce sujet [Troelstra et Schwichtenberg \(1996\)](#)) — l'idée de faire passer l'analyse de l'explication mathématique du niveau informel au niveau formel paraît si naturelle qu'elle ne semble pas devoir être âprement justifiée. Les gains obtenus au terme d'un tel processus de formalisation, eux, apparaîtront plus distinctement au fur et à mesure de notre examen.

Une portion non négligeable des recherches sur la rigueur en mathématique porte sur la transformation des preuves mathématiques informelles en preuves formelles, ces dernières étant prisées pour leurs processus de décomposition et de vérification (voir [Avigad \(2006\)](#); [Hamami \(2019\)](#)). Bien que rien ne nous empêche, en principe, d'user de tels processus pour mener notre étude des explications mathématiques, nous croyons plutôt que les dérivations en déduction naturelle (introduites à la section 2.2) sont un outil mieux adapté à notre approche puisqu'elles contiennent des éléments qui, d'eux-mêmes, visent des fins qui sont aussi les nôtres. C'est donc à l'aide de cet outil que nous formaliserons les explications mathématiques. Plus précisément, nous ferons usage des arbres de preuve dont nous avons présenté la structure dans la section 2.2. Il nous faut maintenant expliquer comment nous procéderons.

À cette fin, retraçons d'abord l'origine de l'exemple sur lequel nous nous appuyerons. Il s'agit d'un cas classique utilisé par Bernard Bolzano, un pionnier de l'étude des explications mathématiques, ainsi que, plus largement, un mathématicien et philosophe de grande envergure, bien que parfois sous-estimé, dont nous avons résumé les travaux avant-gardistes portant sur les explications mathématiques dans la section 1.2. Rappelons ici que son monumental ouvrage *Théorie de la science* contient une des premières tentatives de théorisation des explications mathématiques, ainsi que de fertiles intuitions et des exemples révélateurs. La conception de l'explication mathématique développée par Bolzano repose sur la relation de fondation : une explication mathématique est ainsi une preuve où un certain nombre de vérités en fondent une autre. Non seulement avons-nous adopté et enrichi la conception bolzanienne, nous utiliserons également certains de ses exemples afin d'illustrer et de mettre à l'épreuve notre approche de l'explication mathématique. Notre choix s'est arrêté ici sur un exemple qui est à la fois simple et particulièrement significatif pour notre propos. Il concerne une propriété des quadrangles. Pour cette raison, nous l'appelons le *théorème du quadrangle*. Sa forme est la suivante :

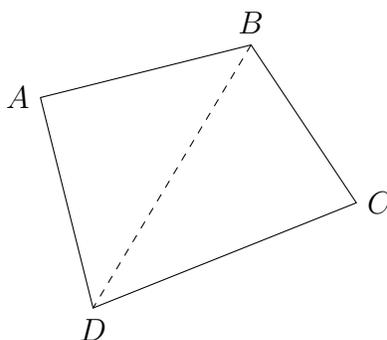


FIGURE 3.1 – Un quadrangle divisé en deux triangles.

Théorème du quadrangle. La somme des angles intérieurs de tout quadrangle est égale à 360° .

Preuve explicative. Prenons le quadrangle $ABCD$. Suivant le théorème (i), selon lequel tout quadrangle peut être divisé en deux triangles ayant un côté commun, nous pouvons considérer $ABCD$ comme étant la somme des deux triangles ABD et BCD (voir la figure 3.1). La somme des angles intérieurs de ABD est de 180° , tout comme la somme des angles intérieurs de BCD . Donc la somme des angles intérieurs du quadrangle $ABCD$ est de $180^\circ + 180^\circ$, ce qui donne 360° .

Nous pouvons soutenir, en nous appuyant sur l'analyse de Bolzano, que la preuve ci-dessus montre la raison pourquoi le théorème est vrai et, donc, qu'elle constitue une explication du théorème à proprement parler. Dans ce qui va suivre, nous prendrons cette preuve comme exemple pour montrer comment nous formalisons les explications mathématiques à l'aide des arbres de preuve.

Disons en préambule que, dans les termes les plus généraux, il est possible de formaliser une preuve de plus d'une façon. On peut ainsi procéder de manière radicale : nous pourrions produire un langage formel traduisant les phrases qu'on retrouve dans la version informelle de la preuve, puis utiliser un calcul de déduction naturelle dans lequel nous construisons une dérivation reflétant la forme ou la structure de la preuve. Bien qu'une transition si radicale puisse amener au jour des aspects intéressants d'une preuve, elle n'est pas strictement nécessaire ici. Nous pouvons, en fait, mener à bien notre formalisation sans user d'un langage formel, car la propriété la plus importante pour nous

est la structure arborescente qui sous-tend les explications mathématiques. Nous nous concentrerons donc sur cette structure afin de simplifier notre étude.

Toutefois, même en nous limitant à la structure des arbres de preuve, plusieurs options de formalisation s’offrent à nous. Il reste toujours possible, en effet, de formaliser une preuve informelle à l’aide de plusieurs arbres de preuve différents selon le rôle attribué dans l’arbre de preuve aux éléments de la preuve informelle. Notre approche choisira une formalisation qui met en relief deux caractéristiques. La première se décrit ainsi : notre formalisation devra privilégier des arbres de preuve où les hypothèses non désactivées sont celles qui contiennent des propriétés qui semblent déterminer la vérité du théorème que l’on prouve. En quoi les hypothèses non désactivées sont-elles nécessaires à notre formalisation ? Parce que, comme nous le verrons sous peu, les hypothèses non désactivées seront (à certaines conditions) la ou les raisons pour lesquelles un théorème est vrai.

Pour introduire la seconde caractéristique que notre formalisation devra exhiber, il nous faut d’abord présenter adéquatement certaines notions de base. Nous ferons référence, à cette fin, aux résultats des recherches portant sur les explications scientifiques desquels se dégage un fort consensus lorsqu’il est temps d’identifier les ingrédients-clés d’une explication. En effet, non seulement la *cause* et l’*effet* sont-ils tenus comme des parties nécessaires d’une explication, comme on pouvait s’y attendre, mais les *lois* ou, comme elles sont appelées de manière usuelle, les *généralisations*, doivent également faire partie d’une explication qui veut être reconnue comme telle. Illustrons cela à l’aide d’un exemple. Si nous voulons proposer une explication (scientifique) du fait qu’il y a un incendie dans la forêt, nous y ferons figurer ce même fait, c’est-à-dire qu’il y a un incendie dans la forêt — l’*effet* — ainsi que le fait qu’une cigarette fut allumée dans la forêt — la *cause* — et, enfin, la loi de la combustion, reliant nos deux faits et correspondant ici à la *généralisation*. De nombreuses approches de l’explication scientifique adhèrent à cette analyse, parmi lesquelles on compte : le modèle déductif-nomologique (modèle DN) développé dans [Hempel \(1965\)](#)², l’approche unifiée proposée dans [Kitcher \(1981\)](#), et l’approche contrefactuelle défendue dans [Woodward \(2004\)](#). Distinctes, ces approches ne se différencient pas les unes des autres par l’importance plus ou moins grande que chacune accorde aux généralisations dans les explications scientifiques, mais bien par le rôle spécifique qu’elles leur font jouer dans la

2. Pour une discussion en détails du modèle DN, voir les remarques de la section [3.6](#).

structure des explications. Dans le cas du modèle DN comme de l'approche contrefactuelle, par exemple, ce sont à la fois la cause et la généralisation qui constituent l'*explanans*, alors que l'effet, lui, constitue l'*explanandum*.

Revenons maintenant aux explications mathématiques. Elles forment, au sein des explications scientifiques, un genre particulier et il est tout à fait vraisemblable que, en cela, elles partagent les mêmes éléments-clés : une raison et une conclusion, qui sont les analogues de la cause et de l'effet (voir la section 1.1 au sujet des liens entre causalité et fondation), mais on y trouvera également un type quelconque de *généralisations*. Dans notre article [Poggiolesi et Genco \(2022\)](#), nous avons déjà longuement couvert la nécessité des généralisations pour les explications mathématiques, insistant sur le fait que, dans le domaine mathématique, les généralisations sont distinctes des lois et qu'elles correspondent plutôt aux théorèmes et définitions qui relient raison et conclusion dans une explication mathématique donnée. C'est ainsi que, dans la preuve explicative du théorème du quadrangle, ci-dessus, la généralisation impliquée se retrouve dans le théorème (i), selon lequel tout quadrangle peut être la somme de deux triangles. Les exemples avec lesquels nous illustrerons notre propos dans les sections suivantes contiendront d'autres généralisations.

En quoi consiste le lien entre les généralisations et la formalisation des explications mathématiques en arbres de preuve ? En ceci que notre formalisation privilégiera les arbres de preuve où au moins quelques généralisations sont employées comme règles. Bien que l'idée que les généralisations puissent efficacement tenir lieu de règles ne figure que rarement dans les études sur les explications mathématiques (on ne la retrouve que dans [Poggiolesi et Genco \(2022\)](#)), il s'agit encore une fois d'une idée qui emporte intuitivement l'adhésion. De fait, dans une preuve explicative informelle, certaines généralisations font office de lien entre la raison de l'explication et sa conclusion. Si cela est bien le cas, toutefois, une formalisation visant à représenter le plus fidèlement possible chaque facette d'une preuve informelle devra donner aux généralisations le rôle de règles, puisque ce sont les règles qui ont pour fonction de justifier le lien entre les différents éléments de la preuve. En somme, accorder aux généralisations le statut de règles semble être la façon idéale d'exprimer, au niveau formel, le rôle important qu'elles tiennent dans les explications.

Notons que les avantages d'un tel rôle potentiellement accordé aux généralisations ont, de

surcroît, déjà été soulignés dans d'autres domaines. Comme nous en avons fait mention dans la section 2.3, c'est un pan entier de la théorie de la démonstration, par ailleurs particulièrement actif, qui se donne pour objectif de transformer correctement des théorèmes et des définitions, apparaissant d'abord sous la forme d'énoncés, en règles.

L'idée d'inclure, dans notre analyse des explications mathématiques, certaines généralisations au sein des règles trouve son inspiration dans cette branche novatrice de la recherche récente, et s'appuie sur les résultats qu'elle a obtenus.

Enfin, et comme nous le verrons dans ce qui suit, l'idée de faire des généralisations des règles est une nouveauté propre à notre approche et elle y tient une place centrale, ayant une relation profonde, bien que subtile, à d'autres parties de notre modèle. Nous y reviendrons, bénéficiant d'une perspective plus vaste, dans la section 3.3.

Il nous faut bien sûr illustrer les remarques qui précèdent en donnant un exemple de formalisation proprement dite. Voici donc comment nous formalisons la preuve explicative du théorème du quadrangle à l'aide d'un arbre de preuve où figurent les abréviations suivantes : $Qu(x)$ signifie x est un quadrangle, $Tr(x)$ signifie x est un triangle, et $s.a.i.(x)$ renvoie à la somme des angles intérieurs de x .

$$\frac{\frac{Qu(ABCD)}{Tr(ABD)} \quad q-t}{\frac{Tr(ABD) \rightarrow s.a.i.(ABD) = 180^\circ}{s.a.i.(ABD) = 180^\circ}} \quad MP \quad \frac{s.a.i.(BCD) = 180^\circ}{s.a.i.(ABCD) = 180^\circ + 180^\circ} \quad q-t+$$

$$\frac{Qu(ABCD) \rightarrow s.a.i.(ABCD) = 180^\circ + 180^\circ}{Qu(ABCD) \rightarrow s.a.i.(ABCD) = 180^\circ + 180^\circ} \rightarrow I$$

où π est symétrique de la partie gauche de l'arbre de preuve :

$$\frac{\frac{Qu(ABCD)}{Tr(BCD)} \quad q-t}{\frac{Tr(BCD) \rightarrow s.a.i.(BCD) = 180^\circ}{s.a.i.(BCD) = 180^\circ}} \quad MP$$

Revenons à présent sur la relation entre la structure de notre arbre de preuve et la preuve informelle que nous avons exposée plus haut. Notre analyse débute avec l'inférence qui se trouve au sommet gauche de l'arbre de preuve. Celle-ci a pour fonction de dériver du fait

que $ABCD$ est un quadrangle l'autre fait que ABD est un triangle au moyen de la règle voulant que tout quadrangle soit divisible en deux triangles. À partir de la conclusion de cette inférence, c'est-à-dire que ABD est un triangle, nous arrivons à l'implication selon laquelle, si ABD est un triangle, alors la somme de ses angles intérieurs est égale à 180° , ce qui nous permet de conclure que la somme des angles intérieurs de ABD est de 180° . Nous avons un arbre de preuve tout à fait semblable pour le triangle BCD dans la partie symétrique π de l'arbre de preuve, qui aboutit à la formule $s.a.i.(BCD) = 180^\circ$. L'arbre de preuve principal suit, par la suite, le même chemin emprunté dans la preuve informelle, et conclut, en combinant les deux énoncés portant sur la somme des angles intérieurs de ABD et de BCD , que la somme des angles intérieurs de $ABCD$ est de 360° . Nous pouvons alors désactiver notre hypothèse en utilisant la règle d'introduction de l'implication (voir la figure 2.1, de la section 2.2), ce qui nous donne le résultat final, c'est-à-dire que, si $ABCD$ est un quadrangle, alors la somme des angles intérieurs de $ABCD$ correspond à $180^\circ + 180^\circ$.

Les deux *desiderata* que nous nous étions donnés semblent respectés par cette formalisation de la preuve explicative informelle du théorème du quadrangle. On peut en effet observer que, d'une part, la généralisation qui se retrouve dans la preuve informelle n'apparaît pas dans l'arbre de preuve en tant que théorème, mais prend plutôt la forme des deux règles $q-t$ et $q-t+$. On remarque également, d'autre part, que notre arbre de preuve est doté de deux hypothèses non désactivées représentant des propriétés qui sont aussi présentes dans la conclusion de l'arbre de preuve.

Passons à un autre exemple, provenant lui aussi de Bolzano (2014). Il s'agit d'un exemple que Bolzano employait spécifiquement pour traiter de la relation entre raison et conclusion, et illustrer son importance en mathématiques. Il porte sur une propriété des cercles, ce pourquoi nous l'appellerons le *théorème du cercle*.

Théorème du cercle. Pour deux cercles A et B , au centre a et au rayon ab , et au centre b et au rayon ab , respectivement, il existe toujours un point c d'intersection des cercles tel que

$$l(ac) = l(cb) = l(ab).$$

Preuve explicative. Prenons le cercle A dont le centre est a et le rayon ab (voir la figure 3.2). Comme le centre d'un cercle est, par définition, un point, alors nous obtenons qu'il existe un point a . Nous obtenons qu'il existe également un point b lorsque nous appliquons le même raisonnement au cercle B . Mais dès que nous avons un point a et un

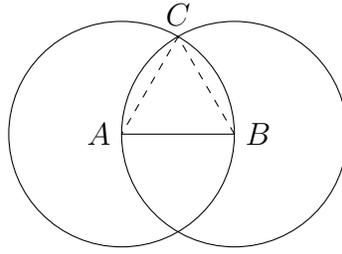


FIGURE 3.2 – Les points équidistants A , B et C .

point b , il existe aussi toujours un point c tel que $l(ab) = l(bc) = l(ac)$ (où $l(xy)$ renvoie à la longueur du segment xy). Nous obtenons donc un tel point c où $l(ab) = l(bc) = l(ac)$. Puisque la distance entre le point c et le centre du cercle A est le rayon a de A , et puisque la même chose est vraie du cercle B , c est le point d'intersection des deux cercles A et B .

Selon Bolzano, cette preuve montre la raison pour laquelle le théorème est vrai, et constitue donc une explication du théorème lui-même. Formalisons maintenant cette preuve en portant une attention toute particulière à son hypothèse non désactivée et à la généralisation employée. Nous utiliserons l'abréviation φ pour représenter la formule

$$Cerc(A, a, ab) \wedge Cerc(B, b, ab)$$

et nous utiliserons $Cerc(X, x, xy)$ pour signifier le fait que X est un cercle au centre x et au rayon xy . Nous écrirons également $Point(x)$ pour signifier que x est un point. L'arbre de preuve est le suivant :

$$\frac{\frac{\frac{\varnothing}{Cerc(B, b, ab)}{\wedge e} \quad Point(b)}{c-p} \quad Point(b) \rightarrow \exists c Point(c) \wedge l(ab) = l(ac) = l(bc)}{\exists c Point(c) \wedge l(ab) = l(ac) = l(bc)} \rightarrow E$$

$$\frac{\exists c Point(c) \wedge c \in A \wedge c \in B \wedge l(ab) = l(ac) = l(bc)}{c-p+} \quad \varphi \rightarrow \exists c Point(c) \wedge c \in A \wedge c \in B \wedge l(ab) = l(ac) = l(bc) \rightarrow i$$

où π est

$$\frac{\frac{\varnothing}{\text{Cerc}(A, a, ab)} \wedge e}{\text{Point}(a)} \quad \frac{\text{Point}(a) \rightarrow (\text{Point}(b) \rightarrow \exists c \text{Point}(c) \wedge l(ab) = l(ac) = l(bc))}{\text{Point}(b) \rightarrow \exists c \text{Point}(c) \wedge l(ab) = l(ac) = l(bc)} \rightarrow E$$

Comme nous l'avons fait pour la preuve précédente, arrêtons-nous un moment sur la relation entre la structure de cet arbre et la version informelle de la preuve. La preuve informelle commence en posant les deux points a et b mentionnés dans l'énoncé du théorème. Cela correspond, dans notre formalisation, aux deux inférences qu'on retrouve tout au sommet de l'arbre qui concluent que a est un point et que b est un point, respectivement, à partir de l'hypothèse φ . La preuve informelle poursuit en introduisant l'énoncé selon lequel pour deux points a et b , il existe toujours un point c dont la distance avec le point a et avec le point b est égale à ab . Dans l'arbre de preuve, cette étape est formalisée par deux applications consécutives de la règle $\rightarrow E$ (voir la figure 2.1, section 2.2). En effet, la prémisse de l'inférence la plus élevée des deux est la suivante : $\text{Point}(a) \rightarrow (\text{Point}(b) \rightarrow \exists c \text{Point}(c) \wedge l(ab) = l(ac) = l(bc))$. L'étape suivante de la preuve informelle, où il est établi que c est le point d'intersection des deux cercles A et B , est, elle, formalisée par l'inférence représentée par $c-p +$, reposant sur la définition d'un cercle comme ensemble de points tous équidistants du centre. L'inférence finale figurant dans l'arbre de preuve nous permet d'intégrer explicitement l'hypothèse φ dans la conclusion qu'on trouve à la racine de notre arbre.

Nous obtenons ainsi, à nouveau, un arbre de preuve qui formalise la preuve informelle initiale de manière à satisfaire nos *desiderata* : que, d'une part, l'hypothèse non désactivée représente une propriété qu'on retrouve également dans la racine de l'arbre de preuve ; et que, d'autre part, la généralisation figurant dans la preuve informelle — qui définit un cercle comme un ensemble de points sur une surface plane où tous les points sont équidistants d'un autre point, nommé centre, et où un segment reliant le centre à tout autre point se nomme rayon — apparaisse dans l'arbre de preuve sous la forme d'une règle.

Nous ferons, pour clore cette section, deux remarques sur les relations entre preuves formelle et informelle. La première porte sur les avantages qu'offrent les preuves formelles par comparaison avec les preuves informelles, et qui méritent d'être soulignés d'autant plus que nous avons maintenant illustré notre modèle de formalisation pour deux

théorèmes. La transition vers des preuves formelles, comme on a pu le voir, nous permet de systématiser des éléments-clés de la preuve informelle, ce qui lui confère une plus grande rigueur et une meilleure clarté : la preuve informelle est ainsi transformée de façon à ce que sa conclusion devienne la racine de l'arbre de preuve, et ses prémisses, les hypothèses non désactivées. Quant aux généralisations, elles subissent une transformation similaire et deviennent les règles de l'arbre de preuve³. Nous avons déjà mentionné que cette transformation des généralisations en règles fait écho au rôle qu'elles jouent spontanément dans les explications, et que cela représente un trait distinctif de l'approche que nous proposons. Car, lorsqu'ils analysent des preuves mathématiques, les mathématiciens, logiciens et philosophes tendent à employer les généralisations non comme des règles, mais comme des hypothèses (voir [Ginammi et al. \(2022\)](#); [Hempel \(1965\)](#)), ce qui génère parfois des contre-exemples des plus problématiques (on trouvera un traitement exhaustif de ce problème dans la section 3.6).

Notre deuxième remarque consiste en une analyse de la structure des arbres de preuve formalisant les preuves explicatives mathématiques. Nous avons proposé dans [Poggiolesi \(2016, 2018\)](#) un modèle des preuves explicatives en logique (spécifiquement celles qui reposent sur une relation de fondation), où nous avons identifié une dépendance stricte reliant le connecteur logique principal présent dans la racine de l'arbre de preuve, la structure de l'arbre de preuve et les étapes explicatives qui constituent une explication.

