



**HAL**  
open science

# Contribution à la modélisation et à la simulation du comportement mécanique de milieux enchevêtrés

Damien Durville

► **To cite this version:**

Damien Durville. Contribution à la modélisation et à la simulation du comportement mécanique de milieux enchevêtrés. Mécanique des structures [physics.class-ph]. Université Paris-Saclay, 2021. tel-04185449

**HAL Id: tel-04185449**

**<https://hal.science/tel-04185449>**

Submitted on 22 Aug 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Contribution à la modélisation et à la simulation du comportement mécanique de milieux enchevêtrés

**Habilitation à diriger des recherches de l'Université  
Paris-Saclay**

École doctorale n° 579, SMEMAG  
Unité de recherche : MSSMat - CNRS UMR8579  
Réfèrent : : Olivier Hubert

**Habilitation à diriger des recherches présentée et soutenue à  
Gif-sur-Yvette, le 7 septembre 2021, par**

**Damien DURVILLE**

## **Composition du jury :**

<b>Florence Bertails-Descoubes</b> Directrice de recherche INRIA, INRIA Grenoble Rhône-Alpes	Examinatrice
<b>Philippe Boisse</b> Professeur, INSA-Lyon	Rapporteur
<b>Pierre-Alain Boucard</b> Professeur, ENS Paris-Saclay	Examinateur
<b>Olivier Brûls</b> Professeur, Faculté des Sciences Appliquées de Liège	Rapporteur
<b>David Dureisseix</b> Professeur, INSA-Lyon	Rapporteur
<b>Laurent Orgéas</b> Directeur de Recherche CNRS, Laboratoire 3SR Grenoble	Examinateur

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Modélisation des milieux enchevêtrés . . . . .	3
1.1.1	Positionnement du travail . . . . .	3
1.1.2	Problématiques des milieux enchevêtrés . . . . .	3
1.1.3	Position du problème . . . . .	5
1.1.4	Approches de modélisation . . . . .	5
1.1.5	Applications . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Modélisations de poutres</b>	<b>7</b>
2.1	Introduction . . . . .	7
2.2	Brève revue de modèles de poutre . . . . .	7
2.2.1	Modélisations de poutre géométriquement exactes à sections rigides	7
2.2.2	Approches par des modèles de Cosserat . . . . .	8
2.2.3	Modèles de poutres à directeurs déformables . . . . .	9
2.2.4	Approche ANCF . . . . .	11
2.2.5	Approche CUF (Carrera Unified Formulation) . . . . .	14
2.3	Proposition d'un modèle de poutre à section déformable au premier ordre	15
2.3.1	Motivations . . . . .	15
2.3.2	Modèle cinématique à l'ordre 1 . . . . .	16
2.3.3	Modèle rhéologique . . . . .	21
2.3.4	Mise en œuvre éléments finis du modèle . . . . .	24
2.3.5	Illustration des possibilités du modèle . . . . .	32
2.4	Proposition d'un modèle cinématique enrichi à un ordre quelconque . .	34
2.4.1	Introduction . . . . .	34
2.4.2	Modèle cinématique à un ordre quelconque . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Modélisation du contact dans les milieux enchevêtrés</b>	<b>45</b>
3.1	Brève revue de la littérature sur la modélisation des contacts entre poutres	45
3.1.1	Introduction . . . . .	45
3.1.2	Caractérisation du lieu du contact comme lieu de distance minimale entre courbes . . . . .	46
3.1.3	Discussion sur la localisation du contact aux lieux de distance minimale . . . . .	47
3.2	Méthode de détermination des contacts entre fibres à partir de géométries intermédiaires . . . . .	47
3.2.1	Objectifs de la méthode . . . . .	47
3.2.2	Présentation synthétique de la méthode . . . . .	48
3.2.3	Mise en œuvre de la méthode . . . . .	51
3.2.4	Discretisation des interactions de contact . . . . .	58
3.3	Modélisation des interactions de contact frottement . . . . .	59
3.3.1	Modélisation des interactions de contact . . . . .	60
3.3.2	Modélisation des interactions de frottement . . . . .	63
3.4	Algorithmique . . . . .	65
3.4.1	Introduction de l'interpolation éléments finis . . . . .	65

3.4.2	Les non-linéarités liées à la modélisation des interactions de contact-frottement . . . . .	66
3.5	Applications . . . . .	68
3.5.1	Simulation de glissements alternés entre deux poutres tendues . . . . .	68
3.5.2	Simulation de nœuds . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Modélisation des conditions aux limites</b> . . . . .	<b>77</b>
4.1	Motivation des développements sur la modélisation des conditions aux limites . . . . .	77
4.1.1	Problématique . . . . .	77
4.1.2	Aspects hiérarchiques . . . . .	77
4.1.3	Démarche proposée . . . . .	78
4.2	Modèle de corps rigides à quatre nœuds . . . . .	79
4.2.1	Introduction . . . . .	79
4.2.2	Définition d'un corps rigide à quatre nœuds . . . . .	79
4.2.3	Conditions de distance constante au sein d'un corps rigide . . . . .	80
4.2.4	Directions du référentiel attaché au corps rigide . . . . .	80
4.3	Modélisation des liaisons cinématiques contrôlant le mouvement d'extrémités par rapport à un référentiel mobile . . . . .	80
4.3.1	Introduction . . . . .	80
4.3.2	Liaisons assurant le contrôle des translations . . . . .	81
4.3.3	Liaisons assurant le contrôle des rotations . . . . .	82
4.3.4	Extension à des liaisons avec des référentiels fixes . . . . .	85
4.4	Prise en compte des conditions cinématiques à l'aide de multiplicateurs de Lagrange . . . . .	86
4.4.1	Expression générique des conditions cinématiques de liaison . . . . .	86
4.4.2	Introduction de multiplicateurs de Lagrange pour la prise en compte des conditions cinématiques . . . . .	86
4.4.3	Contributions au résidu et à la matrice de rigidité tangente dans le cadre d'une résolution par un algorithme de Newton . . . . .	87
4.5	Exemples d'application . . . . .	88
4.5.1	Flexion d'un câble multitoron . . . . .	88
4.5.2	Détermination de la configuration initiale d'un tissé interlock . . . . .	93
4.5.3	Problématique . . . . .	93
<b>5</b>	<b>Applications</b> . . . . .	<b>96</b>
5.1	Introduction . . . . .	96
5.1.1	Apports de la simulation des milieux enchevêtrés . . . . .	96
5.2	Câbles supraconducteurs . . . . .	96
5.2.1	Problématique des câbles supraconducteurs . . . . .	96
5.2.2	Simulation des différents chargements . . . . .	97
5.2.3	Analyse des résultats . . . . .	100
5.2.4	Bilan . . . . .	102
5.3	Structures textiles . . . . .	103
5.3.1	Introduction . . . . .	103
5.3.2	Détermination de la configuration initiale à partir de la connaissance du motif d'assemblage . . . . .	103
5.3.3	Notion de macro-filament . . . . .	105
5.3.4	Structures tressées . . . . .	106
5.3.5	Tissés 3D interlock . . . . .	118

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Modélisation des milieux enchevêtrés

#### 1.1.1 Positionnement du travail

Ce mémoire rassemble et fait le point sur des développements autour de la simulation du comportement mécanique de milieux enchevêtrés. Ces développements ont été essentiellement motivés pour répondre à des demandes industrielles pour mieux comprendre et prédire le comportement de ces milieux fibreux enchevêtrés. Cette réponse s'est traduite notamment par le développement d'un code de simulation par éléments finis spécifique, le logiciel Multifil.

#### 1.1.2 Problématiques des milieux enchevêtrés

On entendra ici par milieux enchevêtrés des milieux essentiellement constitués d'assemblages de fibres, filaments ou fils, qui développent entre eux des interactions de contact et de frottement. Différents composants industriels entrent dans cette catégorie des milieux enchevêtrés. Pour présenter les enjeux de la compréhension du comportement de ces milieux, nous présentons les différents types de composants auxquels se sont attachés nos travaux.

##### 1.1.2.1 Câbles métalliques

La catégorie des câbles métalliques que nous avons étudiés recouvre des réalités très différentes en fonction de la destination et du mode de fabrication de ces câbles. Les câbles métalliques destinés à porter des efforts sont en général assemblés sous forme de toronage, à un ou plusieurs étages. Le toronage élémentaire consiste à enrouler des fils métalliques en hélice autour d'un cœur, aussi appelé âme, pour constituer un toron, constitué d'un certain nombre de couches. Plusieurs torons peuvent être ensuite assemblés à leur tour d'une manière analogue pour constituer des câbles multitorons. Les attentes en termes de caractérisation pour ces structures se situent essentiellement à deux niveaux :

**La caractérisation du comportement macroscopique global :** le comportement macroscopique de ces câbles apparaît en grande partie tributaire des interactions de contact-frottement entre leurs composants élémentaires, ce qui induit des comportements non-linéaires, et se traduit par exemple par des rigidités en flexion dépendant de manière non-linéaire des chargements. La caractérisation

de ces comportements complexes est nécessaire pour prédire le comportement des structures intégrant ces câbles.

**La caractérisation des mécanismes d'endommagement à l'échelle locale :** les interactions de contact et de frottement entre fils engendrent des transferts d'efforts qui induisent en général une grande hétérogénéité dans la distribution des contraintes à l'échelle locale au niveau des fils. Couplées aux glissements, ces interactions de contact-frottement sont par ailleurs susceptibles de générer de l'usure, ou de favoriser l'apparition et la propagation de fissures. La prédiction de ces chargements complexes à l'échelle locale à l'origine de différents types d'endommagement demande une détermination précise de l'équilibre mécanique au sein du câble.

Des câbles métalliques sont aussi utilisés pour porter des courants électriques. Nos travaux ont porté notamment sur des câbles supraconducteurs utilisés pour réaliser les électro-aimants de machines tokamak pour la fusion nucléaire (projet ITER), en particulier sur des câbles dits "câbles en conduite". Ces câbles sont assemblés selon un procédé avec cinq niveaux de câblage successifs, destinés à obtenir une structure présentant un taux de vide suffisant pour permettre la circulation d'hélium liquide en son sein. La problématique essentielle de ces câbles est liée au fait que la conductivité électrique des brins d'alliage de Niobium-Étain ( $Nb_3Sn$ ) qui les constituent, dépend directement des déformations subies à l'échelle locale, et engendrées par les chargements thermique et magnétique liés à leur mise en œuvre et à leur utilisation. Pour ces câbles supraconducteurs, l'objectif est donc de décrire de manière précise ces déformations à l'échelle locale.

### 1.1.2.2 Structures textiles

Les matériaux ou structures textiles étudiés se présentent sous la forme d'assemblages de filaments sur plusieurs niveaux successifs : des mèches de filaments sont en général torsadées, puis assemblées pour former des câblés textiles, des tresses, ou des tissés. La description géométrique de ces structures obtenues par ces procédés d'assemblages successifs apparaît bien souvent comme une inconnue du problème, et dans la plupart des cas, la détermination de leur configuration initiale constitue la première tâche dévolue à la simulation. Ceci constitue une différence importante par rapport aux câbles métalliques pour lesquels les trajectoires des composants élémentaires sont davantage définies.

Le nombre de filaments élémentaires impliqués dans les matériaux textiles marque une autre différence importante par rapport aux câbles métalliques, dans la mesure où on est très vite conduit à compter en milliers. Ceci conduit à optimiser les algorithmes pour être en mesure de prendre en compte de grands nombres de composants, mais aussi à développer des modèles alternatifs pour représenter le comportement de paquets de filaments à une échelle supérieure.

La grande souplesse des matériaux textiles est liée aux mouvements relatifs possibles entre filaments, qui génèrent par l'intermédiaire du frottement des transferts d'effort entre ces filaments. Les efforts dans ces milieux sont en conséquence caractérisés par une grande dispersion.

Outre la détermination de la configuration initiale, le but de la simulation pour de tels milieux est davantage de décrire et comprendre les mécanismes qui se produisent en leur sein, que de quantifier précisément des critères d'endommagement.

### 1.1.2.3 Les problématiques communes à ces milieux

Ce bref panorama des objets d'application des travaux présentés dans ce mémoire permet d'esquisser la problématique à laquelle visent à répondre les développements proposés. Ces objets sont composés de fils ou filaments, pouvant être organisés selon plusieurs niveaux d'assemblage, et développant entre eux des interactions de contact et de frottement. Les attentes en termes de caractérisation vis-à-vis de ces objets sont principalement de deux ordres : d'une part la détermination de la distribution des efforts dans les filaments les composant, afin de prédire les propriétés mécaniques à l'échelle macroscopique ou de prévoir l'apparition d'endommagements à l'échelle locale, et d'autre part, la détermination de la géométrie initiale de ces structures lorsque celle-ci n'est pas connue a priori, ce qui est souvent le cas pour des structures textiles. Répondre à ces attentes demande de déterminer l'équilibre mécanique d'un ensemble de fils ou filaments, soumis à divers types de chargements, et développant entre eux des interactions de contact-frottement. Dans les applications envisagées, les effets dynamiques d'inertie sont supposés négligeables par rapport aux autres efforts, c'est pourquoi nous nous limitons à la considération d'un équilibre statique.

### 1.1.3 Position du problème

En empruntant le formalisme du principe des travaux virtuels utilisé en mécanique des milieux continus, nous pouvons exprimer le problème de la détermination de l'équilibre mécanique d'un ensemble de  $N_f$  filaments sous la forme suivante :

Trouver  $\mathbf{u}$  cinématiquement admissible tel que,  $\forall \mathbf{v}$  cinématiquement admissible,

$$\sum_{I=1}^N \int_{\Omega_I} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{x}}) d\omega_I + \sum_{I=1}^N \sum_{J=I}^N \int_{\Gamma_{IJ}^c} (\mathbf{R}_{J \rightarrow I}^c(\mathbf{u}), \mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}^J) - \mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}^I)) d\gamma + \sum_{I=1}^N \int_{\Sigma_I^a} (\mathbf{R}^{CL}(\mathbf{u}), \mathbf{v}) d\sigma = 0. \quad (1.1)$$

Cette formulation implique comme domaines d'intégration les domaines  $\Omega_I$  occupés par les configurations actuelles des filaments, les surfaces  $\Gamma_{IJ}^c$  sièges des interactions de contact et de frottement entre les filaments  $I$  et  $J$ , et les extrémités  $\Sigma_I^a$  des filaments sur lesquelles s'exercent les conditions aux limites. Les efforts sont représentés par les tenseurs de contrainte de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  dans les filaments, les interactions de contact-frottant entre les filaments  $\mathbf{R}_{J \rightarrow I}^c$  et les efforts  $\mathbf{R}^{CL}$  appliqués aux extrémités des filaments pour représenter les conditions aux limites.

### 1.1.4 Approches de modélisation

L'explicitation de chacun des trois termes de travaux virtuels du problème 1.1, représentant respectivement les travaux virtuels des efforts internes dans les filaments, des interactions de contact-frottant entre filaments et des efforts destinés à représenter les conditions aux limites, a fait l'objet de développements spécifiques, adaptés à la problématique des milieux enchevêtrés, qui sont traités dans les trois premiers chapitres de ce mémoire.

#### 1.1.4.1 Modélisation du comportement des fils ou filaments

Le chapitre 2 est consacré aux modèles de poutre mis en œuvre pour représenter le comportement des fils, filaments ou mèches de filaments. La nature élancée des filaments

constituant les milieux enchevêtrés oriente vers l'utilisation de modèles de poutre pour représenter leur comportement. Si de nombreux modèles sont déjà bien établis dans la littérature, nous avons choisi de développer un modèle de poutre à section déformable, reposant sur l'hypothèse que la cinématique de chaque section peut être décrite par la position de son centre, et de deux vecteurs directeurs de section.

Le modèle cinématique à deux directeurs peut s'interpréter comme un développement limité au premier ordre par rapport aux coordonnées transverses dans le repère de la poutre. La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à la formulation d'un modèle de poutre reposant sur un développement polynômial à un ordre quelconque par rapport aux composantes transverses. Ce modèle permet de représenter des structures élancées très déformables dans leurs sections, pour s'appliquer à des mèches de filaments.

#### **1.1.4.2 Modélisation des interactions de contact et de frottement entre filaments**

Le troisième chapitre se consacre à la modélisation des interactions de contact-frottement au sein d'assemblées filamentaires. L'importante densité de contacts constitue une caractéristique essentielle des milieux enchevêtrés, mais aussi un défi pour une résolution numérique efficace. Le nombre de filaments considérés, la variété des configurations géométriques, ainsi que la grande amplitude des déplacements relatifs entre filaments, rendent complexes la détection et le suivi d'un grand nombre de contacts évolutifs dans ce type de milieux. Pour la détection de ces contacts, nous proposons une approche à deux niveaux, reposant sur la détection de zones de proximité et la construction de géométries intermédiaires. L'utilisation de ces géométries intermédiaires comme support de modélisation des interactions de contact et de frottement permet de s'affranchir des approches classiques de type maître/esclave pour considérer de manière symétrique les filaments en interaction. Les interactions de contact frottant sont prises en compte à l'aide d'éléments de contact discrets, distribués le long de ces géométries intermédiaires, associant des couples de particules matérielles, et auxquels sont associés des comportements particuliers dans les directions normale et tangentielle.

#### **1.1.4.3 Modélisation de conditions aux limites sur les bords d'un échantillon de milieu fibreux**

Dans la majorité des cas, on ne modélise qu'un échantillon représentatif délimité au sein de la structure enchevêtrée considérée, et on doit donc représenter à l'aide de conditions aux limites sur les frontières de l'échantillon, ses interactions avec les parties extérieures non prises en compte dans le modèle. Les milieux étudiés se présentant souvent comme des assemblages sur plusieurs niveaux de fils et filaments élémentaires, afin de prendre en compte la déformabilité de ce milieu au niveau de ses frontières, il apparaît important de pouvoir considérer des conditions aux limites adaptées à cette hiérarchie d'assemblage. Le quatrième chapitre est consacré au développement de conditions aux limites couplant des aspects hiérarchiques et des formulations en moyenne afin de prendre en compte la continuité du milieu au-delà des frontières de l'échantillon considéré.

### **1.1.5 Applications**

Le dernier chapitre de ce mémoire passe en revue différents exemples d'applications mettant en œuvre la démarche proposée.



# Chapitre 2

## Modélisations de poutres

### 2.1 Introduction

La simulation de milieux enchevêtrés demande en premier lieu d'être en mesure de représenter le comportement mécanique de fibres ou de fils subissant de grands déplacements. Différents modèles de poutre ont été développés pour représenter le comportement de ces structures minces. Au début du projet, nous nous sommes orientés vers le développement d'un modèle de poutre à directeurs de section déformables, qui se distingue notamment des modèles de poutre à sections rigides en ce qu'il décrit les transformations des sections à l'aide de deux directeurs variables plutôt que de recourir à des rotations. Si des modèles de poutre à directeurs déformables avaient déjà été introduits de manière théorique dans la littérature, la mise en œuvre d'un tel modèle dans un cadre éléments finis en grandes transformations demeure en grande partie originale. Cette première approche, qu'on peut interpréter comme un développement au premier ordre de la cinématique par rapport aux coordonnées transverses de la poutre, nous a conduit à pousser plus loin le développement, pour proposer un modèle cinématique enrichi à un ordre quelconque, destiné à simuler le comportement de structures minces présentant des déformations de section plus complexes.

La première partie de ce chapitre est consacrée à un bref panorama de modèles de poutre, mettant l'accent sur les modèles à sections déformables, afin de positionner notre approche. Le développement du modèle de poutre à directeurs déformables est ensuite présenté en détail. La dernière partie est consacrée à la formulation d'un modèle cinématique de poutre enrichi à un ordre quelconque.

### 2.2 Brève revue de modèles de poutre

Cette partie a pour but de situer l'approche proposée par rapport à d'autres modèles de poutre de la littérature. Après une brève revue des approches géométriquement exactes à sections rigides, ou de type Cosserat, nous nous concentrerons sur des modèles prenant en compte la déformabilité des sections.

#### 2.2.1 Modélisations de poutre géométriquement exactes à sections rigides

Les approches éléments finis de poutres qualifiées de "géométriquement exactes" font référence aux travaux fondateurs de Reissner (Reissner [1981]) et Simo (Simo [1985]; Simo and Vu-Quoc [1986]). Ces approches reposent sur un modèle cinématique décrivant le mouvement de chaque section de poutre à l'aide d'un champ de déplacement

définissant la position du centre de section, et d'un champ de rotation qui détermine l'orientation de la section, ces deux champs étant définis à partir de six degrés de liberté cinématiques. Une formulation faible, sous la forme d'un principe des puissances virtuelles, est établie à partir de ce modèle cinématique. La méthode des éléments finis est utilisée pour discrétiser et résoudre le problème. La manipulation des grandes rotations impliquées dans ce type de modélisation, ainsi que les moyens d'aborder leurs singularités, ont fait l'objet de nombreux développements.

L'hypothèse cinématique de rigidité des sections conduit à limiter les déformations considérées aux termes d'élongation, de flexion, de torsion ou de cisaillement transverse, à l'exclusion des termes décrivant les déformations planes des sections. Cela ne permet pas de prendre en compte de manière directe l'effet de Poisson, ni d'avoir recours à une loi de comportement réellement tridimensionnelle.

L'approche que nous proposons partage avec cette catégorie de modèles le fait de mettre en œuvre une formulation faible traitée par éléments finis, mais se distingue par le modèle cinématique qui fait appel à deux vecteurs directeurs de section variables, augmentant le nombre de degrés de liberté nécessaires pour décrire le mouvement de chaque section à neuf, mais permettant d'obtenir un tenseur de déformation tridimensionnel plein, et d'utiliser ainsi une loi de comportement tridimensionnelle standard, moyennant les adaptations nécessaires pour éviter certains verrouillages. Par rapport aux modèles à sections rigides, la formulation du modèle et son implémentation sont largement simplifiées par le fait de n'avoir pas à considérer de grandes rotations.

### 2.2.2 Approches par des modèles de Cosserat

Des modèles de poutre utilisant des formulations de type Cosserat ont été proposés très tôt dans le développement des travaux sur les poutres (voir par exemple Green and Laws [1966]). L'idée consiste à représenter la poutre par une courbe définie par un ensemble de points équipés de directeurs et de décrire ses déformations à l'aide des déplacements de ces points et des variations des directeurs. La formulation des équations d'équilibre sur cette courbe fait apparaître différents efforts résultants généralisés en fonction du type de directeurs choisis pour représenter la cinématique de la poutre, et conduit à une relation d'équilibre liant ces efforts résultants généralisés aux efforts appliqués à la poutre. En exprimant les relations constitutives liant les efforts résultants généralisés aux variables décrivant la cinématique de la poutre, on aboutit à un système d'équations différentielles qui peut être résolu de différentes manières.

La complexité des développements des modèles de poutres se référant aux formulations de Cosserat est très dépendante des hypothèses faites sur les directeurs utilisés pour décrire la cinématique des sections. Une des hypothèses les plus simples consiste à représenter les déplacements des points des sections à l'aide de deux directeurs restant orthonormés au cours de la transformation. Ce type de modèles, répondant, dans la théorie développée par Antmann (Antman [2005]), à l'appellation "special Cosserat theory of rods", conduit à l'utilisation d'un effort et d'un couple résultant pour chaque section, qui peuvent s'exprimer de manière simple en fonction des variables cinématiques et de leurs dérivées au travers de relations constitutives dont les coefficients sont formulés de manière simple et directe à partir des caractéristiques élastiques du matériau et des caractéristiques géométriques de la section de la poutre.

Dès lors qu'on lève l'hypothèse d'orthonormalité des directeurs de section – ce qui correspond à l'appellation "general theories of Cosserat rods" dans l'approche d'Antman –, les développements apparaissent plus complexes. L'introduction de la déformabilité des directeurs fait en effet apparaître de nouveaux efforts résultants (couples

s'exerçant sur ces directeurs), pour lesquels les relations constitutives les liant aux variables cinématiques ne peuvent plus être formulées de manière directe. L'identification des coefficients de ces équations constitutives à partir de la comparaison avec des solutions supposées exactes à la résolution de problèmes élémentaires, a fait l'objet de différents travaux (voir notamment Green et al. [1974b] ou Rubin [2001a]).

Une des différences essentielles entre l'approche variationnelle présentée dans ce mémoire et les approches de type Cosserat tient dans la formulation des relations de comportement. Selon l'approche variationnelle, la loi de comportement est vérifiée en tout point de la section de la poutre, alors que pour les modèles de Cosserat les relations constitutives ne sont exprimées qu'au niveau des points de la fibre moyenne de la poutre. Alors que dans le premier cas il est possible d'utiliser de manière quasiment directe une loi de comportement tridimensionnelle standard, dans le cas de l'approche de type Cosserat, les coefficients des relations constitutives doivent être identifiés, par le biais de procédures qui peuvent apparaître complexes, à partir de résolutions sur des problèmes modèles, ou, s'ils sont disponibles, à partir de résultats de caractérisation expérimentale. Outre les différences de complexité dans la mise en œuvre, les approches variationnelles et de Cosserat ne conduisent pas forcément aux mêmes solutions, en particulier dans le cas de déformations non homogènes comme noté dans Rubin [2001a], ce qui peut permettre, par exemple, aux approches de type Cosserat, de s'affranchir de problèmes de verrouillage numérique (Rubin [2001b]).

### 2.2.3 Modèles de poutres à directeurs déformables

La notion de directeurs pour décrire la cinématique des sections de poutre remonte aux travaux des frères Cosserat, et a été reprise par Ericksen and Truesdell [1957] et Toupin [1964]. Cette notion permet d'associer des directions à un point (en général trois), qui sont utilisées pour définir la déformation de la matière autour de ce point. En utilisant cette notion de directeurs, une poutre peut être considérée comme une ligne dont chacun des points est doté de directeurs. Nombre d'approches considèrent une famille de trois directeurs orthonormés, ce qui revient à supposer que les sections de la poutre sont rigides. À côté de premières propositions d'enrichissement du modèle cinématique dans la section par Novozhilov [1961] et Washizu [1968], Green et Naghdi (Green et al. [1974a,b]) abandonnent cette hypothèse de rigidité des sections et prennent même en compte ce qu'on peut considérer comme une famille infinie de directeurs en exprimant la position  $\mathbf{p}$  d'une particule de la poutre sous la forme :

$$\mathbf{p}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \mathbf{r}(\xi_3, t) + \sum_{N=1}^{\infty} \xi_{\alpha_1} \xi_{\alpha_2} \cdots \xi_{\alpha_N} \mathbf{d}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N}(\xi_3, t), \text{ avec } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N = 1, 2, \quad (2.1)$$

les vecteurs  $(\mathbf{d}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N})$  permettant de représenter des modes de déformation de section de la poutre s'exprimant de manière polynômiale par rapport aux coordonnées transverses  $(\xi_1, \xi_2)$ .

Dans la majeure partie de ses développements sur les poutres, Antman retient l'hypothèse de directeurs  $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)$  orthonormés. Il évoque cependant la possibilité de suspendre cette hypothèse, et propose brièvement la possibilité d'augmenter le nombre de directeurs en exprimant la position d'une particule sous la forme :

$$\mathbf{p}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \mathbf{r}(\xi_3, t) + \xi_1 \mathbf{d}_1(\xi_3, t) + \xi_2 \mathbf{d}_2(\xi_3, t) + \xi_1^2 \mathbf{d}_{11}(\xi_3, t) + \xi_1 \xi_2 \mathbf{d}_{12}(\xi_3, t) + \xi_2^2 \mathbf{d}_{22}(\xi_3, t), \quad (2.2)$$

qui correspond à une limitation à l'ordre  $N = 2$  de la cinématique 2.1 de Green et al. [1974a,b]. Cette possibilité est simplement évoquée, sans conduire à des développements particuliers.

## Lois constitutives

Les travaux de Green et al. [1974a,b] abordent la question des lois constitutives qui relient les efforts (efforts résultants ou contraintes) aux variables cinématiques de manière théorique, en ayant recours à deux approches différentes : la première à partir de la théorie tridimensionnelle de l'élasticité, la seconde, qualifiée de directe, en suivant la démarche des milieux de Cosserat.

Des efforts résultants correspondant à l'intégration de différents moments dans la section des contraintes  $\mathbf{T}^i$  s'exerçant sur des facettes de normale unitaire de direction  $\mathbf{a}_i$  dans la configuration de référence sont définis de la manière suivante :

$$\mathbf{n} = \int_S \mathbf{T}^3 d\xi_1 d\xi_2; \quad (2.3)$$

$$\mathbf{p}^{\alpha_1 \dots \alpha_N} = \int_S \mathbf{T}^3 \xi_{\alpha_1} \dots \xi_{\alpha_N} d\xi_1 d\xi_2; \quad (2.4)$$

$$\pi^\alpha = \int_S \mathbf{T}^\alpha d\xi_1 d\xi_2; \quad (2.5)$$

$$\pi^{\alpha_1 \dots \alpha_N} = \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{i=1}^N \int_S \mathbf{T}^{\alpha_i} \xi_{\alpha_1} \dots \xi_{\alpha_{i-1}} \xi_{\alpha_{i+1}} \dots \xi_{\alpha_N} d\xi_1 d\xi_2. \quad (2.6)$$

et représentent respectivement la résultante et les moments de différents ordres de la contrainte axiale, les résultantes et les moments des efforts s'appliquant aux différents directeurs. La théorie de l'élasticité tridimensionnelle permet de définir le tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\tau}$  à partir de la dérivée d'une énergie libre spécifique  $\psi$  par rapport au tenseur de déformation  $\boldsymbol{\gamma}$  sous la forme :

$$\boldsymbol{\tau} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\gamma}},$$

où  $\rho$  représente la masse volumique. En intégrant ces contraintes dans la section, on aboutit à des équations constitutives exprimant les efforts résultants des équations (2.3) aux dérivées d'une énergie sous la forme :

$$\mathbf{n} = \lambda \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \mathbf{a}_3}, \pi^\alpha = \lambda \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \mathbf{d}_\alpha}, \mathbf{p}^\alpha = \lambda \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \mathbf{d}'_\alpha}, \pi^{\alpha_1 \dots \alpha_N} = \lambda \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \mathbf{d}'_{\alpha_1 \dots \alpha_N}}, \quad (2.7)$$

où  $\lambda$  représente la densité linéique de la poutre. Ces travaux fournissent un cadre général à la formulation de lois constitutives pour un modèle de poutre à sections déformables décrites par une famille infinie de directeurs.

Les mêmes auteurs parviennent à des équations constitutives similaires, pour un modèle à deux directeurs déformables, par une approche qualifiée de directe, suivant la méthodologie des milieux de Cosserat. En ne conservant que les deux premiers directeurs  $\mathbf{d}_1$  et  $\mathbf{d}_2$  du développement 2.1, et en notant respectivement  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{p}^\alpha$  et  $\pi^\alpha$  l'effort résultant exercé sur la section, les efforts résultants exercés sur les directeurs et les moments de ces derniers, et en formulant les différentes lois de conservation de Cosserat sur une petite portion de poutre, et en notant  $\bar{\psi}$  l'énergie libre spécifique linéique, on aboutit aux équations constitutives

$$\mathbf{n} = \lambda \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \mathbf{a}_3}, \pi^\alpha = \lambda \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \mathbf{d}_\alpha}, \mathbf{p}^\alpha = \lambda \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \mathbf{d}'_\alpha}. \quad (2.8)$$

## 2.2.4 Approche ANCF

### 2.2.4.1 Motivation de l'approche

L'approche dite ANCF (absolute nodal coordinate formulation) est apparue dans le domaine de la dynamique multi-corps pour répondre aux problèmes liés au caractère non iso-paramétrique des éléments finis de poutre s'appuyant sur des modèles cinématiques utilisant des rotations pour décrire le mouvement des sections de poutres. Cet aspect non-isoparamétrique est lié au fait que la matrice de rotation s'exprime de manière non-linéaire par rapport à ses paramètres rassemblés sous la forme d'un vecteur rotation  $\theta$ . Ceci entraîne que le mouvement d'une section en un point d'abscisse curviligne quelconque sur un élément fini, engendré par la rotation calculée à partir de l'interpolation des vecteurs rotation aux nœuds de l'élément, ne correspond pas forcément à l'interpolation des mouvements des sections aux nœuds de l'élément, avec pour conséquence notable que l'application d'une rotation rigide à cet élément est susceptible de générer une déformation parasite additionnelle. Une autre difficulté rencontrée dans le domaine de la dynamique multi-corps vient du fait qu'en utilisant une cinématique utilisant les rotations, la matrice de masse de chaque élément fini s'exprime de manière non-linéaire par rapport aux paramètres de la rotation. Ce sont ces difficultés liées à l'usage des rotations et à l'aspect non isoparamétrique de la formulation qui en découle, qui ont conduit au développement de formulations en coordonnées nodales absolues (voir notamment Shabana [1996, 1997a,b]; Yakoub and Shabana [2001]; Gerstmayr et al. [2013]).

À l'origine, l'approche ANCF vise donc à s'affranchir de la description de la cinématique de poutres à l'aide de rotations afin de rendre isoparamétriques les éléments finis utilisés. Une des particularités de l'approche est qu'elle ne se fonde pas sur un modèle décrivant la cinématique en tout point d'une ligne moyenne de manière continue, mais qu'elle se présente d'emblée sous une forme discrétisée, en exprimant la cinématique de tout point au sein d'un élément fini en fonction de grandeurs appelées coordonnées nodales absolues définies aux nœuds de cet élément.

### 2.2.4.2 Cinématique

Au niveau cinématique, l'approche ANCF exprime la position  $\mathbf{r}$  d'un point de coordonnées relatives  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  sur un élément fini de poutre sous la forme d'une somme de produits de fonctions de forme par des vecteurs définis aux nœuds de l'élément :

$$\mathbf{r}(\xi) = \left[ \begin{array}{cccccccc} S_0^A(\xi)\mathbf{I} & S_1^A(\xi)\mathbf{I} & S_2^A(\xi)\mathbf{I} & S_3^A(\xi)\mathbf{I} & S_0^B(\xi)\mathbf{I} & S_1^B(\xi)\mathbf{I} & S_2^B(\xi)\mathbf{I} & S_3^B(\xi)\mathbf{I} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{,0}^A \\ \mathbf{r}_{,1}^A \\ \mathbf{r}_{,2}^A \\ \mathbf{r}_{,3}^A \\ \mathbf{r}_{,0}^B \\ \mathbf{r}_{,1}^B \\ \mathbf{r}_{,2}^B \\ \mathbf{r}_{,3}^B \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

où les  $S_0^I$  sont des fonctions de forme polynômiales en  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , et où les vecteurs cinématiques  $(\mathbf{r}_{,0}^I, \mathbf{r}_{,1}^I, \mathbf{r}_{,2}^I, \mathbf{r}_{,3}^I)$ , appelés coordonnées nodales, représentent respectivement la position du centre de la section au nœud  $I$ , et les trois pentes correspondant aux

dérivées de la position par rapport aux coordonnées  $\xi_i$  :

$$\mathbf{r}_{,i}^A = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_i}(0, 0, 0); \quad \mathbf{r}_{,i}^B = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_i}(0, 0, 1).$$

L'équation (2.9) peut se réécrire de manière condensée, en utilisant la convention de sommation sur les indices répétés, sous la forme :

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\xi}) = S_p^I(\boldsymbol{\xi})\mathbf{r}_{,p}^I, \quad (2.10)$$

l'indice  $p$  variant de 0 à 3 et l'exposant  $I$  désignant successivement les deux nœuds de l'élément.

L'intérêt recherché par cette approche est l'aspect isoparamétrique de la formulation en s'affranchissant de l'usage de rotations. En effet, la position de tout point de l'élément s'exprimant de manière linéaire par rapport aux coordonnées nodales de l'élément, l'application de mouvements de corps rigide n'entraîne aucune déformation supplémentaire dans l'élément, et la matrice de masse de cet élément est constante.

En choisissant une cinématique s'exprimant de manière cubique par rapport à l'abscisse curviligne  $\xi_3$  le long de l'élément et de manière linéaire par rapport aux coordonnées transverses ( $\xi_1, \xi_2$ ), la formulation des conditions de continuité aux deux extrémités de l'élément conduit aux expressions suivantes des fonctions de forme :

$$\begin{aligned} S_0^A(\boldsymbol{\xi}) &= 1 - 3\xi_3^2 + 2\xi_3^3, & S_0^B(\boldsymbol{\xi}) &= 3\xi_3^2 - 2\xi_3^3, \\ S_1^A(\boldsymbol{\xi}) &= \xi_1 - \xi_1\xi_3, & S_1^B(\boldsymbol{\xi}) &= \xi_1\xi_3, \\ S_2^A(\boldsymbol{\xi}) &= \xi_2 - \xi_2\xi_3, & S_2^B(\boldsymbol{\xi}) &= \xi_2\xi_3, \\ S_3^A(\boldsymbol{\xi}) &= \xi_3 - 2\xi_3^2 + \xi_3^3, & S_3^B(\boldsymbol{\xi}) &= -\xi_3^2 + \xi_3^3. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Les deux premières pentes  $\mathbf{r}_{,1}^I$  et  $\mathbf{r}_{,2}^I$  s'interprètent comme des directeurs qui définissent la forme des sections aux nœuds. La troisième pente  $\mathbf{r}_{,3}^I$ , qui représente la tangente à la ligne moyenne aux extrémités, n'a d'influence que sur la ligne moyenne de l'élément, et n'intervient pas dans le positionnement des sections puisque les fonctions de base  $S_3^I$  attachées à cette pente ne dépendent que de  $\xi_3$ . On note que les orientations des sections sont interpolées par des fonctions linéaires en  $\xi_3$  (fonctions  $S_1^I$  et  $S_2^I$ ), alors que la ligne moyenne est interpolée par des fonctions cubiques  $\xi_3$  (fonctions  $S_0^I$  et  $S_3^I$ ).

Cette formulation conduit à des éléments finis présentant 12 degrés de liberté par nœuds, avec une interpolation cubique dans la direction longitudinale et linéaire dans les directions transverses.

### 2.2.4.3 Déformations

La position  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\xi})$  d'un point de l'élément dans la configuration initiale s'exprime en fonction des coordonnées nodales notées  $\mathbf{r}_{,p}^I$  dans cette même configuration initiale sous la forme :

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\xi}) = S_p^I(\boldsymbol{\xi})\mathbf{r}_{,p}^I. \quad (2.12)$$

Le gradient de la transformation  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi})$  se calcule comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{R}} \\ &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \frac{\partial \mathbf{R}^{-1}}{\partial \boldsymbol{\xi}}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

À partir de l'équation (2.10), on peut exprimer

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} = \frac{\partial S_i^I(\xi)}{\partial \xi_i} \mathbf{r}_i^I \otimes \mathbf{e}_i \quad (2.14)$$

En notant  $\mathbf{G}^i$  les vecteurs contravariants dans la configuration initiale, définis par

$$\mathbf{G}^i(\xi) = \frac{\partial \mathbf{R}(\xi)^{-T}}{\partial \xi} \mathbf{e}_i \quad (2.15)$$

on exprime finalement le gradient de la transformation sous la forme :

$$\mathbf{F}(\xi) = \frac{\partial S_p^I(\xi)}{\partial \xi_i} \mathbf{r}_p^I \otimes \mathbf{G}^i(\xi), \quad (2.16)$$

ce qui permet d'aboutir à l'expression du tenseur des déformations de Cauchy-Green, noté  $\mathbf{C}$ , pour les éléments ANCF sous la forme :

$$\mathbf{C}(\xi) = \mathbf{F}(\xi)^T \mathbf{F}(\xi) = \frac{\partial S_p^I(\xi)}{\partial \xi_i} \frac{\partial S_q^J(\xi)}{\partial \xi_j} (\mathbf{r}_p^I, \mathbf{r}_q^J) \mathbf{G}^i(\xi) \otimes \mathbf{G}^j(\xi). \quad (2.17)$$

Cette expression permet de faire apparaître les composantes du tenseur  $\mathbf{C}$  sur les tenseurs  $\mathbf{G}^i(\xi) \otimes \mathbf{G}^j(\xi)$  comme des produits de dérivées de fonctions de base et de produits scalaires entre vecteurs de coordonnées nodales aux nœuds. L'examen des degrés des polynômes des dérivées des fonctions de base met en évidence les ordres différents des fonctions d'interpolation de ces composantes de déformation. On remarque en effet :

— que certaines dérivées de fonctions de forme sont nulles :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_0^I(\xi)}{\partial \xi_\alpha} &= \frac{\partial S_3^I(\xi)}{\partial \xi_\alpha} = 0 \text{ pour } \alpha = 1, 2; \\ \frac{\partial S_\alpha^I(\xi)}{\partial \xi_\beta} &= 0 \text{ pour } \alpha, \beta = 1, 2 \text{ et } \alpha \neq \beta; \end{aligned}$$

— que les dérivées  $\partial_3 S_0^I$  et  $\partial_3 S_3^I$  sont des polynômes d'ordre 2 en  $\xi_3$  ;

— que les dérivées  $\partial_\alpha S_\alpha^I$  sont des fonctions linéaires de  $\xi_3$  ;

— que les dérivées  $\partial_3 S_\alpha^I$  sont des fonctions linéaires de  $\xi_\alpha$ .

Ceci permet de déduire que selon cette formulation, les déformations dans la section de la poutre (termes  $\alpha\text{--}\beta$ ) sont constantes dans la section et quadratiques par rapport à la composante axiale, que les déformations de cisaillement (termes  $\alpha\text{--}3$  et  $3\text{--}\alpha$ ) sont linéaires dans la section et cubiques dans la direction axiale, et que les déformations d'élongation (termes  $3\text{--}3$ ) sont quadratiques par rapport aux coordonnées transverses et d'ordre 4 dans la direction axiale.

Le fait qu'aucune des composantes des déformations n'est a priori nulle permet d'envisager l'utilisation de lois de comportement tridimensionnelles usuelles pour exprimer le tenseur des contraintes en fonction des déformations. Les différences entre les ordres d'interpolation pour les différentes composantes de déformation, laissent cependant prévoir des problèmes de verrouillages numériques, auxquels se sont consacrées différentes études (Gerstmayr and Matikainen [2006]; Gerstmayr and Shabana [2006]; Schwab and Meijaard [2010]; Nachbagauer et al. [2011]).

## 2.2.5 Approche CUF (Carrera Unified Formulation)

Carrera and Giunta [2010] ont introduit une première formulation de modèle de poutre reposant sur un développement polynômial de la cinématique par rapport aux coordonnées de section, reprenant une idée précédemment développée sur des modèles de plaque et de coque (Carrera [2003]). Ils proposent d'exprimer le champ de déplacement en tout point de la poutre sous la forme :

$$\mathbf{u}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{\tau} F_{\tau}(\xi_1, \xi_2) \mathbf{u}_{\tau}(\xi_3), \quad (2.18)$$

où les fonctions  $F_{\tau}(\xi_1, \xi_2)$  correspondent aux polynômes de Mac Laurin, c'est-à-dire aux monômes obtenus pour un développement de Taylor à l'ordre  $N$  d'une fonction de deux variables, soit :

$$\begin{aligned} &\text{à l'ordre } N = 0; F_1(\xi_1, \xi_2) = 1; \\ &\text{à l'ordre } N = 1; F_2(\xi_1, \xi_2) = \xi_1; F_3(\xi_1, \xi_2) = \xi_2; \\ &\text{à l'ordre } N = 2; F_4(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^2; F_5(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 \xi_2; F_6(\xi_1, \xi_2) = \xi_2^2; \\ &\text{à l'ordre } N = 3; F_7(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^3; F_8(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^2 \xi_2; F_9(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 \xi_2^2; F_{10}(\xi_1, \xi_2) = \xi_2^3; \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.19)$$

Cette formulation, en reprenant une idée proposée par Washizu [1968] introduit un développement polynômial à un ordre quelconque de la cinématique par rapport aux coordonnées de section. Son développement est motivé à l'origine par la prise en compte de modes de déformation complexes des sections de poutres, en particulier pour les poutres à parois minces, tels que les modes de gauchissement apparaissant sous des sollicitations de torsion. Cette approche est mise en œuvre au départ dans un cadre de petites déformations linéaires.

Les coûts de calcul en adoptant cette formulation reposant sur un développement de Taylor à l'ordre  $N$  augmentent rapidement avec l'ordre considéré, le nombre de champs cinématiques considérés se calculant comme  $\frac{N(N+1)}{2}$ . Pour des poutres à parois minces et à sections complexes, l'ordre de développement nécessaire pour obtenir des résultats de bonne précision peut rendre cette approche trop coûteuse par rapport à une discrétisation tridimensionnelle du volume de la poutre. Pour pallier cette difficulté, Carrera and Petrolo [2012] ont proposé, plutôt que de considérer une interpolation de la solution à l'aide de polynômes homogènes sur l'ensemble de la section, d'adopter une approximation à l'aide de polynômes de Lagrange définis sur des sous-domaines rectangulaires de la section.

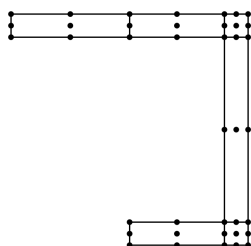


FIGURE 2.1 – Sous-domaines et nœuds pour l'interpolation de la cinématique dans une section de poutre à parois minces à l'aide de polynômes de Lagrange (Carrera and Petrolo [2012])



Les polynômes de Lagrange utilisés pour interpoler la solution dans la section s'expriment en fonction des déplacements aux nœuds (Figure 2.1). Les modes de déformation  $\mathbf{u}_\tau$  (Eq. 2.18) pour exprimer la cinématique dans la section s'expriment donc, dans cette nouvelle approche, en fonction de déplacements aux nœuds de la section. Ce type de formulation constitue comme un intermédiaire entre un modèle de poutre à cinématique enrichie dans la section, et une discrétisation tridimensionnelle standard, avec des degrés d'interpolation différents dans la direction longitudinale et dans la section de la poutre.

Au niveau comportement, la formulation CUF, tirant parti du fait qu'aucune des composantes du tenseur des déformation n'est nulle a priori, recourt à une expression standard du tenseur des contraintes en fonction des déformations en fonction à l'aide du tenseur d'élasticité.

Cette approche n'a été étendue que récemment au cadre des déformations non-linéaires pour analyser des flambements sur des poutres à parois minces Pagani and Carrera [2018].

## 2.3 Proposition d'un modèle de poutre à section déformable au premier ordre

### 2.3.1 Motivations

Le modèle de poutre à sections déformables proposé a été développé dans les années 1990 (Durville [1998]) pour représenter le comportement des fils constituant les câbles métalliques dans Multifil. L'objectif était de disposer d'un modèle simple et robuste. Devant la relative complexité de mise en œuvre des modèles de poutre à section rigide, en particulier pour ce qui concerne le traitement des grandes rotations, nous nous sommes orientés vers un modèle de poutre décrivant la cinématique des sections à l'aide de directeurs non contraints. Nous avons suivi en cela une démarche analogue à celle que nous avons développée dans ma thèse portant sur la simulation du procédé d'emboutissage, en proposant un enrichissement cinématique du modèle de plaque destiné à prendre en compte de manière plus fine les phénomènes d'écrasement de la tôle sous les serre-flans, ou de flexion dans les zones à forte courbure (Durville [1993]; Ben Dhia and Durville [1995]), cet enrichissement consistant à supposer que les déplacements dans la plaque s'expriment comme des polynômes du premier et second ordre par rapport à la coordonnée dans l'épaisseur de la plaque. Le modèle cinématique de poutre à sections déformables décrit dans la suite apparaît comme une extension de ce qui avait été proposé dans le cas des plaques au cas de poutres.

Même si le recours à des directeurs non contraints, c'est-à-dire non orthonormés, pour décrire la cinématique de sections de poutre n'a pas forcément en soi une grande originalité, il n'a pas donné lieu à notre connaissance à des développements pratiques dans les modèles de simulation de poutre, et en particulier dans le domaine des grandes déformations. Le fait qu'une telle approche fait appel à neuf degrés de liberté pour décrire la cinématique d'une section au lieu de six degrés de liberté pour les modèles à sections rigides, associé au constat que dans une grande partie des applications les déformations de section restent négligeables, peut expliquer le moindre intérêt manifesté pour ce type de modèle.

Dans le cas de l'application aux câbles métalliques qui a motivé le développement du modèle présenté, pour garantir une bonne précision, il apparaît cependant important de tenir compte des déformations de section, ne serait-ce que pour tenir compte de l'effet de Poisson, c'est-à-dire de la réduction de la section des fils sous l'effet de leur

allongement. Ce besoin de précision géométrique, associé à la simplicité de mise en œuvre du modèle de poutre à directeurs non contraints, constituent les principales motivations du modèle présenté.

### 2.3.2 Modèle cinématique à l'ordre 1

Un modèle cinématique de poutre vise à décrire la cinématique dans le volume de la poutre, c'est-à-dire la position de chaque point de la poutre, à l'aide de champs définis sur la fibre moyenne de la poutre. L'approche mise en œuvre ici consiste à proposer une cinématique s'exprimant linéairement par rapport aux coordonnées transverses, d'une manière analogue à un développement limité au premier ordre.

Le modèle cinématique de poutre à sections déformables consiste à décrire la cinématique de la poutre comme un développement limité au premier ordre par rapport aux coordonnées transverses.

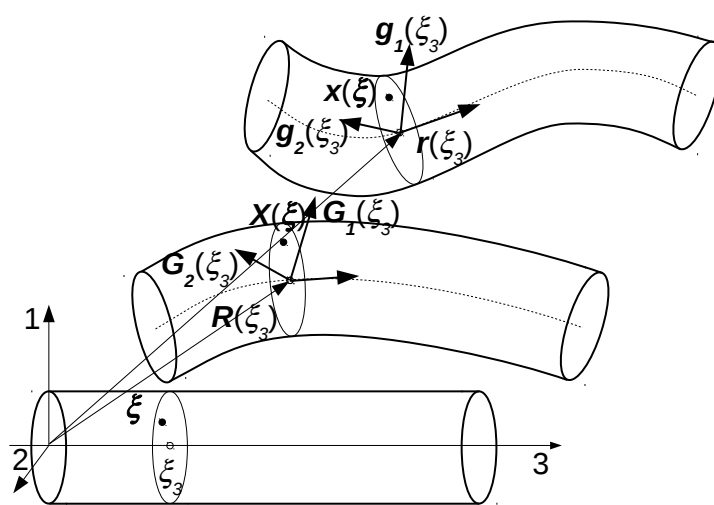


FIGURE 2.2 – Modèle cinématique de poutre

Pour formuler ce modèle, nous commençons par considérer une poutre occupant dans sa configuration de référence, ou matérielle, un volume  $\Omega_\xi$  décrit par un cylindre de longueur  $L$  et de section circulaire de rayon  $R$ , ayant une génératrice orientée suivant l'axe 3 du repère (Figure 2.2) :

$$\Omega_\xi = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_1^2 + \xi_2^2 \leq R^2, 0 \leq \xi_3 \leq L \right\}. \quad (2.20)$$

Cette configuration de référence permet de paramétrer les particules matérielles et les sections constituant cette poutre, une section donnée étant identifiée par son abscisse curviligne  $\xi_3$ , et chaque particule de cette section étant définie par ses coordonnées transverses  $\xi_1$  et  $\xi_2$ .

Le modèle cinématique consiste à décrire le positionnement de chaque particule. Si on note  $x^{3D}(\xi, t)$  le placement à l'instant  $t$  de toute particule matérielle  $\xi$  de la poutre, nous proposons dans un premier temps de considérer le développement limité au premier ordre de ce placement par rapport aux coordonnées transverses, qui s'exprime sous la forme :

$$x^{3D}(\xi, t) = x^{3D}(0, 0, \xi_3, t) + \xi_1 \frac{\partial x^{3D}}{\partial \xi_1}(0, 0, \xi_3, t) + \xi_2 \frac{\partial x^{3D}}{\partial \xi_2}(0, 0, \xi_3, t) + o(\xi_1, \xi_2, t). \quad (2.21)$$

On propose alors comme modèle cinématique, de ne retenir que les termes de premier ordre de ce développement, en exprimant le placement  $x(\xi, t)$  à chaque instant  $t$  de toute particule matérielle  $\xi$  de la poutre sous la forme :

$$x(\xi, t) = r(\xi_3, t) + \xi_\alpha g_\alpha(\xi_3, t), \quad (\alpha = 1, 2). \quad (2.22)$$

Selon ce modèle, la position de chaque particule d'une section de poutre d'abscisse curviligne  $\xi_3$  est définie à l'aide de trois vecteurs cinématiques : la position  $r(\xi_3, t)$  du centre de cette section, et deux directeurs de section notés  $g_\alpha(\xi_3, t)$  qui, suivant l'analogie avec le développement limité, correspondent aux dérivées  $\frac{\partial x^{3D}}{\partial \xi_\alpha}$ . Dans cette approche, aucune hypothèse n'est formulée sur ces directeurs de section : leurs normes, ainsi que l'angle formé entre les deux vecteurs peuvent donc varier librement ; ils sont considérés comme non contraints.

Le placement des particules s'exprimant de manière linéaire par rapport aux coordonnées de section à l'aide des deux directeurs  $g_1$  et  $g_2$ , les sections de la poutre restent planes dans toutes les configurations. En l'absence de contraintes particulières sur ces mêmes directeurs, ces sections peuvent cependant se déformer en fonction des variations des directeurs.

Pour simplifier les écritures, on omettra la référence explicite au temps, et on notera  $x, r$  et  $g_\alpha$ , les vecteurs cinématiques décrivant la configuration actuelle, et  $X, R$  et  $G_\alpha$ , ceux relatifs à la configuration initiale de la poutre :

$$\begin{aligned} X(\xi) &= x(\xi, 0); \\ R(\xi_3) &= r(\xi_3, 0); \\ G_\alpha(\xi_3) &= g_\alpha(\xi_3, 0). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Le champ de déplacement, noté  $u(\xi)$ , correspondant à ce modèle cinématique s'exprime de manière linéaire par rapport aux coordonnées transverses :

$$\begin{aligned} u(\xi) &= x(\xi) - X(\xi) \\ &= r(\xi_3) - R(\xi_3) + \xi_\alpha (g_\alpha(\xi_3) - G_\alpha(\xi_3)) \\ &= q(\xi_3) + \xi_\alpha h_\alpha(\xi_3), \end{aligned} \quad (2.24)$$

où :

$$\begin{aligned} q(\xi_3) &= r(\xi_3) - R(\xi_3), \\ h_\alpha(\xi_3) &= g_\alpha(\xi_3) - G_\alpha(\xi_3), \end{aligned} \quad (2.25)$$

représentent respectivement la translation du centre de la section et les variations de deux vecteurs directeurs de section.

