



HAL
open science

Représentations de groupes de tresses via des revêtements cycliques

Gabrielle Menet

► **To cite this version:**

Gabrielle Menet. Représentations de groupes de tresses via des revêtements cycliques. Théorie des groupes [math.GR]. Université de Bordeaux, 2023. Français. NNT : 2023BORD0175 . tel-04180358

HAL Id: tel-04180358

<https://hal.science/tel-04180358>

Submitted on 11 Aug 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE PRÉSENTÉE
POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR
DE L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX
ECOLE DOCTORALE MATHÉMATIQUES ET
INFORMATIQUE

GEOMETRIE

Par **Gabrielle MENET**

Représentations de groupes de tresses via des revêtements
cycliques

Sous la direction de : **Vincent KOZIARZ, Duc-Manh NGUYEN**

Soutenue le 03/07/2023

Membres du jury :

M. Martin DERAUX	Maître de conférences	Université Grenoble Alpes	Rapporteur
M. Vincent KOZIARZ	Professeur des Universités	Université de Bordeaux	Directeur
M. Julien MARCHE	Professeur des Universités	Université Sorbonne	Rapporteur
M. Duc-Manh NGUYEN	Maître de conférences	Université de Bordeaux	Directeur
Mme Jasmin RAISSY	Professeure des universités	Université de Bordeaux	Examineur
M. Anton ZORICH	Professeur des universités	Université Paris Cité	Président du jury

Représentations de groupes de tresses via des revêtements cycliques

Résumé

Les groupes de tresses sont des objets omniprésents dans plusieurs branches des mathématiques modernes : topologie, théorie géométrique des groupes, combinatoire, théorie des nombres... Comprendre les différentes facettes de ces groupes est un thème récurrent dans la littérature qui est toujours d'actualité. Dans les années 80 et 90, Deligne-Mostow puis Thurston, par deux approches différentes, ont découvert des représentations de B_n , le groupe de tresses à n brins, d'image dans $U(n-2, 1)$, dont certaines ont pour image des sous-groupes discrets de co-volume fini (de tels sous-groupes sont appelés réseaux) de $U(n-2, 1)$. Pendant longtemps, ces sous-groupes ont été les seuls exemples connus de réseaux non-arithmétiques de $U(n-2, 1)$. Dans un article plus récent, en utilisant des revêtements cycliques ramifiés au-dessus de $n+1$ points de la sphère, McMullen construit des familles de représentations du groupe de tresses B_n dans des groupes $U(r, s)$ avec différentes signatures (r, s) . Il retrouve ainsi certains réseaux de Deligne-Mostow comme cas particuliers.

Nous avons généralisé les constructions de McMullen, et obtenu de nouvelles représentations de groupes de tresses pures dans des groupes unitaires $U(r, s)$. Pour cela, nous avons utilisé une surface de Riemann compacte, notée \hat{X} , obtenue à partir de l'équation $y^d = \prod_{i=1}^n (x - b_i)^{k_i}$, où $n, d \in \mathbb{N}^*$, $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ sont deux à deux distincts, et $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}^*$. Le cas de McMullen est celui pour lequel $k_i = 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Cette surface \hat{X} est un revêtement cyclique au-dessus de la sphère de Riemann, ramifié au-dessus des points b_i et éventuellement de l'infini.

Il existe un morphisme du groupe de tresses pures à n brins, noté PB_n , à valeurs dans $\text{Mod}(\hat{X})$, qui associe à chaque tresse pure la classe d'homotopie de l'un de ses relevés, qui est un homéomorphisme de \hat{X} commutant avec l'action de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

L'action de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ sur la cohomologie de \hat{X} se décompose en sous-espaces propres pour des valeurs propres qui sont des racines d -èmes de l'unité. En considérant l'action des relevés sur chaque sous-espace propre, on obtient des représentations linéaires de PB_n , qui sont unitaires par rapport à la restriction de la forme d'intersection au sous-espaces propres en question. Notre étude repose en partie sur l'utilisation de suites de Mayer-Vietoris, nous permettant de faire des liens entre le cas de McMullen et notre cas généralisé. L'action de n'importe quelle tresse de PB_n peut ensuite être explicitée. Nous avons aussi montré que les représentations obtenues sont irréductibles, et que les images de certaines d'entre elles sont Zariski denses dans des groupes unitaires.

Mots clés : Groupes de tresses, Représentations, Revêtement cycliques

Representations of braid groups using cyclic covers

Abstract

Braid groups are ubiquitous objects in several branches of modern mathematics : topology, geometric group theory, combinatorics, number theory... Understanding the different facets of these groups is a recurrent theme in the literature that remains more relevant than ever. In the 1980s and 1990s, Deligne-Mostow and then Thurston, using two different approaches, discovered representations of B_n , the n -stranded braid group, with image in $U(n-2, 1)$, some of which have as image discrete subgroups of finite co-volume (such subgroups are called lattices) of $U(n-2, 1)$. For a long time, these subgroups were the only known examples of non-arithmetic lattices of $U(n-2, 1)$. In a more recent paper, using cyclic coverings branched over $n+1$ points of the sphere, McMullen constructs families of representations of the braid group B_n in $U(r, s)$ -groups with different signatures (r, s) . He thus finds some Deligne-Mostow lattices as special cases.

We generalize McMullen's constructions, and obtain new representations of pure braid groups in unitary groups $U(r, s)$. For this purpose, we use a compact Riemann surface, denoted \hat{X} , obtained from the equation $y^d = \prod_{i=1}^n (x-b_i)^{k_i}$, where $n, d \in \mathbb{N}^*$, $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ are two distinct, and $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}^*$. The McMullen case is the one for which $k_i = 1$ for all $i \in \{1, \dots, n\}$. This surface \hat{X} is a cyclic covering over the Riemann sphere, branched over the points b_i and possibly infinity.

There is a morphism of the n -stranded pure braid group, denoted PB_n , with values in $\text{Mod}(\hat{X})$, which associates to each pure braid the homotopy class of one of its statements, which is a homeomorphism of \hat{X} commuting with the action of $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

The action of $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ on the cohomology of \hat{X} is decomposed into eigenspaces for eigenvalues which are d -roots of unity. Considering the action of the lifts on each eigensubspace, we obtain linear representations of PB_n , which are unitary with respect to the restriction of the intersection form to the eigenspace under consideration. Our study relies in part on the use of Mayer-Vietoris sequences, allowing us to make connections between the McMullen case and our generalized case. The action of any braid of PB_n can then be made explicit. We also show that the obtained representations are irreducible, and that the images of some of them are Zariski dense in a unitary group.

Keywords : Braid group, Representations, Cyclic covers

Institut de Mathématiques de Bordeaux
Université de Bordeaux
351 cours de la libération
33405 Talence cedex, France

Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement mes directeurs de thèses, Duc-Manh Nguyen et Vincent Koziarz, pour l'encadrement de mes travaux de recherches, avec patience et rigueur. Ils m'ont partagé leurs savoirs et leurs idées, se rendant toujours disponibles. Merci à eux pour les nombreuses relectures de mon manuscrit.

Un grand merci à Martin Deraux et à Julien Marché, les rapporteurs de ma thèse, pour leur lecture attentive de mon travail, ainsi que pour leurs retours qui ont largement contribué à l'amélioration de mon manuscrit.

Je tiens également à remercier chaleureusement Anton Zorich et Jasmin Raissy, qui ont accepté d'être dans mon jury de thèse.

Table des matières

1	Introduction	10
1.1	Contexte et motivations	10
1.2	Résultats principaux	11
1.3	Méthodes de démonstration	14
1.4	Conclusion	16
2	Pré-requis sur les groupes de tresses et le travail de McMullen	18
2.1	Le groupe de tresses à n brins B_n	18
2.1.1	Définition topologique et présentation finie de B_n	18
2.1.2	Le sous-groupe des tresses pures PB_n à n brins	22
2.1.3	Groupes de tresses et groupes modulaires	23
2.2	Les représentations de McMullen	26
2.2.1	La construction de \hat{Y} et des représentations	26
2.2.2	Quelques résultats de McMullen	27
3	Interprétation en homologie des résultats de McMullen	34
3.1	Les formes d'intersections en cohomologie et en homologie	35
3.1.1	La forme d'intersection $\langle ; \rangle$ sur $H^1(\hat{Y})$	35
3.1.2	La forme d'intersection int sur $H_1(\hat{Y})$	36
3.1.3	Lien entre les formes d'intersections en homologie et en cohomologie	37
3.2	Construction de g_1 générateur de $H_c^1(Y_1)_q$ dans le cas $n = 2$	40
3.2.1	Construction et première étude de \mathbf{c}_1	41
3.2.2	Le cas $q \neq -1$	41
3.2.3	Le cas $q = -1$, construction d'un générateur de $H_c^1(\partial Y_1)_{-1}$	45
3.3	Construction des éléments g_1, \dots, g_n pour n via l'homologie pour un n quelconque	48
3.3.1	Construction et première étude de $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$	48
3.3.2	Construction de g_i comme dual d'un multiple de \mathbf{c}_i	49
3.3.3	Relations en homologie	51
4	Généralisation de la construction du revêtement \hat{X}	54
4.1	Construction de la surface \hat{X}	54
4.1.1	Séparation des branches au voisinage des $(b_i, 0)$	55
4.1.2	Séparation des branches sur un voisinage de ∞	56
4.1.3	Finalisation de la construction de \hat{X}	58
4.2	Genre de \hat{X} et condition de connexité de \hat{X}	59
4.2.1	Étude du genre g de \hat{X}	59
4.2.2	Connexité de \hat{X}	60

5	Relèvements des tresses pures	63
5.1	Relèvement d'une tresse de PB_n sur \hat{X}	63
5.1.1	Relèvement des tresses sur $\hat{X} \setminus (\tilde{B} \cup \tilde{\infty})$	63
5.1.2	Commutation des relevés des tresses avec T sur $\hat{X} \setminus (\tilde{B} \cup \tilde{\infty})$	67
5.2	Relèvement des tresses pures sur \hat{X}	68
6	L'espace $H^1(\hat{X})_q$ dimension et signature de la forme d'intersection	70
6.1	Résultats intermédiaires	72
6.2	Dimension de $H^1(\hat{X})_q$	74
6.3	Signature de la forme d'intersection sur $H^1(\hat{X})_q$	79
6.3.1	Le cas $F'_q = \emptyset$	79
6.3.2	Le cas $F'_q \neq \emptyset$	82
6.3.3	Le cas non connexe	86
6.4	Les représentations ρ_q	87
7	Construction d'une famille génératrice (g_1, \dots, g_n) de $H^1(\hat{X})_q$	89
7.1	Le cas $n = 2$	90
7.1.1	Étude préalable de $H_c^1(X_1)_q$ et de sa dimension	90
7.1.2	Construction d'un générateur de $H_c^1(X_1)_q$	93
7.2	Détermination d'une famille génératrice de $H^1(\hat{X})_q$ et calcul de la forme d'intersection sur cette famille	98
7.2.1	La famille (g_1, \dots, g_n) génératrice de $H^1(\hat{X})_q$	98
7.2.2	Calcul de la forme d'intersection sur la famille génératrice de $H^1(\hat{X})_q$	100
8	Action des τ_i^2 sur $H^1(\hat{X})_q$	103
8.1	Utilisation du câblage pour étudier l'action d'une tresse de PB_n sur $H^1(\hat{X})_q$	104
8.1.1	Le câblage d'une tresse de PB_0	104
8.1.2	Le câblage et l'action d'une tresse de PB_n sur $H^1(\hat{X})_q$	104
8.2	Action des τ_i^2 sur $H^1(\hat{X})_q$	107
8.2.1	Le câblage associée à un τ_i	107
8.2.2	Application au calcul de l'action de τ_i^2 sur les générateurs de $H^1(\hat{X})_q$	108
8.2.3	Formule générale pour l'action de τ_i^2 sur $H^1(\hat{X})_q$	113
8.3	Irréductibilité de l'action de PB_n sur $U(H^1(\hat{X})_q)$	115
9	Action des $\alpha_{i,j}$ sur $H^1(\hat{X})_q$	117
9.1	Dépendance de la famille génératrice au choix de l'indexation des points complexes marqués	117
9.1.1	Conséquences du choix de l'indexation sur la construction des générateur de $H^1(\hat{X})_q$	118
9.1.2	Choix d'une indexation adaptée à un $\alpha_{i,j}$	119
9.2	Passage d'un famille génératrice de $H^1(\hat{X})_q$ à une autre	121
9.2.1	Relations en homologie entre les duaux des générateurs de $H_1(\hat{Y})_{\bar{q}}$.	122
9.2.2	Relation entre les deux familles génératrices de $H^1(\hat{X})_q$	127
9.3	Action des générateurs de PB_n sur la famille génératrice de $H^1(\hat{X})_q$	128
10	Action d'un twist de Dehn quelconque sur $H^1(\hat{X})_q$	132
10.1	Câblage d'un twist de Dehn	132
10.1.1	Interprétation d'un twist de Dehn comme une tresse de PB_n	132

10.1.2	Indépendance entre l'action d'une tresse et le choix de son câblage .	134
10.2	Action d'un twist de Dehn sur un disque contenant un ensemble de points indexés successivement	136
11	Densité de Zariski des représentations ρ_q	142
11.1	Outils préparant la récurrence	142
11.2	Initialisation au rang 2	145
11.2.1	Action de $SU(1, 1) \simeq SL(2, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$	145
11.2.2	Élimination des cas où \mathbb{G}_2^0 est isomorphe à un sous-groupe strict de $SL(2, \mathbb{R})$	147
11.3	Récurrence	150

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte et motivations

Dans cette thèse, nous construisons des représentations de groupes de tresses dans des groupes unitaires. Rappelons brièvement la définition des groupes de tresses. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et b_1, \dots, b_n deux points complexes deux à deux distincts, une tresse à n brins est la donnée de n chemins $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \times [0, 1]$, tels que :

- $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \gamma_i(0) = (b_i, 0)$
- $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \forall t \in [0, 1], \gamma_i(t) \neq \gamma_j(t)$ si $i \neq j$
- il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \gamma_i(1) = (b_{\sigma(i)}, 1)$.

L'ensemble des classes d'homotopies des tresses à n brins, muni de la concaténation, forme un groupe, non abélien si $n \geq 3$, noté B_n et appelé le groupe de tresses à n brins. Les groupes de tresses apparaissent dans de nombreuses branches des mathématiques et ont des applications dans plusieurs domaines scientifiques comme la physique ou l'informatique. Ils sont étudiés depuis le début du XX^{ème} siècle. Dans le chapitre 2, nous présenterons les principaux résultats connus sur les tresses et dont nous aurons besoin par la suite. Nous introduirons également le sous-groupe de tresses pures à n -brins, noté PB_n , qui se compose des tresses associées à la permutation identité.

Dans la littérature, on trouve de nombreux exemples de représentations unitaires de groupes de tresses, parmi les plus connues on peut citer les représentations de Burau [Bur36] ou encore celles de Deligne-Mostow [DM86]. En particulier, les images de certaines représentations de Deligne-Mostow ont donné, dans les années 80, des exemples de réseaux non arithmétiques dans $PU(n, 1)$. En 2013, dans son article [McM13] McMullen construit des représentations de groupes de tresses dans des groupes unitaires en utilisant des revêtements cycliques au dessus de la sphère de Riemann, obtenus à partir de courbes algébriques de la forme $y^d = \prod_{i=1}^n (x - b_i)$ où $n, d \in \mathbb{N}^*$ et les b_i sont des complexes deux à deux distincts. Nous généralisons cette construction et obtenons d'autres représentations des groupes de tresses pures dans des groupes unitaires. Pour cela, nous considérons des équations de la forme $y^d = \prod_{i=1}^n (x - b_i)^{k_i}$ avec des exposants k_i non nécessairement égaux à 1. On retrouve en particulier les représentations de Deligne-Mostow, et on étend l'étude aux représentations dont l'image est dans $PU(r, s)$ avec $r, s \geq 2$.

Nous présenterons plus en détail les constructions de McMullen, dans la partie 2.2, dont on fait ici un court résumé : McMullen considère une courbe algébrique $y^d = \prod_{i=1}^n (x - b_i)$, où $n, d \in \mathbb{N}^*$ et b_1, \dots, b_n sont des points complexes deux à deux distincts. Par un procédé de normalisation standard, il obtient à partir de cette courbe algébrique, une

surface de Riemann compacte notée \hat{Y} , qui est également un revêtement cyclique au-dessus de la sphère de Riemann, de degré d , ramifié au dessus des b_i et éventuellement au dessus de ∞ . En considérant les tresses de B_n comme des homéomorphismes de la sphère, McMullen relève les tresses de B_n en des éléments de $\text{Mod}(\hat{Y})$, commutant avec un certain automorphisme $T_{\hat{Y}}$ de la surface \hat{Y} . Une tresse $\tau \in B_n$ est ainsi associée à un unique relevé $\tilde{\tau} \in \text{Mod}(\hat{Y})$. En passant à la cohomologie de de Rahm de \hat{Y} et en considérant les sous-espaces propres de $T_{\hat{Y}}^*$ associées à une valeur propre $q \neq 1$, notés $H^1(\hat{Y})_q$, on peut voir que $\tilde{\tau}^*$ préserve les $H^1(\hat{Y})_q$ et finalement, McMullen obtient des représentations $\rho_q : B_n \rightarrow \text{U}(H^1(\hat{Y})_q)$, où $\text{U}(H^1(\hat{Y})_q)$ est le groupe unitaire pour la forme hermitienne induite par la forme d'intersection. On généralise cette construction en considérant cette fois des courbes algébriques de la forme $y^d = \prod_{i=1}^n (x - b_i)^{k_i}$, où $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}^*$. Les points marqués b_1, \dots, b_n ne jouent alors plus des rôles symétriques, ce qui a des conséquences directes sur la construction du revêtement cyclique, ainsi que sur les méthodes de démonstrations mises en place pour obtenir nos résultats.

1.2 Résultats principaux

Considérons une courbe algébrique de la forme $y^d = \prod_{i=1}^n (x - b_i)^{k_i}$ où $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}^*$. La normalisation d'une telle courbe permet d'obtenir une surface de Riemann compacte, notée \hat{X} . On verra les détails de cette construction dans le chapitre 4, où on montrera également que \hat{X} est un revêtement cyclique de degré d au dessus de la sphère de Riemann, ramifié au dessus des points b_i , et éventuellement au dessus de ∞ . Pour que \hat{X} soit connexe, il nous faut imposer la condition suivante : $\text{pgcd}(k_1, \dots, k_n, d) = 1$, dont on parlera plus en détail dans le chapitre 4. Sauf précision contraire, on supposera maintenant que \hat{X} est connexe. On note T un automorphisme de \hat{X} permutant cycliquement les pré-images de n'importe quel point de $\hat{\mathbb{C}}$, vérifiant donc $T^d = \text{Id}_{\hat{X}}$. Soit $k \in \{1, \dots, d-1\}$ et $q = e^{-k \frac{2i\pi}{d}}$ une racine d -ième de l'unité, différente de 1. En passant à la cohomologie de de Rham de \hat{X} , on peut considérer le sous-espace propre de T^* , associé à la valeur propre q , que l'on note $H^1(\hat{X})_q$. On définit la forme d'intersection $\langle ; \rangle$ sur $H^1(\hat{X})$ de la façon suivante :

$$\forall \eta, \mu \in H^1(\hat{X}), \quad \langle \eta; \mu \rangle = \frac{i}{2} \int_{\hat{X}} \eta \wedge \bar{\mu}.$$

On peut restreindre cette forme d'intersection à $H^1(\hat{X})_q$, on énonce alors le théorème suivant, qui généralise les corollaires 3.2 et 3.3 de l'article [McM13] de McMullen :

Théorème 1. *En notant $k_0 = \sum_{i=1}^n k_i$ et $F_q = \{i \in \{0, \dots, n\} \mid q^{e_i} = 1\}$ où $e_i = \text{pgcd}(k_i, d)$, la dimension de $H^1(\hat{X})_q$ est donnée par :*

$$\dim(H^1(\hat{X})_q) = n - 1 - \#F_q.$$

La forme d'intersection sur $H^1(\hat{X})_q$ est non dégénérée et a pour signature :

$$(r_q, s_q) = \left(\left\lfloor \frac{k_0 k}{d} \right\rfloor - \sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{k_i k}{d} \right\rfloor - \varepsilon_0, \left\lfloor k_0 \left(1 - \frac{k}{d}\right) \right\rfloor - \sum_{i=1}^n \left\lfloor k_i \left(1 - \frac{k}{d}\right) \right\rfloor - \varepsilon_0 \right)$$

où $\varepsilon_0 = 0$ si $q^{e_0} \neq 1$ et $\varepsilon_0 = 1$ sinon.

A l'aide de ces revêtements cycliques, on peut construire sur le même modèle que celui de McMullen des représentations du sous-groupe de tresses pures PB_n dans les groupes unitaires $U(H^1(\hat{X})_q) \simeq U(r_q, s_q)$. Pour cela, on utilise le fait que $B_n \simeq \text{Mod}(D, n)$, où D est un disque contenant les n points marqués b_1, \dots, b_n . Concrètement, une tresse est alors vue comme la classe d'homotopie d'un homéomorphisme du disque D , préservant l'ensemble des n points marqués, et coïncidant avec Id sur ∂D . Rappelons qu'une tresse de PB_n fixe identiquement les points marqués. En prolongeant par l'identité une tresse $\tau \in PB_n$ sur \hat{C} , on peut s'intéresser à la relever en un élément de $\text{Mod}(\hat{X})$. Toutes les tresses de B_n ne se relèvent pas, par exemple si $e_i > e_{i+1}$, un relevé de la tresse τ_i ne serait pas correctement défini sur les points au dessus de b_i . Cependant, parmi celles qui se relèvent, on retrouve le sous-groupe PB_n , c'est pourquoi on restreint notre construction à des représentations de PB_n . La mise en œuvre du relèvement des tresses pures utilise la théorie des revêtements et on retrouvera les détails dans le chapitre 5, où on montrera le théorème 5.0.1 qui nous dit qu'il existe un morphisme de groupe θ de PB_n dans $\text{Mod}(\hat{X})$ qui, à toute tresse $\tau \in PB_n$, associe un relevé $\tilde{\tau}$ qui commute avec T . En considérant les tirés en arrière par ces relevés des tresses de PB_n , on peut ainsi obtenir des éléments de $U(H^1(\hat{X})_q) \simeq U(r_q, s_q)$, ce qui nous donne une représentation notée ρ_q .

On souhaite ensuite expliciter l'action des tresses sur $H^1(\hat{X})_q$, pour cela on s'intéresse à l'action de générateurs de PB_n . Commençons par rappeler que le groupe de tresses B_n admet une présentation finie, et en particulier est engendré par un nombre fini de tresses notées τ_i pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Un élément τ_i correspond à un demi-twist de Dehn ayant pour support un disque topologique contenant b_i et b_{i+1} , mais aucun autre des points marqués. Le sous-groupe de tresses pures PB_n admet aussi une présentation finie, et est engendré par un nombre fini de tresses pures notées $\alpha_{i,j}$ pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$ avec $i < j$. Un élément $\alpha_{i,j}$ correspond à un twist de Dehn ayant pour support un disque topologique D_i contenant uniquement les points marqués b_i et b_j . En particulier, lorsque $j = i+1$, le twist $\alpha_{i,j}$ est τ_i^2 . Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on note X_i la pré-image de D_i dans \hat{X} . Le support de τ_i^2 est donc D_i .

Nous décrivons la représentation ρ_q par l'action des générateurs $\alpha_{i,j}$ de PB_n sur $H^1(\hat{X})_q$, que l'on explicite sur une famille (g_1, \dots, g_n) génératrice de $H^1(\hat{X})_q$. Cette famille est construite au chapitre 7, elle vérifie les propriétés suivantes :

Théorème 2. *Il existe une famille génératrice (g_1, \dots, g_n) de $H^1(\hat{X})_q$ telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, g_i est à support compact dans X_i , engendre $H_c^1(X_i)_q$ et les valeurs de la forme d'intersection entre les g_i sont :*

- $\langle g_i; g_i \rangle = \iota \frac{\bar{q}(1-q)^2(1-q^{k_i+k_i+1})}{(1-q^{k_i})(1-q^{k_i+1})}$
- $\langle g_i; g_{i+1} \rangle = -\iota \frac{\bar{q}(1-q)^2}{1-q^{k_i+1}}$
- $\langle g_i; g_{i-1} \rangle = \iota \frac{q^{k_i} \bar{q}(1-q)^2}{1-q^{k_i}}$
- $\langle g_i; g_j \rangle = 0$ si $|i-j| > 1$.

De plus : $\sum_{i=1}^n g_i = 0 \in H^1(\hat{X})_q$.

On s'intéresse donc à l'action d'une tresse $\alpha_{i,j}$ de PB_n sur la famille (g_1, \dots, g_n) , les formules obtenues nous permettent d'explicitement l'action de $\alpha_{i,j}$ sur $H^1(\hat{X})_q$. On montre alors le théorème suivant :

Théorème 3. *Pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i < j$, l'action de $\alpha_{i,j}$ sur $H^1(\hat{X})_q$ est*

donnée par :

$$\forall x \in H^1(\hat{X})_q, \quad \widetilde{\alpha}_{i,j}^*(x) = x - \iota \frac{(1 - q^{k_i})(1 - q^{k_j})}{(1 - q)(1 - \bar{q})} \langle x; g'_i \rangle g'_i.$$

où $g'_i = g_i + \sum_{l=i+1}^{j-1} \bar{q}^{\sum_{r=i+1}^l k_r} g_l$.

Si de plus, $q^{k_i+k_j} \neq 1$, alors $\alpha_{i,j}$ agit comme une réflexion complexe d'expression :

$$\forall x \in H^1(\hat{X})_q, \quad \widetilde{\alpha}_{i,j}^*(x) = x - (1 - q^{k_i+k_j}) \frac{\langle x; g'_i \rangle}{\langle g'_i, g'_i \rangle} g'_i.$$

Les $\widetilde{\alpha}_{i,j}^*$ sont d'ordre fini lorsque $q^{k_i+k_j} \neq 1$ et unipotents sinon.

Plus généralement, pour un twist de Dehn quelconque τ_J , ayant pour support un disque topologique contenant $\{b_j | j \in J\}$ pour $J \subset \{1, \dots, n\}$, on peut exprimer l'action de τ_J sur la famille (g_1, \dots, g_n) de façon explicite :

Théorème 4. Soient $i_0, j_0 \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i_0 < j_0$ et $J = \{i_0, \dots, j_0\}$. En notant $\sigma_i^j = \sum_{l=i}^j k_l$, l'action du twist $\tau_J \in PB_n$ de support un disque contenant les points marqués $\{b_{i_0}, \dots, b_{j_0}\}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_J^*(g_{i_0-1}) &= g_{i_0-1} + \sum_{l=i_0}^{j_0-1} (1 - q^{\sigma_{i_0}^{j_0}}) g_l \\ \tilde{\tau}_J^*(g_i) &= q^{\sigma_{i_0}^{j_0}} g_i \quad \text{si } i_0 \leq i \leq j_0 - 1 \\ \tilde{\tau}_J^*(g_{j_0}) &= g_{j_0} + \sum_{l=i_0}^{j_0-1} q^{\sigma_{i_0}^{j_0}} (1 - q^{\sigma_{i_0}^l}) g_j \\ \tilde{\tau}_J^*(g_j) &= g_j \quad \text{si } j < i_0 - 1 \text{ ou } j_0 < j \end{aligned}$$

De plus, $\tilde{\tau}_J^*$ est d'ordre fini si $q^{\sigma_{i_0}^{j_0}} \neq 1$ et unipotent sinon.

Une fois explicitée l'action des tresses de PB_n sur $H^1(\hat{X})_q$, on peut s'intéresser à l'image de ces représentations dans $U(r_q, s_q)$, on montre en particulier :

Théorème 5. Pour tout $q = e^{-\frac{2i\pi k}{d}} \neq 1$, la représentation $\rho_q : PB_n \rightarrow U(H^1(\hat{X})_q)$ est irréductible.

On retrouve également certains des résultats de Deligne-Mostow, et en s'inspirant de leur travail, on montre que :

Théorème 6. Pour tout $q = e^{-\frac{2i\pi k}{d}} \neq 1$, en supposant qu'il existe une indexation (b_1, \dots, b_n) des points marqués telle que :

- pour tout $r \in \{3, \dots, n - \varepsilon_0\}$, $d \nmid k(k_1 + \dots + k_r)$
- $1 < \{\frac{kk_1}{d}\} + \{\frac{kk_2}{d}\} + \{\frac{kk_3}{d}\} < 2$ où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{x\}$ est la partie fractionnaire de x

alors la composante neutre de la clôture de Zariski de $\rho_q(PB_n)$ est égale à $SU(H^1(\hat{X})_q)$.

1.3 Méthodes de démonstration

Les méthodes utilisées dans l'article [McM13] ne s'appliquent plus dans le cas de la surface \hat{X} , car celles-ci reposaient en grande partie sur la symétrie des rôles joués par les points marqués, symétrie que l'on perd en ajoutant les poids k_i . On utilise une surface auxiliaire \hat{Y} relevant du cas de McMullen et on applique ensuite des suites de Mayer-Vietoris pour faire le lien entre le cas de McMullen et le nôtre.

Dans un petit voisinage D'_i de chaque b_i , on considère k_i points deux à deux distincts, notés $b_{i,1}, \dots, b_{i,k_i}$. Alors la courbe algébrique $y^d = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{k_i} (x - b_{i,j})$ nous permet d'obtenir une surface de Riemann compacte, notée \hat{Y} , qui est également un revêtement cyclique de degré d au dessus de la sphère de Riemann, ramifié au dessus des points $b_{i,j}$ et éventuellement au dessus de ∞ . La surface \hat{Y} est connexe. De même que pour la surface \hat{X} , on note $T_{\hat{Y}}$ un automorphisme de \hat{Y} permutant cycliquement les pré-images de n'importe quel point de \hat{C} , vérifiant donc $T_{\hat{Y}}^d = \text{Id}_{\hat{Y}}$, et on note $H^1(\hat{Y})_q$ les sous-espaces propres de $T_{\hat{Y}}^*$ associés chacun à une valeur propre q , pour $q \neq 1$ une racine d -ième de l'unité.

On définit la forme d'intersection $\langle ; \rangle_{\hat{Y}}$ sur $H^1(\hat{Y})_q$ de la façon suivante : $\forall \eta, \mu \in H^1(\hat{Y})$,

$$\langle \eta; \mu \rangle_{\hat{Y}} = \frac{1}{2} \int_{\hat{Y}} \eta \wedge \bar{\mu}.$$

On peut restreindre la forme d'intersection au sous-espace $H^1(\hat{Y})_q$, sur lequel nous pouvons appliquer les principaux résultats de [McM13] présentés dans 2.2. Nous utilisons alors des suites de Mayer-Vietoris pour faire le lien entre ces surfaces.

En notant X'_i , respectivement Y'_i les pré-images dans \hat{X} , respectivement dans \hat{Y} , des disques D'_i , on a un homéomorphisme entre les surfaces $\hat{X} \setminus (\cup_{i=1}^n X'_i) \simeq \hat{Y} \setminus (\cup_{i=1}^n Y'_i)$. En notant $X' := \hat{X} \setminus (\cup_{i=1}^n X'_i)$ et $Y' := \hat{Y} \setminus (\cup_{i=1}^n Y'_i)$, on a un isomorphisme $H_c^1(Y')_q \simeq H_c^1(X')_q$. On verra que chaque X'_i est une réunion disjointe de disques, donc X' correspond à \hat{X} privé d'un certain nombre de disques. Pour repasser à la surface \hat{Y} , on rebouche ces trous non pas par des disques, mais en y recollant des sous-surfaces connexes. Topologiquement, on peut donc voir \hat{X} comme la surface \hat{Y} , privée des pré-images des disques D'_i qui auraient été découpés le long de leurs bords, et rebouchés par des disques. Alors tout élément $\eta \in H^1(\hat{X})_q$ admet un représentant à support compact dans X' , qui s'interprète comme un élément de $H_c^1(Y')_q$. On peut ainsi faire un lien entre les formes d'intersections sur $H^1(\hat{Y})_q$ et sur $H^1(\hat{X})_q$. En étendant légèrement les X'_i sur leurs bords, on note $\partial X' = X' \cap (\cup_{i=1}^n X'_i)$, qui est donc un ouvert contenant le bord de X' . De la même façon, $\partial Y' \simeq \partial X'$ est un ouvert de \hat{Y} , contenant le bord de Y' et vérifiant $\partial Y' = Y' \cap (\cup_{i=1}^n Y'_i)$. On obtient des suites de Mayer-Vietoris :

$$0 \rightarrow H_c^1(\partial X')_q \rightarrow H_c^1(X')_q \rightarrow H^1(\hat{X})_q \rightarrow H_c^2(\partial X')_q \rightarrow \oplus_{i=1}^n H_c^2(X'_i)_q \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow H_c^1(\partial Y')_q \rightarrow H_c^1(Y')_q \oplus (\oplus_{i=1}^n H_c^1(Y'_i)_q) \rightarrow H^1(\hat{Y})_q \rightarrow H_c^2(\partial Y')_q \rightarrow 0.$$

Comme $H_c^1(Y')_q \simeq H_c^1(X')_q$, on peut, via ces suites, déterminer la dimension de $H^1(\hat{X})_q$ et la signature de la forme d'intersection $\langle ; \rangle$ sur $H^1(\hat{X})_q$, on obtient alors le théorème 1. Les détails se trouvent dans les démonstrations des théorèmes 6.0.1 et 6.0.2.

Nous supposons à partir de là que $q^{k_i} \neq 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Nous verrons alors, avec des suites de Mayer-Vietoris, que $H^1(\hat{Y})_q$ s'écrit comme une somme directe orthogonale $H_c^1(Y')_q \oplus (\oplus_{i=1}^n H_c^1(Y'_i)_q)$. Nous aurons également un isomorphisme

$H_c^1(Y')_q \simeq H_c^1(X')_q \simeq H^1(\hat{X})_q$. On peut alors introduire une application surjective, notée $\phi_{\hat{X}}$ qui correspond à la composition de la projection orthogonale de $H^1(\hat{Y})_q$ sur $H_c^1(Y')_q$ et l'identification $H_c^1(Y')_q \simeq H_c^1(X')_q \simeq H^1(\hat{X})_q$:

$$\phi_{\hat{X}} : H^1(\hat{Y})_q \rightarrow H^1(\hat{X})_q.$$

Cette application exprime le lien entre les espaces $H^1(\hat{Y})_q$ et $H^1(\hat{X})_q$. D'après l'article [McM13], on peut expliciter une famille génératrice $(g_{i,j} | i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, k_i\})$ qui engendre $H^1(\hat{Y})_q$, sur laquelle les valeurs de la forme d'intersection $\langle ; \rangle_{\hat{Y}}$ sont connues. En particulier, la projection orthogonale des générateurs $g_{i,j}$ de $H^1(\hat{Y})_q$ sur $H_c^1(Y')_q$ donne une famille génératrice de $H_c^1(Y')_q$. On verra que $H_c^1(Y')_q$ est engendré par les éléments $(g_{i,1}, \dots, g_{i,k_i-1})$, ainsi, les seuls générateurs $g_{i,j}$ dont l'image est non nulle par la projection orthogonale sur $H_c^1(Y')_q$ sont les g_{i,k_i} pour $i \in \{1, \dots, n\}$. On peut alors définir, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$g_i := \phi_{\hat{X}}(g_{i,k_i}).$$

L'image de la famille génératrice $(g_{i,j} | i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, k_i\})$ par $\phi_{\hat{X}}$ nous permet d'obtenir une famille (g_1, \dots, g_n) engendrant $H^1(\hat{X})_q$, et vérifiant le théorème 2.

On s'intéresse à l'action des générateurs de PB_n sur $H^1(\hat{X})_q$, que l'on détermine en étudiant l'action de ces générateurs sur la famille (g_1, \dots, g_n) du théorème 2. On traite d'abord le cas des $\alpha_{i,i+1}$, qui sont donc des τ_i^2 . On montre ensuite qu'en ré-indexant les points marqués, n'importe quel $\alpha_{i,j}$ correspond, dans une certaine indexation, à un τ_i^2 dont la formule est connue. L'indexation des points marqués est directement liée à la construction de la famille génératrice du théorème 2, aussi introduire une nouvelle indexation conduit à la construction d'une nouvelle famille génératrice. En explicitant le passage d'une famille à l'autre, on est alors en mesure d'explicitier l'action de tous les générateurs $\alpha_{i,j}$ sur une même famille génératrice de $H^1(\hat{X})_q$.

Commençons par expliquer le raisonnement pour déterminer l'action des $\alpha_{i,i+1} = \tau_i^2$. Les formules s'obtiennent dans ce cas en faisant le lien entre l'action d'une tresse $\tau \in PB_n$ sur $H^1(\hat{X})_q$, et l'action d'une tresse $\mathcal{T} \in B_{k_0}$ sur $H^1(\hat{Y})_q$, avec $k_0 = \sum_{i=1}^n k_i$.

On est amenés à considérer le groupe de tresses B_{k_0} , et pour éviter toute confusion avec les générateurs de B_n , on va noter $\sigma_{i,j}$ le générateur de B_{k_0} correspondant au demi-twist ayant pour support un disque topologique $D_{i,j}$ contenant les points marqués $b_{i,j}$ et $b_{i,j+1}$ si $j \neq k_i$, ou les points marqués b_{i,k_i} et $b_{i+1,1}$ sinon. Rappelons que, par les résultats de [McM13], l'action des $\sigma_{i,j}$ sur la famille $(g_{i,j} | i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, k_i\})$ est explicite. On peut donc déterminer l'action de n'importe quelle tresse de B_{k_0} sur les $g_{i,j}$, en utilisant son écriture comme un mot des $\sigma_{i,j}$.

Pour établir le lien entre une tresse de PB_n et une tresse de B_{k_0} , nous introduisons la notion de câblage, qui consiste à séparer le brin issu de b_i en k_i nouveaux brins issus respectivement des $b_{i,j}$. On montre que, pour $\tau \in PB_n$ et $\mathcal{T} \in B_{k_0}$ son câblage :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \tilde{\tau}^*(g_i) = \phi_{\hat{X}}(\tilde{\mathcal{T}}^*(g_{i,k_i})).$$

En explicitant le câblage \mathcal{T}_i des tresses τ_i^2 comme un mot des $\sigma_{i,j}$, et en projetant via $\phi_{\hat{X}}$ les éléments $\tilde{\mathcal{T}}_i^*(g_{l,k_l})$, on détermine explicitement l'action des tresses τ_i^2 sur la famille (g_1, \dots, g_n) , et finalement on trouve les formules du théorème 3 dans le cas des $\alpha_{i,i+1}$.

Remarque :

- On utilise la même méthode pour exprimer l'action d'un twist de Dehn quelconque sur la famille (g_1, \dots, g_n) , qui nous donne alors le théorème 4.

- L'expression explicite des τ_i^2 permet de montrer, par un calcul direct, que les représentations que nous obtenons sont irréductibles.

Pour généraliser ce résultat aux $\alpha_{i,j}$ pour $j \neq i + 1$, il nous faut remarquer que $\alpha_{i,j}$ correspond à un twist de Dehn sur un disque contenant les points marqués b_i et b_j , alors en renommant b'_1, \dots, b'_n les points marqués, de sorte que $b'_i = b_i$ et $b'_{i+1} = b_j$, on obtient une nouvelle indexation dans laquelle $\alpha_{i,j}$ correspond maintenant à un τ_i^2 . Cependant, l'ordre d'indexation des points marqués détermine la famille génératrice du théorème 2, il faut donc trouver le lien entre la famille génératrice (g_1, \dots, g_n) obtenue par l'indexation initiale et la famille (g'_1, \dots, g'_n) obtenue par l'indexation adaptée pour voir $\alpha_{i,j}$ comme un τ_i^2 . Pour cela, on utilise un point de vue homologique. Dans un premier temps, dans le chapitre 3, on interprète les résultats de McMullen en homologie, on commence donc par traduire ses résultats sur les générateurs $(g_{i,j} | i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, k_i\})$ de $H^1(\hat{Y})_q$: pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, notons $c_{i,j}$ un chemin de $b_{i,j}$ à $b_{i,j+1}$ si $j \neq k_i$, et de $b_{i,j}$ à $b_{i+1,1}$ sinon, de sorte que le chemin concaténé $c_{1,1} \cdots c_{n,k_n}$ forme le bord d'un disque. On note $c_{i,j}^0, \dots, c_{i,j}^{d-1}$ les d relevés de chaque $c_{i,j}$ sur \hat{Y} indexés convenablement, et $\mathbf{c}_{i,j}$ la 1-chaîne $\mathbf{c}_{i,j} = \sum_{m=0}^{d-1} q^m c_{i,j}^m$. Alors en notant $g_{i,j}$ le dual de Poincaré de $2\sqrt{\frac{1-\text{Re}(q)}{\sqrt{d}}}$ $\mathbf{c}_{i,j}$, la famille $(g_{1,1}, \dots, g_{n,k_n})$ vérifie le résultat de McMullen, c'est-à-dire que $(g_{1,1}, \dots, g_{n,k_n})$ engendre $H^1(\hat{Y})_q$ et pour tous $i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, k_i\}$: $g_{i,j}$ engendre $H_c^1(Y_{i,j})_q$ et

$$\langle g_{i,j}, g_{l,m} \rangle = \begin{cases} \iota(1 - \bar{q}) & \text{si } (l, m) = (i, j + 1) \text{ si } j \neq k_i, \text{ ou } (l, m) = (i + 1, 1) \text{ si } j = k_i \\ 2\text{Im}(q) & \text{si } (l, m) = (i, j) \\ -\iota(1 - q) & \text{si } (l, m) = (i, j - 1) \text{ si } j \neq 1, \text{ ou } (l, m) = (i - 1, k_{i-1}) \text{ si } j = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans un second temps, au chapitre 7, on utilise le point de vue en homologie présenté au chapitre 3 pour trouver des relations entre des familles génératrices. Pour deux indexations différentes (b_1, \dots, b_n) et (b'_1, \dots, b'_n) des points marqués, on obtient deux collections de chemins $c_{i,j}$ et $c'_{i,j}$. L'étude des relations en homologie entre les chemins relevant les $c_{i,j}$ et ceux relevant les $c'_{i,j}$, donnent finalement des relations entre les $\mathbf{c}_{i,j}$ et $\mathbf{c}'_{i,j}$, puis entre leur duals de Poincaré et donc entre les $g_{i,j}$ et les $g'_{i,j}$, les générateurs de $H^1(\hat{Y})_q$ de McMullen construits respectivement pour ces deux indexations. En projetant ces relations sur $H^1(\hat{X})_q$ on obtient des relations entre les familles (g_1, \dots, g_n) et (g'_1, \dots, g'_n) . On peut alors déterminer l'action de $\alpha_{i,j}$ sur la famille (g_1, \dots, g_n) et enfin sur tout élément de $H^1(\hat{X})_q$.

En s'intéressant ensuite à l'image de ces représentations, on remarquera que pour tout $\tau \in PB_n$, $\det(\rho_q(\tau))$ est toujours une racine d -ième de l'unité. Par conséquent, la composante neutre de la clôture de Zariski de $\rho_q(PB_n)$ est incluse dans $SU(r_q, s_q)$. On montrera par un argument de récurrence que, sous les conditions du théorème 6, la composante neutre de la clôture de Zariski de chacune de ces représentations est égale à $SU(r_q, s_q)$.

1.4 Conclusion

Notre travail permet donc d'obtenir des représentations des groupes de tresses pures à l'aide d'outils géométriques, en généralisant le travail de McMullen. Parmi les représentations obtenues on retrouve en particulier celles de Deligne-Mostow, pour $q = e^{-\frac{2i\pi}{2}}$ et avec

les paramètres $\mu_s = \frac{k_s}{d}$ pour $s \in \{1, \dots, n\}$, et $k_1 + \dots + k_n = 2d$. Nous avons commencé à étendre leurs résultats dans notre cas, avec l'étude de la densité de Zariski des images de nos représentations dans $U(r_q, s_q)$ – dans le cadre des hypothèses du théorème 6.

Dans son article [McM13], McMullen s'était demandé si les images de ses représentations étaient commensurables à des sous-groupes arithmétiques. Il serait intéressant de se poser la question pour nos représentations.

Dans une autre mesure, il serait intéressant de voir si nos résultats permettent de généraliser les résultats de Venkataramana dans ses articles [Ven14a] et [Ven14b], en y apportant également un point de vue plus géométrique.

Chapitre 2

Pré-requis sur les groupes de tresses et le travail de McMullen

Dans cette partie, nous rappellerons rapidement ce qu'est un groupe de tresses, ce qui nous permettra également d'introduire quelques notations et points de vue sur le groupe de tresses à n brins, où n est un entier naturel non nul. Dans un deuxième temps, nous donnerons un bref aperçu du travail de McMullen [McM13] que nous généralisons dans cette thèse. Cela consiste essentiellement en la construction de représentations du groupe de tresses à n -brins dans un groupe unitaire par des moyens géométriques. Nous expliquerons les grandes lignes de cette construction ainsi que le rôle d'une surface particulière \hat{Y} que nous définirons, et dont nous présenterons certaines propriétés.

2.1 Le groupe de tresses à n brins B_n

Nous présentons dans cette partie le groupe de tresses à n brins noté B_n , avec $n \in \mathbb{N}^*$, ainsi que son sous-groupe PB_n composé des tresses pures de B_n . Les résultats de cette partie sont classiques, on les retrouve principalement dans le livre [FM11]. De fait, certaines démonstrations seront omises.

Commençons par définir le groupe de tresses à n brins.

2.1.1 Définition topologique et présentation finie de B_n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on donne une première définition topologique du groupe de tresses à n brins. Fixons n points $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts, on notera D un disque ouvert contenant l'ensemble des n points marqués $B := \{b_1, \dots, b_n\}$. On peut définir une tresse à n brins par la donnée de n chemins $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \times [0, 1]$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$, vérifiant les points suivants :

- $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \forall t \in [0, 1], \gamma_i(t) \neq \gamma_j(t)$ si $i \neq j$.
- $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \gamma_i(0) = (b_i, 0)$
- $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \gamma_i(1) \in \{b_1, \dots, b_n\} \times \{1\}$. Autrement dit, on peut associer à une tresse une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\gamma_i(1) = (b_{\sigma(i)}, 1)$.

On peut représenter graphiquement les tresses dans \mathbb{R}^3 , ou encore dans \mathbb{R}^2 comme dans la figure ci-dessous 2.1.

On note B_n l'ensemble des tresses à n brins quotienté par homotopie. Remarquons alors que deux graphiques peuvent représenter la même tresse dans B_n comme sur le

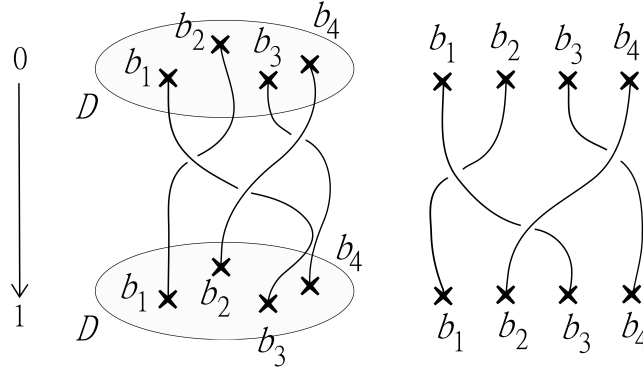


FIGURE 2.1 – Représentation graphique d’une tresse de B_4 dans \mathbb{R}^3 et dans \mathbb{R}^2

dessin 2.2. Les brins doivent garder le même point de départ et d’arrivée, mais peuvent se déplacer visuellement sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$ à partir du moment où ils restent dans le même ordre de superposition :

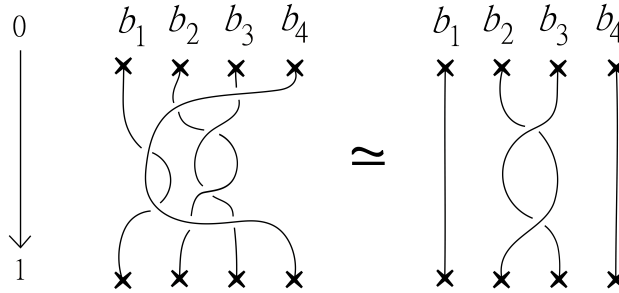


FIGURE 2.2 – Deux tresses équivalentes par homotopie

Pour simplifier les notations, on confondra une tresse et sa classe d’homotopie, ainsi, lorsqu’on parlera d’une tresse, on sous-entendra un élément de B_n . Muni de la concaténation des chemins, B_n dispose d’une structure de groupe non abélien. Pour deux tresses $\tau, \tau' \in B_n$, l’élément $\tau\tau'$ est la tresse définie par :

$$\tau\tau'(t) = \begin{cases} \tau'(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \tau(2t - 1) & \text{si } t \in]\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

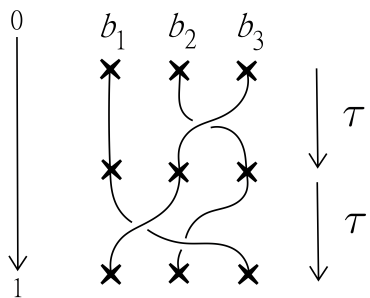


FIGURE 2.3 – Concaténation $\tau\tau'$ de deux tresses τ et τ' de B_3

L’élément neutre pour la concaténation de chemins à n brins, noté Id , est la tresse à n brins droits, c’est-à-dire ne réalisant aucun croisement entre eux. L’inverse d’une tresse

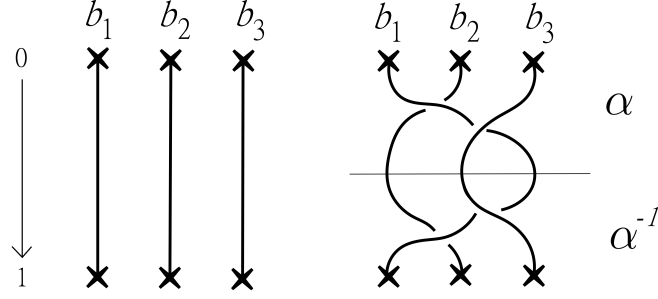


FIGURE 2.4 – La tresse identité dans B_3 et l'inverse d'une tresse $\alpha \in B_3$

se représente par son symétrique par rapport à l'axe horizontal. On illustre, pour $n = 3$, la tresse identité et l'inverse d'une tresse de B_3 sur la figure 2.4.

Le groupe de tresses B_n est engendré par les $n - 1$ tresses échangeant seulement deux brins successifs, on note $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$ ces tresses : pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la tresse τ_i fait passer le $(i + 1)$ -ème brin au-dessus du i -ème brin comme dans l'illustration ci-dessous.

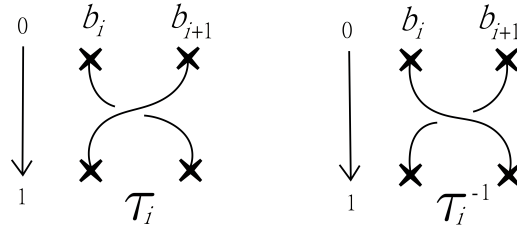


FIGURE 2.5 – Le croisement des i -ème et $i + 1$ -ème brins de la tresse τ_i

Chaque tresse de B_n peut s'écrire comme un mot en les τ_i et leurs inverses. On a vu que deux graphiques peuvent représenter une même tresse, de la même façon, l'écriture d'une tresse comme un mot en les τ_i et τ_i^{-1} n'est pas unique. D'après [Art47], on dispose pour B_n d'une présentation finie : le groupe de tresses à n -brins s'écrit comme un groupe libre à $n - 1$ générateurs, quotienté par deux types de relations que l'on appelle les relations de tresses.

Proposition 2.1.1. *Le groupe de tresse à n brins B_n admet une présentation finie :*

$$B_n = \left\langle \tau_1, \dots, \tau_{n-1} \left| \begin{array}{l} \forall |i - j| \neq 1, \quad \tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i \\ \forall i \in \{1, \dots, n - 2\}, \quad \tau_i \tau_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1} \end{array} \right. \right\rangle.$$

On note σ l'élément $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_{n-1}$. Cet élément σ joue un rôle particulier puisque σ^n engendre le centre de B_n pour $n \geq 3$. On peut vérifier le lemme suivant :

Lemme 2.1.2. *Pour tout $i \in \{1, \dots, n - 2\}$, $\tau_{i+1} = \sigma \tau_i \sigma^{-1}$.*

Démonstration : Soit $i \in \{1, \dots, n - 1\}$, d'après les relations de tresses, on sait que τ_i commute avec tous les τ_j tels que $|j - i| > 1$. Alors :

$$\begin{aligned} \sigma \tau_i \sigma &= (\tau_1 \cdots \tau_{n-1}) \tau_i (\tau_{n-1}^{-1} \cdots \tau_1^{-1}) \\ &= (\tau_1 \cdots \tau_i \tau_{i+1}) \tau_i (\tau_{i+2} \cdots \tau_{n-1}) (\tau_{n-1}^{-1} \cdots \tau_1^{-1}) \\ &= (\tau_1 \cdots \tau_i) (\tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}^{-1}) (\tau_i^{-1} \cdots \tau_1^{-1}) \\ &= (\tau_1 \cdots \tau_i) (\tau_i^{-1} \tau_{i+1} \tau_i) (\tau_i^{-1} \cdots \tau_1^{-1}) \\ &= (\tau_1 \cdots \tau_{i-2}) \tau_{i+1} (\tau_{i-1}^{-1} \cdots \tau_1^{-1}) \\ &= \tau_{i+1}. \end{aligned}$$

□

Dans son travail, McMullen introduit un élément supplémentaire τ_n , défini par :

$$\tau_n := \sigma \tau_{n-1} \sigma^{-1}.$$

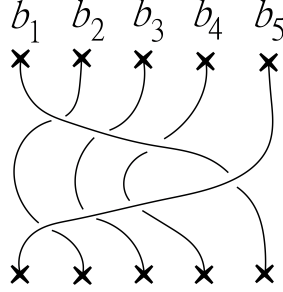


FIGURE 2.6 – Illustration de la tresse τ_n pour $n = 5$

Lemme 2.1.3. *L'élément τ_n vérifie également les relations de tresses, c'est-à-dire : τ_n commute avec les τ_j pour $j \in \{2, \dots, n-2\}$, et $\tau_n \tau_{n-1} \tau_n = \tau_{n-1} \tau_n \tau_{n-1}$ et de plus ici $\tau_1 \tau_n \tau_1 = \tau_n \tau_1 \tau_n$.*

Démonstration : Pour les premières relations on utilise les relations de tresses, $\forall j \in \{2, \dots, n-2\}$:

$$\begin{aligned} \tau_n \tau_j &= \sigma \tau_{n-1} \sigma^{-1} \tau_j \\ &= (\tau_1 \cdots \tau_{n-1}) \tau_{n-1} (\tau_{n-1}^{-1} \cdots \tau_1^{-1}) \tau_j \\ &= (\tau_1 \cdots \tau_{n-1}) \tau_{n-1} (\tau_{n-1}^{-1} \cdots \underbrace{\tau_j^{-1} \tau_{j-1}^{-1} \tau_j \tau_{j-2}^{-1}} \cdots \tau_1^{-1}) \\ &= (\tau_1 \cdots \tau_{n-1}) \tau_{n-1} (\tau_{n-1}^{-1} \cdots \tau_{j-1}^{-1} \tau_j^{-1} \tau_{j-1}^{-1} \tau_{j-2}^{-1} \cdots \tau_1^{-1}) \\ &= (\tau_1 \cdots \tau_{j-2} \underbrace{\tau_{j-1} \tau_j \tau_{j-1}} \tau_{j+1} \cdots \tau_{n-1}) \tau_{n-1} (\tau_{n-1}^{-1} \cdots \tau_1^{-1}) \\ &= (\tau_1 \cdots \tau_{j-2} \tau_j \tau_{j-1} \tau_j \tau_{j+1} \cdots \tau_{n-1}) \tau_{n-1} (\tau_{n-1}^{-1} \cdots \tau_1^{-1}) \\ &= \tau_j (\tau_1 \cdots \tau_{n-1}) \tau_{n-1} (\tau_{n-1}^{-1} \cdots \tau_1^{-1}) \\ &= \tau_j \tau_n. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \tau_{n-1} \tau_n \tau_{n-1} &= \tau_{n-1} (\tau_1 \cdots \tau_{n-1}) \tau_{n-1} (\tau_{n-1}^{-1} \cdots \tau_1^{-1}) \tau_{n-1} \\ &= (\tau_1 \cdots \tau_{n-3}) (\tau_{n-1} \tau_{n-2} \tau_{n-1}) \tau_{n-1} (\tau_{n-1}^{-1} \tau_{n-2}^{-1} \tau_{n-1}) (\tau_{n-3}^{-1} \cdots \tau_1^{-1}) \\ &= (\tau_1 \cdots \tau_{n-3}) (\tau_{n-2} \tau_{n-1} \tau_{n-2}) \tau_{n-1} (\tau_{n-2} \tau_{n-1}^{-1} \tau_{n-2}^{-1}) (\tau_{n-3}^{-1} \cdots \tau_1^{-1}) \\ &= \sigma (\tau_{n-2} \tau_{n-1} \tau_{n-2}) \sigma^{-1} \\ &= \sigma ((\tau_{n-1} \tau_{n-1}^{-1}) \tau_{n-2} \tau_{n-1} \tau_{n-2}) \sigma^{-1} \\ &= \sigma \tau_{n-1} (\tau_{n-1}^{-1} \cdots \tau_1^{-1}) (\tau_1 \cdots \tau_{n-2}) (\tau_{n-2} \tau_{n-1} \tau_{n-2}) \sigma^{-1} \\ &= \tau_n (\tau_1 \cdots \tau_{n-2}) (\tau_{n-2} \tau_{n-1} \tau_{n-2}) \sigma^{-1} \\ &= \tau_n (\tau_1 \cdots \underbrace{\tau_{n-2}}) (\tau_{n-1} \tau_{n-2} \tau_{n-1}) \sigma^{-1} \\ &= \tau_n (\tau_1 \cdots \tau_{n-3} \tau_{n-1} \tau_{n-2} \tau_{n-1}) \tau_{n-1} \sigma^{-1} \\ &= \tau_n \tau_{n-1} (\tau_1 \cdots \tau_{n-1}) \tau_{n-1} \sigma^{-1} \\ &= \tau_n \tau_{n-1} \tau_n. \end{aligned}$$

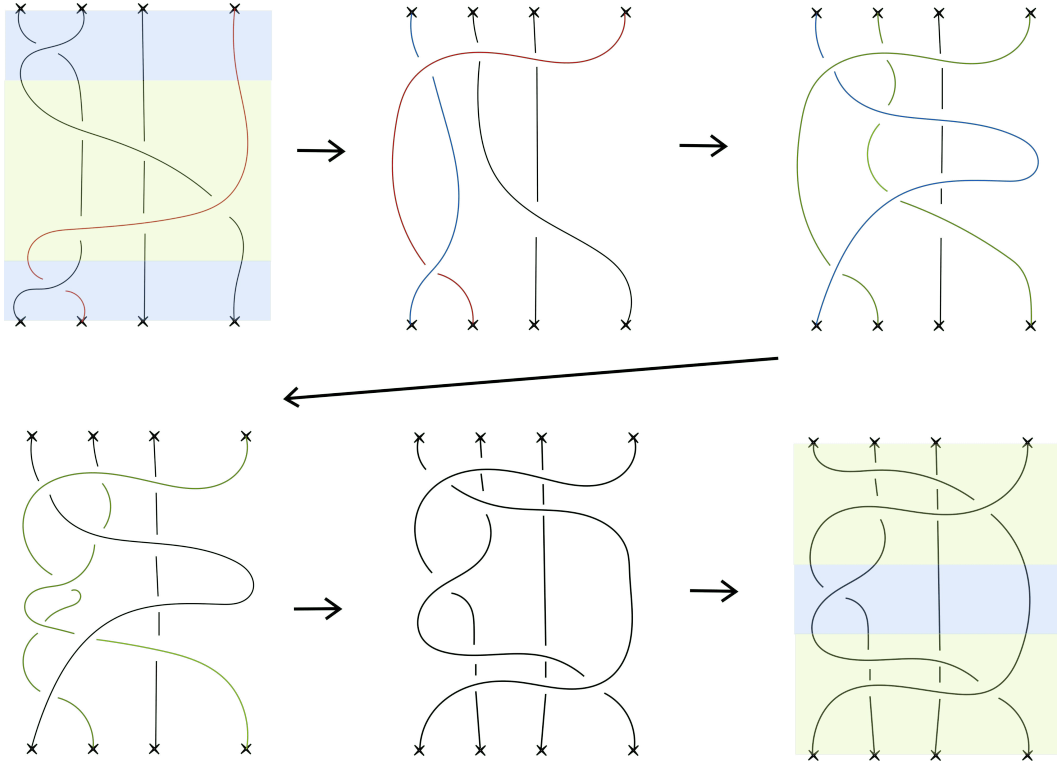


FIGURE 2.7 – Les brins de la tresse concaténée $\tau_1\tau_n\tau_1$ se déplacent pour former $\tau_n\tau_1\tau_n$.

Pour voir que $\tau_1\tau_n\tau_1 = \tau_n\tau_1\tau_n$, on propose cette fois une autre méthode de démonstration qui se fait directement avec la représentation graphique et les équivalences par homotopie :

Ici sur la figure 2.7, on a représenté le graphe de $\tau_1\tau_n\tau_1$. Du premier au tracé au deuxième, on déplace vers le haut le dernier brin (tracé en rouge), et on enlève le croisement inutile entre les deux premiers brins. Du deuxième tracé au troisième, on déforme le premier brin (tracé en bleu) en l'étirant, cela permettra de récupérer τ_n . Pour passer du troisième dessin au quatrième, on croise le deuxième et le quatrième brins (en vert) en ajoutant $\tau_1\tau_1^{-1}$ à la suite du premier bloc pour retrouver la tresse τ_1 . Il n'y a plus qu'à réorganiser lisiblement les brins pour voir apparaître $\tau_n\tau_1\tau_n$.

□

2.1.2 Le sous-groupe des tresses pures PB_n à n brins

Parmi les sous-groupes de B_n , le sous-groupe des tresses pures PB_n nous intéressera particulièrement par la suite. On a vu dans la définition topologique de B_n , que toute tresse à n brins peut être associée à une permutation de \mathfrak{S}_n . Cette association est un morphisme dont le noyau est un sous-groupe de B_n , formé des tresses associées à la permutation identité. On appelle ce noyau le sous-groupe de tresses pures, on le note PB_n . On a une suite exacte courte :

$$0 \rightarrow PB_n \rightarrow B_n \rightarrow \mathfrak{S}_n \rightarrow 0.$$

Autrement dit, une tresse pure $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ à n -brins vérifie $\gamma_i(0) = (b_i, 0)$ et $\gamma_i(1) = (b_i, 1)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

On a également une présentation finie du sous-groupe de tresses pures PB_n , donnée par Artin, bien plus compliquée que celle de B_n , et dont on peut retrouver une version

simplifiée dans le livre [FM11]. Nous retiendrons principalement :

Théorème 2.1.4. *Le sous-groupe des tresses pures à n brins est engendré par des éléments $\alpha_{i,j}$ dont l'expression est la suivante : pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, avec $i < j$,*

$$\alpha_{i,j} = (\tau_{j-1} \cdots \tau_{i+1}) \tau_i^2 (\tau_{i+1}^{-1} \cdots \tau_{j-1}^{-1}).$$

Par exemple, pour $n = 5$, on peut illustrer la tresse $\alpha_{2,5}$ comme sur la figure 2.8.

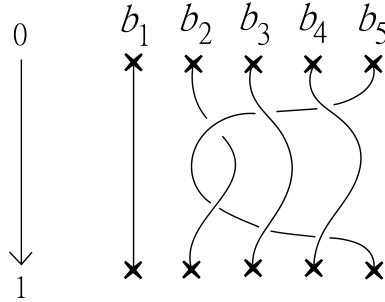


FIGURE 2.8 – Illustration de la tresse $\alpha_{2,5}$ dans B_5

On peut en particulier remarquer que pour $j = i + 1$, la tresse $\alpha_{i,j}$ est égale à la tresse τ_i^2 .

2.1.3 Groupes de tresses et groupes modulaires

Dans cette sous-partie, nous allons présenter rapidement comment considérer le groupe de tresses à n brins comme un groupe modulaire. Avant cela, nous allons voir qu'on peut également définir le groupe de tresses B_n comme un groupe fondamental, ce qui constitue une première étape dans l'interprétation de B_n comme un groupe modulaire. Nous ne donnerons ici que les grandes lignes de chaque étape puisque ces faits sont bien connus, on les retrouve entre autres dans le livre [FM11].

On veut considérer le groupe fondamental de l'ensemble des listes non ordonnées à n éléments tous distincts dans \mathbb{C} . Commençons par la construction de cet ensemble.

Nous allons d'abord considérer le sous-ensemble de \mathbb{C}^n formé des listes n'ayant que des points distincts. Pour cela, on introduit la grande diagonale \mathcal{D}_n de \mathbb{C}^n définie par : $\mathcal{D}_n := \{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \exists i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j : z_i = z_j \}$. Le sous-ensemble de \mathbb{C}^n qui nous intéresse est $\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{D}_n$. Il est clair que \mathcal{D}_n est fermé, alors $\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{D}_n$ hérite naturellement d'une structure de variété différentielle, induite par celle de \mathbb{C}^n .

D'autre part, le groupe symétrique \mathfrak{S}_n agit sur \mathbb{C}^n par permutation des indices, c'est-à-dire $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \sigma \cdot (z_1, \dots, z_n) = (z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(n)})$. L'action de \mathfrak{S}_n permet d'oublier l'ordre dans \mathbb{C}^n , et en particulier dans $\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{D}_n$.

On considère alors $\mathbb{C}^{\langle n \rangle}$ défini par :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{\langle n \rangle} &:= (\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{D}_n) / \mathfrak{S}_n \\ &= \{ \{z_1, \dots, z_n\} \mid \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j \Leftrightarrow z_i \neq z_j \}. \end{aligned}$$

$\mathbb{C}^{\langle n \rangle}$ est une variété différentielle complexe de dimension n . Pour un certain point base $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, un lacet $\gamma \in \pi_1(\mathbb{C}^{\langle n \rangle}, B)$ est une collection de chemins $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$

qui vérifient pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\gamma_i(0) = b_i$, $\gamma_i(1) \in B$ et pour tout $t \in [0, 1]$, $\{\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)\} \in \mathbb{C}^{\langle n \rangle}$, c'est-à-dire qu'à n'importe quel temps donné, les chemins ne s'intersectent pas. On revient donc à la définition d'une tresse de B_n . On vérifie facilement le résultat bien connu :

Proposition 2.1.5. B_n et $\pi_1(\mathbb{C}^{\langle n \rangle}, B)$ sont isomorphes.

Passons maintenant à l'interprétation de B_n comme un groupe modulaire. Rappelons que le groupe modulaire d'une surface S , noté $\text{Mod}(S)$, est donné par :

$$\begin{aligned} \text{Mod}(S) &:= \pi_0(\text{Homeo}^+(S, \partial S)) \\ &= \{[f] \mid f : S \rightarrow S \text{ homéomorphisme, } f|_{\partial S} = \text{Id}\} \end{aligned}$$

où $[f]$ désigne la classe d'équivalence à homotopie près de f . Lorsque S est une surface avec des points marqués, on demande que les homéomorphismes f ainsi que les homotopies préservent l'ensemble des points marqués. Pour S ayant n points marqués, on notera son groupe modulaire $\text{Mod}(S, n)$.

Rappelons que $D \subset \mathbb{C}$ est un disque contenant les points marqués b_1, \dots, b_n . Le groupe modulaire $\text{Mod}(D, n)$ est donc l'ensemble des classes d'homotopie des homéomorphismes du disque D préservant l'ensemble $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ et coïncidant avec $\text{Id}_{\mathbb{C}}$ sur le bord ∂D du disque D .

Théorème 2.1.6. Les groupes B_n et $\text{Mod}(D, n)$ sont isomorphes.

Nous ne ferons pas une démonstration complète de cette proposition qui est déjà connue. Nous présenterons cependant quelques idées intuitives pour que le lecteur puisse plus aisément saisir le lien entre ces deux groupes.

Démonstration partielle : Le lemme d'Alexander nous dit que $\text{Mod}(D)$ est trivial, autrement dit tout homéomorphisme du disque D est homotope à l'identité. Ainsi, pour h un élément de $\text{Mod}(D, n)$, h est en particulier un homéomorphisme de D et on peut trouver une homotopie $F : D \times [0, 1] \rightarrow D$ telle que $F(\cdot, 0) = \text{Id}_D$ et $F(\cdot, 1) = h$. Alors la restriction de F à $\{b_1, \dots, b_n\} \times [0, 1]$ nous donne exactement un élément de $\pi_1(\mathbb{C}^{\langle n \rangle}, B) \simeq B_n$. On peut ainsi associer à un élément de $\text{Mod}(D, n)$ une tresse de B_n , cette correspondance est en fait un isomorphisme comme on peut le voir dans le théorème 9.1 de [FM11]. \square

Il est intéressant de voir quel homéomorphisme du disque est associé à un générateur τ_i de B_n , ou à un générateur $\alpha_{i,j}$ de PB_n . Introduisons pour cela des demi-twists de Dehn pouvant apparaître sur D . Un premier cas de twist de Dehn est celui des disques contenant deux points marqués : pour un disque D_i contenant uniquement les points marqués b_i et b_{i+1} mais aucun autre, le demi-twist de Dehn sur D_i peut se représenter comme sur la figure 2.9.

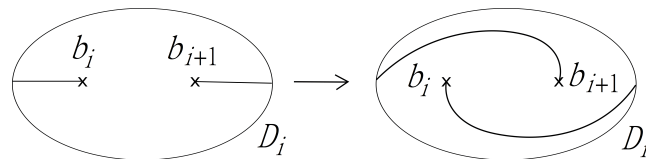


FIGURE 2.9 – Demi-twist de Dehn sur un disque ayant deux points marqués

C'est un homéomorphisme de D à support dans D_i , préservant les points $\{b_i, b_{i+1}\}$ et coïncidant avec Id sur $D \setminus D_i$. Un tel demi-twist est donc un élément de $\text{Mod}(D, n)$. On

peut lui associer une tresse de B_n . En regardant la figure 2.10, on voit que le demi-twist de Dehn de support D_i correspond à la tresse τ_i .

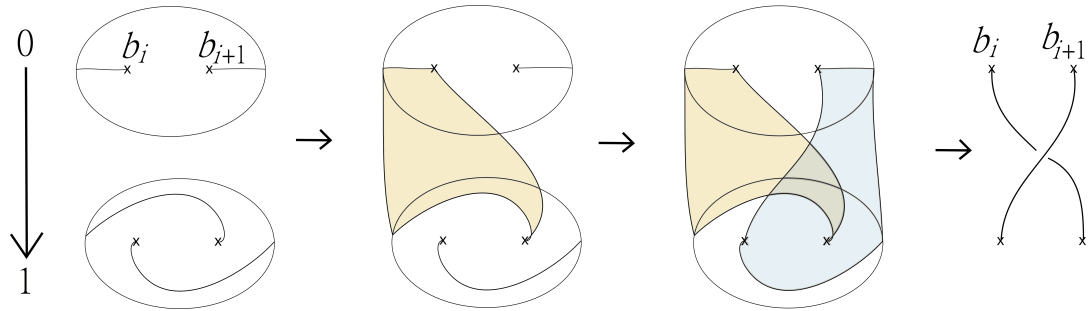


FIGURE 2.10 – Correspondance entre τ_i et le demi-twist de Dehn de support D_i

Le twist de Dehn de support D_i correspond à τ_i^2 et plus généralement, en regardant un twist de Dehn sur un disque ne contenant que les points marqués b_i et b_j , quitte à supposer que $i < j$, on peut voir que ce twist de Dehn correspond à $\alpha_{i,j}$, ce qu'on illustre sur la figure 2.11.

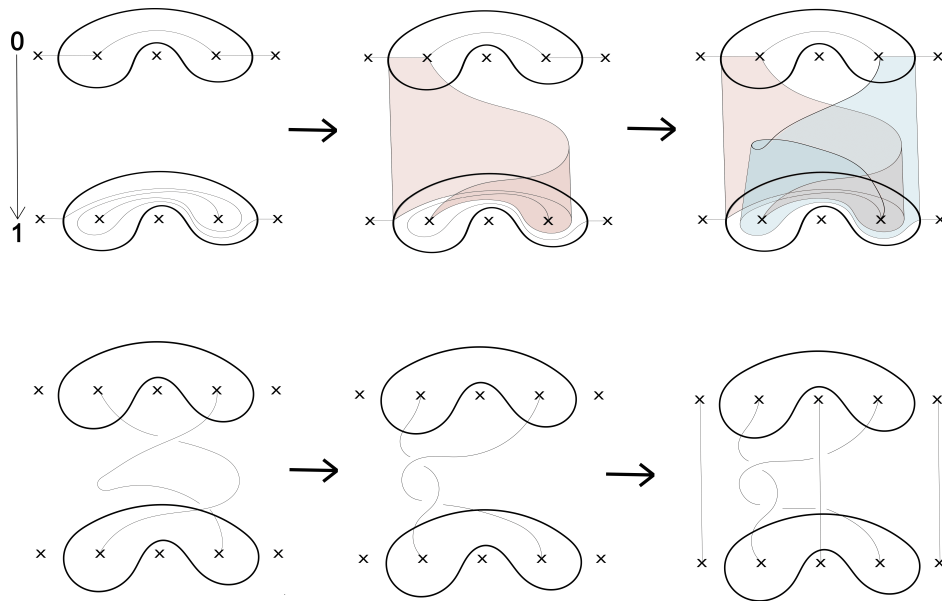


FIGURE 2.11 – Interprétation d'une tresse $\alpha_{i,j}$ comme un twist de Dehn

Par la suite, pour simplifier les notations, on confondra une tresse de B_n avec l'élément lui correspondant dans $\text{Mod}(D, n)$. Nous pourrons ainsi être amenés à parler d'une tresse de B_n comme d'un homéomorphisme de D .

2.2 Les représentations de McMullen

Dans son article [McM13], McMullen construit $d-1$ représentations $\rho_q : B_n \rightarrow U(r_q, s_q)$ du groupe de tresses à n brins dans des groupes unitaires, où d est un entier non nul et q une racine d -ième de l'unité distincte de 1, on note $q = e^{-k\frac{2i\pi}{d}}$ pour $k \in \{1, \dots, d-1\}$. Il utilise pour cela un revêtement cyclique \hat{Y} de la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$, muni d'un automorphisme $T : \hat{Y} \rightarrow \hat{Y}$ vérifiant $T^d = \text{Id}$. Nous exposerons rapidement l'idée de ces constructions, puis nous présenterons certains résultats de McMullen concernant l'espace $H_{dR}^1(\hat{Y})$. Pour chacune des représentations ρ_q , nous expliciterons l'action des générateurs τ_i du groupe de tresses sur l'espace propre de T^* associé à la valeur propre q , noté $H^1(\hat{Y})_q \subset H_{dR}^1(\hat{Y})$.

2.2.1 La construction de \hat{Y} et des représentations

L'idée de la construction de McMullen est la suivante : il considère la courbe algébrique d'équation :

$$y^d = \prod_{i=1}^n (x - b_i)$$

où les b_i sont des points complexes deux à deux distincts, et n et d sont des entiers naturels non nuls. Par un processus de normalisation standard, il obtient une surface de Riemann compacte notée \hat{X} . Ce processus consiste à construire des cartes locales au dessus des points b_i , et de plonger ensuite cette courbe dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, en considérant les zéros de la fonction $F([x : y : z]) = y^d z^{n-d} - \prod_{i=1}^n (x - b_i z)$ si $n \geq d$, et $F([x : y : z]) = y^d - z^{d-n} \prod_{i=1}^n (x - b_i z)$ sinon. La courbe algébrique correspond aux zéros de F sur les points de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ de la forme $[x : y : 1]$, pour compactifier cette surface il faut regarder le point p_{∞} de dernière coordonnée nulle dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ tel que $F(p_{\infty}) = 0$. En séparant les branches qui passent par le point de la courbe p_{∞} , on obtient une surface de Riemann compacte \hat{Y} . Cette surface peut s'interpréter comme un revêtement cyclique $\pi : \hat{Y} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ de degré d , ramifié au-dessus des points marqués b_i et du point ∞ . Le revêtement π est défini sur la courbe algébrique par $(x, y) \mapsto x$.

