



La cavité de couplage acoustique dans la méthode de réciprocité : modèles analytiques pour l'étalonnage des microphones et la mesure d'impédances de petits composants

Cécile Guianvarc'h

► To cite this version:

Cécile Guianvarc'h. La cavité de couplage acoustique dans la méthode de réciprocité : modèles analytiques pour l'étalonnage des microphones et la mesure d'impédances de petits composants. Acoustique [physics.class-ph]. Université du Maine, 2005. Français. <NNT : >. <tel-04172589>

HAL Id: tel-04172589

<https://hal.science/tel-04172589v1>

Submitted on 27 Jul 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Académie de Nantes
ECOLE DOCTORALE DE L'UNIVERSITÉ DU MAINE
LE MANS, FRANCE

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DU MAINE
Spécialité : ACOUSTIQUE

présentée par

CÉCILE GUIANVARC'H

pour obtenir le titre de Docteur d'Université

**LA CAVITÉ DE COUPLAGE ACOUSTIQUE DANS LA
MÉTHODE DE RÉCIPROCITÉ : MODÈLES ANALYTIQUES
POUR L'ÉTALONNAGE DES MICROPHONES
ET LA MESURE D'IMPÉDANCES DE PETITS COMPOSANTS**

soutenue le 9 septembre 2005

devant le jury composé de

B. DUBUS	Directeur de Recherche CNRS, IEMN (Lille), <i>Rapporteur</i>
J.-D. POLACK	Professeur, LAM (Paris 6), <i>Rapporteur</i>
J.-N. DUROCHER	Ingénieur, LNE (Trappes), <i>Promoteur de thèse</i>
PH. HERZOG	Chargé de Recherche CNRS, LMA (Marseille)
M. LECOLLINET	Maître de Conférences, INM/Cnam (Paris 3)
P. LOTTON	HDR Chargé de Recherche CNRS, LAUM (Le Mans)
A.-M. BRUNEAU	Professeur Emérite, LAUM (Le Mans), <i>Directeur de thèse</i>
M. BRUNEAU	Professeur Emérite, LAUM (Le Mans), <i>Directeur de thèse</i>

Remerciements

Cette thèse s'est déroulée au Laboratoire National de Métrologie et d'Essais, dans le cadre d'une collaboration entre le LNE et l'Université du Maine, et a bénéficié d'un financement de l'ANRT (convention CIFRE).

Je tiens, tout d'abord, à exprimer ma profonde gratitude à M. Michel Bruneau et à Mme Anne-Marie Bruneau, Professeurs émérites à l'Université du Maine, à qui je dois la chance d'avoir effectué cette thèse dans d'excellentes conditions. Malgré leurs nombreuses autres responsabilités, ils se sont toujours montrés disponibles et ont fait en sorte que l'encadrement de mon travail à distance se passe au mieux : tout en me guidant dans mes travaux et dans ma rédaction, et en me suggérant un grand nombre d'idées, ils m'ont accordé une grande confiance en me laissant beaucoup d'autonomie, ce qui m'a rendu cette expérience d'autant plus enrichissante et profitable. J'ai beaucoup apprécié l'ambiance chaleureuse dans laquelle ils m'ont encadrée et, pour cela aussi, je tiens à leur exprimer ma sincère reconnaissance.

Je remercie également M. Jean-Noël Durocher, Ingénieur au LNE, qui a initié les travaux de recherche dans lesquels s'insèrent mon travail de thèse. Durant ma thèse au LNE, il m'a fait profiter au quotidien de sa grande expérience en métrologie acoustique et il m'a accordé toute sa confiance en me laissant disposer à ma convenance des équipements de mesure de haute précision du LNE pour effectuer toutes les expérimentations nécessaires à mon travail.

Un grand merci à M. Bertrand Dubus, Directeur de Recherche à l'IEMN, et à M. Jean-Dominique Polack, Professeur à l'Université de Paris 6, d'avoir accepté, malgré leur charge de travail déjà lourde, d'être rapporteurs de ce document, ainsi qu'à MM. et Mme les membres du jury d'avoir également accepté de juger ce travail.

Je tiens également à remercier M. Alexandre Garcia, Professeur au CNAM, et M. Christophe Langrenne, Ingénieur de Recherche au Laboratoire d'Acoustique du CNAM, qui m'ont permis d'enseigner pendant quelques mois en tant que vacataire du CNAM, responsabilité que j'ai eu grand plaisir à assumer. J'ai apprécié la confiance qu'ils m'ont témoignée ainsi que l'intérêt qu'ils ont manifesté à mes travaux de recherche.

Merci à M. Cédric de Waubert et à M. Michel Hebert, techniciens au LNE, pour leur disponibilité et l'aide technique qu'ils m'ont apportée au quotidien ainsi que pour leur sympathie et leur soutien.

Merci également aux personnes que j'ai côtoyées au LNE pour avoir favorisé une ambiance de travail très conviviale et pour leurs enseignements enrichissants sur le monde de l'entreprise.

Mes remerciements vont aussi aux enseignants-chercheurs, en particulier à Mme Catherine Potel, Professeur à l'Université du Maine, et aux doctorants du LAUM qui m'ont toujours réservé un accueil chaleureux chaque fois que j'ai eu l'occasion de les rencontrer, notamment lorsque je me rendais au Mans pour des séances de travail intensif avec mes directeurs de thèse.

Enfin, je remercie Olivier, mon compagnon, ainsi que mes parents et ma sœur pour leur soutien sans faille et pour avoir partagé (et subi !) avec moi les hauts et les bas rencontrés durant cette thèse.

Table des matières

Introduction	1
1 Transducteurs électrostatiques émetteurs et récepteurs, étalonnage par la méthode de réciprocité	5
1.1 Transducteurs électrostatiques	5
1.1.1 Description du transducteur et notations	5
1.1.2 Equations couplées du système	6
1.1.3 Fonctionnement en récepteur	7
1.1.4 Fonctionnement en émetteur	8
1.1.5 Technique de la tension insérée	8
1.2 Etalonnage de microphones par la méthode de réciprocité	10
1.2.1 Microphones étalons de laboratoire	10
1.2.2 Principe général de l'étalonnage en pression par réciprocité	11
1.2.3 Hypothèses admises et discussion	13
2 Techniques et méthodes en usage pour l'étalonnage des microphones par réciprocité	15
2.1 Coupleurs préconisés par la norme CEI 61094-2 [22]	15
2.1.1 Coupleurs dits «en ondes planes»	15
2.1.2 Coupleurs dits «de grand volume»	16
2.2 Admittance acoustique de transfert : modèle physique usuel	17
2.2.1 Admittance de transfert : modèle normalisé de base (théorie des lignes uniformes sans pertes)	18
2.2.2 Correction thermique (normalisée)	21
2.2.3 Correction (normalisée) liées à la présence de tubes capillaires	25
2.2.4 Correction (non normalisée) liée à la présence de modes radiaux	26
2.2.5 Coefficients (non normalisés) de pression et de température	27
2.2.6 Admittance acoustique de transfert : conclusion	27
2.3 Techniques de mesure des quantités dont dépend le produit des efficacités	28
2.3.1 Mesure des éléments géométriques	28
2.3.2 Mesure de l'impédance acoustique d'un microphone	29
2.4 Mesure de l'impédance électrique de transfert (dispositif utilisé au LNE)	36
3 Etude de différents modèles physiques du système microphones - coupleur	41
3.1 Equations fondamentales de l'acoustique linéaire en fluide thermo-visqueux	41
3.2 Résolution du problème en cavité proposée par Gerber (1964)	42

3.2.1	Interprétation de l'équation de conduction de la chaleur	43
3.2.2	Hypothèses retenues et présentation du problème (selon Gerber)	44
3.2.3	Solutions pour la température	45
3.2.4	Admittance acoustique de transfert de la cavité	52
3.3	Champ acoustique en «petite» cavité, en régime harmonique	53
3.3.1	Les équations de la petite cavité	54
3.3.2	La solution	55
3.4	Propagation d'ondes planes	57
3.4.1	Equations simplifiées	57
3.4.2	Champ acoustique dans le cylindre	59
3.4.3	Admittance acoustique de transfert	60
3.5	Synthèse des différents modèles existants	61
3.5.1	Modèles à champ de pression uniforme	61
3.5.2	Comparaison des résultats obtenus avec différents modèles	62
4	Champ acoustique en cavité cylindrique : modèle basé sur la formulation intégrale du problème aux limites	67
4.1	Equations fondamentales du problème	67
4.1.1	Equations fondamentales et conditions aux frontières sur les parois latérales	68
4.1.2	Equation de propagation	69
4.2	Champ acoustique dans une cavité fermée, théorème de Green	71
4.3	Expression de la fonction de Green, problème aux valeurs propres	73
4.4	Champ acoustique dans la cavité	74
4.5	Admittance acoustique de transfert	77
4.6	Résultats théoriques	79
5	Procédé de mesure de l'impédance acoustique des éléments constitutifs de l'oreille artificielle	85
5.1	Description de l'oreille artificielle	86
5.2	Méthode de test mise en œuvre au LNE	87
5.3	Procédé de mesure des impédances acoustiques des éléments de l'oreille artificielle	89
5.3.1	Méthode de mesure des impédances d'entrée des éléments de l'oreille artificielle	89
5.3.2	Modèle basé sur la propagation d'ondes planes	90
5.3.3	Modèle basé sur la formulation intégrale du problème aux limites	92
5.3.4	Résultats théoriques et premiers résultats expérimentaux	98
	Conclusion	109
A	Dimensions normalisées pour les coupleurs acoustiques	111
B	Fiche synoptique de l'appareil de réciprocité	113
C	Comparaison entre les solutions de Gerber avec celle établie pour la «petite» cavité	115
C.1	Problèmes traités	115
C.2	Solution du problème général	116

C.3	Equivalence des solutions	117
D	Corrections thermiques pour différentes formes de cavités (Gerber)	119
D.1	Sphère	119
D.1.1	Développement modal	119
D.1.2	Solution à court terme par transformée de Laplace	120
D.2	Boîte «infinie»	122
D.3	Cylindre semi-infini	123
D.4	Parallélépipède	124
D.4.1	Développement modal	124
D.4.2	Solution à court terme par transformée de Laplace	125
D.5	Solution générale pour la température	125
E	Propriétés utiles des fonctions de Bessel	127
E.1	Définitions	127
E.2	Relations de dérivation et d'intégration	127
E.3	Développements asymptotiques	128
E.4	Développement asymptotique de K_h dans le cas d'un tube «large»	128
F	Table des transformées de Laplace	131
G	Propagation d'ondes quasi-planes	135
G.1	Equations de propagation de l'acoustique linéaire	135
G.2	Recherche de solutions	136
G.3	Solution dans le cas d'un cylindre fermé par deux microphones	138
G.4	Admittance acoustique de transfert	141
H	Réflexion d'une onde acoustique plane harmonique sur un plan rigide animé d'une vitesse	143
I	Calculs intermédiaires sur la propagation d'ondes radiales	147
I.1	Calcul des coefficients $g_{\mu\nu}(z, z_0)$	147
I.2	Calcul des produits scalaires de fonctions propres	148
I.3	Admittances spécifiques de parois	149
I.4	Champ de vitesse de l'émetteur	149
I.5	Calcul des produits scalaires de fonctions propres et de vitesse de l'émetteur	150
I.5.1	Champ de vitesse uniforme	151
I.5.2	Champ de vitesse non uniforme, imposé par les caractéristiques mécaniques de la membrane	151
I.5.3	Champ de vitesse développé sur les modes propres de la cavité	151
I.6	Calcul des coefficients $p_{0\nu}^c(\ell)$ et $p_{0\nu}^c(0)$	152
I.7	Calcul des $\langle \psi_{0\nu}^c \rangle_{e,r}$	153
I.8	Calcul de la pression moyenne $\langle p(\ell) \rangle_r$ en tenant compte d'une pondération [25]	153
J	Incertitudes relatives aux techniques de mesures	155
J.1	Rappels sur le calcul d'incertitudes [18]	155
J.2	Incertitudes sur les paramètres entrant dans le calcul du produit des efficacités	156

J.2.1	Contribution des paramètres indépendants des microphones et de la mesure à l'incertitude sur l'efficacité M_{p1}	158
J.2.2	Contribution des paramètres liés uniquement aux microphones à l'incertitude sur l'efficacité M_{p1}	158
J.2.3	Contribution des paramètres liés uniquement à la mesure à l'incertitude sur l'efficacité M_{p1}	160
J.3	Incertitudes sur les paramètres n'entrant pas en compte dans le calcul du produit des efficacités	160
J.4	Incertitudes obtenues au LNE	161
K	Calculs intermédiaires sur le modèle développé pour mesurer l'impédances des éléments de l'oreille artificielle	165
K.1	Fente annulaire	165
K.2	Réseau de quatre tubes cylindriques	166
K.3	Expression générale	166
L	Description des coupleurs cylindriques comportant un petit composant acoustique en paroi	167
L.1	Coupleur avec une fente annulaire en paroi	167
L.2	Coupleur avec quatre tubes cylindriques en paroi	169
M	Compléments sur les techniques de mesures en usage au LNE	173
M.1	Paramètres à contrôler durant les mesures	173
M.1.1	Fuites acoustiques	173
M.1.2	Conditions ambiantes	175
M.1.3	Diverses sources de perturbation des mesures	176
M.2	Participation du LNE à une intercomparaison internationale	177
M.2.1	Protocole suivi au LNE pour l'intercomparaison	177
M.2.2	Résultats du LNE	178
	Bibliographie	181

Introduction

Les caractéristiques des dispositifs de mesures de pressions acoustiques doivent être déterminées par rapport à une référence. L'étalon de référence utilisé dans les laboratoires de métrologie pour les appareils de mesures acoustiques sont des microphones électrostatiques de haute qualité appelés microphones étalons de laboratoire. Ces microphones représentant l'étalon en métrologie acoustique, leur propre étalonnage constitue la base de toutes les mesures de pressions acoustiques. Aussi pendant de nombreuses années, des travaux de recherche ont été effectués dans le but de trouver des méthodes aussi précises que possible pour étalonner ces microphones, c'est-à-dire pour déterminer leur efficacité en pression en fonction de la fréquence. De nombreuses méthodes d'étalonnage, faisant appel à des principes très divers, ont ainsi été mises au point au fil du temps (thermophone, pistonphone, disque de Rayleigh, grille d'entraînement...).

L'utilisation du thermophone à feuille d'or, qui repose sur la génération thermique (par effet Joule) d'un son dans une petite cavité, est historiquement la première méthode d'étalonnage relativement précise qui ait été utilisée dans la pratique. Cependant cette méthode pose de nombreux problèmes de mise en œuvre tant pratique (la réalisation et la mise en place du banc d'étalonnage étant assez délicates) que théorique (la théorie sur laquelle repose cette méthode devient complexe pour un niveau de précision élevé). De plus cette méthode ne permet pas d'étalonner des microphones sur une gamme de fréquences très large. Du fait de ces inconvénients, la méthode du thermophone a été peu à peu abandonnée au profit de la méthode de réciprocité, plus simple à mettre en œuvre et permettant d'effectuer des étalonnages précis sur une large gamme de fréquences (20 Hz – 30 kHz, selon le type de microphone). Elle est la méthode actuellement en usage pour l'étalonnage des microphones étalons de laboratoire (norme CEI 61094-2).

La méthode de réciprocité nécessite l'usage de deux microphones couplés par une cavité acoustique close, généralement de forme cylindrique, fermée latéralement par des parois rigides et, aux extrémités, par les membranes des microphones, l'un étant utilisé en émetteur, l'autre en récepteur. Le produit des efficacités des microphones est déduit de mesures électriques (rapport de la tension de sortie à circuit ouvert sur le courant d'entrée) et du calcul de l'admittance acoustique de transfert du système (rapport du débit de l'émetteur en court-circuit acoustique sur la pression sur le récepteur). La valeur de cette admittance repose sur l'expression analytique du champ acoustique dans la cavité de couplage, champ qui fait intervenir des paramètres de natures diverses (électriques, acoustiques, mécaniques, thermodynamiques, géométriques). De nos jours, les équipements et les techniques de mesures permettent d'atteindre une précision dans les mesures électriques de l'ordre du centième de décibel. Une précision du même ordre de grandeur est alors recherchée dans le calcul de l'admittance acoustique de transfert.

Ainsi, au cours des dernières décennies, divers travaux ont été effectués tant pour modéliser précisément chaque partie du système (capsules microphoniques, circuits électriques, cavité de

couplage) que pour déterminer les paramètres ayant une influence sur son comportement (propriétés physiques du fluide, caractéristiques des microphones, forme de la cavité de couplage, ...). En particulier, des études ont été menées afin d'améliorer la compréhension des phénomènes physiques dans la cavité de couplage et ainsi de modéliser avec précision le champ acoustique dans cette cavité. La norme actuellement en vigueur, décrivant les techniques qui doivent être utilisées pour un étalonnage de microphones par la méthode de réciprocité, retient une expression de l'admittance acoustique de transfert qui prend en compte les effets des couches limites thermiques (par un facteur correctif) et suppose un champ de pression indépendant des coordonnées (r, θ) dans le plan parallèle aux membranes des microphones. Ces approximations, justifiées dans une gamme de fréquences peu élevée (jusqu'à environ 10 kHz) ne le sont plus pour des fréquences plus élevées (de 10 kHz à 30 kHz) si on veut accéder à un étalonnage dont la précision est compatible avec la précision de la mesure électrique. C'est l'objet du travail présenté ici que de mener une étude plus approfondie du champ de pression dans la cavité de couplage afin d'établir des modèles analytiques plus complets de ce champ de pression et ainsi améliorer la précision des étalonnages de microphones par la méthode de réciprocité.

Actuellement, le Laboratoire National de Métrologie et d'Essais (LNE), anciennement Laboratoire National d'Essais, cherche à renforcer sa position dans le domaine de la métrologie, comme en témoigne son récent changement de nom. Dans le domaine de la métrologie acoustique, le LNE manifeste depuis plusieurs années une volonté de modernisation des techniques et méthodes existantes pour l'étalonnage des microphones et d'intégration de nouvelles activités, comme l'audiométrie. Concernant l'étalonnage des microphones, le LNE a acquis un nouveau banc d'étalonnage de microphones par la méthode de réciprocité en remplacement du précédent qui était devenu obsolète, dont la mise en place a fait l'objet du début du présent travail. Les techniques de mesures du LNE ayant dès lors atteint un très bon degré de précision, le LNE a souhaité poursuivre son effort dans l'amélioration de la précision des étalonnages de microphones par une étude plus poussée sur la modélisation du champ de pression dans la cavité de couplage. A noter que ces travaux d'amélioration des méthodes et techniques existantes au LNE ont trouvé un intérêt tout particulier dans sa participation à une intercomparaison internationale sur l'étalonnage des microphones.

Dans un autre domaine, suite à une forte demande de la part des milieux médicaux, le LNE souhaite contribuer à améliorer la qualité des tests audiométriques, notamment en développant une activité de réglage et d'essais d'audiomètres. Ceci l'a amené à considérer les problèmes liés au dispositif appelé «oreille artificielle», censé présenter à un écouteur l'impédance de l'oreille humaine, et conçu en particulier pour régler les audiomètres. En effet, il n'existe pas à ce jour de méthode pour étalonner ce dispositif, ce qui explique en grande partie la dispersion actuelle des résultats des tests audiométriques. Afin de mettre au point une méthode d'étalonnage pour l'oreille artificielle, une étude sur la modélisation analytique individuelle de chacun de ses éléments constitutifs (tubes et fente capillaires chargés par des volumes annulaires) a été réalisée dans le cadre d'un contrat de collaboration entre le Bureau National de Métrologie (BNM) et le Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (LAUM) (2002). Il reste à présent à vérifier expérimentalement la validité de ces modèles; c'est ainsi qu'en l'absence, à l'heure actuelle à notre connaissance, de méthodes adaptées à la mesure d'impédances d'entrée de petits composants acoustiques, une méthode reposant entièrement sur la méthode de réciprocité pour l'étalonnage des microphones a été mise au point. Cette méthode consiste en des mesures électriques faisant usage du même dispositif que pour l'étalonnage des microphones en plaçant les éléments à caractériser sur les parois latérales de la cavité de couplage. Ainsi, la modélisa-

tion très précise de la cavité de couplage pour l'étalonnage des microphones, en particulier en considérant la structure fine de la répartition spatiale du champ acoustique, qui aurait peut-être pu paraître un peu vaine tant le niveau de précision recherché est élevé, prend un intérêt tout particulier qui va au-delà de l'étalonnage lui-même, car elle doit permettre de poser les bases théoriques de la mise au point d'une méthode de mesure fine des caractéristiques d'entrée de petits composants acoustiques qui fait défaut à l'heure actuelle.

Par suite, le but de cette étude du champ de pression dans la cavité de couplage, présentée dans les cinq chapitres qui suivent, est d'établir des modèles analytiques plus complets que ceux en usage pour la cavité de couplage, prenant en compte les effets de couches limites visqueuses et thermiques et la structure fine de la répartition spatiale du champ acoustique, en vue d'une amélioration de la précision des étalonnages de microphones et d'une application à la mise au point d'une méthode de mesure fine des caractéristiques d'entrée de petits composants acoustiques.

Les deux premiers chapitres ont pour but de présenter les principes fondamentaux sur lesquels repose l'étalonnage des microphones par la méthode de réciprocité, notamment la modélisation du microphone électrostatique (chapitre 1), ainsi que les méthodes et techniques actuellement en usage pour l'étalonnage des microphones (chapitre 2). L'état de cet existant, en particulier une certaine opacité des bases sur lesquelles reposent les modèles préconisés par la norme, montrent la nécessité d'effectuer une étude plus approfondie des modèles existants voire d'en proposer d'autres, ces modèles se révélant en réalité insuffisants au regard du niveau de précision recherché ; c'est l'objet du troisième chapitre.

Les modèles établis dans ce chapitre 3 supposent un certain nombre d'approximations, négligeant ainsi certains phénomènes pouvant avoir une influence significative sur les résultats d'étalonnage. Une modélisation analytique plus poussée est proposée donc dans le chapitre 4, prenant en compte à la fois les effets de couches limites visqueuses et thermiques et l'existence de modes supérieurs (en particulier radiaux) dans la cavité de couplage. Cette modélisation, bien que soulevant des problèmes physiques liés à la modélisation du microphone électrostatique, est une base sur laquelle repose, dans le cinquième chapitre, le modèle pour le champ de pression dans une cavité de couplage sur les parois de laquelle sont placés de petits composants acoustiques, dispositif ayant pour but de mesurer avec précision leurs caractéristiques d'entrée.

Les travaux expérimentaux menés parallèlement à cette étude théorique ont conduit au perfectionnement du banc d'étalonnage du LNE et à la mise au point du processus de mesure de haute précision par la réalisation d'un grand nombre d'étalonnages de microphones, ceci dans le cadre de la participation du LNE à une intercomparaison internationale sur l'étalonnage de microphones par la méthode de réciprocité (courant 2003, annexe M). Par ailleurs, une étude expérimentale préliminaire ouvre la voie à la caractérisation fine de petits composants acoustiques (ce qui fait défaut à l'heure actuelle).

Chapitre 1

Transducteurs électrostatiques émetteurs et récepteurs, étalonnage par la méthode de réciprocité

1.1 Transducteurs électrostatiques

L'objet de ce paragraphe est de rappeler les équations couplées des transducteurs électrostatiques, les équations relatives à leurs différents modes de fonctionnement (émetteur, récepteur) ainsi que les bases de la technique de la tension insérée, technique préconisée par la norme CEI 61094-2 [22] pour déterminer la tension à circuit ouvert d'un microphone quand il est chargé électriquement.

Ces rappels sont extraits d'un rapport de contrat [9].

1.1.1 Description du transducteur et notations

Un transducteur électrostatique (récepteur ou émetteur) est un condensateur électrique, de surface S_m et de permittivité diélectrique ε , constitué de deux armatures (l'une fixe, l'autre mobile) séparées par une distance $d(t) = d_0 + \xi(t)$ (où d_0 est une constante positive et où le déplacement ξ est compté positif comme l'indique la figure 1.1). Ce condensateur présente à ses bornes une différence de potentiel $U(t) = U_0 + u(t)$ et il est parcouru par un courant électrique $I(t) = I_0 + i(t)$ (sommes de valeurs constantes et d'écarts instantanés). Sa capacité est écrite

$$C = \frac{\varepsilon S_m}{d} = \frac{\varepsilon S_m}{d_0(1 + \xi/d_0)} = \frac{C_0}{1 + \xi/d_0},$$

où $C_0 = \varepsilon S_m/d_0$ représente la capacité du condensateur «au repos».

L'armature mobile est une membrane (caractérisée par sa masse et sa souplesse). Elle est soumise à l'avant à une force extérieure F (définie positive suivant l'axe tracé sur la figure 1.1). Sa charge acoustique à l'arrière est assez complexe (cavité, armature fixe perforée et orifice capillaire d'égalisation de pression statique); l'impédance mécanique de cet ensemble membrane - charge arrière (rapport de la force exercée sur la membrane sur la vitesse de la membrane, les deux étant orientées dans le même sens), généralement appelée impédance mécanique de la membrane est notée Z_m . La charge acoustique («Load») à l'avant est caractérisée par l'impédance acoustique qu'elle présente à la membrane (impédance de rayonnement) notée

Z_L , rapport de la pression créée par son mouvement sur le produit de la surface de la membrane par la vitesse telle qu'orientée sur la figure 1.1.

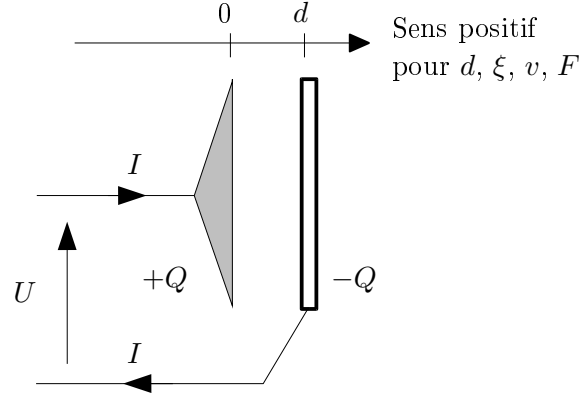


FIG. 1.1 – Transducteur électrostatique : schéma de principe.

1.1.2 Equations couplées du système

Les couplages électroacoustiques assurés par le transducteur peuvent être décrits par deux équations couplées reliant les grandeurs électriques u et i (définies précédemment) et les grandeurs acoustiques, pression acoustique p et vitesse particulière v à l'avant de la membrane.

La relation

$$U(t) = \frac{Q(t)}{C(t)} = \frac{Q_0 + q(t)}{C_0/(1 + \xi/d_0)},$$

où $Q = Q_0 + q$ représente la charge électrique du condensateur, soit au premier ordre de la quantité ξ/d_0 ,

$$U_0 + u(t) \approx \frac{Q_0}{C_0} + \frac{q}{C_0} + \frac{U_0}{d_0} \xi,$$

donne directement la première des deux équations de couplage, pour des signaux harmoniques de pulsation ω et avec la convention $e^{j\omega t}$,

$$u(t) = \frac{1}{j\omega C_0} i(t) + \frac{U_0}{j\omega d_0} v(t), \quad (1.1)$$

où $v(t) = \frac{\partial \xi}{\partial t}$ est la vitesse de la membrane orientée selon le sens indiqué figure 1.1.

La seconde équation de couplage traduit l'équilibre des forces exercées sur la membrane. Ces forces (orientées dans le même sens que le déplacement) sont les suivantes :

– la force électrostatique

$$-\frac{Q^2}{2\varepsilon S_m} = -\frac{Q^2}{2Cd} = -\frac{(Q_0 + q)^2}{2C_0 d_0} \approx -\frac{Q_0^2}{2C_0 d_0} - \frac{Q_0 q}{C_0 d_0} = -\frac{Q_0^2}{2C_0 d_0} - \frac{U_0 q}{d_0},$$

– la force extérieure F à l'avant du transducteur (produit de la surface S_m de la membrane par l'opposé de la pression acoustique qui règnerait si la membrane ne vibrerait pas),

- la force de réaction statique $Q_0^2/(2C_0d_0)$ sur la membrane,
- la force liée au mouvement de la membrane $-(Z_m + S_m^2 Z_L)v$.

Ainsi l'équation d'équilibre des forces s'écrit-elle

$$F = \frac{U_0}{j\omega d_0} i + (Z_m + S_m^2 Z_L)v.$$

Le report, dans cette expression, de la pression acoustique à l'avant du microphone (due à la force extérieure et au mouvement de la membrane),

$$p = -\frac{F}{S_m} + Z_L S_m v,$$

conduit à la seconde équation de couplage :

$$\frac{F}{S_m} - Z_L S_m v = -p = \frac{U_0}{j\omega d_0 S_m} i + \frac{Z_m}{S_m^2} S_m v. \quad (1.2)$$

1.1.3 Fonctionnement en récepteur

Lors d'un fonctionnement en récepteur, le transducteur, soumis à la pression acoustique p , délivre un signal électrique u appliqué à un préamplificateur dont l'impédance d'entrée (incluant résistance de polarisation et capacité de liaison) est notée Z_e . Les composantes variables u et i de la tension et de l'intensité de sortie du transducteur sont ainsi (compte tenu des orientations précisées sur la figure 1.1) liées par la relation

$$u = -Z_e i \quad (1.3)$$

et par suite les équations (1.1) et (1.2) peuvent être écrites :

$$v = \frac{j\omega d_0}{U_0} \frac{1}{Z_e} \left[Z_e + \frac{1}{j\omega C_0} \right] u \quad (1.4)$$

et

$$S_m p = - \left[\left(\frac{U_0}{\omega d_0} \right)^2 \frac{1}{Z_e + 1/(j\omega C_0)} + Z_m \right] v. \quad (1.5)$$

Ces dernières relations conduisent à l'expression de l'efficacité en pression u/p du transducteur,

$$\frac{u}{p} = -\frac{U_0 S_m}{j\omega d_0} \frac{Z_e}{Z_m [Z_e + 1/(j\omega C_0)] + [U_0/(\omega d_0)]^2}, \quad (1.6)$$

et à celle de l'impédance acoustique présentée par celui-ci,

$$Z_a = -\frac{p}{S_m v} = \frac{1}{S_m^2} \left[\left(\frac{U_0}{\omega d_0} \right)^2 \frac{1}{Z_e + 1/(j\omega C_0)} + Z_m \right]. \quad (1.7)$$

Si le transducteur est à circuit ouvert (ou si l'impédance d'entrée du préamplificateur est suffisamment grande), le courant i est nul et ces deux dernières quantités s'écrivent :

$$M_p = \left(\frac{u}{p} \right)_{i=0} = -\frac{U_0 S_m}{j\omega d_0 Z_m} \quad (1.8)$$

et

$$(Z_a)_{i=0} = \frac{Z_m}{S_m^2} . \quad (1.9)$$

Les expressions (1.8) et (1.9) font apparaître que l'efficacité du microphone à circuit ouvert M_p est inversement proportionnelle à l'impédance acoustique à circuit ouvert $(Z_a)_{i=0}$.

La tension électrique u_0 à circuit ouvert est déterminée dans la pratique par la technique de la tension insérée (§ 1.1.5).

1.1.4 Fonctionnement en émetteur

Lors d'un fonctionnement en émetteur, la force extérieure F exercée sur la membrane est nulle et le mouvement de la membrane dû à la tension u appliquée au transducteur est à l'origine de la pression p rayonnée. Cette pression acoustique p est reliée à la vitesse v de la membrane par l'impédance Z_L :

$$p = Z_L S_m v . \quad (1.10)$$

Le report de cette relation dans les équations (1.1) et (1.2) conduit à l'expression de l'impédance électrique présentée par le transducteur,

$$\frac{u}{i} = \frac{1}{j\omega C_0} + \left(\frac{U_0}{\omega d_0 S_m} \right)^2 \frac{1}{Z_L + Z_m/S_m^2} , \quad (1.11)$$

à l'expression de la pression générée par la source en fonction du courant i fourni au transducteur,

$$p = -\frac{U_0}{j\omega d_0 S_m} \frac{Z_L}{Z_L + Z_m/S_m^2} i = \frac{Z_L Z_m/S_m^2}{Z_L + Z_m/S_m^2} M_p i , \quad (1.12)$$

et à l'expression du débit généré par la source en fonction du courant i fourni au transducteur

$$S_m v = -\frac{Z_m/S_m^2}{Z_L + Z_m/S_m^2} \frac{U_0 S_m}{j\omega d_0 Z_m} i = \frac{Z_m/S_m^2}{Z_L + Z_m/S_m^2} M_p i . \quad (1.13)$$

1.1.5 Technique de la tension insérée

La technique de la tension insérée est utilisée pour déterminer la tension à circuit ouvert d'un microphone quand il est chargé électriquement. Elle est décrite dans la norme CEI 1094-2 [22] et elle est utilisée au LNE dans le cadre des étalonnages en pression des microphones. L'objet de ce paragraphe est de rappeler cette technique et de préciser les bases sur lesquelles elle repose.

Pour mesurer la tension à circuit ouvert, une impédance Z , petite par rapport à l'impédance de charge (impédance d'entrée Z_e du préamplificateur), est connectée en série avec le microphone ; une tension dite «d'étalonnage» u_g est ou non appliquée à ses bornes. Une pression acoustique (p_i sur la figure 1.2) et cette tension d'étalonnage de même fréquence sont appliquées alternativement. La tension d'étalonnage est ajustée de façon à ce qu'elle produise la même différence de potentiel aux bornes de l'impédance de charge que la pression acoustique appliquée ; la tension en circuit ouvert est alors égale en module à la tension d'étalonnage [22].

En effet les équations de couplage (1.1) et (1.2) peuvent être formellement traduites par le schéma équivalent de la figure 1.2.

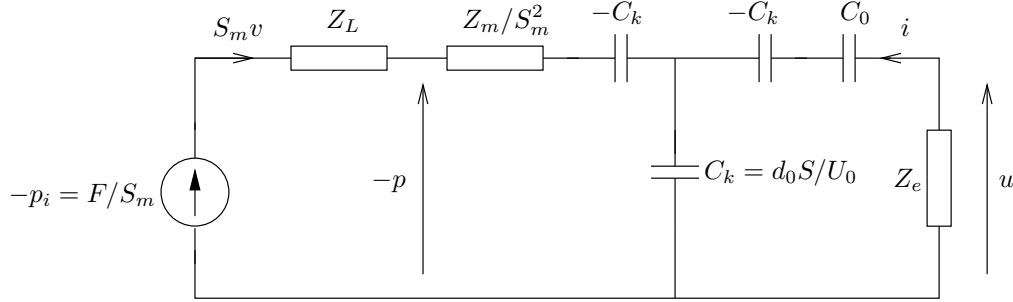


FIG. 1.2 – Schéma représentatif des équations de couplage.

Pour la première partie de la mesure (en présence de la pression acoustique $-p_i = F/S_m$), le transducteur fonctionnant en microphone peut être modélisé par un générateur de Thévenin dont la tension interne u_{Th} (tension à circuit ouvert que l'on cherche à mesurer) et l'impédance interne Z_{Th} sont données par

$$u_{Th} = \frac{-p_i S_m U_0}{j \omega d_0 (S_m^2 Z_L + Z_m)} \quad \text{et} \quad Z_{Th} = \frac{1}{j \omega C_0} + \left(\frac{U_0}{\omega d_0 S_m} \right)^2 \frac{1}{Z_L + Z_m/S_m^2}, \quad (1.14)$$

ce qui conduit pour le montage expérimental au schéma électrique équivalent donné figure 1.3 en déconnectant la source générant u_g .

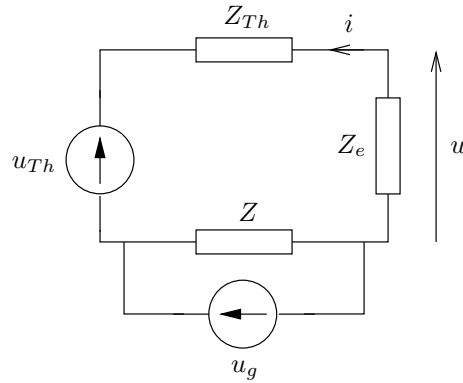


FIG. 1.3 – Schéma électrique équivalent au montage.

Pour la seconde partie de la mesure (en présence d'une tension d'étalonnage $u_g \neq 0$), le transducteur fonctionnant en émetteur, la force extérieure est nulle ($p_i = 0$) et la pression p (la pression rayonnée) est celle qui apparaît aux bornes de l'impédance Z_L (figure 1.2). Le comportement du transducteur est décrit par son impédance électrique Z_{Th} . Le circuit équivalent du montage est celui de la figure 1.3 pour lequel la différence de potentiel $u_{Th} = 0$ et la différence de potentiel u_g est ajustée de manière à ce qu'elle produise la même chute de tension aux bornes de l'impédance de charge Z_e que la pression acoustique lors de la première partie de la mesure. Dès lors, du fait que $Z \ll Z_e$, u_g prend la valeur de la tension à circuit ouvert cherchée (valeur de u_{Th} dans la première partie de la mesure).

Cette technique repose cependant sur l'hypothèse que la pression acoustique p_i , créée par un transducteur émetteur, prend la même valeur que le microphone soit en circuit ouvert ou chargé par l'impédance Z_e . En pratique cette technique est utilisée pour un microphone couplé à un autre transducteur capacitif émetteur par l'intermédiaire d'une cavité; c'est l'étude du problème couplé dans sa globalité qui permet de vérifier le bien fondé de cette hypothèse (voir discussion plus loin au paragraphe 1.2.3).

1.2 Etalonnage de microphones par la méthode de réciprocité

1.2.1 Microphones étalons de laboratoire

Les microphones étalons de laboratoire sont des microphones électrostatiques à réponse en pression. Etant des transducteurs électrostatiques, ces microphones sont alors des transducteurs réciproques (réversibles et conservant les mêmes caractéristiques en fonctionnant en émetteur).

Ce type de microphone constitue le premier élément de la chaîne métrologique acoustique en ce qu'il sert de référence pour tous les autres dispositifs de mesure acoustique. En effet, étalonné par la méthode de réciprocité, il permet d'étalonner les microphones de travail (par réciprocité, substitution ou comparaison) qui permettent eux mêmes d'étalonner les calibreurs et pistonphones servant aux réglages de différents types de chaînes de mesure (sonomètres, antennes...).

En conséquence, ces microphones possèdent certaines particularités. Ils ont une configuration mécanique particulière (une vue en coupe est schématisée sur la figure 1.4) et ils doivent répondre à des exigences strictes concernant [21] :

leurs caractéristiques géométriques, à savoir le rayon a de la membrane, le rayon a_m de la partie mobile de la membrane, la profondeur frontale ℓ_f , le volume frontal V_f , somme du volume du cylindre de rayon a et de longueur ℓ_f et d'un volume supplémentaire V^+ correspondant à l'ensemble des «volumes cachés» dans la structure mécanique du microphone ;

leurs caractéristiques acoustiques représentées par l'impédance acoustique à circuit ouvert $(Z_a)_{i=0}$ (éq. 1.9) ;

leur stabilité dans le temps qui doit être aussi grande que possible, ceci dans un souci de traçabilité et de durabilité des étalonnages ;

l'influence des conditions ambiantes sur leurs caractéristiques qui doit être connue afin d'en tenir compte dans les résultats d'étalonnage.

Les microphones utilisés dans cette étude sont des microphones type LS1P (1") et LS2P (1/2")¹.

¹Les lettres LS signifient Laboratory Standard, le chiffre désigne la configuration mécanique du microphone (le chiffre 1 désigne un microphone 1", le chiffre 2 désigne un microphone 1/2") et la lettre P indique que le microphone a une efficacité en pression approximativement indépendante de la fréquence dans un domaine aussi étendu que possible (une efficacité en champ libre est indiquée par la lettre F) [21].

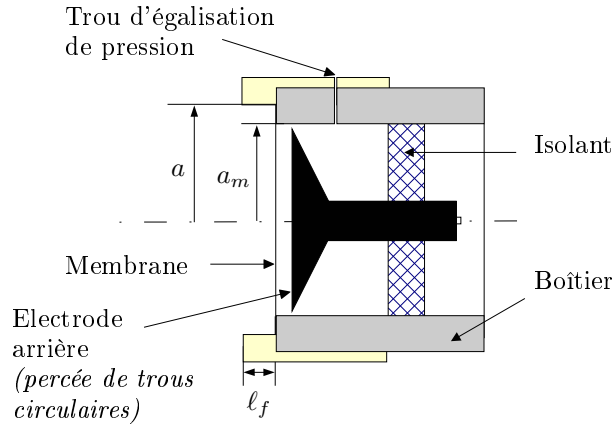


FIG. 1.4 – Coupe d'un microphone étalon de laboratoire.

1.2.2 Principe général de l'étalonnage en pression par réciprocité

L'étalonnage en pression par réciprocité est la méthode employée notamment par le LNE pour l'étalonnage des microphones étalons de laboratoire à réponse en pression (type LS1P et LS2P). Cette méthode est décrite dans la norme CEI 61094-2 [22].

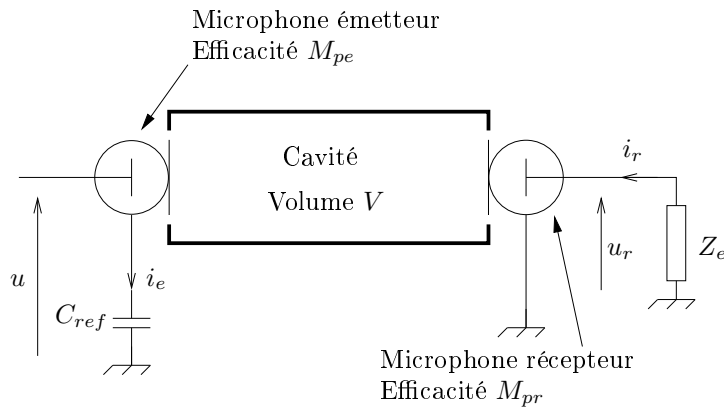


FIG. 1.5 – Dispositif pour l'étalonnage en pression : schéma de principe.

Un coupleur acoustique (cavité de volume V_c) est fermé à ses extrémités par deux microphones, l'un fonctionnant en émetteur, l'autre en récepteur (figure 1.5). La cavité formée par l'ensemble «microphones - coupleur» a un volume géométrique V (différent de V_c car il inclut les volumes frontaux des microphones mentionnés au paragraphe 1.2.1). Ce coupleur peut avoir différentes formes selon le type de microphone utilisé et la gamme de fréquences exploitée (cf. § 2.1, annexe A et ref. [22]).

Il est alors possible de mesurer l'impédance électrique de transfert $Z_E = u_{r0}/i_e$ entre les deux microphones, rapport de la tension à circuit ouvert u_{r0} aux bornes du microphone récepteur sur le courant i_e traversant le microphone émetteur. La tension à circuit ouvert u_{r0} à mesurer est déduite de la tension u_r mesurée à travers le préamplificateur d'impédance Z_e par la technique d'insertion de tension. Le courant i_e est déduit de la mesure de la tension $i_e/(j\omega C_{ref})$, connaissant la valeur de la capacité C_{ref} .

L'ensemble «microphones - coupleur» (figure 1.5) peut être représenté de façon formelle, d'après le circuit de la figure (1.2) et les équations (1.7) et (1.13), par le schéma électrique équivalent (figure 1.6) où Z_{ar} est l'impédance acoustique du microphone récepteur donnée par l'expression (1.7)

$$Z_{ar} = \frac{1}{S_r^2} \left[\left(\frac{U_{0r}}{\omega d_{0r}} \right)^2 \frac{1}{Z_e + 1/(j\omega C_{0r})} + Z_{mr} \right], \quad (1.15)$$

S_e et S_r étant les surfaces mobiles des membranes de l'émetteur et du récepteur, et où le circuit émetteur de cette figure (1.6) répond à l'équation (1.13).

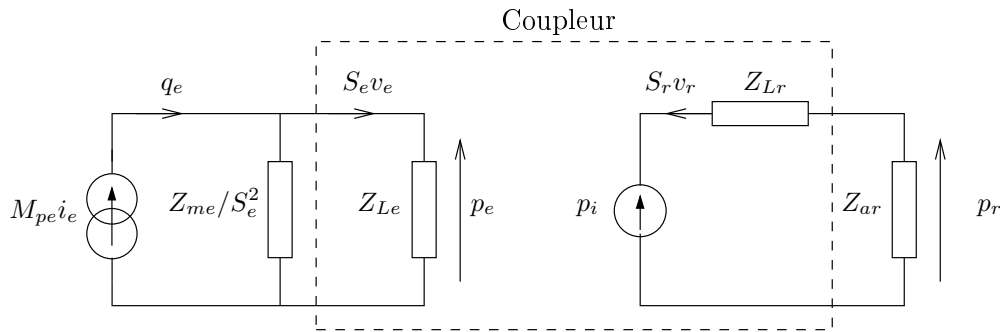


FIG. 1.6 – Schéma électrique équivalent du dispositif pour l'étalonnage par réciprocité.

D'après l'équation (1.6), la pression p_r vaut

$$p_r = -\frac{1}{Z_e} \left[\left(\frac{U_{0r}}{\omega d_{0r}} \right)^2 + Z_{mr} \left(Z_e + \frac{1}{j\omega C_{0r}} \right) \right] \frac{j\omega d_{0r}}{U_{0r} S_r} u_r. \quad (1.16)$$

Par ailleurs, l'efficacité M_{pr} du microphone récepteur s'écrit (éq. 1.8)

$$M_{pr} = \left(\frac{u_r}{p_r} \right)_{i_r=0} \approx \frac{u_{r0}}{p_r},$$

(l'approximation $(p_r)_{i_r=0} \approx p_r$ est justifiée au paragraphe 1.2.3 qui suit), et celle M_{pe} de l'émetteur (figure 1.6)

$$M_{pe} = \frac{q_e}{i_e} = \frac{S_e v_e + p_e (Z_{me}/S_e^2)^{-1}}{i_e},$$

$S_e v_e$ étant le débit de la membrane de l'émetteur et p_r la pression sur la membrane du récepteur.

Les expressions précédentes des efficacités M_{pe} et M_{pr} donnent l'expression du produit des efficacités

$$M_{pe} M_{pr} \approx \frac{u_{r0}}{i_e} \frac{S_e v_e + p_e (Z_{me}/S_e^2)^{-1}}{p_r} = Z_E Y_T, \quad (1.17)$$

où Y_T est appelé l'admittance acoustique de transfert des deux microphones. Cette quantité représente le rapport du débit q_e de la membrane de l'émetteur en court-circuit acoustique (situation où p_e serait nul sur la figure 1.6) sur la pression p_r sur la membrane du récepteur

(q_e/p_r , définition de la norme [22]); elle peut être déterminée par le calcul en choisissant un modèle acoustique approprié pour représenter le système de microphones couplés.

Ainsi, les deux quantités Z_E et Y_T peuvent être connues (respectivement par la mesure et le calcul), ce qui permet d'obtenir le produit des efficacités des deux microphones. De cette façon, en utilisant 3 microphones et en effectuant des combinaisons entre 2 des 3 microphones, il est possible d'obtenir trois produits d'efficacités mutuellement indépendants, à partir desquels l'expression de l'efficacité en pression pour chacun des microphones peut être déduite.

Cette méthode est actuellement la plus précise pour l'étalonnage en pression des microphones étalons de laboratoire; cependant elle admet un certain nombre d'hypothèses dont il est nécessaire de vérifier la validité.

1.2.3 Hypothèses admises et discussion

L'utilisation de la technique de la tension insérée pour la mesure de l'impédance électrique de transfert suppose que la pression p_i , créée par l'émetteur, sur la membrane du récepteur est indépendante de la charge électrique de celui-ci (§ 1.1.5), ce qui conduit à confondre les impédances acoustiques du microphone récepteur en circuit ouvert et chargé par un préamplificateur. En effet l'impédance acoustique Z_{ar} n'est pas l'impédance à circuit ouvert du microphone récepteur (donnée par la relation 1.9) mais plutôt l'impédance dépendant de l'impédance d'entrée du préamplificateur (donnée par la relation 1.7) du fait que le microphone récepteur est effectivement chargé.

Il est possible de vérifier que ces deux impédances sont très voisines compte tenu des caractéristiques des microphones (Brüel & Kjær 4160 et 4180) et du préamplificateur utilisé (Brüel & Kjær ZE 2673 [6]) (tableau 1.1).

	LS1P (BK 1460)	LS2P (BK 4180)
Tension de polarisation U_0 (V)	200	200
Capacité «au repos» C_0 (pF)	55	17,5
Rayon intérieur a (mm)	9,3	4,65
Volume équivalent V_{eq} (mm ³)	148	9,3
Distance membrane - électrode $d_0 = \varepsilon S_m / C_0$ (mm)	0,18	0,14

TAB. 1.1 – Valeurs «types» des caractéristiques de microphones BK 4160 et BK 4180.

Connaissant la fréquence, ces données permettent de calculer l'impédance acoustique à circuit ouvert du microphone $(Z_a)_{i=0} = \gamma_R P_R / (j \omega V_{eq})$ (2.26).

Pour le préamplificateur utilisé, l'impédance d'entrée Z_e est donnée par $1/Z_e = j \omega C_e + 1/R_e$ avec $C_e \approx 0,05$ pF, $R_e \approx 1$ G Ω .

Ces données et les relations (1.7) et (1.9) permettent de calculer (cf. tableaux 1.2 et 1.3 pour deux valeurs extrêmes de la fréquence) l'ordre de grandeur de l'impédance acoustique en circuit ouvert du microphone $(Z_a)_{i=0} = Z_m / S_m^2$ et l'écart à cette valeur si le microphone est chargé par le préamplificateur (ces deux quantités sont continûment décroissantes).

Cet écart est négligeable ainsi que, par suite (du fait que cette impédance Z_{ar} n'est autre que l'impédance terminale que voit la cavité de couplage), l'incidence de cette approximation sur l'admittance acoustique de charge du microphone émetteur $Y_{Le} = 1/Z_{Le}$, ce qui justifie

Fréquence	20 Hz	20 kHz
Z_m/S_m^2 (N.s.m ⁻⁵)	-j 1,2.10 ¹¹	-j 1,2.10 ⁸
$\left(\frac{U_0}{\omega d_0 S_m}\right)^2 \frac{1}{Z_e + 1/(j \omega C_0)}$ (N.s.m ⁻⁵)	(2,3 + j 1,1).10 ⁷	(0,28 + j 1,8).10 ²

TAB. 1.2 – Impédance $(Z_a)_{i=0} = Z_m/S_m^2$ et écart $Z_a - (Z_a)_{i=0}$ pour un microphone BK 4180.

Fréquence	20 Hz	20 kHz
Z_m/S_m^2 (N.s.m ⁻⁵)	-j 7,6.10 ⁹	-j 7,6.10 ⁶
$\left(\frac{U_0}{\omega d_0 S_m}\right)^2 \frac{1}{Z_e + 1/(j \omega C_0)}$ (N.s.m ⁻⁵)	(1,0 + j 0,16).10 ⁵	1,1 + j 6,6

TAB. 1.3 – Impédance $(Z_a)_{i=0} = Z_m/S_m^2$ et écart $Z_a - (Z_a)_{i=0}$ pour un microphone BK 4160.

pleinement l'utilisation de la technique de la tension insérée. Il est à noter également que, du fait que les valeurs de Y_{Le} et Z_{ar} sont pratiquement identiques pour le microphone récepteur en circuit ouvert ou chargé par le préamplificateur, la pression sur la membrane du microphone récepteur est pratiquement la même que celui-ci soit ou non chargé, ce qui justifie l'utilisation de la relation (1.8) pour relier la tension u_{r0} à circuit ouvert aux bornes du récepteur à la pression acoustique p_r sur sa membrane (approximation éq. 1.17).

Chapitre 2

Techniques et méthodes en usage pour l'étalonnage des microphones par réciprocité

L'objet de ce chapitre est de dresser un bilan des techniques et méthodes (pour la plupart normalisées) en usage en métrologie pour l'étalonnage des microphones et des écrits parus à ce sujet apportant différents éclairages sur celles-ci. Le contenu de ce chapitre repose essentiellement sur la norme CEI 61094-2 et son projet de réforme [14, 22], ainsi que sur différents écrits de Rasmussen [23–25, 27–29], Ballagh [3] et Jarvis [15].

Comme il apparaît au chapitre 1, la méthode d'étalonnage des microphones par réciprocité repose sur le choix d'une cavité couplant deux microphones, le choix d'un modèle physique pour décrire l'admittance acoustique de transfert Y_T et la mesure de l'impédance électrique de transfert Z_E de manière à déterminer le produit des efficacités (éq. 1.17). Ce chapitre est ainsi présenté suivant quatre paragraphes précisant, en premier lieu, ces trois points. Le troisième paragraphe, consacré à la mesure, précise également les techniques utilisées pour déterminer les différents paramètres entrant en jeu dans ce produit des efficacités. Concernant ce dernier point, l'annexe J précise les incertitudes sur ces différents paramètres ainsi que la méthode de calcul suivie au LNE pour déterminer ces incertitudes.

2.1 Coupleurs préconisés par la norme CEI 61094-2 [22]

Les coupleurs pour les étalonnages en pression sont dimensionnés pour obtenir une distribution de pression quasi-uniforme sur la membrane des microphones. Pour cela, il est nécessaire que leur fréquence de résonance radiale soit aussi élevée que possible et par suite que leur diamètre soit le plus petit possible (il est donc choisi approximativement égal au diamètre des membranes).

Dans la pratique, deux types de coupleurs sont utilisés pour les étalonnages en pression par réciprocité : les coupleurs «en ondes planes» et les coupleurs «de grand volume».

2.1.1 Coupleurs dits «en ondes planes»

Ces coupleurs de transferts sont des cavités cylindriques dont le diamètre est approximativement égal au diamètre des membranes des microphones. Leur longueur est assez grande pour

permettre la propagation d'ondes planes (les ondes évanescentes au niveau des microphones occupent un espace de longueur faible en regard de celle de la cavité) mais assez petite pour que la fréquence de résonance du système soit élevée et permettre ainsi des étalonnages sur une gamme de fréquences aussi étendue que possible. Le rapport diamètre sur longueur recommandé par la norme [22] est de 0,5 à 0,75.

Plus précisément, ce type de coupleur est conçu pour autoriser des étalonnages jusqu'à 10 kHz pour des microphones types LS1P et jusqu'à 20 kHz pour des LS2P.

Pour effectuer la modélisation acoustique du système représenté sur la figure 1.5 où le coupleur est un coupleur «en ondes planes» et compte tenu de la gamme de fréquence dans laquelle ce type de coupleur est utilisé, il est nécessaire de choisir un modèle prenant en compte la propagation d'ondes planes (et éventuellement d'ondes radiales). Par ailleurs, le faible volume de ce type de coupleur fait que l'influence de l'admittance acoustique des microphones sur l'admittance acoustique de transfert est importante. Cela impose donc que les admittances des microphones soient particulièrement bien caractérisées afin de ne pas engendrer d'erreur importante sur les résultats d'étalonnage.

2.1.2 Coupleurs dits «de grand volume»

Ce sont des coupleurs constitués de trois cylindres coaxiaux (figure A.2). Les cylindres aux extrémités ont un diamètre approximativement égal à celui des membranes des microphones et leur longueur est petite. La longueur et le diamètre du cylindre central sont plus grands. Le volume de ce type de coupleur est donc plus important que celui des coupleurs «en ondes planes» (cylindriques).

Compte tenu du volume relativement important de ce coupleur, l'influence de l'admittance acoustique des microphones sur l'admittance acoustique de transfert est limitée. Ce type de coupleur permet donc d'effectuer des étalonnages simplement et avec une bonne précision sans avoir besoin de connaître avec une grande précision tous les paramètres des microphones. Cependant ce type de coupleur présentant une géométrie complexe, le champ de pression dans la cavité, et donc l'admittance acoustique de transfert, peuvent être délicats à déterminer. La gamme de fréquences des étalonnages pour ce type de coupleur est donc choisie telle que les dimensions de la cavité soient petites devant la longueur d'onde, auquel cas le champ de pression dans la cavité est uniforme. Ainsi, ce type de coupleur ne permet d'effectuer des étalonnages que dans une gamme de fréquences réduite : jusqu'à 2,5 kHz pour des microphones type LS1P et 5 kHz pour des LS2P.

Les coupleurs dits «de grand volume» ne sont actuellement plus très utilisés. En effet, les microphones d'usage le plus courant étant les microphones type LS2P qui peuvent être utilisés sur une très large gamme de fréquences, les coupleurs cylindriques («ondes planes») sont préférés aux coupleurs «de grand volume», trop limitatifs quant à la gamme de fréquences. Dans la suite de ce document c'est essentiellement le cas des coupleurs cylindriques («ondes planes») qui est traité.

2.2 Admittance acoustique de transfert : modèle physique usuel

Ce paragraphe présente le modèle proposé par la norme CEI 61094-2 [22] et adopté par les laboratoires de métrologie acoustique. Le paragraphe 2.2.1 donne le modèle simplifié qui sert de base aux méthodes de calcul proposées par la norme. Les paragraphes suivants, décrivent les différents termes correctifs (normalisés ou non) qui ont été élaborés dans le but d'améliorer la précision du modèle de base : correction thermique (§ 2.2.2), correction de tubes capillaires (§ 2.2.3), correction d'ondes radiales (§ 2.2.4) et correction de pression et de température (§ 2.2.5).

Les principaux paramètres thermodynamiques décrivant les conditions ambiantes sont :

P_0	pression statique	Pa,
T_0	température moyenne	K,
H_0	taux d'humidité relative	%,
ρ_0	masse volumique de l'air	kg m ⁻³ ,
c_0	célérité adiabatique du son	m s ⁻¹ ,
μ	coefficient de viscosité de cisaillement	Pa s,
ν	coefficient de viscosité de volume	Pa s,
λ	coefficient de conduction thermique	W m ⁻¹ K ⁻¹ ,
χ_T	coefficient de compressibilité isotherme	Pa ⁻¹ ,
γ	rapport des capacités calorifiques C_p et C_v (massiques) de l'air	sans dim,
$\hat{\beta}$	taux d'accroissement de pression par unité d'accroissement de température à volume constant	Pa K ⁻¹ .

Dans ce document, le fluide contenu dans la cavité est de l'air qui peut être assimilé à un gaz parfait. Ainsi, les quantités $\rho_0 c_0^2 = \gamma / \chi_T$ et γP_0 sont supposées équivalentes.

Les valeurs des paramètres ρ_0 , c_0 , μ , ν , λ , χ_T , γ , $\hat{\beta}$ sont déduites des valeurs de P_0 , T_0 et H_0 (mesurées) par la méthode de calcul décrite dans la référence [26].

Les grandeurs physiques notées avec un indice R sont celles dont les valeurs sont prises dans les conditions standard de référence :

$$P_R = 1013,25 \text{ hPa}, \quad T_R = 23 \text{ }^\circ\text{C}, \quad H_R = 50 \text{ } \%$$

Le système étudié est celui représenté sur la figure (1.5) : un coupleur est fermé à ses extrémités par deux microphones, l'un fonctionnant en émetteur, l'autre en récepteur. Ce coupleur est un cylindre (coupleur «en ondes planes») de rayon a égal aux rayons (égaux entre eux) des membranes des deux microphones, de longueur ℓ_c , de volume V_c et de section $S = \pi a^2$.

Le rayon de la partie vibrante des membranes, la profondeur et le volume de la cavité frontale des microphones émetteur et récepteur sont notés respectivement a_e , ℓ_{fe} , V_{fe} et a_r , ℓ_{fr} , V_{fr} . Le volume frontal $V_{fe,r}$ d'un microphone est en fait la somme du volume du cylindre de rayon a et de longueur $\ell_{fe,r}$ et d'un volume supplémentaire $V_{e,r}^+$ correspondant à l'ensemble des «volumes cachés» (liés à des petits paramètres géométriques tels ceux de chanfreins et de filetages) dans la structure mécanique des microphones.

Dans le cas où **le champ de pression est uniforme**, seuls comptent comme paramètres géométriques, pour le modèle physique normalisé, le volume total V et la surface A de la cavité formée, dans le dispositif d'étalonnage, par le coupleur et les cavités frontales des microphones.

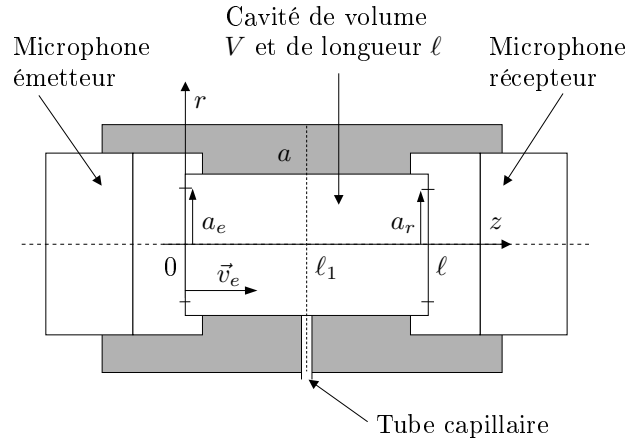


FIG. 2.1 – Dispositif pour l'étalonnage en pression (cavité ondes planes).

Si le **champ de pression a un caractère propagatif** (propagation d'ondes planes), différents paramètres caractérisant la forme de la cavité sont à prendre en compte. Cette cavité a un volume $V = S\ell_c + V_{fe} + V_{fr}$, une longueur $\ell = \ell_c + \ell_{fe} + \ell_{fr}$ et une surface totale $A = 2\pi a\ell_c + \sqrt{4\pi\ell_{fe}V_{fe}} + \sqrt{4\pi\ell_{fr}V_{fr}} + V_{fe}/\ell_{fe} + V_{fr}/\ell_{fr} + A_e^+ + A_r^+$ (figure 2.1), les surfaces $A_{e,r}^+$ représentant des surfaces excédentaires dues à l'ensemble des «surfaces cachées» dans la structure mécanique des microphones (principalement le filetage sur le bord interne des microphones LS1P) et dues au fait que le diamètre des membranes n'est pas tout à fait égal à celui du coupleur.

Un ou plusieurs tubes capillaires de longueur ℓ_t et de rayon a_t peuvent être ouverts dans les parois du coupleur à une distance ℓ_1 du microphone émetteur (le plus souvent $\ell_1 = \ell/2$ pour un coupleur cylindrique). Ces tubes servent à égaliser la pression statique dans la cavité avec celle de l'extérieur afin notamment que les membranes des microphones ne subissent pas de surpression quand ceux-ci sont emboîtés dans la cavité.

Différents paramètres (géométriques, électriques et acoustiques) entrent en jeu dans le calcul du produit des efficacités, dont certains délicats à caractériser. Ces paramètres sont accessibles par le calcul ou par la mesure. Il est alors important de connaître l'influence de ces paramètres sur le produit des efficacités afin de déterminer les éléments à caractériser avec précision.

2.2.1 Admittance de transfert : modèle normalisé de base (théorie des lignes uniformes sans pertes)

La norme CEI 61094-2 [22] propose de calculer l'admittance acoustique de transfert Y_T du système microphones-coupleur en prenant pour base un modèle reposant sur la théorie des lignes. La ligne considérée dans un premier temps est une ligne uniforme (ligne à constantes localisées ou réparties sans effets liés à la présence de tubes capillaires) et sans pertes (pas de dissipation due aux effets viscothermiques). Partant de ce modèle physique très simple pour représenter le système microphones-coupleur, la norme propose ensuite d'y appliquer des corrections visant à rendre ce modèle plus à même de représenter les divers phénomènes en jeu dans la cavité.

Le modèle physique obtenu par cette méthode a l'avantage de rendre les expressions et les

calculs très simples ; cependant, certains aspects de ce modèle sont depuis quelques temps remis en question, principalement quant à leurs fondements théoriques, et par suite d'autres modèles qui semblent plus justifiés d'un point de vue théorique pourraient alors être proposés.

a. Champ de pression uniforme

Dans le cas du coupleur dit «de grand volume», le milieu étudié est une cavité «quasi-cylindrique», de volume total V , fermée à ses extrémités par les membranes de microphones. La gamme de fréquences d'utilisation de ce coupleur est choisie telle que les dimensions de la cavité sont petites devant la longueur d'onde. Le champ de pression acoustique est donc supposé uniforme dans cette cavité. Le système peut alors être, en premier lieu, modélisé par une souplesse acoustique pure ($C_a = V/P_0\gamma$) avec à ses extrémités les admittances acoustiques $Y_e = S_e^2/Z_{me}$ (éq. 1.9) et $Y_r = S_r^2/Z_{mr}$ des microphones. Les effets résistifs dûs aux effets thermiques dans la cavité et les effets liés aux tubes capillaires sont pris en compte par ailleurs. Le schéma électrique équivalent (figure 1.6) du système de microphones couplés est dans ce cas remplacé, en première approximation, par celui figure 2.2.

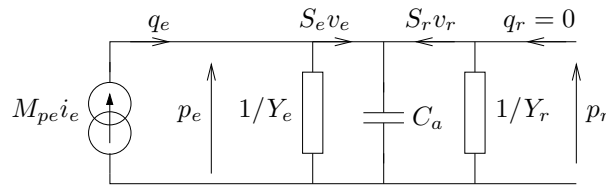


FIG. 2.2 – Circuit équivalent à constantes localisées du système microphone-coupleur de «grand volume».

Le débit $q_r = M_{pr}i_r$ est nul car le microphone est utilisé en récepteur et le courant i_r est nul (circuit ouvert). Les surfaces S_e et S_r sont considérées égales à la section S du cylindre. L'admittance acoustique de transfert (q_e/p_r définie par l'équation 1.17) Y_{T0} du système simplifié (figure 2.2) est alors définie par

$$Y_{T0} = \frac{Sv_e + p_e Y_e}{p_r}, \quad (2.1)$$

soit

$$Y_{T0} = j\omega \frac{V}{P_0\gamma} + Y_e + Y_r. \quad (2.2)$$

b. Propagation d'ondes planes

Le milieu de propagation est considéré ici comme une colonne de fluide cylindrique dans une cavité de volume V , de surface totale A et de section $S = \pi a^2 \approx S_e \approx S_r$ (figure 2.1).

Dans un premier temps, la propagation dans la cavité étant supposée en ondes planes, la cavité peut être modélisée par une ligne de transmission à constantes réparties, sans pertes et sans effets liés aux tubes capillaires (ces éléments sont pris en compte par ailleurs), de longueur ℓ , d'impédance itérative $Z_i = \rho_0 c_0 / S$ et de nombre d'onde $k_0 = \omega / c_0$. Cette ligne est fermée à ses extrémités par les admittances acoustiques des deux microphones Y_e et Y_r . Le schéma électrique équivalent à celui de la figure 1.6 peut être dans le cas présent représenté par le schéma de la figure 2.3.

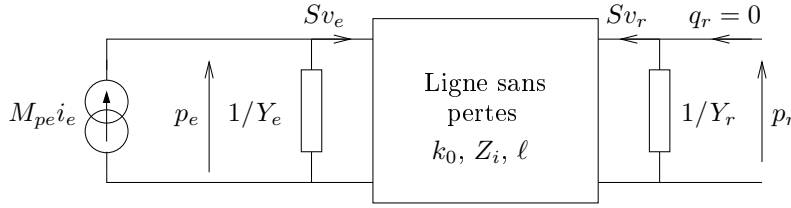


FIG. 2.3 – Circuit équivalent à constantes réparties du système microphones-coupleur «ondes planes».