### 2.3.2.1 Gradient de la configuration initiale, bases covariantes et contravariantes

On note  $\Phi$  le gradient de la configuration initiale par rapport à la configuration de référence, calculé comme :

$$\Phi(\xi) = \frac{\partial X}{\partial \xi}(\xi) = \frac{\partial X}{\partial \xi_i}(\xi) \otimes e_i = G_\alpha(\xi_3) \otimes e_\alpha + (R'(\xi_3) + \xi_\alpha G'_\alpha(\xi_3)) \otimes e_3. \quad (2.26)$$

Ce gradient se décompose en une partie constante dans la section et une partie linéaire par rapport aux coordonnées de section sous la forme :

$$\Phi(\xi) = \Phi_0(\xi_3) + \xi_\alpha \Phi_\alpha(\xi_3); \quad (2.27)$$

avec :

$$\Phi_0(\xi_3) = G_\alpha(\xi_3) \otimes e_\alpha + R'(\xi_3) \otimes e_3; \quad (2.28)$$

$$\Phi_\alpha(\xi_3) = G'_\alpha(\xi_3) \otimes e_3. \quad (2.29)$$

Ces tenseurs  $\Phi_0$  et  $\Phi_\alpha$ , ne dépendant que de l'abscisse curviligne  $\xi_3$ , représentent respectivement les parties constante et linéaire du gradient  $\Phi$ .

En notant

$$G_3(\xi_3) = R'(\xi_3), \quad (2.30)$$

la famille des vecteurs  $(G_i(\xi_3))$  constitue la base covariante sur la fibre moyenne de la poutre dans sa configuration initiale, définie par :

$$G_i(\xi_3) = \left. \frac{\partial X}{\partial \xi_i} \right|_{\xi_1=\xi_2=0} = \Phi_0(\xi_3) e_i. \quad (2.31)$$

On définit la base contravariante associée sur la fibre moyenne de la poutre dans sa configuration initiale, notée  $(G^i(\xi_3))$  par :

$$G^i(\xi_3) = [\Phi_0(\xi_3)]^{-T} e_i. \quad (2.32)$$

### 2.3.2.2 Gradient de la transformation

Le gradient de la transformation, noté  $F$  et défini par

$$F = \frac{\partial x}{\partial X}, \quad (2.33)$$

peut s'exprimer par rapport à la configuration de référence en faisant intervenir la composition suivante :

$$\begin{aligned} F &= \frac{\partial x}{\partial X} \\ &= \frac{\partial (X + u)}{\partial X} \\ &= I + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} \\ &= I + \frac{\partial u}{\partial \xi} \left( \frac{\partial X}{\partial \xi} \right)^{-1} \\ &= I + \frac{\partial u}{\partial \xi} \Phi^{-1}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Le gradient du déplacement se calcule à partir de l'expression (2.24) sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \otimes e_i = h_\alpha(\xi_3) \otimes e_\alpha + (q'(\xi_3) + \xi_\alpha h'_\alpha(\xi_3)) \otimes e_3. \quad (2.35)$$

#### 2.3.2.2.1 Approximation de l'inverse du gradient du placement initial par un développement limité

Le gradient de la transformation actuelle  $F$  (2.34) fait intervenir l'inverse du gradient de la configuration initiale par rapport à la configuration de référence  $\Phi^{-1}$ . Pour obtenir une expression polynômiale du gradient  $F$  par rapport aux coordonnées transverses  $\xi_\alpha$ , nous avons besoin de formuler le tenseur  $\Phi^{-1}$  de manière polynômiale. Une telle

formulation polynômiale de l'inverse n'est cependant pas possible dans le cas général, et nous devons avoir recours dans ce cas à une approximation par un développement limité en écrivant :

$$\begin{aligned}\Phi^{-1} &= (\Phi_0 + \xi_\alpha \Phi_\alpha)^{-1} \\ &= [\Phi_0 (\mathbf{I} + \xi_\alpha \Phi_0^{-1} \Phi_\alpha)]^{-1} \\ &= (\mathbf{I} + \xi_\alpha \Phi_0^{-1} \Phi_\alpha)^{-1} \Phi_0^{-1},\end{aligned}$$

et en utilisant le développement limité à l'ordre 1 :

$$(\mathbf{I} + \xi_\alpha \Phi_0^{-1} \Phi_\alpha)^{-1} = \mathbf{I} - \xi_\alpha \Phi_0^{-1} \Phi_\alpha + o(\xi_\alpha), \quad (2.36)$$

pour obtenir l'approximation suivante :

$$\Phi^{-1} \approx \Phi_0^{-1} - \xi_\alpha \Phi_0^{-1} \Phi_\alpha \Phi_0^{-1}. \quad (2.37)$$

En intégrant l'expression du tenseur  $\Phi_\alpha$  (2.29), on peut réécrire :

$$\begin{aligned}\Phi^{-1} &\approx \Phi_0^{-1} - \xi_\alpha \Phi_0^{-1} (G'_\alpha \otimes e_3) \Phi_0^{-1} \\ &\approx \Phi_0^{-1} - \xi_\alpha \Phi_0^{-1} (G'_\alpha \otimes (\Phi_0^{-T} e_3)) \\ &\approx \Phi_0^{-1} - \xi_\alpha \Phi_0^{-1} (G'_\alpha \otimes G^3),\end{aligned} \quad (2.38)$$

en faisant intervenir le vecteur contravariant  $G^3$  (2.32).

En introduisant dans l'expression du tenseur  $\mathbf{F}$  (2.34), les expressions du gradient du déplacement (2.35) et du développement limité (2.38), on peut formuler l'approximation suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &\approx \mathbf{I} + [h_\alpha \otimes e_\alpha + (q' + \xi_\alpha h'_\alpha) \otimes e_3] [\Phi_0^{-1} - \xi_\beta \Phi_0^{-1} (G'_\beta \otimes G^3)] \\ &\approx \mathbf{I} + h_\alpha \otimes (\Phi_0^{-T} e_\alpha) - \xi_\beta (\Phi_0^{-1} G'_\beta e_\alpha) h_\alpha \otimes G^3 \\ &\quad + q' \otimes (\Phi_0^{-T} e_3) - \xi_\beta (e_3, \Phi_0^{-1} G'_\beta) q' \otimes G^3 \\ &\quad + \xi_\alpha h'_\alpha \otimes (\Phi_0^{-T} e_3) - \xi_\alpha \xi_\beta (\Phi_0^{-1} G'_\beta e_3) h'_\alpha \otimes G^3 \\ &\approx \mathbf{I} + h_\alpha \otimes G^\alpha + q' \otimes G^3 + \xi_\alpha [h'_\alpha \otimes G^3 - (G'_{\alpha'} G^\beta) h_\beta \otimes G^3 - (G'_{\alpha'} G^3) q' \otimes G^3] \\ &\quad - \xi_\alpha \xi_\beta (G'_{\beta'} G^3) h'_\alpha \otimes G^3,\end{aligned} \quad (2.39)$$

Cette approximation s'exprime sous la forme du développement polynômial :

$$\mathbf{F}(\xi) \approx \mathbf{F}_0(\xi_3) + \xi_\alpha \mathbf{F}_\alpha(\xi_3) + \xi_\alpha \xi_\beta \mathbf{F}_{\alpha\beta}(\xi_3), \quad (2.40)$$

avec :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_0 &= \mathbf{I} + h_\alpha \otimes G^\alpha + q' \otimes G^3, \\ \mathbf{F}_\alpha &= h'_\alpha \otimes G^3 - (G'_{\alpha'} G^\beta) h_\beta \otimes G^3 - (G'_{\alpha'} G^3) q' \otimes G^3, \\ \mathbf{F}_{\alpha\beta} &= -(G'_{\beta'} G^3) h'_\alpha \otimes G^3.\end{aligned} \quad (2.41)$$

### 2.3.2.3 Expression du tenseur des déformations

L'approximation du gradient de la transformation  $\mathbf{F}$  s'exprimant comme un polynôme d'ordre 2 par rapport aux coordonnées transverses  $\xi_\alpha$  (2.40), le tenseur des déformations de Green-Lagrange, noté  $\mathbf{E}$ , et défini par :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}), \quad (2.42)$$

peut être approximé par le développement polynômial d'ordre 4 suivant :

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}) \approx \mathbf{E}_0(\xi_3) + \xi_\alpha \mathbf{E}_\alpha(\xi_3) + \xi_\alpha \xi_\beta \mathbf{E}_{\alpha\beta}(\xi_3) + \xi_\alpha \xi_\beta \xi_\delta \mathbf{E}_{\alpha\beta\delta}(\xi_3) + \xi_\alpha \xi_\beta \xi_\gamma \xi_\delta \mathbf{E}_{\alpha\beta\gamma\delta}(\xi_3). \quad (2.43)$$

Des calculs élémentaires permettent d'aboutir aux expressions suivantes des termes de différents ordre du développement polynômial du tenseur des déformations :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{G}_\alpha + \mathbf{h}_\alpha, \mathbf{G}_\beta + \mathbf{h}_\beta) \mathbf{G}^\alpha \otimes \mathbf{G}^\beta + (\mathbf{G}_\alpha + \mathbf{h}_\alpha, \mathbf{G}_3 + \mathbf{q}') \mathbf{G}^\alpha \otimes \mathbf{G}^3 \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{G}_3 + \mathbf{q}', \mathbf{G}_3 + \mathbf{q}') \mathbf{G}^3 \otimes \mathbf{G}^3 \right] - \frac{1}{2} (\mathbf{G}_i, \mathbf{G}_j) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j, \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\alpha &= (\mathbf{h}'_\alpha - (\mathbf{G}'_{\alpha'}, \mathbf{G}^\gamma) \mathbf{h}_\gamma - (\mathbf{G}'_{\alpha'}, \mathbf{G}^3) \mathbf{q}', \mathbf{G}_\beta + \mathbf{h}_\beta) \mathbf{G}^\beta \otimes_s \mathbf{G}^3 \\ &\quad + (\mathbf{h}'_\alpha - (\mathbf{G}'_{\alpha'}, \mathbf{G}^\gamma) \mathbf{h}_\gamma - (\mathbf{G}'_{\alpha'}, \mathbf{G}^3) \mathbf{q}', \mathbf{G}_3 + \mathbf{q}') \mathbf{G}^3 \otimes_s \mathbf{G}^3, \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\alpha\beta} &= (\mathbf{G}'_{\beta'}, \mathbf{G}^3) (\mathbf{h}'_\alpha, \mathbf{G}_\gamma + \mathbf{h}_\gamma) \mathbf{G}^\gamma \otimes_s \mathbf{G}^3 + (\mathbf{G}'_{\beta'}, \mathbf{G}^3) (\mathbf{h}'_\alpha, \mathbf{G}_3 + \mathbf{q}') \mathbf{G}^3 \otimes \mathbf{G}^3 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{h}'_\alpha - (\mathbf{G}'_{\alpha'}, \mathbf{G}^\gamma) \mathbf{h}_\gamma - (\mathbf{G}'_{\alpha'}, \mathbf{G}^3) \mathbf{q}', \mathbf{h}'_\beta - (\mathbf{G}'_{\beta'}, \mathbf{G}^\delta) \mathbf{h}_\delta - (\mathbf{G}'_{\beta'}, \mathbf{G}^3) \mathbf{q}') \right] \mathbf{G}^3 \otimes \mathbf{G}^3 \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{h}'_\alpha, (\mathbf{G}'_{\gamma'}, \mathbf{G}^3) \mathbf{h}'_\beta + (\mathbf{G}'_{\beta'}, \mathbf{G}^3) \mathbf{h}'_\gamma) \right. \\ &\quad \left. - ((\mathbf{G}'_{\beta'}, \mathbf{G}^3) \mathbf{h}'_\alpha, (\mathbf{G}'_{\gamma'}, \mathbf{G}^\delta) \mathbf{h}_\delta + (\mathbf{G}'_{\gamma'}, \mathbf{G}^3) \mathbf{q}') \right. \\ &\quad \left. - ((\mathbf{G}'_{\gamma'}, \mathbf{G}^3) \mathbf{h}'_\beta, (\mathbf{G}'_{\alpha'}, \mathbf{G}^\delta) \mathbf{h}_\delta + (\mathbf{G}'_{\alpha'}, \mathbf{G}^3) \mathbf{q}') \right] \mathbf{G}^3 \otimes \mathbf{G}^3, \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\mathbf{E}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} (\mathbf{G}'_{\beta'}, \mathbf{G}^3) (\mathbf{G}'_{\delta'}, \mathbf{G}^3) (\mathbf{h}'_\alpha, \mathbf{h}'_\gamma) \mathbf{G}^3 \otimes \mathbf{G}^3. \quad (2.48)$$

#### Cas particulier d'une poutre initialement droite

Dans le cas particulier d'une poutre droite dans sa configuration initiale, caractérisée par une base covariante  $(\mathbf{G}_i)$  invariante le long de la fibre moyenne, et donc par les identités :

$$\mathbf{G}'_i(\xi_3) = 0, \quad (2.49)$$

les expressions des composantes du développement polynômial des déformations se simplifient et se réduisent à :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{G}_\alpha + \mathbf{h}_\alpha, \mathbf{G}_\beta + \mathbf{h}_\beta) \mathbf{G}^\alpha \otimes \mathbf{G}^\beta + (\mathbf{G}_\alpha + \mathbf{h}_\alpha, \mathbf{G}_3 + \mathbf{q}') \mathbf{G}^\alpha \otimes \mathbf{G}^3 \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{G}_3 + \mathbf{q}', \mathbf{G}_3 + \mathbf{q}') \mathbf{G}^3 \otimes \mathbf{G}^3 \right] - \frac{1}{2} (\mathbf{G}_i, \mathbf{G}_j) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j, \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\mathbf{E}_\alpha = (\mathbf{h}'_\alpha, \mathbf{G}_\beta + \mathbf{h}_\beta) \mathbf{G}^\beta \otimes_s \mathbf{G}^3 + (\mathbf{h}'_\alpha, \mathbf{G}_3 + \mathbf{q}') \mathbf{G}^3 \otimes_s \mathbf{G}^3, \quad (2.51)$$

$$\mathbf{E}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\mathbf{h}'_\alpha, \mathbf{h}'_\beta) \mathbf{G}^3 \otimes \mathbf{G}^3. \quad (2.52)$$

La comparaison des expressions des composantes du développement polynômial entre le cas général de poutres courbes et le cas particulier de poutres initialement droites montre que les termes d'ordre 3 et 4 proviennent de la prise en compte de la courbure initiale.

## Remarques

On peut analyser les différents termes en fonction de leurs différentes composantes sur les tenseurs  $G^i \otimes G^j$ . Ainsi, les termes en  $G^\alpha \otimes G^\beta$  représentent les déformations des sections dans leur plan, et rendent compte de la spécificité du modèle par rapport à ces déformations de section.

On remarque que pour le tenseur des déformations à l'ordre 0, aucune des composantes dans les différentes directions n'est a priori nulle. En revanche, certaines composantes s'annulent pour les termes d'ordre supérieur : il ne reste que les déformations  $\alpha-3$  et  $3-3$  à l'ordre 1, et que les déformations  $3-3$  à partir du second ordre. Ceci indique que les déformations de section sont constantes à travers chaque section. Ce constat de perte progressive de termes de déformation en fonction des ordres a des implications pour l'analyse du problème de verrouillage volumique au paragraphe suivant.

Enfin, si les expressions des termes de déformation peuvent apparaître complexes, l'implémentation des calculs dans le cadre de la méthode des éléments finis s'avère simplifiée dans la mesure où on n'a finalement besoin de formuler que les termes de différents ordres du gradient du déplacement, les termes de déformation et de dérivées de déformations étant obtenus ensuite par des opérations matricielles numériques.

## 2.3.3 Modèle rhéologique

### 2.3.3.1 Modèle hyperélastique de Saint-Venant

Tout modèle cinématique, en ce qu'il adopte certaines hypothèses pour représenter les déplacements, introduit des contraintes dans la formulation du problème mécanique. Le modèle rhéologique de comportement auquel on a recours pour représenter les efforts au sein du milieu considéré doit tenir compte de ces hypothèses ou contraintes cinématiques.

Nous avons vu que le modèle de poutre introduit permet d'exprimer un tenseur de déformations réellement tridimensionnel, c'est-à-dire pour lequel aucune des composantes n'est a priori nulle. Cela ouvre la voie à l'utilisation d'un modèle de comportement tridimensionnel classique, comme par exemple un modèle hyperélastique de type Saint-Venant, exprimant le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff, noté  $\mathbf{S}$ , en fonction du tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  sous la forme

$$\mathbf{S} = 2\mu\mathbf{E} + \lambda \text{Tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I}, \quad (2.53)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé et  $\mathbf{I}$  le tenseur identité.

L'utilisation directe d'un tel modèle de comportement conduit cependant à un phénomène de verrouillage : dans les résultats de simulation, en particulier en flexion, on observe une rigidité excessive du modèle de poutre.

### 2.3.3.2 Verrouillage de Poisson et adaptation du comportement selon le degré polynomial

Le verrouillage constaté, en particulier sur les chargements en flexion, en utilisant un modèle de comportement de Saint-Venant standard, est connu dans la littérature sous le nom de verrouillage volumique ou de verrouillage de Poisson.

Le terme  $\lambda \text{Tr}(\mathbf{E})$  de l'équation (2.53) est à l'origine de ce verrouillage. Si on considère la trace correspondant aux différents termes du développement polynomial du tenseur des déformations (2.44 à 2.48), on constate que la trace du seul terme d'ordre 0,  $\mathbf{E}_0$  fait intervenir les composantes dans les trois directions 1-1, 2-2 et 3-3, alors que pour les

termes d'ordre supérieur, les composantes de déformation  $\alpha - \beta$  étant nulles, la trace se réduit à la seule composante 3-3. Si on soumet la poutre à une flexion, on s'attend à ce que les composantes de déformation les plus importantes soient les composantes 3-3 du terme linéaire des déformations, pour traduire que la fibre supérieure de la poutre s'allonge, tandis que la fibre inférieure se comprime. Dans un modèle tridimensionnel standard, par effet de Poisson, ces déformations longitudinales des fibres supérieure et inférieure engendrent de déformations dans les directions transverses 1-1 et 2-2, ce qui est traduit dans le modèle de Saint-Venant par le terme  $\lambda \text{Tr}(\mathbf{E})$ . Le modèle cinématique de poutre utilisé ici ne permet cependant pas de traduire ce phénomène de couplage entre déformations longitudinales et transverses en flexion, puisque les composantes dans les directions transverses des termes de déformation linéaires dans la section sont nulles. C'est cette absence de termes de déformation dans les directions transverses au-delà du terme d'ordre 0 qui est à l'origine du verrouillage observé, l'effet de Poisson ne pouvant être représenté qu'à l'ordre 0.

L'analyse qui précède nous oriente sur une manière simple de résoudre le problème de verrouillage de Poisson observé, à savoir de ne conserver la prise en compte des effets de Poisson que pour le terme  $\mathbf{E}_0$  du développement polynômial des déformations, et de considérer un coefficient de Poisson nul pour les termes d'ordre supérieur.

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange s'exprimant selon le modèle cinématique adopté, comme un développement polynômial par rapport aux coordonnées transverses, si on utilise une loi de comportement linéaire, le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  peut s'exprimer sous la forme polynômiale suivante :

$$\mathbf{S}(\xi) = \mathbf{S}_0(\xi_3) + \xi_\alpha \mathbf{S}_\alpha(\xi_3) + \xi_\alpha \xi_\beta \mathbf{S}_{\alpha\beta}(\xi_3) + \xi_\alpha \xi_\beta \xi_\delta \mathbf{S}_{\alpha\beta\delta}(\xi_3) + \xi_\alpha \xi_\beta \xi_\gamma \xi_\delta \mathbf{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}(\xi_3). \quad (2.54)$$

On peut remédier au problème de verrouillage de Poisson identifié en exprimant les relations entre les termes du développement polynômial des contraintes et ceux du développement des déformations à l'aide de deux modèles de comportement distinguant les termes d'ordre 0 et les termes d'ordre supérieur, de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_0 &= 2\mu \mathbf{E}_0 + \lambda \text{Tr}(\mathbf{E}_0) \mathbf{I}, \\ \mathbf{S}_\alpha &= E \mathbf{E}_\alpha, \\ \mathbf{S}_{\alpha\beta} &= E \mathbf{E}_{\alpha\beta}, \\ \mathbf{S}_{\alpha\beta\gamma} &= E \mathbf{E}_{\alpha\beta\gamma}, \\ \mathbf{S}_{\alpha\beta\gamma\delta} &= E \mathbf{E}_{\alpha\beta\gamma\delta}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé et  $E$  le module d'Young du matériau. On notera de manière condensée :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_0 &= \mathbf{C}_0 : \mathbf{E}_0, \\ \mathbf{S}_{os} &= \mathbf{C}_{os} : \mathbf{E}_{os}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

où l'indice  $os$  désigne les termes d'ordre supérieur à zéro, et où les tenseurs  $\mathbf{C}_0$  et  $\mathbf{C}_{os}$  sont des tenseurs d'élasticité d'ordre 4.

### 2.3.3.3 Prise en compte d'un comportement élasto-plastique à partir d'un critère monodimensionnel

Les phénomènes de plasticité peuvent jouer un rôle important dans les câbles métalliques. La considération d'un comportement de type plastique peut cependant entrer



en contradiction par rapport au modèle cinématique de poutre développé. Le développement de la plasticité est en effet un phénomène essentiellement tridimensionnel, en particulier par la conservation de volume associée à l'écoulement plastique. Or, comme nous l'avons analysé précédemment à propos des problèmes de verrouillage, dans le développement polynômial du tenseur des déformations, seul le terme d'ordre zéro (constant dans la section) présente des composantes non nulles a priori dans toutes les directions, et peut représenter réellement des variations de volume. La prise en compte d'un modèle de comportement plastique tridimensionnel, associé au modèle cinématique développé, devrait nous conduire à considérer des modes de déformation plastiques uniformes dans la section.

Cependant, dans les problèmes rencontrés couramment dans les câbles métalliques, les déformations plastiques se développent très souvent sous l'effet de chargements locaux de type flexion. Dans ces cas de flexion, c'est la déformation dans la direction longitudinale, évoluant de manière linéaire et quadratique au travers de la section dans notre modèle cinématique, qui apparaît prédominante. Associer ces déformations variables dans la section à des variations de volume supposées constantes dans la section, par le biais d'un modèle de comportement plastique tridimensionnel, apparaît comme une source de verrouillage, pour des raisons analogues à celles exposées au paragraphe précédent.

Pour remédier à cette difficulté nous avons choisi de ne représenter les phénomènes de plasticité que dans la direction longitudinale, en utilisant un critère de plasticité monodimensionnel, c'est-à-dire ne contrôlant que les déformations axiales, sans prendre en compte la nature tridimensionnelle de l'écoulement plastique. Pour mettre en œuvre ce modèle, nous utilisons des tenseurs d'élasticité qualifiés d'unitaires, notés  $\mathbf{C}_0^*$  et  $\mathbf{C}_{os}^*$ , et calculés en relativisant les tenseurs  $\mathbf{C}_0$  et  $\mathbf{C}_{os}$  (2.58) par le module d'Young  $E$  :

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_0^* &= \frac{1}{E}\mathbf{C}_0, \\ \mathbf{C}_{os}^* &= \frac{1}{E}\mathbf{C}_{os},\end{aligned}\tag{2.57}$$

et nous formulons le modèle de comportement en exprimant les tenseurs de contrainte d'ordre 0 et d'ordre supérieur sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_0 &= Y(E_{33})\mathbf{C}_0^* : \mathbf{E}_0, \\ \mathbf{S}_{os} &= Y(E_{33})\mathbf{C}_{os}^* : \mathbf{E}_{os},\end{aligned}\tag{2.58}$$

où la fonction scalaire  $Y(E_{33})$  représente un module d'élasticité local du matériau évoluant en fonction de la composante longitudinale des déformation  $E_{33}$  :

$$E_{33}(\xi) = (\mathbf{d}_L^0 \otimes \mathbf{d}_L^0) : \mathbf{E}(\xi),\tag{2.59}$$

$\mathbf{d}_L^0$  représentant la direction longitudinale dans la configuration initiale en  $\xi$  :

$$\mathbf{d}_L^0(\xi) = \frac{\mathbf{R}(\xi_3) + \xi_\alpha \mathbf{G}_\alpha(\xi_3)}{\|\mathbf{R}(\xi_3) + \xi_\alpha \mathbf{G}_\alpha(\xi_3)\|}.\tag{2.60}$$

Selon cette formulation, le comportement élasto-plastique du matériau est contrôlé par la fonction scalaire  $Y$ , dépendant de la grandeur scalaire  $E_{33}(\xi)$ , et représentant le module d'élasticité local. De manière classique, la déformation longitudinale est décomposée en une partie élastique et une partie plastique :

$$E_{33}(\xi) = E_{33}^{el}(\xi) + E_{33}^{pl}(\xi).\tag{2.61}$$

On peut ainsi considérer un modèle de plasticité avec écrouissage exprimé de la manière suivante sous forme exponentielle :

$$\begin{aligned} \text{si } |E \times E_{33}(\xi)| \leq k, \quad Y(E_{33}) &= E; \\ \text{sinon,} \quad Y(E_{33}) &= A + Be^{-CE_{33}}, \end{aligned} \quad (2.62)$$

où  $E$  est le module d'Young du matériau,  $k$  la limite élastique et  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont trois coefficients décrivant la forme de l'écrouissage.

Le fait d'utiliser un critère monodimensionnel pour le modèle plastique permet de déterminer de manière directe la déformation plastique à chaque instant en fonction de la déformation, sans nécessiter d'intégration du chargement plastique au long de l'incrément. L'utilisation d'un tel modèle de comportement nécessite une intégration numérique du travail virtuel dans le volume de la poutre (voir paragraphe 2.3.4.5.2). Les variables d'état (déformation longitudinale plastique, variables d'écrouissage) sont stockées en des points d'intégration répartis dans le volume de chaque élément fini de poutre.

## 2.3.4 Mise en œuvre éléments finis du modèle

### 2.3.4.1 Introduction

Le but de cette partie est de présenter l'implémentation éléments finis du modèle de poutre présenté, notamment pour montrer la relative simplicité de sa mise en œuvre. Le modèle ne comporte pas de degré de liberté de rotation, et les différents degrés de liberté relatifs respectivement au déplacement de la fibre moyenne et à la variation des directeurs de section, peuvent être traités d'une manière homogène grâce à la construction d'opérateurs permettant d'exprimer le gradient de déplacement en fonction de ces degrés de liberté. Ces opérateurs étant définis, les termes de travail virtuel et de ses dérivées nécessaires à la construction de la matrice de rigidité tangente et du résidu pour la résolution non-linéaire de l'équilibre mécanique, s'obtiennent par des opérations matricielles standard.

### 2.3.4.2 Expression du travail virtuel interne sur la configuration initiale

Dans le problème global d'équilibre mécanique d'un milieu enchevêtré, formulé sous la forme du principe des travaux virtuels dans l'équation (1.1) du chapitre 1, le travail virtuel de la solution  $\mathbf{u}$  pour un champ de déplacement virtuel  $\mathbf{v}$  au sein de chaque poutre  $I$ , noté  $W_{int,I}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ , a été exprimé par rapport à la configuration actuelle de la poutre sous la forme :

$$W_{int,I}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_I} \text{Tr} \left( \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \frac{d\mathbf{v}}{dx} \right) d\omega, \quad (2.63)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}$  représente le tenseur des contraintes de Cauchy, et  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  le champ de déplacement solution et le champ de déplacement virtuel respectivement.

En opérant un changement de variable pour formuler l'intégrale sur le domaine occupé par la poutre dans sa configuration initiale, noté  $\Omega_I^0$ , et en utilisant les transformations classiques des termes, on peut réécrire ce terme de travail virtuel sous la forme :

$$W_{int,I}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_I^0} \text{Tr} \left( \mathbf{s} \frac{d\mathbf{E}}{d\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \right) d\omega^0, \quad (2.64)$$

où  $\mathbf{s}$  représente le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff, défini par

$$\mathbf{s} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}, \quad (2.65)$$

et  $\mathbf{E}$  le tenseur des déformations de Green-Lagrange.

### 2.3.4.3 Discrétisation par éléments finis

#### 2.3.4.3.1 Interpolation des champs cinématiques

Selon le modèle cinématique adopté (2.24), les champs de déplacement  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  s'expriment à partir de champs cinématiques définis sur la fibre moyenne de la poutre sous la forme des développements suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) &= \mathbf{u}_0(\xi_3) + \xi_\alpha \mathbf{u}_\alpha(\xi_3), \\ \mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}) &= \mathbf{v}_0(\xi_3) + \xi_\alpha \mathbf{v}_\alpha(\xi_3), \end{aligned} \quad (2.66)$$

les champs  $\mathbf{u}_0$  et  $\mathbf{v}_0$  représentant respectivement le déplacement et le déplacement virtuel du centre de la section, et les champs  $\mathbf{u}_\alpha$  et  $\mathbf{v}_\alpha$ , les variations et variations virtuelles des directeurs de section.

On note  $\mathbf{u}_h$  l'interpolation éléments finis du champ  $\mathbf{u}$ , définie par :

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{s}) = \sum_{N=1}^{N_E} w_N(\mathbf{s}) \mathbf{U}_{N,i} \mathbf{e}_i, \quad (2.67)$$

où  $w_N$  est la fonction de forme attachée au nœud  $N$  de l'élément,  $N_E$ , le nombre de nœuds de l'élément, et où  $\mathbf{U}_{N,i}$  est le degré de liberté correspondant à la composante du champ cinématique dans la direction  $i$  au nœud  $N$ .

On notera par la suite  $\mathbf{u}_{0,h}$ ,  $\mathbf{u}_{\alpha,h}$ ,  $\mathbf{v}_{0,h}$  et  $\mathbf{v}_{\alpha,h}$  les interpolations éléments finis des différents champs cinématiques définis sur la fibre moyenne de la poutre, et  $\mathbf{U}_{0,N,i}$ ,  $\mathbf{U}_{\alpha,N,i}$ ,  $\mathbf{V}_{0,N,i}$ ,  $\mathbf{V}_{\alpha,N,i}$ , les degrés de liberté correspondant aux composantes de ces champs au nœud  $N$ .

#### 2.3.4.3.2 Expression du travail virtuel sur un élément fini

La méthode des éléments finis permet d'exprimer le travail virtuel interne (2.64) exprimé en fonction des champs interpolés, sous la forme d'une somme des travaux virtuels sur chacun des éléments :

$$W_{int}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \sum_i \int_{E^0} \text{Tr} \left( \mathbf{s}(\mathbf{u}_h) \frac{d\mathbf{E}(\mathbf{u}_h)}{d\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}_h \right) d\omega_E^0, \quad (2.68)$$

$E_i^0$  représentant le domaine occupé par l'élément  $i$  dans la configuration initiale.

On peut exprimer le travail interne sur l'élément  $E$ ,  $W_{int/E}$ , comme la composition d'une intégrale sur la fibre moyenne de l'élément et d'une intégrale par rapport aux coordonnées transverses :

$$W_{int/E} = \int_{E^0} \text{Tr} \left( \mathbf{s}(\mathbf{u}_h) \frac{d\mathbf{E}(\mathbf{u}_h)}{d\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}_h \right) d\omega_E^0 = \int_{L^0} \int_{S^0(\xi_3)} \text{Tr} \left( \mathbf{s}(\mathbf{u}_h) \frac{d\mathbf{E}(\mathbf{u}_h)}{d\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}_h \right) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad (2.69)$$

où  $L^0$  est la ligne moyenne de l'élément fini dans sa configuration initiale, et  $S^0(\xi_3)$ , la section transverse de la poutre en l'abscisse curviligne  $\xi_3$ . Un dernier changement de variable permet de ramener l'intégrale sur la fibre moyenne de l'élément  $E^0$  à une

intégrale sur la ligne moyenne de l'élément de référence, de longueur unitaire, noté  $\hat{L}$  en écrivant :

$$W_{int/E} = \int_{\hat{L}} W_{int/\Sigma}(s) \hat{J}(s) ds, \quad (2.70)$$

où  $s$  représente l'abscisse curviligne sur l'élément de référence,  $\hat{J}(s) = \frac{d\xi_3}{ds}$ , le rapport entre les abscisses sur les deux configurations, et où  $W_{int/\Sigma}(s)$  représente la contribution au travail virtuel interne de la section d'abscisse  $s$ , exprimé sous la forme :

$$\begin{aligned} W_{int/\Sigma}(s) &= \int_{S^0(\xi_3(s))} \text{Tr} \left( \mathbf{s}(\mathbf{u}_h) \frac{d\mathbf{E}(\mathbf{u}_h)}{d\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}_h \right) d\xi_1 d\xi_2, \\ &= \int_{S^0(\xi_3(s))} w_{int}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \boldsymbol{\xi}) d\xi_1 d\xi_2, \end{aligned} \quad (2.71)$$

avec

$$w_{int}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \boldsymbol{\xi}) = \text{Tr} \left( \mathbf{s}(\mathbf{u}_h) \frac{d\mathbf{E}(\mathbf{u}_h)}{d\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}_h \right), \quad (2.72)$$

représentant la contribution au travail virtuel interne calculée en la particule matérielle  $\boldsymbol{\xi}$ . L'intégrale (2.70) sur l'élément est évaluée en utilisant une quadrature de Gauss sous la forme :

$$W_{int,E} \approx \sum_{G=1}^{N_G} w_G W_{int/\Sigma}(s_G) \hat{J}(s_G), \quad (2.73)$$

où  $w_G$  et  $s_G$  représentent respectivement le poids associé au point de Gauss  $G$  et son abscisse sur l'élément fini de référence.

Pour exprimer le travail virtuel interne correspondant au modèle de poutre, nous sommes donc conduits à évaluer la quantité  $W_{int/\Sigma}$  aux différents points de Gauss des éléments.

#### 2.3.4.4 Calcul des tenseurs déformations et de contraintes

Nous cherchons ici à exprimer des opérateurs qui permettent d'exprimer les différents termes du développement polynômial des déformations en fonction des degrés de liberté correspondant aux différents champs cinématiques sur un élément fini donné. Nous notons  $\mathbf{U}$  le vecteur constitué de l'ensemble des degrés de liberté relatifs aux différents champs cinématiques sur un élément fini, exprimé sous la forme :

$$\mathbf{U} = U_{Nci} d_{Nci} \mathbf{e}_i, \quad (2.74)$$

où  $d_{Nci}$  représente le degré de liberté dans la direction de l'espace  $i$ , associé au champ cinématique d'ordre  $c$  du nœud  $N$ , et  $U_{Nci}$  la composante du déplacement sur ce degré de liberté. Les différents ordres du champ cinématique identifiés par l'indice  $c$  correspondent respectivement au déplacement du centre de section pour l'indice 0, et aux variations des directeurs de section pour les indices 1 et 2.

##### 2.3.4.4.1 Expression du gradient du déplacement

On cherche en premier lieu à exprimer le gradient du déplacement en toute particule matérielle de l'élément, identifiée par son abscisse curviligne  $\xi_3(s)$  et ses coordonnées transverse  $\xi_1$  et  $\xi_2$  à l'aide d'un opérateur  $\mathbf{D}$ , se décomposant sous la forme d'un développement polynômial à l'aide d'opérateurs  $\mathbf{D}^0$ ,  $\mathbf{D}^\alpha$  et  $\mathbf{D}^{\alpha\beta}$ , de la manière suivante :

$$\frac{d\mathbf{u}_h}{d\mathbf{X}_h}(\xi_1, \xi_2, \xi_3(s)) = \mathbf{D}\mathbf{U},$$

$$= \left[ D^0(s) + \xi_\alpha D^\alpha(s) + \xi_\alpha \xi_\beta D^{\alpha\beta}(s) \right] \mathbf{U}. \quad (2.75)$$

Ces opérateurs  $D^0$ ,  $D^\alpha$  et  $D^{\alpha\beta}$  peuvent être représentés par des tenseurs d'ordre 3, dont les composantes sont identifiées par les indices  $(i, j, Nck)$  sur la base des  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$  :

$$D^0 = D_{ijNck}^0 \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k. \quad (2.76)$$

Pour exprimer le développement polynômial du gradient du déplacement, nous reprenons l'expression de celui de l'application linéaire tangente (2.41) pour écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_h}{d\mathbf{X}_h} &= \frac{d\mathbf{x}_h}{d\mathbf{X}_h} - \mathbf{I} \\ &= \mathbf{u}_{\alpha_h} \otimes \mathbf{G}^\alpha + \mathbf{u}'_{0_h} \otimes \mathbf{G}^3 \\ &\quad + \xi_\alpha \left[ \mathbf{u}'_{\alpha_h} \otimes \mathbf{G}^3 - (\mathbf{G}'_{\alpha'} \mathbf{G}^\beta) \mathbf{u}_{\beta_h} \otimes \mathbf{G}^3 - (\mathbf{G}'_{\alpha'} \mathbf{G}^3) \mathbf{u}'_{0_h} \otimes \mathbf{G}^3 \right] \\ &\quad + \xi_\alpha \xi_\beta (\mathbf{G}'_{\beta'} \mathbf{G}^3) \mathbf{u}'_{\alpha_h} \otimes \mathbf{G}^3. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Pour exprimer les composantes de l'opérateur  $D^0$ , nous pouvons écrire pour les termes de la partie constante dans la section, en introduisant les interpolations éléments finis des champs cinématiques :

$$\begin{aligned} D^0 \mathbf{U} &= D_{ijNck}^0 U_{Nck} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\ &= \mathbf{u}_{\alpha_h} \otimes \mathbf{G}^\alpha + \mathbf{u}'_{0_h} \otimes \mathbf{G}^3 \\ &= w_N(s) U_{N\alpha i} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{G}^\alpha + w'_N(s) U_{N0i} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{G}^3 \\ &= w_N(s) G_j^\alpha U_{N\alpha i} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + w'_N(s) G_j^3 U_{N0i} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \end{aligned} \quad (2.78)$$

où  $G_j^\alpha$  et  $G_j^3$  sont les composantes des vecteurs contravariants  $\mathbf{G}^\alpha$  et  $\mathbf{G}^3$ . En identifiant les termes dans l'équation précédente, nous obtenons :

$$\begin{aligned} D_{ijNck}^0(s) &= 0, \quad \forall c, \text{ pour } k \neq i, \\ D_{ijN0i}^0(s) &= w'_N(s) G_j^3, \\ D_{ijN\alpha i}^0(s) &= w_N(s) G_j^\alpha. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Pour la partie linéaire nous avons :

$$\begin{aligned} D^\alpha \mathbf{U} &= D_{ijNck}^\alpha U_{Nck} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\ &= \mathbf{u}'_{\alpha_h} \otimes \mathbf{G}^3 - (\mathbf{G}'_{\alpha'} \mathbf{G}^\beta) \mathbf{u}_{\beta_h} \otimes \mathbf{G}^3 - (\mathbf{G}'_{\alpha'} \mathbf{G}^3) \mathbf{u}'_{0_h} \otimes \mathbf{G}^3 \\ &= (w'_N(s) G_j^3 U_{N\alpha i} - w_N(s) (\mathbf{G}'_{\alpha'} \mathbf{G}^\beta) G_j^\beta U_{N\beta i} - w'_N(s) (\mathbf{G}'_{\alpha'} \mathbf{G}^3) G_j^3 U_{N0i}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \end{aligned} \quad (2.80)$$

ce qui conduit à identifier les composantes de l'opérateur  $D^\alpha$  sous la forme :

$$\begin{aligned} D_{ijNck}^\alpha(s) &= 0, \quad \forall c, \text{ pour } k \neq i, \\ D_{ijN0i}^\alpha(s) &= -w'_N(s) (\mathbf{G}'_{\alpha'} \mathbf{G}^3) G_j^3, \\ D_{ijN\beta i}^\alpha(s) &= (\delta_{\alpha\beta} w'_N(s) - w_N(s) (\mathbf{G}'_{\alpha'} \mathbf{G}^\beta)) G_j^\beta, \end{aligned} \quad (2.81)$$

où  $\delta_{\alpha\beta}$  représente le symbole de Kronecker.

Pour les termes quadratiques par rapport aux coordonnées transverses, on peut écrire :

$$\begin{aligned} D^{\alpha\beta} \mathbf{U} &= (\mathbf{G}'_{\beta}, \mathbf{G}^3) \mathbf{u}'_{\alpha h} \otimes \mathbf{G}^3 \\ &= w'_N(s) (\mathbf{G}'_{\beta}, \mathbf{G}^3) G_j^3 U_{N\alpha i} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \end{aligned} \quad (2.82)$$

et identifier les composantes de l'opérateur correspondant :

$$\begin{aligned} D^{\alpha\beta}_{ijNck}(s) &= 0, \quad \forall c, \text{ pour } k \neq i, \\ D^{\alpha\beta}_{ijN0i}(s) &= 0, \\ D^{\alpha\beta}_{ijN\gamma i}(s) &= \delta_{\alpha\gamma} w'_N(s) (\mathbf{G}'_{\beta}, \mathbf{G}^3) G_j^3. \end{aligned} \quad (2.83)$$

On note que pour les opérateurs  $\mathbf{D}$  aux différents ordres, les composantes  $D_{ijNck}$  pour  $k$  différent de  $i$ , sont nulles. Ceci permet de réduire le nombre de composantes à stocker en se limitant aux composantes  $D_{ijNci}$ .

On remarque que les composantes de ces opérateurs s'expriment, en chaque point d'intégration de Gauss, en fonction des valeurs des fonctions de base et de leurs dérivées en ces points, et des composantes des vecteurs contravariants et de leurs dérivées, en ces mêmes points d'intégration, sur la fibre moyenne dans la configuration initiale. Ces différentes valeurs restant constantes au cours du temps, elles peuvent être calculées et stockées en début de calcul.

#### 2.3.4.4.2 Expression du tenseur des déformations

Nous pouvons utiliser les composantes du développement polynômiale de l'opérateur  $\mathbf{D}$  pour exprimer le tenseur des déformations de Green-Lagrange sous la forme :

$$\begin{aligned} E(\mathbf{u}_h(\xi_1, \xi_2, s)) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{d\mathbf{u}_h}{d\mathbf{X}_h} + \frac{d\mathbf{u}_h}{d\mathbf{X}_h}^T + \frac{d\mathbf{u}_h}{d\mathbf{X}_h}^T \frac{d\mathbf{u}_h}{d\mathbf{X}_h} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \mathbf{D}\mathbf{U} + (\mathbf{D}\mathbf{U})^T + (\mathbf{D}\mathbf{U})^T \mathbf{D}\mathbf{U} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \mathbf{D}\mathbf{U} + \mathbf{D}\mathbf{U}^T + \mathbf{U}^T \left[ \mathbf{D}^T \mathbf{D} \right] \mathbf{U} \right], \end{aligned} \quad (2.84)$$

en faisant apparaître un opérateur linéaire  $\mathbf{B}$  et un opérateur quadratique  $\mathbf{Q}$  tels que :

$$E(\mathbf{u}_h(\xi_1, \xi_2, s)) = \mathbf{B}\mathbf{U} + \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{Q} \mathbf{U}, \quad (2.85)$$

les opérateurs  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{Q}$  représentant des tenseurs respectivement d'ordre 3 et 4, s'exprimant respectivement sur la base des  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$  et sur la base des  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= B_{ijNck} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k, \\ \mathbf{Q} &= Q_{ijNckPl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_l. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Ces opérateurs  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{Q}$  s'expriment aussi sous forme de développements polynômiaux, de degré 2 pour l'opérateur linéaire, et jusqu'au degré 4 pour l'opérateur quadratique, dans le cas de poutres initialement courbes :

$$\mathbf{B}(\xi_1, \xi_2, s) = \mathbf{B}^0 + \xi_\alpha \mathbf{B}^\alpha + \xi_\alpha \xi_\beta \mathbf{B}^{\alpha\beta}$$

$$Q(\xi_1, \xi_2, s) = Q^0 + \xi_\alpha Q^\alpha + \xi_\alpha \xi_\beta Q^{\alpha\beta} + \xi_\alpha \xi_\beta \xi_\gamma Q^{\alpha\beta\gamma} + \xi_\alpha \xi_\beta \xi_\gamma \xi_\delta Q^{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (2.87)$$

Les composantes du développement polynômial de l'opérateur linéaire B s'expriment directement à partir de celles de l'opérateur D :

$$\begin{aligned} B_{ijNck}^0(s) &= B_{ijNck}^\alpha(s) = B_{ijNck}^{\alpha\beta}(s) = 0, \quad \forall c, \text{ pour } k \neq i, \\ B_{ijN0i}^0(s) &= \frac{1}{2} (D_{ijN0i}^0(s) + D_{jiN0j}^0(s)) = \frac{w'_N(s)}{2} (G_i^3 + G_j^3), \\ B_{ijN\alpha i}^0(s) &= \frac{1}{2} (D_{ijN\alpha i}^0(s) + D_{jiN\alpha j}^0(s)) = \frac{w_N(s)}{2} (G_i^\alpha + G_j^\alpha), \\ B_{ijN0i}^\alpha(s) &= \frac{1}{2} (D_{ijN0i}^\alpha(s) + D_{jiN0j}^\alpha(s)) = -\frac{w_N(s)}{2} (\mathbf{G}'_{\alpha'}, \mathbf{G}^3) (G_i^3 + G_j^3), \\ B_{ijN\beta i}^\alpha(s) &= \frac{1}{2} (D_{ijN\beta i}^\alpha(s) + D_{jiN\beta j}^\alpha(s)) = \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\beta} w'_N(s) - (\mathbf{G}'_{\alpha'}, \mathbf{G}^\beta) w_N(s)) (G_i^3 + G_j^3), \\ B_{ijN0i}^{\alpha\beta}(s) &= 0, \\ B_{ijN\gamma i}^{\alpha\beta}(s) &= \frac{1}{2} (D_{ijN\gamma i}^{\alpha\beta}(s) + D_{jiN\gamma j}^{\alpha\beta}(s)) = -\delta_{\alpha\gamma} \frac{w'_N(s)}{2} (\mathbf{G}'_{\alpha'}, \mathbf{G}^\beta) (g'_{\beta 0i} + g'_{\beta 0j}). \end{aligned} \quad (2.88)$$

Pour calculer les composantes de l'opérateur Q, on exprime :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^T \mathbf{Q} \mathbf{U} &= (\mathbf{D} \mathbf{U})^T \mathbf{D} \mathbf{U} \\ &= (D_{ijNci} \mathbf{U}_{Nci} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)^T (D_{klPdk} \mathbf{U}_{Pdk} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \\ &= D_{ijNci} D_{klPdk} \mathbf{U}_{Nci} \mathbf{U}_{Pdk} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)^T (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \\ &= D_{ijNci} D_{klPdk} \mathbf{U}_{Nci} \mathbf{U}_{Pdk} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i) (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \\ &= D_{ijNci} D_{klPdk} \mathbf{U}_{Nci} \mathbf{U}_{Pdk} \delta_{ik} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_l \\ &= D_{ijNci} D_{ilPdi} \mathbf{U}_{Nci} \mathbf{U}_{Pdi} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_l, \end{aligned} \quad (2.89)$$

ce qui conduit à écrire :

$$Q_{ijNckPdk} = D_{kiNck} D_{kjPdk}. \quad (2.90)$$

On relève par ailleurs, pour tous les tenseurs, la nullité des termes se rapportant à deux directions différentes de l'espace :

$$Q_{ijNckPdl} = 0 \text{ si } k \neq l. \quad (2.91)$$

En introduisant maintenant les ordres du développement polynômial, on obtient :

$$\begin{aligned} Q_{ijNckPdk}^0 &= D_{kiNck}^0 D_{kjPdk}^0 \\ Q_{ijNckPdk}^\alpha &= D_{kiNck}^0 D_{kjPdk}^\alpha + D_{kiNck}^\alpha D_{kjPdk}^0 \\ Q_{ijNckPdk}^{\alpha\beta} &= D_{kiNck}^0 D_{kjPdk}^{\alpha\beta} + D_{kiNck}^\alpha D_{kjPdk}^\beta + D_{kiNck}^{\alpha\beta} D_{kjPdk}^0 \\ Q_{ijNckPdk}^{\alpha\beta\gamma} &= D_{kiNck}^\alpha D_{kjPdk}^{\beta\gamma} + D_{kiNck}^{\alpha\beta} D_{kjPdk}^\gamma \\ Q_{ijNckPdk}^{\alpha\beta\gamma\delta} &= D_{kiNck}^{\alpha\beta} D_{kjPdk}^{\gamma\delta} \end{aligned} \quad (2.92)$$

En reprenant les composantes des opérateurs D (2.79) et (2.83), on peut exprimer les composantes des opérateurs Q aux différents ordres. Pour la partie constante dans la section de l'opérateur, on a :

$$Q_{ijN0kP0k}^0 = w'_N(s) w'_P(s) G_i^3 G_j^3,$$

$$\begin{aligned}
Q_{ijNakP0k}^0 &= w_N(s)w'_P(s)G_i^\alpha G_j^3, \\
Q_{ijN0kPak}^0 &= w'_N(s)w_P(s)G_i^3 G_j^\alpha, \\
Q_{ijNakP\beta k}^0 &= w_N(s)w_P(s)G_i^\alpha G_j^\beta.
\end{aligned} \tag{2.93}$$

Pour les opérateurs d'ordre 1, on a :

$$\begin{aligned}
Q_{ijN0kP0k}^\alpha &= -2w'_N(s)w'_P(s)(G'_\alpha, G^3)G_i^3 G_j^3, \\
Q_{ijN0kP\beta k}^\alpha &= w'_N(s)(\delta_{\alpha\beta}w'_N(s) - w_N(s)(G'_\alpha, G_\beta))G_j^3 G_j^3 \\
&\quad - w'_N(s)(G'_\alpha, G^3)w_P(s)G_i^3 G_j^\alpha, \\
Q_{ijN\beta kP0k}^\alpha &= -w_N(s)w'_P(s)(G'_\alpha, G^3)G_i^\beta G_j^3 \\
&\quad + (\delta_{\alpha\beta}w'_N(s) - w_N(s)(G'_\alpha, G^\beta))w'_P(s)G_i^3 G_j^3, \\
Q_{ijN\beta kP\gamma k}^\alpha &= w_N(s)(\delta_{\alpha\gamma}w'_P(s) - w_P(s)(G'_\alpha, G_\gamma))G_i^\beta G_j^3 \\
&\quad + (\delta_{\alpha\beta}w'_N(s) - w_N(s)(G'_\alpha, G^\beta))w_P(s)G_i^3 G_j^3.
\end{aligned} \tag{2.94}$$

Pour les opérateurs d'ordre 2, on a :

$$\begin{aligned}
Q_{ijN0kP0k}^{\alpha\beta} &= -w'_N(s)(G'_\alpha, G^3)w'_P(s)(G'_\beta, G^3)G_i^3 G_j^3, \\
Q_{ijN0kP\gamma k}^{\alpha\beta} &= w'_N(s)\delta_{\alpha\gamma}w'_P(s)(G'_\beta, G^3)G_i^3 G_j^3 \\
&\quad - w'_N(s)(G'_\alpha, G^3)(\delta_{\beta\gamma}w'_P(s) - w_P(s)(G'_\beta, G_\gamma))G_i^3 G_j^3, \\
Q_{ijN\gamma kP0k}^{\alpha\beta} &= -(\delta_{\alpha\gamma}w'_N(s) - w_N(s)(G'_\alpha, G_\gamma))w'_P(s)(G'_\beta, G^3)G_i^3 G_j^3 \\
&\quad + \delta_{\alpha\gamma}w'_N(s)(G'_\beta, G^3)w'_P(s)G_i^3 G_j^3, \\
Q_{ijN\gamma kP\delta k}^{\alpha\beta} &= w_N(s)\delta_{\alpha\delta}w'_P(s)(G'_\beta, G^3)G_i^\gamma G_j^3 \\
&\quad + (\delta_{\alpha\gamma}w'_N(s) - w_N(s)(G'_\alpha, G_\gamma))(\delta_{\beta\delta}w'_P(s) - w_P(s)(G'_\beta, G_{h\delta 0}))G_i^3 G_j^3.
\end{aligned} \tag{2.95}$$

Pour les opérateurs d'ordre 3, on a :

$$\begin{aligned}
Q_{ijN0kP0k}^{\alpha\beta\gamma} &= 0, \\
Q_{ijN\delta kP0k}^{\alpha\beta\gamma} &= \delta_{\alpha\delta}w'_N(s)(G'_\beta, G^3)(\delta_{\gamma\delta}w'_N(s) - w_N(s)(G'_\gamma, G_\delta))G_i^3 G_j^3, \\
Q_{ijN0kP\delta k}^{\alpha\beta\gamma} &= -w'_N(s)(G'_\alpha, G^3)\delta_{\beta\delta}w'_P(s)(G'_\gamma, G^3)G_i^3 G_j^3, \\
Q_{ijN\delta k k P\epsilon k}^{\alpha\beta\gamma} &= (\delta_{\alpha\gamma}w'_N(s) - w_N(s)(G'_\alpha, G_\gamma))\delta_{\beta\epsilon}w'_P(s)(G'_\gamma, G^3)G_i^3 G_j^3 \\
&\quad + \delta_{\alpha\delta}w'_N(s)(G'_\beta, G^3)(\delta_{\gamma\epsilon}w'_P(s) - w_P(s)(G'_\gamma, G_\epsilon))G_i^3 G_j^3.
\end{aligned} \tag{2.96}$$

Pour les termes d'ordre 4, on calcule :

$$\begin{aligned}
Q_{ijN0kP0k}^{\alpha\beta\gamma\delta} &= 0, \\
Q_{ijN\epsilon kP0k}^{\alpha\beta\gamma\delta} &= 0, \\
Q_{ijN0kP\epsilon k}^{\alpha\beta\gamma\delta} &= 0, \\
Q_{ijN\epsilon k P\zeta k}^{\alpha\beta\gamma\delta} &= \delta_{\alpha\epsilon}w'_N(s)(G'_\beta, G^3)\delta_{\gamma\zeta}w'_P(s)(G'_\delta, G^3)G_i^3 G_j^3.
\end{aligned} \tag{2.97}$$



Les équations (2.88), et (2.93) à (2.97) expriment les composantes des développements polynômiaux des opérateurs linéaires et quadratiques, permettant d'exprimer le développement polynômial du tenseur des déformations de Green-Lagrange en tout point d'intégration de Gauss. Ces opérateurs étant calculés, les différents termes de déformation s'obtiennent par multiplication matricielle avec le vecteur  $\mathbf{U}$  regroupant l'ensemble des degrés de liberté d'un élément fini.