On dispose sur \hat{Y} d'un automorphisme $T : \hat{Y} \rightarrow \hat{Y}$, défini sur la courbe algébrique par $(x, y) \mapsto (x, \zeta_d y)$ avec $\zeta_d = e^{\frac{2i\pi}{d}}$. Il est clair que T vérifie $T^d = \text{Id}$. Pour un point quelconque $x \in \mathbb{C} \setminus B$, nous avons d pré-images x_0, \dots, x_{d-1} dans \hat{Y} , T permute cycliquement ces pré-images. En général, on indexera les pré-images d'un point quelconque de sorte que $x_j = T^j(x_0)$. Au-dessus des points b_i , nous avons dans \hat{Y} une unique pré-image notée q_i , laissée fixe par T . Au-dessus de ∞ , nous avons dans \hat{Y} un nombre $e = \text{pgcd}(n, d)$ pré-images notées p_0, \dots, p_{e-1} permutées cycliquement par T avec $p_k = T^k(p_0)$ pour tout $k \in \{0, \dots, e-1\}$, on récupère également $T^e(p_0) = p_0$. En particulier, la pré-image d'un voisinage de ∞ est formée de e disques deux à deux disjoints.

D'autre part, on a vu que les tresses de B_n peuvent s'interpréter comme des éléments du groupe modulaire $\text{Mod}(D, n)$ où $D \subset \mathbb{C}$ est un disque ouvert contenant les points marqués b_1, \dots, b_n . Une tresse $\tau \in B_n$ peut donc être considérée comme la classe d'homotopie d'un homéomorphisme de D préservant l'ensemble des points marqués $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ et coïncidant avec Id sur le bord de D . Ainsi, en prolongeant cette tresse sur $\hat{\mathbb{C}}$ par Id en dehors de D , on peut voir τ comme un homéomorphisme $\tau : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. McMullen montre que toute tresse τ de B_n se relève en un élément $\tilde{\tau}$ de $\text{Mod}(\hat{Y})$, ce relevé est unique lorsqu'on impose $\tilde{\tau}(q_1) = q_1$, de sorte que l'opération de relèvement soit un morphisme de groupe. Nous reverrons ce procédé en détail dans le chapitre 5.

On peut également vérifier que les relevés des tresses commutent avec T . McMullen passe ensuite à la cohomologie de de Rham en considérant l'espace $H^1(\hat{Y})$. Le tiré en arrière par l'automorphisme T vérifie $(T^*)^d = \text{Id}$, on décompose alors $H^1(\hat{Y})$ en la somme directe des sous-espaces propres de T^* . En reprenant les notations de McMullen, $H^1(\hat{Y})_q$ est le sous-espace propre de T^* associé à la valeur propre $q = e^{-k\frac{2i\pi}{d}}$ où $k \in \{1, \dots, d-1\}$. Comme T et $\tilde{\tau}$ commutent, les relevés des tresses préservent les $H^1(\hat{Y})_q$. D'autre part, sur $H^1(\hat{Y})$, on dispose d'une forme d'intersection définie par :

$$\forall \eta, \mu \in H^1(\hat{Y}), \quad \langle \eta; \mu \rangle_{\hat{Y}} = \frac{i}{2} \int_{\hat{Y}} \eta \wedge \bar{\mu}.$$

Cette forme d'intersection est non dégénérée lorsqu'elle est restreinte à $H^1(\hat{Y})_q$, et on peut considérer le groupe unitaire $U(H^1(\hat{Y})_q)$, associé à la forme $\langle ; \rangle$ restreinte à $H^1(\hat{Y})_q$. On peut s'assurer que, pour une tresse $\tau \in B_n$, la restriction de $\tilde{\tau}^*$ à $H^1(\hat{Y})_q$ est dans $U(H^1(\hat{Y})_q)$. Pour tout $q \in \{e^{-\frac{2i\pi k}{d}} \mid k = 1, \dots, d-1\}$, on obtient une représentation $\rho_q : B_n \rightarrow U(H^1(\hat{Y})_q) \simeq U(r_q, s_q)$ où (r_q, s_q) est la signature de la forme d'intersection sur $H^1(\hat{Y})_q$.

2.2.2 Quelques résultats de McMullen

Plusieurs des résultats de l'article de McMullen [McM13] seront repris au cours de ce document. Il convient donc de les présenter ici, ils portent sur la surface \hat{Y} en elle-même, sur l'espace $H^1(\hat{Y})_q$ et enfin sur l'expression de l'action des τ_i sur $U(r_q, s_q)$.

Comme expliqué plus haut, \hat{Y} est une surface de Riemann compacte et connexe, qui est également un revêtement cyclique de degré d au-dessus de la sphère de Riemann, ramifié au-dessus des points b_1, \dots, b_n et éventuellement au-dessus de ∞ . Il y a une unique pré-image q_i au-dessus de chacun des b_i , et $e = \text{pgcd}(d, n)$ pré-images p_0, \dots, p_{e-1} au-dessus de ∞ . En appliquant le théorème de Riemann-Hurwitz, on obtient directement le genre de \hat{Y} :

Lemme 2.2.1. *Le genre de \hat{Y} est $g = \frac{1}{2}((d-1)(n-1) - e + 1)$, où $e = \text{pgcd}(n, d)$.*

On a alors :

Corollaire 2.2.2. *La dimension de $H^1(\hat{Y})$ est $2g = (d-1)(n-1) - e + 1$.*

Théorème 2.2.3. *La dimension de $H^1(\hat{Y})_q$ est $n-1$ si $q^n \neq 1$ et $n-2$ sinon.*

Idée de la démonstration : Pour le calcul de cette dimension, qui est un invariant topologique, McMullen suppose que les b_i sont les racines n -ièmes de l'unité, donc \hat{Y} est construit à partir de la courbe algébrique $y^d = x^n - 1$. Il introduit un nouvel automorphisme $R : \hat{Y} \rightarrow \hat{Y}$ défini sur la courbe algébrique par $(x, y) \mapsto (\zeta_n x, y)$, où $\zeta_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, laissant invariant les p_i et permutant les q_j de sorte que $R(q_j) = q_{j-1}$.

Alors $(R^*)^n = \text{Id}$ et comme R et T commutent, on peut décomposer l'espace $H^1(\hat{Y})_q$, où $q = \zeta_d^{-k}$ avec $k \in \{0, \dots, d-1\}$, en la somme directe des sous-espaces propres $H^1(\hat{Y})_{k,j} = \ker(T^* - \zeta_d^{-k} \text{Id}) \cap \ker(R^* - \zeta_n^j \text{Id})$. La décomposition de Hodge sur ces sous-espaces nous donne :

$$H^1(\hat{Y})_q = \bigoplus_{j=0}^{n-1} H^1(\hat{Y})_{k,j} = \left(\bigoplus_{j=0}^{n-1} H^{(1,0)}(\hat{Y})_{k,j} \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=0}^{n-1} H^{(0,1)}(\hat{Y})_{k,j} \right)$$

et donc :

$$H^1(\hat{Y}) = \bigoplus_{k=0}^{d-1} \bigoplus_{j=0}^{n-1} (H^{(1,0)}(\hat{Y})_{j,k} \oplus H^{(0,1)}(\hat{Y})_{j,k}) \quad (2.2.1)$$

McMullen introduit ensuite les $(1,0)$ -formes méromorphes $w_{k,j} = \frac{x^{j-1}}{y^k} dx$ et les $(0,1)$ -formes conjuguées des $w_{k,j}$. En calculant les diviseurs de chacun des $w_{j,k}$ et de leur conjugué, McMullen aboutit à la conclusion que : $H^{(1,0)}(\hat{Y})_{j,k}$ est non vide si $0 < \frac{j}{n} < \frac{k}{d} < 1$ et $H^{(0,1)}(\hat{Y})_{j,k}$ est non vide si $0 < \frac{k}{d} < \frac{j}{n} < 1$. Or, on peut compter qu'il y a exactement $(d-1)(n-1) - e + 1 = 2g$ couples d'indices (j, k) vérifiant l'une ou l'autre de ces conditions, c'est-à-dire qu'il y a exactement $2g = \dim(H^1(\hat{Y}))$ espaces non vides apparaissant dans la somme directe (2.2.1). On en déduit que, pour un couple d'indice $(j, k) \in \{0, \dots, n-1\} \times \{0, \dots, d-1\}$ fixé :

- si $0 < \frac{j}{n} < \frac{k}{d} < 1$, alors $H^1(\hat{Y})_{j,k} = H^{(1,0)}(\hat{Y})_{j,k}$ est de dimension 1
- si $0 < \frac{k}{d} < \frac{j}{n} < 1$, alors $H^1(\hat{Y})_{j,k} = H^{(0,1)}(\hat{Y})_{j,k}$ est de dimension 1
- si aucune des conditions ci-dessus est vérifiée, alors $H^1(\hat{Y})_{j,k} = \{0\}$.

En particulier, pour un k fixé, on a :

$$\dim(H^1(\hat{Y})_q) = \left(\bigoplus_{0 < \frac{j}{n} < \frac{k}{d} < 1} \dim(H^1(\hat{Y}_{k,j})) \right) \oplus \left(\bigoplus_{0 < \frac{k}{d} < \frac{j}{n} < 1} \dim(H^1(\hat{Y}_{k,j})) \right)$$

En comptant le nombre d'indices $j \in \{0, \dots, n-1\}$ vérifiant l'une ou l'autre de ces conditions on a : $\dim(H^1(\hat{Y})_q) = n-1$ si $q^n \neq 1$, et $n-2$ sinon. \square

Théorème 2.2.4. *Pour $q = \zeta_d^{-k}$ fixé, la signature de la forme d'intersection sur $H^1(\hat{Y})_q$ est :*

$$(r_q, s_q) = \left(\left[n \frac{k}{d} - 1 \right], \left[n \left(1 - \frac{k}{n} \right) - 1 \right] \right).$$

La forme d'intersection est non dégénérée sur $H^1(\hat{Y})_q$.

Démonstration : Comme $H^1(\hat{Y})_q = \left(\bigoplus_{0 < \frac{j}{n} < \frac{k}{d} < 1} H^1(\hat{Y})_{k,j} \right) \oplus \left(\bigoplus_{0 < \frac{k}{d} < \frac{j}{n} < 1} H^1(\hat{Y})_{k,j} \right)$ et que

- $\dim(H^{(1,0)}(\hat{Y})_{k,j}) = 1$ si $0 < \frac{j}{n} < \frac{k}{d} < 1$
- $\dim(H^{(0,1)}(\hat{Y})_{k,j}) = 1$ si $0 < \frac{k}{d} < \frac{j}{n} < 1$

alors la signature (r_q, s_q) se détermine en calculant le nombre d'indices $j \in \{0, \dots, n\}$ vérifiant la condition $0 < \frac{j}{n} < \frac{k}{d} < 1$, ce qui nous donne r_q , et le nombre d'indices $j \in \{0, \dots, n-1\}$ vérifiant la condition $0 < \frac{k}{d} < \frac{j}{n} < 1$, ce qui nous donne s_q .

On peut vérifier que $r_q + s_q = \dim(H^1(\hat{Y})_q)$, et la forme d'intersection est donc non dégénérée sur $H^1(\hat{Y})_q$. \square

On note $D_i \subset \mathbb{C}$ le support d'un représentant de $\tau_i \in B_n \simeq \text{Mod}(D, n)$, que l'on peut choisir comme étant un disque ouvert contenant uniquement les points marqués b_i et b_{i+1} , et Y_i la pré-image de D_i dans \hat{Y} . McMullen étudie les sous-surfaces Y_i à l'aide de suites de Mayer-Vietoris. Pour présenter cet outil et la façon dont nous allons l'utiliser, nous faisons d'abord quelques lemmes concernant une sous-surface $Y \subset \hat{Y}$ quelconque, qui pourront être réutilisés dans le reste de la thèse. Puis nous appliquerons ces lemmes aux sous-surfaces Y_i .

On considère donc une sous-surface ouverte non vide Y de \hat{Y} et son complémentaire Y^c dans \hat{Y} . La sous-surface Y^c est prolongée sur son bord en un ouvert dont l'intersection avec Y contient le bord de Y , de même qu'illustré sur la figure 2.12. On note de nouveau

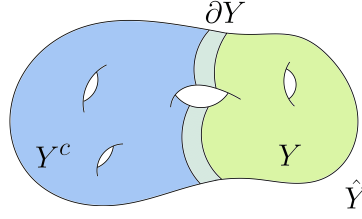


FIGURE 2.12 – Illustration de la notation ∂Y

Y^c la sous-surface Y^c prolongée et par abus de notation, de même que McMullen, on écrira $\partial Y := Y \cap Y^c$, qui est donc ici un ouvert non vide, voisinage du bord de Y .

On obtient alors une suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_c^1(\partial Y) & \longrightarrow & H_c^1(Y) \oplus H_c^1(Y^c) & \longrightarrow & H^1(\hat{Y}) & \longrightarrow & H_c^2(\partial Y) \longrightarrow H_c^2(Y) \oplus H_c^2(Y^c) \\
 \uparrow & & & & & & \downarrow \\
 H^0(\hat{Y}) & & & & & & H^2(\hat{Y})
 \end{array}$$

Cette suite exacte est équivariante par l'action de T^* , et se conserve donc en passant aux sous-espaces propres :

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_c^1(\partial Y)_q & \longrightarrow & H_c^1(Y)_q \oplus H_c^1(Y^c)_q & \longrightarrow & H^1(\hat{Y})_q & \longrightarrow & H_c^2(\partial Y)_q \longrightarrow H_c^2(Y)_q \oplus H_c^2(Y^c)_q \\
 \uparrow & & & & & & \downarrow \\
 H^0(\hat{Y})_q & & & & & & H^2(\hat{Y})_q
 \end{array}$$

La surface \hat{Y} étant connexe, et comme $q \neq 1$, on a $H^0(\hat{Y})_q = \{0\}$ et $H^2(\hat{Y})_q = \{0\}$. On récupère ainsi une suite exacte :

$$0 \rightarrow H_c^1(\partial Y)_q \rightarrow H_c^1(Y)_q \oplus H_c^1(Y^c)_q \rightarrow H^1(\hat{Y})_q \rightarrow H_c^2(\partial Y)_q \rightarrow H_c^2(Y)_q \oplus H_c^2(Y^c)_q \rightarrow 0 \quad (2.2.2)$$

Pour certaines sous-surfaces Y , nous pouvons à partir de la suite (2.2.2) obtenir des suites exactes courtes, ou même des isomorphismes entre certains espaces de cette suite. Les cas qui nous intéressent particulièrement, sont ceux pour lesquels Y (ou éventuellement son complémentaire) est connexe et ∂Y est composé de m anneaux permutés cycliquement par T . Cette dernière condition ne peut être vérifiée que si m divise d . Les $Y_i = \pi^{-1}(D_i)$ sont de tels surfaces. Avant de leur appliquer la suite (2.2.2), rappelons le résultat bien connu suivant :

Lemme 2.2.5. *Pour \mathcal{A} un anneau, $H_c^1(\mathcal{A})$ est de dimension 1.*

Démonstration : \mathcal{A} a le même type d'homotopie que le cercle \mathbb{S}^1 , donc $H^1(\mathcal{A}) = H^1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{C}$. Or la dualité de Poincaré nous dit que, pour M une variété de dimension m , $H_c^k(M) \simeq (H^{m-k}(M))^*$, d'où $\dim(H_c^1(\mathcal{A})) = 1$. \square

On peut construire un générateur η de $H_c^1(\mathcal{A})$ de la façon suivante : $\mathcal{A} \simeq \mathbb{S} \times I$, où $I =]0, 1[$ et \mathbb{S} est le cercle unité. On note (x, t) les coordonnées sur $\mathbb{S}^1 \times I$. On cherche à définir une 1-forme non nulle à support compact η telle que sa classe $[\eta]$ vérifie : $\mathbb{C}[\eta] = H_c^1(\mathbb{S} \times I)$.

On fixe $\phi : I \rightarrow I$ croissante et \mathbb{C}^∞ ainsi qu'un $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que : $\phi(t) = 0$ si $t < \varepsilon$ et $\phi(t) = 1$ si $t > 1 - \varepsilon$. Alors $\phi'(t)$ est nulle sur $]0, \varepsilon[\cup]1 - \varepsilon, 1[$ et strictement positive

sinon, donc son support est inclus dans $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ qui est compact dans I . On pose alors $\eta = \phi'(t)dt$. Clairement η est à support compact et est fermée. Aussi $\eta = d\phi$, et s'il existe f telle que $\eta = df$, alors $f = \phi + c$ où c est constante. Alors f ne peut pas être une forme à support compact, ainsi $[\eta] \in H_c^1(I) \setminus \{0\}$. D'autre part, la projection $p_2 : \mathbb{S}^1 \times I \rightarrow I$ nous donne un morphisme $p_2^* : H_c^1(I) \rightarrow H_c^1(\mathbb{S}^1 \times I)$. On a $[p_2^*(\eta)] \in H_c^1(\mathbb{S}^1 \times I)$ et $\int_{\mathcal{A}} \eta \wedge dx = \int_{]0,1[\times]0,1[} \phi'(t)dt \wedge dx = 1$. Alors $[p_2^*(\eta)]$ est non nul. Le générateur de $H_c^1(\mathbb{S}^1 \times I)$ qui nous intéresse est l'image du générateur η de $H_c^1(I)$ par ce morphisme p_2^* , qui est donc non nul, et que l'on notera également η . Alors $H_c^1(I) \simeq H_c^1(\mathbb{S}^1 \times I) \simeq \mathbb{C}[\eta]$. \square

Regardons ce qu'il se passe pour $H_c^1(\partial Y)_q$, $H_c^2(\partial Y)_q$ lorsque ∂Y est une réunion de $m \in \mathbb{N}^*$ anneaux, permutés cycliquement par T , avec m qui divise d :

Lemme 2.2.6. *Pour $Y \subset \hat{Y}$ tel que ∂Y est une réunion de m anneaux disjoints, permutés cycliquement par T , avec m qui divise d , on a :*

- si $q^m = 1$, alors $H_c^1(\partial Y)_q$ et $H_c^2(\partial Y)_q$ sont de dimension 1
- Si $q^m \neq 1$, ces deux espaces sont nuls

De plus, si Y est une réunion de m disques disjoints, on a de même $H_c^2(Y)_q$ est de dimension 1 si $q^m = 1$ et de dimension nulle sinon.

Démonstration : ∂Y est une réunion disjointe de m anneaux $\mathcal{A}_0, \dots, \mathcal{A}_{m-1}$. Comme T permute ces anneaux, on peut les indexer tels que, pour tout $k \in \{0, \dots, m-1\}$, $T : \mathcal{A}_k \rightarrow \mathcal{A}_{k+1 \bmod m}$. On a : $H_c^1(\partial Y)_q \subset \bigoplus_{k=0}^{m-1} H_c^1(\mathcal{A}_k)$. On sait que les $H_c^1(\mathcal{A}_k)$ sont de dimension 1, et on peut fixer $\eta_0 \neq 0$, construit comme ci-dessus, telle que $H_c^1(\mathcal{A}_0) \simeq \mathbb{C}\eta_0$. On définit alors pour tout $k \in \{0, \dots, m-1\}$, $\eta_k := (T^*)^{m-k}(\eta_0)$, un générateur de $H_c^1(\mathcal{A}_k)$.

La restriction de T^m à \mathcal{A}_0 est une rotation d'angle $\frac{2m\pi}{d}$. En effet, on identifie \mathbb{S}^1 à \mathbb{R}/\mathbb{Z} , alors sur $\mathcal{A}_0 = \mathbb{S}^1 \times I \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times I$ avec $I :=]0, 1[$, l'expression de T^m est donnée par $T^m : (x, t) \mapsto (x + \frac{m}{d}, t)$. En particulier, comme η_0 est de la forme $\phi'(t)dt$, on a : $(T^*)^m(\eta_0) = \eta_0$.

Soit $w \in H_c^1(\partial Y)_q \subset \bigoplus_{k=0}^{m-1} H_c^1(\mathcal{A}_k)$. Il existe des complexes $\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1}$ tels que $w = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k \eta_k$. Comme $T^*(w) = qw$, on récupère une égalité $\sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k \eta_{k-1 \bmod m} = \sum_{k=0}^{m-1} q \lambda_k \eta_k$ d'où, pour tout $k \in \{0, \dots, m-1\}$, $\lambda_{k+1 \bmod m} = q \lambda_k$ et donc $\lambda_k = q^k \lambda_0$, pour tout $k \in \{0, \dots, m-1\}$.

D'autre part, $(T^*)^m(w) = q^m w = \sum_{k=0}^{m-1} q^m \lambda_k \eta_k$, la composante sur $H_c^1(\mathcal{A}_0)_q$ est $q^m \eta_0$. Or $(T^*)^m(w) = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k (T^*)^m(\eta_k)$ dont la composante sur $H_c^1(\mathcal{A}_0)_q$ est $(T^*)^m(\eta_0) = \eta_0$. On a donc : $\lambda_0 = q^m \lambda_0$.

Si $q^m \neq 1$ alors $\lambda_0 = 0$ et donc $w = 0$, et finalement $H_c^1(\partial Y)_q = \{0\}$.

Si $q^m = 1$, alors les λ_k s'écrivent en fonction de λ_0 , et l'élément non nul $\sum_{k=0}^{m-1} q^k \eta_k$ engendre $H_c^1(\partial Y)_q$. Ainsi, $H_c^1(\partial Y)_q$ est de dimension 1.

On montre de la même façon que $H_c^2(\partial Y)_q$ est de dimension 1 si $q^m = 1$ et de dimension nulle sinon. \square

Remarque 2.2.7. *Remarquons que ce lemme s'applique en particulier lorsque Y est la pré-image Y_∞ d'un voisinage D_∞ de ∞ , ne contenant aucun des points marqués b_1, \dots, b_n . On sait alors que la pré-image de D_∞ dans \hat{Y} est formée de $e = \text{pgcd}(d, n)$ disques disjoints E_0, \dots, E_{e-1} . Alors $H_c^1(\partial Y_\infty)_q$ est de dimension 1 si $q^e = 1$ et de dimension nulle sinon, de même pour les espaces $H_c^2(\partial Y_\infty)_q$ et $H_c^2(Y_\infty)_q$.*

Appliquons maintenant ces lemmes à l'étude de Y_i . McMullen considère une nouvelle surface \hat{Y}_i construite à partir de la courbe algébrique $y^d = (x - b_i)(x - b_{i+1})$. La pré-image de D_i dans \hat{Y}_i est notée \mathcal{Y}_i .

Lemme 2.2.8. *On a les isomorphismes $H_c^1(Y_i)_q \simeq H_c^1(\mathcal{Y}_i)_q$ et $H_c^1(\partial\mathcal{Y}_i)_q \simeq H_c^1(\partial Y_i)_q$.*

Démonstration : Y_i et \mathcal{Y}_i sont deux revêtements de degré d au-dessus de D_i , ramifiés de la même façon. Ainsi, on peut trouver un difféomorphisme entre ces deux surfaces. La démonstration pour le second automorphisme est identique \square

Nous sommes ici dans le cas de deux points marqués, on va considérer $\text{pgcd}(d, 2)$. Celui-ci vaut 1 si d est impair, et 2 sinon. Alors $q^{\text{pgcd}(d, 2)} = 1$ équivaut à $q = -1$. En effet, si d est impair, alors $q \neq -1$ et donc $q^1 \neq -1$. Si d est pair, alors $q^2 = 1$ n'est vrai que pour $q = -1$. Comme $\hat{\mathcal{Y}}_i \setminus \mathcal{Y}_i$ est une réunion de $\text{pgcd}(d, 2)$ disques au-dessus d'un voisinage du point $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$, on a exactement $\text{pgcd}(d, 2)$ composantes de bord pour $\mathcal{Y}_i \simeq Y_i$. De plus, T permute cycliquement les disques formant $\hat{\mathcal{Y}}_i \setminus \mathcal{Y}_i$. On peut alors montrer que :

Proposition 2.2.9. *$H_c^1(Y_i)_q \simeq H^1(\hat{\mathcal{Y}}_i)_q$ si $q \neq -1$, et $H_c^1(Y_i)_q \simeq H_c^1(\partial\mathcal{Y}_i)_q$ si $q = -1$.*

Démonstration : En effet, on applique la suite de Mayer-Vietoris (2.2.2) à $\hat{\mathcal{Y}}_i$ et à sa sous-surface \mathcal{Y}_i . Ici, \mathcal{Y}_i^c est une réunion de $\text{pgcd}(d, 2)$ disques disjoints, donc $H_c^1(\mathcal{Y}_i^c)_q = \{0\}$.

On sait que, d'après 2.2.3, la dimension de $H^1(\hat{\mathcal{Y}}_i)_q$ est 1 si $q^{\text{pgcd}(d, 2)} \neq 1$, et 0 sinon. On sait aussi que $\dim(H_c^1(\partial Y_1)_q) = 1$ si $q^{\text{pgcd}(d, 2)} = 1$, et $\dim(H_c^1(\partial Y_1)_q) = 0$ d'après le lemme 2.2.6. Si $q \neq -1$, alors la suite exacte devient :

$$0 \rightarrow \underbrace{H_c^1(\partial\mathcal{Y}_i)_q}_{=\{0\}} \rightarrow H_c^1(\mathcal{Y}_i)_q \oplus \underbrace{H_c^1(\mathcal{Y}_i^c)_q}_{=\{0\}} \rightarrow H^1(\hat{\mathcal{Y}}_i)_q \rightarrow \underbrace{H_c^2(\partial\mathcal{Y}_i)_q}_{=\{0\}}$$

et donc $H_c^1(\mathcal{Y}_i)_q \simeq H^1(\hat{\mathcal{Y}}_i)_q$.

Si $q = -1$, alors :

$$0 \rightarrow H_c^1(\partial\mathcal{Y}_i)_q \rightarrow H_c^1(\mathcal{Y}_i)_q \oplus \underbrace{H_c^1(\mathcal{Y}_i^c)_q}_{=\{0\}} \rightarrow \underbrace{H^1(\hat{\mathcal{Y}}_i)_q}_{=\{0\}} \rightarrow H_c^2(\partial\mathcal{Y}_i)_q$$

et donc $H_c^1(\mathcal{Y}_i)_q \simeq H_c^1(\partial\mathcal{Y}_i)_q$.

Le lemme 2.2.8 permet de conclure. \square

On a en particulier montré que :

Proposition 2.2.10. *Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $H_c^1(Y_i)_q$ est de dimension 1.*

On peut alors démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.2.11. *Pour $q = \zeta_d^{-k}$ un racine d -ième de l'unité différente de 1, on peut construire une famille génératrice de $H^1(\hat{Y})_q$, (g_1, \dots, g_n) où pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, g_i est à support compact dans Y_i , et :*

- g_i engendre $H_c^1(Y_i)_q$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$
- $\langle g_i; g_i \rangle = 2 \text{Im}(q)$
- $\langle g_i; g_{i+1} \rangle = \iota(1 - \bar{q})$
- $\langle g_i; g_{i-1} \rangle = -\iota(1 - q)$
- $\langle g_i; g_j \rangle = 0$ si $|i - j| > 1$.

Démonstration du théorème 2.2.11 : L'étude de $H_c^1(Y_i)_q$ relève du cas $n = 2$, comme on l'a vu plus haut. Supposons donc que $n = 2$, $b_1 = 1$ et $b_2 = -1$. De même que dans la proposition ci-dessus 2.2.9, la suite de Mayer-Vietoris précédente (2.2.2) et le lemme 2.2.2 nous permettent d'affirmer que $H_c^1(Y_1)_q \simeq H^1(\hat{Y})_q$ si $q \neq -1$, et $H_c^1(Y_1)_q \simeq H_c^1(\partial Y_1)_q$ sinon.

Dans le premier cas, on peut appliquer le théorème 2.2.3 pour avoir $\dim(H_c^1(Y_i)_q) = 1$ et de plus, appliquées avec $j = 1$ et $n = 2$, la condition $0 < \frac{j}{n} < \frac{k}{d} < 1$ revient ici à $\text{Im}(q) > 0$ et la condition $0 < \frac{k}{d} < \frac{j}{n} < 1$ revient à $\text{Im}(q) < 0$. On peut alors fixer un élément non nul $g_1 \in H_c^1(Y_1)_q$ qui vérifie $\langle g_1; g_1 \rangle = 2 \text{Im}(q)$.

Dans l'autre cas, ∂Y_1 est la réunion disjointe de deux anneaux permutés par T et d'après le lemme 2.2.2, la dimension de $H_c^1(\partial Y_1)_q$ vaut 1. On construit directement un générateur de cet espace comme dans le lemme 2.2.6 ci-dessus, on peut vérifier que ce générateur est tel que : $\langle g_1; g_1 \rangle = 0 = 2 \text{Im}(-1)$.

Pour $n > 2$, il est ensuite possible de calculer la forme d'intersection entre deux des éléments g_i . Pour ses calculs, McMullen suppose que les b_i sont les racines n -ièmes de l'unité, et en réintroduisant l'automorphisme R de \hat{Y} défini sur la courbe algébrique par $R(x, y) = (\zeta_n x, y)$, il obtient que :

$$R^*(g_i) = g_{i-1} \quad (2.2.3)$$

ce qui lui permet de montrer que le calcul de $\langle g_i, g_{i+1} \rangle$ est indépendant de la valeur de n et d'obtenir ainsi les formules annoncées dans le théorème. On retrouve les détails de cette preuve dans la démonstration du théorème 4.1 de l'article [McM13]. \square

La relation ci-dessus (2.2.3) nous permet de voir que $\sum_{i=1}^n g_i$ est un vecteur dans $H^1(\hat{Y})_{0,k} = \{0\}$. Ainsi $\sum_{i=1}^n g_i = 0$. On en déduit :

Remarque 2.2.12. *La famille (g_1, \dots, g_{n-1}) est également une famille génératrice de $H^1(\hat{Y})_q$.*

Maintenant que des générateurs de $H^1(\hat{Y})_q$ sont trouvés, McMullen explicite l'action des tresses de B_n sur cette famille génératrice. Il en déduit :

Théorème 2.2.13. *L'expression de l'action d'un τ_i sur $U(H^1(\hat{Y})_q)$ est donnée par :*
 $\forall x \in H^1(\hat{Y})_q$,

$$\tilde{\tau}_i^*(x) = \begin{cases} x - (q+1) \frac{\langle x; g_i \rangle}{\langle g_i; g_i \rangle} g_i & \text{si } q \neq -1 \\ x - \frac{1}{2} \langle x; g_i \rangle & \text{sinon.} \end{cases}$$

Idée de la démonstration : Dans le cas $q \neq -1$, McMullen montre que $\tilde{\tau}_i^*$ coïncide avec $-T^*$ sur $H_c^1(Y_i)_q$, ce que l'on peut voir en se ramenant au cas $n = 2$, les détails se trouvent dans la partie 4 de l'article [McM13]. Alors $\tilde{\tau}_i^*(g_i) = -qg_i$ puisque $g_i \in H_c^1(Y_i)_q$. Comme le support de τ_i est D_i , $\tilde{\tau}_i^*$ laisse invariant $H_c^1(Y_i^c)_q$, c'est-à-dire $\tilde{\tau}_i^*$ fixe les éléments dont le support est dans Y_i^c , et en particulier il fixe donc les g_j pour $|i - j| > 1$.

On veut faire un lien entre $H_c^1(Y_i^c)_q$ et $(H_c^1(Y_i)_q)^\perp$. On sait que la forme d'intersection est non dégénérée sur $H^1(\hat{Y})_q$, on a alors une première décomposition $H^1(\hat{Y})_q \simeq H_c^1(Y_i)_q \oplus (H_c^1(Y_i)_q)^\perp$. D'autre part, la suite de Mayer-Vietoris dans le cas compact nous donne également un isomorphisme $H^1(\hat{Y})_q \simeq H_c^1(Y_i)_q \oplus H_c^1(Y_i^c)_q$, on a donc $H_c^1(Y_i^c)_q \simeq (H_c^1(Y_i)_q)^\perp$. Un élément $w \in H^1(\hat{Y})_q$ admet une écriture $w = \lambda g_i + w'$ où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $w' \in (H_c^1(Y_i)_q)^\perp \simeq$

$H_c^1(Y_i^c)_q$. Alors $\tilde{\tau}_i^*(w) = -q\lambda g_i + w' = w - (q+1)\lambda g_i$. Comme $\langle w; g_i \rangle = \lambda \langle g_i; g_i \rangle$, et que dans le cas $q \neq -1$, on a $\langle g_i; g_i \rangle \neq 0$, on a donc, pour tout $w \in H^1(\hat{Y})_q$:

$$\tilde{\tau}_i^*(w) = w - (q+1) \frac{\langle w; g_i \rangle}{\langle g_i; g_i \rangle} g_i.$$

Dans le cas $q = -1$, McMullen montre que :

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_i^*(g_i) &= g_i \\ \tilde{\tau}_i^*(g_{i+1}) &= g_{i+1} - g_i = g_{i+1} + qg_i = g_{i+1} - \frac{\iota}{2} \times (-\iota(1-q))g_i = g_{i+1} - \frac{\iota}{2} \langle g_{i+1}, g_i \rangle g_i \\ \tilde{\tau}_i^*(g_{i-1}) &= g_{i-1} + g_i = g_{i-1} - (-1)g_i = g_{i-1} - \frac{\iota}{2} (\iota(1-\bar{q}))g_i = g_{i-1} - \frac{\iota}{2} \langle g_{i-1}; g_i \rangle. \end{aligned}$$

Enfin, comme tout élément $w \in H^1(\hat{Y})_q$ s'écrit comme une combinaison linéaire des g_i , on obtient la formule attendue. \square

Dans la pratique, on utilisera principalement les formules suivantes, qui explicitent l'action des $\tilde{\tau}_i^*$ sur les g_1, \dots, g_n :

Corollaire 2.2.14. *Pour tout $q \neq 1$ et pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $|i - j| > 1$, on a :*

$$\tilde{\tau}_i^*(g_i) = -qg_i \quad ; \quad \tilde{\tau}_i^*(g_{i+1}) = g_{i+1} + qg_i \quad ; \quad \tilde{\tau}_i^*(g_{i-1}) = g_{i-1} + g_i \quad ; \quad \tilde{\tau}^*(g_j) = g_j.$$

Par la suite, nous nous intéresserons aux éléments $\tilde{\tau}_i^{2*}$, on peut dès à présent exprimer leur action sur la famille (g_1, \dots, g_n) :

Proposition 2.2.15. *Pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$ avec $|i - j| > 1$, on a :*

$$\begin{aligned} (\tilde{\tau}_i^{2*})^*(g_i) &= q^2 g_i \\ (\tilde{\tau}_i^{2*})^*(g_{i+1}) &= g_{i+1} + q(1-q)g_i \\ (\tilde{\tau}_i^{2*})^*(g_{i-1}) &= g_{i-1} + (1+q)g_i \\ (\tilde{\tau}_i^{2*})^*(g_j) &= g_j \end{aligned}$$

On a rappelé les principales définitions et notations, ainsi que les résultats de McMullen les plus utiles pour cette thèse. Avant de passer à la généralisation de ces derniers, nous allons aborder avec un nouveau point de vu le théorème 2.2.11 dans lequel McMullen explicite des générateurs de $H^1(\hat{Y})_q$. Nous utiliserons pour cela l'homologie, et les outils développés dans ce prochain chapitre nous seront utiles lors de la généralisation du théorème 2.2.11.

Chapitre 3

Interprétation en homologie des résultats de McMullen

Dans ce chapitre, nous proposons une construction d'une famille génératrice de $H^1(\hat{Y})_q$ vérifiant le théorème 2.2.11, en utilisant l'homologie. Ici la surface \hat{Y} correspond à celle présentée dans le chapitre précédent relevant du cas de McMullen, en particulier \hat{Y} est compacte. On rappellera la définition de la forme d'intersection $\langle ; \rangle$ sur $H^1(\hat{Y})_q$ et de la forme d'intersection sur $H_1(\hat{Y})$, notée int et que nous définirons par la suite, ainsi que le lien entre les deux, donné par la dualité de Poincaré. Les éléments g_i pourront être construits comme les duaux d'éléments $\tilde{c}_i \in H_1(\hat{Y})_{\bar{q}}$, où $H_1(\hat{Y})_{\bar{q}}$ est le sous-espace propre de T_* dans $H_1(\hat{Y})$, associé à la valeur propre \bar{q} . On trouve alors des relations entre les \tilde{c}_i qui se transposent aux g_i .

Les résultats principaux de ce chapitre sont les suivants :

Théorème 3.0.1. *Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, notons c_i un chemin de b_i à b_{i+1} , de sorte que le chemin concaténé $c_1 \cdots c_n$ forme le bord d'un disque. On note $c_{i,0}, \dots, c_{i,d-1}$ les d relevés de chaque c_i sur \hat{Y} indexés convenablement, et \mathbf{c}_i la 1-chaîne $\mathbf{c}_i = \sum_{m=0}^{d-1} q^m c_{i,m}$. Alors en notant g_i le dual de Poincaré de $2 \frac{\sqrt{1-\text{Re}(q)}}{\sqrt{d}} \mathbf{c}_i$, la famille (g_1, \dots, g_n) vérifie le théorème 2.2.11 de McMullen, c'est-à-dire que (g_1, \dots, g_n) engendre $H^1(\hat{Y})_q$ et pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$: g_i engendre $H_c^1(Y_i)_q$ et*

$$\langle g_i, g_j \rangle = \begin{cases} \iota(1 - \bar{q}) & \text{si } j = i + 1 \\ 2 \text{Im}(q) & \text{si } j = i \\ -\iota(1 - q) & \text{si } j = i - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette construction de la famille (g_1, \dots, g_n) permet de retrouver naturellement des relations entre les g_i . En notant Y_∞ la pré-image d'un voisinage D_∞ de ∞ , on peut retrouver la relation suivante déjà donnée par McMullen :

Proposition 3.0.2. $\sum_{i=1}^n g_i = 0 \in H_c^1(\hat{Y} \setminus Y_\infty)$.

On montre également une nouvelle relation pour $q^e = 1$, qui nous sera utile dans le cas généralisé, pour construire des générateurs lorsque $q^e = 1$. Cette relation est la suivante :

Théorème 3.0.3. Pour $q^e = 1$, où $e = \text{pgcd}(d, n)$, en notant Y_∞ la pré-image d'un voisinage de l'infini, l'élément $g \in H_c^1(\hat{Y} \setminus Y_\infty)_q$ défini par :

$$g := \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\bar{q}^i - 1}{\bar{q}} g_i$$

est non nul et admet un représentant à support dans $\partial(\hat{Y} \setminus Y_\infty)$ qui engendre $H_c^1(\partial(\hat{Y} \setminus Y_\infty))_q$

On utilisera principalement le point de vue en homologie par la suite afin de trouver des relations entre les générateurs dans le cas plus général, en particulier nous serons amenés à considérer plusieurs familles génératrices dépendantes du choix d'indexation des b_1, \dots, b_n , on pourra grâce à cette construction en homologie faire le passage d'une famille génératrice à une autre.

Commençons par définir les formes d'intersections en cohomologie et en homologie.

3.1 Les formes d'intersections en cohomologie et en homologie

Soient $n, d \in \mathbb{N}^*$, et \hat{Y} la surface de Riemann obtenue à partir de la courbe algébrique : $y^d = x^n - 1$.

3.1.1 La forme d'intersection $\langle ; \rangle$ sur $H^1(\hat{Y})$

Sur $H_{dR}^1(\hat{Y}, \mathbb{C})$ noté $H^1(\hat{Y})$, une 1-forme η peut localement s'écrire $\eta = Pdx + Qdy$, alors $\bar{\eta}$ est donné par $\bar{\eta} = \overline{P}dx + \overline{Q}dy$. On dispose de la forme d'intersection $\langle ; \rangle$ définie par :

$$\forall \eta, \mu \in H^1(\hat{Y}), \quad \langle \eta; \mu \rangle = \frac{i}{2} \int_{\hat{Y}} \eta \wedge \bar{\mu}.$$

Sur \hat{Y} , on a également l'automorphisme T vérifiant notamment $T^d = \text{Id}$. On décompose comme précédemment $H^1(\hat{Y})$ en la somme directe des d sous-espaces propres $H^1(\hat{Y})_q$ de T^* , associés respectivement aux valeurs propres $q \in \{e^{-\frac{2i\pi k}{d}} \mid k \in \{0, \dots, d-1\}\}$. Dans tout ce qui suit, q représentera une racine d -ième de l'unité, on supposera de plus que $q \neq 1$.

De façon générale, lorsque $Y \subset \hat{Y}$ est une sous-surface ouverte de \hat{Y} , l'inclusion $i : Y \rightarrow \hat{Y}$ donne $i_* : H_c^1(Y)_q \rightarrow H_c^1(\hat{Y}) = H^1(\hat{Y})$. On pourra alors calculer pour $\eta, \mu \in H_c^1(Y)$ la forme d'intersection $\langle i_*(\eta); i_*(\mu) \rangle$ sur $H^1(\hat{Y})_q$. Par abus de notation, on écrira $\langle \eta, \mu \rangle$ plutôt que $\langle i_*(\eta); i_*(\mu) \rangle$.

Profitons d'avoir introduit la définition de cette forme d'intersection pour revenir sur la cohomologie d'un anneau \mathcal{A} dans \hat{Y} . On va pouvoir montrer le résultat suivant qui complète le lemme 2.2.5 :

Lemme 3.1.1. Pour \mathcal{A} un anneau de \hat{Y} , tout générateur η de $H_c^1(\mathcal{A})_q$ vérifie $\langle \eta; \eta \rangle = 0$.

Démonstration : On construit un générateur η de $H_c^1(\mathcal{A})$ comme dans la partie précédente. Il nous suffit de vérifier que $\langle \eta, \eta \rangle = 0$. Rappelons que $\mathcal{A} \simeq \mathbb{S}^1 \times I$ avec $I =]0, 1[$, et η est de la forme $\eta = \phi'(t)dt$ avec $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés énoncées précédemment. On calcule :

$$\langle \eta; \eta \rangle = \frac{i}{2} \int_{\hat{Y}} \eta \wedge \bar{\eta} = \frac{i}{2} \int_{\mathcal{A}} \eta \wedge \bar{\eta}.$$

On a alors :

$$\langle \eta; \eta \rangle = \frac{i}{2} \int_I \phi'^2(t) dt \wedge dt = 0.$$

□

En particulier, on a vu au cours de la démonstration du lemme 2.2.6, que si $Y \subset \hat{Y}$ est une sous-surface telle que, en reprenant les notations ci-dessus, ∂Y est une réunion de m anneaux $\mathcal{A}_0, \dots, \mathcal{A}_{m-1}$ disjoints et permutés cycliquement par T , avec m qui divise d , alors $H_c^1(\partial Y)_q$ est engendré par l'élément $\eta := \sum_{l=0}^{m-1} q^l \eta_l$ où $\eta_l = (T^{m-l})^*(\eta_0)$. Ici les η_l interprétés dans $H_c^1(\hat{Y})_q = H^1(\hat{Y})_q$ sont à support deux à deux disjoints, et donc $\langle \eta_l; \eta_j \rangle = 0$ pour tout $l, j \in \{0, \dots, m-1\}$. On a alors immédiatement :

Corollaire 3.1.2. *Si ∂Y est la réunion disjointe de m anneaux de \hat{Y} permutés cycliquement par T , lorsque $q^m = 1$, $H_c^1(\partial Y)_q$ est engendré par un élément η vérifiant $\langle \eta; \eta \rangle = 0$.*

Ce corollaire sera utilisé dans les chapitres suivants. On s'intéresse à présent à la forme d'intersection *int* en homologie.

3.1.2 La forme d'intersection *int* sur $H_1(\hat{Y})$

En homologie, nous disposons également d'une forme d'intersection, notée *int*. Pour deux lacets α et β de \hat{Y} , on note $int(\alpha, \beta)$ le nombre de points d'intersection entre ces deux chemins comptés avec signe : si p est un point d'intersection entre α et β , on note $\varepsilon_{\alpha, \beta}(p) = 1$ si l'orientation de α par rapport à β est positive, et $\varepsilon_{\alpha, \beta}(p) = -1$ sinon.

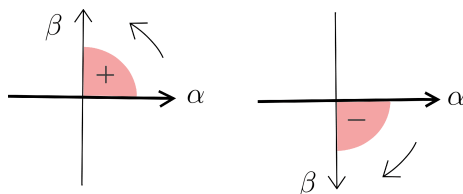


FIGURE 3.1 – Orientation de l'intersection entre deux chemins α et β

Ainsi :

$$int(\alpha, \beta) = \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \varepsilon_{\alpha, \beta}(p).$$

Le nombre de points d'intersection est invariant par classe d'homologie et vérifie les propriétés suivantes :

- $int(\alpha, \beta) = -int(\beta, \alpha)$;
- $int(\alpha, \lambda\beta) = int(\lambda\alpha, \beta) = \lambda int(\alpha, \beta)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}$
- $int(\alpha + \beta, \gamma) = int(\alpha, \gamma) + int(\beta, \gamma)$.

Ainsi, *int* se définit sur $H_1(\hat{Y})$ avec pour toute classe $[\alpha], [\beta] \in H_1(\hat{Y})$, en notant α un représentant de $[\alpha]$ et β un représentant de $[\beta]$,

$$int([\alpha], [\beta]) = int(\alpha, \beta) = \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \varepsilon_{\alpha, \beta}(p).$$

On peut de nouveau considérer l'automorphisme T de \hat{Y} . Pour α une courbe sur \hat{Y} et $[\alpha]$ sa classe dans $H_1(\hat{Y}, \mathbb{R})$, on définit $T_*([\alpha]) = [T(\alpha)]$. On identifie α à sa classe dans

$H_1(\hat{Y}, \mathbb{R})$ et on note alors $T_*(\alpha) = T(\alpha)$. On a également $(T_*)^d = \text{Id}$ et on peut considérer les sous-espaces propres de T_* , que l'on note $H_1(\hat{Y}, \mathbb{R})_{\bar{q}}$ pour q une racine d -ième de l'unité définie comme précédemment. On peut faire le lien entre *int* et $\langle ; \rangle$, via la dualité de Poincaré.

3.1.3 Lien entre les formes d'intersections en homologie et en cohomologie

Pour $Y \subset \hat{Y}$ une sous-surface ouverte dans \hat{Y} et invariante par T , la dualité de Poincaré nous donne un isomorphisme $H_1(Y, \mathbb{R}) \simeq H_c^1(Y, \mathbb{R})$. En particulier, on pourra utiliser les résultats suivants pour $Y = \hat{Y}$, rappelons alors que comme \hat{Y} est compacte, $H_c^1(\hat{Y}) = H^1(\hat{Y})$. On définit la dualité de Poincaré de la façon suivante : $\eta \in H_c^1(Y)$ et $\alpha \in H_1(Y)$ sont duaux si :

$$\forall w \in H^1(Y), \quad \langle w, \eta \rangle = \int_{\alpha} w.$$

On explicite ici la construction du dual de Poincaré d'un élément de $H_1(Y)$. Pour α une courbe fermée simple C^∞ de Y , on considère un voisinage tubulaire de α , qui est difféomorphe à $\mathbb{S}^1 \times]0, 1[$. Soit $\phi :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ , croissante, valant 0 sur un intervalle $]0, \varepsilon[$ et 1 sur $]1 - \varepsilon, 1[$ de sorte que ϕ' a pour support $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$. Alors $\eta_\alpha = \phi'(t)dt$ est une 1-forme fermée sur $\mathbb{S}^1 \times]0, 1[$, représentant un élément dans $H_c^1(Y)$.

Lemme 3.1.3. η_α est le dual de Poincaré de α .

Démonstration : Soit w une 1-forme fermée sur Y . On considère un voisinage tubulaire de α comme précédemment, difféomorphe à $\mathbb{S}^1 \times]0, 1[$, avec (θ, t) les coordonnées sur $\mathbb{S}^1 \times]0, 1[$. Comme $\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on identifie les fonctions et les 1-formes sur $\mathbb{S}^1 \times]0, 1[$ avec des fonctions et des 1-formes sur $\mathbb{R} \times]0, 1[$ invariantes par la translation $\theta \rightarrow \theta + 1$. Alors $w = P(\theta, t)dt + Q(\theta, t)d\theta$ avec P et Q qui sont C^∞ et vérifient $P(\theta, t) = P(\theta + 1, t)$, $Q(\theta, t) = Q(\theta + 1, t)$ pour tout $(\theta, t) \in \mathbb{R} \times]0, 1[$. w est fermée donc $\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial Q}{\partial t}$. On peut vérifier que $\int_Y \eta_\alpha \wedge w = \int_0^1 Q(1 - \varepsilon, \theta)d\theta = \int_{\alpha'} w$ où α' est la courbe qui s'identifie à $\mathbb{S}^1 \times \{1 - \varepsilon\}$ et est donc homotope à α . En effet :

$$\begin{aligned}
\int_Y \eta \wedge w &= \int_{\mathbb{S}^1} \int_{]0;1[} \phi'(t) dt \wedge (P(t, \theta) dt + Q(t, \theta) d\theta) \\
&= \int_{\mathbb{S}^1} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \phi'(t) Q(t, \theta) dt d\theta \\
&= \int_0^1 \left(\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \phi'(t) Q(t, \theta) dt \right) d\theta \\
&= \int_0^1 \left([\phi(t) Q(t, \theta)]_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} - \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \phi(t) \frac{\partial Q}{\partial t}(t, \theta) dt \right) d\theta \\
&= \int_0^1 Q(1 - \varepsilon, \theta) d\theta - \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \int_0^1 \phi(t) \frac{\partial P}{\partial \theta}(t, \theta) dt d\theta \\
&= \int_0^1 Q(1 - \varepsilon, \theta) d\theta - \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \left(\int_0^1 \frac{\partial P(t, \theta)}{\partial \theta} d\theta \right) \phi(t) dt \\
&= \int_0^1 Q(1 - \varepsilon, \theta) d\theta - \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \underbrace{(P(t, 1) - P(t, 0))}_{=0} \phi(t) dt \\
&= \int_0^1 Q(1 - \varepsilon, \theta) d\theta \\
&= \int_{\alpha'} w = \int_{\alpha} w.
\end{aligned}$$

Ainsi, η est le dual de α . □

En conséquence, on a le lemme suivant :

Lemme 3.1.4. *Pour α et β deux courbes fermées sur Y et $\eta_{\alpha}, \eta_{\beta}$ les 1-formes fermées associées, définies à partir d'une fonction ϕ comme ci-dessus, on a :*

$$\text{int}(\alpha, \beta) = \int_Y \eta_{\alpha} \wedge \eta_{\beta} = \int_{\hat{Y}} \eta_{\alpha} \wedge \eta_{\beta}.$$

Démonstration : On considère des voisinages tubulaires de α et de β , notés respectivement V_{α} et V_{β} , définis comme dans le lemme précédent. On peut considérer que les courbes α et β s'intersectent transversalement en chacun des points d'intersection entre α et β . Ainsi, pour tout point $p \in \alpha \cap \beta$, on peut fixer un voisinage V_p diffeomorphe à $]0; 1[\times]0; 1[$ tel que l'intersection avec α correspond à $]0; 1[\times \{0\}$ et l'intersection avec β correspond à $\{0\} \times]0; 1[$. En notant (s, t) les coordonnées sur V_p , on peut écrire, si β va vers le haut, $\eta_{\alpha} = \phi'(t) dt$ et $\eta_{\beta} = -\phi'(s) ds$. Alors :

$$\int_{V_p} \eta_{\alpha} \wedge \eta_{\beta} = \int_0^1 \int_0^1 \phi'(s) \phi'(t) ds dt = \int_0^1 \phi'(t) \left(\int_0^1 \phi'(s) ds \right) dt = 1.$$

A l'inverse, si β est orienté vers le bas, alors $\int_{V_p} \eta_{\alpha} \wedge \eta_{\beta} = -1$. Ainsi, $\text{int}(\alpha, \beta) = \int_{\hat{Y}} \eta_{\alpha} \wedge \eta_{\beta}$. □

La correspondance $\alpha \mapsto \eta_{\alpha}$ induit un isomorphisme $H_1(Y, \mathbb{R}) \rightarrow H_c^1(Y, \mathbb{R})$. Reprenons maintenant le cas de \hat{Y} . On sait que la dimension de $H_c^1(\hat{Y}, \mathbb{R})$ et de $H_1(\hat{Y}, \mathbb{R})$ est $2g$, où g est le genre de \hat{Y} . Considérons une base (c_1, \dots, c_{2g}) de $H_1(\hat{Y}, \mathbb{R})$, formée de courbes fermées simples. On considère les η_i , 1-formes associées à c_i pour chaque $i \in \{1, \dots, 2g\}$.

Alors les η_i forment une base de $H^1(\hat{Y}, \mathbb{R})$. Rappelons que dans le travail de McMullen, la notation $H^1(\hat{Y})$ est plutôt utilisé pour $H^1(\hat{Y}, \mathbb{C})$. Cet espace s'identifie naturellement à :

$$\left\{ \sum_{i=1}^{2g} \lambda_i \eta_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_{2g} \in \mathbb{C} \right\}.$$

Sur cet espace, on définit la conjugaison complexe par : $\overline{\sum_{i=1}^{2g} \lambda_i \eta_i} = \sum_{i=1}^{2g} \bar{\lambda}_i \eta_i$. On peut de même identifier $H_1(\hat{Y}, \mathbb{C})$ à l'espace :

$$\left\{ \sum_{i=1}^{2g} \lambda_i c_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_{2g} \in \mathbb{C} \right\}$$

sur lequel on peut également définir la conjugaison complexe : $\overline{\sum_{i=1}^{2g} \lambda_i c_i} = \sum_{i=1}^{2g} \bar{\lambda}_i c_i$. On étend l'identification $H_1(\hat{Y}, \mathbb{R}) \simeq H_c^1(\hat{Y}, \mathbb{R})$ à une identification $H_1(\hat{Y}, \mathbb{C}) \simeq H^1(\hat{Y}, \mathbb{C})$. Sur $H^1(\hat{Y}, \mathbb{C})$, on définit la forme hermitienne non dégénérée :

$$\langle \eta, \mu \rangle := \frac{i}{2} \int_{\hat{Y}} \eta \wedge \bar{\mu}$$

et on étend sur $H_1(\hat{Y}, \mathbb{C})$ la forme bilinéaire anti-symétrique *int* par :

$$\text{int} \left(\sum_{i=1}^{2g} \lambda_i c_i, \sum_{j=1}^{2g} \lambda'_j c_j \right) = \sum_{i=1}^{2g} \sum_{j=1}^{2g} \lambda_i \lambda'_j \text{int}(c_i, c_j).$$

On a :

Lemme 3.1.5. *Soient $\alpha, \beta \in H_1(\hat{Y}, \mathbb{C})$ et $\eta_\alpha, \eta_\beta \in H_c^1(\hat{Y}, \mathbb{C})$ leur dual de Poincaré. Alors :*

$$\langle \eta_\alpha, \eta_\beta \rangle = \frac{i}{2} \text{int}(\alpha, \bar{\beta}).$$

Démonstration : On note $\alpha = \sum_{i=1}^{2g} \lambda_i c_i$ et $\beta = \sum_{j=1}^{2g} \lambda'_j c_j$, où les λ_i, λ'_j sont des complexes. Par définition, on a donc $\eta_\alpha = \sum_{i=1}^{2g} \lambda_i \eta_i$ et $\eta_\beta = \sum_{j=1}^{2g} \lambda'_j \eta_j$. Alors :

$$\begin{aligned} \langle \eta_\alpha, \eta_\beta \rangle &= \frac{i}{2} \sum_{i,j=1}^{2g} \lambda_i \bar{\lambda}'_j \int_{\hat{Y}} \eta_i \wedge \eta_j \\ &= \frac{i}{2} \sum_{i,j=1}^{2g} \lambda_i \bar{\lambda}'_j \text{int}(c_i, c'_j) \\ &= \frac{i}{2} \text{int}(\alpha, \bar{\beta}). \end{aligned}$$

□

On peut alors définir T_* sur $H_1(\hat{Y}, \mathbb{C}) =: H_1(\hat{Y})$ avec $T_*(\alpha) = T(\alpha)$ pour $\alpha \in H_1(\hat{Y})$. On démontre alors le lemme suivant :

Lemme 3.1.6. $H_1(\hat{Y})_{\bar{q}} \simeq H^1(\hat{Y})_q$.

Démonstration : Considérons $\eta \in H^1(\hat{Y})_q$ et son dual $\alpha \in H_1(\hat{Y})$. Alors pour tout $w \in H^1(\hat{Y})$, on a par définition :

$$\begin{aligned}
\int_{T_*(\alpha)} w &= \int_{T(\alpha)} w := \int_{\alpha} T^*(w) = \int_{\hat{Y}} \eta \wedge T^*(w) \\
&= \int_{\hat{Y}} T^*((T^*)^{-1}(\eta) \wedge w) \\
&= \int_{\hat{Y}} (T^*)^{-1}(\eta) \wedge w \\
&= \int_{\hat{Y}} q^{-1}\eta \wedge w \\
&= q^{-1} \int_{\hat{Y}} \eta \wedge w \\
&= \bar{q} \int_{\alpha} w
\end{aligned}$$

donc $\int_{T_*(\alpha)} w = \bar{q} \int_{\alpha} w$ pour tout $w \in H^1(\hat{Y})$. Ainsi $T_*(\alpha) = \bar{q}\alpha$ c'est-à-dire $\alpha \in H_1(\hat{Y})_{\bar{q}}$ et on peut identifier $H^1(\hat{Y})_q$ et $H_1(\hat{Y})_{\bar{q}}$. \square

Si $Y \subset \hat{Y}$ est une sous-surface ouverte de \hat{Y} , invariante par T , on dispose également via la dualité de Poincaré d'un résultat similaire :

Lemme 3.1.7. *Pour $Y \subset \hat{Y}$ une sous-surface ouverte de \hat{Y} , invariante par T , $H_c^1(Y)_q \simeq H_1(Y)_{\bar{q}}$.*

3.2 Construction de g_1 générateur de $H_c^1(Y_1)_q$ dans le cas $n = 2$

On note de nouveau $D_i \subset \mathbb{C}$ un disque contenant les points b_i et b_{i+1} mais aucun autre des points marqués, et $Y_i = \pi^{-1}(D_i)$. On cherche à construire un générateur de $H_c^1(Y_1)_q$. Puisque Y_1 est la pré-image du D_1 , contenant donc les deux points marqués b_1 et b_2 , on peut se restreindre au cas $n = 2$. On peut supposer $b_1 = 1$ et $b_2 = -1$. La surface \hat{Y} est obtenue à partir de la courbe algébrique $y^d = x^2 - 1$. Comme les b_i sont les racines carrées de l'unité, on dispose ici de l'automorphisme $R : \hat{Y} \rightarrow \hat{Y}$ défini sur la courbe algébrique par $R(x, y) = (-x, y)$. On sait également d'après [McM13], que si d est pair, il y a deux pré-images p_0 et p_1 de ∞ , permutées par R et par T , de sorte que $T(p_l) = p_{l+1 \pmod 2}$ et $R(p_l) = p_{l-1 \pmod 2}$. Cette écriture s'avère plus utile lorsque $n > 2$, mais nous pouvons déjà l'introduire ici pour familiariser le lecteur.

Le cas $n = 2$ est particulier puisque les disques D_1 et D_2 contiennent tous les deux les points b_1 et b_2 . Ces deux disques homotopes, et on a donc un isomorphisme $Y_1 \simeq Y_2$ et $H_c^1(Y_1)_q \simeq H_c^1(Y_2)_q$. Puisque $D_1 \simeq D_2$, on s'intéresse principalement à la construction du générateur g_1 de $H_c^1(Y_1)_q$ en passant par la construction d'un générateur soit de $H_c^1(\partial Y_1)_q$ si $q = -1$, soit de $H^1(\hat{Y})_q$ si $q \neq -1$, en accord avec la proposition 2.2.9.

Nous passons par l'homologie pour faire la construction de ce générateur. Rappelons que $H_c^1(Y_1)_q \simeq H_1(Y_1)_{\bar{q}}$ par la dualité de Poincaré et le lemme 3.1.7. D'après le corollaire 2.2.10, on sait que $H_c^1(Y_1)_q$ est de dimension 1. On en déduit immédiatement :

Corollaire 3.2.1. *La dimension de $H_1(Y_1)_{\bar{q}}$ est 1.*

On construit dans ce qui suit un élément \mathbf{c}_1 dans $H_1(Y_1)_{\bar{q}}$, on montrera ensuite que cet élément est non nul et engendre donc $H_1(Y_1)_{\bar{q}}$ qui est de dimension 1.

3.2.1 Construction et première étude de \mathbf{c}_1

On va considérer D le disque unité, et D_∞ son complémentaire. Au-dessus de D il y a d disques ouverts disjoints, permutés par T mais stables par R . On note E_0, \dots, E_{d-1} ces disques et B_0, \dots, B_{d-1} leur bords respectifs, avec $T^m(E_0) = E_m$ et donc $T^m(B_0) = B_m$ pour tout $m \in \{0, \dots, d-1\}$. Le bord de D est la concaténation d'un chemin c_1 joignant b_1 à b_2 , et d'un chemin c_2 joignant b_2 à b_1 . c_1 admet d relevés sur \hat{Y} , permutés par T . On note $c_{1,0}$ le relevé de c_1 qui se trouve sur B_0 . On définit alors les autres relevés de c_1 par $c_{1,m} = T^m(c_{1,0})$ pour tout $m \in \{0, \dots, d-1\}$. Comme $c_2 = \pi \circ R(c_{1,0})$, on définit $c_{2,0} = R(c_{1,0})$. Or R laisse stable B_0 , on a donc $c_{2,0} \subset B_0$. On définit ensuite les autres relevés de c_2 de la façon suivante : $c_{2,m} = T^m(c_{2,0})$.

Il est clair que les $c_{1,m}$ sont dans Y_1 , on veut construire un générateur de $H_1(Y_1)_{\bar{q}}$ à l'aide des relevés de c_1 .

On considère, pour $i = 1, 2$ les 1-chaînes : $\mathbf{c}_i = \sum_{m=0}^{d-1} q^m \cdot c_{i,m}$. On montre alors :

Proposition 3.2.2. *Pour tout $i \in \{1, 2\}$, on a : $\mathbf{c}_i \in H_1(Y_i)_{\bar{q}}$.*

Démonstration : Chaque $c_{i,m}$, pour $i = 1, 2$ et $m \in \{0, \dots, d-1\}$, débute en q_i et se termine en q_{i+1} , où q_i est le point au-dessus de b_i . Comme $\partial c_{i,m} = q_{i+1} - q_i$, on a $\partial \mathbf{c}_i = (\sum_{m=0}^{d-1} q^m) \cdot (q_{i+1} - q_i) = 0$ et donc \mathbf{c}_i est dans $H_1(Y_i)$. De plus, on peut vérifier que $T_*(\mathbf{c}_i) = \bar{q}\mathbf{c}_i$, donc $\mathbf{c}_i \in H_1(Y_i)_{\bar{q}}$. \square

D'après la proposition 3.2.2, on sait que \mathbf{c}_1 , respectivement \mathbf{c}_2 , est dans $H_1(Y_1)_{\bar{q}}$, respectivement dans $H_1(Y_2)_{\bar{q}}$. Comme ces deux espaces sont de dimension 1 d'après 2.2.10, il suffit de montrer que \mathbf{c}_1 et \mathbf{c}_2 sont non nuls pour qu'ils soient générateurs respectivement de $H_1(Y_1)_{\bar{q}}$ et de $H_1(Y_2)_{\bar{q}}$. Suivant les cas $q \neq -1$ ou $q = -1$, on utilisera deux méthodes différentes pour voir que \mathbf{c}_1 et \mathbf{c}_2 sont tous les deux non nuls.

3.2.2 Le cas $q \neq -1$

On veut ici montrer que \mathbf{c}_1 est non nul en calculant $\text{int}(\mathbf{c}_1, \bar{\mathbf{c}}_1)$. Remarquons qu'il suffit de faire le calcul pour \mathbf{c}_1 puisque $\mathbf{c}_2 = R(\mathbf{c}_1)$, ainsi si \mathbf{c}_1 est non nul, \mathbf{c}_2 ne l'est pas non plus car R est un isomorphisme.

Regardons localement ce qu'il se passe au voisinage de q_1 et de q_2 . Remarquons pour commencer que y est une coordonnée locale sur Y_1 . En effet, $\frac{\partial f}{\partial x}(b_i, 0) = \pm 2 \neq 0$, avec f la fonction $f(x, y) = y^d - (x^2 - 1)$. D'après le théorème d'inversion locale, on a donc y est une coordonnée locale au voisinage des b_i , et on peut considérer que y est une coordonnée locale sur Y_1 . Alors T s'exprime comme $T : y \mapsto \zeta_d y$. Ainsi, en regardant au voisinage de q_1 , les d chemins $c_{1,m}$ peuvent être représentés comme une rotation d'angle $\frac{2\pi m}{d}$ de $c_{1,0}$. De même à l'arrivée, au voisinage de q_2 , les chemins $c_{1,m}$ correspondent respectivement à une rotation d'angle $\frac{2\pi m}{d}$ de $c_{1,0}$. Ceci est illustré sur la figure 3.2.

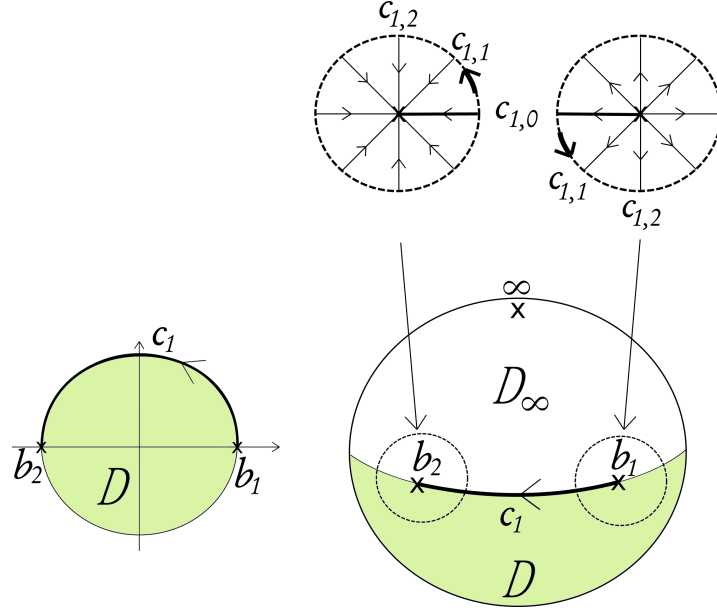


FIGURE 3.2 – Au voisinage de q_1 et q_2 , les $c_{1,m}$ sont l'image par une rotation d'angle $m\frac{2\pi}{d}$ de $c_{1,0}$

En particulier, comme les chemins c_1 et c_2 forment un angle de π sur $\hat{\mathbb{C}}$, alors au voisinage de q_2 , les chemins $c_{2,m}$ forment un angle $\frac{\pi(1+2m)}{d}$ avec $c_{1,0}$. C'est ce que l'on représente sur la figure 3.3.

Théorème 3.2.3. *Lorsque $q \neq -1$, \mathbf{c}_i est non nul et engendre $H_1(Y_i)_{\bar{q}}$ pour $i = 1, 2$.*

Démonstration : On fait la preuve pour \mathbf{c}_1 puisqu'on aura immédiatement, si \mathbf{c}_1 est non nul, alors $\mathbf{c}_2 = R(\mathbf{c}_1)$ est non nul également.

Calculons donc $\text{int}(\mathbf{c}_1, \bar{\mathbf{c}}_1)$. Pour cela, on introduit de nouveaux cycles sur lesquels ces calculs se font plus facilement.

Soient $\hat{c}_{1,m} = c_{1,m} - c_{1,m+1}$ et $\hat{c}_1 = \sum_{m=0}^{d-1} q^m \cdot \hat{c}_{1,m}$. On peut vérifier facilement que $\partial \hat{c}_1 = 0$ et $\hat{c}_1 \in H_1(Y_1)_{\bar{q}}$. Aussi, on a :

$$\begin{aligned} \hat{c}_1 &= (c_{1,0} - c_{1,1}) + q(c_{1,1} - c_{1,2}) - \cdots + q^{d-1}(c_{1,d-1} - c_{1,0}) \\ &= (1 - \bar{q})c_{1,0} + q(1 - \bar{q})c_{1,1} + \cdots + q^{d-1}(1 - \bar{q})c_{1,d-1} \\ &= (1 - \bar{q})\mathbf{c}_1. \end{aligned}$$

On peut voir que :

$$\text{int}(\hat{c}_{1,m}, \hat{c}_{1,m'}) = \begin{cases} 0 & \text{si } |m - m'| \neq 1 \\ -1 & \text{si } m' = m - 1 \\ 1 & \text{si } m' = m + 1 \end{cases} .$$

En effet, si $|m - m'| > 1$, il est facile de trouver des chemins de même classe d'homotopie que $\hat{c}_{1,m}$ et $\hat{c}_{1,m'}$ qui sont disjoints, comme illustré sur la figure 3.4, et donc $\text{int}(\hat{c}_{1,m}, \hat{c}_{1,m'}) = 0$.

Il est également clair que si $m = m'$, l'intersection entre $\hat{c}_{1,m}$ et lui-même est nulle en considérant de la même façon deux chemins ayant la même classe d'homotopie que $\hat{c}_{1,m}$ mais ne s'intersectant pas, de même que sur la figure 3.5.

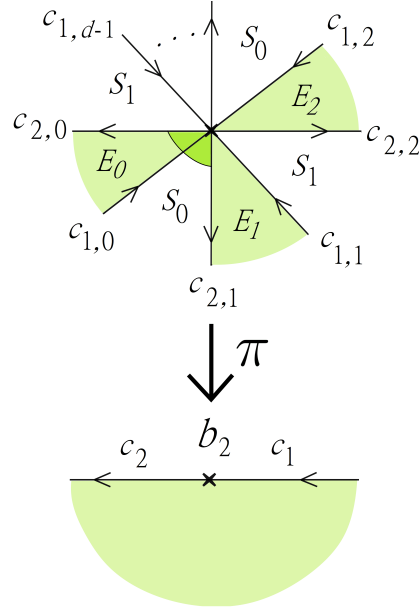


FIGURE 3.3 – Au voisinage de q_2 , l'angle entre $c_{1,m}$ et $c_{1,m+1}$ est $\frac{2\pi}{d}$, et l'angle entre $c_{1,m}$ et $c_{2,m}$ est $\frac{\pi}{d}$

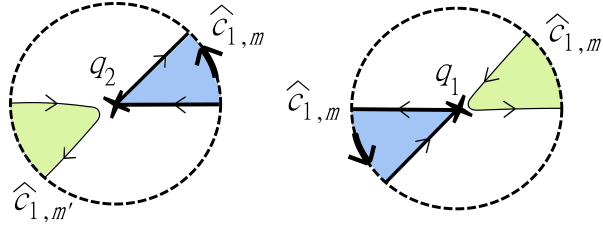


FIGURE 3.4 – Deux chemins homotopes à $\hat{c}_{1,m}$ et $\hat{c}_{1,m'}$ ne se rencontrant pas

Si $m' = m + 1$, il suffit d'observer la figure 3.6 sur laquelle le chemin c homotope à $\hat{c}_{1,m}$ est tracé aux voisinages de q_1 et de q_2 , et le chemin c' homotope à $\hat{c}_{1,m+1}$ est tracé en gras aux voisinages de q_1 et de q_2 .

Au voisinage de q_1 , le chemin c' est sur le bord droit du chemin c , alors au voisinage de q_2 , le chemin c' reste sur le bord droit de c et c doit donc rencontrer c' , l'orientation est positive.

Si $m' = m - 1$, alors $\text{int}(\hat{c}_{1,m}, \hat{c}_{1,m-1}) = -\text{int}(\hat{c}_{1,m-1}, \hat{c}_{1,m}) = 1$.

On trouve alors :

$$\text{int}(\hat{c}_1, \overline{\hat{c}_1}) = \sum_{m=0}^{d-1} \sum_{m'=0}^{d-1} q^{m-m'} \text{int}(\hat{c}_{1,m}, \hat{c}_{1,m'}) = -d(q - \bar{q}) = -d \times 2i \text{Im}(q) \neq 0.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \text{int}(\mathbf{c}_1, \overline{\mathbf{c}_1}) &= \text{int}\left(\frac{1}{1-\bar{q}} \hat{c}_1, \frac{1}{1-q} \overline{\hat{c}_1}\right) \\ &= \frac{1}{(1-\bar{q})(1-q)} \text{int}(\hat{c}_1, \overline{\hat{c}_1}) \\ &= \frac{-d \times i \text{Im}(q)}{1 - \text{Re}(q)} \end{aligned}$$

Puisque $q \neq 1$ et que $q \neq -1$, on a $1 - \text{Re}(q) \neq 0$ et $\text{Im}(q) \neq 0$, donc l'auto-intersection ci-dessus est non nulle. Alors $\mathbf{c}_1 \neq 0$ est un générateur de $H_1(Y_1)_q$ qui est de dimension

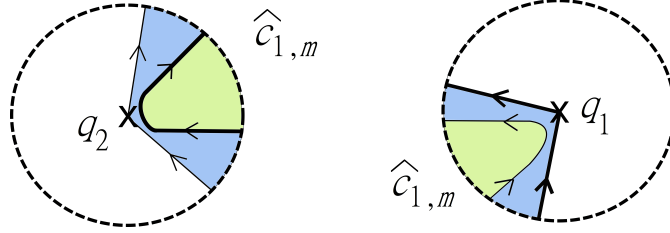


FIGURE 3.5 – Deux chemins homotopes à $\hat{c}_{1,m}$ ne se rencontrant pas

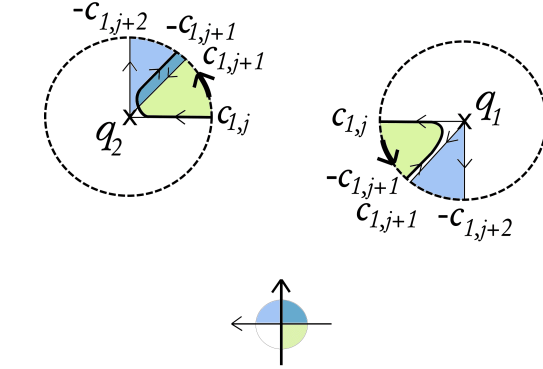


FIGURE 3.6 – Intersection entre $\hat{c}_{1,m}$ et $\hat{c}_{1,m+1}$

1. □

On peut normaliser \mathbf{c}_1 de sorte que son dual g_1 vérifie $\langle g_1, g_1 \rangle = 2 \operatorname{Im}(q)$ comme attendu dans le théorème 3.0.1. On note g_1 le dual de Poincaré de $\tilde{c}_1 := \frac{2\sqrt{1-\operatorname{Re}(q)}}{\sqrt{d}} \mathbf{c}_1$. Alors \tilde{c}_1 est un générateur de $H_1(Y_1)_{\bar{q}}$ et son dual g_1 vérifie :

$$\langle g_1; g_1 \rangle = \frac{i}{2} \operatorname{int}(\tilde{c}_1, \tilde{c}_1) = 2 \operatorname{Im}(q).$$

Remarque 3.2.4. *Le même travail peut être réalisé pour montrer que c_2 est un générateur de $H_1(Y_2)_{\bar{q}}$, et démontrer ainsi le théorème 3.0.1 dans le cas $n = 2$ et $q \neq -1$.*

Comme précédemment, on note Y_∞ la pré-image de D_∞ , un voisinage de ∞ , et $Y = \hat{Y} \setminus Y_\infty$, prolongé en un ouvert de sorte que le bord de Y_∞ est compris dans Y . De nouveau, on notera ∂Y l'intersection entre Y et Y_∞ , qui se compose donc d'une réunion de $e = \operatorname{pgcd}(d, 2)$ anneaux disjoints. Vus dans $H_c^1(Y)$, les \mathbf{c}_1 et \mathbf{c}_2 vérifient la relation suivante :

Proposition 3.2.5. $\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 = 0 \in H_c^1(Y)$.