Une relation de dépendance similaire, pensons-nous, se retrouve dans les preuves explicatives qui nous intéressent ici, c'est-à-dire celles produites en mathématiques. Un certain nombre de notions techniques sont requises afin de décrire clairement de telles relations de dépendance. Elles sont énumérées et détaillées dans [Poggiolesi \(2016, 2018\)](#), auxquels nous renvoyons le lecteur. Les éléments qui sont les plus substantiels pour notre propos seront toutefois clarifiés par les exemples figurant dans les prochaines sections.

Notons seulement, pour l'instant, que, si nous ne considérons que les arbres de preuve dont la racine a pour connecteur principal une implication — et cela est fréquemment le cas, puisque de nombreux théorèmes mathématiques prennent la forme d'une implication — alors ces arbres auront la forme suivante :

3. Cette idée fut présentée pour la toute première fois dans [Poggiolesi et Genco \(2022\)](#), qui détaille les avantages techniques et conceptuels qu'elle entraîne.

$$\frac{A, C_1, \dots, C_n}{\frac{\vdots}{B}}{A \rightarrow B}$$

où C_1, \dots, C_n sont les hypothèses non désactivées.

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que les arbres de preuve formalisant les explications du théorème du quadrangle et du théorème du cercle ont précisément une telle structure. Afin de pouvoir conclure que des arbres de preuve ayant cette structure sont explicatifs (et, donc, qu'ils incarnent adéquatément le pouvoir explicatif de la preuve informelle correspondante), nous devons cependant montrer que C_1, \dots, C_n sont conceptuellement moins complexes que $A \rightarrow B$. C'est ce que nous ferons dans la section 3.4.1. Mais avant d'en arriver là, nous clarifierons, dans la prochaine section, le sens que nous donnons à l'expression *complexité conceptuelle*.

3.2 La complexité conceptuelle

Parmi les nombreuses difficultés auxquelles se heurtent les modèles de l'explication scientifique, une des plus importantes est celle des asymétries explicatives. C'est même précisément l'incapacité de plusieurs de ces modèles (dont le célèbre modèle DN) à rendre compte de la structure asymétrique des explications scientifiques qui justifia leur rejet et lança la recherche de modèles nouveaux. La situation est la même dans le cas des explications mathématiques : en tant qu'explications, les preuves explicatives mathématiques ont une directionnalité et tout modèle philosophique devrait pouvoir rendre une telle asymétrie. Afin de montrer toute l'étendue du problème, revenons au théorème du cercle où une propriété des points explique une propriété des cercles. Il n'en faut pourtant pas beaucoup pour renverser la preuve de manière à ce que, d'une propriété des cercles, nous puissions inférer une propriété des points. Nous aurions alors :

Théorème du point. Pour deux points a et b , il existe toujours un troisième point c tel que

$$l(ab) = l(bc) = l(ac).$$

Preuve. À partir des deux points a et b , on peut dessiner deux cercles A et B , ayant respectivement pour centre les points a et b et étant tout deux de rayon ab . Si nous avons

deux cercles tels et que nous leur appliquons le théorème du cercle, nous obtenons que ces deux cercles se rencontrent à un point d'intersection c tel que $l(ca) = l(cb) = l(ab)$. Il existe donc toujours un point c qui permet d'obtenir que $l(ab) = l(bc) = l(ac)$.

À première vue, la preuve explicative du théorème du cercle et la preuve donnée ci-dessus du théorème du point semblent analogues. Elles sont toutes les deux courtes et simples, elles emploient toutes deux comme ingrédient-clé la définition du cercle comme ensemble de points, et elles expliquent toutes deux une propriété à l'aide d'une autre propriété. Mais elles diffèrent en un aspect crucial : les prémisses et conclusion s'y trouvent inversées et, en raison de l'asymétrie des explications, elles ne peuvent être toutes deux des preuves explicatives. La seule preuve identifiée par la recherche comme possédant une force explicative est celle du théorème du cercle. On peut cependant se demander pourquoi cela est vrai de cette preuve, mais non de l'autre. Pourquoi est-ce la propriété des points qui explique la propriété des cercles — et non l'inverse ? Répondre à ces questions est loin d'être une tâche aisée : les modèles précédents des explications mathématiques, comme nous l'avons noté dans le premier chapitre, ignorent ainsi la directionnalité des explications mathématiques (voir les sections 1.3.1 et 1.3.2) ou bien ils peinent à en rendre compte adéquatement (voir les sections 1.3.3 et 1.3.4).

Nous avançons, dans cette section, une solution de ce problème. Il ne s'agit pas d'une solution novatrice ou particulièrement originale. Bien au contraire, elles émane des travaux d'illustres mathématiciens et philosophes parmi lesquels on retrouve, entre autres, Aristote, Proclus, Leibniz, Bolzano et Frege. Suivant cette illustre tradition (dont nous avons suivi le développement pas à pas dans la section 1.2), la directionnalité (ou l'asymétrie) des explications mathématiques consiste en une augmentation de la complexité conceptuelle allant des *raisons* de la preuve à sa *conclusion*. Une *raison* plus simple détermine ou explique ainsi une *conclusion* plus complexe⁴, alors que l'inverse n'est pas le cas. Comme nous l'avons signalé auparavant, cette idée d'une complexité augmentant du haut en bas paraît naturelle, et son caractère intuitif lui confère une grande attraction. Elle révèle cependant deux faiblesses. La première provient du fait qu'une telle progression de la complexité dépend dans une large mesure de l'identification correcte des *raison* et *conclusion* d'une explication mathématique. Cette tâche peut être des plus aisées lorsque nous avons affaire à des preuves mathématiques simples, mais, avec des preuves

4. Pour un exemple, voir [Detlefsen \(1988\)](#).

plus détaillées et plus longues, elle se compliquera rapidement. Notre formalisation en arbres de preuve nous permet heureusement de remédier à cette faiblesse : les *raisons* d'une explication mathématique se trouvent dans les hypothèses non désactivées de l'arbre de preuve qui formalise cette explication, et sa *conclusion*, dans la racine.

La deuxième faiblesse propre à l'idée de complexité conceptuelle, provenant de son héritage traditionnel, nous donnera davantage de fil à retordre : il s'agit du caractère général et vague qui émerge distinctement de cette idée lorsqu'on se pose un certain nombre de questions. Que voulons-nous dire lorsque nous affirmons que les *raisons* sont plus simples que la *conclusion* ? Par quel moyen pouvons-nous comparer les éléments d'une preuve entre eux ? Et comment pouvons-nous même comparer entre eux les concepts qui s'y trouvent ? Quant à la notion de complexité (conceptuelle), est-elle absolue ou relative ? Les notions de complexité logique et de propriété des sous-formules (que nous avons présentées dans la section 2.3) apportent, bien sûr, des réponses à ces questions — mais cela ne concerne que la structure logique des formules. L'idéal à poursuivre serait d'obtenir des notions semblablement rigoureuses qui soient applicables en mathématiques. Cela demeure cependant impossible : en mathématiques, les enjeux qui nous occupent ne sont pas réductibles à la structure des énoncés que nous utilisons — ils tournent plutôt autour des concepts que l'on emploie. Nous présenterons donc ici une méthode permettant d'établir si la complexité conceptuelle augmente des hypothèses non désactivées à la conclusion dans un arbre de preuve donné. Ce faisant, nous reprendrons la notion de sous-formule et en produirons une version fonctionnelle au niveau informel.

Avant d'exposer notre méthode en détail, présentons d'abord les réflexions qui ont mené à son développement. Cette méthode a pour but de pouvoir comparer un ensemble d'énoncés M avec un énoncé B que l'on retrouve dans un arbre de preuve sous la forme des hypothèses non désactivées et de la conclusion, respectivement. Elle y parvient en décomposant ces énoncés en leurs éléments de base et en étudiant ensuite les liens existant entre ces éléments. Il semble que l'étude de tels liens — et tout spécifiquement de ceux reliant entre eux des concepts — donne des résultats de trois types. Le premier cas de figure correspond à la situation où aucun lien de comparaison ne peut être établi puisque la conclusion contient des éléments que l'on ne retrouve pas dans les hypothèses non désactivées. C'est ce qui se produit, par exemple, lors de l'introduction d'une nouvelle constante logique. Il se produira alors une augmentation de la complexité conceptuelle

(qui inclut la complexité logique !), car un nouveau concept est bel et bien, *ceteris paribus*, introduit dans la preuve.

Lorsque des liens entre les éléments présents dans les hypothèses non désactivées et dans la conclusion d'un arbre de preuve peuvent être établis, par contre, nous pouvons, suivant en cela une tradition philosophique millénaire (voir à ce sujet [Margolis et Stephen \(2021\)](#)), distinguer les liens intensionnels des liens extensionnels. L'intension, dans le cas des mathématiques que nous étudions ici, correspond à la manière dont des éléments sont définis. Au niveau intensionnel, nous jugerons donc que deux éléments (ou plus) sont liés s'il existe une *définition* qui les relie entre eux. Au niveau extensionnel, au contraire, nous jugerons que deux éléments (ou plus) sont liés s'il existe un *théorème* qui met en lien les ensembles d'objets dénotés par ces éléments, l'extension s'intéressant aux ensembles d'objets auxquels des concepts font référence. Les définitions et théorèmes jouent donc un rôle crucial, aux niveaux intensionnel et extensionnel, respectivement, pour établir des liens entre les éléments figurant dans les énoncés que nous examinons. Mais où trouver les définitions et théorèmes qui établissent des liens conceptuels entre les éléments qui nous intéressent ? Et, même une fois que nous aurons déterminé ces liens, comment cela nous permettra-t-il d'établir qu'un concept est plus complexe qu'un autre ? Les généralisations utilisées dans les explications mathématiques peuvent être mises à profit pour répondre à la première question. Car ce sont ces généralisations qui, lorsqu'elles apparaissent dans l'arbre de preuve, fournissent les définitions ou théorèmes qui relient les éléments des énoncés concernés. Pour ce qui est de la seconde question, l'inhérence conceptuelle nous permet d'identifier une augmentation de la complexité conceptuelle à la fois au niveau intensionnel et au niveau extensionnel, bien qu'elle procède de façon différente dans les deux cas. Au niveau de l'intension, si un concept x est défini à l'aide des concepts y_1, \dots, y_n , alors le concept x contient les concepts y_1, \dots, y_n , qui sont ses composantes, et le premier est dit plus complexe que les seconds. Au niveau de l'extension, si un concept x renvoie à un ensemble d'objets X , lequel contient un sous-ensemble d'objets Y lié au concept y , alors y sera dit plus complexe que x puisqu'il est plus spécifique que lui. La méthode que nous présentons ci-dessous nous indique comment établir des relations entre des énoncés qui apparaissent dans des arbres de preuve et où la complexité conceptuelle augmente. Pour ce faire, elle se basera sur les éléments propres à un arbre de preuve et sur un ou plusieurs des trois cas de figure mentionnés dans les paragraphes

précédents : l'augmentation de la complexité s'exprimera donc au niveau intensionnel, extensionnel ou au moyen de l'introduction d'un nouvel élément. La façon la plus simple d'illustrer cette méthode est de la séparer en plusieurs étapes. Chacune de ces étapes sera appliquée aux trois exemples suivants.

L'exemple (I) correspond à l'arbre de preuve ci-dessous :

$$\frac{2 \text{ est un nombre pair} \quad 2 \text{ est un nombre premier}}{2 \text{ est un nombre pair et premier}} \wedge I$$

Dans cet arbre de preuve, les hypothèses non désactivées sont les énoncés « 2 est un nombre pair » et « 2 est un nombre premier », et la conclusion est l'énoncé « 2 est un nombre pair et premier ». La règle qui nous autorise à faire l'inférence qui produit la conclusion est $\wedge I$ (voir la figure 2.1, à la section 2.2).

L'exemple (II) correspond à l'arbre de preuve ci-dessous :

$$\frac{ABCD \text{ est un quadrangle}}{ABCD \text{ est un polygone}} Pol$$

Dans cet arbre de preuve, l'hypothèse non désactivée est l'énoncé « $ABCD$ est un quadrangle » et la conclusion est l'énoncé « $ABCD$ est un polygone ». La règle qui nous permet de faire cette inférence est basée sur la définition d'un polygone comme disjonction de tout type de polygone (quadrangle, triangle, rectangle, etc.).

Notre exemple (III) correspond à l'arbre de preuve, construit dans la section précédente, qui formalise l'explication du théorème du quadrangle. Ses hypothèses non désactivées sont les énoncés « si ABD est un triangle, alors la somme de ses angles intérieurs est de 180° » et « si BCD est un triangle, alors la somme de ses angles intérieurs est de 180° » et sa conclusion est l'énoncé « si $ABCD$ est un quadrangle, alors la somme de ses angles intérieurs est de $180^\circ + 180^\circ$ ».

Nous disposons maintenant de tous les éléments nécessaires pour présenter notre méthode.

(1m) La première étape de notre méthode consiste à séparer les énoncés que nous entendons comparer — c'est-à-dire, ici, les hypothèses non désactivées et la conclusion apparaissant dans l'arbre de preuve — en leurs éléments de base.

(I) En séparant les hypothèses non désactivées et la conclusion de l'exemple (I) en leurs éléments de base, nous obtenons :

- 2, nombre pair, 2, nombre premier
- 2, nombre pair, et, nombre premier

(II) En séparant les hypothèses non désactivées et la conclusion de l'exemple (II) en leurs éléments de base, nous obtenons :

- $ABCD$, quadrangle
- $ABCD$, polygone

(III) En séparant les hypothèses non désactivées et la conclusion de l'exemple (III) en leurs éléments de base, nous obtenons :

- si-alors, ABC , triangle, la somme des angles intérieurs, 180° , si-alors, BCD , triangle, la somme des angles intérieurs, 180° ,
- si-alors, $ABCD$, quadrangle, la somme des angles intérieurs, 180° , +, 180°

(2m) La deuxième étape de notre méthode consiste à effacer les éléments que l'on retrouve à l'identique à la fois dans les hypothèses non désactivées et dans la conclusion⁵.

(I) À partir des éléments dont nous avons donné la liste ci-dessus, nous effaçons ceux qui sont identiques et obtenons ainsi :

- ~~2, nombre pair, 2, nombre premier~~
- ~~2, nombre pair, et, nombre premier~~

(II) Nous procédons de la même manière pour le second exemple :

- ~~$ABCD$, quadrangle~~
- ~~$ABCD$, polygone~~

(III) Et de même pour le troisième exemple :

- ~~si-alors, ABC , triangle, la somme des angles intérieurs, 180° , si-alors, BCD , triangle, la somme des angles intérieurs, 180° ,~~
- ~~si-alors, $ABCD$, quadrangle, la somme des angles intérieurs, 180° , +, 180°~~

(3m) La troisième étape de notre méthode consiste, une fois effectué le retrait des

5. Il nous faut remarquer que, dans le cas des énoncés faisant l'objet d'une négation, la situation est légèrement plus complexe. Voir, à ce sujet, [Poggiolesi \(2016\)](#).

éléments communs aux hypothèses non désactivées et à la conclusion, à déterminer quel scénario de complexité est bien le cas parmi les suivants :

(3mA) — *Complexité selon l'intension*. Il existe un élément x présent dans la conclusion et des éléments y_1, \dots, y_n présents dans les hypothèses non désactivées qui sont liés entre eux par une définition présente (implicitement ou explicitement) dans l'arbre de preuve. Cette définition établit spécifiquement que x contient les éléments y_1, \dots, y_n , qui sont ses composantes. Si tel est le cas, nous pouvons alors conclure que x est plus complexe que chacun des éléments y_1, \dots, y_n .

Pour illustrer l'application de ce scénario, prenons d'abord l'exemple (II), où le concept *polygone* apparaît dans la conclusion et où le concept *quadrangle*, lui, apparaît dans l'hypothèse (non désactivée). D'après la définition de polygone, que nous avons utilisée dans l'arbre de preuve en tant que règle, un polygone est défini en tant que la disjonction de plusieurs figures géométriques parmi lesquelles se trouve le quadrangle. Ainsi, le concept de polygone contient le concept de quadrangle (du moins, c'est le cas dans l'arbre de preuve où se retrouvent les deux concepts), et le premier concept est donc plus complexe que le second.

Nous observerons la même chose dans l'exemple (III), où l'élément $ABCD$ apparaît dans la conclusion et où les éléments ABD et BCD apparaissent dans les hypothèses (non désactivées). On remarquera que, selon la définition qui a été donnée de ces figures, ABD et BCD font tous les deux partie de $ABCD$. Ainsi, l'élément $ABCD$ contient les éléments ABD et BCD , et, dans ce cas également, le premier élément est plus complexe que chacun des seconds.

(3mB) — *Complexité selon l'extension*. Il existe un élément x présent dans la conclusion et un élément y présent dans les hypothèses non désactivées qui, bien qu'aucune définition n'apparaisse dans l'arbre de preuve pour les relier, sont mis en relation par un théorème, apparaissant dans l'arbre de preuve en tant que règle, qui relie entre eux les ensembles d'objets auxquels renvoient les éléments x et y que nous appellerons respectivement X et Y . Il peut être établi, spécifiquement, que Y est un sous-ensemble propre de X' , où X' est un ensemble généré à partir des éléments de X . Dans un tel cas, nous affirmons que l'élément y est plus complexe que l'élément x parce qu'il est plus spécifique que lui, comme le montrent les objets dénotés par y .

Exposons plus en détail le fonctionnement de (3mB) à l'aide d'un exemple (d'autres

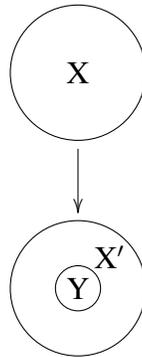
exemples seront également introduits dans les sections ultérieures). Dans l'exemple (III), la conclusion contient le concept de *quadrangle* et les hypothèses non désactivées contiennent le concept de *triangle*. Aucune définition apparaissant dans la preuve ne met ces deux concepts en relation, et il semble donc n'y avoir aucune raison de considérer le concept de *quadrangle* comme étant plus complexe que le concept de *triangle*. La situation est toutefois différente si nous comparons les objets auxquels renvoient ces concepts. Selon le théorème (i), qui apparaît dans l'arbre de preuve en tant que règle, tout quadrangle est le résultat de la combinaison de deux triangles ayant un côté en commun. Ainsi, d'après un tel théorème, l'ensemble qui compte tous les quadrangles est un sous-ensemble l'ensemble qui compte tous les couples de triangles, c'est-à-dire le sous-ensemble des couples de triangles ayant un côté en commun (et disposés d'une certaine manière). Il faut remarquer que l'ensemble qui compte tous les couples de triangles est généré à partir de l'ensemble qui compte tous les triangles. L'ensemble qui compte tous les quadrangles peut, en conséquence, être traité comme un sous-ensemble de l'ensemble qui compte tous les couples de triangles (voir la figure 3.3). Le concept de quadrangle est donc, de ce point de vue, plus complexe que le concept de triangle en raison de sa plus grande spécificité.

(3mC) — *Complexité par nouveauté*. La conclusion contient, dans ce dernier scénario, un élément qui est absent des hypothèses non désactivées et qui ne peut être mis en relation avec un autre élément quelconque de ces hypothèses selon l'intension ou l'extension. C'est ce qui se produit dans l'exemple (I), où la conclusion contient un *et* nouveau qu'on ne retrouve pas dans les hypothèses non désactivées. Ce scénario s'applique également à l'exemple (III), où la conclusion contient un *+* nouveau, absent des hypothèses non désactivées et qu'on ne peut relier intensionnellement ou extensionnellement à un autre élément présent dans ces hypothèses.

(4m) L'étape finale de notre méthode consiste à établir que, si la troisième étape est concluante, la conclusion de l'arbre de preuve est conceptuellement plus complexe que les hypothèses non désactivées.

Nous sommes parvenus au terme de l'illustration de notre méthode qui indique comment évaluer l'augmentation de la complexité conceptuelle entre un ensemble d'énoncés *M* et un énoncé *B*, qui correspondent aux hypothèses non désactivées et à la conclusion d'un arbre de preuve, respectivement. Une telle évaluation s'effectue en passant au peigne fin

FIGURE 3.3 – X est l'ensemble contenant tous les triangles, X' l'ensemble contenant tous les couples de triangles, et Y est l'ensemble contenant tous les quadrangles.



les éléments composant ces énoncés. Tout d'abord, on ne s'intéressera qu'aux éléments qui méritent d'être comparés, en ignorant les autres. Ensuite, la méthode procède au retrait des éléments communs à M et B : comme ces éléments sont identiques, il n'est pas nécessaire de les inclure dans l'évaluation. Notre méthode, enfin, vise à établir des liens entre les éléments restants, que ce soit selon l'intension ou selon l'extension. Elle tient également compte de la possibilité d'introduire des éléments complètement nouveaux dans une conclusion. La recherche en philosophie est bien au fait de la dichotomie entre intension et extension. Cependant, c'est le plus souvent le niveau intensionnel qui a retenu l'attention des philosophes : nous trouvons des réflexions sur les relations intensionnelles entre les concepts dès Aristote — dont la méthode fut souvent associée au diagramme « en arbre » de [Porphyry \(2006\)](#) — et jusque chez Proclus et Kant⁶, comme il est mentionné dans [Harari \(2008\)](#), [Martijn \(2010\)](#), et [Ginammi et al. \(2022\)](#). En mathématiques, pourtant, un grand nombre de cas où des concepts sont mis en relation et comparés ne se conforment pas au modèle intensionnel. Bien au contraire, les résultats les plus intéressants obtenus dans ce domaine établissent souvent des relations entre des concepts qui, sans être reliés au niveau intensionnel, le sont certainement au niveau extensionnel.