Ces opérateurs permettent d'exprimer simplement les dérivées première et seconde du tenseur des déformations par rapport aux déplacements sous la forme :

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{E}}{d\mathbf{u}_h} \cdot \mathbf{v}_h &= \mathbf{B}\mathbf{V} + \mathbf{U}^T\mathbf{Q}\mathbf{V}, \\ \frac{d^2\mathbf{E}}{d\mathbf{u}_h^2} \cdot \mathbf{v}_h \cdot \delta\mathbf{u}_h &= \delta\mathbf{U}^T\mathbf{Q}\mathbf{V}.\end{aligned}\quad (2.98)$$

### 2.3.4.5 Intégration des termes de travail virtuel dans la section

Dans le cas d'un modèle de comportement hyperélastique de Saint-Venant, les contraintes de Piola-Kirchhoff s'expriment de manière linéaire par rapport aux déformations, et donc sous la forme d'un développement polynômial de degré 4 (2.55). Le produit contracté entre tenseur des contraintes et tenseur des déformations (2.72), s'exprime donc dans ce cas aussi sous la forme d'un développement polynômial, de degré 4 dans le cas d'une poutre initialement droite, ou de degré 8 pour une poutre initialement courbe.

Plusieurs options se présentent pour réaliser l'intégration sur la section de la poutre en un point d'intégration de Gauss de ce terme polynômial pour obtenir la contribution  $W_{int/\Sigma}$  du point d'intégration de Gauss au travail virtuel (2.71).

#### 2.3.4.5.1 Intégration analytique dans la section

L'intégration d'un terme s'exprimant de manière polynômiale par rapport aux coordonnées dans la section peut être formulée de manière analytique. L'évaluation d'une telle intégrale demande de calculer les moments des différents monômes à travers la section :

$$\mathcal{M}_{pq} = \int_{s_0} \xi_1^p \xi_2^q d\xi_1 d\xi_2. \quad (2.99)$$

Si on ne fait aucune hypothèse particulière, dans le cas d'une poutre initialement courbe, le développement polynômial de la contribution au travail virtuel  $w_{int}$ , de degré 8, comporte 45 termes. Le calcul de ces 45 termes de contribution au travail virtuel, nécessitant pour chacun des multiplications matricielles sur les différents opérateurs éléments finis, peut cependant s'avérer coûteux. Les hypothèses suivantes peuvent être faites pour réduire ces coûts de calcul :

**Hypothèse de symétries de la section** – Dans le cas d'une section symétrique par rapport aux coordonnées  $\xi_1$  et  $\xi_2$ , les moments  $\mathcal{M}_{pq}$  de degrés  $p$  ou  $q$  impairs sont nuls, ce qui réduit à 25 le nombre de termes à évaluer dans le développement polynômial.

**Troncature du développement polynômial** – Si on peut supposer les dimensions de la section suffisamment petites, on peut tronquer le développement polynômial. Si on tronque par exemple ce développement au degré 2, tout en tenant compte des hypothèses de symétrie, on réduit à 3 le nombre de termes à considérer dans le développement. Dans ce cas, les trois moments qui interviennent

dans le calcul de l'intégrale sont le moment  $M_{00}$  correspondant à l'aire de la section, et les moments quadratiques  $M_{20}$  et  $M_{02}$ .

#### 2.3.4.5.2 Intégration numérique dans la section

Plusieurs raisons peuvent orienter vers le recours à une intégration numérique dans la section. La prise en compte d'un modèle de comportement non-linéaire, qui ne permet plus d'exprimer la contribution locale au travail virtuel interne  $w_{int}$  sous forme polynômiale, oblige à mettre en œuvre une intégration numérique. Mais l'intégration numérique peut être une alternative intéressante même dans le cas d'un comportement linéaire, si on veut prendre en compte l'ensemble des termes du développement polynômial.

Le choix d'une intégration numérique peut conduire à modifier la formulation du modèle. En effet, nous avons été conduits à approcher l'inverse de l'application linéaire tangente à la configuration initiale sous la forme d'un développement limité (2.38) dans le but de n'utiliser que des quantités définies sur la fibre moyenne de la poutre. Cette opération n'est plus nécessaire si on évalue les quantités en des points d'intégration dans la section. Dans ce cas, plutôt que d'exprimer les gradients par rapport à la configuration initiale en utilisant les vecteurs contravariants définis sur la fibre moyenne, on peut utiliser directement les vecteurs contravariants définis aux points d'intégration dans la section, sans recourir à un développement limité.

### 2.3.5 Illustration des possibilités du modèle

Outre les différents exemples d'application donnés dans les autres chapitres du mémoire, nous présentons à titre d'illustration les résultats d'une simulation sur un cas test modèle. Une poutre initialement droite est d'abord fléchie, en encastrant une de ses extrémités, et en appliquant à l'autre extrémité d'abord une rotation d'angle  $\pi$  pour former un demi-cercle, puis une translation afin de rapprocher les extrémités et de former une arche (Figure 2.3). Dans un deuxième temps, on applique aux extrémités de la poutre fléchie des rotations opposées d'angle  $2\pi$  autour de l'axe de la fibre moyenne en ces points, en plusieurs incréments. Ces rotations incrémentales induisent des modes de déformation complexes couplant des effets de torsion et de flexion, jusqu'à revenir à la configuration de départ à l'issue de la rotation complète de  $2\pi$  (Figure 2.4).

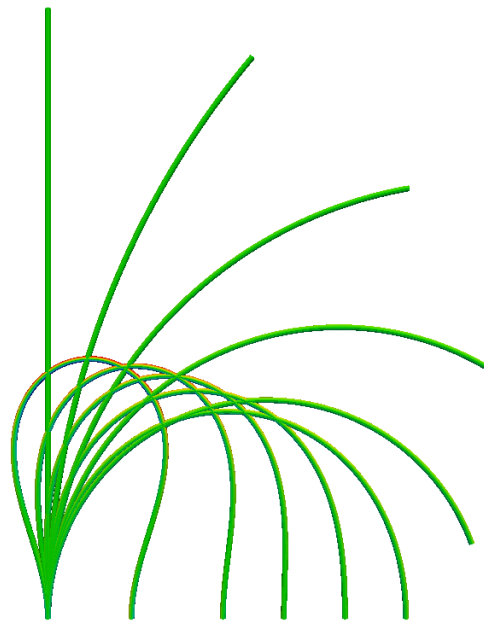


FIGURE 2.3 – Flexion d’une poutre initialement droite : visualisation des déformées aux étapes successives

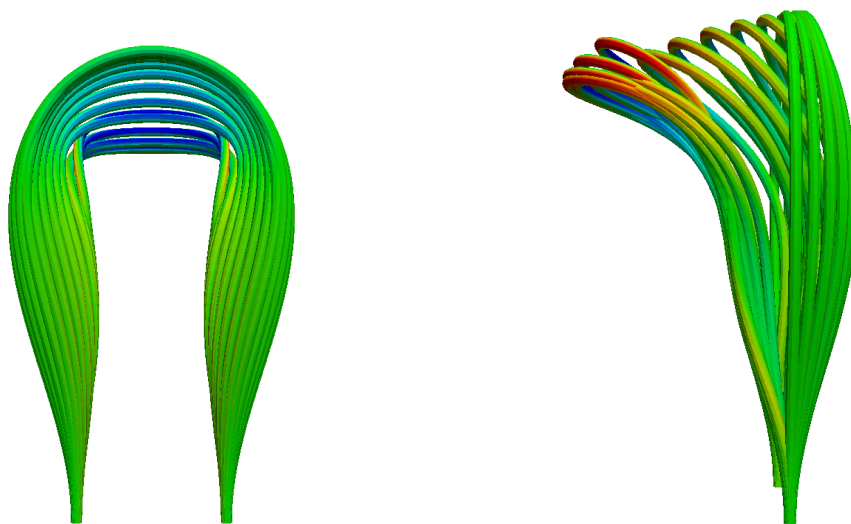


FIGURE 2.4 – Application de rotations opposées de  $2\pi$  aux extrémités de la poutre fléchie : vue de face et de côté des étapes successives

## 2.4 Proposition d'un modèle cinématique enrichi à un ordre quelconque

### 2.4.1 Introduction

Le modèle de poutre présenté dans ce qui précède s'appuie sur une formulation de la cinématique s'interprétant comme un développement au premier ordre par rapport aux coordonnées transverses dans la section. Les déformations des sections de poutre pouvant être prises en compte par ce modèle sont limitées par ce développement au premier ordre : ce modèle cinématique revient à supposer en particulier que les sections restent planes, et que les déformations dans le plan de la section sont constantes à travers la section.

Les limites de ce modèle au premier ordre apparaissent dès lors qu'on s'intéresse à des poutres présentant des modes de déformation de section plus complexes. Ce peut être le cas pour des poutres homogènes constituées d'un matériau isotrope soumises à des chargements localisés. Un chargement en flexion d'une poutre à section circulaire, du fait qu'il met en tension la partie supérieure de la poutre, et en compression la partie inférieure, par effet de Poisson, induit des déformations non homogènes de section qui ne peuvent pas être prises en compte par le modèle au premier ordre. Pour des poutres à sections rectangulaires, des chargements en torsion induisent des gauchissements des sections, qui ne peuvent non plus être prises en compte par le modèle précédent. Diverses solutions sont proposées dans la littérature pour enrichir la base des modes de déformation utilisés pour représenter la cinématique de la poutre et prendre en compte ces déformations plus complexes.

Dans l'approche proposée ici, nous cherchons simplement à pousser plus loin le développement polynômial de la cinématique par rapport aux coordonnées transverses de la poutre (2.21). Ce faisant, nous introduisons des directeurs de section d'ordres plus élevés, avec des degrés de liberté supplémentaires permettant de décrire des modes de déformations de section plus complexes.

Cet accroissement du nombre de degrés de liberté entraîne une augmentation des coûts de calculs, et soulève la question de la pertinence de ce type d'enrichissement cinématique et de son efficacité par rapport à une discrétisation de la section de la poutre, par exemple en considérant la poutre non plus comme un milieu monodimensionnel, mais comme un milieu tridimensionnel standard, et en recourant à des éléments finis volumiques classiques. C'est dans les cas où le milieu qu'on cherche à approcher par un modèle de poutre apparaît comme hétérogène, et que l'hétérogénéité de la microstructure de ce milieu présente une direction axiale privilégiée, que cette voie d'enrichissement cinématique polynômial peut trouver son sens. Le fait de disposer, par ce type d'enrichissement, d'un développement polynômial des termes de gradients et de déformations donne la possibilité d'employer des modèles de comportement distincts pour représenter les contraintes associées aux différents termes du développement, et notamment d'associer des types de comportement différents à des phénomènes correspondant à des gradients de différents degrés par rapport aux coordonnées transverses.

Cette voie d'approche peut donc trouver des applications pour des structures linéiques présentant de forts gradients de microstructure dans les directions transverses. Une part importante des structures textiles ou câblées est constituée à partir de torons ou mèches élémentaires, eux-mêmes formés par assemblages de fils ou filaments. Ces mèches ou torons, qu'on peut qualifier de constituants d'échelle mésoscopique, se présentent comme des milieux de géométrie monodimensionnelle, à forte hétérogénéité, et pour lesquels l'hypothèse de continuité de la matière n'est pas vérifiée dans les di-

reactions transverses. La représentation du comportement de tels constituants à l'échelle mésoscopique constitue la principale motivation pour les développements qui suivent.

## 2.4.2 Modèle cinématique à un ordre quelconque

Le modèle cinématique à l'ordre  $N$  consiste à exprimer le placement actuel  $\mathbf{x}$  de toute particule  $\xi$  de la poutre sous la forme la forme polynômiale :

$$\mathbf{x}(\xi) = \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^p \xi_1^{p-q} \xi_2^q \mathbf{x}_{p-q,q}(\xi_3), \quad (2.100)$$

où les champs  $\mathbf{x}_{p-q,q}$  représentent les différentes composantes vectorielles de ce développement.

Le champs de déplacement  $\mathbf{u}$  de toute particule s'exprime d'une manière analogue :

$$\mathbf{u}(\xi) = \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^p \xi_1^{p-q} \xi_2^q \mathbf{u}_{p-q,q}(\xi_3). \quad (2.101)$$

Selon cette formulation, le déplacement de toute particule de la poutre est exprimé au moyen de  $N_{cin} = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$  champs cinématiques vectoriels, notés  $\mathbf{u}_{p-q,q}$ , et définis sur la fibre moyenne de la poutre.

Pour simplifier les écritures, on peut exprimer le développement à l'ordre  $N$  du champ de déplacement à l'aide de matrices sous la forme :

$$\mathbf{u}(\xi) = \mathbf{U}(\xi_3) \mathbf{\Pi}(\xi_1, \xi_2), \quad (2.102)$$

où  $\mathbf{U}(\xi_3)$  est une matrice de dimensions  $3 \times \frac{(N+1)(N+2)}{2}$  définie par :

$$\mathbf{U}(\xi_3) = [\mathbf{u}_{0,0}(\xi_3) \ \mathbf{u}_{1,0}(\xi_3) \ \dots \ \mathbf{u}_{p-q,q}(\xi_3) \ \dots \ \mathbf{u}_{0,N}(\xi_3)], \quad (2.103)$$

et  $\mathbf{\Pi}(\xi_1, \xi_2)$  un vecteur de dimension  $\frac{(N+1)(N+2)}{2}$  dont les composantes sont les monômes de différents ordres en  $\xi_1$  et  $\xi_2$  issus du développement :

$$\mathbf{\Pi}(\xi_1, \xi_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_1^{p-q} \xi_2^q \\ \vdots \\ \xi_2^N \end{bmatrix}. \quad (2.104)$$

Selon cette formulation, les différentes composantes sont ordonnées en considérant un index noté  $r$ , calculé, en fonction des ordres  $p - q$  et  $q$  affectant respectivement les composantes  $\xi_1$  et  $\xi_2$ , de la manière suivante :

$$r = \frac{1}{2}p(p+1) + q + 1. \quad (2.105)$$

Cet index  $r$  est utilisé pour désigner les différentes composantes des vecteurs  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{\Pi}$  en notant :

$$\mathbf{u}_r(\xi_3) = \mathbf{u}_{p-q,q}(\xi_3),$$

$$\Pi_r(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^{p-q} \xi_2^q. \quad (2.106)$$

Ces notations permettent de réécrire le développement polynômial par rapport aux coordonnées transverses sous la forme :

$$\mathbf{u}(\xi) = \sum_{p=0}^{N_{cin}} \Pi_r(\xi_1, \xi_2) \mathbf{u}_r(\xi_3). \quad (2.107)$$

#### 2.4.2.1 Expression des déformations

En introduisant le développement 2.107 dans l'expression du gradient du déplacement par rapport à la configuration initiale on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{X}} &= \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} \frac{d\xi}{d\mathbf{X}} \\ &= \frac{d}{d\xi} (\Pi_r(\xi_1, \xi_2) \mathbf{u}_r(\xi_3)) \frac{d\xi}{d\mathbf{X}} \\ &= (\partial_\alpha \Pi_r(\xi_1, \xi_2) \mathbf{u}_r(\xi_3) \otimes \mathbf{e}_\alpha + \Pi_r(\xi_1, \xi_2) \mathbf{u}'_r(\xi_3) \otimes \mathbf{e}_3) \left( \frac{d\mathbf{X}}{d\xi} \right)^{-1} \\ &= \partial_\alpha \Pi_r(\xi_1, \xi_2) \mathbf{u}_r(\xi_3) \otimes \left( \frac{d\mathbf{X}}{d\xi} \right)^{-T} \mathbf{e}_\alpha + \Pi_r(\xi_1, \xi_2) \mathbf{u}'_r(\xi_3) \otimes \left( \frac{d\mathbf{X}}{d\xi} \right)^{-T} \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (2.108)$$

Cette expression fait apparaître les vecteurs contravariants par rapport à la configuration initiale :

$$\mathbf{G}^i(\xi) = \left( \frac{d\mathbf{X}}{d\xi} \right)^{-T} \mathbf{e}_i. \quad (2.109)$$

Contrairement aux développements pour le modèle à l'ordre 1, on ne cherche pas à définir ces vecteurs sur la fibre moyenne, mais en tout point  $\xi$  de la section. Ils sont donc variables dans la section dans le cas général de poutres initialement courbes. Le gradient du déplacement s'exprime à l'aide de ces vecteurs :

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{X}}(\xi) = \partial_\alpha \Pi_r(\xi_1, \xi_2) \mathbf{u}_r(\xi_3) \otimes \mathbf{G}^\alpha(\xi) + \Pi_r(\xi_1, \xi_2) \mathbf{u}'_r(\xi_3) \otimes \mathbf{G}^3(\xi), \quad (2.110)$$

ce qui permet d'exprimer le tenseur des déformations de Green-Lagrange sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ (\partial_\alpha \Pi_r \mathbf{u}_r, \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i \otimes_s \mathbf{G}^\alpha + (\Pi_r \mathbf{u}'_r, \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i \otimes_s \mathbf{G}^3 \right. \\ &\quad \left. + (\partial_\alpha \Pi_r \mathbf{u}_r, \partial_\beta \Pi_s \mathbf{u}_s) \mathbf{G}^\alpha \otimes \mathbf{G}^\beta + (\partial_\alpha \Pi_r \mathbf{u}_r, \Pi_s \mathbf{u}'_s) \mathbf{G}^\alpha \otimes_s \mathbf{G}^3 \right. \\ &\quad \left. + (\Pi_r \mathbf{u}'_r, \Pi_s \mathbf{u}'_s) \mathbf{G}^3 \otimes \mathbf{G}^3 \right]. \end{aligned} \quad (2.111)$$

Selon cette expression, le tenseur des déformations de Green-Lagrange apparaît sous la forme d'un développement polynômial d'ordre  $2N$ . En tenant compte du fait que l'ordre maximal des monômes de l'opérateur  $\partial_\alpha \Pi$  est  $N - 1$ , on remarque que les composantes de déformations dans la section (termes facteurs de  $\mathbf{G}^\gamma \otimes_s \mathbf{G}^\alpha$ ) s'expriment jusqu'à l'ordre  $2N - 2$ , les composantes de cisaillement transverse (termes facteurs de  $\mathbf{G}^\gamma \otimes_s \mathbf{G}^3$ ) jusqu'à l'ordre  $2N - 1$ , et les déformations longitudinales jusqu'à l'ordre  $2N$ .

L'intérêt principal de ce développement polynômial par rapport aux coordonnées transverses est de pouvoir distinguer et traiter de manière différenciée les gradients de différents ordres dans ces directions.

### 2.4.2.2 Mise en œuvre éléments finis

Avec le modèle cinématique de poutre à un ordre  $N$  quelconque l'intégration analytique du terme des travaux virtuels dans la section de la poutre serait beaucoup trop coûteuse du fait du nombre de monômes élémentaires issus du produit entre les contraintes et les déformations à intégrer. En effet, dans la mesure où on utilise un modèle de comportement linéaire, les contraintes s'expriment comme un polynôme d'ordre  $2N$  par rapport aux coordonnées transverses, et le travail virtuel à intégrer se présente comme un polynôme d'ordre  $4N$ , constitué de  $2N(4N + 1)$  termes élémentaires produits de monômes  $\Pi_r(\xi_1, \xi_2)$ . Ce nombre de monômes élémentaires (78 à l'ordre 3) rend rédhibitoire l'intégration analytique dans la section de la poutre des termes de travail virtuel et oriente vers une intégration numérique.

Pour réaliser de manière efficace l'intégration numérique du travail virtuel des efforts internes et de ses dérivées afin d'assembler les contributions à la matrice tangente et au résidu, on a besoin d'exprimer les termes du développement polynômial des déformations, ainsi que leurs dérivées première et seconde par rapport au déplacement, en des points d'intégration particuliers, définis par des coordonnées  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  sur un élément fini. Afin de condenser les expressions, il est utile de revenir à l'expression du gradient de la transformation (2.110) en ce point d'intégration. Les différentes composantes  $\mathbf{u}_r$  du champ de déplacement en ce point d'intégration s'expriment sous la forme de l'interpolation éléments finis suivante :

$$\mathbf{u}_r(\xi_3) = \sum_{I=1,3} w_I(\xi_3) \mathbf{U}_{r,I}, \quad (2.112)$$

où  $w_I$  est la fonction de forme associée au nœud  $I$  de l'élément, et  $\mathbf{U}_{r,I}$  la composante  $r$  du développement polynômial du déplacement en ce nœud.

Le gradient du déplacement s'exprime en fonction de cette interpolation sous la forme :

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{X}}(\xi) = \partial_\alpha \Pi_r(\xi_1, \xi_2) w_I(\xi_3) \mathbf{U}_{r,I} \otimes \mathbf{G}^\alpha(\xi) + \Pi_r(\xi_1, \xi_2) w'_I(\xi_3) \mathbf{U}_{r,I} \otimes \mathbf{G}^3(\xi). \quad (2.113)$$

Il est possible de condenser l'expression de ce gradient sous la forme :

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{X}}(\xi) = \Xi_{j,r}(\xi_1, \xi_2) W_{j,I}(\xi_3) \mathbf{U}_{r,I} \otimes \mathbf{G}^j(\xi), \quad (2.114)$$

en introduisant les fonctions  $\Xi_{j,r}$  et  $W_{j,I}$  définies comme :

$$\Xi_{j,r}(\xi_1, \xi_2) = \partial_j \Pi_r(\xi_1, \xi_2) \text{ si } j = 1, 2; \Xi_{j,r}(\xi_1, \xi_2) = \Pi_r(\xi_1, \xi_2) \text{ si } j = 3; \quad (2.115)$$

$$W_{j,I}(\xi_3) = w_I(\xi_3) \text{ si } j = 1, 2; W_{j,I}(\xi_3) = w'_I(\xi_3) \text{ si } j = 3. \quad (2.116)$$

Cette écriture permet d'exprimer le tenseur des déformations de Green-Lagrange au point d'intégration sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\xi) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}(\xi) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}^T(\xi) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}(\xi) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}(\xi) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \Xi_{j,r} W_{j,I} \mathbf{U}_{r,I,i} \left( \mathbf{G}^j \otimes \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{G}^j \right) + \Xi_{j,r} \Xi_{k,s} W_{j,I} W_{k,J} \mathbf{U}_{r,I,i} \mathbf{U}_{s,J,i} \mathbf{G}^j \otimes \mathbf{G}^k \right] \end{aligned} \quad (2.117)$$

où  $\mathbf{U}_{r,I,i} = (\mathbf{U}_{r,I}, \mathbf{e}_i)$  représente la coordonnée  $i$  de la composante  $r$  du déplacement au nœud  $I$ . Les dérivées première et seconde du tenseur des déformations s'expriment alors :

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}(\xi) = \frac{1}{2} \left[ \Xi_{j,r} W_{j,I} \mathbf{V}_{r,I,i} \left( \mathbf{G}^j \otimes \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{G}^j \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial u^2} \cdot v \cdot \delta u(\xi) = \frac{1}{2} \Xi_{j,r} \Xi_{k,s} W_{j,I} W_{k,J} \left( V_{r,I,i} U_{s,J,i} + U_{r,I,i} V_{s,J,i} \right) \mathbf{G}^j \otimes \mathbf{G}^k, \quad (2.118)$$

Dans les formulations qui précèdent, les composantes de l'opérateur  $\Xi_{j,r}$  ne dépendent que des coordonnées transverses des points d'intégration dans la section ; elles sont déterminées une fois pour toutes à partir de la configuration initiale, et stockées pour chacune des sections de référence types utilisées dans le modèle. Les composantes de l'opérateur  $W_{j,I}$  ne dépendent que des abscisses curvilignes des points de Gauss pour l'intégration sur la fibre neutre de chaque élément de poutre ; on a donc besoin de calculer et stocker ces valeurs uniquement sur les trois points d'intégration de l'élément fini de référence. Le plus gros volume d'information à stocker concerne les composantes des vecteurs contravariants  $\mathbf{G}^i$ , qui doivent être déterminées au niveau de chacun des points d'intégration utilisés dans le modèle.

Dans ces formules, le degré polynômial par rapport aux coordonnées transverses de chacun des termes de déformation est déterminé par les composantes  $\Xi_{j,r}$ . Grâce à ce degré polynômial pour chacun des termes, il est possible d'identifier, au niveau de chaque point d'intégration, chacune des composantes du développement polynômial du tenseur des déformation exprimé sous la forme :

$$\mathbf{E}(\xi) = \sum_{r=0}^{2N} \Pi_r(\xi_1, \xi_2) \mathbf{E}^{(r)}(\xi_3). \quad (2.119)$$

### Question des coûts de calcul

La question des coûts de calcul associés à la mise en œuvre éléments finis de ce modèle cinématique enrichi prend son importance quand on considère les opérations de calcul et d'assemblage des termes élémentaires de contribution au résidu et à la matrice tangente. Si on considère par exemple un modèle à l'ordre 3, on doit prendre en compte 30 degrés de liberté par nœud, et les matrices de rigidité élémentaires pour des éléments quadratiques à trois nœuds sont alors de dimension  $90 \times 90$ . Du fait des dimensions de ces matrices de rigidité élémentaires, le calcul des contributions à ces matrices, en un nombre relativement élevé de points d'intégration sur chaque élément, et pour différents comportements hyperélastiques élémentaires, peut devenir élevé. Alors que dans les gros problèmes non-linéaires traités en implicite le temps de résolution des systèmes linéaires devient vite prédominant par rapport au temps d'assemblage à mesure qu'on augmente la taille des problèmes, cette approche par modèle enrichi tend à augmenter la part du coût de calcul relative à l'assemblage. Cependant, le temps d'assemblage évolue linéairement par rapport à la taille du problème, alors que le temps de résolution a tendance à varier de manière quadratique par rapport au nombre de degrés de liberté.

#### 2.4.2.3 Développement d'un modèle de comportement hybride associé au modèle cinématique enrichi pour des mèches textiles

L'intérêt d'un modèle de poutre enrichi à un ordre  $N$  quelconque, outre le fait de permettre de reproduire de grandes déformations des sections de poutre, réside dans le fait de pouvoir exprimer le tenseur des déformations sous la forme d'un développement polynômial, en ouvrant la possibilité d'appliquer des modèles de comportement différents aux différents termes de ce développement (2.119).



Le comportement de mèches textiles, que l'on cherche à modéliser par cette approche, est caractérisé par des mouvements relatifs entre les filaments élémentaires, qui invalident notamment l'hypothèse de continuité du milieu décrit. Les approches consistant à décrire ces milieux par des matériaux de Cauchy se révèlent inadaptées pour reproduire le comportement de tels milieux, par exemple dans le domaine de la flexion (voir notamment Boisse et al. [2018]). Le but poursuivi en mettant en œuvre le modèle de poutre enrichi est de pouvoir traiter différemment les différentes composantes du développement polynômial du tenseur des déformations, ou les gradients de différents ordres par rapport aux coordonnées transverses. Pour cela, on propose un modèle de comportement hyperélastique qualifié d'hybride, consistant en la superposition de différents types de comportements hyperélastiques élémentaires appliqués à différents termes du développement polynômial des déformations. On exprime le potentiel d'énergie de déformation élastique  $\Psi$  sous la forme de la somme de  $N_H$  potentiels hyperélastiques élémentaires :

$$\Psi(\mathbf{E}) = \sum_k^{N_H} \Psi_k(\mathbf{E}^{(m_1(k))}, \dots, \mathbf{E}^{(m_2(k))}), \quad (2.120)$$

chacun des potentiels élémentaires  $\Psi_k$  s'exprimant en fonction d'une série de termes du développement polynômial du tenseur des déformations dont les rangs sont compris dans l'intervalle  $[m_1(k), m_2(k)]$ .

Formulé de cette manière, et étant donné le nombre de termes du développement polynômial des déformations ( $2N(N + 1)$ ), ce type d'approche ouvre la voie à un très grand nombre de combinaisons possibles.

Nous avons développé cette approche dans le cadre de la thèse d'Hélène Moustacas portant sur la modélisation du comportement transverse de mèches de filaments de carbone (Moustacas [2019]). L'objectif de cette thèse était de construire un modèle qualifié de mésoscopique, à l'échelle de la mèche, capable de reproduire le comportement sous sollicitation de compression transverse entre deux plans mobiles, tel qu'observé expérimentalement ou obtenu par des simulations à l'échelle micro, sur ces torons constitués de plusieurs dizaines de milliers de filaments de carbone. Le but de ce modèle mésoscopique n'est pas de décrire de manière précise ce qui se passe à l'intérieur de la mèche, avec notamment la difficulté de donner un sens précis aux tenseurs de déformation et de contrainte dans ce genre de milieu, mais de construire un modèle qui reproduise fidèlement les interactions de cette mèche avec son environnement extérieur, en l'occurrence, les autres mèches d'un tissé interlock. On cherche donc à approcher fidèlement les déformations de l'enveloppe de la mèche, ainsi que les efforts résultants développés par ce milieu sous divers types de sollicitation.

### Comportement en compression transverse

Le travail de thèse d'Hélène Moustacas s'est attaché en premier lieu à reproduire le comportement sous sollicitation de compression transverse de mèches de carbone, pour lesquelles on disposait de résultats d'essais expérimentaux réalisés au Laboratoire de Physique et Mécanique Textile de Mulhouse. Des tests de simulation numérique ont été conduits en parallèle à l'aide de Multifil pour reproduire ce type de chargement sur des assemblages de quelques centaines de filaments afin de mieux comprendre les mécanismes élémentaires mis en jeu.

Les tests de compression transverses, expérimentaux et numériques, permettent de caractériser ces essais par des courbes représentant l'évolution de l'effort transverse

en fonction de la déformation transverse (variation d'épaisseur), et l'évolution de la largeur de la mèche en fonction de la variation d'épaisseur.

La démarche adoptée pour l'identification du modèle de comportement hybride a été une démarche heuristique, par essais successifs. On a pu montrer qu'il était nécessaire de pousser le développement polynômial du modèle cinématique jusqu'à l'ordre 3 pour obtenir des déformations suffisamment riches.

Au niveau comportement, on a d'abord testé un modèle de type isotrope transverse de type Saint-Venant pour rendre compte de la très grande différence de rigidité entre les directions transverses et axiale. Ce comportement de type isotrope transverse ne permet cependant pas d'aller jusqu'à des taux de déformation tels que ceux explorés dans les essais, notamment à cause de problèmes de retournement de matière (inversion du signe du jacobien). Pour remédier à ce problème, on a ajouté un potentiel hyperélastique néo-hookéen, qualifié de bidimensionnel car ne s'appliquant qu'aux composantes transverses du tenseur des déformations. Ce modèle correspond à un potentiel  $\Psi_{2D}$  exprimé sous la forme :

$$\Psi_{2D}(\mathbf{E}) = \frac{1}{2}\mu(I_{2D} - 2) - \mu \ln J_{2D} + \frac{1}{2}\lambda(J_{2D} - 1)^2 \quad (2.121)$$

où les invariants  $I_{2D}$  et  $J_{2D}$  s'expriment en fonction du tenseur des déformations de Cauchy-Green  $\mathbf{C}$  et des directions transverses de la section  $\mathbf{d}_1$  et  $\mathbf{d}_2$  sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{2D} &= \mathbf{C} \otimes (\mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2), \\ I_{2D,1} &= \text{Tr}(\mathbf{C}^{2D}) = \mathbf{C} : (\mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2), \\ J_{2D}(\mathbf{C}) &= \sqrt{\det(\mathbf{C}^{2D})}. \end{aligned}$$

Les coefficients  $\lambda$  et  $\mu$  de ce modèle permettent en particulier de contrôler la variation d'aire de la section au cours du chargement, et sont utiles pour régler l'évolution de la largeur de la mèche en fonction du chargement.

Ce comportement néo-hookéen ne permet cependant pas de rendre compte de la forte augmentation de la rigidité transverse pour les grandes compressions, qui s'apparente à un comportement exponentiel. Un potentiel de type exponentiel dans les directions transverses, noté  $\Psi_{exp}$ , a donc été ajouté, en reprenant une forme proposée par Holzapfel et al. [2000] pour représenter le comportement des milieux à base de filaments de collagène constituant les parois des veines aortiques :

$$\begin{aligned} \Psi_{exp}(\mathbf{C}) &= \frac{k_1}{2k_2} \left[ \exp(k_2 (\mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 : \mathbf{C})^2) - 1 \right] \\ &\quad + \frac{k_1}{2k_2} \left[ \exp(k_2 (\mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 : \mathbf{C})^2) - 1 \right]. \end{aligned}$$

Différents essais ont permis de montrer qu'en limitant le comportement isotrope transverse à l'ordre 0 du tenseur des déformations (termes constants dans la section) et en appliquant les potentiels néo-hookéen et exponentiel bidimensionnels à l'ensemble des termes du développement polynômial, on était capable de reproduire de manière satisfaisante le comportement en compression transverse de différentes mèches de carbone, tel qu'illustré dans la thèse d'Hélène Moustacas (Moustacas [2019]).

Nous présentons ici des résultats de simulation comparant un test de compression transverse effectué sur un assemblage de 499 filaments (simulation à l'échelle micro) et un test équivalent effectué sur un modèle mésoscopique de mèche. Les déformées

(Fig. 2.5) illustrent la capacité du modèle à rendre compte de fortes déformations de section. Les courbes d'effort résultant (Fig. 2.6) montrent la possibilité de reproduire des comportements complexes grâce à la superposition de différents types de comportement hyperélastiques exprimés en fonction de composantes particulières de déformation.

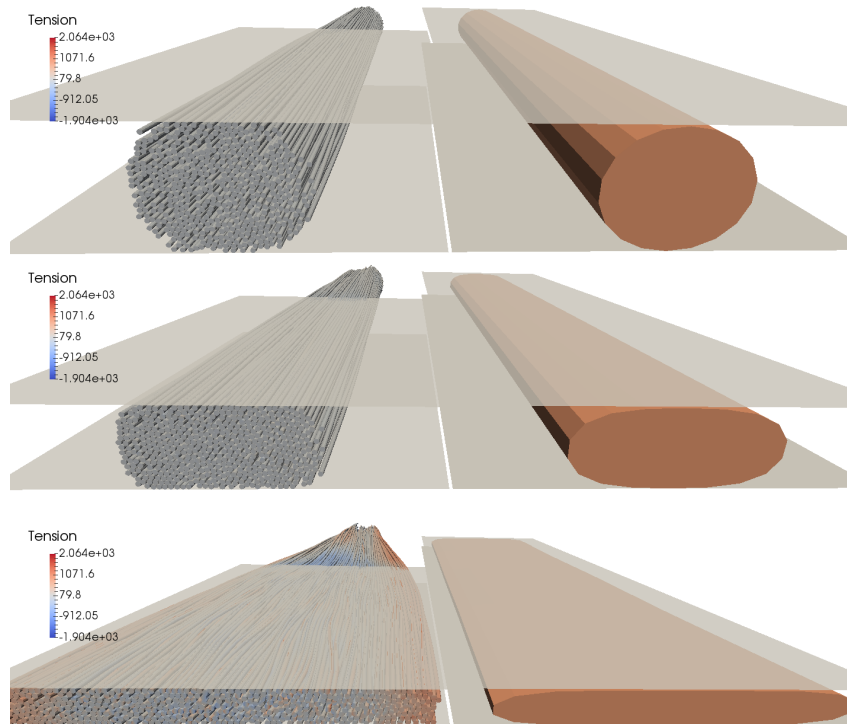


FIGURE 2.5 – Comparaison des simulations à l'échelle micro (à gauche) et à l'échelle méso (à droite) d'un chargement en compression transverse sur une mèche de filaments de carbone

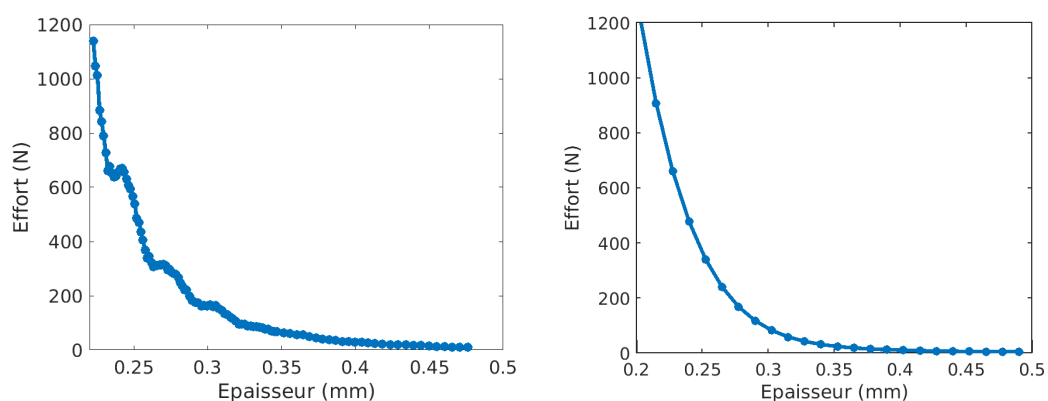


FIGURE 2.6 – Comparaison des évolutions de l'effort transverse en fonction de l'écrasement à l'échelle micro (à gauche) et à l'échelle méso (à droite)

#### 2.4.2.3.1 Approche du comportement en flexion

La flexion d'une mèche textile se traduit au niveau des déformations par des termes de déformation longitudinale de degré supérieur ou égal à 1 par rapport aux coordon-

nées transverses. En ajoutant un potentiel hyperélastique isotrope transverse avec une très faible raideur longitudinale pour les termes de déformation axiale d'ordre supérieur ou égal à 1, on obtient une poutre très souple en flexion. Dans l'attente d'une comparaison plus poussée avec des essais expérimentaux ou des simulation à l'échelle des filaments, on présente les résultats de simulation d'un test de type flexion 3 points, dans lequel une portion de poutre, discrétisée en 30 éléments finis, est déformée à l'aide de trois cylindres rigides rapprochés entre eux. Les déformées (Fig. 2.7 et 2.8) montrent les fortes déformations de flexion et d'écrasement obtenues à l'issue de ce test.

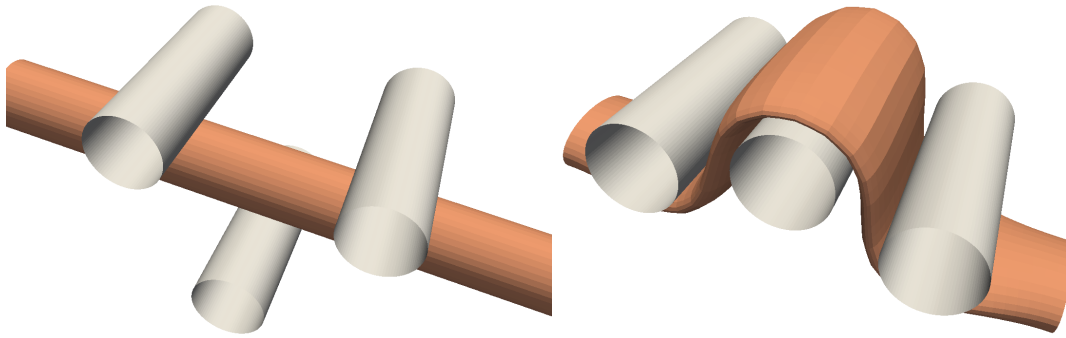


FIGURE 2.7 – Flexion d'une poutre entre trois cylindres rigides : configurations initiale et finale

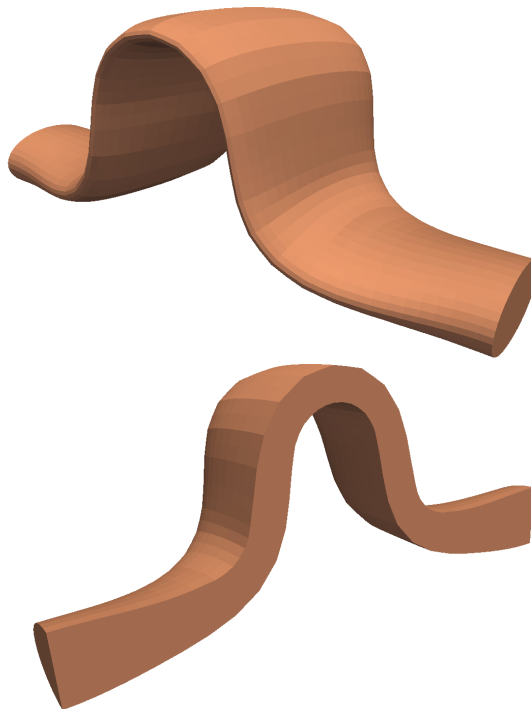


FIGURE 2.8 – Flexion d'une poutre entre trois cylindres rigides : détail et coupe du modèle déformé

#### 2.4.2.3.2 Intégration dans un modèle de simulation d'un tissu interlock 3D

L'intégration de ce modèle à l'échelle mésoscopique dans l'approche de simulation permettant de déterminer la configuration initiale d'un tissu interlock 3D, telle

qu'exposée au Chapitre 5 en 5.3.5.1, montre une première application de l'approche de modélisation des mèches textiles à l'échelle mésoscopique à l'aide du modèle cinématique polynômial. Ce type de simulation consiste à partir d'une configuration dans laquelle l'ensemble des mèches sont considérées comme cylindriques, droites et disposées sur un même plan (Fig. 2.9), puis à séparer ces mèches grâce aux interactions de contact en respectant les ordres de superposition définis par le motif de tissage choisi, jusqu'à obtenir une configuration finale en équilibre mécanique (Fig. 2.10). L'exemple présenté comporte 64 mèches réparties en 5 couches.

Cette simulation à l'échelle mésoscopique intègre les développements relatifs à la prise en compte du contact surfacique entre mèches déformables réalisés dans le cadre de la thèse d'Hélène Moustacas.

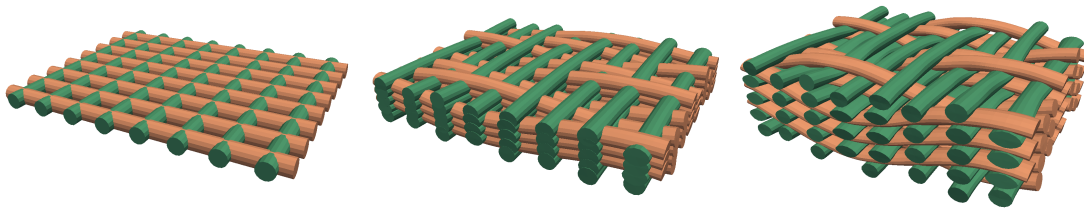


FIGURE 2.9 – Étapes intermédiaires dans le processus de séparation des mèches pour la détermination de la configuration initiale d'un tissé interlock

Des comparaisons avec des données expérimentales restent nécessaires pour valider ces premiers résultats de simulation de tissés interlock à partir de modèles de mèches à l'échelle mésoscopiques, et recalculer au besoin les paramètres des différents modèles de comportement. Ces premiers résultats montrent cependant la pertinence de l'approche, avec un premier gain en temps de calcul de l'ordre de 4 par rapport aux simulations à l'échelle microscopique réalisées sur la même structure (Durville et al. [2018]). Les déformées obtenues, notamment au niveau des déformations transverses des mèches induites par les interactions de contact montrent l'intérêt de la mise en œuvre du modèle cinématique polynômial et des modèles de comportement hyperélastiques associés.

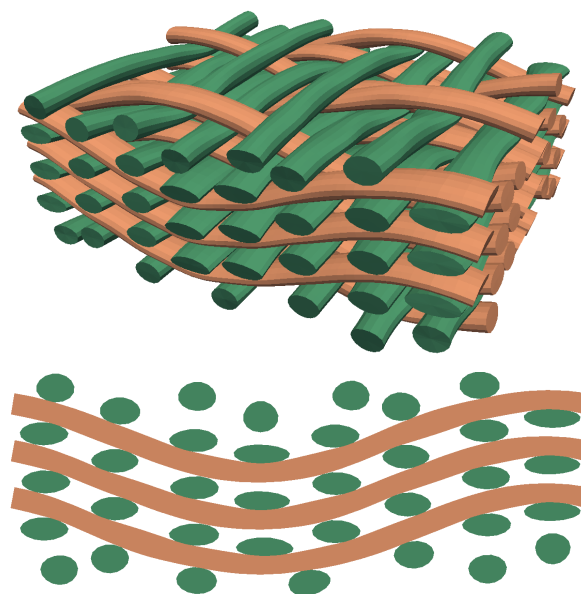


FIGURE 2.10 – Configuration du tissé interlock obtenue par simulation et coupe

#### 2.4.2.4 Conclusions et perspectives sur le modèle cinématique de poutre polynômial

Si les premiers résultats montrent la faisabilité et l'intérêt de l'approche proposée de modèle cinématique de poutre enrichi à un ordre quelconque, de nombreux points restent à explorer.

Une première question concerne le positionnement de l'approche proposée par rapport à une approche tridimensionnelle standard, qui consisterait à discrétiser les structures étudiées avec des éléments finis volumiques et à utiliser des modèles de comportement tridimensionnels prenant en compte des gradients d'ordres supérieurs dans les directions transverses. La comparaison en termes de coût de calcul n'est pas forcément déterminante car si l'approche poutre enrichie permet sans doute de diminuer le nombre de degrés de liberté dans chaque section par rapport à un maillage tridimensionnel, l'augmentation du coût d'assemblage des termes élémentaires peut contrebalancer ce premier gain. C'est sans doute dans la pertinence des modélisations proposées que la différence essentielle peut se jouer. Par rapport à ce point, le fait de pouvoir considérer que le milieu constituant ces structures élancées est homogène ou non à travers leur section peut s'avérer déterminant. Dans la mesure où ce milieu peut être supposé homogène à travers la section, une approche tridimensionnelle standard avec des comportements à gradients d'ordre supérieur peut suffire. En revanche, si le milieu apparaît non plus homogène, mais structuré au niveau de la section, une approche de poutre enrichie peut trouver sa pertinence par son aptitude à prendre en compte des évolutions de champ sur l'ensemble de la section. Une structuration du milieu au niveau de la section peut résulter par exemple des effets d'opérations de torsadage sur les mèches étudiées, et qui induisent notamment une répartition hétérogène des orientations des filaments au travers de la section (voir par exemple Sibellas et al. [2020]). Dans ce cas, un modèle cinématique exprimé de manière polynômiale sur la section peut s'avérer pertinent pour capter des mécanismes ou des modes qui existeraient au niveau de cette section.

Un deuxième point concerne la nature hyperélastique des modèles de comportement mis en œuvre pour décrire les mèches textiles, qui ne rend pas compte des phénomènes dissipatifs irréversibles liés en particulier au frottement entre les filaments élémentaires constituant ces milieux. Tout un champ de recherche s'ouvre pour déterminer quelles variables cinématiques à l'échelle mésoscopique seraient pertinentes pour décrire ces mécanismes dissipatifs et quels modèles de comportement associés pourraient les traduire.

Un troisième domaine d'exploration concerne l'identification des paramètres des modèles de comportement mis en œuvre sur les modèles à cinématique enrichie. Le développement polynômial du tenseur des déformations rend accessible un très grand nombre de composantes de déformation, à différents ordres, et selon différentes directions, pouvant être intégrées à différents types de modèles de comportement élémentaires. On peut se demander si ces différents termes de déformation sont tous nécessaires ou influents, et si certains pourraient être négligés. La superposition de modèles hyperélastiques élémentaires associés à certains termes de déformation, comme proposé dans le modèle de comportement hybride présenté, peut conduire à l'identification d'un grand nombre de paramètres élémentaires, pour laquelle une approche heuristique peut rapidement trouver ses limites. Les développements dans le domaine des algorithmes d'apprentissage profond pourraient aider à sélectionner des variables et des paramètres pertinents, en rapprochant des simulations à l'échelle microscopique sur des assemblages de filaments et des modélisations à base de modèles enrichis à l'échelle mésoscopique.

## Chapitre 3

# Modélisation du contact dans les milieux enchevêtrés

Les interactions de contact entre fibres ou fils jouent un rôle prépondérant dans le comportement des milieux enchevêtrés. Des phénomènes de blocage du déplacement entre fibres lorsque le milieu est compacté, ou de dissipation par frottement lorsqu'il est soumis à des distorsions, induisent des comportements macroscopiques non-linéaires caractéristiques de ces milieux. Les interactions de contact-frottement entre constituants élémentaires sont aussi à l'origine de phénomènes endommageants, du fait qu'elles peuvent se traduire par des efforts localisés importants à même d'engendrer des usures, ou d'entraîner des transferts d'efforts entre fibres conduisant à des surcontraintes pour certaines d'entre elles.

Les difficultés liées à la prise en compte des contacts d'un point de vue modélisation et simulation sont liées principalement à leur grande densité au sein du milieu considéré, et aux non-linéarités de comportement induites par ces interactions. L'optimisation du coût de la recherche de la localisation des ces interactions au sein de la structure considérée et la mise au point d'un d'algorithme de résolution non-linéaire efficace constituent deux défis majeurs pour la modélisation de ces interactions.

### 3.1 Brève revue de la littérature sur la modélisation des contacts entre poutres

#### 3.1.1 Introduction

La littérature traitant de la prise en compte du contact entre poutres par la méthode des éléments finis est peu abondante. La plupart des travaux se réfèrent à l'approche initialement proposée par Wriggers and Zavarise [1997]; Zavarise and Wriggers [2000], et développée ensuite par Litewka and Wriggers [2002b], pour enrichir notamment la prise en compte des frottements et Litewka and Wriggers [2002a], pour appliquer cette approche au cas de poutres à sections quadrangulaires. Ces travaux ont ensuite été repris et développés par Konyukhov and Schweizerhof [2010]. Tous ces travaux ont comme point commun la manière de localiser le contact aux lieux de distance minimale entre les poutres. En induisant un traitement symétrique des deux poutres en interaction, cette manière de procéder se démarque des méthodes couramment employées pour la détection des contacts entre corps volumiques tridimensionnels, qui reposent souvent sur une stratégie de type maître/esclave, consistant à privilégier l'une des surfaces en interaction, et à déterminer les contacts entre d'une part, des nœuds ou points d'intégration

des éléments d'une surface, et d'autre part, leurs projections sur la surface opposée. Au contraire, la localisation des contacts aux lieux de distance minimale conduit à considérer le contact entre des points situés à des abscisses curvilignes quelconques par rapport aux éléments finis.

### 3.1.2 Caractérisation du lieu du contact comme lieu de distance minimale entre courbes

Pour déterminer les lieux de distance minimale entre deux poutres, on considère deux géométries linéiques suffisamment régulières (représentant soit les fibres moyennes des poutres considérées dans le cas de poutres à sections circulaires, soit des arêtes de l'enveloppe dans le cas de poutres à sections quadrangulaires (Litewka and Wriggers [2002a])), représentées par des courbes paramétrées décrites par les positions  $\mathbf{x}_1(\xi_1)$  et  $\mathbf{x}_2(\xi_2)$ , exprimées en fonction de paramètres curvilignes  $\xi_1$  et  $\xi_2$ . La distance entre deux points sur chacune des courbes s'exprime :

$$d(\xi_1, \xi_2) = (\mathbf{x}_1(\xi_1) - \mathbf{x}_2(\xi_2), \mathbf{x}_1(\xi_1) - \mathbf{x}_2(\xi_2))^{\frac{1}{2}}, \quad (3.1)$$

et le contact est testé pour des couples de paramètres  $(\xi_1^c, \xi_2^c)$  minimisant cette distance et caractérisés par la double condition :

$$\begin{cases} \frac{\partial d}{\partial \xi_1}(\xi_1^c, \xi_2^c) = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_1(\xi_1^c) - \mathbf{x}_2(\xi_2^c), \mathbf{x}'_1(\xi_1)) = 0, \\ \frac{\partial d}{\partial \xi_2}(\xi_1^c, \xi_2^c) = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_1(\xi_1^c) - \mathbf{x}_2(\xi_2^c), \mathbf{x}'_2(\xi_2)) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Cette condition exprime que le vecteur  $\mathbf{x}_1(\xi_1^c) - \mathbf{x}_2(\xi_2^c)$  représentant le segment entre les deux points, correspond à une perpendiculaire commune entre les deux courbes (simultanément orthogonale aux deux tangentes  $\mathbf{x}'_1(\xi_1)$  et  $\mathbf{x}'_2(\xi_2)$ ).

Lors de la résolution non-linéaire du problème, on cherche à caractériser les variations des abscisses  $\xi_1^c$  et  $\xi_2^c$  minimisant la distance entre les deux courbes, en fonction des déplacements des points de ces courbes, en procédant à une linéarisation de la condition d'orthogonalité (3.2). En décomposant la variation de la position du point de contact sur la courbe  $i$ ,  $\mathbf{x}_i(\xi_i^c)$ , en une partie venant de la variation de l'abscisse curviligne minimisant la distance, et une partie provenant du déplacement  $\mathbf{u}_i$  de la courbe, sous la forme :

$$\delta \mathbf{x}_i(\xi_i^c) = \mathbf{x}'_i(\xi_i^c) \delta \xi_i^c + \delta \mathbf{u}_i(\xi_i^c), \quad (3.3)$$

la linéarisation des conditions (3.2) s'écrit :

$$\begin{cases} (\mathbf{x}'_1 \delta \xi_1^c - \mathbf{x}'_2 \delta \xi_2^c + \delta \mathbf{u}_1 - \delta \mathbf{u}_2, \mathbf{x}'_1) + (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}'_1 \delta \xi_1^c + \delta \mathbf{u}'_1) = 0, \\ (\mathbf{x}'_1 \delta \xi_1^c - \mathbf{x}'_2 \delta \xi_2^c + \delta \mathbf{u}_1 - \delta \mathbf{u}_2, \mathbf{x}'_2) + (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}'_2 \delta \xi_2^c + \delta \mathbf{u}'_2) = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

qu'on peut réécrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \delta \xi_1^c \\ \delta \xi_2^c \end{Bmatrix} = [\mathbf{A}]^{-1} \begin{Bmatrix} (\mathbf{x}'_1, \delta \mathbf{u}_2 - \delta \mathbf{u}_1) + (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \delta \mathbf{u}'_1) \\ (\mathbf{x}'_2, \delta \mathbf{u}_2 - \delta \mathbf{u}_1) + (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \delta \mathbf{u}'_2) \end{Bmatrix}, \quad (3.5)$$

avec

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} (\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_1) + (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}'_1) & -(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) \\ (\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) & -(\mathbf{x}'_2, \mathbf{x}'_2) + (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}'_2) \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Cette relation exprimant les variations des abscisses curvilignes des points de contact en fonction des variations des déplacements et des dérivées des déplacements des courbes en ces points constitue un point important dans la mise en œuvre des approches localisant le contact aux minima de distance entre courbes.



### 3.1.3 Discussion sur la localisation du contact aux lieux de distance minimale

La localisation des contacts aux lieux de distance minimale soulève plusieurs difficultés. Les développements se trouvent simplifiés quand on discrétise les poutres par des éléments finis rectilignes avec une interpolation linéaire des déplacements : non seulement la linéarisation (3.5) est simplifiée par la disparition des termes de dérivée seconde  $x_i''$ , mais, s'il existe, le lieu de distance minimale entre éléments rectilignes est unique (si on écarte le cas particulier d'éléments parallèles). L'utilisation d'éléments rectilignes pose cependant des difficultés au niveau des discontinuités de pentes entre éléments, notamment pour le suivi de glissements pour lesquels le point de contact passe d'un élément à l'autre. Pour remédier à cette difficulté, tout en conservant des éléments finis rectilignes et d'interpolation linéaire, Litewka [2007a,b] a proposé d'approcher la géométrie discrétisée des poutres par des polynômes de Hermite lissant la transition entre deux éléments successifs.