Démonstration : Rappelons que B_0, \dots, B_{d-1} sont les bords des d disques au-dessus de D , avec $c_{1,0} \in B_0$ et $B_m = T^m(B_0)$ pour tout $m \in \{0, \dots, d-1\}$. On en déduit $T^m(c_{1,m}) = c_{1,m} \in B_m$. Comme R laisse stables les pré-images de 0, on a $R(B_m) = B_m$ et donc $c_{2,m} \in B_m$. Alors $B_m = \sum_{i=1}^n c_{i,m}$ et $\sum_{i=1}^2 \mathbf{c}_i = \sum_{i=1}^2 \sum_{m=0}^{d-1} q^m \cdot c_{i,m} = \sum_{m=0}^{d-1} q^m \cdot B_m = 0 \in H_1(Y)$ et la relation est démontrée. □

Cette relation relève celle que l'on retrouve sur le bord du disque D : on a $c_1 = -c_2$ comme on peut le voir sur l'illustration ci-dessous 3.7.

Cette relation sera généralisée dans le cas n quelconque, on la retrouve également pour $n = 2$ et $q = -1$ puisque la démonstration est indépendante de la valeur de q .

Il faut maintenant voir ce qu'il se passe dans le cas $q = -1$.

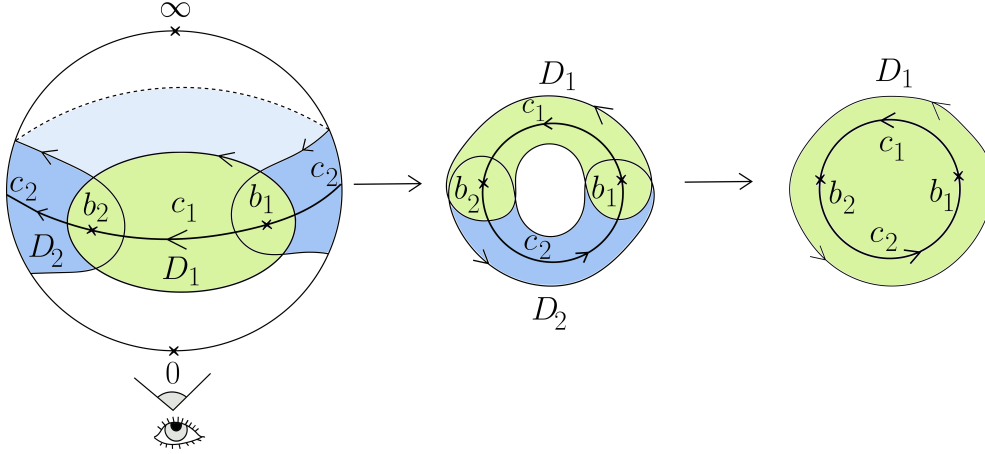


FIGURE 3.7 – Les chemins c_1 et c_2 sur $\hat{\mathbb{C}}$

3.2.3 Le cas $q = -1$, construction d'un générateur de $H_c^1(\partial Y_1)_{-1}$

Le cas $q = -1$ ne peut arriver que pour d pair. On a ici $\text{int}(\mathbf{c}_1, \overline{\mathbf{c}_1}) = 0$ et on ne peut plus utiliser l'argument de la partie précédente pour montrer que \mathbf{c}_1 est non nul. On va construire un nouvel élément s , dépendant de \mathbf{c}_1 et \mathbf{c}_2 , pour montrer qu'à nouveau, \mathbf{c}_1 est non nul et engendre donc $H_1(Y_1)_{-1}$.

Remarquons pour commencer, que comme $q = -1$, alors $H_c^1(\partial Y_1)_{-1} \simeq H_1(\partial Y_1)_{-1}$ d'après la proposition 2.2.9. Ainsi, un générateur de $H_1(\partial Y_1)_{-1}$ donnera un générateur de $H_c^1(\partial Y_1)_{-1}$. On s'intéresse donc à la construction d'un élément non nul de $H_1(\partial Y_1)_{-1}$. On rappelle que Y_∞ est la pré-image d'un voisinage D_∞ au voisinage de ∞ et $Y = \hat{Y} \setminus Y_\infty$. Y_∞ est formé de 2 disques, on note \mathcal{S}_0 et \mathcal{S}_1 les composantes de bord de $\hat{Y} \setminus Y_\infty$. Notons s_0 et s_1 les générateurs dans le sens direct respectivement de $H_1(\mathcal{S}_0)$ et de $H_1(\mathcal{S}_1)$, ils peuvent être représentés respectivement par un chemin orienté sur le bord de \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 , ce que l'on illustre par la figure 3.8.

Comme T permute les bords et préserve l'orientation, on a $T(s_0) = s_1$ et $T(s_1) = s_0$. Remarquons que D_1 et D_∞ sont homotopes, on peut donc trouver un isomorphisme entre $H_1(Y_1)_{-1}$ et $H_1(Y)_{-1}$ et entre $H_1(\partial Y_1)_{-1}$ et $H_1(\partial Y)_{-1}$. Puisque $q^2 = 1$, on a également d'après 2.2.9, $H_c^1(Y)_{-1} \simeq H_c^1(\partial Y)_{-1}$. En passant à la dualité de Poincaré, un générateur de $H_1(\partial Y)_{-1}$ donne ainsi un générateur de $H_1(Y)_{-1} \simeq H_1(Y_1)_{-1}$. Si s est un générateur de $H_1(\partial Y)_{-1}$, alors s s'associe à un multiple de \mathbf{c}_1 , on veut montrer que ce multiple est non nul, alors \mathbf{c}_1 engendre $H_1(Y_1)_{-1}$.

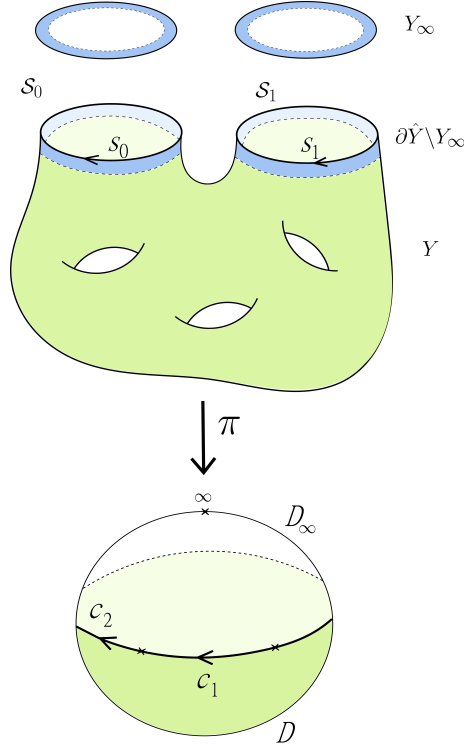


FIGURE 3.8 – Illustration des sous-surfaces Y_∞ et Y de \hat{Y} ainsi que des bords \mathcal{S}_0 et \mathcal{S}_1 et des chemins s_0 et s_1

Proposition 3.2.6. *Pour $q = -1$, l'élément $s = s_0 - s_1$ est non nul dans $H_c^1(Y)_{-1}$ et engendre $H_1(\partial Y)_{-1} \simeq H_c^1(\partial Y_1)_{-1}$.*

Démonstration : Par la dualité de Poincaré, on sait déjà que la dimension de $H_1(\partial Y_1)_{-1} \simeq H_c^1(\partial Y_1)_{-1}$ est 1 si et seulement si $q^e = 1$ d'après le lemme 2.2.6, avec $e = \text{pgcd}(d, n) = 2$. La condition précédente revient donc ici à $q = -1$. De plus, $T_*(s) = -s$, donc $s \in H_1(\partial Y_1)_{-1}$. Pour montrer que s est un générateur de $H_1(\partial Y_1)_{-1}$, il suffit donc de montrer que s est non nul. Supposons donc que s est nul et raisonnons par l'absurde.

Soit $w \in H_1(\partial Y)_{-1} \subset H_c^1(\mathcal{S}_0) \oplus H_c^1(\mathcal{S}_1)$ et supposons $w \neq 0$. On sait que s_0 engendre $H_1(\mathcal{S}_0)$ et de même, s_1 engendre $H_1(\mathcal{S}_1)$. On peut écrire $w = \lambda_0 \cdot s_0 + \lambda_1 \cdot s_1$. Alors d'une part $T_*(w) = -w$ par définition de w , et d'autre part $T_*(w) = \lambda_0 \cdot s_1 + \lambda_1 \cdot s_0$ puisque T permute \mathcal{S}_0 et \mathcal{S}_1 . On en déduit que $\lambda_l = -\lambda_{l+1}$, et donc $\lambda_1 = -\lambda_0$. Comme w est non nul, on doit avoir $\lambda_0 \neq 0$. Alors $w = \lambda_0 \cdot s_0 - \lambda_0 \cdot s_1 = \lambda_0 \cdot s = 0$. On a donc une contradiction et finalement $s \neq 0$. Alors $s = s_0 - s_1$ engendre $H_1(\partial Y)_{-1}$.

Rappelons qu'on dispose de la suite exacte 2.2.2 qui donne ici suivante :

$$0 \rightarrow H_c^1(\partial Y)_{-1} \rightarrow H_c^1(Y)_{-1} \rightarrow H^1(\hat{Y})_{-1} \rightarrow 0.$$

Alors l'élément s s'envoie sur un élément non nul dans $H_c^1(Y)_{-1}$, que l'on note de nouveau s . \square

Le lemme suivant nous permet d'exprimer s vu dans $H_c^1(Y)_{-1}$ en fonction de \mathbf{c}_1 et \mathbf{c}_2 .

Lemme 3.2.7. *Pour $q = -1$, $s = \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2 = 2\mathbf{c}_1 \in H_c^1(Y)_{-1}$.*

Démonstration : Supposons que d est pair. Rappelons que par construction, $c_{1,0}$ est sur le bords de \mathcal{S}_0 , et comme T permute \mathcal{S}_0 et \mathcal{S}_1 , on a : pour tout $m \in \{0, \dots, d-1\}$,

$c_{1,m} = T^m(c_{1,0})$ est sur $\mathcal{S}_m \bmod 2$. De plus, on a construit $c_{2,0}$ par $c_{2,0} = R(c_{1,0})$. Comme R et T permutent les bords \mathcal{S}_0 et \mathcal{S}_1 , on a $c_{2,m} = T^m \circ R(c_{1,0}) \subset \mathcal{S}_{m+1} \bmod 2$. Puisque la concaténation $c_1 c_2$ parcourt le bord de D_∞ , sur \hat{Y} les bords \mathcal{S}_0 et \mathcal{S}_1 sont formés des relevés de c_1 et de c_2 .

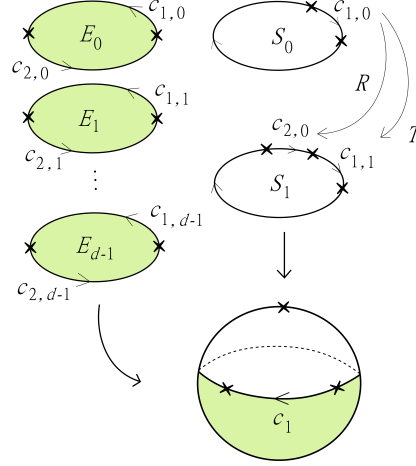


FIGURE 3.9 – Les relevés de c_1 et c_2 sur les bords \mathcal{S}_0 \mathcal{S}_1 de ∂Y et sur les bords E_0, \dots, E_{d-1} de la pré-image du disque unité.

Or s_0 est le chemin au bord de \mathcal{S}_0 , et celui-ci est formé des chemins de la forme $c_{1,2l}$ et $c_{2,2l+1}$ pour $l \in \{0, \dots, \frac{d}{2} - 1\}$. De même, s_1 est le chemin sur le bord de \mathcal{S}_1 , qui est formé des chemins $c_{1,2l+1}$ et $c_{2,2l}$.

Lorsque $q = -1$, on a :

$$\mathbf{c}_1 = \sum_{l=0}^{\frac{d}{2}-1} c_{1,2l} - \sum_{l=0}^{\frac{d}{2}-1} c_{1,2l+1}$$

et de même :

$$\mathbf{c}_2 = \sum_{l=0}^{\frac{d}{2}-1} c_{2,2l} - \sum_{l=0}^{\frac{d}{2}-1} c_{2,2l+1}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} s_0 - s_1 &= \left(\sum_{l=0}^{\frac{d}{2}-1} c_{1,2l} + \sum_{l=0}^{\frac{d}{2}-1} c_{2,2l+1} \right) - \left(\sum_{l=0}^{\frac{d}{2}-1} c_{1,2l+1} + \sum_{l=0}^{\frac{d}{2}-1} c_{2,2l} \right) \\ &= \left(\sum_{l=0}^{\frac{d}{2}-1} c_{1,2l} - \sum_{l=0}^{\frac{d}{2}-1} c_{1,2l+1} \right) + \left(\sum_{l=0}^{\frac{d}{2}-1} c_{2,2l+1} - \sum_{l=0}^{\frac{d}{2}-1} c_{2,2l} \right) \\ &= \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2. \end{aligned}$$

De plus, comme $\mathbf{c}_2 = -\mathbf{c}_1$ d'après la proposition 3.2.5, qui est vraie quelle que soit la valeur de q , on a : $s = s_0 - s_1 = 2\mathbf{c}_1$. \square

Corollaire 3.2.8. *Les éléments \mathbf{c}_1 et \mathbf{c}_2 sont non nuls dans $H_c^1(Y)_{-1}$, et il engendrent respectivement $H_1(Y_1)_{-1}$ et $H_1(Y_2)_{-1}$.*

Démonstration : En effet, si $\mathbf{c}_1 = 0$, alors s serait nul ce qui n'est pas le cas. Ainsi, \mathbf{c}_1 et \mathbf{c}_2 sont non nuls et engendrent respectivement de $H_1(Y_1)_{-1}$ et $H_1(Y_2)_{-1}$, qui sont tous les deux de dimension un. \square

On note dans ce cas g_i le dual de Poincaré de $\frac{2\sqrt{d}}{\sqrt{d}}\mathbf{c}_i$, alors g_i engendre $H_c^1(Y_i)_q$.
Voyons à présent comment généraliser cette construction pour n quelconque.

3.3 Construction des éléments g_1, \dots, g_n pour n via l'homologie pour un n quelconque

Supposons ici que les b_1, \dots, b_n sont les racines n -ièmes de l'unité, de sorte que $b_m = e^{\frac{2i\pi m}{n}}$ pour tout $m \in \{0, \dots, n-1\}$. La surface \hat{Y} est obtenue à partir de l'équation $y^d = x^n - 1$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on note D_i le support de $\tau_i \in B_n$, et Y_i la pré-image de D_i dans \hat{Y} .

De même que dans la partie précédente, on va noter D le disque unité (ouvert), et D_∞ l'intérieur de son complémentaire, de sorte que : la pré-image de D est la réunion de d disques ouverts disjoints de bord respectivement notés B_0, \dots, B_{d-1} , et la pré-image de D_∞ est la réunion disjointe de $e = \text{pgcd}(d, n)$ disques ouverts disjoints de bords respectivement notés $\mathcal{S}_0, \dots, \mathcal{S}_{e-1}$. Rappelons que l'on note p_0, \dots, p_{e-1} les points au-dessus de ∞ , et q_i le point au-dessus de b_i pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. On écrira aussi $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, $\tilde{B} = \{q_1, \dots, q_n\}$ et $\tilde{\infty} = \{p_0, \dots, p_{e-1}\}$. On dispose sur \hat{Y} de deux automorphismes T et R vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
R: \quad \hat{Y} &\rightarrow \hat{Y} \\
q_i &\mapsto q_{i+1} && \text{pour } i \in \{1, \dots, n\} \\
p_l &\mapsto p_{l-1} && \text{pour } l \in \{1, \dots, e-1\} \\
(x, y) &\mapsto (\zeta_n x, y) && \text{pour } (x, y) \in \hat{Y} \setminus (\tilde{B} \cup \tilde{\infty})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T: \quad \hat{Y} &\rightarrow \hat{Y} \\
q_i &\mapsto q_i && \text{pour } i \in \{1, \dots, n\} \\
p_l &\mapsto p_{l+1} && \text{pour } l \in \{1, \dots, e-1\} \\
(x, y) &\mapsto (x, \zeta_d y) && \text{pour } (x, y) \in \hat{Y} \setminus (\tilde{B} \cup \tilde{\infty})
\end{aligned}$$

Ainsi, on peut indexer les B_j et les \mathcal{S}_l de sorte que $T^j(B_0) = B_j$ pour tout $j \in \{0, \dots, d-1\}$ et $T^l(\mathcal{S}_0) = \mathcal{S}_l$ pour tout $l \in \{1, \dots, e-1\}$.

On va, de même que précédemment, construire les éléments $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$, et montrer qu'ils engendrent respectivement un $H_1(Y_i)_{\bar{q}}$.

3.3.1 Construction et première étude de $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on va noter c_i le chemin sur le bord de D reliant b_i à b_{i+1} . Chaque c_i admet exactement d pré-images dans \hat{Y} . On note $c_{1,0}$ le relevé de c_1 se trouvant sur B_0 . Quitte à ré-indexer les \mathcal{S}_l , on peut également supposer que $c_{1,0}$ est sur \mathcal{S}_0 . On a alors immédiatement :

Lemme 3.3.1. *Pour tout $m \in \{0, \dots, d-1\}$, le relevé $c_{1,m}$ de c_1 se trouve sur le bord B_m et sur le bord $\mathcal{S}_{m \bmod e}$.*

D'autre part, comme $c_2 = \pi \circ R(c_{1,0})$, alors $R(c_{1,0})$ est un relevé de c_2 , on pose $c_{2,0} = R(c_{1,0})$. De plus, comme R permute également les \mathcal{S}_l , on a $c_{2,0} = R(c_{1,0}) \subset \mathcal{S}_{e-1}$. Les autres relevés de c_2 sont obtenus par application des puissances de T à $c_{2,0}$, on pose ainsi $c_{2,m} = T^m(c_{2,0})$. En particulier, $c_{2,1}$ est sur le bord de \mathcal{S}_0 . On poursuit ainsi la construction des $c_{i,m}$ et on obtient :

Proposition 3.3.2. *Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on note $c_{i,0} \dots, c_{i,d-1}$ les $d-1$ relevés de chaque c_i , indexés de sorte que, pour tout $m \in \{0, \dots, d-1\}$: $c_{i,m} = T^m \circ R^{i-1}(c_{1,0})$.*

En conséquence : $c_{i,m} \subset \mathcal{S}_{m-i+1 \bmod e} \cap B_{m \bmod d}$

Démonstration : Comme $c_{1,0} \subset B_0 \cap \mathcal{S}_0$, on a pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et pour tout $m \in \{0, \dots, d-1\}$, $c_{i,m} \subset T^m \circ R^{i-1}(\mathcal{S}_0) = \mathcal{S}_{m-i+1 \bmod e}$. D'autre part, $T^m \circ R^{i-1}(B_0) = T^m(B_0) = B_{m \bmod d}$ \square

En particulier, on remarque que les chemins $c_{i,m}$ qui sont sur le bord de \mathcal{S}_0 sont les chemins pour lesquels il existe $\alpha \in \mathbb{Z}$ tels que $m - i + 1 = \alpha e$, donc les chemins pour lesquels il existe un α tel que $m = i - 1 + \alpha e$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on peut ainsi déterminer les indices $m \in \{0, \dots, d-1\}$ tels que $c_{i,m}$ soit sur \mathcal{S}_0 . Puisque $\mathcal{S}_l = T^l(\mathcal{S}_0)$, on en déduit :

Proposition 3.3.3. *Pour tout $l \in \{0, \dots, e-1\}$, le bord de \mathcal{S}_l est composé des $n \times \frac{d}{e}$ chemins :*

- $c_{1,l}, c_{1,e+l \bmod d}, \dots, c_{1,d-e+l \bmod d}$
- $c_{2,1+l \bmod d}, c_{2,e+1+l \bmod d}, \dots, c_{2,d-e+1+l \bmod d}$
- \vdots
- $c_{n,n-1+l \bmod d}, c_{n,n-1+e+l \bmod d}, \dots, c_{n,n-1+d-1+l \bmod d}$

On définit pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, le cycle :

$$\mathbf{c}_m = \sum_{m=0}^{d-1} q^m \cdot c_{i,m} \in H_1(Y_i)_{\bar{q}}.$$

On vérifie facilement $T_*(\mathbf{c}_i) = \bar{q}\mathbf{c}_i$ et $\partial\mathbf{c}_i = \sum_{m=0}^{d-1} q^m \cdot (q_{i+1} - q_i) = 0$, donc $\mathbf{c}_i \in H_1(Y_i)_{\bar{q}}$.

On va utiliser les résultats du cas $n = 2$ pour montrer que chaque \mathbf{c}_i engendre $H_1(Y_i)_{\bar{q}}$ et peut être normalisé pour que son dual corresponde à g_i dans $H_c^1(Y_i)_q$.

3.3.2 Construction de g_i comme dual d'un multiple de \mathbf{c}_i

Pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, rappelons que Y_i est la pré-image d'un disque D_i contenant les points marqués b_i et b_{i+1} mais aucun autre des points marqués. On peut définir une surface de Riemann compacte $\hat{\mathcal{Y}}_i$ obtenue à partir de la courbe algébrique $y^d = (x - b_i)(x - b_{i+1})$. En notant \mathcal{Y}_i la pré-image de D_i dans $\hat{\mathcal{Y}}_i$, on a un isomorphisme $Y_i \simeq \mathcal{Y}_i$, et également un isomorphisme $H_c^1(Y_i)_q \simeq H_c^1(\mathcal{Y}_i)_q$. La restriction de l'automorphisme T de \hat{Y} à Y_i correspond à la restriction de l'automorphisme \mathcal{T} de $\hat{\mathcal{Y}}_i$ sur \mathcal{Y}_i . On peut alors utiliser sur $H_c^1(\mathcal{Y}_i)_q$ les résultats de la partie précédente, et les transposer à $H_c^1(Y_i)_q$.

Comme $Y_i \simeq \mathcal{Y}_i$, on peut établir une correspondance entre les d relevés du chemin $c_i \subset D_i$ dans Y_i et dans \mathcal{Y}_i . On note alors $c'_{i,0}, \dots, c'_{i,d-1}$ les relevés de c_i dans \mathcal{Y}_i , indexés convenablement pour pouvoir leur appliquer les résultats du cas $n = 2$. On peut choisir que le relevé $c'_{i,0}$ corresponde à $c_{i,0}$. On a alors : $\mathcal{T}^m(c'_{i,0}) = c'_{i,m}$ correspond à $T^m(c_{i,0}) = c_{i,m}$,

ainsi l'élément $\mathbf{c}'_i = \sum_{m=0}^{d-1} q^m \cdot c'_{i,m}$ qui engendre $H_1(\mathcal{Y}_i)_{\bar{q}}$ correspond à un générateur $\mathbf{c}_i = \sum_{m=0}^d q^m \cdot c_{i,m}$ qui engendre $H_1(Y_i)_{\bar{q}}$, on note de nouveau g_i le dual de Poincaré de $\frac{2\sqrt{1-\text{Re}(q)}}{\sqrt{d}} \mathbf{c}_i$. Alors g_i engendre $H_c^1(Y_i)_q$.

Lemme 3.3.4. *Pour $n > 2$, on retrouve bien :*

- $\langle g_i; g_i \rangle = 2 \text{Im}(q)$
- $\langle g_i; g_{i+1} \rangle = \iota(1 - \bar{q})$
- $\langle g_i; g_{i-1} \rangle = -\iota(1 - q)$
- $\langle g_i; g_j \rangle = 0$ si $|i - j| > 1$

Démonstration : Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. On s'intéresse à l'intersection de \mathbf{c}_i et $\mathbf{c}_{i+1} \pmod n$. Pour $j \in \{1, \dots, n\}$, si $|i - j| > 1$, on a $\text{int}(\mathbf{c}_i, \overline{\mathbf{c}_j}) = 0$ puisque les supports de \mathbf{c}_i et \mathbf{c}_j sont disjoints, et donc $\langle g_i; g_j \rangle = 0$.

Le cas $j = i$ est déjà traité dans le cas $n = 2$. Il reste donc à voir les cas $j = i + 1$ et $j = i - 1$.

Les intersections éventuelles ont lieu dans un voisinage que q_2 . On va, de même que dans le calcul de l'auto-intersection pour $n = 2$, utiliser les éléments $\hat{c}_i = \sum_{m=0}^{d-1} q^m \cdot \hat{c}_{i,m}$ avec $\hat{c}_{i,m} = c_{i,m} - c_{i,m+1}$. On peut vérifier que $\hat{c}_i \in H_1(Y_i)_{\bar{q}}$ et $\hat{c}_i = (1 - \bar{q})\mathbf{c}_i$ de même que dans la preuve du théorème 3.2.3. Soient $m, m' \in \{0, \dots, d-1\}$. En accord avec la figure 3.3, on illustre dans la figure 3.10 les intersections de $\hat{c}_{i+1,m'}$ avec $\hat{c}_{i,m}$.

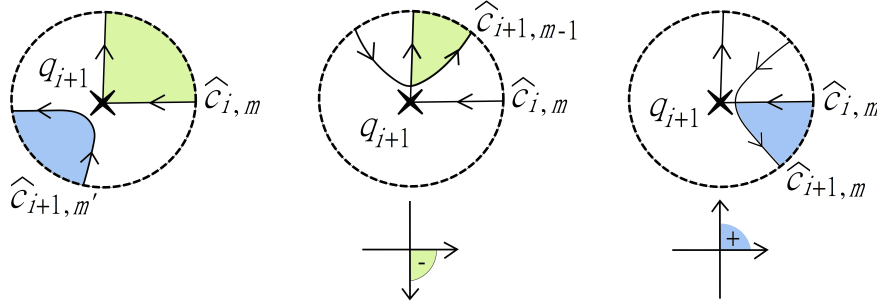


FIGURE 3.10 – Intersections de $\hat{c}_{i,m}$ et $\hat{c}_{i+1,m'}$, lorsque $m' \neq m, m - 1$ à gauche, lorsque $m' = m - 1$ au milieu, et lorsque $m' = m$ à droite.

Lorsque $m' = m$, l'orientation est positive et $\text{int}(\hat{c}_{i,m}, \hat{c}_{i+1,m}) = 1$. Si $m' = m - 1$, l'orientation est négative et $\text{int}(\hat{c}_{i,m}, \hat{c}_{i+1,m-1}) = -1$. Dans les autres cas, on peut trouver de chemins homotopes à $\hat{c}_{i,m}$ et $\hat{c}_{i+1,m'}$ ne se rencontrant pas, donc $\text{int}(\hat{c}_{i,m}, \hat{c}_{i+1,m'}) = 0$. Ainsi :

$$\text{int}(\hat{c}_i, \hat{c}_{i+1}) = \sum_{m=0}^{d-1} \sum_{m'=0}^{d-1} q^{m-m'} \text{int}(\hat{c}_{i,m}, \overline{\hat{c}_{i+1,m'}}) = d(1 - \bar{q}).$$

Alors :

$$\text{int}(\mathbf{c}_i, \overline{\mathbf{c}_{i+1}}) = \frac{1}{(1-q)(1-\bar{q})} \text{int}(\hat{c}_i, \hat{c}_{i+1}) = \frac{d}{1-q}$$

On en déduit : $\text{int}(\mathbf{c}_i, \overline{\mathbf{c}_{i-1}}) = -\text{int}(\overline{\mathbf{c}_{i-1}}, \mathbf{c}_i) = -\overline{\text{int}(\mathbf{c}_{i-1}, \overline{\mathbf{c}_i})} = -d(1 - \bar{q})$.

On peut alors calculer la forme d'intersection $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur les g_1, \dots, g_n .

$$\begin{aligned}
\langle g_i; g_{i+1} \rangle &= \frac{\iota}{2} \frac{4(1 - \operatorname{Re}(q))}{d} \operatorname{int}(\mathbf{c}_i, \overline{\mathbf{c}_{i+1}}) = \iota \frac{2(1 - \operatorname{Re}(q))}{1 - q} \\
&= \iota \frac{2 - q - \bar{q}}{1 - q} = \iota \frac{1 - q + 1 - \bar{q}}{1 - q} \\
&= \iota \frac{(1 - q) - \bar{q}(1 - q)}{1 - q} = \iota \frac{(1 - q)(1 - \bar{q})}{1 - q} \\
&= \iota(1 - \bar{q})
\end{aligned}$$

et de même : $\langle g_{i-1}; g_i \rangle = -\iota(1 - q)$. Le lemme est alors démontré. \square

Démonstration du théorème 3.0.1 : On a montré comment construire un générateur \mathbf{c}_i de $H_1(Y_i)_{\bar{q}}$ à partir des relevés de c_i indexés convenablement. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, le dual de Poincaré de $\frac{2\sqrt{1-\operatorname{Re}(q)}}{\sqrt{d}} \mathbf{c}_i$ est noté g_i et la famille (g_1, \dots, g_n) vérifie les points suivants :

- g_i engendre $H_c^1(Y_i)_q$
- $\langle g_i, g_i \rangle = 2 \operatorname{Im}(q)$
- $\langle g_i, g_{i+1} \rangle = i(1 - \bar{q})$
- $\langle g_i, g_{i-1} \rangle = -i(1 - q)$
- $\langle g_i, g_j \rangle = 0$ si $|i - j| > 1$

Finalemment (g_1, \dots, g_n) vérifie les propriétés de la famille de McMullen donnés dans le théorème 2.2.11. \square

On peut à présent montrer que les relations 3.3.6 entre ces générateurs trouvées dans le cas $n = 2$ se généralisent à un n quelconque. Plus particulièrement, il est intéressant de regarder lorsque $q^e = 1$, la construction d'un générateur de $H_1(Y_\infty)_{\bar{q}}$ généralisant ce qui été fait dans le cas $n = 2$ et $q = -1$.

3.3.3 Relations en homologie

On note de nouveau D_∞ un voisinage de ∞ , Y_∞ sa pré-image dans \hat{Y} , formée de e disques, et $Y = \hat{Y} \setminus Y_\infty$ son complémentaire étendu en un ouvert contenant ∂Y_∞ .

Une première relation qui se vérifie immédiatement est la suivante :

Proposition 3.3.5. *Les éléments \mathbf{c}_i vérifient : $\sum_{i=1}^n \mathbf{c}_i = 0 \in H_c^1(Y)_q$*

Démonstration : Pour tout $j \in \{0, \dots, d-1\}$, on a $B_j = \partial E_j = \sum_{i=1}^n c_{i,j}$ par construction, donc :

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{c}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{d-1} q^j \cdot c_{i,j} = \sum_{j=0}^{d-1} q^j \cdot \partial E_j = 0$$

et la relation est vérifiée. \square

En conséquence immédiate, on retrouve un résultat déjà énoncé par McMullen :

Corollaire 3.3.6. *Les générateurs (g_1, \dots, g_n) de $H^1(\hat{Y})_q$ vérifient : $\sum_{i=1}^n g_i = 0$.*

Rappelons que on note $\mathcal{S}_0, \dots, \mathcal{S}_{e-1}$ les e bords de Y avec $c_{1,0} \in \mathcal{S}_0$. Cette fois-ci, s_m est le chemin parcourant le bord de \mathcal{S}_m et $s = \sum_{m=0}^{e-1} q^m \cdot s_m$. On sait également d'après la remarque 2.2.7, que $H_c^1(\partial Y_\infty)_q$ vaut 1 si $q^e = 1$ et 0 sinon, avec $e = \operatorname{pgcd}(d, n)$ et $q = e^{-k \frac{2\iota\pi}{d}}$ où $k \in \{1, \dots, d-1\}$.

Lemme 3.3.7. Pour $q^e = 1$, l'élément $s = \sum_{m=0}^{e-1} q^m \cdot s_m$ engendre $H_1(\partial Y)_{\bar{q}}$.

Démonstration : On a clairement, puisque $q^e = 1$, $T_*(s) = \bar{q}s$. Donc $s \in H_1(\partial Y)_{\bar{q}}$. Montrons alors que s est non nul, et engendre donc $H_1(\partial Y)_{\bar{q}}$. On raisonne de la même façon que pour la proposition 3.2.6 : $H_1(\partial Y)_{\bar{q}}$ est de dimension 1, et pour tout élément $w \in H_1(\partial Y)_{\bar{q}} \subset \bigoplus_{l=0}^{e-1} H_1(\mathcal{S}_l)$, $w = \sum_{l=0}^{e-1} \lambda_l \cdot s_l$, avec s_l un générateur de $H_1(\mathcal{S}_l)$. Alors $T_*(w) = \bar{q} \cdot w$ et $T_*(w) = \sum_{l=0}^{e-1} q^l \lambda_l \cdot s_{l+1}$, on en déduit que tous les $\lambda_l = q^l \lambda_0$ et donc $w = \lambda_0 \cdot s$, et comme $H_1(\partial Y)_{\bar{q}}$ est de dimension 1, on peut choisir un w non nul, alors $s \neq 0$ et s engendre $H_1(\partial Y)_{\bar{q}}$. \square

On peut alors, toujours dans le cas $q^e = 1$, montrer la relation suivante :

Proposition 3.3.8. Si $q^e = 1$, $\bar{q}s = \sum_{i=1}^n \bar{q}^i \mathbf{c}_i \in H_c^1(Y)_q$.

Démonstration : On a déjà vu lors de la construction des $c_{i,j}$ que $c_{i,j} \in \mathcal{S}_{j-i+1 \bmod e}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et pour tout $j \in \{0, \dots, d-1\}$. En particulier, on en avait déduit dans la proposition 3.3.3, que pour une $m \in \{0, \dots, e-1\}$ donné, les chemins sur le bord de S_m sont exactement les $c_{i,m+i-1+\alpha e}$ avec $i \in \{1, \dots, n\}$ et $\alpha \in \{0, \dots, \frac{d}{e} - 1\}$. Alors :

$$\begin{aligned} s &= \sum_{m=0}^{e-1} q^m \cdot s_m = \sum_{m=0}^{e-1} q^m \cdot \left(\sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0}^{\frac{d}{e}-1} c_{i,m+i-1+\alpha e} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n q^{-i+1} \cdot \sum_{\alpha=0}^{\frac{d}{e}-1} \sum_{m=0}^{e-1} q^{m+i-1+\alpha e} \cdot c_{i,m+i-1+\alpha e} \\ &= \sum_{i=1}^n q^{-i+1} \cdot \mathbf{c}_i \\ &= q \sum_{i=1}^n \bar{q}^i \cdot \mathbf{c}_i \end{aligned}$$

Ainsi $\bar{q} \cdot s = \sum_{i=1}^n \bar{q}^i \cdot \mathbf{c}_i$. \square

Lemme 3.3.9. Pour $q^e = 1$, le dual $\eta \in H_c^1(\partial Y)_q$ de $\frac{2\sqrt{1-\operatorname{Re}(q)}}{\sqrt{d}}s$ s'envoie sur un élément non nul $g \in H_c^1(Y)_q$.

Démonstration du lemme : On considère le dual de Poincaré de $\frac{2\sqrt{1-\operatorname{Re}(q)}}{\sqrt{d}}s$, noté η . Alors $\eta \in H_c^1(\partial Y)_q \setminus \{0\}$. Montrons que l'image de η dans $H_c^1(Y)_q$ est non nulle. Comme \hat{Y} est connexe, on a $H^0(\hat{Y})_q = \{0\}$. On sait que les espaces $H_c^1(\partial Y)_q$, $H_c^2(\partial Y)_q$ et $H_c^2(\partial Y)_q$ sont de dimension 1. Comme Y_∞ est une réunion de e disques, $H_c^1(Y_\infty)_q = \{0\}$. Comme \hat{Y} est connexe et que Y correspond à \hat{Y} privé de e disques, alors Y est connexe, donc $H_c^2(Y)_q$ est nul. Considérons la suite de Mayer-Vietoris suivante, restreinte aux espaces propres de T^* :

$$0 \rightarrow H_c^1(\partial Y)_q \rightarrow H_c^1(Y)_q \oplus H_c^1(Y_\infty)_q \rightarrow H^1(\hat{Y})_q \rightarrow H_c^2(\partial Y)_q \rightarrow H_c^2(Y_\infty)_q \oplus H_c^2(Y)_q \rightarrow 0$$

qui revient à la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow H_c^1(\partial Y)_q \rightarrow H_c^1(Y)_q \rightarrow H^1(\hat{Y})_q \rightarrow H_c^2(\partial Y)_q \rightarrow H_c^2(Y_\infty)_q \rightarrow 0.$$

Alors la flèche $H_c^1(\partial Y)_q \rightarrow H_c^1(Y)_q$ est injective et l'image de η dans $H_c^1(Y)_q$, notée g , est non nulle. \square

Remarquons également en gardant les notations introduite dans la démonstration ci-dessus, que la flèche $H_c^2(\partial Y_\infty)_q \rightarrow H_c^2(Y_\infty)_q$ est surjective et comme ces deux espaces sont de dimension 1, cette flèche est une bijection. Comme $\text{Im}(H^1(\hat{Y})_q \rightarrow H_c^2(\partial Y_\infty)_q) = \ker(H_c^2(\partial Y_\infty)_q \rightarrow H_c^2(Y_\infty)_q) = \{0\}$, on a finalement une suite exacte courte :

$$0 \rightarrow H_c^1(\partial Y)_q \rightarrow H_c^1(Y)_q \rightarrow H^1(\hat{Y})_q \rightarrow 0.$$

On peut alors passer à la démonstration du théorème 3.0.3

Démonstration du théorème 3.0.3 : Supposons $q^e = 1$. Comme $\sum_{i=1}^n \mathbf{c}_i = 0$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= q \sum_{i=1}^n (\bar{q}^i) \cdot \mathbf{c}_i - q \sum_{i=1}^n \mathbf{c}_i \\ \Rightarrow \mathbf{s} &= \sum_{i=1}^n \frac{\bar{q}^i - 1}{\bar{q}} \cdot \mathbf{c}_i \\ \Rightarrow \frac{2\sqrt{1 - \text{Re}(q)}}{\sqrt{d}} \mathbf{s} &= \sum_{i=1}^n \frac{\bar{q}^i - 1}{\bar{q}} \frac{2\sqrt{1 - \text{Re}(q)}}{\sqrt{d}} \cdot \mathbf{c}_i \\ \Rightarrow g &= \sum_{i=1}^n \frac{\bar{q}^i - 1}{\bar{q}} g_i = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\bar{q}^i - 1}{\bar{q}} g_i \end{aligned}$$

La dernière égalité vient du fait que $q^e = 1$ et donc $q^n = 1$. □

Par la suite, nous utiliserons cet élément g pour la construction d'une famille génératrice dans un cas généralisé. Nous reviendrons sur le point de vue en homologie et les outils introduits ici pour formuler le passage entre deux familles génératrices dans notre cas général.

Chapitre 4

Généralisation de la construction du revêtement \hat{X}

Soient $n, d \in \mathbb{N}^*$, $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}^*$ et $\{b_1, \dots, b_n\}$, n points marqués du plan complexe, deux à deux distincts. Dans ce qui suit, on considérera la courbe algébrique :

$$y^d = \prod_{i=1}^n (x - b_i)^{k_i}.$$

Le cas où les k_i sont tous égaux à 1 est le cas traité par McMullen dans [McM13].

Les notations introduites ici seront conservées tout au long du document : on pose $k_0 = \sum_{i=1}^n k_i$ et on note, pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, $e_i = \text{pgcd}(k_i, d)$. On utilisera également les notations suivantes : $d_i = \frac{d}{e_i}$, et $k'_i = \frac{k_i}{e_i}$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$.

Dans ce chapitre, nous montrerons tout d'abord que la courbe algébrique ci-dessus, par sa normalisation, permet d'obtenir une surface de Riemann compacte notée \hat{X} , qui est également un revêtement cyclique $\pi : \hat{X} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ de degré d au-dessus de la sphère de Riemann, ramifié au-dessus des points b_i et éventuellement de ∞ . Cette construction visera essentiellement à séparer les branches de la courbe algébrique en certains points particuliers. La surface \hat{X} pourra s'interpréter comme la courbe \mathcal{C} privée des points $\{(b_i, 0) | i \in \{1, \dots, n\}\}$ et à laquelle on ajoutera des points $q_{i,k}$ et ces points vont former les pré-image des b_1, \dots, b_n et de ∞ par le revêtement $\pi : \hat{X} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$.

On montre ensuite que le genre de \hat{X} vaut $g = \frac{1}{2}(d(n-1) - \sum_{i=0}^n e_i + 2)$. Enfin, nous verrons que \hat{X} est connexe si et seulement si $\text{pgcd}(e_1, \dots, e_n) = 1$.

4.1 Construction de la surface \hat{X}

On note \mathcal{C} la courbe algébrique définie par $y^d = \prod_{i=1}^n (x - b_i)^{k_i}$. On pose $f(x, y) = y^d - \prod_{i=1}^n (x - b_i)^{k_i}$, de sorte que $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 | f(x, y) = 0\}$.

Remarque 4.1.1. \mathcal{C} ne définit pas une surface de Riemann : elle est singulière en tout point $(b_i, 0)$ tel que $k_i \geq 2$.

En effet, pour $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$, si $y_0 \neq 0$ on a :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = dy_0^{d-1} \neq 0$$

et le théorème des fonctions implicites nous donne des cartes locales au voisinage de (x_0, y_0) . Mais si $y_0 = 0$, alors $x_0 = b_{i_0}$ pour un certain $i_0 \in \{1, \dots, n\}$, et donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = k_{i_0}(x - b_{i_0})^{k_{i_0}-1} \prod_{j \neq i_0} (x - b_j^{k_j})$$

qui est non nul si et seulement si $k_{i_0} = 1$.

On définit sur \mathcal{C} une projection π de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \pi : \quad \mathcal{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned}$$

ainsi qu'une action sur \mathcal{C} donnée par :

$$\begin{aligned} T : \quad \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{C} \\ (x, y) &\mapsto (x, \zeta_d y) \end{aligned}$$

où $\zeta_d = e^{\frac{2i\pi}{d}}$.

Remarque 4.1.2. $\forall (x, y) \in \mathcal{C}$, $\pi \circ T(x, y) = \pi$, et $T^d = \text{Id}_{\mathcal{C}}$.

4.1.1 Séparation des branches au voisinage des $(b_i, 0)$

Soit D un disque complexe centré en 0 de rayon $\varepsilon > 0$. On note \dot{D} le disque D épointé en son centre. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on considère la fonction holomorphe x_i définie sur D par :

$$\forall t \in D, \quad x_i(t) = t^{d_i} + b_i$$

On note $D'_i = x_i(D)$ et $U_i = \pi^{-1}(D'_i)$, qui est un voisinage dans \mathcal{C} de $(b_i, 0)$. On va séparer les branches passant par $(b_i, 0) \in \mathcal{C}$ dans U_i . Pour cela, on construit des cartes locales $f_{i,l}$ sur $U_i \setminus \{(b_i, 0)\}$. On note $p_i : t \in \mathbb{C} \mapsto \prod_{j \neq i} (t^{d_i} + b_i - b_j)^{k_j}$ et pour tout $l \in \{0, \dots, d-1\}$, on définit la fonction holomorphe $y_{i,l} : t \in \dot{D} \mapsto \zeta_d^l t^{k'_i} p_i(t)^{\frac{1}{d}}$. On considère alors :

$$\forall t \in \dot{D}, \quad f_{i,l}(t) := (x_i(t), y_{i,l}(t)).$$

Lemme 4.1.3. $U_i \setminus \{(b_i, 0)\} = \cup_{l=0}^{d-1} f_{i,l}(\dot{D})$.

Démonstration : Vérifions d'abord que pour tout $l \in \{0, \dots, d-1\}$, $f_{i,l}(\dot{D}) \subset \mathcal{C}$, c'est à dire que pour tout $t \in \dot{D}$, on a bien $y_{i,l}^d(t) = \prod_{i=1}^n (x_i(t) - b_i)^{k_i}$.

$$\begin{aligned} y_{i,l}^d(t) &= (\zeta_d^l)^d t^{k'_i \times d} p_i(t) \\ &= t^{k_i \times d'_i} \times \prod_{j \neq i} (t^{d'_i} + b_i - b_j)^{k_j} \\ &= (t^{d'_i} + b_i - b_i)^{k_i} \prod_{j \neq i} (t^{d'_i} + b_i - b_j)^{k_j} \\ &= \prod_{j=1}^n (t^{d'_i} + b_i - b_j)^{k_j} \\ &= \prod_{j=1}^n (x_i(t) - b_j)^{k_j}. \end{aligned}$$

De plus, pour tout $l \in \{0, \dots, d-1\}$, comme $\pi(f_{i,l}(\dot{D})) = x_i(\dot{D})$, il est clair que $\cup_{l=0}^{d-1} f_{i,l}(\dot{D}) \subset U_i \setminus \{(b_i, 0)\} = \pi^{-1}(x_i(\dot{D}))$. Pour tout élément $(x, y) \in U_i \setminus \{(b_i, 0)\}$, on peut fixer t tel que $x = x_i(t)$ et le nombre complexe $\prod_{i=1}^n (x - b_i)^{k_i}$ est non nul, il n'existe alors pas d'autre solution pour y qui ne soit pas un $y_{i,l}(t)$ pour $l \in \{0, \dots, d-1\}$. Ainsi l'égalité est vérifiée. \square

Lemme 4.1.4. *Les $f_{i,l}$ sont injectives pour tout $l, l' \in \{0, \dots, d-1\}$ et on a :*

$$f_{i,l}(\dot{D}) = f_{i,l'}(\dot{D}) \iff l \equiv l' \pmod{e_i} \iff f_{i,l}(\dot{D}) \cap f_{i,l'}(\dot{D}) \neq \emptyset.$$

Démonstration : On peut vérifier l'injectivité des $f_{i,l}$ de la façon suivante : si $f_{i,l}(t) = f_{i,l}(s)$ alors il existe j, m tel que $s = \zeta_d^j t$ et $s = \zeta_{k_i}^m t$ mais k_i et d étant premiers entre eux, on en déduit que $s = t$.

Pour montrer les équivalences, supposons $f_{i,l}(\dot{D}) \cap f_{i,l'}(\dot{D}) \neq \emptyset$, alors on peut fixer s et t dans \dot{D} tels que $f_{i,l}(t) = f_{i,l'}(s)$. Alors $x_i(t) = x_i(s)$, on a donc $s^{d_i} = x_i(s) - b_i = x_i(t) - b_i = t^{d_i}$ et on peut fixer j tel que $s = \zeta_d^j t$. En particulier, $p_i(t) = p_i(s)$. Comme $y_{i,l}(s) = y_{i,l'}(t)$, on a : $\zeta_d^l t^{k_i} = \zeta_d^{l'} s^{k_i}$ et donc $\zeta_d^l \zeta_{d_i}^j = \zeta_d^{l'}$ c'est à dire $\zeta_d^{l-l'+j e_i} = 1$. Ainsi d divise $l - l' - j e_i$ et finalement e_i divise $l - l'$.

Supposons $l \equiv l' \pmod{e}$. On peut poser $l - l' = e_i \times r$. Or d'après le théorème de Bezout on peut trouver j, m des entiers relatifs tels que $e_i = j d + m k_i$. Alors $l - l' = j r d + m r k_i$. Soit $t \in \dot{D}$. On pose $s := \zeta_d^{m r} t$. Alors $x_i(t) = x_i(s)$ et $y_{i,l}(t) = y_{i,l'}(s) \iff \zeta_d^l t^{k_i} = \zeta_d^{l'} s^{k_i} \iff \zeta_d^{l-l'} = \zeta_d^{m r k_i}$. Or $\zeta_d^{l-l'} = \zeta_d^{j r d + m r k_i} = \zeta_d^{m r k_i}$ donc $y_{i,l}(t) = y_{i,l'}(s)$. Alors $g : t \mapsto \zeta_d^{m r} t$ est une bijection de \dot{D} dans lui même et $f_{i,l}(\dot{D}) = f_{i,l'} \circ g(\dot{D}) = f_{i,l'}(\dot{D})$. \square

On en déduit immédiatement :

Corollaire 4.1.5. $U_i \setminus \{(b_i, 0)\} = \sqcup_{l=0}^{e_i-1} f_{i,l}(\dot{D})$.

Les $f_{i,l}$ étant continues, l'image $f_{i,l}(\dot{D})$ est un disque épointé, on note $q_{i,l}$ son point manquant et on pose $E_{i,l} = (U_i \setminus \{(b_i, 0)\}) \cup \{q_{i,l}\}$.

Notons \mathcal{X} la surface donnée par :

$$\mathcal{X} := (\mathcal{C} \setminus U_i) \cup \left(\cup_{i=1}^n \cup_{l=0}^{e_i-1} E_{i,l} \right).$$

4.1.2 Séparation des branches sur un voisinage de ∞

On considère toujours un disque complexe D ouvert de rayon $\varepsilon > 0$, centré en 0, et on note \dot{D} le disque D épointé en son centre. Soit z la fonction holomorphe définie sur \dot{D} par :

$$\forall t \in \dot{D}, \quad z(t) = t^{d'_0}$$

où $d'_0 = \frac{d}{e_0}$.

Alors $D_\infty := \{\frac{1}{z(t)} | t \in \dot{D}\} \cup \{\infty\}$ est un voisinage de ∞ dans $\hat{\mathbb{C}}$. On peut choisir ε assez petit pour que $b_i \notin D_\infty$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. On considère dans \mathcal{C} l'ouvert U défini par :

$$U := \pi^{-1}(D_\infty \setminus \{\infty\}).$$

On définit les fonctions :

$$\forall l \in \{0, \dots, d-1\}, \forall t \in \dot{D}, \quad y_l(t) = \zeta_d^l t^{-k'_0} \left(\prod_{i=1}^n (1 - t^{d'_0} b_i)^{k_i} \right)^{\frac{1}{d}} \quad ; \quad f_l(t) = \left(\frac{1}{z(t)}, y_l(t) \right)$$

où $k'_0 = \frac{k_0}{e_0}$. Alors pour tout $l \in \{1, \dots, d-1\}$ et pour tout $t \in \dot{D}$:

$$\begin{aligned}
y_l(t)^d &= t^{-k'_0 \times d} \prod_{i=1}^n (1 - t^{d'_0} b_i)^{k_i} \\
&= t^{-d'_0 \times k_0} \prod_{i=1}^n (1 - t^{d'_0} b_i)^{k_i} \\
&= \prod_{i=1}^n t^{-d'_0 \times k_i} (1 - t^{d'_0} b_i)^{k_i} \\
&= \prod_{i=1}^n (t^{-d'_0} - b_i)^{k_i} \\
&= \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{z(t)} - b_i \right)^{k_i}.
\end{aligned}$$

On a ainsi : $f_l(\dot{D}) \subset U$. Pour tout élément $(x, y) \in U$, on peut fixer un $t \in \dot{D}$ tel que $x = \frac{1}{z(t)}$. Alors le nombre complexe $\prod_{i=1}^n (x - b_i)^{k_i}$ est non nul et il existe exactement d solutions y_0, \dots, y_d telles que $y^d = \prod_{i=1}^n (x - b_i)^{k_i}$. Puisque les $y_l(t)$ sont d nombres complexes distincts vérifiant cette équation, alors $(x, y) = (\frac{1}{z(t)}, y_l(t))$ pour un certain $l \in \{0, \dots, d-1\}$ et donc $U \subset \cup_{l=1}^{d-1} f_l(\dot{D})$. On a finalement l'égalité : $U = \{(\frac{1}{z(t)}, y_l(t)) \mid l \in \{0, \dots, d-1\}, t \in \dot{D}\}$.

On veut construire les cartes locales dans U définies sur \dot{D} . On pose pour tout $l \in \{0, \dots, d-1\}$:

$$f_l : t \in \dot{D} \mapsto \left(\frac{1}{z(t)}, y_l(t) \right).$$

Lemme 4.1.6. *Les fonctions f_l ainsi définies sont des bijections holomorphes sur leurs images respectives notées $E_l := f_l(\dot{D})$.*

Démonstration : En effet, si $f_l(t) = f_l(s)$, comme $z(t) = z(s)$, on peut fixer j tel que $t = \zeta_{d'_0}^j s$. En particulier, $t^{d'_0} = s^{d'_0}$, alors $y_l(t) = y_l(s)$ équivaut à $t^{-k'_0} = s^{-k'_0}$. On peut donc fixer l tel que $t = \zeta_{k'_0}^l s$. Ainsi comme d'_0 et k'_0 sont premiers entre eux, $\zeta_{k'_0}^l = \zeta_{d'_0}^j$ si et seulement si $\zeta_{k'_0}^l = \zeta_{d'_0}^j = 1$ et donc $t = s$. \square

Lemme 4.1.7. $U = \sqcup_{l=0}^{e-1} E_l$.

Démonstration : Supposons $E_l \cap E_{l'} \neq \emptyset$ et fixons $t, s \in \dot{D}$ tels que $f_l(t) = f_{l'}(s)$. De même que précédemment, comme $z(t) = z(s)$, on peut fixer j tel que $t = \zeta_{d'_0}^j s$. Alors : $p(t) = \prod_{i=1}^n (1 - t^{d'_0} b_i)^{k_i} = \prod_{i=1}^n (1 - s^{d'_0} b_i)^{k_i} = p(s)$ et :

$$\begin{aligned}
y_l(t) &= y_{l'}(s) \Rightarrow \zeta_d^l t^{-k'_0} p(t)^{\frac{1}{d}} = \zeta_d^{l'} s^{-k'_0} p(s)^{\frac{1}{d}} \\
&\Rightarrow \zeta_d^{l-l'} (\zeta_{d'_0}^j s)^{-k'_0} = s^{-k'_0} \\
&\Rightarrow \zeta_d^{l-l'} \zeta_{d'_0}^{-k'_0 j} = 1 \\
&\Rightarrow \zeta_d^{l-l'-k_0 j} = 1.
\end{aligned}$$

Alors $l - l' - k_0 j \equiv 0 \pmod{d}$ et on fixe un entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que $l - l' = ld + k_0 j = e_0(md'_0 - k'_0 j)$. Ainsi $l - l' \equiv 0 \pmod{e_0}$ et on a montré que $E_l \cap E_{l'} \neq \emptyset \Rightarrow l - l' \equiv 0 \pmod{e_0}$.

Réciproquement, si $l - l' \equiv 0 \pmod{e}$, alors on fixe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $l - l' = me_0$. Par le théorème de Bézout, on peut également fixer, puisque $\text{pgcd}(d, k_0) = e_0$, des entiers $j', m' \in \mathbb{Z}$ tels que $e_0 = m'd - j'k_0$. Alors $me_0 = mm'd - mj'k_0$ et $l - l' = (mm')d - (mj')k_0$. Soit $s \in \dot{D}$ et $t := \zeta_{d_0}^{mj'} s$. Alors $t \in \dot{D}$ et on peut vérifier que $f_l(t) = f_{l'}(s)$ et finalement $l - l' \equiv 0 \pmod{e} \Rightarrow E_l \cap E_{l'} \neq \emptyset$.

De plus, il est clair que $t \mapsto \zeta_{d_0}^j t$ est une bijection de \dot{D} dans lui-même, alors en reprenant les notations ci-dessus, $E_l = f_l(\dot{D}) = f_l(\zeta_{d_0}^j \dot{D}) = f_{l'}(\dot{D}) = E_{l'}$. Finalement, on a montré que $l \equiv l' \pmod{e} \iff E_l \cap E_{l'} \neq \emptyset \iff E_l = E_{l'}$. Alors $U = \cup_{l=0}^{d-1} E_l = \sqcup_{l=0}^{e-1} E_l$. \square

Les fonctions f_l étant continues, les E_l sont des disques époinçés, on note p_l le point manquant et on re-note alors $E_l := f_l(\dot{D}) \cup \{p_l\}$.

On peut ainsi définir une nouvelle surface \hat{X} :

$$\hat{X} := \mathcal{X} \cup \left(\cup_{l=0}^{e_0-1} E_l \right).$$

On note $\tilde{B} := \{q_{i,l} | i \in \{1, \dots, n\}, l \in \{0, \dots, e_i - 1\}\}$ et $\tilde{\infty} = \{p_0, \dots, p_{e_0-1}\}$. On prolonge le morphisme π sur \hat{X} en l'étendant à $\hat{\mathbb{C}}$ de la façon suivante :

- π reste inchangé là où \mathcal{C} et \mathcal{X} coïncident, c'est à dire : $\forall (x, y) \in \hat{X} \setminus (\tilde{B} \cup \tilde{\infty})$, $\pi(x, y) = x$
- on prolonge π sur les $q_{i,l}$ par continuité en posant : $\pi(q_{i,l}) = \lim_{t \rightarrow 0} \pi(f_{i,l}(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} x_i(t) = b_i$
- $\forall l \in \{0, \dots, e_0 - 1\}$, on prolonge π par continuité sur les p_l en posant : $\pi(p_l) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{z(t)} = \infty$.

Remarquons également que par définition de T , des $y_{i,l}$ et des y_l , on a clairement $T(f_{i,l}(\dot{D})) = f_{i,l+1 \pmod{e_i}}(\dot{D})$ et $T(f_l(\dot{D})) = f_{l+1}(\dot{D})$. On peut ainsi poser :

$$\forall l \in \{0, \dots, e_0 - 1\}, \quad T(p_l) := p_{l+1 \pmod{e_0}} \quad ;$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall l \in \{0, \dots, d - 1\}, \quad T(q_{i,l}) := q_{i,l+1}.$$

Remarque 4.1.8. Ainsi prolongés, T et π vérifient toujours $\pi \circ T = T$ et $T^d = \text{Id}_{\hat{X}}$.

4.1.3 Finalisation de la construction de \hat{X}

On peut à présent faire quelques premières observations sur la surface \hat{X} que l'on vient de définir.

Proposition 4.1.9. \hat{X} est une surface de Riemann compacte.

Démonstration : En effet, \hat{X} dispose d'une structure de variété complexe de dimension 1 : là où \hat{X} coïncide avec \mathcal{C} , c'est à dire à l'exception des points de \tilde{B} et de $\tilde{\infty}$, on peut construire des cartes locales par le théorème d'inversion locale d'après la remarque 4.1.1. Le travail précédemment réalisé permet de définir également des cartes locales au voisinage des points de \tilde{B} ou de $\tilde{\infty}$.

Pour montrer que \hat{X} est compacte, on considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{X}$. Alors la suite $(\pi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $\hat{\mathbb{C}}$. On peut alors extraire de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $(\pi(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On note $y \in \hat{\mathbb{C}}$ la limite de $(\pi(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$, $U \subset \mathbb{C}$ un voisinage de y , et $n_0 \in \mathbb{N}$ un indice tel que : $\forall n \geq n_0, \pi(y_n) \in U$. On

note $\pi^{-1}(y) = \{\tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_{d-1}\}$, avec éventuellement $\tilde{y}_k = \tilde{y}_{k \bmod e_i}$ si $y = b_i$ et $\tilde{y}_k = \tilde{y}_{k \bmod e_i}$ si $y = \infty$. On note également $U_y = \cup_{k=0}^{d-1} U_k$ avec de nouveau $U_k = U_{k \bmod e_i}$ si $y = b_i$, $U_k = U_{k \bmod e_i}$ si $y = \infty$, et tel que $\tilde{y}_k \in U_k$ pour tout $k \in \{0, \dots, d-1\}$. Alors on peut fixer un indice $k \in \{0, \dots, d-1\}$ tel que U_k contienne une infinité de point de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ainsi on peut extraire une sous-suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \geq n_0, z_n \in U_k$. Alors comme $(\pi(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers y , la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\tilde{y}_k \in \hat{X}$ et on a finalement trouvé une sous-suite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge dans \hat{X} qui est donc compact. \square

On peut également donner quelques caractéristiques de \hat{X} d'un point de vu topologique. Commençons par remarquer que quelque soit $x \in \mathbb{C} \setminus \{b_1, \dots, b_n\}$, la pré-image de x dans \hat{X} se compose de d points deux à deux distincts, permutés cycliquement par T . Alors peut trouver un voisinage U_x ouvert de x tel $\pi^{-1}(U_x)$ est une réunion disjointe de d disques ouvert. On a vu par construction que les points b_i ont respectivement e_i pré-images notée $q_{i,0}, \dots, q_{i,e_i-1}$, permutés cycliquement par T avec $T(q_{i,k}) = q_{i,k+1 \bmod e_i}$. Alors la pré-image d'un voisinage ouvert autour d'un b_i est composée d'exactly e_i disques ouverts. De même, les pré-images de ∞ dans \hat{X} sont les e_0 points p_0, \dots, p_{e_0-1} et la pré-image d'un voisinage de ∞ se compose de e_0 disques disjoints. Les points p_k sont également permutés cycliquement par T avec $T(p_k) = p_{k+1 \bmod e_0}$.

Remarque 4.1.10. *Ainsi défini, $\pi : \hat{X} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ est un revêtement cyclique de degré d , ramifié au dessus des points b_1, \dots, b_n et éventuellement au dessus de ∞ .*

4.2 Genre de \hat{X} et condition de connexité de \hat{X}

4.2.1 Étude du genre g de \hat{X}

Proposition 4.2.1. *Le genre g de \hat{X} vaut : $g = \frac{1}{2}(d(n-1) - \sum_{i=0}^n e_i + 2)$.*

Démonstration :

On utilise ici le point de vue de \hat{X} comme un revêtement au-dessus de la sphère. On a vu que (\hat{X}, π) est un revêtement de degré d au-dessus de $\hat{\mathbb{C}}$, ramifié au-dessus des points b_i et éventuellement de ∞ si $e_0 \neq d$. On a alors, pour tout $x \in \hat{X}$, l'indice de ramification $e_\pi(x)$ qui est donné par :

$$e_\pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin \tilde{\infty} \cup \tilde{\mathbb{B}} \\ d'_0 & \text{si } x \in \tilde{\infty} \\ d'_i & \text{si } x \in \tilde{\mathbb{B}} \end{cases} .$$

La formule de Riemann Hurwitz nous donne donc :

$$\begin{aligned}
2 - 2g &= 2d - \sum_{x \in \hat{X}} (e_\pi(x) - 1) \\
\Rightarrow 2 - 2g &= 2d - \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=0}^{e_i-1} (e_\pi(q_{i,j}) - 1) \right) - \sum_{k=0}^{e_0-1} (e_\pi(p_k) - 1) \\
\Rightarrow 2 - 2g &= 2d - \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=0}^{e_i-1} (d'_i - 1) \right) - \sum_{k=0}^{e_0-1} (d'_0 - 1) \\
\Rightarrow 2 - 2g &= 2d - \sum_{i=1}^n (e_i \times d'_i - e_i) - (e_0 \times d'_0 - e_0) \\
\Rightarrow 2 - 2g &= 2d - nd + \sum_{i=1}^n e_i - d + e_0 \\
\Rightarrow -2g &= d(1 - n) + \sum_{i=0}^n e_i - 2 \\
\Rightarrow g &= \frac{d(n - 1) - \sum_{i=0}^n e_i + 2}{2}.
\end{aligned}$$

□

Remarquons que ce résultat généralise bien celui donné par McMullen dans l'article [McM13] pour le cas où les k_i sont égaux à 1 : en effet, on a alors les $e_i = 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, alors $\sum_{i=0}^n e_i = e_0 + n$ avec $e_0 = \text{pgcd}(\sum_{i=1}^n k_i, d) = \text{pgcd}(n, d)$. La formule ci-dessus nous donne :

$$g = \frac{d(n - 1) - (n + e_0) + 2}{2} = \frac{d(n - 1) - (n - 1) - e_0 + 1}{2} = \frac{(d - 1)(n - 1) - e_0 + 1}{2}.$$

On retrouve bien la formule du genre annoncée par McMullen dans son article [McM13].

4.2.2 Connexité de \hat{X}

Rappelons que les tresses de B_n sont vues comme des éléments de $\text{Mod}(D, n)$ étendues sur $\hat{\mathbb{C}}$, où D est un disque qui contient les points marqués b_1, \dots, b_n . Ainsi, les tresses de B_n coïncident avec l'identité sur ∂D et sur $\hat{\mathbb{C}} \setminus D$. On note $B := \{b_1, \dots, b_n\}$. Soit $\beta \in \partial D$, β est donc laissé stable par les tresses de B_n . On note $\beta_0, \dots, \beta_{d-1}$ les points dans \hat{X} au-dessus de β tels que $T^k(\beta_0) = \beta_k$. On peut choisir β non aligné avec deux points b_i . Alors $\pi_0(\mathbb{C} \setminus B, \beta)$ est un groupe libre généré par les n éléments γ_i lacets de base β qui font respectivement un unique tour autour de b_i mais autour d'aucun autre des points marqués.

On note $\tilde{\gamma}_{i,k}$ le relevé de γ_i d'origine β_k .

Proposition 4.2.2. *Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et pour tout $k \in \{0, \dots, d - 1\}$, le relevé $\tilde{\gamma}_{i,k}$ de γ_i d'origine β_k se termine en β_{k+e_i} .*

Démonstration : Soit $i \in \{1, \dots, n\}$, et $\tilde{\gamma}_{i,0}$ le relevé de γ dans $\hat{X} \setminus \tilde{B}$ d'origine β_0 . A homotopie près, on peut choisir de voir γ_i comme la succession de trois chemins $\gamma_i = \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1$: α_1 parcourant un segment se rapprochant de b_i , α_2 étant un lacet parcourant

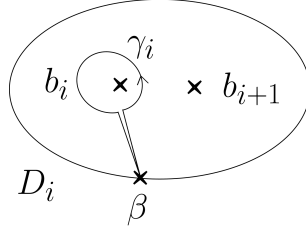


FIGURE 4.1 – Illustration d'un γ_i

le bord d'un petit cercle autour de b_i , et enfin le chemin α_3 étant l'inverse de α_1 . On peut choisir α_2 dans un voisinage U_i de b_i pour lequel $\pi^{-1}(U_i) = \cup_{j=1}^{e_i} V_{i,j}$ où $V_{i,j}$ est un voisinage de $q_{i,j}$ dans lequel π s'exprime localement par $z \mapsto z^{d_i}$. De plus, quitte à considérer une intersection des $V_{i,j}$ avec $f_{i,j}(\dot{D}_\varepsilon)$ pour un rayon ε assez petit, on peut supposer $T(V_{i,j}) = V_{i,j+1}$.

Un relèvement $\tilde{\alpha}_1$ de α_1 d'origine β_0 se termine dans un certain $V_{i,j}$. Comme α_2 fait un tour complet dans U_i autour de b_i , le relèvement $\tilde{\alpha}_2$ de α_2 , d'origine $\tilde{\alpha}_1(1)$, fait $\frac{1}{d_i}$ -ième de tour autour de $q_{i,j}$. Cette rotation correspond à T^{e_i} . Le point d'arrivée du relevé de α_2 est alors $\tilde{\alpha}_2(1) = T^{e_i}(\tilde{\alpha}_2(0)) = T^{e_i}(\tilde{\alpha}_1(1))$. Remarquons que $T^{e_i}(\tilde{\alpha}_1(1))$ est encore dans $V_{i,j}$: en effet, comme $\tilde{\alpha}_1(1) \in V_{i,j}$, $T^{e_i}(\tilde{\alpha}_1(1)) \in V_{i,j+e_i \bmod e_i} = V_{i,j}$.

Le relevé $\tilde{\alpha}_3$ de α_3 se projette sur $\alpha_3 = \bar{\alpha}_1$, donc $\tilde{\alpha}_3 \in \{T^k(\tilde{\alpha}_1) \mid k = 0, \dots, d-1\}$. Or l'origine de $\tilde{\alpha}_3$ est $\tilde{\alpha}_2(1) = T^{e_i}\tilde{\alpha}_2(0) = T^{e_i}(\tilde{\alpha}_1(1))$. Alors il se termine donc en $T^{e_i}(\tilde{\alpha}_1(0)) = T^{e_i}(\beta_0) = \beta_{e_i}$. On en déduit que le relèvement de γ_i d'origine β_0 se termine en β_{e_i} . On peut facilement généraliser pour obtenir la proposition. \square

On peut à présent donner une condition pour la connexité de \hat{X} :

Proposition 4.2.3. \hat{X} est connexe si et seulement si $\text{pgcd}(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Démonstration : On veut montrer que pour tout $(x, y) \in \hat{X} \setminus (\tilde{B} \cup \tilde{\infty})$, il existe un chemin de (x, y) à β_0 dans \hat{X} . Remarquons alors que, pour $\tilde{x} \in \tilde{B} \cup \tilde{\infty}$, on pourra trouver un chemin de β_0 à un point $(x, y) \in \hat{X} \setminus \tilde{B} \cup \tilde{\infty}$ qui soit dans un voisinage connexe de \tilde{x} , on pourra alors trouver un chemin de \tilde{x} à β_0 .

Soit $(x, y) \in \hat{X} \setminus \tilde{B} \cup \tilde{\infty}$. On a $\pi(x, y) = x$ et on peut trouver un chemin γ dans $\mathbb{C} \setminus B$ qui relie x à β . Il existe un unique relevé de ce chemin d'origine (x, y) , il se termine en un certain β_{k_0} . Le problème qui se pose est de relier les β_k entre eux. On va montrer qu'on peut relier β_0 à β_1 sous la condition de la proposition, on en déduira sur le même modèle comment relier β_k à β_{k+1} et de proche en proche on saura finalement relier β_0 à n'importe lequel des β_k et en particulier à β_{k_0} . On trouvera ainsi un chemin qui relie (x, y) à β_0 .

Supposons $\text{pgcd}(e_1, \dots, e_n) = 1$. Alors on peut fixer des entiers m_1, \dots, m_n tels que $\sum_{i=1}^n m_i e_i = 1$. Comme $\tilde{\gamma}_{i,k}$ d'origine β_k se termine en β_{k+e_i} , le chemin $\tilde{\gamma}_{1,m_1-1} \circ \dots \circ \tilde{\gamma}_{1,0}$ relie β_0 à $\beta_{m_1 e_1}$ (les indices des β_k sont tous sous entendu modulo d , on ne l'écrit pas pour alléger les notations). Le chemin $\tilde{\gamma}_{2,m_1 e_1+m_2-1} \circ \dots \circ \tilde{\gamma}_{2,m_1 e_1}$ relie $\beta_{m_1 e_1}$ à $\beta_{m_1 e_1+m_2 e_2}$. Ainsi on peut construire des chemins reliant $\beta_{\sum_{i=1}^k m_i e_i}$ à $\beta_{\sum_{i=1}^{k+1} m_i e_i}$, en particulier, le dernier de ces chemins se termine en $\beta_{\sum_{i=1}^n m_i e_i} = \beta_1$. En concaténant tout ces chemins, on obtient un chemin qui relie β_0 à β_1 .

On peut construire de la même façon des chemins $\tilde{\gamma}_{1,m_1} \circ \dots \circ \tilde{\gamma}_{1,1}$ d'origine β_1 et se terminant en $\beta_{m_1 e_1+1}$, puis reliant $\beta_{m_1 e_1+1}$ à $\beta_{m_1 e_1+m_2 e_2+1}$ et ainsi de suite jusqu'à atteindre $\beta_{\sum_{i=1}^n m_i e_i+1} = \beta_2$. En généralisant on pourra relier un β_k au terme suivant β_{k+1} . L'existence de chemins entre les β_k consécutifs permet de construire un chemin de β_0 à n'importe quel autre des β_k et en particulier jusqu'à β_{k_0} , en considérant l'inverse de ce

chemin et en le concaténant avec celui de (x, y) à β_{k_0} on trouve bien un chemin de (x, y) à β_0 et finalement X est connexe.

Supposons maintenant X connexe. En particulier, il existe un chemin μ reliant β_0 à β_1 . Alors $\gamma := \pi(\mu) \in \pi_0(\mathbb{C} \setminus B, \beta)$ et s'écrit comme un mot en les γ_i , on note $\gamma = \gamma_{i_r}^{m_{i_r}} \circ \dots \circ \gamma_{i_1}^{m_{i_1}}$, avec r un entier naturel, les indices i_l dans l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ et les $m_{i_l} \in \mathbb{Z}^*$. Le relevé d'un $\gamma_{i_l}^{m_{i_l}}$ d'origine β_k se termine en $\beta_{k+m_{i_l}e_{i_l}}$. Alors le relevé $\tilde{\gamma}$ de γ d'origine β_0 se termine en $\beta_{\sum_{k=1}^r m_{i_k} e_{i_k}}$. Par unicité du relèvement, μ est homotope à $\tilde{\gamma}$ puisque tous les deux relèvent γ et ont pour origine β_0 . Alors $\beta_1 = \beta_{\sum_{k=1}^r m_{i_k} e_{i_k}}$ et donc $\sum_{k=1}^r m_{i_k} e_{i_k} \equiv 1 \pmod{d}$. Quitte à poser $m_{i_l} = 0$ pour tout indice $i_l \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_r\}$, et à renoter $m_k := m_{i_k}$ on a donc $\sum_{k=1}^n m_k e_k \equiv 1 \pmod{d}$. On pose alors $\sum_{i=1}^n m_i e_i = 1 + \theta d$, avec θ un entier. On a naturellement $\text{pgcd}(e_1, \dots, e_n) \mid \sum_{k=1}^n m_k e_k$ et donc $\text{pgcd}(e_1, \dots, e_n) \mid (1 + \theta d)$. Comme e_i est le pgcd de k_i et d , chaque e_i divise d et $\text{pgcd}(e_1, \dots, e_n) \mid d$. Finalement, on doit avoir $\text{pgcd}(e_1, \dots, e_n) \mid 1$ donc $\text{pgcd}(e_1, \dots, e_n) = 1$. \square

Dans tout ce qui suit, lorsqu'on dira qu'une surface est obtenue à partir d'une courbe algébrique, on sous-entendra toute la construction faite dans cette partie. Ainsi, la donnée d'une courbe algébrique \mathcal{C} de la forme $y^d = \prod_{i=1}^n (x - b_i)^{k_i}$ permet d'obtenir une surface de Riemann \hat{X} , compacte, de genre $g = \frac{1}{2}(d(n-1) - \sum_{i=0}^n n e_i + 2)$, et connexe si $\text{pgcd}(e_1, \dots, e_n) = 1$. Là où \hat{X} et \mathcal{C} coïncident, on pourra noter (x, y) un élément de \hat{X} .

Munie de l'automorphisme T et de la surjection $\pi : \hat{X} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, la surface \hat{X} peut être vu comme un revêtement cyclique au-dessus de la sphère de Riemann, de degré d , éventuellement ramifié au-dessus des b_i et de ∞ . L'objectif de du chapitre suivant est de relever les tresses de B_n en élément de $\text{Mod}(\hat{X})$. Par la suite, on pourra considérer les tirés en arrière par ces relevés, qui donneront des éléments de $U(H^1(\hat{X})_q)$ où $H^1(\hat{X})_q$ est le sous-espace propre dans $H^1(\hat{X})$ de T^* associé à une valeur propre $q \neq 1$. L'étude de ces sous-espaces propres $H^1(\hat{X})_q$ constitue le chapitre 6.