La relation matricielle suivante est déduite du circuit équivalent de la figure 2.3, pour une convention temporelle $e^{j\omega t}$:

$$\begin{bmatrix} p_e \\ S v_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k_0 \ell & j Z_i \sin k_0 \ell \\ \frac{j}{Z_i} \sin k_0 \ell & \cos k_0 \ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_r & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_r \\ -q_r = 0 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

et donne

$$p_e = (Z_i Y_r j \sin k_0 \ell + \cos k_0 \ell) p_r \quad \text{et} \quad S v_e = \left(\frac{1}{Z_i} j \sin k_0 \ell + Y_r \cos k_0 \ell \right) p_r.$$

L'admittance acoustique de transfert Y_{T0} du système simplifié (sans pertes et sans effets capillaires), modélisé dans la figure 2.3, définie par (2.1) s'écrit alors

$$Y_{T0} = \frac{S v_e + Y_e p_e}{p_r} = j \sin k_0 \ell \left(\frac{1}{Z_i} + Z_i Y_e Y_r \right) + \cos k_0 \ell (Y_e + Y_r),$$

soit

$$Y_{T0} = j \sin k_0 \ell \left[\frac{S}{\rho_0 c_0} + \frac{\rho_0 c_0}{S} Y_e Y_r \right] + \cos k_0 \ell (Y_e + Y_r). \quad (2.4)$$

Le calcul de l'admittance Y_{T0} présenté dans ce paragraphe est effectué de manière à respecter la présentation donnée dans la norme CEI 61094-2 [22]. Il est à noter cependant que ce résultat peut être retrouvé de manière plus simple en écrivant la pression acoustique sous la forme :

$$p(z) = A(e^{-j k_0 z} + B e^{j k_0 z}),$$

et en faisant usage de l'équation d'Euler et de conditions aux limites appropriées (admittances des parois en $z = 0$ et $z = \ell$ égales aux admittances des microphones) [9, pp. 10,11].

c. Termes correctifs en usage

Les expressions (2.2) et (2.4) supposent qu'il n'y a pas de dissipation due aux effets viscothermiques dans la cavité ni d'effets liés à la présence de tubes capillaires. La norme CEI 61094-2 [22] propose d'introduire les effets thermiques et ceux liés à la présence de capillaires sous la forme de simples corrections (les effets visqueux sont négligés). Ces corrections sont explicitées dans les paragraphes 2.2.2 et 2.2.3 ci-dessous.

Par ailleurs, la cavité est aussi le siège de propagation d'ondes radiales. Si leur effets est négligés dans la norme, ils peuvent avoir une influence significative dans certaines applications, notamment pour la détermination des admittances de microphones (§ 2.3.2). Ainsi Rasmussen propose-t-il d'introduire les effets dus à la propagation d'ondes radiales par un terme correctif déterminé de façon analytique [25]. Cette correction est présentée dans le paragraphe 2.2.4.

Enfin, la norme rappelle que l'efficacité des microphones est dépendante des conditions ambiantes (pression, température) et que cette dépendance doit être prise en compte dans les résultats d'étalonnage mais ne propose pas de moyen pour cela. Le paragraphe 2.2.5 présente des termes correctifs, pour prendre en compte l'influence de ces pression et température, déterminés par Rasmussen [27, 29] et utilisés par un grand nombre de laboratoires de métrologie acoustique.

2.2.2 Correction thermique (normalisée)

Les échanges thermiques dans le fluide (dont la température évolue dans le temps avec la pression) et avec la paroi de la cavité (qui reste quasi-isotherme) modifient le champ de pression en regard de ce qu'il serait si ces effets n'existaient pas. La correction proposée par la norme est associée à un modèle de cavité établi par Gerber [12].

Dans ce paragraphe, l'expression de l'impédance d'une cavité (rapport de la pression à la sortie de la cavité sur le débit à l'entrée) excitée par un générateur «idéal» selon que c'est un générateur de débit ou de pression est établie d'après Gerber (a.), l'expression de l'impédance d'une cavité excitée par une source réelle en est ensuite déduite (b.), toujours d'après Gerber. Le choix d'une expression de l'impédance d'une cavité établie par Gerber applicable dans le cadre de l'étalonnage de microphones par réciprocité est ensuite expliqué (c.). Enfin, l'expression de la correction thermique normalisée [22] ainsi que la façon dont elle est utilisée est explicitée (d.).

a. Impédance acoustique d'une cavité excitée par une source «idéale» de débit ou de pression

Gerber, dans l'article intitulé *Acoustic Properties of Fluid-Filled Chambers at Infrasonic Frequencies in the Absence of Convection* [12], montre que l'impédance acoustique de transfert d'une cavité de volume V et de surface A (rapport de l'écart instantané de pression dans la cavité sur le débit de la source), où il n'y a pas de propagation, est différente, selon que le champ acoustique est généré par une source «idéale» de débit (générateur de débit ayant une impédance infinie) ou de pression (générateur de pression ayant une impédance nulle).

Dans le cas d'une source de débit, l'impédance acoustique Z_V de la cavité s'écrit, d'après Gerber,

$$Z_V = \frac{\gamma P_0}{j\omega V} \frac{1 + (\gamma - 1)E_V}{\gamma}, \quad (2.5)$$

et pour une source de pression, l'impédance de la cavité, notée Z_P est, toujours d'après Gerber,

$$Z_P = \frac{\gamma P_0}{j\omega V} \frac{1}{\gamma - (\gamma - 1)E_P}, \quad (2.6)$$

où le facteur $\gamma P_0/(j\omega V)$ représente l'admittance d'une cavité à parois rigides.

Les coefficients E_V et E_P sont étroitement liés à la géométrie de la cavité. Ils sont donnés dans l'article de Gerber [12] et calculés d'après la référence [10] (le détail de ces calculs est donné dans le paragraphe 3.2).

En se référant à ces calculs, il apparaît que ces coefficients peuvent être écrits sous la forme du développement modal suivant :

$$E_{V,P} = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{DN_n}{1 + M_n X_{V,P}^2}, \quad (2.7)$$

avec

$$X_V = \frac{A}{V} \frac{1-j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\gamma \alpha_T}{\omega}} \quad \text{et} \quad X_P = \frac{A}{V} \frac{1-j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\alpha_T}{\omega}}, \quad (2.8)$$

où $\alpha_T = \lambda/(\rho_0 C_P) = c_0 \ell_h$ (par définition de ℓ_h) est le coefficient de diffusivité thermique du fluide. Ce développement est déduit de l'expression (3.24, § 3.2), de l'écart moyen de température dans la cavité.

Les termes N_n , M_n , D et n_0 dépendent de la géométrie de la cavité. Ils sont donnés dans le tableau D.1 de l'annexe D pour différentes formes de cavité. L'indice n peut représenter un seul indice, un doublet ou un triplet d'indices.

Ce développement converge assez lentement (surtout en moyennes et hautes fréquences), ce qui rend son utilisation peu pratique. Un développement à court terme par transformée de Laplace déduit de l'expression (eq. 3.39, § 3.2) de l'écart moyen de température dans la cavité, est proposé par Gerber pour exprimer E_V et E_P :

$$E_{V,P} = 1 - X_{V,P} + G_1 X_{V,P}^2 + \frac{3}{4} \sqrt{\pi} G_2 X_{V,P}^3, \quad (2.9)$$

où les coefficients G_1 et G_2 sont déterminés par la géométrie de la cavité (tableau D.1).

b. Impédance acoustique d'une cavité excitée par une source réelle

Les impédances Z_V et Z_P calculées ne correspondent qu'à des cas idéaux, la source comportant toujours en pratique une impédance interne finie. Ainsi, considérant que le champ acoustique dans la cavité est créé par un générateur de type Thévenin d'impédance Z_d , Gerber [12] en déduit l'impédance acoustique Z_c de la cavité dans ce cas non idéal :

$$Z_c = \frac{Z_P + Z_d}{1 + Z_d/Z_V}. \quad (2.10)$$

A noter que si l'impédance Z_d est grande, $Z_c \approx Z_V$ (générateur de débit) et si Z_d est petite, $Z_c \approx Z_P$ (générateur de pression).

c. Application à l'étalonnage de microphones par réciprocité

Dans le cas de l'étalonnage en pression de microphones par réciprocité, le système de la figure 1.5 est une cavité excitée par un microphone utilisé en émetteur à l'une de ses extrémités et fermée à l'autre extrémité par un microphone récepteur.

Jarvis en déduit alors que, si le champ de pression est uniforme dans la cavité, l'expression de l'impédance acoustique de la cavité seule (en supposant parfaitement rigide la surface du récepteur) est donnée par l'expression (2.10), où $Z_d = 1/Y_e$ est l'impédance acoustique du microphone émetteur [15].

D'autre part, l'impédance acoustique des microphones étalons de laboratoire étant très grande, Jarvis vérifie que l'erreur sur les résultats engendrée par l'approximation $Z_c \approx Z_V$

est inférieure à 0,001 dB en basses fréquences. Cette approximation peut donc être considérée comme suffisante compte tenu de la précision recherchée dans les étalonnages.

Par ailleurs, l'expression de E_V , apparaissant dans celle de Z_V (éq. 2.5) est choisie en fonction de la gamme de fréquences exploitée et des dimensions des coupleurs utilisés. Vu les dimensions des coupleurs utilisés et les gammes de fréquences exploitées, le développement modal (2.7) a une convergence assez lente ; en effet, à 1000 Hz, il faudrait garder 100*100 termes pour avoir une précision à 6 chiffres significatifs sur la valeur de E_V [24].

La valeur obtenue avec le développement à court terme par transformée de Laplace (2.9) est très proche de celle calculée à partir du développement modal. En gardant 100*100 termes dans le développement modal (2.7), celui-ci est très proche du développement (2.9) à 5 chiffres significatifs, au dessus de 10 Hz pour des microphones type LS1P et 30 Hz pour des LS2P. Le développement (2.9) peut donc être utilisé dans toute la gamme de fréquences exploitée lors des étalonnages. Cette écriture de E_V semble la mieux adaptée au problème [24].

Enfin, la cavité formée par les microphones et le coupleur, coupleur dit de «grand volume» ou coupleur dit «en ondes planes», peut être considérée comme une cavité de forme «quasi-cylindrique» fermée à ses extrémités. Les coefficients G_1 et G_2 choisis sont donc ceux correspondant à cette géométrie dans le tableau D.1 :

$$G_1 = \frac{8R + \pi R^2}{\pi(2R + 1)^2} \quad \text{et} \quad G_2 = \frac{R^3 - 6R^2}{3\sqrt{\pi}(2R + 1)^3}, \quad (2.11)$$

où R est le rapport longueur sur diamètre du cylindre.

d. Correction thermique préconisée par la norme CEI 61094-2

D'après le raisonnement de Jarvis exposé dans le paragraphe précédent, l'impédance acoustique de transfert de la cavité excitée par un microphone émetteur d'admittance Y_e est sensiblement égale à Z_V . Ainsi, l'admittance acoustique de transfert du système microphones-coupleur prenant en compte la dissipation due aux effets thermiques dans la cavité, notée Y_{T1} s'écrit, dans le cas où le champ de pression est uniforme,

$$Y_{T1} = \frac{1}{Z_V} + Y_e + Y_r,$$

soit, d'après l'expression de Z_V (2.5)

$$Y_{T1} = j\omega \frac{V}{\gamma P_0} C_{TH} + Y_e + Y_r, \quad (2.12)$$

avec

$$C_{TH} = \frac{\gamma}{1 + (\gamma - 1)E_V}, \quad (2.13)$$

où E_V est donné par (2.9).

Cette façon d'exprimer les effets thermiques sous la forme d'une correction est celle retenue par la norme CEI 61094-2 [22] pour un champ de pression uniforme.

Il peut paraître contradictoire que l'admittance Y_e , supposée négligeable dans le paragraphe précédent, apparaisse dans l'expression de l'admittance acoustique de transfert (2.12). Il est cependant à rappeler que cette expression de Y_{T1} est utilisée dans le cas où le coupleur est un coupleur dit «de grand volume», le terme dominant dans cette expression est donc celui

contenant le volume V , les admittances des microphones ayant alors une influence réduite sur le résultat. Les admittances des microphones sont donc utilisées dans l'expression (2.12) de Y_{T1} dans le but d'avoir une analogie avec l'expression (2.2) de l'admittance Y_{T0} , la différence entre les deux expressions étant le terme correctif C_{TH} visant à prendre en compte la dissipation due aux effets thermiques.

Ce principe de correction thermique appliquée de façon multiplicative au volume de la cavité est adapté dans cette même norme au cas où il y a propagation d'ondes planes (ligne à constantes réparties). L'admittance acoustique de transfert Y_{T1} du système microphones-coupleur prenant en compte les effets thermiques est alors écrite dans la norme

$$Y_{T1} = j \sin k_0 \ell \left[\frac{S}{\rho_0 c_0} C_{TH} + \frac{\rho_0 c_0}{S} Y_e Y_r \right] + \cos k_0 \ell (Y_e + Y_r). \quad (2.14)$$

Cette expression (2.14) est construite de façon à converger vers l'expression (2.12) en basses fréquences. En effet, quand $k_0 \ell$ devient petit, en faisant usage des relations $\rho_0 c_0^2 = \gamma / \chi_T \approx \gamma P_0$ et $V \approx S \ell$, l'expression (2.14) donne

$$Y_{T1} \approx j k_0 \ell \frac{S}{\rho_0 c_0} C_{TH} + j k_0 \ell \frac{\rho_0 c_0}{S} Y_e Y_r + Y_e + Y_r \approx j \omega \frac{V}{P_0 \gamma} C_{TH} + Y_e + Y_r,$$

qui correspond bien à (2.12).

A noter que la norme CEI 61094-2 préconise d'appliquer la correction C_{TH} à la section S dans l'expression (2.4) de l'admittance acoustique de transfert. Cependant, le terme en $Y_e Y_r$ dans l'expression précédente ne fait pas intervenir de façon explicite le volume V , appliquer la correction C_{TH} à ce terme n'aurait donc pas de sens, C_{TH} étant une correction de volume. Pour autant, le terme en $Y_e Y_r$ étant petit par rapport aux autres, ne pas appliquer la correction C_{TH} à ce terme influence peu le résultat. L'expression de l'admittance Y_{T1} retenue ici est donc l'expression (2.14) pour des raisons de cohérence.

D'autre part, il est à noter également que la norme CEI 61094-2 [22] ainsi que le projet de réforme de cette norme [14] ne tiennent pas compte des effets visqueux, ce qui n'est justifié en première approximation que si les dimensions de la cavité sont petites devant la longueur d'onde (seul le mode de pression uniforme dans la cavité auquel n'est lié aucun effet de viscosité, est important).

e. Remarques et autres approches

La correction thermique proposée par la norme CEI 61094-2 [22] semble reposer sur des bases issues d'un raisonnement relevant purement de la thermique qui est «adapté» pour être appliqué à l'acoustique. Par ailleurs, cette façon d'exprimer la dissipation due aux effets thermiques dans l'impédance acoustique de transfert quand le champ de pression est uniforme (basses fréquences) a déjà fait l'objet de discussions et n'a pas toujours été en usage.

Tout d'abord, la norme précédemment en vigueur [19] proposait une expression de l'impédance acoustique de transfert de la cavité seule égale à l'impédance Z_P donnée par l'expression (2.6) où E_P est un développement modal égal à celui donné dans (2.7). La convergence relativement lente d'un tel développement était alors peu gênante dans la mesure où une grande précision sur la correction était inutile vu la façon dont la correction était introduite et les imprécisions des méthodes de mesures.

Par la suite, Lecollinet et Riéty [30] ont proposé une expression de l'impédance de la cavité reposant sur l'hypothèse de la «petite» cavité [8, § 3.5]. Cette expression correspond à l'impédance Z_P (éq. 2.6), où E_P est donné par le développement (2.9) limité à l'ordre 1 en X_P . Cette expression est également celle proposée par Ballagh [3].

Enfin, récemment dans le cadre de ses travaux de modélisation, Rasmussen [27, 28] a aussi été amené à remettre en question la validité de la correction thermique des normes actuelles d'un point de vue expérimental.

Toutes ces remarques contribuent à remettre en cause la correction thermique actuellement normalisée. Une étude approfondie des bases théoriques sur lesquelles repose cette correction est présentée dans le paragraphe 3.2.

2.2.3 Correction (normalisée) liées à la présence de tubes capillaires

La correction liée à la présence de tubes capillaires donnée dans la norme CEI 61094-2 [22] repose sur une expression de l'impédance d'entrée d'un réseau de tubes capillaires proposée par Rasmussen [23]. Dans ce paragraphe est tout d'abord donnée l'expression de cette impédance, son usage dans la correction normalisée est ensuite explicité.

a. Impédance d'entrée d'un réseau de tubes capillaires

D'après les modèles de propagation acoustique guidée en fluide dissipatif, l'impédance d'entrée Z_{te} d'un tube cylindrique ouvert à son autre extrémité (impédance terminale nulle), de rayon a_t et de longueur ℓ_t , rapport de la pression d'entrée p_{te} sur le débit q_{te} entrant dans le tube, s'écrit [8, 23]

$$Z_{te} = \frac{p_{te}}{q_{te}} = Z_{t0} \tanh j k_t \ell_t, \quad (2.15)$$

où l'impédance caractéristique Z_{t0} est donnée par

$$Z_{t0} = \frac{\rho_0 c_0}{\pi a_t^2 \sqrt{(1 - K_v)[1 + (\gamma - 1)K_h]}} \quad (2.16)$$

et le nombre d'onde k_t par

$$k_t^2 = k_0^2 \frac{1 + (\gamma - 1)K_h}{1 - K_v}, \quad (2.17)$$

avec

$$K_{h,v} = \frac{2}{k_{h,v} a_t} \frac{J_1(k_{h,v} a_t)}{J_0(k_{h,v} a_t)}. \quad (2.18)$$

Les nombres d'onde thermique et visqueux, respectivement k_h et k_v , sont donnés par

$$k_h = \frac{1 - j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{k_0}{\ell_h}} \quad \text{et} \quad k_v = \frac{1 - j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{k_0}{\ell'_v}}, \quad (2.19)$$

$\ell_h = \lambda/(\rho_0 c_0 C_P)$ et $\ell'_v = \mu/(\rho_0 c_0)$ étant respectivement les longueurs caractéristiques thermique et visqueuse.

La pression à l'entrée d'un réseau de n tubes capillaires d'impédance d'entrée Z_{te} est la même pression p_{te} qu'à l'entrée d'un seul tube. Le débit total à l'entrée de ce réseau est égal à la somme des débits q_{te} à l'entrée de chaque tube, soit $n q_{te}$. L'impédance d'entrée d'un réseau de n tubes capillaires d'impédance d'entrée Z_{te} est donc égale à Z_{te}/n .

b. Correction liée à la présence de tubes capillaires, proposée dans la norme CEI 61094-2

Un nombre n de tubes capillaires ouverts dans la paroi du coupleur n'apportent une contribution significative dans la valeur de l'admittance acoustique de transfert et dans les résultats d'étalonnage que dans les basses fréquences, gamme de fréquences dans laquelle la pression acoustique est supposée uniforme dans la cavité. Ainsi, dans cette gamme de basses fréquences, l'admittance acoustique de transfert Y_{T2} du système muni de n tubes capillaires s'écrit (loi d'addition des débits, ici sortant de la cavité)

$$Y_{T2} = j\omega \frac{V}{\gamma P_0} C_{TH} + Y_e + Y_r + \frac{n}{Z_{te}} .$$

Dans une gamme de fréquences plus élevée, l'admittance Y_{T2} devrait être exprimée selon un modèle prenant en compte la propagation d'ondes planes et la distance qui sépare les tubes capillaires des microphones. Cependant, dans cette gamme de fréquences, la présence de tubes capillaires influence peu la valeur de l'admittance acoustique de transfert Y_{T2} du système, qui peut alors être considérée équivalente à l'expression (2.14).

Ainsi, l'erreur commise en considérant l'admittance acoustique de transfert Y_{T2} indépendante de la distance qui sépare les tubes capillaires des microphones est supposée petite et Y_{T2} est alors écrite, dans la norme [22],

$$Y_{T2} = Y_{T1} + \frac{n}{Z_{te}} , \quad (2.20)$$

où l'admittance Y_{T1} est donnée respectivement par l'expression (2.14) ou (2.12) selon que le modèle choisi est propagatif ou non.

L'erreur induite par cette approximation est inférieure à 0,002 dB dans la gamme de fréquences recommandée par la norme pour les étalonnages (jusqu'à 10 kHz pour les microphones LS1P et 20 kHz pour les LS2P), cette approximation est donc légitime dans le cadre de la norme. Cependant, à des fréquences supérieures (30 kHz), cette erreur atteint plusieurs centièmes de dB. Pour explorer une gamme de fréquences plus élevée, il est donc préférable d'utiliser un modèle pour le champ de pression plus précis concernant la position des tubes capillaires sur les parois de la cavité.

2.2.4 Correction (non normalisée) liée à la présence de modes radiaux

Quand les dimensions de la cavité sont grandes par rapport à la longueur d'onde («hautes» fréquences), les modes supérieurs (modes radiaux) ont une influence non négligeable sur le résultat de l'étalonnage. Dans un article intitulé *Radial wave-motion in cylindrical plane-wave couplers* [25] Rasmussen propose de prendre en compte cette influence des ondes radiales par une correction multiplicative Δ_{rad} à appliquer à l'expression de l'admittance acoustique de transfert Y_{T2} (2.20), ce qui donne pour l'expression finale de l'admittance acoustique de transfert, compte tenu des expressions (2.20) et (2.14) de Y_{T2} et Y_{T1} ,

$$Y_T = \left[j \sin k_0 \ell \left(\frac{SC_{TH}}{\rho_0 c_0} + \frac{\rho_0 c_0}{S} Y_e Y_r \right) + \cos k_0 \ell (Y_e + Y_r) + \frac{n}{Z_{te}} \right] \Delta_{rad} , \quad (2.21)$$

Le calcul de la correction d'ondes radiales Δ_{rad} repose sur un développement modal du champ de pression. Il est détaillé dans la référence [25].

2.2.5 Coefficients (non normalisés) de pression et de température

L'efficacité d'un microphone dépend de la pression statique et de la température auxquelles les mesures ont été faites. Les travaux de Rasmussen [27] mettent en évidence une relation de proportionnalité entre les valeurs de l'efficacité d'un même microphone dans des conditions ambiantes différentes.

L'efficacité M_{p1} d'un microphone, déterminée dans les conditions ambiantes (P_1, T_1) , peut être déduite de l'efficacité M_{p0} d'un microphone, déterminée dans les conditions ambiantes (P_0, T_0) , par une relation de la forme

$$M_{p1} = M_{p0} \cdot \text{Cor}(P_0, P_1) \cdot \text{Cor}(T_0, T_1). \quad (2.22)$$

Rasmussen a établi une expression des coefficients de correction $\text{Cor}(P_0, P_1)$ et $\text{Cor}(T_0, T_1)$ en module (dB) et en phase, en s'appuyant sur un modèle physique de microphone électrostatique et sur les résultats de mesures sur différents types de microphones. L'efficacité M_{p1} est alors donnée, en module et en phase, par

$$M_{p1dB} = M_{p0dB} + (P_1 - P_0)C_P + (T_1 - T_0)C_T, \quad (2.23a)$$

$$\varphi_1 = \varphi_0 + (P_1 - P_0)\varphi_P + (T_1 - T_0)\varphi_T. \quad (2.23b)$$

où

$$M_{p0,1} = 10^{M_{p0,1dB}/20} e^{j\varphi_{0,1}},$$

et où C_P , C_T et φ_P , φ_T sont les coefficients de correction de pression et de température respectivement en module et en phase.

Les corrections C_P et C_T sont proportionnelles respectivement aux polynômes $P_P(\Omega)$ et $P_T(\Omega)$ de degré 9, fonctions de la pulsation réduite $\Omega = \omega/\omega_0$, où ω_0 est la pulsation de résonance du microphone (cf. § a.)

$$P_P(\Omega) = a_0 + a_1\Omega + \dots + a_9\Omega^9, \quad P_T(\Omega) = b_0 + b_1\Omega + \dots + b_9\Omega^9,$$

où les coefficients a_n et b_n sont donnés dans le tableau 2 de la référence [29] pour différents types de microphones.

Comme il faut tenir compte de l'individualité de chaque microphone, ces polynômes doivent être normalisés par les valeurs C_{P250} et C_{T250} données par le fabricant pour chaque microphone, qui correspondent aux valeurs que les coefficients C_P et C_T doivent prendre à 250 Hz. Les expressions normalisées de C_P et C_T donnent donc

$$C_P(\Omega) = \frac{C_{P250}}{P_P(\Omega_{250})} P_P(\Omega), \quad C_T(\Omega) = \frac{C_{T250}}{P_T(\Omega_{250})} P_T(\Omega), \quad (2.24)$$

où Ω_{250} est la pulsation réduite à 250 Hz.

Les corrections en phase φ_P et φ_T sont exprimées de façon similaire.

2.2.6 Admittance acoustique de transfert : conclusion

Le paragraphe 2.2 a pour objectif de rappeler le modèle physique employé pour calculer l'admittance acoustique de transfert nécessaire à l'obtention de l'efficacité des microphones (compte tenu des corrections à apporter). Ce modèle est en fait un modèle très simplifié de

cavité cylindrique dans lequel différents phénomènes qui peuvent avoir lieu dans le milieu de propagation (dissipation par effets thermiques, ondes radiales...) sont pris en compte sous forme de corrections. Cette façon de procéder n'est cependant pas très rigoureuse d'un point de vue théorique et certaines des corrections utilisées sont discutées dans le chapitre 3.

Il reste à déterminer par la mesure l'admittance électrique de transfert ainsi que les paramètres qui entrent en jeu dans le produit des efficacités, pour obtenir ces efficacités ; c'est l'objet des paragraphes 2.3 et 2.4 qui suivent que de présenter ces méthodes et techniques de mesure.

2.3 Techniques de mesure des quantités dont dépend le produit des efficacités

La détermination de l'efficacité en pression d'un microphone suppose la connaissance de différents paramètres géométriques et acoustiques de manière à calculer correctement l'admittance acoustique de transfert (éq. 1.17 et § 1.2.2). Ce paragraphe, découpé selon ces deux catégories, est consacré aux techniques de mesure de ces différents paramètres.

2.3.1 Mesure des éléments géométriques

Les dimensions des cavités de couplage et des tubes capillaires sont données par le constructeur. Ces éléments sont, par ailleurs, régulièrement ré-étalonnés au LNE.

La profondeur du volume frontal des microphones peut être mesurée par différentes méthodes optiques simples à mettre en œuvre.

Une première méthode repose sur l'utilisation un appareil de mesure à laser. Une première mesure est faite directement sur la membrane, l'opérateur pose ensuite une cale étalon sur les bords du microphone de manière à ce qu'elle passe au dessus de la membrane et refait une mesure au même endroit. La profondeur est déduite de ses deux mesures connaissant l'épaisseur de la cale.

L'inconvénient de cette méthode est que l'opérateur ne sait pas où il « vise » avec le faisceau : la mesure peut être inexacte si elle est faite sur une poussière ou une rayure de la membrane ou de la cale.

Une autre méthode consiste à faire le point successivement avec un microscope de profondeur sur un point du bord puis sur un point de la membrane du microphone. La mesure du déplacement de l'oculaire nécessaire pour faire ces deux points successifs donne la profondeur du volume frontal du microphone. Dans ce cas, l'opérateur voit les zones sur lesquelles il fait la mesure et peut en même temps contrôler l'état de surface de la membrane et du bord du microphone. Il est important d'étalonner régulièrement le vernier contrôlant le déplacement de l'oculaire.

Pour les deux méthodes, plusieurs mesures sur la membrane et sur le bord du microphone sont nécessaires car celui-ci peut présenter de légers défauts de planéité.

Concernant le diamètre du microphone ainsi que le diamètre de la partie mobile de la membrane, il n'existe pas actuellement de méthode pour les mesurer avec précision. Ainsi la valeur du diamètre du microphone est celle donnée par le fabricant (Brüel & Kjær) et la valeur du volume frontal V_f est déduite de celle du diamètre et de la profondeur frontale L_f . La valeur du rayon a_m de la partie mobile de la membrane est déduite des travaux de Rasmussen [25]

qui estime le rapport a_m/a (a étant le rayon total de la membrane) à environ 0,96 pour les microphones LS1P et LS2P.

Ces imprécisions dans la détermination de ces paramètres géométriques a des répercussions dans la valeur des incertitudes sur les étalonnages de microphones par réciprocité (annexe J).

2.3.2 Mesure de l'impédance acoustique d'un microphone

Ce paragraphe est consacré à la mesure de l'impédance acoustique à circuit ouvert d'un microphone qui peut être réalisée par différentes méthodes. Après une présentation du modèle physique choisi pour représenter le comportement de cette impédance (§ a), deux méthodes pour la mesurer sont détaillées (§ b et c).

a. Impédance acoustique à circuit ouvert d'un microphone

L'impédance acoustique à circuit ouvert d'un microphone $(Z_a)_{i=0} = Z_m/S_m^2$ (éq. 1.9), où la surface S_m est la surface vibrante de la membrane, est un paramètre important à caractériser pour l'étalonnage en pression par réciprocité. Elle représente l'impédance acoustique de l'ensemble membrane - charge arrière. Cette charge arrière est constituée dans l'air confiné entre la membrane et l'électrode arrière, dans les trous dans cette électrode et la cavité arrière. Le trou d'égalisation de pression (tube capillaire) n'a un rôle que dans les très basses fréquences (en dessous de 20 Hz), fréquences en dehors de la gamme d'utilisation habituelle des microphones étudiés ici (LS1P, LS2P) ; ainsi, la contribution de ce trou dans la charge arrière peut être négligée. Dans le cadre d'importants travaux de modélisation [27, 28], Rasmussen propose une modélisation assez complète de cet ensemble membrane - charge arrière sous forme d'un circuit électrique équivalent.

Pour une application telle que l'étalonnage par réciprocité, l'impédance $(Z_a)_{i=0}$ peut simplement être assimilée à l'impédance d'un circuit résonant série (circuit type «RLC») et considérée comme indépendante des conditions ambiantes (dans la mesure où ces conditions varient peu). Elle peut alors être écrite sous la forme :

$$(Z_a)_{i=0} = \frac{1}{j\omega C_a} + j\omega M_a + R_a, \quad (2.25)$$

soit

$$(Z_a)_{i=0} = \frac{1}{j\omega C_a} (1 - \omega^2 M_a C_a + j\omega R_a C_a).$$

L'admittance acoustique à circuit ouvert $Y_a = 1/(Z_a)_{i=0}$ d'un microphone peut être écrite sous la forme suivante (normalisée [22])

$$Y_a = j\omega \frac{V_{eq}}{\gamma_R P_R}, \quad (2.26)$$

où P_R est la pression statique dans les conditions standard de référence et γ_R le rapport des chaleurs massiques à pression et à volume constant dans ces mêmes conditions, et où le volume

$$V_{eq} = \frac{C_a \gamma_R P_R}{1 - \omega^2 M_a C_a + j\omega R_a C_a}, \quad (2.27)$$

est appelé le volume équivalent du microphone. Il représente le volume complexe d'un gaz enfermé dans une cavité rigide, subissant des compressions - détentes adiabatiques, de telle

sorte que l'impédance de ce volume complexe de gaz soit égale à l'impédance acoustique du microphone. Par convention [22], ce volume est exprimé en fonction de sa valeur aux basses fréquences $V_{bf} = C_a \gamma_R P_R$ et de la pulsation de résonance $\omega_0 = 1/\sqrt{M_a C_a}$ de l'impédance $(Z_a)_{i=0}$ pour laquelle $(Z_a)_{i=0}$ est réelle :

$$V_{eq} = \frac{V_{bf}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \omega R_a C_a} . \quad (2.28)$$

Le volume équivalent V_{eq} d'un microphone est donc entièrement déterminé par son volume aux basses fréquences V_{bf} , la pulsation de résonance ω_0 et l'amortissement R_a ¹. L'expression (2.26) suppose que l'admittance Y_a est indépendante des conditions ambiantes, elle est exprimée par convention [22] comme l'admittance acoustique du volume complexe V_{eq} (lui-même indépendant des conditions ambiantes) dans les conditions standard de référence.

Cette expression de l'impédance acoustique d'un microphone n'est qu'une approximation, toutefois suffisante pour le calcul de l'efficacité d'un microphone par réciprocité. Il est cependant à noter que cette approximation est vide de sens dans certains cas. En effet, étant vérifié que l'efficacité en pression d'un microphone est dépendante des conditions ambiantes de façon significative [27, 29], il serait absurde d'un point de vue théorique de faire usage de l'expression (2.25) de $(Z_a)_{i=0}$ (indépendante des conditions ambiantes) dans l'expression (1.8) selon laquelle l'efficacité M_p est inversement proportionnelle à l'impédance $(Z_a)_{i=0}$. Une telle approche peut cependant être envisagée afin d'observer qualitativement l'influence directe des paramètres du microphone sur la valeur de son efficacité.

Le report des expressions (1.9), (2.26) et (2.28) dans l'expression (1.8) de l'efficacité donne

$$M_p = -\frac{U_0}{S d_0} \frac{V_{eq}}{\gamma_R P_R} = \frac{M_{pbf}}{1 - \omega^2 M_a C_a + j \omega R_a C_a} , \quad (2.29)$$

qui n'est qu'une approximation et où M_{pbf} est la valeur de M_p aux basses fréquences.

Ainsi, en observant la valeur de l'efficacité M_p , il apparaît que :

- la valeur du volume aux basses fréquences $V_{bf} = C_a \gamma_R P_R$ est donnée par $|M_{pbf}|$ la valeur aux basses fréquences du module de M_p (figure 2.4),
- la fréquence de résonance $F_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{C_a M_a}}$ est atteinte quand la phase de M_p est de 90° (figure 2.5),
- l'amortissement R_a , connaissant les valeurs de V_{bf} et F_0 , est déduit du rapport $\frac{|M_{pbf}|}{|M_{pF_0}|} = \omega_0 R_a C_a$, $|M_{pF_0}|$ étant le module de la valeur de M_p pour $f = F_0$ (figure 2.4).

b. Méthode de mesure directe

Cette méthode, à présent obsolète, est sommairement décrite dans la norme CEI 61094-2 [22] et était utilisée par de nombreux laboratoires de métrologie, comme l'INM² [30], pour

¹Les laboratoires de métrologie et les fabricants préfèrent, de manière générale, caractériser le volume équivalent par sa valeur aux basses fréquences V_{bf} , la fréquence de résonance $F_0 = \omega_0/2\pi$ et le facteur de qualité $Q = \omega_0/R_a C_a = 1/R_a \sqrt{M_a/C_a}$ (ou le facteur de pertes $1/Q$). Cette notion de facteur de qualité, choisie pour des commodités de notation, n'a pas vraiment de sens physique pour caractériser une impédance acoustique, c'est pourquoi elle n'est pas retenue dans le présent document.

²Institut National de Métrologie

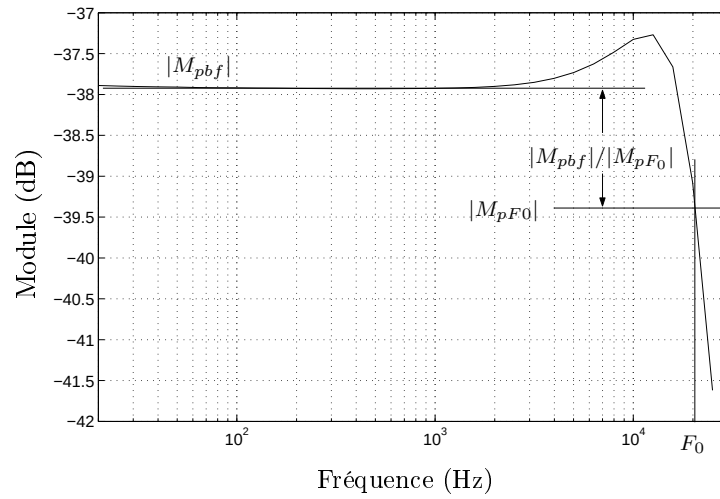


FIG. 2.4 – Module (dB ref 1V/Pa) de l'efficacité d'un microphone type LS2P.

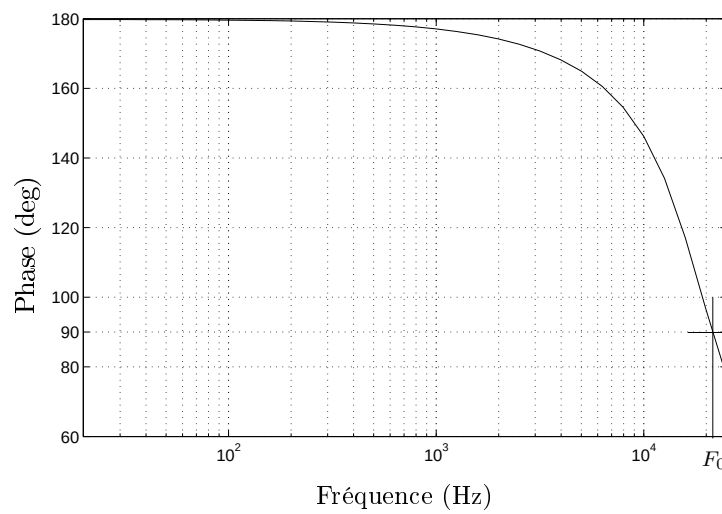


FIG. 2.5 – Phase (deg) de l'efficacité d'un microphone type LS2P.

déterminer les paramètres C_a , M_a et R_a de l'impédance à circuit ouvert $(Z_a)_{i=0}$ des microphones un pouce essentiellement.

i. *Mesure du volume équivalent aux basses fréquences V_{bf} : méthode de substitution*

Un microphone est utilisé en émetteur dans un coupleur prévu à cet effet dont l'autre extrémité est fermée par le microphone dont il faut mesurer le volume équivalent, celui-ci n'étant pas alimenté. Un troisième microphone (en général un microphone de mesure plus petit que les deux autres), affleurant à la paroi latérale est utilisé comme récepteur (figure 2.6.a). L'impédance électrique de transfert $Z_E = u_{r0}/i_e$ mesurée entre les deux microphones permet de déterminer le produit des efficacités des deux microphones (eq. 1.17) :

$$M_{pe}M_{pr} = Z_E Y_T.$$

La gamme de fréquences étant choisie telle que la pression acoustique est supposée uniforme et les effets thermiques petits, l'admittance acoustique de transfert Y_T peut alors être donnée, d'après l'expression (2.2), compte tenu des équations (2.26) et (2.28), sous la forme

$$\gamma P_0 \frac{Y_T}{j\omega} \approx V_c + V_f + V_{fe} + V_{fr} + (V_{bf} + V_{bfe} + V_{bfr}) \frac{\gamma P_0}{\gamma_R P_R}, \quad (2.30)$$

avec les notations définies dans ce paragraphe et au début du paragraphe 2.2, et où les volumes V_f et V_{bf} sont relatifs au microphone «mesuré».

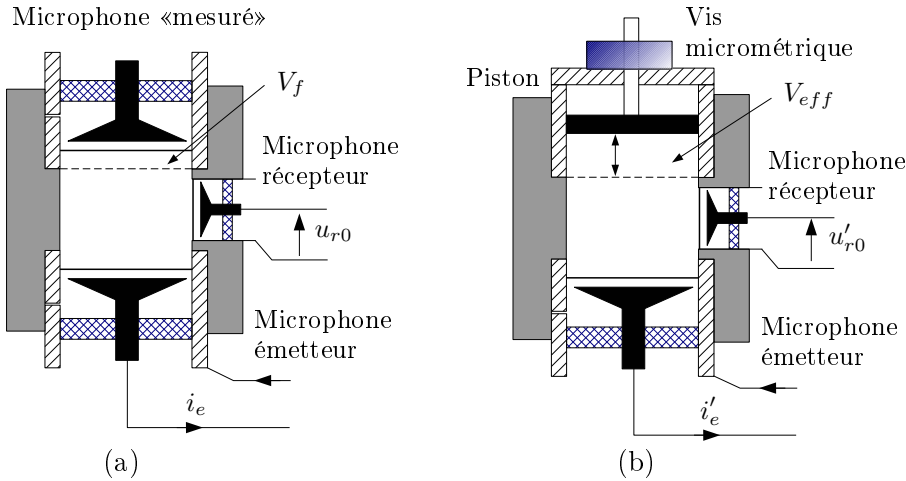


FIG. 2.6 – Mesure du volume effectif aux basses fréquences.

Dans un second temps, le microphone «mesuré» est remplacé par un piston de même diamètre et muni d'une vis micrométrique, ceux-ci étant étalonnés d'un point de vue dimensionnel. L'impédance électrique de transfert Z'_E est alors mesurée et le piston est ajusté de manière à réaliser l'égalité des deux impédances Z_E et Z'_E (figure 2.6 b). Le volume géométrique à l'avant du piston qui permet cette égalité des impédances électriques est noté V_{eff} . Le produit des efficacités $M_{pe}M_{pr}$ étant indépendant des conditions dans lesquelles il est déterminé, il vient

$$M_{pe}M_{pr} = Z'_E Y'_T = Z_E Y'_T = Z_E Y_T,$$

ce qui donne

$$\gamma P_0 \frac{Y'_T}{j\omega} = \gamma P_0 \frac{Y_T}{j\omega} \approx V_c + V_{fe} + V_{fr} + (V_{bfe} + V_{bfr}) \frac{\gamma P_0}{\gamma_R P_R} + V_{eff}. \quad (2.31)$$

En égalant les expressions (2.30) et (2.31), il vient

$$V_{eff} = V_f + V_{bf} \frac{\gamma P_0}{\gamma_R P_R}. \quad (2.32)$$

Le volume géométrique V_{eff} mesuré à l'avant du piston représente donc la somme du volume frontal V_f du microphone «mesuré» et de son volume équivalent aux basses fréquences V_{bf} corrigé du facteur $\gamma P_0/(\gamma_R P_R)$. Ce volume géométrique V_{eff} est appelé le volume effectif du microphone dans les conditions ambiantes. Le volume frontal V_f étant connu approximativement (§ 2.3.1), le volume aux basses fréquences V_{bf} du microphone «mesuré» est alors déduit de la mesure du volume géométrique V_{eff} à l'avant du piston.

ii. *Mesure de la fréquence de résonance F_0*

Le microphone «mesuré» est placé à l'extrémité d'un tube de même diamètre, l'autre extrémité du tube étant fermée par un transducteur émetteur (efficacité complexe connue) fixé sur un piston muni d'une vis micrométrique étalonnée. L'efficacité en pression du microphone récepteur (microphone «mesuré») s'écrit ici (éq. 1.8)

$$M_p = \frac{u_{r0}}{p_r} = \frac{u_{r0}}{u_e} \frac{u_e}{p_e} \frac{p_e}{p_r},$$

où u_e est la tension appliquée aux bornes du transducteur émetteur et p_e la pression acoustique qu'il impose à l'entrée du tube.

Le transducteur émetteur génère une onde acoustique à une fréquence proche de la fréquence de résonance supposée du récepteur. La vis est ajustée de manière à ce que la pression sur la membrane du récepteur, et donc la tension à circuit ouvert à ses bornes u_{r0} , atteigne un maximum (résonance du tube). Les pressions aux extrémités du tube sont alors en quadrature et la phase de p_r/p_e est de 90° . La phase du rapport u_e/p_e étant connue (elle est déduite de la phase de l'efficacité complexe du transducteur émetteur supposée connue), la phase de l'efficacité en pression M_p est alors déduite de la mesure de u_{r0}/u_e . En répétant l'opération pour différentes fréquences voisines l'une de l'autre, la valeur de la fréquence de résonance du microphone, pour laquelle M_p a une phase de 90° , est déterminée par interpolation.

iii. *Mesure de l'amortissement R_a*

La valeur de l'amortissement R_a est déduite de l'expression (2.29) de l'efficacité M_p . A la fréquence de résonance F_0 , $|M_p| = |M_{pF_0}|$ et

$$R_a = \frac{1}{\omega_0 C_a} \frac{|M_{pbf}|}{|M_{pF_0}|}, \quad (2.33)$$

les modules $|M_{pbf}|$ et $|M_{pF_0}|$ étant déterminés graphiquement (fig. 2.4) et avec $C_a = V_{bf}/(\gamma_R P_R)$ (§ a.).

iv. *Discussion des méthodes de mesure*

L'époque actuelle est «charnière» en terme d'évolution des techniques de mesures acoustiques. Ainsi, les techniques de mesure citées précédemment sont actuellement abandonnées car elles soulèvent un certain nombre d'interrogations.

Concernant la détermination du volume aux basses fréquences, outre le fait que la technique de substitution est un procédé coûteux en temps, plusieurs problèmes d'ordre théorique se posent. Tout d'abord, les deux volumes comparés ne sont pas de même nature (géométrique et acoustique). D'autre part, le microphone «mesuré» n'étant pas alimenté, la raideur de sa membrane n'est pas exactement la même qu'en utilisation normale. Enfin, l'approximation selon laquelle l'influence des effets thermiques est négligeable, compte tenu de la gamme de fréquences choisie et des dimensions du domaine, n'est pas toujours bien vérifiée dans la pratique, le volume du coupleur étant variable.

Pour ce qui est de la mesure de la fréquence de résonance, le procédé est aussi très lourd (matériel, temps) à mettre en œuvre, d'autant plus qu'il est assez difficile en pratique de trouver un transducteur émetteur dont les caractéristiques peuvent être suffisamment bien connues. Enfin, aux environs de la fréquence de résonance (fréquence assez élevée), les ondes radiales peuvent avoir une influence non négligeable sur le résultat et elles ne sont pourtant pas prises en compte dans la mesure. Tout ceci contribue à réaliser des mesures de fréquence de résonance et d'amortissement (qui est déduit de F_0 et V_{bf}) qui risquent d'être assez imprécises et donc peu «rentables» compte tenu des moyens techniques importants mis en œuvre.

Ainsi, beaucoup de laboratoires de métrologie ont préféré jusqu'à présent se limiter à la mesure du volume effectif aux basses fréquences par la méthode de substitution, se reportant aux données constructeur ou aux valeurs typiques pour la fréquence de résonance et l'amortissement.

Les techniques de mesure d'impédance de microphones présentées dans le paragraphe suivant sont actuellement les techniques mises en œuvre au LNE et en usage dans de nombreux laboratoires de métrologie. Ces techniques, plus simples à mettre en œuvre, sont aussi plus précises.

c. Méthode itérative

Il s'agit de calculer par approximations successives la valeur des paramètres V_{bf} , F_0 et R_a d'un microphone d'après la valeur de son efficacité déterminée pour des valeurs approximatives de V_{bf} , F_0 et R_a (données constructeur ou valeurs obtenues lors de précédents étalonnages).

Les méthodes de détermination décrites dans ce paragraphe exploitent le fait que, lors d'un étalonnage par réciprocité de trois microphones, des variations des valeurs introduites pour les caractéristiques (V_{bf} , F_0 , R_a) d'un microphone ne modifient en rien l'efficacité obtenue pour les deux autres microphones utilisés dans le protocole d'étalonnage par réciprocité (cf. annexe J, § J.2.2).

i. Mesure du volume équivalent aux basses fréquences V_{bf} : méthode de la variation de volume

En basses fréquences, l'efficacité M_p est quasi-indépendante de F_0 et R_a . Le volume équivalent aux basses fréquences est donc déterminé indépendamment de ces paramètres.

Il s'agit de déterminer l'efficacité de trois microphones par la méthode de réciprocité dans des cavités de volumes différents. La comparaison des résultats obtenus pour chaque cavité permet de déduire les volumes aux basses fréquences des trois microphones en suivant le protocole décrit dans le schéma de la figure 2.7.

Les calculs nécessaires pour cette méthode (calcul des Y_T , M_{pdB} et $Diff_{dB}$) sont effectués par un logiciel de calcul qui retourne à l'écran une représentation graphique des $Diff_{dB}$. Les valeurs initiales des V_{bf} sont des valeurs approximatives (données constructeur ou valeurs du

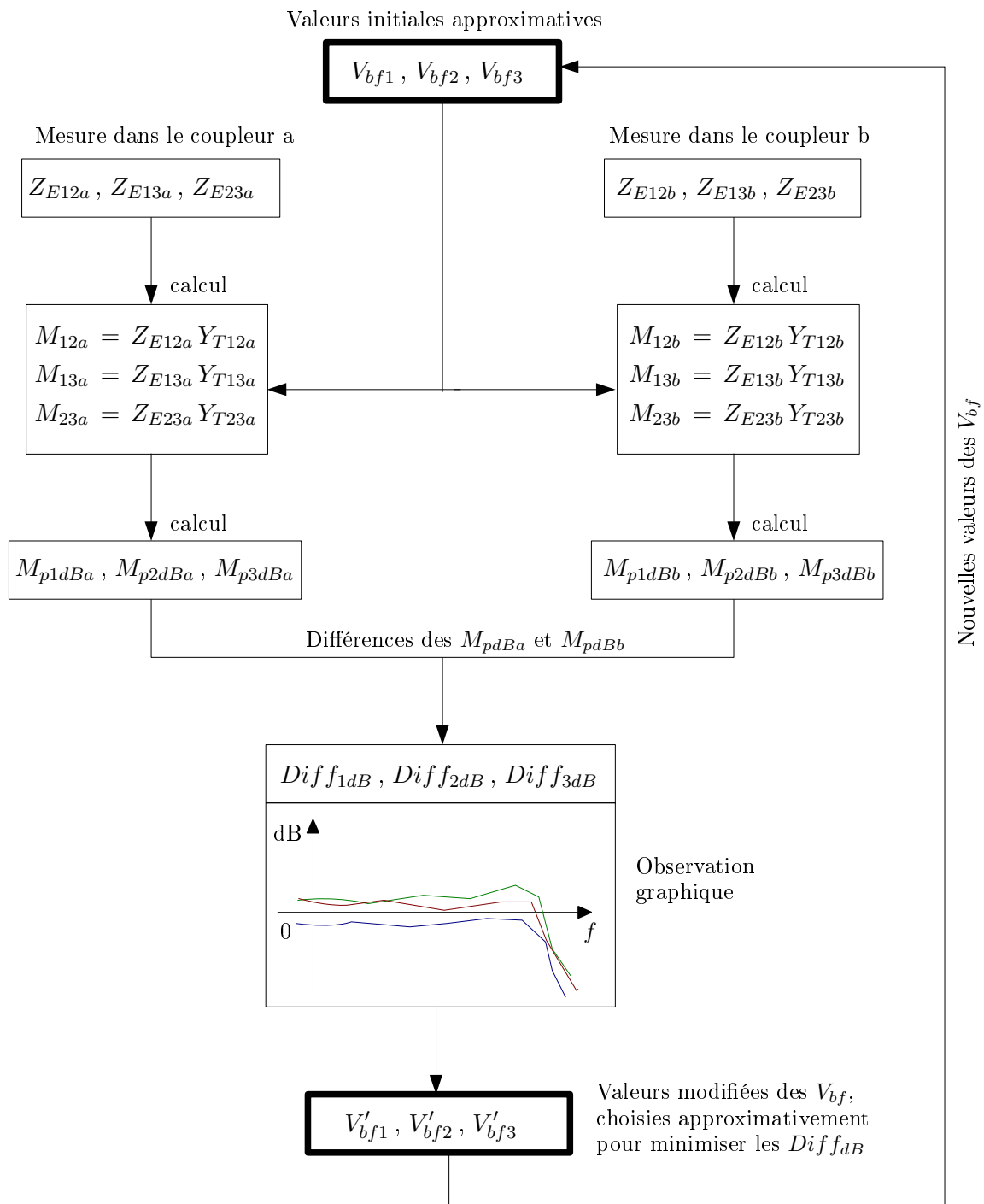


FIG. 2.7 – Méthode suivie pour déterminer les volumes équivalents aux basses fréquences.

précédent étalonnage). Les deux dernières étapes du schéma (observation et modifications) sont effectuées manuellement par un opérateur. Celui-ci modifie approximativement les valeurs des V_{bf} à réinjecter dans le programme de calcul en fonction de son observation des représentations graphiques des $Diff_{dB}$. Il cesse d'effectuer des modifications sur les V_{bf} quand il estime que les $Diff_{dB}$ sont minimales sur une gamme de fréquences la plus étendue possible.

Idealement, cette méthode de détermination nécessite l'utilisation d'au moins trois cavités différentes afin d'obtenir au moins deux valeurs de V_{bf} pour chaque microphone en suivant le protocole décrit par le schéma de la figure 2.7, ce qui permet d'effectuer une moyenne sur les valeurs des V_{bf} obtenues pour chaque microphone.

Dans la pratique, la gamme de fréquences choisie pour appliquer cette méthode est de l'ordre de 100 Hz – 2000 Hz pour des microphones LS1P et 200 Hz – 5000 Hz pour des LS2P. Pour des fréquences inférieures, l'influence des fuites acoustiques du système sur le résultat peut prendre des proportions non négligeables et pour des fréquences plus élevées, l'efficacité n'est plus indépendante des valeurs de F_0 et R_a .

ii. *Mesure de la fréquence de résonance F_0 et de l'amortissement R_a*

Les valeurs de la fréquence de résonance F_0 et de l'amortissement R_a sont à déterminer conjointement car ces paramètres agissent de façon visible dans la même gamme de fréquences (§ a.). Dans cette gamme de fréquences, l'efficacité dépend donc fortement de ces deux paramètres à la fois.

Il s'agit ici de déterminer l'efficacité de trois microphones par la méthode de réciprocité dans une gamme de fréquences qui inclut les fréquences de résonance des microphones. Les efficacités obtenues permettent alors, d'après l'observation des figures 2.5 et 2.4 et l'équation (2.29), de déduire la valeur de la fréquence de résonance F_0 et de l'amortissement R_a pour chaque microphone en suivant la procédure décrite dans le schéma de la figure 2.8. Les calculs sont effectués en prenant en compte les valeurs des V_{bf} préalablement déterminées. Toute cette procédure est effectuée par un logiciel de calcul (détermination totalement automatisée). Les valeurs initiales des F_0 et R_a sont des valeurs approximatives (données constructeur ou valeurs du précédent étalonnage). Dans la pratique, il suffit de très peu d'itérations pour atteindre des valeurs stables pour les F_0 et R_a .

Cette méthode, actuellement en usage au DPLA³, offre le meilleur compromis entre fiabilité et simplicité de mise en œuvre pour obtenir tous les paramètres du volume équivalent.

L'inconvénient majeur de ce procédé est que la détermination des V_{bf} est effectuée par une méthode «différentielle». Les erreurs commises sur les mesures dans les différentes cavités se cumulent, ce qui peut rendre les résultats peu reproductibles et imprécis. Il est donc indispensable pour utiliser cette méthode que les techniques de mesure permettent d'obtenir une bonne reproductibilité.

2.4 Mesure de l'impédance électrique de transfert (dispositif utilisé au LNE)

La chaîne de mesure, décrite sur la figure 2.9, est constituée d'un appareil de réciprocité (5998 de Brüel & Kjær), d'un analyseur vectoriel (1250 de Schlumberger) et d'un PC.

³Danish Primary Laboratory of Acoustics

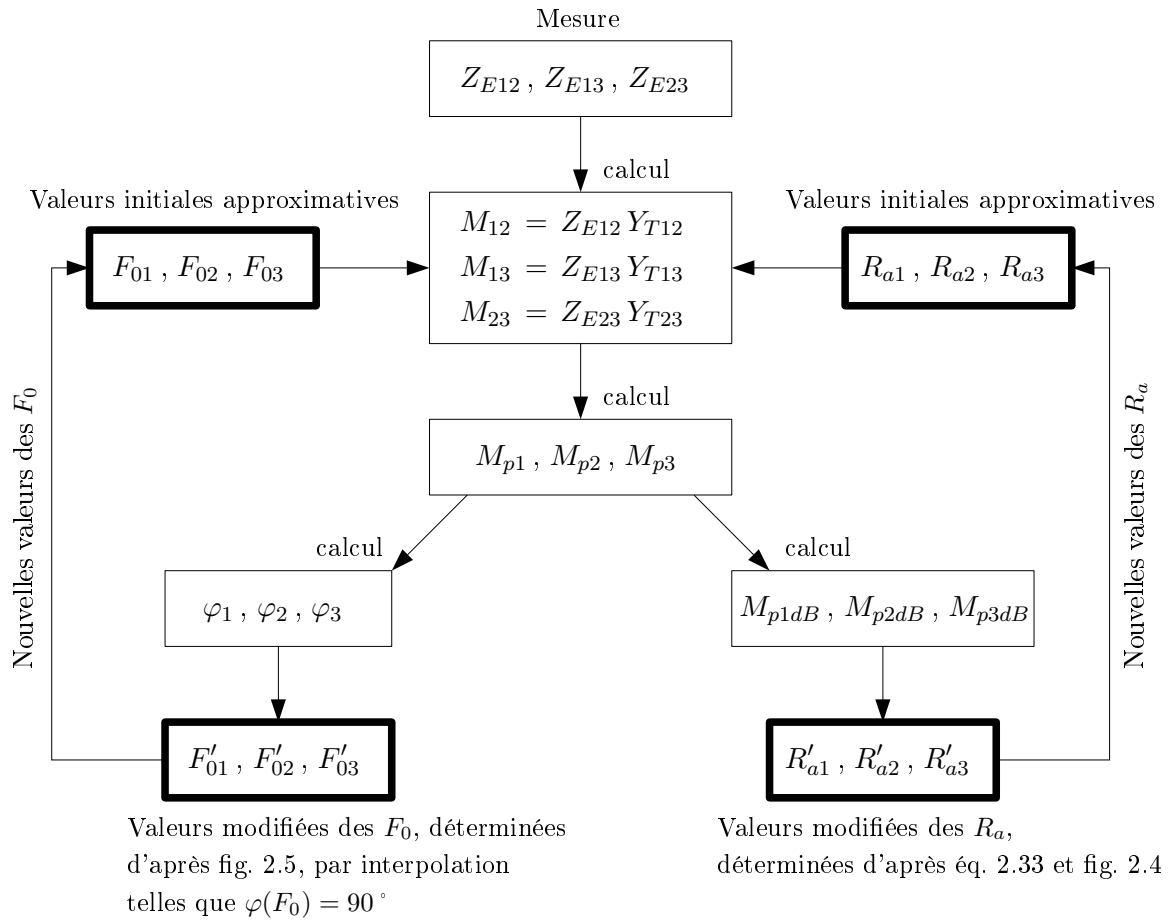


FIG. 2.8 – Méthode suivie pour déterminer les fréquences de résonance et amortissements.

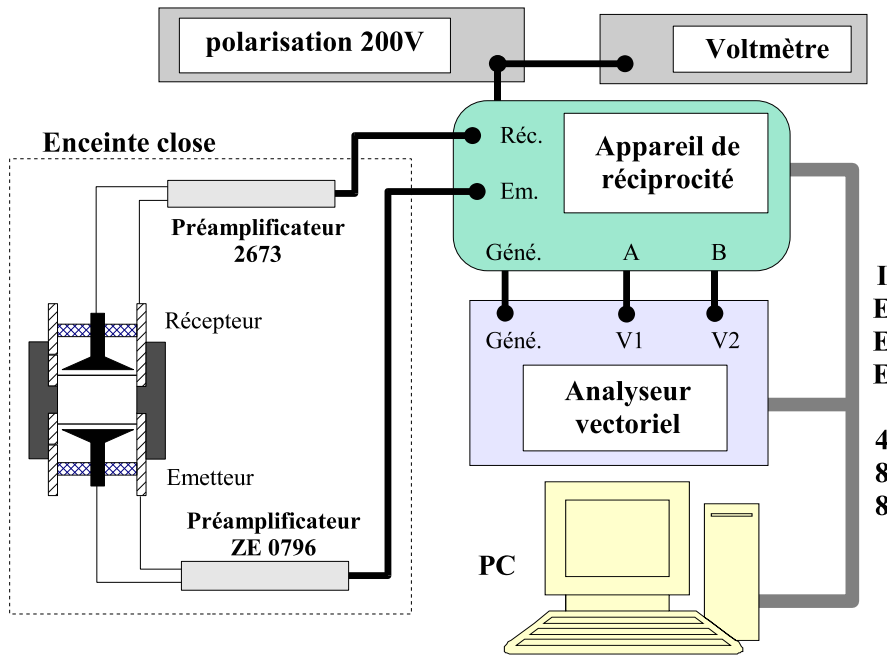


FIG. 2.9 – Chaîne de mesure pour l'étalonnage des microphones par réciprocité utilisée au LNE.

Les microphones couplés ainsi que leurs préamplificateurs sont placés dans une enceinte close, ce qui permet d'isoler le système du bruit acoustique. La tension de polarisation est produite par un générateur externe et contrôlée à l'aide d'un voltmètre.

Le générateur de l'analyseur vectoriel produit une tension u_g à l'entrée **Géné.** de l'appareil de réciprocité (fig. 2.9). Ce signal d'entrée est conditionné par l'appareil (amplification, filtrage...) et transmis à ses sorties **Em.** et **B** (tension u_B) reliées respectivement au microphone émetteur, par l'intermédiaire de son préamplificateur (type ZE 0796), et à la voie **V2** de l'analyseur. Le signal retourné par le microphone récepteur est récupéré sur l'entrée **Réc.** de l'appareil de réciprocité qui le transforme et le transmet depuis sa sortie **A** (tension u_A) à la voie **V1** de l'analyseur vectoriel.

Tout le processus de mesure est automatisé. L'analyseur vectoriel ainsi que l'appareil de réciprocité sont pilotés par ordinateur grâce à un logiciel réalisé en Visual Basic. Ce logiciel permet de faire l'acquisition des résultats de mesure et de les enregistrer dans une feuille de calcul Excel. Les acquisitions sont ensuite traitées par un programme en Visual Basic et Matlab. Le principe de ce programme repose sur le modèle proposé par la norme CEI 61094-2 [22] et décrit dans le paragraphe 2.2.

L'appareil de réciprocité permet d'effectuer le lien entre les différents signaux nécessaires à la mesure. Son principe de fonctionnement ainsi que ses éléments constitutifs sont donnés dans sa fiche synoptique en annexe B. Afin de conditionner au mieux les différents signaux, cet appareil permet à l'utilisateur de choisir entre différents filtres passe-haut (1, 20, 100 Hz) et dispose d'amplificateurs de gain réglables (0 à 50 dB).

Les préamplificateurs des microphones contiennent chacun une résistance de polarisation d'environ 1 G Ω en parallèle sur un amplificateur d'impédance d'entrée quasi-infinie. Cependant, les amplificateurs n'étant pas parfaits, il existe des capacités parasites non négligeables entre

leur entrée et la masse, ces amplificateurs n'ont donc pas une impédance d'entrée infinie. Il est donc nécessaire d'employer la technique de la tension insérée pour déterminer la valeur de l'impédance électrique de transfert, rapport de la tension de sortie du récepteur à circuit ouvert u_{r0} sur le courant i_e en entrée de l'émetteur.

Le préamplificateur du microphone émetteur contient en plus la capacité de référence C_{ref} à travers laquelle est mesuré le courant d'entrée i_e (figure 1.5). La capacité de référence C_{ref} utilisée au LNE est étalonnée par le fabricant et régulièrement ré-étalonnée au LCIE⁴.

Les microphones émetteur et récepteur sont représentés sur la figure 2.10 par leur schéma équivalent de Thévenin, impédance électrique Z_{The} pour l'émetteur et tension à circuit ouvert u_{r0} et impédance Z_{Thr} pour le récepteur (cf. relation 1.14 et paragraphe 1.1.5). Les capacités parasites sont notées C_{pA} et C_{pB} .

Dans un premier temps, la tension électrique u_g est appliquée sur l'électrode arrière du microphone émetteur. La tension u_{r0} est générée par la pression appliquée sur la membrane du microphone récepteur, pression dans la cavité créée par le microphone émetteur. Deux tensions u_A et u_B sont relevées aux sorties **A** et **B** de l'appareil de réciprocité (figure 2.10).

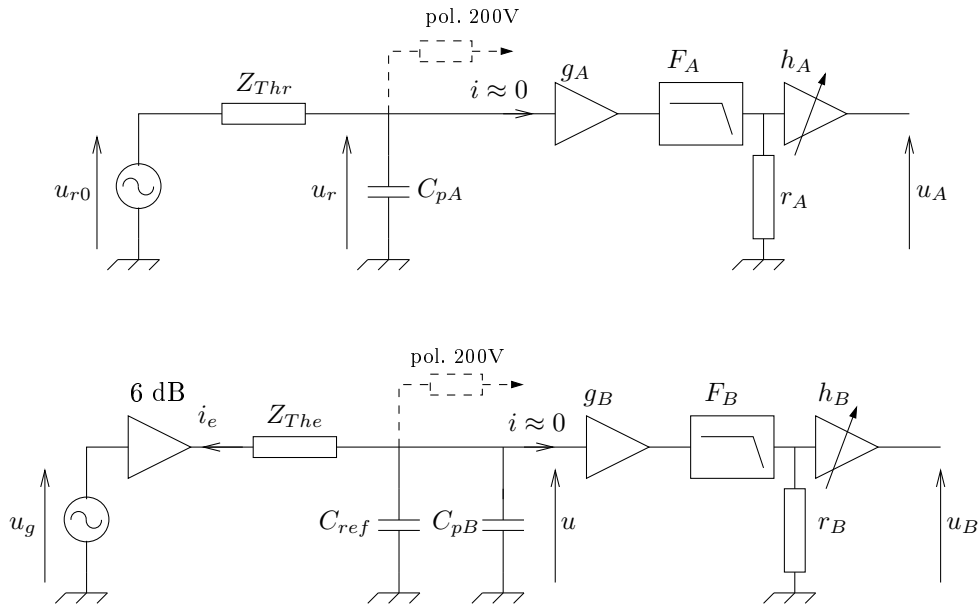


FIG. 2.10 – Mesure de l'impédance électrique de transfert Z_E : première partie.

D'après les deux circuits représentés figure 2.10, les tensions u_A et u_B peuvent être exprimées en fonction de i_e et u_{r0} par

$$u_B = h_B F_B g_B u = h_B F_B g_B \frac{-i_e}{j\omega (C_{ref} + C_{pB})} \quad (2.34)$$

et

$$u_A = h_A F_A g_A u_r = h_A F_A g_A \frac{1/(j\omega C_{pA})}{Z_{Thr} + 1/(j\omega C_{pA})} u_{r0}. \quad (2.35)$$

Les quantités u_A , u_B , u_g et C_{ref} étant les seules grandeurs mesurables, il est nécessaire d'éliminer des expressions (2.34, 2.35) les autres termes (gains, filtrages, capacités parasites).

⁴Laboratoire Centrale des Industries Electriques

Pour ce faire, un second couple de mesures est effectué sur le montage de la figure 2.11 dans lequel la même tension électrique d'entrée u_{ref} est utilisée pour exciter électriquement les deux microphones.

