



**HAL**  
open science

# Périodes, motifs, arrangements : quelques contributions

Clément Dupont

► **To cite this version:**

Clément Dupont. Périodes, motifs, arrangements : quelques contributions. Théorie des nombres [math.NT]. Université de Montpellier, 2023. tel-04163354

**HAL Id: tel-04163354**

**<https://hal.science/tel-04163354v1>**

Submitted on 17 Jul 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**UNIVERSITÉ DE  
MONTPELLIER**

**École Doctorale “Information Structures Systèmes (I2S)”**

Spécialité : Mathématiques et modélisation

**HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES**

présentée par

**Clément DUPONT**

---

**Périodes, motifs, arrangements : quelques contributions**

---

Soutenue le 29 juin 2023 devant le jury composé de :

Michele BOLOGNESI

Cédric BONNAFÉ

Francis BROWN

Damien CALAQUE (rapporteur)

Frédéric CHAPOTON (rapporteur)

Graham DENHAM (rapporteur)

Alexander GONCHAROV (rapporteur)

Richard HAIN (rapporteur)

Université de Montpellier  
Institut Montpelliérain Alexander Gro-  
thendieck (IMAG)  
UMR 5149  
Place Eugène Bataillon  
34090 Montpellier

Université de Montpellier  
École Doctorale I2S  
Université de Montpellier, Campus  
Saint-Priest  
860 rue de Saint-Priest, case courrier  
444  
34090 Montpellier Cedex 5

### **Déclaration d'intégrité scientifique**

Je déclare avoir respecté, dans la conception et la rédaction de ce mémoire d'HDR, les valeurs et principes d'intégrité scientifique destinés à garantir le caractère honnête et scientifiquement rigoureux de tout travail de recherche, visés à l'article L.211-2 du Code de la recherche et énoncés par la Charte nationale de déontologie des métiers de la recherche et la Charte d'intégrité scientifique de l'Université de Montpellier. Je m'engage à les promouvoir dans le cadre de mes activités futures d'encadrement de recherche.

Clément Dupont  
Université de Montpellier, Place Eugène Bataillon, 34090 Montpellier, France  
clement.dupont@umontpellier.fr



*Je vais au paysage tous les jours, les motifs sont beaux  
et je passe ainsi mes jours plus agréablement qu'ailleurs.*

Lettre de Paul Cézanne à son fils



# Remerciements

À l'heure d'un premier point d'étape, je ne peux que mesurer ma chance d'avoir été aussi bien accompagné dans cette singulière aventure qu'est la recherche en mathématiques, et souhaite remercier toutes les personnes qui ont participé à la rendre aussi plaisante.

Mes premières pensées vont aux collaborateurs et collaboratrices d'hier et d'aujourd'hui, et je l'espère aussi de demain, à qui je réitère toute mon affection et mon admiration : Francis Brown, Bérénice Delcroix-Oger, Alex Fink, Javier Fresán, Geoffroy Horel, Daniel Juteau, Luca Moci, Erik Panzer, Brent Pym, Matija Tapušković, Bruno Vallette, et Don Zagier. Il va sans dire que ce mémoire doit au moins autant à vous qu'à moi. Les moments que nous avons passés à travailler la matière mathématique, partageant joies et peines, échecs et miracles, astuces diaboliques et foutaises élégantes, sont ma plus belle découverte de ce métier commencé dans la solitude de la thèse.

Un merci tout particulier est dû à Francis Brown, pour avoir fait naître en moi une passion pour un domaine de recherche aussi riche, et pour sa générosité constante dans nos échanges depuis la thèse, et maintenant dans nos projets communs.

Je n'oserai me lancer dans des remerciements nominatifs envers toutes les personnes qui m'ont influencé, soutenu, guidé, et qui ont fait preuve d'une extrême bienveillance à mon égard en m'acceptant dans cette grande famille qu'est la communauté mathématique.