Chapitre 5

Relèvements des tresses pures

Rappelons que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, et pour n points b_1, \dots, b_n deux à deux distincts, inclus dans un disque complexe D , le groupe de tresse B_n peut être vu comme le groupe modulaire $\text{Mod}(D, n)$ des classes d'homotopies des homéomorphismes $D \rightarrow D$ qui préservent l'ensemble $B := \{b_1, \dots, b_n\}$ et coïncident avec Id sur ∂D . Le sous-groupe de tresses pures PB_n est l'ensemble des tresses de B_n dont chaque brin commence et finit sur un même point de B . Alors toute tresse $\tau \in PB_n$ peut être prolongée par Id sur $\hat{\mathbb{C}}$, et on s'intéresse à relever τ en un élément de $\text{Mod}(\hat{X})$, où \hat{X} est une surface de Riemann construite comme précédemment en normalisant une courbe algébrique :

$$y^d = \prod_{i=1}^n (x - b_i)^{k_i}$$

où $d \in \mathbb{N}^*$, et les k_i sont des entiers naturels. On impose également la condition de connexité du théorème 4.2.3, à savoir : $\text{pgcd}(e_1, \dots, e_n) = 1$ où $e_i = \text{pgcd}(k_i, d)$. On rappelle que $\pi : \hat{X} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ est un revêtement cyclique, de degré d , ramifié éventuellement au-dessus des points de B et de ∞ . On a également un automorphisme T de \hat{X} , vérifiant $T^d = \text{Id}$ et qui permute les éléments dans la pré-image d'un point de $\hat{\mathbb{C}}$. Dans ce chapitre, nous montrerons le résultat suivant :

Théorème 5.0.1. *Il existe un morphisme de groupe θ de PB_n dans $\text{Mod}(\hat{X})$ qui, à toute tresse $\tau \in PB_n$, associe un relevé $\tilde{\tau}$ qui commute avec T .*

5.1 Relèvement d'une tresse de PB_n sur \hat{X}

Reprenons les notations de la partie 4.2.2. On considère $\beta \in \hat{\mathbb{C}}$ un point de ∂D qui ne soit dans l'alignement d'aucune paire de points de B , on note $\pi^{-1}(\beta) = \{\beta_0, \dots, \beta_{d-1}\}$ de sorte que $T(\beta_k) = \beta_{k+1 \pmod d}$. On note également $\tilde{B} = \pi^{-1}(B)$ et $\tilde{\infty} = \pi^{-1}(\infty)$. Un relevé $\tilde{\tau}$ de τ , doit vérifier $\tau \circ \pi = \pi \circ \tilde{\tau}$. Comme $\tau(\beta) = \beta$, alors $\tilde{\tau}(\beta_0) \in \{\beta_0, \dots, \beta_{d-1}\}$. A priori, si τ se relève, il y aura d relevés différents de τ , chacun associant β_0 à l'un des β_k pour $k \in \{0, \dots, d-1\}$. Le choix d'un relevé de τ se fait en imposant une condition sur $\tilde{\tau}(\beta_0)$. Il faut donc d'une part que les tresses de PB_n se relèvent, et d'autre part, que chaque tresse soit associée de façon unique à l'un de ses relevés.

5.1.1 Relèvement des tresses sur $\hat{X} \setminus (\tilde{B} \cup \tilde{\infty})$

Commençons par montrer que les tresses de PB_n se relèvent dans $\hat{X} \setminus (\tilde{B} \cup \tilde{\infty})$. Rappelons que $B_n \simeq \text{Mod}(D, n)$ d'après 2.1.6, on peut donc voir une tresse $\tau \in PB_n \subset B_n$

comme un élément de $\text{Mod}(D, n)$.

Proposition 5.1.1. *Soit $\Gamma := \pi_*(\pi_1(\hat{X} \setminus (\tilde{B} \cup \tilde{\infty})))$. Pour toute tresse $\tau \in PB_n$, vue comme un représentant de sa classe d'homotopie dans $\text{Mod}(D, n)$, on peut définir un unique relevé $\tilde{\tau}$ de τ dans $\text{Homeo}(\hat{X} \setminus (\tilde{B} \cup \tilde{\infty}))$, fixant β_0 , si la condition suivante est vérifiée :*

$$\tau_*(\Gamma) \subset \Gamma.$$

L'inclusion ci-dessus signifie que pour un lacet $\tilde{\gamma}$ de base β_0 dans $\hat{X} \setminus (\tilde{B} \cup \tilde{\infty})$, le relevé de $\tau \circ \pi(\tilde{\gamma})$ d'origine β_0 est également un lacet.

Démonstration : Pour toute tresse $\tau \in PB_n \subset B_n \simeq \text{Mod}(D, n)$, en notant de nouveau τ un représentant de sa classe dans $\text{Mod}(D, n)$, on peut voir τ comme un homéomorphisme du disque D , laissant stable l'ensemble des points marqués $B := \{b_1, \dots, b_n\}$ et coïncidant avec Id sur ∂D . En prolongeant τ sur \hat{C} par Id , on s'intéresse à relever $\tau : \hat{C} \rightarrow \hat{C}$ en un homéomorphisme de $\hat{X} \setminus (\tilde{B} \cup \tilde{\infty})$. Rappelons que $\pi|_{\hat{X} \setminus (\tilde{B} \cup \tilde{\infty})}$ est un revêtement. Si $\tau_*(\Gamma) \subset \Gamma$, d'après la théorie des revêtements, il existe exactement d relevés de τ dans $\text{Homeo}(\hat{X} \setminus (\tilde{B} \cup \tilde{\infty}))$, associant chacun le point β_0 à un élément de $\pi^{-1}(\beta)$. On note alors $\tilde{\tau} \in \text{Homeo}(\hat{X} \setminus (\tilde{B} \cup \tilde{\infty}))$ le relevé de τ fixant le point de base β_0 .

Concrètement, si $\tau \in PB_n$ vérifie $\tau_*(\Gamma) \subset \Gamma$, le relevé $\tilde{\tau}$ est défini sur $\hat{X} \setminus (\tilde{B} \cup \tilde{\infty})$ de la façon suivante : pour tout $x \in \hat{X} \setminus (\tilde{B} \cup \tilde{\infty})$, on considère $\tilde{\gamma}$ un chemin de β_0 à x , alors $\tilde{\tau}$ associe x au point d'arrivée du relevé de $\tau \circ \pi(\tilde{\gamma})$ d'origine β_0 . \square

Théorème 5.1.2. *Pour toute tresse $\tau \in PB_n$, on a*

$$\tau_*(\Gamma) \subset \Gamma.$$

Avant de passer à la démonstration de ce théorème, on introduit le morphisme suivant :

$$\rho : \pi_1(\mathbb{C} \setminus B, \beta) \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \quad (5.1.1)$$

qui à tout lacet γ dans $\pi_1(\mathbb{C} \setminus B, \beta)$ associe l'indice $i_0 \in \{0, \dots, d-1\}$ du point d'arrivée β_{i_0} du relevé de γ d'origine β_0 . Alors $\Gamma = \ker(\rho)$ et l'inclusion dans le théorème 5.1.2 s'écrit aussi : pour toute tresse $\tau \in PB_n$, $\rho(\tau_*(\Gamma)) = \{0\}$. On va en fait montrer un résultat plus fort encore :

Proposition 5.1.3.

$$\forall \gamma \in \pi_1(\mathbb{C} \setminus B, \beta), \forall \tau \in PB_n, \quad \rho(\tau(\gamma)) = \rho(\gamma).$$

Démonstration du théorème 5.1.2 : En admettant la proposition ci dessus 5.1.3, on aura pour tout $\gamma \in \Gamma$, et pour toute tresse $\tau \in PB_n$, $\rho(\tau(\gamma)) = \rho(\gamma) = 0$. Ainsi $\tau_*(\Gamma) \subset \Gamma$ et le théorème est démontré. \square

Pour démontrer la proposition 5.1.3, on a besoin de déterminer l'image des γ_k par les générateurs $\alpha_{i,j}$ de PB_n . Les éléments γ_k , respectivement $\alpha_{i,j}$, sont introduits dans la partie 4.2.2, respectivement dans 2.1.2.

Lemme 5.1.4. Pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ tel que $i < j$, et pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\alpha_{i,j}(\gamma_k)$ est un conjugué de γ_k .

Démonstration : Rappelons que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, γ_k est un lacet faisant un seul tour autour du point marqué b_k .

Commençons par regarder comment un demi-twist τ_i , pour $i \in \{1, \dots, n\}$ transforme un lacet γ_k . Clairement, si $j \neq i, i+1$, alors γ_j n'est pas dans le support de τ_i et sera laissé fixe par celui-ci. On va donc s'intéresser aux lacets γ_i et γ_{i+1} , qui se trouvent sur D_i . on voit sur les illustrations ci-dessous que : $\tau_i(\gamma_i) = \gamma_i \gamma_{i+1} \gamma_i^{-1}$, $\tau_i(\gamma_{i+1}) = \gamma_i$, $\tau_i^{-1}(\gamma_i) = \gamma_{i+1}$, et enfin $\tau_i^{-1}(\gamma_{i+1}) = \gamma_{i+1}^{-1} \gamma_i \gamma_{i+1}$.

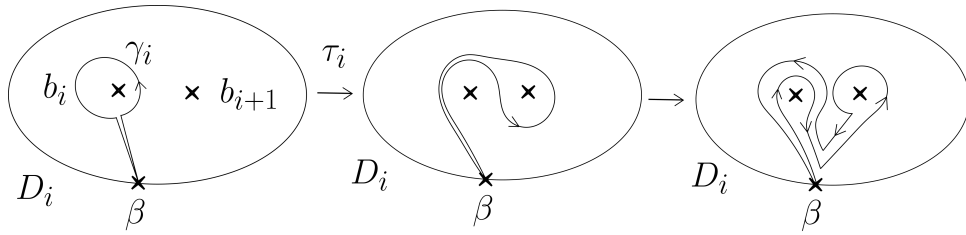


FIGURE 5.1 – Transformation du lacet γ_i par τ_i

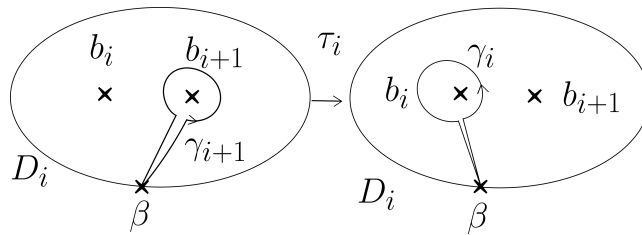


FIGURE 5.2 – Transformation du lacet γ_{i+1} par τ_i

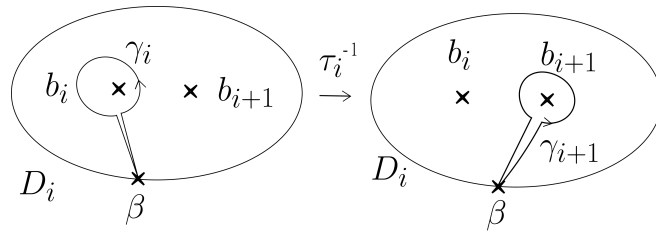


FIGURE 5.3 – Transformation du lacet γ_i par τ_i^{-1}

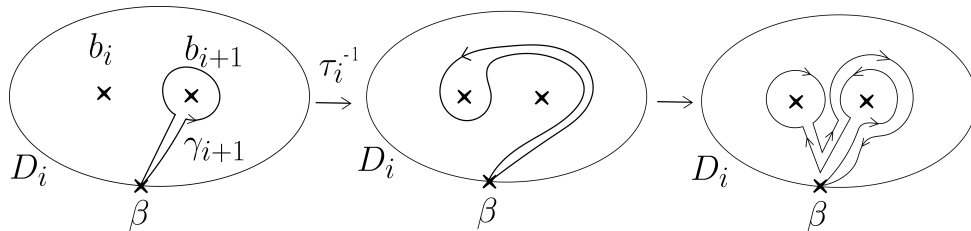


FIGURE 5.4 – Transformation du lacet γ_{i+1} par τ_i^{-1}

Comme $\tau(\gamma^{-1}) = (\tau(\gamma))^{-1}$, pour tout $\tau \in B_n$ et pour tout $\gamma \in \pi_*(\mathbb{C} \setminus B, \beta)$, on peut également calculer :

$$\tau_i^2(\gamma_i) = (\gamma_i \gamma_{i+1}) \gamma_i (\gamma_{i+1}^{-1} \gamma_i^{-1}) \quad ; \quad \tau_i^2(\gamma_{i+1}) = \gamma_i \gamma_{i+1} \gamma_i^{-1}.$$

Remarquons que $\tau_i^2(\gamma_i)$, respectivement $\tau_i^2(\gamma_{i+1})$, est un conjugué de γ_i , respectivement de γ_{i+1} .

Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$, tels que $i < j$, et $k \in \{1, \dots, n\}$. On veut voir que $\alpha_{i,j}(\gamma_k)$ est un conjugué de γ_k . Rappelons que $\alpha_{i,j}$ est défini par :

$$\alpha_{i,j} = (\tau_{j-1} \cdots \tau_{i+1}) \tau_i^2 (\tau_{j-1} \cdots \tau_{i+1})^{-1}.$$

On fait un calcul direct pour $k \neq j$, et une récurrence pour $k = j$.

- Si $k < i$ ou si $k > j$, alors aucun des demi-twists apparaissant dans l'écriture de $\alpha_{i,j}$ n'agit sur γ_k et $\alpha_{i,j}(\gamma_k) = \gamma_k$.
- Si $k \in \{i+1, \dots, j-1\}$, alors le premier terme de $\alpha_{i,j}$ modifiant γ_k est τ_k^{-1} :

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j}(\gamma_k) &= (\tau_{j-1} \cdots \tau_{i+1}) \tau_i^2 (\tau_{i+1}^{-1} \cdots \tau_{j-1}^{-1})(\gamma_k) \\ &= (\tau_{j-1} \cdots \tau_k \cdots \tau_{i+1}) \tau_i^2 (\tau_{i+1}^{-1} \cdots \tau_k^{-1})(\gamma_k) \quad \text{avec } \tau_k^{-1}(\gamma_k) = \gamma_{k+1} \\ &= (\tau_{j-1} \cdots \tau_k)(\gamma_{k+1}) \quad \text{avec } \tau_k(\gamma_{k+1}) = \gamma_k \\ &= \gamma_k \end{aligned}$$

- Si $k = i$,

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j}(\gamma_i) &= (\tau_{j-1} \cdots \tau_{i+1}) \tau_i^2(\gamma_i) \\ &= (\tau_{j-1} \cdots \tau_{i+1})(\gamma_i \gamma_{i+1} \gamma_i \gamma_{i+1}^{-1} \gamma_i^{-1}) \\ &= \underbrace{(\tau_{j-1} \cdots \tau_{i+1})(\gamma_i \gamma_{i+1})}_{:=\gamma} \cdot \gamma_i \cdot (\tau_{j-1} \cdots \tau_{i+1})(\gamma_{i+1}^{-1} \gamma_i^{-1}) \\ &= \gamma \gamma_i \gamma^{-1} \end{aligned}$$

- Si $k = j$, on démontre par récurrence que :

Pour tout $l > i$, il existe $\gamma \in \pi_(\mathbb{C} \setminus B, \beta)$, tel que : $\alpha_{i,l}(\gamma_l) = \gamma \gamma_l \gamma^{-1}$.*

D'après les calculs faits pour $\tau_i^2(\gamma_{i+1})$, cette propriété est vrai au rang initial $l = i+1$. Soit $l \in \{i+2, \dots, n-1\}$ et supposons que la propriété est vraie au rang $l-1$, c'est à dire qu'il existe $\gamma \in \pi_*(\mathbb{C} \setminus B, \beta)$ tel que : $\alpha_{i,l-1}(\gamma_{l-1}) = \gamma \gamma_{l-1} \gamma^{-1}$ Alors :

$$\begin{aligned} \alpha_{i,l}(\gamma_l) &= (\tau_{l-1} \cdots \tau_{i+1}) \tau_i^2 (\tau_{i+1}^{-1} \cdots \tau_{l-1}^{-1})(\gamma_l) \\ &= \tau_{l-1} \alpha_{i,l-1} \tau_{l-1}^{-1}(\gamma_l) \\ &= \tau_{l-1} \alpha_{i,l-1}(\gamma_l^{-1} \gamma_{l-1} \gamma_l) \\ &= \tau_{l-1}(\gamma_l^{-1} \cdot \alpha_{i,l-1}(\gamma_{l-1}) \cdot \gamma_l) \\ &= \tau_{l-1}(\gamma_l^{-1} \gamma \gamma_{l-1} \gamma^{-1} \gamma_l) \\ &= \tau_{l-1}(\gamma_l^{-1} \gamma) \cdot \tau_{l-1}(\gamma_{l-1}) \cdot \tau_{l-1}(\gamma^{-1} \gamma_l) \\ &= \underbrace{\tau_{l-1}(\gamma_l^{-1} \gamma)}_{:=\gamma'} \gamma_{l-1} \gamma_l^{-1} \cdot (\tau_{l-1}(\gamma^{-1} \gamma_{l-1})) \\ &= \gamma' \gamma_l \gamma'^{-1} \end{aligned}$$

Par récurrence, on a finalement : $\forall l \in \{i+1, \dots, n\}$, $\alpha_{i,l}(\gamma_l)$ est un conjugué de γ_l . En particulier, $\alpha_{i,j}(\gamma_j)$ est un conjugué de γ_j .

Ainsi, dans tous les cas $\alpha_{i,j}(\gamma_k)$ est un conjugué de γ_k et finalement le lemme est démontré. \square

Démonstration de la proposition 5.1.3 : Soit $\gamma \in \pi_1(\mathbb{C} \setminus B, \beta)$. Comme γ est un lacet dans $\mathbb{C} \setminus B$ d'origine β , γ s'écrit comme un mot en les γ_k . De plus, chaque tresse de PB_n s'écrit comme un mot des $\alpha_{i,j}$ et de leurs inverse. Il suffit donc de vérifier que pour tout $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ avec $i < j$, $\rho(\alpha_{i,j}(\gamma_k)) = \rho(\gamma_k)$. D'après le lemme 5.1.4, on sait que $\alpha_{i,j}(\gamma_k)$ est un conjugué de γ_k , on peut donc fixer $\gamma \in \pi_*(\mathbb{C} \setminus B, \beta)$ vérifiant : $\alpha_{i,j}(\gamma_k) = \gamma\gamma_k\gamma^{-1}$. Alors :

$$\begin{aligned} \rho(\alpha_{i,j}(\gamma_k)) &= \rho(\gamma\gamma_k\gamma^{-1}) = \rho(\gamma) + \rho(\gamma_k) + \rho(\gamma^{-1}) \\ &= \rho(\gamma) + \rho(\gamma_k) - \rho(\gamma) \\ &= \rho(\gamma_k). \end{aligned}$$

Donc la proposition 5.1.3 est démontrée. \square

Remarque 5.1.5. Dans la preuve du lemme, on a déterminé $\tau_i(\gamma_i)$ et $\tau_i(\gamma_{i+1})$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. On peut alors remarquer que $\rho(\tau_i(\gamma_i)) = e_{i+1}$ et $\rho(\gamma_i) = e_i$. Alors, dans le cas où $e_i \neq e_{i+1}$, on ne pourra pas relever la tresse τ_i . Cet exemple nous montre que les tresses de B_n ne se relèvent pas toutes sur $\hat{X} \setminus (\tilde{B} \cup \tilde{\infty})$. Une tresse $\tau \in B_n$, associée à une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\tau(b_i) = b_{\sigma(i)}$ se relève si $e_i = e_{\sigma(i)}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, d'où notre choix de se restreindre au sous groupe de tresses pures puisque la permutation dans \mathfrak{S}_n associée à une tresse pure est toujours l'identité.

On a finalement montré que les tresses pures se relèvent sur $\hat{X} \setminus (\tilde{B} \cup \tilde{\infty})$. En général, on notera $\tilde{\tau}$ l'unique relevé d'une tresse $\tau \in PB_n$ fixant le point β_0 .

5.1.2 Commutation des relevés des tresses avec T sur $\hat{X} \setminus (\tilde{B} \cup \tilde{\infty})$

Pour toute tresse $\tau \in PB_n$, on a vu que $\tilde{\tau}$ est l'unique relevé de τ fixant β_0 et, pour tout $\mathbf{x} \in \hat{X} \setminus (\tilde{B} \cup \tilde{\infty})$, $\tilde{\tau}(\mathbf{x})$ est défini comme le point d'arrivée du relevé d'origine 0 de $\tau \circ \pi(\tilde{\gamma})$ pour n'importe quel chemin $\tilde{\gamma}$ de β_0 à \mathbf{x} dans $\hat{X} \setminus (\tilde{B} \cup \tilde{\infty})$.

Lemme 5.1.6. Pour $\tau \in PB_n$, le relevé $\tilde{\tau}$ fixe tous les points β_k pour chaque $k \in \{0, \dots, d-1\}$.

Démonstration : On a vu dans la démonstration de la proposition 4.2.3 que \hat{X} est connexe, et on peut noter $\tilde{\gamma}$ le chemin de β_0 à β_1 . Le chemin $\tilde{\tau}(\tilde{\gamma})$ relie β_0 à $\tilde{\tau}(\beta_1)$. D'après 5.1.3, on a $\rho(\pi \circ \tilde{\tau}(\tilde{\gamma})) = \rho(\tau \circ \pi(\tilde{\gamma})) = \rho(\pi(\tilde{\gamma})) = 1$. Ainsi le relevé de $\tau(\pi(\tilde{\gamma}))$ d'origine β_0 se termine en β_1 . Or ce relevé est exactement $\tilde{\tau}(\tilde{\gamma})$ et donc $\tilde{\tau}(\beta_1) = \beta_1$. On peut procéder ainsi pour chaque β_k et le lemme est démontré. \square

Proposition 5.1.7. Pour toute tresse $\tau \in PB_n$, $\tilde{\tau}$ et T commutent sur $\hat{X} \setminus (\tilde{B} \cup \tilde{\infty})$.

Démonstration : Comme $\pi \circ (T \circ \tilde{\tau} \circ T^{-1}) = (\pi \circ T) \circ \tilde{\tau} \circ T^{-1} = (\pi \circ \tilde{\tau}) \circ T^{-1} = \tau \circ \pi \circ T^{-1} = \tau \circ \pi$, on a $T \circ \tilde{\tau} \circ T^{-1}$ est un relevé de τ . De plus, $T \circ \tilde{\tau} \circ T^{-1}(\beta_0) = \beta_0 = \tilde{\tau}(\beta_0)$, donc par unicité du relèvement on a $T \circ \tilde{\tau} \circ T = \tilde{\tau}$ et donc T et $\tilde{\tau}$ commutent. \square

On veut à présent étendre le relevé $\tilde{\tau}$ de τ sur \hat{X} , de sorte que $\tilde{\tau} \in \text{Mod}(\hat{X})$.

5.2 Relèvement des tresses pures sur \hat{X}

Proposition 5.2.1. *Pour toute tresse $\tau \in PB_n$, le relevé $\tilde{\tau}$ s'étend sur $\hat{X} \setminus \tilde{B}$.*

Démonstration : On veut prolonger $\tilde{\tau}$ sur les points de $\tilde{\infty} = \{p_0, \dots, p_{e_0-1}\}$.

On a toujours $\beta \in \partial D$ et $\hat{C} \setminus D$ est un voisinage de ∞ , dont la pré-image est composée de e_0 disques disjoints. Remarquons que sur $D_\infty = \hat{C} \setminus D$, τ est définie comme étant l'identité, et donc sur $\pi^{-1}(D_\infty)$, Id est un relevé de τ , qui fixe β_0 . Donc $\tilde{\tau}$ est l'identité sur $\pi^{-1}(D_\infty) \setminus \tilde{\infty}$ et par continuité, on peut poser $\tilde{\tau}(p_k) = p_k$ pour tout $k \in \{0, \dots, e_0 - 1\}$. \square

Théorème 5.2.2. *Pour toute tresse $\tau \in PB_n$, le relevé $\tilde{\tau}$ s'étend sur \hat{X} .*

Démonstration : Soit $\tau \in PB_n$. Montrons tout d'abord que son relevé $\tilde{\tau}$ peut se prolonger sur $q_{1,0}$.

On considère une suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans $\hat{X} \setminus (\tilde{B} \cup \tilde{\infty})$ qui tend vers $q_{1,0}$. Alors $(\tau \circ \pi(x_i))_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{C} \setminus B$ qui tend vers $\tau(b_1) = b_1$ puisque τ est une tresse pure. Rappelons qu'on peut trouver un voisinage D'_1 de b_1 tel que sa pré-image par π soit une réunion disjointe de e_1 disques $E_{1,0}, \dots, E_{1,e_1-1}$. Considérons $E'_1 = D'_1 \cap \tau^{-1}(D'_1)$. Clairement, comme τ est continue et que $b_1 \in D'_1 \cap \tau^{-1}(D'_1)$, E'_1 est un voisinage de b_1 tel que $\tau(E'_1) \subset D'_1$ et $\pi^{-1}(E'_1) \subset \cup_{j=0}^{e_1-1} E_{1,j}$.

Quitte à considérer une sous-suite, on peut supposer que la suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est dans $\pi^{-1}(E'_1) \cap E_{1,0}$. En particulier, le premier terme x_0 de cette suite est dans $E_{1,0}$, et $\pi(x_0) \in E'_1$. Comme $\pi \circ \tilde{\tau} = \tau \circ \pi$, on a : $\tilde{\tau}(x_0) \in \pi^{-1}(E'_1) \subset \cup_{j=0}^{e_1-1} E_{1,j}$ et donc $\tilde{\tau}(x_0) \in E_{1,j_1}$ pour un certain indice $j_1 \in \{0, \dots, e_1 - 1\}$. Comme $E_{1,0}$ est connexe et $\tilde{\tau}$ est continue, $\tilde{\tau}(E_{1,0})$ est connexe et donc strictement inclus dans l'un des $E_{1,j}$. Puisque $\tilde{\tau}(x_0) \in E_{1,j_1}$, on en déduit : $(\tilde{\tau}(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset E_{1,j_1}$. Par continuité, on peut poser $\tilde{\tau}(q_{1,0}) = q_{1,j_1}$. Comme $T \circ \tilde{\tau} = \tilde{\tau} \circ T$ en dehors de \tilde{B} , on a pour tout $j \in \{0, \dots, e_1 - 1\}$, $T^j \circ \tilde{\tau} = \tilde{\tau} \circ T^j$ sur $\hat{X} \setminus \tilde{B}$.

En particulier $T^j \circ \tilde{\tau}(x_n) = \tilde{\tau}(T^j(x_n))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par continuité, on peut poser :

$$\tilde{\tau}(q_{1,j}) = \tilde{\tau}(T^j(q_{1,0})) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\tau}(T^j(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} T^j(\tilde{\tau}(x_n)) = T^j(q_{1,j_1}) = q_{1,j+j_1 \pmod{e_1}}$$

Et donc $\tilde{\tau}(q_{1,j}) = q_{1,j_1+j \pmod{e_1}}$. On définit ainsi $\tilde{\tau}$ sur les $q_{1,j}$. On peut faire exactement la même chose pour définir un indice j_i pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\tilde{\tau}(q_{i,j}) = q_{i,j+j_i \pmod{e_i}}$, ainsi $\tilde{\tau}$ est défini sur chacun des points de \tilde{B} . \square

Théorème 5.2.3. *Pour toute tresse pure $\tau \in PB_n$, on a $\tilde{\tau} \circ T = T \circ \tilde{\tau}$ sur \hat{X} .*

Démonstration : On sait déjà que $\tilde{\tau}$ et T commutent sur $\hat{X} \setminus (\tilde{B} \cup \tilde{\infty})$. Il suffit de voir que $\tilde{\tau}$ et T commutent sur les points de \tilde{B} et $\tilde{\infty}$. Commençons par les points de $\tilde{\infty}$.

Comme $T(p_k) = p_{k+1}$ pour tout $k \in \{0, \dots, e_0 - 1\}$, et que, pour $\tau \in PB_n$, $\tilde{\tau}(p_k) = p_k$, on a bien T et $\tilde{\tau}$ commutent sur $\tilde{\infty}$ pour toute tresse τ de PB_n .

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et pour tout $j \in \{0, \dots, e_i - 1\}$, on a : $T \circ \tilde{\tau}(q_{i,j}) = T(q_{i,j+j_i \pmod{e_i}}) = q_{i,(j+1)+j_i \pmod{e_i}} = \tilde{\tau}(q_{i,j+1}) = \tilde{\tau} \circ T(q_{i,j})$.

Ainsi, T et $\tilde{\tau}$ commutent également sur les points de \tilde{B} , et finalement T et $\tilde{\tau}$ commutent sur \hat{X} tout entier. \square

On peut à présent démontrer le théorème 5.0.1

Démonstration du théorème 5.0.1 : Pour $\tau \in PB_n$ vue comme un représentant de sa classe dans $\text{Mod}(D, n)$, en notant $\tilde{\tau} \in \text{Homeo}(\hat{X} \setminus (\tilde{B} \cup \tilde{\infty}))$ l'unique relevé de τ fixant β_0 , prolongé comme précédemment sur \hat{X} , on peut définir un morphisme de groupe :

$$\begin{aligned} \theta : PB_n &\rightarrow \text{Mod}(\hat{X}) \\ \tau &\mapsto [\tilde{\tau}] \end{aligned}$$

où $[\tilde{\tau}]$ est la classe d'homotopie de $\tilde{\tau}$. En effet, on a vu dans le théorème 5.1.2, que toutes les tresses pures se relèvent en un élément de $\text{Homeo}(\hat{X} \setminus (\tilde{B} \cup \tilde{\infty}))$. D'après la proposition 5.1.1, pour $\tau \in PB_n$, il existe donc un unique relevé $\tilde{\tau}$ de τ fixant β_0 . En prolongeant $\tilde{\tau}$ sur \hat{X} tout entier et en notant $[\tilde{\tau}]$ sa classe d'isotopie, $\theta : \tau \mapsto [\tilde{\tau}]$ est bien définie. Par la suite, on confondra les notations $[\tilde{\tau}]$ et $\tilde{\tau}$ et on écrira $\theta(\tau) = \tilde{\tau}$.

De plus, pour $\tau_1, \tau_2 \in PB_n$, on peut voir que $\theta(\tau_1\tau_2) = \theta(\tau_1)\theta(\tau_2)$. En effet, $\theta(\tau_1\tau_2)$ est l'unique relevé de $\tau_1\tau_2$ fixant β_0 . Or $\theta(\tau_1)\theta(\tau_2)$ est un relevé de $\tau_1\tau_2$, puisque $\pi(\theta(\tau_1)\theta(\tau_2)) = \tau_1 \circ \pi(\theta(\tau_2)) = \tau_1\tau_2$, qui fixe également β_0 car $(\theta(\tau_1)\theta(\tau_2))(\beta_0) = \theta(\tau_1)(\beta_0) = \beta_0$. Par unicité du relèvement, $\theta(\tau_1\tau_2) = \theta(\tau_1)\theta(\tau_2)$. Ainsi θ est bien un morphisme de groupe. \square

En général, pour toute tresse $\tau \in PB_n$, on gardera la notation $\tilde{\tau}$ pour désigner $\theta(\tau)$. On peut finalement définir de façon unique le relevé des tresses pures sur \hat{X} , et on s'est assuré que ces relevés commutent avec T .

Dans le chapitre suivant, on utilisera ces résultats pour construire des représentations de PB_n dans un certain groupe unitaire $U(H^1(\hat{X})_q)$. Avant cela, nous présenterons l'espace $H^1(\hat{X})_q$ et deux théorèmes le concernant, qui généralisent les corollaires 3.2 et 3.3 de [McM13].

Chapitre 6

L'espace $H^1(\hat{X})_q$ dimension et signature de la forme d'intersection

L'objectif de cette partie est de généraliser les résultats de McMullen relatifs aux groupes de cohomologie $H^1(\hat{Y})_q$. Rappelons que n et d sont des entiers naturels non nuls, et b_1, \dots, b_n sont n points complexes deux à deux distincts. Sur la sphère de Riemann, on note $D \subset \mathbb{C}$ un disque ouvert contenant les n points marqués deux à deux distincts b_1, \dots, b_n . Pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, on considère k_i points complexes deux à deux distincts $b_{i,1}, \dots, b_{i,k_i}$ dans un petit voisinage de b_i , où $k_i \in \mathbb{N}^*$. On note également $k_0 = \sum_{i=1}^n k_i$. Dans tout ce qui suit, $q = e^{-k \frac{2i\pi}{d}}$ est une racine d -ème de l'unité vérifiant $q \neq 1$, avec $k \in \{1, \dots, d-1\}$. On introduit les surfaces \hat{X} et \hat{Y} définies respectivement à partir des équations algébriques suivantes :

$$\hat{X} \quad : \quad y^d = \prod_{i=1}^n (x - b_i)^{k_i} \quad ; \quad \hat{Y} \quad : \quad y^d = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{k_i} (x - b_{i,j}).$$

On supposera ici que \hat{X} est connexe, c'est-à-dire que la condition $\text{pgcd}(d, k_1, \dots, k_n) = 1$ est vérifiée. Remarquons que \hat{Y} entre dans le cadre étudié par McMullen et on peut donc appliquer sur cette surface les résultats de la partie 2.2, issus de l'article [McM13]. Dans cette partie, nous ferons un lien entre \hat{X} et \hat{Y} . En notant de nouveau T l'automorphisme de \hat{X} (défini comme dans 4.1.8), on peut considérer T^* le tiré en arrière par T sur $H^1(\hat{X})$. Comme $T^d = \text{Id}_{\hat{X}}$, pour toute racine d -ème de l'unité $q \neq 1$, on considère le sous-espace propre :

$$H^1(\hat{X})_q := \ker(T^* - q \text{Id}_{H^1(\hat{X})}). \quad (6.0.1)$$

Sur $H^1(\hat{X})$, nous disposons d'une forme d'intersection définie par :

$$\forall \eta, \mu \in H^1(\hat{X}), \quad \langle \eta; \mu \rangle = \frac{i}{2} \int_{\hat{X}} \eta \wedge \bar{\mu}. \quad (6.0.2)$$

On peut considérer la restriction de cette forme d'intersection au sous-espace propre $H^1(\hat{X})_q$. Nous montrerons les résultats principaux suivants :

Théorème 6.0.1. *En notant $F_q = \{i \in \{0, \dots, n\} \mid q^{e_i} = 1\}$ où $e_i = \text{pgcd}(k_i, d)$, la dimension de $H^1(\hat{X})_q$ est donnée par :*

$$\dim(H^1(\hat{X})_q) = n - 1 - \#F_q.$$

On vérifiera également que $\sum_{k=0}^{d-1} \dim(H_c^1(\hat{X})_q) = 2g$, pour $q = e^{-k\frac{2i\pi}{d}}$.

Théorème 6.0.2. *La forme d'intersection sur $H^1(\hat{X})_q$ est non dégénérée et a pour signature :*

$$(r_q, s_q) = \left(\left\lfloor \frac{k_0 k}{d} \right\rfloor - \sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{k_i k}{d} \right\rfloor - \varepsilon_0, \left\lfloor k_0 \left(1 - \frac{k}{d}\right) \right\rfloor - \sum_{i=1}^n \left\lfloor k_i \left(1 - \frac{k}{d}\right) \right\rfloor - \varepsilon_0 \right)$$

où $\varepsilon_0 = 0$ si $q^{e_0} \neq 1$ et $\varepsilon_0 = 1$ sinon.

Nous commencerons par fixer des notations, puis nous présenterons des lemmes indispensables, avant de passer au calcul de la dimension des sous-espaces $H^1(\hat{X})_q$. Enfin nous donnerons la signature de la forme d'intersection sur ces sous-espaces, et nous expliquerons comment construire les représentations $\rho_q : PB_n \rightarrow U(r_q, s_q)$.

Notations

Pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, $D'_i \subset \mathbb{C}$ est un disque ouvert voisinage de b_i contenant les k_i points complexes $b_{i,1}, \dots, b_{i,k_i}$, de sorte que :

- si $i, j \in \{1, \dots, n\}$ avec $j \neq i$, alors $D'_i \cap D'_j = \emptyset$
- pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et pour tout $j \in \{1, \dots, k_i\}$, les $b_{i,j}$ sont deux à deux distincts.

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on note $D_i \subset \mathbb{C}$ un disque topologique ouvert contenant b_i et $b_{i+1 \bmod n}$ mais aucun autre point marqué de B , et tel que $D'_i \subset D_i$ et $D'_{i+1} \subset D_i$, comme illustré sur la figure 6.1.

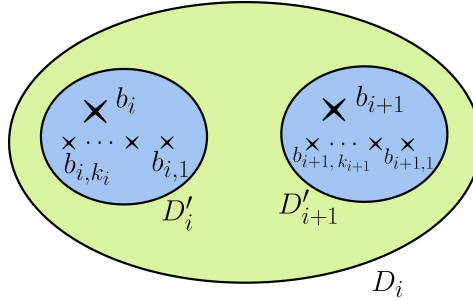


FIGURE 6.1 – Les disques D_i , D'_i et D'_{i+1}

On précise également les notations utilisées pour les sous-surfaces de \hat{X} et \hat{Y} : de façon générale, si M est une surface de Riemann, et $S \subset M$ un ouvert, on note S^c , ou $M \setminus S$ s'il y a un risque de confusion, le complémentaire de S dans M , étendu sur son bord en un ouvert, de sorte que $S \cap S^c$ est un ouvert non vide contenant le bord de S , et homotope à ce bord. On écrira, de même que McMullen dans [McM13], $\partial S = S \cap S^c$, qui représente donc un voisinage ouvert du bord de S . On pourra ainsi utiliser des suites de Mayer-Vietoris dans le cas à support compact :

$$\begin{array}{ccccccc} H_c^0(\partial S) & \longrightarrow & H_c^0(S) \oplus H_c^0(S^c) & \longrightarrow & H^0(M) & \longrightarrow & H_c^1(\partial S) \longrightarrow H_c^1(S) \oplus H_c^1(S^c) \\ \uparrow & & & & & & \downarrow \\ 0 & & & & & & H_c^1(M) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \dots \end{array}$$

Si de plus S est préservé par T , cette suite exacte est équivariante par rapport à l'action de T^* . Pour un revêtement $\pi_M : M \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, on notera $M_i = \pi_M^{-1}(D_i)$, $M'_i = \pi_M^{-1}(D'_i)$. En particulier, on note X_i et X'_i , respectivement Y_i et Y'_i , les pré-images dans \hat{X} , respectivement dans \hat{Y} , des disques complexes D_i et D'_i . D'après la partie 4.1.3, on sait que X'_i est formé de e_i disques disjoints dans \hat{X} .

6.1 Résultats intermédiaires

Lemme 6.1.1. *Soit q une racine d -ième de l'unité, alors pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $q^m = 1 \iff q^{\text{pgcd}(m,d)} = 1$.*

Démonstration : On pose $k \in \{0, \dots, d-1\}$ tel que $q = e^{\frac{2i\pi k}{d}}$. Alors en notant $m = m' \times \text{pgcd}(m, d)$, et $d = d' \times \text{pgcd}(m, d)$, on a : $q^{\text{pgcd}(m,d)} = 1 \Rightarrow (q^{\text{pgcd}(m,d)})^{m'} = 1 \Rightarrow q^m = 1$. Réciproquement, si $q^m = 1$, alors d divise $m \times k$ et donc d' divise $m' \times k$. Par le lemme de Gauss, d' doit diviser k , c'est-à-dire que $k = d' \times \alpha$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{N}$. Ainsi, $q^{\text{pgcd}(m,d)} = e^{\frac{2i\pi k \times \text{pgcd}(m,d)}{d}} = e^{\frac{2i\pi \alpha \times d' \times \text{pgcd}(m,d)}{d}} = 1$. \square

Passons maintenant à des résultats sur les surfaces. Notre but ici est de faire apparaître un lien entre deux surfaces de Riemann obtenues par deux courbes algébriques distinctes mais ayant des exposants communs. Considérons de nouveau la surface \hat{X} introduite précédemment, ainsi que l'automorphisme $T : \hat{X} \rightarrow \hat{X}$ et la projection $\pi : \hat{X} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ définis comme dans 4.1.8. Puisque nous allons travailler avec plusieurs surfaces, pour éviter toute confusion nous re-noterons ici T et π par $T_{\hat{X}}$ et $\pi_{\hat{X}}$.

On introduit également une surface de Riemann \hat{Z} , obtenue à partir d'une courbe algébrique $y^d = \prod_{i=1}^m (x - a_i)^{k_i}$, où $m \in \mathbb{N}^*$, les a_i sont deux à deux distincts dans \mathbb{C} et les k_i sont des entiers naturels non nuls. Comme dans la sous-partie 4.1.2, on peut considérer la projection $\pi_{\hat{Z}} : \hat{Z} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ et l'automorphisme $T_{\hat{Z}} : \hat{Z} \rightarrow \hat{Z}$ qui font de \hat{Z} un revêtement cyclique de degré d au dessus de $\hat{\mathbb{C}}$, ramifié au dessus des a_i , et éventuellement ramifiés au dessus de ∞ . On a alors le lemme suivant :

Lemme 6.1.2. *S'il existe $J \subset \{1, \dots, n\}$ et $\sigma : J \rightarrow \{1, \dots, n\}$ une injection telle que :*

$$\forall j \in J, \quad k_j = k'_{\sigma(j)}$$

Alors en notant $D_J \subset \mathbb{C}$ un disque topologique contenant $B_J := \{b_j | j \in J\}$, et $D'_J \subset \mathbb{C}$ un disque topologique contenant $A_J := \{a_{\sigma(j)} | j \in J\}$, on a : $X_J = \pi_{\hat{X}}^{-1}(D_J)$ et $Z_J = \pi_{\hat{Z}}^{-1}(D'_J)$ sont homéomorphes et donc $H_c^1(X_J)_q \simeq H_c^1(Z_J)_q$.

Démonstration : On reprend les notations du lemme. Soient $\beta \in \partial D_J$ et $\beta' \in \partial D'_J$. Les disques D_J et D'_J sont homéomorphes, on note $h : D_J \rightarrow D'_J$ un homéomorphisme vérifiant : $h(\beta) = \beta'$ et $\forall j \in J, h(b_j) = a_{\sigma(j)}$. On cherche ici à relever h en un homéomorphisme entre X_J et Z_J , ce travail est similaire à celui déjà réalisé pour relever les tresses de PB_n , on reprend donc brièvement les étapes du chapitre précédent.

Remarquons que X_J et Z_J sont respectivement deux revêtements de degré d au-dessus de D_J et de D'_J , ramifiés au dessus de B_J et de A_J . On note $\pi_{\hat{X}}^{-1}(\beta) = \{\beta_0, \dots, \beta_{d-1}\}$ et $\pi_{\hat{Y}}^{-1}(\beta') = \{\beta'_0, \dots, \beta'_{d-1}\}$, de sorte que $T^k(\beta_0) = \beta_k$ et $T^k(\beta'_0) = \beta'_k$ pour tout $k \in \{0, \dots, d-1\}$. En reprenant la construction du morphisme ρ (5.1.1), on fixe deux morphismes :

$$\rho_X : \pi_1(D_J, \beta) \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \quad ; \quad \rho_Z : \pi_1(D'_J, \beta') \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$$

définis respectivement par :

- $\forall \gamma \in \pi_1(D_J, \beta)$, $\rho_X(\gamma)$ est l'indice du point d'arrivée du relevé de γ d'origine β_0 dans X_J
- $\forall \gamma' \in \pi_1(D'_J, \beta')$, $\rho_Z(\gamma')$ est l'indice du point d'arrivée du relevé de γ' d'origine β'_0 dans Z_J .

Alors $\ker(\rho_X) = (\pi_{\hat{X}})_*(\pi_1(X_J \setminus (\pi_{\hat{X}}^{-1}(B_J)), \beta_0))$ et $\ker(\rho_Z) = (\pi_{\hat{Z}})_*(\pi_1(Z_J \setminus (\pi_{\hat{Z}}^{-1}(A_J)), \beta'_0))$. Remarquons alors que, pour tout $j \in J$, le lacet $\gamma_j \subset D_J$ de base β faisant un tour autour de b_j , s'envoie par h sur le lacet $\gamma'_{\sigma(j)} \subset D'_J$ de base β' et faisant un tour autour de $a_{\sigma(j)}$. Ainsi $\rho_{\hat{X}}(\gamma_j) = \rho_{\hat{Y}}(\gamma'_{\sigma(j)}) = e_j$. On peut alors vérifier que $h(\ker(\rho_X)) \subset \ker(\rho_Z)$, et par la théorie des revêtements, on fixe un relevé de h noté $\tilde{h} \in \text{Homeo}(X_J \setminus \pi_{\hat{X}}^{-1}(B_J), Z_J \setminus \pi_{\hat{Z}}^{-1}(A_J))$ vérifiant :

$$h \circ \pi_{\hat{X}} = \pi_{\hat{Y}} \circ \tilde{h} \quad ; \quad \tilde{h}(\beta_0) = \beta'_0.$$

Concrètement, pour tout $x_0 \in X_J \setminus (\pi_{\hat{X}}^{-1}(B_J))$, en notant $\gamma \subset D_J$ un chemin de β à $\pi(x_0)$, et $y = h \circ \pi(x_0)$, $\tilde{h}(x_0)$ est l'unique relevé de y dans Z_J qui soit le point d'arrivée du relevé de $h(\gamma)$ d'origine β'_0 . On peut également vérifier que le lemme 5.1.6 s'applique à \tilde{h} , dans le sens où $\tilde{h}(\beta_k) = \beta'_k$ pour tout $k \in \{1, \dots, d-1\}$. On en déduit que $\tilde{h} \circ T_{\hat{X}} = T_{\hat{Z}} \circ \tilde{h}$ sur $X_J \setminus (\pi_{\hat{X}}^{-1}(B_J))$. En effet, pour tout $x_0 \in X_J$, en notant $x_k := T_{\hat{X}}^k(x_0)$ et γ un chemin de β_0 à x_0 , alors $\tilde{h} \circ T_{\hat{X}}(\gamma)$ et $T_{\hat{Y}} \circ \tilde{h}(\gamma)$ sont deux chemins d'origine β'_1 relevant $h \circ \pi_{\hat{X}}(\gamma)$ et par unicité du relevé, on a donc $\tilde{h} \circ T_{\hat{X}}(x_0) = T_{\hat{Y}} \circ \tilde{h}(x_0)$.

On étend \tilde{h} par continuité sur X_J , de sorte que pour tout $j \in J$, \tilde{h} associe bijectivement $\pi_{\hat{X}}^{-1}(b_j)$ à $\pi_{\hat{Z}}^{-1}(a_{\sigma(j)})$ avec $T_{\hat{Z}} \circ \tilde{h} = \tilde{h} \circ T_{\hat{X}}$ sur X_J . Finalement X_J et Z_J sont homéomorphes et $H_c^1(X_J)_q \simeq H_c^1(Z_J)_q$. \square

On considère un disque ouvert $D \subset \mathbb{C}$, contenant $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. On note $X = \pi_{\hat{X}}^{-1}(D)$ et X^c son complémentaire étendu sur le bord en un ouvert. Alors X^c est la pré-image d'un voisinage de ∞ , donc X^c est la réunion de $e_0 = \text{pgcd}(k_0, d)$ disques. Comme précédemment (dans les notations 6), on écrit $\partial X = X \cap X^c$, qui est ici une réunion de e_0 anneaux ouverts A_0, \dots, A_{e_0-1} . Comme \hat{X} est connexe, on a la suite de Mayer-Vietoris suivante :

$$0 \rightarrow H_c^1(\partial X)_q \rightarrow H_c^1(X)_q \rightarrow H^1(\hat{X})_q \rightarrow H_c^2(\partial X)_q \rightarrow H_c^2(X^c)_q \rightarrow 0.$$

Lemme 6.1.3. *Si $q^{e_0} = 1$, alors $H_c^1(\partial X)_q$, $H_c^2(\partial X)_q$ et $H_c^2(X^c)_q$ sont de dimension 1. Si $q^{e_0} \neq 1$, ces trois espaces sont nuls.*

Démonstration : Il s'agit de la même preuve que celle faite pour le lemme 2.2.6. \square

Plus généralement, si $J \subset \{1, \dots, n\}$, en notant D_J un disque ouvert contenant l'ensemble $\{b_j \mid j \in J\}$, et X_J la pré-image de D_J dans \hat{X} , alors

Lemme 6.1.4. *Les espaces $H_c^1(\partial X_J)_q$, $H_c^2(\partial X_J)_q$ sont de dimension 1 si $q^{e_J} = 1$ et 0 sinon, avec $e_J = \text{pgcd}(\sum_{j \in J} k_j, d)$.*

Démonstration : On introduit la surface de Riemann \hat{Z} définie à partir de $y^d = \prod_{j \in J} (x - b_j)^{k_j}$. Alors, en notant $Z_J = \pi_{\hat{Z}}^{-1}(D_J)$, on a $H_c^1(Z_J)_q \simeq H_c^1(X_J)_q$ d'après le lemme 6.1.2. On a également $H_c^1(\partial Z_J)_q \simeq H_c^1(\partial X_J)_q$, $H_c^2(\partial Z_J)_q \simeq H_c^2(\partial X_J)_q$ et par le lemme 6.1.3 appliqué à la surface \hat{Z} , on obtient le résultat attendu. \square

Remarque 6.1.5. Dans le cas où $J = \{i, i+1\}$ pour un certain $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $D_J = D_i$ et on récupère ainsi que $H_c^1(\partial X_i)_q$, $H_c^2(\partial X_i)_q$ sont de dimension 1 si $q^{\text{pgcd}(k_i+k_{i+1}, d)} = 1$, et de dimension 0 sinon.

Dans le cas où $J = \{i\}$, on a $D_J = D'_i$, alors $H_c^1(\partial X'_i)_q$ et $H_c^2(\partial X'_i)_q$ sont de dimension 1 si $q^{e_i} = 1$ et de dimension nulle sinon. De plus, comme X'_i est une réunion de e_i disques disjoints permutés cycliquement par T , on peut lui appliquer le raisonnement fait dans le lemme 2.2.6 et on obtient que $H_c^2(X'_i)_q$ est de dimension nulle lorsque $q^{e_i} \neq 1$.

6.2 Dimension de $H^1(\hat{X})_q$

On s'intéresse à présent à la dimension de $H^1(\hat{X})_q$. Pour la déterminer, nous utilisons des suites de Mayer-Vietoris. Considérons la réunion des voisinages D'_i de chaque points b_i . Rappelons que D'_i contient également les points $b_{i,1}, \dots, b_{i,k_i}$. On note $X' = \hat{X} \setminus \bigcup_{i=1}^n X'_i = \pi_{\hat{X}}^{-1}(\hat{C} \setminus \bigcup_{i=1}^n D'_i)$, et $Y' = \hat{Y} \setminus \bigcup_{i=1}^n Y'_i = \pi_{\hat{Y}}^{-1}(\hat{C} \setminus \bigcup_{i=1}^n D'_i)$. Pour éviter toute confusion ici, on notera $T_{\hat{X}} : \hat{X} \rightarrow \hat{X}$ et $\pi_{\hat{X}} : \hat{X} \rightarrow \hat{C}$ l'automorphisme de \hat{X} et la projection faisant de \hat{X} un revêtement cyclique. De même, on notera $T_{\hat{Y}} : \hat{Y} \rightarrow \hat{Y}$ et $\pi_{\hat{Y}} : \hat{Y} \rightarrow \hat{C}$ l'automorphisme de \hat{Y} et la projection faisant de \hat{Y} un revêtement cyclique. On montre que :

Lemme 6.2.1. Y' et X' sont homéomorphes, on a donc un isomorphisme : $H_c^1(X')_q \simeq H_c^1(Y')_q$.

Démonstration : Soient $D' = \hat{C} \setminus (\bigcup_{i=1}^n D'_i)$, et D_∞ un voisinage ouvert de ∞ dans \hat{C} tel que $\pi_{\hat{X}}^{-1}(D_\infty)$, respectivement $\pi_{\hat{Y}}^{-1}(D_\infty)$, soit une réunion de e_0 disques disjoints notés E_0, \dots, E_{e_0-1} , respectivement E'_0, \dots, E'_{e_0-1} , vérifiant $T_{\hat{X}}^k(E_0) = E_k$, respectivement $T_{\hat{Y}}^k(E'_0) = E'_k$, pour tout $k \in \{0, \dots, e_0 - 1\}$. On note $D'' = D' \setminus D_\infty$.

Soit $\beta \in \partial D' \cap D_\infty$, on note $\pi_{\hat{X}}^{-1}(\beta) = \{\beta_0, \dots, \beta_{d-1}\}$ avec $T_{\hat{X}}^k(\beta_0) = \beta_k$ pour tout $k \in \{0, \dots, d-1\}$, et $\pi_{\hat{Y}}^{-1}(\beta) = \{\beta'_0, \dots, \beta'_{d-1}\}$ avec $T_{\hat{Y}}^k(\beta'_0) = \beta'_k$ pour tout $k \in \{0, \dots, d-1\}$. Quitte à ré-indexer les β_k et les β'_k , on peut supposer que $\beta_0 \in \partial E_0$ et $\beta'_0 \in \partial E'_0$.

Alors $X' = \pi_{\hat{X}}^{-1}(D')$ et $Y' = \pi_{\hat{Y}}^{-1}(D')$ sont deux revêtements cycliques au dessus de D' , de degré d et éventuellement ramifiés au dessus de ∞ .

On considère $X'' = \pi_{\hat{X}}^{-1}(D'') = X' \setminus \pi_{\hat{X}}^{-1}(D_\infty)$, et $Y'' := \pi_{\hat{Y}}^{-1}(D'') = Y' \setminus \pi_{\hat{Y}}^{-1}(D_\infty)$. Il s'agit de deux revêtements cycliques de degré d au dessus de D'' . On peut considérer les morphismes $\rho_X : \pi_*(X'', \beta_0) \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, et $\rho_Y : \pi_*(Y'', \beta'_0) \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, qui associent à un lacet de base β dans D'' , l'indice du point d'arrivée du relevé de ce lacet d'origine β_0 dans X'' , respectivement l'indice du point d'arrivée du relevé de ce lacet d'origine β'_0 dans Y'' . En particulier, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, si $\gamma_i \subset D''$ est un lacet de base β , faisant un tour autour de D'_i , alors $\rho_{\hat{X}}(\gamma_i) = \rho_{\hat{Y}}(\gamma_i) = e_i$.

On construit sur le même modèle que dans le lemme 6.1.2, un homéomorphisme $\tilde{h} : X'' \rightarrow Y''$ vérifiant :

- $\pi_Y \circ \tilde{h} = \pi_X$
- $\forall k \in \{0, \dots, d-1\}$, $\tilde{h}(\beta_k) = \beta'_k$
- $\tilde{h} \circ T_{\hat{X}} = T_{\hat{Y}} \circ \tilde{h}$
- $\forall j \in \{0, \dots, e_0 - 1\}$, $\tilde{h}(\partial E_j) = \partial E'_j$.

Pour tout $j \in \{0, \dots, e_0 - 1\}$, comme E_j et E'_j sont deux disques, on peut trouver un homéomorphisme $\tilde{h}_j : E_j \rightarrow E'_j$, coïncidant avec \tilde{h} sur le bord de E_j et tel que $\tilde{h}_j \circ T_{\hat{X}}|_{E_j} = T_{\hat{Y}}|_{E'_j} \circ \tilde{h}_j$.

On prolonge alors \tilde{h} sur X' en posant $\tilde{h} = \tilde{h}_j$ sur les E_j . On peut alors s'assurer que $\tilde{h} \circ T_{\hat{X}} = T_{\hat{Y}} \circ \tilde{h}$. En effet, pour tout $j \in \{0, \dots, e_0 - 1\}$, et pour tout $x \in E_j$, comme $\beta_j = T_{\hat{X}}^j(\beta_0) \in \partial E_j$, on peut considérer γ un chemin dans E_j reliant β_j à x . Alors $\tilde{h} \circ T_{\hat{X}}(\gamma)$ et $T_{\hat{Y}} \circ \tilde{h}(\gamma)$ sont deux chemins dans Y' relevant tous les deux $h(\pi_X(\gamma))$, et d'origine $\beta'_{j+1 \bmod e_0}$. Par unicité du relèvement, les points d'arrivée de ces deux chemins sont les mêmes, ainsi $T_{\hat{Y}} \circ \tilde{h}(x) = \tilde{h} \circ T_{\hat{X}}(x)$. On en déduit que $H_c^1(X')_q \simeq H_c^1(Y')_q$. \square

Topologiquement, on peut interpréter \hat{X} comme étant la surface \hat{Y} pour laquelle on aurait découpé chaque Y'_i le long de ses e_i composantes de bords, et où on y aurait recollé e_i disques à la place. Ainsi on a une égalité topologique $X' \simeq Y'$, comme sur la figure 6.2.

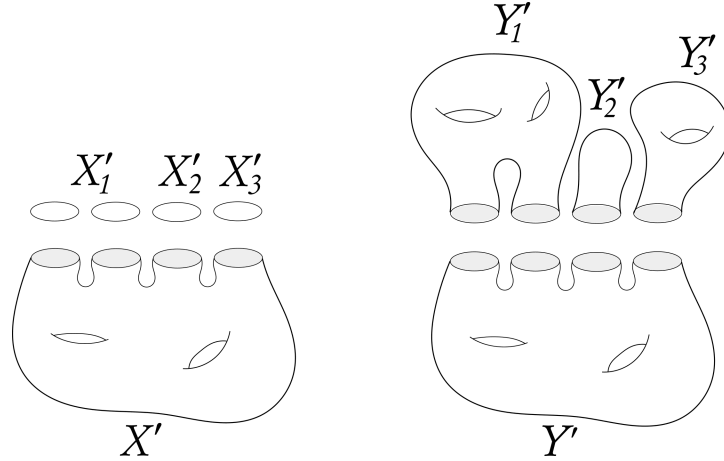


FIGURE 6.2 – Les surfaces X' et Y'

Avant de passer au travail sur la dimension de $H^1(\hat{X})_q$, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 6.2.2. *Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $H_c^1(Y'_i)_q$ est de dimension $k_i - 1$, où Y'_i est la pré-image dans \hat{Y} du disque D'_i contenant les points $b_i, b_{i,1}, \dots, b_{i,k_i}$.*

Avant de passer à la démonstration, on définit pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la surface \hat{Y}_i définie à partir de l'équation algébrique $y^d = \prod_{j=1}^{k_i} (x - b_{i,j})$. Cette surface est connexe et relève du cas de McMullen. On a également : $\pi_{\hat{Y}_i}^{-1}(D'_i) \simeq Y_i$, et $\hat{Y}_i \setminus Y_i$ est la pré-image d'un voisinage de ∞ donc $\hat{Y}_i \setminus Y_i$ est une réunion de e_i disques. Ces notations seront réutilisées dans plusieurs preuves.

Démonstration : Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. La suite de Mayer-Vietoris dans le cas compact appliquée à \hat{Y}_i nous donne :

$$0 \rightarrow H_c^1(\partial Y_i)_q \rightarrow H_c^1(Y_i)_q \rightarrow H^1(\hat{Y}_i)_q \rightarrow H_c^2(\partial Y_i)_q \rightarrow H_c^2(\hat{Y}_i \setminus Y_i)_q \rightarrow 0 \quad (6.2.1)$$

La dimension de $H^1(\hat{Y}_i)_q$ est donnée par le théorème 2.2.3 et vaut $k_i - 1 - \varepsilon_i$ où $\varepsilon_i = 1$ si $q^{e_i} = 1$ et 0 sinon. D'après le lemme 6.1.3, les dimensions de $H_c^1(\partial Y_i)_q$, $H_c^2(\partial Y_i)_q$ et $H_c^2(\hat{Y}_i \setminus Y_i)_q$ valent 1 si $q^{e_i} = 1$ et 0 sinon. Ainsi, si $q^{e_i} \neq 1$, on a $\dim(H_c^1(Y_i)_q) = k_i - 1 - \varepsilon_i = k_i - 1$. Sinon, la somme alternée des dimensions dans la suite de Mayer-Vietoris ci-dessus nous donne :

$$\begin{aligned} \dim(H_c^1(Y_i)_q) &= \dim(H_c^1(\partial Y_i)_q) + \dim(H^1(\hat{Y}_i)_q) - \dim(H_c^2(\partial Y_i)_q) + \dim(H_c^2(\hat{Y}_i \setminus Y_i)_q) \\ &= 1 + (k_i - 1 - 1) - 1 + 1 \\ &= k_i - 1. \end{aligned}$$

□

On peut à présent utiliser des suites de Mayer-Vietoris pour démontrer le théorème 6.0.1 sur la dimension de $H^1(\hat{X})_q$, énoncé au début de cette partie et dont on rappelle ici l'énoncé :

Théorème 6.0.1 : *En notant $F_q = \{i \in \{0, \dots, n\} \mid q^{e_i} = 1\}$, la dimension de $H^1(\hat{X})_q$ est donnée par :*

$$\dim(H^1(\hat{X})_q) = n - 1 - \#F_q.$$

Rappelons la suite exacte de Mayer-Vietoris dans le cas compact appliqué à \hat{X} :

$$\begin{array}{ccccc} H_c^1(X')_q \oplus H_c^1(\cup_{i=1}^n X'_i)_q & \longrightarrow & H^1(\hat{X})_q & \longrightarrow & H_c^2(\partial X')_q \\ & & & & \downarrow \\ & & & & H_c^2(X')_q \oplus H_c^2(\cup_{i=1}^n X'_i)_q \\ & \uparrow & & & \downarrow \\ & H_c^1(\partial X')_q & & & H_c^2(\hat{X})_q \\ & \uparrow & & & \\ & H_c^0(\hat{X})_q & & & \end{array}$$

Notons $F'_q = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid q^{e_i} = 1\}$. Rappelons que $F_q = \{i \in \{0, \dots, n\} \mid q^{e_i} = 1\}$. Alors :

Lemme 6.2.3. *On a les égalités suivantes :*

- $H_c^1(\partial X')_q = \oplus_{i \in F'_q} H_c^1(\partial X'_i)_q$
- $H_c^2(\partial X')_q = \oplus_{i \in F'_q} H_c^2(\partial X'_i)_q$
- $H_c^2(\cup_{i=1}^n X'_i)_q = \oplus_{i \in F'_q} H_c^2(X'_i)_q$

Ces trois espaces sont de dimension $\#(F'_q)$.

Démonstration : Commençons par montrer que $H_c^1(\partial X')_q = \oplus_{i \in F'_q} H_c^1(\partial X'_i)_q$. En effet, $H_c^1(\partial X')_q = H_c^1(\cup_{i=1}^n \partial X'_i)_q$. Comme les X'_i sont deux à deux disjoints, on a : $H_c^1(\partial X')_q \subset \oplus_{i=1}^n H_c^1(\partial X'_i)_q$. De plus, pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, $T_{\hat{X}}$ permute les disques qui composent X'_i , en particulier T préserve chacun des $\partial X'_i$. Or, si un élément $x = x_1 + \dots + x_n \in \oplus_{i=1}^n H_c^1(\partial X'_i)_q$ vérifie $T_{\hat{X}}^*(x) = qx = qx_1 + \dots + qx_n$, on doit avoir, puisque $T_{\hat{X}}$ préserve les X'_i , $T_{\hat{X}}^*(x) = T_{\hat{X}}^*(x_1) + \dots + T_{\hat{X}}^*(x_n)$ avec $T_{\hat{X}}^*(x_i) \in H_c^1(\partial X'_i)_q$. On en déduit que $T_{\hat{X}}^*(x_i) = qx_i$ et donc $x \in \oplus_{i=1}^n H_c^1(\partial X'_i)_q$. On a donc $(\oplus_{i=1}^n H_c^1(\partial X'_i)_q)_q \subset \oplus_{i=1}^n H_c^1(\partial X'_i)_q$ et l'inclusion réciproque est évidente, finalement : $H_c^1(\partial X')_q = \oplus_{i=1}^n H_c^1(\partial X'_i)_q = \oplus_{i \in F'_q} H_c^1(\partial X'_i)_q$. La remarque 6.1.5 nous dit que $H_c^1(\partial X'_i)_q$ est nul si $q^{e_i} \neq 1$ et est de dimension 1 sinon, donc $\oplus_{i=1}^n H_c^1(\partial X'_i)_q = \oplus_{i \in F'_q} H_c^1(\partial X'_i)_q$ et a pour dimension $\#F'_q$. De la même façon, on a aussi $H_c^2(\partial X')_q = \oplus_{i \in F'_q} H_c^2(\partial X'_i)_q$ est de dimension $\#F'_q$ et $H_c^2(\cup_{i=1}^n X'_i)_q = \oplus_{i \in F'_q} H_c^2(X'_i)_q$ est de dimension $\#F'_q$.

□

Remarquons ensuite que les X'_i sont deux à deux disjoints et sont respectivement une réunion disjointe de e_i disques permutés par T , donc $\cup_{i=1}^n X'_i$ est une réunion finie de disques disjoints et $H_c^1(\cup_{i=1}^n X'_i)_q = \{0\}$. Finalement, la suite exacte précédente se ré-écrit :

$$\begin{array}{ccccc}
H_c^1(X')_q & \longrightarrow & H^1(\hat{X})_q & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in F'_q} H_c^2(\partial X'_i)_q \\
\uparrow & & & & \downarrow \\
\bigoplus_{i \in F'_q} H_c^1(\partial X'_i)_q & & & & H_c^2(X')_q \oplus \left(\bigoplus_{i \in F'_q} H_c^2(X'_i)_q \right) \\
\uparrow & & & & \downarrow \\
H_c^0(\hat{X})_q & & & & H_c^2(\hat{X})_q
\end{array} \tag{6.2.2}$$

On peut à présent passer à la démonstration du théorème 6.0.1 dans le cas où \hat{X} est connexe (pour le cas non connexe, nous traiterons simultanément la dimension et la signature de la forme d'intersection, on retrouvera la démonstration pour ce cas dans la proposition 6.3.11).

Démonstration du théorème 6.0.1 : On utilise la suite de Mayer-Vietoris 6.2.2. Comme \hat{X} est connexe, $H^0(\hat{X})_q = H^2(\hat{X})_q = \{0\}$. Remarquons également que X' est connexe, puisque cette sous-surface correspond à \hat{X} privée d'un certain nombre de disques. Donc $H_c^2(X')_q = \{0\}$. On a ainsi :

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i \in F'_q} H_c^1(\partial X'_i)_q \rightarrow H_c^1(X')_q \rightarrow H^1(\hat{X})_q \rightarrow \bigoplus_{i \in F'_q} H_c^2(\partial X'_i)_q \rightarrow \bigoplus_{i \in F'_q} H_c^2(X'_i)_q \rightarrow 0.$$

Simplifions encore cette suite exacte, en remarquant que $\bigoplus_{i \in F'_q} H_c^2(\partial X'_i)_q$ et $\bigoplus_{i \in F'_q} H_c^2(X'_i)_q$ sont de même dimension. La flèche entre ces deux espaces étant surjective, on a une bijection, et finalement $\text{Im}(H^1(\hat{X})_q \rightarrow \bigoplus_{i \in F'_q} H_c^2(\partial X'_i)_q) = \ker(\bigoplus_{i \in F'_q} H_c^2(\partial X'_i)_q \rightarrow \bigoplus_{i \in F'_q} H_c^2(X'_i)_q) = \{0\}$. Alors on récupère une suite exacte courte :

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i \in F'_q} H_c^1(\partial X'_i)_q \rightarrow H_c^1(X')_q \rightarrow H^1(\hat{X})_q \rightarrow 0. \tag{6.2.3}$$

La somme alternée des dimensions nous donne :

$$\dim(H^1(\hat{X})_q) = \dim(H_c^1(X')_q) - \dim(\bigoplus_{i \in Z'_q} H_c^1(X'_i)_q) = \dim(H_c^1(X')_q) - \#F'_q.$$

On cherche maintenant la dimension de $H_c^1(X')_q$. Comme $H_c^1(X')_q \simeq H_c^1(Y')_q$, on va calculer $\dim(H_c^1(Y')_q)$, pour cela on utilise de nouveau la suite de Mayer-Vietoris appliquée à $\hat{Y} = Y' \cup (\cup_{i=1}^n Y'_i)$:

$$\begin{array}{ccccc}
H_c^1(Y')_q \oplus H_c^1(\cup_{i=1}^n Y'_i)_q & \longrightarrow & H^1(\hat{Y})_q & \longrightarrow & H_c^2(\partial Y')_q \\
\uparrow & & & & \downarrow \\
H_c^1(\partial Y')_q & & & & H_c^2(Y')_q \oplus H_c^2(\cup_{i=1}^n Y'_i)_q \\
\uparrow & & & & \downarrow \\
0 & & & & 0
\end{array}$$

Ici on sait que $H_c^1(Y')_q \simeq H_c^1(X')_q$, $H_c^1(\partial X')_q \simeq H_c^1(\partial Y')_q$ et $H_c^2(\partial X')_q \simeq H_c^2(\partial Y')_q$. On va donc avoir $H_c^1(\partial Y')_q \simeq \bigoplus_{i \in F'_q} H_c^1(\partial Y'_i)_q$ et $H_c^2(\partial Y')_q \simeq \bigoplus_{i \in F'_q} H_c^2(\partial Y'_i)_q$. Aussi, Y' est connexe donc $H^0(Y')_q = \{0\}$ et $H_c^2(Y')_q = \{0\}$.

Les Y'_i sont deux à deux disjoints et préservés respectivement par $T_{\hat{Y}}$, alors par le même raisonnement que celui fait sur $H_c^1(\partial X')_q$, on a clairement : $H_c^1(\cup_{i=1}^n Y'_i)_q = \bigoplus_{i=1}^n H_c^1(Y'_i)_q$. De la même façon, on aura $H_c^2(\cup_{i=1}^n Y'_i)_q = \bigoplus_{i=1}^n H_c^2(Y'_i)_q$ et donc $H_c^2(\cup_{i=1}^n Y'_i)_q = \{0\}$ car les Y'_i sont connexes. Par le lemme 6.2.2, on sait que $H_c^1(Y'_i)_q$ est de dimension $k_i - 1$.

Alors la dimension de $\bigoplus_{i=1}^n H_c^1(Y'_i)_q$ est exactement $\sum_{i=1}^n (k_i - 1) = k_0 - n$. D'après 2.2.3, la dimension de $H^1(\hat{Y})_q$ qui vaut ici $k_0 - 1 - \varepsilon_0$ où $\varepsilon_0 = 1$ si $q^{e_0} = 1$ et $\varepsilon_0 = 0$ sinon. Alors la suite de Mayer-Vietoris revient à :

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i \in F'_q} H_c^1(\partial Y'_i)_q \rightarrow H_c^1(Y')_q \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^n H_c^1(Y'_i)_q \right) \rightarrow H^1(\hat{Y})_q \rightarrow \bigoplus_{i \in F'_q} H_c^2(\partial Y'_i)_q \rightarrow 0. \quad (6.2.4)$$

La somme alternée des dimensions nous donne :

$$\begin{aligned} \dim(H_c^1(Y')_q) &= \#F'_q - (k_0 - n) + k_0 - 1 - \varepsilon_0 - \#F'_q \\ &= n - 1 - \varepsilon_0 \end{aligned}$$

et donc, comme $H_c^1(Y')_q = H_c^1(X')_q$ d'après le lemme 6.2.1 :

$$\dim(H^1(\hat{X})_q) = n - 1 - \varepsilon_0 - \#F'_q = n - 1 - \#F_q$$

avec $F_q = \{i \in \{0, \dots, n\} \mid q^{e_i} = 1\}$ □

Le cas $q = 1$ n'est jamais envisagé car la dimension de $H^1(\hat{X})_1$ est nulle. En effet, si $q = 1$, on sait d'après [McM13], que les espaces $H_c^1(\hat{Y})_1$ et les $H^1(\hat{Y}_i)_1$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ sont nuls. La suite de Mayer-Vietoris 6.2.4 nous donne un isomorphisme $\bigoplus_{i=1}^n H_c^1(\partial Y'_i)_1 \simeq H_c^1(Y')_1 \oplus \left(\bigoplus_{i \in F'_q} H_c^1(Y'_i)_1 \right)$. Or les suites 6.2.1 nous montrent que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $H_c^1(Y'_i)_1 \simeq H^1(\partial Y_i)_1$, qui est alors de dimension 1. Ainsi, par égalité des dimensions, $H_c^1(Y')_1 = \{0\}$. Finalement, la suite 6.2.3 nous permet de conclure que $H^1(\hat{X})_1 = \{0\}$. La formule de la dimension ne s'applique donc pas lorsque $q = 1$, de même que celle de McMullen ne s'appliquait pas pour $q = 1$.

On vérifie alors que la somme sur $k \in \{0, \dots, d-1\}$ des dimensions de $H^1(\hat{X})_q$ est égale à la dimension de $H^1(\hat{X})$, c'est-à-dire à $2g$. Rappelons qu'on note $q = e^{-k \frac{2i\pi}{d}}$, avec $k \in \{1, \dots, d-1\}$, faire varier k revient à faire varier q . Pour $i \in \{0, \dots, n\}$ fixé, $q^{k_i} = 1$ équivaut à $d \mid k_i k$ ce qui équivaut encore à $d_i \mid k'_i k$, avec les notations $d_i = \frac{d}{e_i}$ et $k'_i = \frac{k_i}{e_i}$. Comme d_i et k'_i sont premiers entre eux, par le lemme de Gauss on a donc $d_i \mid k$. Alors $q^{k_i} = 1 \iff k \in \{\alpha d_i \mid \alpha \in \{1, \dots, e_i - 1\}\}$. On écrit $\varepsilon_{i,k} = 1$ si $q^{k_i} = 1$, et $\varepsilon_{i,k} = 0$ sinon, alors $\sum_{k=1}^{d-1} \#F_q = \sum_{k=1}^{d-1} \sum_{i=0}^n \varepsilon_{i,k} = \sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^{d-1} \varepsilon_{i,k} = \sum_{i=0}^n (e_i - 1)$. On a donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{d-1} \dim(H^1(\hat{X})_q) &= \dim(\underbrace{H^1(\hat{X})_1}_{=\{0\}}) + \sum_{k=1}^{d-1} \dim(H^1(\hat{X})_q) \\ &= \sum_{k=1}^{d-1} (n - 1 - \#F_q) \\ &= (d-1)(n-1) - \sum_{i=0}^n (e_i - 1) \\ &= d(n-1) + \sum_{i=0}^n e_i + 2 \\ &= 2g. \end{aligned}$$

Finalement, le théorème 6.0.1 est démontré, on peut s'intéresser à la signature de la forme d'intersection sur $H^1(\hat{X})_q$.

6.3 Signature de la forme d'intersection sur $H^1(\hat{X})_q$

Pour toute sous-surface ouverte $S \subset \hat{X}$, on peut munir $H_c^1(S)_q$ de la forme d'intersection de $H^1(\hat{X})_q$ via le morphisme naturel $H_c^1(S)_q \rightarrow H^1(\hat{X})_q$. De même pour toute sous-surface ouverte de \hat{Y} , avec la forme d'intersection sur $H^1(\hat{Y})_q$.

Rappelons que la forme d'intersection sur $H^1(\hat{X})$ est définie par :

$$\forall \eta, \mu \in H^1(\hat{X}), \quad \langle \eta; \mu \rangle_{\hat{X}} = \frac{i}{2} \int_{\hat{X}} \eta \wedge \bar{\mu}.$$

On note $\varepsilon_i = 1$ si $q^{k_i} = 1$ et $\varepsilon_i = 0$ sinon, et ce pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$.

Dans cette partie, nous démontrerons le théorème 6.0.2 donné au début du chapitre, concernant la signature de la forme d'intersection sur $H^1(\hat{X})_q$. On en rappelle ici l'énoncé :

Théorème : 6.0.2 *La forme d'intersection sur $H^1(\hat{X})_q$ est :*

$$(r_q, s_q) = \left(\lfloor \frac{k_0 k}{d} \rfloor - \sum_{i=1}^n \lfloor \frac{k_i k}{d} \rfloor - \varepsilon_0, \lfloor k_0(1 - \frac{k}{d}) \rfloor - \sum_{i=1}^n \lfloor k_i(1 - \frac{k}{d}) \rfloor - \varepsilon_0 \right).$$

La forme d'intersection n'est pas dégénérée sur $H^1(\hat{X})_q$.

On démontre ce théorème en deux temps, en distinguant les cas $F'_q = \emptyset$ et $F'_q \neq \emptyset$. On verra également que dans tous les cas, $r_q + s_q = \dim(H^1(\hat{X})_q)$, ainsi la forme d'intersection n'est pas dégénérée sur $H^1(\hat{X})_q$.