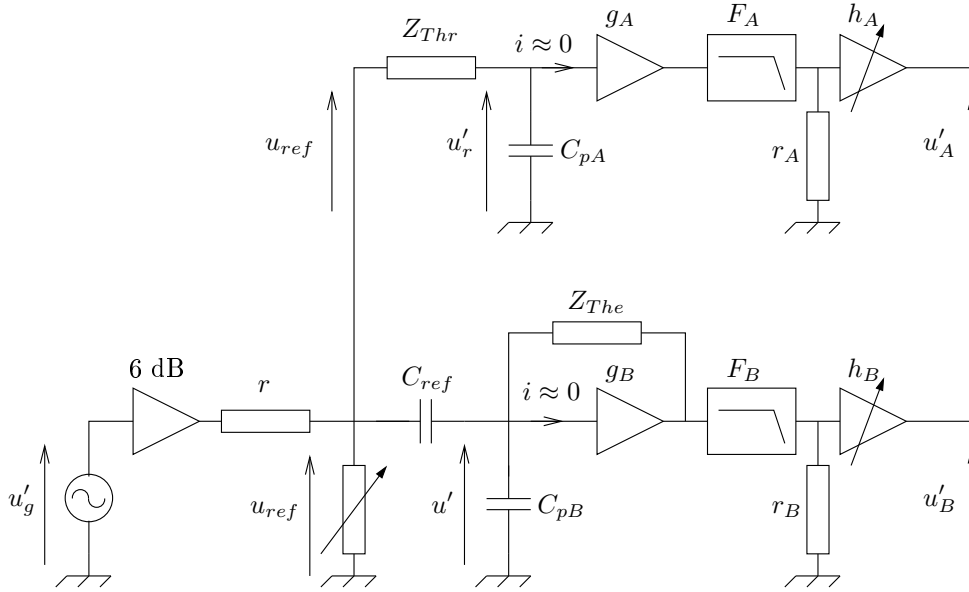


FIG. 2.11 – Mesure de l'impédance électrique de transfert Z_E : deuxième partie.

Le gain g_B est de 0 dB, l'impédance Z_{The} n'apporte donc aucune contribution au circuit et la tension u'_B s'écrit alors

$$u'_B = h_B F_B g_B u' = h_B F_B g_B \frac{C_{ref}}{C_{ref} + C_{pB}} u_{ref}. \quad (2.36)$$

La tension u'_A est exprimée en fonction de la tension u_{ref} d'après le circuit électrique figure 2.11, soit :

$$u'_A = h_A F_A g_A u'_r = h_A F_A g_A \frac{1/(j\omega C_{pA})}{Z_{Thr} + 1/(j\omega C_{pA})} u_{ref}. \quad (2.37)$$

Enfin, en faisant le rapport des relations (2.36, 2.34) et (2.35, 2.37), il vient

$$\frac{u'_B}{u_B} = \frac{j\omega C_{ref}}{-i_e} u_{ref} \quad \text{et} \quad \frac{u_A}{u'_A} = \frac{u_{r0}}{u_{ref}},$$

ce qui donne pour l'expression de l'impédance électrique de transfert Z_E

$$Z_E = \frac{u_{r0}}{i_e} = \frac{-1}{j\omega C_{ref}} \frac{u_A}{u_B} \frac{u'_B}{u'_A}. \quad (2.38)$$

La valeur de l'impédance électrique de transfert Z_E est donc entièrement déterminée par la mesure des rapports u_A/u_B et u'_A/u'_B , connaissant la valeur de la capacité C_{ref} .

Chapitre 3

Etude de différents modèles physiques du système microphones - coupleur

Le chapitre précédent met en évidence, à travers une étude bibliographique, l'insuffisance de certaines bases théoriques sur lesquelles reposent les techniques d'étalonnage en pression par réciprocité, méthodes qui peuvent alors être remises en question. C'est le cas notamment des modèles physiques normalisés de l'ensemble microphones-coupleur.

Dans ce chapitre, différents modèles physiques décrivant le champ acoustique dans la cavité formée par les microphones et le coupleur, sont développés et comparés.

Ainsi, après avoir posé les équations de l'acoustique et défini les hypothèses admissibles, une étude détaillée du champ acoustique dans le cas où il est supposé uniforme, compte tenu des effets thermiques tels que proposé par Gerber [12], est exposée et discutée. Les résultats obtenus à l'issue de cette étude sont ensuite comparés aux modèles de champ uniforme et au modèle de propagation d'ondes planes préconisés par Ballagh [3].

3.1 Equations fondamentales de l'acoustique linéaire en fluide thermo-visqueux

L'amplitude du mouvement acoustique est suffisamment faible pour pouvoir en linéariser les équations. Les variables décrivant l'état dynamique et thermodynamique du fluide sont :

- l'écart instantané de pression p par rapport à la pression statique P_0 ,
- la vitesse particulaire $\vec{v}$,
- l'écart instantané de masse volumique ρ' par rapport à la masse volumique statique ρ_0 ,
- l'écart instantané de température τ par rapport à la température statique T_0 ,
- l'écart instantané d'entropie massique s par rapport à l'entropie massique statique S_0 .

Les paramètres qui entrent dans la définition des propriétés du fluide sont les suivants :

- les coefficients de viscosité de cisaillement μ et de volume η ,
- le coefficient de conduction thermique λ ,
- le coefficient de compressibilité isotherme χ_T ,
- les chaleurs massiques par unité de masse à pression constante et à volume constant C_p et C_v , et leur rapport γ ,
- le taux d'accroissement de pression par unité d'accroissement de température à volume constant $\hat{\beta} = (\partial P / \partial T)_V$.

Les équations linéaires homogènes gouvernant le mouvement du fluide sont au nombre de trois ([8] § 2.5.1) :

- **l'équation de Navier-Stokes** (équation fondamentale de la dynamique)

$$\frac{1}{c_0} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0 c_0} \text{grad } p = \ell_v \text{grad div } \vec{v} - \ell'_v \text{rot rot } \vec{v} + \frac{\vec{F}}{c_0}, \quad (3.1)$$

où ℓ_v et ℓ'_v sont des longueurs caractéristiques définies par

$$\ell_v = \frac{1}{\rho_0 c_0} \left(\frac{4}{3} \mu + \eta \right) \quad \text{et} \quad \ell'_v = \frac{\mu}{\rho_0 c_0},$$

et où $c_0 = \sqrt{\gamma/\rho_0 \chi_T}$ est la célérité adiabatique du son.

- **l'équation de conservation de la masse** (qui traduit la compressibilité du fluide) dans laquelle l'écart instantané de masse volumique ρ' est exprimé en fonction des variables indépendantes p et τ par $\rho' = (p - \hat{\beta}\tau)\gamma/c_0^2$,

$$\rho_0 c_0 \text{div } \vec{v} + \frac{\gamma}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} (p - \hat{\beta}\tau) = \rho_0 c_0 q, \quad (3.2)$$

- **l'équation de Fourier pour la conduction de la chaleur**, dans laquelle l'écart instantané d'entropie s est exprimé en fonction des variables indépendantes p et τ par

$$s = \frac{C_P}{T} \tau + \frac{\hat{\beta} \chi_T}{\rho_0} p,$$

$$\left(\frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} - \ell_h \Delta \right) \tau = \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta} \gamma} \frac{1}{c_0} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{h}{c_0 C_P}, \quad (3.3)$$

où $\ell_h = \lambda/(\rho_0 c_0 C_P)$ désigne une longueur caractéristique de diffusion thermique.

Les termes $\vec{F}$, q et h représentent l'influence de sources acoustiques respectivement de force, de débit et de chaleur dans le domaine considéré. En dehors des sources, ces termes sont nuls.

3.2 Résolution du problème en cavité proposée par Gerber (1964)

Gerber [12], dont les résultats sont à la base du modèle retenu dans la norme CEI 61094-2, propose d'étudier le champ acoustique dans une cavité en prenant en compte les effets thermiques associés au mouvement acoustique. Pour construire son raisonnement, il ne fait usage que de l'équation de conduction de la chaleur et de la loi thermodynamique linéarisée exprimant la bivariance du milieu (équations 3.3).

L'objet de ce paragraphe est de proposer une explication détaillée du raisonnement suivi par Gerber et de montrer les limites de ce raisonnement.

3.2.1 Interprétation de l'équation de conduction de la chaleur

Le domaine d'étude $\mathcal{D}$ est constitué par le fluide contenu dans une cavité de forme quelconque fermée par la surface $\mathcal{S}$. Le champ acoustique est généré à l'instant initial $t = 0$ par une source de variation de pression ou de débit volumique. Les dimensions du domaine $\mathcal{D}$ sont supposées petites devant la longueur d'onde.

Gerber écrit l'équation de conduction de la chaleur en l'absence de sources de chaleur [12, éq. 13] sous la forme donnée par (3.3) :

$$\left(\frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} - \ell_h \Delta \right) \tau = \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta} \gamma} \frac{1}{c_0} \frac{\partial p_g}{\partial t} . \quad (3.4)$$

La notation p_g désigne, pour Gerber, l'écart instantané de pression produit par un générateur adapté, cet écart de pression étant à l'origine de l'écart instantané de température τ au sein du fluide.

Par ailleurs, en faisant usage de la relation linéarisée

$$\rho'_g = \rho_0 \chi_T (p - \hat{\beta} \tau)$$

dans l'équation de conduction de la chaleur (3.3), il vient

$$\left(\frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} - \gamma \ell_h \Delta \right) \tau = \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta} \chi_T \rho_0} \frac{1}{c_0} \frac{\partial \rho'_g}{\partial t} , \quad (3.5)$$

où ρ'_g représente l'écart instantané de masse volumique produit par un générateur adapté, cet écart de masse volumique étant, cette fois-ci et toujours selon Gerber, à l'origine de l'écart instantané de température τ [12, éq. 12].

Gerber propose donc de résoudre l'équation de conduction de la chaleur pour τ dans deux cas différents :

- la variation de température τ a pour origine une variation de pression p_g produite par un générateur de variation de pression (impédance nulle),
- la variation de température τ a pour origine une variation de volume massique $1/\rho'_g$ produite par un générateur de variation de débit (impédance infini).

L'équation de conduction de la chaleur est donc interprétée ici comme une équation de diffusion dans laquelle le second membre en p_g (éq. 3.4) ou en ρ'_g (éq. 3.5) exprime la contribution d'une source (de variation de pression ou de masse volumique) dans le processus de diffusion.

Cette approche est, dans ce sens, incorrecte : en effet, l'écart de pression ou de volume massique entrant dans l'équation de conduction de la chaleur ne représente en aucun cas l'influence d'une source, mais décrit l'état thermodynamique du fluide en tout point du domaine d'étude.

En réalité, si des sources de différentes natures sont réparties dans le domaine, leur contribution est prise en compte par les termes $\vec{F}$, q , h dans les équations de Navier-Stokes, de conservation de la masse et de conduction de la chaleur (3.1, 3.2, 3.3). Si ces sources agissent sur les frontières du domaine, elles sont à prendre en compte dans l'expression des conditions aux frontières.

Ainsi, l'interprétation qui est faite des équations de diffusion que Gerber cherche à résoudre est inexacte. Par ailleurs, il n'est pas fait usage dans son raisonnement de l'équation de Navier-Stokes ni de l'équation de conservation de la masse, équations pourtant nécessaires à la description du mouvement acoustique dans son ensemble. La méthode de résolution utilisée et l'interprétation des résultats obtenus sont donc à observer de façon critique.

3.2.2 Hypothèses retenues et présentation du problème (selon Gerber)

Après avoir posé les équations de diffusion (3.4 et 3.5), Gerber remarque que leur formulation est similaire et qu'elles peuvent donc être écrites sous la forme

$$\left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) \tau(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \theta_g(t)}{\partial t} \quad \text{pour } \vec{r} \in \mathcal{D}, \quad t \geq 0, \quad (3.6a)$$

où la variable τ est supposée causale, et avec

$$\theta_g(t) = \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta}\gamma} p_g \quad \text{et} \quad \sigma = c_0 \ell_h,$$

dans le cas décrit par l'équation (3.4), et

$$\theta_g(t) = \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta}\chi_T \rho_0} \rho'_g \quad \text{et} \quad \sigma = \gamma c_0 \ell_h,$$

dans le cas décrit par l'équation (3.5).

A cette équation de diffusion, Gerber associe la (les) condition(s) aux frontières et la condition initiale suivantes, respectivement :

$$\tau(\vec{r}, t) = 0, \quad \text{pour } \vec{r} \in \mathcal{S}, \quad t \geq 0, \quad (3.6b)$$

$$\tau(\vec{r}, t) = 0, \quad \text{pour } \vec{r} \in \mathcal{D}, \quad t = 0. \quad (3.6c)$$

La variable $\theta_g(t)$ est supposée uniforme dans le domaine $\mathcal{D}$. Cette hypothèse implique donc que, selon le cas considéré, l'écart de pression p_g ou l'écart de masse volumique ρ'_g est uniforme dans le domaine, ces variables étant supposées caractériser ici la source à l'origine du champ acoustique (hypothèse erronée).

Dans le cas présent, du fait que les dimensions du domaine $\mathcal{D}$ sont petites devant la longueur d'onde, la pression acoustique p est uniforme dans le domaine $\mathcal{D}$ (y compris dans les couches limites thermiques). Dans ce cas, si la masse volumique ρ'_g est uniforme dans $\mathcal{D}$ (y compris dans les couches limites) alors, d'après la relation $\rho'_g = \rho_0 \chi_T (p - \hat{\beta}\tau)$, τ doit aussi être uniforme dans $\mathcal{D}$ (y compris dans les couches limites), ce qui n'est pas le cas. Ainsi, l'écart de masse volumique ρ'_g ne peut pas être uniforme dans tout le domaine $\mathcal{D}$: il est fonction du point dans les couches limites.

De manière à exprimer la solution générale du problème temporel (3.6a,b,c) sous la forme d'un produit de convolution de la variable t avec une fonction de Green, Gerber associe un problème de Green (dont la solution est la réponse impulsionnelle du système) qui est écrit sous la forme suivante :

$$\left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) g = \frac{1}{\sigma} \delta(t) \quad \text{pour } \vec{r} \in \mathcal{D}, \quad t \geq 0, \quad (3.7a)$$

$$g = 0 \quad \text{pour } \vec{r} \in \mathcal{S}, \quad t \geq 0. \quad (3.7b)$$

Se référant alors à l'ouvrage de Carslaw et Jaeger [10, pp. 97, 199, 234, 330], Gerber résout le problème (3.8) équivalent à (3.7), dans lequel la source impulsionnelle $\delta(t)$ est traduite sous la forme de condition initiale :

$$\left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) g = 0 \quad \text{pour} \quad \vec{r} \in \mathcal{D}, \quad t > 0, \quad (3.8a)$$

$$g = 0 \quad \text{pour} \quad \vec{r} \in \mathcal{S}, \quad t \geq 0, \quad (3.8b)$$

$$g = 1 \quad \text{pour} \quad \vec{r} \in \mathcal{D}, \quad t = 0. \quad (3.8c)$$

L'équivalence des problèmes (3.7) et (3.8) est précisée en annexe C en montrant qu'ils possèdent la même solution générale.

Par ailleurs, l'hypothèse selon laquelle la fonction $\theta_g(t)$ est uniforme dans le domaine d'étude implique que l'écart instantané de masse volumique ou l'écart instantané de pression est uniforme dans ce domaine. Il est démontré plus haut et dans le paragraphe 6.3.2.2 de la référence [8] que seul le deuxième cas, « p_g uniforme », est susceptible de conduire à un résultat correct pour la « petite » cavité considérée ici. Rappelons que les variables p_g et ρ'_g ne rendent nullement compte du type de source excitant le fluide dans la cavité mais qu'elles décrivent l'état thermodynamique du fluide en tout point du domaine. Ainsi, le cas où p_g est uniforme est le seul traité dans la suite de ce document, soit

$$\theta_g(t) = \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta}\gamma} p_g \quad \text{et} \quad \sigma = c_0 \ell_h, \quad (3.9)$$

étant entendu que les calculs sont similaires pour l'autre cas.

Dans leur ouvrage *Conduction of Heat in Solids* [10], Carslaw et Jaeger développent des solutions au problème (3.8) pour différentes formes du domaine $\mathcal{D}$.

Le paragraphe suivant a pour but de présenter la méthode de résolution utilisée ainsi que les résultats obtenus dans le cas où le domaine $\mathcal{D}$ est un cylindre fermé à ses extrémités. Les autres formes de cavités répertoriées dans l'article de Gerber [12] sont traitées dans l'annexe D.

3.2.3 Solutions pour la température

Le domaine d'étude $\mathcal{D}$ est ici un cylindre fini de longueur ℓ , de rayon a et aux parois rigides (impédance de paroi infinie). Ce domaine a un volume V et une surface totale A .

Compte tenu de la symétrie cylindrique du domaine d'étude, le problème (3.8) s'écrit, en coordonnées cylindriques,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t}\right) g = 0 \quad \text{pour} \quad r \in (0, a), \quad z \in (0, \ell), \quad t > 0, \quad (3.10a)$$

$$g = 0 \quad \text{pour} \quad r = a, \quad z = 0 \text{ ou } \ell, \quad t > 0, \quad (3.10b)$$

$$g = 1 \quad \text{pour} \quad r \in (0, a), \quad z \in (0, \ell), \quad t = 0. \quad (3.10c)$$

a. Solutions à variables séparées

Ce problème admet des solutions à variables séparées de la forme

$$g(r, z, t) = f_r(r) f_z(z) h(t). \quad (3.11)$$

Le report de ce type de solution dans l'équation de diffusion (3.10a) donne alors

$$\frac{1}{f_r} \frac{\partial^2 f_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r f_r} \frac{\partial f_r}{\partial r} + \frac{1}{f_z} \frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2} = \frac{1}{\sigma h} \frac{\partial h}{\partial t} . \quad (3.12)$$

Pour qu'une fonction de la seule variable t puisse être identique à une fonction qui ne dépend que des variables d'espace, quelles que soient les valeurs de $r \in (0, a)$, $z \in (0, \ell)$ et $t \geq 0$, il est nécessaire que chaque membre de l'équation (3.12) soit égal à une même constante notée α ; il vient alors

$$\frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial t} = -\sigma \alpha ,$$

qui donne pour $h(t)$

$$h(t) = e^{-\sigma \alpha t} . \quad (3.13)$$

En suivant le même raisonnement pour les fonctions $f_r(r)$ et $f_z(z)$, l'équation (3.12) donne

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \alpha_r \right) f_r(r) = 0 \quad (3.14a)$$

et

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \alpha_z \right) f_z(z) = 0 , \quad (3.14b)$$

avec $\alpha_r + \alpha_z = \alpha$.

La solution à variables séparées (3.11) peut alors être écrite sous la forme

$$g(r, z, t) = \varphi(r, t) \psi(z, t) ,$$

où les fonctions $\varphi(r, t)$ et $\psi(z, t)$ sont définies respectivement par

$$\varphi(r, t) = f_r(r) e^{-\sigma \alpha_r t} \quad \text{et} \quad \psi(z, t) = f_z(z) e^{-\sigma \alpha_z t} .$$

Elles sont solutions respectivement des problèmes suivants :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi = 0 \quad \text{pour } r \in (0, a) , t > 0 , \quad (3.15a)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{pour } r = a , t > 0 , \quad (3.15b)$$

$$\varphi = 1 \quad \text{pour } r \in (0, a) , t = 0 , \quad (3.15c)$$

et

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi = 0 \quad \text{pour } z \in (0, \ell) , t > 0 , \quad (3.16a)$$

$$\psi = 0 \quad \text{pour } z = 0 \text{ ou } \ell , t > 0 , \quad (3.16b)$$

$$\psi = 1 \quad \text{pour } z \in (0, \ell) , t = 0 . \quad (3.16c)$$

Les solutions $\varphi(r, t)$ et $\psi(z, t)$ sont recherchées sous la forme de développements sur la base des fonctions propres associées aux problèmes (3.15) et (3.16) ; il vient :

$$\varphi(r, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n J_0 \left(\frac{\lambda_n r}{a} \right) \exp \frac{-\sigma \lambda_n^2 t}{a^2}, \quad (3.17)$$

$$\psi(z, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sin \frac{n\pi z}{\ell} \exp \frac{-\sigma n^2 \pi^2 t}{\ell^2}, \quad (3.18)$$

où les valeurs propres λ_n sont les racines de rang n de $J_0(\lambda_n) = 0$. Les coefficients A_n et a_n sont des constantes d'intégration qui sont déterminées par les conditions initiales.

La fonction $\varphi(r, t)$ doit satisfaire à la condition initiale

$$\varphi(r, 0) = 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n J_0 \left(\frac{\lambda_n r}{a} \right),$$

qui donne, après projection sur la base des $J_0(\lambda_n r/a)$ et compte tenu de l'orthogonalité des éléments de cette base (annexe E, éq. E.4 et E.5),

$$A_n = \frac{2}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}. \quad (3.19)$$

La fonction $\varphi(r, t)$ s'écrit donc en définitive

$$\varphi(r, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\lambda_n} \frac{J_0(\lambda_n r/a)}{J_1(\lambda_n)} \exp \frac{-\sigma \lambda_n^2 t}{a^2}. \quad (3.20)$$

Les coefficients a_n sont déterminés de la même façon en reportant l'expression de $\psi(z, t)$ dans la condition initiale du problème (3.16), ce qui donne, après projection sur la base des $\sin \frac{n\pi z}{\ell}$ et compte tenu de l'orthogonalité des éléments de cette base,

$$a_n = \begin{cases} 4/(n\pi) & \text{si } n \text{ est impaire} \\ 0 & \text{si } n \text{ est paire.} \end{cases}$$

La fonction $\psi(z, t)$ s'écrit donc

$$\psi(z, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi z}{\ell} \exp \frac{-\sigma(2n+1)^2 \pi^2 t}{\ell^2}. \quad (3.21)$$

Le produit des solutions $\varphi(r, t)$ et $\psi(z, t)$ donne la réponse impulsionnelle $g(r, z, t)$:

$$g(r, z, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\lambda_n} \frac{1}{2m+1} \frac{J_0(\lambda_n r/a)}{J_1(\lambda_n)} \sin \frac{(2m+1)\pi z}{\ell} \exp \left[-\sigma t \left[\frac{\lambda_n^2}{a^2} + \frac{(2m+1)^2 \pi^2}{\ell^2} \right] \right]. \quad (3.22)$$

La solution $\tau(r, z, t)$ du problème (3.6) est alors donnée par le produit de convolution portant sur la variable t :

$$\tau(r, z, t) = g *_t \frac{\partial \theta_g}{\partial t} . \quad (3.23)$$

Dans le cas des petites cavités (cavités dont les dimensions sont très inférieures à la plus petite longueur d'onde considérée, tout en restant très supérieures à l'épaisseur des couches limites thermiques), le champ de pression est uniforme et ne dépend que de la valeur moyenne dans le volume V de l'écart instantané de température, lui-même fonction de son propre gradient dans les couches limites thermiques (voir infra éq. 3.50 ou par exemple [8, éq. 3.65]). Ainsi seule la valeur moyenne de la température dans le domaine $\mathcal{D}$ de volume V

$$\langle \tau \rangle = \frac{1}{V} \iiint_V \tau \, dV$$

est utile. Elle s'écrit d'après l'expression (3.23) de τ et compte tenu de ce que $\theta_g(t)$ est uniforme dans $\mathcal{D}$,

$$\langle \tau \rangle = \langle g \rangle *_t \frac{\partial \theta_g}{\partial t} ,$$

soit, dans le domaine de Fourier, l'expression de θ_g étant celle donnée par l'équation (3.9),

$$\langle \tau \rangle = j\omega \langle g(\omega) \rangle \theta_g(\omega) = j\omega \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta}\gamma} p_g(\omega) \langle g(\omega) \rangle .$$

La valeur moyenne spatiale, sur le volume V , de la réponse impulsionnelle $\langle g \rangle$ dans le domaine de Fourier donne, d'après (3.22), la propriété (E.3) et la transformée de Laplace [1, 29.3.8] (rappelée dans l'annexe F),

$$\langle g \rangle = \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(m + 1/2)^2 \lambda_n^2} \frac{1}{j\omega + \frac{\lambda_n^2 R^2 + (m + 1/2)^2 \pi^2}{(1 + 2R)^2} \frac{A^2}{V^2} \sigma} ,$$

où $R = \ell/(2a)$ et où $\frac{A}{V} = \frac{2}{a} + \frac{2}{\ell}$ désigne le rapport surface sur volume. La valeur moyenne de la variation de température $\langle \tau \rangle$ s'écrit alors, dans le domaine de Fourier,

$$\langle \tau \rangle = \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta}\gamma} p_g \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{(m + 1/2)^2 \lambda_n^2} \frac{1}{1 + \frac{\lambda_n^2 R^2 + (m + 1/2)^2 \pi^2}{(1 + 2R)^2} X^2} , \quad (3.24)$$

où X est donné par ($\sigma = c_0 \ell_h$)

$$X^2 = \frac{A^2}{V^2} \frac{c_0 \ell_h}{j\omega} .$$

Cette solution du problème (3.8) ne converge rapidement que pour des petites valeurs de ω (§ 2.2.2.a) ; cette forme de solution se révèle donc peu pratique à l'usage. Une autre forme de solution, valable sur une plus large gamme de fréquence, a été proposée par Gerber ; elle est présentée au paragraphe b ci-dessous.

b. Solution à court terme par transformée de Laplace

Comme dans le paragraphe précédent, les solutions du problème (3.10) sont recherchées sous forme de solutions à variables séparées

$$g(r, z, t) = f_r(r)f_z(z)h(t) = \varphi(r,t)\psi(z,t),$$

où $\varphi(r, t)$ et $\psi(z, t)$ sont solutions respectivement des problèmes (3.15) et (3.16).

La résolution des problèmes (3.15, 3.16) est ici effectuée dans le domaine de Laplace, en ramenant ces deux problèmes à des problèmes aux conditions initiales nulles.

En posant $\varphi_L(r, t) = 1 - \varphi(r, t)$, le problème (3.15) devient en effet :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi_L = 0 \quad \text{pour } r \in (0, a), t > 0, \quad (3.25a)$$

$$\varphi_L = 1 \quad \text{pour } r = a, t > 0, \quad (3.25b)$$

$$\varphi_L = 0 \quad \text{pour } r \in (0, a), t = 0, \quad (3.25c)$$

soit, dans le domaine de Laplace

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - q^2 \right) \Phi_L = 0 \quad \text{pour } r \in (0, a), \quad (3.26a)$$

$$\Phi_L = \frac{1}{s} \quad \text{pour } r = a, \quad (3.26b)$$

où $\Phi_L(r, s)$ est la transformée de Laplace de $\varphi_L(r, t)$, s est la variable de Laplace et $q^2 = s/\sigma$.

La solution de ce problème s'écrit

$$\Phi_L = \frac{1}{s} \frac{I_0(qr)}{I_0(qa)}. \quad (3.27)$$

La valeur moyenne $\langle \Phi_L \rangle$ de Φ_L sur le volume V s'écrit

$$\langle \Phi_L \rangle = \frac{1}{s} \frac{2}{a^2} \int_0^a \frac{I_0(qr)}{I_0(qa)} r dr,$$

soit, en faisant usage de la relation (E.3) de l'annexe E,

$$\langle \Phi_L \rangle = \frac{2}{sqa} \frac{I_1(qa)}{I_0(qa)}. \quad (3.28)$$

Le report des développements asymptotiques des fonctions de Bessel modifiées $I_1(qa)$ et $I_0(qa)$ (éq. E.7), limité aux trois premiers termes, dans l'expression précédente, donne pour $\langle \Phi_L \rangle$

$$\langle \Phi_L \rangle \approx \frac{2}{sqa} \left[1 - \frac{1}{2qa} - \frac{1}{8q^2 a^2} + O\left(\frac{1}{(qa)^3}\right) \right],$$

qui s'écrit encore,

$$\langle \Phi_L \rangle \approx \frac{2\sigma^{1/2}}{a} \frac{1}{s^{3/2}} - \frac{\sigma}{a^2} \frac{1}{s^2} - \frac{\sigma^{3/2}}{4a^3} \frac{1}{s^{5/2}} + O\left(\frac{\sigma^3}{s^3}\right). \quad (3.29)$$

D'après les transformées de Laplace inverses (29.3.3), (29.3.5) et (29.3.6) de la référence [1] rappelées dans l'annexe F, la valeur moyenne $\langle \varphi_L \rangle$ de φ_L sur le volume V donne

$$\langle \varphi_L \rangle \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{2}{a} (\sigma t)^{1/2} - \frac{1}{4} \left(\frac{2}{a} \right)^2 \sigma t - \frac{1}{24\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{a} \right)^3 (\sigma t)^{3/2} + O((\sigma t)^2), \quad (3.30)$$

solution valable pour des temps suffisamment petits (en regard du paramètre $1/\sigma$). La solution $\langle \varphi \rangle$ du problème (3.15) est déduite de la solution $\langle \varphi_L \rangle$ par la relation $\varphi = 1 - \varphi_L$:

$$\langle \varphi \rangle \approx 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{2}{a} (\sigma t)^{1/2} + \frac{1}{4} \left(\frac{2}{a} \right)^2 \sigma t + \frac{1}{24\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{a} \right)^3 (\sigma t)^{3/2} + O((\sigma t)^2). \quad (3.31)$$

La fonction $\psi(z, t)$ est déterminée de la même façon que la solution $\varphi(r, t)$. En posant $\psi_L(z, t) = 1 - \psi(z, t)$, le problème (3.16) donne, dans le domaine de Laplace :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - q^2 \right) \Psi_L = 0 \quad \text{pour } z \in (0, \ell), \quad (3.32a)$$

$$\Psi_L = \frac{1}{s} \quad \text{pour } z = 0 \text{ et } \ell, \quad (3.32b)$$

où $\Psi_L(z, s)$ est la transformée de Laplace de $\psi_L(z, t)$.

La solution de ce problème s'écrit

$$\Psi_L = \frac{1}{s} \frac{\sinh qz + \sinh q(\ell - z)}{\sinh q\ell}. \quad (3.33)$$

La valeur moyenne $\langle \Psi_L \rangle$ de Ψ_L sur le volume V s'écrit

$$\langle \Psi_L \rangle = \frac{2}{sq\ell} \frac{\sinh q\ell/2}{\cosh q\ell/2}, \quad (3.34)$$

soit

$$\langle \Psi_L \rangle = \frac{2}{sq\ell} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{-nq\ell} \right]. \quad (3.35)$$

Par transformation de Laplace inverse donnée dans les relations (29.3.85) et (29.3.5) de la référence [1] (annexe F), la valeur moyenne $\langle \psi_L \rangle$ de ψ_L sur le volume V donne

$$\langle \psi_L \rangle = \frac{4}{\ell} (\sigma t)^{1/2} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \text{ierfc} \frac{n\ell}{2\sqrt{\sigma t}} \right], \quad (3.36)$$

où ierfc désigne l'intégrale de la fonction d'erreur définie par

$$\text{ierfc } x = \int_x^\infty \text{erfc } t \, dt, \quad \text{avec} \quad \text{erfc } x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} \, dt.$$

La solution $\langle \psi \rangle$ du problème (3.16) est alors donnée par :

$$\langle \psi \rangle = 1 - \frac{2}{\ell} (\sigma t)^{1/2} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{ierfc} n \frac{\ell}{2} \frac{1}{(\sigma t)^{1/2}} \right]. \quad (3.37)$$

Le produit des solutions $\langle \varphi \rangle$ et $\langle \psi \rangle$ donne alors la valeur de la fonction de Green en moyenne sur le volume $\langle g \rangle$ du problème :

$$\begin{aligned} \langle g \rangle \approx 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{A}{V} (\sigma t)^{1/2} + \frac{8R + \pi R^2}{\pi(2R+1)^2} \left(\frac{A}{V} \right)^2 \sigma t + \frac{R^3 - 6R^2}{3\sqrt{\pi}(2R+1)^3} \left(\frac{A}{V} \right)^3 (\sigma t)^{3/2} \\ - \frac{4}{2R+1} \frac{A}{V} (\sigma t)^{1/2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{ierfc} n \frac{2R+1}{(\sigma t)^{1/2} A/V} + O((\sigma t)^2). \end{aligned} \quad (3.38)$$

L'expression de la valeur moyenne $\langle \tau \rangle$ de τ sur la volume V (éq. 3.23)

$$\langle \tau \rangle = \langle g \rangle *_t \frac{\partial \theta_g}{\partial t},$$

donne, dans le domaine de Fourier, la fonction θ_g étant celle retenue dans le paragraphe précédent (éq. 3.9),

$$\langle \tau \rangle = j\omega \langle g(\omega) \rangle \theta_g(\omega) = j\omega \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta}\gamma} p_g(\omega) \langle g(\omega) \rangle.$$

Ainsi, en faisant usage, dans l'expression (3.38), de la transformée de Laplace [1, 29.3.85], où la variable de Laplace s est remplacé par $j\omega$ (transformée de Fourier), et de la propriété

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x},$$

la valeur moyenne $\langle \tau \rangle$ s'écrit dans le domaine de Fourier,

$$\begin{aligned} \langle \tau \rangle \approx \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta}\gamma} p_g \left[1 - X + \frac{8R + \pi R^2}{\pi(2R+1)^2} X^2 + \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \frac{R^3 - 6R^2}{3\sqrt{\pi}(2R+1)^3} X^3 \right. \\ \left. + \frac{2}{2R+1} \frac{X}{1 + e^{2(2R+1)/X}} + O(X^4) \right], \end{aligned} \quad (3.39)$$

où X est donné par

$$X^2 = \frac{A^2}{V^2} \frac{c_0 \ell_h}{j\omega}.$$

La solution (3.31) pour $\langle \varphi \rangle$ étant issue d'un développement asymptotique en $s = j\omega$, la solution (3.39) pour $\langle \tau \rangle$ n'est valable que dans la mesure où ω n'est pas petit, ce qui apparaît ici du fait de la définition du paramètre X .

Une application numérique montre que le terme $\frac{2}{2R+1} \frac{X}{1 + e^{2(2R+1)/X}}$ apporte une précision toujours inférieure à 10^{-6} dB sur la valeur de $\langle g \rangle$; c'est pour cela qu'il n'est pas reporté dans la norme CEI 61094-2 [22].

c. Récapitulatif des solutions pour la température

En résumé, la valeur moyenne spatiale de l'écart instantané de température $\langle \tau \rangle$ peut donc être écrite, en fonction de l'écart instantané de pression p_g , sous la forme générale suivante

$$\langle \tau(\omega) \rangle = \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta}\gamma} p_g(\omega) E_P, \quad (3.40)$$

où E_P peut être exprimé de deux manières :

$$E_P = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{(m + 1/2)^2 \lambda_n^2} \frac{1}{1 + \frac{\lambda_n^2 R^2 + (m + 1/2)^2 \pi^2}{1 + 2R^2} X}, \quad (3.41)$$

(expression exacte 3.24), ou

$$E_P \approx 1 - X + \frac{8R + \pi R^2}{\pi(2R + 1)^2} X^2 + \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \frac{R^3 - 6R^2}{3\sqrt{\pi}(2R + 1)^3} X^3 - \frac{2}{2R + 1} \frac{X}{1 + e^{-2(2R+1)/X}}, \quad (3.42)$$

(expression 3.39 valable pour X suffisamment petit), avec $R = \ell/(2a)$, $X^2 = \frac{A^2}{V^2} \frac{c_0 \ell_h}{j\omega}$, $\frac{A}{V} = \frac{2}{a} + \frac{2}{\ell}$ et où λ_n désigne le zéro de rang n de $J_0(\lambda_n)$.

3.2.4 Admittance acoustique de transfert de la cavité

Le report de la valeur moyenne $\langle \tau \rangle$ (3.40) dans la loi thermodynamique linéarisée

$$\langle \rho' \rangle = \rho_0 \chi_T (p_g - \hat{\beta} \langle \tau \rangle),$$

où $\langle \rho' \rangle$ est la moyenne sur le volume V de l'écart instantané de masse volumique, donne

$$\langle \rho' \rangle = \frac{1}{c_0^2} [\gamma - (\gamma - 1)E_P] p_g. \quad (3.43)$$

La moyenne de l'écart de masse volumique $\langle \rho' \rangle$ est relié à la variation de volume de la cavité δV de la façon suivante (V_m désigne le volume massique du fluide et V_{m0} le volume massique statique) :

$$\frac{\langle \rho' \rangle}{\rho_0} = \frac{\langle \rho \rangle}{\rho_0} - 1 = \frac{V_{m0}}{\langle V_m \rangle} - 1 = \frac{-\delta \langle V_m \rangle}{\langle V_m \rangle} = -\frac{\delta V}{V}.$$

L'admittance acoustique $Y_P = 1/Z_P$ de la cavité, rapport du débit pariétal entrant ($-j\omega \delta V$) sur l'écart de pression qui en résulte (p_g), est donc donnée par

$$Y_P = \frac{-j\omega \delta V}{p_g} = j\omega \frac{V}{\rho_0 c_0^2} [\gamma - (\gamma - 1)E_P], \quad (3.44)$$

qui n'est autre que l'expression (2.6) simplement mentionné dans le paragraphe 2.2.2 dédié à l'exposé succinct des corrections thermiques préconisées par la norme CEI 61094-2.

Dans cette expression (3.44), E_P est donné par l'expression (3.41) ou (3.42). Dans les deux cas, il est possible de vérifier que si les effets thermiques sont négligés ($\ell_h \rightarrow 0$, soit $X \rightarrow 0$), l'admittance Y_P correspond à l'admittance acoustique adiabatique de la cavité.

En effet, le terme E_P est écrit sous la forme d'un développement à court terme par transformée de Laplace (3.42), le résultat $E_P = 1$ pour $\ell_h \rightarrow 0$ est immédiat.

Si ce terme E_P est écrit sous la forme d'un développement modal (3.41), en négligeant les effets thermiques, il vient

$$E_P = \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\lambda_n^2} = 1,$$

en vertu des propriétés générales suivantes

$$\frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2m+1} \sin \frac{(2m+1)\pi}{\ell} z = 1 \quad \forall z \in (0, \ell) \quad (3.45a)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\lambda_n} \frac{J_0(\lambda_n r/a)}{J_1(\lambda_n r/a)} = 1 \quad \forall r \in (0, a), \quad (3.45b)$$

qui multipliées par elles-mêmes et intégrées respectivement sur $z \in (0, \ell)$ et $r \in (0, a)$ respectivement donnent

$$\frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\lambda_n^2} = 1.$$

Enfin, si $E_P = 1$, l'admittance acoustique de la cavité Y_P (3.44) vaut

$$Y_P = j\omega \frac{V}{\rho_0 c_0^2},$$

ce qui correspond bien à l'admittance acoustique de la cavité si le mouvement de compressions-détentes est supposé adiabatique.

Remarque : La relation $\frac{\langle \rho' \rangle}{\rho_0} = -\frac{\delta V}{V}$ utilisée par Gerber (et reprise ci-dessus) admet que les parois de la cavité sont parfaitement rigides, ce qui n'est pas le cas en pratique en raison de la présence du microphone récepteur (le champ de déplacement du microphone émetteur est exprimé par le facteur δV). L'effet de l'admittance du microphone récepteur aurait pu être introduit par Gerber en faisant usage de l'équation de conservation de la masse, suivant la présentation donnée un peu plus loin (§ 3.3.1, équations 3.46 à 3.49).

3.3 Champ acoustique en «petite» cavité, en régime harmonique

L'objet de ce paragraphe est d'exprimer le champ de pression uniforme créé dans une «petite» cavité de volume V et de surface A , par des vibrations de parois [8, pp.130-136]. Cette

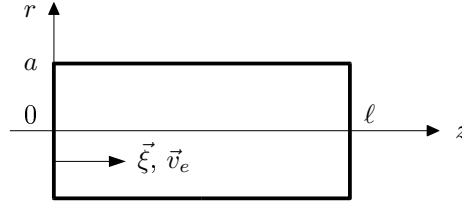


FIG. 3.1 – Cylindre fermé à ses extrémités par des microphones.

cavité est de forme cylindrique et fermée à son extrémité $z = 0$ par une membrane animée d'un mouvement vibratoire (de champ de déplacement ξ et de vitesse $v_e = j\omega\xi$) et à son extrémité $z = \ell$ par une membrane d'admittance acoustique Y_r (figure 3.1).

Le terme «petite cavité» désigne une cavité dont les dimensions restent très inférieures à la plus petite longueur d'onde λ_0 considérée, mais dont les dimensions restent très supérieures à l'épaisseur des couches limites viscothermiques $\delta_{v,h}$:

$$\lambda_0 \gg \sqrt[3]{V} \quad \text{et} \quad \delta_{v,h} \ll \sqrt[3]{V},$$

où

$$\delta_v \approx \sqrt{\frac{2\ell'_v}{k_0}}, \quad \text{et} \quad \delta_h \approx \sqrt{\frac{2\ell_h}{k_0}}.$$

3.3.1 Les équations de la petite cavité

– Equation de Navier-Stokes (éq. 3.1)

Du fait que les dimensions de la cavité sont très inférieures à la longueur d'onde et que le champ de pression ne présente pas de variations spatiales au voisinage des parois, ce champ de pression est supposé uniforme dans toute la cavité. Par suite $\text{grad } p = \vec{0}$ et la vitesse particulaire est quasi nulle en tout point de la cavité (ce qui n'implique pas pour autant un débit de paroi négligeable), et les phénomènes de viscosités n'apparaissent pas.

– Equation de conservation de la masse

Elle peut être exprimée d'après l'équation (3.2) sous la forme intégrale suivante :

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \text{div } \rho_0 \vec{v} \right] dV = 0,$$

soit

$$\iiint_V \frac{\partial \rho'}{\partial t} dV + \rho_0 \iint_A \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0. \quad (3.46)$$

Certaines parois de la cavité étant animées d'un mouvement vibratoire de déplacement $\vec{\xi}$ (ici en $z = 0$, microphone émetteur) et d'autres étant caractérisées par leur impédance (pression / vitesse) Z (ici en $z = \ell$, microphone récepteur), cette équation prend la forme suivante dans le domaine fréquentiel :

$$\iiint_V j\omega \rho' dV + j\omega \rho_0 \iint_A \vec{\xi} \cdot d\vec{A} + \rho_0 \iint_A \frac{p}{Z} dA = 0. \quad (3.47)$$

Du fait de l'uniformité du champ de pression, il vient

$$\iint_A \frac{p}{\bar{Z}} dA = p \iint_A \frac{1}{\bar{Z}} dA = \frac{pA}{\bar{Z}}, \quad (3.48)$$

où $1/\bar{Z}$ désigne la valeur moyenne de l'admittance de paroi, et la relation (3.47) devient alors :

$$\frac{1}{\rho_0} \iiint_V \rho' dV + \delta V + \frac{pA}{j\omega \bar{Z}} = 0, \quad (3.49)$$

où $\delta V = \iint_A \vec{\xi} \cdot d\vec{A}$ désigne la variation de volume de la cavité liée aux vibrations de la paroi (microphone émetteur en $z = 0$).

– Equation exprimant la bivariance du milieu

La relation linéarisée

$$\rho' = \rho_0 \chi_T (p - \hat{\beta} \tau)$$

reportée dans la relation de la relation (3.49) permet d'éliminer la variable ρ' et donne

$$\left[1 + \frac{A}{j\omega \bar{Z} \chi_T V} \right] p - \frac{\hat{\beta}}{V} \iiint_V \tau dV = \frac{\delta V}{\chi_T V}, \quad (3.50)$$

équation qui montre en particulier que le champ de pression ne dépend pas de $\tau(\vec{r}, t)$ mais de sa valeur moyenne sur tout le volume V de la cavité (alors même que τ varie de façon importante dans les couches limites thermiques).

– Equation de conduction de la chaleur

Sous sa forme (3.3), elle s'écrit dans le domaine fréquentiel :

$$\left(\frac{j\omega}{c_0} + \ell_h \Delta \right) \tau = \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta} \gamma} \frac{j\omega}{c_0} p, \quad (3.51)$$

ou encore

$$\tau = \frac{c_0 \ell_h}{j\omega} \Delta \tau + \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta} \gamma} p. \quad (3.52)$$

où ℓ_h désigne une longueur caractéristique de diffusion thermique. Compte tenu de l'uniformité du champ de pression p , cette dernière relation donne

$$\iiint_V \tau dV = \frac{c_0 \ell_h}{j\omega} \iint_A \vec{\text{grad}} \tau \cdot d\vec{A} + \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta} \gamma} V p. \quad (3.53)$$

3.3.2 La solution

La solution de l'équation (3.51), qui satisfait à la condition $\tau = 0$ sur les frontières, peut être écrite (le facteur $e^{j\omega t}$ est omis) :

$$\tau = \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta} \gamma} p [1 - e^{-j k_h u}], \quad (3.54)$$

où u est la position du point considéré de la cavité, repérée par rapport à la normale sortante à la surface de la paroi ($u = 0$ sur la paroi).

Cette forme de solution est correcte sous réserve d'une part que l'épaisseur des couches limites thermiques soit très petite par rapport aux dimensions de la cavité, c'est-à-dire que la fonction $e^{-j k_h u}$ décroisse «très vite» pour un point qui s'écarte de la paroi et d'autre part que soit fait le choix

$$k_h = \frac{-1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{k_0/\ell_h}, \quad (3.55)$$

pour que cette fonction représente bien une onde de diffusion thermique qui pénètre dans la cavité, à partir des parois.

Par suite, sur la surface ($u = 0$),

$$\frac{\partial \tau}{\partial u} = -\frac{\gamma-1}{\hat{\beta}\gamma} p \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{c_0 \ell_h}}$$

et

$$\iint_A \vec{\text{grad}} \tau \cdot d\vec{A} = \iint_A \frac{\partial \tau}{\partial u} dA = -\frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{c_0 \ell_h}} A \frac{\gamma-1}{\hat{\beta}\gamma} p,$$

ce qui donne finalement pour l'expression (3.53) :

$$\iiint_V \tau dV = \left[V - \frac{1-j}{\sqrt{2}} A \sqrt{\frac{c_0 \ell_h}{\omega}} \right] \frac{\gamma-1}{\hat{\beta}\gamma} p. \quad (3.56)$$

Le report de ce résultat dans la relation (3.50) donne l'expression suivante pour l'amplitude de la pression dans la cavité :

$$p = -\frac{\gamma \delta V}{\chi_T V} \frac{1}{1 + \frac{\gamma A/V}{j \omega \chi_T \bar{Z}} + \frac{1-j}{\sqrt{2}} (\gamma-1) \frac{A}{V} \sqrt{\frac{c_0 \ell_h}{\omega}}}. \quad (3.57)$$

Hors couches limites, l'admittance des parois est nulle dans le cas présent sauf pour l'extrémité $z = \ell$ qui a pour admittance acoustique Y_r . La valeur moyenne $1/\bar{Z}$ de l'admittance de paroi est alors donnée par

$$\frac{A}{\bar{Z}} = \iint_A \frac{1}{Z} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{Y_r}{\pi a^2} r dr d\theta = Y_r,$$

ce qui donne pour l'expression (3.57) de la pression acoustique

$$p = -\frac{\gamma \delta V}{\chi_T V} \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{j \omega \chi_T V} Y_r + \frac{1-j}{\sqrt{2}} (\gamma-1) \frac{A}{V} \sqrt{\frac{c_0 \ell_h}{\omega}}}. \quad (3.58)$$

Le fluide enfermé dans la cavité est de l'air, qui peut être considéré comme un gaz parfait, ce qui implique $\rho_0 c_0^2 = \gamma / \chi_T \approx \gamma P_0$. L'admittance acoustique de transfert $Y_T = \frac{S v_e + Y_e p(0)}{p(\ell)}$ du système microphones-coupleur (éq. 2.1) s'écrit ici

$$Y_T = -\frac{j \omega \delta V}{p} + Y_e = j \omega \frac{V}{\gamma P_0} \left[1 + (\gamma-1) \frac{A}{V} \frac{1-j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{c_0 \ell_h}{\omega}} \right] + Y_e + Y_r. \quad (3.59)$$

Cette expression (3.59) de l'admittance acoustique de transfert Y_T est celle proposée par Riéty et Lecollinet [30] ainsi que par Ballagh [3] pour les étalonnages en basses fréquences. Cette expression est aussi égale à l'admittance Y_P trouvée par Gerber (éq. 3.44, éq. 34 de l'article de Gerber [12]), E_P étant donné par la solution à court terme par transformée de Laplace (éq. 3.42, éq. 25.b de Gerber) à l'ordre 1 en X , expression qui n'est pas celle retenue dans la norme CEI 61094-2 [22].

La solution (3.59) pour le facteur $(-j\omega\delta V/p)$ est identique à la solution de Gerber (3.44) pour $(-j\omega\delta V/p_g)$, hormis l'admittance Y_r qui n'est pas prise en compte dans le modèle de Gerber, en écrivant $1/\sqrt{j} = (1 - j)/\sqrt{2}$.

3.4 Propagation d'ondes planes

Dans le cas où le champ de pression n'est plus uniforme dans la cavité (les dimensions de la cavité ne sont plus petites devant la longueur d'onde), un autre modèle peut être proposé pour représenter le champ acoustique dans la cavité : la propagation est celle d'ondes planes suivant l'axe de la cavité cylindrique et l'amortissement des ondes dû aux effets visqueux et thermiques est pris en compte dans le nombre d'onde et par l'introduction d'impédances de paroi aux extrémités [9, § 5-1]. Ce modèle est, en particulier, celui proposé par Ballagh [3].

Dans un souci de clarté du discours, certaines des approximations faites dans ce paragraphe peuvent paraître un peu rapides. En complément de la résolution proposée dans ce paragraphe, une approche plus détaillée du même problème est donnée dans l'annexe G.

3.4.1 Equations simplifiées

Un certain nombre d'hypothèses simplificatrices peuvent être retenues pour simplifier les équations de l'acoustique (3.1), (3.2) et (3.3) [8, § 3.7]. Elles sont présentées au fur et à mesure de leur usage.

Le système considéré est celui décrit par la figure 3.1 (début du paragraphe 3.3) : une cavité cylindrique de rayon a et de longueur ℓ est excitée à son extrémité $z = 0$ par un microphone émetteur d'admittance à circuit ouvert Y_e ; un microphone récepteur d'admittance acoustique à circuit ouvert Y_r est placé à l'extrémité $z = \ell$.

La membrane de l'émetteur est supposée avoir un rayon égal à celui de la cavité. Son mouvement est assimilé à celui d'un piston plan : elle crée un débit Sv_e quasi uniforme sur sa surface. L'écart instantané de pression p étant (quasi) uniforme sur une section du tube, il est considéré comme indépendant de la coordonnée r et peut être noté $p(z)$. Par suite la composante radiale du gradient de pression est négligeable par rapport à sa composante axiale et, par suite la composante radiale de la vitesse particulaire peut être négligée $v_r \ll v_z$.

Par ailleurs, en raison de l'importance des effets liés à la viscosité de cisaillement, la variation de la vitesse particulaire $v = v_z$ suivant la variable r est très supérieure à sa variation suivant la direction z ,

$$\left| \frac{\partial}{\partial z} v(r, z) \right| \ll \left| \frac{\partial}{\partial r} v(r, z) \right|. \quad (3.60)$$

Finalement seule la composante axiale de l'équation de Navier-Stokes est à exprimer ; elle

prend la forme approchée suivante :

$$\left(\frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} - \ell'_v \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \right) v_z(r, z) = -\frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{\partial}{\partial z} p(z), \quad r \in (0, a), \quad z \in (0, \ell). \quad (3.61a)$$

A cette équation (3.61a) sont associées les deux conditions suivantes sur la composante z de la vitesse :

$$v_z(0, z) \text{ reste finie et } v_z(a, z) = 0 \quad \forall z. \quad (3.61b)$$

La solution pour v_z de ce problème (3.61a,b) s'écrit en régime harmonique, en omettant le facteur $e^{j\omega t}$,

$$v_z(r, z) = \frac{j}{\omega \rho_0} \frac{\partial}{\partial z} p(z) \left[1 - \frac{J_0(k_v r)}{J_0(k_v a)} \right], \quad (3.62)$$

où le nombre d'onde de diffusion k_v est défini par

$$k_v = \frac{1-j}{\sqrt{2}} \sqrt{k_0/\ell'_v}.$$

La valeur moyenne de cette vitesse sur une section du tube (modèle onde plane) s'exprime alors comme suit :

$$\langle v_z \rangle_a = \frac{2}{a^2} \int_0^a v_z(r, z) r dr = \frac{j}{k_0 \rho_0 c_0} \frac{\partial p(z)}{\partial z} \left[1 - \frac{2}{k_v a} \frac{J_1(k_v a)}{J_0(k_v a)} \right]. \quad (3.63)$$

L'équation de conservation de la masse (3.2) prend la forme simplifiée

$$j\omega \frac{\gamma}{c_0^2} (p(z) - \hat{\beta} \tau(r, z)) + \rho_0 \frac{\partial}{\partial z} v_z(r, z) = 0, \quad (3.64)$$

et sa valeur moyenne sur une section du tube s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle v_z \rangle_a + \frac{j\omega}{\rho_0} \frac{\gamma}{c_0^2} (p(z) - \hat{\beta} \langle \tau \rangle_a) = 0. \quad (3.65)$$

Enfin, du fait que la variation de température τ s'annule en $r = a$, à l'instar de la vitesse particulière (3.60), sa variation suivant la variable r est très supérieure à sa variation suivant la variable z . Ainsi l'équation (3.3) pour la conduction de la chaleur prend la forme approchée suivante :

$$\left(\frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} - \ell_h \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \right) \tau(r, z) = \frac{\gamma-1}{\hat{\beta} \gamma} \frac{j\omega}{c_0} p(z), \quad r \in (0, a), \quad z \in (0, \ell). \quad (3.66)$$

La solution de cette équation, qui satisfait aux conditions

$$\tau(0, z) \text{ reste finie et } \tau(a, z) = 0 \quad \forall z, \quad (3.67)$$

s'écrit

$$\tau(r, z) = \frac{\gamma-1}{\hat{\beta} \gamma} p(z) \left[1 - \frac{J_0(k_h r)}{J_0(k_h a)} \right], \quad (3.68)$$

où le nombre d'onde k_h est défini par

$$k_h = \frac{1-j}{\sqrt{2}} \sqrt{k_0/\ell_h};$$

sa valeur moyenne sur une section s'écrit :

$$\langle \tau \rangle_a = \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta}\gamma} p(z) \left[1 - \frac{2}{k_h a} \frac{J_1(k_h a)}{J_0(k_h a)} \right], \quad (3.69)$$

Le report de cette équation (3.69) dans l'équation (3.65) conduit à une seconde relation entre pression et vitesse,

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle v_z \rangle_a = -\frac{j\omega}{\rho_0 c_0^2} \left[1 + (\gamma - 1) \frac{2}{k_h a} \frac{J_1(k_h a)}{J_0(k_h a)} \right] p(z), \quad (3.70)$$

qui, avec la première (éq. 3.63), montre que le problème peut être traité par analogie avec la théorie des lignes à constantes réparties. En effet, les équations (3.63) et (3.70), en notant $w(z) = S \langle v_z \rangle_a$ le débit acoustique, où $S = \pi a^2$ désigne la section droite du cylindre, sont de la forme :

$$\frac{\partial p}{\partial z} + Z_v w = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial z} + Y_h p = 0, \quad (3.71)$$

où l'impédance en série Z_v et l'admittance en parallèle Y_h par unité de longueur s'écrivent

$$Z_v = \frac{1}{S} \frac{j k_0 \rho_0 c_0}{1 - K_v} \quad \text{et} \quad Y_h = S \frac{j k_0}{\rho_0 c_0} [1 + (\gamma - 1) K_h], \quad (3.72)$$

avec

$$K_{h,v} = \frac{2}{k_{h,v}} \frac{J_1(k_{h,v} a)}{J_0(k_{h,v} a)}. \quad (3.73)$$

3.4.2 Champ acoustique dans le cylindre

La propagation des ondes (supposées planes) dans le cylindre est régie par l'équation suivante (obtenue en éliminant la variable w dans les équation (3.71))

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_z^2 \right) p(z) = 0, \quad z \in (0, \ell) \quad (3.74)$$

où

$$k_z^2 = -Z_v Y_h = k_0^2 \frac{1 + (\gamma - 1) K_h}{1 - K_v}, \quad \text{avec } \operatorname{Re} k_z > 0 \text{ et } \operatorname{Im} k_z < 0. \quad (3.75)$$

Pour tous les types de coupleur et toute la gamme de fréquences considérée, $|k_{h,v} a| > 8$: ainsi le cylindre peut être considéré comme un tube «large» ($|k_{h,v} a| \gg 1$). Un développement asymptotique, à l'ordre 1/2 des longueurs caractéristiques ℓ'_v et ℓ_h , des fonctions de Bessel contenues dans $K_{h,v}$ donne alors pour k_z

$$k_z^2 \approx k_0^2 \left[1 + \frac{1-j}{\sqrt{2}} \frac{2}{a\sqrt{k_0}} (\sqrt{\ell'_v} + (\gamma - 1)\sqrt{\ell_h}) \right], \quad (3.76)$$

soit

$$k_z \approx k_0 \left[1 + \frac{1-j}{\sqrt{2}} \frac{1}{a\sqrt{k_0}} (\sqrt{\ell'_v} + (\gamma - 1)\sqrt{\ell_h}) \right]. \quad (3.77)$$

La condition aux limites sur la surface du microphone émetteur s'écrit, en faisant usage de la première relation (3.71),

$$-\frac{1}{Z_v} \frac{\partial p}{\partial z} = Sv_e - Y_p p \quad \text{pour } z = 0, \quad (3.78)$$

où Y_p est une admittance représentant les effets de couches limites thermiques au voisinage de la paroi (voir [8, § 3.2.1] et annexe H) :

$$Y_p = \frac{S}{\rho_0 c_0} \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{k_0}(\gamma-1)\sqrt{\ell_h}. \quad (3.79)$$

En $z = \ell$, l'onde est réfléchiée sur un plan d'impédance $Y_r + Y_p$, ce qui donne pour la condition aux limites sur le récepteur, d'après la première équation (3.71),

$$\frac{1}{Z_v} \frac{\partial p}{\partial z} = -(Y_r + Y_p) p \quad \text{pour } z = \ell. \quad (3.80)$$

La solution de l'équation de propagation (3.74) pour la pression est de la forme

$$p(z) = B(e^{-jk_z z} + R_\ell e^{jk_z z}), \quad (3.81)$$

où les constantes B et R_ℓ sont déterminées par les conditions aux frontières.

La condition aux frontières (3.80) en $z = \ell$ donne alors

$$R_\ell = e^{-2jk_z \ell} \frac{Y_i - (Y_r + Y_p)}{Y_i + (Y_r + Y_p)}, \quad (3.82)$$

où Y_i , appelée l'admittance itérative du cylindre, s'écrit

$$Y_i = \sqrt{\frac{Y_h}{Z_v}} = \frac{j k_z}{Z_v} = \frac{S}{\rho_0 c_0} \sqrt{[1 + (\gamma - 1)K_h](1 - K_v)}, \quad (3.83)$$

soit, en prenant le développement asymptotique des fonctions de Bessel à l'ordre le plus bas,

$$Y_i \approx \frac{S}{\rho_0 c_0} \left[1 + \frac{1-j}{\sqrt{2}} \frac{2}{a\sqrt{k_0}} (-\sqrt{\ell'_v} + (\gamma-1)\sqrt{\ell_h}) \right], \quad (3.84)$$

Enfin, la condition aux frontières (3.78) en $z = 0$ donne

$$B = \frac{Sv_e}{Y_i(1 - R_\ell) + Y_p(1 + R_\ell)}. \quad (3.85)$$

3.4.3 Admittance acoustique de transfert

La quantité utile dans la méthode d'étalonnage par réciprocité est l'admittance acoustique de transfert Y_T , quotient du flux de vitesse en court-circuit acoustique produit par le microphone utilisé en émetteur par la pression acoustique agissant sur la membrane utilisée en récepteur (§ 1.2.2) :

$$Y_T = \frac{Sv_e + Y_e p(0)}{p(\ell)}. \quad (3.86)$$

Elle s'écrit, en faisant usage des équations (3.81), (3.82) et (3.85),

$$Y_T = j \sin k_z \ell \left[Y_i + \frac{(Y_e + Y_p)(Y_r + Y_p)}{Y_i} \right] + \cos k_z \ell (2Y_p + Y_e + Y_r). \quad (3.87)$$

En «basses» fréquences, l'expression (3.87) devient

$$Y_T \approx j k_z \ell Y_i + 2Y_p + Y_e + Y_r, \quad (3.88)$$

soit, en faisant usage des expressions (3.84), (3.79) et (3.77), avec $S = \pi a^2$,

$$Y_T \approx j \omega \frac{V}{\rho_0 c_0^2} \left[1 + (\gamma - 1) \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{\ell} \right) \sqrt{\frac{c_0 \ell_h}{j \omega}} \right] + Y_e + Y_r,$$

soit,

$$Y_T \approx j \omega \frac{V}{\gamma P_0} [1 + (\gamma - 1)X] + Y_e + Y_r, \quad (3.89)$$

avec

$$X = \frac{A}{V} \frac{1 - j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\ell_h}{k_0}},$$

le rapport surface / volume de la cavité vaut $\frac{A}{V} = \frac{2}{a} + \frac{2}{\ell}$.

Cette expression de l'admittance Y_T est bien la même, à l'ordre 1 en X , que l'expression (3.44, 3.42) trouvée dans un des deux modèles de Gerber et trouvée également dans le modèle «petite cavité» (relation 3.59).

3.5 Synthèse des différents modèles existants

Toutes les méthodes de calcul de l'admittance acoustique de transfert utilisées à ce jour ont été présentées dans ce chapitre. Pour terminer, une vérification numérique des propos tenus sur ces différents résultats est présentée ici.

3.5.1 Modèles à champ de pression uniforme

Le modèle proposé par Jarvis [15] et repris par la norme CEI 61094-2 (éq. 2.12, 2.13) s'appuie sur le raisonnement de Gerber présenté dans le paragraphe 3.2. Le cas retenu par Jarvis est celui où l'écart instantané de masse volumique ρ'_g assimilé à un terme de source est uniforme dans la cavité (cf. § 3.2.1).

Cependant, comme indiqué dans le paragraphe 3.2.1, le second membre de l'équation de conduction de la chaleur, telle qu'elle est formulée par Gerber (éq. 3.4 et 3.5), ne représente pas l'action d'une source dans le domaine mais l'état même du fluide dans la cavité. Par ailleurs, dans une cavité dont les dimensions sont petites par rapport à la longueur d'onde («petite» cavité), ce qui est le cas ici, le champ de pression acoustique est uniforme [8, § 6.3.2.2], ce qui est incompatible avec l'hypothèse d'un champ d'écart instantané de masse volumique uniforme (car le champ de température n'est lui-même pas uniforme).

Ainsi, le résultat pour l'admittance acoustique de transfert qui devrait être utilisé est celui déterminé pour l'hypothèse « p_g uniforme» (éq. 3.44) et non pas celui proposé actuellement par la norme (éq. 2.12, 2.13).

Notons enfin que l'expression de l'admittance de transfert Y_T établie par Gerber (éq. 3.44) est équivalente à celle établie dans la cadre de l'étude du champ acoustique dans une «petite» cavité (éq. 3.59), sous réserve de prendre en compte l'admittance des microphones.

3.5.2 Comparaison des résultats obtenus avec différents modèles

Les quatre modèles présentés précédemment peuvent être brièvement caractérisés comme suit :

- le développement modal (éq. 3.44, 3.41) établi par Gerber [12] et préconisé par le norme CEI 327 (antérieure à la norme CEI 61094-2) [19],
- le second modèle, dit à court terme, établi par Gerber (éq. 3.44, 3.42) pour l'hypothèse « p_g uniforme»,
- le modèle issu du calcul du champ acoustique en «petite» cavité (éq. 3.59) proposé par Riéty et Lecollinet ainsi que par Ballagh et équivalent, à l'ordre le plus bas des développements asymptotiques, à celui de Gerber pour « p_g uniforme»,
- le modèle établi par Gerber (éq. 2.12, 2.13) pour l'hypothèse « ρ'_g uniforme», préconisé par Jarvis [15] et actuellement normalisé [22].

Les résultats obtenus pour chacun de ces modèles sont comparés numériquement. En théorie, les trois premiers modèles cités sont équivalents car reposant sur les mêmes hypothèses. Dans la pratique, il peut être intéressant de comparer numériquement ces trois modèles afin de déterminer lequel des trois peut être le plus adapté pour les étalonnages. Les résultats présentés portent sur le volume acoustique de transfert V_T du système microphones - coupleur, proportionnel à l'admittance de transfert Y_T :

$$V_T = \frac{\gamma_R P_R}{j\omega} Y_T,$$

où γ_R et P_R sont respectivement le rapport des capacités calorifiques C_p et C_v (massiques) de l'air et la pression statique dans les conditions standard de référence.

Pour des commodités d'exploitation des résultats, le volume de transfert V_T est normalisé par sa valeur aux basses fréquences V_{Tbf} en l'absence d'effets thermiques définie comme la somme du volume géométrique de la cavité et des volumes équivalents aux basses fréquences des microphones : $V_{Tbf} = V + V_{bfe} + V_{bfr}$, où les volumes équivalents des microphones sont liés à leurs admittances acoustiques respectives $Y_{e,r}$ en basses fréquences par $V_{bfe,r} = \gamma_R P_R / j\omega Y_{bfe,r}$ (§ 2.3.2.a). Les graphiques des figures 3.2, 3.3, 3.4 représentent donc le rapport $\frac{V_T}{V_{Tbf}}$ en fonction de la fréquence.

Les dimensions des coupleurs (schémas en annexe A) et les caractéristiques des microphones utilisées dans cette application numérique sont données dans les tableaux 3.1 et 3.2. Le développement modal (éq. 3.41) est calculé avec 100x100 termes.

Il apparaît en premier lieu que la différence entre les résultats obtenus pour le modèle normalisé et pour les autres modèles (champ de pression uniforme) n'est pas négligeable, car elle peut atteindre 0,08 dB, en regard de la précision recherchée pour les étalonnages de microphones (actuellement la reproductibilité sur la détermination d'efficacité en pression dans les basses fréquences est de l'ordre de 0,01–0,02 dB [24] et l'incertitude expérimentale est évaluée à environ 0,03 dB).

L'expression à court terme établie par Gerber pour l'hypothèse « p_g uniforme» (§ 3.2, éq. 3.42, 3.44) est égale à l'ordre 1 en X à l'expression obtenue en calculant le champ de pression en «petite» cavité (§ 3.3, éq. 3.59), à ceci près que Gerber n'introduit pas les admittances Y_e et Y_r . La contribution des termes d'ordre supérieur à 1 est assez réduite car, dans la gamme de fréquences utilisée généralement pour les étalonnages (supérieure à 20 Hz), elle reste inférieure à 0,01 dB (valeur maximale obtenue pour des microphones LS2P). L'expression à l'ordre 1 en X est donc suffisante pour exprimer les effets thermiques dans cette gamme de fréquences recommandée par la norme. Toutefois, pour faire des mesures à des fréquences plus basses, il serait préférable, pour obtenir une plus grande précision, d'utiliser le développement à court terme complet ou même le développement modal (qui converge plus rapidement en très basses fréquences), en tenant compte de la remarque donnée en fin du paragraphe 3.2.4.

	Coupleur cylindrique 1/2"	Coupleur cylindrique 1"	Coupleur de grand volume 1"
Diamètre extrémités (mm)	9,3	18,6	18,6
Longueur extrémités (mm)	0	0	1,2
Diamètre centre (mm)	9,3	18,6	21,4
Longueur centre (mm)	4,5	7,5	12,5

TAB. 3.1 – Dimensions des coupleurs.

	LS2P (1/2")		LS1P (1")	
Profondeur frontale (mm)	0,489	0,495	1,976	1,957
Volume basses fréq. (mm ³)	8,7	8,3	147,72	131,36
Fréquence de résonance (Hz)	23000	20500	8500	8500
Facteur de qualité (dB)	-1,727	-1,727	-0,4	-0,4

TAB. 3.2 – Caractéristiques des microphones.