Un grand merci également à tou-te-s les collègues et ami-e-s de l'IMAG et du Département de Mathématiques de Montpellier, chercheurs, enseignants, et administratifs, qui améliorent grandement la vie quotidienne au bâtiment 9 et m'ont permis depuis bientôt sept ans de passer mes jours plus agréablement qu'autre part (voir la page précédente). Merci notamment à Michele Bolognesi et Cédric Bonnafé d'avoir accepté de faire partie du jury de mon habilitation à diriger des recherches.

Je souhaite exprimer ma gratitude envers Damien Calaque, Frédéric Chapoton, Graham Denham, Alexander Goncharov, et Richard Hain, qui ont pris le temps de lire ce mémoire et d'écrire un rapport à son sujet. C'est un honneur et une joie de voir mon travail apprécié par des chercheurs que j'estime autant.

Enfin, un grand merci, pour tout, à mes amis, à ma famille, et à Marie.





# Travaux présentés

- [DJ20] The localization spectral sequence in the motivic setting (avec Daniel Juteau)  
*arXiv:2003.04217*
- [BD22] Lauricella hypergeometric functions, unipotent fundamental groups of the punctured Riemann sphere, and their motivic coactions (avec Francis Brown)  
*Nagoya Mathematical Journal*, à paraître
- [BD21b] Single-valued integration and superstring amplitudes in genus zero (avec Francis Brown)  
*Communications in Mathematical Physics* 382 (2021), 815–874
- [BD21a] Single-valued integration and double copy (avec Francis Brown)  
*Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal)* 775 (2021), 145–196
- [DFM18] Universal Tutte characters via combinatorial coalgebras (avec Alex Fink et Luca Moci)  
*Algebraic Combinatorics* 1 (2018), no. 5, 603–651
- [DH18] On two chain models for the gravity operad (avec Geoffroy Horel)  
*Proceedings of the American Mathematical Society* 146 (2018), no. 5, 1895–1910
- [Dup18] Odd zeta motive and linear forms in odd zeta values (avec un appendice écrit en collaboration avec Don Zagier)  
*Compositio Mathematica* 154 (2018), no. 2, 342–379
- [Dup17] Relative cohomology of bi-arrangements  
*Transactions of the American Mathematical Society* 369 (2017), no. 11, 8105–8160
- [DV17] Brown's moduli spaces of curves and the gravity operad (avec Bruno Vallette)  
*Geometry & Topology* 21 (2017), no. 5, 2811–2850
- [Dup16] Purity, formality, and arrangement complements  
*International Mathematics Research Notices IMRN* 2016, no. 13, 4132–4144
- [Dup15] The Orlik-Solomon model for hypersurface arrangements  
*Annales de l'Institut Fourier (Grenoble)* 65 (2015), no. 6, 2507–2545
- [Dup14] The combinatorial Hopf algebra of motivic dissection polylogarithms  
*Advances in Mathematics* 264 (2014), 646–699



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>13</b>
1.1	Périodes et cohomologie . . . . .	13
1.2	Motifs et théorie de Galois motivique . . . . .	19
1.3	Arrangements et cohomologie . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Topologie, géométrie, et combinatoire des arrangements</b>	<b>29</b>
2.1	Le modèle d’Orlik–Solomon pour les arrangements d’hypersurfaces . . . . .	29
2.2	Pureté implique formalité . . . . .	31
2.3	Bi-arrangements et cohomologie . . . . .	33
2.4	Les espaces de modules de Brown . . . . .	35
2.5	Polynômes de Tutte universels . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Structure des périodes des motifs mixtes</b>	<b>40</b>
3.1	La coaction motivique des polylogarithmes de dissection . . . . .	40
3.2	Motifs associés aux valeurs zêta impaires . . . . .	42
3.3	Intégration univaluée . . . . .	44
3.4	Amplitudes des cordes en genre zéro . . . . .	47
3.5	La théorie de Galois motivique des fonctions hypergéométriques de Lauricella . . . . .	49
	<b>Bibliographie</b>	<b>52</b>



# Chapitre 1

## Introduction

Dans ce chapitre introductif nous présentons les objets centraux de ce mémoire : les périodes, leurs liens avec la cohomologie des variétés algébriques, et les motifs. Nous mettons l'accent sur les exemples qui motivent nos travaux, et en particulier sur une classe de périodes issue des arrangements d'hyperplans, et nous présentons des travaux classiques sur ces objets.