La localisation du contact aux lieux de distance minimale apparaît bien adaptée pour les cas de contact correspondant à des croisements avec des angles assez importants entre poutres, et pour lesquels on s'attend à un contact de nature ponctuelle. Cette méthode atteint cependant ses limites dans les cas où on s'attend à un contact continu sur une certaine longueur, ce qui correspond à une situation où la distance entre poutres est constante sur cette longueur en contact. Sans aller jusqu'au cas particulier de poutres parallèles, cela concerne notamment les situations où les conditions de contact entraînent une flexion (ou un enroulement) d'une poutre sur l'autre, conduisant à une adaptation des deux géométries linéiques sur une certaine longueur de contact. Pour pallier cette difficulté, Litewka [2013] propose de placer deux éléments de contact supplémentaires de part et d'autre du lieu de distance minimale. Cette correction permet de prendre en compte le cas de la flexion d'une poutre sur une autre poutre, mais n'est pas forcément adaptée pour une zone de contact étendue impliquant plusieurs éléments finis consécutifs.

## 3.2 Méthode de détermination des contacts entre fibres à partir de géométries intermédiaires

### 3.2.1 Objectifs de la méthode

La méthode proposée ici vise à répondre aux défis particuliers que pose la détermination des contacts entre fibres dans un milieu enchevêtré. La densité des contacts étant a priori élevée au sein de ces milieux, le coût de cette détermination est un critère important. Les milieux considérés étant soumis à de grandes déformations, les glissements potentiellement engendrés entre fibres entraînent une évolution des entités matérielles couplées par les interactions de contact. En s'intéressant à des milieux enchevêtrés variés, on cherche à ce que la méthode envisagée puisse s'adapter aux différents types de configurations de contact entre fibres allant d'un contact très localisé au croisement entre deux fibres, à une zone de contact possiblement continue entre deux fibres parallèles.

La recherche du contact au sein d'un ensemble de poutres peut se ramener à une suite de recherches de contact entre chacune des paires de poutres susceptibles d'être en contact parmi cet ensemble de poutres. Le problème élémentaire à résoudre devient celui de la recherche du contact entre deux poutres, tel qu'illustré sur la Figure 3.1.

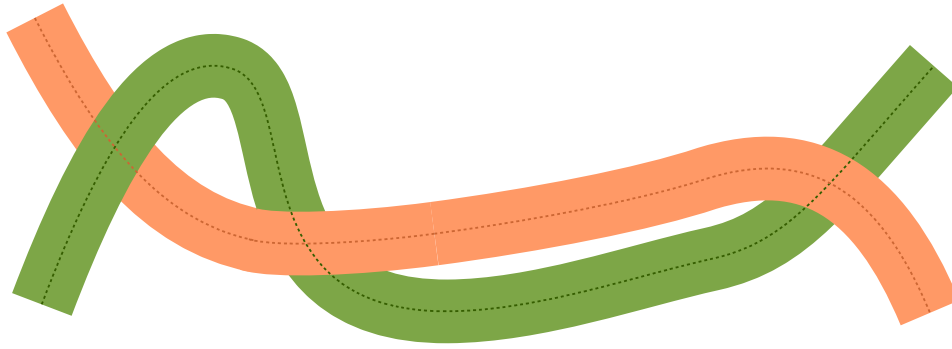


FIGURE 3.1 – Différentes configuration de contact entre deux poutres

### 3.2.2 Présentation synthétique de la méthode

#### 3.2.2.1 Détermination de contact à partir de géométries intermédiaires

##### 3.2.2.1.1 Définition du type de contact envisagé

L'objet de la détermination du contact est de définir quelles parties des deux poutres considérées sont susceptibles d'entrer en contact. Répondre à cette question demande déjà d'avoir une première idée de la manière dont on envisage de traiter le contact. Tenir compte de l'écrasement des poutres au niveau des contacts, du fait de leur déformabilité volumique, conduit à envisager un contact de nature surfacique, associant deux éléments de surface appartenant à chacune des poutres considérées. Nous écartons cependant cette approche car elle fait intervenir une échelle de modélisation trop fine par rapport aux problèmes que nous envisageons. De plus, même si le modèle de poutre envisagé rend compte d'une certaine déformabilité volumique des poutres, sa cinématique reste trop pauvre pour permettre un ajustement des surfaces au niveau des zones de contact. Pour rester consistant avec le modèle de poutre adopté pour représenter les fibres du milieu, nous envisageons le contact comme un phénomène linéique se produisant entre les surfaces des deux poutres. Nous visons donc à représenter chaque zone de contact sous la forme d'une géométrie linéique commune entre les surfaces des deux poutres en contact.

##### 3.2.2.1.2 La question de l'appariement et de la direction de recherche du contact

La plupart des approches de la modélisation du contact s'appuient sur une condition cinématique qui traduit une condition de non interpénétration. Une telle condition est souvent formulée entre un point et une surface, une linéarisation conduisant à représenter la surface par son plan tangent au lieu où on prévoit que le contact se produira. La formulation de cette condition suppose donc une prédiction du lieu du contact, celui-ci étant recherché dans une certaine direction, que nous appellerons ici direction de recherche du contact. Cette direction a pour effet d'apparier deux points, en associant un point cible sur la surface opposée, au premier point par rapport auquel on cherche à exprimer la condition. Le choix de cette direction de recherche de contact, pour lequel beaucoup d'options sont possibles, est déterminant.

Une première option, souvent utilisée pour la détermination du contact entre poutres, consiste à définir le lieu du contact comme le lieu de distance minimale entre les deux poutres. Cette approche est précise pour le cas de contacts croisés, mais s'avère inadaptée aux situations de contacts continus entre fibres pour lesquelles la distance entre fibres est quasiment constante sur la longueur de contact.

Une alternative consiste à prendre comme direction de recherche du contact la

direction normale à la surface à l'une ou l'autre des fibres. Cette alternative apparaît cependant mal adaptée aux portions de fibres présentant de fortes courbures, comme illustré sur la Figure 3.2. La première difficulté est liée au fait que pour une abscisse curviligne donnée sur la poutre, les normales à la surface au niveau du contour de la section située à cette abscisse sont orientées dans toutes les directions du plan de cette section. La deuxième difficulté tient au fait que la recherche du contact à partir de la direction normale à une seule des deux poutres ne conduit pas à un traitement symétrique : suivant que la recherche est effectuée en partant de l'une ou de l'autre poutres, les couples de points associés ne sont pas les mêmes.

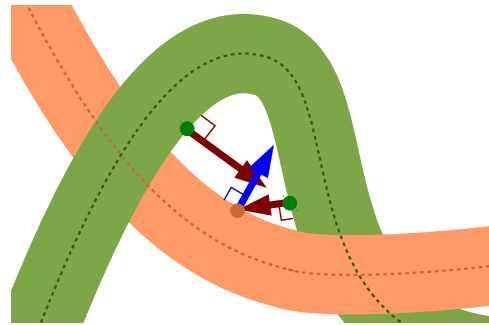


FIGURE 3.2 – Inconsistances possibles liées à l'usage de la direction normale à la surface comme direction de recherche du contact

Ce qui semble principalement en cause dans les limites soulevées par rapport à l'utilisation de la direction normale à l'une des surface comme direction de recherche, c'est le fait de chercher le contact en ne s'appuyant principalement sur la géométrie que d'une seule des poutres en interaction. Plus fondamentalement, le fait de considérer le contact comme un phénomène concernant une structure par rapport à une autre, en distinguant les rôles de l'une et de l'autre structures, semble à l'origine de difficultés potentielles.

### 3.2.2.1.3 L'idée d'une géométrie intermédiaire

Pour dépasser la difficulté qui vient d'être soulevée, l'idée est de ne plus considérer le contact comme impliquant une structure par rapport à une autre, mais comme impliquant deux structures par rapport à un référentiel intermédiaire commun à déterminer. L'objectif est de considérer une géométrie intermédiaire, dont les directions normales pourraient être utilisées comme directions de recherche pour déterminer les contacts avec un traitement symétrique, ou équivalent, pour les deux structures. Pour cela, on cherche à construire, au niveau de chaque zone de contact, une géométrie intermédiaire linéique qui soit la moyenne entre les deux portions de poutres impliquées dans cette zone, et constitue une première approximation de la géométrie, inconnue a priori, de la ligne de contact entre les deux poutres au niveau de cette zone, comme illustré sur la Figure 3.3. Le principal intérêt attendu de cette géométrie intermédiaire est de fournir des directions de recherche du contact adaptées à la géométrie locale du contact. Pour déterminer ces directions de recherche du contact, on propose d'utiliser des plans orthogonaux à cette géométrie intermédiaire. Chaque plan orthogonal intersecte chacune des lignes moyennes des deux poutres, déterminant deux abscisses curvilignes, et associant les sections de poutres identifiées par ces abscisses comme candidates au contact.

### 3.2.2.1.4 La zone de proximité

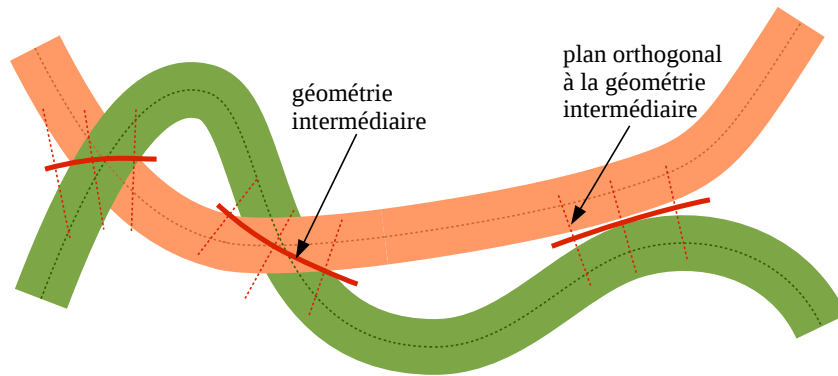


FIGURE 3.3 – Représentation des géométries intermédiaires au niveau des zones de contact

Pour introduire cette idée de géométrie intermédiaire, nous avons utilisé une notion de zone de contact qui reste à définir. Nous transformons la notion de zone de contact, en notion de zone de proximité, que nous définissons comme une paire de deux portions de chacune des poutres, dont la distance de l'une à l'autre est inférieure à un certain critère de proximité donné. On part cependant du principe que le rôle attendu des géométries intermédiaire ne nécessite pas une grande précision dans la détermination de ces zones de proximité, en supposant que les directions tangentes aux géométries intermédiaires (qui déterminent l'orientation des plans orthogonaux) sont peu affectées par la précision apportée à cette détermination. L'idée est donc de chercher à déterminer ces zones de manière peu coûteuse, en acceptant une précision limitée.

### 3.2.2.1.5 Une recherche du contact à deux niveaux

L'introduction de zones de proximité permet de réduire le coût de la recherche du contact en la décomposant en deux niveaux. Une fois les zones de proximité créées, le fait de limiter la recherche du contact sur chaque géométrie intermédiaire aux seules portions de poutres définissant ces zones réduit considérablement le coût de recherche au niveau local.

### 3.2.2.2 Approche discrétisée des interactions de contact par des éléments de contact

La manière dont nous avons envisagé le contact sous la forme d'interactions de nature linéique au niveau de chaque zone de contact (cf. 3.2.2.1.1) pourrait conduire à chercher à approcher ces interactions d'un point de vue numérique sous une forme continue en espace (le long des lignes moyennes des fibres). De telles approches existent dans la littérature, en présentant notamment l'avantage de conférer la régularité souhaitée aux efforts d'interaction, grâce à l'utilisation par exemple d'éléments de type mortier. La mise en œuvre de telles approches nous a cependant semblé trop complexe, en raison notamment des importantes variations dans les zones de contact engendrées par les glissements, et de la grande variété des situations de contact pouvant aller de contacts quasiment ponctuels au croisement entre deux fibres, à des interactions continues le long d'une ligne de contact.

Si la discrétisation est l'alternative à une telle approche continue du contact, il reste à définir la localisation des lieux discrets en lesquels définir le contact. En s'appuyant sur les éléments finis utilisés pour mailler les fibres impliquées dans le problème, on pourrait chercher à utiliser cette discrétisation en cherchant à approcher les interactions

de contact au niveau des nœuds ou de points d'intégration particuliers définis sur ces éléments. Cependant, dans le cas de contacts localisés au niveau de croisements, il apparaît nécessaire de considérer le contact au lieu géométrique précis du croisement, qui ne correspond pas forcément à un point prédéterminé par rapport à la discrétisation éléments finis des deux poutres.

Pour poursuivre dans la direction de l'approche du contact entre deux structures à partir d'un référentiel intermédiaire, l'idée proposée ici est d'utiliser la géométrie intermédiaire comme support géométrique pour la prise en compte des interactions de contact frottant, en cherchant à approcher ces interactions de manière discrète le long de cette géométrie intermédiaire en une suite de points discrets. Pour considérer le contact sur cette géométrie intermédiaire, on cherchera à déterminer, pour chacun de ces lieux discrets, quelles sont les particules matérielles, appartenant aux surfaces des deux poutres en interaction, dont on peut prédire qu'elles viendront en contact en ces points. Chaque couple de particules matérielles ainsi créé en un point discret de la géométrie intermédiaire constitue ce qu'on appelle un élément de contact (Figure 3.4).

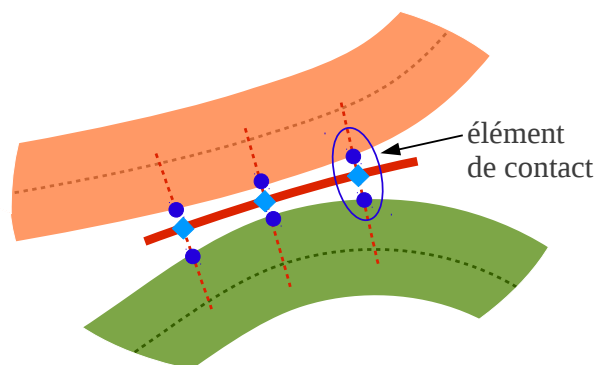


FIGURE 3.4 – Discrétisation du contact sur la géométrie intermédiaire

### 3.2.3 Mise en œuvre de la méthode

Après avoir présenté synthétiquement les idées principales orientant la méthode de détermination du contact proposée, nous décrivons plus en détail sa mise en œuvre.

#### 3.2.3.1 Détermination des zones de proximité

##### 3.2.3.1.1 Détermination des paires de poutres proches à partir d'une discrétisation de l'espace

Les interactions de contact se produisant au niveau élémentaire entre deux poutres, nous abordons la détermination du contact au niveau de l'ensemble des paires de poutres présentes au sein du milieu considéré. Dans un certain nombre de cas, une part importante de ces paires peut être d'emblée écartée de l'analyse en raison de la distance trop importante entre les poutres les constituant. L'objet de cette première étape est de faire le tri parmi l'ensemble des paires de poutres pour écarter celles dont les poutres sont trop éloignées l'une de l'autre.

Il n'existe pas d'approche simple permettant de calculer la distance minimale entre deux poutres. Une approximation de cette distance peut être obtenue en parcourant l'une des poutres avec une longueur de discrétisation donnée, et en déterminant pour chacun des points obtenu, le point le plus proche sur l'autre poutre, défini en général par une projection orthogonale. Une telle approche pour estimer la distance minimale

entre deux poutres peut s'avérer coûteuse, d'autant plus que le nombre de couples au sein d'une collection de poutres évolue de manière quadratique par rapport au nombre de poutres.

Pour éviter d'avoir à évaluer directement la distance minimale au sein de chaque paire de poutres, une manière alternative consiste à estimer la proximité entre les poutres à partir d'un référentiel spatial tiers. L'idée est de discrétiser l'espace occupé par le milieu avec une taille de discrétisation suffisamment fine, et d'évaluer la proximité entre les poutres par rapport aux cellules de l'espace discrétisé. Deux poutres sont déclarées proches si elles traversent la même cellule ou deux cellules voisines du référentiel spatial, comme illustré dans une configuration bidimensionnelle sur la Figure 3.5. Le critère de proximité, noté  $\delta_{prox}$ , correspond au double de la taille des cellules de la grille.

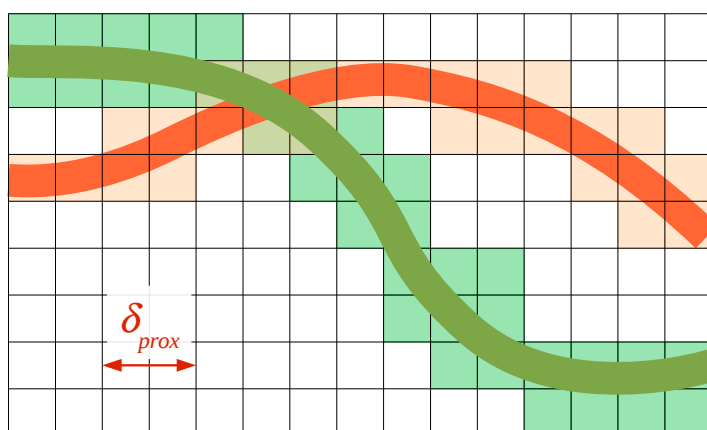


FIGURE 3.5 – Représentation 2D d'une grille de discrétisation de l'espace pour le repérage de la proximité entre poutres

Pour évaluer cette proximité entre poutres, on doit simplement parcourir chacune d'entre elles avec un pas suffisamment fin, afin de déterminer l'ensemble des cellules qu'elle traverse. Cette approche se révèle très économe en temps de calcul par le fait qu'elle ne nécessite pas la détermination de point le plus proche par projection orthogonale. Elle offre par ailleurs l'avantage très appréciable d'avoir un coût quasiment linéaire par rapport au nombre de poutres considéré.

### 3.2.3.1.2 Construction des zones de proximité entre deux poutres

L'objectif de la construction des zones de proximité est de déterminer, pour chaque paire de poutres déclarées proches entre elles, des paires d'intervalles d'abscisses curvilignes qui soient suffisamment proches entre eux. En notant  $r^I(s^I)$  la position du point d'abscisse curviligne  $s^I$  sur la fibre moyenne de la poutre  $I$ , deux intervalles d'abscisses curvilignes sur les deux poutres, notés respectivement  $[a^I, b^I]$  et  $[a^J, b^J]$ , seront déclarés proches si

$$\forall (s^I, s^J) \in [a^I, b^I] \times [a^J, b^J], \|r^I(s^I) - r^J(s^J)\| \leq \delta_{prox}, \quad (3.7)$$

où  $\delta_{prox}$  est la distance déterminant le seuil de proximité. Une résolution numérique permettant de déterminer les bornes des intervalles vérifiant ce critère de manière précise demanderait de parcourir les fibres moyennes de chacune des deux poutres avec des pas de discrétisation suffisamment fins, en déterminant pour chaque point son point le plus proche sur la fibre moyenne de la poutre opposée.

L'objectif de cette étape étant de déterminer les zones de proximité à moindre coût, nous proposons une détermination approchée simplifiée, consistant, pour chaque paire

de poutres  $(I, J)$ , à disposer sur la ligne moyenne de la première poutre  $I$  une suite de points tests définis par des abscisses curvilignes  $s_k^I$  espacées d'une distance de discrétisation notée  $h_{prox}$ . Pour chaque point d'abscisse  $s_k^I$  on recherche l'abscisse curviligne  $s_k^{*J}$  du point le plus proche sur la ligne moyenne de la poutre opposée, comme illustré sur la Figure 3.6. La position de ce point le plus proche correspond soit à une projection orthogonale sur un des éléments finis représentant la ligne moyenne, soit à un nœud extrémité d'un élément.

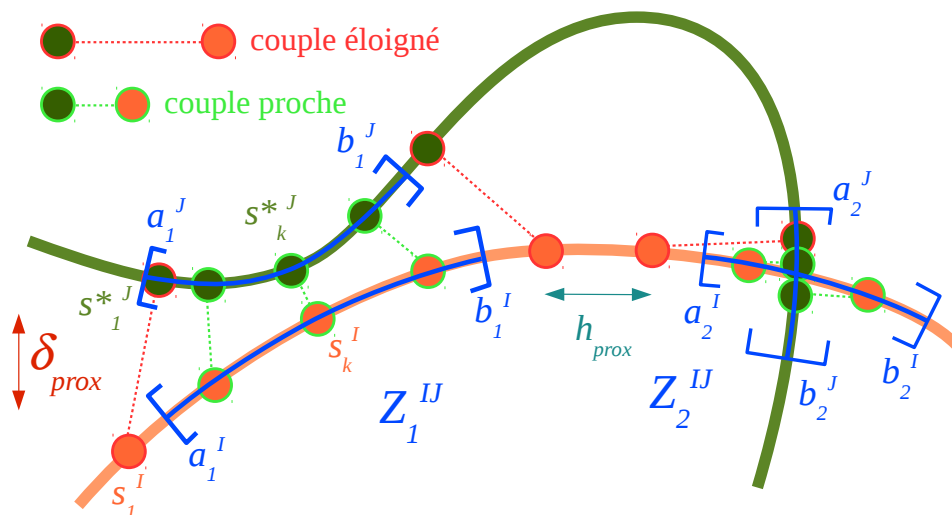


FIGURE 3.6 – Construction de zones de proximité entre deux poutres

Cette procédure détermine une série de couples de points situés à distance minimale. Une zone de proximité est définie à partir d'une suite de couples consécutifs satisfaisant le critère de proximité  $\delta_{prox}$ . Les abscisses curvilignes correspondant aux premier et dernier couples de cette suite, notées  $(a_k^I, b_k^I)$  et  $(a_k^J, b_k^J)$ , constituent les bornes des intervalles délimités respectivement sur les poutres  $I$  et  $J$ , qui forment la  $k$ -ième zone de proximité entre ces deux poutres, notée  $Z_k^{IJ}$  :

$$Z_k^{IJ} = \{[a_k^I, b_k^I], [a_k^J, b_k^J]\}. \quad (3.8)$$

### 3.2.3.1.3 Construction des zones de proximité pour des situations d'auto-contact

Dans les situations où on cherche à détecter le contact d'une poutre sur elle-même, l'objectif de la construction de zones de proximité est toujours de déterminer des paires d'intervalles de fibre moyenne proches, à la différence dans ce cas que les intervalles sont délimités sur la fibre moyenne d'une seule poutre (Fig. 3.7). On dispose de la même manière des points tests sur la poutre  $I$  en des abscisses  $s_k^I$ , mais pour chaque  $s_k^I$ , on cherche l'abscisse notée  $s_k^{*I}$  du point le plus proche telle que :

$$s_k^{*I} > s_k^I + \delta_{separ}, \quad (3.9)$$

où  $\delta_{separ}$  est une longueur seuil de séparation qui évite de retenir comme point proche un point situé à proximité immédiate sur la même ligne. Le fait de ne rechercher le point le plus proche que dans la portion de la fibre moyenne d'abscisse curviligne supérieure au point de départ, permet de ne pas déterminer deux fois chaque zone de proximité. La  $k$ -ième zone de proximité entre portions de la même poutre  $I$  est déterminée par les

abscisses des premier et dernier couples de points proches de la  $k$ -ième suite de couples consécutifs de points proches :

$$Z_k^I = \{[a_k^I, b_k^I], [c_k^I, d_k^I]\}. \quad (3.10)$$

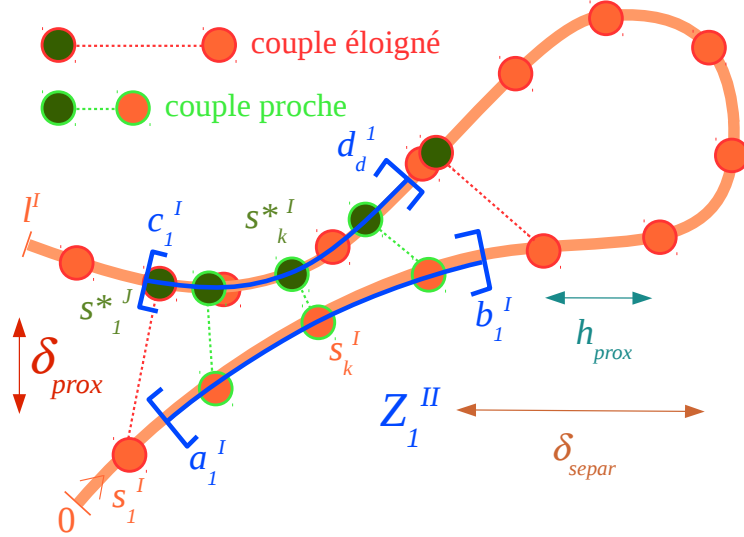


FIGURE 3.7 – Construction de zones de proximité dans le cas d'un autocontact

### 3.2.3.2 Définition des géométries intermédiaires

Les géométries intermédiaires utilisées pour la détermination du contact sont définies comme les moyennes entre les deux portions de fibres délimitées par chaque zone de proximité. La position  $x_{int}(\zeta)$  du point d'abscisse curviligne relative  $\zeta \in [0, 1]$  de la géométrie intermédiaire associée à la zone de proximité  $Z_k^I$  est définie par (Fig. 3.8) :

$$x_{int}(\zeta) = \frac{1}{2} \left[ r^I((1 - \zeta)a_k^I + \zeta b_k^I) + r^J((1 - \zeta)a_k^J + \zeta b_k^J) \right]. \quad (3.11)$$

Une direction tangente  $t_{int}(\zeta)$  peut être définie en tout point de la géométrie intermédiaire en dérivant la relation précédente :

$$t_{int}(\zeta) = \frac{1}{2} \left[ r'^I((1 - \zeta)a_k^I + \zeta b_k^I) + r'^J((1 - \zeta)a_k^J + \zeta b_k^J) \right]. \quad (3.12)$$

### 3.2.3.3 Détermination d'un élément de contact en un point de la géométrie intermédiaire

Les géométries intermédiaires sont destinées à servir de support géométrique à la détection et à la discrétisation du contact. Dans notre approche on cherche à tester le contact entre des couples de particules sur les surfaces des poutres déterminées à partir de la géométrie intermédiaire. Pour un point d'abscisse relative notée  $\zeta$  sur la géométrie intermédiaire, on définit l'élément de contact en ce point, noté  $C(\zeta)$ , comme le couple de particules matérielles  $(\xi_c^I, \xi_c^J)$  susceptibles d'entrer en contact en ce point :

$$C(\zeta) = (\xi_c^I(\zeta), \xi_c^J(\zeta)), \text{ tel qu'on peut prédire } x^I(\xi_c^I(\zeta)) = x^J(\xi_c^J(\zeta)). \quad (3.13)$$



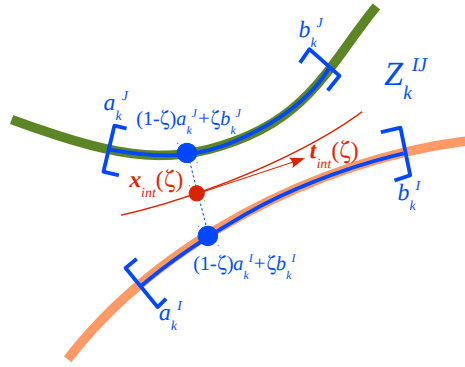


FIGURE 3.8 – Construction d’une géométrie intermédiaire

La détermination du couple de particules candidates au contact en un point de la géométrie intermédiaire se fait par construction géométrique en deux étapes. La première étape consiste à déterminer deux sections de poutres candidates au contact, et la seconde, à positionner les particules sur les contours de ces sections.

### 3.2.3.3.1 Détermination d’un couple de sections candidates au contact

Les abscisses curvilignes  $\xi_{3c}^I$  et  $\xi_{3c}^J$  identifiant les sections candidates au contact sont déterminées par les intersections du plan orthogonal à la géométrie intermédiaire passant par le point  $x_{int}(\zeta_c)$ , avec la fibre moyenne de chacune des poutres (Fig. 3.9), et sont caractérisées par les conditions d’orthogonalité suivantes :

$$\begin{cases} \left( \mathbf{r}^I(\xi_{3c}^I(\zeta)) - \mathbf{x}_{int}(\zeta), \mathbf{t}_{int}(\zeta) \right) = 0 \\ \left( \mathbf{r}^J(\xi_{3c}^J(\zeta)) - \mathbf{x}_{int}(\zeta), \mathbf{t}_{int}(\zeta) \right) = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

où  $\mathbf{r}^I(\xi_3)$  est la position du centre de la section d’abscisse curviligne  $\xi_3$  sur la fibre moyenne de la poutre  $I$ . La détermination du couple de sections candidates à partir d’un plan normal à la géométrie intermédiaire offre un traitement symétrique vis-à-vis des deux poutres.

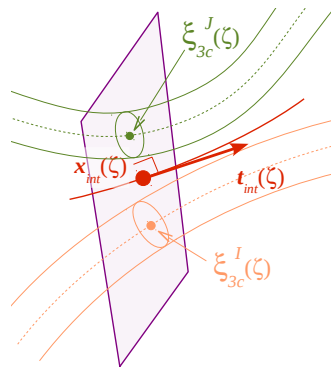


FIGURE 3.9 – Détermination du couple de sections candidates au contact au point  $x_{int}(\zeta)$  de la géométrie intermédiaire

### 3.2.3.3.2 Positionnement des particules candidates sur le contour des sections sélectionnées

Une fois le couple de sections sélectionné, il reste à déterminer précisément sur le contour de ces sections les positions des deux particules qu'on prédit entrer en contact. Pour cela on utilise la direction du vecteur entre les deux centres des sections sélectionnées, et on projette cette direction sur chacune des sections. Sur chaque section, cette direction détermine à partir du centre deux particules positionnées de part et d'autre sur le contour. On choisit entre ces deux particules la plus proche de la poutre opposée comme candidate au contact pour cette section (Fig. 3.10).

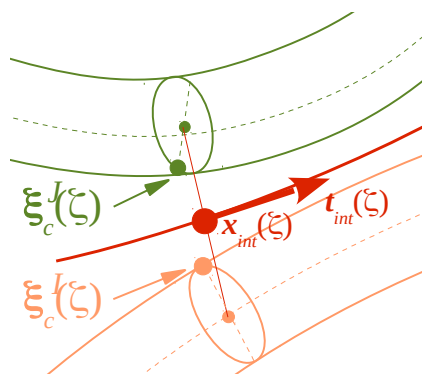


FIGURE 3.10 – Détermination des particules candidates sur le contour des sections sélectionnées

### 3.2.3.4 Détermination d'une direction normale de contact

De manière classique, les conditions cinématiques de non-interpénétration sont exprimées sous une forme linéarisée, en mesurant la distance entre les positions des particules candidates au contact par rapport à une direction normale de contact. Le choix d'une telle direction normale n'apparaît cependant pas univoque.

#### 3.2.3.4.1 Proposition de plusieurs modes d'évaluation de la direction normale de contact

Une première manière de définir la direction normale de contact est de choisir la direction notée  $N^1$  entre les centres des deux sections sélectionnées (Fig. 3.11) :

$$N^1(\zeta) = \frac{\mathbf{r}^J(\xi_{3c}^J(\zeta)) - \mathbf{r}^I(\xi_{3c}^I(\zeta))}{\|\mathbf{r}^J(\xi_{3c}^J(\zeta)) - \mathbf{r}^I(\xi_{3c}^I(\zeta))\|}. \quad (3.15)$$

Cette direction normale semble bien adaptée pour les configurations où les poutres sont quasiment parallèles entre elles. En revanche, dès que les poutres se croisent avec un angle relativement important (Fig. 3.11), l'usage de cette direction normale de contact peut conduire à des problèmes, en particulier à des situations où les poutres se traversent. La raison de ces problèmes est liée au fait que la condition linéarisée de non-interpénétration (voir (3.26) plus loin) impose aux particules de se maintenir de part et d'autre d'un plan séparateur orthogonal à cette direction normale, sans limiter les déplacements dans les directions tangentes à ce plan séparateur. Dans le cas où les poutres forment un angle significatif, le plan séparateur orthogonal à la direction normale  $N^1$  peut se trouver fortement incliné par rapport à chacune des poutres. Dans une telle configuration, les conditions cinématiques exprimées à l'aide de cette direction normale imposent aux particules de se déplacer de part et d'autre de ce plan séparateur, mais n'évitent pas forcément que les deux poutres se traversent.

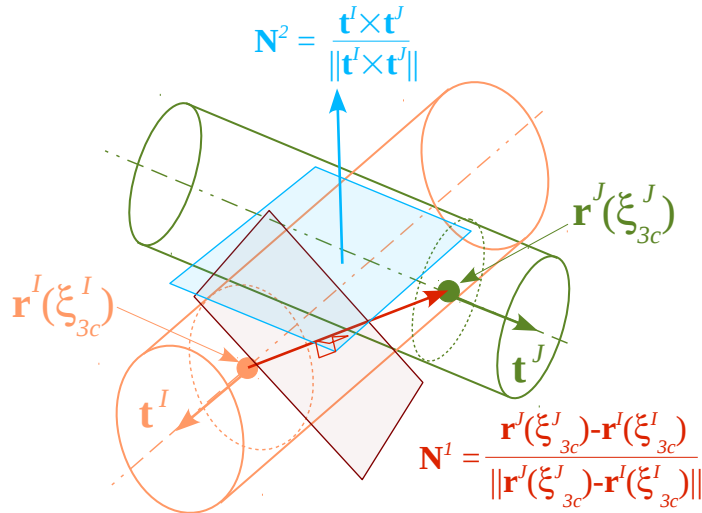


FIGURE 3.11 – Différents choix pour la détermination d'une direction normale de contact à proximité d'un croisement

Pour corriger cet effet, on cherche à ce que le plan séparateur auquel on se réfère coupe les axes des poutres le plus loin possible. Une direction normale de contact  $N^2$ , calculée à partir du produit vectoriel des tangentes aux fibres moyennes :

$$N^2(\zeta) = \frac{\mathbf{t}^I(\xi_{3c}^I(\zeta)) \times \mathbf{t}^J(\xi_{3c}^J(\zeta))}{\|\mathbf{t}^I(\xi_{3c}^I(\zeta)) \times \mathbf{t}^J(\xi_{3c}^J(\zeta))\|} \quad (3.16)$$

semble alors plus appropriée. Cette direction normale  $N^2$  devient cependant indéfinie quand les tangentes  $\mathbf{t}^I$  et  $\mathbf{t}^J$  deviennent colinéaires.

Pour construire une direction normale qui reste aussi orthogonale que possible aux axes des deux poutres, même quand celles-ci deviennent parallèle, une troisième construction est proposée (Fig. 3.12). En partant de la direction notée  $D^{IJ}$  entre les deux centres des sections sélectionnées :

$$D^{IJ} = \mathbf{r}^J(\xi_{3c}^J) - \mathbf{r}^I(\xi_{3c}^I), \quad (3.17)$$

et la moyenne  $\mathbf{t}_{moy}$  des tangentes aux fibres moyennes des poutres :

$$\mathbf{t}_{moy} = \frac{1}{2}(\mathbf{t}^I + \mathbf{t}^J), \quad (3.18)$$

on calcule par produit vectoriel un premier vecteur noté  $\mathbf{B}$  :

$$\mathbf{B} = \mathbf{t}_{moy} \times D^{IJ}, \quad (3.19)$$

et on définit une nouvelle direction normale de contact notée  $N^3$ , à l'aide d'un nouveau produit vectoriel :

$$N^3 = \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{t}_{moy}}{\|\mathbf{B} \times \mathbf{t}_{moy}\|}. \quad (3.20)$$

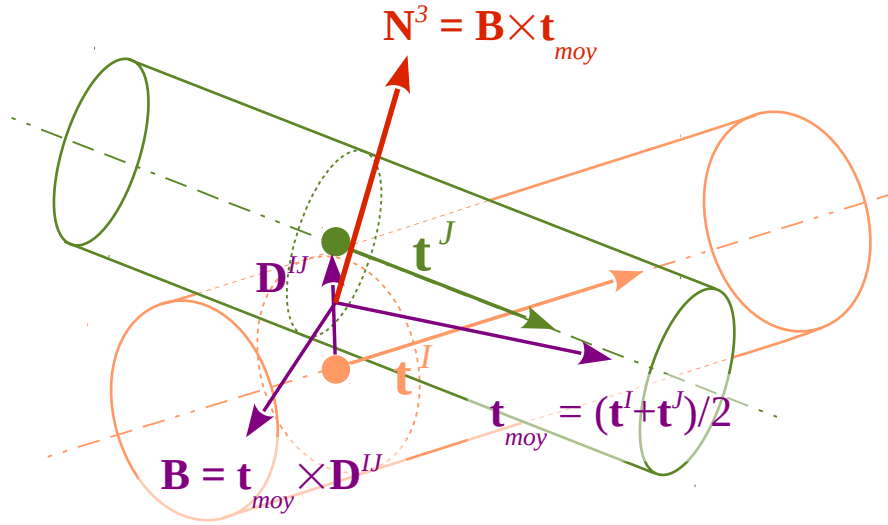


FIGURE 3.12 – Différents choix pour la détermination d’une direction normale de contact à proximité d’un croisement

### 3.2.3.4.2 Détermination de la direction normale de contact en fonction de l’angle formé entre les poutres

Nous avons à disposition deux directions normales  $N^2$  et  $N^3$ , évaluées de deux manières différentes, la première étant adaptée pour les cas où les poutres se croisent avec un angle important, et la seconde étant plutôt destinée aux situations avec de faibles angles entre les poutres. Nous proposons trois modes de calcul de la direction normale en fonction de l’angle  $\theta(\zeta)$  formé entre les tangentes aux fibres moyennes au niveau de l’élément de contact, en choisissant la normale  $N^3$  pour des angles modérés, inférieurs à un premier seuil  $\theta_1$ , la normale  $N^2$  pour des angles importants, supérieurs à un second seuil  $\theta_2$ , en retenant une combinaison linéaire entre les deux normales pour les angles intermédiaires :

$$\begin{cases} \text{si } 0 \leq \theta(\zeta) < \theta_1, N(\zeta) = N^3(\zeta) \\ \text{si } \theta_1 \leq \theta(\zeta) \leq \theta_2, N(\zeta) = \frac{\theta_2 - \theta(\zeta)}{\theta_2 - \theta_1} N^3(\zeta) + \frac{\theta(\zeta) - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1} N^2(\zeta) \\ \text{si } \theta_2 < \theta(\zeta) \leq \frac{\pi}{2}, N(\zeta) = N^2(\zeta) \end{cases} \quad (3.21)$$

### 3.2.4 Discrétisation des interactions de contact

La démarche présentée précédemment permet de définir, en tout point de la géométrie intermédiaire d’une zone de proximité, un élément de contact constitué d’un couple de particules matérielles candidates au contact et d’une direction normale de contact. Dans la perspective d’une résolution du problème par une méthode des éléments finis, une vérification exacte des conditions de contact de manière continue le long de la géométrie intermédiaire n’aurait pas de sens dans la mesure où les géométries interpolées de deux fils ne peuvent se confondre exactement au niveau de la zone de contact si les maillages entre les fils ne sont pas coïncidants. Des techniques d’éléments mortiers ou de formulation continue (par exemple Ben Dhia et al. [2000]) existent dans la littérature pour traiter d’une manière continue adaptée ce type d’incompatibilité de géométrie liée à la discrétisation par éléments finis.

Devant la complexité de la mise en œuvre d’approches continues des interactions de contact en présence d’incompatibilités de maillage, nous avons choisi une approche

discrète, consistant à traiter le contact en une suite de points discrets disposés le long de la géométrie intermédiaire, en lesquels sont créés les éléments de contact définis précédemment. La discrétisation des interactions de contact pour une zone de proximité  $Z_k^I$  est définie par un ensemble discret d'abscisses curvilignes le long de la géométrie intermédiaire associée à cette zone de proximité, noté  $\mathcal{M}_k^{IJ}$  :

$$\mathcal{M}_k^{IJ} = \{\zeta_i, i = 1, N_c^{IJ,k}\}, \quad (3.22)$$

où  $N_c^{IJ,k}$  est le nombre d'éléments de contact créés sur la zone de proximité.

La longueur de discrétisation déterminant la distance entre deux éléments de contact sur la géométrie intermédiaire est choisie en rapport avec la discrétisation éléments finis relative au maillage des poutres. Dans notre approche, nous choisissons de discrétiser les poutres avec des éléments finis quadratiques à trois nœuds. Du fait que deux paraboles distinctes ne peuvent s'intersecter en plus de deux points, nous choisissons une longueur de discrétisation pour les éléments de contact correspondant à la moitié de la plus petite longueur des éléments finis sur les poutres en contact. De cette manière, même si les éléments de contact sont disposés de manière indépendante de la position des nœuds du maillage des poutres, deux éléments de contact seront créés en moyenne par rapport à chaque élément fini du maillage le plus fin des deux poutres en contact.

Cette discrétisation du contact permet d'exprimer une approximation de la forme continue du travail virtuel des interactions de contact-frottement entre les poutre  $I$  et  $J$  sous la forme :

$$\begin{aligned} w_{cf}^{IJ}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= \int_{\Gamma_{IJ}^c} \left( \mathbf{R}_{cf}^{J \rightarrow I}(\mathbf{u}_h(\zeta)), \mathbf{v}_h(\boldsymbol{\xi}^J) - \mathbf{v}_h(\boldsymbol{\xi}^I) \right) d\gamma \\ &\approx \sum_{k=1}^{n_z^{IJ}} \sum_{\zeta_i \in \mathcal{M}_k^{IJ}} \left( \mathbf{R}_{cf}^{J \rightarrow I}(\zeta_i), \mathbf{v}_h(\boldsymbol{\xi}_c^J(\zeta_i)) - \mathbf{v}_h(\boldsymbol{\xi}_c^I(\zeta_i)) \right), \end{aligned} \quad (3.23)$$

où  $\mathbf{R}_{cf}^{J \rightarrow I}(\zeta_i)$  est l'interaction de contact-frottement générée au niveau de l'élément de contact créé en l'abscisse  $\zeta_i$ , et où  $\mathbf{v}_h(\boldsymbol{\xi}_c^I(\zeta_i))$  et  $\mathbf{v}_h(\boldsymbol{\xi}_c^J(\zeta_i))$  représentent les approximations éléments finis du champ de déplacement virtuel exprimé en chacune des particules de l'élément de contact.

### 3.3 Modélisation des interactions de contact frottement

Afin d'expliciter le terme de travail virtuel lié aux interactions de contact-frottement, exprimé sous une forme discrétisée (3.23), il nous reste à exprimer la force d'interaction notée  $\mathbf{R}_{cf}^{J \rightarrow I}(\zeta_i)$  en chaque élément de contact, en fonction du champ de déplacement. De manière classique, on décompose cette force d'interaction en une partie normale, notée  $R_N^{J \rightarrow I}$ , grandeur scalaire associée aux conditions de contact dans la direction normale  $N$ , et une partie tangentielle, notée  $\mathbf{R}_T^{J \rightarrow I}$ , grandeur vectorielle associée au frottement, sous la forme :

$$\mathbf{R}_{cf}^{J \rightarrow I}(\zeta_i) = R_N^{J \rightarrow I}(\zeta_i)N(\zeta_i) + \mathbf{R}_T^{J \rightarrow I}(\zeta_i). \quad (3.24)$$

### 3.3.1 Modélisation des interactions de contact

#### 3.3.1.1 Condition cinématique de non-interpénétration

Pour empêcher l'interpénétration entre les poutres, on exprime une condition cinématique linéarisée au niveau de chaque élément de contact, stipulant que la distance entre les deux particules matérielles de l'élément de contact, mesurée selon la direction normale de contact, et notée  $g_N$ , doit rester positive (Fig. 3.13). Cette distance est définie par :

$$g_N(\zeta) = \left( x(\xi_c^I(\zeta)) - x(\xi_c^J(\zeta)), N(\zeta) \right), \quad (3.25)$$

et la condition cinématique linéarisée de non-interpénétration s'exprime :

$$g_N(\zeta) \geq 0. \quad (3.26)$$

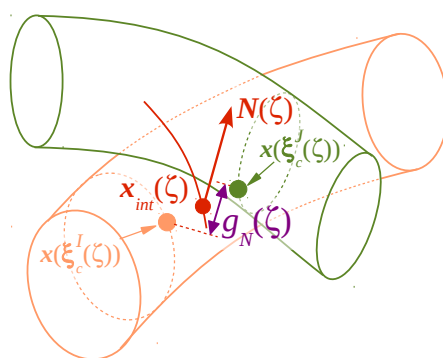


FIGURE 3.13 – Mesure du gap entre deux particules d'un élément de contact

#### 3.3.1.2 Modèle de contact pénalisé régularisé

Les interpénétrations, traduisant une violation de la condition cinématique (3.26), sont empêchées en employant une méthode de pénalisation, qui consiste à générer, aux lieux où une pénétration est constatée, un effort normal s'opposant à cette pénétration. Pour un élément de contact subissant une pénétration ( $g_N < 0$ ), la méthode de pénalisation standard revient à supposer que la force d'interaction normale  $R_N(\zeta)$  qui s'exerce en cet élément est proportionnelle à la pénétration, et s'exprime :

$$R_N(\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{si } g_N(\zeta) \geq 0; \\ k_c R_N(\zeta) & \text{si } g_N(\zeta) < 0, \end{cases} \quad (3.27)$$

où le coefficient  $k_c$  représente la raideur du contact.

L'utilisation d'une pénalisation classique de ce type ne permet pas en général de garantir une convergence de l'algorithme de contact pour les problèmes de milieu enchevêtrés étudiés ici, caractérisés par une grande densité de contacts, une grande flexibilité des fibres élémentaires, et avec d'importantes variations d'amplitude d'efforts de contact, soit par rapport à l'espace, soit par rapport à l'évolution du chargement.

Nous associons ces difficultés de convergence de l'algorithme de contact à deux points particuliers : la transition entre les états contactant et non-contactant au cours des itérations, et le choix d'un coefficient de pénalisation optimal adapté à différents niveaux d'effort.

Avec une pénalisation linéaire telle que présentée en (3.27), lorsqu'un élément de contact change d'état au cours d'itérations successives, la rigidité qui lui est associée passe d'une valeur fixée correspondant au paramètre de pénalisation, à une valeur nulle quand l'élément n'est plus contactant. Cette modification de rigidité d'une itération à l'autre dans le cas d'un changement de contact est de nature à perturber la convergence de l'algorithme. L'introduction d'une régularisation quadratique de la pénalisation est une méthode classique pour assouplir la transition entre les états de contact, qu'on retrouve notamment dans Zavarise et al. [1998]. Elle a pour effet de réduire la raideur de contact pour les faibles pénétrations, et donc de limiter les variations de rigidité pour les éléments présentant de faibles pénétrations, et portant de faibles efforts de contact. Ces éléments qu'on pourrait qualifier de faiblement contactants, sont plutôt à la périphérie des zones de contact, et leur faible pénétration fait qu'ils sont davantage exposés au changement de statuts de contact. On peut donc s'attendre à ce qu'une régularisation quadratique de la pénalisation ait un effet prioritairement sur ces éléments. Une pénalisation quadratique n'a en revanche pas d'intérêt pour les pénétrations importantes, mais risque au contraire de détériorer la convergence d'un algorithme de type Newton. On propose donc de réserver la pénalisation quadratique pour les faibles pénétrations, d'une amplitude inférieure à un seuil noté  $p_{reg}$ , en gardant une pénalisation linéaire pour les pénétrations plus importantes (Fig. 3.14). Pour assurer la continuité de la force de contact et de sa dérivée au niveau du raccordement entre les parties linéaire et quadratique, la mise en œuvre d'une méthode de pénalisation régularisée conduit à exprimer la réaction normale de contact  $R_N(\zeta)$  sous la forme suivante :

$$R_N(\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{si } g_N(\zeta) \geq 0; \\ \frac{k_c}{2p_{reg}} [g_N(\zeta)]^2 & \text{si } -p_{reg} \leq g_N(\zeta) < 0; \\ -k_c \left( g_N(\zeta) + \frac{p_{reg}}{2} \right) & \text{si } g_N(\zeta) < -p_{reg}. \end{cases} \quad (3.28)$$

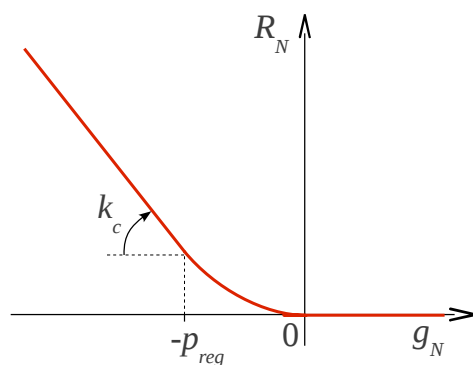


FIGURE 3.14 – Graphe de la pénalisation régularisée utilisée pour le contact normal

### 3.3.1.3 Adaptation automatique de la pénalisation du contact par contrôle de la pénétration maximale par zone de proximité

La régularisation quadratique de la pénalisation a pour objectif de stabiliser les changements d'états de contact, dont on suppose qu'ils concernent essentiellement les éléments de contact situés aux périphéries des zones de contact. Pour que cette régularisation joue son rôle sur la convergence de l'algorithme, on cherche à ce que seulement une partie des éléments de contact soit effectivement concernée par cette régularisation sur chaque zone de contact, c'est-à-dire qu'ils subissent une pénétration

inférieure au seuil de régularisation  $p_{reg}$ , tandis que les autres éléments auraient une pénétration supérieure, et bénéficieraient du meilleur taux de convergence de la partie linéaire de la pénalisation. Pour tirer profit de la régularisation de la pénalisation, on sent donc le besoin de pouvoir contrôler les pénétrations au niveau de chaque zone de contact. Or, à coefficient de pénalisation du contact  $k_c$  fixé, ces pénétrations dépendent des efforts résultants qui s'exercent sur la zone de contact, et qui peuvent être d'amplitude extrêmement variable au cours du chargement, et différer fortement d'un endroit à l'autre de la structure.

De ce besoin de contrôler les pénétrations de manière relativement locale, vient l'idée d'adapter la raideur de pénalisation au cours de l'algorithme au niveau de chacune des zones de proximité. L'idée est de fixer une pénétration maximale qu'on souhaite atteindre au niveau de chaque zone de proximité, et d'affecter un coefficient de pénalisation propre à chacune de ces zones, en l'adaptant régulièrement en fonction de la pénétration maximale effectivement constatée sur cette zone.

Pour effectuer cette adaptation, on fixe une pénétration maximale visée par zone de proximité, notée  $p_{max}$ . Pour la zone de proximité  $Z_k^{II}$ , si on note  $k_c^{i_{ajust}}$  le coefficient de pénalisation utilisé pour cette zone de proximité à la suite de la dernière itération d'ajustement  $i_{ajust}$  de la pénalisation, et  $g_{N,max}^{i_{ajust}}$  la pénétration maximale relevée sur la zone :

$$g_{N,max}^{i_{ajust}} = \sup_{\zeta_i \in \mathcal{M}_k^{II}} \{ |g_N(\zeta_i)| \}, \quad (3.29)$$

le nouvel ajustement du coefficient de pénalisation est calculé comme :

$$k_c^{i_{ajust}+1} = \frac{g_{N,max}^{i_{ajust}}}{p_{max}} k_c^{i_{ajust}}. \quad (3.30)$$

En adaptant de cette manière la pénalisation du contact, on obtient des pénétrations maximales comparables pour toutes les zones de proximité, et la méthode de pénalisation n'est plus contrôlée par une raideur de contact, mais par une profondeur de pénétration maximale autorisée par zone de contact.

Pour que cette adaptation de la pénalisation permette de tirer pleinement profit de la stabilisation apportée par la régularisation quadratique, on a besoin qu'une part significative des éléments de contact sur chaque zone ait une pénétration inférieure à la profondeur de régularisation. Pour atteindre ce but, on choisit un rapport pas trop important (typiquement autour de 5) entre le paramètre de pénétration maximale autorisée  $p_{max}$  et la profondeur de régularisation  $p_{reg}$ . Selon cette approche, la pénalisation du contact est contrôlée par deux paramètres, le paramètre de pénétration maximale par zone de proximité, qu'on choisit de manière à ce qu'il soit petit devant les dimensions caractéristiques du problème (typiquement de l'ordre de 1 % du rayon des fils), et le paramètre de profondeur de régularisation, pris comme une portion du précédent (typiquement de l'ordre d'un cinquième). La raideur de pénalisation est ensuite régulièrement ajustée au cours de l'algorithme de manière à avoir des pénétrations maximales d'amplitudes comparables sur toutes les zones de proximité, et quasiment constantes au cours de l'évolution du chargement, garantissant ainsi une bonne convergence des algorithmes de contact, même en présence de grands nombres d'éléments de contact (jusqu'à quelques dizaines de milliers).



### 3.3.2 Modélisation des interactions de frottement

Alors que la modélisation du contact vise à contrôler les positions relatives des particules d'un élément de contact en déterminant des réactions normales s'opposant à l'interpénétration, un modèle de frottement s'intéresse au déplacement relatif entre ces particules dans les directions tangentielles, et au déclenchement d'un possible glissement, pour déterminer des réactions tangentielles.

Nous nous référons à la base à un modèle de frottement de type Coulomb, qui fait dépendre l'apparition d'un possible glissement du rapport entre les normes de l'effort d'interaction tangential et de l'effort d'interaction normal. Pour éviter la singularité liée à ce type de modèle, qui correspond à une rigidité tangentielle infinie avant le déclenchement du glissement, nous considérons une régularisation linéaire consistant à autoriser un déplacement réversible de type élastique avant que le glissement se produise.

Dans une première approche, en notant  $\mathbf{g}_T(\zeta)$  le déplacement relatif tangential entre les particules d'un élément de contact, défini comme :

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_T(\zeta) &= \mathbf{u}(\xi_c^J(\zeta)) - \mathbf{u}(\xi_c^I(\zeta)) - \left( \mathbf{u}(\xi_c^J(\zeta)) - \mathbf{u}(\xi_c^I(\zeta)), \mathbf{N}(\zeta) \right) \mathbf{N}(\zeta) \\ &= [\mathbf{I} - \mathbf{N}(\zeta) \otimes \mathbf{N}(\zeta)] \left( \mathbf{u}(\xi_c^J(\zeta)) - \mathbf{u}(\xi_c^I(\zeta)) \right),\end{aligned}\quad (3.31)$$

nous pouvons formuler ce modèle régularisé de frottement en exprimant l'effort d'interaction tangential  $\mathbf{R}_T$  de la manière suivante :

$$\mathbf{R}_T(\zeta) = \begin{cases} \mu |R_N| \frac{\mathbf{g}_T(\zeta)}{[u]_{T,rev}} & \text{si } \|\mathbf{g}_T(\zeta)\| \leq [u]_{T,rev} ; \\ \mu |R_N| \frac{\mathbf{g}_T(\zeta)}{\|\mathbf{g}_T(\zeta)\|} & \text{si } \|\mathbf{g}_T(\zeta)\| > [u]_{T,rev} . \end{cases}\quad (3.32)$$

Selon cette formulation, la partie élastique et réversible du déplacement relatif tangential est paramétrée par une valeur notée  $[u]_{T,rev}$  représentant le déplacement réversible admissible (Fig. 3.15). À l'échelle microscopique des aspérités de surface, ce paramètre peut représenter la capacité de ces aspérités à se déformer de manière élastique.