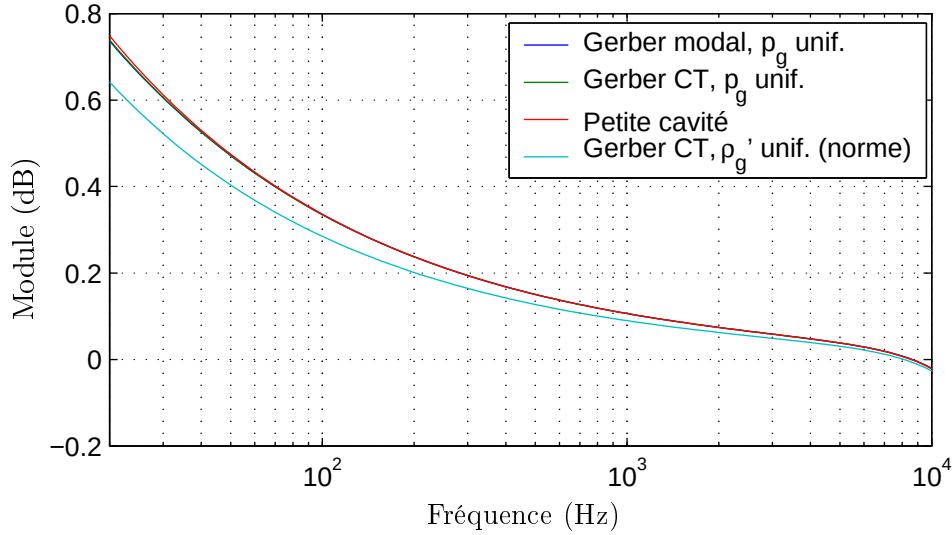


FIG. 3.2 – Volume acoustique de transfert normalisé V_T/V_{Tbf} en fonction de la fréquence, selon différents modèles physiques pour des microphones LS2P (1/2") et un coupleur cylindrique.

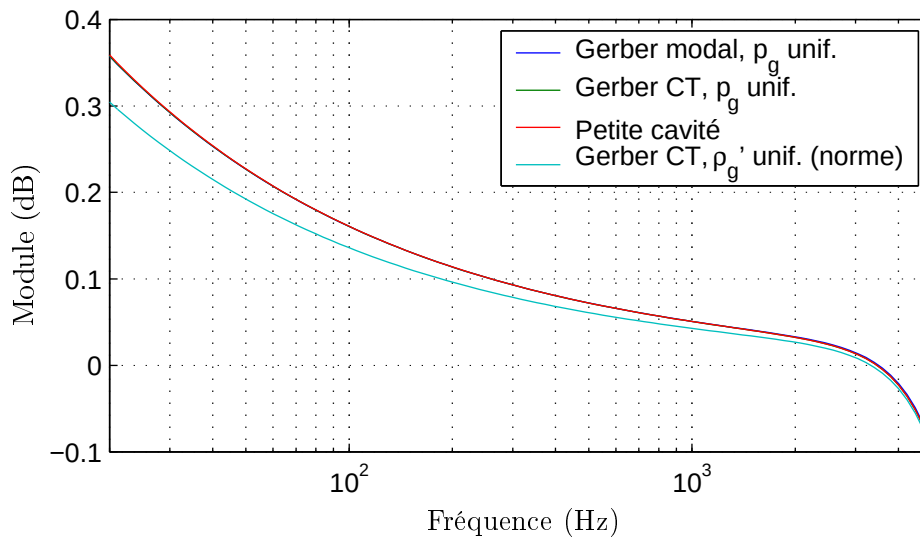


FIG. 3.3 – Volume acoustique de transfert normalisé V_T/V_{Tbf} en fonction de la fréquence, selon différents modèles physiques pour des microphones LS1P (1") et un coupleur cylindrique.

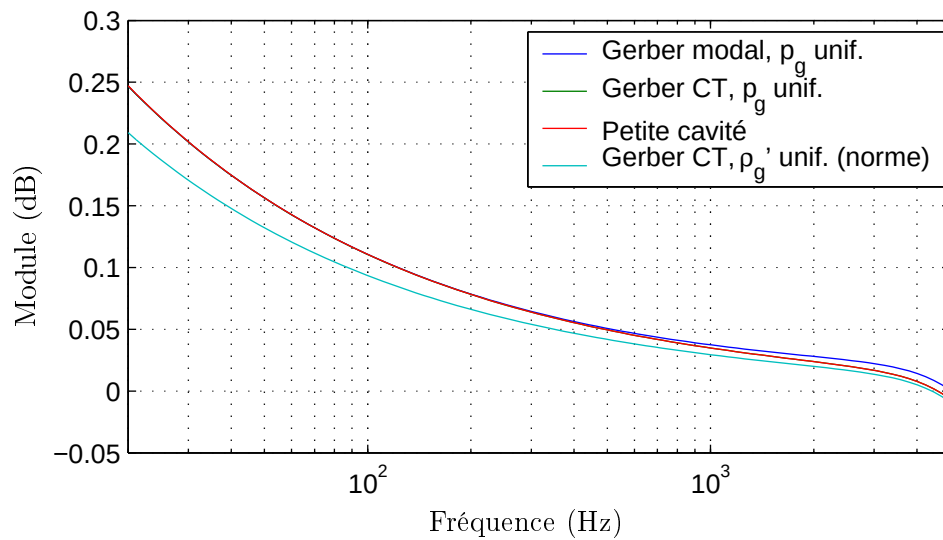


FIG. 3.4 – Volume acoustique de transfert normalisé V_T/V_{Tbf} en fonction de la fréquence, selon différents modèles physiques pour des microphones LS1P (1") avec un coupleur dit «de grand volume».

Chapitre 4

Champ acoustique en cavité cylindrique : modèle basé sur la formulation intégrale du problème aux limites

La norme CEI 61094-2 [22] sur l'étalonnage par réciprocité des microphones étalons de laboratoire propose un modèle acoustique du système de deux microphones, émetteur et récepteur, couplés par une cavité cylindrique (cf. § 2.2). Ce modèle, qui repose sur la propagation d'ondes planes dans la cavité, néglige les modes supérieurs (modes radiaux) qui pourraient avoir une influence non négligeable sur les résultats d'étalonnage. L'existence de ces modes est due au fait que le champ de déplacement de la membrane du microphone émetteur n'est pas uniforme (cf. infra) et que la partie mobile de la membrane des microphones n'a pas exactement le même diamètre que la cavité. Ainsi, la pression sur la membrane du récepteur n'est pas uniforme et, de plus, ce n'est pas exactement le champ de pression moyen qui est mesuré par celui-ci car sa membrane n'a pas non plus un mouvement de piston plan.

Rasmussen [25] propose de prendre en compte les modes radiaux par un terme correctif à appliquer de façon multiplicative à l'admittance acoustique de transfert déterminée selon le modèle physique normalisé. Le calcul de cette correction repose sur un modèle mathématique rigoureux au départ, mais admet finalement certaines hypothèses qui relèvent plutôt de l'intuition (la nature dissipative du fluide n'est pas prise en compte car elle sort des objectifs de l'auteur à cet endroit). En effet, il prend bien en compte, de façon analytique, le fait que la pression sur le récepteur n'est pas uniforme à cause du profil non uniforme du champ de déplacement de la membrane de l'émetteur mais ne tient compte que de façon empirique de l'effet du champ de déplacement non uniforme du diaphragme récepteur sur le champ de pression.

C'est ainsi que, dans ce chapitre, le modèle est repris de façon analytique, sur la base d'une solution modale du problème mathématique, qui repose sur la formulation intégrale et qui de surcroît prend en compte la nature dissipative du fluide (ce qui évite d'avoir à le traiter sous la forme de termes correctifs a posteriori).

4.1 Equations fondamentales du problème

Le système étudié, représenté sur la figure 4.1, est constitué de deux microphones, l'un émetteur de rayon a_e , l'autre récepteur de rayon a_r , couplés par une colonne de fluide contenue dans un cylindre à section circulaire de rayon a , supérieur aux rayons a_e et a_r et très proche de

ceux-ci. Les membranes de l'émetteur et du récepteur sont animées respectivement des vitesses v_e (imposée) et v_R (due au champ de pression reçu sur la membrane). Le problème est supposé à symétrie axiale (néanmoins pour des raisons d'exposé, l'angle θ apparaît au début du chapitre mais la symétrie reste supposée dans certaines simplifications).

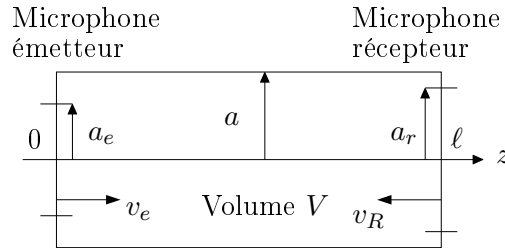


FIG. 4.1 – Dispositif pour l'étalonnage en pression : schéma de principe.

4.1.1 Equations fondamentales et conditions aux frontières sur les parois latérales

Les principales variables décrivant l'état thermodynamique du fluide (air) sont les mêmes que précédemment (§ 3.1).

Dans la suite, le problème est exprimé à partir des trois équations fondamentales de l'acoustique en fluide thermovisqueux (alinéas i, ii, iii), à savoir l'équation de Navier-Stokes, celle de conservation de la masse et celle de conduction de la chaleur. Dans ces équations, un certain nombre d'hypothèses simplificatrices peuvent être retenues. Elles sont présentées au fur et à mesure de leur usage. En premier lieu, l'écart instantané de pression étant quasi uniforme sur une section du cylindre, il est considéré comme dépendant peu des coordonnées r et θ . Ainsi, les composantes de la vitesse $\vec{v}$ selon r et θ sont petites devant sa composante axiale $\underline{v}_z$ (la notation $\underline{v}_z$ n'est utilisée ici que pour des questions de simplifications ultérieures). Par ailleurs, en raison de l'importance des effets liés à la viscosité de cisaillement, la variation suivant la variable r de la vitesse particulière $\underline{v}_z$ est très supérieure à sa variation suivant la direction z , ce qui implique en particulier que le facteur lié à la viscosité de volume peut être négligé.

- i. La composante axiale de l'équation de Navier-Stokes prend la forme approchée suivante (équation de Hagen-Poiseuille, cf éq. 3.61 a, b) :

$$\left(\frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} - \ell'_v \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \right) \underline{v}_z(r, \theta, z) = -\frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{\partial}{\partial z} p(r, \theta, z). \quad (4.1)$$

A cette équation (4.1) sont associées les deux conditions suivantes sur la composante z de la vitesse :

$$\underline{v}_z(0, \theta, z) \text{ reste finie et } \underline{v}_z(a, \theta, z) = 0 \quad \forall z, \theta. \quad (4.2)$$

- ii. La seconde équation prise en compte est celle de conduction de la chaleur. Du fait que la variation de température $\underline{T}$ s'annule en $r = a$ et de la symétrie du système, la température est très peu dépendante de l'angle θ et sa dérivée selon z est négligeable devant sa dérivée

selon r (dans les couches limites thermiques). Par suite, l'équation de conduction de la chaleur [8, éq. 2.62] prend la forme approchée suivante :

$$\left(\frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} - \ell_h \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \right) \underline{\tau}(r, \theta, z) = \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta}\gamma} \frac{j\omega}{c_0} p(r, \theta, z), \quad (4.3)$$

à laquelle sont associées les conditions

$$\underline{\tau}(0, \theta, z) \text{ reste finie et } \underline{\tau}(a, \theta, z) = 0 \quad \forall z, \theta. \quad (4.4)$$

iii. Reste à exprimer la troisième équation fondamentale considérée, celle de conservation de la masse :

$$j\omega \underline{\rho}' + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

En faisant usage de la relation d'état

$$\underline{\rho}' = \frac{\gamma}{c_0^2} (p - \hat{\beta}\underline{\tau}), \quad (4.5)$$

pour éliminer la variable $\underline{\rho}'$, l'équation de conservation de la masse peut alors être écrite

$$\frac{\gamma}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} (p - \hat{\beta}\underline{\tau}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} v_\theta + \frac{\partial}{\partial z} v_z = 0. \quad (4.6)$$

Les solutions des équations (4.1) à (4.6) permettent ensuite d'exprimer l'équation de propagation décrivant la propagation d'une onde quasi plane dans la cavité en remplaçant les quantités $\underline{v}_z$, $\underline{\tau}$ et p par leurs valeurs moyennes sur une section du cylindre, ce qui conduit à un problème aux limites dépendant uniquement de la coordonnée axiale.

4.1.2 Equation de propagation

L'écart instantané de pression p étant considéré comme très peu dépendant des coordonnées (r, θ) dans les couches limites viscothermiques sur les parois latérales (onde quasi plane) et la composante $\underline{v}_z$ de la vitesse particulaire étant fortement dépendante de r dans les couches limites visqueuses, le second membre de l'équation (4.1) est supposé indépendant de r , ce qui conduit à écrire la solution $\underline{v}_z$ du problème (4.1), (4.2), en régime harmonique, sous la forme approchée (le facteur $e^{j\omega t}$ est omis) (cf. § 3.4.1)

$$\underline{v}_z(r, \theta, z) \approx \frac{j}{k_0 \rho_0 c_0} \frac{\partial}{\partial z} p(r, \theta, z) \left[1 - \frac{J_0(k_v r)}{J_0(k_v a)} \right], \quad (4.7)$$

où le nombre d'onde de diffusion k_v est défini par

$$k_v = \frac{1-j}{\sqrt{2}} \sqrt{k_0 / \ell'_v}.$$

Dans la suite, l'effet dissipatif dû aux couches limites visqueuses au niveau des parois latérales de la cavité est pris en compte en prenant la valeur moyenne suivant r du profil du champ de vitesse imposé par les couches limites visqueuses, admettant de la sorte l'hypothèse que cet effet dissipatif lié aux couches limites visqueuses en $r = a$ affecte de la même manière

l'onde plane (§ 3.4) et l'onde quasi plane. Ainsi, la valeur moyenne retenue ici porte sur la seule fonction $[1 - J_0(k_v r)/J_0(k_v a)]$ qui varie très rapidement dans la couche limite visqueuse, le facteur $\frac{\partial}{\partial z} p(r, \theta, z)$, fonction de r et θ , étant sorti de l'intégrale sur r et θ .

Cette valeur moyenne particulière, notée v_z , s'exprime alors comme suit :

$$\begin{aligned} v_z &\approx \frac{j}{k_0 \rho_0 c_0} \frac{\partial}{\partial z} p(r, \theta, z) \frac{1}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[1 - \frac{J_0(k_v r)}{J_0(k_v a)} \right] r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{j}{k_0 \rho_0 c_0} \frac{\partial}{\partial z} p(r, \theta, z) \left[1 - \frac{2}{k_v a} \frac{J_1(k_v a)}{J_0(k_v a)} \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Notons au passage, pour les besoins de la suite, que les composantes v_r et v_θ selon r et θ de la vitesse particulière (qui sont confondues avec leur valeur moyenne au sens indiqué précédemment car non affectées ici par la viscosité), peuvent être exprimées en première approximation par

$$v_r(r, \theta, z) = \frac{j}{k_0 \rho_0 c_0} \frac{\partial}{\partial r} p(r, \theta, z), \quad (4.9)$$

$$v_\theta(r, \theta, z) = \frac{j}{k_0 \rho_0 c_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} p(r, \theta, z). \quad (4.10)$$

De la même façon que pour obtenir l'expression de $\underline{v}_z$ (4.7), la solution $\underline{\tau}$ de l'équation (4.3), compte tenu des conditions (4.4) est donnée par (§ 3.4.1)

$$\underline{\tau}(r, \theta, z) = \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta}\gamma} p(r, \theta, z) \left[1 - \frac{J_0(k_h r)}{J_0(k_h a)} \right], \quad (4.11)$$

où le nombre d'onde k_h est défini par

$$k_h = \frac{1 - j}{\sqrt{2}} \sqrt{k_0 / \ell_h},$$

et sa valeur moyenne sur une section s'écrit (en admettant les mêmes approximations que celles retenues précédemment sur $\underline{v}_z$, éq. 4.8) :

$$\tau(r, \theta, z) = \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta}\gamma} p(r, \theta, z) \left[1 - \frac{2}{k_h a} \frac{J_1(k_h a)}{J_0(k_h a)} \right]. \quad (4.12)$$

Ainsi, la valeur moyenne de l'équation (4.6), au sens des équations (4.8) et (4.12), compte tenu des équations (4.8), (4.9), (4.10) et (4.12), conduit directement à l'équation de propagation suivante :

$$\left[k_0^2 \frac{1 + (\gamma - 1)K_h}{1 - K_v} + \frac{1}{1 - K_v} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] p(r, \theta, z) = 0, \quad (4.13)$$

où les facteurs liés à la viscosité et à la conduction thermique K_v et K_h sont donnés par

$$K_{h,v} = \frac{2}{k_{h,v} a} \frac{J_1(k_{h,v} a)}{J_0(k_{h,v} a)}. \quad (4.14)$$

L'écart de pression p dépendant peu des coordonnées (r, θ) , ses dérivées partielles selon ces coordonnées dans l'équation (4.13) sont des termes petits qui permettent d'écrire $1 - K_v \approx 1$ en facteur. Ainsi l'équation (4.13) peut être écrite sous la forme simplifiée

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] p(r, \theta, z) = 0, \quad (4.15)$$

avec

$$k^2 = k_0^2 \frac{1 + (\gamma - 1)K_h}{1 - K_v} \approx k_0^2 \left[1 + \frac{1 - j}{\sqrt{2}} \frac{2}{a\sqrt{k_0}} (\sqrt{\ell'_v} + (\gamma - 1)\sqrt{\ell_h}) \right]. \quad (4.16)$$

Ainsi, le mouvement du fluide dans la cavité est décrit par l'équation de propagation (4.15) dont les solutions doivent satisfaire les conditions aux frontières en $z = 0$ et $z = \ell$ prenant en compte la forme du champ de vitesse des membranes de microphones (raison d'être des opérateurs en r et θ de l'équation 4.15) ainsi que les effets des couches limites viscothermiques sur ces parois.

4.2 Champ acoustique dans une cavité fermée, théorème de Green

La colonne de fluide contenue dans la cavité est le siège d'un champ acoustique harmonique créé par la vibration de la membrane du microphone émetteur située en $z = 0$ (fig. 4.1). Les parois situées en $z = 0$ et $z = \ell$ présentent respectivement les admittances Y_e et Y_r qui sont les admittances acoustiques des microphones à circuit ouvert. Les effets de dissipation visqueux et thermiques sont pris en compte par le choix d'une fonction de Green qui satisfait sur ces parois $z = 0$ et $z = \ell$ à une condition adaptée (condition mixte dans laquelle la fonction et sa dérivée sont liées sur les parois par l'impédance viscothermique de paroi).

La propagation des ondes dans le cylindre est régie par l'équation (4.15)

$$(\Delta + k^2)p(\vec{r}) = 0, \quad \forall \vec{r} \in \mathcal{D}. \quad (4.17)$$

A cette équation de propagation sont associées les conditions aux frontières suivantes :

$$\rho_0 c_0 v_z = \rho_0 c_0 v_e - \zeta_{z0} p, \quad \text{pour } r \in (0, a_e), \theta \in (0, 2\pi), z = 0, \quad (4.18a)$$

$$\rho_0 c_0 v_z = -\rho_0 c_0 v_r + \zeta_{z\ell} p, \quad \text{pour } r \in (0, a_r), \theta \in (0, 2\pi), z = \ell, \quad (4.18b)$$

$$\rho_0 c_0 v_z = -\zeta_{z0} p, \quad \text{pour } r \in (a_e, a), \theta \in (0, 2\pi), z = 0, \quad (4.18c)$$

$$\rho_0 c_0 v_z = \zeta_{z\ell} p, \quad \text{pour } r \in (a_r, a), \theta \in (0, 2\pi), z = \ell, \quad (4.18d)$$

où ζ_{z0} et $\zeta_{z\ell}$ sont les admittances acoustiques spécifiques des parois en $z = 0$ et $z = \ell$ traduisant les effets des couches limites thermovisqueuses sur le champ acoustique dans la cavité (annexe H), et

$$v_r = 0 \quad \text{pour } r = a, \theta \in (0, 2\pi), z \in (0, \ell), \quad (4.18e)$$

car les effets des couches limites thermovisqueuses latérales sont prises en compte dans le nombre d'onde complexe k .

Les admittances ζ_{z0} et $\zeta_{z\ell}$ restant petites, compte tenu des équations (4.8, 4.14), ces conditions aux frontières (4.18) s'écrivent (annexe H),

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{j k_0 \rho_0 c_0}{1 - K_v} v_z \approx \frac{j k_0 \rho_0 c_0}{1 - K_v} v_e - j k_0 \zeta_{z0} p \quad (4.19a)$$

pour $r \in (0, a_e)$, $\theta \in (0, 2\pi)$, $z = 0$,

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{j k_0 \rho_0 c_0}{1 - K_v} v_z \approx \frac{j k_0 \rho_0 c_0}{1 - K_v} v_R - j k_0 \zeta_{z\ell} p \quad (4.19b)$$

pour $r \in (0, a_r)$, $\theta \in (0, 2\pi)$, $z = \ell$,

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\partial p}{\partial z} = -j k_0 \zeta_{z0} p \quad (4.19c)$$

pour $r \in (a_e, a)$, $\theta \in (0, 2\pi)$, $z = 0$,

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial z} = -j k_0 \zeta_{z\ell} p, \quad (4.19d)$$

pour $r \in (a_r, a)$, $\theta \in (0, 2\pi)$, $z = \ell$,

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (4.19e)$$

pour $r = a$, $\theta \in (0, 2\pi)$, $z \in (0, \ell)$.

Pour une onde harmonique, le champ de pression acoustique $p(\vec{r})$ dans un domaine $\mathcal{D}$ limité par une surface fermée $\mathcal{S}$ peut être écrit sous la forme intégrale suivante [8, § 6.2.2] (le facteur $e^{j\omega t}$ est omis et le vecteur $\vec{r}$ est représenté ici par les trois coordonnées r, θ et z) :

$$p(\vec{r}) = \iiint_{\mathcal{D}} G(\vec{r}, \vec{r}_0) f(\vec{r}_0) dD_0 + \iint_{\mathcal{S}} \left[G(\vec{r}, \vec{r}_0) \frac{\partial}{\partial n_0} p(\vec{r}_0) - p(\vec{r}_0) \frac{\partial}{\partial n_0} G(\vec{r}, \vec{r}_0) \right] dS_0. \quad (4.20)$$

La fonction $f(\vec{r}_0)$ représente l'action des sources réparties à l'intérieur du domaine $\mathcal{D}$: dans le cas présent, $f(\vec{r}_0) = 0$. La fonction $G(\vec{r}, \vec{r}_0)$ est une fonction de Green satisfaisant à l'équation

$$(\Delta + k^2)G(\vec{r}, \vec{r}_0) = -\delta(\vec{r}, \vec{r}_0) \quad \text{dans } \mathcal{D} \quad (4.21)$$

(où $\delta(\vec{r}, \vec{r}_0)$ est la distribution de Dirac) et à des conditions aux limites a priori quelconques sur la surface $\mathcal{S}$. La dérivée $\frac{\partial}{\partial n_0}$ représente la dérivée suivant la normale locale à la surface $\mathcal{S}$ orientée vers l'extérieur du domaine.

Cette relation générale issue du théorème de Green [8, § 6.2.2] appliquée à la cavité de couplage permet d'exprimer, assez simplement grâce au choix d'une fonction de Green adaptée, la pression acoustique en tout point de la cavité.

En faisant usage des conditions aux frontières (4.19a–e) pour le champ de pression, le choix d'une fonction de Green satisfaisant sur l'ensemble des parois de la cavité aux conditions

$$\frac{\partial}{\partial n} G(\vec{r}, \vec{r}_0) = -j k_0 \zeta_{z0} G(\vec{r}, \vec{r}_0), \quad \text{pour } r \in (0, a), \theta \in (0, 2\pi), z = 0, \quad (4.22a)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} G(\vec{r}, \vec{r}_0) = -j k_0 \zeta_{z\ell} G(\vec{r}, \vec{r}_0), \quad \text{pour } r \in (0, a), \theta \in (0, 2\pi), z = \ell, \quad (4.22b)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} G(\vec{r}, \vec{r}_0) = 0, \quad \text{pour } r = a, \theta \in (0, 2\pi), z \in (0, \ell), \quad (4.22c)$$

permet d'exprimer l'intégrale de surface (apparaissant dans la relation 4.20), qui représente la pression acoustique en tout point de la cavité, de la manière suivante :

$$p(\vec{r}) = \frac{j k_0 \rho_0 c_0}{1 - K_v} \left[\iint_{S_e} v_e(\vec{r}_0) G(\vec{r}, \vec{r}_0) dS_0 + \iint_{S_r} v_R(\vec{r}_0) G(\vec{r}, \vec{r}_0) dS_0 \right], \quad (4.23)$$

S_e et S_r étant les surfaces respectives de la membrane de l'émetteur et du récepteur, les effets des couches thermovisqueuses étant portés par le facteur K_v (qui intervient dans l'impédance du milieu) et par la fonction de Green elle-même (dans le nombre d'onde k pour les effets latéraux et dans les admittances spécifiques ζ_{z0} et $\zeta_{z\ell}$ au niveau des membranes des microphones et leur périphérie). A noter la symétrie «émetteur - récepteur» dans l'expression du champ de pression acoustique (ce champ dépend de ces vitesses quelqu'en soit leur cause).

4.3 Expression de la fonction de Green, problème aux valeurs propres

La fonction de Green est solution du problème décrit par l'équation (4.21) et des conditions aux frontières (4.22a,b,c) :

$$(\Delta_{\vec{w}} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2)G(\vec{w}, z; \vec{w}_0, z_0) = -\delta(\vec{w} - \vec{w}_0)\delta(z - z_0) \quad \text{dans } \mathcal{D}, \quad (4.24a)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_0} G(\vec{w}, z; \vec{w}_0, z_0) = -\frac{\partial}{\partial z_0} G(\vec{w}, z; \vec{w}_0, z_0) = -j k_0 \zeta_{z0} G(\vec{w}, z; \vec{w}_0, z_0) \quad \text{pour } z = 0, \quad (4.24b)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_0} G(\vec{w}, z; \vec{w}_0, z_0) = \frac{\partial}{\partial z_0} G(\vec{w}, z; \vec{w}_0, z_0) = -j k_0 \zeta_{z\ell} G(\vec{w}, z; \vec{w}_0, z_0) \quad \text{pour } z = \ell, \quad (4.24c)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_0} G(\vec{w}, z; \vec{w}_0, z_0) = \frac{\partial}{\partial r_0} G(\vec{w}, z; \vec{w}_0, z_0) = 0 \quad \text{pour } r = a, \quad (4.24d)$$

avec $\Delta_{\vec{w}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$.

La solution de ce problème est recherchée sous la forme d'un développement [8, § 6.1.4 c] sur la base des fonctions propres orthonormées $\psi_{\mu\nu}^t(r, \theta)$ du cylindre

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \sum_{\substack{\mu, \nu=0,1,\dots \\ t=c,s}} g_{\mu\nu}(z, z_0) \psi_{\mu\nu}^t(r_0, \theta_0) \psi_{\mu\nu}^t(r, \theta). \quad (4.25)$$

Les fonctions propres sont solutions du problème aux valeurs propres

$$(\Delta_{\vec{w}} + k_{w\mu\nu}^2) \psi_{\mu\nu}^t(r, \theta) = 0 \quad \forall r \in (0, a) \text{ et } \forall \theta \in (0, 2\pi), \quad (4.26a)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \psi_{\mu\nu}^t(r, \theta) = 0 \quad \text{en } r = a \text{ et } \forall \theta \in (0, 2\pi); \quad (4.26b)$$

elles s'écrivent ($t = c, s$, respectivement pour $\cos \mu\theta$ et $\sin \mu\theta$)

$$\psi_{\mu\nu}^c(r, \theta) = \frac{1}{a_\mu b_{\mu\nu}} \cos \mu\theta J_\mu(k_{w\mu\nu} r), \quad (4.27a)$$

$$\psi_{\mu\nu}^s(r, \theta) = \frac{1}{a_\mu b_{\mu\nu}} \sin \mu\theta J_\mu(k_{w\mu\nu} r), \quad (4.27b)$$

et les valeurs propres associées $k_{w\mu\nu}$ sont imposées par la condition aux frontières du problème (4.26) (conditions de Neumann) :

$$k_{w\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}/a, \quad (4.28)$$

où $\gamma_{\mu\nu}$ ($\nu = 0, 1, 2, 3, \dots$) représente le $(\nu + 1)$ ième zéro de la dérivée première de la fonction de Bessel J_μ (soit $J'_\mu(\gamma_{\mu\nu}) = 0$). Ce problème présente donc une dégénérescence d'ordre 2.

Les coefficients de normalisation a_μ et $b_{\mu\nu}$ sont donnés par

$$a_\mu^2 = \int_0^{2\pi} \cos^2 \mu\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2 \mu\theta \, d\theta = (1 + \delta_{\mu 0})\pi, \quad (4.29)$$

et

$$b_{\mu\nu}^2 = \int_0^a J_\mu^2(k_{w\mu\nu}r) r \, dr,$$

soit, en utilisant la relation [5.54.2] puis les relations [8.472.1 et 2] de la référence [13] :

$$\begin{cases} b_{00}^2 = \frac{a^2}{2} \\ b_{\mu\nu}^2 = \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{\mu^2}{\gamma_{\mu\nu}^2}\right) J_\mu^2(\gamma_{\mu\nu}) \quad \text{pour } (\mu, \nu) \neq (0, 0). \end{cases} \quad (4.30)$$

Le développement (4.25) de la fonction de Green satisfait bien ainsi à la condition en frontières (4.24d). Reste à exprimer les coefficients du développement $g_{\mu\nu}(z, z_0)$ de manière à ce que l'expression de G satisfasse à l'équation des ondes (4.24a) et aux conditions en frontières (4.24b et c). Il vient tout calcul fait (annexe I, § I.1) :

$$g_{\mu\nu}(z, z_0) = -\frac{\cos(k_{z\mu\nu}z + \varphi_{0\mu\nu}) \cos(k_{z\mu\nu}(z_0 - \ell) - \varphi_{\ell\mu\nu})}{k_{z\mu\nu} \sin(k_{z\mu\nu}\ell + \varphi_{0\mu\nu} + \varphi_{\ell\mu\nu})}, \quad (4.31a)$$

si $z < z_0$, et par

$$g_{\mu\nu}(z, z_0) = -\frac{\cos(k_{z\mu\nu}z_0 + \varphi_{0\mu\nu}) \cos(k_{z\mu\nu}(z - \ell) - \varphi_{\ell\mu\nu})}{k_{z\mu\nu} \sin(k_{z\mu\nu}\ell + \varphi_{0\mu\nu} + \varphi_{\ell\mu\nu})}, \quad (4.31b)$$

si $z > z_0$, où φ_{0m} , $\varphi_{\ell m}$ sont donnés par (éq. I.7) :

$$\tan \varphi_{0,\ell\mu\nu} = -\frac{j k_0 \zeta_{z0,\ell\mu\nu}}{k_{z\mu\nu}}. \quad (4.32)$$

4.4 Champ acoustique dans la cavité

Le champ de pression acoustique dans la cavité est obtenu en reportant la fonction, de Green exprimée dans le paragraphe précédent (4.25), dans l'équation (4.23). Compte tenu de la forme de cette fonction de Green, la pression $p(r, \theta, z)$ apparaît alors sous la forme d'un développement sur les fonctions propres $\psi_{\mu\nu}^t(r, \theta)$:

$$p(r, \theta, z) = \frac{j k_0 \rho_0 c_0}{1 - K_v} \sum_{\substack{\mu, \nu=0,1,\dots \\ t=c,s}} [g_{\mu\nu}(z, 0) \langle v_e | \psi_{\mu\nu}^t \rangle_e + g_{\mu\nu}(z, \ell) \langle v_R | \psi_{\mu\nu}^t \rangle_r] \psi_{\mu\nu}^t(r, \theta), \quad (4.33)$$

où la notation $\langle v_e | \psi_{\mu\nu}^t \rangle_e$ désigne l'intégrale sur S_e du produit $v_e(r, \theta) \psi_{\mu\nu}^t(r, \theta)$ et où $\langle v_R | \psi_{\mu\nu}^t \rangle_r$ désigne l'intégrale sur S_r du produit $v_R(r, \theta) \psi_{\mu\nu}^t(r, \theta)$.

La solution prend donc la forme

$$p(r, \theta, z) = \sum_{\mu, \nu, t} p_{\mu\nu}^t(z) \psi_{\mu\nu}^t(r, \theta), \quad (4.34)$$

avec

$$p_{\mu\nu}^t(z) = \frac{j k_0 \rho_0 c_0}{1 - K_v} [g_{\mu\nu}(z, 0) < v_e | \psi_{\mu\nu}^t >_e + g_{\mu\nu}(z, \ell) < v_R | \psi_{\mu\nu}^t >_r] . \quad (4.35)$$

Dans la suite de l'exposé, le champ de vitesse v_e (champ vibratoire source) est supposé indépendant de l'angle θ , et par suite, compte tenu de la symétrie de révolution de la cavité et de celle du microphone récepteur, le champ de pression est lui-même indépendant de θ , et consécutivement la vitesse v_R également. Ceci est corroboré en calculant l'intégrale ($v_{e,R}$ désignant indifféremment v_e ou v_R)

$$< v_{e,R} | \psi_{\mu\nu}^t >_{e,r} = \int_0^{a_{e,r}} r_0 dr_0 v_{e,R}(r_0) \int_0^{2\pi} d\theta_0 \psi_{\mu\nu}^t(r_0, \theta_0); \quad (4.36)$$

d'après l'expression (4.27) des $\psi_{\mu\nu}^t$, l'intégrale sur θ_0 est nulle pour $\mu \neq 0$, et de surcroît, elle est également nulle pour $t = s$, $\mu = 0$ (annexe I, § I.5).

Ainsi la solution (4.34) devient

$$p(r, z) = \sum_{\nu} p_{0\nu}^c(z) \psi_{0\nu}^c(r). \quad (4.37)$$

De manière à calculer les $p_{0\nu}^c(z)$ dont l'expression est donnée par l'équation (4.35), il est nécessaire d'exprimer la vitesse v_R qui dépend elle-même du champ acoustique $p(r, z)$. Pour ce faire, par extension de la relation $S_r v_R = -Y_r p(\ell)$ reliant l'admittance Y_r du microphone récepteur aux pressions et vitesses acoustiques lorsque le champ acoustique est indépendant de r , la pression est écrite :

$$S_r v_R(r) = -\underline{Y}_r(r) p(r, \ell), \quad (4.38)$$

où l'admittance $\underline{Y}_r(r)$, représentant l'admittance acoustique localisée (fonction de r) du récepteur, est écrite dans la suite sous la forme suivante, en fonction de sa valeur moyenne sur la surface du récepteur $< \underline{Y}_r >_r$,

$$\underline{Y}_r(r) = < \underline{Y}_r >_r + \delta Y_r(r), \quad (4.39)$$

$\delta Y_r(r)$ étant tel que $< \delta Y_r >_r = 0$.

Ainsi, le facteur dépendant de v_R des relations (4.35) et (4.37) s'écrit :

$$-S_r < v_R | \psi_{0\nu}^c >_r = < \underline{Y}_r p(\ell) | \psi_{0\nu}^c >_r \quad (4.40)$$

et, par report de l'expression (4.37) pour $z = \ell$:

$$-S_r < v_R | \psi_{0\nu}^c >_r = \sum_{\nu'} p_{0\nu'}^c(\ell) < < \underline{Y}_r >_r + \delta Y_r | \psi_{0\nu}^c | \psi_{0\nu'}^c >_r, \quad (4.41)$$

soit, $< \underline{Y}_r >_r$ étant indépendant de r ,

$$-S_r < v_R | \psi_{0\nu}^c >_r = \sum_{\nu'} p_{0\nu'}^c(\ell) [< \underline{Y}_r >_r < \psi_{0\nu}^c | \psi_{0\nu'}^c >_r + < \delta Y_r \psi_{0\nu}^c | \psi_{0\nu'}^c >_r] . \quad (4.42)$$

Du fait que $\langle \delta Y_r \psi_{0\nu}^c | \psi_{0\nu}^c \rangle_r$ peut être écrit ici sensiblement égal à $\langle \delta Y_r \psi_{00}^c | \psi_{00}^c \rangle_r$ (le terme omis donnant une contribution supposée négligeable à p) et ψ_{00}^c étant indépendant de r , il peut être remplacé par $\langle \delta Y_r \rangle_r \langle \psi_{00}^c | \psi_{00}^c \rangle_r = 0$, d'où

$$-S_r \langle \psi_{0\nu}^c | \psi_{0\nu}^c \rangle_r = \sum_{\nu'} p_{0\nu'}^c(\ell) \langle \underline{Y}_r \rangle_r \langle \psi_{0\nu'}^c | \psi_{0\nu}^c \rangle_r . \quad (4.43)$$

Le report de cette expression dans l'expression (4.37) de la pression, compte tenu de la relation (4.35), conduit à (en écrivant $\langle \underline{Y}_r \rangle_r = Y_r$) :

$$p(r, z) = \frac{j k_0 \rho_0 c_0}{1 - K_v} \sum_{\nu} \left[g_{0\nu}(z, 0) \langle v_e | \psi_{0\nu}^c \rangle_e - \frac{Y_r}{S_r} g_{0\nu}(z, \ell) \sum_{\nu'} p_{0\nu'}^c(\ell) \langle \psi_{0\nu'}^c | \psi_{0\nu}^c \rangle_r \right] \psi_{0\nu}^c(r), \quad (4.44)$$

où les termes $\langle \psi_{0\nu'}^c | \psi_{0\nu}^c \rangle_r$ désignent les intégrales sur la surface S_r des produits $\psi_{0\nu}^c \psi_{0\nu'}^c$, données en annexe I par les expressions (I.11a,b). Les termes exprimant des couplages entre différents modes ($\nu \neq \nu'$) sont très petits devant les autres et peuvent donc être négligés (les ordres de grandeur sont donnés dans le paragraphe I.2).

La pression acoustique $p(r, z)$ est donc retenue sous la forme (en factorisant l'inverse de la surface $S = \pi a^2$) :

$$p(r, z) = \frac{j k_0}{1 - K_v} \frac{\rho_0 c_0}{S} \sum_{\nu} [g_{0\nu}(z, 0) S \langle v_e | \psi_{0\nu}^c \rangle_e - Y_{r0\nu} g_{0\nu}(z, \ell) p_{0\nu}^c(\ell)] \psi_{0\nu}^c(r), \quad (4.45)$$

où $Y_{r0\nu} = Y_r \frac{a^2}{a_r^2} \langle \psi_{0\nu}^c | \psi_{0\nu}^c \rangle_r$.

La comparaison des expressions (4.37 compte tenu de 4.35) et (4.45) permet de déterminer les coefficients $p_{0\nu}^c(z)$:

$$p_{0\nu}^c(z) = \frac{j k_0}{1 - K_v} \frac{\rho_0 c_0}{S} [g_{0\nu}(z, 0) S \langle v_e | \psi_{0\nu}^c \rangle_e - Y_{r0\nu} g_{0\nu}(z, \ell) p_{0\nu}^c(\ell)], \quad (4.46)$$

soit, pour $z = \ell$,

$$p_{0\nu}^c(\ell) = \frac{\frac{j k_0}{1 - K_v} \frac{\rho_0 c_0}{S} g_{0\nu}(\ell, 0) S \langle v_e | \psi_{0\nu}^c \rangle_e}{1 + \frac{j k_0}{1 - K_v} \frac{\rho_0 c_0}{S} Y_{r0\nu} g_{0\nu}(\ell, \ell)}, \quad (4.47)$$

ce qui donne pour l'expression de $p_{0\nu}^c(z)$

$$p_{0\nu}^c(z) = \frac{j k_0}{1 - K_v} \frac{\rho_0 c_0}{S} \left[g_{0\nu}(z, 0) S \langle v_e | \psi_{0\nu}^c \rangle_e - Y_{r0\nu} g_{0\nu}(z, \ell) \frac{\frac{j k_0 \rho_0 c_0}{1 - K_v} g_{0\nu}(\ell, 0) \langle v_e | \psi_{0\nu}^c \rangle_e}{1 + \frac{j k_0}{1 - K_v} \frac{\rho_0 c_0}{S} Y_{r0\nu} g_{0\nu}(\ell, \ell)} \right]; \quad (4.48)$$

le produit scalaire $\langle v_e | \psi_{0\nu}^c \rangle$ est calculé dans l'annexe I, § I.5.

La pression acoustique en tout point du cylindre étant ainsi entièrement définie par les équations (4.37) et (4.48), il reste alors à déterminer l'expression de l'admittance acoustique de transfert Y_T du système.

4.5 Admittance acoustique de transfert

Le champ de pression et le champ de vitesse n'étant pas uniformes dans la cavité, l'admittance acoustique de transfert, rapport du débit de l'émetteur en court-circuit acoustique sur la pression en $z = \ell$, est une fonction de r .

L'admittance acoustique de transfert (norme CEI 61064-2 [22]) est définie ici en remplaçant les quantités qui dépendent de la variable r par leur valeur moyenne sur la surface du transducteur impliqué (par extension de la relation 2.1), à savoir :

$$Y_T = \frac{S_e \langle v_e(r) \rangle_e + \langle \underline{Y}_e(r) p(r, 0) \rangle_e}{\langle p(r, \ell) \rangle_r}, \quad (4.49)$$

$\underline{Y}_e$ étant l'admittance acoustique localisée (fonction de r) de l'émetteur. En écrivant

$$\underline{Y}_e(r) = \langle \underline{Y}_e \rangle_e + \delta Y_e(r), \quad (4.50)$$

et

$$p(r, 0) = \langle p(0) \rangle_e + \delta p(r, 0), \quad (4.51)$$

le second terme du numérateur devient

$$\begin{aligned} \langle \underline{Y}_e(r) p(r, 0) \rangle_e &= \langle (\langle \underline{Y}_e \rangle_e + \delta Y_e(r)) (\langle p(0) \rangle_e + \delta p(r, 0)) \rangle_e \\ &\approx \langle \underline{Y}_e \rangle_e \langle p(0) \rangle_e + \langle \underline{Y}_e \rangle_e \langle \delta p(0) \rangle_e + \langle p(0) \rangle_e \langle \delta Y_e \rangle_e, \end{aligned}$$

soit

$$\langle \underline{Y}_e(r) p(r, 0) \rangle_e \approx \langle \underline{Y}_e \rangle_e \langle p(0) \rangle_e. \quad (4.52)$$

Par suite, en posant

$$V_e = \langle v_e \rangle_e = \frac{2}{a_e^2} \int_0^{a_e} v_e(r_0) r_0 dr_0, \quad (4.53)$$

et

$$Y_e = \langle \underline{Y}_e \rangle_e = \frac{2}{a_e^2} \int_0^{a_e} \underline{Y}_e(r_0) r_0 dr_0, \quad (4.54)$$

il vient

$$Y_T = \frac{S_e V_e + Y_e \langle p(0) \rangle_e}{\langle p(\ell) \rangle_r}, \quad (4.55)$$

soit, en reportant l'expression de la pression $p(r, z)$ sous sa forme (4.37),

$$Y_T = \frac{S_e V_e + Y_e \sum_{\nu} p_{0\nu}^c(0) \langle \psi_{0\nu}^c \rangle_e}{\sum_{\nu} p_{0\nu}^c(\ell) \langle \psi_{0\nu}^c \rangle_r}. \quad (4.56)$$

Il reste alors à expliciter les coefficients $p_{0\nu}^c(\ell)$ et $p_{0\nu}^c(0)$.

Le coefficient $p_{0\nu}^c(\ell)$ est donné par l'expression (4.47),

$$p_{0\nu}^c(\ell) = \frac{S < v_e | \psi_{0\nu}^c >_e}{\frac{1 - K_v}{j k_0} \frac{S}{\rho_0 c_0} \frac{1}{g_{0\nu}(0, \ell)} + Y_{r0\nu} \frac{g_{0\nu}(\ell, \ell)}{g_{0\nu}(0, \ell)}} , \quad (4.57)$$

et le coefficient $p_{0\nu}^c(0)$ est donné en fonction de $p_{0\nu}^c(\ell)$ par la relation (4.46)

$$p_{0\nu}^c(0) = \frac{j k_0}{1 - K_v} \frac{\rho_0 c_0}{S} g_{0\nu}(0, \ell) \left[S < v_e | \psi_{0\nu}^c >_e \frac{g_{0\nu}(0, 0)}{g_{0\nu}(0, \ell)} - Y_{r0\nu} p_{0\nu}^c(\ell) \right] . \quad (4.58)$$

Le détail du calcul des coefficients $p_{0\nu}^c(\ell)$ et $p_{0\nu}^c(0)$ est donné dans l'annexe I, § I.6. Le résultat obtenu pour le coefficient $p_{0\nu}^c(\ell)$ prend la forme (annexe I, relations I.29 et I.20)

$$p_{0\nu}^c(\ell) = \frac{S_e V_e \frac{S}{a_0 b_{0\nu}} V_{0\nu}}{Y_{T00\nu} + Y_{r0\nu} \left[\frac{Y_{p0\nu}}{Y_{i0\nu}} j \sin k_{z0\nu} \ell + \cos k_{z0\nu} \ell \right]} , \quad (4.59)$$

où $V_{0\nu}$ est un coefficient dépendant du profil de vitesse de l'émetteur, calculé dans l'annexe I, § I.5, relations (I.21a,b,c), où l'admittance $Y_{T00\nu}$ (relation I.30) s'écrit

$$Y_{T00\nu} = \left[Y_{i0\nu} + \frac{Y_{p0\nu}^2}{Y_{i0\nu}} \right] j \sin k_{z0\nu} \ell + 2Y_{p0\nu} \cos k_{z0\nu} \ell , \quad (4.60)$$

et où le facteur $Y_{p0\nu}$ est donné par (I.28)

$$Y_{p0\nu} = \frac{S}{\rho_0 c_0} \zeta_{z0\nu} \quad \text{et} \quad Y_{i0\nu} = \frac{S}{\rho_0 c_0} \frac{k_{z0\nu}}{k_0} (1 - K_v) . \quad (4.61)$$

Par ailleurs, les coefficients $p_{0\nu}^c(0)$ s'écrivent (annexe I, relation I.31)

$$p_{0\nu}^c(0) = p_{0\nu}^c(\ell) \left[j \sin k_{z0\nu} \ell \frac{Y_{r0\nu} + Y_{p0\nu}}{Y_{i0\nu}} + \cos k_{z0\nu} \ell \right] . \quad (4.62)$$

L'admittance acoustique de transfert s'écrit donc finalement sous la forme

$$Y_T = \frac{1 + Y_e \sum_{\nu} \frac{S V_{0\nu}}{a_0 b_{0\nu}} < \psi_{0\nu}^c >_e \frac{\cos k_{z0\nu} \ell + \frac{Y_{p0\nu} + Y_{r0\nu}}{Y_{i0\nu}} j \sin k_{z0\nu} \ell}{Y_{T00\nu} + Y_{r0\nu} \left(\frac{Y_{p0\nu}}{Y_{i0\nu}} j \sin k_{z0\nu} \ell + \cos k_{z0\nu} \ell \right)}}{\sum_{\nu} \frac{S V_{0\nu}}{a_0 b_{0\nu}} < \psi_{0\nu}^c >_r \frac{1}{Y_{T00\nu} + Y_{r0\nu} \left(\frac{Y_{p0\nu}}{Y_{i0\nu}} j \sin k_{z0\nu} \ell + \cos k_{z0\nu} \ell \right)}} . \quad (4.63)$$

Dans le cas particulier où les rayons a_e , a_r et a sont égaux, l'admittance «corrigée» $Y_{r0\nu}$ (4.45) est égale à Y_r .

Si de plus, il n'y a propagation que d'ondes planes dans la cavité ($\nu = 0$) et si les membranes des microphones ont un mouvement uniforme, alors $\langle \psi_{00}^c \rangle_{e,r} = \frac{1}{a_0 b_{00}}$ et $V_{00} = 1$, ce qui donne pour Y_T :

$$Y_T = j \sin k_{z00} \ell \left[Y_{i00} + \frac{(Y_e + Y_{p00})(Y_r + Y_{p00})}{Y_{i00}} \right] + \cos k_{z00} \ell (Y_e + Y_r + 2Y_{p00}), \quad (4.64)$$

où le nombre d'onde k_{z00} est donné par la relation (I.4), compte tenu des expressions (4.28), avec $\gamma_{00} = 0$, et (4.16) :

$$k_{z00}^2 = k^2 - k_{w00}^2 = k^2 = k_0^2 \left[1 + \frac{1-j}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{k_0}} \frac{2}{a} (\sqrt{\ell'_v} + (\gamma - 1)\sqrt{\ell_h}) \right], \quad (4.65)$$

l'admittance de paroi Y_{p00} par la relation (I.12) :

$$Y_{p00} = \frac{S}{\rho_0 c_0} \zeta_{z00} = \frac{S}{\rho_0 c_0} \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{k_0} (\gamma - 1) \sqrt{\ell_h}, \quad (4.66)$$

et l'admittance itérative Y_{i00} par (éq. 4.61) :

$$Y_{i00} = \frac{S}{\rho_0 c_0} \frac{k_{z00}}{k_0} (1 - K_v) \approx \frac{S}{\rho_0 c_0} \left[1 + \frac{1-j}{\sqrt{2}} \frac{1}{a\sqrt{k_0}} (-\sqrt{\ell'_v} + (\gamma - 1)\sqrt{\ell_h}) \right]. \quad (4.67)$$

On vérifie ainsi que l'expression (4.64) est identique à l'expression de l'admittance acoustique de transfert Y_T du même système calculée en ne considérant que la propagation d'ondes planes (par exemple l'expression proposée par Ballagh [3]).

4.6 Résultats théoriques

Afin de mieux quantifier l'influence de la propagation d'ondes radiales sur la valeur de l'admittance acoustique de transfert, quelques résultats sont présentés dans ce paragraphe.

Seuls les modes (0,0) et (0,1,c) sont à prendre en compte dans le calcul. En effet la contribution des modes supérieurs, à la valeur de l'admittance acoustique de transfert Y_T (éq. 4.63), est inférieure à 10^{-3} dB, donc négligeable ici (les termes exprimant des couplages entre différents modes pouvant être négligés dans le calcul, cf. § I.2).

Les figures 4.2 et 4.3 représentent la différence des modules des admittances acoustiques de transfert Y_T calculées selon un modèle ne prenant en compte que la propagation d'ondes planes (éq. 4.64) et selon le modèle développé dans ce chapitre (éq. 4.63) avec quatre cavités de longueurs différentes (les cavités d'étalonnage disponibles au LNE), pour des microphones LS2P (les rayons des membranes a_e et a_r étant égaux et valant $a_e = a_r = 0,96a$). Dans la figure 4.2, la membrane de l'émetteur est supposée avoir un mouvement non uniforme donné par l'expression (I.13), et un mouvement dépendant du champ de vitesse dans la cavité (§ I.4, éq. I.18) dans la figure 4.3.

En premier lieu, il apparaît que les deux formes choisies pour le champ de vitesse de l'émetteur v_e (éq. I.13 et I.18) donnent des résultats assez proches car les différences entre les admittances acoustiques de transfert illustrées par les courbes de figures 4.2 et 4.3 n'excèdent pas

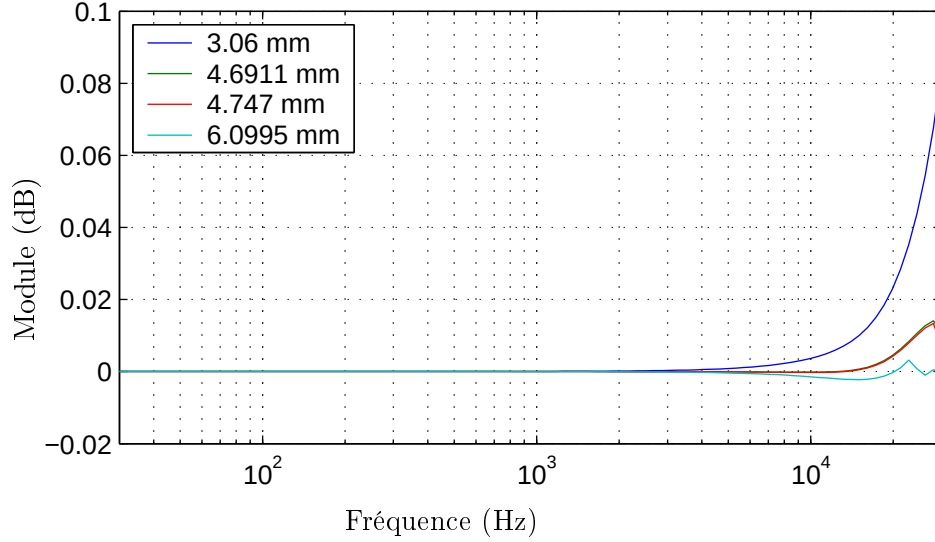


FIG. 4.2 – Différence entre les admittances acoustiques de transfert calculées avec les expressions (4.63) et (4.64), avec $v_e(r)$ non uniforme (I.13), pour quatre longueurs de cavité, microphones LS2P (1/2").

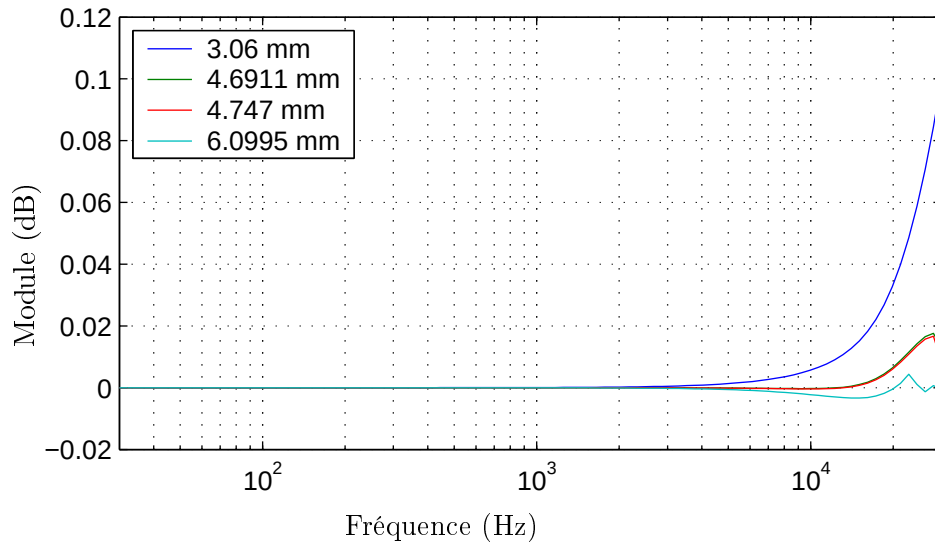


FIG. 4.3 – Différence entre les admittances acoustiques de transfert calculées avec les expressions (4.63) et (4.64), avec $v_e(r)$ non uniforme, développé sur la base des fonctions propres $\psi_{\mu\nu}(r)$ (I.18), pour quatre longueurs de cavité, microphones LS2P (1/2").

0.02 dB, ce qui est faible mais pas négligeable devant la reproductibilité des mesures qui peut être atteinte actuellement pour les étalonnage de microphones en pression (0,01–0,02 dB [24]). Dans les deux cas, l'influence des modes supérieurs sur la valeur de l'admittance acoustique de transfert Y_T peut atteindre 0,08–0,1 dB. Cette influence n'est donc pas négligeable devant la reproductibilité. Ceci renforce les conclusions de Rasmussen, à ceci près que les résultats obtenus ici diffèrent des siens de façon significative, comme le montrent les courbes représentées sur la figure 4.4, qui sont déterminées par le même calcul que celles de la figure 4.3 pour des microphones LS1P et pour des longueurs de cavité égales à celles choisies par Rasmussen (figure 4 de la référence [25]) pour illustrer l'influence, sur l'admittance acoustique de transfert, de la «correction d'ondes radiales» qu'il a déterminée.

La façon dont la propagation d'ondes radiales est prise en compte ici n'est visiblement pas la même que celle proposée par Rasmussen car les résultats sont sensiblement différents : en effet, la correction calculée par Rasmussen atteint à 12,5 kHz près de 0,5 dB pour une cavité de 7,5 mm et 0,2 dB pour une cavité de 9,5 mm [25, fig. 4], ce qui reste très supérieur aux résultats trouvés ici.

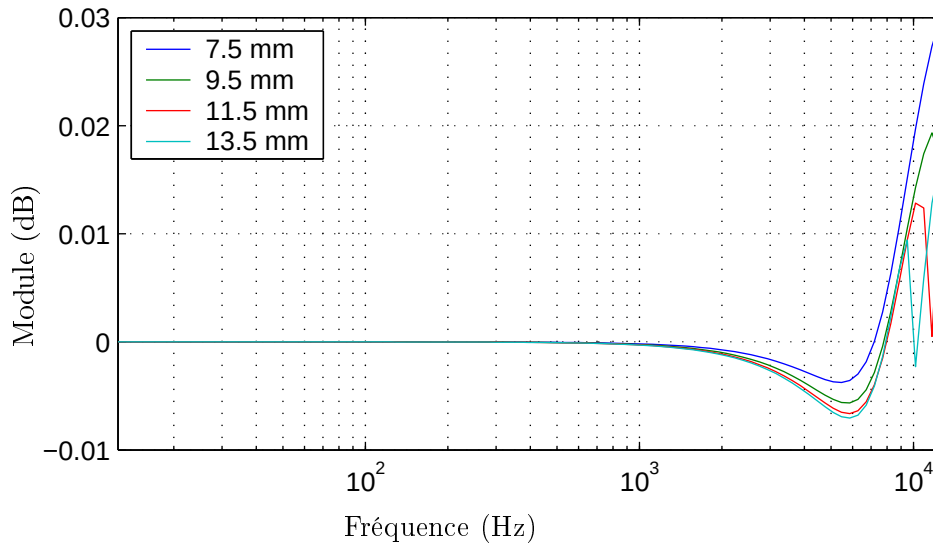


FIG. 4.4 – Différence entre les admittances acoustiques de transfert calculées avec les expressions (4.63) et (4.64), avec $v_e(r)$ dépendant du champ de vitesse dans la cavité (I.18), pour quatre longueurs de cavité, microphones LS1P (1").

Dans le modèle proposé dans la référence [25], afin de tenir compte du fait que les membranes des deux microphones n'ont pas un champ de déplacement uniforme et afin de conserver une symétrie dans la façon dont ces microphones sont pris en compte dans le calcul de Y_T , Rasmussen introduit dans le calcul de la pression moyenne $\langle p(\ell) \rangle_r$ sur le récepteur une pondération $u_r(r)$ de la même forme que le champ de vitesse de l'émetteur [25, éq. 6]. Les résultats trouvés en considérant un champ de déplacement non uniforme pour l'émetteur (I.13) et en introduisant une pondération de même forme dans le calcul de $\langle p(\ell) \rangle_r$ (§ I.8, éq. I.36) pour des microphones LS2P et LS1P sont illustrés par les figures 4.5 et 4.6.

La comparaison des courbes de la figure 4.6 avec celles de la figure 4 de la référence [25] (reproduite figure 4.7) montre que, dans ce cas aussi, les résultats obtenus avec le modèle développé dans ce chapitre diffèrent de ceux présentés par Rasmussen. Par ailleurs, il est visible que l'introduction d'une pondération dans la valeur moyenne $\langle p(\ell) \rangle_r$ permet de rapprocher

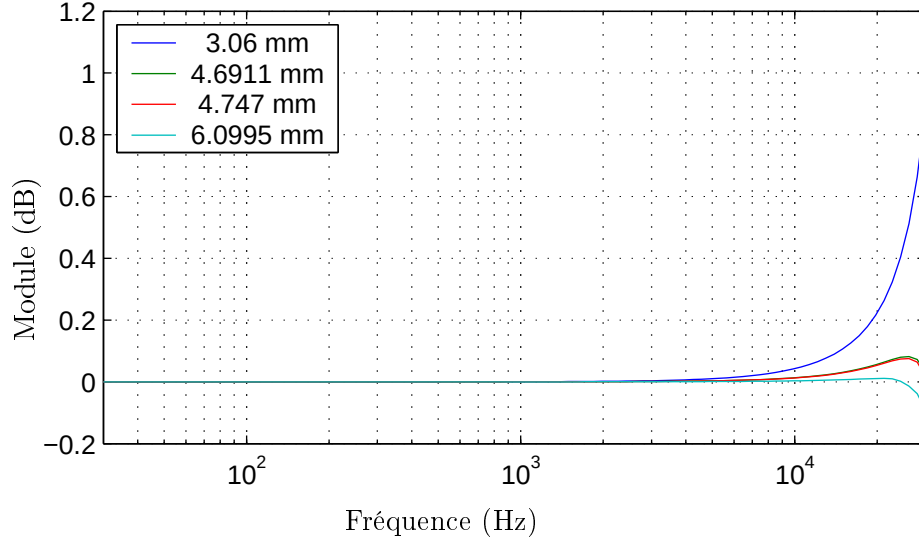


FIG. 4.5 – Différence entre les admittances acoustiques de transfert calculées avec les expressions (4.63) et (4.64), avec $v_e(r)$ non uniforme (I.13), en introduisant une pondération dans $\langle p(\ell) \rangle_r$ (éq. I.36), pour quatre longueurs de cavité, microphones LS2P (1/2").

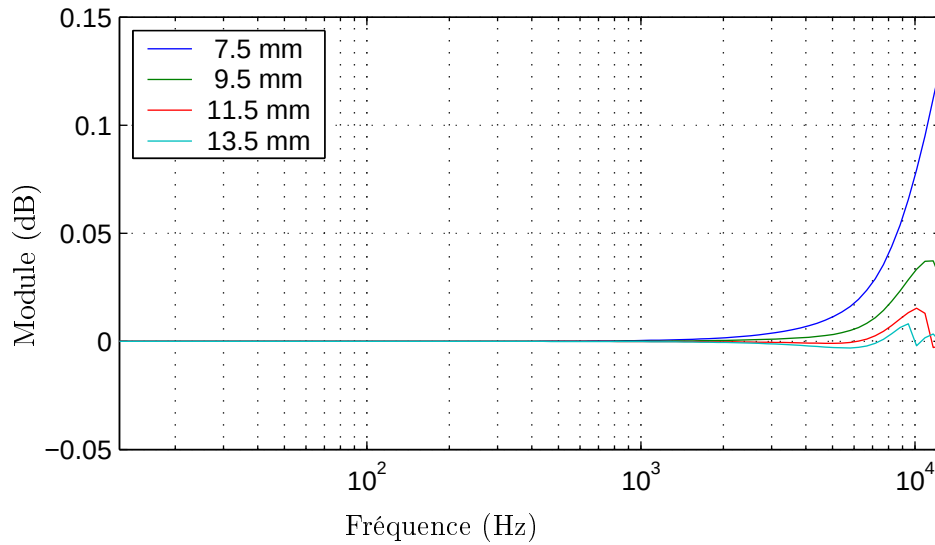


FIG. 4.6 – Différence entre les admittances acoustiques de transfert calculées avec les expressions (4.63) et (4.64), avec $v_e(r)$ non uniforme (I.13), en introduisant une pondération dans $\langle p(\ell) \rangle_r$ (éq. I.36), pour quatre longueurs de cavité, microphones LS1P (1").

les résultats obtenus avec le modèle développé ici de ceux obtenus par Rasmussen, c'est-à-dire qu'elle augmente fortement l'influence apparente des modes supérieurs dans le calcul de l'admittance acoustique de transfert, rendant cette influence non négligeable au regard des incertitudes sur l'étalonnage en pression.

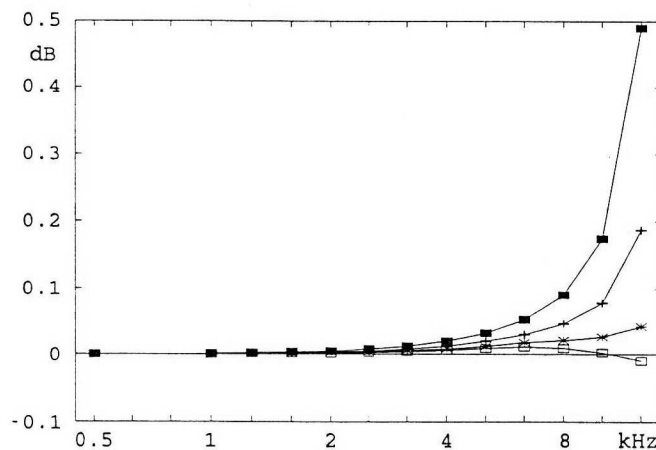


Figure 4. Influence of coupler length on the transfer impedance. $a_c = 9.3$ mm, $a_t = a_r = 8.95$ mm. Nominal values of microphone impedances ($f_{res,t} = f_{res,r} = 8$ kHz, $V_{eq} = 140$ mm³, $d = 1$). Bessel-function velocity distribution. Effective coupler length l_o : (■) 7.5 mm, (+) 9.5 mm, (×) 11.5 mm, (□) 13.5 mm.

FIG. 4.7 – Valeurs de la «correction d'ondes radiales» calculée par Rasmussen pour quatre longueurs de cavité, microphones LS1P (1").

A noter que l'emploi de cette pondération est discutable dans la mesure où elle semble traduire l'effet de la non uniformité du mouvement de la membrane du récepteur sur la transduction électroacoustique. Il serait, en effet, plus approprié de prendre en compte les effets sur la transduction de la non uniformité du mouvement des membranes de microphones dans la modélisation même du microphone électrostatique.

Enfin, le modèle présenté ici a un intérêt tout particulier car il permet de prendre en compte à la fois les modes supérieurs et la dissipation dans les couches limites viscothermiques. D'autre part, il permet de bien rendre compte de la symétrie des rôles entre l'émetteur et le récepteur (équ. 4.23), fait important car c'est sur cette symétrie que repose le principe de la méthode de réciprocité. Cependant, pour déduire de ce modèle une expression de l'admittance acoustique de transfert Y_T , il est nécessaire de préciser la forme du mouvement des membranes des microphones ainsi que les effets de la non uniformité de ces mouvements de membrane sur la transduction électroacoustique. Ainsi, une étude plus approfondie de la modélisation du microphone électrostatique prenant en compte le mouvement non uniforme de la membrane pourrait être menée afin de préciser ces points et en déduire une nouvelle définition de l'efficacité du microphone et donc de l'admittance acoustique de transfert Y_T .

Chapitre 5

Procédé de mesure de l'impédance acoustique des éléments constitutifs de l'oreille artificielle

Les audiomètres à sons purs, utilisés dans le dépistage des surdités doivent être calibrés à l'aide d'une oreille artificielle, transducteur censé présenter, à un casque téléphonique, une impédance acoustique voisine de celle de l'oreille humaine moyenne. La norme CEI 318 [20] précise la composition (cavités, tubes et fente), les caractéristiques (impédances acoustiques) et les tolérances sur ces caractéristiques, des différents éléments des oreilles artificielles à utiliser.