6. Même si ni Proclus ni Kant, bien sûr, n'ont explicitement mené leur traitement des concepts d'après la distinction entre intension et extension, nous pouvons affirmer, avec le recul, qu'ils abordaient tous deux les concepts d'un point de vue intensionnel.

Notre méthode doit donc, bien sûr, tenir compte de cette réalité — et elle le fait. Nous mentionnions, au tout début de cette section, le problème que représentait l'asymétrie des explications scientifiques en général, et celle des explications mathématiques en particulier. L'exemple que nous avons alors utilisé pour mettre en évidence un tel problème est celui de la preuve explicative du théorème du cercle. Dans cette preuve, une propriété des points est employée pour expliquer une propriété des cercles. Il est aussi possible, toutefois, comme nous l'avons ensuite montré, de construire une preuve qui emploie une propriété des cercles pour expliquer une propriété des points. Cela nous a mené à nous demander ce qui pouvait nous autoriser à n'identifier comme proprement explicative que la première de ces deux preuves, mis à part le fait que les mathématiciens font eux-mêmes une telle distinction. Dans cette section, nous avons cherché une réponse à cette question et avons ainsi fait les tout premiers pas vers une solution de notre problème initial : l'augmentation de la complexité conceptuelle des hypothèses non désactivées à la conclusion d'un arbre de preuve est ce qui distingue une preuve explicative d'une preuve qui ne l'est pas. Comme nous le montrerons en détail dans la section 3.4.1, cette solution s'applique parfaitement à l'exemple dont nous sommes partis : alors que nous pouvons clairement observer une augmentation de la complexité conceptuelle du haut vers le bas dans l'arbre de preuve qui formalise la preuve du théorème du cercle, cela n'est pas le cas dans l'arbre de preuve formalisant le théorème du point.

3.3 Les arbres de preuve où la complexité conceptuelle augmente

Nous avons montré, dans la section 3.1, comment procéder pour formaliser des preuves mathématiques à l'aide d'arbres de preuve, puis, dans la section 3.2, nous avons présenté une méthode qui permet de déterminer de quelle manière la complexité conceptuelle augmente des hypothèses non désactivées à la conclusion d'un arbre de preuve. Grâce à ces outils, nous pouvons à présent donner une formulation claire de notre approche des explications mathématiques : si une preuve mathématique est explicative, alors *il existe une manière* de la formaliser en tant qu'arbre de preuve où la complexité conceptuelle augmente des hypothèses non désactivées à la conclusion. Nous ferons d'abord, avant de

mettre notre modèle à l'essai, trois remarques sur cette formulation.

Premièrement, elle implique bien sûr, comme toute position que l'on exprime au moyen d'un énoncé existentiel, une asymétrie : le travail requis pour montrer qu'une preuve est explicative n'est pas le même que celui à effectuer pour montrer qu'elle ne l'est pas. Dans le premier cas, il nous suffit d'identifier une seule formalisation de la preuve présentant les caractéristiques que nous recherchons, quand, dans le second cas, il nous faut plutôt proposer un argument selon lequel une telle formalisation n'existe pas. Bien que le travail nécessaire dans le premier cas soit, à l'occasion, loin d'être banal, c'est évidemment le travail exigé par le deuxième qui est, la plupart du temps, le plus ardu. Cela ne signifie pas qu'une telle tâche soit impossible à mener à bien, puisque la preuve informelle dont nous partons restreint le nombre de formalisations possibles dont nous devons tenir compte.

C'est pourquoi nous nous emploierons, dans les sections 3.4.1 et 3.4.2 ci-dessous, à produire une telle argumentation sur la base d'exemples que notre modèle identifie correctement comme des preuves non explicatives. Il faut par contre souligner que nous ne considérons ni cette asymétrie, ni la difficulté d'identifier les preuves explicatives et les preuves non explicatives en général comme des failles de notre approche. Un modèle philosophique des explications mathématiques ne vise pas nécessairement à distinguer des preuves mathématiques explicatives spécifiques de celles qui ne le sont pas — cette tâche revient aux mathématiciens. Le but d'un modèle philosophique est plutôt, en partant des preuves que les mathématiciens jugent explicatives, de clarifier ce qui leur confère un tel caractère. Notre modèle satisfait parfaitement à ce but en cela qu'il affirme qu'une preuve est explicative tant et aussi longtemps qu'elle peut être formalisée en tant qu'arbre de preuve où les hypothèses non désactivées sont conceptuellement moins complexes que la conclusion.

Notre modèle se fonde sur une approche utilisée en théorie de la démonstration et appliquée aux mathématiques qu'il joint à une augmentation de la complexité conceptuelle du haut en bas dans les arbres de preuve. Il est crucial, ici, de faire clairement ressortir que ces deux idées vont de pair. Sans l'apport de l'augmentation de la complexité conceptuelle, une approche inspirée de la théorie de la démonstration nous montrerait uniquement la structure des preuves mathématiques sans pour autant identifier d'où provient leur force explicative. Pareillement, l'idée que la complexité conceptuelle augmente ne trouverait pas d'application profitable si elle ne s'appuyait pas sur les outils

fournis par la théorie de la démonstration. Cela s'explique par le fait que l'augmentation de la complexité conceptuelle *passse uniquement par les règles*. Une telle augmentation est d'ailleurs perceptible précisément parce que les généralisations appropriées sont présentes dans la preuve en tant que règles plutôt qu'en tant qu'hypothèses non désactivées. Mais, cette insistance sur les règles étant le propre d'une approche du raisonnement qui s'appuie sur une structure en arbre de preuve, il se crée une symbiose entre les règles, les généralisations et la complexité qui justifie tout à fait que nous nous fondions ici sur la théorie de la démonstration.

Troisièmement, notre modèle reproduit, en les appliquant au cas des mathématiques, certaines intuitions que l'on rencontre dans la recherche sur les explications scientifiques. Tout comme l'on considère que les explications scientifiques se basent sur la relation de causalité, nous considérons ici les explications mathématiques comme étant basées sur une relation de fondation. Ainsi, les explications mathématiques s'appuient sur des définitions et théorèmes appropriés qui servent à relier les raisons à la conclusion de la même manière que les explications scientifiques s'appuient sur des lois qui lient entre eux cause et effet. Nous considérons, dans les explications scientifiques, que l'*explanans* est composé des causes et de la loi qui les relie à l'effet qui en suit, alors que l'*explanandum* consiste en cet effet. Ici, de semblable manière, nous tenons l'*explanans* des explications mathématiques pour composé des raisons ainsi que des définitions et théorèmes qui relient ces dernières à la conclusion, alors que l'*explanandum* consiste en cette conclusion. Mais, comme raisons et généralisations jouent toutes deux le rôle de l'*explanans*, est-il bien possible de les distinguer au sein des explications mathématiques ? Bien sûr, car, dans une approche basée sur la théorie de la démonstration, raisons et généralisations peuvent être aisément distinguées : dans les arbres de preuve, les premières sont représentées par les hypothèses non désactivées, et les secondes, par les règles.

3.4 Notre modèle au banc d'essai

Nous en venons, dans cette section, à la mise à l'essai de notre modèle au moyen de preuves de théorèmes que l'on tient couramment pour explicatives. Tous d'abord, nous étudierons les preuves du théorème du quadrangle et du théorème du cercle que nous avons déjà formalisées dans une section précédente. Nous nous pencherons également sur la preuve du théorème du point afin de défendre qu'elle n'a aucun pouvoir explicatif.

Nous passerons ensuite à d'autres théorèmes dont les preuves ont été considérées comme explicatives dans l'histoire des mathématiques (par exemple, le théorème de Desargue).

3.4.1 Les théorèmes du quadrangle, du cercle et du point

Les théorème du quadrangle et théorème du cercle furent introduits, avec leur preuve explicative, dans la section 3.1. Nous avons alors illustré la manière de procéder pour formaliser ces preuves à l'aide d'arbres de preuve. Mais nous sommes maintenant en possession de tous les instruments requis pour mener notre analyse à terme et montrer que les hypothèses non désactivées sont conceptuellement moins complexes que la conclusion dans chacun de ces arbres de preuve. Si c'est bel et bien le cas, alors les preuves informelles de ces théorèmes sont explicatives.

Prenons pour commencer le théorème du quadrangle. Le lecteur se rappellera que l'arbre formalisant cette preuve (construit à la section 3.1) compte les hypothèses non désactivées suivantes :

- i. si ABD est un triangle, alors la somme de ses angles intérieurs est de 180° ,
- ii. si BCD est un triangle, alors la somme de ses angles intérieurs est de 180° ,

et la conclusion suivante :

- iii. si $ABCD$ est un quadrangle, alors la somme de ses angles intérieurs est de $180^\circ + 180^\circ$.

Les énoncés i. à iii. constituaient notre exemple (III) dans la section 3.2. À cette occasion, nous avons observé que les énoncés i. et ii. contiennent des éléments qui sont ou bien identiques à des éléments que l'on retrouve dans l'énoncé iii. (comme si-alors, la somme des angles intérieurs, 180°), ou bien plus simples, selon la définition, que des éléments de iii. (c'était le cas de ABC , BCD et $ABCD$), ou bien encore moins complexes du point de vue de l'extension que des éléments de iii. (pour triangle et quadrangle). Les énoncés i. et ii. sont donc conceptuellement plus simples que l'énoncé iii. Nous pouvons en déduire que la preuve du théorème du quadrangle jugée explicative par Bolzano est également explicative d'après notre modèle, puisqu'il en existe une formalisation en tant qu'arbre de preuve où les hypothèses non désactivées sont moins complexes que la conclusion.

Non seulement notre analyse est-elle en mesure de confirmer ce que Bolzano avait avancé,

mais elle nous a aussi permis d'identifier distinctement et rigoureusement les raisons et la conclusion de cette explication du théorème du quadrangle, qui correspondent, respectivement, aux hypothèses non désactivées et à la conclusion de l'arbre de preuve. Le fait que la somme des angles intérieurs d'un triangle est de 180° est la raison pour laquelle la somme des angles intérieurs d'un quadrangle est de 360° . Pour le dire autrement, une propriété des triangles explique une propriété des quadrangles.

Enfin, nous sommes de surcroît à même d'identifier l'*explanans* et l'*explanandum* de cette preuve explicative : le premier est constitué du fait que la somme des angles intérieurs d'un triangle est de 180° et du fait que tout quadrangle peut être divisé en deux triangles partageant un côté, et le second consiste en le fait que la somme des angles intérieurs d'un quadrangle est de 360° .

Étudions à présent la preuve explicative du théorème du cercle. L'hypothèse non désactivée de l'arbre de preuve formalisant cette explication (construit à la section 3.1) est l'énoncé suivant :

- i. si a et b sont des points, alors il existe un autre point c pour lequel $l(ab) = l(ac) = l(bc)$,

et sa conclusion est l'énoncé ci-dessous :

- ii. si A est un cercle au centre a et au rayon ab , et que B est un cercle au centre b et au rayon ab , il existe alors un point d'intersection c pour lequel $l(ab) = l(ac) = l(bc)$.

Utilisons notre méthode afin de déterminer si la conclusion est plus complexe que l'hypothèse non désactivée. Nous devons, pour ce faire, d'abord séparer les deux énoncés en leurs composantes, ce qui nous donne ceci :

- i. si-alors, a , si-alors, b , point, il existe, c , point, $l(ab) = l(ac) = l(bc)$,
- ii. si-alors, A , et, B , a , b , cercle, rayon, centre, il existe, point d'intersection, c , $l(ab) = l(ac) = l(bc)$.

Nous procédons ensuite au retrait des éléments que les deux énoncés ont en commun :

- i. ~~si-alors, a , si-alors, b , point, il existe, c , point, $l(ab) = l(ac) = l(bc)$,~~
- ii. ~~si-alors, A , et, B , a , b , cercle, rayon, centre, il existe, point d'intersection, c , $l(ab) = l(ac) = l(bc)$~~

Finalement, nous analysons les éléments restant des énoncés i. et ii., pour découvrir que :

(3mA) Les concepts de *cercle*, de *centre*, de *rayon* et de *point d'intersection* sont tous présents dans l'énoncé ii., qui constitue la racine de notre arbre de preuve, et sont tous reliés au concept de *point*, présent dans l'énoncé i., qui constitue la feuille non désactivée de cet arbre. Le lien entre le premier groupe de concepts et le second est établi par la définition (figurant dans notre arbre) d'un cercle comme l'ensemble de tous les points sur une surface plane qui sont équidistants d'un autre point, appelé centre, où tout segment partant du centre vers un des points est appelé rayon. Plus précisément encore, les concepts de *cercle*, de *centre*, de *rayon* et de *point d'intersection* contiennent tous le concept de *point* par définition.

(3mC) La conclusion contient les éléments *et*, *A*, *B* qui sont nouveaux et ne sont pas en lien avec quelque élément de l'hypothèse.

Ici, l'énoncé ii. (c'est-à-dire le théorème que nous voulons démontrer) contient des éléments qui sont soit déjà présents dans l'énoncé i. (c'est-à-dire l'hypothèse non désactivée), soit nouveaux ou contenant par définition d'autres éléments présents dans l'énoncé i. Nous pouvons donc établir que la conclusion de notre arbre de preuve est conceptuellement plus complexe que son hypothèse non désactivée, ce qui signifie que la preuve du théorème du cercle est effectivement explicative.

Comme pour la preuve du théorème précédent, non seulement notre approche justifie et systématise les intuitions de Bolzano, mais elle nous permet également de les approfondir et d'étudier les fins détails de la structure explicative qu'il avait identifiée. Nous sommes à même, par exemple, de déterminer clairement en quoi consiste le fondement de cette explication : il correspond au fait que, pour tout couple de point, il existe toujours un troisième point formant avec les deux premiers un triangle équilatéral. C'est cette raison qui explique que, pour tout couple de cercles dont les centres sont reliés par une ligne correspondant au rayon de chacun, ces cercles se rencontreront toujours à un point d'intersection qui forment avec leur centre un triangle équilatéral. Cette analyse confirme donc la conjecture suivante émise par Bolzano :

Ainsi, par exemple, la preuve de la première proposition des *Éléments* de Euclide (sur la possibilité d'un triangle équilatéral), de l'avis de tous les mathématiciens, n'est pas apagogique, mais directe. Mais nous indique-t-elle le fondement de la vérité à prouver ? Un triangle équilatéral est-il possible uniquement

parce que ces cercles se recoupent ? Ou ne s'agit-il pas plutôt du cas inverse, les cercles se recoupant parce qu'il y a un triangle équilatéral⁷ (Bolzano, 1837, §525) ?

Concluons cette section en montrant brièvement que nous pouvons utiliser, pour soutenir l'argument que la preuve du théorème du point n'est pas explicative, les mêmes étapes que nous avons parcourues pour défendre que le théorème du cercle possède une force explicative.

Nous commençons, comme il se doit, par formaliser la preuve du théorème du point (dont la version informelle a été présentée dans la section 3.2) au moyen d'une structure en arbre. Tout spécifiquement, ici, nous prenons soin d'adopter le même langage formel que nous avons utilisé pour la formalisation du théorème du cercle (voir la section 3.1) et nous dénotons à l'aide de ψ la formule suivante :

$$\exists c \text{ Point}(c) \wedge c \in A \wedge c \in B \wedge l(ab) = l(ac) = l(bc)$$

ce qui nous permet d'obtenir l'arbre de preuve ci-dessous :

$$\frac{\frac{\frac{\text{Point}(b)}{\text{Cerc}(B, b, ab)} (c-p)^* \quad \frac{\frac{\text{Point}(a)}{\text{Cerc}(A, a, ab)} (c-p)^* \quad \text{Cerc}(A, a, ab) \rightarrow (\text{Cerc}(B, b, ab) \rightarrow \psi)}{\text{Cerc}(B, b, ab) \rightarrow \psi} \rightarrow E}{\exists c \text{ Point}(c) \wedge c \in A \wedge c \in B \wedge l(ab) = l(ac) = l(bc)} \rightarrow E}{\exists c \text{ Point}(c) \wedge l(ab) = l(ac) = l(bc)} (c-p+)^*}{\frac{\text{Point}(b) \rightarrow \exists c \text{ Point}(c) \wedge l(ab) = l(ac) = l(bc)}{\text{Point}(a) \rightarrow (\text{Point}(b) \rightarrow \exists c \text{ Point}(c) \wedge l(ab) = l(ac) = l(bc))} \rightarrow I} \rightarrow I} \rightarrow E$$

En tenant compte de la preuve informelle que cet arbre de preuve doit formaliser, étudions maintenant la structure de l'arbre auquel nous sommes parvenus. La preuve informelle commence par poser les deux points a et b mentionnés dans le théorème lui-même. Cela correspond, dans l'arbre de preuve, aux deux feuilles les plus hautes dont nous concluons que nous pouvons construire deux cercles, l'un au centre a et au rayon ab et l'autre au centre b et au rayon ab . De cela et de l'hypothèse selon laquelle si A est un cercle au

7. Traduction de l'allemand par J. Allard.

centre a et au rayon ab et si B est un cercle au centre b et au rayon ab , alors ces cercles se rencontrent toujours en un point d'intersection c de manière à ce que $l(ab) = l(bc) = l(ca)$, nous obtenons, en appliquant à deux reprises la règle $\rightarrow E$ (voir la figure 2.1 à la section 2.2), qu'il existe un point d'intersection c pour lequel $l(ab) = l(ac) = l(bc)$. Une fois cela fait, nous en inférons que nous avons un tel point c pour lequel $l(ab) = l(ac) = l(bc)$. Il ne nous reste qu'à appliquer par deux fois la règle introduisant l'implication (voir la figure 2.1 à la section 2.2), et nous obtenons alors la conclusion recherchée.

L'arbre de preuve qui formalise le théorème du point est analogue à celui qui formalise le théorème du cercle : tous deux possèdent la même structure, tous deux comportent des hypothèses non désactivées qui représentent des propriétés liées aux théorèmes qu'ils prouvent et tous deux emploient la même généralisation, c'est-à-dire la définition du cercle comme ensemble de points. Une différence significative les distingue toutefois, car l'hypothèse non désactivée et la conclusion de l'arbre de preuve du théorème du cercle correspondent, respectivement, à la conclusion et à l'hypothèse non désactivée de l'arbre formalisant le théorème du point. Notre méthode ayant montré que la complexité conceptuelle augmente du haut vers le bas dans le premier arbre de preuve, il est élémentaire d'observer, par une analyse analogue, que la complexité conceptuelle diminue du haut de l'arbre de preuve vers sa base dans le cas du théorème du point. Il paraît ainsi raisonnable de conclure⁸ que la preuve du théorème du point n'est pas explicative. Nous pouvons justifier notre conclusion en nous appuyant sur les résultats obtenus grâce à notre méthode : une propriété des cercles ne peut expliquer une propriété des points car, selon la définition utilisée dans la preuve, les cercles sont plus complexes que les points.

3.4.2 Le théorème de Pythagore

Dans cette section, nous mettons notre modèle des explications mathématiques à l'essai en l'appliquant à la preuve du théorème de Pythagore, celle-là même que nous avons utilisée pour illustrer les modèles contemporains existants de l'explication mathématique (à la section 1.3). Avant de procéder, rappelons rapidement en quoi consistent le théorème et sa preuve explicative.

8. Bien que nous n'ayons pas analysé toutes les formalisations possibles du théorème du point, cette conclusion nous semble des plus raisonnables.

Théorème de Pythagore. Pour tout triangle rectangle ABC dont l'angle droit est A , le carré BC^2 de l'hypoténuse BC est égal à la somme des carrés AB^2 et AC^2 des côtés AB et AC du triangle, respectivement.

Preuve explicative. Prenons un triangle rectangle ABC dont l'angle droit est A et traçons-y une hauteur AH tombant sur son hypoténuse BC , tel qu'illustré à la figure 3.4.

Nous remarquons d'abord que le triangle résultant AHC , contenu dans ABC , est semblable à ABC puisqu'ils ont tous deux un angle droit et qu'ils ont en commun l'angle C .

La similitude entre les triangles ABC et AHC implique l'égalité suivante :

$$\frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC}$$

qui peut à son tour s'exprimer ainsi : $AC^2 = CH \cdot BC$.

Symétriquement, le triangle ABH contenu en ABC est semblable à ABC puisqu'ils ont tous deux un angle droit et qu'ils ont en commun l'angle B . La similitude entre les triangles ABC et ABH , pareillement, implique l'égalité suivante :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB}$$

que l'on peut également exprimer ainsi : $AB^2 = BH \cdot BC$. Ayant établi que $AC^2 = CH \cdot BC$ et que $AB^2 = BH \cdot BC$, nous pouvons les combiner pour obtenir $AC^2 + AB^2 = CH \cdot BC + BH \cdot BC$, ce qui équivaut à $AC^2 + AB^2 = (CH + BH)(BC)$. Cela nous mène directement à notre conclusion $AC^2 + AB^2 = BC^2$, puisque nous avons montré par construction que $CH + BH = BC$ ⁹.