### 1.1 Périodes et cohomologie

#### 1.1.1 Périodes : première définition

Les travaux présentés ici sont de près ou de loin motivés par l'étude des *périodes*, dont la définition a été donnée par Kontsevich et Zagier [KZ01].

**Définition 1.1.** Une *période effective* est un nombre complexe dont les parties réelle et imaginaire peuvent s'écrire comme des intégrales absolument convergentes

$$\int_{\sigma} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

- ▷ où  $f(x_1, \dots, x_n)$  est une fraction rationnelle à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ ;
- ▷ et  $\sigma$  est un domaine de  $\mathbb{R}^n$  semi-algébrique défini sur  $\mathbb{Q}$ , c'est-à-dire s'obtient par union, intersection, complémentaire de domaines  $\{g(x_1, \dots, x_n) \geq 0\}$  pour  $g(x_1, \dots, x_n)$  un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ .

Les périodes effectives forment un sous-anneau  $\mathcal{P}^+$  de  $\mathbb{C}$  qui contient le corps  $\overline{\mathbb{Q}}$  des nombres algébriques. Le premier exemple d'une période effective qui n'est pas un nombre algébrique est

$$\pi = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{1+t^2}.$$

On conjecture que  $\pi^{-1}$  n'est pas une période effective. Pour des raisons liées aux motifs expliquées ci-dessous, on l'inclut dans l'anneau des périodes via la définition suivante.

**Définition 1.2.** Une *période* est un nombre complexe  $z$  tel que  $\pi^N z$  est une période effective pour un certain  $N \in \mathbb{N}$ .

Les périodes forment une sous-algèbre de  $\mathbb{C}$  notée

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^+[\pi^{-1}].$$

Bien que  $\mathcal{P}$  soit par définition dénombrable, on ne connaît pas de nombre complexe “intéressant” qui ne soit pas une période. On conjecture que la base  $e$  du logarithme népérien ou la constante d’Euler–Mascheroni  $\gamma$  ne sont pas des périodes.

### 1.1.2 Périodes des variétés algébriques

Adoptons maintenant un point de vue géométrique sur les périodes. Soit  $X$  une variété algébrique (lisse, pour commencer) définie sur  $\mathbb{Q}$ . Il est classique d’associer à  $X$  la cohomologie singulière de la variété complexe  $X(\mathbb{C})$  à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ , en un degré  $n \in \mathbb{N}$ . On l’appelle la *cohomologie de Betti* de  $X$  et on la note

$$H_{\mathbb{B}}^n(X) = H_{\text{sing}}^n(X(\mathbb{C}); \mathbb{Q}) \simeq H_n^{\text{sing}}(X(\mathbb{C}); \mathbb{Q})^{\vee}.$$

C’est un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension finie. D’après Grothendieck [Gro66] on peut aussi associer à  $X$  sa *cohomologie de de Rham* algébrique, définie comme l’hypercohomologie du complexe de de Rham algébrique  $\Omega_{X/\mathbb{Q}}^{\bullet}$  en topologie de Zariski, et qu’on note

$$H_{\text{dR}}^n(X) = \mathbb{H}^n(X_{\text{Zar}}, \Omega_{X/\mathbb{Q}}^{\bullet}).$$

C’est aussi un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension finie. Par Grothendieck et le théorème de de Rham classique, on a un isomorphisme de comparaison, induit par l’intégration :

$$\text{comp} : H_{\text{dR}}^n(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H_{\mathbb{B}}^n(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}.$$

Concrètement, si  $\alpha$  est une  $n$ -forme algébrique (globale, pour simplifier) sur  $X$  et  $\sigma$  est un  $n$ -cycle (lisse, pour simplifier) sur  $X(\mathbb{C})$  alors on a des classes  $[\alpha] \in H_{\text{dR}}^n(X)$  et  $[\sigma] \in H_{\mathbb{B}}^n(X)^{\vee}$  dont l’appariement est donné par

$$\langle [\sigma], \text{comp}[\alpha] \rangle = \int_{\sigma} \alpha.$$

On peut étendre ces considérations à des variétés algébriques  $X$  singulières, et plus généralement à la cohomologie relative de paires  $(X, Y)$  avec  $X$  une variété algébrique définie sur  $\mathbb{Q}$  et  $Y$  une sous-variété fermée de  $X$ . On obtient la version générale de l’isomorphisme de comparaison :

$$\text{comp} : H_{\text{dR}}^n(X, Y) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H_{\mathbb{B}}^n(X, Y) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}. \quad (1.1)$$