Remarque 6.3.1. *Dans le cas où tous les k_i sont égaux à 1, on retrouve bien la formule annoncée dans le théorème 2.2.4. En effet, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, si $k_i = 1$, alors $\lfloor \frac{k_i k}{d} \rfloor = \lfloor \frac{k}{d} \rfloor = 0$, et de même $\lfloor k_i(1 - \frac{k}{d}) \rfloor = 0$. Comme $k_0 = \sum_{i=1}^n k_i$, ici $k_0 = n$. Alors la formule du théorème ci-dessus nous donne :*

$$(r_q, s_q) = \left(\lfloor \frac{nk}{d} \rfloor - \varepsilon_0, \lfloor n(1 - \frac{k}{d}) \rfloor - \varepsilon_0 \right).$$

Puisque $\frac{nk}{d} \in \mathbb{N} \iff \varepsilon_0 = 1$, on a :

$$\lfloor \frac{nk}{d} \rfloor - \varepsilon_0 = \begin{cases} \frac{nk}{d} - 1 & \text{si } d|nk \\ \lfloor \frac{nk}{d} \rfloor & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \lceil \frac{nk}{d} \rceil - 1 & \text{si } d|nk \\ \lceil \frac{nk}{d} \rceil - 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

De même,

$$\lfloor n(1 - \frac{k}{d}) \rfloor - \varepsilon_0 = \begin{cases} n(1 - \frac{k}{d}) - 1 & \text{si } d|nk \\ \lfloor n(1 - \frac{k}{d}) \rfloor & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \lceil n(1 - \frac{k}{d}) \rceil - 1 & \text{si } d|nk \\ \lceil n(1 - \frac{k}{d}) \rceil - 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

et on retrouve bien la formule annoncée par McMullen dans son théorème 2.2.4.

6.3.1 Le cas $F'_q = \emptyset$

On supposera ici que $q^{e_i} \neq 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, c'est-à-dire que $F'_q = \emptyset$. On commence par faire le lien entre la forme d'intersection sur $H^1(\hat{X})_q$ et celle sur $H_c^1(\hat{Y})_q$.

Lemme 6.3.2. Si $F'_q = \emptyset$, alors la somme directe suivante est orthogonale :

$$H_c^1(\hat{Y})_q = H_c^1(Y')_q \oplus (\oplus_{i=1}^n H_c^1(Y'_i)_q).$$

Démonstration : Lorsque $F'_q = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid q^{e_i} = 1\}$ est vide, c'est-à-dire lorsque $q^{e_i} \neq 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la suite de Mayer-Vietoris (6.2.4) nous donne l'isomorphisme suivant :

$$H^1(\hat{Y})_q = H_c^1(Y')_q \oplus (\oplus_{i=1}^n H_c^1(Y'_i)_q).$$

D'après la suite exacte (6.2.1), $H_c^1(Y'_i)_q \simeq H^1(\hat{Y}_i)_q$, et comme la forme d'intersection est non dégénérée sur $H_c^1(\hat{Y}_i)_q$ d'après McMullen, on sait que $(\oplus_{i=1}^n H_c^1(Y'_i)_q) \cap (\oplus_{i=1}^n H_c^1(Y'_i)_q)^\perp = \{0\}$. Nous avons alors une décomposition en somme directe orthogonale :

$$H^1(\hat{Y})_q \simeq (\oplus_{i=1}^n H_c^1(Y'_i)_q) \oplus (\oplus_{i=1}^n H_c^1(Y'_i)_q)^\perp.$$

Comme Y' et $\cup_{i=1}^n Y_i$ sont disjoints, on a $H_c^1(Y')_q \subset (\oplus_{i=1}^n H_c^1(Y'_i)_q)^\perp$. De plus, ces deux espaces sont de même dimension, on a donc une égalité, ce qui nous donne la somme orthogonale :

$$H^1(\hat{Y})_q = H_c^1(Y')_q \oplus (\oplus_{i=1}^n H_c^1(Y'_i)_q).$$

□

Lemme 6.3.3. Si $F'_q = \emptyset$, alors on a une isométrie entre les espaces $(H^1(\hat{X})_q, \langle ; \rangle_{\hat{X}})$ et $(H_c^1(Y')_q, \langle ; \rangle_{\hat{Y}})$.

Démonstration : Si $F'_q = \emptyset$, les dimensions de $\oplus_{i \in F'_q} H_c^1(\partial X'_i)_q$ et de $\oplus_{i \in F'_q} H_c^2(\partial X'_i)_q$ sont nulles et la suite de Mayer-Vietoris (6.2.2) nous donne l'isomorphisme : $H^1(\hat{X})_q \simeq H_c^1(X')_q$. Remarquons que cet isomorphisme est indépendant de la connexité de \hat{X} . Ainsi, tout élément de $H^1(\hat{X})_q$ admet un représentant à support compact dans X' , et s'identifie alors à un élément de $H_c^1(X')_q \simeq H_c^1(Y')_q \subset H^1(\hat{Y})_q$. On peut associer naturellement $H^1(\hat{X})_q$ à un sous-espace de $H^1(\hat{Y})_q$.

Rappelons que $H_c^1(Y')_q$ est muni de la forme d'intersection de $H^1(\hat{Y})_q$ via le morphisme naturel $H_c^1(Y')_q \rightarrow H^1(\hat{Y})_q$. Alors pour tout $\eta, \mu \in H^1(\hat{X})_q$, et η', μ' des représentants de η et μ à support compact dans $X' = Y'$, on a :

$$\langle \eta, \mu \rangle_{\hat{X}} = \frac{i}{2} \int_{\hat{X}} \eta \wedge \bar{\mu} = \frac{i}{2} \int_{X'} \eta' \wedge \bar{\mu}' = \frac{i}{2} \int_{Y'} \eta' \wedge \bar{\mu}' = \frac{i}{2} \int_{\hat{Y}} \eta' \wedge \bar{\mu}' = \langle \eta', \mu' \rangle_{\hat{Y}}.$$

On a finalement une isométrie entre $(H_c^1(Y')_q, \langle ; \rangle_{\hat{Y}})$ et $(H^1(\hat{X})_q, \langle ; \rangle_{\hat{X}})$. □

On a naturellement une égalité entre la signature (r_X, s_X) de la forme d'intersection $\langle ; \rangle_{\hat{X}}$ sur $H^1(\hat{X})_q$ et la signature (r_\perp, s_\perp) de la forme d'intersection $\langle ; \rangle_{\hat{Y}}$ restreinte à $(\oplus_{i=1}^n H_c^1(Y'_i)_q)^\perp = H_c^1(Y')_q$. Comme la décomposition donnée dans le lemme 6.3.2 est orthogonale, cette signature est exactement $(r_Y - r, s_Y - s)$ où (r_Y, s_Y) est la signature de $\langle ; \rangle_{\hat{Y}}$ sur $H^1(\hat{Y})_q$ et (r, s) est la signature de $\langle ; \rangle_{\hat{Y}}$ sur $\oplus_{i=1}^n H_c^1(Y'_i)_q$. Il suffit donc de calculer (r_Y, s_Y) et (r, s) .

Lemme 6.3.4. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la signature de la restriction de la forme d'intersection au sous-espace $H_c^1(Y'_i)_q \subset H^1(\hat{Y})_q$ est $(r_i, s_i) = (\lceil k_i \frac{k}{d} - 1 \rceil, \lceil k_i(1 - \frac{k}{d}) - 1 \rceil)$.

Démonstration : La démonstration est une application des résultats de McMullen, en considérant de nouveau, pour un $i \in \{1, \dots, n\}$ fixé, la surface \hat{Y}_i obtenue d'après la courbe algébrique $y^d = \prod_{j=1}^{k_i} (x - b_{i,j})$. On a vu dans la démonstration du lemme 6.2.2, qu'on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow H_c^1(\partial Y_i)_q \rightarrow H_c^1(Y_i)_q \rightarrow H^1(\hat{Y}_i)_q \rightarrow H_c^2(\partial Y_i)_q \rightarrow H_c^2(\hat{Y}_i \setminus Y_i)_q \rightarrow 0.$$

Ici, on a par hypothèse $q^{e_i} \neq 1$, et donc d'après le lemme 2.2.6, $H_c^1(\partial Y_i)_q$, $H_c^2(\partial Y_i)_q$ et $H_c^2(\hat{Y}_i \setminus Y_i)_q$ sont nuls. On a alors $H_c^1(Y_i)_q \simeq H^1(\hat{Y}_i)_q$ et donc la signature de la forme d'intersection sur $H_c^1(Y_i)_q$ est la même que celle sur $H^1(\hat{Y}_i)_q$. Celle-ci, notée (r_i, s_i) est connue par le théorème de McMullen 2.2.4, on récupère ainsi la valeur de la signature (r_i, s_i) de la forme d'intersection restreinte sur $H_c^1(Y_i)_q$:

$$(r_i, s_i) = (\lceil k_i \frac{k}{d} - 1 \rceil, \lceil k_i(1 - \frac{k}{d}) - 1 \rceil).$$

□

On peut donc montrer le théorème 6.0.2 dans le cas où $F'_q = \emptyset$:

Démonstration du théorème 6.0.2 dans le cas $F'_q = \emptyset$:

D'après ce qui précède, il nous faut calculer la différence $(r_Y - r, s_Y - s)$. Remarquons que comme les Y'_i sont deux à deux disjoints, la somme directe $\oplus_{i=1}^n H^1(\hat{Y}_i)_q$ est une somme directe orthogonale. On a donc $r = \sum_{i=1}^n r_i$ et $s = \sum_{i=1}^n s_i$, et on va pouvoir calculer $r - \sum_{i=1}^n r_i$ et $s_Y - \sum_{i=1}^n s_i$ avec :

$$(r_Y, s_Y) = (\lceil k_0 \frac{k}{d} - 1 \rceil, \lceil k_0(1 - \frac{k}{d}) - 1 \rceil)$$

$$(r_i, s_i) = (\lceil k_i \frac{k}{d} - 1 \rceil, \lceil k_i(1 - \frac{k}{d}) - 1 \rceil).$$

On cherche à exprimer ces sommes. Remarquons que pour tout $p \in \mathbb{Q}$, $\lceil p \rceil = \lfloor p \rfloor$ si $p \in \mathbb{Z}$, et $\lceil p \rceil = \lfloor p \rfloor + 1$ sinon.

Rappelons que d'après 6.1.1, $q^{e_i} = 1 \iff q^{k_i} = 1$, pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$. Donc $F_q = \{i \in \{0, \dots, n\} \mid q^{k_i} = 1\}$ et $F'_q = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid q^{k_i} = 1\}$. On a $q^{k_0} = 1 \iff \frac{k_0 k}{d} \in \mathbb{N}$. De même, $q^{k_i} = 1 \iff \frac{k_i k}{d} \in \mathbb{N}$, et puisque $q^{k_i} \neq 1$, on a $q^{e_i} \neq 1$ et donc $\frac{k_i k}{d} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. On en déduit que :

$$\begin{cases} \lceil k_0 \frac{k}{d} - 1 \rceil = \lfloor \frac{k_0 k}{d} \rfloor - 1 = \lfloor \frac{k_0 k}{d} \rfloor - \varepsilon_0 & \text{si } q^{k_0} = 1 \\ \lceil k_0 \frac{k}{d} - 1 \rceil = \lfloor \frac{k_0 k}{d} - 1 \rfloor + 1 = \lfloor \frac{k_0 k}{d} \rfloor - \varepsilon_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De même, on a pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\lceil k_i \frac{k}{d} - 1 \rceil = \lfloor \frac{k_i k}{d} \rfloor$.

D'autre part, $\lceil k_0(1 - \frac{k}{d}) - 1 \rceil = \lfloor k_0(1 - \frac{k}{d}) \rfloor - 1$ si $-\frac{k_0 k}{d} \in \mathbb{Z}$, c'est à dire si $q^{k_0} = 1$, et $\lceil k_0(1 - \frac{k}{d}) - 1 \rceil = \lfloor k_0(1 - \frac{k}{d}) \rfloor$ sinon. Donc $\lceil k_0(1 - \frac{k}{d}) - 1 \rceil = \lfloor k_0(1 - \frac{k}{d}) \rfloor - \varepsilon_0$. De façon plus générale, on a donc $\lceil k_i(1 - \frac{k}{d}) - 1 \rceil = \lfloor k_i(1 - \frac{k}{d}) \rfloor$.

On en déduit :

$$(r_X, s_X) = (\lfloor \frac{k_0 k}{d} \rfloor - \sum_{i=1}^n \lfloor \frac{k_i k}{d} \rfloor - \varepsilon_0, \lfloor k_0(1 - \frac{k}{d}) \rfloor - \sum_{i=1}^n \lfloor k_i(1 - \frac{k}{d}) \rfloor - \varepsilon_0).$$

On montre alors que la forme d'intersection $\langle ; \rangle_{\hat{X}}$ est non dégénérée, en vérifiant que : $r_X + s_X = \dim(H^1(\hat{X})_q)$. Il faut travailler sur l'expression de s_Y et des s_i .

On fixe un x tel que $0 \leq x < 1$ et $\frac{k_0 k}{d} = \lfloor \frac{k_0 k}{d} \rfloor + x$. Si $x = 0$, c'est à dire si $q^{e_0} = 1$, on a

donc $\lceil -\frac{k_0k}{d} \rceil = -\lfloor \frac{k_0k}{d} \rfloor$. Si $x \neq 0$, c'est à dire si $q^{e_0} \neq 1$, on a alors $\lceil -\frac{k_0k}{d} \rceil = -\lfloor \frac{k_0k}{d} \rfloor - 1$. En notant cette fois-ci $\bar{\varepsilon}_0 = 1$ si $q^{e_0} \neq 1$ et $\bar{\varepsilon}_0 = 0$ si $q^{e_0} = 1$, on a donc $\lceil k_0(1 - \frac{k}{d}) - 1 \rceil = k_0 - 1 - \lfloor \frac{k_0k}{d} \rfloor - \bar{\varepsilon}_0$. De même pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a : $\lceil k_i(1 - \frac{k}{d}) - 1 \rceil = k_i - 1 - \lfloor \frac{k_ik}{d} \rfloor - 1$. Alors :

$$r_X + s_X = n - 2\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}_0 = n - 1 - \varepsilon_0.$$

Ainsi le théorème 6.0.2 est démontré dans le cas $F'_q = \emptyset$. \square

6.3.2 Le cas $F'_q \neq \emptyset$

Comme \hat{X} est connexe, on dispose de la suite exacte (6.2.3), ainsi que de la suite exacte (6.2.4) concernant \hat{Y} . On rappelle ici ces deux suites :

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i \in F'_q} H_c^1(\partial X'_i)_q \xrightarrow{i_1} H_c^1(X')_q \xrightarrow{\varphi_1} H^1(\hat{X})_q \rightarrow 0 \quad ;$$

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i \in F'_q} H_c^1(\partial Y'_i)_q \xrightarrow{j} H_c^1(Y')_q \oplus (\bigoplus_{i=1}^n H_c^1(Y'_i)_q) \xrightarrow{\varphi} H^1(\hat{Y})_q \rightarrow \bigoplus_{i \in F'_q} H_c^2(\partial Y'_i)_q \rightarrow 0.$$

On a toujours $H_c^1(\partial X'_i)_q \simeq H_c^1(\partial Y'_i)_q$, $H_c^1(X')_q \simeq H_c^1(Y')_q$ et $H_c^1(\partial X'_i)_q \simeq H_c^2(\partial Y'_i)_q$. D'autre part, en introduisant les surfaces \hat{Y}_i construites respectivement à partir des courbes algébriques $y^d = \prod_{j=1}^{k_i} (x - b_{i,j})$, on a vu dans la démonstration du lemme 6.2.2, que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow H_c^1(\partial Y'_i)_q \rightarrow H_c^1(Y'_i)_q \rightarrow H^1(\hat{Y}_i)_q \rightarrow H_c^2(\partial Y'_i)_q \rightarrow H_c^2(\hat{Y}_i \setminus Y'_i)_q \rightarrow 0.$$

Par le lemme 2.2.6, $H_c^1(\partial Y'_i)_q$, $H_c^2(\partial Y'_i)_q$ et $H_c^2(\hat{Y}_i \setminus Y'_i)_q$ sont de dimension 1 si $q^{e_i} = 1$, c'est-à-dire si $i \in F'_q$, et sont nuls sinon. Si $q^{e_i} = 1$, les espaces $H_c^2(\partial Y'_i)_q$ et $H_c^2(\hat{Y}_i \setminus Y'_i)_q$ sont de dimension 1, et la flèche entre ces deux espaces étant surjective, c'est une bijection. On a alors, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, une suite exacte courte :

$$0 \rightarrow H_c^1(\partial Y'_i)_q \xrightarrow{\alpha_i} H_c^1(Y'_i)_q \xrightarrow{\phi_i} H^1(\hat{Y}_i)_q \rightarrow 0.$$

On peut alors obtenir une suite exacte :

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n H_c^1(\partial Y'_i)_q \xrightarrow{i_2} \bigoplus_{i=1}^n H_c^1(Y'_i)_q \xrightarrow{\varphi_2} \bigoplus_{i=1}^n H^1(\hat{Y}_i)_q \rightarrow 0. \quad (6.3.1)$$

Pour simplifier les notations ici, nous allons poser :

- $W = \bigoplus_{i=1}^n H_c^1(\partial Y'_i)_q = \bigoplus_{i \in F'_q} H_c^1(\partial Y'_i)_q \simeq \bigoplus_{i \in F'_q} H_c^1(\partial X'_i)_q$
- $V_1 = H_c^1(X')_q \simeq H_c^1(Y')_q$
- $V_2 = \bigoplus_{i=1}^n H_c^1(Y'_i)_q$

Ainsi, les suites exactes (6.2.3), (6.3.1) et (6.2.4) s'écrivent respectivement :

- $0 \rightarrow W \xrightarrow{i_1} V_1 \xrightarrow{\varphi_1} H^1(\hat{X})_q \rightarrow 0$
- $0 \rightarrow W \xrightarrow{i_2} V_2 \xrightarrow{\varphi_2} \bigoplus_{i=1}^n H^1(\hat{Y}_i)_q \rightarrow 0$
- $0 \rightarrow W \xrightarrow{j} V_1 \oplus V_2 \xrightarrow{\varphi} H^1(\hat{Y})_q \rightarrow \bigoplus_{i \in F'_q} H_c^2(\partial Y'_i)_q \rightarrow 0$

On a $j : w \in W \mapsto (w, w) \in V_1 \oplus V_2$ est injective. Comme $V_1 = H_c^1(X')_q \simeq H_c^1(Y')_q$ et $V_2 \subset H^1(\hat{Y})_q$, on a naturellement des morphismes $\widetilde{\varphi}_1 : V_1 \rightarrow H^1(\hat{Y})_q$ et $\widetilde{\varphi}_2 : V_2 \rightarrow H^1(\hat{Y})_q$, alors : $\varphi(v_1, v_2) = \widetilde{\varphi}_2(v_2) - \widetilde{\varphi}_1(v_1)$. On peut s'assurer que :

Lemme 6.3.5. *Les morphismes $\widetilde{\varphi}_1$ et $\widetilde{\varphi}_2$ sont injectifs.*

Démonstration : Supposons $v_1 \in \ker(\widetilde{\varphi}_1)$ et considérons $(v_1, 0) \in V_1 \oplus V_2$. Alors $\varphi(v_1, 0) = \widetilde{\varphi}_2(0) - \widetilde{\varphi}_1(v_1) = 0$ donc $(v_1, 0) \in \ker(\varphi) = \text{Im}(j)$. Alors $(v_1, 0)$ est de la forme (w, w) , d'où $v_1 = 0$ et $\widetilde{\varphi}_1$ est injective.

On peut faire exactement le même raisonnement pour montrer que $\widetilde{\varphi}_2$ est injective. \square

Le morphisme injectif i_1 , respectivement i_2 , permet de considérer W comme un sous-espace de V_1 , respectivement V_2 . Considérons W_1 et W_2 tels que :

$$V_1 = W \oplus W_1 \quad ; \quad V_2 = W \oplus W_2.$$

Lemme 6.3.6. *La restriction $\varphi_1|_{W_1} : W_1 \rightarrow H^1(\widehat{X})_q$ réalise une isométrie entre $(W_1, \langle ; \rangle_{\widehat{Y}})$ et $(H^1(\widehat{X})_q, \langle ; \rangle_{\widehat{X}})$. De même, $\varphi_2|_{W_2}$ réalise une isométrie entre $(W_2, \langle ; \rangle_{\widehat{Y}})$ et $(\bigoplus_{i=1}^n H^1(\widehat{Y}_i)_q, \langle ; \rangle_{\widehat{Y}})$*

Démonstration : On peut voir que $\varphi_1|_{W_1}$ est un isomorphisme : en effet, φ_1 est surjective, donc pour tout $\eta \in H_c^1(\widehat{X})_q$, on peut trouver $v_1 \in V_1 = W \oplus W_1$ tel que $\varphi_1(v_1) = \eta$. Or $v_1 = w + w_1$ avec $w \in W = \text{Im}(i_1) = \ker(\varphi_1)$ et $w_1 \in W_1$, donc $\varphi_1(v_1) = \varphi_1(w_1)$ et donc $\varphi_1|_{W_1}$ est surjective. De plus, si $w_1, w'_1 \in W_1$ vérifient $\varphi(w_1) = \varphi(w'_1)$, alors $\varphi(w_1 - w'_1) = 0$ donc $w_1 - w'_1 \in W_1 \cap W = \{0\}$ et finalement $\varphi|_{W_1}$ est injective. Alors pour tout $\eta, \mu \in W_1$,

$$\langle \varphi_1(\eta), \varphi_1(\mu) \rangle_{\widehat{X}} = \frac{i}{2} \int_{\widehat{X}} \varphi_1(\eta) \wedge \overline{\varphi_1(\mu)} = \frac{i}{2} \int_{X'} \eta \wedge \overline{\mu}.$$

Comme $X' = Y'$, on a de plus, $\int_{X'} \eta \wedge \overline{\mu} = \int_{Y'} \eta \wedge \overline{\mu}$. On considère la restriction de la forme d'intersection de $\langle ; \rangle_{\widehat{Y}}$ au sous-espace W_1 de $H^1(\widehat{Y})_q$. Alors pour tout $\eta, \mu \in W_1 \subset V_1$,

$$\begin{aligned} \langle \eta; \mu \rangle_{\widehat{Y}} &= \frac{i}{2} \int_{\widehat{Y}} \eta \wedge \overline{\mu} \\ &= \frac{i}{2} \int_{Y'} \eta \wedge \overline{\mu} \\ &= \frac{i}{2} \int_{X'} \eta \wedge \overline{\mu} \\ &= \frac{i}{2} \int_{\widehat{X}} \varphi_1(\eta) \wedge \overline{\varphi_1(\mu)} \\ &= \langle \varphi_1(\eta); \varphi_1(\mu) \rangle_{\widehat{X}}. \end{aligned}$$

Finalement on a une isométrie entre $(W_1, \langle ; \rangle_{\widehat{Y}})$ et $(H^1(\widehat{X})_q, \langle ; \rangle_{\widehat{X}})$. Par le même argument, on peut montrer que φ_2 est également une isométrie. \square

Ainsi, on peut identifier $H^1(\widehat{X})_q$, muni de la forme d'intersection sur \widehat{X} , avec un sous-espace W_1 de $H^1(\widehat{Y})_q$, muni de la restriction de la forme d'intersection de \widehat{Y} à ce sous-espace.

Lemme 6.3.7. *Pour tout $w \in W$, $w_1 \in W_1$ et $w_2 \in W_2$, on a :*

$$\langle w, w_1 \rangle_{\widehat{Y}} = \langle w, w_2 \rangle_{\widehat{Y}} = \langle w_1, w_2 \rangle_{\widehat{Y}}.$$

Démonstration : Rappelons que $W = \bigoplus_{i \in F'_q} H_c^1(\partial Y'_i)_q$ et que, pour $i \in F'_q$, $H_c^1(\partial Y'_i)_q$ est engendré par un élément dont l'auto-intersection est nulle d'après le corollaire 3.1.2. Par construction, un élément $v_1 \in V_1$ se décompose de façon unique en la somme d'un

élément $w \in W$ à support compact dans $\cup_{i=1}^n \partial Y'_i$ et d'un élément w_1 admettant un représentant à support compact dans $Y' \setminus (\cup_{i=1}^n \partial Y'_i)$ qui est une rétraction de Y' . Ainsi, pour tout $w \in W$ et pour tout $w_1 \in W_1$, puisque w et w_1 admettent des représentants dont les supports sont disjoints, alors :

$$\langle w, v_1 \rangle_{\hat{Y}} = \frac{i}{2} \int_{\hat{Y}} w \wedge \overline{w_1} = \frac{i}{2} \int_{Y'} w \wedge \overline{w_1} = 0.$$

De la même façon, un élément $v_2 \in V_2$ se décompose de façon unique en la somme d'un élément $w \in W$ à support compact dans $\cup_{i=1}^n \partial Y'_i$ et d'un élément w_2 admettant un représentant à support compact dans $(\oplus_{i=1}^n Y'_i) \setminus (\cup_{i=1}^n \partial Y'_i)$ qui est une rétraction de $\oplus_{i=1}^n Y'_i$. Ainsi, pour tout $(w, w_2) \in W \oplus W_2$, $\langle \varphi_2(w); \varphi_2(w_2) \rangle_{\hat{Y}} = 0$.

On peut également vérifier que W_1 et W_2 sont orthogonaux. En effet, pour tout $(w_1, w_2) \in W_1 \times W_2$, on peut trouver un représentant de w_1 , respectivement de w_2 , à support compact dans $Y' \setminus (\cup_{i=1}^n \partial Y'_i)$, respectivement dans $(\cup_{i=1}^n Y'_i) \setminus (\cup_{i=1}^n \partial Y'_i)$. Ces supports étant disjoints, $\langle w_1, w_2 \rangle_{\hat{Y}} = 0$. \square

Rappelons que pour un $i \in \{1, \dots, n\}$ fixé, $H_c^1(\partial Y'_i)_q$ est engendré par un élément η_i dont l'auto-intersection est nulle. Ainsi W est orthogonal à $\text{Im}(\varphi)$. Or la forme d'intersection n'est pas dégénérée sur $H^1(\hat{Y})_q$. Alors :

Proposition 6.3.8. *Il existe $W' \subset H^1(\hat{Y})_q$ vérifiant :*

$$H^1(\hat{Y})_q \simeq (W \oplus W') \oplus W_1 \oplus W_2$$

tel que les espaces $(W \oplus W')$, W_1 et W_2 en somme directe orthogonale.

Démonstration : Rappelons qu'on a un isomorphisme entre $H^1(\hat{Y})_q$ et son dual $(H^1(\hat{Y})_q)^*$, donné par la forme d'intersection avec : $\forall \alpha \in H^1(\hat{Y})_q$, $\alpha^*(\cdot) = \langle \alpha; \cdot \rangle$.

On considère la liste ordonnée des éléments de F'_q classés par ordre croissant : $F'_q = \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(\#F'_q)\}$. Comme la forme d'intersection est non dégénérée sur $H^1(\hat{Y})_q$ et que W est orthogonale à $\text{Im}(\varphi)$, on doit pouvoir trouver un sous-espace $W' \subset H^1(\hat{Y})_q$ non orthogonal à W . Considérons un élément $\beta_1 \in (H^1(\hat{Y})_q)^*$ vérifiant :

- $\beta_1(\eta_{\sigma(1)}) = 1$ et $\beta_1(\eta_{\sigma(j)}) = 0$ pour tout $j \neq 1$
- β_1 est nul sur W_1 et sur W_2

On fixe μ_1 l'élément de $H^1(\hat{Y})_q$ dual à β_1 . On peut corriger $\mu_1 \mapsto \mu_1 + \lambda \eta_{\sigma(1)}$ pour que $\langle \mu_1; \mu_1 \rangle = 0$.

On ré-itére le procédé en choisissant cette fois un $\beta_2 \in (H^1(\hat{Y})_q)^*$ vérifiant :

- $\beta_2(\eta_{\sigma(2)}) = 1$ et $\beta_2(\eta_{\sigma(j)}) = 0$ si $j \neq 2$
- β_2 est nul sur W_1 et sur W_2
- $\beta_2(\mu_1) = 0$

On fixe l'élément $\mu_2 \in H^1(\hat{Y})_q$ correspondant à β_2 et corrigé de sorte que $\langle \mu_2; \mu_2 \rangle = 0$. On construit ainsi des éléments $\mu_1, \dots, \mu_{\#F'_q}$ et on note W' l'espace qu'ils engendrent. Alors W' s'identifie au dual de W , on a donc $W' \cap \text{Im}(\varphi) = \{0\}$, d'où $W' \oplus \text{Im}(\varphi) = (W' \oplus W) \oplus W_1 \oplus W_2 \subset H^1(\hat{Y})_q$. Rappelons que la dimension de $H_c^1(\hat{Y})_q$ est $k_0 - 1 - \varepsilon_0$ d'après 2.2.3, les dimensions de W et W' sont $\#(F'_q)$, comme $V_1 = W \oplus W_1$, et que la dimension de V_1 est donnée dans la démonstration du théorème 6.0.1, la dimension de W_1

et donc $s_Y - \sum_{i=1}^n s_i = \lfloor k_0(1 - \frac{k}{d}) \rfloor - \varepsilon_0 - (\sum_{i=1}^n \lfloor k_i(1 - \frac{k}{d}) \rfloor - \#F'_q)$. □

On peut finalement démontrer le théorème 6.0.2 dans le cas $F'_q \neq \emptyset$:

Démonstration du théorème 6.0.2 dans le cas $F'_q \neq \emptyset$:

D'après l'égalité (6.3.2), la formule 2.2.4, les lemmes 6.3.9 et 6.3.10, on a finalement :

$$(r_q, s_q) = (\lfloor \frac{k_0 k}{d} \rfloor - \sum_{i=1}^n \lfloor \frac{k_i k}{d} \rfloor - \varepsilon_0, \lfloor k_0(1 - \frac{k}{d}) \rfloor - \sum_{i=1}^n \lfloor k_i(1 - \frac{k}{d}) \rfloor - \varepsilon_0).$$

On peut alors vérifier que la forme d'intersection est non dégénérée sur $H^1(\hat{X})_q$. On a :

$$\begin{aligned} r_q + s_q &= (r_Y + s_Y) - \sum_{i=1}^n (r_i + s_i) - 2\#F'_q \\ &= \dim(H^1(\hat{Y})_q) - \sum_{i=1}^n (\dim(H^1(\hat{Y}_i)_q) - 2\#F'_q) \\ &= k_0 - 1 - \varepsilon_0 - \sum_{i=1}^n (k_i - 1 - \varepsilon_i) - 2\#F'_q \\ &= n - 1 - \varepsilon_0 + \#F'_q - 2\#F'_q \\ &= n - 1 - \#F'_q \end{aligned}$$

□

6.3.3 Le cas non connexe

Proposition 6.3.11. *Les théorèmes 6.0.1 et 6.0.2 sont toujours valables lorsque \hat{X} admet moins de d composantes connexes.*

Démonstration : Notons $m := \text{pgcd}(e_1, \dots, e_n) = \text{pgcd}(k_1, \dots, k_n, d)$ et supposons $1 < m$. On a :

$$\begin{aligned} y^d = \prod_{i=1}^n (x - b_i)^{k_i} &\iff (y^{\frac{d}{m}})^m = \left(\prod_{i=1}^n (x - b_i)^{\frac{k_i}{m}} \right)^m \\ &\iff \exists l \in \{0, \dots, m-1\} : \zeta_m^l y^{\frac{d}{m}} = \prod_{i=1}^n (x - b_i)^{\frac{k_i}{m}}. \end{aligned}$$

Pour tout $l \in \{0, \dots, m-1\}$, les solutions de l'équation $\zeta_m^l y^{\frac{d}{m}} = \prod_{i=1}^n (x - b_i)^{\frac{k_i}{m}}$ forment une sous-surface de $\hat{X} \setminus (\tilde{B} \cup \infty)$, notée Z_l . Puisque T est défini sur la courbe algébrique par $T(x, y) = (x, \zeta_d y)$, on a ici, pour $(x_0, y_0) \in Z_l$, $T(x_0, y_0)$ vérifie l'équation $\zeta_m^{l-1} y^{\frac{d}{m}} = \prod_{i=1}^n (x - b_i)^{\frac{k_i}{m}}$. Ainsi, on peut montrer que $T(Z_l) = Z_{l-1}$ et donc T permute les sous-surfaces Z_l . On peut de même que dans le chapitre 4, normaliser cette courbe algébrique que l'on note de nouveau \hat{X}_l . On a alors \hat{X}_l est connexe d'après 4.2.3. Alors $T^m|_{\hat{X}_l}$ est un automorphisme de \hat{X}_l qui permute cycliquement dans \hat{X}_l les solutions de $\zeta_m^l y^{\frac{d}{m}} = \prod_{i=1}^n (x - b_i)^{\frac{k_i}{m}}$. Puisque $(T^m|_{\hat{X}_l})^{\frac{d}{m}} = \text{Id}$, on peut considérer les sous-espaces propres de $T^*|_{\hat{X}_l}$ ici les valeurs propres sont des racines $\frac{d}{m}$ -ième de l'unité. En particulier, on va voir que l'espace propre $H^1(\hat{X}_l)_{q^m}$ est un sous-espace de $H^1(\hat{X})_q$.

Pour résumer, \hat{X} est la réunion disjointe de m copies d'une surface construite à partir de l'équation algébrique $y^{\frac{d}{m}} = \prod_{i=1}^n (x - b_i)^{\frac{k_i}{m}}$, ces copies sont permutées cycliquement

par T . On note $\hat{X}_0, \dots, \hat{X}_{m-1}$ ces différentes copies, indexées de sorte que $T : \hat{X}_l \rightarrow \hat{X}_{l-1 \bmod m}$, et donc $T^*(H^1(\hat{X}_l)) \subset H^1(\hat{X}_{l+1 \bmod m})$, $\forall l \in \{0, \dots, m-1\}$. L'automorphisme jouant le rôle de $T_{\hat{X}}$ sur chacune des \hat{X}_l est donné par $T_l := T^m_{|\hat{X}_l}$, et l'espace propre $H^1(\hat{X}_l)_{q^m}$ est l'ensemble des éléments w_l de $H^1(\hat{X}_l)$ tels que $T_l^*(w_l) = q^m w_l$, ce qui revient à $(T^m_{|\hat{X}_l})^*(w_l) = (T^*)^m(w_l) = q^m w_l$.

Si $w \in H^1(\hat{X})_q$, alors $w = (w_0, \dots, w_{m-1})$ où $w_l \in H^1(\hat{X}_l)$. Alors :

$$T^*(w) = T^*((w_0, \dots, w_{m-1})) = (T^*(w_{m-1}), T^*(w_0), \dots, T^*(w_{m-2}))$$

et comme $T^*(w) = qw$ on doit avoir pour tout $l \in \{0, \dots, m-1\}$, $w_l = q^{-1}T^*(w_{l-1})$ et $w_0 = q^{-1}T^*(w_{m-1})$. Alors $w_l = q^{-l}(T^*)^l(w_0)$, pour tout $l \in \{0, \dots, m-1\}$ et $w_0 = q^{-m}(T^*)^m(w_0)$. Finalement, $(T^*)^m(w_0) = q^m(w_0)$, donc $w_0 \in H^1(\hat{X}_0)_{q^m}$. Ainsi le choix de w ne dépend que de la donnée d'un élément $w_0 \in H^1(\hat{X}_0)_{q^m}$.

Réciproquement, la donnée d'un tel élément va permettre la construction d'un $w \in H^1(\hat{X})_q$. On a donc une bijection entre les deux espaces vectoriels $H^1(\hat{X})_q$ et $H^1(\hat{X}_0)_{q^m}$. D'après le théorème 6.0.1, on sait que $\dim(H^1(\hat{X}_0)_{q^m}) = n - 1 - \sum_{i=0}^n \theta_i$ où $\theta_i = 1$ si $(q^m)^{\frac{k_i}{m}} = 1$, c'est-à-dire si $q^{k_i} = 1$, et $\theta_i = 0$ sinon. On a finalement : $\dim(H^1(\hat{X})_q) = n - 1 - \#F_q$.

Pour l'étude de la signature de la forme d'intersection lorsque \hat{X} n'est pas connexe, remarquons que la suite exacte (6.2.3) est toujours vraie, ainsi les raisonnements faits dans les cas $F'_q = \emptyset$ et $F'_q \neq \emptyset$ sont toujours vrais et la formule pour la signature reste inchangée. \square

On a ainsi montré :

Lemme 6.3.12. $H^1(\hat{X})_q \simeq H^1(\hat{X}_0)_{q^m}$

Remarque 6.3.13. Si \hat{X} est formé exactement de d composantes connexes, alors $H^1(\hat{X})_q \simeq H^1(\hat{X}_0)_1 = \{0\}$. Ainsi $(r_q, s_q) = (0, 0)$.

Finalement, on peut généraliser les premiers résultats de McMullen aux espaces $H^1(\hat{X})_q$, avec q une racine d -ième de l'unité qui ne soit pas 1. On peut déterminer la dimension des $H^1(\hat{X})_q$, et la signature de la forme d'intersection sur ces espaces. Les outils mis en place dans cette partie seront de nouveau utilisés pour déterminer une famille généralisatrice de $H^1(\hat{X})_q$.

6.4 Les représentations ρ_q

Montrons que toute tresse de PB_n peut être associée de façon unique à un élément de $U(H^1(\hat{X})_q)$, où $H^1(\hat{X})_q \subset H^1_{dR}(\hat{X})$ est le sous-espace propre de T^* associée à une valeur propre q racine d -ème de l'unité, et $U(H^1(\hat{X})_q)$ est le groupe unitaire défini comme l'ensemble des homéomorphisme préservant la forme d'intersection $\langle ; \rangle$.

Le théorème 1.13 du livre [FM11], nous dit que tout homéomorphisme d'une surface compacte est homotope à un difféomorphisme de cette surface. On associe à tout élément $f \in \text{Mod}(\hat{X})$, un représentant, que l'on note encore f , qui soit un difféomorphisme de \hat{X} .

Lemme 6.4.1. On a une représentation unitaire :

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}(\hat{X}) & \rightarrow & U(H^1(\hat{X})) \\ f & \mapsto & (f^{-1})^* \end{array}$$

Nous ne ferons pas ici de démonstration de ce lemme puisqu'il est clair que $f \mapsto (f^{-1})^*$ est un morphisme, et qu'il est également classique que $\text{Mod}(\hat{X})$ préserve la forme d'intersection. On obtient ainsi une représentation $\text{Mod}(\hat{X}) \rightarrow \text{U}(H^1(\hat{X})_q)$.

Notons $\text{Mod}(\hat{X})^T$ les éléments de $\text{Mod}(\hat{X})$ qui commutent avec T .

Lemme 6.4.2. *Pour tout $f \in \text{Mod}(\hat{X})^T$, les éléments $(f^{-1})^*$ préservent les espaces propres $H^1(\hat{X})_q$.*

Démonstration : On sait que f et T commutent, alors f^{-1} et T commutent et pour tout $w \in H^1(\hat{X})_q$, on a :

$$\begin{aligned} (T^* - q\text{Id})((f^{-1})^*(w)) &= (T^* \circ (f^{-1})^*)(w) - q(f^{-1})^*(w) \\ &= (f^{-1} \circ T)^*(w) - q(f^{-1})^*(w) \\ &= (T \circ f^{-1})^*(w) - q(f^{-1})^*(w) \\ &= ((f^{-1})^* \circ T^*)(w) - (f^{-1})^*(w) \\ &= (f^{-1})^*(qw) - (f^{-1})^*(w) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $(f^{-1})^*(H^1(\hat{X})_q) \subset H^1(\hat{X})_q$. □

Corollaire 6.4.3. *On obtient $d-1$ représentations $\text{Mod}(\hat{X})^T \rightarrow \text{U}(H^1(\hat{X})_q)$, pour q une racine d -ème de l'unité qui ne soit pas 1.*

Démonstration : En effet, on a clairement une représentation de $\text{Mod}(\hat{X})^T$ obtenue à partir de celle du lemme 6.4.1 donnée par :

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}(\hat{X})^T & \rightarrow & \text{U}(H^1(\hat{X})) \\ f & \mapsto & (f^{-1})^* \end{array}$$

Or on a vu dans le lemme précédent que les éléments de $\text{Mod}(\hat{X})^T$ préservent les sous-espaces $H^1(\hat{X})_q$, on a donc des sous-représentations $\text{Mod}(\hat{X}) \rightarrow \text{U}(H^1(\hat{X})_q) \simeq \text{U}(r_q, s_q)$, pour q une racine d -ème de l'unité qui n'est pas 1. □

On a finalement :

Théorème 6.4.4. *Pour $q \neq 1$ une racine d -ième de l'unité, on obtient une représentation :*

$$\rho_q : \begin{array}{ccc} PB_n & \rightarrow & \text{U}(H^1(\hat{X})_q) \simeq \text{U}(r_q, s_q) \\ \tau & \mapsto & (\tilde{\tau}^{-1})^* \end{array} .$$

Démonstration : En effet, d'après 5.0.1, on associe à toute tresse $\tau \in PB_n$ un unique $\tilde{\tau} \in \text{Mod}(\hat{X})^T$. Il s'agit clairement d'un morphisme, on récupère alors $d-1$ représentation en restreignant les représentations du corollaire 6.4.3 aux relevés des tresses de PB_n . □

Nous voulons à présent étudier ces représentations, et notamment expliciter l'action des générateurs $\alpha_{i,j}$ du groupe PB_n sur $\text{U}(H^1(\hat{X})_q)$. Dans le chapitre suivant, nous traiterons le cas particulier des $\alpha_{i,i+1} = \tau_i^2$. Nous introduirons pour cela la notion de câblage.

Chapitre 7

Construction d'une famille génératrice (g_1, \dots, g_n) de $H^1(\hat{X})_q$

Dans cette partie, on construit une famille génératrice de $H^1(\hat{X})_q$ formée de n éléments g_1, \dots, g_n engendrant respectivement un $H_c^1(X_i)_q$, où X_i est la pré-image du disque ouvert complexe D_i , qui contient uniquement les points marqués b_i et b_{i+1} . Nous montrerons que les g_i forment une famille génératrice de $H^1(\hat{X})_q$.

Pour cela nous considérons la surface \hat{Y} , construite comme précédemment à partir de la courbe algébrique :

$$y^d = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{k_i} (x - b_{i,j})$$

où les $b_{i,j}$ sont dans un voisinage D'_i de b_i , avec $D'_i \cap D'_j = \emptyset$ si $i \neq j$. On note Y'_i la pré-image de D'_i dans \hat{Y} .

Pour simplifier l'exposition, on suppose à partir de maintenant que $q^{k_i} \neq 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, puisque la dimension de $H_c^1(\hat{X})_q$ ne dépend que du cardinal de $\{i \in \{1, \dots, n\} \mid q^{k_i} \neq 1\}$, cette restriction n'affecte en rien nos résultats principaux. On a donc d'après 6.3.3 :

$$H^1(\hat{Y})_q \simeq H_c^1(Y')_q \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^n H_c^1(Y'_i)_q \right) \quad (7.0.1)$$

où $H_c^1(Y')_q \simeq H^1(\hat{X})_q$ est l'orthogonal de $\bigoplus_{i=1}^n H_c^1(Y'_i)_q$. Nous démontrons dans ce chapitre le résultat principal suivant :

Théorème 7.0.1. *Il existe une famille génératrice (g_1, \dots, g_n) de $H^1(\hat{X})_q$ telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, g_i est à support compact dans X_i , engendre $H_c^1(X_i)_q$ et les valeurs de la forme d'intersection entre les g_i sont :*

- $\langle g_i; g_i \rangle = i \frac{\bar{q}(1-q)^2(1-q^{k_i+k_{i+1}})}{(1-q^{k_i})(1-q^{k_{i+1}})}$
- $\langle g_i; g_{i+1} \rangle = -i \frac{\bar{q}(1-q)^2}{1-q^{k_{i+1}}}$
- $\langle g_i; g_{i-1} \rangle = -i \frac{q^{k_i} \bar{q}(1-q)^2}{1-q^{k_i}}$
- $\langle g_i; g_j \rangle = 0$ si $|i - j| > 1$.

De plus : $\sum_{i=1}^n g_i = 0 \in H^1(\hat{X})_q$.

Ce résultat généralise le théorème 2.2.4, issu de l'article [McM13]. Afin d'utiliser les résultats de McMullen sur la surface \hat{Y} , nous devons introduire de nouvelles notations. Les points marqués sur la sphère pour définir cette surface \hat{Y} dans ce cas sont les $b_{i,j}$.

On veut pouvoir considérer un disque ayant deux points marqués d'indexation successive, c'est-à-dire contenant $b_{i,j}$ et $b_{i,j+1}$ si $j \neq k_i$, ou bien b_{i,k_i} et $b_{i+1,1}$ si $j = k_i$. On notera $D_{i,j}$ un tel disque topologique, comme illustré sur la figure 7.1, et $Y_{i,j}$ sa pré-image dans \hat{Y} . Alors les générateurs de McMullen de $H^1(\hat{Y})_q$ sont les éléments $g_{i,j}$ qui engendrent respectivement $H_c^1(Y_{i,j})_q$ et sur lesquels la forme d'intersection $\langle ; \rangle_{\hat{Y}}$ sur $H^1(\hat{Y})_q$ prend les valeurs annoncées dans le théorème 2.2.11.

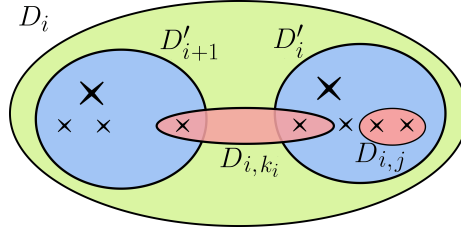


FIGURE 7.1 – Illustration des disques D_i , D'_i et $D_{i,j}$

7.1 Le cas $n = 2$

D'après le lemme 6.1.2, pour étudier un $H_c^1(X_i)_q$, il suffit de considérer le cas $n = 2$. On suppose donc que $n = 2$, on a également l'hypothèse $q^{k_1} \neq 1$ et $q^{k_2} \neq 1$. Pour que ce cas puisse nous servir par la suite, nous ne ferons pas d'hypothèse sur la connexité de \hat{X} , c'est-à-dire qu'on ne suppose plus que $\text{pgcd}(k_1, k_2, d) = 1$. Les surfaces \hat{X} et \hat{Y} sont construites respectivement à partir des courbes algébriques suivantes :

$$y^d = (x - b_1)^{k_1} (x - b_2)^{k_2} \quad ; \quad y^d = \prod_{i=1}^2 \prod_{j=1}^{k_i} (x - b_{i,j})$$

où les $b_{1,j}$ sont dans un voisinage D'_1 de b_1 , et les $b_{2,j}$ sont dans un voisinage D'_2 de b_2 , avec $D'_1 \cap D'_2 = \emptyset$.

On verra pour commencer que $H_c^1(X_1)_q$ est de dimension 1. On fera ensuite le lien entre $H_c^1(X_1)_q$ et $H_c^1(Y_1)_q$ où Y_1 est la pré-image de D_1 dans \hat{Y} . On pourra alors construire un générateur g_1 de $H_c^1(X_1)_q$.

7.1.1 Étude préalable de $H_c^1(X_1)_q$ et de sa dimension

On a toujours ici les hypothèses $q^{k_1} \neq 1$, $q^{k_2} \neq 1$. En revanche, $m := \text{pgcd}(d, k_1, k_2)$ n'est pas forcément 1, alors \hat{X} est constitué de m composantes connexes et est donc connexe si et seulement si $m = 1$, on pourra se référer à ce qui a été fait dans la partie 6.3.3.

Notre objectif ici généraliser la proposition 2.2.9 à la surface \hat{X} pour étudier $H_c^1(X_1)_q$ soit comme $H^1(\hat{X})_q$, si $q^{k_1+k_2} \neq 1$, soit comme $H_c^1(\partial X_1)_q$ sinon.

Analyse topologique de X_1 et Y_1

Pour mieux comprendre les surfaces avec lesquelles nous travaillons et leurs sous-surfaces, nous les illustrons dans les cas \hat{X} connexe ou non. Ces illustrations sont schématiques et ne représentent pas forcément un cas pour des valeurs précises de n , d , k_1 et k_2 .

Remarquons d'abord que X_1 correspond à la surface \hat{X} privée des $e_0 = \text{pgcd}(k_1 + k_2, d)$ disques au-dessus du voisinage de ∞ . On sait également que X'_1 (la pré-image de D'_1 dans \hat{X}) est formée de e_1 disques disjoints, et de même X'_2 (la pré-image de D'_2) est formée de e_2 disques disjoints. D'autre part, Y_1 correspond à \hat{Y} privé des $\text{pgcd}(k_1 + k_2, d)$ disques au-dessus du voisinage de ∞ , et Y'_1, Y'_2 sont connexes et ont respectivement e_1 et e_2 composantes de bord. On a alors $X_1 \setminus (X'_1 \cup X'_2) \simeq Y_1 \setminus (Y'_1 \cup Y'_2)$. On notera ces espaces X'' et Y'' , ils sont égaux topologiquement.

Lorsque \hat{X} est connexe, nous pouvons illustrer X'' et Y'' de la façon suivante :

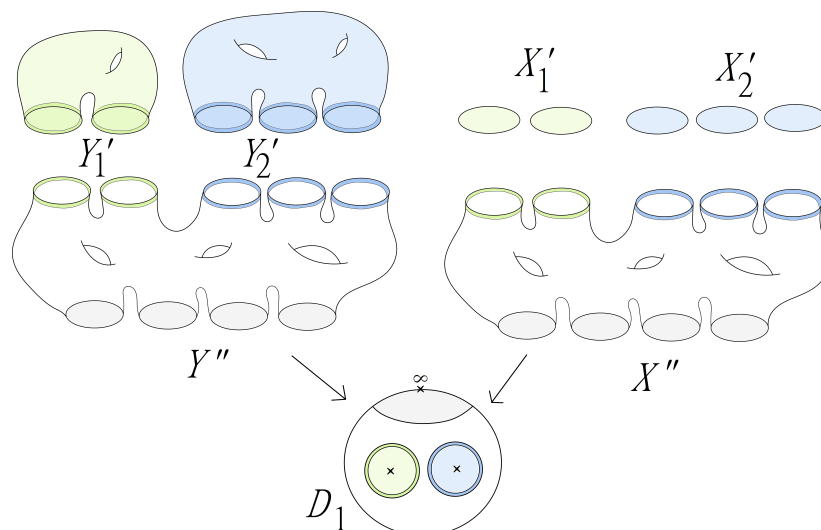


FIGURE 7.2 – Illustration de $Y_1 = Y'' \cup (Y'_1 \cup Y'_2)$ et $X_1 = X'' \cup (X'_1 \cup X'_2)$ dans le cas \hat{X} connexe

Lorsque \hat{X} n'est pas connexe, ses m composantes connexes contiennent chacune $\frac{e_1}{m}$ et $\frac{e_2}{m}$ composantes de bord de X'_1 respectivement X'_2 , on aura donc de façon similaire pour Y'' , m composantes connexes, chacune comportant $\frac{e_1}{m}$ et $\frac{e_2}{m}$ composantes de bord de Y'_1 et Y'_2 , avec ces deux surfaces qui restent connexes.

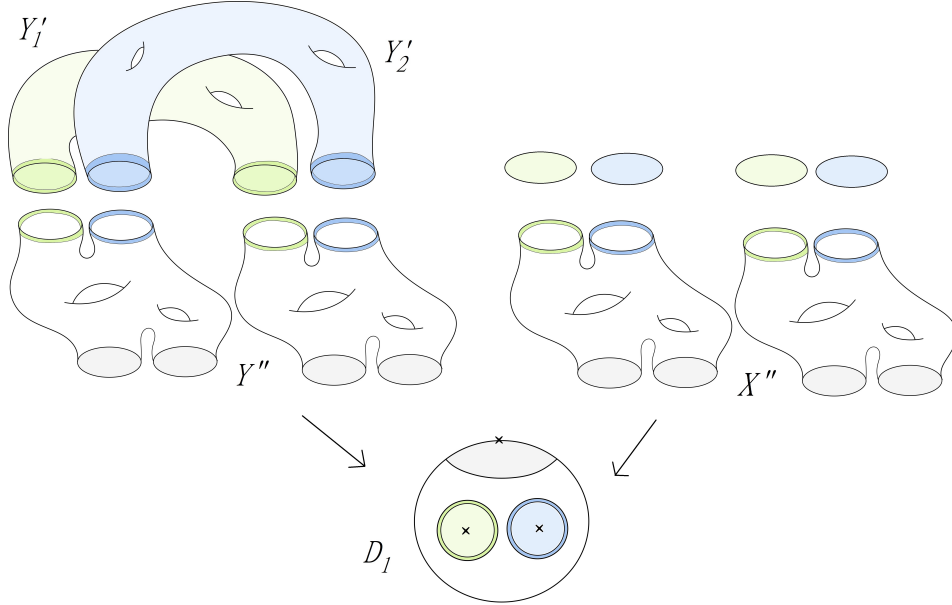


FIGURE 7.3 – Illustration de $Y_1 = Y'' \cup (Y'_1 \cup Y'_2)$ dans le cas \hat{X} non connexe

On peut maintenant passer à des résultats plus abstraits en se référant éventuellement aux illustrations précédentes.

Espaces isomorphes à $H_c^1(X_1)_q$

On veut montrer que :

Proposition 7.1.1. *Si $q^{k_1+k_2} \neq 1$, alors $H_c^1(X_1)_q \simeq H^1(\hat{X})_q$, et sinon $H_c^1(X_1)_q \simeq H_c^1(\partial X_1)_q$.*

Démonstration : Comme précédemment, on note $k_0 = k_1 + k_2$ et $e_0 = \text{pgcd}(k_0, d)$. Rappelons que $\hat{X} \setminus X_1$ est une réunion de e_0 disques permutés cycliquement par T , donc :

- $H^1(X_1^c)_q = \{0\}$
- $H_c^1(\partial X_1)_q$, $H_c^2(\partial X_1)_q$ et $H_c^2(\hat{X} \setminus X_1)_q$ sont de dimension 1 si $q^{k_1+k_2} = 1$ et de dimension nulle sinon d'après le lemme 6.1.3

On a alors la suite exacte de Mayer-Vietoris suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_c^1(\partial X_1)_q & \longrightarrow & H_c^1(X_1)_q & \longrightarrow & H^1(\hat{X})_q & \longrightarrow & H_c^2(\partial X_1)_q \longrightarrow H_c^2(X_1)_q \oplus H_c^2(\hat{X} \setminus X_1)_q \\
 \uparrow & & & & & & \downarrow \\
 H_c^0(\hat{X})_q & & & & & & H_c^2(\hat{X})_q
 \end{array} \tag{7.1.1}$$

Supposons que \hat{X} est connexe, on a $H_c^0(\hat{X})_q = \{0\}$ et $H_c^2(\hat{X})_q = \{0\}$. Comme X_1 correspond à \hat{X} privé d'une réunion de disques, X_1 est également connexe et donc $H_c^2(X_1)_q = \{0\}$. La suite de Mayer-vietoris (7.1.1) nous donne dans ce cas :

$$0 \rightarrow H_c^1(\partial X_1)_q \rightarrow H_c^1(X_1)_q \rightarrow H^1(\hat{X})_q \rightarrow H_c^2(\partial X_1)_q \rightarrow H_c^2(\hat{X} \setminus X_1)_q \rightarrow 0.$$

Si $q^{k_1+k_2} \neq 1$, $H_c^1(\partial X_1)_q$ et $H_c^2(\partial X_1)_q$ sont de dimension 0 on a donc un isomorphisme $H_c^1(X_1)_q \simeq H^1(\hat{X})_q$. Sinon, la dimension de $H^1(\hat{X})_q$ est nulle d'après le théorème 6.0.1, on a donc dans ce cas $H_c^1(\partial X_1)_q \simeq H_c^1(X_1)_q$.

Supposons que \hat{X} n'est pas connexe, c'est-à-dire ici que $m = \text{pgcd}(d, k_1, k_2) \neq 1$. Remarquons que $m \neq d$ sinon $q^{k_1} = q^{k_2} = 1$. On pourra donc utiliser le théorème 6.3.11. On sait que \hat{X} est composé de m sous-surfaces connexes $\hat{X}^0, \dots, \hat{X}^{m-1}$ deux à deux disjointes, correspondant chacune à une surface obtenue via une courbe algébrique : $y^{\frac{d}{m}} = (x - b_1)^{\frac{k_1}{m}}(x - b_2)^{\frac{k_2}{m}}$.

Attention toute fois au fait que, comme T permute les composantes connexes, l'automorphisme jouant le rôle de T sur la sous-surface \hat{X}^k est donné par $T|_{\hat{X}^k}^m$. Donc ici, la valeur propre nous intéressant est q^m et non plus q .

De même que dans la démonstration de 6.3.12, on peut montrer que $H^1(\hat{X})_q \simeq H^1(\hat{X}^0)_{q^m}$, et $H_c^1(X_1)_q \simeq H_c^1(X_1 \cap \hat{X}^0)_{q^m}$. Finalement en appliquant la preuve du cas connexe à la surface $H^1(\hat{X}^0)_{q^m}$ on a : si $(q^m)^{\frac{\text{pgcd}(k_1+k_2, d)}{m}} \neq 1$, c'est-à-dire si $q^{k_1+k_2} \neq 1$, alors :

$$H^1(\hat{X})_q \simeq H^1(\hat{X}^0)_{q^m} \simeq H_c^1(X_1 \cap \hat{X}^0)_{q^m} \simeq H_c^1(X_1)_q$$

et sinon :

$$H_c^1(\partial X_1)_q \simeq H_c^1(\partial(\hat{X}^0 \cap X_1))_{q^m} \simeq H_c^1(X_1 \cap \hat{X}^0)_{q^m} \simeq H_c^1(X_1)_q.$$

□

On peut alors montrer que :

Proposition 7.1.2. *La dimension de $H_c^1(X_1)_q$ est 1.*

Démonstration : D'après la proposition 7.1.1 si $q^{k_1+k_2} \neq 1$, alors $H_c^1(X_1)_q \simeq H^1(\hat{X})_q$ qui est de dimension $n - 1 = 1$, et sinon $H_c^1(X_1)_q \simeq H_c^1(\partial X_1)_q$ qui est de dimension 1 dans ce cas. □

On a donc généralisé pour nos surfaces le résultat 2.2.9. De plus, on sait maintenant que la dimension de $H_c^1(X_1)_q$ est 1. On cherche alors un générateur de cet espace. Pour cela, on fait tout d'abord un premier lien avec $H_c^1(Y_1)_q$.

7.1.2 Construction d'un générateur de $H_c^1(X_1)_q$

On va montrer la proposition suivante :

Proposition 7.1.3. *Les isomorphismes $H_c^1(Y'')_q \simeq H_c^1(X'')_q \simeq H_c^1(X_1)_q$ et la décomposition en somme directe :*

$$H_c^1(Y_1)_q \simeq H_c^1(Y'')_q \oplus H_c^1(Y'_1)_q \oplus H_c^1(Y'_2)_q$$

permettent de voir $H_c^1(X_1)_q$ comme un sous-espace de $H_c^1(Y_1)_q$.

Pour démontrer cette proposition nous utiliserons la suite de Mayer-Vietoris appliquée à Y_1 en décomposant $Y_1 = Y' \cup (Y'_1 \cup Y'_2)$. En particulier, les espaces $H_c^1(Y'_1 \cup Y'_2)_q$, $H_c^1(\partial(Y'_1 \cup Y'_2))_q$ et $H_c^2(\partial(Y'_1 \cup Y'_2))_q$ interviendront. Remarquons ici que $\partial(Y'_1 \cup Y'_2)$ est formé de $e_1 + e_2$ anneaux, mais T permute cycliquement d'une part les e_1 anneaux formant le bord de Y'_1 et d'autre part les e_2 anneaux formant $\partial Y'_2$, puisque $q^{k_1} \neq 1$ et $q^{k_2} \neq 1$, on a en particulier :

Lemme 7.1.4. $H_c^1(Y'_1 \cup Y'_2)_q = H_c^1(Y'_1)_q \oplus H_c^1(Y'_2)_q$, et les espaces $H_c^1(\partial(Y'_1 \cup Y'_2))_q$ et $H_c^2(\partial(Y'_1 \cup Y'_2))_q$ sont de dimension nulle.

On peut passer maintenant à la démonstration de la proposition 7.1.3 :

Démonstration de la proposition 7.1.3 : Comme Y_1 correspond à \hat{Y} privé de $\text{pgcd}(k_1 + k_2, d)$ disques, et que \hat{Y} est connexe, Y_1 est également connexe. On a alors, en notant $Y'' = Y_1 \setminus (Y'_1 \cup Y'_2)$, la suite de Mayer-Vietoris suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}
H_c^1(Y'')_q \oplus H_c^1(Y'_1 \cup Y'_2)_q & \longrightarrow & H_c^1(Y_1)_q & \longrightarrow & H_c^2(\partial(Y'_1 \cup Y'_2))_q & \longrightarrow & H_c^2(Y'')_q \oplus H_c^2(Y'_1 \cup Y'_2)_q \\
\uparrow & & & & & & \downarrow \\
H_c^1(\partial(Y'_1 \cup Y'_2))_q & & & & & & 0 \\
\uparrow & & & & & & \\
0 & & & & & &
\end{array}$$

Par le lemme précédent, la suite exacte écrite ci-dessus nous donne finalement un isomorphisme :

$$H_c^1(Y_1)_q \simeq H_c^1(Y'')_q \oplus H_c^1(Y'_1)_q \oplus H_c^1(Y'_2)_q.$$

En considérant maintenant la suite de Mayer-Vietoris sur la surface $X_1 = X'' \cup (X'_1 \cup X'_2)$, on a :

$$\cdots \rightarrow \underbrace{H_c^1(\partial(X'_1 \cup X'_2))_q}_{\simeq H_c^1(\partial(Y'_1 \cup Y'_2))_q = \{0\}} \rightarrow H_c^1(X'')_q \rightarrow H_c^1(X_1)_q \rightarrow \underbrace{H_c^2(\partial(X'_1 \cup X'_2))_q}_{\simeq H_c^2(\partial(Y'_1 \cup Y'_2))_q = \{0\}} \rightarrow \cdots$$

qui nous donne immédiatement : $H_c^1(X_1)_q \simeq H_c^1(X'')_q$. On a finalement montré la proposition 7.1.3. \square

Passons à la construction d'un générateur de $H_c^1(X_1)_q$ en nous intéressant à la construction d'un générateur de $H_c^1(Y'')_q \subset H_c^1(Y_1)_q$.

La forme d'intersection sur $H^1(\hat{Y})_q$ est notée ici $\langle ; \rangle_{\hat{Y}}$ et celle sur $H^1(\hat{X})_q$ est notée $\langle ; \rangle$. Rappelons ici le théorème 2.2.11 de McMullen, adapté à nos notations :

Théorème de McMullen : $H^1(\hat{Y})_q$ est engendré par la famille :

$$L := (g_{i,j} \mid i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, k_i\})$$

où les $g_{i,j}$ vérifient :

- $g_{i,j}$ engendre l'espace $H_c^1(Y_{i,j})_q$ (de dimension 1) où $Y_{i,j}$ est la pré-image de $D_{i,j}$, disque contenant $b_{i,j}, b_{i,j+1}$ si $j \neq k_i$, et $b_{i,k_i}, b_{i+1,1}$ sinon
- $\langle g_{i,j}; g_{i,j} \rangle_{\hat{Y}} = 2 \text{Im}(q)$
- $\langle g_{i,j}; g_{i,j+1} \rangle_{\hat{Y}} = \iota(1 - \bar{q})$ si $j \neq k_i$ et $\langle g_{i,k_i}; g_{i+1,1} \rangle_{\hat{Y}} = \iota(1 - \bar{q})$
- $\langle g_{i,j}; g_{i,j-1} \rangle_{\hat{Y}} = -\iota(1 - q)$ si $j \neq 1$ et $\langle g_{i,1}; g_{i-1,k_{i-1}} \rangle_{\hat{Y}} = -\iota(1 - q)$
- $\langle g_{i,j}; g_{l,m} \rangle_{\hat{Y}} = 0$ dans les cas où : $j \neq k_j$ et $(l, m) \neq (i, j - 1), (i, j), (i, j + 1)$ ou si $j = k_i$, et $(l, m) \neq (i + 1, 1), (i, k_i), (i, k_i - 1)$.

On montre ici le résultat principal suivant :

Proposition 7.1.5. $H_c^1(X_1)_q$ est engendré par une 1-forme g_1 à support dans X'' , obtenue à partir d'une 1-forme w_1 à support dans Y'' qui satisfait l'équation ci-dessous dans $H_c^1(Y_1)_q$:

$$w_1 = \sum_{j=1}^{k_1} q^{k_1-j} \frac{1-q^j}{1-q^{k_1}} g_{1,j} + \sum_{j=1}^{k_2-1} \frac{1-q^{k_2-j}}{1-q^{k_2}} g_{2,j}.$$

Pour montrer ce résultat, nous utilisons la décomposition de $H_c^1(Y_1)_q$ en somme directe donnée par la proposition 7.1.3. Nous avons pour cela besoin de trouver des générateurs de cet espace, qui ne seront pas les mêmes suivant que $q^{k_1+k_2} \neq 1$ ou $q^{k_1+k_2} = 1$. Ainsi, on traite séparément ces deux cas.

Si $q^{k_1+k_2} \neq 1$, on a d'après la proposition 2.2.9, $H_c^1(Y_1)_q \simeq H^1(\hat{Y})_q$. Alors une famille génératrice de $H_c^1(Y_1)_q$ sera donnée par la famille génératrice de $H^1(\hat{Y})_q$:

$$L_1 := (g_{1,1}, \dots, g_{1,k_1}, g_{2,1}, \dots, g_{2,k_2-1}).$$

Le cas $q^{k_1+k_2} = 1$ est a priori plus compliqué, on le traitera dans un second temps.

Le cas $q^{k_1+k_2} \neq 1$

Si $q^{k_1+k_2} \neq 1$, la dimension de $H^1(\hat{Y})_q$ est $k_1 + k_2 - 1$ et la famille L_1 est donc une base de $H^1(\hat{Y})_q \simeq H_c^1(Y_1)_q$.

On a également, d'après 6.2.2 :

Lemme 7.1.6. La famille $L'_1 := (g_{1,1}, \dots, g_{1,k_1-1})$, respectivement $L'_2 := (g_{2,1}, \dots, g_{2,k_2-1})$, est une base de $H_c^1(Y'_1)_q$, respectivement de $H_c^1(Y'_2)_q$.

Démonstration de la proposition 7.1.5 dans le cas où $q^{k_1+k_2} \neq 1$:

Commençons par remarquer que l'élément g_{1,k_1} est un générateur dans L_1 qui n'est pas dans $H_c^1(Y'_1)_q \oplus H_c^1(Y'_2)_q$. On utilise la somme directe de la proposition 7.1.3 pour exprimer g_{1,k_1} comme une combinaison linéaire des éléments des familles L'_1 et L'_2 et d'un élément w_1 dans $H_c^1(Y''_q) \simeq H_c^1(X_1)_q$. Il existe des complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_{k_1-1}$ et $\mu_1, \dots, \mu_{k_2-1}$ tels que :

$$g_{1,k_1} = \sum_{j=1}^{k_1-1} \lambda_j g_{1,j} + \sum_{j=1}^{k_2-1} \mu_j g_{2,j} + w_1$$

où $w_1 \in H_c^1(Y''_q)$.

On peut expliciter par le calcul les nombres complexes λ_j et μ_j . Rappelons que si $q^{k_1+k_2} \neq 1$, $H_c^1(Y_1)_q \simeq H^1(\hat{Y})_q$ est muni de la forme hermitienne non-dégénérée, la décomposition dans 7.1.3 est orthogonale. Utilisons la forme d'intersection pour trouver les λ_j et les μ_j . Rappelons que w_1 est dans $H_c^1(Y''_q)$ qui est l'orthogonal de $H_c^1(Y'_1)_q \oplus H_c^1(Y'_2)_q$ dans $H^1(\hat{Y})_q$, et donc $\langle w_1, g_{i,j} \rangle_{\hat{Y}} = 0$ si $(i, j) \neq (1, k_1)$, ce qui nous donne les équations (7.1.2) et (7.1.3) ci-dessous. Dans ces calculs, on note $A = i(1 - \bar{q})$.

Explicitation des λ_j .

Remarquons que si $k_1 = 1$, la première somme est vide et il n'y a pas de λ_j à trouver. Si $k_1 = 2$, on a $\langle g_{1,k_1}, g_{1,1} \rangle_{\hat{Y}} = -i(1-q)$ d'après McMullen, et $\langle g_{1,k_1}, g_{1,1} \rangle_{\hat{Y}} = \lambda_1 \langle g_{1,1}, g_{1,1} \rangle_{\hat{Y}} = i\lambda_1(\bar{q} - q)$. Comme $q^{k_1} \neq 1$, on doit ici avoir $q \neq -1$ et donc $\lambda_1 = -\frac{1-q}{\bar{q}-q} = -q \frac{1-q}{1-q^2}$.

Si $k_1 > 2$, on résout le système suivant :

$$\begin{cases} \langle g_{1,k_1}, g_{1,1} \rangle_{\hat{Y}} = \lambda_1 2Im(q) + \lambda_2 \bar{A} = 0 \\ \langle g_{1,k_1}, g_{1,j} \rangle_{\hat{Y}} = \lambda_{j-1} A + \lambda_j 2Im(q) + \lambda_{j+1} \bar{A} = 0 & \forall j \in \{2, \dots, k_1 - 2\} \\ \langle g_{1,k_1}, g_{1,k_1-1} \rangle_{\hat{Y}} = \lambda_{k_1-2} A + \lambda_{k_1-1} 2Im(q) = \bar{A} \end{cases} \quad (7.1.2)$$

Comme q est supposé différent de 1, on a $\bar{A} \neq 0$ et $\lambda_2 = -\lambda_1 \frac{2Im(q)}{\bar{A}} = (1 + \bar{q})\lambda_1$. Plus généralement, on peut montrer par récurrence que pour tout $j \in \{1, \dots, k_1 - 1\}$, $\lambda_j = \sum_{l=0}^{j-1} \bar{q}^l \lambda_1$. La dernière ligne du système nous donne en plus :

$$\begin{aligned} \lambda_{k_1-2} A + \lambda_{k_1-1} 2Im(q) = \bar{A} &\Rightarrow (\iota(1 - \bar{q}) \sum_{i=0}^{k_1-3} \bar{q}^i + \iota(\bar{q} - q) \sum_{i=0}^{k_1-2} \bar{q}^i) \lambda_1 = -\iota(1 - q) \\ &\Rightarrow (\bar{q}^{k_1-1} - q) \lambda_1 = -(1 - q) \\ &\Rightarrow \lambda_1 = -\frac{1 - \bar{q}}{1 - \bar{q}^{k_1}} = -q^{k_1-1} \frac{1 - q}{1 - q^{k_1}}. \end{aligned}$$

et ainsi : $\lambda_j = (\sum_{l=0}^{j-1} \bar{q}^l) \lambda_1 = \left(\frac{1 - \bar{q}^j}{1 - \bar{q}}\right) \times \left(-\frac{1 - \bar{q}}{1 - \bar{q}^{k_1}}\right) = -\frac{1 - q^{-j}}{1 - \bar{q}^{k_1}} = -q^{k_1-j} \frac{1 - q^j}{1 - q^{k_1}}$ pour tout $j \in \{1, \dots, k_1\}$.

Explicitation des μ_j

Remarquons que si $k_2 = 1$, il n'y a pas de μ_j à trouver.

Si $k_2 = 2$, l'hypothèse $q^{k_2} \neq 1$ nous garantit que $2Im(q) \neq 0$ et donc $\langle g_{1,k_1}, g_{2,1} \rangle_{\hat{Y}} = \mu_1 2Im(q) = A$ nous donne $\mu_1 = \frac{A}{2Im(q)} = -\frac{1-q}{1-q^2}$.

Si $k_2 > 2$, on résout le système suivant :

$$\begin{cases} \langle g_{1,k_1}, g_{2,1} \rangle_{\hat{Y}} = \mu_1 2Im(q) + \mu_2 \bar{A} = A \\ \langle g_{1,k_1}, g_{2,j} \rangle_{\hat{Y}} = \mu_{j-1} A + \mu_j 2Im(q) + \mu_{j+1} \bar{A} = 0 & \forall i \in \{2, \dots, k_1 - 2\} \\ \langle g_{1,k_1}, g_{2,k_2-1} \rangle_{\hat{Y}} = \mu_{k_2-2} A + \mu_{k_2-1} 2Im(q) = 0 \end{cases} \quad (7.1.3)$$

La dernière ligne nous donne $\mu_{k_2-2} = -\mu_{k_1-1} \frac{2Im(q)}{A}$ et donc $\mu_{k_2-2} = (1 + q)\mu_{k_2-1}$. On peut montrer avec une récurrence que $\mu_j = \sum_{l=0}^{k_2-1-j} q^l \mu_{k_2-1}$ pour tout $j \in \{1, \dots, k_2 - 1\}$. La première ligne du système nous donne de plus :

$$(\bar{q} - q)\mu_1 - (1 - q)\mu_2 = 1 - \bar{q} \Rightarrow \mu_{k_2-1} = -\frac{1 - q}{1 - q^{k_2}}.$$

Alors pour tout $j \in \{1, \dots, k_2 - 1\}$, $\mu_j = \sum_{l=0}^{k_2-1-j} q^l \mu_{k_2-1} = -\frac{1 - q^{k_2-j}}{1 - q} \frac{1 - q}{1 - q^{k_2}} = -\frac{1 - q^{k_2-j}}{1 - q^{k_2}}$.

On a ainsi : $w_1 = \sum_{j=0}^{k_1-1} q^{k_1-j} \frac{1 - q^j}{1 - q^{k_1}} g_{1,j} + \sum_{j=0}^{k_2-1} \frac{1 - q^{k_2-j}}{1 - q^{k_2}} g_{2,j} + g_{i,k_i}$. De plus, comme $q^{k_1-k_1} \frac{1 - q^{k_1}}{1 - q^{k_1}} = 1$, on a bien trouvé un élément $w_1 \in H_c^1(Y')_q$ donné par :

$$w_1 = \sum_{j=1}^{k_1} q^{k_1-j} \frac{1 - q^j}{1 - q^{k_1}} g_{1,j} + \sum_{j=1}^{k_2-1} \frac{1 - q^{k_2-j}}{1 - q^{k_2}} g_{2,j}.$$

Il est clair que w_1 est non nul sinon g_{1,k_1} s'exprimerait comme une combinaison linéaire des éléments de L'_1 et L'_2 et la famille L_1 serait alors liée ce qui contredit le fait que L_1 soit une base. On associe alors w_1 à un élément g_1 dans $H_c^1(X_1)_q$ via l'isomorphisme $H_c^1(Y'')_q \simeq H_c^1(X'')_q \simeq H_c^1(X_1)_q$. Puisque $w_1 \neq 0$, $g_1 \neq 0$, donc est un générateur de l'espace $H_c^1(X_1)_q$ qui est de dimension 1. \square

Remarque 7.1.7. L'isomorphisme $H_c^1(X_1)_q \simeq H_c^1(X'')_q \simeq H_c^1(Y'')_q$ nous permet de dire que l'élément g_1 admet un représentant à support compact dans X'' , et la classe de cet élément est w_1 dans $H_c^1(X'')_q \simeq H_c^1(Y'')_q$.

Nous utiliserons cette remarque par la suite pour calculer la forme d'intersection sur $H^1(\hat{X})_q$.

Lorsque $q^{k_1+k_2} = 1$, nous n'avons plus l'isomorphisme entre $H_c^1(Y_1)_q$ et $H^1(\hat{Y})_q$. Il nous faut trouver une autre méthode pour trouver un générateur de $H_c^1(X_1)_q$.

Le cas $q^{k_1+k_2} = 1$

Supposons maintenant que $q^{k_1+k_2} = 1$. Nous ne pouvons plus utiliser directement les générateurs de $H^1(\hat{Y})_q$. D'après la suite exacte 6.2.4, on a la suite exacte courte suivante :

$$0 \rightarrow H_c^1(\partial Y_1)_q \rightarrow H_c^1(Y_1)_q \rightarrow H^1(\hat{Y})_q \rightarrow 0.$$

D'après le théorème 3.0.3, on sait trouver un générateur η de $H_c^1(\partial Y_1)_q$ dont l'image est non nulle dans $H_c^1(Y_1)_q$. On a également, d'après la proposition 7.1.1, $H_c^1(\partial X_1)_q \simeq H_c^1(X_1)_q$. Le générateur de $H_c^1(\partial Y_1)_q \simeq H_c^1(\partial X_1)_q$ nous donnera donc un générateur de $H_c^1(X_1)_q$ que l'on sait interpréter dans $H_c^1(Y_1)_q$.