Comme nous l'avons fait dans les cas précédents, lors de la formalisation de cette preuve, nous devons accorder une attention particulière aux hypothèses non désactivées ainsi qu'à

la généralisation sur laquelle elles reposent. Nous utiliserons la notation suivante :

$TrR(x \sim y/z)$ signifie que x est un triangle rectangle divisé en deux triangles y et z par

9. Lorsque nous avons mentionné cette preuve explicative pour la première fois, au chapitre 1, section 1.3, nous disions qu'elle donnait l'intuition qu'elle était en réalité une preuve qui donne la raison pour laquelle le théorème est vrai. C'est précisément ce que nous serons sous peu en mesure de vérifier.

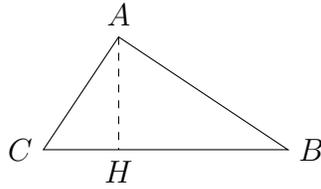


FIGURE 3.4 – Un triangle rectangle dont la hauteur est AH .

la hauteur, et $Sim(x, y)$ signifie que x et y sont des triangles semblables. Nous pouvons donc formaliser la preuve explicative ci-dessus à l'aide de l'arbre de preuve suivant :

$$\frac{\frac{AC^2 = CH \cdot BC \quad AB^2 = BH \cdot BC}{AC^2 + AB^2 = BC^2} + i, reform.}{TrR(ABC \sim AHC // AHB) \rightarrow AC^2 + AB^2 = BC^2} \rightarrow i$$

où π_0 est l'arbre de preuve suivant :

$$\frac{\frac{TrR(ABC \sim AHC // AHB)}{Sim(ABC, AHC)} \quad Sim(ABC, AHC) \rightarrow AC^2 = CH \cdot BC}{AC^2 = CH \cdot BC} MP$$

et où π_1 est l'arbre de preuve suivant :

$$\frac{\frac{TrR(ABC \sim AHC // AHB)}{Sim(ABC, AHB)} \quad Sim(ABC, AHB) \rightarrow AB^2 = BH \cdot BC}{AB^2 = BH \cdot BC} MP$$

La première étape de la preuve informelle est d'inférer que le triangle ABC est semblable au triangle AHC . Elle est représentée formellement par l'inférence située tout au sommet de l'arbre de preuve π_0 par laquelle nous concluons que $Sim(ABC, AHC)$ à partir de l'hypothèse que ABC est un triangle rectangle divisé en deux triangles AHC et AHB par la hauteur. Afin de faire cette inférence, nous utilisons, en tant que règle, un théorème sur

une propriété des triangles rectangles selon lequel tout triangle rectangle, lorsqu'il est divisé par une hauteur, est semblable aux deux triangles produits¹⁰. L'inférence suivante que l'on retrouve dans l'arbre de preuve π_0 nous permet, à l'aide de la règle $\rightarrow E$ (voir la figure 2.1, section 2.2) de dériver la conclusion $AC^2 = CH \cdot BC$ de la précédente

conclusion $Sim(ABC, AHC)$ ajoutée à l'implication

$Sim(ABC, AHC) \rightarrow AC^2 = CH \cdot BC$. Un argument symétrique concernant les triangles ABC et AHB , par lequel on obtient l'égalité $AB^2 = BH \cdot BC$, est formalisé de manière semblable dans l'arbre de preuve π_1 . La formalisation de la preuve se poursuit par la combinaison des deux égalités $AC^2 = CH \cdot BC$ et $AB^2 = BH \cdot BC$ en l'égalité $AC^2 + AB^2 = CH \cdot BC + BH \cdot BC$ obtenue par l'introduction du symbole $+$. Nous reformulons ensuite $AC^2 + AB^2 = (CH + BH)(BC)$ en $AC^2 + AB^2 = BC^2$. Enfin, la toute dernière étape consiste à désactiver l'hypothèse à l'aide de la règle $\rightarrow I$ (voir la figure 2.1, section 2.2).

L'arbre de preuve formalisant la preuve informelle dont nous sommes partis est bel et bien conforme à nos *desiderata* : les hypothèses non désactivées expriment des propriétés qui sont liées à celle que l'on retrouve dans la conclusion de l'arbre de preuve et qui déterminent cette propriété. De surcroît, la généralisation présente dans la preuve informelle — correspondant au théorème selon lequel tout triangle rectangle, lorsqu'il est divisé en deux par une hauteur, est semblable aux deux triangles produits — apparaît dans notre arbre de preuve en tant que règle.

Déterminons à présent si cette preuve informelle du théorème de Pythagore est réellement une explication. À cette fin, observons les deux énoncés ci-dessous, qui sont les hypothèses non désactivées de notre arbre de preuve :

- i. si AHC et ABC sont des triangles semblables, alors $AC^2 = CH \cdot BC$,
- ii. si AHB et ABC sont des triangles semblables, alors $AB^2 = BH \cdot BC$,

et l'énoncé suivant, qui en est la conclusion :

- iii. si ABC est un triangle rectangle divisé par une hauteur en deux triangles AHC et AHB , alors $AC^2 + AB^2 = BC^2$.

Pour conclure que cette preuve informelle est en effet explicative, il nous faut établir que

10. C'est-à-dire que tout triangle peut être divisé en deux triangles par une hauteur, mais que seuls les triangles rectangles sont tels que le triangle original est semblable aux deux triangles résultant de la division.

les énoncés i. et ii. sont moins complexes que l'énoncé iii. Appliquons donc notre méthode et commençons, tout d'abord, par séparer les énoncés i.-iii. en leurs éléments constitutifs, ce qui nous donne :

- i. si-alors, AHC , ABC , et, triangle semblable, AC^2 , =, $CH \cdot BC$,
- ii. si-alors, AHB , ABC , et, triangle semblable, AB^2 , =, $BH \cdot BC$,
- iii. si-alors, ABC , triangle rectangle divisé en deux triangles par une hauteur, AHC , AHB , et, AC^2 , +, AB^2 , =, BC^2 .

Puis éliminons les éléments communs :

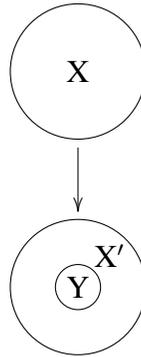
- i. ~~si-alors~~, AHC , ABC , et, triangle semblable, AC^2 , =, $CH \cdot BC$,
- ii. ~~si-alors~~, AHB , ABC et, triangle semblable, AB^2 , =, $BH \cdot BC$,
- iii. ~~si-alors~~, ABC , triangle rectangle divisé en deux triangles par une hauteur, AHC , AHB , et AC^2 , +, AB^2 , =, BC^2 .

Enfin, analysons les éléments restants des énoncés i.-iii.

(3mA) La conclusion, correspondant à l'énoncé iii., contient BC^2 , qui équivaut à $BC \cdot BC$. Les hypothèses non désactivées, correspondant aux énoncés i. et ii., contiennent $CH \cdot BC$ et $BH \cdot BC$. Comme BC équivaut par définition à CH plus BH , nous pouvons considérer que BC^2 contient à la fois $CH \cdot BC$ et $BH \cdot BC$.

(3mB) L'énoncé iii. contient le concept de *triangle rectangle divisé en deux triangles par une hauteur* et les énoncés i. et ii. contiennent, eux, le concept de *triangle semblable*. Puisque aucune définition n'apparaît explicitement dans l'arbre de preuve pour lier ces deux concepts, il semblerait que nous n'ayons aucune raison de penser que le premier concept est lié aux deux seconds, ni qu'il est plus complexe qu'eux. Toutefois, une propriété des triangles rectangles intervient dans la preuve : il s'agit de la propriété qu'a tout triangle rectangle d'être semblable aux deux triangles résultant de la division du triangle original par une hauteur. Elle implique que l'ensemble contenant tous les triangles rectangles divisés en deux triangles par une hauteur est un sous-ensemble propre de l'ensemble contenant les triangles semblables, lequel est trivialement généré à partir de l'ensemble de tous les triangles semblables (voir la figure 3.5). Cela montre bien que le concept de *triangle rectangle divisé en deux triangles par une hauteur* est plus complexe que le concept de *triangle sem-*

FIGURE 3.5 – X et X' sont les ensembles contenant les triangles semblables, alors que Y est l'ensemble contenant tous les triangles rectangles divisés en deux triangles par une hauteur.



blable en raison de sa plus grande spécificité au niveau extensionnel. Nous passons, de fait, de triangles semblables à des triangles semblables tels que, lorsqu'ils sont joints, ils produisent un autre triangle semblable à chacun d'entre eux, à savoir les triangles rectangles.

(3mC) La conclusion contient +, un élément nouveau et qui n'est pas lié à un autre élément restant des hypothèses.

Comme la conclusion de l'arbre de preuve formalisant la preuve du théorème de Pythagore contient soit des éléments qui apparaissent déjà dans les hypothèses non désactivées, soit un nouvel élément, soit des éléments plus complexes que ceux qu'on retrouve dans les hypothèses (et ce, par définition, ou en raison des objets auxquels ils renvoient), nous pouvons établir que la conclusion est conceptuellement plus complexe que les hypothèses non désactivées et, donc, que la preuve du théorème de Pythagore ci-dessus est véritablement explicative.

Notre méthode confirme ce qui a déjà été remarqué dans [Steiner \(1973\)](#) et [Mancosu \(2001\)](#). Elle a, cependant, l'avantage d'ajouter des éléments à l'analyse proposée dans ces études. En effet, une telle méthode permet, au moyen de la formalisation logique d'une preuve explicative, de révéler la structure de l'explication, de déterminer le rôle qu'y jouent les généralisations et, enfin et surtout, d'identifier dans l'explication les *raisons* et

la *conclusion* qui leur est liée, ces deux items étant représentés, respectivement, par les feuilles (non désactivées) et la racine de l'arbre de preuve. Notre analyse de la preuve explicative du théorème de Pythagore nous fournit une démonstration rigoureuse de la façon dont l'explication fonctionne : le fait que le carré de l'hypoténuse est, dans les triangles rectangles, égal à la somme du carré de chaque côté se fonde ainsi — en passant par le fait que tout triangle rectangle est semblable aux triangles produits par sa division en deux par une hauteur — sur certains ratios entre des triangles semblables. Notons en outre que cette structure en arbre nous permet d'identifier l'*explanans* et l'*explanandum* de la preuve explicative. Le premier correspond aux raisons (ici, l'existence de certains ratios entre des triangles semblables) auxquelles s'ajoute la généralisation utilisée (ici, le fait que tout triangle rectangle est semblable aux triangles produits par sa division en deux par une hauteur), et le second correspond à la conclusion (ici, le fait que le carré de l'hypoténuse est, dans les triangles rectangles, égal à la somme du carré de chaque côté). Enfin, l'augmentation de la complexité conceptuelle des raisons à la conclusion confirme la directionnalité de la preuve de l'*explanans* à l'*explanandum*.

Comparons rapidement l'analyse de l'explication du théorème de Pythagore ci-dessus avec celles qu'en donnent Pincock et l'approche contrefactuelle (à ce sujet, voir les sections précédentes 1.3.3 et 1.3.4), qui étudient la preuve à partir de la relation de fondation et de la relation *explanans-explanandum*, respectivement¹¹. Tout comme le nôtre, le modèle proposé par Pincock établit que la preuve du théorème de Pythagore s'appuie sur une relation de fondation. Toutefois, les raisons et conclusion identifiées par Pincock ne sont pas liées à l'*explanans* et à l'*explanandum* de l'explication. En vérité, non seulement Pincock ne mentionne pas ces composantes, mais la conclusion de la relation de fondation identifiée par son approche — que ABC est un triangle rectangle — ne correspond en outre pas au théorème de Pythagore, et donc à l'*explanandum* attendu. Il est, en conséquence, difficile de déterminer clairement, selon cette approche, en quoi consiste la relation entre fondation et preuve explicative.

L'approche contrefactuelle, elle, porte précisément sur la relation entre *explanans* et *explanandum* dans notre preuve explicative. L'*explanans* qui y est identifié diffère cependant de celui qui ressort de notre analyse. D'après le modèle contrefactuel, ce qui explique le fait que, dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la

11. Nous fournirons dans la section 3.6 une comparaison exhaustive entre d'autres approches et la nôtre.

somme des carrés de chaque côté est la similitude entre le triangle rectangle original et les deux triangles obtenus lors de sa division par une hauteur. Notre analyse est plus subtile : elle attribue bien un rôle au fait que les triangles qui résultent de la division d'un triangle rectangle par une hauteur sont semblables, mais elle montre également qu'un tel fait ne constitue pas la *totalité* de l'*explanans*, et n'en est plutôt qu'une *partie*. De plus, cet *explanans* inclut la raison de l'explication, c'est-à-dire un ratio entre triangles semblables.

Notons que, dans notre modèle, l'identification de l'*explanans* résulte entièrement de l'utilisation d'une solide structure logique et de notre notion stricte de complexité conceptuelle. De même, et peut-être de manière connexe, nous sommes aisément en mesure de rendre compte de l'asymétrie de l'explication. La situation est nettement différente du côté de l'approche contrefactuelle, où la désignation d'un fait plutôt que d'un autre comme *explanans* se fait sur la base d'une simple intuition — ce qui, dans le cas des mathématiques, peut être, pour employer un euphémisme, fort délicat. Cela n'est peut-être pas étranger aux problèmes que pose à cette approche l'asymétrie de l'explication, dont nous avons traités dans la section [1.3.4](#).

Il résulte de notre analyse du théorème de Pythagore une structure analogue à celle qui ressort de la preuve explicative du théorème du quadrangle. Dans ce théorème, une propriété des quadrangles se fonde sur une propriété des triangles via un théorème qui relie quadrangles et triangles, spécifiquement via les objets auxquels renvoient ces concepts. De la même façon, dans le théorème de Pythagore, une propriété des triangles rectangles divisés en deux triangles par une hauteur s'explique par une propriété des triangles semblables via un théorème reliant les triangles semblables aux triangles rectangles divisés en deux triangles par une hauteur, et spécifiquement via les objets auxquels ces concepts renvoient.

Comme nous l'avons mentionné dans la section [3.3](#), notre approche des explications mathématiques implique une asymétrie entre le travail requis pour déterminer qu'une preuve est explicative et celui requis pour montrer qu'elle ne l'est pas. Cela est dû au fait que dans le premier cas, il nous faut identifier une formalisation possédant les caractéristiques recherchées, alors que, dans le second cas, il nous faut identifier des arguments montrant qu'une telle formalisation n'existe pas. Reste qu'il existe certaines preuves dont il est assez simple de montrer qu'elles n'ont aucun pouvoir explicatif, puisqu'elles utilisent, pour arriver à leur conclusion, des éléments qui sont de toute

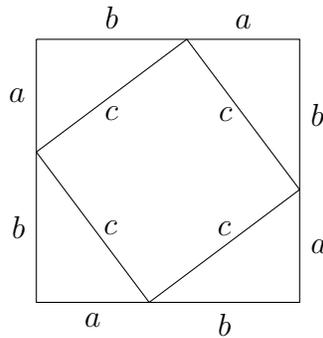


FIGURE 3.6 – Arrangement de quatre triangles rectangles à l’intérieur d’un carré.

évidence plus complexe que les éléments de la conclusion elle-même. Tel est le cas, par exemple, de la preuve suivante, et bien connue, du théorème de Pythagore (que nous avons déjà présentée à la section 1.3).

Preuve. Prenons un triangle rectangle ABC où l’hypoténuse BC est appelée c et les autres côtés AB et AC sont appelés a et b , respectivement. Prenons ensuite le carré q aux côtés $a + b$ construit sur quatre exemplaires du triangle ABC comme dans la figure 1.1

ci-dessus. L’aire du carré intérieur q' aux côtés c est, de toute évidence, égale à la différence entre l’aire du carré q et les aires des quatre exemplaires de triangle rectangle, c’est-à-dire que $Aire(q') = Aire(q) - 4(Aire(ABC))$. Puisque nous savons que l’aire de

q' est c^2 , que l’aire de q est $(a + b)^2$ et que l’aire de tout triangle t est $\frac{ab}{2}$, nous obtenons

$c^2 = (a + b)^2 - 4(\frac{ab}{2})$. En simplifiant le produit et la fraction, nous obtenons l’égalité $c^2 = (a + b)^2 - 2ab$, puis, en reformulant le carré de la somme, nous obtenons l’égalité

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab - 2ab, \text{ dont le résultat est l'égalité recherchée : } c^2 = a^2 + b^2, \\ \text{c'est-à-dire } BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Analysons maintenant cette preuve en commençant par les propriétés utilisées pour arriver à la conclusion. Dans la preuve du théorème du quadrangle, nous utilisons une propriété des triangles ; dans notre autre preuve du théorème de Pythagore, nous avons eu recours à une propriété des triangles semblables ; et dans cette preuve-ci, nous employons une propriété des carrés. En fait, nous employons très spécifiquement un carré construit à partir de quatre copies d’un même triangle rectangle disposées d’une certaine façon. Mais cela révèle clairement que c’est, ici, l’hypothèse dont la preuve dépend qui est

conceptuellement plus complexe que la conclusion. Cette hypothèse, en effet, contient le concept de carré qui, à son tour, contient le concept de triangle rectangle, et seul ce dernier se retrouve dans la conclusion. C'est dire que, puisque cette preuve s'appuie sur des ressources englobant et dépassant celles qui apparaissent dans la conclusion, sa complexité conceptuelle ne peut que diminuer lorsque l'on passe des hypothèses à la conclusion — et cela peu importe la manière dont nous la formalisons. Elle ne peut donc faire partie des preuves explicatives.

3.4.3 Le produit de la somme des carrés

Nous nous pencherons dans cette section sur un théorème exploré en détail dans [Avidad \(2006\)](#). Il s'agit du théorème portant sur le produit de la somme des carrés dont il existe au moins trois preuves distinctes, l'une d'elles étant fournie par Euler dans son *Algebra* ([Euler \(1770\)](#)) et par Cauchy dans son *Cours d'analyse* ([Cauchy, 1882](#), VII xI). Nous présenterons ici cette dernière preuve, puisque, comme le note Avidad, c'est celle qui, des trois preuves principales, est la plus remarquable en raison

des façons dont l'information et les étapes inférentielles sont intégrées dans les définitions et lemmes de la preuve¹² ([Avidad, 2006](#), p. 163).

À l'aide de notre méthode, nous montrerons que cette preuve est en réalité une preuve explicative.

Théorème du produit de la somme des carrés. Si x et y peuvent tous deux être exprimés comme la somme de deux carrés entiers, alors xy peut l'être également.

Preuve explicative. Supposons que $x = a^2 + b^2$ et que $y = c^2 + d^2$. Alors¹³

$$\begin{aligned} xy &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\ &= (a + bi)(a - bi)(c + di)(c - di) \\ &= (a + bi)(c + di)(a - bi)(c - di) \\ &= ((ac - bd) + (ad + bc)i)((ac - bd) - (ad + bc)i) \\ &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \end{aligned}$$

qui est la somme de deux carrés.

12. Traduction de l'anglais par J. Allard.

13. Dans la preuve qui suit, i est un nombre imaginaire.

Cette preuve montre que, si x et y peuvent tous deux être exprimés comme la somme de deux carrés entiers, alors xy peut l'être également. Pour y parvenir, elle utilise l'équivalence connue entre nombres complexes et carrés entiers, et c'est de là d'où semble provenir son pouvoir explicatif.

Tentons de la reformuler à l'aide d'un arbre de preuve. Nous cherchons à obtenir un arbre de preuve où la généralisation apparaissant dans la preuve, c'est-à-dire l'équivalence entre nombres complexes et carrés entiers, sert de règle. Il nous faut, de plus, identifier un arbre de preuve où les hypothèses non désactivées expriment des propriétés liées à la propriété exprimée dans le théorème à démontrer. Afin de présenter un tel arbre de preuve de la façon la plus limpide possible, nous utiliserons la formule ϕ renvoyant à l'implication suivante :

$$x = (a + bi)(a - bi) \wedge y = (c + di)(c - di) \rightarrow xy = (a + bi)(a - bi)(c + di)(c - di)$$

Nous obtenons ensuite :

$$\frac{\frac{\frac{x = a^2 + b^2 \wedge y = c^2 + d^2}{x = a^2 + b^2}}{x = (a + bi)(a - bi)}}{\frac{x = (a + bi)(a - bi) \wedge y = (c + di)(c - di)}{xy = (a + bi)(a - bi)(c + di)(c - di)}} \quad \phi$$

$$\frac{\frac{\frac{x = a^2 + b^2 \wedge y = c^2 + d^2}{y = c^2 + d^2}}{y = (c + di)(c - di)}}{\frac{xy = (a + bi)(c + di)(a - bi)(c - di)}{xy = ((ac + bd) + (ad - bc)i)((ac - bd) - (ad + bc)i)}} \quad \phi$$

$$\frac{\frac{xy = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2}{x = a^2 + b^2 \wedge y = c^2 + d^2 \rightarrow xy = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2}}{\quad}$$

Comme à l'habitude, commentons la structure de l'arbre de preuve en partant de ses branches les plus hautes. Celles-ci fonctionnent de la même manière : elles commencent toutes les deux par poser les nombres x et y . Ensuite, par élimination de la conjonction (voir la figure 2.1, section 2.2), la branche gauche se concentre sur la nombre x et la droite, sur le nombre y . Puis, en appliquant à ces nombres, en tant que règle, l'équivalence entre la somme de carrés entiers et le produit de nombres complexes, le nombre x devient $(a + bi)(a - bi)$ et le nombre y devient $(c + di)(c - di)$. L'introduction de la conjonction (voir la figure 2.1, section 2.2) nous permet alors de réunir x et y à nouveau. Une fois cela

fait, l'arbre de preuve applique la règle $\rightarrow E$ (voir la figure 2.1, section 2.2) à la conjonction et à l'implication ϕ pour arriver à $xy = (a + bi)(a - bi)(c + di)(c - di)$. Nous reformulons ensuite ce produit afin d'obtenir un nombre complexe équivalent à la somme des deux nombres carrés $(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$. Enfin, nous désactivons la prémisse $x = a^2 + b^2 \wedge y = c^2 + d^2$ à l'aide de la règle $\rightarrow I$ (voir la figure 2.1, section 2.2) pour parvenir à la conclusion recherchée.