Quitte à choisir des bases de  $H_{\text{dR}}^n(X, Y)$  et  $H_{\mathbb{B}}^n(X, Y)$ , on peut représenter (1.1) sous la forme d’une matrice, qu’on appelle *matrice des périodes* de  $H^n(X, Y)$ . Le lien entre cette notion de période et la définition 1.1 est précisé par le théorème suivant, énoncé par Kontsevich et Zagier et démontré par Huber et Müller-Stach [HMS17, Theorem 12.2.1].

**Théorème 1.3.** *L’algèbre des périodes effectives coïncide avec l’algèbre des nombres complexes qui apparaissent comme coefficients d’un isomorphisme de comparaison (1.1), c’est-à-dire qui s’écrivent sous la forme  $\langle [\sigma], \text{comp}[\alpha] \rangle$  avec  $[\alpha] \in H_{\text{dR}}^n(X, Y)$  et  $[\sigma] \in H_{\mathbb{B}}^n(X, Y)^{\vee}$ , pour une paire  $(X, Y)$  de variétés algébriques définies sur  $\mathbb{Q}$ , et  $n \in \mathbb{N}$ .*

Le point de vue cohomologique sur les périodes est incroyablement utile puisqu’il permet d’organiser et de structurer les relations entre périodes avec les outils de la géométrie algébrique.

### 1.1.3 Exemples

#### L'exemple de base : $2i\pi$

Le nombre  $2i\pi$  est essentiellement l'unique période de  $H^1(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\})$  puisque ce groupe de cohomologie est de dimension 1 et qu'on a

$$2i\pi = \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \langle [\gamma], \text{comp}[dz/z] \rangle,$$

où  $\gamma$  est le cercle unité parcouru dans le sens positif.

#### Le logarithme

Soit  $a \in \mathbb{Q}_{>0}$ . Alors le nombre  $\log(a)$  est une période du groupe de cohomologie relative  $H^1(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}, \{1, a\})$  puisqu'il s'écrit

$$\log(a) = \int_1^a \frac{dz}{z} = \langle [1, a], \text{comp}[dz/z] \rangle.$$

Une matrice des périodes de ce groupe de cohomologie est (dans le cas  $a \neq 1$ )

$$\begin{pmatrix} 1 & \log(a) \\ 0 & 2i\pi \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Cet exemple illustre la nécessité de la cohomologie relative : nombre de périodes intéressantes s'écrivent naturellement comme des intégrales sur des domaines qui ont un bord.

#### Le dilogarithme

La série

$$\text{Li}_2(a) = \sum_{k \geq 1} \frac{a^k}{k^2}.$$

a rayon de convergence 1 et définit une fonction multivaluée sur  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ , appelée *dilogarithme classique*, et qui joue un rôle important dans plusieurs domaines des mathématiques (voir par exemple l'article de survol [Zag07]). Elle a une représentation intégrale

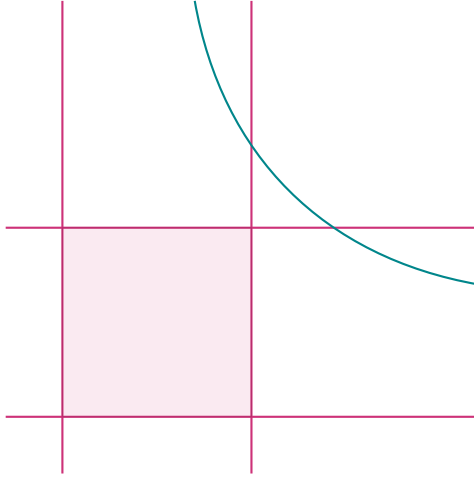
$$\text{Li}_2(a) = \iint_{[0,1]^2} \frac{a}{1-axy} dx dy \quad (1.3)$$