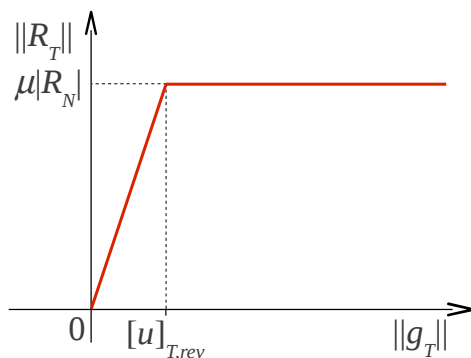


FIGURE 3.15 – Graphe du modèle régularisé de frottement

#### 3.3.2.1 Formulation incrémentale du modèle de frottement

La considération de cette partie réversible du déplacement relatif tangential introduit une variable d'histoire qui conduit à reformuler le modèle présenté en (3.32) de manière incrémentale, afin de pouvoir tenir compte du déplacement réversible à l'étape précédente. Pour déterminer la valeur de la réaction tangentielle à l'étape courante  $n$ ,

en supposant connue la valeur du déplacement tangentiel réversible atteint à l'étape précédente, notée  $\mathbf{g}_{T,rev}^{n-1}(\zeta)$ , on cherche si l'incrément de déplacement relatif tangentiel pour l'étape courante, noté  $\Delta\mathbf{g}_T^n(\zeta)$ , calculé comme :

$$\Delta\mathbf{g}_T^n(\zeta) = [\mathbf{I} - \mathbf{N}(\zeta) \otimes \mathbf{N}(\zeta)] \left( \Delta\mathbf{u}^n(\xi_c^I(\zeta)) - \Delta\mathbf{u}^n(\xi_c^I(\zeta)) \right), \quad (3.33)$$

permet d'atteindre le seuil de glissement. Pour l'étape  $n$ , on considère comme déplacement relatif tangentiel, noté  $\mathbf{g}_T^n$ , la somme du déplacement tangentiel réversible précédent  $\mathbf{g}_{T,rev}^{n-1}$  et de l'incrément de déplacement relatif tangentiel :

$$\mathbf{g}_T^n(\zeta) = \mathbf{g}_{T,rev}^{n-1}(\zeta) + \Delta\mathbf{g}_T^n(\zeta). \quad (3.34)$$

À la différence du déplacement relatif tangentiel exprimé en (3.31), qui prenait en compte le déplacement total des particules de l'élément de contact, ce dernier mode de calcul du déplacement relatif tangentiel ne conserve des déplacements précédents que la partie réversible, limitée en amplitude par le paramètre  $[u]_{T,rev}$ . La réaction tangentielle à l'étape  $n$  est alors calculée d'une manière analogue à (3.32) comme :

$$\mathbf{R}_T^n(\zeta) = \begin{cases} \mu |R_N| \frac{\mathbf{g}_T^n(\zeta)}{[u]_{T,rev}} & \text{si } \|\mathbf{g}_T^n(\zeta)\| \leq [u]_{T,rev}; \\ \mu |R_N| \frac{\mathbf{g}_T^n(\zeta)}{\|\mathbf{g}_T^n(\zeta)\|} & \text{si } \|\mathbf{g}_T^n(\zeta)\| > [u]_{T,rev}, \end{cases} \quad (3.35)$$

et la partie réversible du déplacement relatif tangentiel est actualisée à la fin de l'étape  $n$  de la manière suivante :

$$\mathbf{g}_{T,rev}^n = \begin{cases} \mathbf{g}_T^n & \text{si } \|\mathbf{g}_T^n\| \leq [u]_{T,rev}; \\ [u]_{T,rev} \frac{\mathbf{g}_T^n}{\|\mathbf{g}_T^n\|} & \text{si } \|\mathbf{g}_T^n\| > [u]_{T,rev}. \end{cases} \quad (3.36)$$

### 3.3.2.2 Transmission de la variable de déplacement relatif réversible d'une étape à l'autre

La nécessité de transmettre la variable d'histoire relative à la partie réversible du déplacement relatif tangentiel soulève deux difficultés essentielles : la première est liée au caractère non continu en temps des éléments de contact, qui fait que les particules matérielles constituant un élément de contact à un instant donné ne sont a priori pas les mêmes qu'à l'instant précédent ; la seconde est liée au changement d'orientation du repère lié au contact d'une étape à la suivante.

Le mode de génération adopté pour les éléments de contact entraîne que ces éléments sont créés en fonction de la configuration géométrique considérée à un instant donné, mais n'ont aucune continuité dans le temps. La solution proposée pour pouvoir transmettre les composantes vectorielles de la partie réversible du déplacement relatif consiste à associer ces informations aux coordonnées matérielles à l'issue de chaque étape, et à les interpoler à partir des informations stockées, à chaque réactualisation des éléments de contact. À l'issue de chaque étape, la grandeur vectorielle relative au déplacement relatif réversible atteint est stockée pour chacune des particules constituant l'élément de contact, en enregistrant les coordonnées matérielles de ces particules. À l'étape suivante, à chaque fois qu'on détermine de nouveau les éléments de contact, pour chacune des particules constituant un élément de contact, on recherche parmi les particules correspondant aux éléments de contact précédents, celles dont les coordonnées matérielles encadrent celles de la nouvelle particule, et on interpole, pour chacune des nouvelles particules, une valeur du déplacement relatif réversible à partir des valeurs stockées à l'étape précédente.

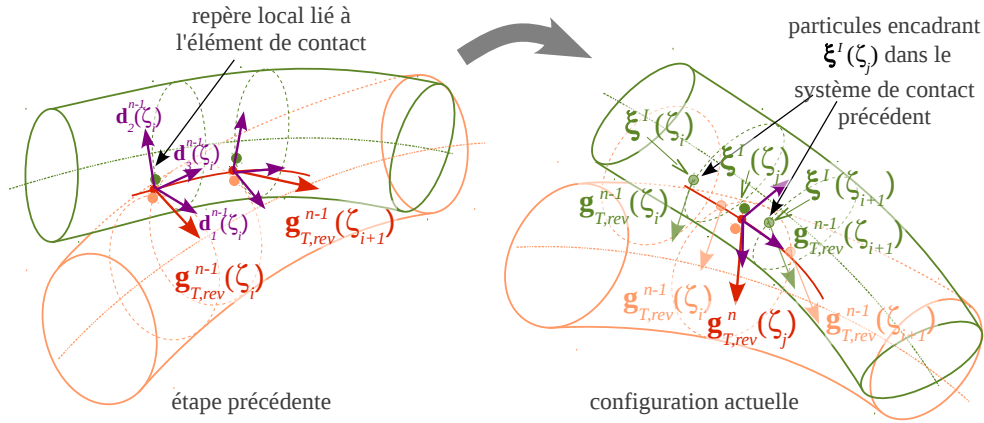


FIGURE 3.16 – Interpolation de la variable de déplacement relatif réversible à partir des variables à l'étape précédente

La nature vectorielle de la variable de déplacement relatif réversible, et le fait qu'elle se réfère à des directions tangentielles définies localement, sont des points importants à prendre en compte. Dans la mesure où le milieu peut subir localement une rotation entre deux étapes, les directions tangentielles liées au contact sont modifiées d'une étape à l'autre, et la transmission de la variable de déplacement relatif réversible doit tenir compte de ces changements d'orientation. Pour ce faire, on stocke les composantes de cette grandeur vectorielle par rapport à un repère local lié au contact, dont les directions sont déterminées à partir des tangentes aux fibres moyennes des poutres et à la direction normale du contact (voir Fig. 3.16). Pour assurer une transmission de ces composantes par rapport à des directions analogues, au moment où on interpole la variable d'histoire pour un élément de contact actualisé, on reconstruit le repère local associé à l'élément de contact, afin de pouvoir exprimer cette grandeur vectorielle à partir des directions de ce repère local.

## 3.4 Algorithmique

### 3.4.1 Introduction de l'interpolation éléments finis

Ayant exprimé les réactions normales et tangentielles en fonction du champ de déplacement au niveau de chaque élément de contact, nous pouvons réécrire l'approximation du travail virtuel des interactions de contact-frottement (3.23) sous la forme :

$$\begin{aligned}
 w_{cf}^{IJ}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &\approx \sum_{k=1}^{n_z^{IJ}} \sum_{\zeta_i \in \mathcal{M}_k^{IJ}} \left( \mathbf{R}_{cf}^{J \rightarrow I}(\zeta_i), \mathbf{v}_h(\boldsymbol{\xi}_c^J(\zeta_i)) - \mathbf{v}_h(\boldsymbol{\xi}_c^I(\zeta_i)) \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{n_z^{IJ}} \sum_{\zeta_i \in \mathcal{M}_k^{IJ}} \left[ \mathbf{R}_N^{J \rightarrow I}(g_N(\zeta_i)) \left( \mathbf{N}(\zeta_i), \mathbf{v}_h(\boldsymbol{\xi}_c^J(\zeta_i)) - \mathbf{v}_h(\boldsymbol{\xi}_c^I(\zeta_i)) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left( \mathbf{R}_T^{J \rightarrow I}(g_T^n(\zeta_i)), \mathbf{v}_h(\boldsymbol{\xi}_c^J(\zeta_i)) - \mathbf{v}_h(\boldsymbol{\xi}_c^I(\zeta_i)) \right) \right]. \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

Dans cette équation, les grandeurs cinématiques  $g_N(\zeta_i)$  et  $g_T^n(\zeta_i)$  en fonction desquelles sont formulées les réactions normales et tangentielles, s'expriment en fonction des interpolations par éléments finis des champs de déplacement au niveau de chacune des

particules constituant l'élément de contact défini en  $\zeta_i$ . Chaque élément de contact introduit donc dans le problème discrétisé par éléments finis, des couplages entre l'ensemble des degrés de liberté relatifs aux nœuds des deux éléments finis sur lesquels sont localisées chacune des deux particules matérielles candidates au contact.

### 3.4.2 Les non-linéarités liées à la modélisation des interactions de contact-frottement

Dans la formulation (3.37) ci-dessus, les dépendances de certaines quantités vis-à-vis de la solution en déplacement introduisent des non-linéarités dans le problème que nous allons répertorier, et pour lesquelles nous cherchons des stratégies de résolution.

La première non-linéarité tient à la dépendance du mode de détermination des éléments de contact vis-à-vis de la solution : les éléments de contact générés dans notre approche varient avec l'évolution de la configuration, et donc de la solution en déplacement. La relative complexité des constructions géométriques déterminant les positions matérielles des particules des éléments de contact, rend impossible la formulation d'une relation explicite entre les positions matérielles de ces particules et la solution en déplacement. Cette absence de formulation explicite des éléments de contact en fonction de la solution distingue notre approche de celles caractérisant le contact par une condition de distance minimale, présentées en 3.1.2, pour lesquelles une linéarisation de la position des particules de contact par rapport aux déplacements peut être formulée (cf. (3.5)). Cette impossibilité d'exprimer une dérivée des positions des particules de contact par rapport aux déplacements nous conduit à adopter un algorithme de point fixe pour résoudre cette non-linéarité, consistant simplement à déterminer à nouveau les éléments de contact en fonction de l'évolution du déplacement. La convergence de cet algorithme paraît difficile à prouver, même si dans la plupart des cas pratiques quelques itérations de réactualisation semblent suffire pour une bonne stabilisation de la solution.

La seconde non-linéarité réside dans la détermination de la direction normale de contact  $N(\zeta_i)$ , selon la méthode présentée plus haut. De la même manière que pour les éléments de contact, cette normale étant déterminée à partir de constructions géométriques, il ne semble pas possible d'obtenir une estimation de la dérivée de cette quantité par rapport aux déplacements. On est donc conduit, là encore, à adopter un algorithme de point fixe sur cette quantité, en la réactualisant régulièrement.

Pour la modélisation du contact normal, la réaction normale s'exprime de manière non-linéaire par rapport au déplacement selon la forme de la pénalisation quadratique (3.28). La dérivée de la réaction normale (3.28) par rapport aux déplacements peut être facilement calculée, orientant vers une solution à l'aide d'un algorithme de type Newton-Raphson.

La formulation proposée pour la réaction tangentielle de frottement (3.35) introduit trois non-linéarités. La première est liée à la dépendance de cette réaction tangentielle par rapport à la réaction normale. Une simple réactualisation de la valeur de cette réaction normale à chaque itération de l'algorithme Newton-Raphson ne pose en général pas de difficulté de convergence. Une deuxième non-linéarité est liée à la direction de la réaction tangentielle, qui correspond à celle du déplacement relatif tangentiel  $\mathbf{g}_T^n$ , et une troisième non-linéarité peut être associée à la rupture de pente lors du déclenchement du glissement. En considérant fixe la norme de la réaction normale, il est possible d'exprimer une dérivée de la réaction tangentielle par rapport au déplacement. Cependant, dans de nombreux cas, l'utilisation de cette dérivée dans le cadre d'un algorithme de Newton-Raphson ne permet cependant pas d'obtenir une convergence de l'algorithme, des divergences pouvant apparaître au déclenchement de certains

glissements. Pour corriger ces situations, nous proposons une adaptation de la rigidité tangente pour les situations de glissement.

### 3.4.2.1 Proposition d'une adaptation de la rigidité tangente en situation de glissement

Lorsqu'on a dépassé le seuil de glissement ( $\|\mathbf{g}_T^n(\zeta)\| > [u]_{T,rev}$ ), la réaction tangentielle s'exprime (3.35) :

$$\mathbf{R}_T^n(\zeta) = \mu |R_N| \frac{\mathbf{g}_T^n(\zeta)}{\|\mathbf{g}_T(\zeta)\|}. \quad (3.38)$$

En négligeant la dépendance de la réaction normale  $R_N$  par rapport au déplacement, on peut formuler la dérivée de la réaction tangentielle par rapport aux déplacements dans le cas glissant sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{R}_T^n(\zeta)}{d\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} &= \mu |R_N| \left( \frac{1}{\|\mathbf{g}_T(\zeta)\|} \frac{d\mathbf{g}_T^n(\zeta)}{d\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{g}_T^n(\zeta)}{\|\mathbf{g}_T(\zeta)\|^3}, \frac{d\mathbf{g}_T^n(\zeta)}{d\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \right) \right) \\ &= \mu \frac{|R_N|}{\|\mathbf{g}_T(\zeta)\|} \left( \frac{d\mathbf{g}_T^n(\zeta)}{d\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2\|\mathbf{g}_T(\zeta)\|^2} \left( \mathbf{g}_T^n(\zeta), \frac{d\mathbf{g}_T^n(\zeta)}{d\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

D'après l'expression (3.31) du déplacement relatif tangentiel, on peut écrire :

$$\frac{d\mathbf{g}_T^n(\zeta)}{d\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{I} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) [\mathbf{v}], \quad (3.40)$$

où  $[\mathbf{v}]$  représente le déplacement virtuel relatif entre les deux particules :

$$[\mathbf{v}] (\zeta) = \mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}_c^J(\zeta)) - \mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}_c^I(\zeta)), \quad (3.41)$$

ce qui permet de réécrire :

$$\frac{d\mathbf{R}_T^n(\zeta)}{d\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} = \mu \frac{|R_N|}{\|\mathbf{g}_T(\zeta)\|} \left( (\mathbf{I} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) [\mathbf{v}] - \frac{1}{2\|\mathbf{g}_T(\zeta)\|^2} \left( \mathbf{g}_T^n(\zeta), (\mathbf{I} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) [\mathbf{v}] \right) \right). \quad (3.42)$$

L'utilisation de cette dérivée pour définir le terme de matrice tangente relative au frottement pour les situations de glissement ne permet pas, dans bon nombre de cas, d'obtenir une convergence de l'algorithme de résolution. On peut interpréter ces difficultés de convergence par le fait qu'une fois le glissement déclenché, aucune composante parmi les termes de la matrice de rigidité tangente relatifs au frottement, ne vient limiter l'amplitude du déplacement relatif tangentiel, ce qui s'illustre de manière schématique sur un graphe bidimensionnel par une tangente de pente nulle (voir Fig. 3.17). Cette absence de termes de rappel dans la matrice tangente est propice à l'apparition d'instabilités algorithmiques.

Pour limiter ces instabilités, une idée consiste à introduire artificiellement un terme de rappel dans la matrice tangente, en considérant une dérivée adaptée de la réaction tangentielle, notée  $\frac{d\mathbf{R}_T^*(\zeta)}{d\mathbf{u}}$ , qui ne conserve que le premier terme du calcul de la dérivée (3.42), et s'exprime :

$$\frac{d\mathbf{R}_T^*(\zeta)}{d\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} = \mu \frac{|R_N|}{\|\mathbf{g}_T(\zeta)\|} (\mathbf{I} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) [\mathbf{v}]. \quad (3.43)$$

L'utilisation de cette dérivée introduit un terme de rappel analogue à celui correspondant à la partie réversible du modèle de frottement, mais avec un pente plus faible

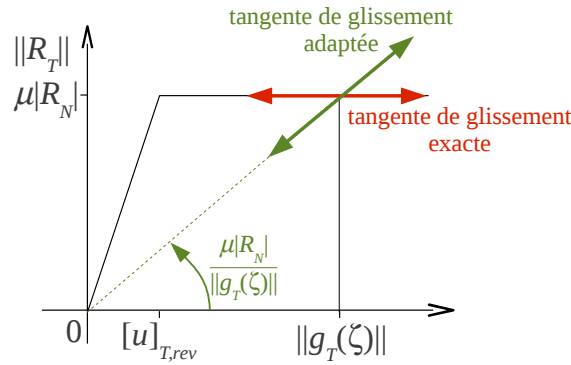


FIGURE 3.17 – Représentation de la tangente de glissement adaptée

dépendant de l'amplitude du glissement (voir Fig. 3.17). Cette dérivée adaptée permet de réduire de manière significative les instabilités rencontrées en utilisant la dérivée exacte. La dérivée exacte garde cependant tout son intérêt et peut être utilisée avec profit dès que l'algorithme s'approche de la solution.

### 3.5 Applications

Deux exemples d'application illustrant les possibilités de la méthodologie proposée pour la modélisation des interactions de contact-frottement sont présentés dans cette partie. Le premier concerne des simulations de glissements alternés entre deux poutres orientées selon différents angles, le second se rapporte à la simulation de la formation et du serrage de nœuds simples réalisés sur un filament seul et sur des assemblages multifilamentaires.

#### 3.5.1 Simulation de glissements alternés entre deux poutres tendues

##### 3.5.1.1 Présentation du cas

Ce premier exemple d'application est destiné à valider sur une configuration simple, d'une part la détection du contact en fonction de l'angle formé entre les poutres, et d'autre part les modélisations proposées pour le frottement, notamment en ce qui concerne la transmission de la variable d'histoire liée à la partie réversible du déplacement tangentiel. Cet exemple correspond au développement d'un cas test présenté en Durville [2011].

On considère deux filaments, de rayon 0,25 mm et de longueur 50 mm, constitués d'un matériau présentant un module d'Young de 200 000 MPa et un coefficient de Poisson de 0,3. Ces deux fils sont tendus par une tension de 0,3 N et croisés en formant un angle variable (Fig. 3.18). Les extrémités du premier fil, situé en-dessous, sont bloquées selon la direction verticale, tandis qu'une force verticale de 0,1 N est appliquée à chaque extrémité du fil supérieur pour le presser sur le fil inférieur. On considère entre les deux fils un coefficient de frottement de 0,2, et un seuil de déplacement tangentiel relatif réversible de 3 microns. On applique des déplacements alternés  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  d'amplitude de 1,2 mm suivant les deux directions 1 et 2 du plan au deuxième fil, et on calcule les sommes  $F_1$  et  $F_2$  des résultantes dans les directions 1 et 2 relevées aux extrémités de ce même fil. Chaque fil est discrétisé par 60 éléments finis, de longueur 8,66 mm. Dans la configuration initiale le croisement entre les deux fils coïncide avec la position de

leurs deux milieux. Les déplacements alternés appliqués aux extrémités entraînent que le glissement se produit ensuite successivement entre différents éléments.

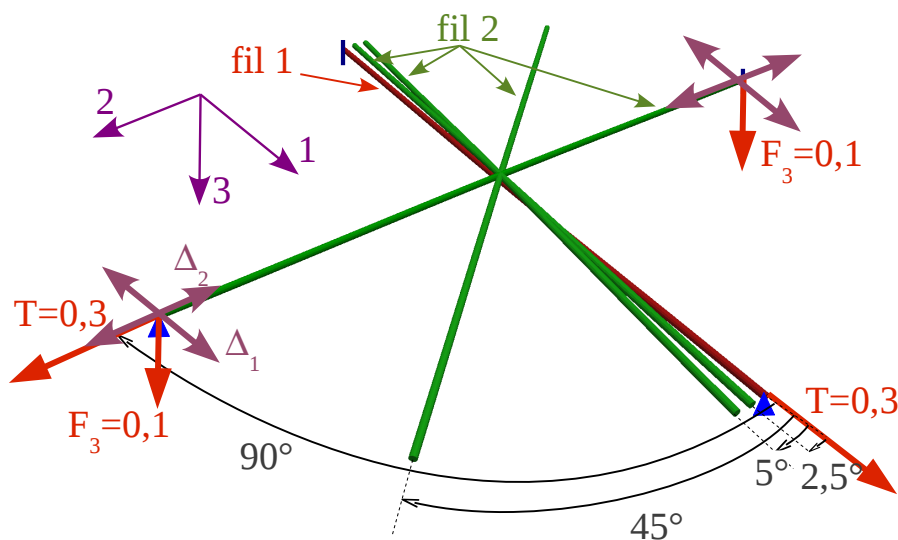


FIGURE 3.18 – Chargements appliqués aux fils

### 3.5.1.2 Résultats

Les réactions normales et tangentielles aux éléments de contact générés entre les fils, ainsi que les configurations déformées aux étapes extrêmes des cycles de glissement alterné, sont représentées sur les configurations déformées sur la figure 3.19. Alors qu'un seul élément de contact est généré entre les deux fils pour les angles de 90° et 45°, plusieurs éléments de contact sont créés le long d'une zone de contact continue pour les angles de 5° et 2,5°. Les variations d'amplitudes des réactions normales et tangentielles apparaissent relativement lisses.

Les variations des résultantes des efforts aux extrémités du deuxième filament, dans les directions respectives 1 et 2 d'application du déplacement alterné, et sur deux cycles successifs complets, sont représentées sur la figure 3.20. Ces courbes d'évolution des efforts résultants dans la direction du déplacement imposé présentent un profil relativement lisse, que le contact soit pris en compte en un seul élément de contact (angles de 45° et 90°), ou en une suite d'éléments de contact (angles de 2,5° et 5°).

Pour la plupart de ces courbes, la transition entre les glissements dans les directions opposées suite à l'inversion du sens du déplacement imposé, s'effectue sur plusieurs étapes. Les incréments de déplacement imposé correspondant à ces phases de transition entre phases de glissement sont nettement supérieurs au seuil de déplacement relatif réversible ; lors de ces changements de sens de trajet de chargement, ces incréments de déplacement induisent donc d'abord des modifications dans les configurations des fils, avant d'engendrer de nouveaux glissements. Pour les faibles angles de 2,5° et 5°, lorsque la direction du déplacement imposé est très proche de l'orientation des poutres, les poutres sont sollicitées principalement dans leurs directions longitudinales, avec une déformabilité très limitée par rapport à leurs directions transverses, et les phases de transition entre phases de glissement ne sont plus observables avec l'incrément de déplacement utilisé de 0,01 mm (cf. Fig. 3.20e et 3.20g).

La régularité des courbes de résultantes d'effort dans les phases de glissement montre que la variable d'histoire liée à la partie réversible du déplacement relatif est

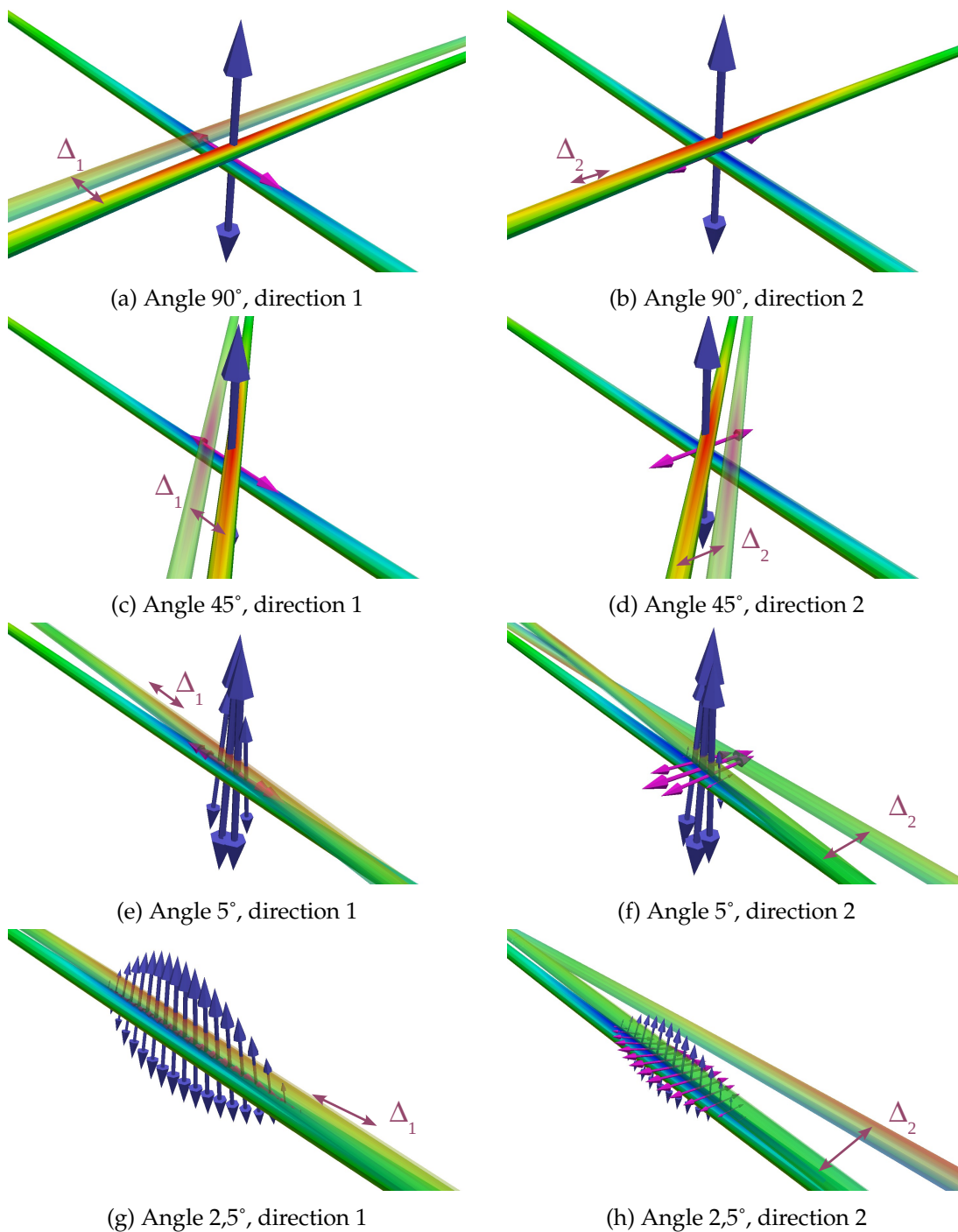
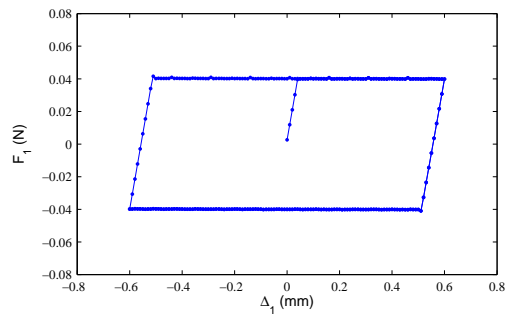
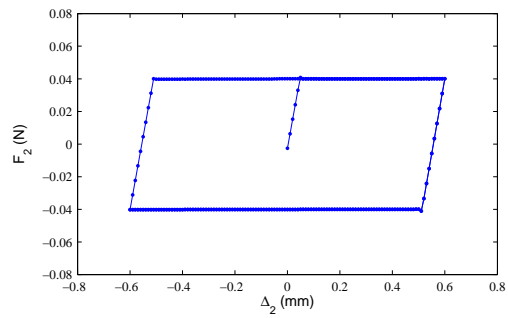


FIGURE 3.19 – Représentation des réactions normales (en bleu) et tangentielles (en magenta) pour les configurations extrêmes des cycles de glissement alterné entre deux filaments dans les directions 1 et 2, pour différents angles entre les filaments

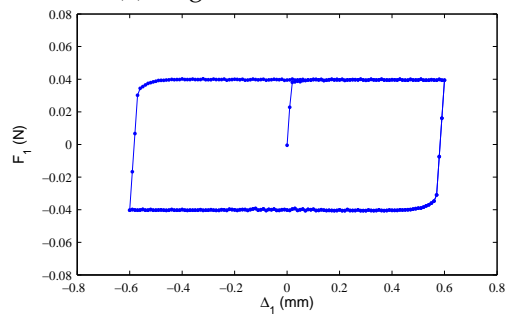




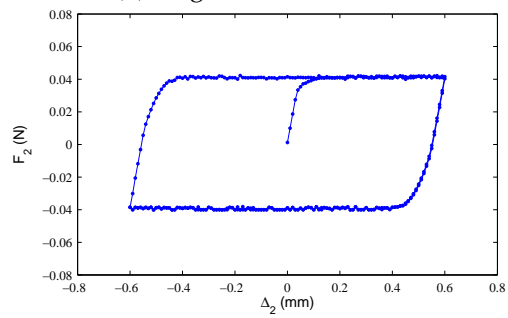
(a) Angle  $90^\circ$ , direction 1



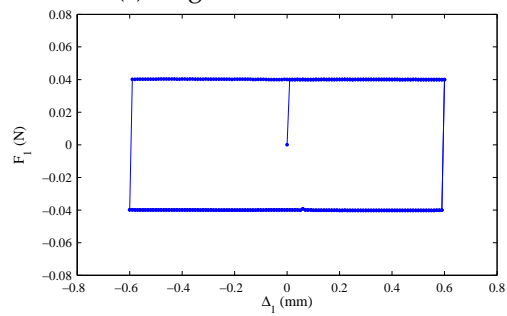
(b) Angle  $90^\circ$ , direction 2



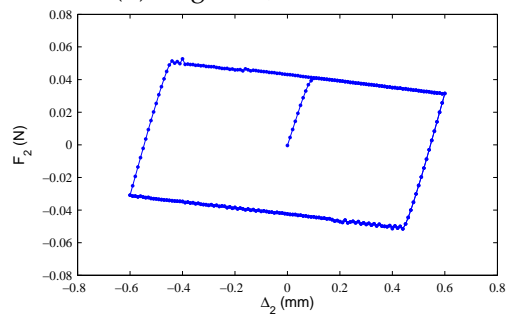
(c) Angle  $45^\circ$ , direction 1



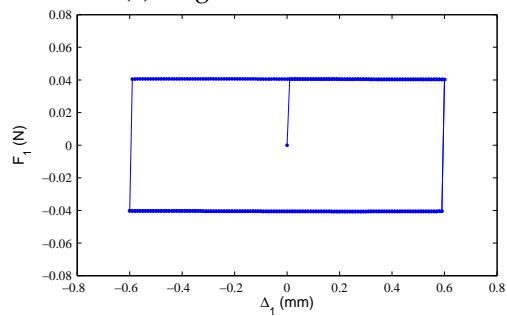
(d) Angle  $45^\circ$ , direction 2



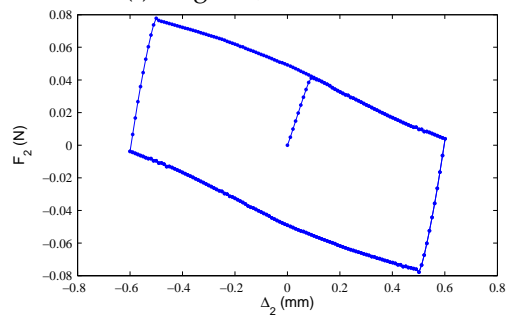
(e) Angle  $5^\circ$ , direction 1



(f) Angle  $5^\circ$ , direction 2



(g) Angle  $2,5^\circ$ , direction 1



(h) Angle  $2,5^\circ$ , direction 2

FIGURE 3.20 – Variation de la résultante des efforts aux extrémités du deuxième filament dans les directions 1 et 2 d'application du glissement alterné, sur deux cycles successifs

transmise correctement d'une étape à l'autre. Aucun effet lié au maillage (transition de la zone de glissement d'un élément fini à l'autre, par exemple) n'apparaît visible sur ces courbes.

Dans les configurations correspondant aux petits angles de  $2,5^\circ$  et  $5^\circ$  entre les filaments, lorsque le déplacement alterné est imposé dans la direction 2, on relève des variations importantes de la résultante des efforts dans la direction 2 sur le deuxième filament (Fig. 3.20f et 3.20h). Ceci est lié au fait que du fait de la configuration géométrique particulière engendrée par les courbures des filaments l'un sur l'autre, les réactions normales de contact ont une composante significative selon la direction 2 du plan.

### 3.5.2 Simulation de nœuds

Quelques travaux dans la littérature explorent la problématique de la formation et du serrage des nœuds. Une part de ces travaux, plutôt initiés par des physiciens (Pieranski et al. [2001]; Przybyl and Pieranski [2009]), envisage notamment comme application des problématiques concernant des brins d'ADN. Un autre domaine actif par rapport à la problématique des nœuds est celui de la visualisation et de l'animation graphique, avec pour objectif le développement de simulations très efficaces en temps de calcul pour un rendu réaliste de ces objets dans des films d'animation (Spillmann and Teschner [2008]). D'un point de vue mécanique, des systèmes d'équations régissant l'équilibre de ces structures ont été proposés (Coleman and Swigon [2000]; van der Heijden et al. [2003]; Goyal et al. [2008]). En développant des techniques de développements asymptotiques, Clauvelin et al. [2009] ont pu proposer une solution complète décrivant les différentes parties d'un nœud simple réalisé sur un filament.

Les simulations de formation et de serrage de nœuds réalisés sur un filament et sur un fil multifilamentaire présentées ici proposent une illustration des applications des approches proposées dans ce chapitre pour la prise en compte des interactions de contact-frottement dans les milieux fibreux. Elles sont reprises de l'article Durville [2012].

#### 3.5.2.1 Nœud réalisé sur un filament

##### 3.5.2.1.1 Formation et serrage du nœud

La procédure proposée ici pour former un nœud consiste à appliquer des conditions appropriées de déplacements et de rotations aux extrémités d'un filament initialement droit jusqu'à former une boucle (Fig. 3.21b), pour pouvoir ensuite entrelacer les extrémités du filaments (Fig. 3.21e) pour réaliser un nœud simple. La phase d'entrelacement des extrémités, qui consiste à introduire chaque extrémité à l'intérieur de la boucle formée, apparaît très difficile à réaliser en pilotant uniquement les extrémités du filament. Pour cette raison, nous avons introduit deux poutres auxiliaires pour maintenir la boucle par contact (Fig. 3.21c à 3.21e), pendant la phase nécessaire à l'entrelacement des extrémités. Ces poutres de maintien sont ensuite progressivement écartées (Fig. 3.21g), et le nœud est finalement serré en tirant sur les deux extrémités (Fig. 3.21h).

Cette simulation met en œuvre la détection des contacts dans le cas d'auto-contact. La géométrie intermédiaire, ainsi que les réactions normales, sont représentées sur la configuration finale à l'issue du serrage (Fig. 3.22), tandis que les évolutions des réactions normales et tangentielles le long de la zone de contact sont représentées sur la figure 3.23.

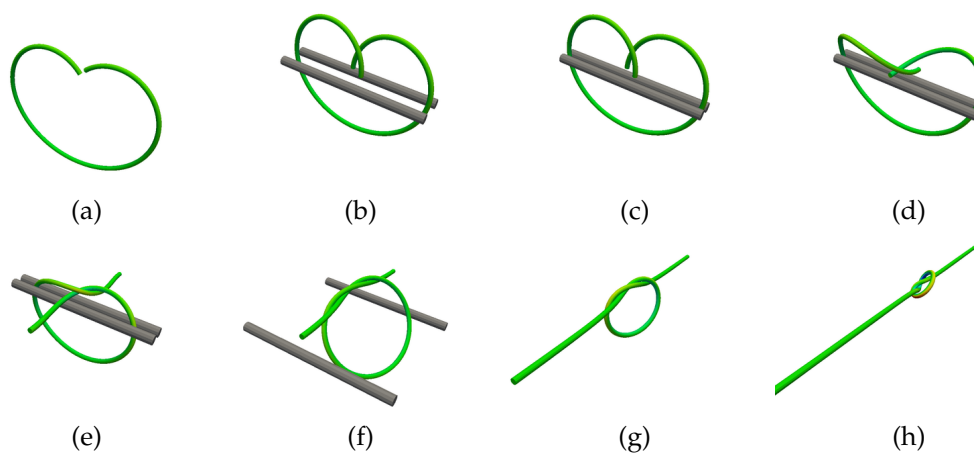


FIGURE 3.21 – Visualisation de la configuration déformée à différentes étapes au cours du processus de formation et de serrage d'un nœud à partir d'un filament

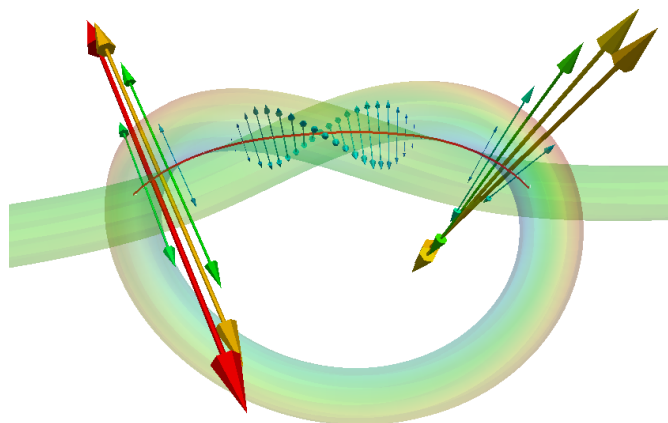


FIGURE 3.22 – Visuation de la géométrie intermédiaire (en rouge) et des réactions normales sur la configuration déformée à la fin du serrage du nœud

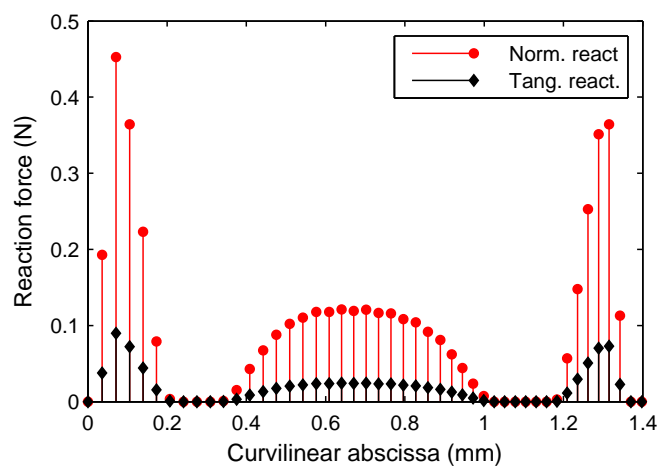


FIGURE 3.23 – Visuation des réactions normales et tangentielles dans la configuration à la fin du serrage

### 3.5.2.1.2 Desserrage du nœud

Après avoir serré le nœud, une diminution progressive des efforts appliqués aux deux extrémités du brin est appliquée, jusqu'à l'annulation de ces efforts, pour obtenir une configuration relâchée du nœud. Dans cette configuration relâchée, le nœud est maintenu fermé uniquement par les efforts de frottement développés dans la partie entrelacée des brins. En considérant trois valeurs différentes de coefficient de frottement (0,2, 0,25 et 0,3), trois configurations relâchées, présentant des diamètres plus élevés à mesure que le frottement diminue, sont obtenues (Fig. 3.24).

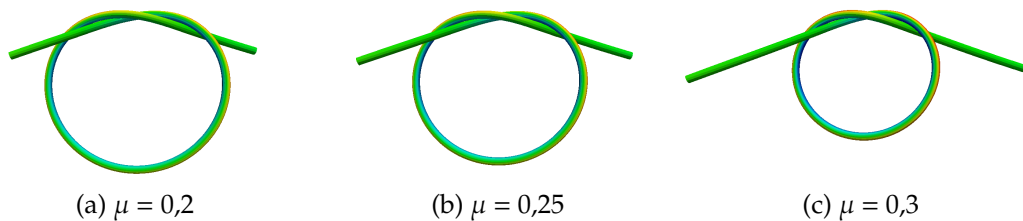


FIGURE 3.24 – Visualisation de la configuration déformée après relâchement des efforts de serrage pour différentes valeurs du coefficient de frottement  $\mu$

Un zoom sur la partie entrelacée du nœud, représentant les réactions normales sur la configuration déformée (Fig. 3.25), montre trois zones de contact distinctes, avec une zone plus large dans la partie centrale, et deux zones plus courtes de chaque côté. Les courbes de variation des efforts normaux et tangentiels sur cette région entrelacée (Fig. 3.26) montrent des efforts d'intensité plus élevée sur les deux zones plus courtes de chaque côté. Dans leur approche analytique, Clauvelin et al. [2009] prédisent des contacts ponctuels de part et d'autre de la zone centrale caractérisée par un contact continu sur une certaine longueur. La méthode de pénalisation utilisée ici pour modéliser le contact normal, en autorisant une faible interpénétration, explique que dans notre approche, le contact dans les zones périphériques soit répartis sur plusieurs éléments et ne rende pas compte de l'aspect ponctuel prédit par l'approche analytique.

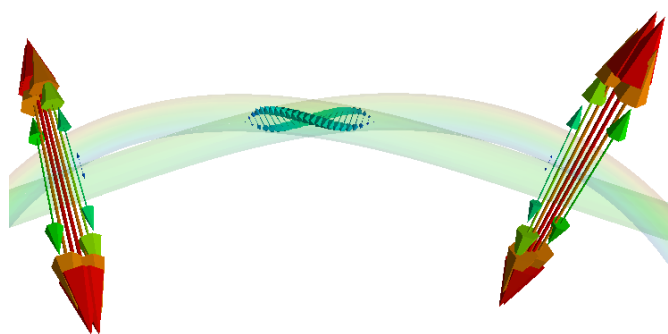


FIGURE 3.25 – Visuon des réactions normales sur la configuration déformée après relâchement des efforts de serrage

### 3.5.2.2 Nœud réalisé sur un fil multifilamentaire

Le même procédé de formation et de serrage de nœud peut être appliqué à un fil multifilamentaire (Fig. 3.27e). Le fil considéré est obtenu par un assemblage de trois

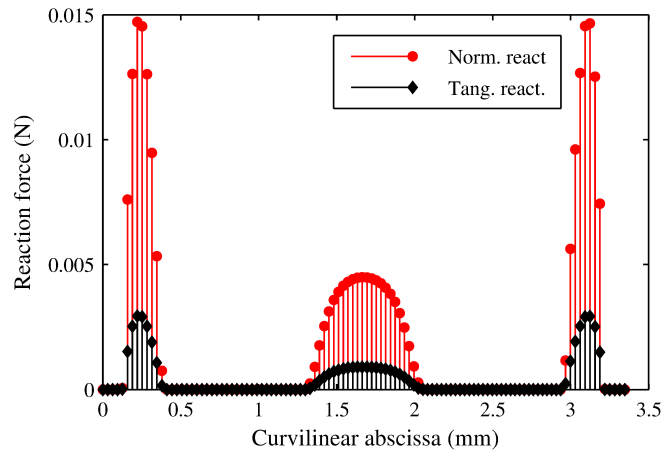


FIGURE 3.26 – Graphes des réactions normales et tangentielles le long de la zone de contact après relâchement des efforts de serrage

mèches constituées chacune de 25 filaments. Une simulation de l'élaboration de ce fil, comprenant un premier torsadage de chacune des mèches, puis un second torsadage, en sens opposé, des trois mèches, est effectuée au préalable. Le procédé de formation et de serrage du nœud est appliqué à ce fil constitué de 75 filaments. Les configurations déformées à l'issue de différentes étapes du procédé de formation et de serrage du nœud sont représentées sur la figure 3.27.

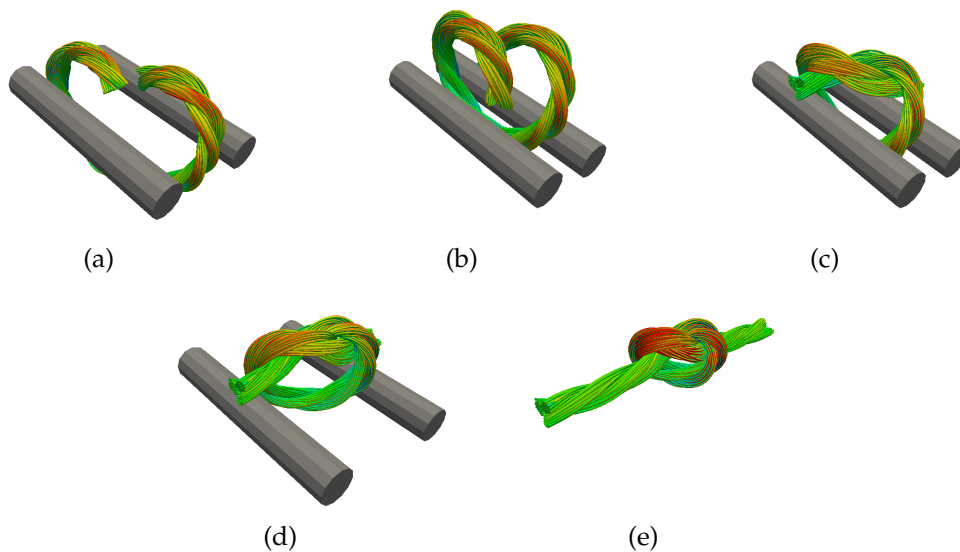


FIGURE 3.27 – Visualisation de la configuration déformée à différentes étapes au cours du processus de formation et de serrage d'un nœud réalisé à partir d'un fil composé de 75 filaments

Par rapport au nœud réalisé sur un filament, la complexité essentielle de ce cas de simulation tient à l'importance de la densité de contact à prendre en compte. Les résultats présentés illustrent les capacités de l'approche proposée par rapport à ce type de structures.

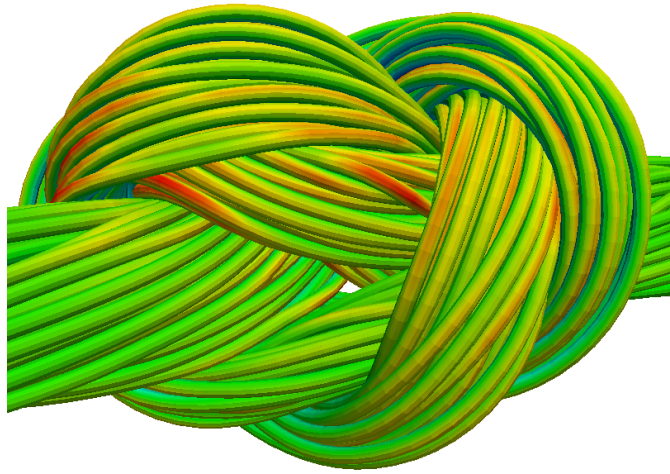


FIGURE 3.28 – Configuration déformée à la fin du serrage du nœud réalisé à partir d'un fil composé de 75 filaments

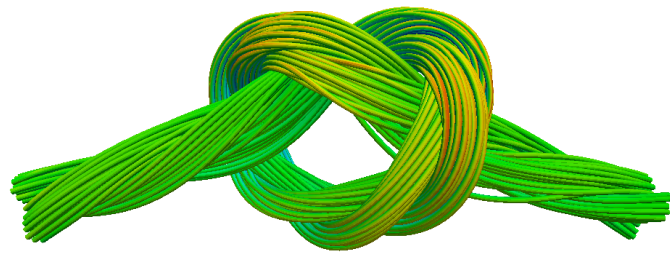


FIGURE 3.29 – Configuration déformée après le relâchement des efforts de serrage sur le fil composé de 75 filaments

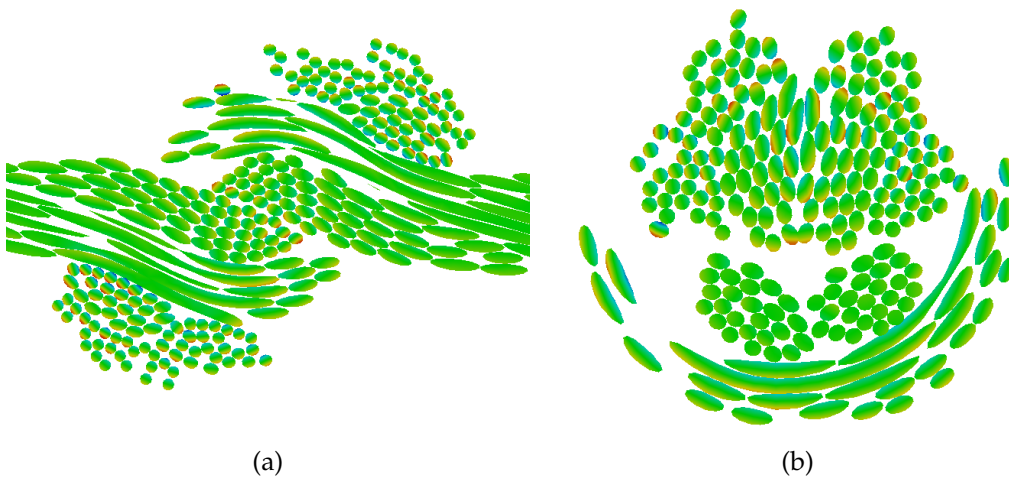


FIGURE 3.30 – Visualisation de la configuration déformée à différentes étapes au cours du processus de formation et de serrage d'un nœud réalisé à partir d'un fil composé de 75 filaments

## Chapitre 4

# Modélisation des conditions aux limites

### 4.1 Motivation des développements sur la modélisation des conditions aux limites

#### 4.1.1 Problématique

Dans les simulations abordées sur les milieux enchevêtrés, on ne considère la plupart du temps qu'un échantillon extrait du milieu qu'on souhaite étudier, ce qui demande de définir les conditions aux limites à appliquer sur les frontières de cet échantillon, destinées à représenter l'action de la partie extérieure sur l'échantillon. L'hétérogénéité et la déformabilité du milieu rendent problématique la définition de ces conditions. L'imposition de conditions simples, par exemple de type déplacement uniforme sur une frontière de raccordement, introduit dans la plupart des cas une rigidification artificielle locale du milieu qui perturbe la solution sur une certaine longueur au sein de l'échantillon. Afin de limiter l'extension des perturbations introduites par la prise en compte de conditions aux limites trop simplifiées, on cherche à formuler des conditions aux limites plus réalistes, qui laissent au besoin une certaine liberté aux déplacements des extrémités des fibres sur les frontières de raccordement, tout en contrôlant de manière globale suffisamment de degrés de liberté pour que le problème soit bien posé.

#### 4.1.2 Aspects hiérarchiques

Les milieux enchevêtrés considérés sont souvent constitués de filaments élémentaires assemblés selon plusieurs niveaux hiérarchiques. Ainsi par exemple, les câbles multi-torons utilisés dans les ascenseurs sont constitués en formant d'abord des torons à partir des fils élémentaires (typiquement un fil d'âme entouré de six fils enroulés en hélice), ces torons étant ensuite assemblés entre eux pour former un câble élémentaire, le câble final pouvant être formé lui-même par assemblage de plusieurs de ces câbles élémentaires. S'intéresser seulement aux extrémités des filaments sur les frontières de raccordement, sans prendre en compte de conditions particulières correspondant à chaque niveau de l'organisation, ne permet pas de préserver l'organisation propre à chacun de ces niveaux sur ces frontières. Nous proposons donc de prendre en compte la structure hiérarchique des structures considérées en les supposant constituées d'ensembles de composants, eux-mêmes constitués de sous-composants, jusqu'au dernier niveau constitué des filaments élémentaires, comme illustré sur la Figure 4.1.