Démonstration de la proposition 7.1.5 dans le cas $q^{k_1+k_2} = 1$:

Le générateur η de $H_c^1(\partial Y_1)_q$ construit dans le théorème 3.0.3 s'interprète comme un élément non nul dans $H_c^1(Y_1)_q$ d'après la suite exacte courte précédente. On a vu dans le théorème 3.0.3 que $\eta \neq 0$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des éléments de L'_1 et L'_2 . En reprenant la formule obtenue dans le théorème 3.0.3 et en l'adaptant à nos notations, on obtient pour η l'expression suivante :

$$\eta = \sum_{j=1}^{k_1} \frac{\bar{q}^j - 1}{\bar{q}} g_{1,j} + \sum_{j=1}^{k_2-1} \frac{\bar{q}^{k_1+j} - 1}{\bar{q}} g_{2,j}.$$

Il suffit donc de modifier cette expression pour faire apparaître celle attendue dans le théorème. On pose $w = \frac{q^{k_1-1}}{1-q^{k_1}} \eta$ avec $\frac{q^{k_1-1}}{1-q^{k_1}} = \frac{\bar{q}}{\bar{q}^{k_1-1}} \neq 0$, donc $w \neq 0$. Comme $q^{k_1+k_2} = 1$, on a $\bar{q}^{k_1} = q^{k_2}$, alors :

$$\begin{aligned} w &= \sum_{j=1}^{k_1} \frac{\bar{q}^j - 1}{\bar{q}^{k_1} - 1} g_{1,j} + \sum_{j=1}^{k_2-1} \frac{\bar{q}^{k_1+j} - 1}{\bar{q}^{k_1} - 1} g_{2,j} \\ &= \sum_{j=1}^{k_1} \frac{q^{-j} - 1}{q^{-k_1}(1 - q^{k_1})} g_{1,j} + \sum_{j=1}^{k_2-1} \frac{q^{k_2-j} - 1}{q^{k_2} - 1} g_{2,j} \\ &= \sum_{j=1}^{k_1} q^{k_1} \frac{q^{-j}(1 - q^j)}{1 - q^{k_1}} g_{1,k_1} + \sum_{j=1}^{k_2-1} \frac{1 - q^{k_2-j}}{1 - q^{k_2}} g_{2,j} \\ &= \sum_{j=1}^{k_1} q^{k_1-j} \frac{1 - q^j}{1 - q^{k_1}} g_{1,k_1} + \sum_{j=1}^{k_2-1} \frac{1 - q^{k_2-j}}{1 - q^{k_2}} g_{2,j} \end{aligned}$$

Comme $H_c^1(\partial Y_1)_q$ s'injecte dans $H_c^1(Y_1)_q$, on note w_1 l'élément w vu dans $H_c^1(Y_1)_q$, qui vérifie donc la relation annoncée dans la proposition 7.1.5. On peut alors associer w_1 à un élément $g_1 \in H_c^1(X_1)_q$ via l'isomorphisme $H_c^1(Y')_q \simeq H_c^1(X')_q \simeq H_c^1(X_1)_q$, et comme w_1 est non nul, g_1 est non nul également et engendre $H_c^1(X_1)_q$. \square

Finalement, tous les cas sont traités et la proposition 7.1.5 est démontrée.

Dans le cas où n est quelconque, nous nous rapporterons, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, au cas $n = 2$ pour trouver un générateur g_i de $H_c^1(X_i)_q$. Nous montrerons que les g_1, \dots, g_n ainsi obtenus engendrent $H^1(\hat{X})_q$ et nous calculerons les valeurs de la forme d'intersection sur cette famille génératrice.

7.2 Détermination d'une famille génératrice de $H^1(\hat{X})_q$ et calcul de la forme d'intersection sur cette famille

7.2.1 La famille (g_1, \dots, g_n) génératrice de $H^1(\hat{X})_q$

On suppose ici que $n > 0$ est quelconque. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on commence par déterminer, à l'aide du cas $n = 2$, un générateur g_i de $H_c^1(X_i)_q$.

Proposition 7.2.1. *Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, l'élément*

$$w_i = \sum_{j=1}^{k_i} q^{k_i-j} \frac{1-q^j}{1-q^{k_i}} g_{i,j} + \sum_{j=1}^{k_{i+1}-1} \frac{1-q^{k_{i+1}-i}}{1-q^{k_{i+1}}} g_{i+1,j} \in H_c^1(Y_i)_q$$

donne un générateur g_i de $H_c^1(X_i)_q$.

Démonstration : Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. On construit les surfaces $\hat{\mathcal{X}}_i$ et $\hat{\mathcal{Y}}_i$ obtenues respectivement à partir des courbes algébriques suivantes :

$$y^d = (x - b_i)^{k_i} (x - b_{i+1})^{k_{i+1}} \quad ; \quad y^d = \prod_{j=1}^{k_i} (x - b_{i,j}) \times \prod_{j=1}^{k_{i+1}} (x - b_{i+1,j}).$$

On note \mathcal{X}_i , respectivement \mathcal{Y}_i , la pré-image dans $\hat{\mathcal{X}}_i$, respectivement dans $\hat{\mathcal{Y}}_i$ de D_i .

D'après le lemme 6.1.2, on sait que $H_c^1(X_i)_q \simeq H_c^1(\mathcal{X}_i)_q$ et $H_c^1(Y_i)_q \simeq H_c^1(\mathcal{Y}_i)_q$. De plus, les générateurs de McMullen sur $H^1(\hat{\mathcal{Y}}_i)_q$ obtenus via le théorème 2.2.11, à l'exception du dernier générateur dont on peut se passer d'après la remarque 2.2.12, coïncident avec les $g_{i,1}, \dots, g_{i,k_i}, g_{i+1,1}, \dots, g_{i+1,k_{i+1}-1}$ dans $H^1(\hat{Y})_q$.

On applique la proposition 7.1.5. On a donc un élément $w_i \in H_c^1(Y_i \setminus (Y'_i \cup Y'_{i+1}))_q \subset H_c^1(Y_i)_q \simeq H_c^1(\mathcal{Y}_i)_q$ donné par la combinaison linéaire :

$$w_i = \sum_{j=1}^{k_i} q^{k_i-j} \frac{1-q^j}{1-q^{k_i}} g_{i,j} + \sum_{j=1}^{k_{i+1}-1} \frac{1-q^{k_{i+1}-i}}{1-q^{k_{i+1}}} g_{i+1,j}$$

et donne un élément g_i générateur de $H_c^1(X_i)_q \simeq H_c^1(\mathcal{X}_i)_q$. □

On a donc trouvé pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, un générateur g_i de $H_c^1(X_i)_q$. Par abus de notation, on note de nouveau g_i le générateur de $H_c^1(X_i)_q$ vu dans $H^1(\hat{X})_q$ via le morphisme naturel $H_c^1(X_i)_q \rightarrow H^1(\hat{X})_q$. On veut maintenant montrer que ces générateurs (g_1, \dots, g_n) forment une famille génératrice de $H^1(\hat{X})_q$. Par abus de notation, on note également w_i l'élément $w_i \in H_c^1(Y_i \setminus (Y'_i \cup Y'_{i+1}))_q$ vu dans $H_c^1(Y')_q$ via le morphisme $H_c^1(Y_i \setminus (Y'_i \cup Y'_{i+1}))_q \rightarrow H_c^1(Y')_q$.

Proposition 7.2.2. *La famille (g_1, \dots, g_n) engendre $H^1(\hat{X})_q$. Si de plus $n \neq 2$, cette famille vérifie la relation $\sum_{i=1}^n g_i = 0 \in H^1(\hat{X})_q$, et on a pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$:*

$$\langle g_i; g_j \rangle = \langle w_i; w_j \rangle_{\hat{Y}}.$$

Démonstration : Le cas $n = 2$ et $q^{k_0} = 1$ est à exclure puisque on a alors $H^1(\hat{X})_q = \{0\}$, ce qui ne représente aucun intérêt pour nous. Si $n = 2$ et $q^{k_0} \neq 1$, on a vu que g_1 engendre $H_c^1(X_1)_q \simeq H^1(\hat{X})_q$.

Supposons maintenant que $n \neq 2$. On a vu précédemment dans 6.3.3 la décomposition en somme directe orthogonale :

$$H^1(\hat{Y})_q \simeq H_c^1(Y')_q \oplus (\oplus_{i=1}^n H_c^1(Y'_i)_q).$$

On peut alors considérer la projection orthogonale $\text{pr}_{\hat{Y}} : H^1(\hat{Y})_q \rightarrow H_c^1(Y')_q$. Regardons l'image $\text{pr}_{\hat{Y}}(g_{i,j})$ pour tout générateur $g_{i,j}$ de $H^1(\hat{Y})_q$.

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, et pour tout $j \in \{1, \dots, k_i - 1\}$, on sait que $g_{i,j}$ est dans $H_c^1(Y'_i)_q$ donc $\text{pr}_{\hat{Y}}(g_{i,j}) = 0$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on considère l'élément g_{i,k_i} . Par définition de w_i , on a $\text{pr}_{\hat{Y}}(g_{i,k_i}) = \text{pr}_{\hat{Y}}(w_i)$. Or w_i est à support compact dans $Y_i \setminus (Y'_i \cup Y'_{i+1})$, c'est-à-dire $w_i \in H_c^1(Y_i \setminus (Y'_i \cup Y'_{i+1}))_q \subset (\oplus_{i=1}^n H_c^1(Y'_i)_q)^\perp \simeq H_c^1(Y')_q$. Donc la projection de g_{i,k_i} sur $H_c^1(Y')_q$ correspond à w_i . Alors la projection orthogonale $\text{pr}_{\hat{Y}} : H^1(\hat{Y})_q \rightarrow H_c^1(Y')_q$, est définie sur les $g_{i,j}$ par :

$$\text{pr}_{\hat{Y}}(g_{i,j}) = \begin{cases} w_i & \text{si } j = k_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.2.1)$$

De plus, puisque $H_c^1(Y')_q \simeq H_c^1(X')_q \simeq H^1(\hat{X})_q$, avec l'identification $w_i \mapsto g_i$, on a finalement un morphisme surjectif :

$$\begin{aligned} \phi_{\hat{X}} : H^1(\hat{Y})_q &\rightarrow H^1(\hat{X})_q \\ g_{i,j} &\mapsto \begin{cases} g_i & \text{si } j = k_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

La projection orthogonale de la famille génératrice de $H^1(\hat{Y})_q$ sur $H_c^1(Y')_q$ identifié à $H^1(\hat{X})_q$, donne une famille génératrice de $H^1(\hat{X})_q$. Ainsi la famille génératrice $L = (g_{1,1}, \dots, g_{n,k_n})$ de $H^1(\hat{Y})_q$ s'envoie par $\phi_{\hat{X}}$ sur la famille (g_1, \dots, g_n) , qui engendre alors $H^1(\hat{X})_q$. Comme $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} g_{i,j} = 0$ d'après les résultats de McMullen, en projetant cette relation sur $H^1(\hat{X})_q$, on obtient : $\sum_{i=1}^n g_i = 0$.

Il reste à voir que pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $\langle g_i, g_j \rangle = \langle w_i; w_j \rangle_{\hat{Y}}$. Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$. On sait que g_i admet un représentant à support dans $Z_i := X_i \setminus (X'_i \cup X'_{i+1}) \simeq Y_i \setminus (Y'_i \cup Y'_{i+1})$ dont la classe dans $H_c^1(Z_i)_q$ est w_i . De même g_j , admet un représentant à support dans $Z_j := X_j \setminus (X'_j \cup X'_{j+1}) \simeq Y_j \setminus (Y'_j \cup Y'_{j+1})$ dont la classe dans $H_c^1(Z_j)_q$ est w_j . On a alors :

$$\begin{aligned} \langle g_i; g_j \rangle &= \frac{\imath}{2} \int_{\hat{X}} g_i \wedge \bar{g}_j \\ &= \frac{\imath}{2} \int_{Z_i \cup Z_j} w_i \wedge \bar{w}_j \\ &= \frac{\imath}{2} \int_{\hat{Y}} w_i \wedge \bar{w}_j \\ &= \langle w_i; w_j \rangle_{\hat{Y}} \end{aligned}$$

□

Remarque 7.2.3. Avec les notations précédentes, il vient immédiatement que si $|i-j| > 1$, alors $Z_i \cap Z_j = \emptyset$ et $\langle w_i; w_j \rangle_{\hat{Y}} = \langle g_i; g_j \rangle_{\hat{Y}} = 0$.

On a donc trouvé une famille génératrice de $H^1(\hat{X})_q$, composée des éléments g_i engendrant respectivement $H_c^1(X_i)_q$. Il nous reste encore à calculer la forme d'intersection sur la famille génératrice de $H^1(\hat{X})_q$ pour finir la démonstration du théorème 7.0.1.

7.2.2 Calcul de la forme d'intersection sur la famille génératrice de $H^1(\hat{X})_q$

On passe aux calculs de la forme d'intersection $\langle g_i; g_i \rangle$, $\langle g_i; g_{i+1} \rangle$ et $\langle g_{i+1}; g_i \rangle$ en utilisant la forme d'intersection de $H^1(\hat{Y})_q$ sur les w_1, \dots, w_n .

Proposition 7.2.4. Pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$ on a :

$$\begin{aligned} - \langle g_i; g_i \rangle &= \iota(1-q) \left(1 + \bar{q} - \frac{1-q^{k_i-1}}{1-q^{k_i}} - \frac{1-q^{k_{i+1}-1}}{1-q^{k_{i+1}}} \right) = \iota \frac{\bar{q}(1-q)^2(1-q^{k_i+k_{i+1}})}{(1-q^{k_i})(1-q^{k_{i+1}})} \\ - \langle g_i; g_{i+1} \rangle &= -\iota \frac{\bar{q}(1-q)^2}{1-q^{k_{i+1}}} \\ - \langle g_i; g_{i-1} \rangle &= -\iota \frac{q^{k_i} \bar{q}(1-q)^2}{1-q^{k_i}} \\ - \langle g_i; g_j \rangle &= 0 \text{ si } |i-j| > 1. \end{aligned}$$

Démonstration : L'expression de w_i est donnée dans la proposition 7.1.5 et donne en sortant g_{i,k_i} de la somme :

$$g_{i,k_i} = - \sum_{j=1}^{k_i-1} q^{k_i-j} \frac{1-q^j}{1-q^{k_i}} g_{i,j} - \sum_{j=1}^{k_{i+1}-1} \frac{1-q^{k_{i+1}-j}}{1-q^{k_{i+1}}} g_{i+1,j} + w_i.$$

Notons $\lambda_{i,j} := q^{k_i-j} \frac{1-q^j}{1-q^{k_i}}$ pour tout $j \in \{1, \dots, k_i-1\}$ et $\mu_{i,j} := \frac{1-q^{k_{i+1}-j}}{1-q^{k_{i+1}}}$ pour tout $j \in \{1, \dots, k_{i+1}-1\}$ de sorte que :

$$g_{i,k_i} = - \sum_{j=1}^{k_i-1} \lambda_{i,j} g_{i,j} - \sum_{j=1}^{k_{i+1}-1} \mu_{i,j} g_{i+1,j} + w_i.$$

Calcul de $\langle w_i; w_i \rangle_{\hat{Y}}$. Rappelons que w_i est orthogonal aux $g_{i,j}$ pour $j \in \{1, \dots, k_i-1\}$ et aux $g_{i+1,j}$ pour $j \in \{1, \dots, k_{i+1}-1\}$. De même, les $g_{i,j}$ et les $g_{i+1,l}$ sont à support disjoints et donc orthogonaux pour $(j, l) \neq (k_i, 1)$. Notons également $\lambda_{i,0} = \mu_{i,0} = 0$ et $\lambda_{i,k_i} = \mu_{i,k_{i+1}} = 0$. Alors :

$$\begin{aligned} \langle g_{i,k_i}; g_{i,k_i} \rangle_{\hat{Y}} &= \left\langle - \sum_{j=1}^{k_i-1} \lambda_{i,j} g_{i,j} - \sum_{j=1}^{k_{i+1}-1} \mu_{i,j} g_{i+1,j} + w_i; - \sum_{j=1}^{k_i-1} \lambda_{i,j} g_{i,j} - \sum_{j=1}^{k_{i+1}-1} \mu_{i,j} g_{i+1,j} + w_i \right\rangle_{\hat{Y}} \\ &= \sum_{j=1}^{k_i-1} \sum_{l=1}^{k_i-1} \lambda_{i,j} \overline{\lambda_{i,l}} \langle g_{i,j}; g_{i,l} \rangle_{\hat{Y}} + \sum_{j=1}^{k_{i+1}-1} \sum_{l=1}^{k_i} \mu_{i,j} \overline{\mu_{i,l}} \langle g_{i+1,j}; g_{i,l} \rangle_{\hat{Y}} + \langle w_i, w_i \rangle_{\hat{Y}} \\ &= \sum_{j=1}^{k_i-1} \lambda_{i,j} (\overline{\lambda_{i,j-1}} \bar{A} + \overline{\lambda_{i,j}} 2 \operatorname{Im}(q) + \overline{\lambda_{i,j+1}} A) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{k_{i+1}-1} \mu_{i,j} (\overline{\mu_{i,j-1}} \bar{A} + \overline{\mu_{i,j}} 2 \operatorname{Im}(q) + \overline{\mu_{i,j+1}} A) + \langle w_i, w_i \rangle_{\hat{Y}}. \end{aligned}$$

On commence par calculer la première somme. Pour un j donné, on note ici : $a_{i,j} := \overline{\lambda_{i,j-1}A} + \lambda_{i,j}2\text{Im}(q) + \lambda_{i,j+1}A$. On a alors, si $j \neq 1, k_i - 1$, $a_{i,j} = 0$.

Si $j = 1$, le terme $\lambda_{i,0} = 0$ et on trouve $a_{i,1} = 0$. Si $j = k_i - 1$, le terme $\lambda_{i,k_i} = 0$ et on trouve $a_{i,k_i} = i\bar{q}(1 - q)$. Alors la première somme dans l'expression de $\langle g_i; g_i \rangle$ vaut :

$$\sum_{j=1}^{k_i-1} \lambda_{i,j} a_{i,j} = iq \frac{1 - q^{k_i-1}}{1 - q^{k_i}} \times \bar{q}(1 - q) = i \frac{(1 - q)(1 - q^{k_i-1})}{1 - q^{k_i}}.$$

On peut de la même façon calculer :

$$\sum_{j=1}^{k_{i+1}-1} \mu_{i,j} (\overline{\mu_{i,j-1}A} + \overline{\mu_{i,j}2\text{Im}(q)} + \overline{\mu_{i,j+1}A}) = i \frac{(1 - q)(1 - q^{k_{i+1}-1})}{1 - q^{k_{i+1}}}.$$

Comme $\langle g_{i,k_i}, g_{i,k_i} \rangle_{\hat{Y}} = 2\text{Im}(q) = i(\bar{q} - q) = i\bar{q}(1 - q)(1 + q)$, on trouve ici

$$\begin{aligned} \langle w_i; w_i \rangle_{\hat{Y}} &= i(1 - q) \left(\bar{q}(1 + q) - \frac{1 - q^{k_i-1}}{1 - q^{k_i}} + \frac{(1 - q^{k_{i+1}-1}) + (1 - q^{k_{i+1}-1}) + (1 - q^{k_{i+1}-1})}{1 - q^{k_{i+1}}} \right) \\ &= i(1 - q) \frac{(-1 + \bar{q} + q^{k_i+k_{i+1}} - q^{k_i+k_{i+1}-1})}{(1 - q^{k_i})(1 - q^{k_{i+1}})} \\ &= i \frac{\bar{q}(1 - q)^2(1 - q^{k_i+k_{i+1}})}{(1 - q^{k_i})(1 - q^{k_{i+1}})} \\ &= -i(1 - q)(1 - \bar{q}) \frac{1 - q^{k_i+k_{i+1}}}{(1 - q^{k_i})(1 - q^{k_{i+1}})} \end{aligned}$$

Remarquons que comme $q \neq 1$, on a $\langle g_i; g_i \rangle \neq 0$ si et seulement si $q^{k_i+k_{i+1}} \neq 1$.

Calcul de $\langle w_i; w_{i+1} \rangle_{\hat{Y}}$: On utilise ici l'expression de g_{i,k_i} et de $g_{i+1,k_{i+1}}$ comme combinaison linéaire des $g_{i,j}$, $g_{i+1,j}$ et w_i , respectivement des $g_{i+1,l}$, $g_{i+2,l}$ et w_{i+1} . Comme la forme d'intersection entre les $g_{i,j}$ et $g_{i+2,l}$ est nulle, on a :

$$0 = \langle g_{i,k_i}; g_{i+1,k_{i+1}} \rangle_{\hat{Y}} = \left\langle \sum_{j=1}^{k_{i+1}-1} \frac{1 - q^{k_{i+1}-j}}{1 - q^{k_{i+1}}} g_{i+1,j}; \sum_{j=1}^{k_{i+1}-1} q^{k_{i+1}-j} \frac{1 - q^j}{1 - q^{k_{i+1}}} g_{i+1,j} \right\rangle_{\hat{Y}} + \langle w_i; w_{i+1} \rangle_{\hat{Y}}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \langle w_i; w_{i+1} \rangle_{\hat{Y}} &= - \left\langle \sum_{j=1}^{k_{i+1}-1} \frac{1 - q^{k_{i+1}-j}}{1 - q^{k_{i+1}}} g_{i+1,j}; \sum_{j=1}^{k_{i+1}-1} q^{k_{i+1}-j} \frac{1 - q^j}{1 - q^{k_{i+1}}} g_{i+1,j} \right\rangle_{\hat{Y}} \\ &= -i \frac{(1 - q^{k_{i+1}-1})}{(1 - q^{k_{i+1}})(1 - \bar{q}^{k_{i+1}})} (\bar{q}^{k_{i+1}-1}(1 - \bar{q})(\bar{q} - q) + \bar{q}^{k_{i+1}-2}(1 - \bar{q}^2)(1 - \bar{q})) \\ &\quad - \sum_{j=2}^{k_{i+1}-2} i \frac{(1 - q^{k_{i+1}-j})}{(1 - q^{k_{i+1}})(1 - \bar{q}^{k_{i+1}})} (\bar{q}^{k_{i+1}-j+1}(1 - \bar{q}^{j-1})(q - 1) \\ &\quad + \bar{q}^{k_{i+1}-j}(1 - \bar{q}^j)(\bar{q} - q) + \bar{q}^{k_{i+1}-j-1}(1 - \bar{q}^{j+1})(1 - \bar{q})) \\ &\quad - i \frac{(1 - q)}{(1 - q^{k_{i+1}})(1 - \bar{q}^{k_{i+1}})} (\bar{q}^2(1 - \bar{q}^{k_{i+1}-2})(q - 1) + \bar{q}(1 - \bar{q}^{k_{i+1}-1})(\bar{q} - q)) \\ &= i \frac{(1 - q)(1 - \bar{q})(1 - \bar{q}^{k_{i+1}})}{(1 - q^{k_{i+1}})(1 - \bar{q}^{k_{i+1}})} \\ &= -i \frac{\bar{q}(1 - q)^2}{1 - q^{k_{i+1}}} = i \frac{(1 - q)(1 - \bar{q})}{1 - q^{k_{i+1}}} \end{aligned}$$

Calcul de $\langle w_{i+1}; w_i \rangle_{\hat{Y}}$: On a :

$$\begin{aligned} \langle w_{i+1}; w_i \rangle_{\hat{Y}} &= \overline{\langle w_i; w_{i+1} \rangle_{\hat{Y}}} \\ &= -\iota \frac{(1-q)(1-\bar{q})}{1-\bar{q}^{k_i+1}} = -\iota \frac{q^{k_{i+1}-1}(1-q)^2}{1-q^{k_{i+1}}}. \end{aligned}$$

□

Remarque 7.2.5. *Les éléments g_1, \dots, g_n sont non nuls vus dans $H^1(\hat{X})_q$ puisque $\langle g_i, g_{i+1} \rangle = \iota \frac{(1-q)(1-\bar{q})}{1-\bar{q}^{k_i}}$ avec l'hypothèse $q^{k_i} \neq 1$.*

Finalemment, en explicitant la valeur de la forme d'intersection entre deux éléments de la famille génératrice, nous avons complété la démonstration du théorème 7.0.1 annoncé au début du chapitre. Nous avons donc trouvé une famille génératrice (g_1, \dots, g_n) de $H^1(\hat{X})_q$ où les g_i engendrent respectivement les $H_c^1(X_i)_q$ et sur la quelle la forme d'intersection est connue. On peut à présent expliciter l'action du groupe de tresses pures sur ces générateurs. Dans le chapitre suivant, on s'intéresse à l'action des tresses τ_i^2 sur la famille génératrice (g_1, \dots, g_n) .

Chapitre 8

Action des τ_i^2 sur $H^1(\hat{X})_q$

On suppose ici $q^{k_i} \neq 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. On veut expliciter l'action des τ_i^2 sur $H^1(\hat{X})_q$. On démontrera principalement dans ce chapitre le théorème suivant :

Théorème 8.0.1. *Soit (g_1, \dots, g_n) la famille génératrice de $H^1(\hat{X})_q$ dans le théorème 7.0.1, alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$:*

$$\forall x \in H^1(\hat{X})_q, \quad \tilde{\tau}_i^{2*}(x) = x - i \frac{(1 - q^{k_i})(1 - q^{k_{i+1}})}{(1 - q)(1 - \bar{q})} \langle x; g_i \rangle g_i$$

De plus, si $q^{k_i+k_{i+1}} \neq 1$, alors τ_i^2 agit comme une réflexion complexe :

$$\forall x \in H^1(\hat{X})_q, \quad \tilde{\tau}_i^{2*}(x) = x - (1 - q^{k_i+k_{i+1}}) \frac{\langle x; g_i \rangle}{\langle g_i; g_i \rangle} g_i.$$

Si $q^{k_i+k_{i+1}} = 1$, alors $\tilde{\tau}_i^{2*}$ est unipotent.

On en déduira le théorème suivant :

Théorème 8.0.2. *Pour tout $q = e^{-\frac{2i\pi k}{d}} \neq 1$, la représentation $\rho_q : PB_n \rightarrow U(H^1(\hat{X})_q)$ est irréductible.*

On reprend les notations utilisées jusqu'à maintenant. Ainsi, les points b_1, \dots, b_n sont n points complexes deux à deux distincts. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on considère également k_i points deux à deux distincts $b_{i,1}, \dots, b_{i,k_i}$ dans un disque ouvert D'_i , voisinage de b_i . La surface \hat{Y} est obtenue à partir de la courbe algébrique :

$$y^d = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{k_i} (x - b_{i,j}).$$

Cette surface relève du cadre de l'article de McMullen et d'après le lemme 6.3.2 et le corollaire 6.3.2, puisque pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $q^{k_i} \neq 1$, on a la somme directe orthogonale suivante :

$$H^1(\hat{Y})_q = H_c^1(Y')_q \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^n H_c^1(Y'_i)_q \right)$$

où Y'_i est la pré-image dans \hat{Y} de D'_i , $Y' = \hat{Y} \setminus (\cup_{i=1}^n Y'_i)$ et $H_c^1(Y')_q \simeq H^1(\hat{X})_q$.

8.1 Utilisation du câblage pour étudier l'action d'une tresse de PB_n sur $H^1(\hat{X})_q$

L'objectif de cette partie est de définir ce qu'est le câblage d'une tresse de PB_n . Cet outil nous permet d'associer à toute tresse $\tau \in PB_n$ des tresses de B_{k_0} , appelées câblages de τ . On veut montrer que l'action d'une tresse $\tau \in PB_n$ sur $H^1(\hat{X})_q$ est induite par l'action de son câblage sur $H^1(\hat{Y})_q$. En particulier, on déterminera une formule donnant l'action de τ sur les g_1, \dots, g_n en fonction de l'action de son câblage sur les $g_{1,k_1}, \dots, g_{n,k_n}$. Commençons par définir ce qu'est le câblage.

8.1.1 Le câblage d'une tresse de PB_0

Dans cette partie nous présentons la notion de câblage, et comment celle-ci nous permettra d'interpréter une tresse de PB_n comme une tresse de B_{k_0} , où $k_0 = \sum_{i=1}^n k_i$.

Soit $\tau \in PB_n$, on peut voir cette tresse comme la donnée de n chemins $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ conformément à la définition de la partie 2. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a donc un chemin $\gamma_i : b_i \rightsquigarrow b_i$. L'idée du câblage consiste à séparer le brin γ_i partant de b_i , en k_i brins $\gamma_{i,j}$, pour $j \in \{1, \dots, k_i\}$, d'origines respectives $b_{i,j}$, qui ne se croisent pas entre eux et se terminent respectivement en $b_{i,j}$. La tresse câblée, restreinte à chacun des disques D'_i , correspond à la tresse Id. Par exemple, sur le dessin suivant, pour $(n, k_1, k_2, k_3) = (3, 2, 4, 1)$ la tresse pure de PB_3 représentée ici peut se câbler pour obtenir une tresse de B_7 .

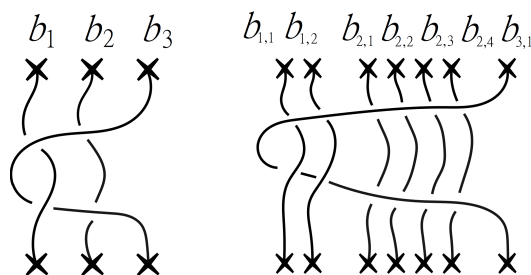


FIGURE 8.1 – Câblage d'une tresse dans le cas $n = 3$, $k_1 = 2$, $k_2 = 4$ et $k_3 = 1$

Le câblage nous permet donc d'associer de façon unique une tresse de PB_n à une tresse de $PB_{k_0} \subset B_{k_0}$, dont l'action sur $H^1(\hat{Y})_q$ est connue d'après McMullen. Cette association est en fait un morphisme de groupe. On a immédiatement :

Lemme 8.1.1. *Pour une tresse $\tau \in PB_n$ et \mathcal{T} son câblage dans B_{k_0} , \mathcal{T} préserve les sous-surfaces Y_i .*

Démonstration : En effet, par définition la tresse \mathcal{T} laisse stables les disques D'_i , et son relevé dans \hat{Y} préserve donc Y'_i . \square

Pour la partie suivante, nous expliquons comment le câblage permet d'exprimer l'action d'une tresse $\tau \in PB_n$ sur $H^1(\hat{X})_q$ à l'aide de l'action sur $H^1(\hat{Y})_q$ de son câblage.

8.1.2 Le câblage et l'action d'une tresse de PB_n sur $H^1(\hat{X})_q$

Rappelons que d'après McMullen, nous avons une première représentation $\rho_{\hat{Y}} : B_{k_0} \rightarrow U(H^1(\hat{Y})_q)$, et d'après notre théorème 6.4.4 nous avons également une représentation

$\rho_q : PB_n \rightarrow U(H^1(\hat{X})_q)$. On veut ici montrer que l'action de τ sur $H^1(\hat{X})_q$ est induite par celle de son câblage sur $H_c^1(Y')_q$.

Pour cela revenons sur les notations introduites au chapitre 5. Pour $\beta \in \hat{\mathbb{C}} \setminus (\cup_{i=1}^n D'_i)$, $\beta_0 \in \pi_{\hat{X}}^{-1}(\beta)$ et $\beta'_0 \in \pi_{\hat{Y}}^{-1}(\beta)$, rappelons qu'on note $\tilde{\tau}$ le relevé d'une tresse $\tau \in PB_n$ dans \hat{X} fixant β_0 , et $\tilde{\mathcal{T}}$ le relevé d'une tresse $\mathcal{T} \in B_{k_0}$ dans \hat{Y} fixant β'_0 . Rappelons que X' et Y' sont deux revêtements isomorphes au dessus de $\hat{\mathbb{C}} \setminus (\cup_{i=1}^n D'_i)$, et on note $\varphi : X' \rightarrow Y'$ l'identification entre ces deux surfaces tel que : $\pi_{\hat{Y}} \circ \varphi = \pi_{\hat{X}}$ et $\varphi(\beta_0) = \beta'_0$. Alors on montre que :

Lemme 8.1.2. *Pour toute tresse $\tau \in PB_n$, la restriction de $\tilde{\tau}$ à X' correspond à la restriction du relevé de son câblage \mathcal{T} à Y' via :*

$$\varphi \circ (\tilde{\tau}|_{X'}) \circ \varphi^{-1} = \tilde{\mathcal{T}}|_{Y'}.$$

Démonstration : Soit $\tau \in PB_n$ et $\mathcal{T} \in B_{k_0}$ son câblage. On sait qu'on dispose d'un isomorphisme $B_n \simeq \text{Mod}(D, n)$ où $D \subset \mathbb{C}$ est un disque topologique contenant les n points marqués de $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. De même, $B_{k_0} \simeq \text{Mod}(D, k_0)$, puisque D contient également les k_0 points de $B' = \{b_{1,1}, \dots, b_{n,k_n}\}$.

Fixons $[h] \in \text{Mod}(D, k_0)$, l'élément associé à $\mathcal{T} \in B_{k_0}$. Rappelons que \mathcal{T} est obtenue par la restriction $F|_{B' \times [0,1]}$ où F est une homotopie $F : D \times [0,1] \rightarrow D$ qui vérifie $F(\cdot, 0) = \text{Id}_D$ et $F(\cdot, 1) = h$, pour h un représentant de $[h]$.

Remarquons que les points $b_{i,1}, \dots, b_{i,k_i}$ étant k_i points deux à deux distincts dans un voisinage de b_i , on peut choisir $b_{i,1} = b_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Alors, h est un homéomorphisme de D qui préserve l'ensemble B' , et en particulier l'ensemble $B \subset B'$, et qui coïncide avec Id sur de bord ∂D . Alors $[h] \in \text{Mod}(D, n) \simeq B_n$. On a ainsi une correspondance unique entre $[h]$ et une tresse de B_n . Or, $F|_{B \times [0,1]}$ nous donne exactement la tresse τ , donc τ et \mathcal{T} sont obtenues à partir d'un même homéomorphisme de D , leurs relevés $\tilde{\tau}$ et $\tilde{\mathcal{T}}$ sont donc les mêmes sur $X' \simeq Y'$.

Par abus de notations, on écrit $\tau|_{\hat{\mathbb{C}} \setminus (\cup_{i=1}^n D'_i)} = \mathcal{T}|_{\hat{\mathbb{C}} \setminus (\cup_{i=1}^n D'_i)}$. Alors :

$$\begin{aligned} \pi_{\hat{Y}} \circ \varphi \circ (\tilde{\tau}|_{X'}) \circ \varphi^{-1} &= \pi_{\hat{X}} \circ (\tilde{\tau}|_{X'}) \circ \varphi^{-1} \\ &= (\tau|_{\hat{\mathbb{C}} \setminus (\cup_{i=1}^n D'_i)}) \circ \pi_{\hat{X}} \circ \varphi^{-1} \\ &= \mathcal{T}|_{\hat{\mathbb{C}} \setminus (\cup_{i=1}^n D'_i)} \circ \pi_{\hat{Y}}. \end{aligned}$$

Donc $\varphi \circ (\tilde{\tau}|_{X'}) \circ \varphi^{-1}$ relève \mathcal{T} sur Y' . De plus, $\varphi \circ (\tilde{\tau}|_{X'}) \circ \varphi^{-1}(\beta'_0) = \varphi \circ (\tilde{\tau}|_{X'}) (\beta_0) = \varphi(\beta_0) = \beta'_0$. Par unicité du relevé de \mathcal{T} fixant β'_0 , on a bien : $\varphi \circ (\tilde{\tau}|_{X'}) \circ \varphi^{-1} = \tilde{\mathcal{T}}|_{Y'}$. \square

L'idée pour voir que l'action du câblage d'une tresse induit celle de la tresse elle-même, est la suivante : par définition de ρ_q et de $\rho_{\hat{Y}}$, l'action de $\tau \in PB_n$ et celle de son câblage $\mathcal{T} \in B_{k_0}$ sont les mêmes sur $H_c^1(Y')_q \simeq H_c^1(X')_q \simeq H^1(\hat{X})_q$. Comme l'action de τ sur $H^1(\hat{X})_q$ est donnée par son action sur $H_c^1(X')_q$, qui est la même que celle de \mathcal{T} sur $H_c^1(Y')_q$, l'action de \mathcal{T} sur $H_c^1(Y')_q$ induit donc celle de τ sur $H^1(\hat{X})_q$. On explicite le lien entre ces deux actions, en montrant qu'elle induisent toutes les deux des représentations à image dans $U(H_c^1(Y')_q)$, pour lesquelles les actions d'une tresse de PB_n et de son câblage dans B_{k_0} sont les mêmes.

Rappelons que $H^1(\hat{Y})_q$ est engendré par la famille $(g_{1,1}, \dots, g_{n,k_n})$ définie comme dans la proposition 2.2.11, et d'après 7.2.1, chaque g_{i,k_i} s'exprime comme une combinaison

linéaire d'éléments dans $\bigoplus_{i=1}^n H_c^1(Y'_i)_q$ et d'un élément w_i admettant un support dans Y' . Comme $H^1(\hat{Y})_q = H_c^1(Y')_q \oplus (\bigoplus_{i=1}^n H_c^1(Y'_i)_q)$ est une somme directe orthogonale, on peut donc considérer la projection orthogonale $\text{pr}_{\hat{Y}}$ de $H^1(\hat{Y})_q$ sur $H_c^1(Y')_q$, définie sur la famille génératrice de $H^1(\hat{Y})_q$ par :

$$\text{pr}_{\hat{Y}}(g_{i,j}) = \begin{cases} w_i & \text{si } j = k_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $w_i \in H_c^1(Y')_q$ est défini comme dans la proposition 7.2.1. Alors $H_c^1(Y')_q$ est engendré par (w_1, \dots, w_n) . L'isomorphisme $\varphi : X' \rightarrow Y'$ nous donne également l'identification $\varphi^* : H_c^1(Y')_q \rightarrow H_c^1(X')_q \simeq H^1(\hat{X})_q$ donnée par $\varphi^*(w_i) = g_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Alors la représentation ρ_q nous donne une nouvelle représentation $\tilde{\rho}_q$ dont l'image est dans $U(H_c^1(Y')_q)$, définie par :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_q : PB_n &\rightarrow U(H_c^1(Y')_q) \\ \tau &\mapsto (\varphi^{-1})^* \circ (\rho_q(\tau)) \circ \varphi^* \end{aligned}$$

Alors on peut montrer que :

Lemme 8.1.3. *L'ensemble Γ des tresses de B_{k_0} qui préserve chacun des D'_i , pour $i \in \{1, \dots, n\}$, est un sous-groupe de B_{k_0} . De plus, pour toute tresse $\mathcal{T} \in \Gamma$, $\tilde{\mathcal{T}}^*$ préserve $H_c^1(Y')_q$, et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a :*

$$\tilde{\mathcal{T}}^*|_{H_c^1(Y')_q}(w_i) = \text{pr}_{\hat{Y}} \circ \tilde{\mathcal{T}}(g_{i,k_i}).$$

Démonstration : Il est clair que Γ forme un sous-groupe de B_{k_0} . De plus, pour toute tresse $\mathcal{T} \in \Gamma$, et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, comme $\mathcal{T}(D'_i) \subset D'_i$, alors $\tilde{\mathcal{T}}$ préserve Y'_i , donc $\tilde{\mathcal{T}}^*$ préserve $H_c^1(Y'_i)_q$, et plus généralement $\tilde{\mathcal{T}}^*$ préserve $\bigoplus_{i=1}^n H_c^1(Y'_i)_q$. Or on a la décomposition en somme directe orthogonale : $H^1(\hat{Y})_q = H_c^1(Y')_q \oplus (\bigoplus_{i=1}^n H_c^1(Y'_i)_q)$. Alors pour tout $y' \in H_c^1(Y')_q$ et pour tout $y \in \bigoplus_{i=1}^n H_c^1(Y'_i)_q$:

$$0 = \langle y, y' \rangle = \langle \tilde{\mathcal{T}}^*(y), \tilde{\mathcal{T}}^*(y') \rangle.$$

Comme $\tilde{\mathcal{T}}^*(y) \in \bigoplus_{i=1}^n H_c^1(Y'_i)_q$, on doit avoir $\tilde{\mathcal{T}}^*(y) \in H_c^1(Y')_q$. Donc $\tilde{\mathcal{T}}^*$ préserve $H_c^1(Y')_q$.

Alors pour tout $\eta = y' + y \in H^1(\hat{Y})_q$, avec $y' \in H_c^1(Y')_q$ et $y \in \bigoplus_{i=1}^n H_c^1(Y'_i)_q$, on a :

$$\text{pr}_{\hat{Y}}(\tilde{\mathcal{T}}^*(\eta)) = \text{pr}_{\hat{Y}}(\tilde{\mathcal{T}}^*(y') + \underbrace{\tilde{\mathcal{T}}^*(y)}_{\in \bigoplus_{i=1}^n H_c^1(Y'_i)_q}) = \tilde{\mathcal{T}}^*(y') = \tilde{\mathcal{T}}^* \circ \text{p}_{\hat{Y}}(\eta).$$

Ainsi, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\tilde{\mathcal{T}}^*|_{H_c^1(Y')_q}(w_i) = \tilde{\mathcal{T}}^* \circ \text{pr}_{\hat{Y}}(g_{i,k_i}) = \text{pr}_{\hat{Y}} \circ \tilde{\mathcal{T}}^*(g_{i,k_i}).$$

□

Alors la représentation $\rho_{\hat{Y}}$ donne une nouvelle représentation $\tilde{\rho}_{\hat{Y}} : \Gamma \rightarrow U(H_c^1(Y')_q)$, définie par :

$$\forall \mathcal{T} \in \Gamma, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \tilde{\rho}_{\hat{Y}}(\mathcal{T})(w_i) = \text{pr}_{\hat{Y}} \circ \rho_{\hat{Y}}(\mathcal{T})(g_{i,k_i}).$$

On a alors :

Théorème 8.1.4. *L'action d'une tresse $\tau \in PB_n$ sur $H^1(\hat{X})_q$ est induite par celle de son câblage $\mathcal{T} \in B_{k_0}$ sur $H_c^1(Y')_q$, ce lien est rendu explicite par la formule suivante :*

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \tilde{\tau}(g_i) = (\varphi^* \circ \text{pr}_{\hat{Y}}) \circ \tilde{\mathcal{T}}^*(g_{i,k_i}).$$

Démonstration : Pour $\tau \in PB_n$ et $\mathcal{T} \in B_{k_0}$ son câblage, il est évident que $\mathcal{T} \in \Gamma$. D'après le lemme 8.1.2 on a : $\tilde{\tau}|_{X'} = \varphi^{-1} \circ (\tilde{\mathcal{T}}|_{Y'}) \circ \varphi$. Par le lemme 8.1.3, on a donc pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\tilde{\tau}(g_i) = \varphi^* \circ (\tilde{\mathcal{T}}^*|_{H_c^1(Y')_q}) \circ (\varphi^{-1})^*(g_i) = \varphi^* \circ \tilde{\mathcal{T}}^*|_{H_c^1(Y')_q}(w_i) = (\varphi^* \circ \text{pr}_{\hat{Y}}) \circ \tilde{\mathcal{T}}^*(g_{i,k_i}).$$

□

Remarque 8.1.5. *La composition $\varphi^* \circ \text{pr}_{\hat{Y}}$ correspond en fait au morphisme surjectif $\phi_{\hat{X}} : H^1(\hat{Y})_q \rightarrow H^1(\hat{X})_q$ introduit dans 7.2.1, défini sur les $g_{i,j}$ par :*

$$\phi_{\hat{X}}(g_{i,j}) = \begin{cases} g_i & \text{si } j = k_i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Finalement, pour calculer explicitement l'action d'une tresse $\tau \in PB_n$ sur l'un des générateurs g_i de $H^1(\hat{X})_q$, on considérera le câblage $\mathcal{T} \in B_{k_0}$ de τ , il nous suffira alors de projeter l'image de $\tilde{\mathcal{T}}^*(g_{i,k_i})$ sur $H_c^1(Y')_q$ puis de l'identifier via $(\varphi^{-1})^*$ en un élément de $H^1(\hat{X})_q$. Utilisons cette méthode pour expliciter l'action des τ_i^2 sur la famille génératrice $\{g_1, \dots, g_n\}$ de $H^1(\hat{X})_q$. On commence donc par déterminer le câblage d'une telle tresse.

8.2 Action des τ_i^2 sur $H^1(\hat{X})_q$

On utilise ici le câblage pour déterminer l'action des τ_i^2 sur la famille génératrice (g_1, \dots, g_n) de $H^1(\hat{X})_q$. Pour cela, nous explicitons dans un premier temps l'expression du câblage de τ_i^2 . Puis nous calculons τ_i^2 sur les générateurs, et enfin nous généralisons les calculs pour obtenir une formule donnant l'action de chaque τ_i^2 sur $H^1(\hat{X})_q$. On pourra en déduire que les τ_i^2 sont soit des réflexions complexes d'ordre fini, soit unipotent.

8.2.1 Le câblage associée à un τ_i

On note $\sigma_1, \dots, \sigma_{k_0-1}$ les demi-twists générateurs de B_{k_0} , de sorte que l'élément σ_j échange le j -ième et le $(j+1)$ -ième brins. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Il s'agit dans cette partie d'observer le dessin de la tresse \mathcal{T}_i , câblage de τ_i^2 , pour déterminer l'écriture de cette tresse comme un mot en les σ_j .

Théorème 8.2.1. *Le câblage $\tau_i^2 \in PB_n$ correspond à un élément $\mathcal{T}_i \in B_{k_0}$ où \mathcal{T}_i est donné par :*

$$\mathcal{T}_i = (\sigma_{\sum_{j=1}^i k_j} \cdots \sigma_{\sum_{j=1}^{i-1} k_{j+1}}) (\sigma_{\sum_{j=1}^i k_{j+1}} \cdots \sigma_{\sum_{j=1}^{i-1} k_{j+2}}) \cdots (\sigma_{\sum_{j=1}^i k_{j+k_{i+1}-1}} \cdots \sigma_{\sum_{j=1}^{i-1} k_{j+k_{i+1}}}) \\ (\sigma_{\sum_{j=1}^{i-1} k_{j+k_{i+1}}} \cdots \sigma_{\sum_{j=1}^i k_{j+k_{i+1}-1}}) \cdots (\sigma_{\sum_{j=1}^{i-1} k_{j+2}} \cdots \sigma_{\sum_{j=1}^i k_{j+1}}) (\sigma_{\sum_{j=1}^{i-1} k_{j+1}} \cdots \sigma_{\sum_{j=1}^i k_j}).$$

Démonstration : Pour rendre cette démonstration plus lisible, nous ne traiterons que le cas $i = 1$, le câblage d'un τ_i^2 dans le cas i quelconque se fera de la même façon. Considérons donc la tresse τ_1^2 . Ici la formule attendue est la suivante :

$$\mathcal{T}_1 = (\sigma_{k_1} \cdots \sigma_1)(\sigma_{k_1+1} \cdots \sigma_2) \cdots (\sigma_{k_2+k_1-1} \cdots \sigma_{k_2}) \\ (\sigma_{k_2} \cdots \sigma_{k_2+k_1-1}) \cdots (\sigma_2 \cdots \sigma_{k_1+1})(\sigma_1 \cdots \sigma_{k_1}).$$

Il suffit d'organiser le dessin de \mathcal{T}_1 à l'aide des relations de tresses :

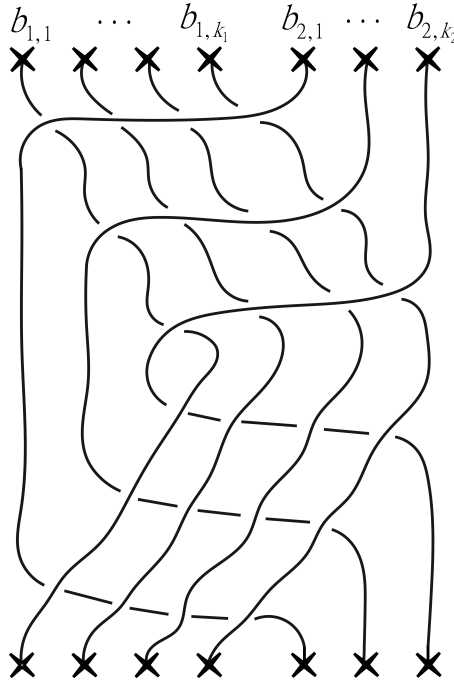


FIGURE 8.2 – Câblage standard de la tresse τ_1^2

On organise les croisements de sorte que le brin issu de $b_{2,1}$ croise dans un premier temps tous les brins issus de $b_{1,1}, \dots, b_{1,k_1}$. Cela correspond à la tresse concaténée $\sigma_1 \cdots \sigma_{k_1}$.

Puis on réalise le même travail avec le brin issu de $b_{2,2}$. Là encore, il va croiser les k_1 brins initialement issus de $b_{1,1}, \dots, b_{1,k_1}$. C'est la tresse concaténée $\sigma_2 \cdots \sigma_{k_1+1}$.

Ainsi de suite, on fait obtenir une famille de k_2 tresses concaténation de k_1 demi-twist d'ordre successif. c'est-à-dire qu'on obtient la première partie de l'expression de \mathcal{T}_1 :

$$(\sigma_{k_2} \cdots \sigma_{k_2+k_1-1}) \cdots (\sigma_2 \cdots \sigma_{k_1+1})(\sigma_1 \cdots \sigma_{k_1}).$$

On fait de même pour déterminer le reste de l'expression de \mathcal{T}_1 . □

On pourrait aussi déterminer un câblage de tous les générateurs $\alpha_{i,j}$ de PB_n . Cependant, nous allons voir dans le chapitre 9, que pour chaque $\alpha_{i,j}$, il existe une famille génératrice de $H^1(\hat{X})_q$ telle que $\alpha_{i,j}$ se comporte comme τ_i^2 . Ainsi, en étudiant dans un premier temps les τ_i^2 , nous nous épargnerons par la suite de nombreux calculs.

8.2.2 Application au calcul de l'action de τ_i^2 sur les générateurs de $H^1(\hat{X})_q$

On va ici utiliser les théorèmes 8.2.1 et 8.1.4 pour calculer $\tau_i^2(g_j)$ pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$. On commence par faire les calculs pour $i = 1$ et on généralisera les résultats obtenus.

Pour travailler plus facilement avec \mathcal{T}_1 , nous allons nommer les parenthèses comme ci-dessous :

$$\mathcal{T}_1 = \underbrace{(\sigma_{k_1} \cdots \sigma_1)}_{\beta_1} \cdots \underbrace{(\sigma_{k_2+k_1-1} \cdots \sigma_{k_2})}_{\beta_{k_2}} \underbrace{(\sigma_{k_2} \cdots \sigma_{k_2+k_1-1})}_{\alpha_{k_2}} \cdots \underbrace{(\sigma_1 \cdots \sigma_{k_1})}_{\alpha_1}.$$

Alors $\widetilde{\mathcal{T}}_1^* = \widetilde{\alpha}_1^* \circ \cdots \circ \widetilde{\alpha}_{k_2}^* \widetilde{\beta}_{k_2}^* \circ \cdots \circ \widetilde{\beta}_1^*$. On a également $\widetilde{\beta}_i^* = \widetilde{\sigma}_i^* \cdots \widetilde{\sigma}_{k_1+i-1}^*$, et $\widetilde{\alpha}_i^* = \widetilde{\sigma}_{k_1+i-1}^* \cdots \widetilde{\sigma}_i^*$. Toujours dans le but de simplifier les notations, on confondra maintenant la notation d'une tresse avec son action sur $H^1(\widehat{Y})_q$, et on notera donc α_i^* plutôt que $\widetilde{\alpha}_i^*$, β_i^* plutôt que $\widetilde{\beta}_i^*$ et σ_i^* plutôt que $\widetilde{\sigma}_i^*$.

Pour éviter de manipuler les doubles indices des $g_{i,j}$, on va noter :

$$\eta_{\sum_{l=1}^{i-1} k_l + j} := g_{i,j}.$$

Par exemple $g_{1,1} = \eta_1$, $g_{1,k_1} = \eta_{k_1}$, $g_{2,1} = \eta_{k_1+1}$ etc.

Action sur les η_j des parenthèses β_i et α_i

Lemme 8.2.2. *Pour tout $i \in \{1, \dots, k_2\}$, on a :*

- $\forall j \notin \{i-1, \dots, k_1+i\}$, $\beta_i^*(\eta_j) = \eta_j$
- $\beta_i^*(\eta_{i-1}) = \eta_{i-1} + \eta_i$
- $\forall j \in \{i, \dots, k_1+i-2\}$, $\beta_i^*(\eta_j) = \eta_{j+1}$
- $\beta_i^*(\eta_{k_1+i-1}) = -\sum_{j=i}^{k_1+i-1} q^{k_1+i-j} \eta_j$
- $\beta_i^*(\eta_{k_1+i}) = \sum_{j=i}^{k_1+i} q^{k_1+i-j} \eta_j$.

Démonstration : Rappelons que, d'après les formules de McMullen 2.2.14, on a :

$$\sigma_i^*(\eta_j) = \begin{cases} -q\eta_i & \text{si } j = i \\ \eta_{i+1} + q\eta_i & \text{si } j = i+1 \\ \eta_{i-1} + \eta_i & \text{si } j = i-1 \\ \eta_j & \text{sinon} \end{cases}$$

On applique ces résultats pour le calcul de $\beta_i^* = \sigma_i^* \cdots \sigma_{k_1+i-1}^*$. Clairement, si $j \notin \{i-1, \dots, k_1+i\}$, on a $\beta_i^*(\eta_j) = \eta_j$.

Pour η_{i-1} , on a :

$$\begin{aligned} \beta_i^*(\eta_{i-1}) &= \sigma_i^* \cdots \sigma_{k_1+i-1}^*(\eta_{i-1}) \\ &= \sigma_i^*(\eta_{i-1}) \\ &= \eta_{i-1} + \eta_i. \end{aligned}$$

Pour $j \in \{i, \dots, k_1+i-2\}$, on a $j+1 \in \{i+1, \dots, k_1+j-1\}$ et donc $\sigma_j^* \sigma_{j+1}^*$ apparaît dans l'écriture de β_i^* . Or $\sigma_j^* \sigma_{j+1}^*(\eta_j) = \sigma_j^*(\eta_j + \eta_{j+1}) = -q\eta_j + \eta_{j+1} + q\eta_j = \eta_{j+1}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \beta_i^*(\eta_j) &= \sigma_i^* \cdots \sigma_j^* \sigma_{j+1}^*(\eta_j) \\ &= \sigma_i^* \cdots \sigma_{j-1}^*(\eta_{j+1}) \\ &= \eta_{j+1}. \end{aligned}$$

Regardons $\beta_i^*(\eta_{k_1+i-1})$.

$$\begin{aligned}
\beta_i^*(\eta_{k_1+i-1}) &= \sigma_i^* \cdots \sigma_{k_1+i-1}^*(\eta_{k_1+i-1}) \\
&= \sigma_i^* \cdots \sigma_{k_1+i-2}^*(-q\eta_{k_1+i-1}) \\
&= \sigma_i^* \cdots \sigma_{k_1+i-3}^*(-q\eta_{k_1+i-1} - q^2\eta_{k_1+i-2}) \\
&\quad \vdots \\
&= - \sum_{j=i}^{k_1+i-1} q^{k_1+i-j} \eta_j.
\end{aligned}$$

Le calcul de $\beta_i^*(\eta_{k_1+i})$ est assez similaire et on trouve : $\beta_i^*(\eta_{k_1+i}) = \sum_{j=i}^{k_1+i} q^{k_1+i-j} \eta_j$. \square

On connaît donc l'expression de l'action de chaque β_i^* sur les $\eta_1, \dots, \eta_{k_1+k_2-1}$. On peut de la même façon étudier l'action de α_i^* sur cette même famille. On trouve :

Lemme 8.2.3. *Pour tout $i \in \{1, \dots, k_2\}$, on a :*

- $\forall j \notin \{i-1, \dots, k_1+i\}$, $\alpha_i^*(\eta_j) = \eta_j$
- $\alpha_i^*(\eta_{i-1}) = \sum_{j=i-1}^{k_1+i-1} \eta_j$
- $\alpha_i^*(\eta_i) = -q \sum_{j=i}^{k_1+i-1} \eta_j$
- $\forall j \in \{i+1, \dots, k_1+i-1\}$, $\alpha_i^*(\eta_j) = q\eta_{j-1}$
- $\alpha_i^*(\eta_{k_1+i}) = \eta_{k_1+i} + q\eta_{k_1+i-1}$.

La démonstration est calculatoire et repose sur les mêmes méthodes que celles du lemme précédent. On ne fera pas ici le détail des calculs.

Action de $\beta^* = \beta_{k_2}^* \cdots \beta_1^*$ et de $\alpha^* = \alpha_1^* \cdots \alpha_{k_2}^*$ sur les η_j

Appliquons maintenant ces résultats pour calculer l'action de $\beta^* := \beta_{k_2}^* \cdots \beta_1^*$ sur chacun des $\eta_1, \dots, \eta_{k_0}$. On a :

Lemme 8.2.4. *On a :*

1. $\forall j \in \{1, \dots, k_1-1\}$, $\beta^*(\eta_j) = \eta_{j+k_2}$
2. $\beta^*(\eta_{k_1}) = -q^{k_1}(\eta_1 + \cdots + \eta_{k_2}) - \sum_{j=k_2+1}^{k_1+k_2-1} q^{k_1+k_2-j} \eta_j$
3. $\forall j \in \{k_1+1, \dots, k_0-1\}$, $\beta^*(\eta_j) = q^{k_1} \eta_{j-k_1}$
4. $\beta^*(\eta_{k_0}) = \eta_{k_0} + \sum_{j=1}^{k_2} \eta_j$.

Démonstration : Distinguons les quatre cas annoncés dans le lemme :

Pour $j \in \{1, \dots, k_1-1\}$, on a $j \in \{1, \dots, k_1+1-2\}$ et donc $\beta_1^*(\eta_j) = \eta_{j+1}$ d'après le premier cas du lemme 8.2.2. On a alors $j+1 \in \{2, \dots, k_1+2-2\}$ et de même, $\beta_2^*(\eta_{j+1}) = \eta_{j+2}$. Ainsi de suite, on en déduit que : $\beta^*(\eta_j) = \eta_{j+k_2}$.

Dans le cas de $\beta^*(\eta_{k_1})$, on a :

$$\begin{aligned}
\beta^*(\eta_{k_1}) &= \beta_{k_2}^* \cdots \beta_1^*(\eta_{k_1}) \\
&= \beta_{k_2}^* \cdots \beta_2^* \left(- \sum_{j=1}^{k_1} q^{k_1+1-j} \eta_j \right) \\
&= \beta_{k_2}^* \cdots \beta_2^* \left(-q^{k_1} \eta_1 - \sum_{j=2}^{k_1} q^{k_1+1-j} \eta_j \right) \\
&= \beta_{k_2}^* \cdots \beta_3^* \left(-q^{k_1} (\eta_1 + \eta_2) - \sum_{j=3}^{k_1+1} q^{k_1+2-j} \eta_j \right) \\
&\vdots \\
&= -q^{k_1} (\eta_1 + \cdots + \eta_{k_2}) - \sum_{j=k_2+1}^{k_1+k_2-1} q^{k_1+k_2-j} \eta_j
\end{aligned}$$

Pour $j \in \{k_1 + 1, \dots, k_1 + k_2 - 1\}$, on peut écrire $j = k_1 + l$ avec $l \in \{1, \dots, k_2 - 1\}$. Alors pour tout $i < l$, on a $i + k_1 < k_1 + l = j \leq k_1 + k_2 - 1$, et donc $\beta_i^*(\eta_{k_1+l}) = \eta_{k_1+l} = \eta_j$. Ainsi le premier terme de β^* agissant non trivialement sur η_j est α_l on a

$$\begin{aligned}
\beta^*(\eta_j) &= \beta_{k_2}^* \cdots \beta_1^*(\eta_j) \\
&= \beta_{k_2}^* \cdots \beta_{l+1}^* \beta_l^*(\eta_{k_1+l}) \\
&= \beta_{k_2}^* \cdots \beta_{l+1}^* \left(\sum_{m=l}^{k_1+l} q^{k_1+l-m} \eta_m \right) \\
&= \beta_{k_2}^* \cdots \beta_{l+1}^* \left(q^{k_1} \eta_l + \sum_{m=l+1}^{k_1+l-1} q^{k_1+l-m} \eta_m + \eta_{k_1+l} \right) \\
&= \beta_{k_2}^* \cdots \beta_{l+2}^* \left(q^{k_1} (\eta_l + \eta_{l+1}) + \sum_{m=l+2}^{k_1+l} q^{k_1+l-m+1} \eta_m - \sum_{m=l+1}^{k_1+l} q^{k_1+l+1-m} \eta_m \right) \\
&= \beta_{k_2}^* \cdots \beta_{l+2}^* (q^{k_1} \eta_l) \\
&= q^{k_1} \eta_{j-k_1}.
\end{aligned}$$

Dans le cas de $\beta^*(\eta_{k_0})$, on a : $\beta^*(\eta_{k_0}) = \beta_{k_2}^* \cdots \beta_1^*(\eta_{k_0}) = \beta_{k_2}^* \cdots \beta_2^*(\eta_1 + \eta_{k_0}) = \sum_{j=1}^{k_2} \eta_j + \eta_{k_0}$. \square

D'une façon similaire, on obtient l'action de $\alpha^* = \alpha_1^* \cdots \alpha_{k_2}^*$ sur les η_j :

Lemme 8.2.5. *On a :*

1. $\forall j \in \{1, \dots, k_2 - 1\}$, $\alpha^*(\eta_j) = \eta_{j+k_1}$
2. $\alpha^*(\eta_{k_2}) = -q^{k_2} \sum_{j=1}^{k_1-1} \eta_j - \sum_{j=k_1}^{k_0-1} q^{k_2+k_1-j} \eta_j$
3. $\forall j \in \{k_2 + 1, \dots, k_1 + k_2 - 1\}$, $\alpha^*(\eta_j) = q^{k_2} \eta_{j-k_2}$.
4. $\alpha^*(\eta_{k_0}) = \eta_0 + \sum_{j=1}^{k_1} \eta_j$.

Action de $\tilde{\mathcal{T}}_i^*$ sur les η_j

On peut à présent déterminer l'action des τ_i^2 sur la famille génératrice (g_1, \dots, g_n) . Rappelons qu'on note $\text{pr}_{\hat{Y}}$ la projection orthogonale de $H^1(\hat{Y})_q$ sur $H_c^1(Y')_q \simeq H_c^1(X')_q$ et que pour toute tresse $\tau \in PB_n$ et son câblage $\mathcal{T} \in B_{k_0}$, d'après le théorème 8.1.4, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\tilde{\tau}^*(g_i) = \varphi^* \circ \text{pr}_{\hat{Y}}(\tilde{\mathcal{T}}^*(g_{i,k_i}))$. En calculant $\tilde{\mathcal{T}}_i^*$ sur les g_{i,k_i} et y appliquant ensuite $\varphi^* \circ \text{pr}_{\hat{Y}}$, on va montrer :

Théorème 8.2.6. *L'expression de $\tilde{\tau}_i^{2*}$ sur les g_i est donnée par :*

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_i^{2*}(g_i) &= q^{k_i+k_{i+1}}g_i \\ \tilde{\tau}_i^{2*}(g_{i+1}) &= g_{i+1} + q^{k_{i+1}}(1 - q^{k_i})g_i \\ \tilde{\tau}_i^{2*}(g_{i-1}) &= g_{i-1} + (1 - q^{k_{i+1}})g_i \\ \tilde{\tau}_i^{2*}(g_j) &= g_j \quad \forall j \notin \{i-1, i, i+1\}\end{aligned}$$

Démonstration : On réalise une fois de plus les calculs dans le cas de $\tilde{\tau}_1^2$ et on généralise ces résultats pour trouver les formules pour $\tilde{\tau}_i^2$ où $i \in \{1, \dots, n\}$. Pour cela, on utilise le théorème 8.1.4, il suffit de calculer $\tilde{\mathcal{T}}_1^*$ sur les η_j , pour j de la forme $\sum_{l=1}^m k_l$, puis de projeter le résultat sur $H_c^1(Y')_q$ et enfin d'identifier cette projection à un élément de $H^1(\hat{X})_q$.

- On a vu que $\beta^*(\eta_{k_1}) = -q^{k_1}(\eta_1 + \dots + \eta_{k_2}) - \sum_{j=k_2+1}^{k_1+k_2-1} q^{k_1+k_2-j}\eta_j$, alors :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{T}}_1^*(g_{1,k_1}) &= \alpha^* \circ \beta^*(\eta_{k_1}) \\ &= \alpha^*\left(-q^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} \eta_j - \sum_{j=k_2+1}^{k_1+k_2-1} q^{k_1+k_2-j}\eta_j\right) \\ &= -q^{k_1}\alpha^*\left(\sum_{j=1}^{k_2-1} \eta_j\right) - q^{k_1}\alpha^*(\eta_{k_2}) - \sum_{j=k_2+1}^{k_1+k_2-1} q^{k_1+k_2-j}\eta_j \\ &= -q^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2-1} \eta_{j+k_1} - q^{k_1}\left(-q^{k_2} \sum_{j=1}^{k_1-1} \eta_j - \sum_{j=k_1}^{k_1+k_2-1} q^{k_2+k_1-j}\eta_j\right) + \sum_{j=1}^{k_1-1} q^{k_1-j}\eta_{k_2+j} \\ &= \sum_{j=1}^{k_1-1} q^{k_1+k_2}(1 - q^j)\eta_j + q^{k_1+k_2}\eta_{k_1} + \sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2-1} (q^{k_1} - q^{k_1+k_2-j})\eta_j.\end{aligned}$$

Ainsi $\text{pr}_{\hat{Y}}(\tilde{\mathcal{T}}^*(g_{i,k_i})) = q^{k_1+k_2}w_1$ donc $\tilde{\tau}_1^{2*}(g_i) = q^{k_1+k_2}g_1$.

- De la même façon, on peut calculer :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{T}}_1^*(g_{2,k_2}) &= \alpha^* \circ \beta^*(\eta_{k_1+k_2}) \\ &= -q^{k_1+k_2} \sum_{j=1}^{k_1-1} (1 - q^j)\eta_j - \sum_{j=k_1}^{k_1+k_2-1} q^{2k_1+k_2-j}\eta_j + \sum_{j=k_1}^{k_1+k_2} q^{k_1+k_2-j}\eta_j\end{aligned}$$

Ainsi, $\text{pr}_{\hat{Y}}(\tilde{\mathcal{T}}_1^*(g_{2,k_2})) = q^{k_2}(1 - q^{k_1})w_1 + w_2$ et donc $\tilde{\tau}_1^{2*}(g_2) = q^{k_2}(1 - q^{k_1})g_1 + g_2$.

- Regardons $\tilde{\mathcal{T}}_1^*(g_{n,k_n}) = \alpha^* \circ \beta^*(\eta_{k_0})$. On peut calculer que :

$$\tilde{\mathcal{T}}^*(g_{n,k_n}) = \eta_{k_0} + \sum_{j=1}^{k_1-1} (1 - q^{k_2})\eta_j + (1 - q^{k_2})\eta_{k_1} + \sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2-1} (1 - q^{k_1+k_2-j})\eta_j.$$

Ainsi $\text{pr}_{\hat{Y}}(\tilde{\mathcal{T}}^*(g_{n,k_n})) = w_n + (1 - q^{k_2})w_1$ et donc $\tilde{\tau}_1^{2*}(g_n) = g_n + (1 - q^{k_2})g_1$.

- Pour $i \neq n, 1, 2$, on peut vérifier par le calcul que la projection de $\tilde{\mathcal{T}}^*(g_{i,k_i})$ sur $H^1(\hat{X})_q$, correspond à w_i et donc $\tilde{\tau}_1^{2*}(g_i) = g_i$.

On généralise ces calculs pour tout τ_i^2 ce qui nous donne la formule annoncée dans le théorème. \square

On a ainsi déterminé l'action d'une tresse τ_i^2 sur les générateurs g_1, \dots, g_n de $H^1(\hat{X})_q$. On veut maintenant trouver une formule générale pour exprimer l'action des τ_i^2 , on verra notamment que si $q^{k_i+k_{i+1}} \neq 1$, τ_i^2 agit comme une réflexion complexe d'ordre fini.

8.2.3 Formule générale pour l'action de τ_i^2 sur $H^1(\hat{X})_q$

Le résultat précédent 8.2.6 nous permet de trouver les formules annoncées au début du chapitre dans le théorème 8.0.1, que l'on rappelle ici :

Formules du théorème 8.0.1

$$\forall x \in H^1(\hat{X})_q, \quad \tilde{\tau}_i^{2*}(x) = x - \iota \frac{(1 - q^{k_i})(1 - q^{k_{i+1}})}{(1 - q)(1 - \bar{q})} \langle x; g_i \rangle g_i$$

Lorsque de plus $q^{k_i+k_{i+1}} \neq 1$, τ_i^2 agit comme une réflexion complexe :

$$\forall x \in H^1(\hat{X})_q, \quad \tilde{\tau}_i^{2*}(x) = x - (1 - q^{k_i+k_{i+1}}) \frac{\langle x; g_i \rangle}{\langle g_i; g_i \rangle} g_i$$

Démonstration : Fixons un $i \in \{1, \dots, n\}$. On évalue l'expression annoncée sur g_{i-1} , g_i , g_{i+1} et g_j pour $|j - i| > 1$.

- $g_{i-1} - \iota \frac{(1 - q^{k_i})(1 - q^{k_{i+1}})}{(1 - q)(1 - \bar{q})} \langle g_{i-1}; g_i \rangle g_i$
 $= g_{i-1} - \iota \frac{(1 - q^{k_i})(1 - q^{k_{i+1}})}{(1 - q)(1 - \bar{q})} \times (-\iota) \frac{\bar{q}(1 - q)^2}{1 - q^{k_i}} g_i$
 $= g_{i-1} + (1 - q^{k_{i+1}})g_i = \tilde{\tau}_i^{2*}(g_{i-1})$
- $g_i - \iota \frac{(1 - q^{k_i})(1 - q^{k_{i+1}})}{(1 - q)(1 - \bar{q})} \langle g_i; g_i \rangle g_i$
 $= g_i - \iota \frac{(1 - q^{k_i})(1 - q^{k_{i+1}})}{(1 - q)(1 - \bar{q})} \times (-\iota) \frac{(1 - q)(1 - \bar{q})(1 - q^{k_i+k_{i+1}})}{(1 - q^{k_i})(1 - q^{k_{i+1}})} g_i$
 $= q^{k_i+k_{i+1}} g_i = \tilde{\tau}_i^{2*}(g_i)$
- $g_{i+1} - \iota \frac{(1 - q^{k_i})(1 - q^{k_{i+1}})}{(1 - q)(1 - \bar{q})} \langle g_{i+1}; g_i \rangle g_i$
 $= g_{i+1} - \iota \frac{(1 - q^{k_i})(1 - q^{k_{i+1}})}{(1 - q)(1 - \bar{q})} \times (-\iota) \frac{q^{k_{i+1}}\bar{q}(1 - q)^2}{1 - q^{k_{i+1}}} g_i$
 $= g_{i+1} + q^{k_{i+1}}(1 - q^{k_i})g_i = \tilde{\tau}_i^{2*}(g_{i+1})$

Pour $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|j - i| > 1$, on a : $\langle g_j; g_i \rangle = 0$ et donc la formule est valable dans ce cas aussi. Comme (g_1, \dots, g_n) engendre $H^1(\hat{X})_q$, on a bien :

$$\forall x \in H^1(\hat{X})_q, \quad \tilde{\tau}_i^{2*}(x) = x - \iota \frac{(1 - q^{k_i})(1 - q^{k_{i+1}})}{(1 - q)(1 - \bar{q})} \langle x; g_i \rangle g_i.$$

De plus, en supposant maintenant que $q^{k_i+k_{i+1}} \neq 1$, on a $\langle g_i; g_i \rangle \neq 0$ et on peut alors voir que :

$$\begin{aligned} -\frac{(1 - q^{k_i+k_{i+1}})}{\langle g_i; g_i \rangle} &= -\frac{(1 - q^{k_i+k_{i+1}})}{-\iota \frac{(1-q)(1-\bar{q})(1-q^{k_i+k_{i+1}})}{(1-q^{k_i})(1-q^{k_{i+1}})}} \\ &= -\iota \frac{(1 - q^{k_i})(1 - q^{k_{i+1}})}{(1 - q)(1 - \bar{q})} \end{aligned}$$

Ainsi on a donc : $\forall x \in H^1(\hat{X})_q$,

$$\tilde{\tau}_i^{2*}(x) = x - \iota \frac{(1 - q^{k_i})(1 - q^{k_{i+1}})}{(1 - q)(1 - \bar{q})} \langle x; g_i \rangle g_i = x - (1 - q^{k_i+k_{i+1}}) \frac{\langle x; g_i \rangle}{\langle g_i; g_i \rangle} g_i$$

et on retrouve bien les formules attendues dans le théorème 8.0.1. \square

Ce théorème généralise également le résultat 2.2.15 de McMullen qui nous dit que, dans son cas où les k_i sont tous égaux à 1, pour $q^2 \neq 1$, les τ_i agissent comme des réflexions complexes.

L'expression de l'action des τ_i^2 donnée dans le théorème précédent 8.2.6 nous permet de montrer que les $\tilde{\tau}_i^{2*}$ sont d'ordres finis. La proposition suivante nous permet de finir la démonstration du théorème 8.0.1.

Proposition 8.2.7. *Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\tilde{\tau}_i^{2*}$ est d'ordre m_i où m_i est l'ordre de $k_i + k_{i+1}$ dans $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ si $q^{k_i+k_{i+1}} \neq 1$, et τ_i^2 est unipotent sinon.*

Démonstration : Supposons que $q^{k_i+k_{i+1}} \neq 1$, alors $\langle g_i; g_i \rangle \neq 0$ et on peut trouver une base de $H^1(\hat{X})_q$ sous la forme $(g_i, v_1, \dots, v_{n-\varepsilon_0-2})$, où $(v_1, \dots, v_{n-\varepsilon_0-2})$ engendre $\langle g_i \rangle^\perp$. La matrice de $\tilde{\tau}_i^{2*}$ dans cette base est alors :

$$\begin{pmatrix} q^{k_i+k_{i+1}} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

où les espaces laissés vides sont des 0. L'ordre de cette matrice est exactement l'ordre m_i de $k_i + k_{i+1}$ dans $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Lorsque $q^{k_i+k_{i+1}} = 1$, on a :

$$\tilde{\tau}_i^{2*}(g_j) = \begin{cases} g_i & \text{si } j = i \\ g_{i+1} + (q^{k_{i+1}} - 1)g_i & \text{si } j = i + 1 \\ g_{i-1} + (1 - q^{k_{i+1}})g_i & \text{si } j = i - 1 \\ g_j & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque $\sum_{i=1}^n g_i = 0$, on peut extraire de la famille génératrice (g_1, \dots, g_n) une base de $H^1(\hat{X})_q$ dont les trois premiers termes sont g_i, g_{i+1} et g_{i-1} . Alors la matrice de $\tilde{\tau}_i^{2*}$ dans cette base est de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & q^{k_{i+1}} - 1 & 1 - q^{k_{i+1}} & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est unipotente donc $\widetilde{\tau}_i^{2*}$ est unipotent. \square

On a donc bien démontré le théorème 8.0.1. On peut à présent s'intéresser à l'irréductibilité des représentations ρ_q .