A l'heure actuelle, il n'existe qu'un constructeur d'oreilles artificielles satisfaisant à cette norme, la société Brüel & Kjær qui assure la maintenance et le réglage de ses produits : elle délivre pour chaque oreille une fiche d'étalonnage où ne figure aucune référence à un étalon (cf. § 5.1). Cette absence de référence dans la caractérisation des oreille artificielle est à l'origine d'une dispersion importante dans les mesures audiométriques (supérieures à 15 dB lors de la comparaison de mesures effectuées avec différents audiomètres).

Etant donné que la norme fixe des tolérances sur les impédances acoustiques des différents éléments devant constituer une oreille artificielle, le LNE a cherché, à partir d'une méthode inspirée de l'étalonnage des microphones par réciprocité, à déterminer ces différentes impédances. Les mesures effectuées, associées à la modélisation actuellement retenue pour ajuster les paramètres, ont conduit à des écarts supérieurs aux tolérances imposées par la norme et révèlent des insuffisances de la modélisation. Une rapide description de l'oreille artificielle (§ 5.1) et de cette première méthode de caractérisation de ses éléments constitutifs mise en œuvre au LNE font l'objet du début de ce chapitre § 5.1 et 5.2.

Une modélisation plus complète de l'oreille artificielle et de ses éléments constitutifs a alors été développée dans le cadre du contrat BNM n° 01 3 010 par M. et A.-M. Bruneau [9, § 3 et 4]. Afin de valider expérimentalement et séparément les modèles d'impédance d'entrée des éléments constitutifs de l'oreille artificielle, une méthode est proposée dans le paragraphe 5 de la référence [9]. Le dispositif de mesure est très similaire à celui de l'étalonnage en pression de microphones par la méthode de réciprocité, la cavité de couplage étant ici constituée de deux portions de cylindre entre lesquelles sont insérées les impédances à caractériser. Ces impédances peuvent alors être déterminées en comparant les résultats de mesures d'une admittance électrique de transfert avec des résultats analytiques obtenus à partir d'un modèle physique du dispositif. Deux tels modèles sont proposés. Le premier [9, § 5-1] basé sur la propagation d'ondes planes

dans la cavité de couplage est simple mais ne permet pas de prendre en compte les modes radiaux ou hélicoïdaux qui peuvent éventuellement ne pas être négligeables (ce modèle est repris ici au paragraphe 5.3.2). Le second [9, § 5-2] basé sur la formulation intégrale, ne présente pas cet inconvénient mais conduit à des résultats difficilement exploitables du fait qu'il utilise une fonction de Green [9, § 5-2-3] qui satisfait à des conditions aux limites viscothermiques à la fois sur les parois latérales et frontales et qui est exprimée sous forme d'un développement suivant les trois dimensions spatiales. L'objet du paragraphe 5.3.3 de ce mémoire est de présenter un modèle également basé sur la formulation intégrale mais en simplifiant la formulation par l'introduction de la fonction de Green calculée au chapitre 4 (§ 4.3).

5.1 Description de l'oreille artificielle

Un schéma de l'oreille artificielle commercialisée par la société Brüel & Kjær est tracé sur la figure 5.1.

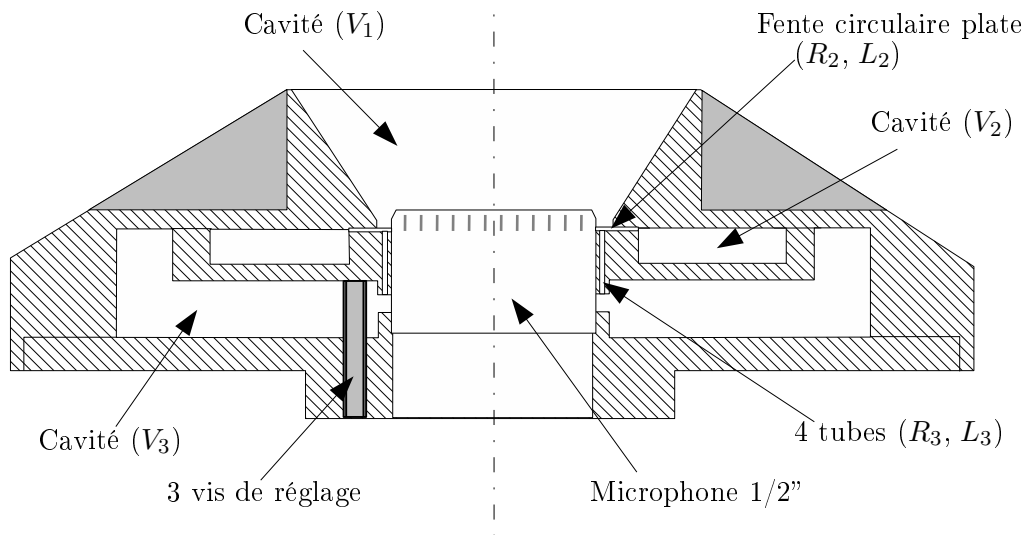


FIG. 5.1 – Oreille artificielle du type CEI 318 construite par la société Brüel & Kjær (coupe à une échelle voisine de 2/1).

Le volume frontal V_1 , qui est censé simuler le pavillon de l'oreille humaine, assure le couplage entre le casque de l'audiomètre et l'oreille artificielle. Les autres éléments de l'oreille artificielle ont pour but de reproduire l'impédance acoustique d'entrée du conduit auditif et sont censés se comporter comme des impédances acoustiques localisées dans le plan de la membrane du microphone. Ces impédances sont réalisées à l'aide de conduits étroits en communication avec des cavités définies par leur volume. Les valeurs de ces impédances localisées et celles des volumes des différentes cavités (données par la norme [20]), ainsi que leur mode de réalisation par le constructeur, sont précisés dans le tableau 5.1.

La norme précise aussi les tolérances attachées à ces éléments : 1% pour les volumes et 5% pour les résistances et inductances R_i, L_i .

L'oreille artificielle peut être décrite par un réseau électrique à constantes localisées équivalent. Dans cette équivalence (figure 5.2), un ohm électrique correspond à 10^5 N s m^{-5} et

Valeurs normalisées	Mode de réalisation
$V_1 = 2500 \text{ mm}^3$, volume incluant le volume équivalent du microphone (la présence d'une grille de protection entraîne une correction correspondante).	Tronc de cône, diamètre 25 mm et 14,9 mm, angle $33,52^\circ$.
$L_2 = 5 \cdot 10^2 \text{ Pa s}^2 \text{ m}^{-3}$, $R_2 = 6,5 \cdot 10^6 \text{ Pa s m}^{-3}$	Fente circulaire, épaisseur $\approx 0,1 \text{ mm}$ ajustable, rayon interne et externe 7,436 et 8,759 mm.
$V_2 = 1800 \text{ mm}^3$.	Cavité axisymétrique.
$L_3 = 10^4 \text{ Pa s}^2 \text{ m}^{-3}$, $R_3 = 2 \cdot 10^7 \text{ Pa s m}^{-3}$	4 tubes, diamètre 0,45 mm, longueur 4,84 mm
$V_3 = 7500 \text{ mm}^3$.	Cavité axisymétrique.

TAB. 5.1 – Caractéristiques des éléments constitutifs de l'oreille artificielle Brüel & Kjær .

les capacités sont déduites des raideurs acoustiques $1/C_i = \gamma P_0/V_i$ ($P_0 = 1013,25 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $\gamma = 1,4024$).

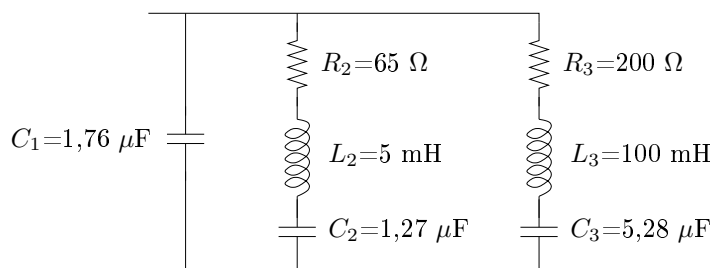


FIG. 5.2 – Réseau électrique équivalent à l'oreille artificielle (analogie de type impédance) dans les conditions normales de pression et température.

Actuellement, les fiches d'étalonnage délivrées par Brüel & Kjær pour chaque oreille artificielle donnent simplement une courbe représentant la réponse en pression du microphone contenu dans l'oreille artificielle à un signal délivré par une «source de grande impédance dont la membrane a un mouvement uniforme», en fonction de la fréquence. A titre informatif, cette réponse en pression est comparée à la réponse théorique déterminée à partir du réseau électrique équivalent décrit dans la norme. Enfin, les fiches d'étalonnage indiquent à l'utilisateur une méthode rapide pour déduire de cette réponse en pression la valeur de l'impédance acoustique de l'oreille artificielle. Ces fiches ne précisent pas les caractéristiques individuelles de chaque élément constitutif des oreilles artificielles auxquelles elles se rapportent.

5.2 Méthode de test mise en œuvre au LNE

La norme précise les tolérances attachées aux sept principaux paramètres (volumes V_i , inductances L_i et résistances R_i) permettant de décrire l'oreille (§ 5.1). Ce sont ces paramètres que le LNE a cherché à vérifier. Le volume frontal V_1 peut être mesuré du fait qu'il est directement

accessible. Pour accéder à la mesure des six autres paramètres (qui caractérisent l'impédance présentée par l'oreille dans le plan du microphone), le LNE a choisi une méthode inspirée de l'étalonnage en pression des microphones par réciprocité (§ 1.2).

Le dispositif expérimental est décrit dans la figure 5.3. Une cavité de couplage, de volume plus petit que V_1 et fermée par un second microphone (fonctionnant en émetteur), est placée à l'avant de l'oreille. Cette cavité est un cylindre, de même diamètre que la cavité frontale du microphone émetteur (diamètre approximativement égal à celui de la membrane [4]), prolongé par un tronc de cône, permettant un raccordement adapté au microphone récepteur.

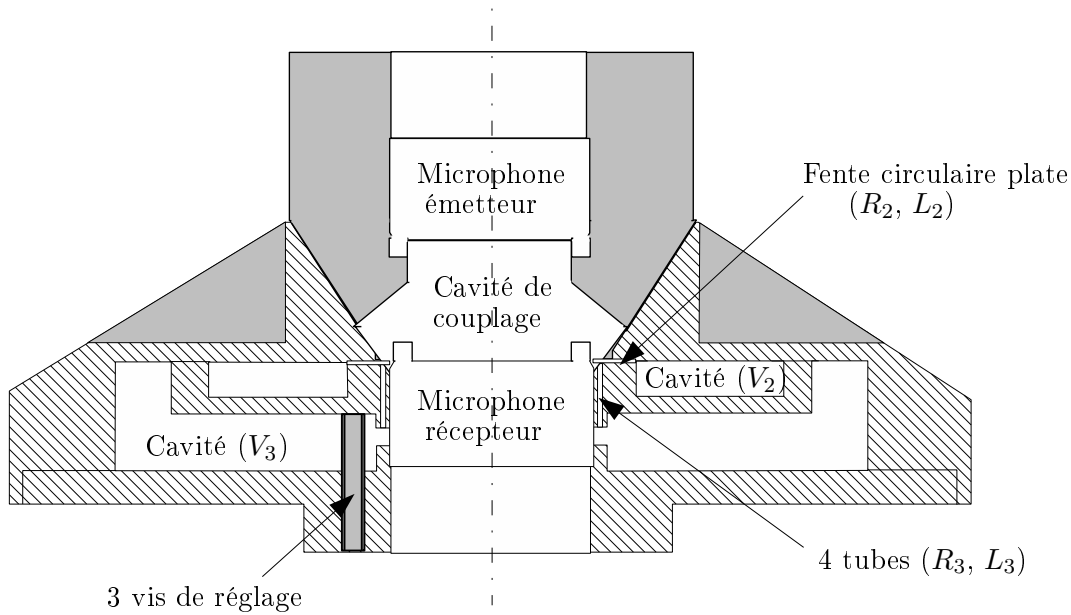


FIG. 5.3 – Dispositif de mesure mis en œuvre par le LNE.

Comme dans le cadre de l'étalonnage en pression de microphones, la grandeur mesurée est l'admittance électrique de transfert Y_E entre les deux microphones, rapport du courant traversant le microphone émetteur sur la tension à circuit ouvert aux bornes du microphone récepteur. La tension à circuit ouvert est mesurée en utilisant la technique de la tension insérée (§ 1.1.5).

La modélisation de cette admittance de transfert repose sur une description simplifiée de la cavité de couplage : la propagation dans cette cavité est supposée être celle d'ondes planes dans un cylindre, délimité par le microphone récepteur d'un côté et le microphone émetteur de l'autre.

La mise en œuvre de cette méthode de test a conduit à des résultats médiocres (ne satisfaisant pas aux tolérances prescrites par la norme) pour les six paramètres à déterminer, à savoir les deux volumes, les deux résistances acoustiques et les deux inductances acoustiques recherchées. C'est pourquoi une modélisation plus complète de l'oreille artificielle et de ses éléments constitutifs a été développée [9].

5.3 Procédé de mesure des impédances acoustiques des éléments de l'oreille artificielle

Dans le but de vérifier la validité des modèles d'impédance d'entrée des tubes et de la fente (chargés ou non par un volume) proposés dans la référence [9, § 3], une étude expérimentale est menée au LNE ; la modélisation du système utilisé pour cette étude est présentée dans ce paragraphe 5.3. Cette validation expérimentale est effectuée selon une méthode similaire à la méthode de réciprocité pour l'étalonnage en pression des microphones.

Cette méthode et le dispositif mis en œuvre au LNE pour mesurer ces impédances sont décrits dans le paragraphe 5.3.1. Les paragraphes suivants (5.3.2 et 5.3.3) présentent deux modèles physiques possibles pour ce dispositif.

5.3.1 Méthode de mesure des impédances d'entrée des éléments de l'oreille artificielle

Le système étudié est décrit par le schéma de la figure 5.4. Il est identique à celui utilisé dans le cadre de l'étalonnage de microphones par la méthode de réciprocité : deux microphones, un émetteur (efficacité M_{pe} , admittance acoustique Y_e , vitesse de la membrane v_e) et un récepteur (efficacité M_{pr} , admittance acoustique Y_r , vitesse de membrane v_R), sont couplés acoustiquement par une cavité de couplage. Cette cavité est constituée de deux portions de cylindre de même diamètre a . Les membranes des microphones ont des rayons différents de celui du cylindre.

Les éléments à caractériser sont insérés à la séparation des cylindres. Ces éléments (quatre tubes d'admittance individuelle Y_t ou une fente annulaire mince d'admittance Y_f) sont représentés par l'admittance spécifique y_1 supposée localisée sur la circonférence ($r = a$) dans le plans de séparation ($z = \ell_1$). Les expressions des admittances Y_t et Y_f sont calculées dans les paragraphes 3-2 et 3-3 de la référence [9].

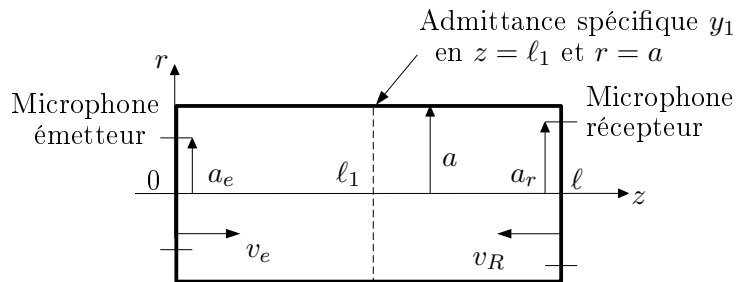


FIG. 5.4 – Dispositif utilisé pour la mesure des impédances d'entrée des éléments de l'oreille artificielle.

Les techniques de mesure sont les mêmes que celles utilisées pour l'étalonnage en pression par la méthode de réciprocité (§ 2.3). La quantité mesurée, l'admittance électrique de transfert $Y_E = 1/Z_E$ du système, est comparée à des valeurs de Y_E déterminées d'après la relation (1.17),

$$Y_E = \frac{1}{M_{pe}M_{pr}} Y_T,$$

les efficacités des microphones étant connues et l'admittance acoustique de transfert Y_T étant déterminée analytiquement d'après un modèle physique du système constitué par les microphones, le coupleur et l'admittance y_1 .

Deux modélisations de ce système, reprenant en grande partie les modèles établis dans la référence [9], sont présentées dans ce paragraphe. La première modélisation suppose que la propagation dans la cavité est celle d'ondes planes dont l'amortissement dû aux effets visqueux et thermiques est pris en compte dans le nombre d'onde, dans l'impédance itérative et par l'introduction d'une impédance de paroi aux extrémités.

La seconde modélisation introduit les modes radiaux (et éventuellement hélicoïdaux) dans la cavité de couplage. Elle repose sur la formulation intégrale des problèmes aux limites, les effets de dissipation visqueux et thermiques étant pris en compte dans le nombre d'onde en ce qui concerne ceux sur les parois latérales ($r = a$) et par le choix d'une fonction de Green qui satisfait sur les parois en $z = 0$ et ℓ à une condition mixte dans laquelle la fonction et sa dérivée sont liées par l'impédance viscothermique de paroi (fonction de Green calculée au paragraphe 4.3).

5.3.2 Modèle basé sur la propagation d'ondes planes

a. Champ acoustique dans la cavité de couplage

Les rayons des microphones sont supposés ici égaux à celui de la cavité. La propagation des ondes (supposées planes) dans chacun des cylindres est régie par l'équation (3.74)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_z^2 \right) p(z) = 0, \quad 0 \leq z \leq \ell \quad (5.1)$$

où le nombre d'onde k_z qui prend en compte l'influence des effets visqueux et thermiques dans les couches limites latérales est donné par l'équation (3.77)

$$k_z^2 = k_0^2 \frac{1 + (\gamma - 1)K_h}{1 - K_v} \approx k_0^2 \left[1 + \frac{1 - j}{\sqrt{2}} \frac{2}{a\sqrt{k_0}} (\sqrt{\ell'_v} + (\gamma - 1)\sqrt{\ell_h}) \right]. \quad (5.2)$$

La solution pour la pression acoustique est écrite

$$p(z) = A(e^{-jk_z z} + B e^{jk_z z}), \quad \forall z \in (0, \ell_1), \quad (5.3a)$$

$$p(z) = C(e^{-jk_z z} + D e^{jk_z z}), \quad \forall z \in (\ell_1, \ell), \quad (5.3b)$$

les constantes A, B, C, D étant déterminées par les conditions à écrire aux interfaces $z = 0$, $z = \ell_1$ et $z = \ell$. Les conditions aux frontières en $z = 0$ et $z = \ell$ sont les mêmes que dans le paragraphe 3.4.2.

i. La condition aux frontières en $z = \ell$ est donnée par l'équation (3.80)

$$\frac{1}{Z_v} \frac{\partial}{\partial z} p = -(Y_r + Y_p) p, \quad \text{pour } z = \ell, \quad (5.4)$$

avec (éq. 3.72)

$$Z_v = \frac{1}{S} \frac{j k_0 \rho_0 c_0}{1 - K_v} \quad (5.5)$$

et (éq. 3.79)

$$Y_p = \frac{S}{\rho_0 c_0} \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{k_0}(\gamma-1)\sqrt{\ell_h}, \quad (5.6)$$

ce qui donne

$$D = e^{-2jk_z \ell} \frac{Y_i - (Y_r + Y_p)}{Y_i + (Y_r + Y_p)}, \quad (5.7)$$

où l'admittance itérative Y_i vaut (éq. 3.83 et 3.84)

$$Y_i = \frac{j k_z}{Z_v} \approx \frac{S}{\rho_0 c_0} \left[1 + \frac{1-j}{\sqrt{2}} \frac{2}{a\sqrt{k_0}} (-\sqrt{\ell'_v} + (\gamma-1)\sqrt{\ell_h}) \right]. \quad (5.8)$$

ii. Dans le plan $z = \ell_1$, la continuité des pressions donne

$$C = A \frac{e^{-jk_z \ell_1} + B e^{jk_z \ell_1}}{e^{-jk_z \ell_1} + D e^{jk_z \ell_1}}. \quad (5.9)$$

Compte tenu du débit $\frac{\sigma_1}{\rho_0 c_0} y_1 p(\ell_1)$ entrant dans l'élément acoustique à caractériser, la continuité des débits donne

$$-\frac{1}{Z_v} A \frac{\partial}{\partial z} (e^{-jk_z z} + B e^{jk_z z}) = -\frac{1}{Z_v} C \frac{\partial}{\partial z} (e^{-jk_z z} + D e^{jk_z z}) + Y_1 A (e^{-jk_z z} + B e^{jk_z z}),$$

pour $z = \ell_1$,

où $Y_1 = \frac{\sigma_1}{\rho_0 c_0} y_1$ est l'admittance acoustique de l'élément à caractériser. En faisant usage de la relation (5.9) entre les constantes C et A , cette relation donne la constante B en fonction de D connu (éq. 5.7)

$$B = -e^{-2jk_z \ell_1} \frac{Y_1 + D e^{2jk_z \ell_1} (Y_1 - 2Y_i)}{(Y_1 + 2Y_i) + D e^{2jk_z \ell_1} Y_1}. \quad (5.10)$$

iii. La condition en frontières en $z = 0$, donnée par (éq. 3.78) :

$$-\frac{1}{Z_v} \frac{\partial p}{\partial z} = S v_e - Y_p p, \quad \text{pour } z = 0, \quad (5.11)$$

permet d'exprimer le débit $S v_e$:

$$S v_e = A[Y_i(1 - B) + Y_p(1 + B)]. \quad (5.12)$$

Cette expression du débit $S v_e$ permet d'exprimer l'admittance acoustique de transfert Y_T du système microphones-coupleur, et donc aussi son admittance électrique de transfert Y_E d'après la relation (1.17).

b. Admittance électrique de transfert

La relation (1.17) donne l'expression du produit des efficacités des deux microphones en fonction de l'admittance acoustique de transfert Y_T (calculée à partir du modèle physique choisi) et de l'admittance électrique de transfert Y_E (mesurée) du système microphones-coupleur :

$$M_{pe}M_{pr} = \frac{Y_T}{Y_E} .$$

Les microphones utilisés pour cette étude expérimentale sont étalonnés ; leurs efficacités M_{pe} et M_{pr} sont donc connues. L'admittance électrique de transfert Y_E est donc donnée par la relation (§ 5.3.1) :

$$Y_E = \frac{1}{M_{pe}M_{pr}} Y_T = \frac{1}{M_{pe}M_{pr}} \frac{Sv_e + Y_e p(0)}{p(\ell)} . \quad (5.13)$$

En faisant usage dans cette expression des relations (5.12) et (5.9), il vient

$$Y_E = \frac{1}{M_{pe}M_{pr}} \frac{Y_i(1-B) + Y_p(1+B) + Y_e(1+B)}{e^{-j k_z \ell_1} + B e^{j k_z \ell_1}} \frac{e^{-j k_z \ell_1} + D e^{j k_z \ell_1}}{e^{-j k_z \ell} + D e^{j k_z \ell}} , \quad (5.14)$$

qui donne, compte tenu des expressions (5.10) et (5.7),

$$Y_E = \frac{1}{M_{pe}M_{pr}} \left\{ j \sin k_z \ell \left[Y_i + \frac{(Y_e + Y_p)(Y_r + Y_p)}{Y_i} + \frac{Y_1}{2} \frac{Y_e + Y_r + 2Y_p}{Y_i} \right] \right. \\ \left. + \cos k_z \ell \left[Y_e + Y_r + 2Y_p + \frac{Y_1}{2} \left(1 + \frac{(Y_e + Y_p)(Y_r + Y_p)}{Y_i^2} \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{Y_1}{2} \left[j \sin k_z(\ell - 2\ell_1) \frac{Y_r - Y_e}{Y_i} + \cos k_z(\ell - 2\ell_1) \left(1 - \frac{(Y_e + Y_p)(Y_r + Y_p)}{Y_i^2} \right) \right] \right\} . \quad (5.15)$$

Dans le cas particulier où $\ell_1 = \ell/2$, cette expression devient

$$Y_E = \frac{1}{M_{pe}M_{pr}} \left\{ j \sin k_z \ell \left[Y_i + \frac{(Y_e + Y_p)(Y_r + Y_p)}{Y_i} \right] + \cos k_z \ell (Y_e + Y_r + 2Y_p) \right. \\ \left. + \frac{Y_1}{2} \left[1 - \frac{(Y_e + Y_p)(Y_r + Y_p)}{Y_i^2} + j \sin k_z \ell \frac{Y_e + Y_r + 2Y_p}{Y_i} \right. \right. \\ \left. \left. + \cos k_z \ell \left(1 + \frac{(Y_e + Y_p)(Y_r + Y_p)}{Y_i^2} \right) \right] \right\} . \quad (5.16)$$

A noter qu'en l'absence d'élément capillaire ($Y_1 = 0$), l'expression (5.15) permet de retrouver l'expression (3.87) de l'admittance acoustique de transfert Y_T .

5.3.3 Modèle basé sur la formulation intégrale du problème aux limites

Le modèle proposé dans le paragraphe précédent ne tient compte que de la propagation d'ondes planes. Dans un tel système, des modes supérieurs (modes radiaux et éventuellement hélicoïdaux) peuvent avoir une influence non négligeable sur la valeur de Y_E . Ces modes sont liés

aux profils de vitesse non uniformes des membranes de microphones, aux rayons des membranes qui sont différents de celui de la cavité et à la présence des éléments à caractériser en paroi.

Le modèle présenté dans ce paragraphe propose de prendre en compte les modes supérieurs dans la cavité et repose sur la formulation intégrale des problèmes aux limites. Il reprend en grande partie le modèle présenté dans le rapport du contrat BNM n° 01 3 010 [9, § 5-1] ainsi que de nombreux éléments du modèle développé dans le chapitre 4.

a. Champ acoustique dans une cavité fermée, théorème de Green

Les hypothèses sur le champ acoustique étant les mêmes ici que dans le paragraphe 4.1, les équations fondamentales s'expriment de la même façon, et par suite le champ de pression acoustique satisfait à l'équation de propagation (4.17) :

$$(\Delta + k^2)p(\vec{r}) = 0, \quad \forall \vec{r} \in \mathcal{D}, \quad (5.17)$$

avec (éq. 4.16)

$$k^2 = k_0^2 \frac{1 + (\gamma - 1)K_h}{1 - K_v} \approx k_0^2 \left[1 + \frac{1 - j}{\sqrt{2}} \frac{2}{a\sqrt{k_0}} (\sqrt{\ell'_v} + (\gamma - 1)\sqrt{\ell_h}) \right]. \quad (5.18)$$

A cette équation de propagation sont associées les conditions aux frontières suivantes (annexe H, éq. H.15) :

$$\rho_0 c_0 v_z = \rho_0 c_0 v_e - \zeta_{z0} p, \quad \text{pour } r \in (0, a_e), \theta \in (0, 2\pi), z = 0, \quad (5.19a)$$

$$\rho_0 c_0 v_z = -\rho_0 c_0 v_R + \zeta_{z\ell} p, \quad \text{pour } r \in (0, a_r), \theta \in (0, 2\pi), z = \ell, \quad (5.19b)$$

$$\rho_0 c_0 v_z = -\zeta_{z0} p, \quad \text{pour } r \in (a_e, a), \theta \in (0, 2\pi), z = 0, \quad (5.19c)$$

$$\rho_0 c_0 v_z = \zeta_{z\ell} p, \quad \text{pour } r \in (a_r, a), \theta \in (0, 2\pi), z = \ell, \quad (5.19d)$$

où ζ_{z0} et $\zeta_{z\ell}$ sont les admittances acoustiques spécifiques des parois en $z = 0$ et $z = \ell$ traduisant les effets des couches limites thermovisqueuses sur le champ acoustique dans la cavité (annexe H, éq. H.16), et

$$v_r = \frac{y_1}{\rho_0 c_0} p \quad \text{pour } r = a, \theta \in (0, 2\pi), z = \ell_1, \quad (5.19e)$$

$$v_r = 0 \quad \text{pour } r = a, \theta \in (0, 2\pi), z \in (0, \ell), \quad (5.19f)$$

les effets des couches limites thermovisqueuses latérales étant déjà pris en compte dans le nombre d'onde complexe k . La surface σ_1 sur laquelle est localisée l'admittance spécifique y_1 à caractériser étant très petite devant la surface latérale de la cavité, elle n'est pas ôtée de celle-ci dans la condition (5.19f).

Les admittances ζ_{z0} et $\zeta_{z\ell}$ restant petites, compte tenu des équations (4.8, 4.14), ces conditions aux frontières (5.19a-f) s'écrivent,

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{j k_0 \rho_0 c_0}{1 - K_v} v_z \approx \frac{j k_0 \rho_0 c_0}{1 - K_v} v_e - j k_0 \zeta_{z0} p \quad (5.20a)$$

pour $r \in (0, a_e), \theta \in (0, 2\pi), z = 0,$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{j k_0 \rho_0 c_0}{1 - K_v} v_z \approx \frac{j k_0 \rho_0 c_0}{1 - K_v} v_R - j k_0 \zeta_{z\ell} p \quad (5.20b)$$

pour $r \in (0, a_r)$, $\theta \in (0, 2\pi)$, $z = \ell$,

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\partial p}{\partial z} = -j k_0 \zeta_{z0} p \quad (5.20c)$$

pour $r \in (a_e, a)$, $\theta \in (0, 2\pi)$, $z = 0$,

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial z} = -j k_0 \zeta_{z\ell} p, \quad (5.20d)$$

pour $r \in (a_r, a)$, $\theta \in (0, 2\pi)$, $z = \ell$,

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial r} = -j k_0 y_1 p, \quad (5.20e)$$

pour $r = a$, $\theta \in (0, 2\pi)$, $z = \ell_1$,

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (5.20f)$$

pour $r = a$, $\theta \in (0, 2\pi)$, $z \in (0, \ell)$.

Comme déjà indiqué au chapitre 4 (éq. 4.20), pour une onde harmonique, le champ de pression acoustique $p(\vec{r})$ dans un domaine $\mathcal{D}$ limité par une surface fermée $\mathcal{S}$ peut être écrit sous la forme intégrale suivante [8, § 6.2.2] (le facteur $e^{j\omega t}$ est omis et le vecteur $\vec{r}$ est représenté ici par les trois coordonnées r, θ et z) :

$$p(\vec{r}) = \iiint_{\mathcal{D}} G(\vec{r}, \vec{r}_0) f(\vec{r}_0) dD_0 + \iint_{\mathcal{S}} \left[G(\vec{r}, \vec{r}_0) \frac{\partial}{\partial n_0} p(\vec{r}_0) - p(\vec{r}_0) \frac{\partial}{\partial n_0} G(\vec{r}, \vec{r}_0) \right] dS_0. \quad (5.21)$$

La fonction $f(\vec{r}_0)$ représente l'action des sources réparties à l'intérieur du domaine $\mathcal{D}$: dans le cas présent $f(\vec{r}_0) = 0$.

En faisant usage des conditions aux frontières (5.20a-f) pour le champ de pression, le choix d'une fonction de Green satisfaisant sur l'ensemble des parois de la cavité aux conditions (ce sont les mêmes que celles retenues au chapitre 4, éq. 4.22)

$$\frac{\partial}{\partial n} G(\vec{r}, \vec{r}_0) = -j k_0 \zeta_{z0} G(\vec{r}, \vec{r}_0), \quad \text{pour } r \in (0, a), \theta \in (0, 2\pi), z = 0, \quad (5.22a)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} G(\vec{r}, \vec{r}_0) = -j k_0 \zeta_{z\ell} G(\vec{r}, \vec{r}_0), \quad \text{pour } r \in (0, a), \theta \in (0, 2\pi), z = \ell, \quad (5.22b)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} G(\vec{r}, \vec{r}_0) = 0, \quad \text{pour } r = a, \theta \in (0, 2\pi), z \in (0, \ell), \quad (5.22c)$$

permet d'exprimer l'intégrale de surface (apparaissant dans la relation 5.21), qui représente la pression acoustique en tout point de la cavité, de la manière suivante :

$$p(\vec{r}) = \frac{j k_0 \rho_0 c_0}{1 - K_v} \left[\iint_{S_e} v_e(\vec{r}_0) G(\vec{r}, \vec{r}_0) dS_0 + \iint_{S_r} v_R(\vec{r}_0) G(\vec{r}, \vec{r}_0) dS_0 \right] - j k_0 \iint_{\sigma_1} y_1(\vec{r}_0) p(\vec{r}_0) G(\vec{r}, \vec{r}_0) dS_0, \quad (5.23)$$

S_e et S_r étant les surfaces respectives de la membrane de l'émetteur et du récepteur, les effets des couches thermovisqueuses étant portés par le facteur K_v (qui intervient dans l'impédance du milieu) et par la fonction de Green elle-même (dans le nombre d'onde k pour les effets latéraux et dans les admittances spécifiques ζ_{z0} et $\zeta_{z\ell}$ au niveau des membranes des microphones et leur périphérie). A noter la symétrie «émetteur - récepteur» dans l'expression du champ de pression acoustique (ce champ dépend de ces vitesses quelqu'en soit leur cause).

L'expression de la fonction de Green est donnée au paragraphe 4.3 (éq. 4.25, 4.31a et b).

b. Champ acoustique dans la cavité

Le champ de pression acoustique dans la cavité est obtenu en reportant l'expression (4.25) de la fonction de Green, dans l'équation (5.23). Compte tenu de la forme de cette fonction de Green, la pression $p(r, \theta, z)$ apparaît alors sous la forme d'un développement sur les fonctions propres $\psi_{\mu\nu}^t(r, \theta, z)$:

$$p(r, \theta, z) = \sum_{\substack{\mu, \nu=0,1,\dots \\ t=c,s}} \left[\frac{j k_0 \rho_0 c_0}{1 - K_v} (g_{\mu\nu}(z, 0) < v_e | \psi_{\mu\nu}^t >_e + g_{\mu\nu}(z, \ell) < v_R | \psi_{\mu\nu}^t >_r) \right. \\ \left. - j k_0 g_{\mu\nu}(z, \ell_1) \sum_{\mu', \nu', t'} p_{\mu'\nu'}^{t'}(\ell_1) < y_1 \psi_{\mu'\nu'}^{t'} | \psi_{\mu\nu}^t >_{\sigma_1} \right] \psi_{\mu\nu}^t(r, \theta), \quad (5.24)$$

où la notation $< v_e | \psi_{\mu\nu}^t >_e$ désigne l'intégrale sur S_e du produit $v_e(r, \theta) \psi_{\mu\nu}^t(r, \theta)$, $< v_R | \psi_{\mu\nu}^t >_r$ désigne l'intégrale sur S_r du produit $v_R(r, \theta) \psi_{\mu\nu}^t(r, \theta)$ et $< y_1 \psi_{\mu'\nu'}^{t'} | \psi_{\mu\nu}^t >_{\sigma_1}$ l'intégrale sur σ_1 du produit $y_1(\theta) \psi_{\mu'\nu'}^{t'}(r, \theta) \psi_{\mu\nu}^t(r, \theta)$.

La solution prend donc la forme

$$p(r, \theta, z) = \sum_{\mu, \nu, t} p_{\mu\nu}^t(z) \psi_{\mu\nu}^t(r, \theta), \quad (5.25)$$

avec

$$p_{\mu\nu}^t(z) = \frac{j k_0 \rho_0 c_0}{1 - K_v} [g_{\mu\nu}(z, 0) < v_e | \psi_{\mu\nu}^t >_e + g_{\mu\nu}(z, \ell) < v_R | \psi_{\mu\nu}^t >_r] \\ - j k_0 g_{\mu\nu}(z, \ell_1) \sum_{\mu', \nu', t'} p_{\mu'\nu'}^{t'}(\ell_1) < y_1 \psi_{\mu'\nu'}^{t'} | \psi_{\mu\nu}^t >_{\sigma_1}. \quad (5.26)$$

Dans la suite de l'exposé, le champ de vitesse v_e (champ vibratoire source) est supposé indépendant de l'angle θ , et par suite, compte tenu de la symétrie des rôles tenus par les deux microphones, la vitesse v_R également. Ainsi, le calcul des intégrales suivantes donne ($v_{e,R}$ désignant indifféremment v_e ou v_R)

$$< v_{e,R} | \psi_{\mu\nu}^t >_{e,r} = \int_0^{a_{e,r}} r_0 dr_0 v_{e,R}(r_0) \int_0^{2\pi} d\theta_0 \psi_{\mu\nu}^t(r_0, \theta_0); \quad (5.27)$$

d'après les expressions (4.27a et b) des $\psi_{\mu\nu}^t$, l'intégrale sur θ_0 est nulle pour $\mu \neq 0$, et de surcroît, elle est également nulle pour $t = s$, $\mu = 0$ (annexe I, § I.5.1 et I.5.2).

Pour exprimer la vitesse v_R qui dépend elle-même du champ acoustique $p(r, \theta, z)$, par extension de la relation $S_r v_R = -Y_r p(\ell)$ reliant l'admittance Y_r du microphone récepteur aux pressions et vitesses acoustique lorsque le champ acoustique est indépendant de r , la vitesse $v_R(r)$ est écrite (éq. 4.38) :

$$S_r v_R(r) = -\underline{Y}_r(r) < p(r, \ell) >_{\theta}, \quad (5.28)$$

où $\underline{Y}_r(r)$ est l'admittance acoustique à circuit ouvert du récepteur non-uniforme sur la surface de la membrane (éq. 4.39). La pression moyenne sur l'angle θ $< p(r, \ell) >_{\theta}$ de la pression $p(r, \theta, \ell)$

sur le récepteur est donnée par

$$\langle p(r, \ell) \rangle_\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(r, \theta_0, \ell) d\theta_0 = \sum_\nu p_{0\nu}^c(\ell) \psi_{0\nu}^c(r), \quad (5.29)$$

l'intégrale sur θ_0 des fonctions propres $\psi_{\mu\nu}^t$ étant nulles pour $t = s$ et pour $\mu \neq 0$ et les fonctions propres $\psi_{0\nu}^c$ étant indépendantes de l'angle θ .

Ainsi, en suivant le même raisonnement que celui présenté dans le paragraphe 4.4, le produit scalaire $\langle v_R | \psi_{0\nu}^c \rangle$ est donné par

$$-S_r \langle v_R | \psi_{0\nu}^c \rangle_r = \sum_{\nu'} p_{0\nu'}^c(\ell) Y_r \langle \psi_{0\nu'}^c | \psi_{0\nu}^c \rangle_r. \quad (5.30)$$

Le report de cette expression dans l'expression (5.24) de la pression conduit à :

$$p(r, \theta, z) = \sum_{\mu, \nu, t} \left[\frac{j k_0 \rho_0 c_0}{1 - K_v} (g_{0\nu}(z, 0) \langle v_e | \psi_{0\nu}^c \rangle_e - \frac{Y_r}{S_r} g_{0\nu}(z, \ell) \sum_{\nu'} p_{0\nu'}^c(\ell) \langle \psi_{0\nu'}^c | \psi_{0\nu}^c \rangle_r) \delta_{tc} \delta_{\mu 0} - j k_0 g_{\mu\nu}(z, \ell_1) \sum_{\mu', \nu', t'} p_{\mu'\nu'}^{t'}(\ell_1) \langle y_1 \psi_{\mu\nu}^t | \psi_{\mu'\nu'}^{t'} \rangle_{\sigma_1} \right] \psi_{\mu\nu}^t(r, \theta), \quad (5.31)$$

où les termes $\langle \psi_{0\nu}^c | \psi_{0\nu'}^c \rangle_r$ désignent les intégrales sur la surface S_r des produits $\psi_{0\nu}^c(r) \psi_{0\nu'}^c(r)$, calculés dans l'annexe I, § I.2 (éq. I.11a,b).

Les termes $\langle \psi_{0\nu}^c | \psi_{0\nu'}^c \rangle_r$ exprimant des couplages entre différents modes ($\nu \neq \nu'$) sont très petits devant les autres et peuvent donc être négligés (les ordres de grandeur sont donnés dans le paragraphe I.2).

La pression acoustique $p(r, \theta, z)$ est donc retenue sous la forme (en factorisant l'inverse de la surface $S = \pi a^2$) :

$$p(r, \theta, z) = \sum_{\mu, \nu, t} \left[\frac{j k_0}{1 - K_v} \frac{\rho_0 c_0}{S} (g_{0\nu}(z, 0) S \langle v_e | \psi_{0\nu}^c \rangle_e - Y_{r0\nu} g_{0\nu}(z, \ell) p_{0\nu}^c(\ell)) \delta_{tc} \delta_{\mu 0} - j k_0 g_{\mu\nu}(z, \ell_1) \sum_{\mu', \nu', t'} p_{\mu'\nu'}^{t'}(\ell_1) \langle y_1 \psi_{\mu\nu}^t | \psi_{\mu'\nu'}^{t'} \rangle_{\sigma_1} \right] \psi_{\mu\nu}^t(r, \theta), \quad (5.32)$$

où $Y_{r0\nu} = Y_r \frac{a^2}{a_r^2} \langle \psi_{0\nu}^c | \psi_{0\nu}^c \rangle_r$.

c. Admittance électrique de transfert

De même que dans le paragraphe 5.3.2.b, l'expression de l'admittance électrique de transfert du système est écrite

$$Y_E = \frac{1}{M_{pe} M_{pr}} Y_T.$$

Le champ de pression et le champ de vitesse n'étant pas uniformes dans la cavité, l'admittance acoustique de transfert, rapport du débit de l'émetteur en court-circuit acoustique sur la pression en $z = \ell$, est une fonction de r .

De même que dans le paragraphe 4.5, l'admittance acoustique de transfert (norme CEI 61064-2 [22]) est définie en remplaçant les quantités qui dépendent de la variable r par leur valeur moyenne sur la surface du transducteur impliqué (par extension de la relation 2.1), à savoir :

$$Y_T = \frac{S_e \langle v_e \rangle_e + \langle \underline{Y}_e(r) p(r, 0) \rangle_e}{\langle p(r, \ell) \rangle_r}, \quad (5.33)$$

où

$$\underline{Y}_e(r) = \langle \underline{Y}_e \rangle_e + \delta Y_e(r) \quad \text{et} \quad p(r, 0) = \langle p(0) \rangle_e + \delta p(r, 0).$$

Par suite, en adoptant la même démarche que dans le paragraphe 4.5 et en posant

$$V_e = \langle v_e \rangle_e = \frac{2}{a_e^2} \int_0^{a_e} v_e(r_0) r_0 dr_0, \quad (5.34)$$

et

$$Y_e = \langle \underline{Y}_e \rangle_e = \frac{2}{a_e^2} \int_0^{a_e} \underline{Y}_e(r_0) r_0 dr_0, \quad (5.35)$$

il vient

$$Y_T = \frac{S_e V_e + Y_e \langle p(0) \rangle_e}{\langle p(\ell) \rangle_r}. \quad (5.36)$$

Le calcul de l'admittance acoustique de transfert nécessite donc de calculer les valeurs moyennes de la pression acoustique sur la membrane de l'émetteur ($z = 0$) et du récepteur ($z = \ell$).

Afin de calculer les valeurs moyennes $\langle p(0) \rangle_e$ et $\langle p(\ell) \rangle_r$, la valeur moyenne $\langle p(z) \rangle_{e,r}$ de la pression $p(r, \theta, z)$ sur la section de rayon $a_{e,r}$ ($a_{e,r}$ désignant a_e ou a_r) est écrite

$$\begin{aligned} \langle p(z) \rangle_{e,r} &= \sum_{\mu, \nu, t} p_{\mu\nu}^t(z) \langle \psi_{\mu\nu}^t \rangle_{e,r} \\ &= \sum_{\mu, \nu, t} p_{\mu\nu}^t(z) \frac{1}{\pi a_{e,r}^2} \int_0^{a_{e,r}} r_0 dr_0 \int_0^{2\pi} d\theta_0 \psi_{\mu\nu}^t(r_0, \theta_0); \end{aligned} \quad (5.37)$$

d'après les expressions (4.27a et b) des $\psi_{\mu\nu}^t$, l'intégrale sur θ_0 est nulle pour $\mu \neq 0$ et pour $t = s$, $\mu = 0$. La valeur moyenne $\langle p(z) \rangle_{e,r}$ devient alors

$$\langle p(z) \rangle_{e,r} = \sum_{\nu} p_{0\nu}^c(z) \langle \psi_{0\nu}^c \rangle_{e,r}, \quad (5.38)$$

ce qui donne alors pour $\langle p(0) \rangle_e$ et $\langle p(\ell) \rangle_r$

$$\langle p(0) \rangle_e = \sum_{\nu} p_{0\nu}^c(0) \langle \psi_{0\nu}^c \rangle_e, \quad (5.39)$$

$$\langle p(\ell) \rangle_r = \sum_{\nu} p_{0\nu}^c(\ell) \langle \psi_{0\nu}^c \rangle_r. \quad (5.40)$$

Le report de ces expressions dans l'expression de l'admittance acoustique de transfert Y_T donne alors

$$Y_T = \frac{S_e V_e + Y_e \sum_{\nu} p_{0\nu}^c(0) < \psi_{0\nu}^c >_e}{\sum_{\nu} p_{0\nu}^c(\ell) < \psi_{0\nu}^c >_r} . \quad (5.41)$$

L'admittance électrique de transfert est alors donnée par

$$Y_E = \frac{1}{M_{pe} M_{pr}} \frac{S_e V_e + Y_e \sum_{\nu} p_{0\nu}^c(0) < \psi_{0\nu}^c >_e}{\sum_{\nu} p_{0\nu}^c(\ell) < \psi_{0\nu}^c >_r} . \quad (5.42)$$

Le calcul de l'admittance électrique de transfert Y_E ne nécessite de connaître que les termes pour lesquels $t = c$ et $\mu = 0$. Il reste donc à expliciter les coefficients $p_{0\nu}^c(z)$ pour que l'admittance Y_E soit entièrement déterminée.

Le report de l'expression de la pression (5.32) dans l'expression (5.38) donne

$$p_{0\nu}^c(z) = \frac{j k_0}{1 - K_v} \frac{\rho_0 c_0}{S} [g_{0\nu}(z, 0) S < v_e | \psi_{0\nu}^c >_e - Y_{r0\nu} g_{0\nu}(z, \ell) p_{0\nu}^c(\ell)] \\ - j k_0 g_{0\nu}(z, \ell_1) \sum_{\mu', \nu', t'} p_{\mu'\nu'}^{t'}(\ell_1) < y_1 \psi_{0\nu}^c | \psi_{\mu'\nu'}^{t'} >_{\sigma_1} , \quad (5.43)$$

qui devient, en faisant usage de l'expression (K.9),

$$p_{0\nu}^c(z) = \frac{j k_0}{1 - K_v} \frac{\rho_0 c_0}{S} [g_{0\nu}(z, 0) S < v_e | \psi_{0\nu}^c >_e - Y_{r0\nu} g_{0\nu}(z, \ell) p_{0\nu}^c(\ell)] \\ - j k_0 \rho_0 c_0 g_{0\nu}(z, \ell_1) Y_1 \sum_{\nu'} p_{0\nu'}^c(\ell_1) \psi_{0\nu}^c(a) \psi_{0\nu'}^c(a) , \quad (5.44)$$

où $Y_1 = \sigma_1 / (\rho_0 c_0) y_1$ est l'admittance acoustique localisée de l'élément à caractériser. Elle vaut Y_f si cet élément est une fente annulaire et $4Y_t$ si l'élément est un réseau de quatre tubes cylindriques (annexe K et référence [9, § 3-2 et 3-3]). Cette équation conduit, en posant successivement $z = \ell$ et $z = \ell_1$, à deux relations indépendantes entre $p_{0\nu}^c(\ell)$ et $p_{0\nu}^c(\ell_1)$. La résolution de ce système d'équations donne les coefficients $p_{0\nu}^c(\ell)$ et $p_{0\nu}^c(\ell_1)$, ce qui permet d'en déduire les coefficients $p_{0\nu}^c(z)$ et donc les coefficients $p_{0\nu}^c(0)$, nécessaires avec les $p_{0\nu}^c(\ell)$ pour le calcul de l'admittance électrique de transfert Y_E .

5.3.4 Résultats théoriques et premiers résultats expérimentaux

Les résultats théoriques obtenus pour les deux modèles déterminés dans ce chapitre (modèle basé sur la propagation d'ondes planes éq. 5.15 et modèle basé sur la formulation intégrale éq. 5.42) sont observés et comparés respectivement dans les paragraphes a et b. Ces résultats théoriques sont comparés à des premiers résultats expérimentaux dans le paragraphe c.

a. Contribution individuelle des différents éléments acoustiques en paroi sur l'admittance électrique de transfert

Les résultats présentés dans ce paragraphe sont exprimés sous la forme de volumes acoustiques de transfert de la cavité de couplage (notés V_T) définis comme suit :

$$V_T = \frac{\gamma_R P_R}{j\omega} Y_T,$$

où γ_R et P_R sont respectivement le rapport des capacités calorifiques C_p et C_v (massiques) de l'air et la pression statique dans les conditions standard de référence.

Pour des commodités d'exploitation des résultats, le volume de transfert V_T est normalisé par sa valeur aux basses fréquences en l'absence d'éléments acoustiques en parois et d'effets thermiques défini par (§ 3.5.2) :

$$V_{Tbf0} = V + V_{bfe} + V_{bfr}.$$

Les courbes de la figure 5.5 représentent les volumes normalisés V_T/V_{Tbf0} dans le cas où la cavité ne comporte pas de petit élément acoustique en paroi. L'apparente augmentation de volume en basses fréquences sur ces courbes est uniquement due au effets thermiques dans la cavité de couplage.

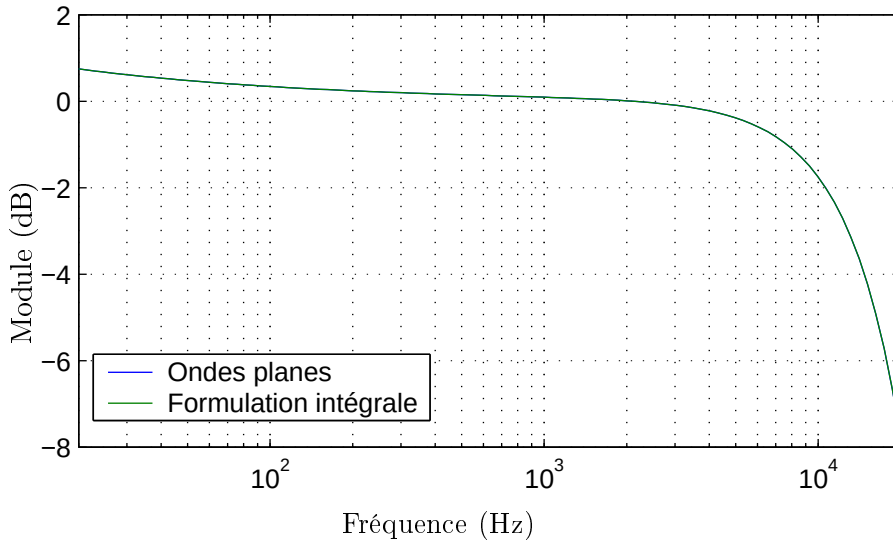


FIG. 5.5 – Volume acoustique de transfert normalisé V_T/V_{Tbf0} en fonction de la fréquence, selon deux modèles physiques avec un coupleur sans élément acoustique en paroi.

Les courbes des figures 5.6 à 5.9 représentent les volumes acoustiques de transfert normalisés V_T/V_{Tbf0} dans le cas où la cavité de couplage comporte en paroi un petit composant acoustique. Dans le modèle basé sur la formulation intégrale (éq. 5.42), un seul mode supérieur est considéré. Le volume de transfert est calculé pour des microphones LS2P (1/2").

Les petits éléments acoustiques considérés ici ont la même forme que les éléments constitutifs de l'oreille artificielle (§ 5.1). Les dimensions choisies pour ces éléments dans ce calcul sont celles de coupleurs réalisés au LNE et intégrant en paroi les éléments acoustiques à caractériser. Ces coupleurs spéciaux sont décrits plus précisément avec leurs dimensions dans l'annexe L.

Les deux types d'éléments acoustiques considérés, en paroi du coupleur, sont une fente annulaire et un réseau de quatre tubes cylindriques, débouchant sur un champ libre (impédance quasi-nulle) ou sur une cavité. Ces éléments qui constituent l'oreille artificielle sont représentés dans la norme en vigueur [20] par le circuit électrique équivalent de la figure 5.2, où les résistances et inductances acoustiques (R_2 , L_2) et (R_3 , L_3) représentent respectivement la fente et le réseau de quatre tubes, et les capacités acoustiques C_2 et C_3 représentent les cavités à l'arrière des petits éléments acoustiques.

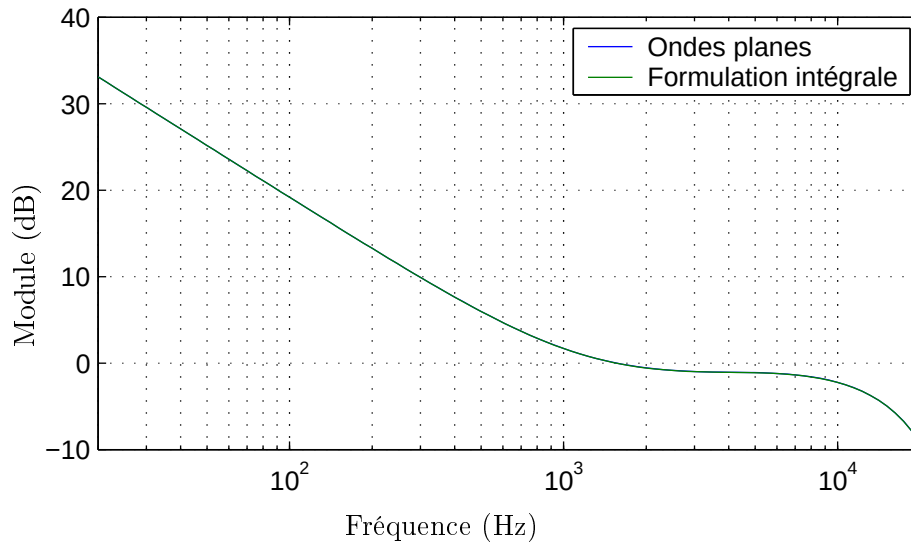


FIG. 5.6 – Volume acoustique de transfert normalisé V_T/V_{Tbf0} en fonction de la fréquence, selon deux modèles physiques avec un coupleur comportant en paroi une fente annulaire ouverte.

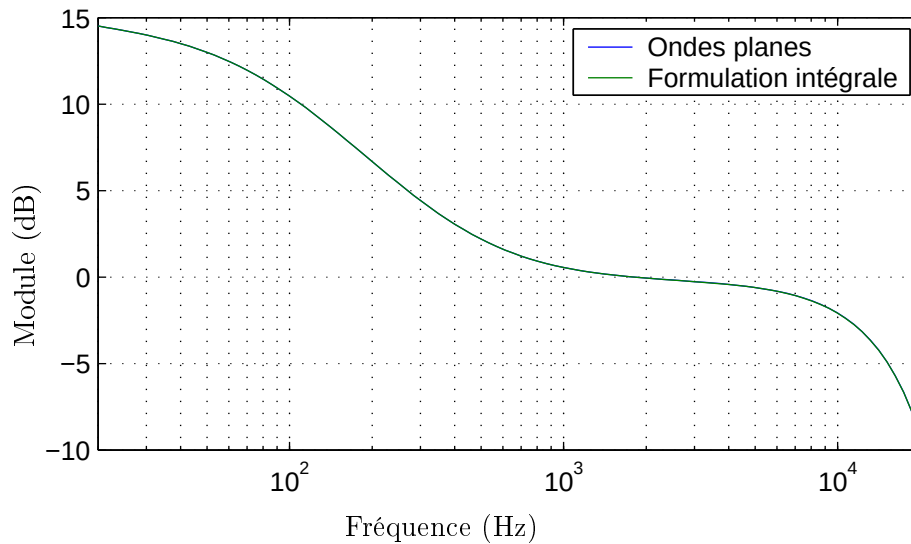


FIG. 5.7 – Volume acoustique de transfert normalisé V_T/V_{Tbf0} en fonction de la fréquence, selon deux modèles physiques avec un coupleur comportant en paroi une fente annulaire chargée par un volume arrière.

Sur chaque figure de 5.5 à 5.9, les résultats obtenus avec les deux modèles sont très proches. Les écarts entre ces résultats sont précisés dans le paragraphe b.

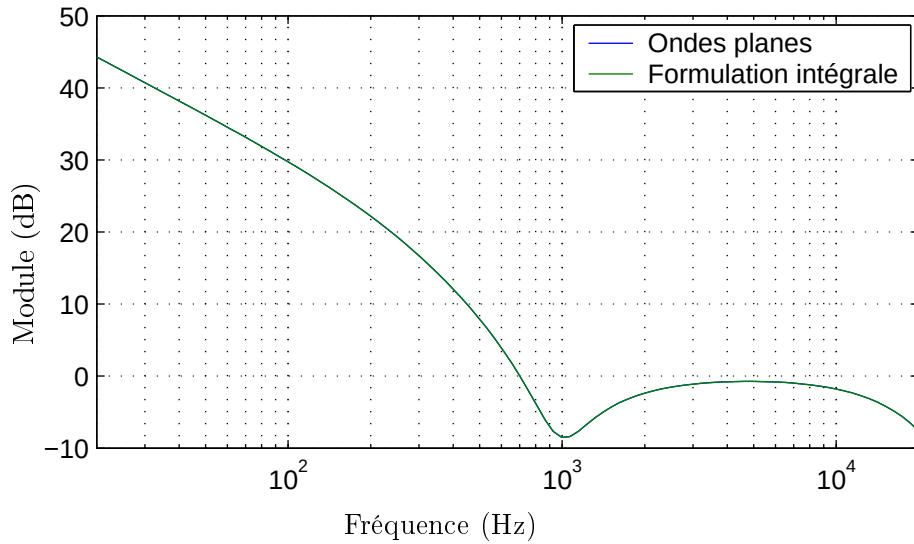


FIG. 5.8 – Volume acoustique de transfert normalisé V_T/V_{Tbf0} en fonction de la fréquence, selon deux modèles physiques avec un coupleur comportant en paroi quatre tubes cylindriques ouverts.

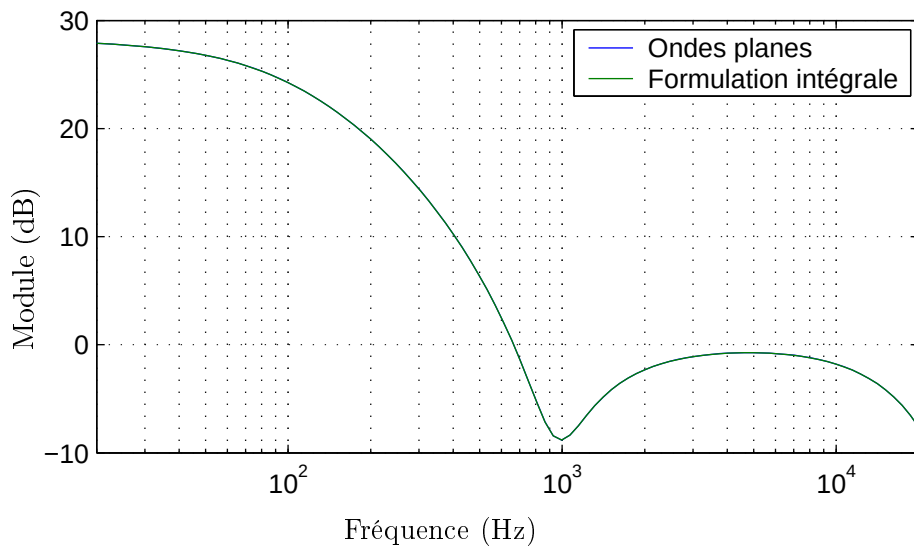


FIG. 5.9 – Volume acoustique de transfert normalisé V_T/V_{Tbf0} en fonction de la fréquence, selon deux modèles physiques avec un coupleur comportant en paroi quatre tubes cylindriques chargés par un volume arrière.

La comparaison des courbes de la figure 5.5 avec celles des figures 5.6 à 5.9, montre que dans la partie basse de la gamme de fréquences, chaque composant acoustique en paroi influence fortement la valeur du volume normalisé V_T/V_{Tbf0} . Un rapide calcul du volume normalisé aux basses fréquences V_{Tbf}/V_{Tbf0} , permet de mieux comprendre cette influence. L'expression (5.15), en supposant $k_z\ell$ petit et compte tenu de ce que les admittances des microphones Y_e , Y_r et l'admittance de paroi Y_p sont petites, conduit à écrire l'admittance acoustique de transfert du système aux basses fréquences sous la forme suivante :

$$Y_{Tbf} \approx j k_z \ell Y_i + 2Y_p + Y_e + Y_r + Y_1,$$

qui correspond à la somme de l'admittance acoustique de transfert $Y_{Tbf0} = \frac{j \omega V_{Tbf0}}{\gamma_R P_R}$ sans composant acoustique sur les parois de la cavité (éq. 3.88) et de l'admittance d'entrée Y_1 des petits composants en paroi. Le volume de transfert normalisé aux basses fréquences V_{Tbf}/V_{Tbf0} peut alors s'écrire

$$\frac{V_{Tbf}}{V_{Tbf0}} \approx 1 + \frac{\gamma_R P_R}{j \omega V_{Tbf0}} Y_1.$$

Cette expression du volume de transfert normalisé permet de faire plusieurs remarques sur les courbes des figures 5.6 à 5.9 :

- jusqu'à près de 1 kHz, la décroissance linéaire (en échelle logarithmique) du volume de transfert imposée par la présence de la fente ouverte montrée par la figure 5.6 correspond bien, en échelle logarithmique, au comportement résistif attendu de celle-ci (Y_1 réel), observation qui s'applique également dans le cas où le composant acoustique en paroi est un réseau de quatre tubes, mais jusqu'à quelques centaines de Hz seulement (figure 5.8),
- quand les petits éléments acoustiques débouchent sur une cavité, en basses fréquences l'effet du volume de celle-ci est prépondérant devant l'effet résistif de la fente ou des tubes, ce qui est représenté sur les courbes des figures 5.7 et 5.9 par le fait que le volume de transfert normalisé tend, dans les basses fréquences, vers une valeur constante qui est égale au volume de cette cavité.

Par ailleurs, il est visible que l'influence de ces éléments acoustiques en paroi sur la valeur du volume de transfert V_T/V_{Tbf0} , et donc sur celle de l'admittance électrique de transfert $Y_E = Y_T/(M_{pe}M_{pr})$, est importante car elle peut dépasser 40 dB pour le type d'éléments acoustiques étudiés ici.

L'influence individuelle de chaque élément acoustique en paroi étant nettement marquée, la mise en œuvre de la méthode proposée dans ce chapitre pour caractériser individuellement les petits éléments acoustiques de l'oreille artificielle semble donc tout à fait envisageable dans la pratique. Il reste toutefois à proposer un protocole pour mettre en pratique cette méthode et le niveau de précision qu'elle pourrait permettre d'atteindre. Cette étude expérimentale n'a pas pu être poursuivies pour aller jusqu'à la mesure proprement dite en raison de difficultés techniques.

b. Influence des modes supérieurs sur l'admittance électrique de transfert

Les courbes des figures 5.6 à 5.9 montrent que les deux modèles présentés dans ce chapitre pour la cavité de couplage (éq. 5.15 et 5.42) donnent des résultats très proches. Les courbes des figures 5.10 à 5.13, représentant la différence des admittances acoustiques de transfert Y_T calculées selon ces deux modèles, précisent que cette différence est très faible en regard de

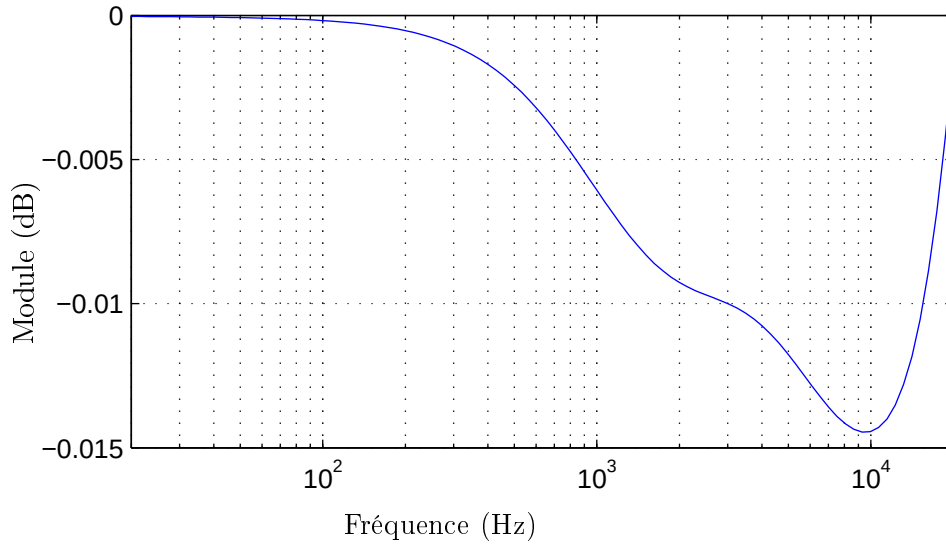


FIG. 5.10 – Différence des admittances acoustiques de transfert calculées, en fonction de la fréquence, selon deux modèles avec un coupleur comportant en paroi une fente annulaire ouverte.

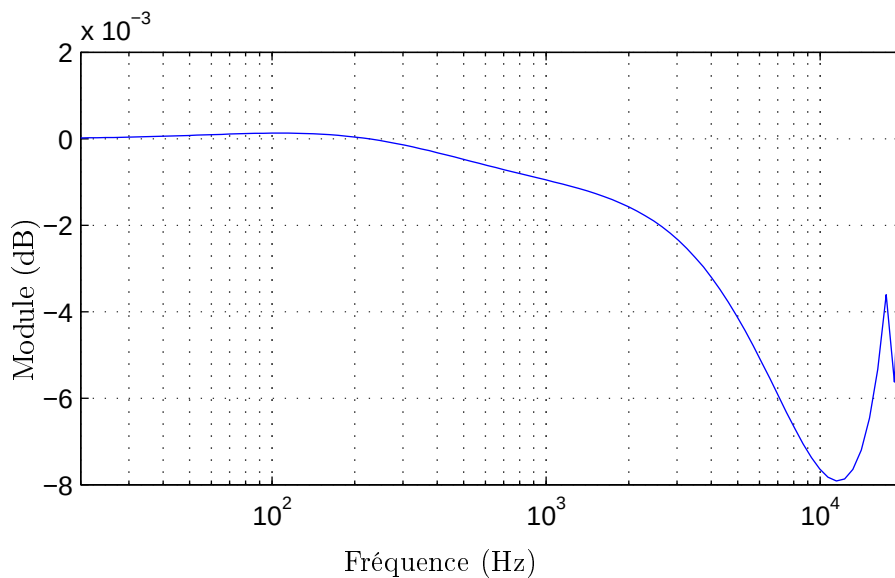


FIG. 5.11 – Différence des admittances acoustiques de transfert calculées, en fonction de la fréquence, selon deux modèles avec un coupleur comportant en paroi une fente annulaire ouverte.