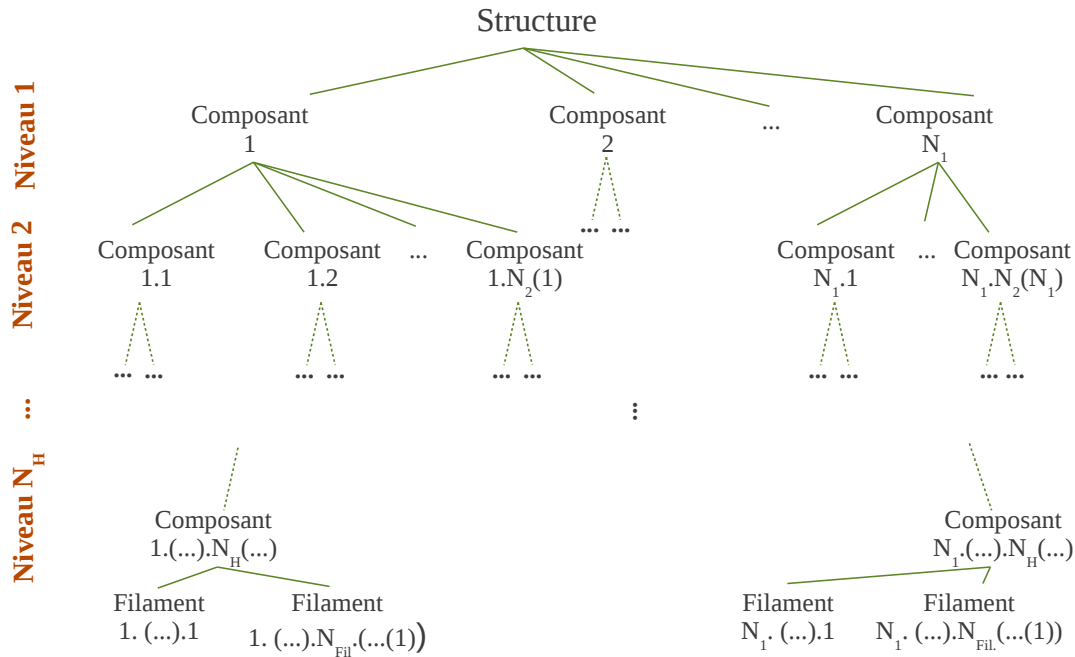


FIGURE 4.1 – Structure hiérarchique d'un assemblage de filaments

### 4.1.3 Démarche proposée

Une formulation des conditions aux extrémités s'appuyant sur des conditions exprimées en moyenne apparaît comme une solution pour laisser de la liberté aux déplacements à l'échelle des composants élémentaires, tout en contrôlant globalement le mouvement de l'ensemble de composants considérés. Il apparaît alors nécessaire de pouvoir formuler ce type de conditions en moyenne à chacun des niveaux d'organisation hiérarchique de l'assemblage afin de préserver la structuration de l'échantillon considéré. Dans cette perspective, les extrémités des composants de différents niveaux disposant d'une certaine liberté de déplacement, les conditions exprimées pour les composants d'un niveau donné devront tenir compte des déplacements et des changements d'orientation concernant le niveau supérieur. Pour assurer une cohérence de la cinématique entre les différents niveaux hiérarchiques, nous cherchons à exprimer les conditions en moyenne s'appliquant à un ensemble de composants d'un niveau donné, par rapport aux directions d'un repère mobile attaché au niveau supérieur. Afin de pouvoir manipuler les composants de différents niveaux, un corps rigide est associé à chaque extrémité de chacun des composants de différents niveaux. Les conditions en moyenne formulées pour l'ensemble des sous-composants d'un composant donné peuvent être ainsi exprimées par rapport aux directions du corps rigide attaché à ce composant, et les déplacements des extrémités des composants de différents niveaux sont contrôlés par les déplacements de ces corps rigides.

Pour mettre en œuvre cette démarche, nous proposons une modélisation des corps rigides par des groupes de quatre nœuds, liés par des conditions cinématiques rigides, et contrôlés exclusivement par des degrés de liberté de translation. Nous formulons ensuite différentes conditions cinématiques permettant d'imposer des conditions particulières en translation, en rotation vectorielle ou rotation affine, à des extrémités de filaments ou de composants, considérées individuellement ou en groupe, par rapport à des repères fixes ou mobiles. Après avoir formulé ces différentes conditions cinématiques sous une forme générique, nous proposons une prise en compte de ces conditions



dans l'expression du principe des travaux virtuels du problème global à l'aide de multiplicateurs de Lagrange.

## 4.2 Modèle de corps rigides à quatre nœuds

### 4.2.1 Introduction

Le rôle assigné aux corps rigides dans la modélisation envisagée est de pouvoir définir un repère local qui permette d'imposer une translation et une rotation à un ensemble de composants, en déterminant six degrés de liberté cinématiques contrôlant les déplacements de ces composants. Un tel repère peut être défini à l'aide d'une position et de trois angles de rotation, définissant six degrés de liberté. Cependant, pour ne pas avoir à introduire une formulation de grandes rotations, nous avons choisi de définir chaque direction du repère local à l'aide de deux points pilotés en translation, en définissant un corps rigide comme un ensemble de quatre nœuds, constitué d'un nœud maître et de trois nœuds directionnels, liés entre eux par des conditions de distances constantes. De cette manière, le corps rigide est déterminé par douze degrés de liberté en translation (trois translations pour chacun des nœuds), devant satisfaire six conditions de distance constante. Six conditions supplémentaires peuvent être imposées aux degrés de liberté de ce modèle de corps rigide pour contrôler ses six mouvements de corps rigides.

### 4.2.2 Définition d'un corps rigide à quatre nœuds

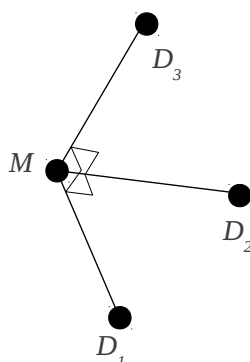


FIGURE 4.2 – Corps rigide à quatre nœuds

Nous définissons un corps rigide  $C$  comme un ensemble de quatre nœuds notés  $M$  pour le nœud de référence et  $(D_1, D_2, D_3)$  pour les trois nœuds directionnels (Fig. 4.2). Les positions de ces nœuds dans leur configuration initiale sont déterminées afin que le trièdre formé par les trois directions définies par les nœuds directionnels par rapport au nœud maître soit orthonormé direct, ce qui s'exprime, en notant  $x^0(N)$  la position du nœud  $N$ , par les conditions suivantes :

$$\left( x^0(D_I) - x^0(M), x^0(D_J) - x^0(M) \right) = \begin{cases} 1 & \text{si } I = J; \\ 0 & \text{si } I \neq J; \end{cases} \quad I, J = 1, 2 \text{ ou } 3. \quad (4.1)$$

### 4.2.3 Conditions de distance constante au sein d'un corps rigide

L'indéformabilité de ce corps rigide est formulée en exprimant que les distances entre ses nœuds constitutifs restent constantes, c'est-à-dire qu'à tout instant leurs positions vérifient les conditions suivantes :

$$\|x(D_I) - x(D_J)\|^2 = 2, \forall (I, J) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}, I \neq J; \quad (4.2)$$

$$\|x(D_I) - x(M)\|^2 = 1, \forall I \in \{1, 2, 3\}. \quad (4.3)$$

Ces six conditions cinématiques sont prises en compte par l'introduction de multiplicateurs de Lagrange, comme expliqué au paragraphe 4.4.

Six conditions cinématiques restent à définir pour positionner ce corps rigide dans l'espace. Trois conditions peuvent être utilisées pour définir la position du nœud maître. Nous verrons plus loin (paragraphe 4.3) comment contrôler trois degrés de liberté de translation relatifs à des nœuds directionnels pour définir l'orientation du corps rigide.

### 4.2.4 Directions du référentiel attaché au corps rigide

La préservation de l'indéformabilité du corps rigide, dont les positions initiales des nœuds définissent un trièdre orthonormé direct, permet de définir aisément un repère orthonormé attaché au corps rigide, noté  $(d_1, d_2, d_3)$ , dont les directions se calculent directement à partir des positions des nœuds :

$$d_i = x(D_I) - x(M), I = 1, 2, 3. \quad (4.4)$$

Il est à noter que les conditions d'indéformabilité ne garantissent pas que le référentiel reste orienté dans le sens direct, toute symétrie par rapport à un plan conservant les distances entre les nœuds du corps rigide, mais inversant l'orientation du référentiel. Cette inversion possible de l'orientation du référentiel attaché à un corps rigide n'a cependant pas été observée dans les traitements algorithmiques que nous avons mis en œuvre.

## 4.3 Modélisation des liaisons cinématiques contrôlant le mouvement d'extrémités par rapport à un référentiel mobile

### 4.3.1 Introduction

Nous avons exposé en début de chapitre le besoin de contrôler les conditions aux limites sur les frontières de raccordement de l'échantillon considéré à chacun de ses niveaux d'organisation hiérarchique afin de préserver sa structuration, tout en permettant une prise en compte de sa déformabilité aux différents niveaux. Nous nous intéressons ici à la manière de lier les extrémités de l'ensemble des sous-composants d'un composant donné, au référentiel attaché à l'extrémité correspondante de ce composant, représenté par un corps rigide à quatre nœuds. Nous cherchons à formuler les conditions cinématiques qui permettent de contrôler les mouvements des extrémités de ces sous-composants, en translation et en rotation, individuellement ou en moyenne, par rapport à un référentiel mobile. Les extrémités considérées sont soit des extrémités de filaments, correspondant à des nœuds extrémité des maillages des filaments, pour ce qui concerne le niveau inférieur de la hiérarchie, soit des corps rigides, pour ce qui concerne les niveaux supérieurs. Les cinématiques de ces extrémités sont définies par neuf degrés de liberté pour les extrémités de filaments, ou douze degrés de liberté pour les corps rigides.

### 4.3.2 Liaisons assurant le contrôle des translations

Le contrôle en translation des extrémités s'applique aux degrés de liberté se rapportant à la translation de la fibre moyenne s'il s'agit d'extrémités de filaments, ou aux degrés de liberté de translation du nœud maître du corps rigide associé s'il s'agit d'un composant de niveau supérieur.

#### 4.3.2.1 Translation d'une extrémité par rapport à un corps rigide

On cherche à contrôler la translation d'une extrémité par rapport à un corps rigide mobile, selon une direction attachée à ce corps rigide mobile. Nous exprimons l'imposition d'une translation  $\delta_i$  dans la direction  $i$  du corps rigide  $C$  à l'extrémité  $E$  sous la forme :

$$(x(E) - x(M), d_i) = (x_{t_0}(E) - x_{t_0}(M), d_{i,t_0}) + \delta_i, \quad (4.5)$$

où  $x(E)$  et  $x(M)$  désignent les positions actuelles de l'extrémité  $E$  et du nœud maître  $M$  du corps rigide, où  $x_{t_0}(E)$  et  $x_{t_0}(M)$  représentent les positions de ces mêmes nœuds dans une configuration dite de référence, par rapport à laquelle on souhaite imposer la translation, et où  $d_i$  et  $d_{i,t_0}$  représentent la direction d'application de la condition, respectivement dans la configuration actuelle et dans la configuration de référence pour cette condition (Fig. 4.3). Toute configuration antérieure peut être choisie comme configuration de référence pour l'imposition d'une condition cinématique.

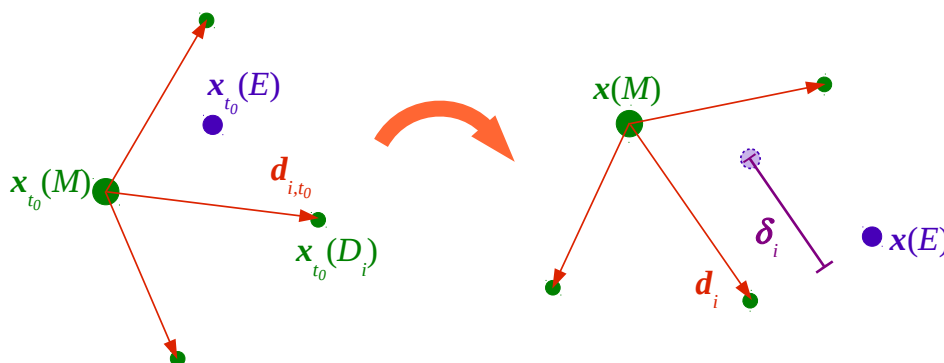


FIGURE 4.3 – Translation d'une extrémité par rapport à un corps rigide mobile

En exprimant les directions  $d_i$  et  $d_{i,t_0}$  en fonction des positions des nœuds du corps rigide (4.4), la condition (4.5) se réécrit sous la forme :

$$(x(E) - x(M), x(D_i) - x(M)) = (x_{t_0}(E) - x_{t_0}(M), x_{t_0}(D_i) - x_{t_0}(M)) + \delta_i. \quad (4.6)$$

#### 4.3.2.2 Translation moyenne d'un ensemble d'extrémités par rapport à un corps rigide

Plutôt que d'imposer une condition de translation individuellement à chacune des extrémités d'un ensemble de sous-composants, on peut souhaiter n'imposer une telle condition qu'en moyenne à cet ensemble, laissant la possibilité à chacune des extrémités d'avoir un déplacement différent. Si on note  $N_E$  le nombre de sous-composants d'un composant donné, la condition de translation moyenne imposée à un ensemble

d'extrémités peut s'exprimer sous la forme

$$\frac{1}{N_E} \sum_{j=1}^{N_E} (\mathbf{x}(E_j) - \mathbf{x}(M), \mathbf{x}(D_i) - \mathbf{x}(M)) = \frac{1}{N_E} \sum_{j=1}^{N_E} (\mathbf{x}_{t_0}(E_j) - \mathbf{x}_{t_0}(M), \mathbf{x}_{t_0}(D_i) - \mathbf{x}_{t_0}(M)) + \delta_i. \quad (4.7)$$

Une telle condition impose que le barycentre de l'ensemble des extrémités considérées se déplace d'une longueur  $\delta_i$  tout en autorisant des déplacements différents pour chaque extrémité individuelle, laissant ainsi la possibilité à ces extrémités de se réarranger (Fig. 4.4).

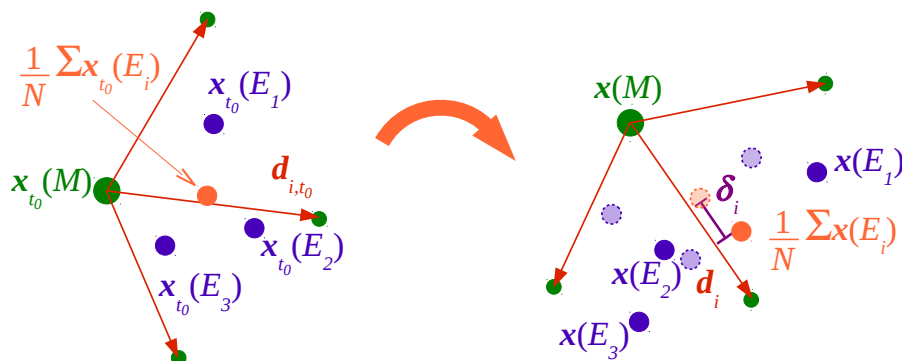


FIGURE 4.4 – Translation moyenne d'un ensemble d'extrémités par rapport à un corps rigide mobile

### 4.3.3 Liaisons assurant le contrôle des rotations

#### 4.3.3.1 Rotation d'un vecteur autour d'une direction

Nous entendons ici par rotation le fait de contrôler l'orientation d'un vecteur autour d'une direction, ce qui n'est pas équivalent à une rotation vectorielle définie par le produit du vecteur par une matrice de rotation. On considère qu'un vecteur  $V$  subit une rotation d'angle  $\theta$  autour d'un axe  $a$  si son image, notée  $V_a^\theta$ , appartient à un plan faisant un angle  $\theta$  avec le plan défini par les vecteurs  $V$  et  $a$  (Fig. 4.5).

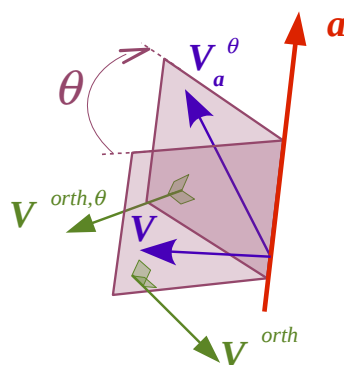


FIGURE 4.5 – Notion de rotation autour d'un axe

La condition cinématique régissant cette rotation peut s'exprimer par une condition d'orthogonalité par rapport à un vecteur noté  $V^{orth,\theta}$ . Pour obtenir ce vecteur, on commence par calculer le vecteur unitaire  $V^{orth}$  orthogonal au plan défini par les vecteurs  $V$

et  $\mathbf{a}$  :

$$\mathbf{V}^{orth} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{V}}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{V}\|}. \quad (4.8)$$

On calcule ensuite l'image  $\mathbf{V}^{orth,\theta}$  de ce vecteur par la rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $\mathbf{a}$  :

$$\mathbf{V}^{orth,\theta} = \mathbf{R}_{\mathbf{a}}(\theta)\mathbf{V}^{orth}, \quad (4.9)$$

où  $\mathbf{R}_{\mathbf{a}}(\theta)$  représente la matrice de rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $\mathbf{a}$ . La condition cinématique de rotation autour de l'axe  $\mathbf{a}$  est exprimée en imposant à la transformée  $\mathbf{V}_{\mathbf{a}}^{\theta}$  du vecteur  $\mathbf{V}$  de vérifier l'orthogonalité avec le vecteur  $\mathbf{V}^{orth,\theta}$  :

$$(\mathbf{V}_{\mathbf{a}}^{\theta}, \mathbf{V}^{orth,\theta}) = 0. \quad (4.10)$$

Cette condition contraint le vecteur  $\mathbf{V}_{\mathbf{a}}^{\theta}$  à rester dans un plan, tout en laissant libre sa norme et son orientation dans ce plan. Elle impose une unique condition scalaire à l'ensemble des trois composantes du vecteur, et ne contrôle qu'un seul degré de liberté.

#### 4.3.3.2 Rotation d'un vecteur autour d'une direction d'un corps rigide mobile

Nous reprenons cette notion de rotation pour le cas d'un axe correspondant à une direction attachée à un corps rigide mobile, en considérant un vecteur  $\mathbf{V}_{t_0}$ , pris dans une configuration à un instant  $t_0$ , auquel on souhaite imposer une rotation d'angle  $\theta$  par rapport à la direction  $i$  du repère attaché à un corps rigide mobile, représentée par la direction  $\mathbf{d}_{i,t_0}$  (Fig. 4.6).

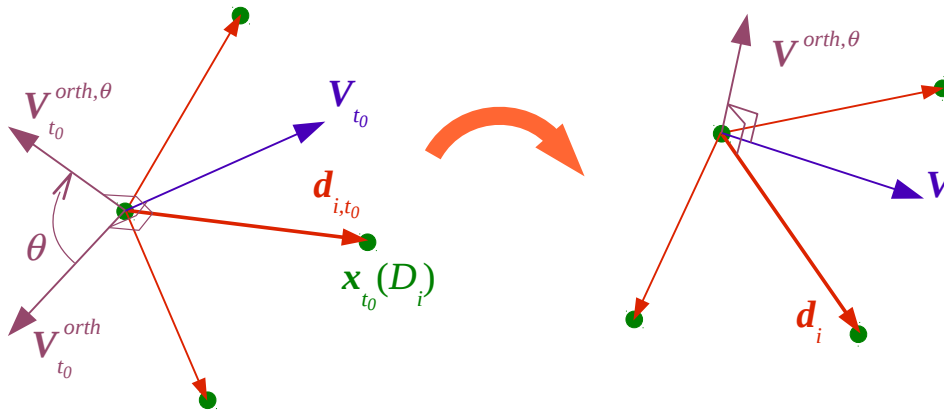


FIGURE 4.6 – Rotation d'un vecteur autour d'une direction d'un corps rigide mobile

D'une manière analogue à ce qui a été présenté au paragraphe précédent, on commence par déterminer un vecteur noté  $\mathbf{V}_{t_0}^{orth}$ , orthogonal au plan formé par la direction  $\mathbf{d}_{i,t_0}$  et le vecteur  $\mathbf{V}_{t_0}$  :

$$\mathbf{V}_{t_0}^{orth} = \frac{\mathbf{d}_{i,t_0} \times \mathbf{V}_{t_0}}{\|\mathbf{d}_{i,t_0} \times \mathbf{V}_{t_0}\|}. \quad (4.11)$$

On calcule l'image de ce vecteur par la rotation d'angle  $\theta$  autour de la direction  $\mathbf{d}_{i,t_0}$ , notée  $\mathbf{V}_{t_0}^{orth,\theta}$ , et définie par :

$$\mathbf{V}_{t_0}^{orth,\theta} = \mathbf{R}_{\mathbf{d}_{i,t_0}}(\theta)\mathbf{V}_{t_0}^{orth}, \quad (4.12)$$

où  $\mathbf{R}_{\mathbf{d}_{i,t_0}}(\theta)$  est la matrice de la rotation d'angle  $\theta$  autour de la direction  $\mathbf{d}_{i,t_0}$ . Ce vecteur  $\mathbf{V}_{t_0}^{orth,\theta}$  permettrait d'exprimer la condition cinématique de rotation dans le référentiel

correspondant à la configuration  $t_0$ . Pour exprimer la condition par rapport au référentiel dans la configuration actuelle, on effectue un transport du vecteur  $\mathbf{V}_{t_0}^{orth,\theta}$  de la configuration  $t_0$  vers la configuration actuelle. Ce vecteur transporté, noté  $\mathbf{V}^{orth,\theta}$ , se calcule comme :

$$\mathbf{V}^{orth,\theta} = \left( \mathbf{V}_{t_0}^{orth,\theta}, \mathbf{d}_{j,t_0} \right) \mathbf{d}_j. \quad (4.13)$$

La rotation d'angle  $\theta$  autour de la direction  $i$  du référentiel mobile s'exprime au final par la condition cinématique suivante :

$$\left( \mathbf{V}, \mathbf{V}^{orth,\theta} \right) = 0, \quad (4.14)$$

qu'on peut réécrire en fonction des positions actuelles des nœuds du corps rigide sous la forme :

$$\left( \mathbf{V}_{t_0}^{orth,\theta}, \mathbf{d}_{j,t_0} \right) \left( \mathbf{V}, \mathbf{x}(D_j) - \mathbf{x}(M) \right) = 0. \quad (4.15)$$

#### 4.3.3.3 Contrôle des rotations des extrémités prises individuellement

Les extrémités auxquelles peuvent s'appliquer les rotations sont soit des extrémités de filaments, soit des corps rigides. Les extrémités des filaments étant orientées par deux vecteurs directionnels (les deux directeurs de section), et les orientations des corps rigides à quatre nœuds étant déterminées par trois vecteurs directionnels, il convient de choisir à quels vecteurs directionnels appliquer les conditions cinématiques correspondant aux trois rotations rigides qu'on peut potentiellement contrôler à chaque extrémité.

Afin que les conditions de rotation ne déterminent pas l'ensemble des trois degrés de liberté de chacun des vecteurs directionnels considérés, pour ne pas interférer avec les autres conditions déterminant leur longueur (conditions de distance constante pour les corps rigides), le nombre de conditions en rotation appliquées à chaque vecteur directionnel doit rester inférieur à deux. Pour respecter cette contrainte, pour chacune des conditions en rotation potentiellement applicables autour d'une des trois directions du corps rigide, on choisit, parmi les vecteurs directionnels de l'extrémité considérée, celui qui forme l'angle le plus important avec cette direction, comme vecteur auquel appliquer la condition cinématique (4.15).

#### 4.3.3.4 Rotation moyenne d'un ensemble d'extrémités autour d'un axe d'un corps rigide mobile

On cherche ici à appliquer en moyenne, à un ensemble d'extrémités, une rotation autour d'un axe d'un corps rigide. L'idée consiste à formuler une condition cinématique de rotation, telle qu'exprimée en (4.15) à chaque vecteur reliant le nœud maître du corps rigide à chacune des extrémités de l'ensemble, et à moyenniser l'ensemble des conditions ainsi obtenues.

On applique la démarche présentée plus haut en 4.3.3.2 à chaque vecteur  $\mathbf{V}_{t_0,j}$  reliant le nœud maître du corps rigide à chaque extrémité de l'ensemble considéré (Fig. 4.7) :

$$\mathbf{V}_{t_0,j} = \mathbf{x}_{t_0}(E_j) - \mathbf{x}_{t_0}(M). \quad (4.16)$$

En reprenant les formules (4.11), (4.12) et (4.13), on détermine pour chacun de ces vecteurs  $\mathbf{V}_{t_0,j}$  le vecteur orthogonal, tourné et transporté correspondant, noté  $\mathbf{V}_j^{orth,\theta}$ , nécessaire à l'expression de la condition cinématique de rotation pour chaque extrémité sous la forme :

$$\left( \mathbf{x}(E_j) - \mathbf{x}(M), \mathbf{V}_j^{orth,\theta} \right) = 0. \quad (4.17)$$

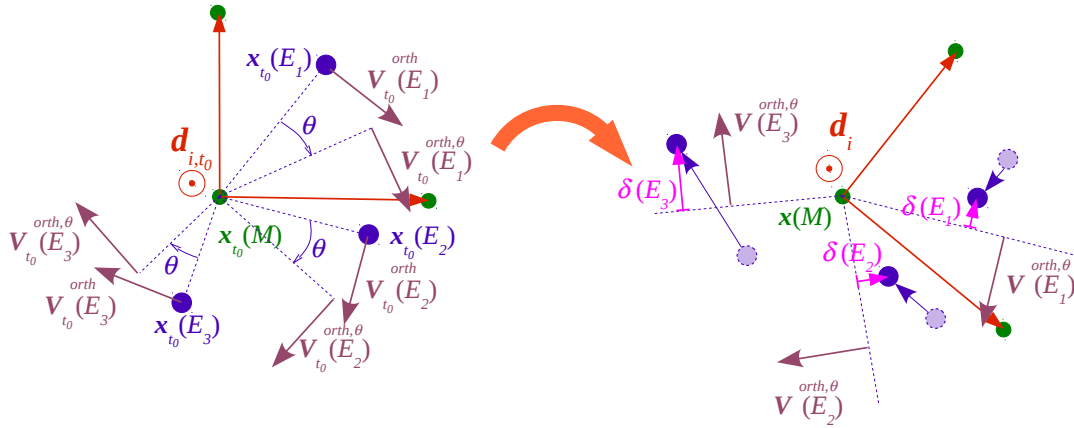


FIGURE 4.7 – Rotation moyenne d'un ensemble d'extrémités autour d'un axe d'un corps rigide mobile

Pour exprimer cette condition en moyenne sur l'ensemble des extrémités, on formule une condition globale sous la forme de la moyenne des conditions individuelles :

$$\frac{1}{N_E} \sum_{j=1}^{N_E} \left( \mathbf{x}(E_j) - \mathbf{x}(M), \mathbf{V}_j^{orth,\theta} \right) = 0. \quad (4.18)$$

Les vecteurs  $\mathbf{V}_j^{orth,\theta}$ , qui sont définis comme transportés dans la configuration actuelle du référentiel, s'expriment en fonction des directions du référentiel dans la configuration courante (voir 4.13). En introduisant l'expression de ces directions en fonction des positions des nœuds du corps rigide auquel est attaché ce référentiel, on aboutit à la formulation suivante de la condition cinématique de rotation moyenne :

$$\frac{1}{N_E} \sum_{j=1}^{N_E} \left( \mathbf{v}_{t_0,j}^{orth,\theta}, \mathbf{d}_{k,t_0} \right) \left( \mathbf{x}(E_j) - \mathbf{x}(M), \mathbf{x}(D_k) - \mathbf{x}(M) \right) = 0. \quad (4.19)$$

On peut comprendre cette condition moyenne en interprétant chacune des quantités élémentaires  $\left( \mathbf{x}(E_j) - \mathbf{x}(M), \mathbf{V}_j^{orth,\theta} \right)$  comme un déplacement orthoradial par rapport à la rotation imposée globalement (quantités notées  $\delta(E_j)$  sur la Figure 4.7). Chacune des extrémités peut avoir un écart par rapport à la rotation imposée, mais la condition impose que la moyenne de ces écarts soit nulle.

#### 4.3.4 Extension à des liaisons avec des référentiels fixes

Dans les développements qui précèdent, nous avons considéré le cas le plus complexe de liaison d'extrémités à des référentiels mobiles. Selon le type de simulation envisagée, on peut avoir besoin de fixer des liaisons avec des référentiels considérés comme seulement mobiles en translation, mais avec des directions de référence fixes, ou entièrement fixes. Ces cas particuliers conduisent à simplifier les expressions précédentes, en supprimant par exemple les opérations de transport d'une configuration à une autre.

## 4.4 Prise en compte des conditions cinématiques à l'aide de multiplicateurs de Lagrange

### 4.4.1 Expression générique des conditions cinématiques de liaison

Les différentes conditions cinématiques introduites pour modéliser l'indéformabilité des corps rigides (4.2), ou les différents types de liaison d'extrémités ou de groupes d'extrémités par rapport à un référentiel mobile (4.6,4.7,4.15 et 4.18), étant toutes exprimées à partir de produits scalaires, il est possible de les formuler sous la forme d'une liaison cinématique générique, notée  $\mathcal{L}$ , et exprimée de la manière suivante :

$$\mathcal{L}(\mathcal{N}) = \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} \alpha_i \left( \mathbf{q}(N_i^1) - \beta_i \mathbf{x}(N_i^2), \mathbf{x}(N_i^3) - \mathbf{x}(N_i^4) \right) - \mathcal{L}_{t_0}(\mathcal{N}) - \kappa = 0, \quad (4.20)$$

où :

- $\mathcal{N}$  représente l'ensemble des nœuds impliqués dans cette condition cinématique ;
- $(N_i^1, N_i^2, N_i^3, N_i^4)$  représente un ensemble de quatre nœuds, distincts ou non, pour chaque contribution élémentaire  $i$  à la liaison cinématique, en désignant par exemple un nœud extrémité de fil, un nœud directionnel de corps rigide et un nœud maître de corps rigide ;
- $\mathbf{q}(N_i^1)$  représente le vecteur cinématique que l'on souhaite contrôler au nœud  $N_i^1$ , qui correspond soit à son vecteur position, soit, le cas échéant, à l'un de ses vecteurs directeurs de section s'il s'agit d'un nœud extrémité de fibre ;
- $N_e$  représente le nombre d'extrémités auxquelles s'applique la condition cinématique ;
- $\alpha_i$  est un coefficient scalaire propre à chaque type de condition ;
- $\beta_i$  est un coefficient valant 1 lorsque la condition élémentaire s'applique à la position d'un nœud, ou 0 lorsqu'elle concerne un vecteur directeur de section ;
- $\mathcal{L}_{t_0}(\mathcal{N}) = \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} \left( \mathbf{q}_{t_0}(N_i^1) - \beta_i \mathbf{x}_{t_0}(N_i^2), \mathbf{x}_{t_0}(N_i^3) - \mathbf{x}_{t_0}(N_i^4) \right)$ , représente la valeur de la quantité cinématique contrôlée dans la configuration prise comme référence pour des conditions se rapportant à des translations d'extrémités, ou  $\mathcal{L}_{t_0}(\mathcal{N}) = 0$  pour les autres types de conditions ;
- $\kappa$  est la valeur imposée à cette condition particulière.

Cette formulation générique permet d'unifier le traitement des différentes conditions cinématiques formulées.

### 4.4.2 Introduction de multiplicateurs de Lagrange pour la prise en compte des conditions cinématiques

On considère que l'ensemble des conditions aux limites appliquées au système étudié est représenté par un nombre  $N_L$  de liaisons cinématiques élémentaires  $\mathcal{L}_l$  exprimées sous la forme (4.20). Pour garantir le respect de ces liaisons cinématiques, on associe à chacune d'entre elles un multiplicateur de Lagrange  $\lambda_l$ . Pour traiter l'ensemble des ces conditions cinématiques par la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on introduit dans la formulation variationnelle du problème (1.1) les vecteurs  $\mathbf{\Lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{N_L})$  et  $\mathbf{M} = (\mu_1, \dots, \mu_{N_L})$ , représentant respectivement l'ensemble des multiplicateurs de Lagrange et un ensemble des multiplicateurs virtuels associés, en caractérisant la solution  $(\mathbf{u}, \mathbf{\Lambda})$  du problème par le principe des travaux virtuels suivant :

$$\text{trouver } (\mathbf{u}, \mathbf{\Lambda}) \in k_{CA} \times \mathbb{R}^{N_L}, \text{ tel que } \forall (\mathbf{v}, \mathbf{M}) \in k_{CA} \times \mathbb{R}^{N_L},$$



$$w_{int}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + w_{cf}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + w_{LC}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{\Lambda}, \mathbf{M}) = 0, \quad (4.21)$$

où  $w_{int}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + w_{cf}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  représentent les contributions des efforts internes dans les fibres et des efforts des interactions de contact-frottement, et où  $w_{LC}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{\Lambda}, \mathbf{M})$  représente la contribution des efforts internes liés aux liaisons cinématiques, exprimée sous la forme :

$$w_{LC}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{\Lambda}, \mathbf{M}) = \sum_{l=1}^{N_L} \left[ \mu_l \mathcal{L}_l(N_l) + \lambda_l \frac{d\mathcal{L}_l(N_l)}{d\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \right]. \quad (4.22)$$

#### 4.4.3 Contributions au résidu et à la matrice de rigidité tangente dans le cadre d'une résolution par un algorithme de Newton

Dans le cadre de la résolution du problème non-linéaire par un algorithme de Newton, on caractérise la correction  $(\Delta \mathbf{u}^{i+1}, \Delta \mathbf{\Lambda}^{i+1})$  apportée à la solution à l'issue de l'itération  $i + 1$  par l'équation

$$\frac{dw(\mathbf{u}^i, \mathbf{v}, \mathbf{\Lambda}^i, \mathbf{M})}{d\mathbf{u}} \cdot \Delta \mathbf{u}^{i+1} + \frac{dw(\mathbf{u}^i, \mathbf{v}, \mathbf{\Lambda}^i, \mathbf{M})}{d\mathbf{\Lambda}} \cdot \Delta \mathbf{\Lambda}^{i+1} = -w(\mathbf{u}^i, \mathbf{v}, \mathbf{\Lambda}^i, \mathbf{M}). \quad (4.23)$$

La contribution issue du terme du travail virtuel des liaisons cinématiques (4.22) au résidu est calculée comme :

$$-w_{LC}(\mathbf{u}^i, \mathbf{v}, \mathbf{\Lambda}^i, \mathbf{M}) = - \sum_{l=1}^{N_L} \left[ \mu_l \mathcal{L}_l(N_l) + \lambda_l \frac{d\mathcal{L}_l(N_l)}{d\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \right], \quad (4.24)$$

tandis que les contributions à la matrice de rigidité tangente se formulent sous la forme des deux termes :

$$\begin{aligned} \frac{dw_{LC}(\mathbf{u}^i, \mathbf{v}, \mathbf{\Lambda}^i, \mathbf{M})}{d\mathbf{u}} \cdot \Delta \mathbf{u}^{i+1} &= \sum_{l=1}^{N_L} \left[ \mu_l \frac{d\mathcal{L}_l}{d\mathbf{u}} \cdot \Delta \mathbf{u}^{i+1} + \lambda_l \frac{d^2\mathcal{L}_l(N_l)}{d\mathbf{u}^2} \cdot \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{u}^{i+1} \right], \\ \frac{dw_{LC}(\mathbf{u}^i, \mathbf{v}, \mathbf{\Lambda}^i, \mathbf{M})}{d\mathbf{\Lambda}} \cdot \Delta \mathbf{\Lambda}^{i+1} &= \sum_{l=1}^{N_L} \Delta \lambda_l^{i+1} \frac{d\mathcal{L}_l(N_l)}{d\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Le calcul des termes de résidu et de rigidité tangente requiert en particulier l'explicitation des dérivées première et seconde des liaisons cinématiques :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}_l(N_l)}{d\mathbf{u}} \cdot \Delta \mathbf{u}^{i+1} &= \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} \left[ \alpha_i (\Delta \mathbf{r}^{i+1}(N_i^1) - \beta_i \Delta \mathbf{u}^{i+1}(N_i^2), \mathbf{x}(N_i^3) - \mathbf{x}(N_i^4)) \right. \\ &\quad \left. + \alpha_i (\mathbf{q}(N_i^1) - \beta_i \mathbf{x}(N_i^2), \Delta \mathbf{u}^{i+1}(N_i^3) - \Delta \mathbf{u}^{i+1}(N_i^4)) \right], \\ \frac{d^2\mathcal{L}_l(N_l)}{d\mathbf{u}^2} \cdot \delta \mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{u}^{i+1} &= \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} \left[ \alpha_i (\delta \mathbf{r}(N_i^1) - \beta_i \delta \mathbf{u}(N_i^2), \Delta \mathbf{u}^{i+1}(N_i^3) - \Delta \mathbf{u}^{i+1}(N_i^4)) \right. \\ &\quad \left. + \alpha_i (\Delta \mathbf{r}^{i+1}(N_i^1) - \beta_i \Delta \mathbf{u}^{i+1}(N_i^2), \delta \mathbf{u}(N_i^3) - \delta \mathbf{u}(N_i^4)) \right]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

où le champ  $\mathbf{r}$  représente le champ de déplacement associé au vecteur cinématique  $\mathbf{q}$ .

Les équations (4.25) et (4.26) permettent de calculer les contributions au résidu et à la rigidité tangente des termes provenant de la prise en compte des différentes liaisons cinématiques, à partir de la connaissance des paramètres déterminant les formulations génériques (4.20) de ces différentes liaisons.

## 4.5 Exemples d'application

L'apport de la formulation hiérarchique des conditions aux limites présentée dans les paragraphes précédents est illustré ici sur deux exemples : un exemple de simulation de la flexion d'un câble multitoron, et un exemple de détermination de la configuration initiale d'un tissu 3D de type interlock.

### 4.5.1 Flexion d'un câble multitoron

#### 4.5.1.1 Problématique

Lorsqu'on souhaite simuler le comportement d'une portion de câble extraite d'un câble de grande longueur, la question des conditions à appliquer aux extrémités de l'échantillon considéré devient cruciale dans le cas de câbles constitués d'un grand nombre de fils, dans la mesure où une modélisation inappropriée de ces conditions aux extrémités perturbe la solution dans le câble sur une certaine longueur (typiquement de l'ordre d'une longueur du pas d'hélice du dernier étage de toronnage). Ceci conduit à devoir considérer des longueurs d'échantillons plus importantes que les longueurs auxquelles on souhaite s'intéresser, de manière à conserver une partie exploitable entre les parties proches des extrémités, polluées par des conditions aux limites inappropriées.

De tels effets s'illustrent particulièrement dans des cas de flexion sous tension, tels que celui traité ici en exemple. Sous l'effet combiné de la flexion et de la tension, les trajectoires des composants de différents niveaux d'un câble toronné, décrites dans la configuration initiale par des géométries hélicoïdales, se déforment afin de minimiser leurs longueurs, ce qui modifie leur arrangement au sein du câble. Les déplacements relatifs induits par ces modifications de trajectoires conduisent notamment les sections planes du câble global, mais aussi des couches et torons de différents niveaux, à se gaufrir. L'application de conditions aux limites s'opposant à ces déplacements relatifs – typiquement n'autorisant pas le gaufrissement des sections des composants de différents niveaux aux extrémités du câble –, entraîne en conséquence une surestimation des contraintes à proximité des extrémités.

#### 4.5.1.2 Présentation du cas

On considère un câble multitoron constitué de 7 sous-câbles, le sous-câble central étant lui-même un câble multitoron constitué de 7 torons de 7 fils, et les sous-câbles périphériques étant constitués de torons multi-couches à 19 fils, soit 163 fils au total.

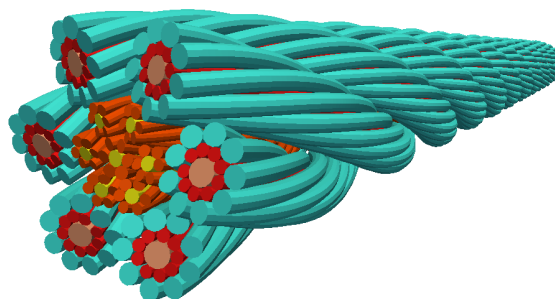


FIGURE 4.8 – Représentation du câble multi-toron modélisé

Ce câble est soumis simultanément à une tension de 1500 N, et à une flexion sur un cylindre rigide dont le rayon décroît en 10 étapes jusqu'à une valeur de 80 mm. La

prise en compte de conditions de contact entre le câble et un cylindre rigide permet de garantir une courbure constante dans le câble sous tension.

### 4.5.1.3 Résultats

Pour illustrer l'apport de la méthode de gestion hiérarchique des conditions aux limites, nous comparons pour le cas de flexion sous tension, les résultats de trois calculs :

- un calcul de référence, sur un échantillon d'une longueur de 60 mm, correspondant à environ deux fois la longueur du pas d'hélice des torons extérieur, avec des conditions aux extrémités de type encastrement (tous les déplacements des composants de différents niveaux bloqués par rapport aux deux extrémités du câble) ;
- un calcul sur un échantillon de 15 mm (quatre fois plus court que le précédent) avec les mêmes conditions aux limites de type encastrement que le cas précédent ;
- un calcul sur un échantillon court de 15 mm, avec des conditions aux extrémités déterminées de manière hiérarchique, en ayant recours à des conditions cinématiques moyennées.

Les résultats du calcul de référence sont illustrés sur la figure 4.9 qui montre une visualisation des contraintes longitudinales moyennes dans les fils sur la configuration déformée du câble et sur une coupe de cette configuration. En observant les évolutions de ces contraintes longitudinales le long de l'abscisse curviligne de chacun des fils de l'assemblage (Fig. 4.10) on relève de faibles effets de bord (élévation de la contrainte dans certains fils à proximité des extrémités), et des variations de contraintes classiques dans les cas de flexion de câble, et contenues globalement dans un intervalle allant de 0 à 400 MPa.

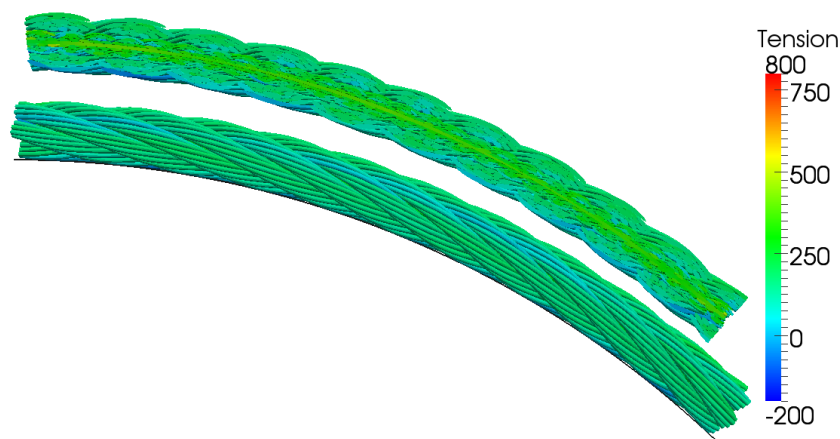


FIGURE 4.9 – Visualisation des contraintes longitudinales dans les fils du câble tendu et fléchi sur un cylindre pour un échantillon de longueur 60 mm : vue latérale (en bas) et coupe (en haut)

Les résultats du calcul similaire (même chargement et mêmes conditions aux limites) effectué sur l'échantillon de longueur réduite montrent une très nette augmentation des tensions dans les fils, les tensions dans les fils s'échelonnant dans ce cas sur un intervalle allant de -800 à 1000 MPa (Fig. 4.11). Alors que les conditions aux limites de type encastrement montrent peu d'effet sur l'échantillon de 60 mm de long, qui offre une longueur suffisante aux différents composants pour se rééquilibrer, le blocage des déplacements relatifs entre composants modifie de manière significative les répartitions de tension dans les fils sur l'échantillon de longueur réduite.

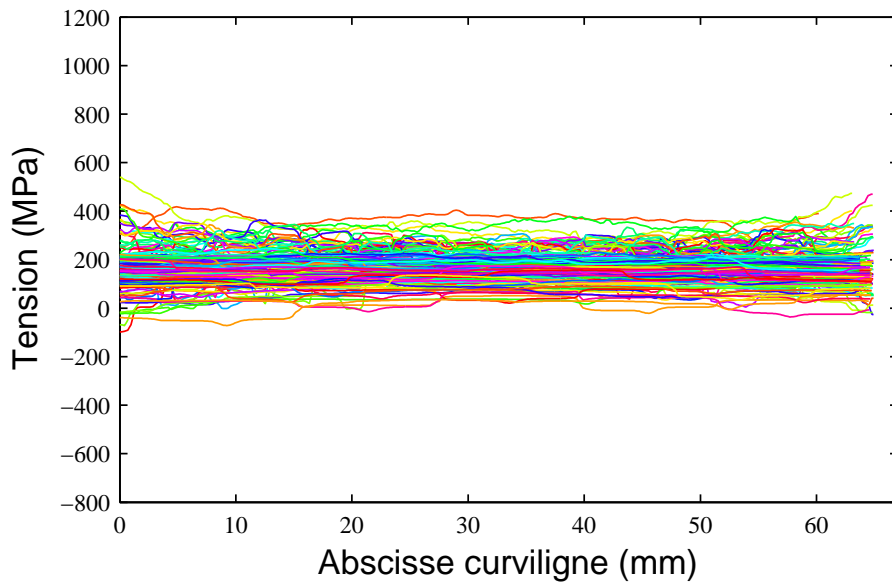
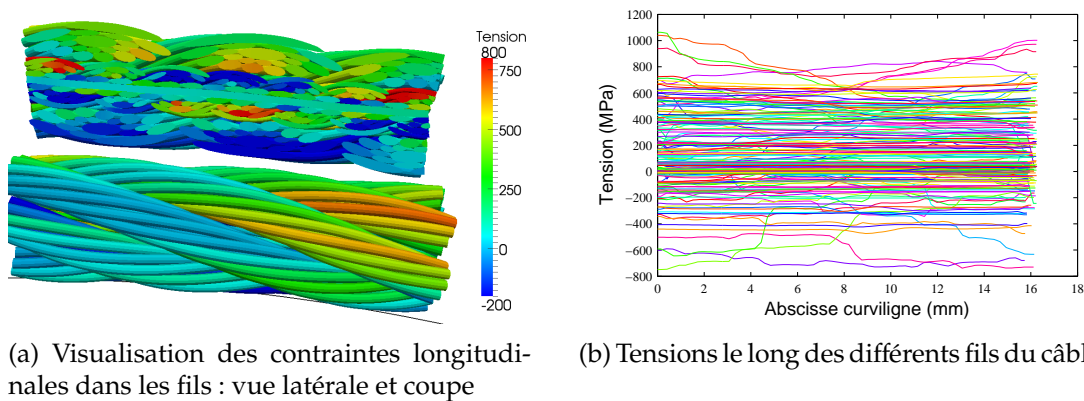


FIGURE 4.10 – Tension le long des différents fils du câble pour un câble de longueur de 60 mm



(a) Visualisation des contraintes longitudinales dans les fils : vue latérale et coupe

(b) Tensions le long des différents fils du câble

FIGURE 4.11 – Résultats du cas de flexion sur l'échantillon de longueur de 15 mm, avec conditions aux limites de type encastrement

Pour atténuer l'effet de ces conditions aux limites de type encastrement, on met en œuvre le système de gestion hiérarchique des conditions aux extrémités et le recours aux formulations de conditions cinématiques en moyenne, présentés plus haut. On répartit pour cela les composants du câble en quatre niveaux hiérarchiques : les fils sont regroupés au sein de couches, qui constituent les torons élémentaires, à partir desquels sont formés les sept sous-câbles composant le câble global. Cela conduit à considérer 52 composants répartis entre les quatre niveaux hiérarchiques, auxquels autant de corps rigides sont associés à chaque extrémité du câble (Fig. 4.12).

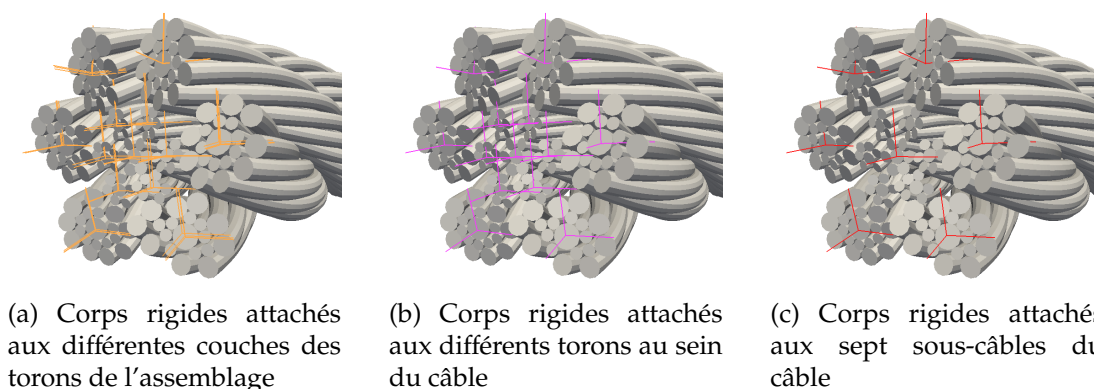
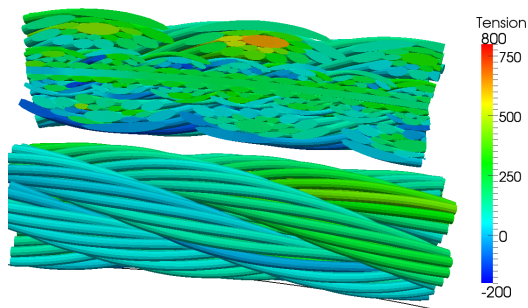


FIGURE 4.12 – Représentation des corps rigides associés aux différents niveaux hiérarchiques au sein du câble

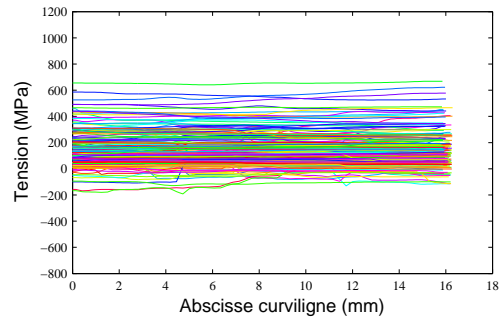
Les possibilités offertes par la gestion hiérarchique des conditions aux extrémités sont utilisées pour tenter de reproduire l'action des parties complémentaires à l'échantillon de câble simulé. Pour cela, on a choisi de bloquer les rotations des corps rigides attachés aux composants de différents niveaux. Cela a pour effet notamment d'empêcher les mécanismes de détorsion qui seraient autrement engendrés par la tension appliquée. En revanche, les déplacements des sous-composants de chaque niveau hiérarchique sont seulement bloqués en moyenne, en ajoutant un blocage en moyenne de la rotation autour de la direction longitudinale du composant parent. Ces conditions permettent une réorganisation des extrémités des composants à chaque niveau, et autorisent en particulier l'apparition de modes de gauchissement, les extrémités d'un niveau n'étant plus forcées à rester dans un même plan.

Les résultats obtenus sur l'échantillon de longueur réduite avec ces conditions aux limites hiérarchiques montrent une nette atténuation des effets de surestimation des tensions dans les fils (Fig. 4.13), les contraintes longitudinales dans les fils variant sur une plage plus réduite allant de -200 MPa à 700 MPa.

Les tensions dans les fils obtenues sur l'échantillon de longueur réduite avec les conditions aux limites hiérarchiques s'écartent encore des valeurs observées sur la partie centrale de l'échantillon de référence de 60 mm. Les conditions appliquées aux extrémités de manière hiérarchique ne permettent pas de reproduire exactement l'action de la partie complémentaire du câble omise dans la simulation. La nette atténuation des effets de surestimation des tensions aux extrémités est cependant appréciable. Ces conditions de type hiérarchiques permettent notamment de laisser libres des modes de déformation des différents composants aux extrémités, et de reproduire en particulier l'effet d'écrasement du câble sur le cylindre support de la flexion (Fig. 4.14).

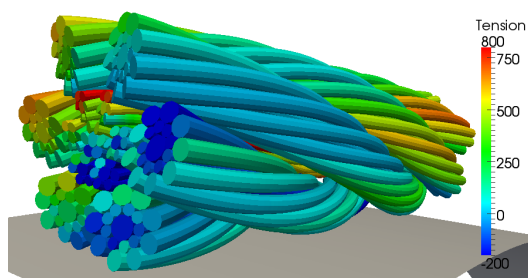


(a) Visualisation des contraintes longitudinales dans les fils : vue latérale et coupe

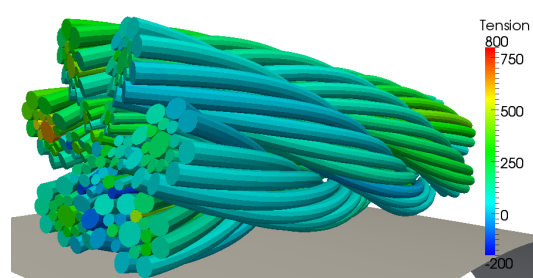


(b) Tensions le long des différents fils du câble

FIGURE 4.13 – Résultats du cas de flexion sur l'échantillon de longueur de 15 mm, avec conditions aux limites hiérarchiques



(a) Calcul avec conditions aux extrémités de type encastrement



(b) Calcul avec conditions aux extrémités hiérarchiques

FIGURE 4.14 – Comparaison des effets des conditions aux extrémités sur l'échantillon de longueur réduite

## 4.5.2 Détermination de la configuration initiale d'un tissé interlock

### 4.5.3 Problématique

Les tissés interlock sont des tissages comprenant plusieurs couches de fils de chaîne et de trame, entrelacés selon des motifs de type Jacquard. Grâce aux liaisons dans la direction de l'épaisseur obtenues en entrelaçant plusieurs couches de fils, ces tissés présentent des propriétés intéressantes de résistance au délaminage, et sont développés en particulier pour être utilisés comme préformes pour la réalisation de pièces composites.

On s'intéresse au cas de tissés interlock de carbone, réalisés à partir de mèches élémentaires constituées de plusieurs milliers de filaments de carbone. Ces mèches sont organisées en colonnes dans les directions de trame et de chaîne. La géométrie de ces tissés (trajectoires des mèches, formes de leurs sections transverses) a des répercussions importantes sur les propriétés mécaniques du composite réalisés.

Une détermination de la géométrie initiale de ces tissés à l'aide du logiciel Multifil est proposée et présentée au Chapitre 5. Le principe de la méthode est de partir d'une configuration arbitraire de départ facile à décrire, en l'occurrence une configuration dans laquelle toutes les mèches reposent dans un même plan et sont interpénétrées, et d'utiliser les interactions de contact pour séparer progressivement ces mèches jusqu'à obtenir une configuration équilibrée.

Les transformations induites par ce procédé entraînent des mouvements relatifs et des réorganisations entre composants de différents niveaux au sein de la structure, qui doivent être autorisés et contrôlés au niveau des frontières de l'échantillon modélisé. La structuration hiérarchique des liaisons aux extrémités proposée dans ce chapitre trouve ici son application. On modélise l'échantillon de tissu considéré comme un assemblage de filaments élémentaires, organisés selon les quatre niveaux hiérarchiques suivants (Fig. 4.15) :

- les filaments sont regroupés au sein de mèches ;
- un ensemble de mèches superposées dans le tissu constitue une colonne ;
- les colonnes sont regroupées selon leurs orientations pour constituer les deux nappes de chaîne et de trame ;
- l'assemblage des deux nappes forme le tissé final.

L'intérêt de cette structuration hiérarchique de l'échantillon réside dans le fait qu'elle rend possible l'imposition des seules conditions aux extrémités nécessaires à chaque niveau pour en préserver l'organisation globale, tout en autorisant des réarrangements entre ces composants élémentaires. Ainsi, pour le procédé de détermination de la configuration initiale de l'échantillon de tissé interlock, on impose par exemple, parmi d'autres, les liaisons suivantes :

- les déplacements des extrémités des filaments sont bloqués en moyenne dans les directions transverses par rapport aux extrémités des mèches pour permettre une déformation de la section transverse des mèches aux extrémités,
- les rotations des extrémités des filaments autour de l'axe des mèches sont bloquées en moyenne pour empêcher une détorsion des mèches,
- les positions des extrémités des mèches par rapport aux colonnes sont contrôlées en moyenne dans les directions transverses par rapport aux colonnes.