8.3 Irréductibilité de l'action de PB_n sur $U(H^1(\hat{X})_q)$

Pour $q = e^{-\frac{2i\pi k}{d}} \neq 1$, on considère la représentation ρ_q construite précédemment. On veut montrer que la représentation ρ_q est irréductible. Fixons $W \subset H^1(\hat{X})_q$ un sous-espace stable par ρ_q tel que $W \neq \{0\}$. On peut alors montrer que :

Lemme 8.3.1. *S'il existe un indice $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $g_i \in W$, alors $W = H^1(\hat{X})_q$.*

Démonstration : Fixons un indice $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $g_i \in W$. Alors :

$$\widetilde{\tau}_{i+1}^{2*}(g_i) = g_i + (1 - q^{k_{i+1}})g_{i+1}$$

Remarquons ici que si $i = n$, alors l'élément noté g_{i+1} dans l'expression ci-dessus est en fait g_1 . Or w est stable par ρ_q , donc $\widetilde{\tau}_{i+1}^{2*}(g_i) \in W$ donc $(1 - q^{k_{i+1}})g_{i+1} \in W$. Comme $q^{k_{i+1}} \neq 1$, on a bien $g_{i+1} \in W$.

En raisonnant successivement, on peut montrer que tout les g_1, \dots, g_n sont dans W et ainsi $W = H^1(\hat{X})_q$. \square

Lemme 8.3.2. *Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\widetilde{\tau}_i^{2*}$ laisse invariant l'orthogonal de $\langle g_i \rangle$.*

Démonstration : Soient $i \in \{1, \dots, n\}$ et $y_i \in \langle g_i \rangle^\perp$. D'après le théorème 8.0.1, on sait que $\widetilde{\tau}_i^{2*}(y_i) = y_i - \iota \frac{(1-q^{k_i})(1-q^{k_{i+1}})}{(1-q)(1-\bar{q})} \langle y_i; g_i \rangle g_i$. Comme $\langle y_i; g_i \rangle = 0$, on a $\widetilde{\tau}_i^{2*}(y_i) = y_i$. Ainsi le lemme est démontré. \square

Remarquons alors que :

Lemme 8.3.3. $\cap_{i=1}^n (\langle g_i \rangle)^\perp = \{0\}$.

Démonstration : En effet, si $x \in \cap_{i=1}^n (\langle g_i \rangle)^\perp \setminus \{0\}$, pour tout $y \in H^1(\hat{X})_q$, y s'écrit comme une combinaison linéaire des g_1, \dots, g_n et donc $\langle x; y \rangle = 0$. Cela contredit le fait que la forme d'intersection est non dégénérée. \square

On peut maintenant démontrer du théorème 8.0.2 :

Démonstration du théorème 8.0.2 : Considérons un élément $w \in W \setminus \{0\}$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on peut appliquer $\widetilde{\tau}_i^{2*}$ à w . D'après le théorème 8.0.1 on a :

$$\begin{aligned} \widetilde{\tau}_i^{2*}(w) &= w - \iota \frac{(1-q^k)(1-q^{k_{i+1}})}{(1-q)(1-\bar{q})} \langle w, g_i \rangle g_i \\ \Rightarrow \underbrace{\widetilde{\tau}_i^{2*}(w)}_{\in W} - w &= \underbrace{-\iota \frac{(1-q^k)(1-q^{k_{i+1}})}{(1-q)(1-\bar{q})} \langle w, g_i \rangle g_i}_{\neq 0} \end{aligned}$$

Si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\langle w, g_i \rangle = 0$, alors w est orthogonal à chacun des g_i , donc $w \in \bigcap_{i=1}^n \langle g_i \rangle^\perp = \{0\}$, ce qui contredit $w \in W \setminus \{0\}$. Ainsi, il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que : $\langle w, g_i \rangle \neq 0$, donc $g_i \in W$ et par le lemme 8.3.1 $W = H^1(\hat{X})_q$. Finalement, la représentation ρ_q est irréductible et le théorème 8.0.2 est démontré. \square

Dans ce chapitre, nous avons explicité l'action des tresses τ_i^2 sur $H^1(\hat{X})_q$, les formules obtenues nous ont permis de montrer que les représentations ρ_q sont irréductibles. Dans le chapitre suivant, nous allons utiliser les résultats trouvés pour les $\tau_i^2 = \alpha_{i,i+1}$, et les étendre à tous les générateurs $\alpha_{i,j}$ de PB_n . Pour cela, en considérant un couples d'indice $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ tel que $i < j$, nous verrons comment choisir une indexation des points marqués b_1, \dots, b_n pour obtenir une nouvelle famille génératrice de $H^1(\hat{X})_q$, dans laquelle l'action de $\alpha_{i,j}$ est donnée par les formules du théorème 8.0.1. Nous montrerons comment passer d'une famille génératrice de $H^1(\hat{X})_q$ à l'autre pour expliciter l'action de tous les $\alpha_{i,j}$ sur une même famille génératrice. Cela nous permettra d'obtenir les matrices des $\widetilde{\alpha}_{i,j}^*$ et démontrer alors que, sous certaines conditions, l'image $\rho_q(PB_n)$ est Zariski dense dans un certain groupe unitaire.

Chapitre 9

Action des $\alpha_{i,j}$ sur $H^1(\hat{X})_q$

Dans cette partie, nous allons reprendre une partie du travail réalisé précédemment pour déterminer l'action des tresses $\alpha_{i,j}$ sur $H^1(\hat{X})_q$. Rappelons que les $\alpha_{i,j}$ sont les générateurs de PB_n , définis dans 2.1.4, chaque $\alpha_{i,j}$ est un conjugué de τ_i^2 . Pour cela, nous étudions l'action des $\widetilde{\alpha}_{i,j}^*$ sur les générateurs g_1, \dots, g_n de $H^1(\hat{X})_q$ trouvés dans la partie précédente. En remarquant qu'une tresse $\alpha_{i,j}$ agit comme un twist de Dehn de support un disque contenant b_i et b_j , nous changeons l'indexation des points marqués de sorte que b_i et b_j soient indexés successivement. Le changement d'indexation induit la construction d'une nouvelle famille génératrice, sur laquelle l'expression de $\widetilde{\alpha}_{i,j}^*$ est donnée par celle de τ_i^2 comme dans le théorème 8.0.1. En passant d'une famille génératrice à l'autre, on est en mesure de déterminer l'action de n'importe quel générateur $\alpha_{i,j}$ de PB_n sur la famille génératrice (g_1, \dots, g_n) de $H^1(\hat{X})_q$. Nous en déduisons le résultat suivant :

Théorème 9.0.1. *Pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}$ tel que $i < j$, l'action de $\alpha_{i,j}$ sur $H^1(\hat{X})_q$ est donnée par :*

$$\forall x \in H^1(\hat{X})_q, \quad \widetilde{\alpha}_{i,j}^*(x) = x - \iota \frac{(1 - q^{k_i})(1 - q^{k_j})}{(1 - q)(1 - \bar{q})} \langle x; g'_i \rangle g'_i$$

où $g'_i = g_i + \sum_{l=i+1}^{j-1} \bar{q}^{\sum_{r=i+1}^l k_r} g_l$.

Si $q^{k_i+k_j} \neq 1$, alors $\alpha_{i,j}$ agit comme une réflexion complexe d'expression :

$$\forall x \in H^1(\hat{X})_q, \quad \widetilde{\alpha}_{i,j}^*(x) = x - (1 - q^{k_i+k_j}) \frac{\langle x; g'_i \rangle}{\langle g'_i, g'_i \rangle} g'_i.$$

Dans ce cas, $\widetilde{\alpha}_{i,j}^*$ est d'ordre fini. Sinon, $\widetilde{\alpha}_{i,j}^*$ est unipotent.

9.1 Dépendance de la famille génératrice au choix de l'indexation des points complexes marqués

Nous expliquons ici comment le choix d'une indexation des points marqués détermine la construction d'une famille génératrice, et comment choisir une indexation convenable pour aborder n'importe quelle tresse $\alpha_{i,j}$ comme un twist de Dehn dont l'étude a déjà été faite dans le chapitre précédent.

9.1.1 Conséquences du choix de l'indexation sur la construction des générateur de $H^1(\hat{X})_q$

Rappelons que la surface \hat{X} est obtenue par le processus de normalisation standard de la courbe algébrique :

$$y^d = \prod_{i=1}^n (x - b_i)^{k_i}.$$

Le produit étant commutatif, l'indexation des n points marqués ne change que quelque notation dans la construction de \hat{X} , mais pas la surface elle-même.

Une indexation fixée (b_1, \dots, b_n) nous permet de définir les disques D_i , contenant les points b_i et b_{i+1} mais aucun autre des points marqués. A partir d'un disque D_i , on considère sa pré-image $X_i \subset \hat{X}$ et le générateur g_i de $H_c^1(X_i)_q$. Ainsi la famille génératrice va dépendre du choix de l'indexation des points marqués.

Par exemple, sur la figure 9.1, nous avons représenté quatre points marqués, indexés différemment à droite et à gauche. Pour la première indexation, à gauche sur la figure, X_1 représente la pré-image d'un disque entourant les deux premiers points. Pour la seconde indexation, à droite, X_1 représente maintenant la pré-image d'un disque tracé en pointillé, bien distinct du disque dessiné à gauche. Ainsi, d'une indexation à l'autre, les notations X_i ne désignent pas forcément les mêmes surfaces. Comme g_i est le générateur de $H_c^1(X_i)_q$, il dépend fortement du choix de l'indexation. En particulier, une indexation donnée (b_1, \dots, b_n) va définir une famille génératrice (g_1, \dots, g_n) qui ne sera pas la même que pour une autre indexation (b'_1, \dots, b'_n) .

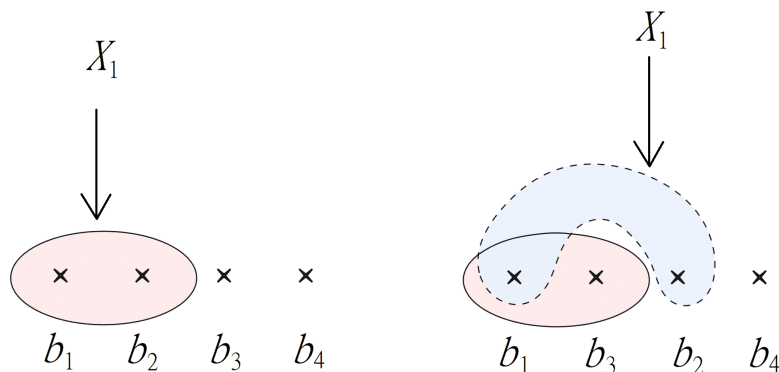


FIGURE 9.1 – Le choix d'une indexation pour les points marqués détermine les sous-surfaces notées X_i de \hat{X}

De même que pour D_i , la tresse τ_i^2 est définie comme étant le twist de Dehn de support D_i , ainsi la notation τ_i^2 ne représentera plus forcément la même tresse dans deux indexations différentes. Sur la figure 9.2, on représente quatre points marqués dans un disque complexe, que l'on indexe différemment à droite et à gauche. Alors la tresse τ_1^2 dans l'indexation de gauche ne correspond pas à la tresse notée également τ_1^2 dans l'indexation de droite.

En particulier, on remarque sur la figure 9.2 que la tresse τ_1^2 dans la seconde indexation correspond à la tresse $\alpha_{1,3}$ pour la première indexation. Ainsi, pour un couple $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ donné tel que $i < j$, en choisissant correctement une nouvelle indexation pour les points marqués, la tresse $\alpha_{i,j}$ s'interprétera comme un τ_i^2 pour la nouvelle indexation.

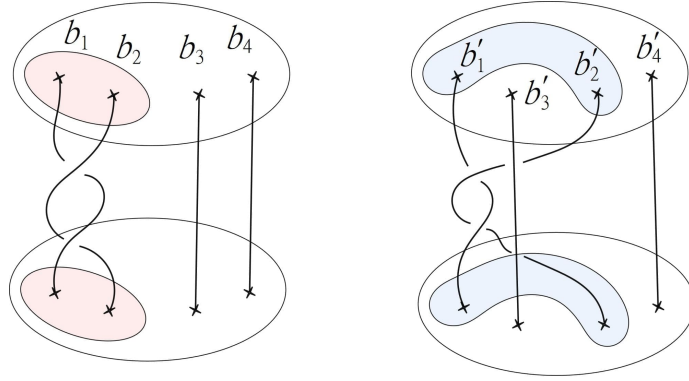


FIGURE 9.2 – La tresse notée τ_1^2 dans l’indexation (b_1, b_2, b_3, b_4) à gauche et dans l’indexation (b_1, b_3, b_2, b_4) à droite

9.1.2 Choix d’une indexation adaptée à un $\alpha_{i,j}$

On fixe une indexation initiale (b_1, \dots, b_n) et sa famille génératrice associée (g_1, \dots, g_n) . Pour un couple $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, avec $i < j$, on regarde la tresse $\alpha_{i,j}$ sur la figure 9.3. La partie droite de la figure représente une déformation possible qui nous permet de voir $\alpha_{i,j}$ comme un twist de Dehn. Ce dessin intuitif suggère que si l’ordre d’indexation était tel que b_j soit indexé successivement à b_i , alors la tresse $\alpha_{i,j}$ s’interpréterait comme τ_i^2 .

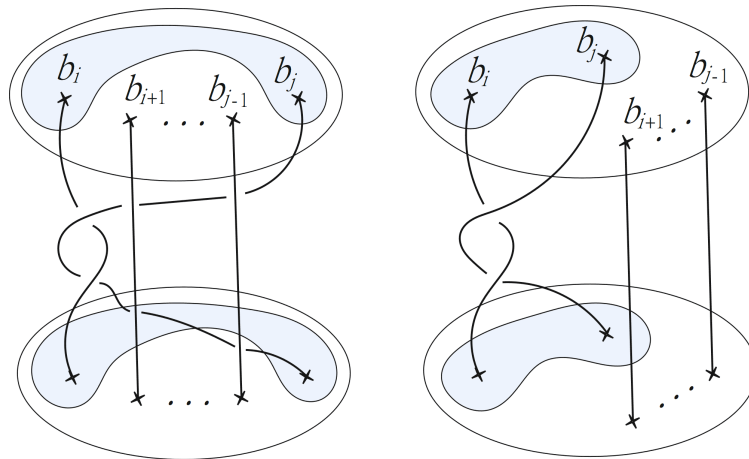


FIGURE 9.3 – Interprétation de $\alpha_{i,j}$ comme un twist de Dehn lorsque le point b_j est indexé à la suite de b_i

Proposition 9.1.1. *Pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}$ tel que $i < j$, la tresse notée $\alpha_{i,j}$ dans l’indexation initiale (b_1, \dots, b_n) correspond au twist de Dehn τ_i^2 pour l’indexation $(b'_1, \dots, b'_n) = (b_1, \dots, b_i, b_j, b_{i+1}, \dots, b_{j-1}, b_{j+1}, \dots, b_n)$.*

Démonstration : Il s’agit là de formaliser l’idée intuitive présentée plus haut sur le dessin 9.3. Fixons un couple $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ tels que $i < j$. Évidemment, si $j = i + 1$, les deux indexations de l’énoncé sont identiques et la tresse $\alpha_{i,i+1}$ est en fait la tresse τ_i^2 , il n’y a donc rien à démontrer.

Supposons alors que $j > i + 1$. Montrons que la tresse $\alpha_{i,j}$ correspond à un twist de Dehn de support un disque $D_{i,j}$ contenant les points b_i et b_j mais aucun autres points marqués. Pour cela, nous utiliserons la représentation de $\alpha_{i,j}$ comme un homéomorphisme du disque $D \subset \hat{\mathbb{C}}$ contenant tous les points marqués. Pour simplifier le dessin, nous supposerons ici

$j = i + 2$. On représente sur 9.4 les trois points b_i, b_{i+1} et b_j , et on applique successivement les tresses $\tau_{i+1}^{-1}, \tau_i, \tau_i$ et τ_{i+1} pour obtenir la déformation induite par $\alpha_{i,j} = \tau_{i+1}\tau_i^2\tau_{i+1}^{-1}$.

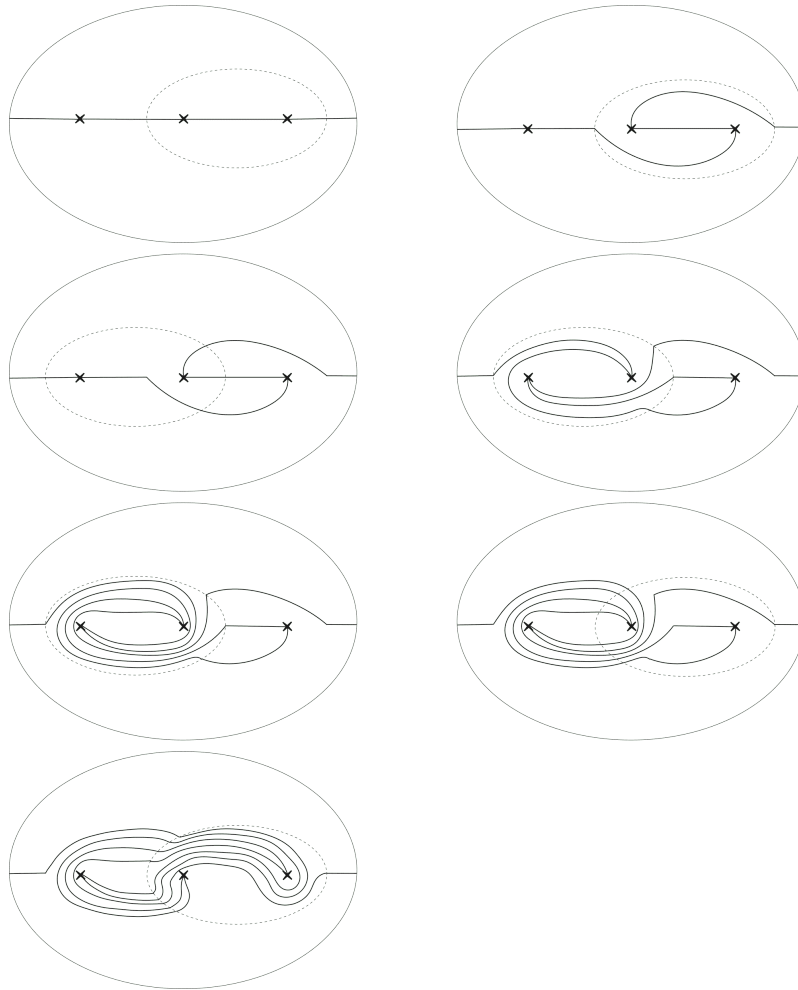


FIGURE 9.4 – Application de $\alpha_{i,i+2}$

Alors le point central b_{i+1} est laissé fixe par $\alpha_{i,j}$, il n'est pas dans le support de $\alpha_{i,j}$. On peut donc considérer que les chemins le rejoignant sont joints entre eux mais ne sont plus fixés à ce point marqué. Par homotopie, on peut déformer ce chemin, tracé en rouge sur l'illustration 9.5, pour voir que $\alpha_{i,j}$ correspond bien à un twist de Dehn de support $D_{i,j}$.

□

Ainsi, par la suite, lorsqu'on étudiera une des tresses $\alpha_{i,j}$ engendrant PB_n , on considérera son indexation associée, construite comme dans la proposition 9.1.1 ci-dessus. Cette nouvelle indexation permet de construire une nouvelle famille génératrice. On s'intéresse alors au passage de la famille initiale à l'autre et inversement.

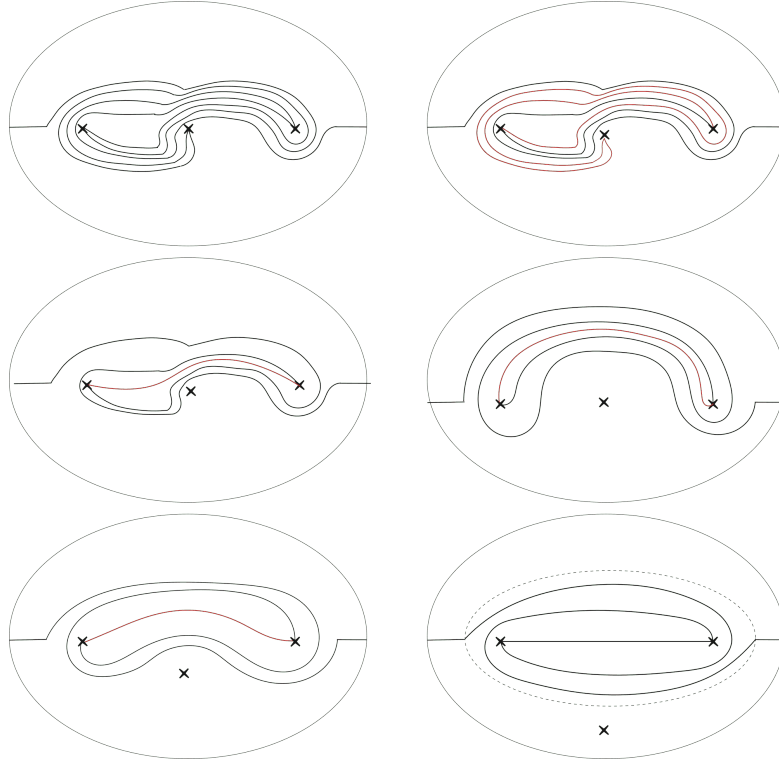


FIGURE 9.5 – Interprétation de $\alpha_{i,i+2}$ comme un twist de Dehn

9.2 Passage d'une famille génératrice de $H^1(\hat{X})_q$ à une autre

On fixe une première indexation (b_1, \dots, b_n) . Cette indexation détermine la famille génératrice (g_1, \dots, g_n) du théorème 7.0.1. D'après ce qui précède, pour une nouvelle indexation (b'_1, \dots, b'_n) , nous obtenons une nouvelle famille génératrice (g'_1, \dots, g'_n) . Les cas qui nous intéressent sont ceux des indexations permettant de voir un $\alpha_{i,j}$ comme un τ_i^2 . On veut alors pouvoir passer de la famille initiale à une nouvelle famille et réciproquement.

On rappelle qu'au voisinage de b_i on dispose de k_i points distincts $b_{i,1}, \dots, b_{i,k_i}$, on peut choisir $b_{i,1} = b_i$. Pour retrouver les résultats du chapitre 3, on va supposer, sans perte de généralité, que les $b_{i,j}$ sont des racines k_0 -ième de l'unité, avec $\beta_{i,j} = (e^{\frac{2i\pi}{k_0}})^{\sum_{l=1}^{i-1} k_l + j}$. De même, au voisinage de b'_i on dispose de k'_i points distincts $b'_{i,1}, \dots, b'_{i,k'_i}$, on peut choisir $b'_{i,1} = b'_i$. D'après les résultats du chapitre 7, on sait que chaque g_l s'identifie à la projection orthogonale d'un élément $w_l \in H^1(\hat{Y})_q$ sur $H_c^1(Y')_q$, où w_l est une combinaison linéaire des générateurs $g_{i,j}$ de $H_c^1(\hat{Y})_q$. On cherche donc des relations entre des $g_{i,j}$ et les $g'_{i,j}$, les générateurs de $H^1(\hat{Y})_q$ du théorème 2.2.11 pour la nouvelle indexation. Chaque $g_{i,j}$ est le dual de Poincaré d'une 1-chaîne d'après 3.0.1, qui s'écrit en fonction des relevés du chemin entre $b_{i,j}$ et $b_{i,j+1}$ si $j \neq k_i$, et entre b_{i,k_i} et $b_{i+1,1}$ sinon. En considérant les chemins entre les points d'indexation successives de $\{b_{i,j} | i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, k_i\}\}$ et les chemins entre les points d'indexation successives de $\{b'_{i,j} | i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, k'_i\}\}$, on trouve des relations en homologie entre les duaux des $g_{i,j}$ et des $g'_{i,j}$, et enfin des relations entre les g_l et les g'_l .

On considère les chemins entre deux points d'indexation successive, pour cela on va noter :

- $\beta_{\sum_{i=1}^{i-1} k_{i+j}} := b_{i,j}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et pour tout $j \in \{1, \dots, k_i\}$. Pour simplifier encore ces notations, on pose : $\sigma_l^m := \sum_{r=l}^m k_r$, ainsi $\beta_{\sigma_1^{i-1}+j} := b_{i,j}$. On a alors

$$\beta_l = (e^{i \frac{2i\pi}{k_0}})^l$$

- $\eta_l : \beta_l \rightsquigarrow \beta_{l+1}$ le chemin de β_l à β_{l+1} sur le bord du disque unité.

Pour tout $l \in \{1, \dots, k_0\}$, on note $\eta_{l,0}, \dots, \eta_{l,d-1}$ les $d-1$ relevés de η_l tels que : pour tout $m \in \{0, \dots, d-1\}$, $T^m(\eta_{l,0}) = \eta_{l,m}$. D'après le théorème 3.0.1, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et pour tout $j \in \{1, \dots, k_i\}$, l'élément $g_{i,j}$ est le dual de Poincaré de $\lambda \mathbf{c}_{i,j} = \lambda \sum_{m=0}^{d-1} q^m \eta_{\sigma_1^{i-1}+j,m}$, où $\lambda = \frac{2\sqrt{1-\text{Re}(q)}}{\sqrt{d}}$.

Fixons à présent un couple d'indice $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ tel que $i < j$. On sait d'après 9.1.1 que $\alpha_{i,j}$ agit comme l'élément τ_i^2 sur la famille génératrice (g'_1, \dots, g'_n) obtenue avec l'indexation :

$$(b'_1, \dots, b'_n) = (b_1, \dots, b_i, b_j, b_{i+1}, \dots, b_{j-1}, b_{j+1}, \dots, b_n).$$

La surface \hat{X} est obtenue à partir de la courbe algébrique $y^d = \prod_{l=1}^n (x - b'_l)^{k'_l}$ avec : $k'_{i+1} = k_j$, $k'_h = k_{h-1}$ pour $h \in \{i+1, \dots, j\}$ et $k_l = k'_l$ pour tous les autres indices.

De même que précédemment, on va considérer les points $b'_{l,1}, \dots, b'_{l,k_l}$ au voisinage de chaque b'_l avec $b'_l = b'_{l,0}$, et on va noter :

- $\beta'_{\theta_1^{l-1}+h} := b'_{l,h}$ pour tout $l \in \{1, \dots, n\}$ et pour tout $h \in \{1, \dots, k'_l\}$, avec $\theta_1^{l-1} = \sum_{m=1}^{l-1} k'_m$.
- $\eta'_l : \beta'_l \rightsquigarrow \beta'_{l+1}$ le chemin de β'_l à β'_{l+1} .

Pour tout $l \in \{1, \dots, k_0\}$, on note $\eta'_{l,0}, \dots, \eta'_{l,d-1}$ les $d-1$ relevés de η'_l tels que : $\eta'_{1,0} = \eta_{1,0}$ et pour tout $m \in \{0, \dots, d-1\}$, $T^m(\eta'_{l,0}) = \eta'_{l,m}$. L'élément $g'_{l,h}$ est le dual de Poincaré de $\lambda \mathbf{c}'_{l,h} = \lambda \sum_{m=0}^{d-1} q^m \eta'_{\theta_1^{l-1}+h,m}$, où $\lambda = \frac{2\sqrt{1-\text{Re}(q)}}{\sqrt{d}}$.

Pour exprimer l'action de $\alpha_{i,j}$ sur les générateurs g_1, \dots, g_n , on a besoin de passer de la famille (g_1, \dots, g_n) à la famille (g'_1, \dots, g'_n) , sur laquelle on connaît l'expression de l'action de $\alpha_{i,j}$. Rappelons également qu'on a la décomposition orthogonale $H^1(\hat{Y})_q \simeq H_c^1(Y')_q \oplus (\oplus_{i=1}^n H_c^1(Y'_i)_q)$ où $H_c^1(Y')_q \simeq H^1(\hat{X})_q$. On a toujours le morphisme surjectif donné par :

$$\begin{aligned} \phi_{\hat{X}} : H^1(\hat{Y})_q &\rightarrow H^1(\hat{X})_q \\ g_{i,j} &\mapsto \begin{cases} g_i & \text{si } j = k_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

obtenu par la projection orthogonale de $H^1(\hat{Y})_q$ sur $H_c^1(Y')_q$ et l'identification $H_c^1(Y')_q \simeq H^1(\hat{X})_q$. On assimilera donc $\phi_{\hat{X}}$ à une projection. Les éléments $g_{l,h}$, respectivement $g'_{l,h}$, se projettent sur 0 dans $H^1(\hat{X})_q$ pour $h \neq k_l$, respectivement $h \neq k'_l$, et sur g_l sinon, respectivement g'_l . Pour obtenir des relations entre les éléments g_1, \dots, g_n et les g'_1, \dots, g'_n , on cherche donc des relations entre les $g_{l,h}$ et les $g'_{l,h}$, que l'on obtient via l'homologie, et que l'on projette sur $H^1(\hat{X})_q$.

9.2.1 Relations en homologie entre les duaux des générateurs de $H_1(\hat{Y})_{\bar{q}}$

On dispose sur le bord du disque unité les points $b_{i,j} = \beta_{\sigma_1^{i-1}+j}$ indexés successivement de gauche à droite. On relie alors ces points avec les chemins η_l , la concaténation $\eta_1, \dots, \eta_{k_0}$

forme le bord du disque unité, et délimite ainsi un disque D_∞ contenant le point ∞ et d'un disque $D = \hat{\mathbb{C}} \setminus D_\infty$, il s'agit du disque à gauche sur l'image ci-dessous. De même, on peut également relier les points $b_{i,j}$ par les chemins η'_i , la concaténation $\eta'_1, \dots, \eta'_{k_0}$ forme le bord d'un nouveau disque topologique D' ne contenant pas ∞ , représenté à droite sur l'image ci-dessous.

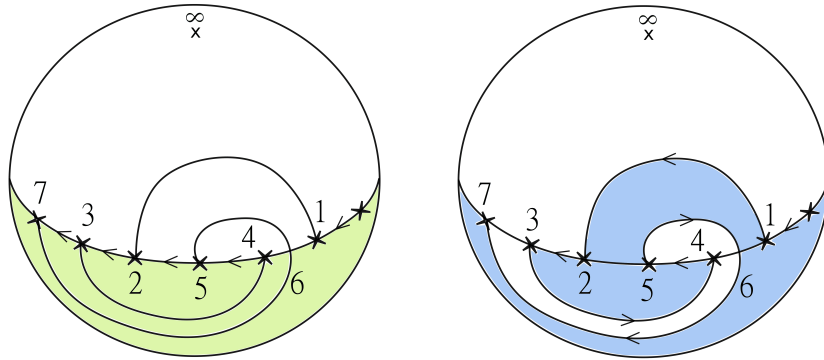


FIGURE 9.6 – A gauche le disque D dont le bord est donné par les chemins $\eta_1, \dots, \eta_{k_0}$, à droite le disque D' dont le bord est donné par les chemins $\eta'_1, \dots, \eta'_{k_0}$. Les intersections numérotées seront étudiées localement par la suite, on y fera référence sur les illustrations suivantes en utilisant cette numérotation.

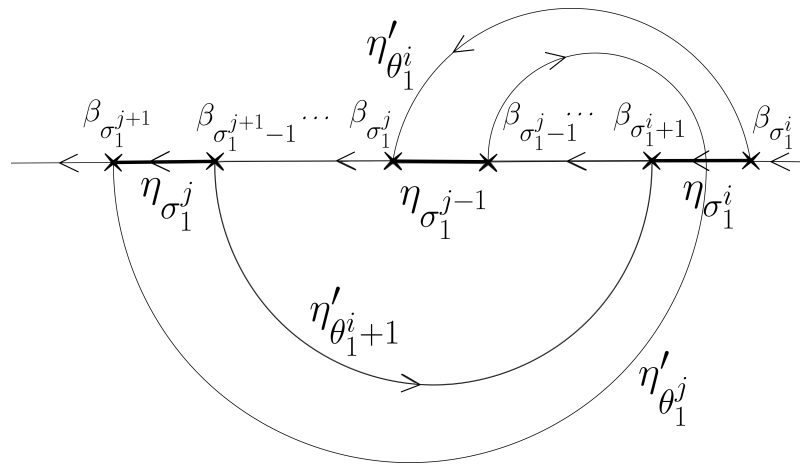


FIGURE 9.7 – Agrandissement de la figure précédente autour des points $b_{\sigma_1^i} = b_{i,k_1}, \dots, b_{\sigma_1^{j+1}} = b_{j+1,1}$

On relève dans \hat{Y} les disques D et D_∞ ainsi que le disque D' . On introduit donc les notations suivantes :

- Soient E_0, \dots, E_{d-1} les relevés de D vérifiant : $\eta_{l,0} \in \partial E_0$ pour tout $l \in \{1, \dots, k_0\}$, et pour tout $m \in \{0, \dots, d-1\}$, $T^m(E_0) = E_m$.
- Soient S_0, \dots, S_{e_0-1} les relevés de D_∞ de sorte que : $\eta_{1,0} \in \partial S_0$ et pour tout $m \in \{1, \dots, e_0-1\}$, $T^m(S_0) = S_m$.
- Soient E'_0, \dots, E'_{d-1} les relevés de D' vérifiant : $\eta'_{l,0} \in \partial E'_0$ pour tout $l \in \{1, \dots, k_0\}$, et pour tout $m \in \{0, \dots, d-1\}$.

Lemme 9.2.1. *Pour tout $l \in \{1, \dots, k_0\}$ et pour tout $m \in \{0, \dots, d-1\}$, on a $\eta_{l,m} \in \partial S_{m-l+1 \pmod{e_0}}$.*

Démonstration : En effet, au voisinage de la pré-image q_2 de β_2 dans \hat{Y} , T agit comme une rotation d'angle $\frac{2\pi}{d}$, et les relevés de η_2 forment un angle de $\frac{\pi}{d}$ avec ceux de η_1 . Comme $\eta_{1,0} \in \partial E_0 \cap \partial S_0$, on en déduit le schéma 9.8.

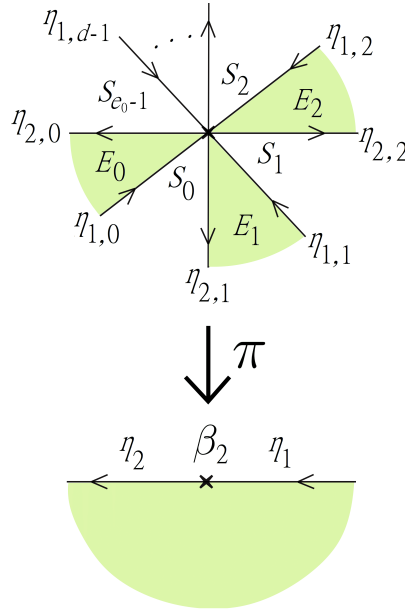


FIGURE 9.8 – Étude locale des $\eta_{1,0}, \dots, \eta_{1,d-1}$ et $\eta_{2,0}, \dots, \eta_{2,d-1}$ au voisinage de q_2

En ré-itérant ce schéma, on voit que $\eta_{l,l-1 \pmod{d}} \in \partial S_0$ pour tout $l \in \{1, \dots, k_0\}$, et donc $\eta_{l,l-1+\alpha e_0 \pmod{d}} \in \partial S_0$ pour tout $\alpha \in \{0, \dots, d-1\}$. On en déduit : $\eta_{l,h} \in \partial S_{h-l+1 \pmod{e_0}}$ pour tout $l \in \{1, \dots, k_0\}$. □

Lemme 9.2.2. *Le relevé E'_0 de D' est une réunion d'une partie de E_0 , d'une partie de $S_{l_0 \pmod{e_0}}$ et d'une partie de $E_{m_0 \pmod{d}}$, avec : $l_0 = 1 - \sigma_1^i$ et $m_0 = \sigma_{i+1}^{j-1}$.*

Démonstration : On a : $D' = (D' \cap D) \cup (D' \cap (D_\infty \cup \partial D_\infty))$. L'intersection $D \cap D'$ est une réunion disjointe de deux disques. Notons D_1 et D_2 ces deux disques, de sorte que η_1 soit sur le bord de D_1 et $\eta_{\sigma_1^{j-1}}$ soit sur le bord de D_2 . D'autre part, $D' \cap D_\infty$ est un disque que l'on note D_3 . Alors le relevé E'_0 de D' est formé d'un certain relevé $D_{1,0}$ de D_1 , d'un certain relevé $D_{2,0}$ de D_2 et d'un certain relevé $D_{3,0}$ de D_3 .

Comme $D_1 \subset D$, on doit avoir $D_{1,0}$ sur l'un des E_0, \dots, E_{d-1} . Or $\eta_{1,0} = \eta'_{1,0} \subset E'_0$, avec $\eta_{1,0} \subset \partial E_0$ et $\eta'_{1,0} \subset \partial E'_0$, on doit donc avoir $D_{1,0} \subset E_0 \cap E'_0$. Puisque $D_3 \subset D_\infty$, on peut

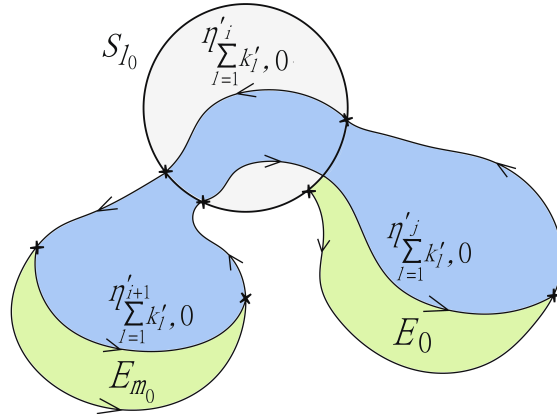


FIGURE 9.9 – Le disque E'_0 rencontre E_0 , S_{l_0} et E_{m_0}

fixer un $l_0 \in \{0, \dots, e_0 - 1\}$ tel que $D_{3,0} \subset S_{l_0}$. Comme $D_{2,0}$ est sur D , on peut fixer $m_0 \in \{0, \dots, d - 1\}$ tel que $D_{2,0} \subset E_{m_0}$.

Pour déterminer les indices l_0 et m_0 , on montre d'abord les relations suivantes :

- $\forall l \in \{1, \dots, \sigma_1^i - 1\} \cup \{\sigma_1^{j+1} + 1, \dots, k_0\}, \forall m \in \{0, \dots, d - 1\},$

$$\eta'_{l,m} = \eta_{l,m}$$

- $\forall h \in \{0, \dots, \sigma_{r=i+1}^j - 1\}, \forall m \in \{0, \dots, d - 1\},$

$$\eta'_{\theta_1^{i+1}+h,m} = \eta_{\sigma_1^{i+h}, m_0+m}.$$

En effet, pour tout $l \in \{1, \dots, \sigma_1^i - 1\} \cup \{\sigma_1^j + 1, \dots, k_0\}$, on a $\eta_l = \eta'_l \in \partial D_1$. Alors $\eta_{l,0}$ et $\eta_{l,0}$ sont deux relevés de η'_l , tout deux sur le bord de $D_{1,0} \subset E'_0 \cap E_0$ donc $\eta_{l,0} = \eta'_{l,0}$. Comme $\eta_{l,m} = T^m(\eta_{l,0})$ et que $\eta'_{l,m} = T^m(\eta'_{l,0})$, on a : $\eta_{l,m} = \eta'_{l,m}$ pour tout $m \in \{0, \dots, e_0 - 1\}$.

D'autre part, pour tout $h \in \{1, \dots, \sigma_{i+1}^{j-1}\}$, on a $\eta_{\sigma_1^{i+h}} = \eta'_{\theta_1^{i+1}+h} \in \partial D_2$. Alors sur le bord de $D_{2,0}$, on aura : $\eta_{\sigma_1^{i+h}, m_0} = \eta'_{\theta_1^{i+1}+h, 0} \in \partial E_{m_0} \cap \partial E'_0$. On en déduit : $\eta'_{\theta_1^{i+1}+h, m} = \eta_{\sigma_1^{i+h}, m_0+m}$.

En étudiant localement les relevés aux points de départ et d'arrivée des chemins $\eta_{\sigma_1^i}$, $\eta_{\sigma_1^{i+1}}$ et $\eta_{\sigma_1^j}$, on peut déterminer les valeurs de l_0 et de m_0 . On regarde au voisinage du relevé de $\beta_{\sigma_1^i}$ les chemins $\eta_{\sigma_1^i, 0}$ et $\eta'_{\theta_1^i, 0}$. C'est la partie droite de la figure 9.10.

D'après le lemme 9.2.1, $\eta_{\sigma_1^i, 0} \subset \partial S_{1-\sigma_1^i \bmod e_0}$. Sur la partie droite de la figure 9.10, on peut voir que $\eta'_{\theta_1^i, 0}$ doit se trouver sur le relevé S_{l_0} bordé par $\eta_{\sigma_1^i, 0}$, c'est-à-dire sur $S_{1-\sum_{l=1}^i \bmod e_0}$ et on pose alors $l_0 = 1 - \sum_{l=1}^i k_l$.

Le chemin $\eta'_{\theta_1^i, 0}$ rencontre une nouvelle fois le bord de S_{l_0} en son point d'arrivée. A l'aide du lemme 9.2.1, on peut voir que, le long de S_{l_0} et à la suite du chemin $\eta_{\sigma_{i=1}^i, 0}$, on retrouve successivement les chemins suivant :

$$\eta_{\sigma_1^{i+1}, 1}, \eta_{\sigma_1^{i+2}, 2}, \dots, \eta_{\sigma_1^{j-1}-1, \sigma_1^{j-1}-1 \bmod d}, \eta_{\sigma_1^{j-1}, \sigma_{i+1}^{j-1} \bmod d}.$$

C'est ce que l'on illustre sur la figure 9.11.

On peut alors s'intéresser à la partie gauche de la figure 9.10, le chemin $\eta'_{\theta_1^i, 0}$ rencontre le chemin $\eta_{\sigma_1^{j-1}, \sigma_{i+1}^{j-1} \bmod d}$ en son point d'arrivée, alors :

$$\eta'_{\theta_1^{i+1}, 0} = \eta_{\sigma_1^{j-1}+1, \sigma_{i+1}^{j-1} \bmod d}$$

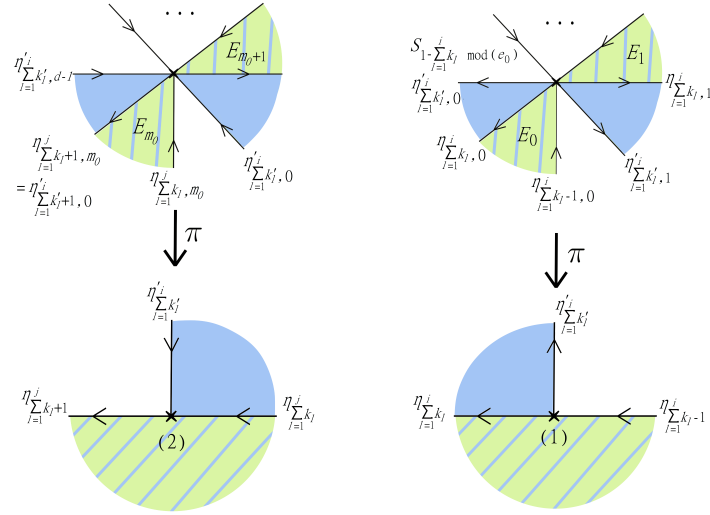


FIGURE 9.10 – Relevé local des intersections entre $\eta'_{\theta_1^i}$ et $\eta_{\sigma_1^i}$ (à droite), et entre $\eta'_{\theta_1^i}$ et $\eta_{\sigma_1^{j-1}+1}$ (à gauche)

et on pose donc $m_0 = \sigma_{i+1}^{j-1}$.

□

Remarque 9.2.3. On peut vérifier la cohérence des résultats 9.2.2 en étudiant $\eta'_{\theta_1^j,0}$.

Le chemin $\eta'_{\theta_1^j}$ se compose de deux parties, l'une dans D_∞ et l'autre dans D , on a donc, pour son relevé, une partie dans un relevé de D_∞ et une partie dans un relevé de D . On peut s'assurer que ces relevés sont bien S_{l_0} et E_0 . En effet, la figure 9.6 nous assure que, sur la partie droite, donc au-dessus du point (5), $\eta'_{\theta_1^j,0}$ est dans le relevé de D_∞ qui contient sur son bord $\eta_{\sigma_1^{j-1},m_0}$, c'est-à-dire, d'après le lemme 9.2.1 sur $S_{l_0 \bmod e_0}$.

La partie gauche de la figure, au-dessus du point (7), si $\eta'_{\theta_1^j,0}$ rencontre un relevé E_{m_1} , alors $\eta'_{\theta_1^{j+h},0} = \eta_{\sigma_1^{j+h},m_1}$ pour tout $h \in \{1, \dots, \sigma_{j+1}^n\}$. En conséquence, on aura alors $\eta'_{1,0} = \eta_{1,m_1}$, or $\eta'_{1,0} = \eta_{1,0}$ donc $m_1 = 0$.

□

En homologie, le chemin parcourant le bord d'un disque est nul. Ainsi, en choisissant correctement certains disques dans $E_0 \cup S_{l_0 \bmod e_0} \cup E_{m_0 \bmod d}$, on peut déterminer des relations entre les éléments $\eta'_{\theta_1^i,0}$, $\eta'_{\theta_1^{i+1},0}$ et $\eta'_{\theta_1^j,0}$ avec les $\eta_{l,m}$. Ces disques sont représentés sur la figure 9.13 :

Proposition 9.2.4. On obtient les relations suivantes en homologie :

- $\eta'_{\theta_1^i,0} = \sum_{h=0}^{\sigma_{i+1}^{j-1}} \eta_{\sigma_1^{i+h},h \bmod d}$
- $\eta'_{\theta_1^{i+1},0} = - \sum_{h=1}^{\sigma_{i+1}^j-1} \eta_{\sigma_1^{i+h},m_0 \bmod d}$
- $\eta'_{\theta_1^j,0} = - \sum_{h=1}^{\sigma_{i+1}^{j-1}-1} \eta_{\sigma_1^{i+h},h \bmod d} + \sum_{h=1}^{\sigma_{i+1}^j} \eta_{\sigma_1^{i+h},0}$.

On a donc trouvé des relations en homologie entre les η_l et les η'_l . Rappelons que d'après le théorème 3.0.1, les duaux de Poincaré des $g_{i,j}$, respectivement des $g'_{i,j}$, s'écrivent en fonction des η_l , respectivement les η'_l . Voyons maintenant comment obtenir à partir des relations de la proposition ci-dessus des relations entre les $g_{i,j}$ et les $g'_{i,j}$. Nous pourrons alors utiliser la projection $\phi_{\hat{X}}$ pour trouver les relations entre la famille (g_1, \dots, g_n) et la famille (g'_1, \dots, g'_n) .

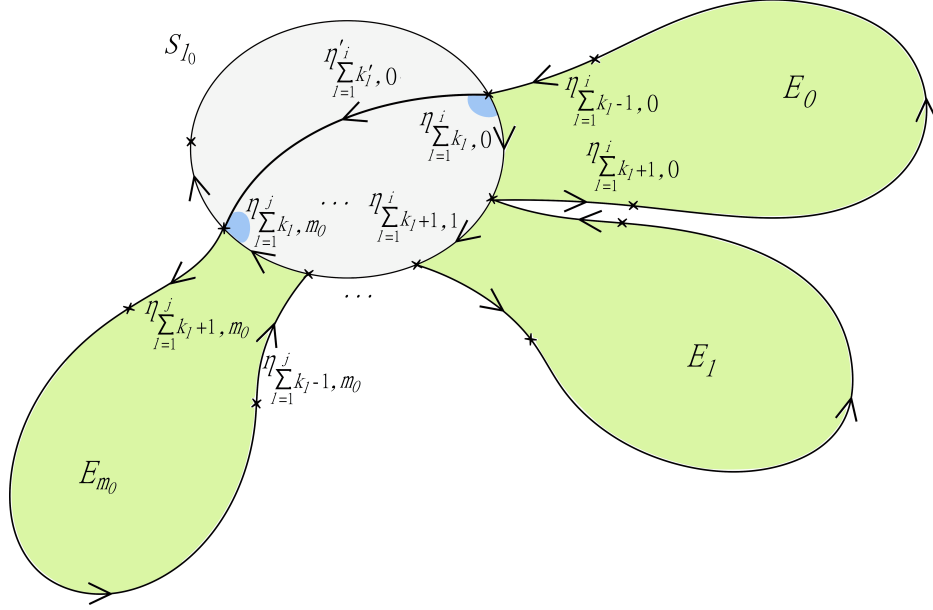


FIGURE 9.11 – Relevés des η_l sur bord du disque $S_{l_0} \text{ mod } (e_0)$

9.2.2 Relation entre les deux familles génératrices de $H^1(\hat{X})_q$

On utilise à présent les relations trouvées en homologie pour passer de la famille (g_1, \dots, g_n) à la famille (g'_1, \dots, g'_n) . Prenons la première des relations de la proposition 9.2.4. Comme $T^m(\eta_{l,0}) = \eta_{l,m}$ et $T^m(\eta'_{l,0}) = \eta'_{l,m}$, on en déduit que pour tout $m \in \{0, \dots, d-1\}$, on a :

$$\eta'_{\theta^i_1, m} = \sum_{h=0}^{m_0} \eta_{\sigma_1^i + h, h+m} \text{ mod } d.$$

On a ainsi :

$$q^m \eta'_{\theta^i_1, m} = q^m \sum_{h=0}^{m_0} \eta_{\sigma_1^i + h, h+m} \text{ mod } d = \sum_{h=0}^{m_0} \bar{q}^h q^{h+m} \eta_{\sigma_1^i + h, h+m} \text{ mod } d.$$

En sommant sur $m \in \{0, \dots, d-1\}$, on obtient :

$$\sum_{m=1}^{d-1} q^m \eta'_{\theta^i_1, m} = \sum_{h=0}^{m_0} \bar{q}^h \sum_{m=1}^{d-1} q^{m+h} \eta_{\sigma_1^i + h, h+m} \text{ mod } d.$$

En passant à la cohomologie via le dual de Poincaré, on a donc :

$$g'_{i, k_i} = g_{i, k_i} + \bar{q} g_{i+1, 1} + \dots + \bar{q}^{k_i+1} g_{i+1, k_i+1} + \dots + \bar{q}^{m_0} g_{j-1, k_{j-1}}.$$

En projetant sur $H^1(\hat{X})_q$, on récupère la relation suivante :

$$g'_i = g_i + \bar{q}^{k_i+1} g_{i+1} + \dots + \bar{q}^{m_0} g_{j-1} = g_i + \sum_{l=i+1}^{j-1} \bar{q}^{\sigma^l} g_l.$$

En répétant ce processus pour les autres relations de la proposition 9.2.4 et du corollaire 9.2.2, on obtient la proposition suivante, qui permet de passer d'une famille génératrice à l'autre :

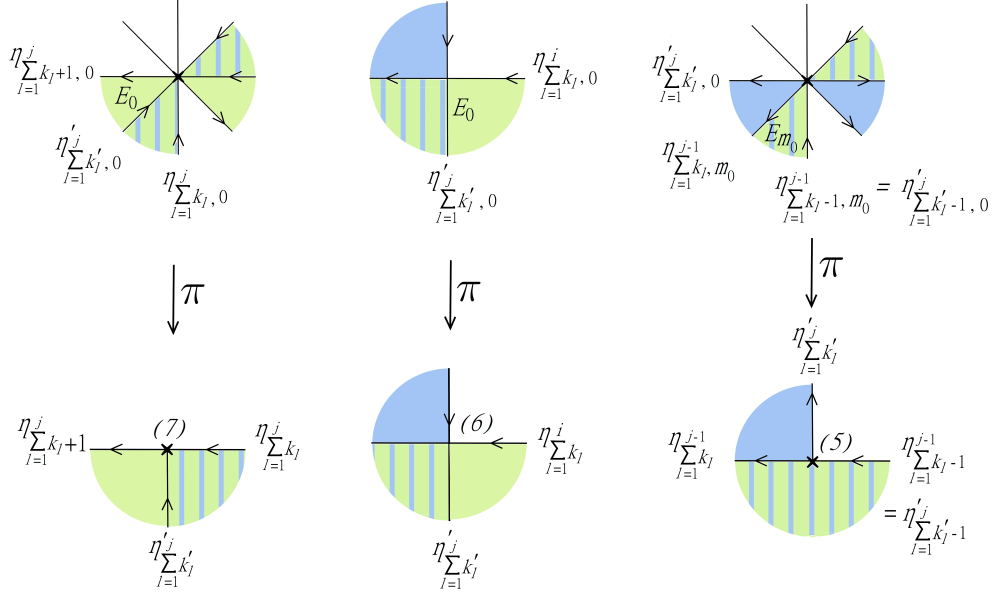


FIGURE 9.12 – Etude locale de $\eta'_{\theta^j, 0}$ au-dessus des points (5), (6) et (7) de la figure 9.6

Proposition 9.2.5. *Toujours avec la notation $\sigma_l^m = \sum_{r=l}^m k_r$, on a :*

- $g'_i = g_i + \sum_{l=i+1}^{j-1} \bar{q}^{\sigma_{i+1}^l} g_l$
- $g'_{i+1} = -\bar{q}^{\sigma_{i+1}^{j-1}} \sum_{l=i+1}^{j-1} g_l$
- $g'_j = \sum_{l=i+1}^j g_l - \sum_{l=i+1}^{j-2} \bar{q}^l g_l$.
- $\forall l \in \{1, \dots, i-1\} \cup \{j+1, \dots, n\}, g'_l = g_l$
- $\forall l \in \{i+2, \dots, j-1\}, g'_l = \bar{q}^{\sigma_{i+1}^{j-1}} g_{l-1}$

On peut également exprimer les éléments g_1, \dots, g_n en fonction des g'_1, \dots, g'_n :

- $g_i = g'_i + \sum_{l=i+1}^{j-1} g'_l - \sum_{l=i+2}^{j-1} \bar{q}^{\sigma_{i+1}^l} g'_l$
- $g_{j-1} = -q^{\sigma_{i+1}^{j-1}} \sum_{l=i+1}^{j-1} g'_l$
- $g_j = g'_j + \sum_{l=i+1}^{j-1} q^{\sigma_{i+1}^{j-1}} g'_l$.
- $\forall l \in \{1, \dots, i-1\} \cup \{j+1, \dots, n\}, g_l = g'_l$
- $\forall l \in \{i+1, \dots, j-2\}, g_l = q^{\sigma_{i+1}^{j-1}} g'_{l+1}$

9.3 Action des générateurs de PB_n sur la famille génératrice de $H^1(\hat{X})_q$

On fixe une première indexation (b_1, \dots, b_n) , appelée l'indexation initiale, qui nous donne une famille génératrice (g_1, \dots, g_n) . Pour un couple $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, on sait trouver une nouvelle indexation donnant une famille génératrice (g'_1, \dots, g'_n) sur laquelle $\alpha_{i,j}$ agit comme τ_i^2 . D'après la proposition 9.2.5, on sait comment passer de la famille génératrice initiale à la nouvelle famille et inversement. On peut ainsi déterminer l'action de $\alpha_{i,j}$ sur la famille (g_1, \dots, g_n) :

Théorème 9.3.1. *Pour tout $l \neq i-1, i, j-1, j$, on a $\widetilde{\alpha}_{i,j}^*(g_l) = g_l$. Sinon, on a, avec $g'_i = g_i + \sum_{l=i+1}^{j-1} \bar{q}^{\sigma_{i+1}^l} g_l$:*

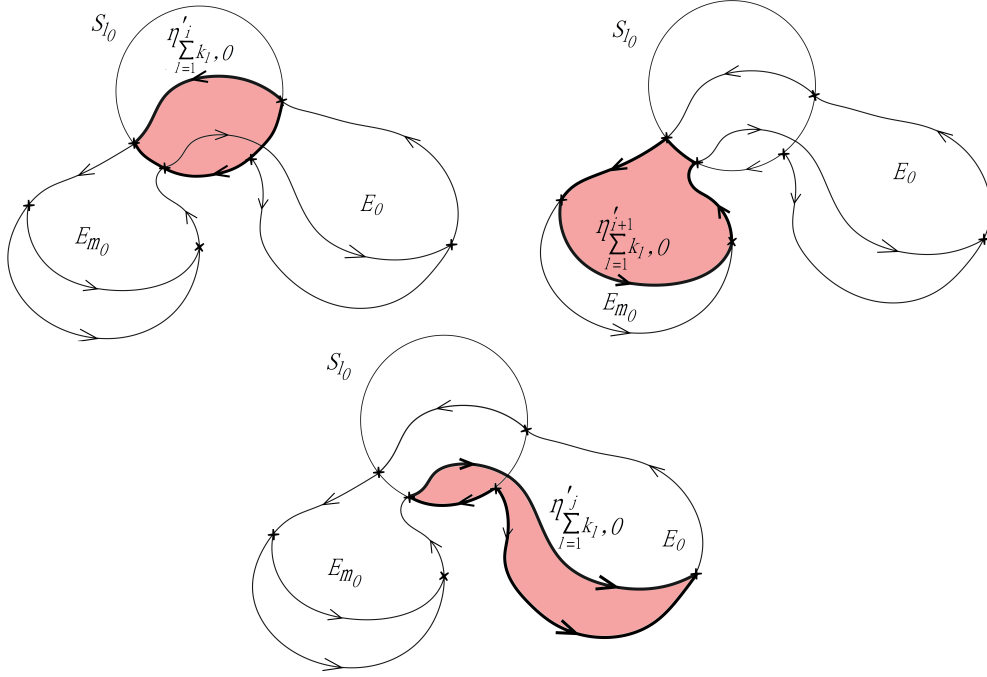


FIGURE 9.13 – En haut à gauche, le disque permettant d'étudier $\eta'_{\theta^i_{1,0}}$, en haut à droite le disque permettant d'étudier $\eta'^{i+1}_{\theta^{i+1}_{k,0}}$ et en bas celui pour l'étude de $\eta^j_{\theta^j_{1,0}}$.

- $\widetilde{\alpha}_{i,j}^*(g_{i-1}) = g_{i-1} + (1 - q^{k_j})g'_i = g_{i-1} + (1 - q^{k_j})g_i + \sum_{l=i+1}^{j-1} \bar{q}^{\sigma_{i+1}^l} (1 - q^{k_j})g_l$
- $\widetilde{\alpha}_{i,j}^*(g_i) = g_i - (1 - q^{k_j})g'_i = q^{k_j}g_i - \sum_{l=i+1}^{j-1} \bar{q}^{\sigma_{i+1}^l} (1 - q^{k_j})g_l$
- $\widetilde{\alpha}_{i,j}^*(g_{j-1}) = g_{j-1} - q^{\sigma_{i+1}^j} (1 - q^{k_i})g'_i = g_{j-1} - q^{\sigma_{i+1}^j} (1 - q^{k_i})g_i - \sum_{l=i+1}^{j-1} \bar{q}^{\sigma_{i+1}^l} q^{\sigma_{i+1}^j} (1 - q^{k_i})g_l$
- $\widetilde{\alpha}_{i,j}^*(g_j) = g_j + q^{\sigma_{i+1}^j} (1 - q^{k_i})g'_i = g_j + q^{\sigma_{i+1}^j} (1 - q^{k_i})g_i + \sum_{l=i+1}^{j-1} q^{\sigma_{i+1}^j} \bar{q}^{\sigma_{i+1}^l} (1 - q^{k_i})g_l$.

Démonstration : On sait que $\alpha_{i,j}$ agit sur (g'_1, \dots, g'_n) comme un τ_i^2 , c'est-à-dire qu'on a, d'après le théorème 8.0.1 :

$$\forall l \in \{1, \dots, n\}, \quad \alpha_{i,j}(g'_l) = \begin{cases} q^{k_i+k_j} g'_i & \text{si } l = i \\ g'_{i+1} + q^{k_j} (1 - q^{k_i}) g'_i & \text{si } l = i + 1 \\ g'_{i-1} + (1 - q^{k_j}) g'_i & \text{si } l = i - 1 \\ g'_l & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors immédiatement, pour tout $l \in \{1, \dots, i-2\} \cup \{j+1, \dots, n\}$, $\widetilde{\alpha}_{i,j}^*(g_l) = g_l$. On a aussi : pour tout $l \in \{i+1, \dots, j-2\}$, $\widetilde{\alpha}_{i,j}^*(g_l) = \widetilde{\alpha}_{i,j}^*(q^{m_0} g'_{l+1}) = g_l$. Il reste à évaluer $\widetilde{\alpha}_{i,j}^*$ sur g_{i-1} , g_i , g_{j-1} et sur g_j .

- $\begin{aligned} \widetilde{\alpha}_{i,j}^*(g_{i-1}) &= \widetilde{\alpha}_{i,j}^*(g'_{i-1}) \\ &= g'_{i-1} + (1 - q^{k_j})g'_i \end{aligned}$

- $$\begin{aligned}\widetilde{\alpha}_{i,j}^*(g_i) &= \widetilde{\alpha}_{i,j}^*(g'_i + g'_{i+1} + \sum_{l=i+2}^{j-1} (1 - \bar{q}^{\sigma_l^{j-1}})g'_l) \\ &= q^{k_i+k_j}g'_i + (g'_{i+1} + q^{k_j}(1 - q^{k_i})g'_i) + \sum_{l=i+2}^{j-2} (1 - \bar{q}^{\sigma_l^{j-1}})g'_l \\ &= g_i - (1 - q^{k_j})g'_i\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\widetilde{\alpha}_{i,j}^*(g_{j-1}) &= \widetilde{\alpha}_{i,j}^*(-q^{\sigma_{i+1}^{j-1}} \sum_{l=i+1}^{j-1} g'_l) \\ &\quad - q^{\sigma_{i+1}^{j-1}}(g'_{i+1} + q^{k_j}(1 - q^{k_i})g'_i) - q^{\sigma_{i+1}^{j-1}} \sum_{l=i+2}^{j-1} g'_l \\ &= g_{j-1} - q^{\sigma_{i+1}^j}(1 - q^{k_i})g'_i\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\widetilde{\alpha}_{i,j}^*(g_j) &= \widetilde{\alpha}_{i,j}^*(g'_j + \sum_{l=i+1}^{j-1} q^{\sigma_l^{j-1}} g'_l) \\ &= g'_j + q^{\sigma_{i+1}^{j-1}}(g'_{i+1} + q^{k_j}(1 - q^{k_i})g'_i) + \sum_{l=i+2}^{j-1} q^{\sigma_{i+1}^{j-1}} g'_l \\ &= g_j + q^{\sigma_{i+1}^j}(1 - q^{k_i})g'_i\end{aligned}$$

□

Corollaire 9.3.2. *L'expression de $\widetilde{\alpha}_{i,j}^*$ est donnée par :*

$$\forall x \in H^1(\hat{X})_q, \quad \widetilde{\alpha}_{i,j}^*(x) = x - \iota \frac{(1 - q^{k_i})(1 - q^{k_j})}{(1 - q)(1 - \bar{q})} \langle x; g'_i \rangle g'_i.$$

Si $q^{k_i+k_j} = 1$, alors $\widetilde{\alpha}_{i,j}^*$ est unipotente. Sinon, lorsque $q^{k_i+k_j} \neq 1$, $\alpha_{i,j}$ agit comme une réflexion complexe d'ordre $m_{i,j}$ de $k_i + k_j$ dans $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, donnée par :

$$\forall x \in H^1(\hat{X})_q, \quad \widetilde{\alpha}_{i,j}^*(x) = x - (1 - q^{k_i+k_j}) \frac{\langle x; g'_i \rangle}{\langle g'_i, g'_i \rangle} g'_i.$$

Démonstration : On applique ici simplement le résultat 8.0.1 à $\widetilde{\alpha}_{i,j}^*$ sur la famille (g'_1, \dots, g'_n) .

On pourrait également s'assurer de ce résultat par le calcul, utilisant les formules 7.0.1 pour déterminer successivement $\langle g_{i-1}, g'_i \rangle$, $\langle g_i, g'_i \rangle$, $\langle g_{j-1}, g'_i \rangle$ et $\langle g_j, g'_i \rangle$. On trouve facilement :

$$\langle g_{i-1}, g'_i \rangle = \langle g'_{i-1}, g'_i \rangle = -\iota \frac{\bar{q}(1 - q)^2}{1 - q^{k_i}} = \overline{\langle g_i, g'_i \rangle}$$

et

$$\langle g_{j-1}, g'_i \rangle = \langle -q^{\sigma_{i+1}^{j-1}} \sum_{l=i+1}^{j-1} g'_l, g'_i \rangle = -\iota \frac{q^{\sigma_{i+1}^{j-1}} \times \bar{q}(1 - q)^2}{1 - q^{k_j}} = \overline{\langle g_j, g'_i \rangle}.$$

Pour $l \neq i-1, i, j-1, j$, on trouve également $\langle g_l, g'_i \rangle = 0$. On peut alors vérifier l'exactitude de la formule annoncée. □

Finalement, nous avons vu comment exprimer l'action des $\alpha_{i,j}$ sur $H^1(\hat{X})_q$, et en particulier, nous avons montré que $\alpha_{i,j}$ est une réflexion complexe d'ordre fini lorsque $q^{k_i+k_j} \neq 1$, et $\widetilde{\alpha}_{i,j}^*$ est unipotent sinon. Dans le prochain chapitre, nous exprimons l'action de n'importe quel twist de Dehn sur la famille génératrice (g_1, \dots, g_n) de $H^1(\hat{X})_q$.

Chapitre 10

Action d'un twist de Dehn quelconque sur $H^1(\hat{X})_q$

On a vu comment exprimer l'action des twists de Dehn ayant pour support un disque contenant deux points marqués. On peut alors s'intéresser à généraliser ce résultat pour un twist de Dehn quelconque. En particulier, nous retrouverons parmi ces twists l'élément $(\tau_1 \cdots \tau_{n-1})^n$, qui engendre le centre de B_n .

Théorème 10.0.1. *Soient $i_0, j_0 \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i_0 < j_0$ et $J = \{i_0, \dots, j_0\}$. En notant $\sigma_i^j = \sum_{l=i}^j k_l$, et $\tau_J \in PB_n$ la tresse associée au twist de Dehn ayant pour support un disque contenant les points marqués $\{b_{i_0}, \dots, b_{j_0}\}$, l'expression de $\tilde{\tau}_J^*$ est donnée par :*

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_J^*(g_{i_0-1}) &= g_{i_0-1} + \sum_{l=i_0}^{j_0-1} (1 - q^{\sigma_{l+1}^{j_0}}) g_l \\ \tilde{\tau}_J^*(g_i) &= q^{\sigma_{i_0}^{j_0}} g_i \quad \text{si } i_0 \leq i \leq j_0 - 1 \\ \tilde{\tau}_J^*(g_{j_0}) &= g_{j_0} + \sum_{l=i_0}^{j_0-1} q^{\sigma_{l+1}^{j_0}} (1 - q^{\sigma_{i_0}^l}) g_j \\ \tilde{\tau}_J^*(g_j) &= g_j \quad \text{si } j < i_0 - 1 \text{ ou } j_0 < j\end{aligned}$$

De plus, $\tilde{\tau}_J^*$ est d'ordre fini si $q^{\sigma_{i_0}^{j_0}} \neq 1$ et unipotent sinon.

10.1 Câblage d'un twist de Dehn

Pour $J \subset \{1, \dots, n\}$, on notera τ_J le twist de Dehn ayant pour support un disque topologique contenant l'ensemble des points b_j d'indices dans J mais pas d'autres points marqués. On commencera par interpréter τ_J comme une tresse de PB_n . Puis nous verrons comment câbler la tresse τ_J .

10.1.1 Interprétation d'un twist de Dehn comme une tresse de PB_n

Considérons un sous ensemble $J \subset \{1, \dots, n\}$. Pour faciliter l'étude de τ_J , on suppose que les indices apparaissant dans J sont consécutifs, de sorte qu'on puisse fixer $i_0, j_0 \in \{1, \dots, n\}$ tels que $J = \{i_0, \dots, j_0\}$. On note D_J un disque contenant l'ensemble de points

$B_J := \{b_j \in B \mid j \in J\}$ mais n'en contenant aucun autre. Comme le cas de deux points est déjà traité, on peut également supposer que $j_0 - i_0 > 1$. Par exemple, dans le cas où D_J contient 3 points, on peut représenter le twist de Dehn τ_J comme sur la figure 10.1 :

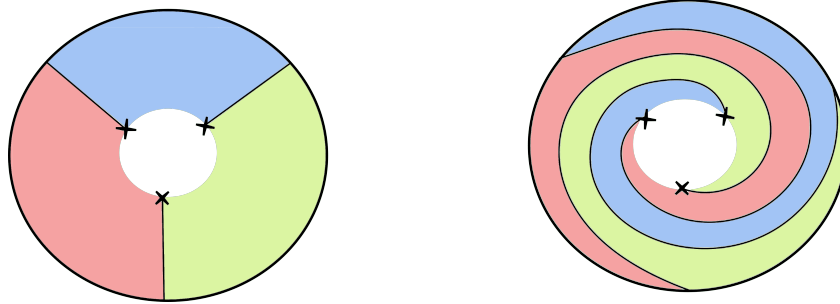


FIGURE 10.1 – Illustration d'un twist de Dehn de support un disque avec trois points marqués

On s'intéresse à l'interprétation de τ_J comme une tresse de PB_n . On remarque sur la figure 10.2 que :

$$\tau_J = (\tau_{j-1} \cdots \tau_i)^{\#J}.$$

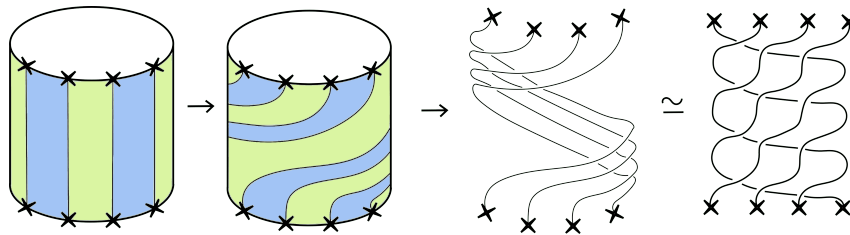


FIGURE 10.2 – Interprétation d'un twist de Dehn comme une tresse pure

On modifie cette expression à l'aide des relations de tresses, pour montrer que :

Lemme 10.1.1. On a : $(\tau_{j-1} \cdots \tau_i)^{\#J} = (\tau_i \cdots \tau_{j-1})^{\#J} \in PB_n$.

Démonstration : On procède par récurrence sur le nombre de points marqués dans D_J , et pour simplifier les notations on suppose que $J = \{1, \dots, n\}$. Pour trois points marqués, on a :

$$\tau_J = (\tau_2 \tau_1)(\tau_2 \tau_1)(\tau_2 \tau_1) = (\tau_2 \tau_1 \tau_2)(\tau_1 \tau_2 \tau_1) = (\tau_1 \tau_2 \tau_1)(\tau_2 \tau_1 \tau_2) = (\tau_1 \tau_2)(\tau_1 \tau_2)(\tau_1 \tau_2).$$

Supposons maintenant que le lemme est vrai pour un certain nombre $n \in \mathbb{N}^*$ de points marqués. Sur le schéma 10.3, on peut voir que $(\tau_n \cdots \tau_1)^{n+1}$ peut s'écrire $(\tau_n \cdots \tau_1)(\tau_n \cdots \tau_2)^n(\tau_1 \cdots \tau_n)$.

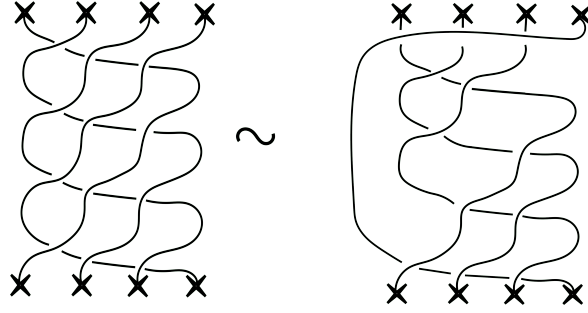


FIGURE 10.3 – Equivalence homotopique entre $(\tau_n \cdots \tau_1)^{n+1}$ et $(\tau_n \cdots \tau_1)(\tau_n \cdots \tau_2)^n(\tau_1 \cdots \tau_n)$

Or d'après l'hypothèse de récurrence, $(\tau_n \cdots \tau_2)^n = (\tau_2 \cdots \tau_n)^n$. Alors :

$$\begin{aligned}
(\tau_n \cdots \tau_1)^{n+1} &= (\tau_n \cdots \tau_1)(\tau_2 \cdots \tau_n)^n(\tau_1 \cdots \tau_n) \\
&= (\tau_n \cdots \tau_2)(\tau_1 \cdots \tau_n)(\tau_1^{-1}\tau_1\tau_2 \cdots \tau_n)^{n-1}(\tau_1 \cdots \tau_n) \\
&= (\tau_n \cdots \tau_2)\underbrace{(\tau_1\tau_2\tau_1^{-1} \cdots \tau_n)}_{=\tau_2^{-1}\tau_1\tau_2}(\tau_1\tau_2 \cdots \tau_n)(\tau_1^{-1}\tau_1\tau_2 \cdots \tau_n)^{n-2}(\tau_1 \cdots \tau_n) \\
&= (\tau_n \cdots \tau_2\tau_2^{-1})(\tau_1 \cdots \tau_n)^2(\tau_1^{-1}\tau_1\tau_2 \cdots \tau_n)^{n-2}(\tau_1 \cdots \tau_n) \\
&= (\tau_n \cdots \tau_3)(\tau_1 \cdots \tau_n)(\tau_1 \cdots \tau_n)(\tau_1^{-1}\tau_1\tau_2 \cdots \tau_n)(\tau_1^{-1}\tau_1\tau_2 \cdots \tau_n)^{n-3}(\tau_1 \cdots \tau_n) \\
&= (\tau_n \cdots \tau_3)(\tau_1 \cdots \tau_n)\underbrace{(\tau_1\tau_2\tau_1^{-1} \cdots \tau_n)}_{=\tau_2^{-1}\tau_1\tau_2}(\tau_1\tau_2 \cdots \tau_n)(\tau_1^{-1}\tau_1\tau_2 \cdots \tau_n)^{n-3}(\tau_1 \cdots \tau_n) \\
&= (\tau_n \cdots \tau_3)(\tau_1 \cdots \tau_n)\tau_2^{-1}(\tau_1 \cdots \tau_n)^2(\tau_1^{-1}\tau_1\tau_2 \cdots \tau_n)^{n-3}(\tau_1 \cdots \tau_n) \\
&= (\tau_n \cdots \tau_3)(\tau_1 \underbrace{\tau_2\tau_3\tau_2^{-1} \cdots \tau_n}_{=\tau_3^{-1}\tau_2\tau_3})(\tau_1 \cdots \tau_n)^2(\tau_1^{-1}\tau_1\tau_2 \cdots \tau_n)^{n-3}(\tau_1 \cdots \tau_n) \\
&= (\tau_n \cdots \tau_3)(\tau_1\tau_3^{-1}\tau_2 \cdots \tau_n)(\tau_1 \cdots \tau_n)^2(\tau_1^{-1}\tau_1\tau_2 \cdots \tau_n)^{n-3}(\tau_1 \cdots \tau_n) \\
&= (\tau_n \cdots \tau_3\tau_3^{-1})(\tau_1 \cdots \tau_n)^3(\tau_1^{-1}\tau_1\tau_2 \cdots \tau_n)^{n-3}(\tau_1 \cdots \tau_n) \\
&\vdots \\
&= (\tau_1 \cdots \tau_n)^{n+1}
\end{aligned}$$

et le lemme est démontré. □

On en déduit immédiatement :

Corollaire 10.1.2. *Le twist de Dehn τ_J s'écrit $\tau_J = (\tau_i \cdots \tau_{j-1})^{\#J}$.*

On peut alors s'intéresser au câblage de τ_J dans B_{k_0} . Comme nous le verrons par la suite, les calculs ne seront pas faciles avec le câblage tel qu'on l'a défini précédemment. Nous allons montrer qu'il existe d'autres façons de câbler une tresse et que l'action d'une tresse de PB_n sur $H^1(\hat{X})_q$ est indépendante du choix de son câblage dans B_{k_0} . On utilisera alors un certain câblage de \mathcal{T}_J afin de déterminer l'action de τ_J sur la famille (g_1, \dots, g_n) génératrice de $H^1(\hat{X})_q$.