Nous utilisons et systématisons, dans cet arbre de preuve, les éléments-clés de la preuve citée : la racine de l'arbre de preuve correspond au théorème que nous voulions démontrer, les règles sont tirées de la généralisation présente dans la preuve originale, et nous pouvons identifier l'hypothèse non désactivée qui consiste en la formule ϕ . Pour nous assurer que cette preuve est bel et bien une explication, comparons l'hypothèse non désactivée de l'arbre de preuve et sa conclusion, c'est-à-dire, respectivement, les formules suivantes :

- i. $x = (a + bi)(a - bi) \wedge y = (c + di)(c - di) \rightarrow xy = (a + bi)(a - bi)(c + di)(c - di)$
- ii. $x = a^2 + b^2 \wedge y = c^2 + d^2 \rightarrow xy = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$

Comme nous cherchons à comparer ces deux formules sur un plan conceptuel, reformulons-les en tant qu'énoncés, ce qui nous donne¹⁴ :

- i. Si x et y peuvent tous deux être exprimés comme le produit de deux nombres complexes, alors xy peut l'être également.
- ii. Si x et y peuvent tous deux être exprimés comme la somme de deux carrés entiers, alors xy peut l'être également.

Ramenons maintenant ces énoncés à leurs éléments de base :

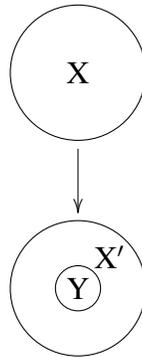
- i. Si-alors, x , et, y , produit de deux nombres complexes, pouvoir alors, xy ,
- ii. Si-alors, x , et, y , somme de deux carrés entiers, pouvoir alors, xy .

Éliminons ensuite les éléments présents dans les deux énoncés :

- i. ~~Si-alors, x , et, y , produit de deux nombres complexes, pouvoir alors, xy ,~~
- ii. ~~Si-alors, x , et, y , somme de deux carrés entiers, pouvoir alors, xy .~~

14. Précisons qu'il est possible de comparer ces formules en tant que formules, mais l'analyse serait alors plus laborieuse.

FIGURE 3.7 – X et X' sont les ensembles contenant tous les produits de deux nombres complexes, alors que Y est l'ensemble contenant toutes les sommes de deux carrés entiers.



Finalement, analysons les éléments restants des énoncés i. et ii., ce qui nous permet de déterminer que :

(3mB) L'énoncé ii., qui correspond à la racine de l'arbre de preuve, contient le concept de la *somme de deux carrés entiers*, alors que l'énoncé i., qui correspond à la feuille (non désactivée) de l'arbre, contient le concept du *produit de deux nombres complexes*. Aucune définition explicite ne relie ces deux concepts dans l'arbre de preuve. Il semble donc qu'il n'y ait aucune raison de penser que le premier concept a un lien avec le second, ni qu'il est plus complexe que lui. Toutefois, il existe une propriété de la somme de deux carrés entiers — que toute somme de deux carrés entiers est équivalente au produit de deux nombres complexes — qui nous informe que l'ensemble contenant toutes les sommes de deux carrés entiers est un sous-ensemble propre de l'ensemble contenant tous les produits de deux nombres complexes, lequel est trivialement généré à partir de l'ensemble de tous les produits de deux nombres complexes (voir la figure 3.7). Le concept de la *somme de deux carrés entiers* est ainsi plus complexe que le concept du *produit de deux nombres complexes* car il est plus spécifique que ce dernier : nous pouvons aller de l'ensemble contenant les produits de deux nombres complexes à un sous-ensemble particulier qui est l'ensemble contenant les sommes de deux carrés entiers.

Puisque l'hypothèse non désactivée de notre arbre de preuve contient des éléments qui sont ou bien identiques à ceux apparaissant dans la conclusion de l'arbre, ou bien moins complexes au niveau de l'extension que ceux apparaissant dans la conclusion, nous pouvons dire que cette hypothèse non désactivée est conceptuellement moins complexe que la conclusion.

Remarquons que cette preuve concernant la somme de deux carrés entiers est couverte par Avigad, mais qu'elle est autrement absente des études sur les explications mathématiques.

Il s'agit pourtant d'une preuve à la fois simple, intéressante et révélatrice : elle explique une propriété z à l'aide d'une autre propriété z' . Bien que plusieurs aspects de cette preuve soient présentés dans Avigad (2006), l'auteur n'utilise jamais le terme « explicative » pour la caractériser. Il précise cependant qu'il fait preuve de scepticisme face à cette terminologie :

Dans les publications en philosophie, de telles preuves sont parfois appelées « explicatives », et la notion d'explication en mathématiques est l'objet d'un domaine d'études encore petit, mais grandissant [...]. Pour deux raisons, je n'utiliserai ici ce terme qu'avec précaution : premièrement, le terme n'est pas d'usage fréquent en mathématiques ; et, deuxièmement, ce n'est certainement pas le seul terme employé pour émettre des jugements positifs sur des preuves. Ici, je préférerais demeurer agnostique concernant la question de l'existence d'un seul concept englobant tous ces jugements positifs, ou de l'existence d'une constellation de notions connexes¹⁵ (Avigad, 2006, p. 152).

Nous nous positionnons ici sur cette question de la façon suivante. Nous disposons, dans cet ouvrage, d'un sens clair du terme « explication » : pour nous, une preuve explicative est une preuve qui montre les raisons ou les fondements de la vérité du théorème qu'elle prouve. Et dans cette section, nous avons montré que la preuve portant sur la somme de deux carrés entiers étudiée par Avigad est explicative selon cette acception du terme. Plus spécialement, notre analyse a révélé que la preuve montre la raison pour laquelle il est le cas que, lorsque nous avons deux nombres tels que chacun d'entre eux peut être exprimé comme la somme de deux entiers, leur produit le peut également. Cette raison est que, lorsque nous avons deux nombres qui peuvent tous deux être exprimés comme le produit de deux nombres complexes, leur produit le peut également.

15. Traduction de l'anglais pas J. Allard.

Il nous faut enfin souligner que la preuve traitée dans cette section fonctionne certes de manière similaire à la preuve du théorème du quadrangle et à celle du théorème de Pythagore analysées plus haut (voir, par exemple, la section 3.4.1). Mais son cas précis diffère sans doute légèrement des deux précédentes preuves en cela que l'idée que le « produit de nombres complexes » soit une notion conceptuellement moins complexe que celle de la « somme de carrés entiers » peut sembler étrange ou contre-intuitive. Profitons donc de cette occasion pour faire une précision rapide sur un point crucial (que nous développerons dans la conclusion).

Lorsque nous maintenons que les nombres complexes sont conceptuellement moins complexes que les carrés entiers, nous faisons cette affirmation dans un contexte bien spécifique, c'est-à-dire celui généré par la preuve présentée. La preuve en question est explicative justement parce que, afin de clarifier une propriété des carrés entiers, elle les situe dans un cadre plus général, celui des nombres complexes, ce qui montre alors que les premiers ne sont rien d'autre qu'un cas particulier des seconds. De fait, nous supposons que les explications en général, et les explications mathématiques en particulier, sont caractérisées par ce fait : on y clarifie un phénomène en le plaçant dans un contexte nouveau où il devient un aspect d'un phénomène plus général. Notre idée de complexité conceptuelle ne fait qu'établir cette idée toute naturelle sur des bases plus solides.

3.4.4 Le théorème de Desargues

Nous consacrons cette section à l'analyse du théorème de Desargues dont les preuves sont étudiées en profondeur dans [Lange \(2015b, 2017\)](#). Il existe en fait deux preuves du théorème de Desargues : une en géométrie euclidienne et l'autre en géométrie projective. Formuler une preuve explicative du théorème semble devenir possible si on passe de la géométrie euclidienne à la géométrie projective. Nous allons donc nous contenter ici d'illustrer cette preuve du théorème de Desargues et tenter de rendre compte de sa force explicative. Le lecteur pourra consulter ([Lange, 2017](#), Ch. 9) pour prendre connaissance de la preuve du même théorème en géométrie euclidienne.

Cependant, avant d'entrer dans l'analyse détaillée du théorème de Desargues, prenons le temps de faire une remarque qui se révélera particulièrement importante pour la suite.

Dans les exemples que nous avons examinés jusqu'à maintenant (voir les sections [3.4.1-3.4.3](#)), nous avons pu identifier la raison et la conclusion de l'explication que nous

études. Tous ces exemples contenaient donc des explications soutenues par une relation entre raison et conclusion¹⁶. Comme Bolzano le remarqua dans (Bolzano, 2014, §206-210), il y a plusieurs types de relation de fondation. Une des distinctions les plus significatives consiste en la différence entre fondements *immédiat* et *médiat*. Une relation de fondation est immédiate lorsque, comme le terme le suggère, elle est directe, c'est-à-dire qu'aucune autre relation de fondation n'intervient hormis la relation principale. À l'opposé, nous obtenons une relation de fondation médiate lorsque plusieurs relations immédiates y sont impliquées¹⁷.

Afin de mieux illustrer cette distinction, prenons en exemple le théorème du quadrangle couvert dans la section 3.1. La preuve explicative du théorème du quadrangle, d'après notre analyse, est soutenue par une relation de fondation entre la vérité

(i) la somme des angles de ABC est de 180° ,

et la vérité

(ii) la somme des angles de $ABCD$ est de $180+180^\circ$.

Suivant la distinction établie par Bolzano, (i) est une raison *immédiate* de (ii) puisqu'il ne semble pas y avoir d'autre relation de fondation entre les deux. Mais advenant qu'un mathématicien curieux tente de formuler une preuve explicative de (i) et que, au moyen d'une telle preuve, il parvienne à identifier la raison de (i), une telle raison serait alors un fondement immédiat de (i) et un fondement médiate de (ii). Notons que notre mathématicien pourrait alors présenter la preuve explicative de (i) et celle de (ii) comme deux preuves distinctes —mais qu'il pourrait aussi bien les présenter comme une unique preuve où *il nous appartiendrait* de distinguer les niveaux de fondation. Ce serait donc à nous, dans ce dernier cas, de distinguer les parties de la preuve qui contiennent une augmentation de la complexité conceptuelle des hypothèses non désactivées à la conclusion. On trouvera une étude de la structure des niveaux de fondation possibles dans une preuve dans Poggiolesi (2020); Genco (2021). Nous nous appuyerons d'ailleurs sur les conclusions de ces travaux dans ce qui suit.

16. Pour une discussion plus exhaustive de la relation précise existant entre relation de fondation et explication en philosophie, voir par exemple Maurin (2019); Poggiolesi et Genco (2022).

17. Une relation de fondation médiate — en termes plus techniques — correspond à la clôture transitive de la relation de fondation immédiate.

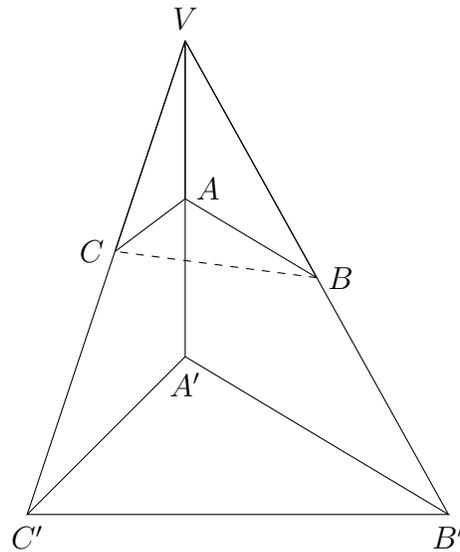


FIGURE 3.8 – Deux triangles ABC et $A'B'C'$ perspectifs par rapport à V dans un espace tridimensionnel.

Jusqu'à présent, les explications analysées étaient soutenues par une relation de fondation *immédiate*. La preuve explicative du théorème de Desargues rompt avec cette tendance, car elle est composée de deux niveaux de fondation. En conséquence, l'analyse en sera légèrement plus compliquée que celle des preuves précédentes. Nous procéderons donc un niveau à la fois.

Tout d'abord, nous donnons ici le théorème de Desargues, ainsi que la preuve que les mathématiciens jugent en général explicative.

Théorème de Desargues. Dans un espace en géométrie projective, posons deux triangles ABC et $A'B'C'$ se trouvant sur les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' , respectivement. S'il existe un point V tel que A se trouve sur le segment $A'V$, B se trouve sur le segment $B'V$, et C se trouve sur le segment $C'V$, comme nous l'avons illustré dans la figure 3.8, alors

- les droites contenant les segments AB et $A'B'$ se rencontrent au point p_1 ,
- les droites contenant les segments BC et $B'C'$ se rencontrent au point p_2 ,
- les droites contenant les segments CA et $C'A'$ se rencontrent au point p_3 ,

et les points p_1, p_2 , et p_3 se trouvent tous sur la droite d .

Preuve explicative. Puisqu'il existe un point V tel que A se trouve sur le segment $A'V$, B se trouve sur le segment $B'V$, et C se trouve sur le segment $C'V$, nous pouvons en inférer qu'il existe un plan \mathcal{P}'' où se trouvent les droites contenant les segments AB et $A'B'$. De plus, en vertu de l'axiome de géométrie projective (voir par exemple [Casse \(2016\)](#)) selon lequel deux droites se trouvant sur le même plan se rencontrent toujours en un point p , nous obtenons que les droites contenant les segments AB et $A'B'$ se rencontrent en un point p_1 . Comme les triangles ABC et $A'B'C'$ se trouvent toutefois sur les plans distincts \mathcal{P} et \mathcal{P}' , les droites contenant les deux segments AB and $A'B'$ se trouvent elles aussi, respectivement, sur ces plans distincts. En géométrie projective, si deux droites se trouvent sur des plans distincts, alors, si elles se rencontrent en un point, ce point appartient à la droite qui forme l'intersection des deux plans. Donc, le point d'intersection p_1 où se rencontrent les droites contenant les segments AB et $A'B'$ se trouve à l'intersection des deux plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' qui constitue une droite.

En suivant un raisonnement similaire, nous pouvons conclure que le point d'intersection de BC et $B'C'$, ainsi que celui de CA et $C'A'$ se trouvent eux aussi sur la droite résultant de l'intersection des deux plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' .

Passons à présent à la formalisation de cette preuve, pour laquelle nous adoptons la conventions suivante. Par $d(XY)$, nous faisons référence à la droite contenant le segment XY , par $Tr(XYZ)$, au triangle XYZ , et par $\mathcal{P}(X, Y, Z)$, au plan qui contient les points X, Y et Z . Établissons en outre la convention suivante : la lettre p sera utilisée seulement en référence aux points, la lettre d , seulement en référence aux droites, et la lettre \mathcal{P} , seulement en référence aux plans, cela s'appliquant également lorsque des indices sont ajoutés à p, l et \mathcal{P} . Enfin, nous utilisons ϕ pour exprimer l'énoncé suivant :

$$Tr(ABC) \wedge Tr(A'B'C') \wedge ABC \subseteq \mathcal{P} \wedge A'B'C' \subseteq \mathcal{P}' \wedge \mathcal{P} \neq \mathcal{P}'$$

ψ , pour l'énoncé suivant :

$$\exists p = V, \text{ tel que } A \in A'V \wedge B \in B'V \wedge C \in C'V$$

et χ_1, χ_2 et χ_3 , pour les trois énoncés suivants :

$$\begin{aligned}\chi_1 &: d(AB) \cap d(A'B') = p_1 \wedge (p_1 \in (\mathcal{P} \cap \mathcal{P}')) \wedge (\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = d), \\ \chi_2 &: d(BC) \cap d(B'C') = p_2 \wedge (p_2 \in (\mathcal{P} \cap \mathcal{P}')) \wedge (\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = d), \\ \chi_3 &: d(AC) \cap d(A'C') = p_3 \wedge (p_3 \in (\mathcal{P} \cap \mathcal{P}')) \wedge (\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = d).\end{aligned}$$

L'arbre de preuve formalisant la dernière partie de la preuve informelle est alors le suivant :

$$\frac{\frac{\frac{\phi \quad \phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi_1)}{\psi \rightarrow \chi_1}}{\chi_1} \quad \frac{\frac{\phi \quad \phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi_2)}{\psi \rightarrow \chi_2}}{\chi_1} \quad \frac{\frac{\phi \quad \phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi_3)}{\psi \rightarrow \chi_3}}{\chi_3}}{\frac{\chi_1 \wedge \chi_2 \quad \chi_3}{\chi_1 \wedge \chi_2 \wedge \chi_3}}}{\frac{\psi \rightarrow \chi_1 \wedge \chi_2 \wedge \chi_3}{\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi_1 \wedge \chi_2 \wedge \chi_3)}}$$

Repassons maintenant la structure de cet arbre de preuve¹⁸. En partant de l'extrémité supérieure de la branche gauche, nous dérivons la formule $\psi \rightarrow \chi_1$ par application de la règle $\rightarrow E$ (voir la figure 2.1, section 2.2) aux formules ϕ et $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi_1)$. Nous appliquons ensuite cette même règle aux formules $\psi \rightarrow \chi_1$ et ψ , ce qui nous donne χ_1 . Par une double application similaire de la règle $\rightarrow E$, nous obtenons les deux formules χ_2 et χ_3 . Nous les réunissons en appliquant ensuite à deux reprises la règle $\wedge I$ (voir la figure 2.1, section 2.2). Nous arrivons ainsi à la conclusion en appliquant à deux reprises la règle $\rightarrow I$ (voir la figure 2.1, section 2.2)) et en désactivant les hypothèses ϕ et ψ lorsqu'elles apparaissent.

Cet arbre de preuve a la même structure que les arbres que nous avons étudiés dans les sections 3.4.1 - 3.4.3. Il identifie en outre des hypothèses non désactivées exprimant des propriétés qui sont de toute évidence reliées à la propriété exprimée dans la racine de l'arbre de preuve, soit le théorème à démontrer. Enfin, il utilise comme règle la généralisation apparaissant dans la preuve informelle. Dans ce cas-ci, la généralisation porte uniquement sur la conjonction. Cela ne devrait occasionner aucune surprise — bien au contraire, puisque la thèse principale du théorème repose sur la *conjonction* de trois couples de droites qui se rencontrent toutes sur une même droite. Que la règle de conjonction soit l'ingrédient-clé de l'arbre de preuve va donc de soi.

18. Il faut noter que c'est le premier arbre de preuve vu dans cet ouvrage où les règles utilisées sont uniquement des règles logiques.

Étudions à présent de plus près les trois hypothèses non désactivées de cet arbre de preuve, qui sont les formules suivantes :

- i. $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi_1)$,
- ii. $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi_2)$,
- iii. $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi_3)$,

ainsi que la conclusion :

- iv. $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi_1 \wedge \chi_2 \wedge \chi_3)$.

Pour déterminer si la partie de la preuve informelle correspondant à l'arbre de preuve ci-dessus est une explication, nous devons vérifier que i.-iii. sont en effet conceptuellement moins complexes que iv. Cela peut être fait, dans le cas présent, avec une certaine facilité, en raison de la forme logique de i.-iv. (nul besoin d'appliquer notre méthode en détail !)¹⁹. Ainsi, au premier abord, on pourra remarquer que tous les éléments de i.-iii. sont contenus dans la conclusion, laquelle contient, de surcroît, le symbole \wedge qui est nouveau et ne peut être lié à quelque élément de i.-iii. que ce soit (voir (3mC)). Nous sommes donc en mesure d'affirmer que i.-iii. sont conceptuellement moins complexes que iv., et que, conséquemment, la partie de la preuve informelle qui est formalisée par l'arbre de preuve est bien explicative.