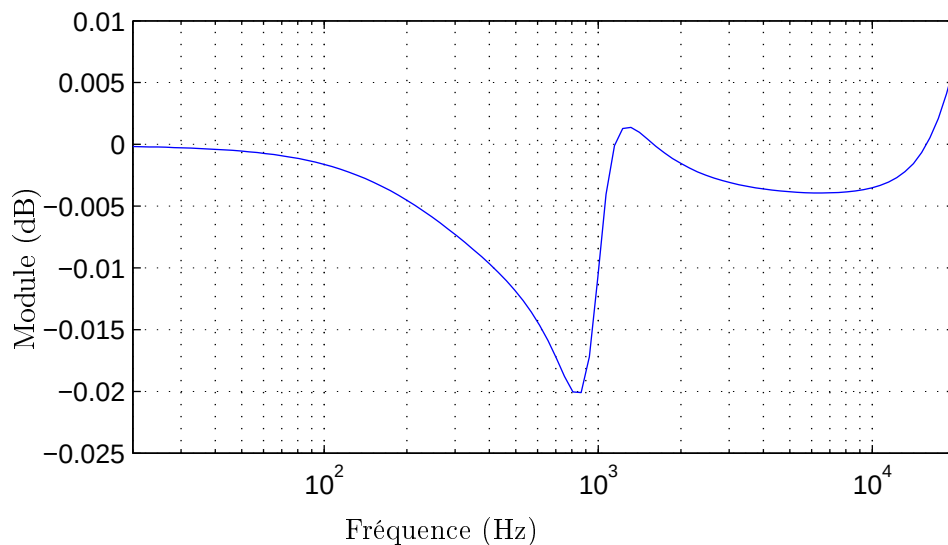


FIG. 5.12 – Différence des admittances acoustiques de transfert calculées, en fonction de la fréquence, selon deux modèles avec un coupleur comportant en paroi quatre tubes cylindriques ouverts.

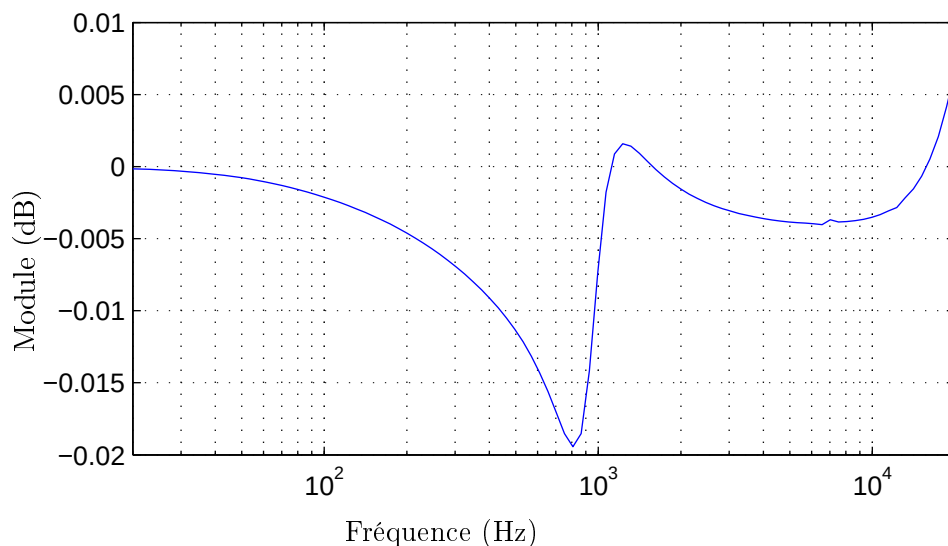


FIG. 5.13 – Différence des admittances acoustiques de transfert calculées, en fonction de la fréquence, selon deux modèles avec un coupleur comportant en paroi quatre tubes cylindriques chargés par un volume arrière.

l'influence sur Y_T des éléments acoustiques en paroi (plusieurs dizaines de dB dans certains cas), car elle n'excède pas 0,02 dB (figures 5.12 et 5.13).

Cependant, il faut rappeler que le modèle tenant compte des modes supérieurs dans la cavité de couplage est sujet aux mêmes interrogations concernant la modélisation du microphone que celui présenté dans le chapitre 4. Ainsi, il n'est pas certain que l'influence des modes supérieurs sur Y_T illustrée pour différents types d'éléments acoustiques en parois sur les figures 5.10 à 5.13 soit bien réaliste. Par ailleurs, la précision de la méthode de caractérisation des petits éléments acoustiques présentée ici n'étant pas déterminée, il n'est, pour le moment pas possible de conclure sur l'intérêt pratique de tenir compte des modes supérieurs dans la cavité de couplage dans le calcul de l'admittance acoustique de transfert Y_T .

c. Comparaison de résultats théoriques et expérimentaux

Les courbes des figures 5.14 à 5.18 permettent d'effectuer une première vérification qualitative de la concordance entre les modèles établis pour les éléments acoustiques placés en paroi de la cavité de couplage [9] avec la pratique. Sur ces figures, la courbe verte représente le rapport des valeurs de l'admittance électrique de transfert Y_E mesurées avec et sans élément acoustique en paroi, et la courbe bleue représente le rapport des valeurs de l'admittance acoustique de transfert Y_T calculées (modèle basé sur la formulation intégrale éq. 5.41) avec et sans élément acoustique en paroi. Ces deux rapports d'admittances doivent être égaux si les modèles établis pour les éléments en paroi correspondent à la réalité. En effet, l'admittance acoustique Y_T étant égale au produit de l'admittance électrique Y_E par le produit des efficacités des microphones $M_{pe}M_{pr}$ (éq. 1.17), qui dépend uniquement des microphones, un rapport de Y_T calculés dans ces configurations de cavités différentes doit être égal au rapport des Y_E mesurés dans ces mêmes configurations.

Par manque de certains équipements, tout le soin nécessaire n'a pas pu être apporté aux mesures des admittances Y_E pour obtenir une grande précision. Les résultats présentés dans ce paragraphe permettent donc seulement d'avoir une première idée de la concordance entre les modèles analytiques précédemment établis pour les éléments constitutifs de l'oreille artificielle [9] et la pratique, et de ce qui pourrait être fait par la suite pour caractériser ces petits composants acoustiques par la méthode proposée dans ce chapitre.

La figure 5.14 montre que le modèle utilisé pour représenter la fente annulaire ouverte [9, § 3-2] semble bien correspondre à la réalité car les résultats théoriques présentent une bonne concordance avec les résultats expérimentaux. Il n'en est pas de même dans le cas où la fente est chargée par un volume arrière, car la différence entre les valeurs théoriques et expérimentales peut, dans ce cas, dépasser 5 dB.

Selon toutes vraisemblances, cette différence serait plutôt due à des inexactitudes dans les valeurs des dimensions de la fente et de la cavité sur laquelle elle débouche utilisées dans le calcul des Y_T . En effet, le coupleur comportant en paroi une fente débouchant sur un volume, réalisé au LNE, présente certaines imperfections dans sa réalisation qui font que les épaisseurs de la fente et du volume annulaire arrière sont très probablement plus élevées que celles qui sont utilisées dans le calcul : dans la pratique, il est nécessaire de beaucoup forcer pour emboîter les pièces du coupleur constituant la fente et les cavités annulaires, il n'est donc pas impossible qu'une fois assemblé l'ensemble n'ait pas les dimensions attendues (dimensions déterminées d'après des mesures séparées des différentes pièces du coupleurs) et qu'il présente des défauts plus ou moins importants dans sa géométrie comme des défauts de parallélisme ou l'existence

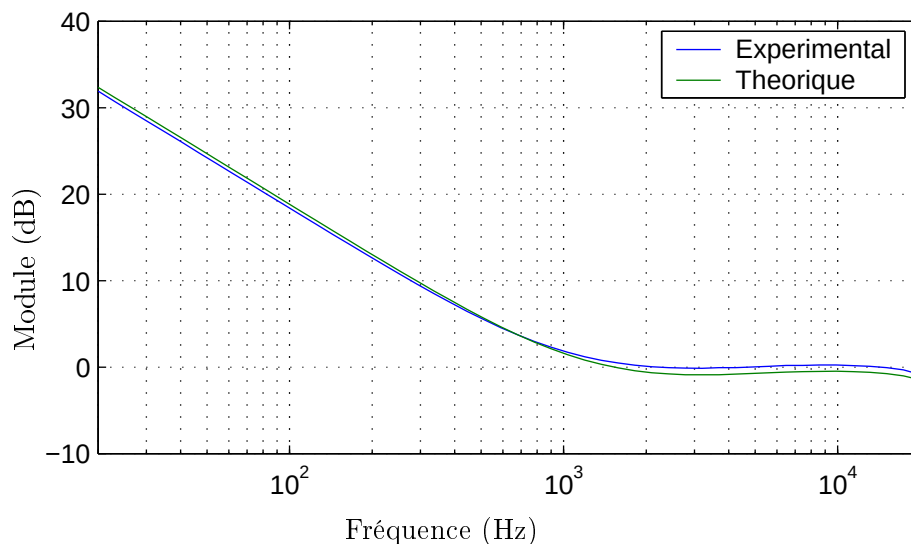


FIG. 5.14 – Valeurs (dB) du rapport des admittances Y_E mesurées avec et sans fente ouverte en paroi et du rapport des admittances Y_T calculées dans les mêmes conditions, en fonction de la fréquence.

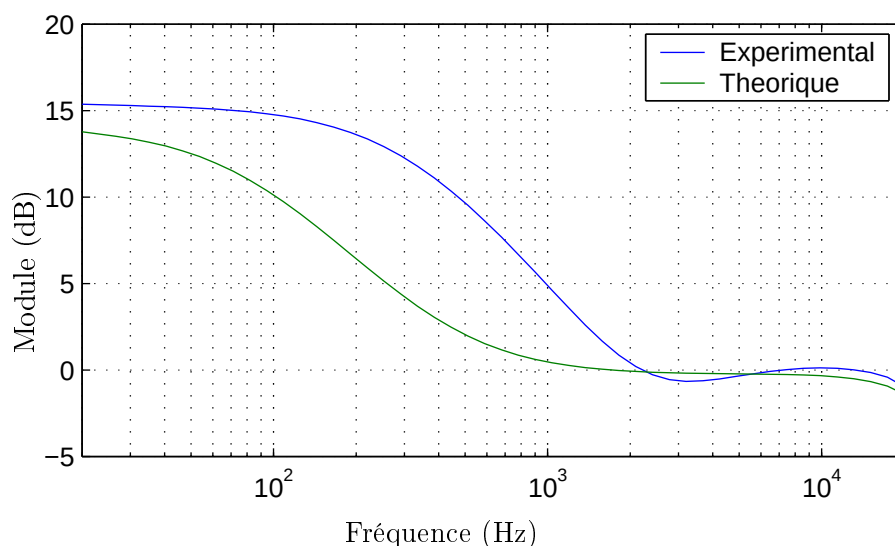


FIG. 5.15 – Valeurs (dB) du rapport des admittances Y_E mesurées avec et sans fente chargée par un volume arrière en paroi et du rapport des admittances Y_T calculées dans les mêmes conditions, en fonction de la fréquence.

de fentes additionnelles internes (annexe L). Ceci semble confirmé par le fait que l'utilisation dans le calcul de Y_T de valeurs pour la longueur du coupleur, l'épaisseur de la fente et celle de la cavité annulaire augmentées de 0,031 mm par rapport aux dimensions initiales (annexe L, tableau L.1) permet d'obtenir des résultats théoriques qui concordent mieux avec l'expérience (figure 5.16). Cependant, cette concordance n'est pas parfaite et il faudrait faire réaliser un nouveau coupleur acoustique avec en paroi une fente débouchant sur une cavité annulaire dont la structure et les dimensions seraient plus fiables afin de mieux évaluer la concordance entre théorie et pratique.

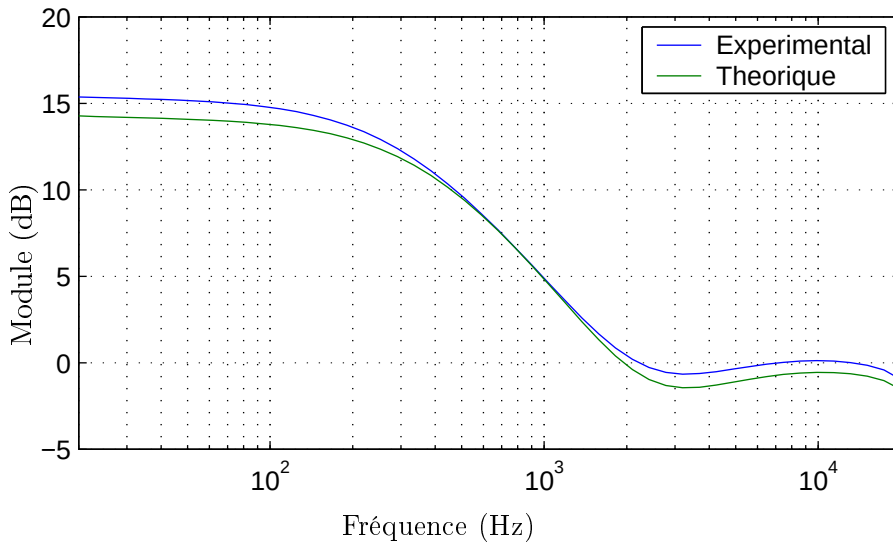


FIG. 5.16 – Valeurs (dB) du rapport des admittances Y_E mesurées avec et sans fente chargée par un volume arrière en paroi et du rapport des admittances Y_T calculées dans les mêmes conditions avec des valeurs corrigées de l'épaisseur de la fente, de la cavité et du coupleur, en fonction de la fréquence.

Les courbes des figures 5.17 et 5.18 montrent un certain décalage entre les résultats théoriques et expérimentaux qui peut s'expliquer encore une fois par des imprécisions dans les valeurs des dimensions des tubes cylindriques. En effet, les diamètres de ceux-ci ne sont déterminés qu'avec une précision de 0,02 mm et leur longueur avec une précision de 0,05 mm (annexe L), ce qui semble insuffisant compte tenu de la grande sensibilité de la valeur de l'admittance Y_T à des variations, dans les calculs, des dimensions des petits éléments acoustiques en paroi. Par ailleurs, ces imprécisions peuvent laisser supposer que les quatre tubes n'ont pas forcément les mêmes dimensions, ce qui n'est pas pris en compte dans le calcul. Enfin, la réalisation même du coupleur (en plastique) n'est pas très «propre» (bavures, rayures profondes...), ce qui peut entraîner des perturbations dans la cavité qui ne sont pas prises en compte dans le calcul de Y_T . Tout ceci conduit à penser que, dans ce cas aussi, la réalisation d'un coupleur acoustique plus finement réalisé et caractérisé serait nécessaire à la poursuite de l'étude.

Les modèles analytiques de tubes, fente et volumes annulaires de l'oreille artificielle [9] semblent donc représenter ces petits composants acoustiques de façon assez réaliste. Une étude expérimentale et théorique plus approfondie de la sensibilité, selon la gamme de fréquences utilisée, de la valeur de l'admittance électrique de transfert à des variations des dimensions de ces petits composants permettrait de mettre au point une procédure permettant de les caractériser finement par la méthode décrite dans ce chapitre et de déterminer la précision de cette méthode.

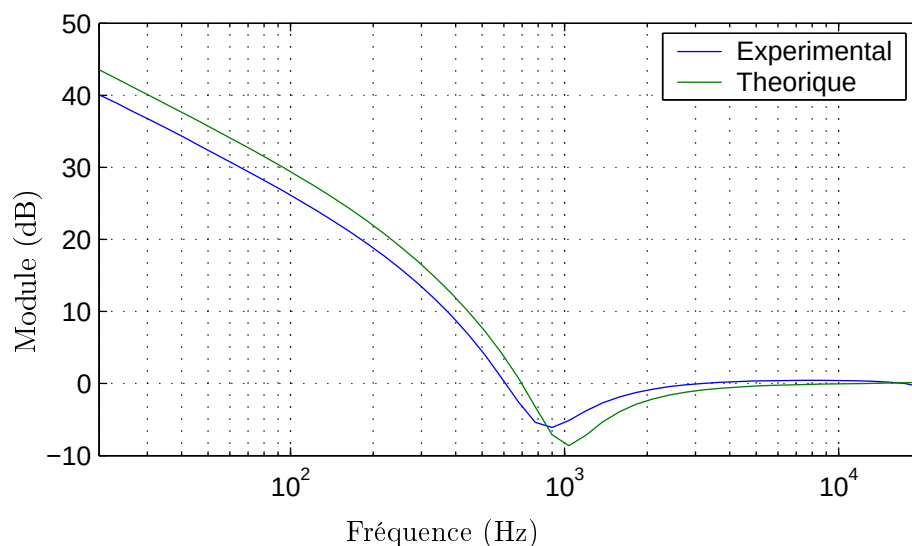


FIG. 5.17 – Valeurs (dB) du rapport des admittances Y_E mesurées avec et sans quatre tubes ouverts en paroi et du rapport des admittances Y_T calculées dans les mêmes conditions, en fonction de la fréquence.

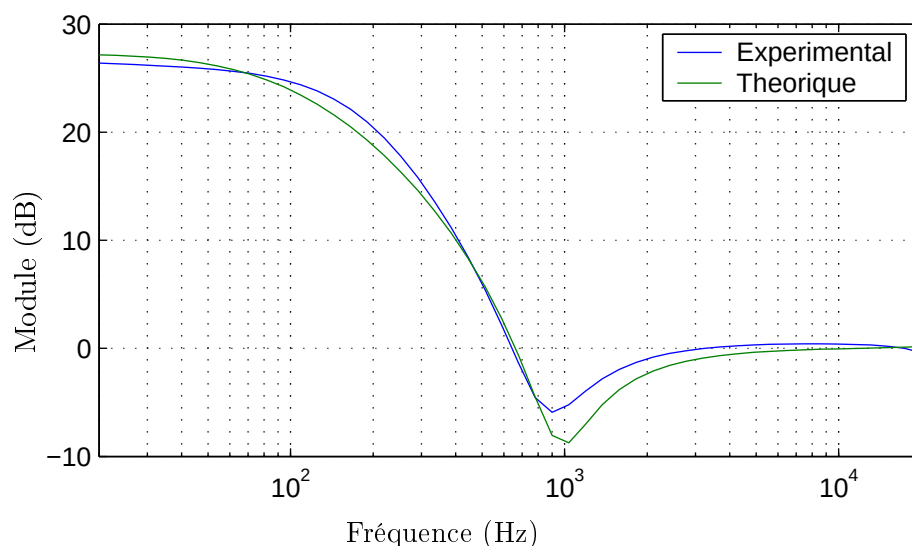


FIG. 5.18 – Valeurs (dB) du rapport des admittances Y_E mesurées avec et sans quatre tubes chargés par un volume arrière en paroi et du rapport des admittances Y_T calculées dans les mêmes conditions, en fonction de la fréquence.

Conclusion

L'objectif principal du travail présenté dans ce mémoire est de proposer des modélisations analytiques précises de la cavité de couplage dans le dispositif d'étalonnage de microphones par la méthode de réciprocité, ceci dans le but d'améliorer la précision des étalonnages de microphones et d'étendre cette méthode à la mesure d'impédances de petits composants acoustiques.

Les modèles actuellement en usage et retenus par la norme en vigueur reposent sur des bases théoriques qui nécessitent d'être révisées. Ainsi, dans le chapitre 3 sont proposés, en alternative aux modèles en usage, des modèles reposant sur des théories déjà existantes et représentant de façon plus rigoureuse et complète les effets des couches limites visqueuses et thermiques dans la cavité de couplage. Les résultats obtenus dans ce chapitre montrent, en outre, que les erreurs engendrées par les modèles en usage sur la valeur de l'admittance acoustique de transfert et par suite sur les résultats d'étalonnage des microphones par la méthode de réciprocité, ne sont pas négligeables en regard de la précision recherchée, ce qui justifierait pleinement une révision de la norme concernant les modèles analytiques retenus pour représenter le champ de pression dans la cavité de couplage.

Reste que les modèles établis dans le chapitre 3 admettent certaines approximations, notamment concernant le profil de vitesse des membranes des microphones (supposé uniforme), qui conduisent à admettre que dans la cavité de couplage cylindrique le champ de pression est indépendant des coordonnées (r, θ) , ce qui, dans le cas présent où une grande précision est recherchée, peut se révéler réducteur et engendrer des erreurs significatives dans les étalonnages de microphones. Une modélisation plus fine du champ de pression dans la cavité de couplage, prenant en compte les modes supérieurs (essentiellement radiaux) ainsi que les effets des couches visqueuses et thermiques dans la cavité de couplage est donc proposée dans le chapitre 4. Ce travail de modélisation a permis d'établir une représentation du champ de pression dans la cavité de couplage qui repose sur la formulation intégrale du problème aux limites, tenant compte des modes supérieurs dans la cavité ainsi que des effets des couches limites viscothermiques par le choix d'une fonction de Green adaptée. Une telle modélisation permet, de plus, d'ouvrir la voie à la modélisation d'un système pour la mesure d'impédances de petits composants, mesure qui repose sur le même principe que celui de la méthode de réciprocité. Ce modèle, par ailleurs, rend parfaitement compte de la symétrie des rôles tenus par les deux microphones dans la cavité de couplage, ce qui est important car c'est sur cette symétrie que repose la méthode de réciprocité elle-même. Les résultats exposés à la fin du chapitre 4 montrent que les modes supérieurs peuvent avoir une influence non négligeable sur les résultats d'étalonnage.

Pour autant, ces résultats doivent être interprétés avec précaution car ce modèle soulève un problème fondamental qui est la modélisation du microphone électrostatique. En effet, le modèle établi dans le chapitre 4 repose sur l'hypothèse que les membranes des microphones ont un mouvement non uniforme et suppose connue la forme de leur profil de vitesse. En pratique, les déformées des membranes de microphones utilisés dans une cavité cylindrique ne sont connues

qu'avec une précision toute relative qui n'est sans doute pas suffisante dans le cas présent où une grande précision est recherchée. De plus, l'incidence de cette non-uniformité des déformées de membranes sur la transduction, et donc sur la notion même d'admittance acoustique de transfert et d'efficacité, est à l'heure actuelle inconnue. L'influence des modes supérieurs dans la cavité, telle qu'illustrée à la fin du chapitre 4, n'est alors peut-être pas très représentative de la réalité. Ainsi, une étude plus approfondie de la modélisation du microphone électrostatique prenant en compte le mouvement non-uniforme de la membrane devrait-il permettre de préciser ce point en terme de définition de l'efficacité du microphone et donc d'admittance acoustique de transfert.

Concernant l'extension de la méthode de réciprocité à une méthode de mesure fine des caractéristiques d'entrée de petits composants acoustiques, les deux modèles mentionnés précédemment pour la cavité de couplage avec, en parois, les impédances à caractériser, sont établis dans le chapitre 5. Une modélisation suppose la propagation d'ondes planes uniquement, l'autre tiens compte des modes supérieurs engendrés par le profil de vitesse non-uniforme des membranes de microphones (comportant donc les mêmes interrogations que celles soulevées dans le chapitre 4) et par la présence des petits composants acoustiques sur les parois de la cavité. Les premiers résultats présentés dans ce chapitre semblent montrer que l'influence des modes supérieurs est assez faible compte tenu des perturbations engendrées par la présence d'éléments acoustiques sur les parois de la cavité de couplage. Cependant, de même que pour le modèle développé dans le chapitre 4, un modèle plus précis des microphones devrait permettre de mieux caractériser l'influence des modes supérieurs dans la cavité. Par ailleurs, les premiers résultats expérimentaux présentés dans ce chapitre présentent une bonne concordance avec les résultats théoriques, ce qui indique que les modèles des éléments acoustiques placés en paroi de la cavité semblent représenter le comportement acoustique de ces éléments de façon réaliste. Cette comparaison entre théorie et pratique a permis en outre de montrer que l'admittance électrique de transfert entre les deux microphones mesurée sur ce dispositif est très sensible à des petites variations dans les dimensions des éléments acoustiques en paroi, ce qui laisse présager que la mise en place pratique d'une méthode de mesure fine de ces éléments acoustiques est tout à fait envisageable.

Les perspectives d'applications des résultats obtenus dans ce travail de thèse, qui doivent dans un premier temps conduire à la révision des normes actuellement en vigueur sur l'étalonnage des microphones par la méthode de réciprocité, ne se réduisent pas donc à ce seul domaine. Ces résultats portent l'espoir de mener à une méthode de mesure fine des caractéristiques d'entrée des petits composants acoustiques qui fait défaut à l'heure actuelle et de mener à terme à des ouvertures sur la métrologie des micro-composants acoustiques (attendus dans le cadre de la miniaturisation des capteurs). Par ailleurs, comme le souhaitait le LNE en initiant cette étude, ces résultats devraient permettre de caractériser finement les éléments constitutifs de l'oreille artificielle, ce qui devrait conduire à mettre au point une méthode d'étalonnage de ce dispositif et constituerait ainsi une avancée importante dans le domaine de l'audiométrie.

Enfin, des développements futurs portant sur de nouvelles modélisations de capteurs microphoniques, qui prendraient en compte les effets de déformées réalistes des membranes et corrélativement la répartition spatiale des mouvements acoustiques dans les micro-cavités et micro-conduits qui constituent ces capteurs, permettront aux modèles proposés de donner leur «pleine mesure» en terme de finesse de mesure et de caractérisations de capteurs et mini-composants acoustiques.

Annexe A

Dimensions normalisées pour les coupleurs acoustiques

Les figures et tableaux présentés dans cette annexe sont extraits de la norme CEI 61094-2 sur l'étalonnage en pression des microphones étalons de laboratoire [22].

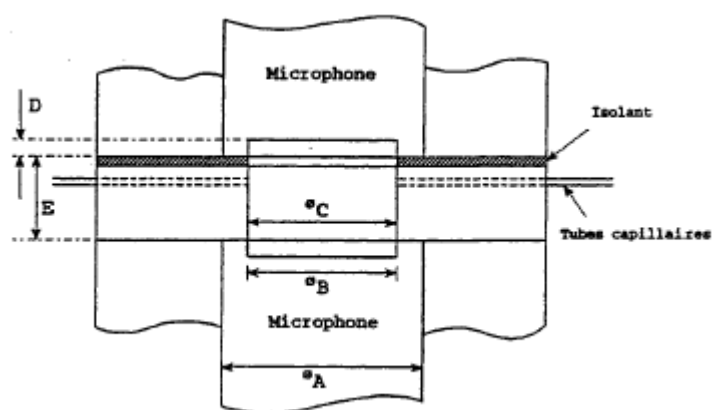


FIG. A.1 – Configuration mécanique des coupleurs «en ondes planes».

Dimensions (mm)	Types de microphones étalons		
Symbole	LS1P	LS2aP	LS2bP
$\varnothing A$	23,77	13,2	12,15
$\varnothing B$	18,6	9,3	9,8
$\varnothing C$	18,6	9,3	9,8
D	1,95	0,5	0,7
E	3,5–9,5	3–7	3,5 – 6

TAB. A.1 – Dimensions nominales pour les coupleurs «en ondes planes».

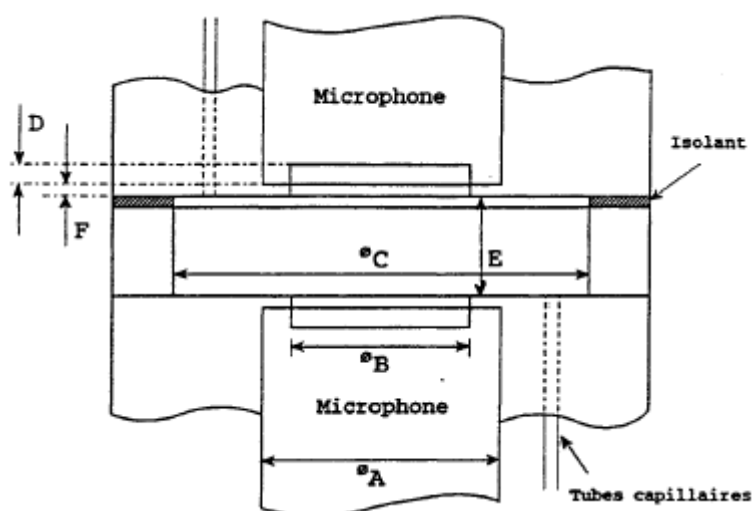


FIG. A.2 – Configuration mécanique des coupleurs «de grands volumes».

Dimensions (mm)	Types de microphones étalons		
Symbole	LS1P	LS2aP	LS2bP
$^{\circ}A$	23,77	13,2	12,15
$^{\circ}B$	18,6	9,3	9,8
$^{\circ}C$	$42,88 \pm 0,03$	$18,30 \pm 0,03$	$18,30 \pm 0,03$
D	1,95	0,5	0,7
E	$12,55 \pm 0,03$	$3,50 \pm 0,03$	$3,50 \pm 0,03$
F	$0,80 \pm 0,03$	$0,40 \pm 0,03$	$0,40 \pm 0,03$

TAB. A.2 – Dimensions nominales pour les coupleurs «de grands volumes».

Annexe B

Fiche synoptique de l'appareil de réciprocité

La fiche synoptique de l'appareil de réciprocité Brüel & Kjær type 5998 est extraite de la documentation technique de cet équipement [7].

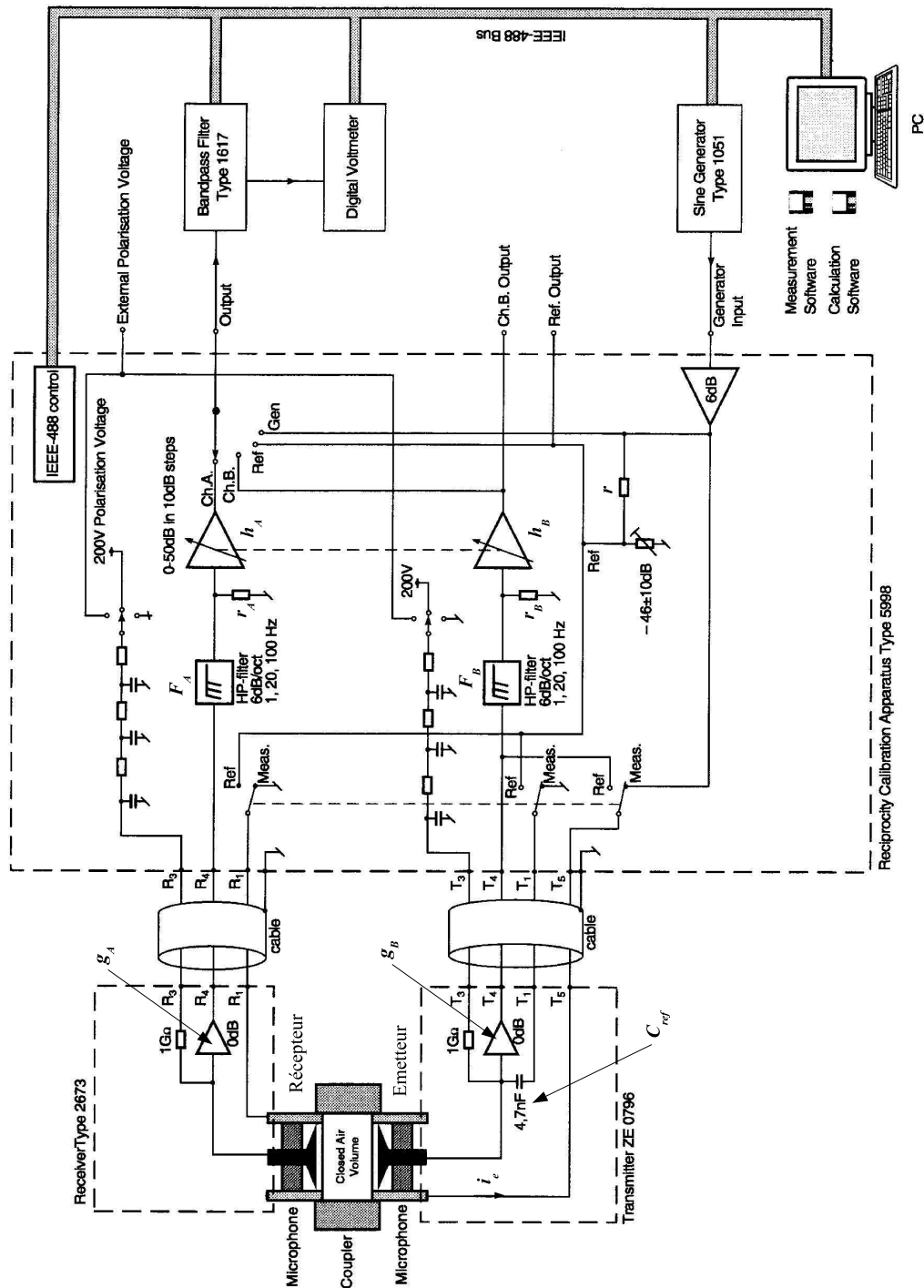


FIG. B.1 – Fonctionnement de l'appareil de réciprocité Br  l & Kj  r 5998 .

Annexe C

Comparaison entre les solutions de Gerber avec celle établie pour la «petite» cavité

Les deux problèmes posés dans les paragraphes 3.2 et 3.3 pour les champs thermique et acoustique couplés en cavité traités dans le chapitre 3 sont présentés de manières différentes suivant que le modèle repose sur ceux en usage dans le domaine de l'acoustique ou sur celui de Gerber [12] issu de la thermique. Le propos de cette annexe est de montrer que ces problèmes et leurs solutions sont bien équivalents en écrivant ces solutions sous forme d'un développement sur une même base de fonctions propres.

C.1 Problèmes traités

Dans le paragraphe 3.3, la solution proposée est issue de la résolution de l'équation de diffusion de la chaleur (3.3), le processus de diffusion trouvant son origine dans le champ de pression acoustique p , le champ de température τ_1 devant de surcroît satisfaire à des conditions aux limites de Dirichlet homogènes et des conditions initiales nulles :

$$\left(\frac{1}{c_0 \ell_h} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) \tau_1 = \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta}_\gamma} \frac{1}{c_0 \ell_h} \frac{\partial}{\partial t} p \quad \text{pour } \vec{r} \in \mathcal{D}, t > 0, \quad (\text{C.1a})$$

$$\tau_1 = 0 \quad \text{pour } \vec{r} \in \mathcal{S}, t > 0, \quad (\text{C.1b})$$

$$\tau_1 = 0 \quad \text{pour } \vec{r} \in \mathcal{D}, t = 0, \quad (\text{C.1c})$$

où $\mathcal{S}$ et $\mathcal{D}$ représentent respectivement la surface et le volume de la cavité considérée.

La résolution que propose Gerber dans son article [12] revient à écrire la solution pour le champ de température notée ici $\tau_2(\vec{r}, t)$ sous la forme du produit de convolution sur la variable t du champ de pression avec une fonction $g(\vec{r}, t)$:

$$\tau_2 = g *_{\vec{r}} \left(\frac{\gamma - 1}{\hat{\beta}_\gamma} \frac{\partial}{\partial t} p \right),$$

où la fonction $g(\vec{r}, t)$ doit satisfaire au problème (3.8) :

$$\left(\frac{1}{c_0 \ell_h} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) g = 0 \quad \text{pour } \vec{r} \in \mathcal{D}, t > 0, \quad (\text{C.2a})$$

$$g = 0 \quad \text{pour } \vec{r} \in \mathcal{S}, t > 0, \quad (\text{C.2b})$$

$$g = 1 \quad \text{pour } \vec{r} \in \mathcal{D}, t = 0. \quad (\text{C.2c})$$

Pour vérifier l'équivalence de ces deux présentations, il suffit de remarquer qu'elles sont l'une et l'autre des cas particuliers d'un même problème général, ces solutions particulières associées étant les mêmes. Le problème général considéré est donné par :

$$\left(\frac{1}{c_0 \ell_h} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) \tau_g(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t) \quad \text{pour } \vec{r} \in \mathcal{D}, t > 0, \quad (\text{C.3a})$$

$$\tau_g(\vec{r}, t) = 0 \quad \text{pour } \vec{r} \in \mathcal{S}, t > 0, \quad (\text{C.3b})$$

$$\tau_g(\vec{r}, t) = \tau_i(\vec{r}) \quad \text{pour } \vec{r} \in \mathcal{D}, t = 0. \quad (\text{C.3c})$$

Le problème aux valeurs propres associé est de la forme

$$(\Delta + k_m^2) \psi_m(\vec{r}) = 0 \quad \text{pour } \vec{r} \in \mathcal{D}, \quad (\text{C.4a})$$

$$\psi_m(\vec{r}) = 0 \quad \text{pour } \vec{r} \in \mathcal{S}. \quad (\text{C.4b})$$

La fonction $\tau_g(\vec{r}, t)$ peut alors être décomposée de la façon suivante

$$\tau_g(\vec{r}, t) = \sum_m \langle \psi_m | \tau_g \rangle \psi_m(\vec{r}), \quad (\text{C.5})$$

où $\langle \psi_m | \tau_g \rangle$ est la projection de τ_g sur le vecteur propre ψ_m :

$$\langle \psi_m | \tau_g \rangle = \iiint_{\mathcal{D}} \psi_m(\vec{r}) \tau_g(\vec{r}, t) d\vec{r}.$$

C.2 Solution du problème général

La projection de l'équation (C.3a) sur la base des vecteurs propres donne

$$\frac{1}{c_0 \ell_h} \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi_m | \tau_g \rangle - \langle \psi_m | \Delta \tau_g \rangle = \langle \psi_m | f \rangle,$$

où, en faisant usage du théorème de Green et compte tenu des conditions aux frontières (C.4b, C.3b) satisfaites par ψ_m et τ_g (conditions de Dirichlet homogènes),

$$\langle \psi_m | \Delta \tau_g \rangle = \langle \Delta \psi_m | \tau_g \rangle = -k_m^2 \langle \psi_m | \tau_g \rangle,$$

ce qui donne alors le problème projeté

$$\left(\frac{1}{c_0 \ell_h} \frac{\partial}{\partial t} + k_m^2 \right) \langle \psi_m | \tau_g \rangle = \langle \psi_m | f \rangle \quad \text{pour } t > 0, \quad (\text{C.6a})$$

$$\langle \psi_m | \tau_g \rangle = \langle \psi_m | \tau_i \rangle \quad \text{pour } t = 0, \quad (\text{C.6b})$$

dont la solution s'écrit

$$\langle \psi_m | \tau_g \rangle = e^{-c_0 \ell_h k_m^2 t} \left[\langle \psi_m | \tau_i \rangle + \int_0^t c_0 \ell_h e^{c_0 \ell_h k_m^2 t_0} \langle \psi_m | f \rangle dt_0 \right], \quad (\text{C.7})$$

ce qui donne l'expression de la fonction $\tau_g(\vec{r}, t)$:

$$\tau_g(\vec{r}, t) = \sum_m e^{-c_0 \ell_h k_m^2 t} \left[\langle \psi_m | \tau_i \rangle + \int_0^t c_0 \ell_h e^{c_0 \ell_h k_m^2 t_0} \langle \psi_m | f \rangle dt_0 \right] \psi_m(\vec{r}). \quad (C.8)$$

A noter que cette expression générale permet de retrouver la fonction de Green $G(\vec{r}, \vec{r}_0; t)$ du problème (C.1) en posant

$$f(\vec{r}, t) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(t) \quad \text{et} \quad \tau_i(\vec{r}) = 0,$$

ce qui donne

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0; t) = \sum_m c_0 \ell_h e^{-c_0 \ell_h k_m^2 t} \psi_m(\vec{r}_0) \psi_m(\vec{r}). \quad (C.9)$$

C.3 Equivalence des solutions

La solution τ_1 du problème (C.1) est déduite de la solution générale τ_g (C.8) en posant

$$f(\vec{r}, t) = \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta}\gamma} \frac{1}{c_0 \ell_h} \frac{\partial}{\partial t} p(t) \quad \text{et} \quad \tau_i(\vec{r}) = 0,$$

ce qui donne, du fait que le champ de pression est uniforme dans la cavité,

$$\tau_1 = \sum_m e^{-c_0 \ell_h k_m^2 t} \psi_m(\vec{r}) \langle \psi_m \rangle \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta}\gamma} \int_0^t e^{c_0 \ell_h k_m^2 t_0} \frac{\partial}{\partial t_0} p(t_0) dt_0, \quad (C.10)$$

où $\langle \psi_m \rangle = \iiint_{\mathcal{D}} \psi_m(\vec{r}) d\vec{r}$.

La solution $g(\vec{r}, t)$ du problème (C.2) résolu par Gerber est déduite de la solution générale τ_g (C.8) en posant

$$f(\vec{r}, t) = 0 \quad \text{et} \quad \tau_i(\vec{r}) = 1,$$

ce qui donne

$$g(\vec{r}, t) = \sum_m e^{-c_0 \ell_h k_m^2 t} \psi_m(\vec{r}) \langle \psi_m \rangle. \quad (C.11)$$

La solution pour le champ de température instantanée τ_2 est alors écrite

$$\begin{aligned} \tau_2(\vec{r}, t) &= g *_t \left(\frac{\gamma - 1}{\hat{\beta}\gamma} \frac{\partial}{\partial t} p \right) = \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta}\gamma} \int_0^t g(\vec{r}, t - t_0) \frac{\partial}{\partial t_0} p(t_0) dt_0 \\ &= \sum_m e^{-c_0 \ell_h k_m^2 t} \psi_m(\vec{r}) \langle \psi_m \rangle \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta}\gamma} \int_0^t e^{c_0 \ell_h k_m^2 t_0} \frac{\partial}{\partial t_0} p dt_0. \end{aligned} \quad (C.12)$$

Les solutions τ_1 et τ_2 des deux problèmes admettent la même décomposition sur la base des vecteurs propres ψ_m : elles sont donc identiques.

Ainsi, les solutions calculées par Gerber dans le paragraphe 3.2 sont aussi solutions du problème résolu dans le paragraphe 3.3 («petite» cavité).

REMARQUE.— La solution (C.11) du problème (C.2) représente très bien une fonction de Green. Elle est en effet également solution du problème

$$\left(\frac{1}{c_0 \ell_h} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) g(\vec{r}, t) = \frac{1}{c_0 \ell_h} \delta(t) \quad \text{pour } \vec{r} \in \mathcal{D}, t > 0, \quad (\text{C.13a})$$

$$g(\vec{r}, t) = 0 \quad \text{pour } \vec{r} \in \mathcal{S}, t > 0, \quad (\text{C.13b})$$

comme il est facile de le vérifier en écrivant, dans la solution générale (C.8), $\tau_i = 0$ et $f = \frac{1}{c_0 \ell_h} \delta(t)$.

Annexe D

Corrections thermiques pour différentes formes de cavités (Gerber)

Cette annexe présente les solutions trouvées par Gerber au problème (3.8) pour différentes formes de cavité. Les solutions sont données pour chaque cas sous la forme d'un développement modal et sous une forme «exacte». L'ensemble de ces solutions est récapitulé dans le tableau D.1.

D.1 Sphère

Le domaine $\mathcal{D}$ est une sphère de rayon a aux parois rigides. En admettant une symétrie sphérique, le problème (3.8) s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} \right) g = 0 \quad \text{pour } r \in (0, a), t > 0, \quad (\text{D.1a})$$

$$g = 0 \quad \text{pour } r = a, t > 0, \quad (\text{D.1b})$$

$$g = 1 \quad \text{pour } r \in (0, a), t = 0. \quad (\text{D.1c})$$

D.1.1 Développement modal

La solution du problème (D.1) s'écrit sous la forme

$$g(r, t) = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(A_n e^{j \frac{n\pi r}{a}} + B_n e^{-j \frac{n\pi r}{a}} \right) \exp \frac{-\sigma n^2 \pi^2 t}{a^2},$$

qui donne, compte tenu de ce que g reste fini en $r = 0$ ($A_n = -B_n$)

$$g(r, t) = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin \frac{n\pi r}{a} \exp \frac{-\sigma n^2 \pi^2 t}{a^2}. \quad (\text{D.2})$$

La solution doit satisfaire à la condition initiale (D.1c)

$$g(r, 0) = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin \frac{n\pi r}{a} = 1,$$

qui donne, compte tenu de l'orthogonalité des fonctions $\sin \frac{n\pi r}{a}$,

$$a_n = -\frac{2a}{n\pi} (-1)^n. \quad (\text{D.3})$$

La fonction $g(r, t)$ s'écrit donc

$$g(r, t) = -\frac{2a}{\pi r} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi r}{a} e^{\frac{-\sigma n^2 \pi^2 t}{a^2}}, \quad (\text{D.4})$$

ce qui donne pour τ (3.23),

$$\tau(\vec{r}, t) = g *_t \frac{\partial \theta_g}{\partial t}, \quad (\text{D.5})$$

où $\theta_g = \frac{\gamma-1}{\hat{\beta}\gamma} p_g$ (3.9). La valeur moyenne de τ sur le domaine $\mathcal{D}$ s'écrit, compte tenu de ce que $\theta_g(t)$ est uniforme dans $\mathcal{D}$,

$$\langle \tau \rangle = \langle g \rangle *_t \frac{\partial \theta_g}{\partial t},$$

soit, dans le domaine de Fourier,

$$\langle \tau \rangle = j\omega \langle g(\omega) \rangle \theta_g(\omega) = j\omega \frac{\gamma-1}{\hat{\beta}\gamma} p_g \langle g \rangle.$$

La moyenne spatiale sur le volume V de la réponse impulsionnelle $\langle g \rangle$ dans le domaine de Fourier donne, d'après (D.4),

$$\langle g \rangle = \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{j\omega + \frac{n^2 \pi^2}{9} \frac{A^2}{V^2} \sigma},$$

où le rapport surface / volume vaut $A/V = 3/a$. La moyenne $\langle \tau \rangle$ de τ sur le volume V s'écrit alors, dans le domaine de Fourier,

$$\langle \tau \rangle = \frac{\gamma-1}{\hat{\beta}\gamma} p_g \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{n^2} \frac{1}{1 + \frac{n^2 \pi^2}{9} X^2}, \quad (\text{D.6})$$

où X est donné par ($\sigma = c_0 \ell_h$)

$$X^2 = \frac{A^2}{V^2} \frac{c_0 \ell_h}{j\omega}.$$

D.1.2 Solution à court terme par transformée de Laplace

Soit $g_L = 1 - g$, le problème (D.1) donne alors :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} \right) g_L = 0 \quad \text{pour } r \in (0, a), t > 0, \quad (\text{D.7a})$$

$$g_L = 1 \quad \text{pour } r = a, t > 0, \quad (\text{D.7b})$$

$$g_L = 0 \quad \text{pour } r \in (0, a), t = 0, \quad (\text{D.7c})$$

soit, dans le domaine de Laplace

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - q^2 \right) T_L = 0 \quad \text{pour } r \in (0, a), \quad (\text{D.8a})$$

$$T_L = \frac{1}{s} \quad \text{pour } r = a, \quad (\text{D.8b})$$

où $G_L(r, s)$ est la transformée de Laplace de $g_L(r, t)$, s est la variable de Laplace et $q^2 = s/\sigma$.

La solution de ce problème s'écrit

$$G_L = \frac{1}{s} \frac{a}{r} \frac{\sinh qr}{\sinh qa}. \quad (\text{D.9})$$

La valeur moyenne $\langle G_L \rangle$ de G_L sur le volume V s'écrit

$$\langle G_L \rangle = \frac{3}{sqa} \left[\frac{\cosh qa}{\sinh qa} - \frac{1}{qa} \right].$$

Cette expression peut être développée de la façon suivante

$$\langle G_L \rangle \approx \frac{3}{sqa} \left[1 - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{-nqa} \right] - \frac{3}{sq^2 a^2}, \quad (\text{D.10})$$

si qa n'est pas petit.

En appliquant les transformées de Laplace inverses (29.3.85) et (29.3.5) de la référence [1] rappelées dans l'annexe E, la valeur moyenne $\langle g_L \rangle$ de g_L sur le volume V donne

$$\langle g_L \rangle \approx \frac{3}{a} (\sigma t)^{1/2} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \text{ierfc} \frac{na}{2\sqrt{\sigma t}} \right] - \frac{3}{a^2} \sigma t + O((\sigma t)^2), \quad (\text{D.11})$$

où ierfc désigne l'intégrale de la fonction d'erreur définie par

$$\text{ierfc } x = \int_x^\infty \text{erfc } t \, dt, \quad \text{avec } \text{erfc } x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt.$$

La solution $\langle g \rangle$ du problème (D.1) est déduite de celle du problème (D.8) par la relation $g = 1 - g_L$, en négligeant les termes en ierfc ,

$$\langle g \rangle \approx 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\sigma t)^{1/2} \frac{A}{V} + \frac{1}{3} \sigma t \frac{A^2}{V^2} + O((\sigma t)^2). \quad (\text{D.12})$$

L'expression de la valeur moyenne $\langle \tau \rangle$ de τ sur la volume V

$$\langle \tau \rangle = \langle g \rangle * \frac{\partial \theta_g}{\partial t},$$

donne, dans le domaine de Fourier,

$$\langle \tau \rangle = j\omega \langle g(\omega) \rangle \theta_g(\omega) = j\omega \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta}\gamma} p_g \langle g(\omega) \rangle.$$

La valeur moyenne $\langle \tau \rangle$ s'écrit alors, dans le domaine de Fourier,

$$\langle \tau \rangle \approx \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta}\gamma} p_g \left[1 - X + \frac{3}{4} \frac{1}{3} X^2 + O(X^4) \right]. \quad (\text{D.13})$$

D.2 Boîte «infinie»

Le domaine d'étude est ici l'espace contenu entre deux plans parallèles situés en $z = 0$ et $z = \ell$. La diffusion étant uniquement longitudinale, le problème (3.8) s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} \right) g = 0 \quad \text{pour } z \in (0, \ell), t > 0, \quad (\text{D.14a})$$

$$g = 0 \quad \text{pour } z = 0 \text{ ou } \ell, t > 0, \quad (\text{D.14b})$$

$$g = 1 \quad \text{pour } z \in (0, \ell), t = 0. \quad (\text{D.14c})$$

Les solutions de ce problème sont données par

$$g(z, t) = \psi(z, t),$$

la fonction $\psi(z, t)$ étant définie dans le paragraphe 3.2.3 comme la solution du problème (3.16). La moyenne sur le volume V de la fonction g s'écrit donc, d'après (3.21),

$$\langle g \rangle = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n + 1/2)^2} \exp - (n + 1/2)^2 \pi^2 \frac{A^2}{V^2} \sigma t, \quad (\text{D.15})$$

où le rapport A/V vaut $2/\ell$, soit dans le domaine de Fourier,

$$\langle g \rangle = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n + 1/2)^2} \frac{1}{j\omega + (n + 1/2)^2 \pi^2 \frac{A^2}{V^2} \sigma}, \quad (\text{D.16})$$

ce qui donne pour la l'écart instantané de température τ ,

$$\begin{aligned} \langle \tau \rangle &= j\omega \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta}\gamma} p_g \langle g \rangle \\ &= \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n + 1/2)^2} \frac{1}{1 + (n + 1/2)^2 \pi^2 X^2}, \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

où X est donné par ($\sigma = c_0 \ell_h$)

$$X^2 = \frac{A^2}{V^2} \frac{c_0 \ell_h}{j\omega}.$$

La solution à court terme par transformée de Laplace de la valeur moyenne $\langle g \rangle$ est donné d'après l'expression (3.37),

$$\langle g \rangle = 1 - \frac{2}{\ell} (\sigma t)^{1/2} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \text{ierfc } n \frac{\ell}{2} \frac{1}{(\sigma t)^{1/2}} \right], \quad (\text{D.18})$$

ce qui permet de déduire $\langle \tau \rangle$, en négligeant le terme en ierfc ,

$$\langle \tau \rangle \approx \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta}\gamma} p_g (1 - X). \quad (\text{D.19})$$

D.3 Cylindre semi-infini

Le domaine d'étude est un cylindre infini de rayon a . Compte tenu de la symétrie cylindrique du domaine d'étude, le problème (3.8) s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} \right) g = 0 \quad \text{pour } r \in (0, a), t > 0, \quad (\text{D.20a})$$

$$g = 0 \quad \text{pour } r = a, t > 0, \quad (\text{D.20b})$$

$$g = 1 \quad \text{pour } r \in (0, a), t = 0, \quad (\text{D.20c})$$

De même que précédemment, les solutions de ce problème sont données par

$$g(r, t) = \varphi(r, t),$$

la fonction $\varphi(r, t)$ étant définie dans le paragraphe 3.2.3 comme la solution du problème (3.15). La moyenne sur le volume V de la fonction g s'écrit donc, d'après (3.20),

$$\langle g \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\lambda_n^2} \exp \frac{-\lambda_n^2}{a^2} \frac{A^2}{V^2} \sigma t, \quad (\text{D.21})$$

où le rapport A/V vaut $2/a$, soit dans le domaine de Fourier,

$$\langle g \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\lambda_n^2} \frac{1}{j\omega + \frac{\lambda_n^2}{a^2} \frac{A^2}{V^2} \sigma}, \quad (\text{D.22})$$

ce qui donne pour la l'écart instantané de température τ ,

$$\begin{aligned} \langle \tau \rangle &= j\omega \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta}\gamma} p_g \langle g \rangle \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\lambda_n^2} \frac{1}{1 + \frac{\lambda_n^2}{a^2} X^2}, \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

où X est donné par ($\sigma = c_0 \ell_h$)

$$X^2 = \frac{A^2}{V^2} \frac{c_0 \ell_h}{j\omega}.$$

La solution à court terme par transformée de Laplace de la valeur moyenne $\langle g \rangle$ est donné d'après l'expression (3.31),

$$\langle g \rangle \approx 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{A}{V} (\sigma t)^{1/2} + \frac{1}{4} \frac{A^2}{V^2} \sigma t + \frac{1}{24\sqrt{\pi}} \frac{A^3}{V^3} (\sigma t)^{3/2}, \quad (\text{D.24})$$

ce qui permet de déduire la valeur moyenne $\langle \tau \rangle$

$$\langle \tau \rangle \approx \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta}\gamma} p_g \left[1 - X + \frac{1}{4} X^2 + \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \frac{1}{24\sqrt{\pi}} X^3 \right]. \quad (\text{D.25})$$

D.4 Parallélépipède

Le domaine d'étude $\mathcal{D}$ est un parallélépipède de dimensions ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z . Le rapport volume / surface vaut

$$\frac{V}{A} = \frac{2}{1/\ell_x + 1/\ell_y + 1/\ell_z},$$

et les rapports R_1 et R_2 sont définis par

$$R_1 = \frac{\ell_x}{\ell_y} \quad \text{et} \quad R_2 = \frac{\ell_x}{\ell_z}.$$

Le problème (3.8) en coordonnées cartésiennes s'écrit

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} \right) g = 0 \quad (\text{D.26a})$$

pour $x \in (0, \ell_x)$, $y \in (0, \ell_y)$, $z \in (0, \ell_z)$ et $t > 0$,

$$g = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ ou } \ell_x, y = 0 \text{ ou } \ell_y, z = 0 \text{ ou } \ell_z, t > 0, \quad (\text{D.26b})$$

$$g = 1 \text{ pour } x \in (0, \ell_x), y \in (0, \ell_y), z \in (0, \ell_z), t = 0. \quad (\text{D.26c})$$

La solution g est cherchée sous la forme d'une fonction à variables séparées :

$$g(x, y, z, t) = \psi_x(x, t) \psi_y(y, t) \psi_z(z, t),$$

où $\psi_x(x, t)$, $\psi_y(y, t)$ et $\psi_z(z, t)$ sont des solutions du problème (3.16) pour lesquelles l'axe de diffusion est respectivement x , y et z .

D.4.1 Développement modal

La valeur moyenne sur le volume V des fonctions ψ_x , ψ_y et ψ_z sont données par le développement modale (3.21) :

$$\langle \psi_{x,y,z} \rangle = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n + 1/2)^2} \exp \left[-(n + 1/2)^2 \pi^2 \frac{4}{\ell_{x,y,z}^2} \sigma t \right]. \quad (\text{D.27})$$

Le produit des $\psi_{x,y,z}$ donne alors l'expression de g . La valeur moyenne sur le volume V de g s'écrit alors, tous calculs faits,

$$\langle g \rangle = \frac{8}{\pi^6} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(m + 1/2)^2 (n + 1/2)^2 (p + 1/2)^2} e^{-\pi^2 \frac{A^2}{V^2} \sigma t} \exp \frac{(m + 1/2)^2 + (n + 1/2)^2 R_1^2 + (p + 1/2)^2 R_2^2}{(1 + R_1 + R_2)^2}, \quad (\text{D.28})$$

soit dans le domaine de Fourier,

$$\begin{aligned} \langle g \rangle &= \frac{8}{\pi^6} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+1/2)^2 (n+1/2)^2 (p+1/2)^2} \\ &\quad \frac{1}{j\omega + \pi^2 \frac{A^2}{V^2} \frac{(m+1/2)^2 + (n+1/2)^2 R_1^2 + (p+1/2)^2 R_2^2}{(1+R_1+R_2)^2} \sigma}, \end{aligned} \quad (\text{D.29})$$

ce qui donne pour $\langle \tau \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \tau \rangle &= \frac{\gamma-1}{\hat{\beta}\gamma} p_g \frac{8}{\pi^6} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+1/2)^2 (n+1/2)^2 (p+1/2)^2} \\ &\quad \frac{1}{1 + \pi^2 \frac{(m+1/2)^2 + (n+1/2)^2 R_1^2 + (p+1/2)^2 R_2^2}{(1+R_1+R_2)^2} X^2}. \end{aligned} \quad (\text{D.30})$$

D.4.2 Solution à court terme par transformée de Laplace

De même que pour la solution modale, la solution à court terme par transformée de Laplace est déduite du développement (3.37). Les valeurs moyennes $\langle \psi_{x,y,z} \rangle$ s'écrivent

$$\langle \psi_{x,y,z} \rangle \approx 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{2}{\ell_{x,y,z}} (\sigma t)^{1/2}. \quad (\text{D.31})$$

Le produit des $\psi_{x,y,z}$ donne alors la valeur moyenne de $\langle g \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle g \rangle &\approx 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\sigma t)^{1/2} \frac{A}{V} + \frac{4(R_1 + R_2 + R_1 R_2)}{\pi(1 + R_1 + R_2)^2} \sigma t \frac{A^2}{V^2} \\ &\quad + \frac{-8R_1 R_2}{\pi^{3/2}(1 + R_1 + R_2)^3} (\sigma t)^{3/2} \frac{A^3}{V^3}, \end{aligned} \quad (\text{D.32})$$

ce qui donne pour la valeur moyenne $\langle \tau \rangle$,

$$\langle \tau \rangle \approx \frac{\gamma-1}{\hat{\beta}\gamma} p_g \left[1 - X + \frac{4(R_1 + R_2 + R_1 R_2)}{\pi(1 + R_1 + R_2)^2} X^2 + \frac{-8R_1 R_2}{\pi^{3/2}(1 + R_1 + R_2)^3} X^3 \right]. \quad (\text{D.33})$$

D.5 Solution générale pour la température

L'expression de la valeur moyenne $\langle \tau \rangle$ peut être écrite, dans le domaine de Fourier, sous la forme générale (§ 3.2.3) :

$$\langle \tau \rangle = \theta_g(\omega) E_P, \quad (\text{D.34})$$

où E_P vaut

$$E_P = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{DN_n}{M_n X^2} , \quad (\text{D.35})$$

ou bien

$$E_P = 1 - X + G_1 X^2 + \frac{3}{4} \sqrt{\pi} G_2 X^3 , \quad (\text{D.36})$$

où les termes D , n_0 , N_n , M_n , G_1 et G_2 dépendent de la géométrie du domaine. L'indice n peut représenter plusieurs indices.

Le tableau D.1 donne les valeurs de ces différentes variables pour plusieurs géométries du domaine d'étude.

Géométrie	D	n_0	N_n	M_n	G_1	G_2
Sphère	$6/\pi^2$	1	$\frac{1}{n^2}$	$\frac{n^2 \pi^2}{9}$	$\frac{1}{3}$	...
Boîte infinie	$2/\pi^2$	0	$\frac{1}{(n+1/2)^2}$	$(n+1/2)^2 \pi^2$	...	...
Tube infini	4	1	$\frac{1}{\lambda_n^2}$	$\frac{\lambda_n^2}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24\sqrt{\pi}}$
Tube fermé	$8/\pi^2$	(0,1)	$\frac{1}{\lambda_n^2 (m+1/2)^2}$	$\frac{(m+1/2)^2 \pi^2 + \lambda_n^2 R}{(2R+1)^2}$	$\frac{8R + \pi R^2}{\pi(2R+1)^2}$	$\frac{R^3 - 6R^2}{3\sqrt{\pi}(2R+1)^3}$
Parallélépipède	$8/\pi^6$	(0,0,0)	N_{mnp}^*	M_{mnp}^{**}	$\frac{4(R_1 + R_2 + R_1 R_2)}{\pi(1 + R_1 + R_2)^2}$	$\frac{-8R_1 R_2}{\pi^{3/2}(1 + R_1 + R_2)^3}$
* $N_{mnp} = \frac{1}{(m+1/2)^2 (n+1/2)^2 (p+1/2)^2}$			** $M_{mnp} = \pi^2 \frac{(m+1/2)^2 + (n+1/2)^2 R_1^2 + (p+1/2)^2 R_2^2}{(1 + R_1 + R_2)^2}$			

TAB. D.1 – Valeurs de différentes constantes selon la géométrie du domaine d'étude.

Annexe E

Propriétés utiles des fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel utilisées ici sont les fonctions de Bessel et fonctions de Bessel modifiées cylindriques de première espèce.

E.1 Définitions

La fonction $J_\nu(z)$, avec $z \in \mathbb{C}$, est la fonction de Bessel cylindrique de première espèce d'ordre ν , solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial f}{\partial z} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) f = 0. \quad (\text{E.1})$$

La fonction $I_\nu(z)$, avec $z \in \mathbb{C}$, désigne la fonction de Bessel cylindrique modifiée de première espèce d'ordre ν solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial f}{\partial z} - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right) f = 0. \quad (\text{E.2})$$

E.2 Relations de dérivation et d'intégration

Soit deux fonctions de Bessel quelconques $Z_\nu(z)$ et $B_\nu(z)$ d'ordre ν , ces fonction possèdent les propriétés d'intégration suivantes [13, 5.52.1, 5.54.1 et 2]

$$\int z^{\nu+1} Z_\nu(z) \, dz = z^{\nu+1} Z_{\nu+1}(z), \quad (\text{E.3})$$

$$\int z Z_\nu(az) B_\nu(bz) \, dz = \frac{bz Z_\nu(az) B_{\nu-1}(bz) - az Z_{\nu-1}(az) B_\nu(bz)}{a^2 - b^2}, \quad (\text{E.4})$$

$$\int z [Z_\nu(az)]^2 \, dz = \frac{z^2}{2} [[Z_\nu(az)]^2 - Z_{\nu-1}(az) Z_{\nu+1}(az)]. \quad (\text{E.5})$$

La fonction de Bessel $Z_\nu(z)$ possède en outre la propriété suivante [13, 8.471.3]

$$\frac{\partial^n}{\partial z} (z^\nu Z_\nu(x)) = z^\nu Z_{\nu-n}(z). \quad (\text{E.6})$$

E.3 Développements asymptotiques

Le développement asymptotique de la fonction de Bessel modifiée $I_\nu(z)$ s'écrit [2, § 7.5.27]

$$I_\nu(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left[1 - \frac{4\nu^2 - 1^2}{1!8z} + \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2)}{2!(8z)^2} - \dots \right] + \frac{e^{-z \pm j\pi(\nu+1/2)}}{\sqrt{2\pi z}} \left[1 + \frac{4\nu^2 - 1^2}{1!8z} + \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2)}{2!(8z)^2} + \dots \right]. \quad (\text{E.7})$$

D'autre part, le développement asymptotique de la fonction de Bessel $J_\nu(z)$ s'écrit [2, § 7.5.16]

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} [P_\nu(z) \cos \varphi - Q_\nu(z) \sin \varphi], \quad (\text{E.8})$$

avec

$$P_\nu(z) \approx 1 - \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2)}{2!(8z)^2} + \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2)(4\nu^2 - 5^2)(4\nu^2 - 7^2)}{4!(8z)^4} - \dots, \quad (\text{E.9a})$$

$$Q_\nu(z) \approx \frac{4\nu^2 - 1^2}{1!8z} - \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2)(4\nu^2 - 5^2)}{3!(8z)^3} + \dots, \quad (\text{E.9b})$$

$$\varphi = z - (\nu + 1/2)\pi/2. \quad (\text{E.9c})$$

Le développement (E.8) peut aussi s'écrire

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} [e^{j\varphi} [P_\nu(z) + j Q_\nu(z)] + e^{-j\varphi} [P_\nu(z) - j Q_\nu(z)]] ,$$

soit

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \left[e^{jz} e^{-j(\nu+1/2)\frac{\pi}{2}} A_\nu(z) + e^{-jz} e^{j(\nu+1/2)\frac{\pi}{2}} B_\nu(z) \right], \quad (\text{E.10})$$

où

$$A_\nu(z) = P_\nu(z) + j Q_\nu(z) \quad \text{et} \quad B_\nu(z) = P_\nu(z) - j Q_\nu(z).$$

E.4 Développement asymptotique de K_h dans le cas d'un tube «large»

Soit un tube de rayon a , le terme K_h s'écrit (2.18)

$$K_h = \frac{2}{k_h a} \frac{J_1(k_h a)}{J_0(k_h a)}, \quad (\text{E.11})$$

où

$$k_h a = \frac{1-j}{\sqrt{2}} \sqrt{k_0/\ell_h} a.$$

Soit $z = k_h a$, z peut alors être écrit sous la forme $z = (1 - j)\alpha$ et l'expression (E.10) donne donc

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \left[e^\alpha e^{j\alpha} e^{-j(\nu+1/2)\frac{\pi}{2}} A_n(z) + e^{-\alpha} e^{-j\alpha} e^{j(\nu+1/2)\frac{\pi}{2}} B_n(z) \right]. \quad (\text{E.12})$$

Comme α est grand, l'exponentielle $e^{-\alpha}$ est petite et l'expression (E.12) devient

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^\alpha e^{j\alpha} e^{-j(\nu+1/2)\frac{\pi}{2}} [P_\nu(z) + j Q_\nu(z)],$$

soit, à l'ordre 5/2

$$J_\nu(z) = \frac{e^{jz}}{\sqrt{2\pi z}} e^{-j(\nu+1/2)\frac{\pi}{2}} \left[1 - \frac{4\nu^2 - 1^2}{1!8jz} + \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2)}{2!(8jz)^2} \right]. \quad (\text{E.13})$$

Ainsi les fonctions de Bessel $J_0(z)$ et $J_1(z)$ s'écrivent

$$J_0(z) = \frac{e^{jz}}{\sqrt{2\pi z}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \left[1 + \frac{1}{8jz} + \frac{9}{128(jz)^2} \right], \quad (\text{E.14})$$

et

$$J_1(z) = -j \frac{e^{jz}}{\sqrt{2\pi z}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \left[1 - \frac{3}{8jz} - \frac{15}{128(jz)^2} \right]. \quad (\text{E.15})$$

En reportant ces développements, où $z = k_h R$, dans l'expression de K_h , il vient

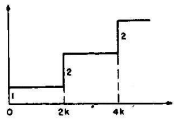
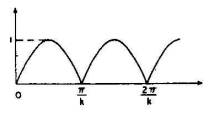
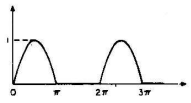
$$K_h = \frac{2}{j k_h R} \left(1 - \frac{1}{2j k_h R} - \frac{1}{8(j k_h R)^2} \right). \quad (\text{E.16})$$

L'expression de K_v est la même que celle de K_h en remplaçant k_h par k_v .