10.1.2 Indépendance entre l'action d'une tresse et le choix de son câblage

Pour cette partie, nous appellerons câblage standard le câblage d'une tresse $\tau \in PB_n$ en une tresse $\mathcal{T} \in B_{k_0}$ tel qu'il est décrit dans le chapitre 8. Commençons par donner des

précisions sur la notion de câblage d'une tresse de PB_n en une tresse de B_{k_0} :

Pour une tresse $\tau \in PB_n$, un câblage de τ dans B_{k_0} est obtenue en séparant chaque i -ème brins de τ en k_i brins, on obtient une tresse de B_{k_0} qui préserve les disques D'_i . Câbler une tresse de PB_n en une tresse de B_{k_0} , c'est choisir un câblage de cette tresse dans B_{k_0} . Le câblage que nous avons utilisé dans le chapitre 8, appelé le câblage standard, impose en plus que les brins issus d'une séparation ne se croisent pas entre eux, et donc que la tresse ainsi câblée coïncide avec l'identité sur les D'_i .

Pour un câblage quelconque d'une tresse $\tau \in PB_n$ en une tresse $\mathcal{T} \in B_{k_0}$, on suppose maintenant que les k_i brins issus de la séparation du i -ème brin de τ peuvent se croiser entre eux, et donc que la tresse câblée ne coïncide plus avec l'identité sur les disques D'_i , comme par exemple sur l'image 10.4 :

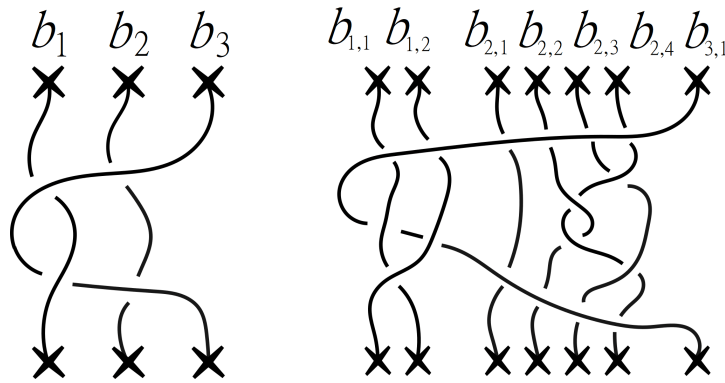


FIGURE 10.4 – Exemple d'un câblage non standard

Montrons que l'action d'une tresse est cependant indépendante du choix de son câblage :

Proposition 10.1.3. *L'expression de l'action d'une tresse $\tau \in PB_n$ sur $H^1(\hat{X})_q$ est indépendante du choix du câblage de τ dans B_{k_0} .*

Démonstration : Considérons une tresse $\tau \in PB_n$ et \mathcal{T}_{std} son câblage standard. Soit \mathcal{T} un autre câblage possible de τ . Rappelons qu'on note $\phi_{\hat{X}} : H^1(\hat{Y})_q \rightarrow H^1(\hat{X})_q$ le morphisme surjectif défini sur les $g_{i,j}$ par $\phi_{\hat{X}}(g_{i,j}) = g_i$ si $j = k_i$, et $\phi_{\hat{X}}(g_{i,j}) = 0$ sinon. On sait que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\tilde{\tau}^*(g_i) = \phi_{\hat{X}}(\widetilde{\mathcal{T}_{std}^*}(g_{i,k_i})).$$

Il suffit donc de montrer que $\phi_{\hat{X}}(\widetilde{\mathcal{T}^*}(g_{i,j})) = \phi_{\hat{X}}(\widetilde{\mathcal{T}_{std}^*}(g_{i,j}))$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, k_i\}$.

Commençons par remarquer que, par homotopie, on peut choisir que les croisements entre les k_i brins, issus de la séparation du i -ème brin initial, aient lieu avant leurs croisements éventuels avec des brins issus d'autres séparations. C'est ce que l'on illustre sur la figure 10.5.

Alors remarquons que la tresse \mathcal{T} s'écrit comme la concaténation d'une tresse \mathcal{T}' et de \mathcal{T}_{std} . Rappelons que l'on note $\sigma_1, \dots, \sigma_{k_0}$ les demi-twist générateurs de B_{k_0} . Alors la tresse \mathcal{T}' s'écrit comme un mot en les $\sigma_1, \dots, \sigma_{k_1-1}, \sigma_{k_1+1}, \dots, \sigma_{k_1+k_2-1}, \dots, \sigma_{k_0-k_n+1}, \dots, \sigma_{k_0-1}$, et leurs inverses.

Ainsi, l'image par $\widetilde{\mathcal{T}'^*}$ de tout élément $g_{i,j}$ pour $j \neq k_i$ est dans $H_c^1(Y'_i)_q$. On en déduit que $\widetilde{\mathcal{T}'^*}$ préserve $\bigoplus_{i=1}^n H_c^1(Y'_i)_q$, et comme $\widetilde{\mathcal{T}_{std}^*}$ préserve cette somme directe, finalement

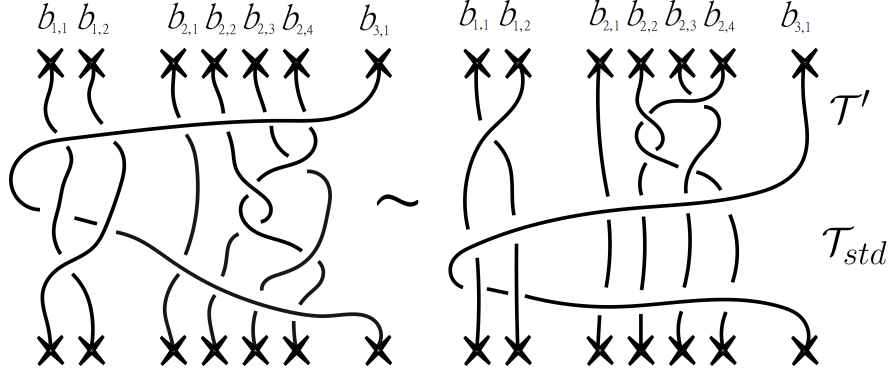


FIGURE 10.5 – Exemple d’une tresse câblée comme concaténation du câblage standard et d’une autre tresse

$\widetilde{\mathcal{T}}^*$ préserve également $\bigoplus_{i=1}^n H_c^1(Y'_i)_q$, et en particulier $\phi_{\widehat{X}}(\widetilde{\mathcal{T}}^*(g_{i,j})) = 0$ si $j \neq k_i$.

Il reste à voir que la projection orthogonale $\text{pr}_{\widehat{Y}}$ de $H^1(\widehat{Y})_q$ sur $H_c^1(Y')_q$ envoie $\widetilde{\mathcal{T}}^*(g_{i,k_i})$ et $\widetilde{\mathcal{T}}_{std}^*(g_{i,k_i})$ sur un même élément. Il est clair que les seuls éléments apparaissant éventuellement dans \mathcal{T}' et qui peuvent modifier g_{i,k_i} sont $\sigma_{\sum_{l=1}^i k_{l-1}}$, $\sigma_{\sum_{l=1}^i k_{l+1}}$, et leurs inverses.

Or $\sigma_{\sum_{l=1}^i k_{l-1}}(g_{i,k_i}) = g_{i,k_i} + qg_{i,k_{i-1}}$ et $\sigma_{\sum_{l=1}^i k_{l-1}}^{-1}(g_{i,k_i}) = g_{i,k_i} + g_{i,k_{i-1}}$.

De même, $\sigma_{\sum_{l=1}^i k_{l+1}}(g_{i,k_i}) = g_{i,k_i} + g_{i,k_{i+1}}$ et $\sigma_{\sum_{l=1}^i k_{l+1}}^{-1}(g_{i,k_i}) = g_{i,k_i} + \bar{q}g_{i,k_{i+1}}$.

Alors $\widetilde{\mathcal{T}}^*(g_{i,k_i}) = g_{i,k_i} + \eta'_i$ où $\eta'_i \in H_c^1(Y'_i)_q$. Comme \mathcal{T}' et \mathcal{T}_{std} préservent les $H_c^1(Y'_i)_q$, on a :

$$\begin{aligned} \text{pr}_{\widehat{Y}}(\widetilde{\mathcal{T}}^*(g_{i,k_i})) &= \text{pr}_{\widehat{Y}}(\widetilde{\mathcal{T}}_{std}^*(g_{i,k_i} + \eta'_i)) \\ &= \text{pr}_{\widehat{Y}}(\widetilde{\mathcal{T}}_{std}^*(g_{i,k_i}) + \underbrace{\widetilde{\mathcal{T}}_{std}^*(\eta'_i)}_{\in H_c^1(Y'_i)_q}) \\ &= \text{pr}_{\widehat{Y}}(\widetilde{\mathcal{T}}_{std}^*(g_{i,k_i})) \end{aligned}$$

et donc $\phi_{\widehat{X}}(\widetilde{\mathcal{T}}^*(g_{i,k_i})) = \phi_{\widehat{X}}(\widetilde{\mathcal{T}}_{std}^*(g_{i,k_i})) = \widetilde{\tau}^*(g_i)$. \square

10.2 Action d’un twist de Dehn sur un disque contenant un ensemble de points indexés successivement

Rappelons que l’on s’intéresse au câblage du twist de Dehn τ_J . Comme précédemment, on note $\sigma_1, \dots, \sigma_{k_0}$ les générateurs de B_{k_0} , on utilisera également la notation $\sigma_{i,j} = \sigma_{\sum_{l=1}^{i-1} k_{l+j}}$ qui met en évidence le fait que $\sigma_{i,j}$ est le demi-twist de support $D_{i,j}$, disque topologique contenant le point $b_{i,j}$ et le point indexé successivement. On représente sur l’illustration suivante 10.6 deux câblages évidents de τ_J , un premier câblage noté \mathcal{T}_J et le câblage standard. Remarquons que \mathcal{T}_J est facile à exprimer, et s’écrit :

$$\mathcal{T}_J = (\sigma_{i_0,1} \circ \dots \circ \sigma_{j_0,k_{j_0-1}})^{\sum_{l=i_0}^{j_0} k_l} \in B_{k_0}.$$

Le câblage standard est moins simple à expliciter. L’action de la tresse étant indépendante de son câblage, on peut utiliser \mathcal{T}_J pour déterminer l’action de τ_J sur la famille (g_1, \dots, g_n) génératrice de $H^1(\widehat{X})_q$.

Calculons $\widetilde{\mathcal{T}}_J^*$ sur les g_{i,k_i} . Pour ne plus avoir les doubles indices, nous allons utiliser

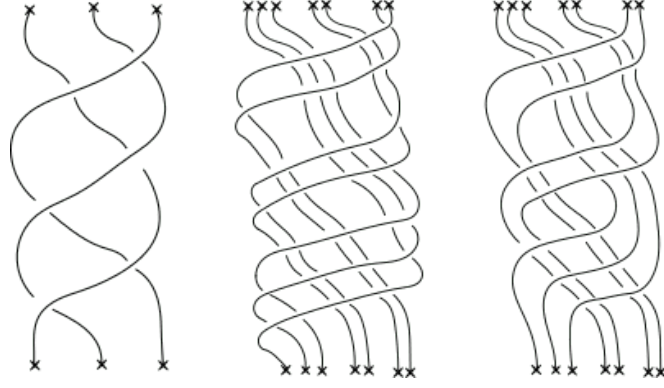


FIGURE 10.6 – De gauche à droite : la tresse τ_J , un câblage noté \mathcal{T}_J , et le câblage standard

de nouveau la notation des $g_{i,j}$ sous forme de η_l avec :

$$\eta_{\sum_{l=1}^{i-1} k_l + j} = g_{i,j}.$$

De même, on note $b'_{\sum_{l=1}^{i-1} k_l + j} = b_{i,j}$, ainsi que $\sigma_i^j = \sum_{l=i}^j k_l$. On pose :

$$i'_0 = \sigma_1^{i_0-1} + 1 \quad ; \quad j'_0 = \sigma_1^{j_0} - 1$$

de sorte que :

$$\mathcal{T}_J = (\sigma_{i'_0} \circ \dots \circ \sigma_{j'_0})^{j'_0 - i'_0 + 2}.$$

On peut à présent passer aux calculs de $\widetilde{\mathcal{T}}_J^*$ sur les η_l . On peut alors utiliser les formules de McMullen pour montrer le théorème suivant :

Théorème 10.2.1. *En notant $\sigma_i^j = \sum_{l=i}^j k_l$, l'expression du twist $\tau_J \in PB_n$ de support un disque contenant les points marqués $\{b_{i_0}, \dots, b_{j_0}\}$ est donnée par :*

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_J^*(g_{i_0-1}) &= g_{i_0-1} + \sum_{l=i_0}^{j_0-1} (1 - q^{\sigma_{l+1}^{j_0}}) g_l \\ \tilde{\tau}_J^*(g_i) &= q^{\sigma_{i_0}^{j_0}} g_i \quad \text{si } i_0 \leq i \leq j_0 - 1 \\ \tilde{\tau}_J^*(g_{j_0}) &= g_{j_0} + \sum_{l=i_0}^{j_0-1} q^{\sigma_{l+1}^{j_0}} (1 - q^{\sigma_{l_0}^l}) g_j \\ \tilde{\tau}_J^*(g_j) &= g_j \quad \text{si } j < i_0 - 1 \text{ ou } j_0 < j \end{aligned}$$

Démonstration : Commençons par regarder l'action de la tresse $\mathcal{T} := \sigma_{i'_0} \dots \sigma_{j'_0}$. On a donc $\widetilde{\mathcal{T}}^* = \widetilde{\sigma}_{j'_0}^* \dots \widetilde{\sigma}_{i'_0}^*$. D'après l'expression de cette tresse, les η_l tels que $l < i'_0 - 1$ ou $l > j'_0 + 1$ sont laissés invariants par $\widetilde{\mathcal{T}}^*$. On s'intéresse donc aux η_l pour $l \in \{i'_0 - 1, \dots, j'_0 + 1\}$.

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{T}}^*(\eta_{i'_0-1}) &= \widetilde{\sigma}_{j'_0}^* \dots \widetilde{\sigma}_{i'_0+1}^* (\eta_{i'_0-1} + \eta_{i'_0}) = \sum_{l=i'_0-1}^{j'_0} \eta_l. \\ \widetilde{\mathcal{T}}^*(\eta_{i'_0}) &= \widetilde{\sigma}_{j'_0}^* \dots \widetilde{\sigma}_{i'_0+1}^* (-q\eta_{i'_0}) \\ &= \widetilde{\sigma}_{j'_0}^* \dots \widetilde{\sigma}_{i'_0+2}^* (-q(\eta_{i'_0} + \eta_{i'_0+1})) \\ &= -q \sum_{l=i'_0}^{j'_0} \eta_l. \end{aligned}$$

Pour $l \in \{i'_0 + 1, \dots, j'_0\}$, on a

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{T}}^*(\eta_l) &= \widetilde{\sigma}_{j'_0}^* \cdots \widetilde{\sigma}_l^* \widetilde{\sigma}_{l-1}^*(\eta_l) \\
&= \widetilde{\sigma}_{j'_0}^* \cdots \widetilde{\sigma}_l^*(\eta_l + q\eta_{l-1}) \\
&= \widetilde{\sigma}_{j'_0}^* \cdots \widetilde{\sigma}_{l+1}^*(-q\eta_l + q(\eta_{l-1} + \eta_l)) \\
&= q\eta_{l-1}.
\end{aligned}$$

$$\widetilde{\mathcal{T}}^*(\eta_{j'_0+1}) = \widetilde{\sigma}_{j'_0}^*(\eta_{j'_0+1}) = \eta_{j'_0+1} + q\eta_{j'_0}.$$

Passons aux calculs avec $\mathcal{T}_J = \mathcal{T}^{j'_0 - i'_0 + 1}$.

Si $l = i'_0 - 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{T}}_J^*(\eta_{i'_0-1}) &= (\widetilde{\mathcal{T}}^*)^{j'_0 - i'_0 + 1} \left(\sum_{l=i'_0}^{j'_0} \eta_l \right) \\
&= (\widetilde{\mathcal{T}}^*)^{j'_0 - i'_0} \left(\sum_{l=i'_0}^{j'_0} \eta_l - q \sum_{l=i'_0}^{j'_0} \eta_l + q \sum_{l=i'_0+1}^{j'_0} \eta_{l-1} \right) \\
&= (\widetilde{\mathcal{T}}^*)^{j'_0 - i'_0} \left(\sum_{l=i'_0}^{j'_0} \eta_l - q\eta_{j'_0} \right) \\
&\vdots \\
&= g_{i'_0-1} + \sum_{l=i'_0}^{j'_0} (1 - q^{j'_0 - l + 1}) \eta_l.
\end{aligned}$$

Si $l = i'_0$, on a :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{T}}_J^*(\eta_{i'_0}) &= (\widetilde{\sigma}^*)^{j'_0 - i'_0 + 1} \left(-q \sum_{l=i'_0}^{j'_0} \eta_l \right) \\
&= (\widetilde{\mathcal{T}}^*)^{j'_0 - i'_0} \left(q^2 \sum_{l=i'_0}^{j'_0} \eta_l - q^2 \sum_{l=i'_0+1}^{j'_0} \eta_{l-1} \right) \\
&= (\widetilde{\mathcal{T}}^*)^{j'_0 - i'_0} (q^2 \eta_{j'_0}) \\
&= q^{j'_0 - i'_0 + 2} \eta_{i'_0}
\end{aligned}$$

Si $l \in \{i'_0 + 1, \dots, j'_0\}$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{T}}_J^*(\eta_l) &= q^{l-i'_0}(\widetilde{\mathcal{T}}^*)^{j'_0-l+2}(\eta_{i'_0}) \\
&= -q^{l-i'_0+1}(\widetilde{\mathcal{T}}^*)^{j'_0-l+1}\left(\sum_{l=i'_0}^{j'_0} \eta_l\right) \\
&= -q^{l-i'_0+1}(\widetilde{\mathcal{T}}^*)^{j'_0-l}\left(-q \sum_{l=i'_0}^{j'_0} \eta_l + q \sum_{l=i'_0+1}^{j'_0} \eta_{l-1}\right) \\
&= -q^{l-i'_0+1}(\widetilde{\mathcal{T}}^*)^{j'_0-l}(-q\eta_{j'_0}) \\
&= q^{l-i'_0+2}(\widetilde{\mathcal{T}}^*)^{j'_0-l}(\eta_{j'_0}) \\
&= q^{j'_0-i'_0+2}\eta_l
\end{aligned}$$

Si $l = j'_0 + 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{T}}_J^*(\eta_{j'_0+1}) &= (\widetilde{\mathcal{T}}^*)^{j'_0-i'_0+1}(\eta_{j'_0+1} + q\eta_{j'_0}) \\
&= \widetilde{\mathcal{T}}^*(\eta_{j'_0} + q\eta_{j'_0} + \dots + q^{j'_0-i'_0+1}\eta_{i'_0}) \\
&= \eta_{j'_0} + q\eta_{j'_0} + \dots + q^{j'_0-i'_0+1}\eta_{i'_0} - q^{j'_0-i'_0+2} \sum_{l=i'_0}^{j'_0} \eta_l \\
&= \eta_{j'_0} + \sum_{l=i'_0}^{j'_0} (q^{j'_0-l+1} - q^{j'_0-i'_0+2})\eta_l.
\end{aligned}$$

Pour les indices $l < i'_0 - 1$ ou $l > j'_0 + 1$, $\widetilde{\mathcal{T}}_J^*$ laisse invariant η_l . Ainsi, tous les cas ont été traités.

Rappelons que $\phi_{\widehat{X}}(g_{i,j}) = g_i$ si $j = k_i$ et 0 sinon. Alors $\eta_{i'_0-1}$ se projette par $\phi_{\widehat{X}}$ sur g_{i_0-1} , pour tout $l \in \{k_{i_0}, \dots, k_{j_0-1}\}$, on a $\sigma_1^l \in \{i'_0 + 1, \dots, j'_0 - 1\}$, et alors $\eta_{\sigma_1^l}$ se projette sur g_l , et enfin $\eta_{j'_0+1}$ se projette sur g_{j_0} . Finalement on obtient :

$$\widetilde{\tau}_J^*(g_{i_0-1}) = \phi_{\widehat{X}}(\widetilde{\mathcal{T}}_J^*(\eta_{i'_0-1})) = g_{i_0-1} + \sum_{l=i_0}^{j_0} (1 - q^{\sigma_{i+1}^{j_0}})g_l.$$

Pour tout $l \in \{i_0, \dots, j_0 - 1\}$, $\sigma_1^l \in \{i'_0 + 1, \dots, j'_0\}$, alors : $\widetilde{\tau}_J^*(g_l) = \phi_{\widehat{X}}(\widetilde{\mathcal{T}}_J^*(\eta_{\sigma_1^l})) = q^{\sigma_{i_0}^{j_0}}g_l$.
Enfin : $\widetilde{\tau}_J^*(g_{j_0}) = \phi_{\widehat{X}}(\widetilde{\mathcal{T}}_J^*(\eta_{j'_0+1})) = g_{j_0} + \sum_{l=i_0}^{j_0} q^{\sigma_{i+1}^{j_0}}(1 - q^{\sigma_{i_0}^l})g_l$. \square

On peut maintenant démontrer le théorème 10.0.1. Il ne reste en fait qu'à montrer que $\widetilde{\tau}_J^*$ est d'ordre fini au plus d si $q^{\sigma_{i_0}^{j_0}} \neq 1$, et unipotente sinon.

Démonstration du théorème 10.0.1 : Supposons que $q^{\sigma_i^j}$. Pour tout $i \in \{i_0, \dots, j_0 - 1\}$,

on a : $\tilde{\tau}_J^*(g_i) = q^{\sigma_{i_0}^{j_0}} g_i$, et donc $(\tilde{\tau}_J^*)^d(g_i) = g_i$. Aussi, si $q^{\sigma_{i_0}^{j_0}} \neq 1$:

$$\begin{aligned}
(\tilde{\tau}_J^*)^d(g_{i_0-1}) &= (\tilde{\tau}_J^*)^{d-1}(g_{i_0-1} + \sum_{l=i_0}^{j_0-1} (1 - q^{\sigma_{l+1}^{j_0}}) g_l) \\
&= (\tilde{\tau}_J^*)^{d-2}(g_{i_0-1} + \sum_{l=i_0}^{j_0-1} (1 - q^{\sigma_{l+1}^{j_0}}) g_l + \sum_{l=i_0}^{j_0-1} (1 - q^{\sigma_{l+1}^{j_0}}) q^{\sigma_{i_0}^{j_0}} g_l) \\
&= (\tilde{\tau}_J^*)^{d-2}(g_{i_0-1} + (1 + q^{\sigma_{i_0}^{j_0}}) \sum_{l=i_0}^{j_0-1} (1 - q^{\sigma_{l+1}^{j_0}}) g_l) \\
&= (\tilde{\tau}_J^*)^{d-3}(g_{i_0-1} + \sum_{l=i_0}^{j_0-1} (1 - q^{\sigma_{l+1}^{j_0}}) g_l + q^{\sigma_{i_0}^{j_0}} (1 + q^{\sigma_{i_0}^{j_0}}) \sum_{l=i_0}^{j_0-1} (1 - q^{\sigma_{l+1}^{j_0}}) g_l) \\
&= (\tilde{\tau}_J^*)^{d-2}(g_{i_0-1} + (1 + q^{\sigma_{i_0}^{j_0}} + (q^{\sigma_{i_0}^{j_0}})^2) \sum_{l=i_0}^{j_0-1} (1 - q^{\sigma_{l+1}^{j_0}}) g_l) \\
&\vdots \\
&= g_{i_0-1} + \underbrace{(1 + q^{\sigma_{i_0}^{j_0}} + \dots + (q^{\sigma_{i_0}^{j_0}})^d)}_{=0} \sum_{l=i_0}^{j_0-1} (1 - q^{\sigma_{l+1}^{j_0}}) g_l \\
&= g_{i_0-1}
\end{aligned}$$

De la même façon, on a :

$$\begin{aligned}
(\tilde{\tau}_J^*)^d(g_{j_0}) &= (\tilde{\tau}_J^*)^{d-1}(g_{j_0} + \sum_{l=i_0}^{j_0-1} (q^{\sigma_{l+1}^{j_0}} (1 - q^{\sigma_l^{j_0}}) g_j)) \\
&= (\tilde{\tau}_J^*)^{d-2}(g_{j_0} + (1 - q^{\sigma_{i_0}^{j_0}}) \sum_{l=i_0}^{j_0-1} (q^{\sigma_{l+1}^{j_0}} (1 - q^{\sigma_l^{j_0}}) g_j)) \\
&\vdots \\
&= g_{j_0} + \underbrace{(1 + q^{\sigma_{i_0}^{j_0}} + \dots + (q^{\sigma_{i_0}^{j_0}})^d)}_{=0} \sum_{l=i_0}^{j_0-1} q^{\sigma_{l+1}^{j_0}} (1 - q^{\sigma_l^{j_0}}) g_l \\
&= g_{j_0}
\end{aligned}$$

Donc $\tilde{\tau}_J^*$ est d'ordre fini au plus d .

Supposons $q^{\sigma_{i_0}^{j_0}} = 1$. La matrice de $\tilde{\tau}_J^*$ dans la famille (g_1, \dots, g_n) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} I_{i_0-2} & & \\ & A_J & \\ & & I_{n-j_0} \end{pmatrix}$$

Où A_J est la matrice carré de taille $(j_0 - i_0 + 2) \times (j_0 - i_0 + 2)$:

$$A_J \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ (1 - q^{\sigma_{i_0+1}^{j_0}}) & 1 & & q^{\sigma_{i_0+1}^{j_0}}(1 - q^{\sigma_{i_0}^{j_0}}) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ (1 - q^{\sigma_{j_0}^{j_0}}) & 0 & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors $A_J - I_{j_0-i_0+2}$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ (1 - q^{\sigma_{i_0+1}^{j_0}}) & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (1 - q^{\sigma_{j_0}^{j_0}}) & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que $(A_J - I_{j_0-i_0+2})^2 = 0$ et alors $(\tilde{\tau}_J^* - I_n)^2 = 0$, donc $\tilde{\tau}_J^*$ est unipotente lorsque $q^{\sigma_{i_0}^{j_0}} = 1$. \square

Pour un twist quelconque, nous pouvons ré-indexer les b_1, \dots, b_n de sorte que le support du twist contienne un ensemble de points d'indices successifs $\{b_{i_0}, \dots, b_{j_0}\}$. Le changement de famille génératrice est plus complexe à réaliser mais se fait sur la même idée que celle présentée pour les twists $\alpha_{i,j}$. On pourrait ainsi exprimer l'expression de l'action de ce twist sur une famille génératrice de $H^1(\hat{X})_q$ associée à cette indexation, puis par le changement d'une famille génératrice à l'autre, on expliciterait l'action du twist de Dehn dans la famille initiale (g_1, \dots, g_n) .

Chapitre 11

Densité de Zariski des représentations

ρ_q

On rappelle ici quelques notations : la surface \hat{X} est obtenue à partir d'une courbe algébrique $y^d = \prod_{i=1}^n (x - b_i)^{k_i}$ où $n, d \in \mathbb{N}^*$, les b_i sont des nombres complexes deux à deux distincts, les k_i sont des entiers non nuls vérifiant la condition : $\text{pgcd}(k_1, \dots, k_n, d) = 1$. On note $k_0 = \sum_{i=1}^n k_i$. On a construit dans cette thèse des représentations $\rho_q : PB_n \rightarrow \text{U}(H^1(\hat{X})_q)$, pour $q = e^{-\frac{2i\pi k}{d}}$, une racine d -ème de l'unité différente de 1. On s'intéresse maintenant aux images de ces représentations et on montre, sous certaines conditions, qu'elles sont Zariski-denses dans $\text{PU}(r, s)$, où (r, s) n'est pas nécessairement de la forme $(1, n)$ ou $(n, 1)$ (les cas traités par Deligne-Mostow).

Rappelons qu'on note $\varepsilon_0 = 1$ si $q^{k_0} = 1$ et $\varepsilon_0 = 0$ sinon. On a le théorème suivant :

Théorème 11.0.1. *Supposons qu'il existe une indexation des points marqués pour laquelle les hypothèses ci-dessous sont vérifiées :*

$$\forall r \in \{3, \dots, n - \varepsilon_0\}, \quad d \nmid k(k_1 + \dots + k_r) \quad (11.0.1)$$

$$1 < \left\{ \frac{kk_1}{d} \right\} + \left\{ \frac{kk_2}{d} \right\} + \left\{ \frac{kk_3}{d} \right\} < 2 \quad (11.0.2)$$

Alors la composante neutre de la clôture de Zariski de $\rho_q(PB_n)$ dans $\text{U}(H^1(\hat{X})_q)$ est $\text{SU}(H^1(\hat{X})_q)$.

Pour démontrer ce théorème nous allons faire une récurrence. Nous commencerons par présenter les outils de cette récurrence, puis nous traiterons le premier cas $r = 2$, enfin nous pourrons établir la récurrence et terminer ainsi la démonstration. On remarquera que, indépendamment des hypothèses du théorème ci-dessus, la composante neutre de la clôture de Zariski de l'image de la représentation ρ_q est toujours incluse dans $\text{SU}(H^1(\hat{X})_q)$.

11.1 Outils préparant la récurrence

On note (g_1, \dots, g_n) une famille génératrice de $H^1(\hat{X})_q$ vérifiant le théorème 7.0.1.

Remarque 11.1.1. *On peut choisir la famille (g_1, \dots, g_n) telle que $(g_1, \dots, g_{n-1-\varepsilon_0})$ est une base de $H^1(\hat{X})_q$, avec $\varepsilon_0 = 1$ si $q^{k_0} = 1$ et $\varepsilon_0 = 0$ sinon. En effet, d'après le théorème 6.0.1, la dimension de $H^1(\hat{X})_q$ est $n - 1 - \varepsilon_0$. Remarquons que, comme $\sum_{i=1}^n g_i = 0$, la*

famille (g_1, \dots, g_{n-1}) engendre toujours $H^1(\hat{X})_q$, alors si $\varepsilon_0 = 0$, cette famille est une base de $H^1(\hat{X})_q$. Si $\varepsilon_0 = 1$, cette famille est liée, et quitte à ré-indexer les g_i , ce qui revient à ré-indexer les b_i , on peut supposer que g_{n-1} est une combinaison linéaire des éléments g_1, \dots, g_{n-2} . Alors dans tous les cas, $(g_1, \dots, g_{n-1-\varepsilon_0})$ est une base de $H^1(\hat{X})_q$.

Fixons une telle base, c'est-à-dire une indexation des $\{b_1, \dots, b_n\}$ pour que la famille $(g_1, \dots, g_{n-1-\varepsilon_0})$ forme une base de $H^1(\hat{X})_q$. L'action des générateurs $\alpha_{i,j}$ de PB_n sur $H^1(\hat{X})_q$ est donnée explicitement par le théorème 9.3.2, en particulier, on connaît l'expression de l'action des $\alpha_{i,j}$ sur chacun des g_l .

Supposons que $n - 1 - \varepsilon_0 > 1$. Pour tout $r \in \{2, \dots, n - 1 - \varepsilon_0\}$, on note $\mathbb{V}_r := \langle g_1, \dots, g_r \rangle$. On étudie la signature de la restriction de la forme d'intersection à \mathbb{V}_r à l'aide d'une surface auxiliaire \hat{Z}_{r+1} , obtenue à partir de la courbe algébrique $y^d = \prod_{i=1}^{r+1} (x - b_i)^{k_i}$. Pour cela, montrons que :

Lemme 11.1.2. *On a un isomorphisme entre $H^1(\hat{Z}_{r+1})_q$ et \mathbb{V}_r , qui préserve la forme d'intersection.*

Démonstration : Pour éviter les confusions, notons pour cette démonstration $\langle ; \rangle_{\hat{Z}_{r+1}}$ la forme d'intersection sur $H^1(\hat{Z}_{r+1})_q$ et $\langle ; \rangle_{\hat{X}}$ la forme d'intersection sur $H^1(\hat{X})_q$.

Par le théorème 6.0.1 et l'hypothèse (11.0.1), la dimension de $H^1(\hat{Z}_{r+1})_q$ est r , et on peut noter $\{\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_{r+1}\}$ une famille génératrice vérifiant les conditions du théorème 7.0.1. Alors $\{\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_r\}$ est une base de $H^1(\hat{Z}_{r+1})_q$.

Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, on a par le lemme 6.1.2, $H_c^1(X_i)_q \simeq H_c^1(\pi_{\hat{Z}_{r+1}}^{-1}(D_i))_q$. Or $H_c^1(X_i)_q \simeq \langle g_i \rangle$ et $H_c^1(\pi_{\hat{Z}_{r+1}}^{-1}(D_i))_q \simeq \langle \tilde{g}_i \rangle$. On peut donc définir un morphisme injectif $\phi_r : H^1(\hat{Z}_{r+1})_q \rightarrow H^1(\hat{X})_q$, avec :

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, \quad \phi_r(\tilde{g}_i) := g_i.$$

Par définition des deux familles génératrices, on a, pour tout $i, j \in \{1, \dots, r\}$:

$$\langle \tilde{g}_i, \tilde{g}_j \rangle_{\hat{Z}_{r+1}} = \langle \phi_r(\tilde{g}_i), \phi_r(\tilde{g}_j) \rangle_{\hat{X}} = \langle g_i, g_j \rangle_{\hat{X}}.$$

Clairement, $\mathbb{V}_r = \phi_r(H^1(\hat{Z}_{r+1})_q)$, on a finalement un isomorphisme $H^1(\hat{Z}_{r+1})_q \simeq \mathbb{V}_r$, qui préserve la forme d'intersection par définition. \square

Comme la forme d'intersection $\langle ; \rangle_{\hat{Z}_{r+1}}$ est non dégénérée sur $H^1(\hat{Z}_{r+1})_q$, on en déduit immédiatement :

Lemme 11.1.3. *Pour tout $r \in \{2, \dots, n - 1 - \varepsilon_0\}$, la restriction de la forme d'intersection à \mathbb{V}_r est non dégénérée, et on a la décomposition en somme directe orthogonale :*

$$H^1(\hat{X})_q \simeq \mathbb{V}_r \oplus \mathbb{V}_r^\perp.$$

On peut alors montrer :

Lemme 11.1.4. *Pour $r \in \{1, \dots, n - 1 - \varepsilon_0\}$, pour tout $i, j \in \{1, \dots, r + 1\}$ tel que $i < j$, $\alpha_{i,j}$ préserve la somme directe $H^1(\hat{X})_q = \mathbb{V}_r \oplus \mathbb{V}_r^\perp$.*

Démonstration : Soit $r \in \{1, \dots, n-1-\varepsilon_0\}$. On connaît par le théorème 9.3.1 l'expression de l'action des $\alpha_{i,j}$ sur la famille $(g_1, \dots, g_{n-1-\varepsilon_0})$. Pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$ avec $i < j$, en notant $g'_i = g_i + \sum_{l=i+1}^{j-1} \bar{q}^{\sigma_{i+1}^l} g_l$, on a pour tout $l \in \{1, \dots, n\}$:

$$\alpha_{i,j}(g_l) = \begin{cases} g_{i-1} + (1 - q^{k_j})g'_i & \text{si } l = i-1 \\ g_i - (1 - q^{k_j})g'_i & \text{si } l = i \\ g_{j-1} - q^{\sigma_{i+1}^j}(1 - q^{k_i})g'_i & \text{si } l = j-1 \\ g_j + q^{\sigma_{i+1}^j}(1 - q^{k_i})g'_i & \text{si } l = j \\ g_l & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $\alpha_{i,j}$ préserve les espaces \mathbb{V}_l pour $l \leq i-2$ et $j-1 \leq l$. En particulier, si $j \leq r+1$, alors \mathbb{V}_r est préservé par $\alpha_{i,j}$.

D'autre part, $\mathbb{V}_r^\perp = \cap_{l=1}^r \langle g_l \rangle^\perp$, alors pour tout $x \in \mathbb{V}_r^\perp$, $\langle x, g'_i \rangle = 0$. On peut ainsi vérifier que $\alpha_{i,j}$ préserve également \mathbb{V}_r en utilisant l'expression de $\widetilde{\alpha}_{i,j}^*$ donnée par le théorème 9.3.2 :

$$\forall x \in \mathbb{V}_r^\perp, \quad \alpha_{i,j}(x) = x - i \frac{(1 - q^{k_i})(1 - q^{k_j})}{(1 - q)(1 - \bar{q})} \langle x, g'_i \rangle g'_i = x.$$

Finalement $\alpha_{i,j}$ préserve la somme directe $\mathbb{V}_r \oplus \mathbb{V}_r^\perp$ pour $j \leq r+1$. \square

Remarquons que pour $r \leq n-1$, on peut interpréter une tresse de PB_{r+1} comme une tresse de PB_n en lui ajoutant un certain nombre de brins droits. On peut ainsi considérer PB_{r+1} comme un sous-groupe de PB_n , engendré par les $\alpha_{i,j}$ tels que $j \leq r+1$. D'après le lemme précédent, les tresses de PB_{r+1} préservent \mathbb{V}_r , et on peut donc s'intéresser à la restriction de $\rho_q(PB_{r+1})$ à $U(\mathbb{V}_r)$.

Définition 11.1.5. Notons \mathbb{G}_r la clôture de Zariski de $\rho_q(PB_{r+1})$ dans $U(\mathbb{V}_r)$, les automorphismes de \mathbb{V}_r qui préservent la forme d'intersection, et \mathbb{G}_r^0 la composante neutre de \mathbb{G}_r .

Lemme 11.1.6. Pour tout $r \in \{2, \dots, n-1-\varepsilon_0\}$, $\mathbb{G}_r^0 \subset \text{SU}(\mathbb{V}_r)$.

Démonstration : Notons $U_d(\mathbb{V}_r)$ les automorphismes $X \in U(\mathbb{V}_r)$ tels que $\det(X)^d = 1$. Comme les $\alpha_{i,j}$ sont soit d'ordre fini au plus d , soit unipotents, et qu'ils engendrent PB_n , \mathbb{G}_r est inclus dans $U_d(\mathbb{V}_r)$. En particulier, on a un morphisme :

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_r &\rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \\ X &\mapsto \det(X) \end{aligned}$$

Les valeurs du déterminant prises sur \mathbb{G}_r sont donc discrètes, or \det est continue, et donc constante sur chacune des composantes connexes de \mathbb{G}_r , et en particulier sur la composante neutre \mathbb{G}_r^0 de \mathbb{G}_r , qui contient l'élément neutre. Alors la restriction du déterminant sur \mathbb{G}_r^0 vaut identiquement 1, et on en déduit que \mathbb{G}_r^0 est un sous-groupe de $\text{SU}(\mathbb{V}_r)$. \square

Dans les deux parties suivantes, va montrer par récurrence que :

Proposition 11.1.7. Pour tout $r \in \{2, \dots, n-1-\varepsilon_0\}$, $\mathbb{G}_r^0 = \text{SU}(\mathbb{V}_r)$.

En particulier, la composante neutre de la clôture de Zariski de $\rho_q(PB_n)$, notée $\overline{\rho_q(PB_n)}^Z$, est $\text{SU}(H^1(\hat{X})_q)$. On initialise pour le rang $r = 2$.

11.2 Initialisation au rang 2

Dans cette partie, on montre que la proposition 11.1.7 est vraie au rang $r = 2$, c'est-à-dire :

Proposition 11.2.1. *On a l'égalité $\mathbb{G}_2^0 = \mathrm{SU}(\mathbb{V}_2)$.*

L'idée principale pour démontrer la proposition 11.2.1 est la suivante : nous allons montrer que \mathbb{G}_2^0 est un sous-groupe de Lie de $\mathrm{SU}(1, 1)$, et ne correspondant à aucun des sous-groupes stricts de $\mathrm{SU}(1, 1)$.

On monte dans un premier temps le lemme suivant :

Lemme 11.2.2. *\mathbb{G}_2^0 est isomorphe à un sous-groupe de Lie de $\mathrm{SU}(1, 1)$.*

Démonstration : On a vu précédemment que \mathbb{G}_2^0 sous-groupe de $\mathrm{SU}(\mathbb{V}_2)$, il suffit donc de montrer que $\mathrm{SU}(\mathbb{V}_2) \simeq \mathrm{SU}(1, 1)$. Pour cela, on montre que la signature de la forme d'intersection restreinte à \mathbb{V}_2 est $(1, 1)$.

Remarquons que la signature de la forme d'intersection restreinte à \mathbb{V}_2 est égale à la signature (r, s) de la forme d'intersection de $H^1(\hat{Z}_3)_q$. Rappelons que la dimension de $H^1(\hat{Z}_3)_q$ est 2, et que la forme d'intersection sur $H^1(\hat{Z}_3)_q$ n'est pas dégénérée, donc $(r, s) = (r, 2 - r)$. D'après le théorème 6.0.2, on a :

$$\begin{aligned} r &= \lfloor \frac{k(k_1 + k_2 + k_3)}{d} \rfloor - \sum_{i=1}^3 \lfloor \frac{kk_i}{d} \rfloor \\ &= \frac{k(k_1 + k_2 + k_3)}{d} - \left\{ \frac{k(k_1 + k_2 + k_3)}{d} \right\} - \sum_{i=1}^3 \frac{kk_i}{d} + \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{kk_i}{d} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{kk_i}{d} \right\} - \left\{ \frac{k(k_1 + k_2 + k_3)}{d} \right\} \end{aligned}$$

Or d'après l'hypothèse (11.0.1), comme d ne divise pas $k(k_1 + k_2 + k_3)$, on sait que : $0 < \left\{ \frac{k(k_1 + k_2 + k_3)}{d} \right\} < 1$, et comme d'autre part, d'après l'hypothèse (11.0.2), $1 < \left\{ \frac{kk_1}{d} \right\} + \left\{ \frac{kk_2}{d} \right\} + \left\{ \frac{kk_3}{d} \right\} < 2$. On a donc $0 < r < 2$, d'où $r = 1$ et la signature de la forme d'intersection restreinte à \mathbb{V}_2 est $(1, 1)$. Ainsi, on a $\mathbb{G}_2^0 \subset \mathrm{SU}(\mathbb{V}_2) \simeq \mathrm{SU}(1, 1)$. Comme \mathbb{G}_2^0 est un sous-groupe fermé dans $\mathrm{SU}(1, 1)$, c'est aussi un groupe de Lie d'après le théorème de Cartan-von Neumann. \square

11.2.1 Action de $\mathrm{SU}(1, 1) \simeq \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$

On sait que $\mathrm{SU}(1, 1)$, à conjugaison près dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, est isomorphe à $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. On note $S \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ une matrice telle que : $X \in \mathrm{SU}(1, 1) \mapsto SXS^{-1} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ soit un isomorphisme. En particulier, comme \mathbb{G}_2^0 est un sous-groupe de $\mathrm{SU}(1, 1)$, on a un isomorphisme entre \mathbb{G}_2^0 et un sous-groupe de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, noté G_2 , donné par :

$$\alpha^* \in \mathbb{G}_2^0 \mapsto A = S\alpha^*S^{-1} \in G_2 \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}).$$

Rappelons d'autre part que $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ agit sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ de la façon suivante :

$$\forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}), \forall z \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1, \quad M \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Remarque 11.2.3. Pour $\alpha^* \in \mathbb{G}_2$, il existe une matrice $\beta^* \in \text{SU}(1,1)$ telle que $\alpha^* = \lambda_\alpha \beta^*$, où $\lambda_\alpha^2 = \det(\alpha^*)$. On note $B := S\beta^*S^{-1}$ la matrice associée à β^* dans $\text{SL}(2, \mathbb{R})$. Alors les actions de $A := S\alpha^*S^{-1}$ et de B sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ sont les mêmes. Ainsi, pour étudier l'action de A sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, on pourra se ramener à une certaine matrice $B \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$, dont l'action sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ correspond à celle de l'action de A sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.

En particulier, on en déduit que :

Lemme 11.2.4. Pour $\alpha^* \in \mathbb{G}_2$, $A = S\alpha^*S^{-1}$ préserve les demi-plans $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ et $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) < 0\}$.

Démonstration : Soit $\alpha^* \in \mathbb{G}$ et $A = S\alpha^*S^{-1}$. Reprenons les notations précédentes, et notons $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ une matrice telle que $B \cdot z = A \cdot z$ pour tout $z \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Alors, pour tout $z = \text{Re}(z) + \iota \text{Im}(z) \in \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$, on a :

$$\begin{aligned} B \cdot z &= \frac{az + b}{cz + d} = \frac{(a(\text{Re}(z) + \iota \text{Im}(z)) + b)(c(\text{Re}(z) - \iota \text{Im}(z)) + d)}{|cz + d|^2} \\ &= \frac{((a \text{Re}(z) + b)(c \text{Re}(z) + d) + ac \text{Im}(z)^2) + \iota \text{Im}(z)(ad - bc)}{|cz + d|^2} \in \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}. \end{aligned}$$

Donc $A := S\alpha^*S^{-1}$ préserve le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ et de la même façon, on peut montrer que A préserve $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) < 0\}$. En particulier, $A \cdot \iota \in \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ et $A \cdot (-\iota) \in \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) < 0\}$. \square

Remarquons que :

Lemme 11.2.5. Pour tout $\alpha \in \{\alpha_{1,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{1,3}\}$, α^* normalise \mathbb{G}_2^0 :

$$\alpha^* \cdot \mathbb{G}_2^0 \cdot (\alpha^{-1})^* = \mathbb{G}_2^0.$$

On a alors :

Lemme 11.2.6. Soit $\alpha \in \{\alpha_{1,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{1,3}\}$. Notons $A = S\alpha^*S^{-1}$. Alors pour tout $M \in G_2^0$, $AMA^{-1} \in G_2$. De plus, z est un point fixe de M si et seulement si $A \cdot z$ est un point fixe de AMA^{-1} .

Démonstration : Soit $\alpha \in \{\alpha_{1,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{1,3}\}$. Notons $A = S\alpha^*S^{-1}$. Comme $S^{-1}MS \in \mathbb{G}_2^0$, par le lemme 11.2.5, on sait que $\alpha^*(S^{-1}MS)(\alpha^*)^{-1} \in \mathbb{G}_2^0$. Alors $AMA^{-1} = S(\alpha^*S^{-1}MS\alpha^*)S^{-1} \in G_2$. Pour $z \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$:

$$M \cdot z = z \iff AMA^{-1} \cdot (A \cdot z) = A \cdot z.$$

\square

De plus, à partir du théorème 9.3.2, on peut donner les matrices des restrictions de $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,3}$ et $\alpha_{1,3}$ à \mathbb{V}_2 dans la base $\{g_1, g_2\}$:

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2}^*|_{\mathbb{V}_2} &= \begin{pmatrix} q^{k_1+k_2} & q^{k_2}(1-q^{k_1}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \alpha_{2,3}^*|_{\mathbb{V}_2} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-q^{k_3} & q^{k_2+k_3} \end{pmatrix} \\ \alpha_{1,3}^*|_{\mathbb{V}_2} &= \begin{pmatrix} q^{k_3} & -q^{k_2+k_3}(1-q^{k_1}) \\ -q^{-k_2}(1-q^{k_3}) & 1-q^{k_3}+q^{k_1+k_3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a alors :

Lemme 11.2.7. $\alpha_{1,2}^* \mid_{\mathbb{V}_2} \alpha_{2,3}^* \mid_{\mathbb{V}_2} \alpha_{1,3}^* \mid_{\mathbb{V}_2} = q^{k_1+k_2+k_3} \text{Id} \mid_{\mathbb{V}_2}$

On a immédiatement :

Corollaire 11.2.8. *L'action de $\alpha_{1,2}^* \mid_{\mathbb{V}_2} \alpha_{2,3}^* \mid_{\mathbb{V}_2} \alpha_{1,3}^* \mid_{\mathbb{V}_2}$ sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ est triviale.*

Par la suite, on notera :

- α un élément de $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{1,3}\}$
- $A := S\alpha^*S^{-1} \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$
- $B \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ une matrice agissant sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ de la même façon que A
- $M \in G_2 \setminus \{\pm I_2\}$

Par définition, on peut trouver un point fixe de α^* :

- si $\alpha = \alpha_{1,2}$: la droite engendrée par g_1 dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ est un point fixe de $\alpha_{1,2}^*$, notée **a**
- si $\alpha = \alpha_{2,3}$: la droite engendrée par g_2 dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ est un point fixe de $\alpha_{2,3}^*$, notée **b**
- si $\alpha = \alpha_{1,3}$: la droite engendrée par $g_1 + q^{-k_2}g_2$ dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ est un point fixe de $\alpha_{1,3}^*$, notée **c**

On a évidemment **a**, **b** et **c** sont deux à deux distincts.

11.2.2 Élimination des cas où \mathbb{G}_2^0 est isomorphe à un sous-groupe strict de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$

On garde les notations introduites précédemment. Comme \mathbb{G}_2^0 est un sous-groupe de $\text{SU}(1, 1)$, on a soit $\mathbb{G}_2^0 = \text{SU}(1, 1)$, soit $\mathbb{G}_2^0 = \{I_2\}$, soit, à conjugaison près, \mathbb{G}_2^0 est isomorphe à l'un des sous-groupes suivants :

- $\text{SO}(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$
- $\mathbf{A} := \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$
- $\mathbf{N} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$
- $\mathbf{P} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \right\}$.

On peut à présent démontrer la proposition 11.2.1 :

Démonstration : Supposons que $\mathbb{G}_2^0 \neq \text{SU}(1, 1)$, alors soit $\mathbb{G}_2^0 = \{I_2\}$, soit, à conjugaison près, \mathbb{G}_2^0 est isomorphe à $\text{SO}(2, \mathbb{R})$, \mathbf{A} , \mathbf{N} ou \mathbf{P} . Montrons que chacun de ces cas mène à une contradiction, et donc finalement $\mathbb{G}_2^0 = \text{SU}(1, 1)$.

• Si $\mathbb{G}_2^0 \simeq \text{SO}(2, \mathbb{R})$: Toute matrice de $\text{SO}(2, \mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$ admet uniquement deux points fixes, qui sont ι et $-\iota$. En effet, pour $M = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \in \text{SO}(2, \mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$, si $z \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ est un point fixe de M , alors :

$$M \cdot z = z \iff \frac{\cos(t)z - \sin(t)}{\sin(t)z + \cos(t)} = z \iff \sin(t)(z^2 + 1) = 0.$$

Comme $M \neq \pm I_2$, $\sin(t) \neq 0$, alors $z = \iota$ ou $z = -\iota$.

Soient $M \in G_2 \setminus \{\pm I_2\}$ et $\alpha^* \in \{\alpha_{1,2}^*, \alpha_{2,3}^*, \alpha_{1,3}^*\}$, on note $A = S\alpha^*S^{-1}$. Par le lemme 11.2.6, $AMA^{-1} \in G_2$ et admet donc pour seuls points fixes ι et $-\iota$. Or, par ce même lemme, $A \cdot \iota$ et $A \cdot (-\iota)$ sont deux points fixe de AMA^{-1} . Par le lemme 11.2.4, l'action de A préserve les demi-plans $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ et $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) < 0\}$, on a donc $A \cdot \iota = \iota$

et $A \cdot (-i) = -i$. Ainsi $S \cdot \mathbf{a}$, $S \cdot \mathbf{b}$ et $S \cdot \mathbf{c}$ sont trois points distincts dans $\{-i, i\}$, ce qui est contradictoire. Donc \mathbb{G}_2^0 n'est pas un sous-groupe fini de $\text{SU}(1, 1)$.

Supposons que $\mathbb{G}_2^0 = \{I_2\}$: Remarquons que ce cas correspond à celui pour lequel \mathbb{G}_2 est un groupe discret : en effet, si \mathbb{G}_2 est fini, \mathbb{G}_2^0 étant la composante connexe de \mathbb{G}_2 contenant l'élément neutre, $\mathbb{G}_2^0 = \{I_2\}$. Réciproquement, si $\mathbb{G}_2^0 = \{I_2\}$, alors \mathbb{G}_2 est un groupe fini.

Dans ce cas, on va travailler avec un autre sous-groupe \mathbb{G}_2^1 de \mathbb{G}_2 , défini par :

$$\mathbb{G}_2^1 = \{\alpha^* \in \mathbb{G}_2 \mid \det(\alpha^*) = 1\}.$$

Montrons que $\mathbb{G}_2^1 \neq \{\pm I_2\}$. Puisque $\mathbb{G}_2 \subset \text{U}_d(\mathbb{V}_2)$, on a la suite exacte courte suivante :

$$0 \rightarrow \mathbb{G}_2^1 \rightarrow \mathbb{G}_2 \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

si $\mathbb{G}_2^1 = \{\pm I_2\}$ ou si $\mathbb{G}_2^1 = \{I_2\}$, alors $\mathbb{G}_2/\mathbb{G}_2^1$ est cyclique, donc les éléments de \mathbb{G}_2 sont de la forme $\pm g_0^k$, pour un certain $g_0 \in \mathbb{G}_2$. Tous les éléments de \mathbb{G}_2 ont donc les mêmes points fixes, ce qui n'est pas possible puisque $\alpha_{1,2}^*$, $\alpha_{2,3}^*$ et $\alpha_{1,3}^*$ ont tous les trois des points fixes deux à deux distincts. Donc $\mathbb{G}_2^1 \neq \{\pm I_2\}$.

On va ici noter G_2 le sous-groupe de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ associé par conjugaison à \mathbb{G}_2^1 , donc G_2 est un sous-groupe fini. Sur G_2 on dispose d'un produit scalaire construit à partir du produit scalaire standard de la façon suivante : pour tout $M \in G_2$, ${}^t M I_2 M = {}^t M M$ est une matrice définie positive, et $H := \sum_{M \in G_2} {}^t M M$ est une matrice symétrique définie positive, donc H définit un produit scalaire préservé par l'action de G_2 dans le sens où :

$$\forall M \in G_2, \quad {}^t M H M = H.$$

On sait qu'on peut trouver une base telle que H s'écrive comme la matrice I_2 , dans cette base les matrices de G_2 sont des matrices orthogonales, et à conjugaison près, \mathbb{G}_2^0 se voit comme un sous-groupe de $\text{SO}(2, \mathbb{R})$, que l'on note de nouveau G_2 . On a vu précédemment que les points fixes d'une matrice $M \in G_2 \subset \text{SO}(2, \mathbb{R})$ sont i et $-i$.

Comme $\mathbb{G}_2^1 \neq \{\pm I_2\}$, il existe un élément $M \in G_2 \setminus \{\pm I_2\}$. Soient $M \in G_2 \setminus \{\pm I_2\}$ et $\alpha^* \in \{\alpha_{1,2}^*, \alpha_{2,3}^*, \alpha_{1,3}^*\}$, on note $A = S\alpha^*S^{-1}$. Par le même raisonnement que dans le cas $\mathbb{G}_2^0 \simeq \text{SO}(2, \mathbb{R})$, on aboutit à une contradiction et montrer ainsi que $\mathbb{G}_2^0 \neq \{I_2\}$.

• Si $\mathbb{G}_2^0 \simeq \mathbf{A}$: Regardons les points fixes d'une matrice $M \in \mathbf{A} \setminus \{\pm I_2\}$. En notant $M = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$, on a pour $z \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$:

$$M \cdot z = z \iff \frac{e^t z}{e^{-t}} = z \iff e^{2t} z = z \iff z \in \{\infty, 0\}.$$

Ainsi M admet exactement deux points fixes distincts.

Soit $\alpha \in \{\alpha_{1,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{1,3}\}$ et $A = S\alpha^*S^{-1}$. De même que précédemment, par le lemme 11.2.6, on a $AMA^{-1} \in \mathbf{A}$, et $A \cdot 0$, $A \cdot \infty$ sont des points fixes de AMA^{-1} . Donc $A \cdot 0$, $A \cdot \infty \in \{0, \infty\}$.

D'après le corollaire 11.2.8, on sait que $\alpha_{1,2}^* \alpha_{2,3}^* \alpha_{1,3}^*$ agit comme Id sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Alors :

$$0 = S(\alpha_{1,2}^* \alpha_{2,3}^* \alpha_{1,3}^*)S^{-1} \cdot 0 = \underbrace{(S\alpha_{1,2}^*S^{-1})}_{A_{1,2}} \underbrace{(S\alpha_{2,3}^*S^{-1})}_{A_{2,3}} \underbrace{(S\alpha_{1,3}^*S^{-1})}_{A_{1,3}} \cdot 0.$$

Les matrices $A_{1,2}$, $A_{2,3}$, et $A_{1,3}$ peuvent soit permuter 0 et ∞ , soit les fixer. Si chacun des $A_{i,j}$ permutent 0 et ∞ , alors $A_{1,2}A_{2,3}A_{1,3} \cdot 0 = \infty$. Comme $0 = A_{1,2}A_{2,3}A_{1,3} \cdot 0$, on

en déduit qu'il existe un couple $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$ tel que $A_{i,j} \cdot 0 = 0$. On aura également $A_{i,j} \cdot \infty = \infty$.

D'après la remarque 11.2.3, l'action de $A_{i,j}$ est la même que celle d'une certaine matrice $B \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$. Comme $A_{i,j} \cdot 0 = 0$, on a $B \cdot 0 = 0$, et de même $B \cdot \infty = \infty$. En notant $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $0 = B \cdot 0 = \frac{b}{d}$, donc $b = 0$, et d'autre part $\infty = B \cdot \infty = \frac{a\infty+b}{c\infty+d}$, donc $c = 0$. Donc $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$. D'après le théorème 9.3.2 on sait que α^* est soit unipotent soit d'ordre fini au plus d , il en est donc de même pour $A_{i,j}$ et pour B . Alors si α^* est d'ordre fini $m \in \mathbb{N}^*$, a doit être une racine m -ième de l'unité, or $a \in \mathbb{R}$ donc $a \in \{-1, 1\}$ et l'action de B , et donc celle de α^* est triviale sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, ce qui est contradictoire. Si B est unipotente, sa trace est ± 2 , donc $a \in \{-1, 1\}$ et on aboutit à la même contradiction. Ainsi, \mathbb{G}_2^0 ne peut pas être isomorphe à \mathbf{A} .

- Si $\underline{\mathbb{G}_2^0} \simeq \mathbf{N}$: Regardons les points fixes d'une matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{N} \setminus \{\pm I_2\}$. Pour $z \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, et comme $b \neq 0$ on a :

$$M \cdot z = z \iff z + b = z \iff z = \infty.$$

Notons M la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{N} \setminus \{\pm I_2\}$. Alors pour tout $\alpha \in \{\alpha_{1,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{1,3}\}$, en notant $A = S\alpha^*S^{-1}$, on a de nouveau $A \cdot \infty$ est un point fixe de $AMA^{-1} \in \mathbf{N}$, donc $A \cdot \infty = \infty$. Montrons que ∞ est le seul point fixe de A .

En notant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $AMA^{-1} = \begin{pmatrix} (ad-bc)-ac & a^2 \\ -c^2 & (ad-cb)+da \end{pmatrix} \in \mathbf{N}$, donc $c = 0$. D'après la remarque 11.2.3, l'action de A est la même que celle d'une certaine matrice $B \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$, multiple de A . Alors B est de la forme $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & (a')^{-1} \end{pmatrix}$ où $a', b' \in \mathbb{R}$. Comme α^* est soit unipotent soit d'ordre fini, il en est de même pour A et B . Alors de même que précédemment, $a' = \pm 1$. Puisque l'action de α^* n'est pas triviale, il en est de même pour celle de A et de B . Alors $b' \neq 0$, et on en déduit que le seul point fixe de A est ∞ .

Comme \mathbf{a} est un point fixe de $\alpha_{1,2}^*$, $A_{1,2} \cdot (S \cdot \mathbf{a}) = S \cdot \mathbf{a}$, donc $S \cdot \mathbf{a} = \infty$, et de même $S \cdot \mathbf{b} = S \cdot \mathbf{c} = \infty$. Or \mathbf{a}, \mathbf{b} et \mathbf{c} sont deux à deux distincts, on a donc une contradiction.

- Si $\underline{\mathbb{G}_2^0} \simeq \mathbf{P}$: Regardons les points fixes de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. De même que dans le cas précédent, on peut voir que, pour $z \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, $M \cdot z = z \iff z = \infty$. Donc M admet un unique point fixe ∞ . Alors pour $\alpha \in \{\alpha_{1,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{1,3}\}$, et $A = S\alpha^*S^{-1}$, on a $A \cdot \infty$ est un point fixe de $AMA^{-1} \in \mathbf{P}$. Comme $\text{Tr}(G) = 2$, on a $\text{Tr}(AMA^{-1}) = 2$, donc la matrice AMA^{-1} est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si $b = 0$, on a AMA^{-1} agit trivialement ce qui n'est pas possible, sinon AMA^{-1} fixe uniquement le point ∞ et on peut reprendre l'argument du cas précédent.

Finalement, $\mathbb{G}_2^0 = \text{SU}(1, 1)$ et la proposition 11.2.1 est démontrée. □

Remarque 11.2.9. La condition (11.0.2) est nécessaire pour obtenir $\mathbb{G}_2^0 = \text{SU}(H^1(\hat{X})_q)$. En effet, il existe des cas tels que cette condition ne soit pas vérifiée, et que l'image $\rho_q(PB_n)$ forme un sous-groupe fini de $\text{U}(H^1(\hat{X})_q)$. Alors $\rho_q(PB_n)$ est égale à sa clôture de Zariski et en particulier la composante connexe de cette clôture de Zariski est restreinte à l'élément neutre, donc $\mathbb{G}_2^0 \neq \text{SU}(H^1(\hat{X})_q)$. Pour $q = e^{-\frac{2i\pi}{a}}$, on peut citer les cas suivants, issus de l'article [DM86] (p.82) :

d	k_1	k_2	k_3
12	5	3	3
24	11	7	5
60	29	19	11
$2m$	$m-1$	$m-1$	1

Dans ces différents cas, nous avons $\frac{k_1}{d} + \frac{k_2}{d} + \frac{k_3}{d} < 1$, donc la condition (11.0.2) n'est pas vérifiée.

Passons maintenant à la récurrence.

11.3 Récurrence

On montre ici la proposition suivante :

Proposition 11.3.1. *Pour tout $r \in \{2, \dots, n-2-\varepsilon_0\}$, si $\mathbb{G}_r = \mathrm{SU}(\mathbb{V}_r)$ alors $\mathbb{G}_{r+1} = \mathrm{SU}(\mathbb{V}_{r+1})$.*

Démonstration : Soit $r \in \{2, \dots, n-2-\varepsilon_0\}$. Commençons par expliciter les ensembles $\mathrm{SU}(\mathbb{V}_{r+1})$ et $\mathrm{SU}(\mathbb{V}_r)$. Supposons que $\mathbb{G}_r = \mathrm{SU}(\mathbb{V}_r)$. D'après le lemme 11.1.3, la forme d'intersection restreinte à \mathbb{V}_i n'est pas dégénérée pour tout $i \in \{2, \dots, r+1\}$, alors en utilisant le procédé de Gram-Schmidt, on peut obtenir une base "orthonormée" $\{e_1, \dots, e_{r+1}\}$ de \mathbb{V}_{r+1} telle que :

$$\forall i \in \{2, \dots, r+1\}, \quad \langle e_1, \dots, e_i \rangle = \langle g_1, \dots, g_i \rangle.$$

Dans cette base, la matrice de la forme d'intersection est $H_{r+1} = \mathrm{diag}(\delta_1, \dots, \delta_{r+1})$ où $\delta_i = \langle e_i, e_i \rangle = \pm 1$. On a donc :

$$\mathrm{SU}(\mathbb{V}_{r+1}) = \{A \in \mathcal{M}_{r+1}(\mathbb{C}) \mid {}^t \overline{A} H_{r+1} A = H_{r+1} \text{ et } \det(A) = 1\}.$$

Alors $\mathbb{G}_r^0 = \mathrm{SU}(\mathbb{V}_r)$ s'identifie au sous-groupe de $\mathrm{SU}(\mathbb{V}_r)$ donnée par :

$$\mathrm{SU}(\mathbb{V}_r) = \{A = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r+1}(\mathbb{C}) \mid A' \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C}) \text{ telle que } {}^t \overline{A'} H_r A' = H_r \text{ et } \det(A') = 1\}.$$

On sait que \mathbb{G}_i^0 est un groupe de Lie, comme on a pu le voir dans le lemme 11.2.2 pour le cas $r = 2$, on peut donc considérer l'algèbre de Lie de \mathbb{G}_i^0 , que l'on note \mathfrak{g}_i . D'après l'hypothèse $\mathbb{G}_r^0 = \mathrm{SU}(\mathbb{V}_r)$, on a $\mathfrak{g}_r = \mathfrak{su}(\mathbb{V}_r)$. Comme la forme d'intersection n'est pas dégénérée sur \mathbb{V}_r , en notant les complexifiés $\mathfrak{g}_r(\mathbb{C}) = \mathfrak{g}_r \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et $\mathfrak{g}_{r+1}(\mathbb{C}) = \mathfrak{g}_{r+1} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, on a : $\mathfrak{g}_r(\mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(\mathbb{V}_r) \simeq \mathfrak{sl}(r, \mathbb{C})$. Alors :

$$\mathfrak{g}_r = \left\{ \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid X \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C}) \text{ avec } \mathrm{Tr}(X) = 0 \text{ et } {}^t \overline{X} H_r + H_r X = 0 \right\}.$$

On a :

$$\mathfrak{su}(\mathbb{V}_r \otimes \mathbb{C}) = \mathfrak{g}_r(\mathbb{C}) \subset \mathfrak{g}_{r+1}(\mathbb{C}) \subset \mathfrak{sl}(\mathbb{V}_{r+1}) \simeq \mathfrak{sl}(r+1, \mathbb{C}).$$

Montrons donc que $\mathfrak{g}_{r+1}(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}(r+1, \mathbb{C})$. On sait que toute matrice de $\mathfrak{sl}(r+1, \mathbb{C})$ est de la forme : $\begin{pmatrix} X'' & v \\ {}^t w & d \end{pmatrix}$ avec : $X'' \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$, $v, w \in \mathcal{M}_{1,r}(\mathbb{C})$, $d \in \mathbb{C}$, et $\mathrm{Tr}(X'') + d = 0$. Une telle matrice s'écrit donc comme une somme :

$$X' = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ {}^t w & 0 \end{pmatrix} + \mathrm{diag}(-d, 0, \dots, 0, d)$$

où $X = X'' + \mathrm{diag}(d, 0, \dots, 0)$ et $\mathrm{Tr}(X) = 0$. En montrant que chacune de ces quatre formes de matrice est dans $\mathfrak{g}_{r+1}(\mathbb{C})$, on aura alors $\mathfrak{sl}(r+1, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{g}_{r+1}(\mathbb{C})$.

On détermine la matrice de $(\tau_{r+1}^2)^* = \alpha_{r+1, r+2}^*$ dans la base $\{e_1, \dots, e_{r+1}\}$. Rappelons que $(\tau_{r+1}^2)^*(g_i) = g_i$, pour tout $i = 1, \dots, r-1$. Ainsi, la restriction de $(\tau_{r+1}^2)^*$ à $\langle e_1, \dots, e_{r-1} \rangle$ est l'identité. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_{r+1} \in \mathbb{C}$ et $\mu_1, \dots, \mu_{r+1} \in \mathbb{C}$ tels que :

$$(\tau_{r+1}^2)^*(e_r) = \sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i e_i \quad \text{et} \quad (\tau_{r+1}^2)^*(e_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r+1} \mu_i e_i.$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, r-1\}$, on a :

$$\delta_i \lambda_i = \langle (\tau_{r+1}^2)^*(e_r), e_i \rangle = \langle (\tau_{r+1}^2)^*(e_r), (\tau_{r+1}^2)^*(e_i) \rangle = \langle e_r, e_i \rangle = 0$$

et

$$\delta_i \mu_i = \langle (\tau_{r+1}^2)^*(e_{r+1}), e_i \rangle = \langle (\tau_{r+1}^2)^*(e_{r+1}), (\tau_{r+1}^2)^*(e_i) \rangle = \langle e_{r+1}, e_i \rangle = 0.$$

Alors $\lambda_i = \mu_i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, r-1$, et la matrice de $(\tau_{r+1}^2)^*$ dans la base $\{e_1, \dots, e_{r+1}\}$ est de la forme :

$$A_{r+1} = \begin{pmatrix} I_{r-1} & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{pmatrix}$$

Montrons que les coefficients b, c sont non-nuls. Comme $(\tau_{r+1}^2)^*(g_r) = g_r + (1 - q^{k_{r+2}})g_{r+1} \notin \mathbb{V}_r$, on a $b \neq 0$. Si $c = 0$, remarquons que, comme $\det(A_{r+1}) \neq 0$, $d \neq 0$, et on a alors :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle e_{r+1}, e_r \rangle \\ &= \langle (\tau_{r+1}^2)^*(e_{r+1}), (\tau_{r+1}^2)^*(e_r) \rangle \\ &= \langle de_{r+1}, ae_r + be_{r+1} \rangle \\ &= d\bar{b}\delta_{r+1} \neq 0. \end{aligned}$$

Alors $c \neq 0$.

On note :

$$A_{r+1}^{-1} = \begin{pmatrix} I_{r-1} & 0 & 0 \\ 0 & a' & c' \\ 0 & b' & d' \end{pmatrix}$$

où $\begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. De même que précédemment, on a : $b' \neq 0$ et $c' \neq 0$. On écrira $A_{r+1} = \begin{pmatrix} A_r & v \\ {}^t w & d \end{pmatrix}$ et $A_{r+1}^{-1} = \begin{pmatrix} A'_r & v' \\ {}^t w' & d' \end{pmatrix}$ avec

- $A_r = \begin{pmatrix} I_{r-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, A'_r = \begin{pmatrix} I_{r-1} & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C}),$

- $v = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}, v' = \begin{pmatrix} 0 \\ c' \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}, w' = \begin{pmatrix} 0 \\ b' \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^r.$

Considérons maintenant l'action adjointe de $(\tau_{r+1}^2)^*$ sur $\mathfrak{g}_{r+1}(\mathbb{C})$. On sait que \mathfrak{g}_{r+1} est stable par l'action adjointe de \mathbb{G}_{r+1} . Pour tout $X \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ telle que $\text{Tr}(X) = 0$, la matrice $X' := \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r+1}(\mathbb{C})$ est un élément de $\mathfrak{g}_r(\mathbb{C}) \subset \mathfrak{g}_{r+1}(\mathbb{C})$. Alors

$$\text{Ad}(\tau_{r+1}^{2*})(X') = \begin{pmatrix} A_r & v \\ {}^t w & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A'_r & v' \\ {}^t w' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_r X A'_r & A_r X v' \\ {}^t w X A'_r & {}^t w X v' \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_{r+1}(\mathbb{C}).$$

Si X est la matrice $E_{r,1} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ dont le coefficient sur la r -ième ligne et la première colonne est 1, et tous les autres coefficients sont nuls, alors

$$\text{Ad}(\tau_{r+1}^{2*})(X') = \begin{pmatrix} A_r E_{r,1} A'_r & 0 \\ b & 0 \dots 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $\text{Tr}(A_r E_{r,1} A'_r) = 0$, on a $\begin{pmatrix} A_r E_{r,1} A'_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_r(\mathbb{C})$. Par conséquent $\mathfrak{g}_{r+1}(\mathbb{C})$ contient la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ et donc la matrice $E_{r+1,1} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ car $b \neq 0$.

Si X est la matrice $E_{1,r} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ dont seul le coefficient sur la première ligne et la dernière colonne est égal à 1, tous les autres coefficients sont 0, alors on a

$$\text{Ad}(\tau_{r+1}^{2*})(X') = \begin{pmatrix} & c' \\ A_r E_{1,r} A'_r & 0 \\ & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par le même argument, on conclut que $\mathfrak{g}_{r+1}(\mathbb{C})$ contient la matrice $E_{1,r+1} := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Notons $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^r$. Soient $X \in \mathfrak{sl}(r, \mathbb{C})$ et $X' = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r+1}(\mathbb{C})$ comme plus haut. On a

$$\begin{aligned} \text{ad}(E_{r+1,1})(X') &= E_{r+1,1} X' - X' E_{r+1,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ {}_t v_1 X & 0 \end{pmatrix}, \\ \text{ad}(E_{1,r+1})(X') &= E_{1,r+1} X' - X' E_{1,r+1} = \begin{pmatrix} 0 & X v_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\text{ad}(E_{r+1,1})(E_{1,r+1}) = E_{r+1,1} E_{1,r+1} - E_{1,r+1} E_{r+1,1} = \text{diag}(-1, 0, \dots, 0, 1).$$

Comme $\mathfrak{sl}(r, \mathbb{C})$ agit transitivement sur \mathbb{C}^r , on en déduit que $\mathfrak{g}_{r+1}(\mathbb{C})$ contient les matrices suivantes

- $\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, pour tout $X \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$, $\text{Tr}(X) = 0$,
- $\begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ {}_t w & 0 \end{pmatrix}$, pour tous $v, w \in \mathbb{C}^r$,
- $\text{diag}(-1, 0, \dots, 0, 1)$.

Ces matrices engendrent le sous-espace vectoriel des matrices de trace nulle dans $\mathcal{M}_{r+1}(\mathbb{C})$, on a donc prouvé que $\mathfrak{g}_{r+1}(\mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(r+1, \mathbb{C})$, et donc que $\mathfrak{g}_{r+1} = \mathfrak{su}(\mathbb{V}_{r+1})$. \square

D'après les proposition 11.2.1 et 11.3.1, on a finalement, par le principe de récurrence, la proposition 11.1.7, c'est-à-dire que pour tout $r \in \{2, \dots, n-1-\varepsilon_0\}$, $\mathbb{G}_r^0 = \text{SU}(\mathbb{V}_r)$ pour tout $r \in \{2, \dots, n-1-\varepsilon_0\}$. En particulier, pour $r = n-1-\varepsilon_0$, la composante neutre de $\overline{\rho_q(PB_n)}^Z$ est $\text{SU}(\mathbb{V}_{n-1-\varepsilon_0}) = \text{SU}(H^1(\hat{X})_q)$. On a ainsi démontré le théorème 11.0.1.

Bibliographie

- [Art47] Artin. Theory of braids. *Annals of Mathematics (2)*, 48 :101-126, 1947.
- [Ben19] Yves Benoist. Arithmeticity of discrete subgroups. *Universite Paris Saclay*, 2019.
- [Bla11] Christian Blanchet. Chapitre 3 représentations de groupes de tresses. *im Enseignement M2*, 2010-2011.
- [BT82] Raoul Bott and Loring Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer, Graduate texts in mathematics, 1982.
- [Bur36] Werner Burau. Über zopfgruppen und gleichsinnig verdrillte verkettungen. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg 11*, 1936.
- [Car89] Pierre Cartier. Développement récents sur les groupes de tresses, application à la topologie et à l'algèbre. *Astérisque, séminaire Bourbaki*, 1989.
- [DM86] Pierre Deligne and G.D Mostow. Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy. *Publications Mathématiques de l'IHÉS, Tome 63*, 1986.
- [FK80] Hershel Farkas and Irwin Kra. *Riemann Surfaces*. Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, Graduate texts in mathematics, 1980.
- [FM11] Benson Farb and Dan Margalit. *A Primer on Mapping Class Groups*. Princeton University Press, 2011.
- [GM11] Juan Gonzalez-Meneses. Basic results on braid groups. *Annales Mathématiques Blaise Pascal 18. 15-59*, 2011.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [Kat92] Svetlana Katok. *Fuchsian groups*. university of Chicago Press, 1992.
- [KT08] Christan Kassel and Vladimir Turaev. *Braid group*. Springer, Graduate texts in mathematics, 2008.
- [McM13] Curtis McMullen. Braid groups and Hodge theory. *Mathematische Annalen*, 2013.
- [Mic04] Jean Michel. Cours groupes finis de réflexions. <https://webusers.imj-prg.fr/~jean.michel/papiers/cours2004.pdf>, 2004.
- [Mir95] Rick Miranda. *Algebraic curves and Riemann surfaces*. American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics, 1995.
- [Mos87] Mostow. Braid, hypergeometric function and lattices. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1987.
- [Ven14a] Tyakal.N Venkataramana. Image of the Burau Representation at d-th Roots of unity. *Annals of Math*, 2014.

[Ven14b] Tyakal.N Venkataramana. Monodromy of Cyclic Coverings of the Projective Line. *Invent math* 197 no1, 2014.