Suivant notre approche, i.-iii. sont les raisons de iv., c'est-à-dire du théorème de Desargues, et, plus spécifiquement, elles en sont les raisons immédiates. D'une part, cette analyse correspond à nos intuitions en la matière. Lorsque l'on se demande pourquoi il est bien le cas que, pour deux triangles possédant certaines propriétés, les trois paires de droites contenant leurs côtés correspondants se rencontrent toutes en des points situés sur la même droite d , on répondra sans doute spontanément que c'est en raison du fait que, pour deux triangles possédant certaines propriétés, chaque paire de droites contenant leurs côtés correspondants se rencontre en un point situé sur la droite d . D'autre part, cette analyse est également conforme à l'étude logique des fondements des formules de la forme $A \rightarrow (C \wedge D \wedge E)$ (entre autres) que nous avons mené dans [Poggiolesi \(2021a,b\)](#), cette forme étant analogue à celle du théorème de Desargues. Ces études ont révélé que les raisons immédiates des formules de ce type sont les formules $A \rightarrow C$, $A \rightarrow D$,

19. Le lecteur consciencieux qui désire appliquer la méthode de manière exhaustive pourra aisément le faire par lui-même

$A \rightarrow E$. C'est donc dire que notre analyse a des bases bien établies à la fois au niveau intuitif et au niveau formel.

Jusqu'ici tout va bien. Mais la preuve explicative du théorème de Desargues ne s'arrête pas aux énoncés i.-iii. Elle se poursuit et fournit la raison pour chacun d'entre eux. Comme nous l'avons expliqué plus haut, de telles raisons seront alors considérées comme les raisons médiatees du théorème de Desargues. Nous poursuivons donc notre analyse de la preuve pour tenter de saisir ces raisons. Pour ne pas allonger le texte à outrance, par contre, nous ne couvrirons que la suite de la preuve pour l'énoncé i. (les preuves de ii. et iii. en étant très proches, le lecteur pourra les reconstituer par lui-même).

Dans ce qui suit, nous utilisons α_1 pour exprimer :

$$d(AB) \subseteq \mathcal{P} \wedge d(A'B') \subseteq \mathcal{P}' \wedge \mathcal{P} \neq \mathcal{P}' \rightarrow d(AB) \cap d(A'B') \subseteq \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$$

α_2 pour exprimer :

$$d(AB) \wedge d(A'B') \subseteq \mathcal{P}(VA'B') \rightarrow d(AB) \cap d(A'B') = p_1$$

et α_3 pour exprimer :

$$\mathcal{P} \neq \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = d$$

Nous obtenons ainsi :

$$\frac{\frac{\frac{\pi_1}{d(AB) \cap d(A'B') = p_1} \quad \frac{\pi_2}{d(AB) \cap (A'B') \subseteq \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'}}{(d(AB) \cap d(A'B') = p_1) \wedge (p_1 \in (\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'))} \quad \frac{\phi}{\mathcal{P} \neq \mathcal{P}'}}{\frac{\alpha_3}{\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = d}} \quad \alpha_3$$

$$\frac{\frac{\psi \rightarrow ((d(AB) \cap d(A'B') = p_1) \wedge (p_1 \in (\mathcal{P} \cap \mathcal{P}')) \wedge (\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = d))}{\phi \rightarrow (\psi \rightarrow ((d(AB) \cap d(A'B') = p_1) \wedge (p_1 \in (\mathcal{P} \cap \mathcal{P}')) \wedge (\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = d)))}}$$

où π_1 correspond à l'arbre de preuve suivant :

$$\frac{\not\phi}{\frac{d(AB) \wedge d(A'B') \subseteq \mathcal{P}(VA'B')}{d(AB) \cap d(A'B') = p_1}} \quad \alpha_2$$

et où π_2 correspond à l'arbre de preuve suivant :

$$\frac{\frac{\phi}{d(AB) \subseteq \mathcal{P} \wedge d(A'B') \subseteq \mathcal{P}' \wedge \mathcal{P} \neq \mathcal{P}'} \quad \alpha_1}{d(AB) \cap d(A'B') \subseteq \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'}$$

Analysons cet arbre en commençant par les deux hypothèses ϕ et ψ . De l'hypothèse ψ , nous inférons que les droites contenant les segments AB et $A'B'$ se trouvent sur un même plan. De cela et de α_2 , nous dérivons, à l'aide de la règle $\rightarrow E$ (voir la figure 2.1, section 2.2) que (\star) les droites contenant les segments AB et $A'B'$ se rencontrent en un point p_1 .

De l'hypothèse ϕ , nous inférons, dans le sous-arbre de preuve π_2 , que les droites contenant les segments AB et $A'B'$ se trouvent sur les plans distincts \mathcal{P} et \mathcal{P}' , respectivement. À partir de cette dernière inférence et de α_1 , nous obtenons que (\star') tout point d'intersection des droites AB et $A'B'$ appartient à l'intersection des plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' .

Enfin, sur la base de ϕ dans l'arbre principal, nous dérivons que les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont distincts ; de cela et de α_3 , nous dérivons que (\star'') l'intersection de \mathcal{P} et \mathcal{P}' est une droite d . De (\star) , (\star') et (\star'') , nous dérivons que les droites contenant les segments AB et $A'B'$ se rencontrent en un point p_1 et que ce point se trouve à l'intersection des plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' , qui est une droite. Nous désactivons ensuite les deux hypothèses ϕ et ψ en appliquant à deux reprises la règle $\rightarrow I$ (voir la figure 2.1, section 2.2), ce qui nous donne la formule

$$\phi \rightarrow (\psi \rightarrow ((d(AB) \cap d(A'B') = p_1) \wedge (p_1 \in (\mathcal{P} \cap \mathcal{P}')) \wedge (\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = d))).$$

L'arbre de preuve ci-dessus satisfait à toutes nos exigences. Il identifie des hypothèses désactivées qui expriment des propriétés liées à la propriété exprimée par la racine de l'arbre, soit la formule que nous étudions. De plus, cet arbre utilise les généralisations appropriées en tant que règles.

Pour déterminer si cette deuxième partie de la preuve est véritablement explicative, examinons les hypothèses non désactivées, à savoir, dans notre arbre, α_1 , α_2 et α_3 , qui correspondent aux trois formules suivantes :

- v. $d(AB) \subseteq \mathcal{P} \wedge d(A'B') \subseteq \mathcal{P}' \wedge \mathcal{P} \neq \mathcal{P}' \rightarrow d(AB) \cap d(A'B') \subseteq \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$,
- vi. $d(AB) \wedge d(A'B') \subseteq \mathcal{P}(V A'B') \rightarrow d(AB) \cap d(A'B') = p_1$,
- vii. $\mathcal{P} \neq \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = d$,

ainsi que la conclusion, qui, dans l'arbre de preuve précédent, tenait lieu d'hypothèse non désactivée, c'est-à-dire :

i. $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow ((d(AB) \cap d(A'B') = p_1) \wedge (p_1 \in (\mathcal{P} \cap \mathcal{P}')) \wedge (\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = d)))$.

En séparant ces énoncés en leurs éléments constitutifs, nous avons :

v. $d(AB), \subseteq, \mathcal{P}, \wedge, d(A'B'), \subseteq, \mathcal{P}', \wedge, \mathcal{P}, \neq, \mathcal{P}', \rightarrow, d(AB), \cap, d(A'B'), \subseteq, \mathcal{P}, \cap, \mathcal{P}'$,

vi. $d(AB), \wedge, d(A'B'), \subseteq, \mathcal{P}(VA'B'), \rightarrow, d(AB), \cap, d(A'B'), =, p_1$,

vii. $\mathcal{P}, \neq, \mathcal{P}', \rightarrow, \mathcal{P}, \cap, \mathcal{P}', =, d$,

i. $Tr(ABC), \wedge, Tr(A'B'C'), \wedge, ABC, \subseteq, \mathcal{P}, \wedge, A'B'C, \subseteq, \mathcal{P}', \wedge, \mathcal{P}, \neq, \mathcal{P}, \rightarrow, \exists p, =, V(A \in A'V \wedge B, \in B'V \wedge C \in C'V), \rightarrow, d(AB), \cap, d(A'B') =, p_1, \wedge, p_1 \in, \mathcal{P}, \cap, \mathcal{P}', \wedge, \mathcal{P}, \cap, \mathcal{P}', =, d$.

Effaçons les éléments communs aux hypothèses et à la conclusion :

v. $d(AB), \subseteq, \mathcal{P}, \neq, d(A'B'), \subseteq, \mathcal{P}', \neq, \mathcal{P}, \neq, \mathcal{P}', \rightarrow, d(AB), \cap, d(A'B'), \subseteq, \mathcal{P}, \cap, \mathcal{P}'$,

vi. $d(AB), \neq, d(A'B'), \subseteq, \mathcal{P}(VA'B'), \rightarrow, d(AB), \cap, d(A'B'), =, p_1$,

vii. $\mathcal{P}, \neq, \mathcal{P}', \rightarrow, \mathcal{P}, \cap, \mathcal{P}', =, d$,

i. $Tr(ABC), \neq, Tr(A'B'C'), \neq, ABC, \subseteq, \mathcal{P}, \neq, A'B'C, \subseteq, \mathcal{P}', \neq, \mathcal{P}, \neq, \mathcal{P}, \rightarrow, \exists p, =, V(A \in A'V \wedge B, \in B'V \wedge C \in C'V), \rightarrow, d(AB), \cap, d(A'B'), =, p_1, \neq, p_1 \in, \mathcal{P}, \cap, \mathcal{P}', \neq, \mathcal{P}, \cap, \mathcal{P}', =, d$.

Et finalement, nous pouvons analyser les éléments restants en v., vi. et i., ce qui nous donne :

(3mA) L'énoncé i., qui correspond à la racine de l'arbre de preuve, contient l'élément $\exists p = V(A \in A'V \wedge B, \in B'V \wedge C \in C'V)$, alors que l'énoncé vi., qui correspond à l'une des feuilles (non désactivées) de l'arbre, contient l'élément $\mathcal{P}(VA'B')$. Une définition est employée dans l'arbre de preuve qui relie explicitement ces deux éléments. Pour un point donné et deux droites $A'V$ et $B'V$ qui passent par ce point, nous avons en effet identifié le plan \mathcal{P} qui contient les points A', B' et V . L'élément présent dans vi. est donc subsumé sous les éléments présents en i.

(3mC) L'énoncé i. contient, quant à lui, plusieurs nouveaux éléments, comme $Tr(ABC)$ et $Tr(A'B'C')$, qui ne se retrouvent pas dans v. et vi., et qui ne peuvent pas non plus être reliés à des éléments restants de v. et vi.

Puisque la conclusion contient des éléments qui soit se retrouvent dans les hypothèses non désactivées, soit contiennent à leur tour par définition des éléments des hypothèses non désactivées, ou soit sont entièrement nouveaux, nous pouvons affirmer que la conclusion de cet arbre de preuve est conceptuellement plus complexe que ses hypothèses non désactivées. Notre méthode permet donc d'établir que même cette seconde partie de la preuve du théorème de Desargues est explicative.

Nous avons ainsi terminé notre analyse de la preuve explicative du théorème de Desargues. Non seulement nous avons confirmé que cette preuve est explicative, mais nous avons également montré qu'elle est composée de deux parties dont chacune est explicative. Dans la première partie, en abordant la preuve du bas vers le haut, nous expliquons pourquoi tout couple de triangles, situés sur des plans différents et tels qu'il existe un point V où se rencontrent toutes les droites passant par leurs sommets, est tel que les trois couples de droites contenant en tant que segments les côtés des deux triangles se rencontrent en trois points distincts qui se trouvent tous sur la même droite. La raison en est que le point où chaque couple de droites parallèles contenant en tant que segments les côtés des triangles en question se trouve sur la droite d .

Par la suite, la preuve continue en expliquant pourquoi chaque point d'intersection de chaque couple de droites contenant en tant que segments les côtés des triangles se trouve sur la droite d . La raison consiste en ces deux faits : parce que chaque couple de droites est tel qu'il appartient à deux plans distincts, mais également parce que chaque couple de droites appartient au même plan. À partir du premier de ces faits et des ressources de la géométrie projective²⁰, nous savons que nos deux droites se rencontrent toujours : car, en géométrie projective, deux droites situées sur le même plan se croisent toujours. Et en combinant à nouveau les ressources fournies par la géométrie projective, cette fois-ci avec le second fait, nous obtenons que le point d'intersection de nos deux droites se trouvera sur une troisième droite d . Car, en géométrie projective, lorsque deux plans se rencontrent en une droite d et que deux droites appartenant à ces plans distincts se rencontrent, leur point d'intersection se trouve sur d .

20. Nous n'aurions pas pu formuler ces mêmes raisons en géométrie bidimensionnelle, et, de fait, la preuve du théorème de Desargues formulé pour une géométrie à deux dimensions n'est pas considérée comme explicative.

3.5 Au-delà des preuves mathématiques internes

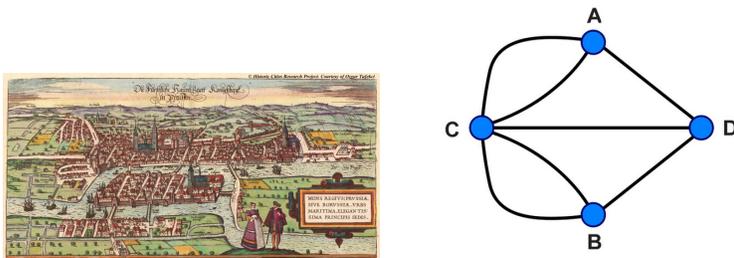
En introduisant la notion d'explication mathématique au tout début de cet ouvrage (section 1.1), nous avons spécifié qu'il existe deux grandes catégories d'explications mathématiques : les explications mathématiques internes, que l'on produit en mathématiques, et les explications mathématiques externes, qui font simplement usage des mathématiques. Nous nous sommes concentrés jusqu'à maintenant sur le premier type d'explications, et nous avons, dans les pages précédentes, développé un modèle s'appuyant sur les notions de preuve et de complexité conceptuelle qui rend compte de telles preuves. Mais nous croyons également que notre approche peut s'appliquer avantageusement aux explications mathématiques externes. Nous faisons donc, dans cette section, un premier pas dans cette direction en montrant la façon dont notre modèle s'applique sans difficultés à l'une des explications mathématiques externes les mieux connues de la recherche contemporaine, soit l'explication de l'impossibilité d'identifier un certain parcours ne passant qu'une seule fois par tous les ponts de Königsberg. Comme il nous est habituel, nous présentons d'abord le théorème et son explication pour, ensuite, y appliquer notre approche.

En 1736, la ville de Königsberg comptait quatre parties reliées entre elles par sept ponts.

La ville était composée, nommément, de deux îles — que nous appellerons A et B — deux rives — que nous appellerons C et D — et sept ponts, ces éléments ayant ensemble les relations suivantes : A était relié à cinq ponts, et B , C et D étaient chacun reliés à trois ponts. Personne qui, à l'époque, tenta de traverser tous les ponts une seule fois ne put réussir. Un fait si curieux et si surprenant demandait une explication : le mathématicien Euler en proposa une.

L'explication de Euler commence par construire une représentation de la ville de Königsberg sous la forme d'un graphe composé de noeuds et d'arcs (reproduit à la figure 3.9). Dans ce graphe, les noeuds renvoient aux parties A à D de la ville et les arcs, aux ponts. À partir de cette représentation théorique de la ville en un graphe et de la définition d'un *parcours eulérien* comme un parcours dans un graphe G qui inclut une seule fois chaque arc, Euler reformule l'*explanandum* de manière interrogative : pourquoi personne n'a-t-il trouvé de parcours eulérien pour ce graphe ? Sa réponse se développe comme suit. Premièrement, Euler établit ce qu'on appelle le *théorème de Euler* selon lequel il y a un parcours eulérien dans un graphe G si, et seulement si, G est un graphe eulérien. Euler

FIGURE 3.9 – De la ville de Königsberg au graphe représentant la ville de Königsberg.



établit ensuite qu'un graphe G est eulérien si, et seulement si, (i) tous les noeuds dans G sont reliés à un nombre pair d'arcs, ou (ii) précisément deux noeuds de G (dont un est notre noeud de départ) sont reliés à un nombre impair d'arcs.

Deuxièmement, Euler remarqua que le graphe représentant la ville de Königsberg n'est pas un graphe eulérien, puisque aucune des deux conditions (i) et (ii) n'y est respectée.

Aucune partie de la ville (correspondant aux noeuds) n'est reliée à un nombre pair de ponts (correspondant aux arcs), ce qui enfreint la condition (i); et plus de deux parties de la ville sont reliées à un nombre impair de ponts, ce qui enfreint la condition (ii). Euler put donc conclure que, en vertu du théorème de Euler, il n'y a aucun parcours eulérien dans la ville de Königsberg telle qu'elle était en 1736.

Nous résumons ci-dessous l'explication de Euler :

Théorème de Euler. Il n'existe pas de parcours eulérien dans le graphe représentant la ville de Königsberg.

Explication mathématique (externe). Il n'existe aucun parcours eulérien dans le graphe représentant la ville de Königsberg, parce que ce graphe n'est pas un graphe eulérien, puisqu'il ne satisfait pas à l'une des conditions (i) et (ii) de la définition d'un graphe eulérien. Selon le théorème de Euler, il existe un parcours eulérien dans un graphe si, et seulement si, le graphe en question est eulérien.

À présent, nous présentons ce qui nous paraît être une formalisation adéquate de l'explication de l'inexistence d'un parcours de Euler dans le graphe représentant la ville de Königsberg.

La ville de K ne remplit pas la condition (i) La ville de K ne remplit pas la condition (ii)

La ville de K n' est pas un graphe eulerien
Il n' existe aucun parcours eulerien dans la ville de K

Étudions la structure de cet arbre de preuve. Partant, au sommet de l'arbre, du fait que le graphe représentant la ville de Königsberg ne remplit ni la condition (i), ni la condition (ii) de la définition d'un graphe eulérien, nous inférons que le graphe représentant la ville de Königsberg n'est pas un graphe eulérien à l'aide de la définition d'un graphe eulérien utilisée comme règle. Une fois cela fait, nous utilisons le théorème de Euler pour arriver à la conclusion qu'il n'existe aucun parcours eulérien dans le graphe représentant la ville de Königsberg.

Même s'il est plutôt simple, cet arbre de preuve est le premier que nous couvrons dans cet ouvrage où la racine n'est pas une implication. Suivant l'analyse que nous avons menée dans Poggiolesi (2016, 2020), cela nous fait penser que cet arbre devrait être évalué d'une manière différente des arbres précédents. Nous suggérons spécifiquement qu'il est possible de le décomposer en deux sous-arbres de preuve qui formalisent chacun une partie explicative distincte de cette preuve. L'arbre de preuve ci-dessus, que nous représenterons par \star , peut ainsi se décomposer, produisant les deux sous-arbres de preuve ci-dessous. Nous avons d'abord le sous-arbre de preuve \star' :

La ville de K ne remplit pas la condition (i) La ville de K ne remplit pas la condition (ii)

La ville de K n' est pas un graphe eulerien

Et le sous-arbre \star'' :

La ville de K n' est pas un graphe eulerien
Il n' existe aucun parcours eulerien dans la ville de K

Analysons nos deux sous-arbres \star' et \star'' et vérifions si, dans chacun d'entre eux, il existe bien une augmentation de la complexité conceptuelle des hypothèses non désactivées à la conclusion. Si c'est le cas, nous aurons obtenu une analyse finement détaillée de la

preuve de Euler. Cette analyse aura en effet été en mesure de nous fournir, pour reprendre la terminologie présentée à la section précédente, non seulement les raisons immédiates du théorème que nous étudions — ici, l’hypothèse non désactivée de \star'' —, mais aussi ses raisons médiatees — ici, les hypothèses non désactivées de \star' .

Nous commençons par le sous-arbre de preuve \star' . Ses hypothèses non désactivées sont les énoncés suivants :

- i. la ville de K ne remplit pas la condition (i),
- ii. la ville de K ne remplit pas la condition (ii),

alors que sa conclusion est :

- iii. la ville de K n’est pas un graphe eulérien.

Nous divisons ensuite nos items i.-iii. en leurs éléments de base :

- i. ville, K, ne pas, condition (i),
- ii. ville, K, ne pas, condition (ii),
- iii. ville, K, ne pas, graphe eulérien.

En éliminant les éléments communs aux items i.-ii et iii., nous obtenons :

- i. ~~ville, K, ne pas~~, condition (i),
- ii. ~~ville, K, ne pas~~, condition (ii),
- iii. ~~ville, K, ne pas~~, graphe eulérien.

Nous analysons enfin les éléments restants pour déterminer que :

(3mA) Correspondant à la conclusion de l’arbre de preuve, l’énoncé iii. contient le concept de *graphe eulérien*, tandis que les énoncés i. et ii., correspondant aux hypothèses non désactivées, contiennent les concepts de *condition (i)* et de *condition (ii)*. Une définition relie explicitement ces concepts dans l’arbre de preuve : un graphe eulérien est un graphe qui remplit la condition (i) ou la condition (ii). Le concept de graphe eulérien contient donc les concepts « condition (i) » et « condition (ii) », ce qui fait en sorte qu’il se révèle plus complexe qu’eux deux.

Nous pouvons conclure que les énoncés i. et ii. sont conceptuellement moins complexes que l’énoncé iii., puisque i. et ii. contiennent soit les mêmes éléments que l’on retrouve en iii., soit des éléments qui sont, à leur tour, contenus dans des éléments de iii. Le sous-arbre

de preuve \star' formalise donc une étape explicative de la preuve informelle. Cette étape a comme raison le fait que le graphe représentant la ville de Königsberg ne satisfait pas à la condition (i), ni à la condition (ii), et comme conclusion le fait que le graphe représentant la ville de Königsberg n'est pas un graphe eulérien.