Annexe F

Table des transformées de Laplace

	$f(s)$		$F(t)$
29.3.3	$\frac{1}{s^n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$		$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
29.3.4	$\frac{1}{\sqrt{s}}$		$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
29.3.5	$s^{-3/2}$		$2\sqrt{t/\pi}$
29.3.6	$s^{-(n+1/2)} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$		$\frac{2^n t^{n-1/2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \sqrt{\pi}}$
29.3.7	$\frac{\Gamma(k)}{s^k} \quad (k > 0)$	6	t^{k-1}
29.3.8	$\frac{1}{s+a}$		e^{-at}
29.3.9	$\frac{1}{(s+a)^2}$		te^{-at}
29.3.10	$\frac{1}{(s+a)^n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$		$\frac{t^{n-1} e^{-at}}{(n-1)!}$
29.3.11	$\frac{\Gamma(k)}{(s+a)^k} \quad (k > 0)$	6	$t^{k-1} e^{-at}$
29.3.12	$\frac{1}{(s+a)(s+b)} \quad (a \neq b)$		$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$
29.3.13	$\frac{s}{(s+a)(s+b)} \quad (a \neq b)$		$\frac{ae^{-at} - be^{-bt}}{a-b}$
29.3.14	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$ (a, b, c distinct constants)		$-\frac{(b-c)e^{-at} + (c-a)e^{-bt} + (a-b)e^{-ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$
29.3.15	$\frac{1}{s^2+a^2}$		$\frac{1}{a} \sin at$
29.3.16	$\frac{s}{s^2+a^2}$		$\cos at$
29.3.17	$\frac{1}{s^2-a^2}$		$\frac{1}{a} \sinh at$
29.3.18	$\frac{s}{s^2-a^2}$		$\cosh at$
29.3.19	$\frac{1}{s(s^2+a^2)}$		$\frac{1}{a^2} (1 - \cos at)$
29.3.20	$\frac{1}{s^2(s^2+a^2)}$		$\frac{1}{a^3} (at - \sin at)$
29.3.21	$\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$		$\frac{1}{2a^3} (\sin at - at \cos at)$

	$f(s)$	$F(t)$	
29.3.72	$\frac{1}{s} \coth ks$	$u(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} u(t-2nk)$	
29.3.73	$\frac{k}{s^2+k^2} \coth \frac{\pi s}{2k}$	$ \sin kt $	
29.3.74	$\frac{1}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u(t-n\pi) \sin t$	
29.3.75	$\frac{1}{s} e^{-\frac{k}{s}}$	$J_0(2\sqrt{kt})$	9
29.3.76	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos 2\sqrt{kt}$	
29.3.77	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cosh 2\sqrt{kt}$	
29.3.78	$\frac{1}{s^{3/2}} e^{-\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi k}} \sin 2\sqrt{kt}$	
29.3.79	$\frac{1}{s^{3/2}} e^{\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi k}} \sinh 2\sqrt{kt}$	
29.3.80	$\frac{1}{s^\mu} e^{-\frac{k}{s}} \quad (\mu > 0)$	$\left(\frac{t}{k}\right)^{\frac{\mu-1}{2}} J_{\mu-1}(2\sqrt{kt})$	9
29.3.81	$\frac{1}{s^\mu} e^{\frac{k}{s}} \quad (\mu > 0)$	$\left(\frac{t}{k}\right)^{\frac{\mu-1}{2}} I_{\mu-1}(2\sqrt{kt})$	9
29.3.82	$e^{-k\sqrt{s}} \quad (k > 0)$	$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}} \exp\left(-\frac{k^2}{4t}\right)$	
29.3.83	$\frac{1}{s} e^{-k\sqrt{s}} \quad (k \geq 0)$	$\operatorname{erfc} \frac{k}{2\sqrt{t}}$	7
29.3.84	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-k\sqrt{s}} \quad (k \geq 0)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{k^2}{4t}\right)$	
29.3.85	$\frac{1}{s^{3/2}} e^{-k\sqrt{s}} \quad (k \geq 0)$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left(-\frac{k^2}{4t}\right) - k \operatorname{erfc} \frac{k}{2\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} i \operatorname{erfc} \frac{k}{2\sqrt{t}}$	7
29.3.86	$\frac{1}{s^{1+i^n}} e^{-k\sqrt{s}} \quad (n=0, 1, 2, \dots; k \geq 0)$	$(4t)^{1/2} i^n \operatorname{erfc} \frac{k}{2\sqrt{t}}$	7
29.3.87	$\frac{n-1}{s^{n/2}} e^{-k\sqrt{s}} \quad (n=0, 1, 2, \dots; k > 0)$	$\frac{\exp\left(-\frac{k^2}{4t}\right)}{2^n \sqrt{\pi t^{n+1}}} H_n\left(\frac{k}{2\sqrt{t}}\right)$	22
29.3.88	$\frac{e^{-k\sqrt{s}}}{a+\sqrt{s}} \quad (k \geq 0)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{k^2}{4t}\right) - a e^{ak} e^{a^2 t} \operatorname{erfc}\left(a\sqrt{t} + \frac{k}{2\sqrt{t}}\right)$	7

*See page II.

Annexe G

Propagation d'ondes quasi-planes

Cette annexe est un complément du paragraphe 3.4 sur la propagation d'ondes planes. La composante radiale de l'onde y est conservée, la propagation est supposée être celle d'ondes quasi-planes. Les résultats trouvés ici sont les mêmes que ceux trouvés dans le paragraphe 3.4, ce qui permet de justifier les approximations qui y ont été faites.

Dans un premier temps, les équations de propagation de l'acoustique linéaire sont écrites dans un domaine $\mathcal{D}$ quelconque (§ G.1). Elles sont ensuite résolues dans le cas d'un cylindre fermé à ses extrémités par deux microphones d'admittances respectives Y_e et Y_r , l'un des microphones étant animé d'un mouvement de vitesse v_e (§ G.3), ceci dans le but de déterminer l'admittance acoustique de transfert du système (§ G.4).

G.1 Equations de propagation de l'acoustique linéaire

Les équations linéaires homogènes gouvernant le mouvement du fluide sont celles données dans le paragraphe 3.1 :

$$\frac{1}{c_0} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0 c_0} \text{grad } p = \ell_v \text{grad div } \vec{v} - \ell'_v \text{rot rot } \vec{v},$$

$$\rho_0 c_0 \text{div } \vec{v} + \frac{\gamma}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} (p - \hat{\beta} \tau) = 0,$$

et

$$\left(\frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} - \ell_h \Delta \right) \tau = \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta} \gamma} \frac{1}{c_0} \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Le champ de vitesse particulière $\vec{v}$ est écrit comme la superposition d'un champ de vitesse tourbillonnaire $\vec{v}_v$ et d'un champ de vitesse laminaire $\vec{v}_\ell$:

$$\vec{v} = \vec{v}_v + \vec{v}_\ell, \quad \text{rot } \vec{v}_\ell = \vec{0} \quad \text{et} \quad \text{div } \vec{v}_\ell \neq 0, \quad \text{div } \vec{v}_v = 0 \quad \text{et} \quad \text{rot } \vec{v}_v \neq \vec{0}. \quad (\text{G.1})$$

Si le couplage des mouvements laminaires et tourbillonnaires est négligé, l'équation de Navier-Stokes (3.1) peut être séparée en deux équations (G.4 et G.5 ci-dessous) de telle sorte que le système de 3 équations (3.1, 3.2 et 3.3) devient :

$$\frac{1}{c_0} \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\rho_0 c_0}{\gamma \hat{\beta}} \text{div } \vec{v}_\ell = \frac{1}{\hat{\beta}} \frac{1}{c_0} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (\text{G.2})$$

$$\left(\frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} - \ell_h \Delta \right) \tau = \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta} \gamma} \frac{1}{c_0} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (\text{G.3})$$

$$\left(\frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} - \ell_v \Delta \right) \vec{v}_\ell = -\frac{1}{\rho_0 c_0} \text{grad } p, \quad (\text{G.4})$$

$$\left(\frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} - \ell'_v \Delta \right) \vec{v}_v = \vec{0}, \quad (\text{G.5})$$

avec $\text{rot } \vec{v}_\ell = \vec{0}$ et $\text{div } \vec{v}_v = 0$.

Ce système de 4 équations permet de trouver les équations de propagation pour les variables p , τ , $\vec{v}_\ell$ et $\vec{v}_v$. Le calcul pour la variable τ est effectué dans la référence [8, §2.5.1].

L'écart instantané de température τ peut alors être exprimé sous la forme de la somme d'une température acoustique τ_a et d'une température entropique τ_h qui sont respectivement solutions des équations homogènes

$$\left[\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(1 + \ell_{vh} \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta \right] \tau_a = 0, \quad (\text{G.6})$$

où $\ell_{vh} = \ell_v + (\gamma - 1)\ell_h$,

$$\left[\frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} - \ell_h \left(1 + (\gamma - 1)(\ell_v - \ell_h) \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta \right] \tau_h = 0,$$

soit

$$\left[\frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} - \ell_h \Delta \right] \tau_h \approx 0. \quad (\text{G.7})$$

L'écart instantané total de pression $p = p_a + p_h$ et la vitesse particulaire laminaire $\vec{v}_\ell = \vec{v}_a + \vec{v}_h$ satisfont aux mêmes équations (G.6) et (G.7) que l'écart instantané de température.

G.2 Recherche de solutions

La recherche de solutions pour les variables $p = p_a + p_h$, $\vec{v}_\ell = \vec{v}_a + \vec{v}_h$, $\tau = \tau_a + \tau_h$ et $\vec{v}_v$ se ramène alors à la résolution d'équations de propagation et de diffusion classiques. Néanmoins, concernant les variables acoustiques et entropiques (p , $\vec{v}_\ell$, τ), la solution pour deux d'entre elles peut être déduite directement de la solution de la troisième. En effet, le report de la solution $\tau = \tau_a + \tau_h$ dans l'équation (G.3), compte tenu des équations (G.6) et (G.7), conduit à

$$p = p_a + p_h, \quad (\text{G.8})$$

avec

$$p_a \approx \frac{\gamma \hat{\beta}}{\gamma - 1} \left(1 - \ell_h \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \tau_a \approx \frac{\gamma \hat{\beta}}{\gamma - 1} \tau_a, \quad (\text{G.9a})$$

$$p_h \approx \gamma \hat{\beta} (\ell_v - \ell_h) \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \tau_h \ll p_a. \quad (\text{G.9b})$$

Le report de ces résultats (G.9a,b) dans l'équation (G.4), compte tenu des équations (G.6) et (G.7), vérifiées pour les vitesses particulières $\vec{v}_a$ et $\vec{v}_h$, donne :

$$\vec{v}_\ell = \vec{v}_a + \vec{v}_h, \quad (\text{G.10})$$

avec

$$\begin{aligned} \vec{v}_a &\approx -\frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{\gamma \hat{\beta}}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{-1} + (\ell_v - \ell_h) \right] \text{grad } \tau_a \\ &\approx -\frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{\gamma \hat{\beta}}{\gamma - 1} \left(\frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{-1} \text{grad } \tau_a, \end{aligned} \quad (\text{G.11a})$$

$$\vec{v}_h \approx \frac{\gamma \hat{\beta}}{\gamma - 1} \ell_h \text{grad } \tau_h. \quad (\text{G.11b})$$

Ainsi, dans le domaine fréquentiel, pour une onde harmonique en $e^{j\omega t}$ (où ω représente la pulsation de l'onde) se propageant dans le domaine $\mathcal{D}$, les équations (G.1) à (G.11b) donnent :

$$(\Delta + k_a^2) \tau_a(\vec{r}, t) = 0 \quad \forall \vec{r} \in \mathcal{D}, \forall t, \quad (\text{G.12})$$

$$(\Delta + k_h^2) \tau_h(\vec{r}, t) = 0 \quad \forall \vec{r} \in \mathcal{D}, \forall t, \quad (\text{G.13})$$

avec $\tau = \tau_a + \tau_h$, et

$$k_a^2 \approx \frac{k_0^2}{1 + j k_0 \ell_{vh}} \approx k_0^2 [1 - j k_0 \ell_{vh}], \quad (\text{G.14})$$

$$k_h^2 \approx -\frac{j k_0}{\ell_h} [1 - j k_0 (\gamma - 1) (\ell_v - \ell_h)] \approx -\frac{j k_0}{\ell_h}, \quad (\text{G.15})$$

$$p = p_a + p_h,$$

avec

$$p_a \approx \frac{\gamma \hat{\beta}}{\gamma - 1} (1 - j k_0 \ell_h) \tau_a \approx \frac{\gamma \hat{\beta}}{\gamma - 1} \tau_a, \quad (\text{G.16a})$$

$$p_h \approx j k_0 \gamma \hat{\beta} (\ell_v - \ell_h) \tau_h < p_a, \quad (\text{G.16b})$$

$$\vec{v}_\ell = \vec{v}_a + \vec{v}_h,$$

avec

$$\vec{v}_a \approx \frac{j}{k_0 \rho_0 c_0} \frac{\gamma \hat{\beta}}{\gamma - 1} [1 + j k_0 (\ell_v - \ell_h)] \text{grad } \tau_a \approx \frac{j}{k_0 \rho_0 c_0} \frac{\gamma \hat{\beta}}{\gamma - 1} \text{grad } \tau_a, \quad (\text{G.17a})$$

$$\vec{v}_h \approx \frac{\gamma \hat{\beta}}{\rho_0 c_0} \ell_h \text{grad } \tau_h, \quad (\text{G.17b})$$

$$(\Delta + k_v^2) \vec{v}_v(\vec{r}, t) = \vec{0} \quad \forall \vec{r} \in \mathcal{D}, \forall t, \quad (\text{G.18})$$

avec

$$k_v^2 = -\frac{j k_0}{\ell'_v}, \quad (\text{G.19})$$

et

$$\text{div } \vec{v}_v = 0. \quad (\text{G.20})$$

G.3 Solution dans le cas d'un cylindre fermé par deux microphones

L'onde harmonique se propage selon les z croissants dans un fluide dissipatif (fluide thermo-visqueux) contenu dans un tube cylindrique aux parois latérales rigides, d'axe z , de longueur ℓ et de rayon a . Le tube est fermé à ses extrémités $z = 0$ et $z = \ell$ par deux microphones. Le microphone situé en $z = 0$ fonctionne en émetteur et celui en $z = \ell$ fonctionne en récepteur (figure 3.1). Le microphone émetteur impose en $z = 0$ une vitesse $\vec{v}_e$ dont la composante radiale est supposée négligeable.

Le rayon du tube est très supérieur à l'épaisseur des couches limites visqueuses et thermiques, de telle sorte que l'onde de pression peut être considérée comme quasi plane : elle est quasi uniforme dans chaque section du tube (c'est-à-dire très lentement variable en fonction de la coordonnée radiale r), indépendante de la coordonnée azimutale θ par raison de symétrie, et propagative suivant l'axe z du tube.

L'effet des couches limites thermiques au voisinage des parois en $z = 0$ et $z = \ell$ est pris en compte par l'introduction d'une admittance de paroi Y_p donnée par

$$Y_p = \frac{S}{\rho_0 c_0} \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{k_0}(\gamma-1)\sqrt{l_h}, \quad (\text{G.21})$$

(l'onde acoustique étant en incidence normale sur ces parois, les effets de viscosité sont nuls au niveau des extrémités en $z = 0$ et $z = \ell$).

Ainsi, aux équations (G.12, G.13 et G.18), sont associées les conditions aux frontières suivantes :

$$\tau_a + \tau_h = 0, \quad v_{az} + v_{hz} + v_{vz} = 0, \quad v_{ar} + v_{hr} + v_{vr} = 0, \quad \text{pour } r = a, \quad \forall z \in (0, \ell), \quad (\text{G.22})$$

et

$$S \langle v_z(0) \rangle_S + Y_p \langle p(0) \rangle_S = S v_e, \quad \text{pour } z = 0, \quad (\text{G.23a})$$

$$S \langle v_z(\ell) \rangle_S - (Y_r + Y_p) \langle p(\ell) \rangle_S = 0, \quad \text{pour } z = \ell. \quad (\text{G.23b})$$

D'autre part, les nombres d'onde k_a , k_h et k_v peuvent être écrits sous la forme

$$k_a^2 = k_{ar}^2 + k_z^2, \quad (\text{G.24})$$

$$k_h^2 = k_{hr}^2 + k_z^2, \quad (\text{G.25})$$

$$k_v^2 = k_{vr}^2 + k_z^2. \quad (\text{G.26})$$

La solution de l'équation (G.12) en coordonnées cylindriques, compte tenu des hypothèses retenues, est de la forme

$$\tau_a = A_a \frac{J_0(k_{ar}r)}{J_0(k_{ar}a)} (e^{-j k_z z} + B e^{j k_z z}), \quad (\text{G.27})$$

la constante B étant déterminée par la condition aux frontières (G.23b) en $z = \ell$. Cette solution pour τ_a permet de déduire p_a et $\vec{v}_a$, compte tenu des relations (G.16a) et (G.17a) :

$$p_a \approx A_a \frac{\gamma \hat{\beta}}{\gamma - 1} \frac{J_0(k_{ar}r)}{J_0(k_{ar}a)} (e^{-j k_z z} + B e^{j k_z z}), \quad (G.28)$$

$$v_{az} \approx A_a \frac{k_z}{k_0 \rho_0 c_0} \frac{\gamma \hat{\beta}}{\gamma - 1} \frac{J_0(k_{ar}r)}{J_0(k_{ar}a)} (e^{-j k_z z} - B e^{j k_z z}), \quad (G.29)$$

$$v_{ar} \approx A_a \frac{k_{ar}}{j k_0 \rho_0 c_0} \frac{\gamma \hat{\beta}}{\gamma - 1} \frac{J_1(k_{ar}r)}{J_0(k_{ar}a)} (e^{-j k_z z} + B e^{j k_z z}). \quad (G.30)$$

La solution de l'équation (G.13), compte tenu de la première condition aux frontières (G.22), s'écrit

$$\tau_h \approx -A_a \frac{J_0(k_{hr}r)}{J_0(k_{hr}a)} (e^{-j k_z z} + B e^{j k_z z}). \quad (G.31)$$

Les relations (G.16b) et (G.17b) permettent alors d'en déduire les expressions de p_h et $\vec{v}_h$:

$$p_h \approx -A_a j k_0 \gamma \hat{\beta} (\ell_v - \ell_h) \frac{J_0(k_{hr}r)}{J_0(k_{hr}a)} (e^{-j k_z z} + B e^{j k_z z}) \approx 0, \quad (G.32)$$

$$v_{hz} \approx A_a j k_z \frac{\gamma \hat{\beta} \ell_h}{\rho_0 c_0} \frac{J_0(k_{hr}r)}{J_0(k_{hr}a)} (e^{-j k_z z} - B e^{j k_z z}), \quad (G.33)$$

$$v_{hr} \approx A_a k_{hr} \frac{\gamma \hat{\beta} \ell_h}{\rho_0 c_0} \frac{J_1(k_{hr}r)}{J_0(k_{hr}a)} (e^{-j k_z z} + B e^{j k_z z}). \quad (G.34)$$

L'équation (G.18), en coordonnées cylindriques, compte tenu de la relation (G.20) $\text{div } \vec{v}_v = 0$ et de ce que $v_{v\theta} = 0$, donne (le symbole Δ représente ici le laplacien appliqué à une fonction scalaire)

$$(\Delta + k_v^2) v_{vz} = 0 \quad \text{et} \quad (\Delta - \frac{1}{r^2} + k_v^2) v_{vr} = 0 \quad \forall r \in (0, a) \quad \forall z \in (0, \ell).$$

La solution de l'équation (G.18) pour la composante v_{vz} , est donc de la forme

$$v_{vz} = A_v \frac{J_0(k_{vr}r)}{J_0(k_{vr}a)} (e^{-j k_z z} - B e^{j k_z z}), \quad (G.35)$$

où A_v est déterminé par la deuxième condition aux frontières (G.22) :

$$A_v = A_a \frac{-k_z}{k_0 \rho_0 c_0} \frac{\gamma \hat{\beta}}{\gamma - 1}. \quad (G.36)$$

La relation (G.20) $\text{div } \vec{v}_v = 0$ donne pour v_{vr} :

$$v_{vr} = A_v \frac{j k_z}{k_{vr}} \frac{J_1(k_{vr}r)}{J_0(k_{vr}a)} (e^{-j k_z z} + B e^{j k_z z}). \quad (G.37)$$

Enfin, le report des solutions (G.30, G.34, G.37) dans la troisième condition aux frontières (G.22) permet de déterminer k_z :

$$k_z^2 \frac{1}{k_{vr}} \frac{J_1(k_{vr}a)}{J_0(k_{vr}a)} - k_{ar} \frac{J_1(k_{ar}a)}{J_0(k_{ar}a)} - j k_0 \ell_h (\gamma - 1) k_{hr} \frac{J_1(k_{hr}a)}{J_0(k_{hr}a)} = 0. \quad (\text{G.38})$$

Si $k_{ar}a$ est petit, le rapport des fonctions de Bessel en k_{ar} peut être développé en $\frac{J_1(k_{ar}a)}{J_0(k_{ar}a)} \approx \frac{k_{ar}a}{2}$. Compte tenu de ce que $k_a^2 = k_{ar}^2 + k_z^2$ et $k_h^2 = k_{hr}^2 + k_z^2$, la relation précédente donne alors

$$k_z^2 [1 + K_v + j k_0 \ell_h (\gamma - 1) K_h] - j k_0 \ell_h k_h^2 (\gamma - 1) K_h = k_a^2, \quad (\text{G.39})$$

où les termes K_v et K_h sont donnés par

$$K_{v,h} = \frac{2}{k_{v,hr}a} \frac{J_1(k_{v,hr}a)}{J_0(k_{v,hr}a)}. \quad (\text{G.40})$$

Dans les conditions standard de référence, les longueurs caractéristiques ℓ_h et ℓ_v valent approximativement $\ell_h = 6.10^{-8}\text{m}$ et $\ell_v = 4.10^{-8}\text{m}$. Le tableau G.1 donne les valeurs des termes k_a^2/k_0^2 et $k_0 \ell_h (\gamma - 1)$ aux fréquences extrêmes 10 Hz et 31,6 kHz.

Fréquence	10 Hz	31,6 kHz
k_a^2/k_0^2	$1 - j 1,2.10^{-8}$	$1 - j 3,7.10^{-5}$
$(\gamma - 1)k_0 \ell_h$	$4,4.10^{-10}$	$1,4.10^{-5}$

TAB. G.1 – Valeurs de termes apparaissant dans la relation (G.39).

Les valeurs données dans ce tableau permettent alors de justifier les approximations suivantes :

$$k_a^2 \approx k_0^2, \quad k_h^2 \approx -j \frac{k_0}{\ell_h}, \quad 1 \pm j (\gamma - 1) k_0 \ell_h \approx 1, \quad (\text{G.41})$$

la relation (G.39) devient donc

$$k_z^2 \left(1 + \frac{2}{k_{vr}a} \frac{J_1(k_{vr}a)}{J_0(k_{vr}a)} \right) = k_0^2 \left[1 + (\gamma - 1) \frac{2}{k_{hr}a} \frac{J_1(k_{hr}a)}{J_0(k_{hr}a)} \right], \quad (\text{G.42})$$

Dans la mesure où le rayon a du tube et la gamme de fréquence exploitée (inférieure à la première fréquence de coupure du tube) sont tels que la dissipation au sein du fluide reste négligeable en regard de celle liée aux phénomènes qui se développent dans les couches limites, alors

$$|k_z| \ll |k_h|, \quad \text{d'où} \quad k_{hr}^2 \approx k_h^2, \quad |k_z| \ll |k_v|, \quad \text{d'où} \quad k_{vr}^2 \approx k_v^2.$$

L'expression (G.42) de k_z donne donc

$$k_z^2 = k_0^2 \frac{1 + (\gamma - 1) K_h}{1 - K_v}, \quad (\text{G.43})$$

où

$$K_{v,h} = \frac{2}{k_{v,h}a} \frac{J_1(k_{v,h}a)}{J_0(k_{v,h}a)}, \quad (\text{G.44})$$

soit, à l'ordre 1/2 des longueurs caractéristiques

$$k_z^2 \approx k_0^2 \left[1 + \frac{1-j}{\sqrt{2}} \frac{2}{a\sqrt{k_0}} (\sqrt{\ell'_v} + (\gamma-1)\sqrt{\ell_h}) \right]. \quad (\text{G.45})$$

G.4 Admittance acoustique de transfert

L'admittance acoustique de transfert du système est le rapport du débit de la membrane Sv_e (orientation figure 3.1) sur l'écart instantané de pression moyen sur une section droite à la sortie $\langle p(\ell) \rangle_S$; elle s'écrit

$$Y_T = \frac{Sv_e + Y_e \langle p(0) \rangle_S}{\langle p(\ell) \rangle_S}, \quad (\text{G.46})$$

où la valeur moyenne de p s'écrit

$$\langle p(z) \rangle_S = \frac{2}{a^2} \int_0^a p(r, z) r \, dr \approx \frac{2}{a^2} \int_0^a p_a(r, z) r \, dr.$$

Compte tenu des approximations retenues dans le paragraphe précédent (expressions G.41) et d'après l'expression de l'écart de pression entropique p_h (G.32), il apparaît que cet écart de pression tend vers 0. L'expression de l'écart instantané de pression total p peut donc être ramené à p_a donné par (G.28). La moyenne de p s'écrit alors

$$\langle p(z) \rangle_S \approx A_a \frac{\gamma \hat{\beta}}{\gamma - 1} (1 - j k_0 \ell_h) \frac{2}{k_{ar} a} \frac{J_1(k_{ar} a)}{J_0(k_{ar} a)} (e^{-j k_z z} + B e^{j k_z z}),$$

qui donne, en développant le rapport des fonctions de Bessel $\frac{J_1(k_{ar} a)}{J_0(k_{ar} a)} \approx \frac{k_{ar} a}{2}$ ($k_{ar} a < 1$),

$$\langle p(z) \rangle_S \approx A_a \frac{\gamma \hat{\beta}}{\gamma - 1} (e^{-j k_z z} + B e^{j k_z z}). \quad (\text{G.47})$$

La vitesse v_e de la membrane, supposée uniforme sur une section et orientée suivant l'axe z , est déterminée par la condition aux frontières (G.23) en $z = 0$:

$$Sv_e = S \langle v_z(0) \rangle_S + Y_p \langle p(0) \rangle_S,$$

où la valeur moyenne de la vitesse longitudinale v_z s'écrit

$$\langle v_z(z) \rangle_S = \frac{2}{a^2} \int_0^a v_z(r, z) r \, dr = \frac{2}{a^2} \int_0^a [v_{az}(r, z) + v_{hz}(r, z) + v_{vz}(r, z)] r \, dr.$$

Les expressions respectives des vitesses v_{az} , v_{hz} et v_{vz} , (éq. G.29), (éq. G.33) et (éq. G.35, G.36), compte tenu de ce que $(\gamma - 1)k_0 \ell_h$ est très petit devant 1 (éq. G.41), conduisent à considérer que la vitesse entropique longitudinale v_{hz} est très petite devant v_{az} et v_{vz} , ce qui permet de la négliger dans le calcul de l'intégrale précédente. L'expression de la vitesse moyenne $\langle v_z(z) \rangle_S$ est alors donnée par

$$\langle v_z(z) \rangle_S \approx A_a \frac{k_z}{k_0 \rho_0 c_0} \frac{\gamma \hat{\beta}}{\gamma - 1} (1 - K_v) (e^{-j k_z z} - B e^{j k_z z}). \quad (\text{G.48})$$

L'admittance itérative Y_i du cylindre est donnée par

$$Y_i = \frac{S}{\rho_0 c_0} \frac{k_z}{k_0} (1 - K_v) = \frac{S}{\rho_0 c_0} \sqrt{[1 + (\gamma - 1)K_h](1 - K_v)}, \quad (\text{G.49})$$

soit, à l'ordre 1/2 des longueurs caractéristiques

$$Y_i \approx \frac{S}{\rho_0 c_0} \left[1 + \frac{1-j}{\sqrt{2}} \frac{2}{a\sqrt{k_0}} (\sqrt{\ell'_v} - (\gamma - 1)\sqrt{\ell_h}) \right]. \quad (\text{G.50})$$

La constante B peut alors être déterminée d'après la condition aux frontières (G.23) en $z = \ell$:

$$B = e^{-2j k_z \ell} \frac{Y_i - (Y_r + Y_p)}{Y_i + (Y_r + Y_p)}. \quad (\text{G.51})$$

Ainsi, compte tenu des expressions (G.50) et (G.51), l'admittance acoustique de transfert Y_T s'écrit

$$Y_T = j \sin j k_z \ell \left[Y_i + \frac{(Y_e + Y_p)(Y_r + Y_p)}{Y_i} \right] + \cos j k_z \ell (2Y_p + Y_e + Y_r). \quad (\text{G.52})$$

Cette expression de l'admittance acoustique de transfert est identique à l'expression établie dans le cas d'ondes planes (3.87). Le modèle d'ondes planes est donc suffisant pour le calcul de l'admittance acoustique de transfert du système microphones - coupleur dans le cas où le mouvement des membranes des microphones est assimilé à celui d'un piston plan.

Annexe H

Réflexion d'une onde acoustique plane harmonique sur un plan rigide animé d'une vitesse

Lorsqu'une onde acoustique en fluide dissipatif se réfléchit sur une paroi rigide, les effets des couches limites viscothermiques peuvent être traduits par un concept d'admittance spécifique fonction du coefficient de viscosité de cisaillement et du coefficient de conduction thermique, définie de façon telle que la réflexion de l'onde acoustique sur un plan rigide en fluide viscothermique possède les mêmes caractéristiques que la réflexion sur un plan d'admittance spécifique ζ en fluide non dissipatif [17, pp. 259–262]. L'objet de cette annexe, qui reprend en grande partie le paragraphe § 3.2.1 de la référence [8], est de préciser cette notion d'admittance spécifique de paroi qui entre en compte dans l'écriture des conditions aux frontières sur une paroi animée d'une vitesse non nulle, limitant un milieu fluide dissipatif.

Le fluide est dans un espace semi-infini limité par un plan infini parfaitement rigide en $y = 0$ animé d'une vitesse uniforme $\vec{V}_0$ normale à ce plan (figure H.1).

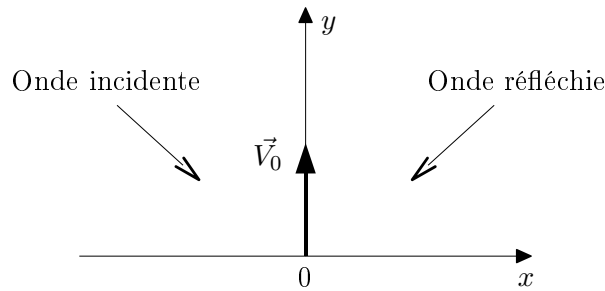


FIG. H.1 – Onde acoustique plane incidente se réfléchissant sur un plan rigide.

Le plan défini par la direction d'une onde acoustique plane harmonique incidente et l'axe Oy normal au plan est confondu, par convention, avec le plan xOy . De la sorte, le problème de réflexion spéculaire posé est indépendant de la troisième coordonnée de l'espace z .

Le problème posé est défini par les équations différentielles et relations (G.8) à (G.20) (cf. § G.2), auxquelles sont associées les conditions aux frontières

$$\tau = \tau_a + \tau_h = 0, \quad \vec{v} = \vec{v}_\ell + \vec{v}_v = \vec{V}_0, \quad y = 0, \quad \forall x, \quad (\text{H.1})$$

et des conditions d'annulation à l'infini.

L'écart instantané de température τ peut être écrit comme la superposition d'une onde plane incidente τ^+ et réfléchie τ^- (le facteur $e^{j\omega t}$ est omis) :

$$\tau = \tau^+ + \tau^- = (\tau_a^+ + \tau_h^+) + (\tau_a^- + \tau_h^-). \quad (\text{H.2})$$

La condition $\tau_a = -\tau_h$ devant être satisfaite en $y = 0$ et pour tout x , les termes τ^+ et τ^- sont écrits

$$\tau^+ = [e^{jk_{ay}y} + A_h^+ e^{jk_{hy}y}] e^{-jk_x x} \approx e^{jk_{ay}y} e^{-jk_x x}, \quad (\text{H.3a})$$

$$\tau^- = [R_a e^{-jk_{ay}y} + A_h^- e^{-jk_{hy}y}] e^{-jk_x x}, \quad (\text{H.3b})$$

où l'amplitude de l'onde incidente τ_a^+ est choisie égale à l'unité, où l'amplitude A_h^+ de l'onde thermique incidente est négligée devant celle de l'onde acoustique et où R_a désigne le coefficient de réflexion de l'onde acoustique ($|R_a|$ inférieur à l'unité mais voisin de celle-ci). Les nombres d'onde satisfont aux relations suivantes :

$$k_a^2 = k_x^2 + k_{ay}^2, \quad k_h^2 = k_x^2 + k_{hy}^2, \quad (\text{H.4})$$

où les quantités portant les indices x et y représentent les composantes suivant x et y , k_a et k_h étant donnés respectivement par les expressions (G.14) et (G.15).

Les solutions du problème pour le vitesse particulaire laminaire, superposition d'ondes incidente (+) et réfléchie (-),

$$\vec{v}_\ell = (\vec{v}_{\ell a}^+ + \vec{v}_{\ell h}^+) + (\vec{v}_{\ell a}^- + \vec{v}_{\ell h}^-) \quad (\text{H.5})$$

sont données par (éq. G.17a et b)

$$v_{\ell x}^\pm = -j k_x \left[\frac{j}{k_0 \rho_0 c_0} \frac{\gamma \hat{\beta}}{\gamma - 1} \tau_a^\pm + \frac{\gamma \hat{\beta}}{\rho_0 c_0} \ell_h \tau_h^\pm \right], \quad (\text{H.6a})$$

$$v_{\ell y}^\pm = \pm \left[j k_{ay} \frac{j}{k_0 \rho_0 c_0} \frac{\gamma \hat{\beta}}{\gamma - 1} \tau_a^\pm + j k_{hy} \frac{\gamma \hat{\beta}}{\rho_0 c_0} \ell_h \tau_h^\pm \right], \quad (\text{H.6b})$$

et pour la vitesse tourbillonnaire $\vec{v}_v = \vec{v}_v^+ + \vec{v}_v^-$ par (éq. G.18 à G.20)

$$v_{vx}^\pm = \pm A_v^\pm \frac{k_{vy}}{k_x} e^{\pm j k_{vy}y} e^{-j k_x x}, \quad (\text{H.7a})$$

$$v_{vy}^\pm = A_v^\pm e^{\pm j k_{vy}y} e^{-j k_x x}, \quad (\text{H.7b})$$

avec

$$k_v^2 = k_x^2 + k_{vy}^2, \quad (\text{H.8})$$

et où, à l'instar de la vitesse entropique incidente, la vitesse tourbillonnaire incidente $\vec{v}_v^+$ est, dans la suite, négligée en regard de la vitesse acoustique incidente.

Les conditions à la frontière $y = 0$ pour l'écart de température τ , et pour les composantes parallèles et normale au plan $y = 0$ de la vitesse particulaire $\vec{v}$, s'écrivent respectivement :

$$1 + R_a + A_h^- = 0 \quad (\text{H.9})$$

$$(1 + R_a) \frac{k_x}{k_0} \frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{\gamma \hat{\beta}}{\gamma - 1} - j A_h^- \frac{\gamma \hat{\beta}}{\rho_0 c_0} k_x \ell_h - A_v^- \frac{k_{vy}}{k_x} = 0 \quad (\text{H.10})$$

$$-\frac{k_{ay}}{k_0} \frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{\gamma \hat{\beta}}{\gamma - 1} (1 - R_a) - j A_h^- \frac{\gamma \hat{\beta}}{\rho_0 c_0} k_{hy} \ell_h + A_v^- = V_0. \quad (\text{H.11})$$

Ces trois dernières relations conduisent, par élimination des paramètres A_h^- et A_v^- , à la relation suivante :

$$\begin{aligned} j(\gamma - 1)k_0\ell_h(1 + R_a)(k_x^2 + k_{hy}k_{vy}) + (k_x^2 - k_{ay}k_{vy}) + R_a(k_x^2 + k_{ay}k_{vy}) \\ = k_{vy}k_0\rho_0c_0\frac{\gamma - 1}{\gamma\hat{\beta}}V_0, \end{aligned} \quad (\text{H.12})$$

soit, compte tenu des relations (H.4) et (H.8), avec $k_x \ll k_{hy}$ et $k_x \ll k_{vy}$,

$$k_{hy} = \sqrt{\frac{-j k_0}{\ell_h} - k_x^2} \approx \sqrt{\frac{-j k_0}{\ell_h}} \quad \text{et} \quad k_{vy} = \sqrt{\frac{-j k_0}{\ell'_v} - k_x^2} \approx \sqrt{\frac{-j k_0}{\ell'_v}}, \quad (\text{H.13})$$

$$k_{ay}\frac{1 - R_a}{1 + R_a} = \frac{1 + j}{\sqrt{2}} \sqrt{k_0}k_0 \left[\left(1 - \frac{k_{ay}^2}{k_a^2} \right) \sqrt{\ell'_v} + (\gamma - 1)\sqrt{\ell_h} \right] + \frac{k_0\rho_0c_0}{1 + R_a} \frac{\gamma - 1}{\gamma\hat{\beta}}V_0. \quad (\text{H.14})$$

La paroi en $y = 0$, animée d'une vitesse V_0 , est alors caractérisée par son admittance spécifique [8, § 1.3.4]

$$\zeta = \rho_0c_0 \frac{V_0 - v_{ay}(0)}{p_a(0)}, \quad (\text{H.15})$$

où (éq. G.16a, G.17a)

$$\begin{aligned} p_a(0) &\approx \frac{\gamma\hat{\beta}}{\gamma - 1} (1 + R_a)e^{-j k_x x}, \\ v_{ay}(0) &\approx -\frac{1}{\rho_0c_0} \frac{\gamma\hat{\beta}}{\gamma - 1} \frac{k_{ay}}{k_0} (1 - R_a)e^{-j k_x x}, \end{aligned}$$

ce qui, compte tenu de la relation (H.14), conduit à [8, éq. 3.10]

$$\zeta \approx \frac{1 + j}{\sqrt{2}} \sqrt{k_0} \left[\left(1 - \frac{k_{ay}^2}{k_a^2} \right) \sqrt{\ell'_v} + (\gamma - 1)\sqrt{\ell_h} \right]. \quad (\text{H.16})$$

Annexe I

Calculs intermédiaires sur la propagation d'ondes radiales

Cette annexe regroupe quelques calculs dont les résultats sont utilisés dans le chapitre 4 mais qui n'y sont pas développés afin de ne pas en alourdir le propos.

I.1 Calcul des coefficients $g_{\mu\nu}(z, z_0)$

Le report de la forme de solution (4.25) dans l'équation de propagation du problème de Green (4.24) donne :

$$\sum_{\mu,\nu} \psi_{\mu\nu}(r_0, \theta_0) \left[\Delta_{\vec{w}} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] \psi_{\mu\nu}(r, \theta) g_{\mu\nu}(z, z_0) = -\delta(\vec{w} - \vec{w}_0) \delta(z - z_0). \quad (\text{I.1})$$

Le produit scalaire de cette équation par $\psi_{\mu'\nu'}(\vec{w})$, conduit, compte tenu de la relation d'orthogonalité des fonctions propres,

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \psi_{\mu\nu}(r, \theta) \psi_{\mu'\nu'}(r, \theta) d\theta dr = \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'} \quad (\text{I.2})$$

et de l'équation de propagation (4.26a) du problème aux valeurs propres, à l'équation suivante pour les coefficients $g_{\mu\nu}$ du développement :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_{z\mu\nu}^2 \right] g_{\mu\nu}(z, z_0) = -\delta(z - z_0), \quad \forall z \in (0, \ell), \quad (\text{I.3})$$

avec

$$k_{z\mu\nu}^2 = k^2 - k_{w\mu\nu}^2. \quad (\text{I.4})$$

A cette équation (I.3), il convient d'associer les conditions en frontières contenues dans le problème (4.24) :

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - j k_0 \zeta_{z0\mu\nu} \right) g_{\mu\nu}(z, z_0) = 0, \quad \text{pour } z = 0, \quad (\text{I.5a})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + j k_0 \zeta_{z\ell\mu\nu} \right) g_{\mu\nu}(z, z_0) = 0, \quad \text{pour } z = \ell. \quad (\text{I.5b})$$

Ce système d'équations (I.3, I.5) est celui auquel satisfait une fonction de Green en espace fini à une dimension dans le domaine de Fourier [8, § 6.1.4 b].

La solution de ce système peut être déterminée en trouvant deux solutions indépendantes $g_1(z)$ et $g_2(z)$ de l'équation homogène associée à l'équation (I.3), à wronskien $W_g = g_1 g_2' - g_1' g_2$ (indépendant de z) non nul, et satisfaisant chacune à une condition aux frontières (I.5a,b). La fonction $g_{\mu\nu}(z, z_0)$ solution du problème (I.3, I.5) s'écrit alors

$$g_{\mu\nu}(z, z_0) = -g_2(z) \int_0^z \frac{g_1(x) \delta(x - z_0)}{W_g} dx - g_1(z) \int_z^\ell \frac{g_2(x) \delta(x - z_0)}{W_g} dx. \quad (\text{I.6})$$

Les solutions g_1 et g_2 de l'équation homogène, satisfaisant respectivement aux conditions en frontières (I.5a,b), peuvent être écrites sous la forme suivante

$$g_1(z) = \cos(k_{z\mu\nu} z + \varphi_{0\mu\nu}) \quad \text{et} \quad g_2(z) = \cos(k_{z\mu\nu}(z - \ell) - \varphi_{\ell\mu\nu}),$$

où φ_{0m} , $\varphi_{\ell m}$ sont donnés par les conditions aux frontières (I.5a,b) :

$$\tan \varphi_{0,\ell\mu\nu} = -\frac{j k_0 \zeta_{z0,\ell\mu\nu}}{k_{z\mu\nu}}. \quad (\text{I.7})$$

Le wronskien W_g vaut alors

$$W_g = k_{z\mu\nu} \sin(k_{z\mu\nu} \ell + \varphi_{0\mu\nu} + \varphi_{\ell\mu\nu}),$$

Enfin, d'après l'expression (I.6) de $g_{\mu\nu}(z, z_0)$, si $z < z_0$, alors $z_0 \notin (0, z)$ et l'intégrale $\int_0^z g_1(x) \delta(x - z_0) dx$ est toujours nulle. De même, si $z > z_0$, alors l'intégrale $\int_z^\ell g_2(x) \delta(x - z_0) dx$ est toujours nulle.

Ainsi, la fonction $g_{\mu\nu}(z, z_0)$ est donnée par

$$g_{\mu\nu}(z, z_0) = -\frac{\cos(k_{z\mu\nu} z + \varphi_{0\mu\nu}) \cos(k_{z\mu\nu}(z_0 - \ell) - \varphi_{\ell\mu\nu})}{k_{z\mu\nu} \sin(k_{z\mu\nu} \ell + \varphi_{0\mu\nu} + \varphi_{\ell\mu\nu})}, \quad (\text{I.8a})$$

si $z < z_0$, et par

$$g_{\mu\nu}(z, z_0) = -\frac{\cos(k_{z\mu\nu} z_0 + \varphi_{0\mu\nu}) \cos(k_{z\mu\nu}(z - \ell) - \varphi_{\ell\mu\nu})}{k_{z\mu\nu} \sin(k_{z\mu\nu} \ell + \varphi_{0\mu\nu} + \varphi_{\ell\mu\nu})}, \quad (\text{I.8b})$$

si $z > z_0$.

I.2 Calcul des produits scalaires de fonctions propres

Les expressions (4.27a et b) des fonctions propres permettent d'écrire les expressions des produits scalaires de fonctions propres $\langle \psi_{\mu\nu}^t | \psi_{\mu'\nu'}^{t'} \rangle_r$ sous les formes suivantes :

$$\langle \psi_{\mu\nu}^c | \psi_{\mu'\nu'}^c \rangle_r = \langle \psi_{\mu\nu}^s | \psi_{\mu'\nu'}^s \rangle_r = \frac{\delta_{\mu\mu'}}{b_{\mu\nu} b_{\mu'\nu'}} \int_0^{a_r} J_\mu(k_{w\mu\nu} r_0) J_\mu(k_{w\mu'\nu'} r_0) r_0 dr_0 \quad (\text{I.9})$$

$$\langle \psi_{\mu\nu}^s | \psi_{\mu'\nu'}^c \rangle_r = \langle \psi_{\mu\nu}^c | \psi_{\mu'\nu'}^s \rangle_r = 0, \quad (\text{I.10})$$

soit

$$< \psi_{\mu\nu}^c | \psi_{\mu\nu}^c >_r = \frac{1}{b_{\mu\nu}^2} \frac{a_r^2}{2} [J_\mu^2(\gamma_{\mu\nu} a_r/a) - J_{\mu-1}(\gamma_{\mu\nu} a_r/a) J_{\mu+1}(\gamma_{\mu\nu} a_r/a)] , \quad (\text{I.11a})$$

et

$$< \psi_{\mu\nu}^c | \psi_{\mu\nu'}^c >_r = \frac{1}{b_{\mu\nu} b_{\mu\nu'}} \frac{a a_r}{\gamma_{\mu\nu}^2 - \gamma_{\mu\nu'}^2} [\gamma_{\mu\nu'} J_\mu(\gamma_{\mu\nu} a_r/a) J_{\mu-1}(\gamma_{\mu\nu'} a_r/a) - \gamma_{\mu\nu} J_{\mu-1}(\gamma_{\mu\nu} a_r/a) J_\mu(\gamma_{\mu\nu'} a_r/a)] , \quad (\text{I.11b})$$

si $\nu \neq \nu'$.

Pour une rapport $a_r/a = 0,96$, les produits scalaires pour lesquels $\nu = \nu'$ valent environ 0,92. Les produits exprimant des couplages intermodaux sont alternés et de l'ordre de 0,075, considérés séparément, ils ne sont donc pas négligeables. Cependant, la contribution de ces termes dans le calcul l'admittance acoustique de transfert est inférieure à $5 \cdot 10^{-3}$ dB, les produits scalaires (I.11b) exprimant des couplages entre différents modes sont donc négligés au paragraphe 4.4 (relation 4.45).

I.3 Admittances spécifiques de parois

L'expression (I.4),

$$k_{z\mu\nu}^2 = k^2 - \frac{\gamma_{\mu\nu}^2}{a^2} ,$$

peut conduire à une valeur imaginaire pour $k_{z\mu\nu}$ (si $\gamma_{\mu\nu}^2/a^2 > \text{Re}(k^2)$), ce qui correspond à des ondes évanescences suivant z .

L'admittance $\zeta_{z\mu\nu} = \zeta_{z0\mu\nu} = \zeta_{z\ell\mu\nu}$ sur les parois situées en $z = 0$ et $z = \ell$ est alors écrite

$$\begin{aligned} \zeta_{z\mu\nu} &\approx \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{k_0} \left[\frac{\gamma_{\mu\nu}^2/a^2}{k_0^2} \sqrt{\ell'_v} + (\gamma - 1) \sqrt{\ell_h} \right] & \text{pour } \text{Re}(k^2) \geq \frac{\gamma_{\mu\nu}^2}{a^2} \\ \zeta_{z\mu\nu} &\approx \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{k_0} \left[\sqrt{\ell'_v} + (\gamma - 1) \sqrt{\ell_h} \right] & \text{pour } \text{Re}(k^2) \leq \frac{\gamma_{\mu\nu}^2}{a^2} . \end{aligned} \quad (\text{I.12})$$

I.4 Champ de vitesse de l'émetteur

Plusieurs formes peuvent être envisagées pour le champ de vitesse de l'émetteur v_e :

- une vitesse uniforme $v_e = V_e$,
- une vitesse non uniforme, imposée par les caractéristiques mécaniques de la membrane,

$$v_e(r) = V_e \frac{J_0(k_e r) - J_0(k_e a_e)}{J_2(k_e a_e)} , \quad (\text{I.13})$$

dont la valeur moyenne est V_e et où $k_e = \omega \sqrt{M_S/T}$ (M_S étant la masse surfacique et T la tension de la membrane du microphone émetteur).

- une vitesse non uniforme, écrite sous la forme d'un développement sur la base des fonctions propres $\psi_{0\nu}^c(r)$, les modes supérieurs à 1 étant négligés,

$$v_e(r) = A \psi_{00}^c + B \psi_{01}^c(r) ,$$

soit

$$v_e(r) = \frac{A}{a_0 b_{00}} + \frac{B}{a_0 b_{01}} J_0(k_{w01} r), \quad (\text{I.14})$$

les constantes A et B étant déterminées pour satisfaire les conditions suivantes :

$$v_e(a_e) = 0 \quad \text{et} \quad \langle v_e \rangle_e = V_e. \quad (\text{I.15})$$

Ces deux conditions (I.15) permettent d'écrire

$$\frac{A}{B} = -\frac{b_{00}}{b_{01}} J_0(k_{w01} a_e) \quad \text{et} \quad V_e = \frac{A}{a_0 b_{00}} + \frac{B}{a_0 b_{01}} \frac{2}{\gamma_{01}} \frac{a}{a_e} J_1(k_{w01} a_e),$$

ce qui donne

$$A = \frac{V_e}{1 - \alpha} a_0 b_{00} \quad \text{et} \quad B = -\frac{V_e}{1 - \alpha} \frac{a_0 b_{01}}{J_0(k_{w01} a_e)}, \quad (\text{I.16})$$

avec

$$\alpha = \frac{2}{\gamma_{01}} \frac{a}{a_e} \frac{J_1(k_{w01} a_e)}{J_0(k_{w01} a_e)}. \quad (\text{I.17})$$

L'expression du champ de vitesse v_e de l'émetteur est donc donnée par

$$v_e(r) = \frac{V_e}{1 - \alpha} \left[1 - \frac{J_0(k_{w01} r)}{J_0(k_{w01} a_e)} \right]. \quad (\text{I.18})$$

A noter que ces trois expressions proposées pour le champ de vitesse v_e ne peuvent pas être considérées comme «exactes». En effet, la membrane étant fixe sur les bords, son mouvement ne peut être celui d'un piston plan (première expression). D'autre part, le champ de vitesse de la membrane doit à la fois dépendre des caractéristiques mécaniques de celle-ci et des champs acoustiques sur ses deux faces.

I.5 Calcul des produits scalaires de fonctions propres et de vitesse de l'émetteur

Les produits scalaires $\langle v_e | \psi_{\mu\nu}^t \rangle_e$ dépendant de la vitesse v_e sont donnés par

$$\langle v_e | \psi_{\mu\nu}^t \rangle_e = \int_0^{2\pi} \int_0^{a_e} v_e(r_0, \theta_0) \psi_{\mu\nu}^t(r_0, \theta_0) r_0 dr_0 d\theta_0.$$

La vitesse v_e est supposée indépendante de l'angle θ , si bien que seul les termes correspondant à $\mu = 0$ sont non nuls (éq. 4.27a et b) ; il vient :

$$\langle v_e | \psi_{\mu\nu}^c \rangle_e = \frac{2\pi \delta_{\mu 0}}{a_0 b_{0\nu}} \int_0^{a_e} v_e(r_0) J_0(k_{w0\nu} r_0) r_0 dr_0 \quad (\text{I.19a})$$

$$\langle v_e | \psi_{\mu\nu}^s \rangle_e = 0. \quad (\text{I.19b})$$

Trois expressions envisageables pour la vitesse v_e sont données dans le paragraphe précédent, les expressions des produits scalaires $\langle v_e | \psi_{0\nu}^c \rangle_e$ pour chaque forme de v_e sont données dans les paragraphes suivants.

I.5.1 Champ de vitesse uniforme

La vitesse de l'émetteur est supposée uniforme $v_e = V_e$. L'expression (I.19a) du produit scalaire $\langle v_e | \psi_{0\nu}^c \rangle_e$ donne alors

$$\langle v_e | \psi_{0\nu}^c \rangle_e = \frac{2\pi}{a_0 b_{0\nu}} V_e \int_0^{a_e} J_0(k_{w0\nu} r_0) r_0 dr_0,$$

soit

$$\langle v_e | \psi_{0\nu}^c \rangle_e = \frac{1}{a_0 b_{0\nu}} S_e V_e V_{0\nu}, \quad (\text{I.20})$$

où $V_{0\nu}$ est un facteur sans dimensions qui vaut

$$V_{0\nu} = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu = 0 \\ \frac{a}{a_e} \frac{2}{\gamma_{0\nu}} J_1(k_{w0\nu} a_e) & \text{si } \nu \neq 0. \end{cases} \quad (\text{I.21a})$$

I.5.2 Champ de vitesse non uniforme, imposé par les caractéristiques mécaniques de la membrane

La vitesse de l'émetteur est supposée non uniforme et prend la forme (éq. I.13)

$$v_e(r) = V_e \frac{J_0(k_e r) - J_0(k_e a_e)}{J_2(k_e a_e)}.$$

En faisant usage des relations [5.52.1], [8.441.2], [5.54.1] et [8.404.2] de la référence [13] et de l'équation (4.28), l'expression (I.19a) du produit scalaire $\langle v_e | \psi_{0\nu}^c \rangle_e$ est écrite sous la même forme que l'expression (I.20) :

$$\langle v_e | \psi_{0\nu}^c \rangle_e = \frac{1}{a_0 b_{0\nu}} S_e V_e V_{0\nu},$$

avec

$$V_{0\nu} = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu = 0 \\ \frac{a}{a_e} \frac{2}{\gamma_{0\nu}} \frac{k_e}{k_e^2 - k_{w0\nu}^2} \frac{k_{w0\nu} J_1(k_e a_e) J_0(k_{w0\nu} a_e) - k_e J_0(k_e a_e) J_1(k_{w0\nu} a_e)}{J_2(k_e a_e)} & \text{si } \nu \neq 0. \end{cases} \quad (\text{I.21b})$$

I.5.3 Champ de vitesse développé sur les modes propres de la cavité

Le champ de vitesse v_e de l'émetteur est développé sur les modes propres de la cavité et prend la forme (éq. I.18)

$$v_e(r) = \frac{V_e}{1 - \alpha} \left[1 - \frac{J_0(k_{w01} r)}{J_0(k_{w01} a_e)} \right].$$

Les modes supérieurs à 1 étant négligés dans cette expression, les produits scalaires ne sont calculés que pour les modes (0,0) et (0,1,c).

En faisant usage des relations [5.52.1], [5.54.1] et [8.404.2] de la référence [13] et des équations (4.27a et 4.28), l'expression (I.19a) du produit scalaire $\langle v_e | \psi_{0\nu}^c \rangle_e$ est écrite sous la même forme que l'expression (I.20) :

$$\langle v_e | \psi_{0\nu}^c \rangle_e = \frac{1}{a_0 b_{0\nu}} S_e V_e V_{0\nu},$$

avec

$$V_{0\nu} = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu = 0 \\ -J_0(k_{w01}a_e) \left[1 + \frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{J_1(k_{w01}a_e)}{J_0(k_{w01}a_e)} \right]^2 \right] & \text{si } \nu = 1. \end{cases} \quad (\text{I.21c})$$

I.6 Calcul des coefficients $p_{0\nu}^c(\ell)$ et $p_{0\nu}^c(0)$

Le coefficient $p_{0\nu}^c(\ell)$ est donné par (4.57)

$$p_{0\nu}^c(\ell) = \frac{S < v_e | \psi_{0\nu}^c >_e}{\frac{1-K_v}{j k_0} \frac{S}{\rho_0 c_0} \frac{1}{g_{0\nu}(0, \ell)} + Y_{r0\nu} \frac{g_{0\nu}(\ell, \ell)}{g_{0\nu}(0, \ell)}}. \quad (\text{I.22})$$

L'expression de la fonction $g_{0\nu}(z, z_0)$ est donnée par les relations (I.8a,b). Compte tenu de l'égalité des admittances $\zeta_{z0\mu\nu}$ et $\zeta_{z\ell\mu\nu}$ les quantités $\varphi_{0\mu\nu}$ et $\varphi_{\ell\mu\nu}$ sont égales et $g_{0\nu}(0, \ell)$ et $g_{0\nu}(\ell, \ell)$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} g_{0\nu}(\ell, 0) &= g_{0\nu}(0, \ell) \\ &= -\frac{\cos^2 \varphi_{0\nu}}{k_{z0\nu} \sin(k_{z0\nu} \ell + 2\varphi_{0\nu})}, \end{aligned} \quad (\text{I.23})$$

$$\begin{aligned} g_{0\nu}(\ell, \ell) &= g_{0\nu}(0, 0) \\ &= -\frac{\cos \varphi_{0\nu}}{k_{z0\nu} \sin(k_{z0\nu} \ell + 2\varphi_{0\nu})} \cos(k_{z0\nu} \ell + \varphi_{0\nu}), \end{aligned} \quad (\text{I.24})$$

avec $\varphi_{\mu\nu} = \varphi_{0\mu\nu} = \varphi_{\ell\mu\nu}$ donné par (éq. I.7) ; ainsi en particulier

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_{0\nu}(\ell, 0)} &= -k_{z0\nu} [(1 - \tan^2 \varphi_{0\nu}) \sin k_{z0\nu} \ell + 2 \tan \varphi_{0\nu} \cos k_{z0\nu} \ell] \\ &= \left[j k_{z0\nu} + j \frac{k_0^2}{k_{z0\nu}} \zeta_{z0\nu}^2 \right] j \sin k_{z0\nu} \ell + 2j k_0 \zeta_{z0\nu} \cos k_{z0\nu} \ell, \end{aligned} \quad (\text{I.25})$$

et

$$\begin{aligned} \frac{g_{0\nu}(\ell, \ell)}{g_{0\nu}(\ell, 0)} &= \cos k_{z0\nu} \ell - \tan \varphi_{0\nu} \sin k_{z0\nu} \ell \\ &= \cos k_{z0\nu} \ell + \frac{k_0}{k_{z0\nu}} \zeta_{z0\nu} j \sin k_{z0\nu} \ell, \end{aligned} \quad (\text{I.26})$$

soit

$$\frac{1-K_v}{j k_0} \frac{S}{\rho_0 c_0} \frac{1}{g_{0\nu}(\ell, 0)} = \left[Y_{i0\nu} + \frac{Y_{p0\nu}^2}{Y_{i0\nu}} \right] j \sin k_{z0\nu} \ell + 2Y_{p0\nu} \cos k_{z0\nu} \ell, \quad (\text{I.27})$$

et

$$\frac{g_{0\nu}(\ell, \ell)}{g_{0\nu}(\ell, 0)} = \cos k_{z0\nu} \ell + \frac{Y_{p0\nu}}{Y_{i0\nu}} j \sin k_{z0\nu} \ell, \quad (\text{I.28})$$

où

$$Y_{p0\nu} = \frac{S}{\rho_0 c_0} \zeta_{z0\nu} \quad \text{et} \quad Y_{i0\nu} = \frac{S}{\rho_0 c_0} \frac{k_{z0\nu}}{k_0} (1 - K_v).$$

En faisant usage de ces deux dernières relations dans l'expression (I.22) de $p_{0\nu}^c(\ell)$, il vient

$$p_{0\nu}^c(\ell) = \frac{S \langle v_e | \psi_{0\nu}^c \rangle_e}{Y_{T00\nu} + Y_{r0\nu} \left[\frac{Y_{p0\nu}}{Y_{i0\nu}} j \sin k_{z0\nu} \ell + \cos k_{z0\nu} \ell \right]}, \quad (\text{I.29})$$

où

$$Y_{T00\nu} = \left[Y_{i0\nu} + \frac{Y_{p0\nu}^2}{Y_{i0\nu}} \right] j \sin k_{z0\nu} \ell + 2Y_{p0\nu} \cos k_{z0\nu} \ell. \quad (\text{I.30})$$

L'expression de $p_{0\nu}^c(0)$ est déduite de (4.58) :

$$p_{0\nu}^c(0) = \frac{j k_0}{1 - K_v} \frac{\rho_0 c_0}{S} g_{0\nu}(0, \ell) \left[S \langle v_e | \psi_{0\nu}^c \rangle_e \frac{g_{0\nu}(0, 0)}{g_{0\nu}(0, \ell)} - Y_{r0\nu} p_{0\nu}^c(\ell) \right],$$

qui donne, en faisant usage de (I.22),

$$p_{0\nu}^c(0) = p_{0\nu}^c(\ell) \left[\frac{g_{0\nu}(0, 0)}{g_{0\nu}(\ell, 0)} + Y_{r0\nu} \frac{j k_0}{1 - K_v} \frac{\rho_0 c_0}{S} \frac{g_{0\nu}^2(\ell, \ell) - g_{0\nu}^2(\ell, 0)}{g_{0\nu}(\ell, 0)} \right]. \quad (\text{I.31})$$

Les expressions (I.23) et (I.24) des fonctions $g_{0\nu}(\ell, 0)$ et $g_{0\nu}(\ell, \ell)$ permettent d'écrire la relation suivante

$$\frac{g_{0\nu}^2(\ell, \ell) - g_{0\nu}^2(\ell, 0)}{g_{0\nu}(\ell, 0)} = \frac{\sin k_{z0\nu} \ell}{k_{z0\nu}}. \quad (\text{I.32})$$

En faisant usage de cette dernière relation ainsi que de la relation (I.28) dans l'expression de $p_{0\nu}^c(0)$, il vient

$$p_{0\nu}^c(0) = p_{0\nu}^c(\ell) \left[\frac{Y_{r0\nu} + Y_{p0\nu}}{Y_{i0\nu}} j \sin k_{z0\nu} \ell + \cos k_{z0\nu} \ell \right]. \quad (\text{I.33})$$

I.7 Calcul des $\langle \psi_{0\nu}^c \rangle_{e,r}$

Les fonctions propres $\psi_{\mu\nu}^c$ sont déterminées dans le paragraphe 4.3 (éq. 4.27). Les valeurs moyennes $\langle \psi_{0\nu}^c \rangle_{e,r}$ sont alors données par

$$\langle \psi_{0\nu}^c \rangle_{e,r} = \frac{2}{a_{e,r}^2} \int_0^{a_{e,r}} \frac{1}{a_0 b_{0\nu}} J_0(k_{w0\nu} r) r dr,$$

soit

$$\langle \psi_{0\nu}^c \rangle_{e,r} = \begin{cases} \frac{1}{a_0 b_{00}} & \text{si } \nu = 0 \\ \frac{1}{a_0 b_{0\nu}} \frac{a}{a_{e,r}} \frac{2}{\gamma_{0\nu}} J_1(k_{w0\nu} a_{e,r}) & \text{si } \nu \neq 0. \end{cases} \quad (\text{I.34})$$

I.8 Calcul de la pression moyenne $\langle p(\ell) \rangle_r$ en tenant compte d'une pondération [25]

Afin de tenir compte du mouvement non uniforme de la membrane du récepteur et de son influence sur la sensibilité du microphone dans son modèle de champ acoustique, Rasmussen

introduit dans le calcul de la pression moyenne $\langle p(\ell) \rangle_r$ sur le récepteur une pondération $u_r(r)$ de la forme suivante :

$$u_r(r) = \frac{J_0(k_r r) - J_0(k_r a_r)}{J_2(k_r a_r)} , \quad (\text{I.35})$$

où k_r est défini pour le récepteur de la même façon que k_e pour l'émetteur (éq. I.13).

La moyenne pondérée $\langle p(\ell) \rangle_r$ est alors écrite :

$$\begin{aligned} \langle p(\ell) \rangle_r &= \frac{1}{S_r} \int_{S_r} u_r(r_0) p(r_0, \ell) dS_0 \\ &= \frac{2}{a_r^2} \sum_{\nu} p_{0\nu}^c(\ell) \int_0^{a_r} u_r(r_0) \psi_{0\nu}^c(r_0) r_0 dr_0 , \end{aligned}$$

ce qui donne, compte tenu des expressions (I.35) et (4.27) de u_r et des $\psi_{0\nu}$, et en faisant usage des relations [5.52.1], [8.441.2], [5.54.1] et [8.404.2] de la référence [13] et de l'équation (4.28),

$$\langle p(\ell) \rangle_r = \sum_{\nu} \frac{1}{a_0 b_{0\nu}} p_{0\nu}^c(\ell) U_{0\nu} , \quad (\text{I.36})$$

avec

$$U_{0\nu} = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu = 0 \\ \frac{a}{a_r} \frac{2}{\gamma_{0\nu}} \frac{k_r}{k_r^2 - k_{w0\nu}^2} \frac{k_{w0\nu} J_1(k_r a_r) J_0(k_{w0\nu} a_r) - k_r J_0(k_r a_r) J_1(k_{w0\nu} a_r)}{J_2(k_r a_r)} & \text{si } \nu \neq 0 . \end{cases} \quad (\text{I.37})$$

Annexe J

Incertitudes relatives aux techniques de mesures

L'objet de cette annexe est de présenter brièvement le calcul des incertitudes sur les résultats d'étalonnage. Après quelques rappels et définitions sur les calculs d'incertitudes, une application aux résultats d'étalonnages obtenus par réciprocity est présentée. Les incertitudes ainsi obtenues au LNE sont ensuite détaillées et analysées.

J.1 Rappels sur le calcul d'incertitudes [18]

L'incertitude-type est l'incertitude d'une mesure exprimée sous la forme d'un écart-type. L'incertitude-type de l'estimation y d'une grandeur Y , notée $u(y)$ est la racine carrée de la variance de y , notée $V(y)$.

L'incertitude-type composée est l'incertitude-type du résultat d'une mesure lorsque ce résultat est obtenu à partir des valeurs d'autres grandeurs. Elle est égale à la racine carrée de la somme des variances ou covariances de ces autres grandeurs, pondérées par la variation du résultat de mesure en fonction de celle de ces grandeurs.

Ainsi, soit une grandeur Y déterminée à partir de n autres grandeurs $X_1, X_2, \dots, X_n$ par la fonction f telle que

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

soit y et x_i des estimations respectivement de Y et X_i , l'incertitude-type composée $u_c(y)$ est donnée par

$$V(y) = u_c^2(y) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i), \quad (\text{J.1})$$

où les $u(x_i)$ sont les incertitudes-type des évaluations x_i des X_i .

L'incertitude élargie est une grandeur définissant un intervalle autour du résultat d'une mesure dans lequel doit se trouver une partie fixée (cf. infra) des valeurs qui peuvent être trouvées pour la grandeur mesurée. L'incertitude élargie U de l'estimation y de la grandeur Y est déduite de l'incertitude-type $u(y)$ par la relation

$$U = k u(y), \quad (\text{J.2})$$

où k est appelé facteur d'élargissement.

Ainsi, considérant y comme la meilleure estimation de la valeur de Y , l'intervalle $[y - U, y + U]$ doit contenir une grande fraction p des valeurs qui peuvent être trouvées pour Y . La grandeur p est le niveau de confiance de l'intervalle $[y - U, y + U]$.

Pour obtenir un facteur d'élargissement k correspondant au niveau de confiance p , il faut connaître la loi de probabilité de Y caractérisée par le résultat de mesure et l'écart-type composé. Cette loi est souvent une loi normale (tableau J.1) mais une loi rectangulaire peut aussi être choisie.

Niveau de confiance p (pourcentage)	Facteur d'élargissement k
68,27	1
90	1,645
95	1,960
95,45	2
99	2,576
99,73	3

TAB. J.1 – Valeurs de l'élargissement k qui donne un intervalle correspondant au niveau de confiance p , en supposant une loi normale.