L'emploi de conditions moyennées définies par rapport au référentiel mobile attaché à l'extrémité du composant de niveau immédiatement supérieur permet un réarrangement des composants aux différents niveaux : filaments au sein des mèches, mèches au sein des colonnes et colonnes au sein des nappes. Ces réarrangements aux différents niveaux s'observent sur la figure 4.16 représentant l'évolution de l'assemblage au cours de différentes étapes du procédé de détermination de la configuration initiale. On relève

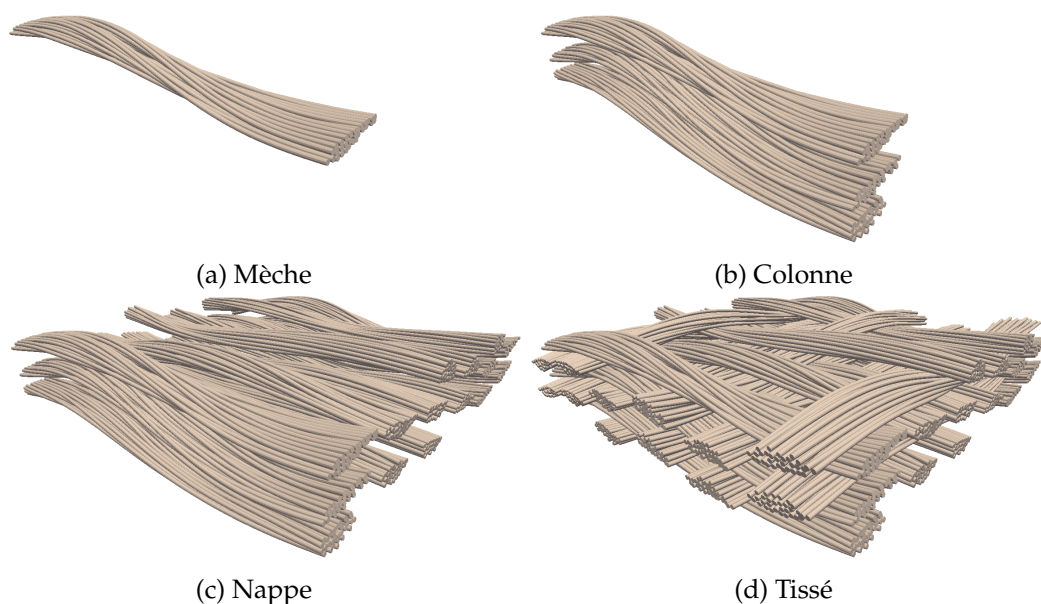


FIGURE 4.15 – Composants de différents niveaux au sein d’un tissé interlock

en particulier l’applatissage des mèches et la distorsion de certaines colonnes.

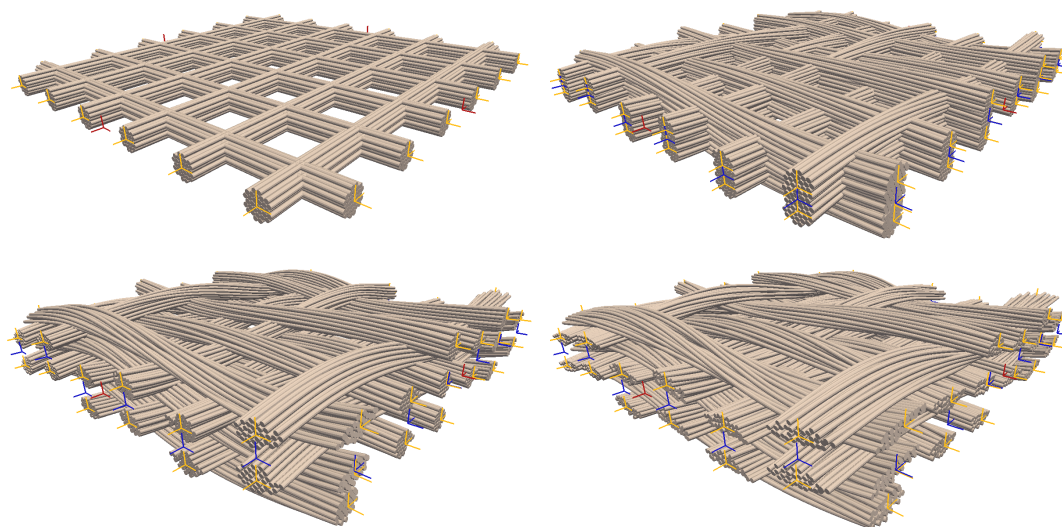


FIGURE 4.16 – Réarrangements au sein des composants de différents niveaux au cours de la détermination de la configuration initiale du tissé interlock : visualisation à différentes étapes et représentations des corps rigides attachés aux mèches (en jaune), aux colonnes (en bleu) et aux nappes (en rouge)

L’association de conditions périodiques liant les déplacements à une extrémité d’un composant aux déplacements à l’autre extrémité permet d’obtenir une configuration finale quasiment périodique, comme illustré sur la figure 4.17 qui représente la juxtaposition de l’échantillon simulé et d’une réplique translatée dans une direction. La pertinence de la structuration hiérarchique des conditions aux extrémités proposées est rendue manifeste par le fait qu’on ne distingue pratiquement aucune perturbation introduite par ces conditions à proximité des bords de l’échantillon.



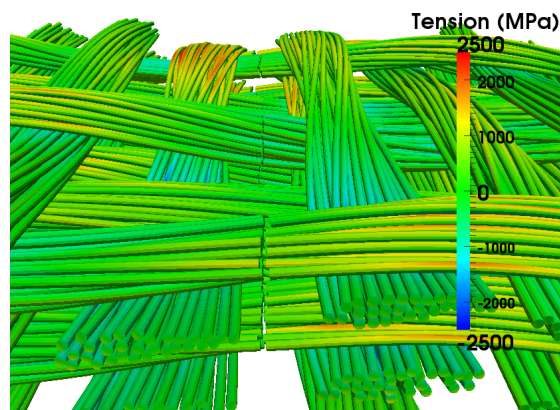


FIGURE 4.17 – Représentation de la juxtaposition de l'échantillon simulé et d'une réplique translaturée illustrant les conditions de périodicité

# Chapitre 5

## Applications

### 5.1 Introduction

#### 5.1.1 Apports de la simulation des milieux enchevêtrés

Les modèles et méthodes présentés dans les chapitres précédents ont été intégrés dans le logiciel Multifil, spécialement développé pour la simulation du comportement mécanique des milieux enchevêtrés.

Les attentes vis-à-vis de la simulation du comportement de ces milieux varient en fonction des applications visées. Ces milieux sont en général caractérisés par deux traits spécifiques : un comportement non-linéaire à l'échelle macroscopique, et une importante hétérogénéité des chargements à l'échelle des filaments élémentaires.

### 5.2 Câbles supraconducteurs

#### 5.2.1 Problématique des câbles supraconducteurs

##### 5.2.1.1 Introduction : dépendance de la conductivité électrique en fonction des déformations

Le fait que pour certains matériaux supraconducteurs, les propriétés de conductivité électrique des fils dépendent des déformations qu'ils subissent, constitue la motivation essentielle des travaux menés sur la simulation du comportement de câbles supraconducteurs. Ces travaux ont visé à mieux comprendre le comportement de câbles supraconducteurs utilisés pour réaliser le bobinage des électro-aimants utilisés pour créer le champ magnétique contenant le plasma au sein du prototype de réacteur de fusion nucléaire ITER. Les câbles utilisés pour ce bobinage sont réalisés par un assemblage complexe de fils élémentaires (une partie constituée de fils de cuivre, et l'autre de fils supraconducteurs), assemblés selon cinq niveaux de câblage successifs, sont destinés à porter un courant de l'ordre de 45 000 A, sous un champ de 15 T. La circulation de ce courant dans le champ magnétique créé par l'aimant génère des forces de Laplace importantes s'exerçant dans des directions transverses par rapport aux fils, l'ordre de grandeur de ces forces correspondant typiquement à une force linéique de 1000 N/m sur chacun des fils élémentaires d'un diamètre de l'ordre du millimètre. Ces forces transverses exercées sur le câble sont susceptibles de générer des déformations non négligeables, alors que l'alliage de niobium-étain ( $\text{Nb}_3\text{Sn}$ ) utilisé pour réaliser les fils supraconducteurs est réputé perdre sa supraconductivité pour des déformations d'élongation supérieures typiquement à 0,5 %, ou des déformations de compression

dépassant 0,8 %.

Les câbles supraconducteurs sont constitués selon une architecture complexe, déterminée par un ensemble de paramètres, et subissent différents chargements mécaniques depuis leur élaboration, jusqu'à leur utilisation répétée de manière cyclique. La simulation numérique entreprise a pour but d'aider à choisir des paramètres de conception de ces câbles qui minimisent les déformations engendrées par les chargements subis, afin de limiter les pertes de supraconductivité.

### 5.2.1.2 Structure des câbles en conduite

Les câbles supraconducteurs pour les aimants d'ITER, appelés câbles en conduite, sont organisés selon une structure complexe. Le câble global se présente comme un assemblage de six sous-câbles, appelés pétales, introduits dans une gaine en acier, et préservant en leur centre un espace destiné à la circulation de l'hélium assurant le maintien à une température cryogénique. Chaque pétale est réalisé en assemblant sur cinq niveaux successifs des brins élémentaires de cuivre et supraconducteurs. Ces brins élémentaires sont d'abord torsadés pour constituer des triplets, qui sont assemblés par 3 pour former des câbles  $3 \times 3$ , et ainsi de suite jusqu'à obtenir un pétale de structure  $5 \times 5 \times 3 \times 3$ . Chaque niveau d'assemblage est réalisé avec un pas de torsadage différent, un des buts étant d'éviter la présence au sein du câble de toute structure périodique qui peut s'avérer propice à la formation de boucle de courants. Les pétales ainsi formés sont ensuite entourés d'un ruban d'acier, et torsadés ensemble. Le câble est ensuite compacté transversalement avant d'être introduit dans la gaine, qui subit à son tour une compaction radiale. On obtient au final un assemblage de filaments organisés suivant une structure géométrique complexe, déterminée essentiellement par les pas de torsadages correspondant aux assemblages successifs et le taux de vide final laissé au sein du câble.

### 5.2.1.3 Chargements appliqués

Le câble en conduite subit deux chargements principaux susceptibles d'altérer ses propriétés conductrices. Le premier, couramment appelé chargement thermique, résulte des déformations induites par le différentiel de dilatation thermique entre la gaine et le câble à la suite du traitement thermique destiné à former l'alliage supraconducteur au sein des filaments, une fois le câble formé. En fonction des caractéristiques de la gaine (matériau utilisé et épaisseur), on estime que le différentiel de dilatation thermique entre la gaine et le câble entraîne, pour une variation de température de l'ordre de 900 K entre la température de traitement thermique de réaction, et la température cryogénique de fonctionnement (de l'ordre de 5 K), une compression axiale globale du câble de l'ordre de 0,3 à 0,5 %. Ce chargement thermique s'applique de manière permanente. Le chargement magnétique, correspondant aux forces de Laplace induites par la circulation du courant dans un champ magnétique, est appliqué de manière répétée, les aimants étant chargés de manière cyclique dans le cadre du fonctionnement normal du réacteur.

## 5.2.2 Simulation des différents chargements

### 5.2.2.1 Identification de modèles de comportement élasto-plastiques

Les chargements subis par les câbles ITER, étant supposés entraîner des déformations plastiques dans les brins, il importe d'avoir des modèles de lois élasto-plastiques assez fidèles pour représenter le comportement de ces brins. Le modèle cinématique de

poutre utilisé pour représenter ces brins n'est pas assez riche pour prendre en compte un comportement plastique réellement tridimensionnel : les déformations transverses étant considérées comme constantes dans la section de ces brins pour ce modèle, elles ne peuvent donc pas accommoder les déformations longitudinales qui s'expriment de manière quadratiques par rapport aux coordonnées de section. Pour cette raison un modèle de comportement élasto-plastique adapté, décrit en 2.3.3.3, qui ne prend en compte les effets plastiques que dans la direction longitudinale de chaque brin, est mis en œuvre. De cette manière, on cherche à reproduire les effets du comportement plastique sur les chargements en traction/compression et en flexion des brins, en négligeant les effets se manifestant par rapport aux chargements dans les directions transverses (écrasement transverse notamment).

Dans le cadre de la thèse d'Hugues Bajas (Bajas [2011]), des essais de traction ont été réalisés sur les différents types de brins constituant les câbles supraconducteurs étudiés, afin d'identifier des lois de comportement uniaxiales qui reproduisent les différents mécanismes d'érouissage (Fig. 5.1).

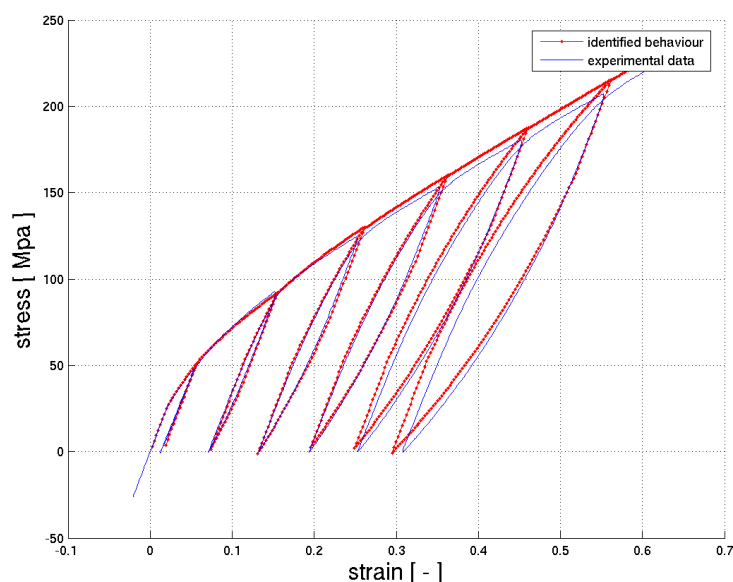
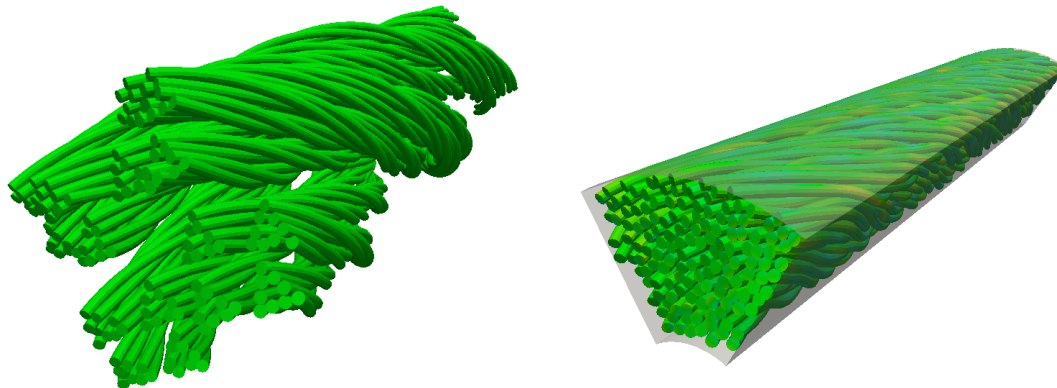


FIGURE 5.1 – Identification d'une loi de comportement uniaxiale d'un brin supraconducteur à partir de résultats d'essais de traction (thèse Bajas [2011])

### 5.2.2.2 Détermination de la configuration initiale

La configuration géométrique des câbles considérés résultant d'opérations successives de torsadage suivies par un compactage, la trajectoire des brins au sein de ces câbles ne peut être prédite a priori de manière analytique. La simulation des étapes successives de toronnage puis de l'opération de compactage pourrait être un moyen de déterminer la configuration initiale des câbles supraconducteurs étudiés. La complexité et le coût de calcul que nécessiterait une telle démarche ne la rendent pas envisageable. Une approche alternative a été choisie, en partant d'une configuration géométrique arbitraire dans laquelle la trajectoire de chaque brin est décrite comme une superposition d'hélices (Fig. 5.2a), les pas des hélices de différents niveaux correspondant aux pas de torsadage appliqués aux différentes étapes de toronnage, et en simulant une compaction de cette configuration arbitraire à l'aide d'obstacles rigides mobiles, jusqu'à obtenir un

assemblage correspondant à la forme choisie (cylindrique ou en pétale) et au taux de vide désiré (Fig. 5.2b).



(a) Configuration arbitraire de départ : trajectoires représentées par des superposition d'hélices

(b) Configuration initiale déterminée après compactage de la configuration de départ par des obstacles rigides

FIGURE 5.2 – Détermination de la configuration initiale d'un câble supraconducteur à 144 brins ( $3 \times 3 \times 4 \times 4$ )

### 5.2.2.3 Simulation des chargements successifs

#### 5.2.2.3.1 Chargement thermique

Après sa mise en forme initiale, le câble est soumis à un traitement thermique destiné à former l'alliage supraconducteur au sein des brins, qui a pour effet d'annuler les contraintes résiduelles liées à la mise en forme initiale. Cette phase de recuit limite l'influence de la méthode proposée pour la détermination de la configuration initiale à la seule description de la trajectoire des brins, les contraintes résiduelles induites par la mise en forme étant éliminées par ce traitement.

Si toutes les contraintes sont considérées comme annulées par ce traitement thermique, la mise en froid qui suit ce traitement, jusqu'à une température cryogénique de l'ordre de 5 K, conduit à une mise en compression axiale du câble du fait du différentiel de dilatation thermique existant entre la gaine d'acier et le câble. Des mesures de contraintes résiduelles au niveau de la gaine montrent que celle-ci se trouve dans un état de traction axiale à l'issue du refroidissement, équilibrant un état de compression axiale au niveau du câble. Cette compression axiale au niveau du câble est estimée de l'ordre de 0,4 %.

La simulation de cette compression axiale induite par la mise en froid suivant le traitement thermique est réalisée à partir de la configuration initiale déterminée à l'issue de la mise en forme, en ayant annulé les contraintes résiduelles, et en appliquant de manière incrémentale un déplacement dans la direction axiale du câble à l'ensemble des extrémités de brins à une extrémité de l'échantillon, en maintenant bloqués les déplacements axiaux à l'autre extrémité, tout en conservant un contact non frottant avec les obstacles rigides représentant l'enveloppe rigide du câble.

#### 5.2.2.3.2 Chargement magnétique

Lors des cycles de fonctionnement des aimants, la circulation du courant dans les brins du câble sous champ magnétique génère une force magnétique de Laplace qui s'exerce transversalement par rapport au câble. En moyenne, chaque brin porte un

courant d'environ 100 ampères sous un champ magnétique de l'ordre de 10 teslas, ce qui engendre un effort linéique transverse d'environ 1000 N/m au niveau de chaque brin individuel (d'un diamètre de l'ordre de 0,8 mm). La simulation de ce chargement magnétique est réalisée en appliquant une force linéique transverse à chacun des brins, augmentée de manière incrémentale.

### 5.2.3 Analyse des résultats

#### 5.2.3.1 Cartes de déformations longitudinales et histogrammes de distribution

Les résultats qui intéressent les concepteurs de ces câbles supraconducteurs sont essentiellement les niveaux de déformations engendrés par les chargements appliqués, qui déterminent la conductivité locale du matériau supraconducteur. Les cartes de déformation longitudinales dans les brins (Fig. 5.3) montrent une grande hétérogénéité de ces déformations.

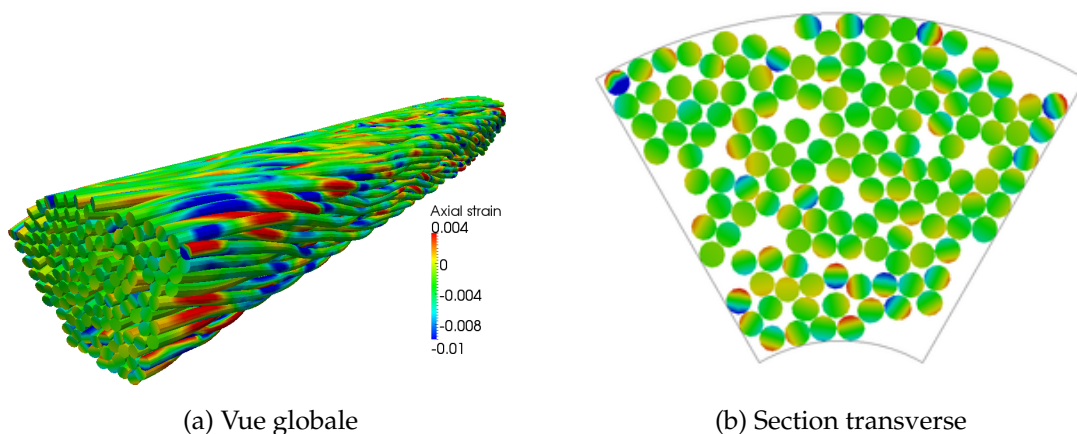


FIGURE 5.3 – Cartes de déformations longitudinales dans les brins du câble, à l'issue de l'application des chargements thermique et magnétique

La représentation d'histogrammes de distribution de ces déformations dans le volume du câble permet une analyse des mécanismes induits par les chargements appliqués. La figure 5.4 représente les distributions de déformations longitudinales, pour un échantillon donné caractérisé par un taux de vide de 32 %, après des chargements thermiques représentés par des compressions axiales différentes allant de -0,4 % à -0,8 % (courbes en pointillés), et après le chargement magnétique suivant ces chargements thermiques (courbes continues).

#### 5.2.3.2 Analyse de mécanismes

Le faible écart entre les distributions avant et après le chargement thermique illustre le fait que les déformations sont induites pour une large part par le chargement thermique initial. Mais alors que ce chargement thermique est représenté dans la simulation par une compression axiale au niveau global du câble, les courbes montrent que les déformations longitudinales induites dans la section des brins s'exercent à la fois dans le sens de l'élongation et de la compression, ce qui témoigne d'une sollicitation de ces brins en flexion. Ces déformations longitudinales dans les brins restent en moyenne négatives, mais elles s'étendent sur une large plage d'amplitude du fait des flexions locales

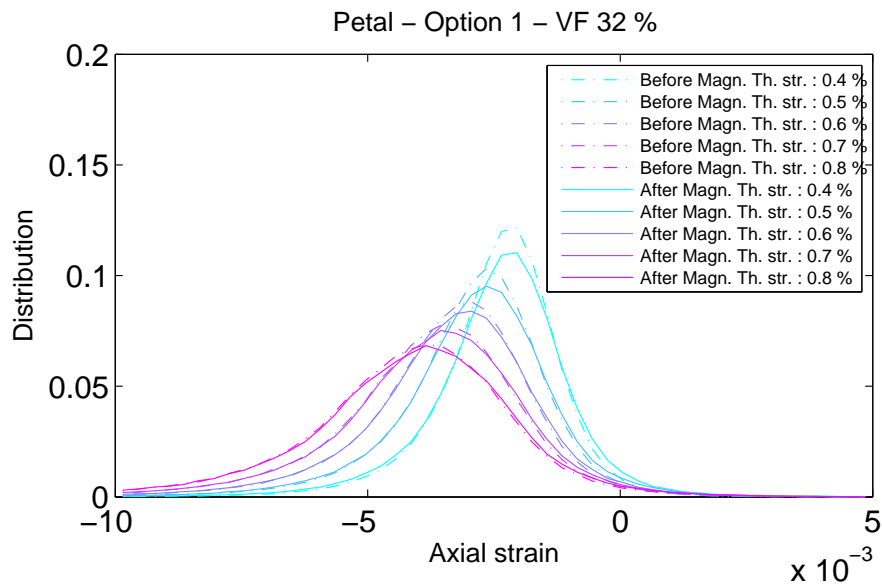


FIGURE 5.4 – Vue globale

des brins, et une part de ces déformations, correspondant aux queues de distribution, dépasse les valeurs limites au-delà desquelles la conductivité électrique est dégradée.

À l'intérieur du spectre des déformations longitudinales relevées dans le volume des brins, les déformations en élongation sont essentiellement induites par les flexions locales des brins, alors que les déformations en compression peuvent résulter à la fois de ces flexions et de la mise en compression axiale globale liée au chargement thermique. Ces deux mécanismes élémentaires coexistent : les brins, initialement courbés, ont tendance à fléchir localement quand on comprime le câble axialement, mais les amplitudes de ces flexions sont limitées par l'espace disponible localement pour la déflexion, et la déformation en compression axiale devient le seul mode de déformation possible quand la flexion est bloquée.

L'espace disponible pour la flexion des brins, induite soit par la compression axiale du chargement thermique, soit par le chargement magnétique transverse, dépend en particulier du taux de vide à l'intérieur du câble –typiquement de l'ordre de 30 %–, et de l'amplitude des pas d'hélice des différents étages de torsadage : plus les angles de croisement entre les brins sont importants, c'est-à-dire plus les pas d'hélice de torsadage sont courts, et plus les déflexions des brins seront limitées.

### 5.2.3.3 Étude de l'influence des paramètres de conception et de chargement

L'intérêt de l'outil de simulation proposé est de permettre d'étudier l'influence de la variation des paramètres de conception du câble ou de chargement, sur les déformations critiques en termes de conductivité électrique. Une telle étude a été menée, en considérant trois options de conception différentes sur la géométrie des câbles, correspondant à trois jeux de pas de torsadages pour les différents étages de toronnages, en faisant varier le taux de vide à l'issue de la compaction du câble, et le taux de compression axiale représentant le chargement thermique. La figure 5.5 représente par exemple les cartes de déformations à l'issue du chargement total, pour les trois options de conceptions, à un même taux de vide, et pour le même chargement thermique.

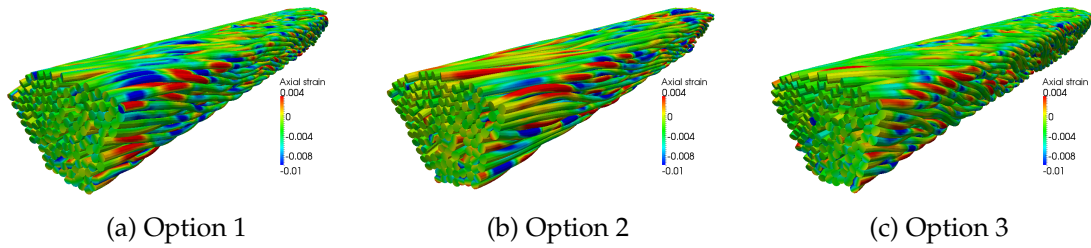
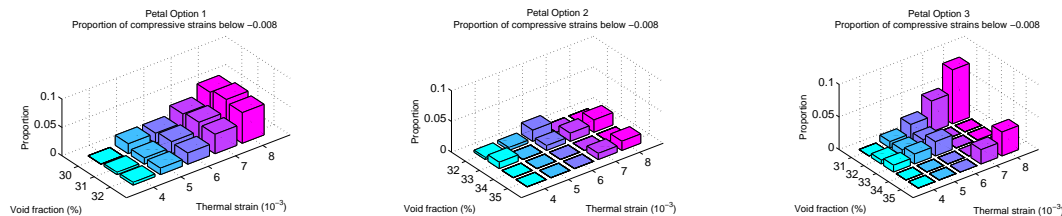


FIGURE 5.5 – Cartes de déformations longitudinales dans les brins du câble, à l’issue de l’application des chargements thermique et magnétique, pour trois options de design

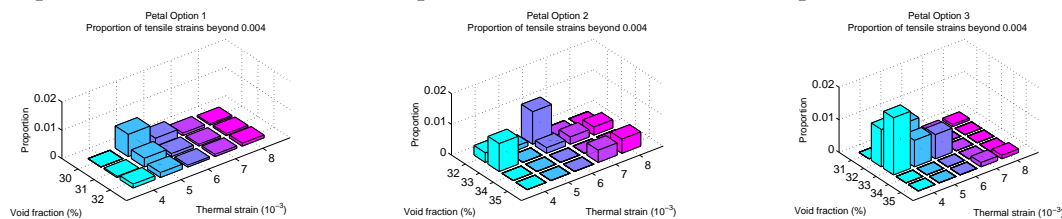
Pour analyser de manière synthétique les résultats, les parts des déformations longitudinales excédant les valeurs limites garantissant une bonne conductivité électrique, sont représentées sur la figure 5.6, en fonction de différents taux de vide et différents chargements thermiques.



(a) Option 1, déformations de compression

(b) Option 2, déformations de compression

(c) Option 3, déformations de compression



(d) Option 1, déformations d’élargissement

(e) Option 2, déformations d’élargissement

(f) Option 3, déformations d’élargissement

FIGURE 5.6 – Proportions des déformations longitudinales critiques, de compression en-dessous de  $-0.008\%$  (a,b,c) et de traction au-dessus de  $0.004\%$  (e,f,g), pour différentes options de conceptions, différents taux de vide et différentes compressions axiales

## 5.2.4 Bilan

Les développements réalisés à partir du logiciel Multifil sur la simulation du comportement des câbles supraconducteurs ont permis d’apporter une compréhension nouvelle des phénomènes responsables des détériorations de conductivité électrique constatées sur ces câbles. Alors que les approches antérieures cherchaient à déterminer l’effet des chargements mécaniques sur les propriétés électriques à partir d’estimations de quantités moyennées dans la section des câbles, les études menées sur le sujet dans le cadre de contrats de recherche, et notamment dans le cadre de la thèse d’Hugues Bajas (Bajas [2011]), ont permis de mettre en évidence les aspects hétérogènes et localisés des déformations au niveau des brins, en apportant une compréhension des mécanismes locaux de compression et de flexion, et en permettant de quantifier l’influence



des différents paramètres de conception et de chargements. Ces travaux ont donné lieu à des publications (Bajas et al. [2010]; Torre et al. [2011]; Bajas et al. [2012b,a]; Torre et al. [2013]), et ont été à la base du montage du projet ANR Cocoscope (2013–2017), poursuivant l’analyse du comportement mécanique des câbles supraconducteurs, en s’intéressant en particulier au comportement cyclique, pour l’optimisation de leurs performances électriques (Manil et al. [2017]). De nouveaux travaux ont repris récemment en vue de mieux cerner les effets de dégradation cyclique sur ces câbles (Riccioli et al. [2019, 2020, 2021]).

## **5.3 Structures textiles**

### **5.3.1 Introduction**

Les approches proposées pour la simulation des milieux enchevêtrés peuvent répondre à des besoins de caractérisation de matériaux textiles utilisés dans certaines applications industrielles. Même si de manière analogue aux câbles métalliques évoqués précédemment, ces matériaux sont constitués d’assemblages de filaments élémentaires, ils se distinguent de ces câbles métalliques par quelques caractéristiques propres.

La première caractéristique est liée à la difficulté de définir précisément a priori leur structure géométrique, en décrivant les trajectoires de leurs composants au sein de la configuration initiale du matériau textile considéré. Ces matériaux étant constitués à partir de filaments élémentaires assemblés au moyen de procédés successifs tels que le torsadage, le tressage ou le tissage, les trajectoires des filaments individuels résultent des transformations des arrangements géométriques opérées par ces différents procédés. Pour pallier cette difficulté, une méthode de détermination de la configuration initiale à partir de la définition des motifs des procédés d’assemblage est proposée.

Le nombre en général très important de filaments constituant les échantillons de matériaux textiles considérés est une seconde caractéristique qui distingue ces matériaux des câbles métalliques. Le nombre de filaments impliqués dans la plupart des échantillons considérés se compte au minimum en milliers, alors que les coûts de calcul liés à la méthode de simulation proposée, qui s’appuie sur un schéma de résolution implicite, limitent le nombre de composants élémentaires qu’on peut prendre en compte à un maximum de l’ordre du millier. Dans la plupart des cas, il n’est donc pas possible de prendre en compte l’ensemble des filaments élémentaires, ce qui conduit à considérer comme composant de base du modèle un ensemble de filaments réels, correspondant soit à une structure réelle telle qu’un fil élémentaire constitué de filaments torsadés, soit à une structure fictive représentant arbitrairement un ensemble de filaments. Ce composant élémentaire étant représenté dans l’approche proposée par un modèle de poutre, nous proposerons une première approche simplifiée pour représenter les propriétés de ce modèle équivalent de macro-fibre.

### **5.3.2 Détermination de la configuration initiale à partir de la connaissance du motif d’assemblage**

Les structures tressées et tissées auxquelles nous nous intéressons ici, sont élaborées à partir de constituants élémentaires qui peuvent être soit de simples filaments, soit des assemblages de filaments sous forme de mèches ou de torons, qui sont ensuite entrelacés suivant des motifs prédéfinis. La détermination de la configuration géométrique initiale de ces structures constitue un enjeu majeur pour prédire leurs propriétés mécaniques.

Pour déterminer la configuration initiale de ces structures tressées ou tissées, nous proposons une approche alternative reposant principalement sur la connaissance du motif d'assemblage, appelé armure, qui définit quel composant doit passer au-dessus ou en-dessous de quel autre composant en tout endroit de la structure. L'idée consiste à partir d'une configuration arbitraire pouvant être facilement définie, présentant d'importantes interpénétrations entre composants élémentaires, et d'utiliser les interactions de contact gérées par le modèle, pour séparer progressivement ces composants au niveau des interpénétrations, jusqu'à respecter le motif d'armure choisi pour le tissage ou le tressage. En partant d'une configuration arbitraire comportant des interpénétrations, à partir de la définition du module d'armure, il est possible de déterminer, au niveau de chaque interpénétration entre deux filaments élémentaires, lequel des deux filaments doit se trouver au-dessus de l'autre dans la configuration initiale. Pour séparer progressivement les composants élémentaires dans la bonne direction au moyen des interactions de contact jusqu'à obtenir une configuration initiale correspondant à l'armure choisie, la démarche proposée comporte deux éléments principaux : la réorientation de la direction normale de contact en fonction du motif d'armure, et la réduction progressive de l'interpénétration de contact.

### 5.3.2.1 Réorientation de la direction normale de contact en fonction du motif d'armure

La méthode de détermination des contacts présentée au chapitre 3 construit au sein de la configuration arbitraire de départ de la structure considérée un ensemble d'éléments de contact constitués de paires de particules matérielles candidates au contact, auxquels sont associées des directions normales de contact, déterminées par des constructions géométriques à partir des positions des centres des sections portant les particules de l'élément de contact. Pour un élément de contact créé entre deux sections de filaments dont les centres sont notés  $x_1$  et  $x_2$ , la direction normale de contact associée, notée  $N_{12}$ , est construite et orientée de manière à ce que les réactions normales de contact générées par le modèle de contact réduisent l'interpénétration  $g_N$  entre les fibres en augmentant la distance entre les deux centres de section, comme illustré sur la figure 5.7. L'orientation déterminée par le sens de la normale  $N_{12}$  ne correspond pas forcément à l'ordre de superposition entre les deux filaments défini par le motif d'armure. Pour que les réactions normales résultant du modèle de contact séparent les filaments dans le sens prévu par le motif d'armure, il est nécessaire de considérer une direction normale de contact adaptée, notée  $N_{12}^{separ}$ , correspondant soit à la direction  $N_{12}$ , soit à son opposée, en fonction de l'ordre de superposition local. Cette réorientation de la normale peut conduire à considérer des pénétrations importantes, notées  $g_N^{separ}$ , d'un ordre de grandeur correspondant à plusieurs rayons de filaments, destinées à faire passer certains filaments par dessus d'autres filaments situés initialement au-dessus. La prise en compte de ces pénétrations initiales d'amplitudes importantes par rapport aux rayons des filaments nécessite un traitement particulier de réduction progressive de la pénétration.

### 5.3.2.2 Réduction progressive de la pénétration

Chercher à annuler en un seul incrément de chargement les fortes pénétrations liées à la méthode proposée de séparation des filaments au sein d'une configuration arbitraire induit des perturbations importantes qui entraînent une divergence des algorithmes non-linéaires mis en œuvre. Pour stabiliser la recherche d'une configuration

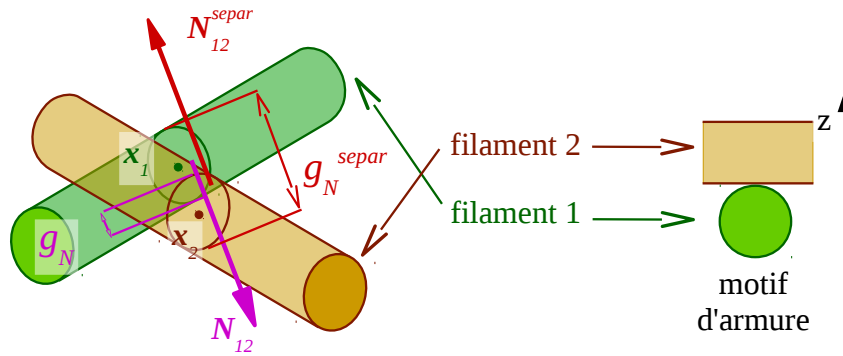


FIGURE 5.7 – Réorientation de la direction normale de contact au niveau du croisement entre deux filaments en fonction du motif d'armure

initiale équilibrée, on propose de réduire progressivement les pénétrations d'une certaine quantité à chaque incrément du calcul. On se fixe une réduction maximale de la pénétration pour chaque pas de calcul, notée  $\Delta g_{red}$  et prise égale à un coefficient  $\alpha$  multiplié par le rayon des filaments  $R$

$$\Delta g_{red} = \alpha R. \quad (5.1)$$

Afin de réduire progressivement les pénétrations importantes, on propose de limiter la pénétration prise en compte pour le calcul des réactions normales par le modèle de contact, à cette valeur  $\Delta g_{red}$ . Si on note  $g_N$  la pénétration mesurée actualisée à chaque itération de l'algorithme non-linéaire, on prend en compte pour le modèle de contact pénalisé, et pour cette phase de réduction progressive, une pénétration adaptée, notée  $g_N^*$  et calculée comme :

$$g_N^* = \begin{cases} g_N & \text{si } \|g_N\| \leq \alpha R ; \\ \alpha R & \text{si } \|g_N\| > \alpha R. \end{cases} \quad (5.2)$$

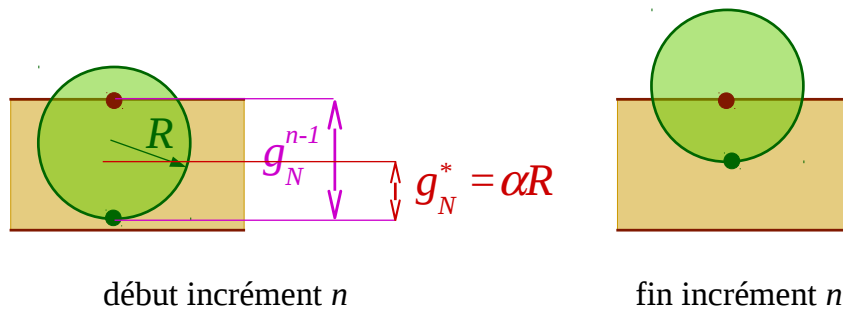


FIGURE 5.8 – Réduction progressive de la pénétration

### 5.3.3 Notion de macro-filament

Les structures textiles sont en général composées d'un grand nombre de filaments élémentaires assemblés sur plusieurs niveaux. Les coûts de calculs liés à l'utilisation d'un solveur implicite interdisent dans la plupart des cas de modéliser l'ensemble des filaments élémentaires constituant la structure étudiée. Pour prendre en compte un nombre de composants élémentaires acceptable d'un point de vue temps de calcul,

on est donc conduit à construire un modèle équivalent de macro-filament, capable de reproduire le comportement d'un ensemble de filaments élémentaires.

Dans les applications traitées jusqu'à présent, on a utilisé le modèle de poutre à cinématique développée au premier ordre, et à neuf degrés de liberté par section, pour représenter ces macro-filaments, en cherchant à adapter les propriétés mécaniques du modèle. Pour cela, dans une première approximation, en négligeant les frottements entre filaments, on peut considérer que la principale différence entre un paquet de filaments droits et parallèles, caractérisé par une aire de section donnée de matériau, et une poutre pleine homogène constituée du même matériau et présentant la même aire de section, réside dans les rigidités de torsion et de flexion, qui font intervenir les moments d'inertie des poutres considérées.

Si on suppose que le macro-filament équivalent est de section circulaire, et qu'il est constitué d'un nombre  $N_f$  de filaments de section circulaire de rayon  $R_f$ , pour obtenir une section équivalente, le rayon  $R_{MF}$  du macro-filament doit être tel que :

$$R_{MF} = \sqrt{N_f} R_f.$$

Le rapport entre le moment d'inertie du macro-filament ( $I_{MF} = \frac{\pi}{4} R_{MF}^4 = \frac{\pi}{4} N_f^2 R_f^4$ ) et celui du filament, ( $I_f = \frac{\pi}{4} R_f^4$ ) s'exprime donc :

$$I_{MF} = N_f^2 I_f.$$

En faisant l'hypothèse que les filaments sont indépendants au sein du paquet constituant le macro-filament, on peut estimer les rigidités en flexion et en torsion du macro-filament équivalent à une valeur de  $N_f$  fois les rigidités en flexion et en torsion des filaments. Le rapport entre les moments d'inertie du macro-filament constitué d'un matériau homogène et ceux d'un filament étant de  $N_f^2$ , on adapte les rigidités de flexion et de torsion du macro-filament équivalent en considérant un moment d'inertie modifié noté  $I_{MF}^*$ , calculé comme :

$$I_{MF}^* = \frac{I_{MF}}{N_f}.$$

Cette adaptation simple, consistant à diviser le moment d'inertie par le nombre de filaments constituant le macro-filament, fournit une première approximation des rigidités en flexion et en torsion du modèle de macro-filament équivalent. Cette adaptation permet de rendre compte de la souplesse des paquets de filaments en flexion et en torsion, mais elle ne permet pas de prendre en compte leur déformabilité transverse, ni de possibles effets non-linéaires ou dissipatifs liés aux frottements entre filaments.

### 5.3.4 Structures tressées

#### 5.3.4.1 Câbles synthétiques tressés pour la manutention

##### 5.3.4.1.1 Introduction

Les câbles synthétiques présentent un ratio résistance / poids nettement supérieur à celui des câbles en acier, qui les rend attractifs pour des applications de manutention sur des hauteurs telles que le poids du câble est du même ordre de grandeur que celui de la charge à porter. Pour une section de câble équivalente, et sur de très grandes longueurs, utiliser un câble synthétique à la place d'un câble en acier peut permettre de multiplier par un facteur 10 la charge utile, pour un effort maximal équivalent au niveau

des treuils actionneurs. L'exploitation off-shore en grande profondeur (au-delà de 2000 m) constitue un domaine en émergence de l'application des câbles synthétiques.

Une des constructions utilisées pour ces câbles synthétiques est celle du tressage, qui présente notamment l'intérêt de fournir des structures équilibrées, non sujettes à la détorsion. S'ils présentent une bonne résistance nominale, ces câbles tressés s'endommagent lors de leurs passages sur les poulies des treuils. Lors de la pose d'équipements en mer, les mécanismes de compensation de la houle peuvent conduire à des passages répétés de la même portion de câble sur la poulie, induisant un endommagement sur la longueur concernée. La détermination de leur durée de vie sous chargement cyclique de flexion sur poulie et la compréhension des mécanismes internes d'endommagement sous ce type de chargement constituent des enjeux majeurs pour fiabiliser l'usage de ces câbles.

#### 5.3.4.1.2 Objectifs de la simulation

Les travaux sur les câbles synthétiques tressés ont été effectués en grande partie dans le cadre de la thèse de Thanh Do Vu (Vu [2014]), effectuée dans le cadre d'un partenariat avec l'IFREMER et dans le cadre du programme CITEPH (Concertation pour l'Innovation Technologique dans l'Exploration Production des Hydrocarbures). Les câbles étudiés dans ce cadre étaient des tresses réalisées à partir de filaments polymères (Figure 5.9). Comme dans la plupart des structures textiles, la configuration géométrique initiale de la tresse, déterminée par les trajectoires des composants de différents niveaux, n'est pas connue a priori. La première étape de la simulation consiste donc à mettre en œuvre le procédé de séparation progressive des constituants en fonction du motif de tressage présenté plus haut, pour déterminer cette configuration initiale. Un test de traction est ensuite simulé afin notamment de valider le modèle par rapport aux résultats d'essais. Le câble tressé constitué est ensuite fléchi sur une poulie et des cycles de passage sur cette poulie sont simulés, afin de déterminer l'évolution des contraintes au sein de cet assemblage au cours de ce chargement.

#### 5.3.4.1.3 Détermination de la configuration initiale

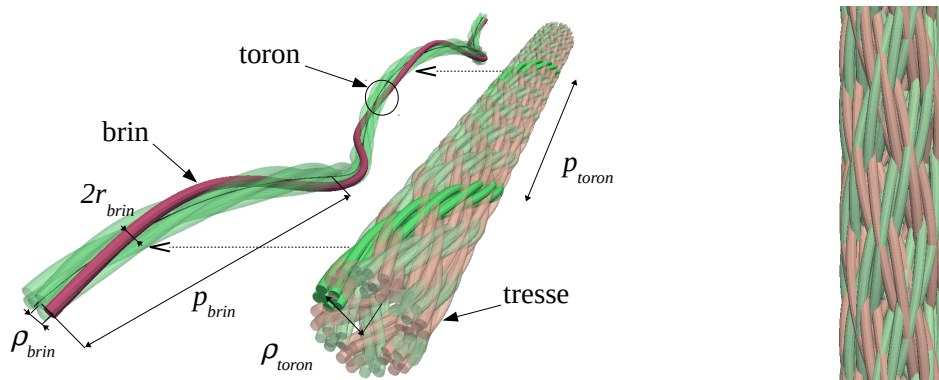
Les câbles tressés synthétiques considérés, tels que celui représenté sur la Figure 5.9, sont typiquement constitués de 12 torons, chaque toron étant composé de 7 brins torsadés entre eux, et chaque brin comprenant plusieurs milliers de filaments. Les simulations ont été faites en considérant le brin comme composant élémentaire, c'est-à-dire en considérant une structure constituée de 84 macro-filaments.



FIGURE 5.9 – Vue d'un câble synthétique tressé

La première tâche de la simulation proposée vise à déterminer la configuration initiale de la tresse, à partir du motif de tressage, en partant d'une configuration arbitraire de départ qui soit facilement définissable. Pour tenir compte de la double révolution correspondant au torsadage des brins dans les torons, combiné à l'enroulement des torons autour de la tresse, on part d'une configuration arbitraire au sein de laquelle la

trajectoire de chaque brin est définie par une double hélice (cf. Fig. 5.10a). Telle que définie à partir de ces trajectoires en double hélices, la configuration de départ présente des interpénétrations importantes au niveau des croisements entre les torons (Fig. 5.10b).



(a) Paramètres géométriques déterminant les doubles hélices des trajectoires des brins au sein de la configuration arbitraire de départ

(b) Détail de la configuration arbitraire de départ montrant les interpénétrations initiales entre les brins

FIGURE 5.10 – Configuration arbitraire de départ de la tresse

La méthode de séparation des macrofilaments par réduction progressive des pénétrations est mise en œuvre pour déterminer la configuration initiale de la tresse. La représentation progressive de certaines des étapes intermédiaires de cette phase de simulation (Fig. 5.11) montre le réarrangement progressif des macrofilaments, jusqu'à obtenir une configuration équilibrée mécaniquement, qui respecte l'ordre de superposition entre les torons défini par le motif de tressage choisi pour cette structure.

Les paramètres géométriques déterminant la configuration arbitraire de départ sont ajustés de manière à obtenir les bonnes valeurs pour le pas de périodicité et le diamètre de la tresse, qui peuvent être mesurés expérimentalement. En fixant le rayon des brins en fonction du nombre de filaments contenus dans chaque brin, il reste à déterminer les paramètres définissant les doubles hélices support des brins, à savoir le rayon d'enroulement et le pas correspondant aux deux niveaux d'hélice. Ces paramètres s'ajustent assez facilement, jusqu'à obtenir une configuration initiale de la tresse correspondant aux dimensions mesurées. Une comparaison d'une section de la configuration initiale de la tresse déterminée par la simulation et d'une coupe obtenue par tomographie (Fig. 5.12) fournit une première validation qualitative de la démarche proposée.

#### 5.3.4.1.4 Validation sur le comportement en traction

Après la détermination de la configuration initiale de la tresse, un test de traction est simulé en vue de comparer la courbe force-allongement obtenue avec les courbes provenant des essais (Fig. 5.13). En fixant la raideur axiale des brins à partir de mesures d'essais d'identification sur ces composants élémentaires, une bonne corrélation est obtenue entre les résultats expérimentaux et de simulation en ce qui concerne la rigidité de la tresse dans la partie linéaire de son comportement suivant la mise en place initiale (Fig. 5.13a). L'observation des états de contraintes dans les brins à l'issue de l'essai de traction (Fig. 5.13b) montre une grande hétérogénéité de la distribution des tensions dans les brins. Une étude de sensibilité des résultats par rapport à la valeur du coefficient de frottement considéré indique que cette hétérogénéité est liée au frottement, induite

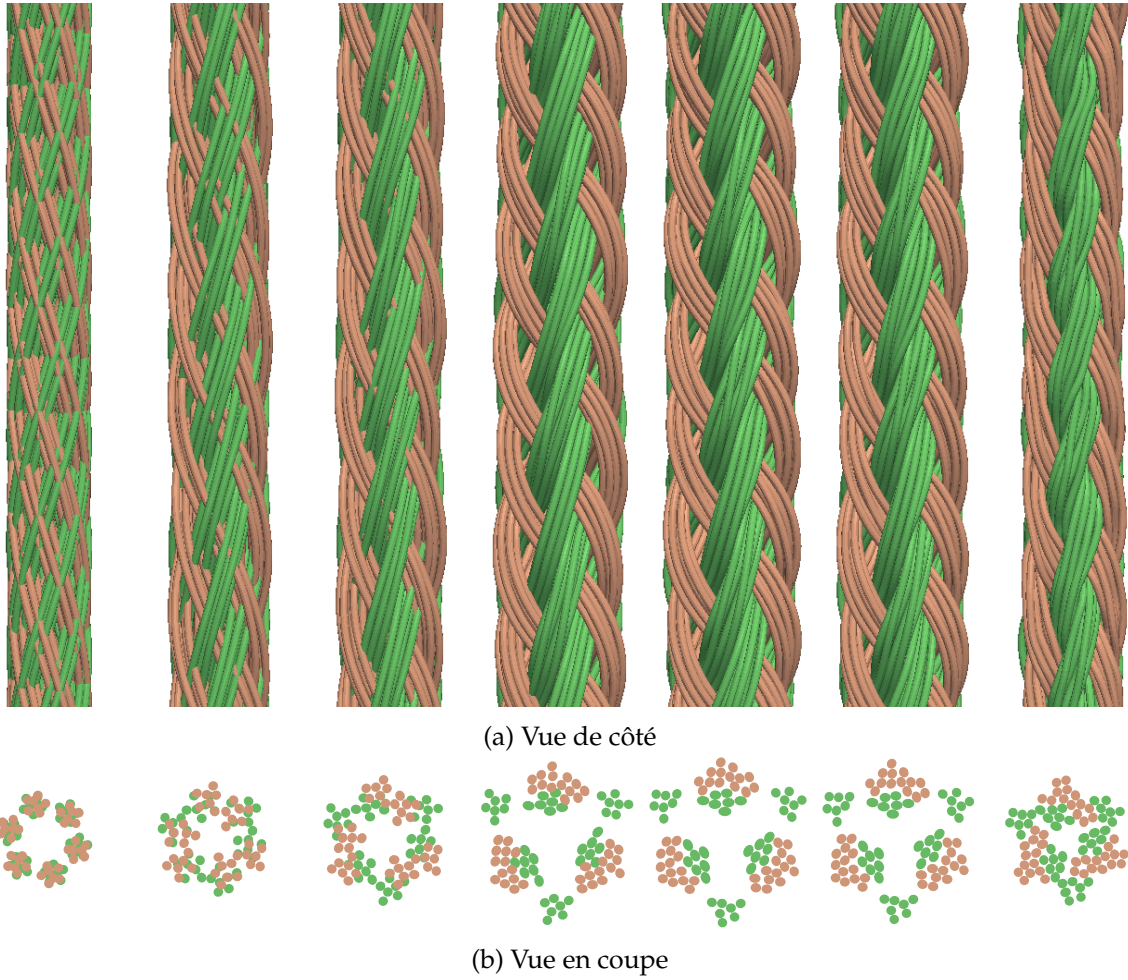


FIGURE 5.11 – Étapes intermédiaires au cours du processus de détermination de la configuration initiale de la tresse

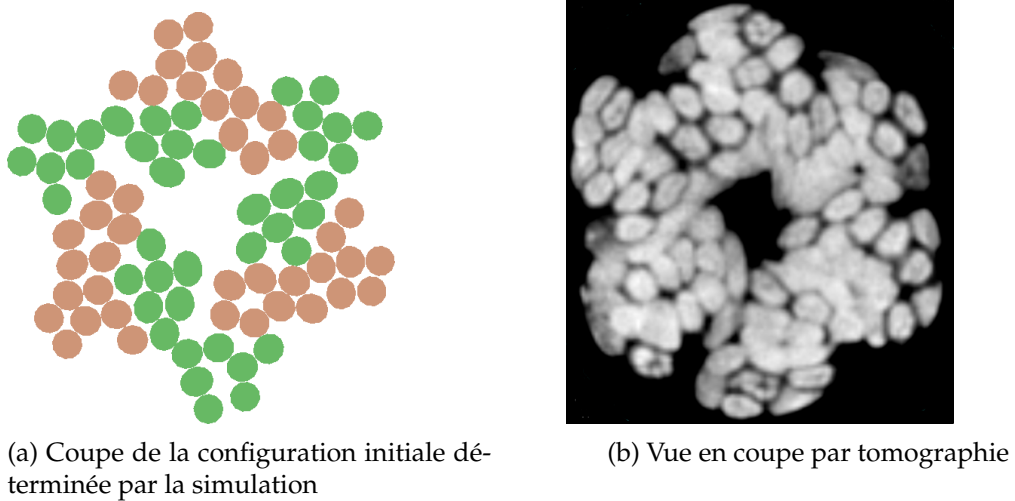
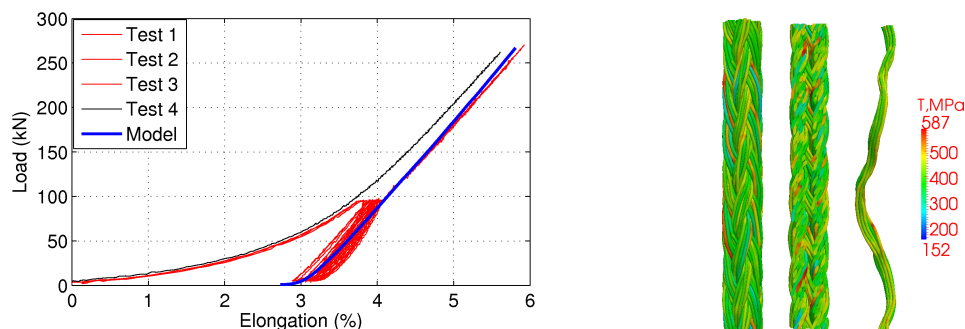


FIGURE 5.12 – Comparaison entre les coupes de la configuration initiale de la tresse obtenues par simulation et par tomographie

par des transferts d'efforts par frottement provoqués par les mouvements relatifs entre les brins au cours de la traction.