Nous passons maintenant à l'analyse du sous-arbre de preuve \star'' . L'hypothèse non désactivée de cet arbre de preuve est la racine du sous-arbre \star' , soit l'énoncé :

iii. La ville de K n'est pas un graphe eulérien,

et sa conclusion est l'énoncé :

iv. La ville de K n'a pas de parcours eulérien.

Afin d'examiner la complexité conceptuelle de iii. à iv., nous réduisons d'abord ces énoncés à leurs éléments constitutifs, ce qui nous donne :

iii. ville, K, ne pas, graphe eulérien,

et

iv. ville, K, ne pas, parcours eulérien.

Nous éliminons les éléments communs pour obtenir :

iii. ville, K, ne pas, graphe eulérien,

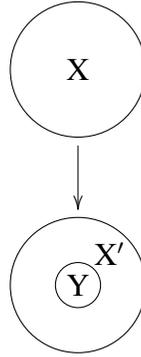
et

iv. ville, K, ne pas, parcours eulérien.

Enfin, nous analysons les éléments de l'hypothèse non désactivée et de la conclusion restants, et nous déterminons que :

(3mB) L'énoncé iv., c'est-à-dire la racine de notre sous-arbre de preuve, contient le concept de *parcours eulérien*, et l'énoncé iii., qui consiste en la feuille (non désactivée) de ce sous-arbre, contient le concept de *graphe eulérien*. Comme aucune définition ne relie explicitement ces deux concepts dans le sous-arbre, il ne semble pas y avoir de raison de penser que le premier concept est relié au second ou plus complexe que lui. Toutefois, un théorème, ici le théorème de Euler, nous dit qu'il y a un parcours eulérien dans un graphe si, et seulement si, ce graphe est eulérien.

FIGURE 3.10 – X est l'ensemble contenant tous les graphes eulériens, X' l'ensemble contenant tous les parcours faits dans un ordre donné dans un graphe eulérien et Y est l'ensemble contenant tous les parcours eulériens.



Puisqu'un parcours dans un graphe n'est rien d'autre qu'une mise en séquence (précise) des noeuds dans ce graphe, l'ensemble contenant tous les parcours dans des graphes eulériens est généré par l'ensemble contenant tous les graphes eulériens. L'ensemble contenant tous les parcours eulériens, lui, est un sous-ensemble propre de l'ensemble de tous les parcours, et le théorème de Euler nous confirme que ce sous-ensemble n'est pas vide (voir la figure 3.10). Donc, l'ensemble contenant tous les graphes eulériens génère l'ensemble contenant tous les parcours dans ces graphes, dont l'ensemble contenant tous les parcours eulériens est un sous-ensemble non vide. Cela nous permet d'affirmer que le concept de *parcours eulérien* est plus complexe que le concept de *graphe eulérien* parce qu'il renvoie à un groupe d'objets plus spécifique que ne le fait le premier concept.

Puisque l'énoncé iv. — la conclusion — contient soit les mêmes éléments que l'énoncé iii. — l'hypothèse non désactivée —, soit des éléments qui sont à leur tour moins complexes que des éléments de iv., nous pouvons affirmer qu'il existe une augmentation de la complexité conceptuelle de l'hypothèse non désactivée à la conclusion dans l'arbre de preuve ci-dessus. Ainsi, le sous-arbre de preuve \star'' formalise bel et bien une autre étape explicative de la preuve informelle : une étape qui a comme raison le fait que la ville de Königsberg n'est pas un graphe eulérien, et comme conclusion le fait que la ville de

Königsberg n'a pas de parcours eulérien.

C'est ainsi que se termine notre analyse de l'explication donnée par Euler de l'absence d'un parcours eulérien dans la ville de Königsberg. À l'aide d'une formalisation en arbre, nous avons montré que la preuve informelle est composée de deux étapes explicatives.

Pour le dire autrement, le fait qu'il n'y a pas de parcours eulérien dans la ville de Königsberg s'explique par le fait que le graphe représentant la ville de Königsberg n'est pas un graphe eulérien. Ce dernier fait s'explique à son tour par deux autres faits, à savoir que le graphe représentant la ville de Königsberg ne remplit ni la condition (i), ni la condition (ii). Nous retrouvons une augmentation de la complexité conceptuelle dans les deux étapes explicatives constituant cette preuve : nous passons d'abord de la négation de deux éléments disjoints à la négation de la disjonction elle-même ; puis nous passons du concept de graphe à celui de parcours, qui n'est rien d'autre qu'un graphe avec un certain ordre.

3.6 Dernières

remarques

Ce chapitre nous a servi à présenter une nouvelle méthode pour rendre compte du phénomène de l'explication en mathématiques. Cette méthode est basée sur deux composantes : la formalisation de preuves mathématiques informelles sous la forme d'arbres de preuve, d'une part, et la vérification que les hypothèses non désactivées d'un arbre de preuve sont conceptuellement moins complexes que sa conclusion, d'autre part.

Nous allons maintenant, en guise de conclusion, comparer notre modèle à d'autres approches de l'explication scientifique afin d'en faire mieux ressortir les traits saillants.

Tout d'abord, comparons notre approche de l'explication mathématique aux autres approches contemporaines que nous avons décrites au chapitre 1. L'approche développée par Steiner (dont nous avons traitée à la section 1.3.1), où la notion de propriété caractéristique constitue le signe distinctif d'une preuve explicative, a certains aspects en commun avec notre modèle : ce dernier accorde, lui aussi, une importance singulière aux généralisations apparaissant dans les preuves mathématiques informelles, tout en insistant sur leur rôle dans les arbres de preuve et dans la notion de complexité conceptuelle. Même s'il est difficile d'identifier avec précision la relation entre propriétés caractéristiques et généralisations, il n'en demeure pas moins que les deux notions sont étroitement liées. Dans le cas de la preuve explicative du théorème de Pythagore, par exemple, les deux sont

identiques dans la mesure où elles correspondent toutes deux à la propriété des triangles rectangles d'être semblables aux triangles produits par leur division par une hauteur. Le modèle proposé par Steiner ne laisse toutefois pas la place à une analyse rigoureuse de ces propriétés caractéristiques. Dans notre modèle, au contraire, nous pouvons affirmer que les généralisations en question sont les théorèmes et définitions apparaissant dans une preuve et qu'elles jouent un rôle bien identifiable à la fois dans les arbres de preuve, où elles prennent la forme de règles, et dans l'idée d'augmentation de la complexité conceptuelle, où elles déterminent les liens existant entre les éléments à comparer. L'approche des explications mathématiques proposée par Lange (vue à la section 1.3.2), elle, semble, au premier abord, avoir peu en commun avec la nôtre. Lange souligne pourtant deux aspects des explications mathématiques qui sont des éléments-clés de notre propre modèle. Le premier de ces aspects porte sur la manière, qui se révèle cruciale, dont on formule l'*explanandum* :

Le pouvoir explicatif d'une preuve dépend du théorème exprimé. [...] De surcroît, comme je le défendrai également, la manière dont on exprime un théorème peut attirer l'attention sur une caractéristique particulière du théorème, où la prééminence de cette caractéristique aide à déterminer ce qu'une preuve doit accomplir afin d'expliquer pourquoi le théorème s'applique²¹ (Lange, 2017, p. 232).

Notre modèle est doté d'une grande sensibilité à la formulation de l'*explanandum*, mais tout autant à celle de l'*explanans* (et, bien particulièrement, à celle des raisons qui le constituent), puisque la comparaison qu'il nous faut effectuer entre ces deux éléments pour déterminer s'il y a augmentation de la complexité conceptuelle repose dans une large mesure sur ces formulations. Une telle sensibilité a, cependant, l'inconvénient qu'il nous faut accorder une attention spéciale à cet aspect lors de l'identification des hypothèses non désactivées et de la construction de l'arbre de preuve. Bien entendu, elle présente en contre-partie l'avantage certain de produire une analyse de la structure de l'explication qui est remarquablement précise.

Les travaux de Lange mentionnent un autre aspect, qui se retrouve également dans notre modèle. Il s'agit du contexte dans lequel les explications mathématiques sont formulées :

21. Traduction de l'anglais par J. Allard.

Une preuve explique en révélant l'origine précise, dans le problème, de la caractéristique prééminente du résultat²² (Lange, 2017, p. 233).

Lange ajoute :

Les rôles que jouent le problème et la prééminence dans mon approche ne rendent pas les explications mathématiques nettement différentes de toutes les explications scientifiques²³ (Lange, 2017, p. 312).

Bien que nous n'en avons fait mention que rapidement dans les pages qui précèdent, le contexte ou le cadre des explications mathématiques est fondamental dans notre approche. Concentrons-nous ici sur la notion de complexité conceptuelle, une des composantes de notre modèle, pour mieux illustrer notre propos. Car cette notion, telle que nous l'appliquons, ne fournit pas un étalon de mesure objectif ou absolu — au contraire, elle est relative à l'arbre de preuve particulier que nous étudions. Pour pouvoir vérifier s'il existe une augmentation de la complexité conceptuelle des hypothèses non désactivées à la conclusion, on doit en effet s'appuyer sur les théorèmes et définitions qui sont utilisés en tant que règles dans l'arbre de preuve étudié. Ce sont précisément les théorèmes et définitions qui apparaissent dans l'arbre de preuve, comme nous l'avons clarifié plus haut, qui établissent le lien de complexité conceptuelle entre les éléments des hypothèses non désactivées et ceux de la conclusion. Mais il nous faut rappeler que de tels théorèmes et définitions présupposent, en toile de fond, une théorie à laquelle ils appartiennent. L'augmentation de la complexité conceptuelle propre à notre approche s'ancre donc, ultimement, dans une théorie plus large à l'intérieur de laquelle se situe l'explication mathématique qui nous intéresse.

L'exemple du théorème du cercle (abordé dans la section 3.4.1) nous aidera ici à clarifier davantage cette nuance essentielle. Dans ce théorème, nous tenons le concept de cercle comme plus complexe que le concept de point. Nous pouvons établir une telle relation entre ces deux concepts en raison d'une définition présente dans l'explication mathématique du théorème du cercle selon laquelle un cercle est un ensemble de points, ce qui implique que le concept de cercle contient le concept de point, mais que l'inverse n'est pas le cas. Il est bien sûr possible de concevoir une autre théorie géométrique qui contiendrait une définition établissant un lien différent entre les points et les cercles.

22. Traduction de l'anglais par J. Allard.

23. Traduction de l'anglais par J. Allard.

Comme ces concepts auraient alors des relations différentes, les explications mathématiques où ils apparaîtraient auraient, bien évidemment, une directionnalité tout autre.

L'approche de Pincock (illustrée à la section 1.3.3) partage nombre de traits caractéristiques avec notre propre modèle. Nos deux approches conçoivent les explications mathématiques comme étant soutenues par une relation ontologique et toutes deux identifient cette relation ontologique comme une relation de fondation où certaines vérités sont les raisons pour lesquelles une autre vérité est vraie. La façon dont la relation de fondation est liée aux preuves explicatives n'est toutefois pas des plus évidentes dans l'approche de Pincock, alors que, d'après notre modèle, elle est solidement établie : les raisons font partie de l'*explanans* des preuves explicatives et la conclusion correspond à leur *explanandum*. En outre, Pincock tente d'employer la notion d'abstraction pour mieux saisir la relation de fondation. De notre côté, nous utilisons plutôt à cette fin la notion de complexité conceptuelle. Précisons d'abord que nous ne toucherons pas ici à l'investigation d'une relation possible entre abstraction et complexité conceptuelle. Les deux notions renvoient sans doute à des éléments distincts des explications mathématiques, mais une étude détaillée de leur relation dépasse nos présents objectifs. Rappelons ensuite que Pincock ne décrit la notion d'abstraction qu'en ces termes :

Le cas qui est sans doute le plus clair de ce que j'ai [...] en tête est la relation type-jeton (Pincock, 2015b, p. 12).

et ne l'analyse pas davantage. À l'opposé, nous avons ici consacré espace et énergie à décrire une méthode par laquelle on peut comparer les énoncés apparaissant à divers endroits d'un arbre de preuve selon la complexité conceptuelle.

Enfin, l'approche contrefactuelle (présentée à la section 1.3.4) est singulière dans la mesure où elle se distingue des autres approches contemporaines dont nous avons traitées jusqu'ici. Cette approche met davantage l'accent sur la logique, d'une part, puisqu'elle a recours aux logiques paracohérentes et aux contrefactuels eux-mêmes. Il lui faut également identifier l'*explanans* et l'*explanandum* de toute explication qu'elle prend pour objet, d'autre part, afin de déterminer quel contrefactuel évaluer. Sur ces deux points, le modèle contrefactuel et le nôtre sont similaires. Insistons cependant sur les avantages de notre modèle par rapport au modèle contrefactuel. Premièrement, les outils logiques qu'utilise l'approche contrefactuelle — soit la logique paracohérente et les contrefactuels

— n’ont aucune relation avec les caractéristiques couramment associées aux explications mathématiques. Dans notre modèle, c’est tout le contraire, puisque les outils logiques que nous employons — la structure des arbres de preuve — ont un lien direct avec les explications mathématiques telles que nous les entendons : les explications mathématiques ne sont pas autre chose que des preuves mathématiques et, en tant que telles, s’analysent très bien à l’aide des instruments développés en logique pour formaliser les preuves. Deuxièmement, notons que, grâce à la structure en arbre, nous sommes à même d’identifier avec précision l’*explanans* et l’*explanandum* de l’explication mathématique que nous étudions : ces derniers correspondent aux hypothèses non désactivées et aux règles, et à la conclusion d’un arbre de preuve, respectivement. Mais on ne trouve dans l’approche contrefactuelle aucune méthodologie semblable pour identifier l’*explanans* et l’*explanandum* d’une explication mathématique. Il reste donc ardu de les cerner, surtout lorsqu’il est question de preuves mathématiques plus longues et plus détaillées où, comme nous l’avons vu, des raisons médiate émergent d’elles-mêmes en tant qu’étapes intermédiaires. Et troisièmement, quand il semble problématique pour l’approche contrefactuelle de rendre compte de l’asymétrie ou directionnalité des explications mathématiques (comme dans le cas du théorème de Pythagore, couvert à la section 1.3.4), cela n’a jusqu’à maintenant posé aucune difficulté à notre approche, puisque, dans chaque explication étudiée dans cet ouvrage, nous avons pu déterminer clairement une augmentation de la complexité conceptuelle des hypothèses non désactivées à la conclusion.

Au terme de cette comparaison de notre modèle avec d’autres approches contemporaines marquantes des explications mathématiques, nous avons souligné l’avantage que représentent l’utilisation d’arbre de preuves et la recherche d’une augmentation de la complexité conceptuelle des prémisses à la conclusion. Nous ferons, avant de conclure cette section, une dernière comparaison entre notre modèle et une approche reconnue, celle du modèle déductif-nomologique (modèle DN) présentée dans [Hempel \(1942, 1965\)](#) pour rendre compte des explications scientifiques (nous avons brièvement traité de ce modèle au début de la section 1.1). Même si cette approche n’a pas été développée pour les explications mathématiques, nous croyons qu’il sera tout particulièrement révélateur de la comparer à la nôtre, puisqu’elle met l’accent sur la structure déductive des explications (et, par là-même, sur leur structure en tant que preuves).

D'après le modèle DN, pour que l'*explanans* réussisse à expliquer l'*explanandum* dans une explication scientifique, deux conditions doivent minimalement être remplies. La première est que l'*explanandum* doit suivre logiquement de l'*explanans* : c'est là l'aspect *déductif* du modèle. La seconde condition est que l'*explanans* doit contenir au moins une généralisation et que cela doit être une prémisse nécessaire à la dérivation, au sens où la dérivation de l'*explanandum* ne serait plus valide si cette prémisse disparaissait : c'est l'aspect *nomologique* du modèle. Les explications ont donc, selon le modèle DN, la structure suivante :

$$\frac{\text{si } S \text{ et } K_1, \dots K_n, \text{ alors } T}{S \text{ et } K_1, \dots K_n} \\ \hline T$$

où S et $K_1, \dots K_n$ sont l'*explanans*, T est l'*explanandum*, $K_1, \dots K_n$ sont les généralisations qui font partie de l'*explanans* et où T est inféré à partir de S et $K_1, \dots K_n$. Remarquons que notre approche conserve les éléments principaux du modèle DN — soit la distinction entre *explanans* et *explanandum*, et les aspects déductif et nomologique (repris en tant que preuves et généralisations, respectivement) — mais qu'elle modifie la manière dont ces éléments sont structurés. Ce changement a plus spécialement pour résultat deux différences découlant l'une de l'autre. La première concerne le rôle tenu par les généralisations dans les explications. Nous avons proposé que les généralisations employées dans une déduction ne se retrouvent pas dans ses prémisses, comme l'affirme le modèle DN, mais qu'elles sont plutôt ce qui relie et justifie le lien entre les prémisses d'une déduction et sa conclusion, soit, dans l'exemple ci-dessus, entre S et T . Pour localiser précisément un tel lien, la structure déductive doit devenir plus flexible et plus subtile, ce que la structure en arbre de preuve permet. Par exemple, si la relation entre S et T est *médiate*, c'est-à-dire si on retrouve plusieurs généralisations dans un *explanans* et que chacune d'entre elles a pour tâche de relier certaines raisons (ou causes, dans le domaine scientifique) à leur conclusion (ou effet), alors, d'après le modèle DN, la structure déductive ne peut compter qu'une seule étape. Elle doit plutôt prendre la forme d'un véritable *arbre de preuve* où les raisons ou causes sont les feuilles de l'arbre, la

conclusion ou effet, sa racine, et les généralisations, les règles qui justifient le lien entre les prémisses et les conclusions des différents noeuds de la preuve. On pourrait illustrer cela de la manière suivante²⁴ :

$$\begin{array}{c} \frac{S_1}{S_2} K_1 \\ \vdots \\ \frac{S_n}{T} K_n \end{array}$$

Comme nous l’avons déjà exposé, la première étape de notre analyse consiste à étudier les explications mathématiques comme des arbres de preuve où la conclusion peut-être dérivée de raisons et où les généralisations sont les règles qui autorisent cette dérivation²⁵.

La deuxième étape de l’analyse consiste ensuite à vérifier que les raisons sont conceptuellement moins complexe que la conclusion.

Ce changement de structure tout simple, combiné à l’introduction de l’augmentation de la complexité conceptuelle, permet à notre modèle — c’est la deuxième différence — d’éviter les problèmes concernant l’asymétrie qui affligent notoirement le modèle DN.

Montrons cela à l’aide de l’exemple de l’étape explicative allant du fait que (i) le graphe représentant la ville de Königsberg n’est pas un graphe eulérien, au fait que (ii) il n’y a pas de parcours eulérien dans le graphe représentant la ville de Königsberg (voir la section 3.5 précédente). Ici, (i) est la raison de notre explication, et (ii) sa conclusion, alors que la généralisation liant les deux n’est autre que le théorème de Euler selon lequel il y a un parcours eulérien dans un graphe si, et seulement si, ce graphe est un graphe eulérien. Le modèle DN confirmerait que cette explication en est bel et bien une, parce qu’elle possède une structure déductive telle que :

24. Il serait aussi possible de l’illustrer à l’aide d’un arbre de preuve à plusieurs branches.

25. À ce sujet, voir [Poggiolesi et Genco \(2022\)](#).

Si c'est le cas que le graphe représentant la ville de Königsberg n'est pas un graphe eulérien et si le théorème de Euler s'applique, alors le graphe représentant la ville de Königsberg n'a pas de parcours eulérien,

Le graphe représentant la ville de Königsberg n'est pas un graphe eulérien et le théorème de Euler s'applique,

Le graphe représentant la ville de Königsberg n'as pas de parcours eulérien.

Ici, l'*explanans* — composé du théorème de Euler ainsi que du fait que le graphe représentant la ville de Königsberg n'est pas un graphe eulérien — contient également une généralisation, le théorème de Euler. Cela signifie que l'exigence nomologique posée par le modèle DN est, elle aussi, satisfaite.

Quel est donc le problème avec cette application du modèle DN à une étape explicative de la preuve de l'absence d'un parcours eulérien dans la ville de Königsberg ? Le problème est qu'il est possible d'invertir une partie de l'*explanans* et l'*explanandum* sans que le résultat, selon ce modèle, cesse d'être une explication. Nous pouvons, en effet, construire la déduction suivante :

Si c'est le cas que le graphe représentant la ville de Königsberg n'a pas de parcours eulérien et si le théorème de Euler s'applique, alors le graphe représentant la ville de Königsberg n'est pas un graphe eulérien,

Le graphe représentant la ville de Königsberg n'a pas de parcours eulérien et le théorème de Euler s'applique,

Le graphe représentant la ville de Königsberg n'est pas un graphe eulérien.