Dans le cas d'une loi de probabilité rectangulaire, le niveau de confiance p est de 100% pour un facteur d'élargissement $k \geq \sqrt{3}$.

Le projet de réforme de la norme CEI 61094-2 [14] propose une liste des paramètres à prendre en compte dans le calcul des incertitudes.

Le calcul de l'incertitude sur l'efficacité est effectué en deux parties :

- évaluation de l'influence des paramètres entrant directement en compte dans le calcul du produit des efficacités (§ J.2),
- influence des paramètres qui ne rentrent pas directement dans la formulation du calcul du produit des efficacités (§ J.3).

J.2 Incertitudes sur les paramètres entrant directement dans le calcul du produit des efficacités

L'efficacité M_p d'un microphone n'est accessible que par le biais des trois produits d'efficacités déterminés par la méthode de réciprocité.

Soit un triplet de microphones d'efficacités M_{p1} , M_{p2} , M_{p3} et dont les produits des efficacités sont notés M_{12} , M_{13} , M_{23} , l'efficacité M_{p1} , déterminée par la méthode de réciprocité, s'écrit

$$M_{p1} = \sqrt{\frac{M_{12}M_{13}}{M_{23}}} . \quad (\text{J.3})$$

D'après les relations (1.17) et (2.38)

$$M_{pe}M_{pr} = Z_E Y_T, \quad \text{avec} \quad Z_E = \frac{-1}{j\omega C_{ref}} \frac{u_A}{u_B} \frac{u'_B}{u'_A},$$

et quel que soit le modèle physique choisi pour calculer les admittances acoustiques de transfert, ces produits d'efficacités dépendent :

1. de paramètres indépendants des microphones utilisés et de la mesure réalisée (notés X , sans indice) :

C_{ref} la capacité de mesure,

ℓ_c, a la longueur et le rayon du coupleur,

ℓ_t, a_t la longueur et le rayon des tubes capillaires,

f la fréquence,

2. de paramètres liés uniquement aux microphones (notés X_i , $i = 1, 2, 3$ étant l'indice repérant le microphone) :

ℓ_i la profondeur du volume frontal,

a_i le rayon de la partie vibrante de la membrane,

V_{fi} le volume frontal,

V_i^+ les volumes «cachés»,

A_i^+ les surfaces «cachées»,

V_{bfi} le volume équivalent aux basses fréquences,

F_{0i} la fréquence de résonance,

R_{ai} l'amortissement,

C_{Pi} le coefficient de correction de pression,

C_{Ti} le coefficient de correction de température,

3. les paramètres liés aux mesures (notés X_{ij} , les indices $i = 1, 2, 3$ et $j = 1, 2, 3$ repérant respectivement l'émetteur et le récepteur) :

$(u_r/u_e)_{ij}$ le rapport des tensions de sortie et d'entrée du système constitué des microphones récepteur et émetteur i et j ,

P_{ij} la pression ambiante relevée durant la mesure de $(u_r/u_e)_{ij}$,

T_{ij} la température ambiante relevée durant la mesure de $(u_r/u_e)_{ij}$,

H_{ij} le taux d'humidité relative relevé durant la mesure de $(u_r/u_e)_{ij}$.

D'après les relations (J.1) et (1.17), la contribution des paramètres X , X_i et X_{ij} dans l'incertitude-type de l'efficacité M_{p1} , est donnée par

$$u_c^2(M_{p1}) = \sum \left[\left(\frac{\partial M_{p1}}{\partial x} \right)^2 V(x) + \left(\frac{\partial M_{p1}}{\partial x_i} \right)^2 V(x_i) + \left(\frac{\partial M_{p1}}{\partial x_{ij}} \right)^2 V(x_{ij}) \right]. \quad (\text{J.4})$$

L'incertitude-type composée $u_c^2(M_{p1})$ peut donc être exprimée en fonction des dérivées partielles des produits d'efficacités. Cette incertitude-type est la somme des contributions de chaque paramètre d'influence, calculées selon les formules données dans les paragraphes suivants.

J.2.1 Contribution des paramètres indépendants des microphones et de la mesure à l'incertitude sur l'efficacité M_{p1}

Soit X un paramètre entrant en compte dans le calcul des produits des efficacités, indépendant des microphones utilisés et de la mesure effectuée. La contribution de X dans l'incertitude composée $u_c^2(M_{p1})$ s'écrit simplement sous la forme

$$\left(\frac{\partial M_{p1}}{\partial x} \right)^2 V(x). \quad (\text{J.5})$$

J.2.2 Contribution des paramètres liés uniquement aux microphones à l'incertitude sur l'efficacité M_{p1}

À part les coefficients de correction de pression et de température, les paramètres liés uniquement aux microphones sont tous compris entièrement dans l'expression de l'admittance acoustique des microphones (éq. 2.26, 2.28) ainsi que dans l'expression du volume et de la longueur totale de la cavité formée par les microphones et le coupleur.

Il reste à savoir si la valeur de l'efficacité d'un microphone, déterminée par la méthode de réciprocité, est influencée par les paramètres des deux autres microphones (ce qui ne devrait pas être le cas a priori). L'étude qualitative rapide qui suit de l'efficacité M_{p1} , exprimée selon un modèle physique simplifié, ainsi que des applications numériques simples permettent de donner des éléments de réponse.

L'efficacité M_{p1} du microphone 1 est donnée par l'expression (J.3), compte tenu de (1.17), soit

$$M_{p1} = \sqrt{\frac{M_{12}M_{13}}{M_{23}}} = \sqrt{\frac{Z_{E12}Z_{E13}}{M_{23}}} \sqrt{Y_{T12}Y_{T13}},$$

où les admittances acoustiques de transfert Y_{Tij} sont écrites d'après l'expression (2.12)

$$Y_{Tij} = j\omega \frac{V_{ij}}{\gamma_{ij}P_{ij}} C_{THij} + Y_i + Y_j, \quad (\text{J.6})$$

où $V_{ij} = V + V_{fi} + V_{fj} + V_i^+ + V_j^+$ et C_{THij} dépend des conditions ambiantes, du volume V_{ij} et de la surface totale A_{ij} .

i. Admittances des microphones

La dérivée partielle de M_{p1} par rapport à l'admittance Y_1 donne alors

$$\frac{\partial M_{p1}}{\partial Y_1} = \sqrt{\frac{Z_{E12}Z_{E13}}{M_{23}}} \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{Y_{T12}}{Y_{T13}}} \frac{\partial Y_{T13}}{\partial Y_1} + \sqrt{\frac{Y_{T13}}{Y_{T12}}} \frac{\partial Y_{T12}}{\partial Y_1} \right],$$

avec $\frac{\partial Y_{T12}}{\partial Y_1} = \frac{\partial Y_{T13}}{\partial Y_1} = 1$, ce qui conduit à

$$\frac{\partial M_{p1}}{\partial Y_1} = \frac{1}{2} M_{p1} \left(\frac{1}{Y_{T12}} + \frac{1}{Y_{T13}} \right). \quad (\text{J.7})$$

De la même façon, la dérivée partielle de M_{p1} par rapport aux admittances Y_2 et Y_3 s'écrit

$$\frac{\partial M_{p1}}{\partial Y_2} = \frac{1}{2} M_{p1} \left(\frac{1}{Y_{T12}} - \frac{1}{Y_{T23}} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial M_{p1}}{\partial Y_3} = \frac{1}{2} M_{p1} \left(\frac{1}{Y_{T13}} - \frac{1}{Y_{T23}} \right). \quad (\text{J.8})$$

Les admittances acoustiques de transfert Y_{Tij} dépendent à la fois des paramètres des microphones et des conditions ambiantes pendant chaque mesure. Les microphones ont des caractéristiques peu différentes et les équipements utilisés pour les étalonnages permettent de faire en sorte que les conditions ambiantes varient peu d'une mesure à l'autre (mesures à pression contrôlée, local climatisé). Ainsi, les admittances acoustiques de transfert Y_{Tij} sont supposées peu différentes entre elles. Les deux dernières dérivées partielles sont donc quasi-nulles et l'efficacité M_{p1} du microphone 1 peut donc être considérée comme indépendante des admittances des microphones 2 et 3.

Une application numérique montre que les dérivées partielles $\frac{\partial M_{p1}}{\partial Y_2}$ et $\frac{\partial M_{p1}}{\partial Y_3}$ atteignent au maximum $10^{-3} \frac{\partial M_{p1}}{\partial Y_1}$ pour des différences «extrêmes» entre les admittances Y_1 , Y_2 et Y_3 . La participation de ces termes dans l'incertitude composée $u_c(M_{p1})$ peut donc être négligée.

ii. *Caractéristiques géométriques des microphones*

Les caractéristiques géométriques des microphones n'ont qu'une participation réduite dans les résultats d'étalonnage. La profondeur et le volume frontal et ne présentent que peu de variations d'un microphone à l'autre. Un simple calcul permet de s'assurer que les caractéristiques géométriques des microphones 2 et 3 ont une contribution négligeable dans l'incertitude composée $u_c(M_{p1})$.

Soit X_1 , X_2 , X_3 ces paramètres géométriques, les dérivées partielles de M_{p1} par rapport aux estimations x_1 , x_2 , x_3 des X_1 , X_2 , X_3 s'écrivent

$$\frac{\partial M_{p1}}{\partial x_1} = \frac{1}{2} M_{p1} \left[\frac{1}{M_{12}} \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{1}{M_{13}} \frac{\partial M_{13}}{\partial x_1} \right], \quad (\text{J.9a})$$

$$\frac{\partial M_{p1}}{\partial x_2} = \frac{1}{2} M_{p1} \left[\frac{1}{M_{12}} \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} - \frac{1}{M_{23}} \frac{\partial M_{23}}{\partial x_2} \right], \quad (\text{J.9b})$$

$$\frac{\partial M_{p1}}{\partial x_3} = \frac{1}{2} M_{p1} \left[\frac{1}{M_{13}} \frac{\partial M_{13}}{\partial x_3} - \frac{1}{M_{23}} \frac{\partial M_{23}}{\partial x_3} \right]. \quad (\text{J.9c})$$

Les paramètres géométriques X_i étant supposés avoir une influence équivalente sur les produits M_{ij} , les différentes dérivées partielles $\frac{\partial M_{ij}}{\partial x_i}$ sont considérées comme équivalentes.

Les dérivées partielles par rapport aux paramètres des microphones 2 et 3 peuvent donc être négligées dans le calcul de l'incertitude composée $u_c(M_{p1})$.

iii. *Coefficients de correction de pression et de température*

Chaque produit d'efficacités M_{ij} déterminé dans les conditions ambiantes (P_{ij} , T_{ij}) doit être ramené aux mêmes conditions standard (P , T) afin de déterminer les efficacités individuelles des microphones. Chaque produit M_{ij} est ramené aux conditions standard à l'aide des coefficients de correction de pression et de température C_{Pi} , C_{Pj} et C_{Ti} , C_{Tj} (§ 2.2.5).

De même que pour les caractéristiques géométriques des microphones, la dérivée partielle de l'efficacité M_{p1} par rapport aux coefficients de correction de pression et de température propres aux microphones 2 et 3 est quasi-nulle.

Finalement, l'efficacité individuelle d'un microphone, déterminée par la méthode de réciprocité, peut être considérée comme indépendante des paramètres des autres microphones.

La contribution des paramètres de type X_i dans l'incertitude composée $u_c^2(M_{p1})$ (J.4) se réduit au seul terme

$$\left(\frac{\partial M_{p1}}{\partial x_1} \right)^2 V(x_1). \quad (\text{J.10})$$

J.2.3 Contribution des paramètres liés uniquement à la mesure à l'incertitude sur l'efficacité M_{p1}

i. Paramètres liés aux conditions ambiantes

La pression P_{ij} , la température T_{ij} et le taux d'humidité dans l'air H_{ij} décrivent les conditions ambiantes pendant la mesure du rapport de la tension de sortie du microphone i sur la tension d'entrée et du microphone j $(u_r/u_e)_{ij} = (u_A/u_B)_{ij}(u'_B/u'_A)_{ij}$. Ils peuvent être arbitrairement décomposés de la façon suivante :

$$P_{ij} = P_0 + \Delta P_{ij}, \quad T_{ij} = T_0 + \Delta T_{ij}, \quad H_{ij} = H_0 + \Delta H_{ij},$$

c'est-à-dire comme la somme d'un terme constant (indice 0) et d'un terme petit (ΔX_{ij}) exprimant des fluctuations aléatoires des conditions ambiantes autour de la valeur constante portant l'indice 0.

La contribution des termes d'indice 0 dans l'incertitude composée $u_c(M_{p1})$ représente alors la contribution de l'erreur systématique due aux appareils de mesure. Cette erreur étant indépendante de la mesure effectuée, la contribution des termes P_0 , T_0 et H_0 dans l'incertitude composée $u_c(M_{p1})$ est de la même forme que les paramètres de type X (J.5).

La contribution des termes de type ΔX_{12} , ΔX_{13} , ΔX_{23} dans l'incertitude composée $u_c(M_{p1})$ représente la contribution de l'erreur due aux fluctuations aléatoires des conditions ambiantes d'une mesure à l'autre. Les termes ΔX_{12} , ΔX_{13} , ΔX_{23} dépendent respectivement des mesures 12, 13 et 23 uniquement. Les variances $V(\Delta X_{ij})$ de ces termes sont égales pour chacune de ces mesures. La contribution totale des termes ΔX_{12} , ΔX_{13} , ΔX_{23} dans l'incertitude composée $u_c(M_{p1})$ s'écrit alors

$$\left[\left(\frac{\partial M_{p1}}{\partial \Delta X_{12}} \right)^2 + \left(\frac{\partial M_{p1}}{\partial \Delta X_{13}} \right)^2 + \left(\frac{\partial M_{p1}}{\partial \Delta X_{23}} \right)^2 \right] V(\Delta X_{ij}). \quad (\text{J.11})$$

ii. Rapport des tensions de l'émetteur et du récepteur

Les variances des rapports de tensions $(u_r/u_e)_{ij} = (u_A/u_B)_{ij}(u_{B'}/u_{A'})_{ij}$ étant égales, la contribution des $(u_r/u_e)_{ij}$ dans l'incertitude-type composée est de la même forme que celle des termes ΔX_{ij} donnée plus haut (J.11).

J.3 Incertitudes sur les paramètres n'entrant pas en compte dans le calcul du produit des efficacités

Il existe d'autres paramètres qui ne font pas partie du calcul de l'efficacité mais qui influencent néanmoins le résultat de l'étalonnage.

L'efficacité M_{p1} est proportionnelle à la tension de polarisation U_0 (éq. 1.8). La dérivée partielle de M_{p1} par rapport à U_0 donne donc

$$\frac{\partial M_1}{\partial U_0} = \frac{M_{p1}}{U_0},$$

ce qui donne une contribution de U_{pol} dans l'incertitude de M_{p1} de

$$\left(\frac{\partial M_{p1}}{\partial U_0} \right)^2 V(U_0) = \frac{M_{p1}^2}{U_0^2} V(U_0), \quad (\text{J.12})$$

$V(U_0)$ étant la variance de U_0 .

D'autre part, des phénomènes parasites d'origine électrique ou acoustique intervenant durant la mesure participent à l'incertitude sur les résultats d'étalonnage. Ces phénomènes sont le bruit ambiant, les fuites acoustiques, la distorsion, la diaphonie, les effets électriques dans la garde des microphones.

Enfin, doivent être comptabilisés, dans le calcul des incertitudes, les erreurs d'arrondis, la répétabilité et les erreurs dues au modèle théorique utilisé pour représenter le système (erreur sur la prise en compte des effets thermiques et visqueux et des ondes radiales).

Les incertitudes sur ces paramètres sont seulement évalués de manière intuitive.

J.4 Incertitudes obtenues au LNE

Le graphique de la figure J.1 représente, en fonction de la fréquence, l'incertitude élargie, avec un facteur d'élargissement 2 (éq. J.2), sur le module (dB) de l'efficacité d'un microphone LS2P obtenues au LNE. Cette incertitude peut être comparée à celle obtenue au DPLA (tab. J.2). En basses fréquences et jusqu'à environ 5 kHz, l'incertitude du LNE correspond à celle du DPLA. Dans les hautes fréquences, l'incertitude donnée par le LNE est supérieure de plus d'un dixième de dB à celle du DPLA à 25 kHz.

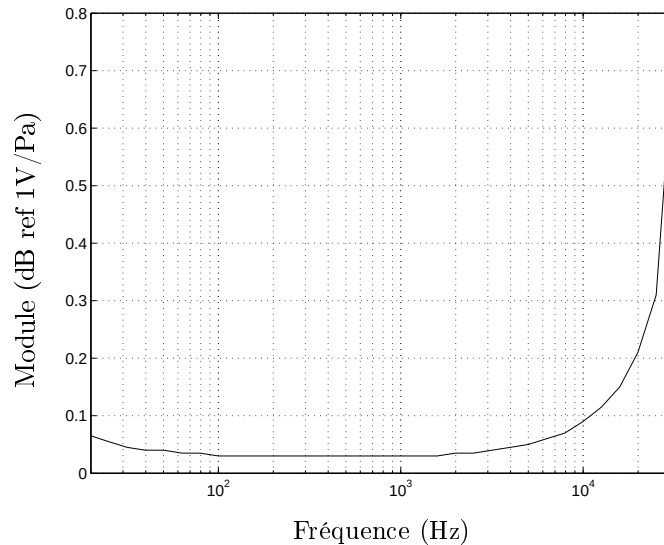


FIG. J.1 – Incertitude élargie sur le module de l'efficacité d'un microphone LS2P.

Gammes de fréquences (Hz)	Incertitudes élargies (dB)
50–99	0,04
100–10k	0,03
10,1k–12,6k	0,04
12,7k–16k	0,05
16,1k–20k	0,08
20,1k–25,2k	0,14

TAB. J.2 – Incertitudes élargies annoncées par le DPLA pour des microphones LS2P.

Une analyse de la part relative occupée par les différents paramètres d'influence dans cette incertitude élargie, aux basses et aux hautes fréquences, est illustrée par les graphiques des figures J.2 et J.3. Ces graphiques permettent de déterminer les paramètres pour la mesure desquels un soin particulier doit être mis.

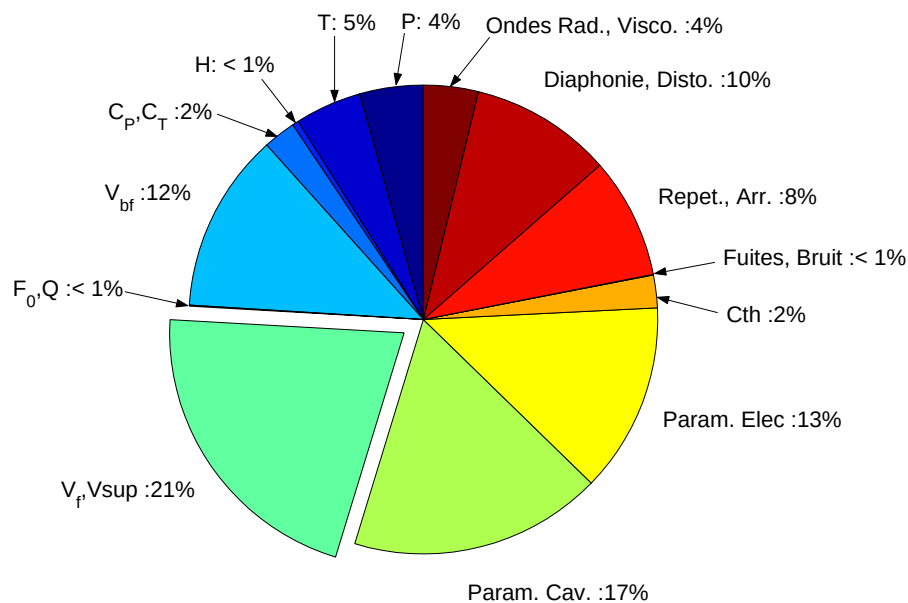


FIG. J.2 – Participation des paramètres d'influence dans l'incertitude élargie $U(M_p)$ à 1000 Hz.

En basses fréquences, la part la plus importante dans l'incertitude élargie est occupée par les paramètres géométriques, plus particulièrement le volume frontal du microphone. En effet, le volume frontal d'un microphone est très délicat à déterminer, le diamètre interne n'étant pas mesurable avec précision (§ 2.3.1).

Pour des fréquences plus élevées, les incertitudes sur les phénomènes de distorsion et surtout de diaphonie prennent des proportions très élevées dans l'incertitude élargie. La diaphonie est, en effet un phénomène délicat à caractériser car il peut avoir différentes origines (capacité parasite entre les microphones et entre les câbles). La part importante prise par ces effets parasites montre qu'une étude expérimentale plus approfondie visant à mieux les caractériser est nécessaire.

Enfin, il apparaît que l'influence de l'impédance du microphone sur l'efficacité vaut surtout

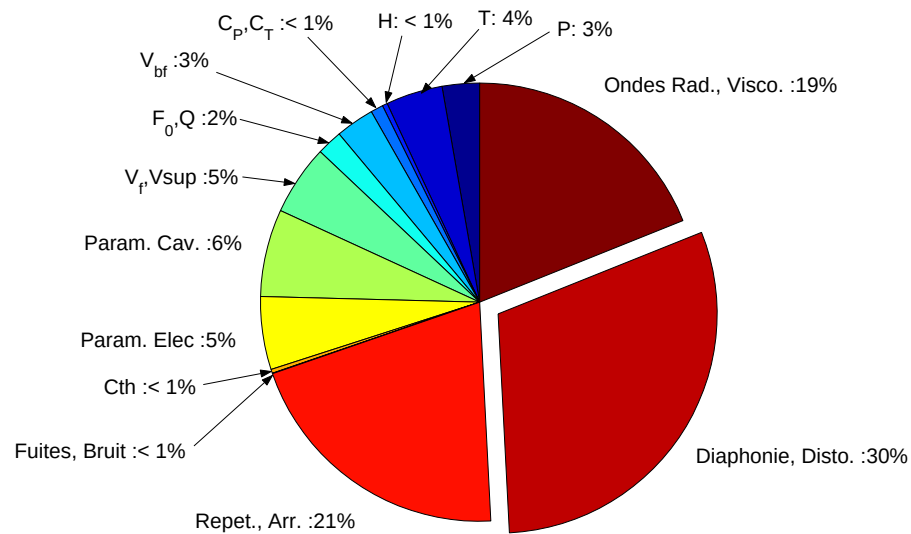


FIG. J.3 – Participation des paramètres d'influence dans l'incertitude élargie $U(M_p)$ à 10000 Hz.

par le volume aux basses fréquences. La fréquence de résonance et l'amortissement n'ont qu'une très petite part dans l'incertitude élargie. Une connaissance très précise de ces paramètres n'est donc pas nécessaire et les méthode actuellement en usage, bien qu'imparfaites semblent alors suffisantes ici.

A noter que cette étude des incertitudes a été effectuée avant que ne soient remis en cause les expressions normalisées pour l'admittance acoustique de transfert Y_T et les modèles sur lesquels elles reposent. Depuis, il est apparu que les effets thermiques sont pris en compte de façon inexacte et que les effets visqueux ne doivent pas être négligés (§ 3). Les incertitudes sur la prise en compte de ces deux effets est donc nettement sous-évaluée dans cette étude des incertitudes sur les étalonnages en pression de microphones par la méthode de réciprocité. Par exemple, l'erreur commise sur l'expression de la correction thermique C_{TH} est ici évaluée à 1% de sa valeur (soit environ 0.0067 dB à 20 Hz pour un microphone LS2P), ce qui est très en dessous de l'erreur commise en réalité (plus de 0.05 dB sur la valeur des efficacités obtenues lors d'un étalonnage par réciprocité, cf. § 3.5).

Annexe K

Calculs intermédiaires sur le modèle développé pour mesurer l'impédances des éléments de l'oreille artificielle

Cette annexe développe un calcul de produit scalaire dont le résultat est utilisé dans le chapitre 5 (§ 5.3.3) mais qui n'y est pas développé afin de ne pas en alourdir le propos.

Le produit scalaire $\langle y_1 \psi_{\mu'\nu'}^{t'} | \psi_{0\nu}^c \rangle_{\sigma_1}$, dans l'expression (5.43) des coefficients $p_{0\nu}^c(z)$, est donné par :

$$\langle y_1 \psi_{\mu'\nu'}^{t'} | \psi_{0\nu}^c \rangle_{\sigma_1} = \iint_{\sigma_1} y_1(\theta_0) \psi_{0\nu}^c(a) \psi_{\mu'\nu'}^{t'}(a, \theta_0) dS_0 ,$$

où l'admittance spécifique y_1 de l'élément à caractériser (fente ou tubes) est fonction de l'angle uniquement et les fonctions propres $\psi_{0\nu}^c$ sont indépendantes de l'angle (éq. 4.27a et b).

Pour décrire la surface σ_1 , θ_0 varie de 0 à 2π et z_0 de ℓ_1 à $\ell_1 + \delta z$, δz étant très petit devant ℓ_1 , ce qui donne

$$\langle y_1 \psi_{\mu'\nu'}^c | \psi_{0\nu}^c \rangle_{\sigma_1} = a \delta z \psi_{0\nu}^c(a) \int_0^{2\pi} y_1(\theta_0) \psi_{\mu'\nu'}^{t'}(a, \theta_0) d\theta_0 . \quad (\text{K.1})$$

Les paragraphes K.1 et K.2 détaillent le calcul de ce produit scalaire dans le cas où l'admittance à caractériser est respectivement une fente annulaire d'admittance d'entrée Y_f ou un réseau de quatre tubes cylindriques d'admittance d'entrée individuelle Y_t .

K.1 Fente annulaire

Dans le cas où l'élément à caractériser est une fente annulaire d'admittance Y_f , répartie uniformément sur la surface $\sigma_1 = 2\pi a \delta z$, l'admittance spécifique y_1 est indépendante de l'angle θ et elle est écrite

$$y_1 = \frac{\rho_0 c_0}{\sigma_1} Y_f = \frac{\rho_0 c_0}{2\pi a \delta z} Y_f .$$

L'expression (K.1) donne alors

$$\langle y_1 \psi_{\mu'\nu'}^{t'} | \psi_{0\nu}^c \rangle_{\sigma_1} = \rho_0 c_0 Y_f \psi_{0\nu}^c(a) \int_0^{2\pi} \psi_{\mu'\nu'}^{t'}(a, \theta_0) d\theta_0 ; \quad (\text{K.2})$$

d'après les expressions (éq. 4.27a et b) des fonctions propres, l'intégrale sur θ_0 est nulle pour $\mu \neq 0$ et pour $t' = s$, $\mu' = 0$, ce qui donne alors pour le produit scalaire

$$\langle y_1 \psi_{\mu'\nu'}^{t'} | \psi_{0\nu}^c \rangle_{\sigma_1} = \rho_0 c_0 Y_f \psi_{0\nu}^c(a) \psi_{0\nu'}^c(a) \delta_{t'c} \delta_{\mu'0}. \quad (\text{K.3})$$

K.2 Réseau de quatre tubes cylindriques

Dans le cas où l'élément à caractériser est un réseau de quatre tubes d'admittance individuelle Y_t , régulièrement répartis en $\theta_n = n\pi/2$ ($n=0$ à 3), sur quatre surfaces égales chacune à $a \delta\theta \delta z$, l'admittance spécifique y_1 est écrite

$$y_1 = \frac{\rho_0 c_0}{a \delta\theta \delta z} Y_t \quad \text{si } \theta = \theta_n \quad \text{et} \quad y_1 = 0 \quad \text{si } \theta \neq \theta_n,$$

et la surface σ_1 vaut $4\delta\theta a \delta z$.

L'expression (K.1) donne alors

$$\langle y_1 \psi_{\mu'\nu'}^{t'} | \psi_{0\nu}^c \rangle_{\sigma_1} = \rho_0 c_0 Y_t \psi_{0\nu}^c(a) \sum_{n=0}^3 \psi_{\mu'\nu'}^{t'}(a, \theta_n), \quad (\text{K.4})$$

soit

$$\langle y_1 \psi_{\mu'\nu'}^{t'} | \psi_{0\nu}^c \rangle_{\sigma_1} = \rho_0 c_0 Y_t \psi_{0\nu}^c(a) \frac{J_{\mu'}(\gamma_{\mu'\nu'})}{a_{\mu'} b_{\mu'\nu'}} \sum_{n=0}^3 \begin{cases} \cos \mu' \theta_n & \text{si } t' = c \\ \sin \mu' \theta_n & \text{si } t' = s. \end{cases} \quad (\text{K.5})$$

Compte tenu des relations suivantes

$$\sum_{n=0}^3 \cos \mu' \theta_n = \left(1 + (-1)^{\mu'}\right) \left(1 + \cos \mu' \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 4 & \text{si } \mu' = 0 \text{ modulo } 4 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (\text{K.6})$$

et

$$\sum_{n=0}^3 \sin \mu' \theta_n = \left(1 + (-1)^{\mu'}\right) \sin \mu' \frac{\pi}{2} = 0, \quad (\text{K.7})$$

et du fait que seuls les modes pour lesquels $\mu < 3$ sont pris en compte (les autres étant supposés avoir une contribution négligeable), l'expression (K.5) devient

$$\langle y_1 \psi_{\mu'\nu'}^{t'} | \psi_{0\nu}^c \rangle_{\sigma_1} = \rho_0 c_0 4 Y_t \psi_{0\nu}^c(a) \psi_{0\nu'}^c(a) \delta_{t'c} \delta_{\mu'0}. \quad (\text{K.8})$$

K.3 Expression générale

D'après les expressions (K.3) et (K.8), le produit scalaire $\langle y_1 \psi_{\mu'\nu'}^{t'} | \psi_{0\nu}^c \rangle_{\sigma_1}$ (éq. K.1) peut alors être exprimé sous la forme générale suivante :

$$\langle y_1 \psi_{\mu'\nu'}^{t'} | \psi_{0\nu}^c \rangle_{\sigma_1} = \rho_0 c_0 Y_1 \psi_{0\nu}^c(a) \psi_{0\nu'}^c(a) \delta_{t'c} \delta_{\mu'0}, \quad (\text{K.9})$$

où Y_1 vaut Y_f si l'élément à caractériser est une fente annulaire d'admittance acoustique Y_f et $4Y_t$ si cet élément est un réseau de quatre tubes cylindriques d'admittances acoustiques individuelles Y_t .

Annexe L

Description des coupleurs cylindriques comportant un petit composant acoustique en paroi

Dans cette annexe sont présentés des schémas simplifiés ainsi que les principales caractéristiques géométriques de deux coupleurs acoustiques, réalisés au LNE, qui comportent chacun un petit composant acoustique différent sur ses parois latérales. Les coupleurs sont réalisés de telle manière que ces petits composants (fente annulaire ou quatre tubes cylindriques) peuvent être chargés ou non par une cavité.

L'intérêt de ces coupleurs spéciaux est de reproduire individuellement des composants acoustiques ayant la même forme que les éléments constitutifs de l'oreille artificielle (§ 5.1). Ces coupleurs sont donc destinés à la validation expérimentale des modèles physiques pour les éléments constitutifs de l'oreille artificielle précédemment établis [9] par la méthode décrite dans le paragraphe 5.3.

L.1 Coupleur avec une fente annulaire en paroi

Ce coupleur (figure L.1) est composé de deux pièces principales (notées **A** sur la figure L.2) à symétrie cylindrique, maintenues ensemble par six entretoises. Le tout est fixé à l'aide de vis (non représentées) qui ne sont pas représentées sur le schéma afin de ne pas l'alourdir inutilement. La fente annulaire ainsi formée, à mi-longueur du coupleur, débouche sur une impédance quasi nulle (champ libre).

La fente peut également être chargée par une cavité annulaire, pour cela il suffit de remplacer les entretoises par un anneau de même hauteur et de rayon a_3 (pièce **B**, figure L.3). L'étanchéité à l'interface entre les pièces **A** et la pièce **B** est assurée par des joints toriques en caoutchouc placés dans des creux de la pièce **B** prévus à cet effet (non représentés sur la figure L.3). Les pièces sont fixées entre elles à l'aide de vis (non représentées sur la figure L.3).

Les valeurs des rayons a_1 , a_2 , a_3 et des épaisseurs e et h sont données dans le tableau L.1. A noter que l'épaisseur e est différente pour chaque configuration du coupleur. Ceci est dû à une différence entre la hauteur des entretoises et de la pièce **B**.

A causes d'imperfections dans la réalisation de la pièce **B**, les deux pièces **A** ne s'emboîtent pas bien dans celle-ci, ce qui augmente les épaisseurs e et h et entraîne probablement un défaut de parallélisme entre les deux faces de la fente et de la cavité arrière et peut-être aussi l'existence



FIG. L.1 – Coupleur avec une fente annulaire en paroi.

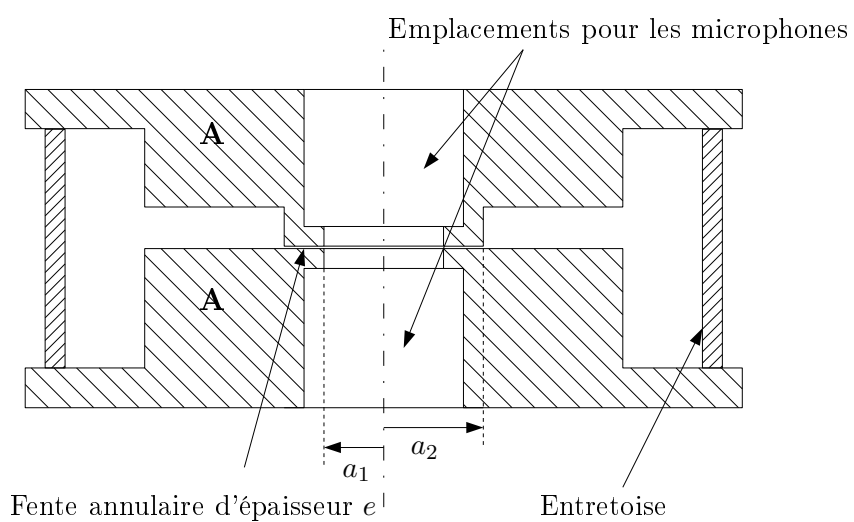


FIG. L.2 – Configuration mécanique simplifiée du coupleur avec une fente annulaire ouverte en paroi.

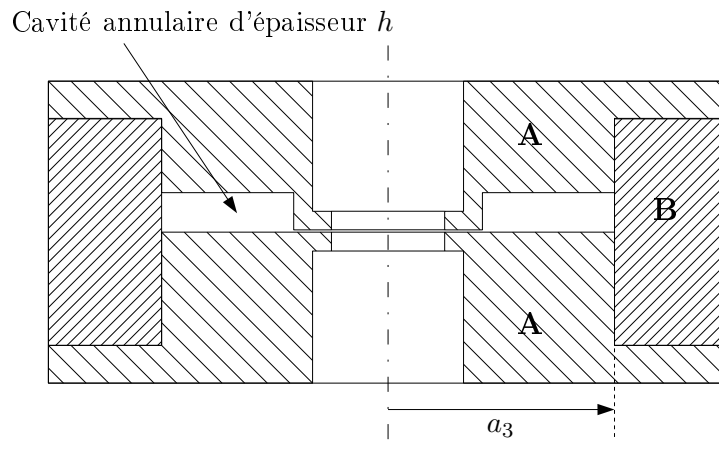


FIG. L.3 – Configuration mécanique simplifiée du coupleur avec une fente annulaire en paroi débouchant sur une cavité annulaire.

de fentes à l'arrière de la cavité annulaire. Ainsi, les valeurs données dans le tableau L.1 pour la configuration représentée dans la figure L.3 sont très probablement inexactes, ce qui entraîne des différences importantes entre les résultats expérimentaux et des résultats théoriques obtenus en supposant ces valeurs exactes. Une augmentation de 0,031 mm dans les valeurs de e et h qui correspondent la configuration de la figure L.3 permet de réduire l'écart entre les résultats théoriques et expérimentaux (§ 5.3.4). Tout ceci n'a pu apparaître lors des mesures fines des dimensions du coupleur, car celles-ci ont été effectuées individuellement sur chaque pièce le constituant ; les valeurs de e et h ont ensuite été déduites de ces mesures et ne tiennent donc pas compte des inexactitudes dues au montage des pièces entre elles.

a_1	4,6504
a_2	8,4833
a_3	17,8831
e	0,0712 (figure L.2) 0,0511 (figure L.3)
h	2,2059

TAB. L.1 – Dimensions (mm) du coupleur avec une fente annulaire en paroi.

L.2 Coupleur avec quatre tubes cylindriques en paroi

Ce coupleur (figure L.4) est composé de deux parties principales (pièces **A** et **B**, figure L.5), fixées par des vis (non représentées). L'étanchéité à l'interface entre ces deux pièces est assurée par des joints toriques (non représentés).

La partie **A** est percée à mi-longueur de quatre tubes cylindriques identiques disposés tous les 90°. Dans la configuration représentée sur la figure L.5, les tubes débouchent sur une cavité



FIG. L.4 – Coupleur avec quatre tubes cylindriques en paroi.

formée par la pièce **B**. Cette pièce peut être enlevée afin que les tubes débouchent sur une impédance quasi nulle.

Les dimensions de ce coupleur utilisées pour les calculs (§ 5.3.4) sont données dans le tableau L.2. L'incertitude sur le diamètre d_t est due au fait que celui-ci n'est pas accessible à la mesure, et donc la valeur donnée dans le tableau L.2 est celle fournie par le fabricant. Par ailleurs, les tubes sont percés dans des cylindres métalliques insérés dans le coupleur en plastique en forçant, évitant ainsi les fuites acoustiques due à de mauvais contacts (figure L.4). Ainsi, l'intérieur du coupleur présente des discontinuités aux endroits où sont insérés les tubes et la longueur ℓ_t de ceux-ci n'est pas accessible à la mesure sans les retirer du coupleur, ce qui explique que pour la valeur de ℓ_t aussi, ce sont les données du fabricant, sur lesquelles il y a encore une forte incertitude, qui sont données dans le tableau L.2.

a_1	4.6585
a_4	8.4464
a_5	20,5255
a_6	24,0675
h_1	4,0818
h_2	7,1499
d_t	$0,45 \pm 0,02$
ℓ_t	$3,8 \pm 0,05$

TAB. L.2 – Dimensions (mm) du coupleur avec quatre tubes cylindriques en paroi.

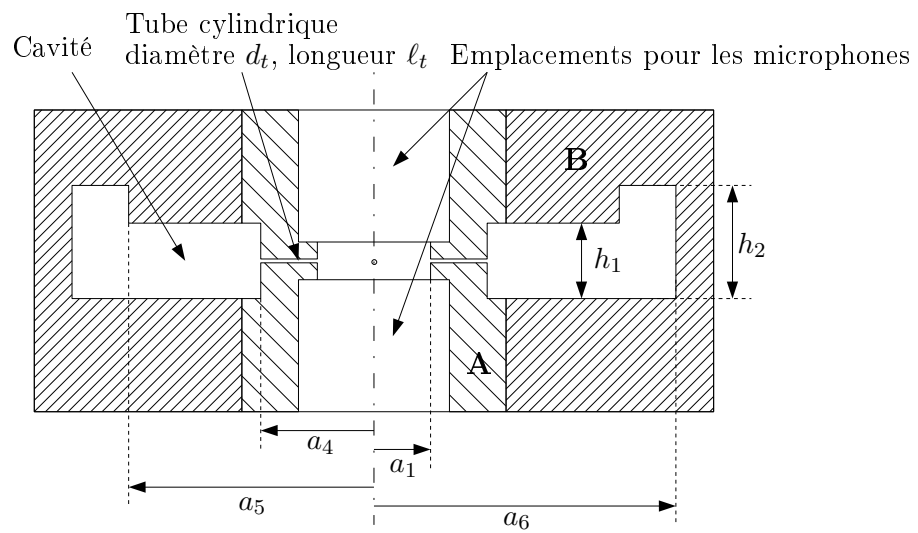


FIG. L.5 – Configuration mécanique simplifiée du coupleur avec quatre tubes cylindriques en paroi.

Annexe M

Compléments sur les techniques de mesures en usage au LNE

Le travail présenté dans ce mémoire est essentiellement analytique, cependant une partie non négligeable du travail effectué dans le cadre de cette thèse (contrat CIFRE) a porté sur le perfectionnement du banc d'étalonnage du LNE et à la mise au point du processus de mesure de haute précision par la réalisation d'un grand nombre d'étalonnages de microphones, ceci dans le cadre de la participation du LNE à une intercomparaison internationale sur l'étalonnage des microphones par la méthode de réciprocité (courant 2003). L'objet de cette annexe est de présenter ce travail expérimental.

Les paramètres et phénomènes perturbateurs qui doivent faire l'objet d'un soin particulier dans leur caractérisation, ainsi que les moyens utilisés pour ce faire sont présentés dans le paragraphe M.1. Le paragraphe M.2 expose rapidement le déroulement pratique de l'intercomparaison internationale à laquelle le LNE a participé et les résultats obtenus.

M.1 Paramètres à contrôler durant les mesures

La précision recherchée sur les étalonnages des microphones étant très importante, il est nécessaire d'apporter un grand soin aux mesures. Ainsi, tous les paramètres et perturbations pouvant avoir une influence sur les résultats de mesures doivent-ils être caractérisés avec précision et, si possible, contrôlés. Ceci a pour but de tenir compte au mieux de ceux-ci dans le calcul des incertitudes (annexe J), ce qui conduit à mieux cerner l'influence de chacun sur les résultats de mesures, et à en limiter les effets.

M.1.1 Fuites acoustiques

La cavité formée par les microphones et le coupleur ne peut être en pratique parfaitement close ; différentes imperfections mécaniques sont en effet à l'origine de fuites acoustiques. Pour comprendre l'origine de ces fuites et trouver comment mieux les maîtriser, il est nécessaire d'étudier avec précision la configuration mécanique de la cavité de couplage formée par les microphones emboîtés de part et d'autre du coupleur acoustique.

Tout d'abord, le coupleur lui-même (figure M.1) n'est pas constitué d'un seul bloc : il est en réalité un assemblage de plusieurs pièces en métal et en plastique, la pièce assurant le couplage



FIG. M.1 – Coupleur acoustique Brüel & Kjær .

acoustique entre les microphones étant un anneau en saphir de diamètre intérieur égal à celui des microphones (figure M.2).

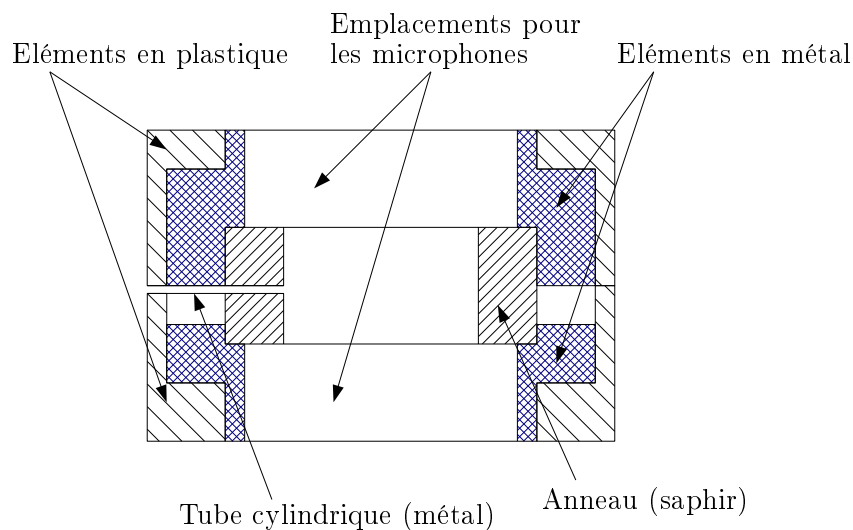


FIG. M.2 – Configuration mécanique simplifiée d'un coupleur Brüel & Kjær pour l'étalonnage de microphones.

A l'intérieur de l'assemblage, l'étanchéité entre les différentes pièces est assurée par des joints toriques en caoutchouc insérés à différents endroits (non représentés sur le schéma de la figure M.2).

Le tube cylindrique métallique représenté sur le schéma de la figure M.2 est inséré dans un trou pratiqué dans l'anneau en saphir. Ce tube permet d'éviter que la pression n'augmente trop brusquement et fortement dans la cavité au moment où les microphones y sont emboîtés, ce qui risquerait de les endommager. Ce tube doit ensuite être bouché durant les mesures par une aiguille métallique de même diamètre prévue à cet effet. Comme il peut y avoir un peu de jeu entre le tube et l'aiguille, celle-ci peut éventuellement être enduite d'une très fine couche de graisse afin d'assurer l'étanchéité entre elle et le tube.

Le tube est, en principe, inséré en force dans l'anneau, l'interface entre le saphir et le tube

ne devrait donc pas occasionner de fuites. Cependant, sur certains coupleurs, il est apparu qu'il y avait du jeu entre le tube et l'anneau, ce qui provoquait des fuites acoustiques importantes et difficilement maîtrisables. Pour remédier à cela, les tubes de tous les coupleurs prévus pour l'étalonnage des microphones en cavité ont été démontés puis collés.

Des fuites peuvent également être dues à un mauvais contact entre le coupleur (anneau en saphir) et les microphones. En effet, la face avant de la bague des microphones (partie dorée des microphones sur la photographie de la figure M.3) présente souvent des rayures, des défauts de planéité et des bavures sur les angles plus ou moins importants, ce qui dégrade fortement la qualité du contact entre le coupleur et les microphones, et donc l'étanchéité de la cavité de couplage. Par le passé, de la graisse était utilisée pour améliorer ce contact, mais ce procédé a été abandonné car la couche de graisse peut augmenter légèrement la longueur de la cavité et surtout cela salit beaucoup les microphones et le coupleur, et par suite, nécessite des nettoyages plus fréquents de l'ensemble, ce qui n'est jamais souhaitable, ce matériel devant être manipulé le moins possible. Ainsi, la solution retenue ici est de casser l'angle extérieur de la bague des microphones en y pratiquant un petit chanfrein et d'effectuer un léger et fin polissage de la face avant de cette bague.



FIG. M.3 – Microphones étalons de laboratoire (à l'avant Brüel & Kjær 4180, à l'arrière Brüel & Kjær 4160).

M.1.2 Conditions ambiantes

Les mesures sont sensibles aux conditions ambiantes dans lesquelles elles sont réalisées, c'est-à-dire à la pression statique P , la température statique T et le taux d'humidité dans l'air H , ce dernier paramètre ayant une influence moindre sur les mesures que les deux autres (§ 2.2.5). Rasmussen propose, dans les références [27] et [29], des termes correctifs visant à tenir compte dans les calculs de l'influence de P et T sur les résultats d'étalonnage. Cependant, pour appliquer correctement ces termes correctifs, il est nécessaire de mesurer avec une grande précision la valeur de P et T . Dans ce but, la pression statique P est mesurée à 1 Pa près, la température statique T à 0,1 °C près et le taux d'humidité H à 1 % près. La pression P et le taux d'humidité H sont mesurés dans le local de mesures, la température T est mesurée à l'intérieur de l'enceinte close dans laquelle sont placés les microphones et le coupleur durant les mesures, en effet, celle-ci est légèrement plus élevée à l'intérieur de l'enceinte car les préamplificateurs des microphones chauffent pendant les mesures.

De plus, les termes correctifs proposés par Rasmussen étant en grande partie établis empiriquement de façon approximative, il est préférable de les appliquer uniquement pour tenir compte de variations de P et T petites. Les mesures doivent donc être réalisées dans des conditions ambiantes les plus stables possibles. Pour cette raison, les mesures sont effectuées dans un local climatisé et elles sont automatisées, ce qui évite d'avoir de trop fortes variations de P et T durant les mesures.

Enfin, dans le but d'éviter d'être tributaire des fluctuations de la pression statique ambiante durant les mesures, le banc d'étalonnage est conçu pour permettre d'imposer la pression statique à l'intérieur d'une enceinte close dans laquelle sont enfermés les microphones et le coupleur durant les mesures. Ceci devrait être mis en œuvre à l'avenir en utilisant une pompe et un volume variable pour augmenter ou diminuer la pression dans l'enceinte, selon les besoins.

M.1.3 Diverses sources de perturbation des mesures

Différents types de perturbations peuvent avoir des répercussions importantes sur les mesures, ce paragraphe recense les principales causes de perturbations ainsi que les moyens mis en œuvre à l'heure actuelle pour y remédier.



FIG. M.4 – Banc d'étalonnage en usage au LNE (de gauche à droite : l'analyseur vectoriel, l'appareil de réciprocité, l'afficheur de la sonde de température, l'enceinte close contenant les microphones).

Tout d'abord, le bruit ambiant et éventuellement les vibrations peuvent perturber les mesures. Pour cette raison, les microphones sont placés durant les mesures dans une enceinte close reposant sur des patins en caoutchouc (figure M.4) et le laboratoire où sont faites les mesures doit être calme. Le bruit dans ce local, faible et en grande partie dû aux appareils de mesure et à la climatisation, est de surcroît mesuré à l'aide d'un sonomètre afin de déterminer son influence sur les résultats d'étalonnage et ainsi d'en tenir compte au mieux dans le calcul des incertitudes (annexe J).

L'analyseur vectoriel présente une certaine distorsion qui ne peut être éliminée des résultats de mesures mais qui est caractérisée avec précision afin d'en tenir compte également dans le calcul des incertitudes.

Enfin, le banc d'étalonnage est sujet à de la diaphonie entre les microphones et surtout à l'intérieur de l'appareil de réciprocité lui-même. Cet appareil n'offre que peu de moyens

d'investigation (non démontable et peu de sorties, cf. annexe B), ce qui rend la diaphonie due à cet appareil difficile à caractériser.

M.2 Participation du LNE à une intercomparaison internationale

L'intercomparaison clé CCAUV.A-K3, organisée par le CCAUV¹ avec le CENAM² comme laboratoire pilote et avec l'assistance technique du DPLA. Elle concerne l'étalonnage en pression des microphones étalons de laboratoires type LS2P.

L'objectif de ce genre d'intercomparaison est de comparer la précision des techniques de mesures pour l'étalonnage des microphones en cavité de différents laboratoires de métrologie dans le monde. Dans la pratique, il s'agit de faire circuler dans les différents laboratoires participants plusieurs paires de microphones LS2P où ils sont laissés durant un mois. Les laboratoires doivent alors étalonner les deux microphones en suivant les recommandations de la norme CEI 61094-2 [22]. Pour ce faire, les laboratoires doivent également déterminer les caractéristiques géométriques et acoustiques de ces microphones par les méthodes et techniques de leur choix. A l'issue des mesures qui y ont été effectuées, le laboratoire doit être en mesure de communiquer les valeurs des caractéristiques géométriques et acoustiques des microphones, l'efficacité de ceux-ci et les incertitudes sur ces résultats d'étalonnage.

M.2.1 Protocole suivi au LNE pour l'intercomparaison

Deux microphones Brüel & Kjær modèle 4180 (1/2") ont été envoyés le 24/04/2003 au LNE par le DPLA pour l'intercomparaison, leur numéro de série étant : 1395456 et 1627783. Ces microphones ont été retournés au DPLA le 20/05/2003. A ces microphones a été ajouté un microphone du LNE du même modèle pour former le triplet nécessaire à la mise en œuvre de la méthode de réciprocité pour l'étalonnage des microphones.

Les profondeurs frontales des microphones ont été mesurées à l'aide d'un microscope en suivant la méthode décrite dans le paragraphe 2.3.1.

Les caractéristiques acoustiques des microphones (volume aux basses fréquences V_{bf} , fréquence de résonance F_0 et facteur de qualité Q ³) ont été déterminés en suivant la méthode itérative décrite dans le paragraphe 2.3.2.c. Cependant, le LNE ne disposait à l'époque que de deux coupleurs acoustiques de longueurs différentes (dimensions données dans le tableau M.1) au lieu des trois préconisés par cette méthode.

Les valeurs des coefficients de correction de pression et de température à 250 Hz C_P et C_T (§ 2.2.5) utilisés pour cette intercomparaison sont des valeurs «typiques» pour ce modèle de microphone, données dans la référence [29].

Les mesures des impédances électriques de transfert pour l'étalonnage des microphones portent sur toutes les fréquences de 1/3 d'octave dans la gamme de fréquence 31,5 Hz – 31,5 kHz. Elles ont été répétées cinq fois sur chaque couple de microphone. Le coupleur utilisé pour

¹Comite Consultatif de l'Acoustique, des Ultrasons et des Vibrations

²Centro Nacional de Metrologia (Mexique)

³Les laboratoires de métrologie préfèrent en général manipuler la notion de facteur de qualité Q (ou de facteur de pertes $d = 1/Q$) à celle d'amortissement R_a . Ces deux grandeurs sont simplement liées par la relation $Q = R_a C_a / \omega_0 = R_a \sqrt{C_a / M_a}$ (§ 2.3.2)

Type	UA 1430	UA 1414
Diamètre (mm)	9,3190	9,3158
Longueur (mm)	4,6980	9,3949

TAB. M.1 – Dimensions des coupleurs Brüel & Kjær utilisés.

ces mesures est le coupleur Brüel & Kjær UA 1430 dont les dimensions sont données dans le tableau M.1.

Les cinq valeurs de l'efficacité obtenues sont «ramenées», à l'aide des coefficients de correction de pression et de température, aux conditions ambiantes moyennes données dans le tableau M.2. Ainsi, les efficacités des deux microphones à étalonner communiquées par le LNE sont des moyennes sur cinq valeurs de ces efficacités, ces moyennes étant elles-même «ramenées» aux conditions standard de référence :

- $P_r = 1013,25$ hPa ,
- $T_r = 23$ °C ,
- $H_r = 50$ % ,

par le biais des coefficients de pression et de température C_P et C_T .

Numéro de série	1627783	1395456
Pression moyenne (kPa)	100,27	99,17
Température moyenne (°C)	23,3	23,5
Humidité relative moyenne (%)	38	30

TAB. M.2 – Conditions ambiantes moyennes des étalonnages.

M.2.2 Résultats du LNE

Les résultats obtenus pour les caractéristiques acoustiques des microphones sont donnés dans le tableau M.3.

Numéro de série	1627783	1395456
Profondeur (mm)	0,490	0,490
Volume basses fréquences (mm ³)	7,6	11,1
Fréquence de résonance (Hz)	22500	21200
Facteur de qualité (dB)	-0,2	-0,2
Coefficient de pression (dB/kPa)	-0,005382	-0,005547
Coefficient de température (dB/kPa)	-0,002	-0,002

TAB. M.3 – Résultats pour les paramètres des microphones.

Le tableau M.4 présente les valeurs pour l'efficacité des microphones communiquées par le LNE pour cette intercomparaison, ainsi que les valeurs du terme correctif ajouté à ces résultats afin de les ramener aux conditions standard de référence.

Fréquence exacte (Hz)	Niveau d'efficacité (dB ref 1V/Pa)		Déviation des conditions de référence (dB)	
	1627783	1395456	1627783	1395456
31,6	-38,709	-38,365	0,006	0,016
63,1	-38,725	-38,387	0,004	0,009
125,9	-38,738	-38,413	0,004	0,005
251,2	-38,750	-38,436	0,004	0,004
501,1	-38,760	-38,456	0,004	0,004
1000	-38,762	-38,468	0,004	0,004
1995	-38,740	-38,449	0,004	0,003
3981	-38,636	-38,323	0,004	0,003
6309	-38,433	-38,068	0,005	0,009
7943	-38,269	-37,840	0,004	0,002
9999	-38,068	-37,549	0,004	0,003
12588	-37,925	-37,309	0,004	0,006
15847	-38,173	-37,534	0,005	0,009
19951	-39,427	-38,991	0,009	0,016
25116	-41,870	-41,618	0,017	0,016
31620	-45,294	-47,089	0,086	0,077

TAB. M.4 – Résultats d'étalonnage et déviation des conditions standards de référence.

Les incertitudes communiquées par le LNE dans le cadre de cette intercomparaison et la méthode suivie pour les déterminer sont celles données dans l'annexe J.

Les résultats des différents laboratoires pour cette intercomparaison ne sont pas encore officiellement publiés, cependant, il ressort d'échanges avec le DPLA que les résultats d'étalonnage obtenus au LNE, et la précision avec laquelle ils sont établis, sont tout à fait comparables à ceux du DPLA. Celui-ci étant un laboratoire très expérimenté dans ce domaine, ceci est très encourageant pour le LNE qui, à l'époque venait tout juste de mettre en place son actuel banc d'étalonnage. Cependant, il reste de nombreuses imprécisions dans les techniques utilisées au LNE, notamment concernant la détermination des caractéristiques acoustiques des microphones.

Ceci s'explique tout d'abord par le fait que les techniques de mesures de ces paramètres n'étaient pas au point à l'époque de l'intercomparaison, en particulier il aurait fallu que le LNE dispose d'au moins un coupleur acoustique supplémentaire, de longueur différente de celles des deux autres.

Par ailleurs, les paramètres décrivant l'admittance acoustique des microphones sont issus d'une approximation aux basses fréquences dans la modélisation du microphone électrostatique dont la validité peut être discutée dans la partie haute de la gamme de fréquences (jusqu'à 30 kHz). De plus, la méthode choisie ici pour déterminer ces paramètres (V_{bf} , F_0 , R_a) donne des résultats qui sont fortement dépendants du modèle choisi pour représenter la cavité de couplage acoustique, il convient donc que celui-ci soit choisi avec soin afin de prendre en compte au mieux des effets présents dans la cavité. Ainsi, les modèles actuels, pour la cavité de couplage mais aussi pour les microphones, ne sont peut-être pas suffisants pour cette application, qui nécessite une grande précision sur toute la gamme de fréquences (30 Hz – 30 kHz). Les suites

envisagées de l'étude présentée dans le chapitre 4 (modélisation du microphone électrostatique prenant en compte une déformée de membrane non uniforme) devraient permettre d'apporter de nombreuses précisions tant pratiques que théoriques sur ce point.

Bibliographie

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Dover, 1965.
- [2] A. Angot. *Complément de mathématiques à l'usage des ingénieurs de l'électrotechnique et des télécommunications*. Masson, 6ème édition, 1972.
- [3] K. O. Ballagh. Acoustical admittance of cylindrical cavities. *Journal of Sound and Vibration*, 112:567–569, 1987.
- [4] S. Ballantine. Technique of microphone calibration. *Journal of the Acoustical Society of America*, 3:319–360, 1932.
- [5] F. Biagi and R. K. Cook. Acoustic impedance of a right circular cylindrical enclosure. *Journal of the Acoustical Society of America*, 26:506–509, 1954.
- [6] Brüel & Kjær. *Product Data: Microphone Preamplifier - Type 2673*.
- [7] Brüel & Kjær. *Reciprocity Calibration System Type 9699, Including Reciprocity Calibration Apparatus Type 5998*, 1997.
- [8] M. Bruneau. *Manuel d'acoustique fondamentale*. Hermès, Paris, 1998.
- [9] M. Bruneau et A.-M. Bruneau. Etude théorique de l'impédance acoustique de transfert d'une cavité fermée par deux microphones et munie d'impédances localisées sur la paroi ; application à la caractérisation de l'oreille artificielle. Contrat BNM n° 01 3010 Rapport final, Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, 2002.
- [10] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger. *Conduction of Heat in Solids*. Oxford University Press, London, 2nd edition, 1959.
- [11] F. B. Daniels. Acoustical impedance of enclosures. *Journal of the Acoustical Society of America*, 19:569–571, 1947.
- [12] H. Gerber. Acoustic properties of fluid-filled chambers at infrasonic frequencies in the absence of convection. *Journal of the Acoustical Society of America*, 36:1427–1434, 1964.
- [13] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of integrals series and products*. Academic Press New York and London, 4th edition, 1965.
- [14] IEC Publ. 61094-2. Primary method for pressure calibration of laboratory standard microphones by the reciprocity technique. Revision project, 2002.
- [15] D. R. Jarvis. Acoustical admittance of cylindrical cavities. *Journal of Sound and Vibration*, 117:390–392, 1987.
- [16] M. Lecollinet. L'étalonnage en pression des microphones par la méthode de réciprocité. *J. Acoustique*, 3 :175–187, 1990.
- [17] P. M. Morse and K. U. Ingard. *Theoretical Acoustics*. McGraw-Hill, New York, 1968.

- [18] Organisation internationale de normalisation. Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure, 1993.
- [19] Publ. CEI 327. Méthode de précision pour l'étalonnage en pression des microphones étalons à condensateur d'un pouce par la technique de réciprocité, 1971.
- [20] Publ. CEI 60318-1. Electroacoustique, simulateur de tête et d'oreille humaine, partie 1 : Simulateur d'oreille pour l'étalonnage des écouteurs supra-auraux, 1998.
- [21] Publ. CEI 61094-1. Microphone de mesure, partie 1 : Spécifications des microphones étalons de laboratoire, 1992.
- [22] Publ. CEI 61094-2. Microphone de mesure, partie 2 : Méthode primaire pour l'étalonnage en pression des microphones étalons de laboratoire par la méthode de réciprocité, 1992.
- [23] K. Rasmussen. A note on the acoustic impedance of narrow tubes. *Acustica*, 51:72–73, 1982.
- [24] K. Rasmussen. On the calculation of heat conduction in cylindrical cavities. Internal report PL-02, Technical University of Denmark (The Acoustics Laboratory), 1990.
- [25] K. Rasmussen. Radial wave-motion in cylindrical plane-wave couplers. *Acta Acustica*, 1:145–151, 1993.
- [26] K. Rasmussen. Calculation methods for the physical properties of air used in the calibration of microphones. Report PL-11b, Technical University of Denmark (Department of acoustic technology), 1997. Second revision.
- [27] K. Rasmussen. The static pressure and temperature coefficients of laboratory standard microphones. *Metrologia*, 36:265–273, 1999.
- [28] K. Rasmussen. Datafiles simulating a pressure reciprocity calibration of microphones. EUROMET project 294, Technical University of Denmark (Department of acoustic technology), 2001.
- [29] K. Rasmussen. The influence of environmental conditions on the pressure sensitivity of measurement microphones. Technical Review Brüel & Kjær, n° 1:1–13, 2001.
- [30] P. Riéty et M. Lecollinet. Le dispositif d'étalonnage primaire des microphones de laboratoire de l'Institut National de Métrologie. *Metrologia*, 10 :17–34, 1974.
- [31] Z. Škvor. New electrostatic method for absolute pressure calibration of pressure sensors. *Acta Imeko*, pages 533–540, 1982.
- [32] E. C. Wente. The thermophone. *Physical Review*, 19:333–345, 1922.
- [33] C. Zwicker and C. W. Kosten. *Sound Absorbing Materials*. Elsevier, Amsterdam, 1949.

LA CAVITÉ DE COUPLAGE ACOUSTIQUE DANS LA MÉTHODE DE RÉCIPROCITÉ : MODÈLES ANALYTIQUES POUR L'ÉTALONNAGE DES MICROPHONES ET LA MESURE D'IMPÉDANCES DE PETITS COMPOSANTS

Les laboratoires de métrologie acoustique utilisent en général des microphones de haute qualité comme étalon de référence pour leurs appareils de mesures acoustiques. Ces microphones, appelés étalons de laboratoire, doivent eux-mêmes être étalonnés avec une grande précision. Depuis plusieurs décennies, la méthode usuelle (normalisée) pour étalonner ces microphones, c'est-à-dire pour déterminer leur efficacité en pression, est la méthode de réciprocité. Cette méthode nécessite l'usage de deux microphones couplés par une cavité acoustique close généralement de forme cylindrique, fermée latéralement par des parois rigides et aux extrémités par les membranes des microphones, l'un étant utilisé en émetteur, l'autre en récepteur. Le produit des efficacités des microphones est déduit de mesures électriques et du calcul analytique de l'admittance acoustique de transfert du système.

Les équipements et les techniques de mesures actuels permettent d'atteindre une précision dans les mesures électriques de l'ordre du centième de décibel. Une précision du même ordre de grandeur est alors recherchée dans le calcul de l'admittance acoustique de transfert, qui repose sur la modélisation du champ acoustique dans la cavité de couplage. Il est donc nécessaire que cette modélisation soit aussi complète et précise que possible. Les modèles actuellement en usage ne paraissent pas aujourd'hui, de ce point de vue, présenter toutes les «garanties» nécessaires pour accéder à un étalonnage dont la précision est compatible avec la précision de la mesure électrique. Ainsi, l'objet de cette étude est d'établir des modèles analytiques plus complets pour le champ de pression dans la cavité de couplage, prenant en compte les effets de couches limites visqueuses et thermiques et la structure fine de la répartition spatiale du champ acoustique.

Au-delà des résultats qui doivent conduire à la révision des normes actuellement en vigueur, les résultats obtenus portent l'espoir de mener à une méthode de mesure fine des caractéristiques d'entrée des petits composants acoustiques qui fait défaut à l'heure actuelle et de mener à terme à des ouvertures sur la métrologie des micro-composants acoustiques (attendues dans le cadre de la caractérisation des oreilles artificielles et de la miniaturisation des capteurs).

Enfin, des développements futurs portant sur de nouvelles modélisations de capteurs microphoniques, qui prendraient en compte les effets de déformées réalistes des membranes et corrélativement la répartition spatiale des mouvements acoustiques dans les micro-cavités et micro-conduits qui constituent ces capteurs, permettront aux modèles proposés de donner leur «pleine mesure» en terme de finesse de mesure et de caractérisations de capteurs et mini-composants acoustiques.

Mots clefs : Acoustique, microphones, étalonnage, réciprocité, cavité acoustique, mesure d'impédance

CLOSED ACOUSTIC COUPLER FOR THE RECIPROCITY METHOD : ANALYTICAL MODELS FOR MICROPHONES CALIBRATION AND MEASUREMENT OF SMALL COMPONENTS IMPEDANCES

Acoustic metrology laboratories generally use high quality microphones as a reference for their acoustic measurement devices. Then, these microphones, called Laboratory Standard Microphones, have to be calibrated with a great accuracy. During the last decades, the usual standardized method for calibrating these microphones, that is for determining their pressure sensitivity, is the reciprocity method. This method uses two microphones acoustically connected by a coupler which is an acoustic cavity, generally cylinder shaped, closed by lateral rigid walls and at its ends by the diaphragms of the microphones, one being used as a transmitter and the other one as a receiver. The product of the microphone's sensitivities is determined from electrical measurements and from the analytical calculation of the acoustic transfer admittance of the system.

Actual equipments and measurement technics permit to reach the order of 0.01 dB for the electrical measurements accuracy. The same precision is then required for the calculation of the acoustic transfer admittance which lies on the modelling of the sound pressure in the coupling cavity. Consequently, this modelling has to be as complete and accurate as possible. The model currently in use seems not to be sufficiently reliable to allow calibration with an accuracy that is compatible with the one of the electrical measurements. Thus, this is the aim of this study to build more complete analytical models for the sound pressure in the cavity, taking into account the viscothermal boundary layers effects and the precise dependency of the acoustic field on the space coordinates.

The results should lead to revise the standards currently in use, and moreover the obtained results could lead to a deep measurement method for the input characteristics of small acoustic components, that is actually missing, and that in the future they could lead to openings in the metrology of acoustic micro-elements (useful for characterization of the artificial hear and for the miniaturization of sensors).

Finally, future developments about new modelling of microphones, that would take into account the effects of realistic diaphragm movements and then the spatial distribution of the acoustic movements in micro-cavities and micro-ducts that compose these sensors, will allow the models presented here to be of high interest concerning deep measurements and characterization of sensors and acoustic micro-components.

Keywords : Acoustics, microphones, calibration, reciprocity, acoustical cavity, impedance measurement