(a) Comparaison des courbes force/allongement issues de l'expérience et de la simulation (b) Visualisation des contraintes de tensions dans les brins

FIGURE 5.13 – Test de traction sur une tresse

#### 5.3.4.1.5 Simulation de la flexion sur poulie

##### Principes du test et de la simulation

La simulation de la flexion du câble tressé sur poulie vise à reproduire les essais réalisés à l'IFREMER pour identifier la tenue en fatigue de ces câbles lors de leurs passages répétés sur une poulie. Le test (Fig. 5.14a) consiste à appliquer des déplacements alternés aux extrémités d'un câble synthétique tressé, soumis à une tension, fléchi sur une poulie. La poulie est considérée libre en rotation. Pour ces essais, on considère un câble de diamètre de 2 cm, chargé à une tension de 40 kN, et fléchi sur une poulie de diamètre de 38 cm.

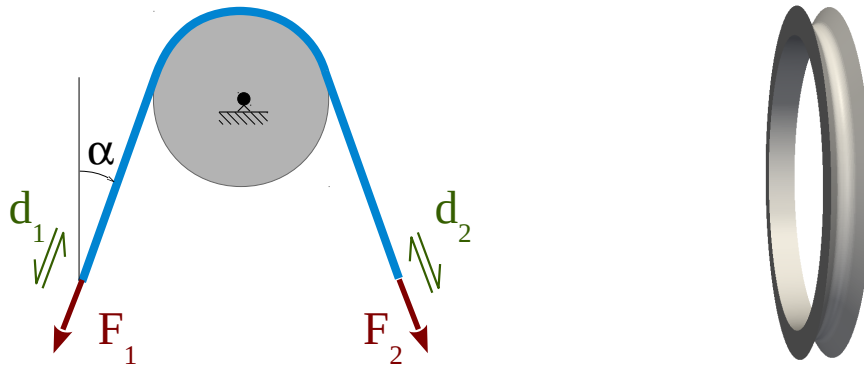
Dans la simulation la poulie est considérée comme une surface rigide définie par les mêmes paramètres géométriques que la poulie réelle (Fig. 5.14b), dont les mouvements de translation et de rotation sont contrôlés par un corps rigide, selon la modélisation introduite en 4.2. De cette manière, la rotation de la poulie autour de son axe peut être imposée ou laissée libre. Les interactions de contact-frottement entre les brins de la tresse et la surface de la poulie sont prises en compte.

##### Évolution des tensions dans les brins

L'analyse de l'évolution des tensions dans les brins du câble tressé au cours du cycle de flexion sur la poulie fournit des informations importantes pour comprendre les mécanismes induits par ce type de chargement. Les résultats de simulation montrant les tensions dans les brins du câble, au début de la flexion, à la fin de la flexion initiale du câble sur la poulie, et au niveau des étapes extrêmes du cycle de flexion alternée sur la poulie, sont respectivement représentés sur les figures 5.15a, 5.15b, 5.15d, et 5.15c.

Les évolutions des tensions le long des brins, sont représentées pour les mêmes étapes sur la figure 5.16. Par rapport à la configuration du câble au démarrage de la flexion, pour laquelle les contraintes dans les brins s'échelonnent sur une plage de 300 MPa, entre 100 MPa et 400 MPa (Fig. 5.16a), la flexion initiale du câble (Fig. 5.16b) induit l'apparition de deux zones où on constate un élargissement de la distribution des tensions dans les brins, qui vont d'une valeur faiblement négative à une valeur proche





(a) Schéma du test de flexion cyclique sur poulie

(b) Modèle de poulie utilisé dans la simulation

FIGURE 5.14 – Test de flexion sur poulie

de 700 MPa, sur une plage d'amplitude double par rapport à la configuration initiale. Ces deux zones où la distribution des tensions s'élargit correspondent au début et à la fin de la zone de contact de la tresse sur la poulie, c'est-à-dire aux zones où la tresse a été fléchie au cours des dernières étapes. La courbure du câble est globalement constante le long de la zone en contact avec la poulie, elle est globalement constante et nulle au niveau des parties droites de part et d'autre de la poulie, mais elle varie sur les zones de transition entre une configuration droite et une configuration fléchie, aux extrémités de la zone de contact du câble avec la poulie.

L'application d'un cycle de flexion alternée, consistant à tirer alternativement aux extrémités droite et gauche du câble, fait déplacer les zones de flexion du câble. Au niveau de l'entrée de la poulie, le câble subit une flexion positive le faisant passer d'une courbure nulle à la courbure imposée par la poulie, alors qu'il subit une flexion qu'on qualifiera de négative à la sortie de la poulie, où il retrouve une courbure nulle. Les zones de flexion positive, à l'entrée de la poulie, apparaissent comme celles où la distribution de tension est la plus large, et où les tensions de certains brins prennent des valeurs négatives, en dépit de la tension globale de 40 kN portée par le câble, comme illustré sur les figures 5.16c et 5.16d.

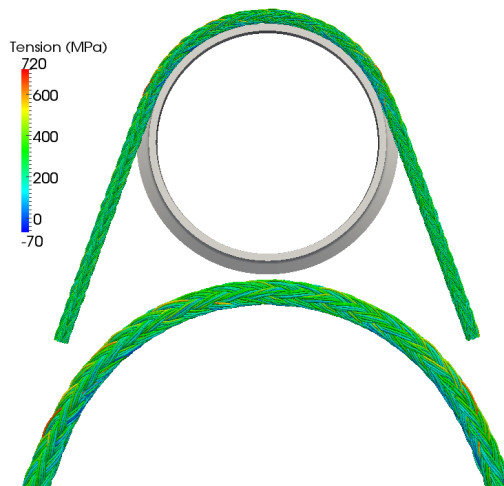
L'observation de la vue en coupe du câble au niveau des zones d'entrée et de sortie de la poulie (Fig. 5.17a et 5.17b) donne une idée plus précise du phénomène : sous l'effet de la flexion à l'entrée de la poulie, la tension a tendance à diminuer, jusqu'à devenir négative, au niveau des brins situés du côté intérieur de la courbure, et à augmenter pour les brins situés à l'extérieur. Le phénomène s'inverse à la sortie de la poulie.

Ces variations de tensions induites au niveau des brins par la flexion sur la poulie peuvent avoir un effet majeur sur la tenue en fatigue. Les variations de tension le long des brins au cours d'un cycle de passage alterné sur la poulie, ainsi que la moyenne de ces variations sur les brins le long du câble, sont représentées respectivement sur les figures 5.18a et 5.18b. Alors que le câble est soumis à une tension constante de 40 kN, qui correspond en moyenne à une tension d'environ 240 N par brin, les transferts de tension engendrés par frottement entre les brins, provoqués par les changements locaux de configuration liés aux flexions imposées au câble à l'entrée et à la sortie de la poulie, induisent au niveau des brins un chargement de type tension alternée, dont l'amplitude, d'environ 160 N, est du même ordre de grandeur que la sollicitation moyenne.

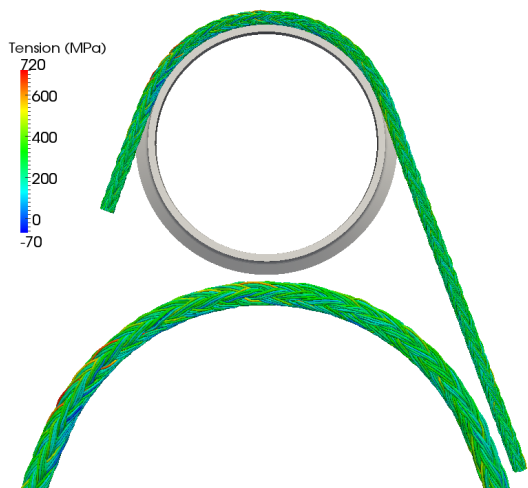
La mise en évidence par la simulation de ces fortes variations de tension au niveau des brins induites par les passages alternés sur la poulie, constitue un résultat majeur



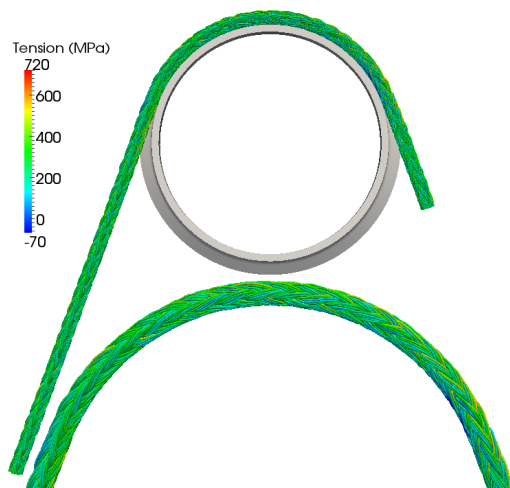
(a) Configuration au début de la flexion



(b) Configuration à l'issue de la flexion



(c) Configuration pour le déplacement maximal à droite



(d) Configuration pour le déplacement maximal à gauche

FIGURE 5.15 – Visualisation de différentes configuration lors d'un cycle de flexion sur poulie : vues globales et zooms sur la partie fléchie sur la poulie

pour l'analyse de la durée vie des câbles tressés synthétiques.

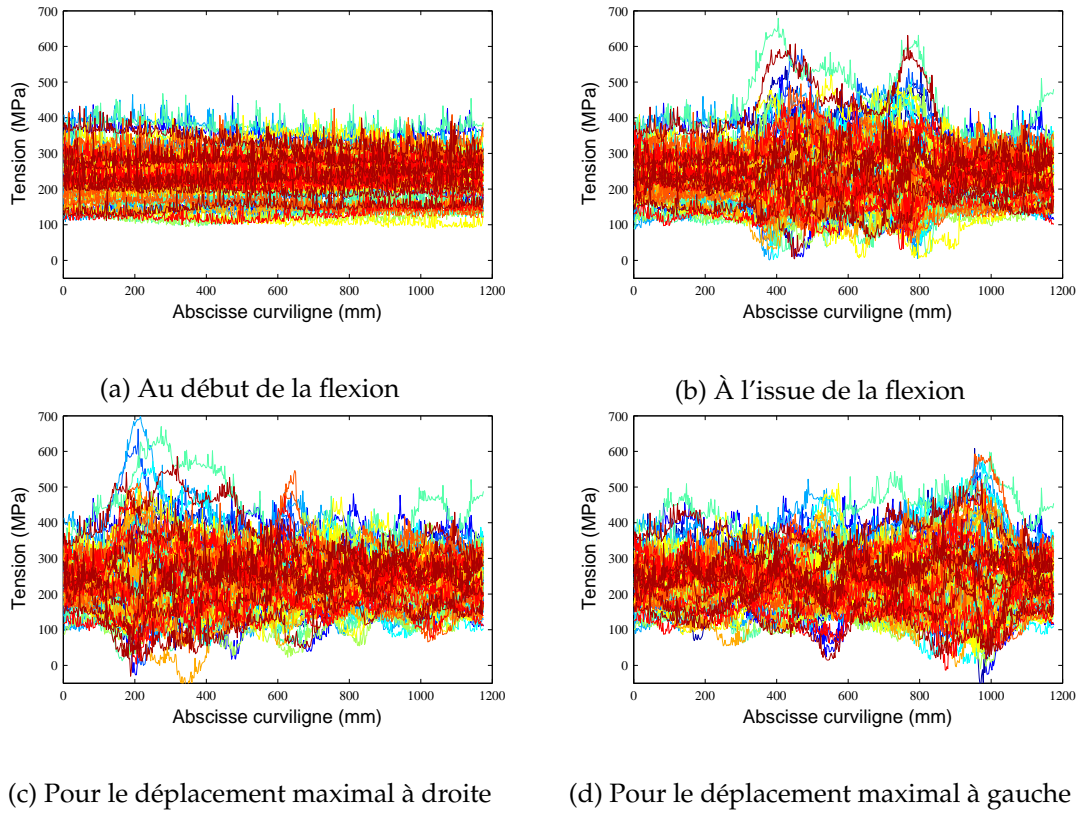
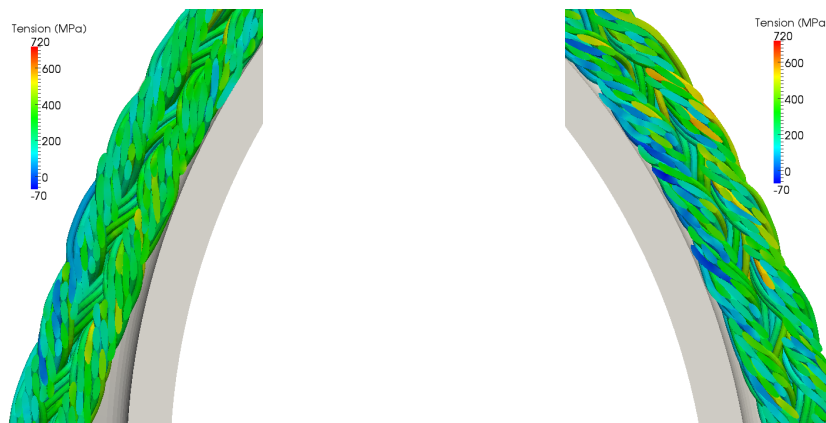


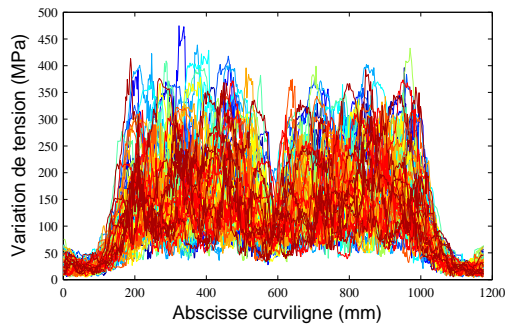
FIGURE 5.16 – Tensions dans les brins de la tresse pour différentes étapes du cycle de flexion sur poulie



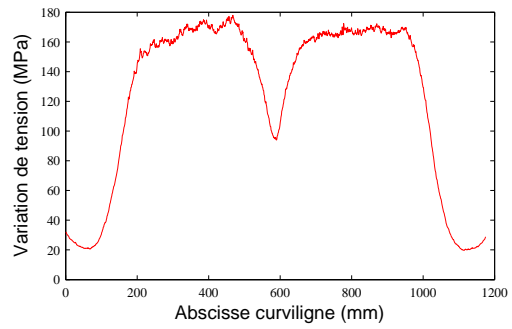
(a) Zone de flexion négative à la sortie de la poulie

(b) Zone de flexion positive à l'entrée de la poulie

FIGURE 5.17 – Zoom sur les vues en coupe des zones d'entrée et de sortie de la poulie pour l'étape de déplacement maximal à gauche



(a) Amplitude de la variation de tension le long des brins au cours d'un cycle de passage alterné sur la poulie



(b) Moyenne des amplitudes de tension sur les brins du câble au cours d'un cycle de passage alterné sur la poulie

FIGURE 5.18 – Analyse des amplitudes de variations de tension dans les brins au cours d'un cycle de passage alterné sur la poulie

### 5.3.4.2 Scaffolds tressés pour l'ingénierie tissulaire ligamentaire

#### 5.3.4.2.1 Introduction

Dans le cadre de sa thèse effectuée au LEMTA (Université de Lorraine/CNRS), et dédiée au développement de scaffolds tressés pour la réalisation de prothèses ligamentaires par ingénierie tissulaire, Cédric Laurent a eu recours à la simulation de structures tressées à l'aide de Multifil pour caractériser les propriétés mécaniques de ces scaffolds (Laurent [2012]). Le principe de ce type d'ingénierie tissulaire consiste à créer une structure textile, appelée scaffold, dont les propriétés mécaniques sont proches de celles d'un ligament réel, à ensemercer cette structure à l'aide de cellules souches avant de la soumettre à des sollicitations mécaniques au sein d'un bio-réacteur de manière à favoriser la prolifération de cellules ligamentaires. Lorsque la colonisation de la structure par des cellules de ligaments est suffisamment avancée, la prothèse peut être implantée sur le sujet. La structure textile réalisée à partir de filaments biodégradables disparaît au bout d'un certain temps, laissant place au ligament régénéré (Fig. 5.19).

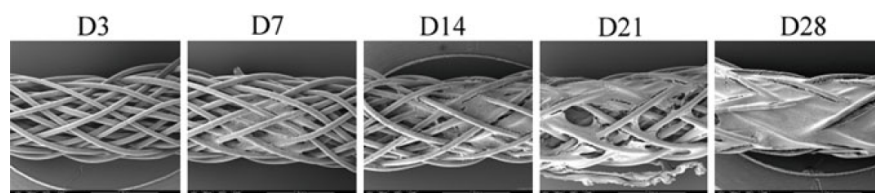


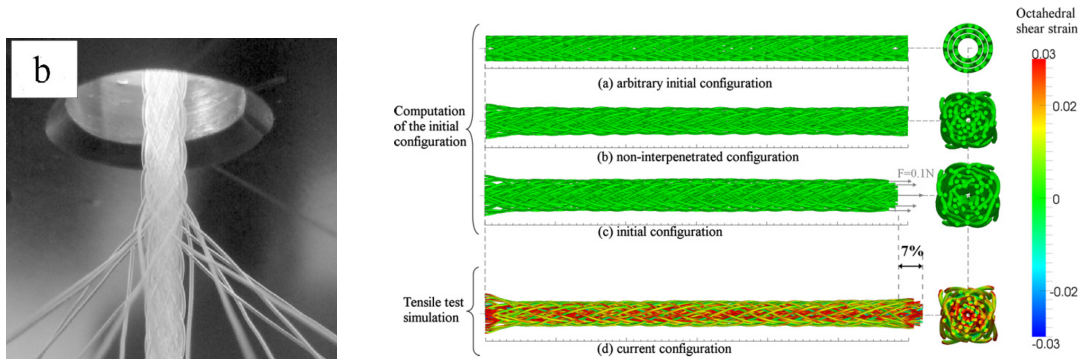
FIGURE 5.19 – Vues au MEB de l'évolution de la prolifération cellulaire du scaffold sur 28 jours [Laurent, 2012]

La caractérisation du comportement mécanique des scaffolds textiles est importante pour deux objectifs différents. Le premier répond au besoin de concevoir un scaffold dont la réponse non-linéaire à une sollicitation de traction correspond à celle d'un ligament réel. Le second vise à caractériser les sollicitations mécaniques transmises par le scaffold aux cellules qui le colonisent, en vue d'obtenir un environnement mécanique favorisant leur prolifération.

Le choix d'une structure tressée pour réaliser le scaffold (Fig. 5.20a) répond à la volonté de pouvoir influencer facilement sur la forme de la courbe non-linéaire de réponse en traction en jouant sur les paramètres de conception de la tresse (nombre de couches, nombres de filaments par couche, angles des différentes couches, etc.). Le logiciel Multifil est utilisé pour déterminer la configuration initiale de la tresse, et pour déterminer la réponse de la structure à un test de traction (Fig. 5.20b).

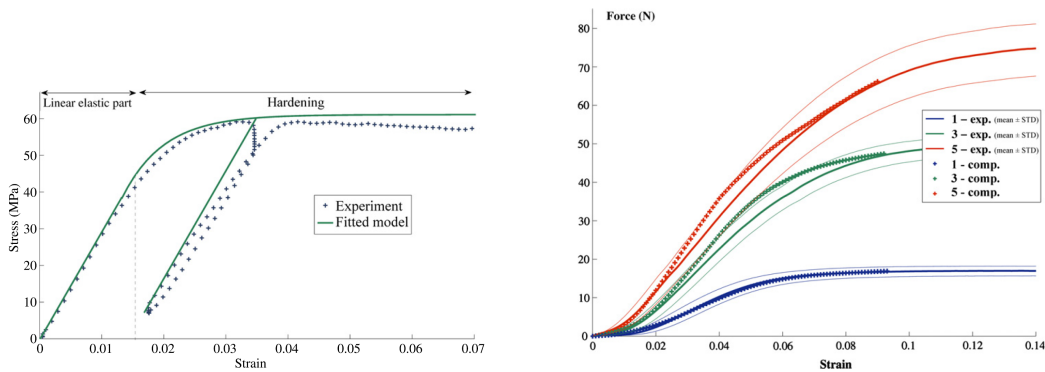
En ayant recalé les paramètres d'une loi de comportement élasto-plastique pour approcher la courbe de traction obtenue expérimentalement sur un filament unitaire (Fig. 5.21a), un bon accord est obtenu entre les courbes force/allongement obtenues par la simulation et les essais pour des tresses constituées de différents nombres de couches (Fig. 5.21b).

Dans le cadre d'une collaboration avec le laboratoire 3SR, des essais de traction ont été effectués sous tomographie [Laurent et al., 2014]. La pertinence du mode de détermination de la configuration initiale proposé par simulation de la séparation progressive des filaments, a été testée en identifiant les trajectoires des filaments dans la tresse par tomographie (Fig. 5.22a), puis en injectant ces trajectoires pour définir une nouvelle configuration initiale dans Multifil. En appliquant un chargement de traction aux structures tressées définies à partir de configurations initiales déterminées de deux manières différentes, des cartes de déformations octaédriques très proches sont obtenues (Fig. 5.22 et 5.23).



(a) Réalisation d'un scaffold tressé multicouche à l'aide d'une machine dédiée [Laurent, 2012] (b) Détermination de la configuration initiale du scaffold tressé (b), de la configuration à effort imposé (c) et de la configuration après traction (d) [Laurent et al., 2012]

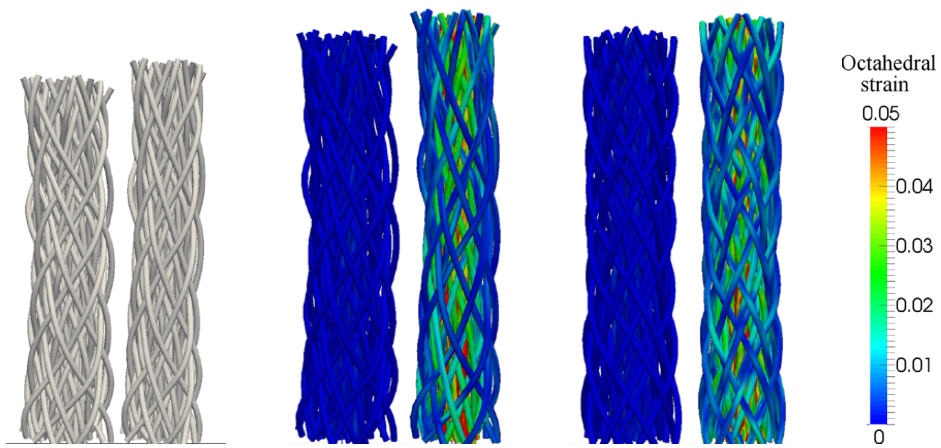
FIGURE 5.20 – Réalisation d'un scaffold tressé et courbes de réponse en traction



(a) Recalage d'une loi de comportement élastoplastique par rapport à un test d'identification en traction sur un filament élémentaire [Laurent et al., 2012]

(b) Comparaison entre courbes de traction obtenues expérimentalement (traits continus) et par la simulation (croix), pour des scaffolds constitués de 1, 3 ou 5 couches [Laurent et al., 2012]

FIGURE 5.21 – Courbes de traction sur filaments élémentaires (a) et sur différents types de tresses (b)



(a) Identification de la géométrie du scaffold par tomographie (b) Configuration initiale identifiée par tomographie (c) Configuration initiale déterminée par simulation

FIGURE 5.22 – Comparaison entre simulations de traction réalisées à partir d’une géométrie identifiée par tomographie (b) et d’une configuration initiale déterminée par simulation (c) [Laurent et al., 2014]

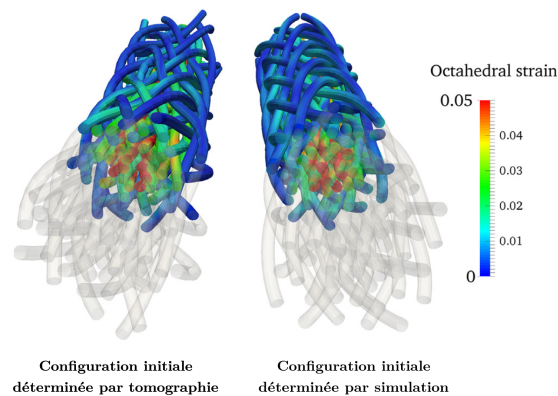


FIGURE 5.23 – Comparaison des cartes de déformations pour les simulations de tractions à partir de configurations initiales déterminées de deux manières différentes [Laurent et al., 2014]

### 5.3.5 Tissés 3D interlock

#### 5.3.5.1 Introduction

Les composites stratifiés, traditionnellement constitués d'une simple superposition de renforts fibreux orientés selon différentes directions, sont sensibles aux endommagements par délaminage. Pour pallier ce type de vulnérabilité inhérente aux composites stratifiés, une solution consiste à positionner les renforts en utilisant une technique de tissage interlock 3D, qui génère des tissages tridimensionnels dans lesquels les fils de trame et de chaîne traversent plusieurs couches dans l'épaisseur, réalisant ainsi une liaison des couches entre elles. Ce type de technique a été développé notamment pour réaliser des préformes pour des aubes de turbine du moteur d'avion LEAP, construit par Safran Aircraft Engines (Fig. 5.24).

La prédiction des propriétés mécaniques de ce type de pièce composite demande une connaissance précise de la géométrie des renforts fibreux au sein de la structure. Des préprocesseurs géométriques, tels que WiseTex ou TexGen, proposent une approche de la description de la géométrie de ces structures tissées à partir d'hypothèses sur les trajectoires et les sections des fils ou mèches constituant ces tissés.

En employant les méthodes de détermination de la configuration initiale de structures textiles présentées plus haut (voir 5.3.2), l'approche alternative présentée ici vise à proposer une modélisation mécanique du comportement de ces structures tissées, qui s'affranchisse du recours à un préprocesseur géométrique, et fournisse, comme premier résultat, une prédiction de la géométrie de ces tissés, en tenant compte des caractéristiques de comportement de leurs composants élémentaires.

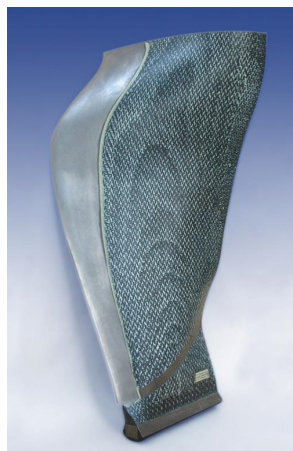


FIGURE 5.24 – Aube de turbine du moteur LEAP, réalisée à partir d'une préforme tissée interlock 3D (source : Albany International)

#### 5.3.5.2 Détermination de la configuration initiale d'un tissé interlock 3D

Le fonctionnement de l'approche proposée est illustré sur un exemple modèle de tissé interlock, représenté par un motif élémentaire périodique constitué de 26 mèches, réparties en un groupe de 12 mèches de chaîne et un groupe de 14 mèches de trame, chacun des deux groupes comportant 4 colonnes (cf. Fig. 5.25). Une application similaire, sur un tissé comportant 64 mèches a fait l'objet d'une publication (Durville et al. [2018]).

Pour déterminer la configuration initiale de cette structure, l'architecture du tissage est simplement définie à l'aide d'une matrice spécifiant l'ordre de superposition relatif



entre les différentes mèches au sein de la structure. Cet ordre de superposition sert à déterminer, lors de la prise en compte de contacts entre deux filaments appartenant à des mèches différentes, lequel doit passer au-dessus ou en-dessous de l'autre, afin d'obtenir une séparation progressive des mèches. Dans l'exemple considéré ici, chacune des mèches est représentée par 55 macro-filaments ; le modèle d'échantillon étudié comprend donc 1430 macro-filaments.

Les 26 mèches sont supposées droites dans leur configuration initiale et positionnées dans un même plan. Dans un premier temps on commence par appliquer à chacune des mèches un faible torsadage, destiné à leur assurer une certaine cohérence (cf. Fig. 5.25a). Les angles de rotations imposés pour obtenir ce torsadage sont pris comme des multiples de  $60^\circ$  de manière à pouvoir considérer des conditions de périodicité entre les extrémités de chaque mèche, en partant d'un arrangement hexagonal des macro-filaments au sein des mèches. Les interpénétrations initiales entre les mèches sont ensuite progressivement réduites, selon le procédé de réduction progressive de la pénétration (cf. 5.3.2.2). Une vingtaine d'incrément sont nécessaires pour obtenir une configuration initiale équilibrée, vérifiant des conditions de périodicité sur les bords, et correspondant à l'architecture du tissage choisie (cf. Fig. 5.25).

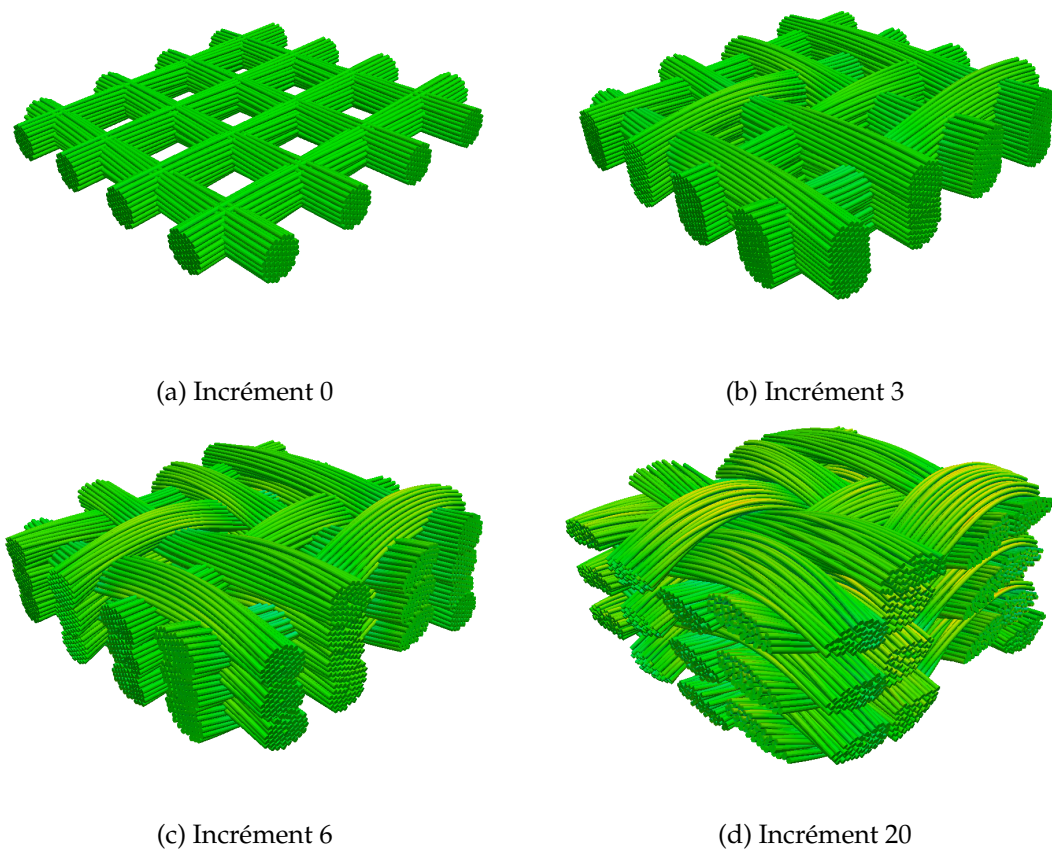


FIGURE 5.25 – Détermination de la configuration initiale d'un tissé interlock par séparation progressive des mèches

Les sections des mèches, initialement de forme circulaire (Fig. 5.25a), se déforment en fonction de la réorganisation de leurs filaments, comme illustré sur les coupes des configurations à différentes étapes (Fig. 5.26).

À l'issue de la phase de détermination de la configuration initiale, on dispose d'une

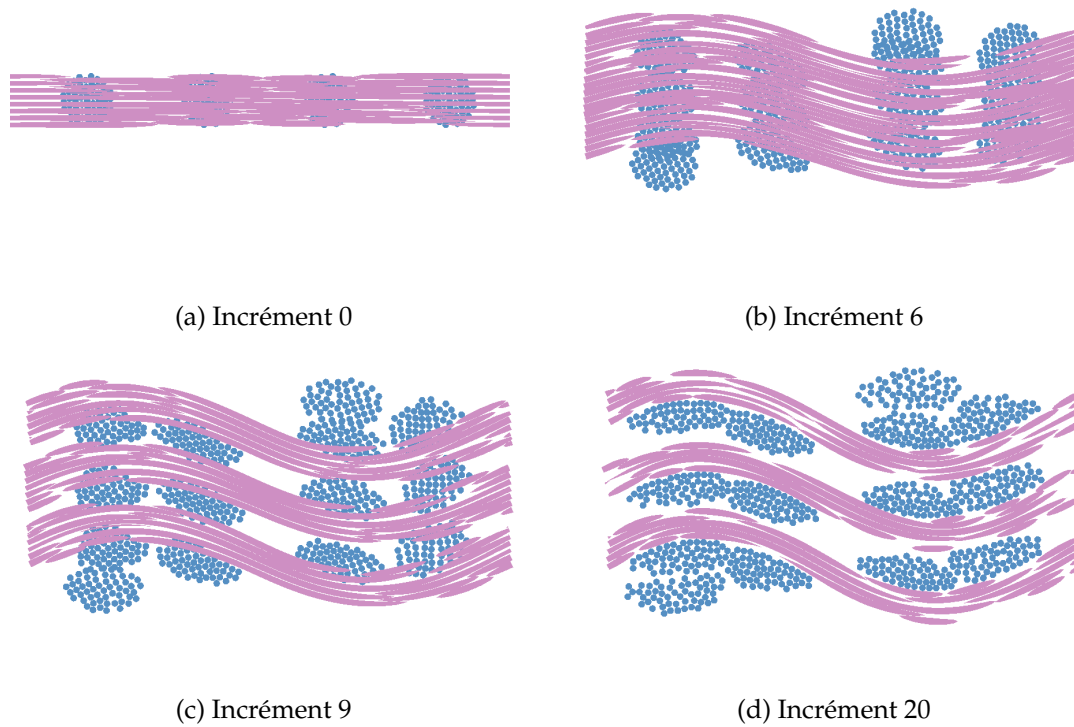


FIGURE 5.26 – Détermination de la configuration initiale d'un tissé interlock par séparation progressive des mèches

configuration équilibrée du tissé, présentant un état de contraintes rédiduelles internes, à partir de laquelle on peut simuler des chargements mécaniques. Nous présentons ici les résultats de simulation d'une compaction transverse de ce tissé entre deux plans rigides. Des représentations de déformées de la structure et de coupes de ces déformées à différentes étapes du chargement sont présentées sur les figures 5.27 et 5.28. L'évolution de l'effort de compaction en fonction de l'épaisseur est tracée sur la figure 5.29.

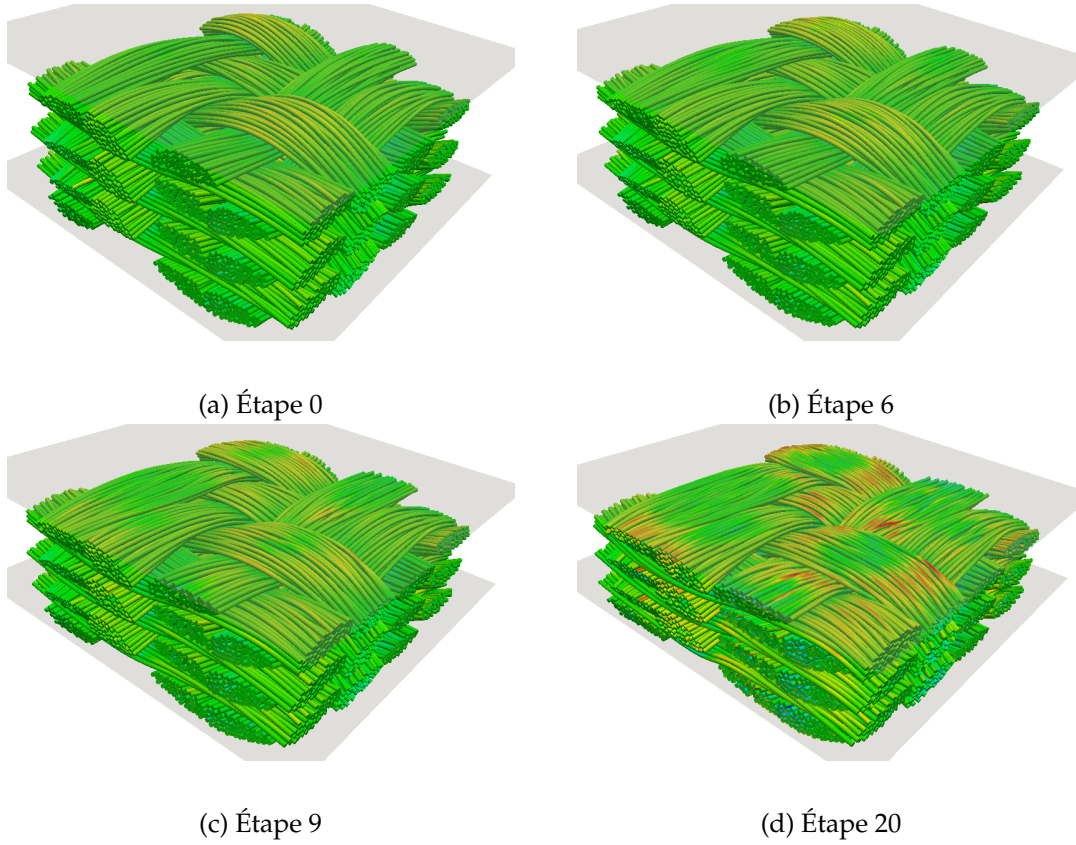


FIGURE 5.27 – Déformées du tissu interlock à différentes étapes au cours du chargement de compaction transverse

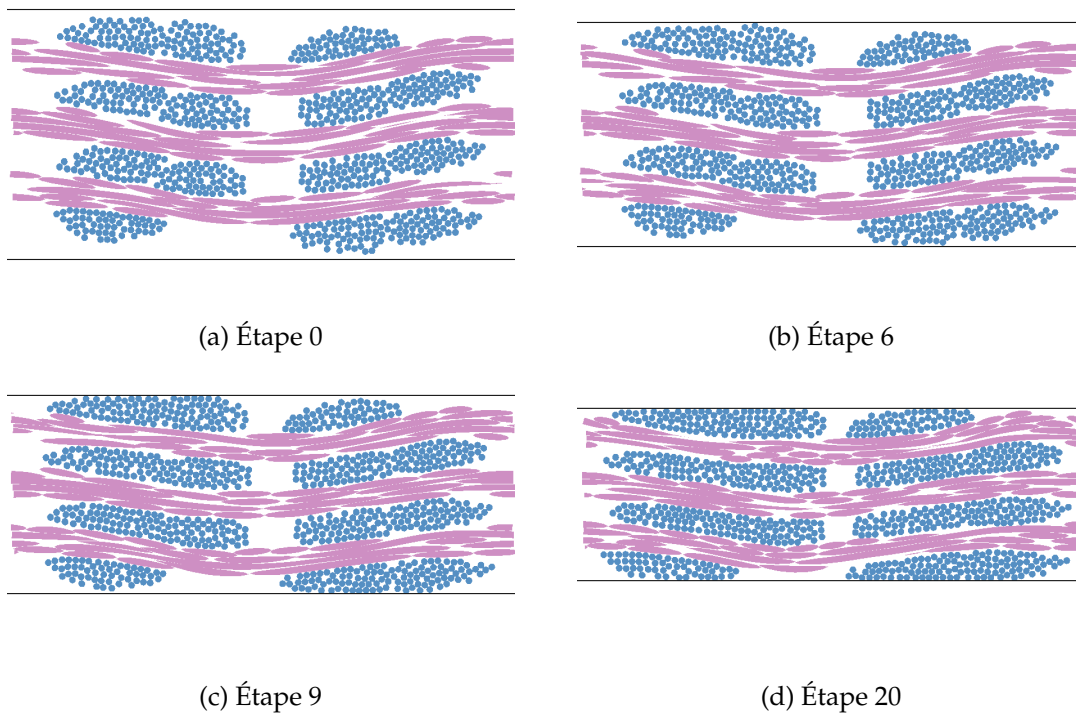


FIGURE 5.28 – Coupes des déformées du tissu interlock à différentes étapes au cours du chargement de compaction transverse

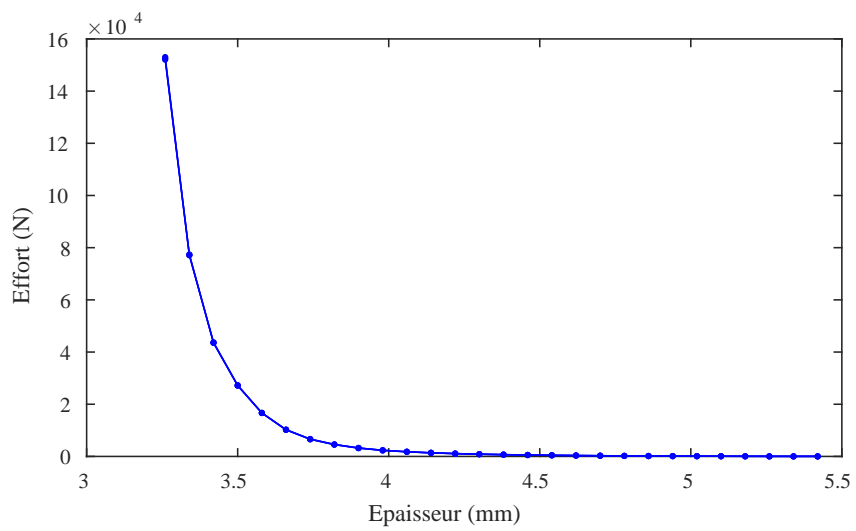


FIGURE 5.29 – Effort de compression transverse en fonction de l'épaisseur entre les plans

# Bibliographie

- Antman, S. S. (2005). Problems in nonlinear elasticity. In *Nonlinear Problems of Elasticity*, volume 107 of *Applied Mathematical Sciences*, pages 513–584. Springer New York.
- Bajas, H. (2011). *Numerical simulation of the mechanical behavior of the ITER cable-in-conduit conductors*. PhD thesis, École Centrale Paris.
- Bajas, H., Durville, D., Ciazynski, D., and Devred, A. (2010). Numerical simulation of the mechanical behavior of ITER cable-in-conduit conductors. *Applied Superconductivity, IEEE Transactions on*, 20(3) :1467–1470.
- Bajas, H., Durville, D., Ciazynski, D., and Devred, A. (2012a). Approach to heterogeneous strain distribution in cable-in-conduit conductors through finite element simulation. *Applied Superconductivity, IEEE Transactions on*, 22(3) :4803104–4803104.
- Bajas, H., Durville, D., and Devred, A. (2012b). Finite element modelling of cable-in-conduit conductors. *Superconductor Science and Technology*, 25(5) :054019.
- Ben Dhia, H. and Durville, D. (1995). Calembour : an implicit method based on an enriched kinematical thin-plate model for sheet-metal forming simulation. *Journal of Materials processing technology*, 50(1-4) :70–80.
- Ben Dhia, H., Vautier, I., and Zarroug, M. (2000). Problèmes de contact frottant en grandes transformations : du continu au discret. *Revue Européenne des éléments finis*, 9(1-3) :243–261.
- Boisse, P., Hamila, N., and Madeo, A. (2018). The difficulties in modeling the mechanical behavior of textile composite reinforcements with standard continuum mechanics of cauchy. some possible remedies. *International Journal of Solids and Structures*, 154 :55–65. Multiscale Modelling of Fibrous and Textile Materials.
- Carrera, E. (2003). Theories and finite elements for multilayered plates and shells : a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 10(3) :215–296.
- Carrera, E. and Giunta, G. (2010). Refined beam theories based on a unified formulation. *International Journal of Applied Mechanics*, 2(01) :117–143.
- Carrera, E. and Petrolo, M. (2012). Refined beam elements with only displacement variables and plate/shell capabilities. *Meccanica*, 47(3) :537–556.
- Clauvelin, N., Audoly, B., and Neukirch, S. (2009). Matched asymptotic expansions for twisted elastic knots : A self-contact problem with non-trivial contact topology. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57(9) :1623–1656.

- Coleman, B. and Swigon, D. (2000). Theory of supercoiled elastic rings with self-contact and its application to dna plasmids. *Journal of Elasticity*, 60 :173–221.
- Durville, D. (1993). *Modélisation mécanique et simulation numérique de l'avalement dans le procédé d'emboutissage des tôles minces*. PhD thesis, Châtenay-Malabry, Ecole Centrale de Paris.
- Durville, D. (1998). Modélisation du comportement mécanique de câbles métalliques. *Revue europeenne des elements finis*, 7(1-3) :9–22.
- Durville, D. (2011). *Contact Modelling in Entangled Fibrous Materials*, pages 1–22. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- Durville, D. (2012). Contact-friction modeling within elastic beam assemblies : an application to knot tightening. *Computational Mechanics*, 49(6) :687–707.
- Durville, D., Baydoun, I., Moustacas, H., Périé, G., and Wielhorski, Y. (2018). Determining the initial configuration and characterizing the mechanical properties of 3d angle-interlock fabrics using finite element simulation. *International Journal of Solids and Structures*, 154 :97–103.
- Ericksen, J. and Truesdell, C. (1957). Exact theory of stress and strain in rods and shells. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1(1) :295–323.
- Gerstmayr, J. and Matikainen, M. K. (2006). Analysis of stress and strain in the absolute nodal coordinate formulation. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 34(4) :409–430.
- Gerstmayr, J. and Shabana, A. (2006). Analysis of thin beams and cables using the absolute nodal co-ordinate formulation. *Nonlinear Dynamics*, 45(1-2) :109–130.
- Gerstmayr, J., Sugiyama, H., and Mikkola, A. (2013). Review on the absolute nodal coordinate formulation for large deformation analysis of multibody systems. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 8(3).
- Goyal, S., Perkins, N. C., and Lee, C. L. (2008). Non-linear dynamic intertwining of rods with self-contact. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 43(1) :65–73.
- Green, A. E. and Laws, N. (1966). A general theory of rods. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 293(1433) :pp. 145–155.
- Green, A. E., Naghdi, P. M., and Wenner, M. L. (1974a). On the theory of rods. i. derivations from the three-dimensional equations. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 337(1611) :pp. 451–483.
- Green, A. E., Naghdi, P. M., and Wenner, M. L. (1974b). On the theory of rods. ii. developments by direct approach. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 337(1611) :pp. 485–507.
- Holzappel, G. A., Gasser, T. C., and Ogden, R. W. (2000). A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models. *Journal of elasticity and the physical science of solids*, 61(1) :1–48.
- Konyukhov, A. and Schweizerhof, K. (2010). Geometrically exact covariant approach for contact between curves. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(37) :2510–2531.

- Laurent, C. (2012). *Vers un nouveau biosubstitut pour l'ingénierie tissulaire du Ligament Croisé Antérieur – Approche biomécanique*. PhD thesis, Université de Lorraine.
- Laurent, C. P., Durville, D., Mainard, D., Ganghoffer, J.-F., and Rahouadj, R. (2012). A multilayer braided scaffold for anterior cruciate ligament : Mechanical modeling at the fiber scale. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 12 :184 – 196.
- Laurent, C. P., Latil, P., Durville, D., Rahouadj, R., Geindreau, C., Orgéas, L., and Ganghoffer, J.-F. (2014). Mechanical behaviour of a fibrous scaffold for ligament tissue engineering : Finite elements analysis vs. x-ray tomography imaging. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 40 :222 – 233.
- Litewka, P. (2007a). Hermite polynomial smoothing in beam-to-beam frictional contact. *Computational Mechanics*, 40(5) :815–826.
- Litewka, P. (2007b). Smooth frictional contact between beams in 3d. In Wriggers, P. and Nackenhorst, U., editors, *IUTAM Symposium on Computational Methods in Contact Mechanics*, volume 3 of *IUTAM Bookseries*, pages 157–176. Springer Netherlands.
- Litewka, P. (2013). Enhanced multiple-point beam-to-beam frictionless contact finite element. *Computational Mechanics*, 52(6) :1365–1380.
- Litewka, P. and Wriggers, P. (2002a). Contact between 3d beams with rectangular cross-sections. *International journal for numerical methods in engineering*, 53(9) :2019–2041.
- Litewka, P. and Wriggers, P. (2002b). Frictional contact between 3d beams. *Computational mechanics*, 28(1) :26–39.
- Manil, P., Nunio, F., Othmani, Y., Aubin, V., Buffiere, J.-Y., Commisso, M. S., Dokladal, P., Durville, D., Lenoir, G., Lermé, N., et al. (2017). A numerical approach for the mechanical analysis of superconducting rutherford-type cables using bimetallic description. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 27(4) :1–6.
- Moustacas, H. (2019). *Modélisation et simulation du comportement de mèches de fibres de carbone à l'échelle mésoscopique pour l'analyse du comportement de préformes tissées interlock*. PhD thesis, Université Paris-Saclay.
- Nachbagauer, K., Pechstein, A. S., Irschik, H., and Gerstmayr, J. (2011). A new locking-free formulation for planar, shear deformable, linear and quadratic beam finite elements based on the absolute nodal coordinate formulation. *Multibody System Dynamics*, 26(3) :245–263.
- Novozhilov, V. (1961). *Theory of elasticity*. Pergamon.
- Pagani, A. and Carrera, E. (2018). Unified formulation of geometrically nonlinear refined beam theories. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 25(1) :15–31.
- Pieranski, P., Kasas, S., Dietler, G., Dubochet, J., and Stasiak, A. (2001). Localization of breakage points in knotted strings. *New Journal of Physics*, 3(1) :10.
- Przybyl, S. and Pieranski, P. (2009). Tightening of the elastic overhand knot. *Phys. Rev. E*, 79 :031801.
- Reissner, E. (1981). On finite deformations of space-curved beams. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 32(6) :734–744.

- Riccioli, R., Torre, A., Breschi, M., and Durville, D. (2019). Mechanical modeling and first case study on ITER TF CICC loading cases with upgraded finite element code simulations. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 29(5) :1–5.
- Riccioli, R., Torre, A., Durville, D., Breschi, M., Lebon, F., and Tronza, V. (2020). Advanced modeling of electromagnetic loading of cable-in-conduit conductors for fusion magnets. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 30(4) :1–5.
- Riccioli, R., Torre, A., Durville, D., Breschi, M., Lebon, F., and Tronza, V. (2021). Study of the ITER TF CICC mechanical behavior under cool-down and repetitive em loadings. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 31(5) :1–5.
- Rubin, M. (2001a). Numerical solution procedures for nonlinear elastic rods using the theory of a cosserat point. *International Journal of Solids and Structures*, 38(24–25) :4395 – 4437.
- Rubin, M. B. (2001b). On the theory of a cosserat point and shear locking in thin beams. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 17(3) :201–213.
- Schwab, A. and Meijaard, J. (2010). Comparison of three-dimensional flexible beam elements for dynamic analysis : classical finite element formulation and absolute nodal coordinate formulation. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 5(1) :011010.
- Shabana, A. (1996). Finite element incremental approach and exact rigid body inertia. *Journal of Mechanical Design*, 118 :171.
- Shabana, A. A. (1997a). Definition of the slopes and the finite element absolute nodal coordinate formulation. *Multibody System Dynamics*, 1(3) :339–348.
- Shabana, A. A. (1997b). Flexible multibody dynamics : review of past and recent developments. *Multibody system dynamics*, 1(2) :189–222.
- Sibellas, A., Adrien, J., Durville, D., and Maire, E. (2020). Experimental study of the fiber orientations in single and multi-ply continuous filament yarns. *The Journal of The Textile Institute*, 111(5) :646–659.
- Simo, J. (1985). A finite strain beam formulation. the three-dimensional dynamic problem. Part I. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49(1) :55 – 70.
- Simo, J. and Vu-Quoc, L. (1986). A three-dimensional finite-strain rod model. Part II : Computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58(1) :79 – 116.
- Spillmann, J. and Teschner, M. (2008). An adaptive contact model for the robust simulation of knots. *Computer Graphics Forum*, 27(2) :497–506.
- Torre, A., Bajas, H., Ciazynski, D., Durville, D., and Weiss, K. (2011). Mechanical-electrical modeling of stretching experiment on 45 strands CICC. *Applied Superconductivity*, *IEEE Transactions on*, 21(3) :2042–2045.
- Torre, A., Ciazynski, D., Durville, D., Bajas, H., and Nijhuis, A. (2013). Coupled mechanical-electrical modeling of the TARSIS experiment. *Applied Superconductivity*, *IEEE Transactions on*, 23(3) :8401005–8401005.
- Toupin, R. (1964). Theories of elasticity with couple-stress. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 17(2) :85–112.



- van der Heijden, G. H. M., Neukirch, S., Goss, V. G. A., and Thompson, J. M. T. (2003). Instability and self-contact phenomena in the writhing of clamped rods. *International Journal of Mechanical Sciences*, 45(1) :161 – 196.
- Vu, T. D. (2014). *Endurance des câbles synthétiques pour la manutention en eau profonde*. PhD thesis, Université de Bretagne Occidentale.
- Washizu, K. (1968). Variational methods in elasticity and plasticity. *International Series of Monographs in Aeronautics and Astronautics*.
- Wriggers, P. and Zavarise, G. (1997). On contact between three-dimensional beams undergoing large deflections. *Communications in numerical methods in engineering*, 13(6) :429–438.
- Yakoub, R. Y. and Shabana, A. A. (2001). Three dimensional absolute nodal coordinate formulation for beam elements : implementation and applications. *Journal of Mechanical Design*, 123(4) :614–621.
- Zavarise, G. and Wriggers, P. (2000). Contact with friction between beams in 3-D space. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49(8) :977–1006.
- Zavarise, G., Wriggers, P., and Schrefler, B. (1998). A method for solving contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42(3) :473–498.