Nous pouvons aisément observer que, dans la déduction ci-dessus, l'*explanans* est composé du théorème de Euler ainsi que du fait que le graphe représentant la ville de Königsberg n'a pas de parcours eulérien et qu'il contient donc bien une généralisation, sous la forme du théorème de Euler. Donc, puisque les exigences déductive et nomologique sont satisfaites, nous pouvons conclure que cette déduction est une explication pour le modèle DN, ce qui constitue évidemment une analyse erronée de la situation. Comme ce dernier exemple le démontre, le modèle DN n'a pas la subtilité requise pour rendre compte de l'asymétrie ou directionnalité propre aux explications. En effet, nous pouvons ici substituer une partie de l'*explanans* à l'*explanandum* et nous retrouver avec un raisonnement conforme aux exigences que doit satisfaire une explication²⁶.

Cela ne peut se produire avec notre modèle. D'une part, parce que nous n'utilisons pas les généralisations comme prémisses dans des déductions, mais comme des règles au moyen desquelles les déductions se produisent. Dans l'exemple ci-dessus, la prémisse de la déduction dans notre modèle est le fait que le graphe représentant la ville de Königsberg n'est pas un graphe eulérien, sa conclusion est le fait que le graphe représentant la ville de Königsberg n'a pas de parcours eulérien, et le théorème de Euler est utilisé comme la règle qui nous permet d'aller de la prémisse à la conclusion (voir la section 3.5). Et, d'autre part, parce que notre modèle est à l'abri de tout contre-exemple potentiel qui enfreindrait l'asymétrie propre aux explications en raison de son exigence que la complexité conceptuelle augmente des prémisses à la conclusion d'un arbre de preuve. Reprenant l'exemple précédent, dans l'étape explicative où l'on passe du fait que le graphe représentant la ville de Königsberg n'est pas un graphe eulérien au fait que le graphe représentant la ville de Königsberg n'a pas de parcours eulérien, il y a bien une augmentation de la complexité conceptuelle. Donc, si nous intervertissions la prémisse de notre déduction et sa conclusion, bien que nous serions toujours en présence d'une structure déductive comme dans le modèle DN, nous ne pourrions plus, du point de vue de notre modèle, affirmer qu'il s'agit là d'une explication, car il n'y aurait aucune augmentation de la complexité conceptuelle de la prémisse à la conclusion.

Faisons trois autres remarques pour terminer. D'abord, il faut noter que notre approche ne

26. Il est bien connu en philosophie de la logique et des sciences qu'on peut trouver plusieurs contre-exemples au modèle DN. On pourra, à ce sujet, consulter [Salmon \(1989\)](#). Notre but, ici, était toutefois de fournir un tel contre-exemple qui implique une explication non causale.

fait pas que surmonter les problèmes inhérents au modèle DN, mais qu'elle en établit aussi un diagnostic. Ce ne sont pas les composantes déductive et nomologique du modèle DN qui génèrent des contre-exemples, mais plutôt la façon dont ces composantes sont utilisées. Le modèle DN sous-estime tout particulièrement l'importance de la structure de la déduction qui sous-tend les explications : il ne prend pour objet qu'une unique étape déductive et n'emploie pas les composantes de l'explication de manière plus fine et plus détaillée. Comme notre modèle use de déductions qui ont la forme d'arbres de preuve et qu'il emploie des généralisations en tant que règles dans ces arbres, il bénéficie des aspects déductif et nomologique propres au modèle DN, mais parvient à éviter d'éventuels contre-exemples parce qu'il utilise ces mêmes aspects différemment.

Nous voulons ensuite faire remarquer l'élément suivant (voir, à ce sujet, la section 3.3). Le traitement des généralisations dans nos arbres de preuve et l'augmentation de la complexité conceptuelle des hypothèses non désactivées à la conclusion qu'on y retrouve sont, en réalité, les deux faces d'une même médaille. Car, si nous utilisions les généralisations comme des hypothèses dans nos arbres de preuve, comme le fait le modèle DN, nous devrions sacrifier la complexité conceptuelle (à tout le moins telle que nous l'avons définie).

Enfin, non seulement notre modèle est-il capable de confirmer qu'une preuve mathématique est bien une explication et d'identifier l'*explanans* et l'*explanandum* de cette explication, mais il peut aussi, grâce à la structure en arbre de preuve, distinguer les différentes étapes explicatives d'une explication mathématique et les mettre en relation entre elles. Cette caractéristique de notre modèle s'est révélée des plus utiles dans le cas du théorème de Desargues, tout comme dans celui du théorème concernant l'absence d'un parcours eulérien dans le graphe représentant la ville de Königsberg, puisque nous étions là en présence de raisons immédiates, mais également de raisons médiates. On peut considérer cette caractéristique de notre modèle comme la source des analyses plus fines et plus détaillées qu'il produit. Avec de telles analyses, notre modèle promet le déploiement d'une plus grande force et, donc, une résistance accrue aux contre-exemples.

Le problème des explications mathématiques est encore ouvert et demeure au coeur de nombreux débats dans la recherche contemporaine. Dans cet ouvrage, nous avons abordé les explications mathématiques comme des preuves montrant pourquoi un théorème est vrai. Cela nous a permis d'approcher le problème à l'aide de deux types de moyens. Nous

avons, d'une part, employé les moyens logiques tirés de la théorie de la démonstration.

Comme les explications mathématiques sont des preuves, il semblait naturel d'avoir recours à ce type de moyens. Nous en avons, d'autre part, appelé à une idée apparaissant de façon récurrente dans les recherches portant sur les explications mathématiques depuis Aristote jusqu'à Gentzen : que les explications mathématiques sont des preuves qui expliquent le plus complexe par le plus simple. Après avoir donné à cette idée une nouvelle forme et une définition précise, nous avons mis le modèle qui en résulte à l'épreuve en l'appliquant à plusieurs explications mathématiques reconnues comme telles — explications dont notre modèle a réussi à cerner le pouvoir explicatif. Bien sûr, de nombreux autres cas pourraient encore être étudiés, ce qui pourrait projeter un éclairage nouveau sur l'applicabilité du modèle présenté ici, ainsi que sur ces cas eux-mêmes. Pour ces deux raisons, la solution que nous proposons au problème des explications mathématiques nous paraît ouvrir la porte à de fascinants et fructueux développements à venir.

Bibliographie

- H. ANELLIS : Forty years of « unnatural » natural deduction and quantification : A history of first-order systems of natural deduction from Gentzen to Copi. *Modern Logic*, 2:113–152, 1991.
- A. ARANA et P. MANCOSU : On the relationship between plane and solid geometry. *The Review of Symbolic Logic*, 5:294–353, 2012.
- ARCHIMÈDE : *Archimedis opera quae extant novis demonstrationibus commentariisque illustrata per Davidem Rivalentum in Flurantia*. Paris, 1615.
- ARISTOTE : *Seconds Analytiques*. Flammarion, Paris, 2005.
- ARISTOTLE : *Posterior Analytics*. Oxford University Press, Oxford, 1993.
- A. ARNAULD et P. NICOLE : *La logique ou l'art de penser*. Vrin, Paris, 1993.
- J. AVIGAD : Mathematical method and proof. *Synthese*, 153:105–159, 2006.
- A. BALTAG : The dynamic turn in quantum logic. *Synthese*, 186:595–612, 2012.
- S. BARON, M. COLYVAN et D. RIPLEY : A counterfactual approach to explanation in mathematics. *Philosophia Mathematica*, 10:1–34, 2019.
- J. BEALL, J ROSS BRADY, M. DUNN, A. HAZEN, E. MARES, R. MEYER, G. PRIEST, G RESTALL, D. RIPLEY, J. SLANEY et R. SYLVAN : On the ternary relation and conditionality. *Journal of Philosophical Logic*, 41:595–612, 2012.
- J. BERG : *Bolzano's Logic*. Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1962.
- A. BETTI : Explanation in metaphysics and Bolzano's theory of ground and consequence. *Logique et Analyse*, 211:281–316, 2010.
- B. BOLZANO : *Wissenschaftslehre : Versuch einer ausführlichen und größtentheils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherige Bearbeiter*, volume IV. Seidel, Sulzbach, 1837.

- B. BOLZANO : Sur la doctrine kantienne de la construction des concepts par les intuitions. *Philosophie*, 27:3–12, 1990.
- B. BOLZANO : *Theory of Science*. Oxford University Press, Oxford, avril 2014.
- G. BOULIGAND : *Premières leçons sur la théorie générale des groupes*. Vuibert, Paris, 1932.
- G. BOULIGAND : *Structure des Théories*. Hermann, Paris, 1937.
- J. BOUVERESSE : *Essais : Tome 5, Descartes, Leibniz, Kant*. Agone, Paris, 2006.
- G. BUHL : *Ableitbarkeit und Abfolge in der Wissenschaftstheorie Bolzanos*. Kölner Universitätsverlag, Cologne, 1958.
- E. CASARI : Matematica e verità. *Rivista di Filosofia*, 78:329–350, 1987.
- E. CASARI : *Bolzano's Logical System*. Oxford University Press, Oxford, 2016.
- R. CASSE : *Projective Geometry. An Introduction*. Oxford University Press, Oxford, 2016.
- A. CAUCHY : *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique. Première partie : Analyse algébrique*. Gauthier-Villars, Paris, 1882.
- M. COLYVAN, J. CUSBERG et K. MCQUEEN : Two flavours of mathematical explanation. In A. REUTLINGER et J. SAATSI, éditeurs : *Explanation Beyond Causation*, pages 231–249. Oxford University Press, Oxford, 2018.
- A. COURNOT : *Essai sur les fondements de nos connaissances philosophiques et sur les caractères de la critique philosophique*. Hachette, Paris, 1912.
- W. D'ALESSANDRO : Mathematical explanation beyond explanatory proof. *British Journal for the Philosophy of Science*, 71:581–603, 2020.
- W. R. de JONG et A. BETTI : The classical model of science I : A millennia-old model of scientific rationality. *Synthese*, 174:180–210, 2010.
- S. DE TOFFOLI : The diagram – the use of visualizations in algebraic reasoning. *The Review of Symbolic Logic*, 10:158–186, 2017.

- R. DESCARTES : *Règles pour la direction de l'esprit*. Vrin, Paris, 2004.
- M. DETLEFSEN : Fregean hierarchies and mathematical explanation. *International Studies in the Philosophy of Science*, 3:97–116, 1988.
- J. DUTANT et E. (eds) PASCAL : *Philosophie de la connaissance : croyance, connaissance, justification*. Vrin, Paris, 2005.
- L. EULER : *Vollständige Anleitung zur Algebra*. Akademie der Wissenschaften, St. Petersburg, Kays, 1770.
- K. FINE : Guide to ground. In F. CORREIA et B. SCHNIEDER, éditeurs : *Metaphysical grounding*, pages 37–80. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- G. FREGE : *Les fondements de l'arithmétique*. Seuil, Paris, 1969.
- F. GENCO : Formal explanations as logical derivations. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 31:279–342, 2021.
- G. GENTZEN : *Recherches sur la déduction logique*. Presses universitaires de France, 1955.
- M. GIAQUINTO : Mathematical proofs : The beautiful and the explanatory. *Journal of Humanistic Mathematics*, 6:56–72, 2016.
- V. GIJSBERS : A quasi-interventionist theory of mathematical explanation. *Logique et Analyse*, 60:47–66., 2017.
- A. GINAMMI, R. KOOPMAN, S. WANG, S. BLOEM et A. BETTI : Bolzano, Kant, and the traditional theory of concepts, a computational investigation. In A. de BLOCK et G. RAMS, éditeurs : *The Dynamics of Science : Computational Frontiers in History and Philosophy of Science*, pages 1–36. Pittsburgh University Press, Pittsburgh, 2022.
- J. HAFNER et P. MANCOSU : The varieties of mathematical explanation. In P. MANCOSU, éditeur : *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics*, pages 215–250. Springer, Berlin, 2005.
- Y. HAMAMI : Mathematical rigor and proof. *Review of Symbolic Logic*, 39:1–41, 2019.

- O. HARARI : Proclus' account of explanatory demonstrations in mathematics and its context. *Archiv für Geschichte der Philosophie*, 90:137–164, 2008.
- C. HEMPEL : The function of general laws in history. *Journal of Philosophy*, 39:35–48, 1942.
- C. HEMPEL : *Aspects of Scientific Explanation and Other Essays in the Philosophy of Science*. Free Press, New York, 1965.
- C. HEMPEL et P. OPPENHEIM : Studies in the logic of explanation. *Philosophy of science*, 15:135–175, 1948.
- J. HINTIKKA : Are logical truths analytic? *The Philosophical Review*, 74:178–203., 1965.
- D. HUME : *Enquête sur l'entendement humain*. Les classiques des sciences sociales, Chicoutimi, 2002.
- R. IEMHOFF : Remarks on simple proofs. In R. KOSSAK et P. ORDING, éditeurs : *Simplicity : Ideals of Practice in Mathematics and the Arts*, pages 950–970. Springer, Dordrecht, 2017.
- M. INGLIS et J. P. MEJÍA-RAMOS : Functional explanation in mathematics. *Synthese*, 25:1–24, 2019.
- A. KASIRZADEH : Counter countermathematical explanations. *Erkenntnis*, forthcoming:1–35, 2022.
- J. KIM : Explanatory knowledge and metaphysical dependence. *Philosophical Issues*, 5:51–69, 1994.
- P. KITCHER : Bolzano's ideal of algebraic analysis. *Studies in History and Philosophy of Science*, 6:229–269, 1975.
- P. KITCHER : Explanatory unification. *Philosophy of science*, 48:501–531, 1981.
- M. LANGE : Aspects of mathematical explanation : Symmetry, unity and salience. *Philosophical Review*, 123:485–531, 2014.

- M. LANGE : Depth and explanation in mathematics. *Philosophia Mathematica*, 23:196–214, 2015a.
- M. LANGE : Explanation, existence, and natural properties in mathematics. A case study : Desargues' theorem. *Dialectica*, 69:435–472, 2015b.
- M. LANGE : *Because Without Cause : Non-causal Explanations in Science and Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2017.
- M. LANGE : Challenges facing counterfactual accounts of explanation in mathematics. *Philosophia Mathematica*, 30:32–58, 2021.
- G. LEIBNIZ : Meditationes de cognitione, veritate et ideis. In P. JANET, éditeur : *Oeuvres philosophiques*, pages 621–626. Félix Alcan, Paris, 1900.
- G. LEIBNIZ : *Nouveaux essais sur l'entendement humain*. Flammarion, Paris, 1921.
- D. LEWIS : Causation. *Journal of Philosophy*, 70:556–567, 1973.
- D. LEWIS : New work for a theory of universals. *Australasian Journal of Philosophy*, 61:343–377, 1983.
- P. MANCOSU : Bolzano and Cournot on mathematical explanation. *Revue d'histoire des sciences*, 52:429–456, 1999.
- P. MANCOSU : On mathematical explanation. In E. GROSHOLZ et H. BREGER, éditeurs : *The Growth of Mathematical Knowledge*, pages 103–119. Kluwer, Dordrecht, 2000.
- P. MANCOSU : Mathematical explanation : Problems and prospects. *Topoi*, 20:97–117, 2001.
- P. MANCOSU : Mathematical explanation : Why it matters. In P. MANCOSU, éditeur : *The Philosophy of Mathematical Practice*, pages 134–150. Oxford University press, Oxford, 2008.
- P. MANCOSU : *Abstraction and Infinity*. Oxford University Press, Oxford, 2016.
- P. MANCOSU : Mathematical style. In N ZALTA, éditeur : *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, pages 1–49. Stanford, 2017.

- P. MANCOSU : Explanations in mathematics. In N ZALTA, éditeur : *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, pages 1–51. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2018.
- P. MANCOSU, S. GALVAN et R. ZACH : *An Introduction to Proof Theory*. Oxford University Press, Oxford, 2021.
- E. MARES : Who’s afraid of impossible worlds? *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 38:516–526, 1997.
- E. MARGOLIS et L. STEPHEN : Concepts. In E. ZALTA, éditeur : *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, pages 1–36. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2021.
- S. MARIN, D. MILLER, E. PIMENTEL et M. VOLPE : Synthetic inference rules for geometric theories. *Elsevier*, Submitted:1–28, 2022.
- M. MARTIJN : Proclus on the order of philosophy of nature. *Synthese*, 174:205–223, 2010.
- A.-S. MAURIN : Grounding and metaphysical explanation : it’s complicated. *Philosophical Studies*, 176:1573–1594, 2019.
- D. NOLAN : Impossible worlds : A modest approach. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 38:535–572, 2001.
- R. NOZICK : *Philosophical Explanations*. Harvard University Press, Harvard, 1983.
- M. OTTE et M. PANZA : *Analysis and synthesis in mathematics : History and philosophy*. Springer, Dordrecht, 1997.
- J. PEARL : *Causality*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- C. PINCOCK : *Mathematics and Scientific Representation*. Oxford University Press, Oxford, 2012.
- C. PINCOCK : Abstract explanations in science. *British Journal for the Philosophy of Science*, 66:857–882, 2015a.
- C. PINCOCK : The unsolvability of the quintic : A case study in abstract mathematical explanation. *Philosophers’ Imprint*, 17:1–19, 2015b.

- F. POGGIOLESI : On defining the notion of complete and immediate formal grounding. *Synthese*, 193:3147–3167, 2016.
- F. POGGIOLESI : On constructing a logic for the notion of complete and immediate formal grounding. *Synthese*, 195:1231–1254, 2018.
- F. POGGIOLESI : A proof-theoretical framework for several types of grounding. *Logique et Analyse*, 252:387–414, 2020.
- F. POGGIOLESI : Grounding principles for (relevant) implication. *Synthese*, 198:1–26, 2021a.
- F. POGGIOLESI : Grounding rules for (relevant) implication. *Journal of Applied non-classical Logics*, 31:26–55, 2021b.
- F. POGGIOLESI et N. FRANCEZ : Toward a generalization of the logic of grounding. *Theoria*, 36:5–24, 2021.
- F. POGGIOLESI et F. GENCO : Conceptual (and hence mathematical) explanations, conceptual grounding and proof. *Erkenntnis*, forthcoming:1–34, 2022.
- PORPHYRY : *Introduction*. Oxford University Press, Oxford, 2006.
- D. PRAWITZ : *Natural deduction. A proof-theoretical study*. Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1965.
- G. PRIEST : *Beyond the Limits of Thought*. Oxford University Press, 2002.
- PROCLUS : *Procli Diadochi in Primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii*. Teubner, Leipzig, 1873.
- M. RESNIK et D. KUSHNER : Explanation, independence, and realism in mathematics. *British Journal for the Philosophy of Science*, 38:141–158, 1987.
- A. REUTLINGER : Explanation beyond causation? New directions in the philosophy of scientific explanation. *Philosophy Compass*, 12:156–196, 2017.
- A. REUTLINGER, M. COLYVAN et K. KRZYANOWSKA : The prospects for a monist theory of non-causal explanation in science and mathematics. *Erkenntnis*, forthcoming:1–30, 2020.

- A. REUTLINGER et J. (eds) SAATSI : *Explanation Beyond Causation : Philosophical Perspectives on Non-Causal Explanations*. Oxford University Press, Oxford, 2018.
- A. RUMBERG : Bolzano's concept of grounding (Abfolge) against the background of normal proofs. *Review of Symbolic Logic*, 6:424–459, 2013.
- W. SALMON : *Four Decades of Scientific Explanation*. University of Pittsburgh Press, Pittsburgh, 1989.
- J. SALVEREDA : Characterizing properties and explanation in mathematics. *Logique et Analyse*, 60:25–46, 2017.
- G. SAMBIN, G. BATTILOTTI et C. FAGGIAN : Basic logic : Reflection, symmetry, visibility. *Journal of Symbolic Logic*, 92:979–1013, 2000.
- J. SCHAFFER : Grounding in the image of causation. *Philosophical Studies*, 173:49–100, 2016.
- B. SCHNIEDER : A certain kind of trinity : Dependence, substance, and explanation. *Philosophical Studies*, 129:393–419, 2006.
- B. SCHNIEDER : Bolzano on causation and grounding. *Journal of the History of Philosophy*, 52:309–337, 2014.
- P. SCHROEDER-HEISTER : Uniform proof-theoretic semantics for logical constants (abstract). *Journal of Symbolic Logic*, 56:11–42, 1991.
- P. SCHROEDER-HEISTER : Proof-theoretic semantics. In E. ZALTA, éditeur : *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, pages 1–45. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2018.
- P. SCHROEDER-HEISTER : Rules of definitional reflection. *LICS*, 92:240–265, 1993.
- J. SEBESTIK : *Logique et mathématique chez Bernard Bolzano*. Vrin, Paris, 1992.
- M. STEINER : Mathematical explanations. *Philosophical Studies*, 34:135–151, 1973.
- A. S. TROELSTRA et H. SCHWICHTENBERG : *Basic Proof Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

-
- E. WEBER et L. VERHOEVEN : Explanatory proofs in mathematics. *Logique et Analyse*, 45:299–307, 2002.
- I. WILHELM : Comparing mathematical explanations. *British Journal for the Philosophy of Science*, forthcoming:1–32, 2022.
- J. WOODWARD : *Making Things Happen : A Theory of Causal Explanation*. Oxford University Press, Oxford, 2004.
- J. WOODWARD et C HITCHCOCK : Explanatory generalizations. part I : A counterfactual account. *Nous*, 15:1–24, 2003.