qui montre que les valeurs  $\text{Li}_2(a)$  pour  $a \in \mathbb{Q}$  sont des périodes. Fixons  $a \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$  pour simplifier et considérons le groupe de cohomologie relative

$$H^2(\mathbb{A}^2 \setminus \{axy = 1\}, \{x(1-x)y(1-y) = 0\}) \quad (1.4)$$

correspondant à la géométrie de la figure suivante, représentant le plan  $\mathbb{A}^2$  avec coordonnées  $(x, y)$ . On a tracé en bleu l'hyperbole  $\{axy = 1\}$  où l'intégrande de (1.3) n'est pas définie, et en rouge le bord du domaine d'intégration  $[0, 1]^2$  donné par l'équation  $x(1-x)y(1-y) = 0$ . Clairement,  $\text{Li}_2(a)$  est une période de (1.4), associée à la classe de la forme différentielle  $\frac{a}{1-axy} dx dy$  et à la classe du cycle relatif  $[0, 1]^2$ .





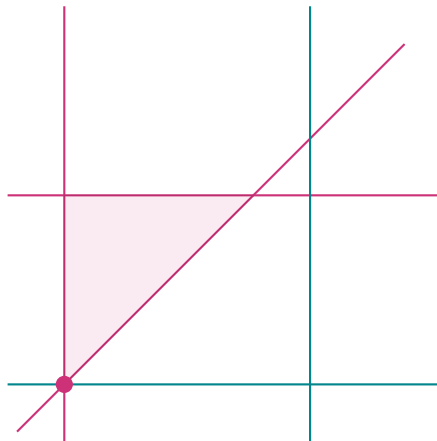
Une matrice des périodes de (1.4) est :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\log(1-a) & \text{Li}_2(a) \\ 0 & 2i\pi & 2i\pi \log(a) \\ 0 & 0 & (2i\pi)^2 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Intéressons-nous maintenant à une seconde représentation intégrale importante du dilogarithme :

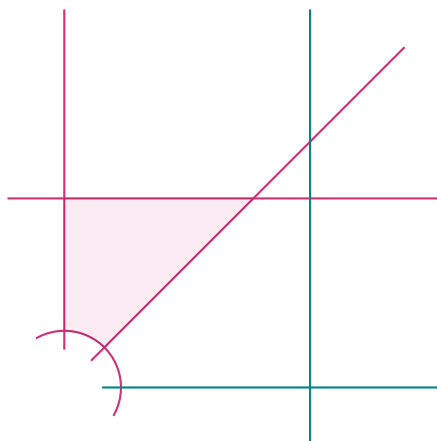
$$\text{Li}_2(a) = \iint_{0 \leq u \leq v \leq 1} \frac{a \, du \, dv}{1 - au} \frac{1}{v}. \quad (1.6)$$

Elle est reliée à la première par le changement de variables  $(u, v) = (xy, y)$ . La géométrie correspondante est celle de la figure suivante, représentant le plan  $\mathbb{A}^2$  avec coordonnées  $(u, v)$  : en bleu, le diviseur  $\{(1 - au)v = 0\}$  où l'intégrande de (1.6) n'est pas définie, et en rouge le bord du domaine d'intégration  $\{0 \leq u \leq v \leq 1\}$  donné par l'équation  $u(v - u)(1 - v) = 0$ .



Le point  $(0, 0)$  dans la figure ci-dessus est spécial : il est sur le bord du domaine d'intégration mais aussi sur un diviseur où l'intégrande n'est pas définie. Le triangle  $\{0 \leq u \leq v \leq 1\}$  n'est donc pas entièrement contenu dans  $\mathbb{A}^2 \setminus \{(1 - au)v = 0\}$ . Pour trouver un groupe de

cohomologie relative dont (1.6) est une période, il faut “séparer le domaine d’intégration du diviseur des pôles de l’intégrande” en transformant légèrement la géométrie, grâce à l’éclatement  $f : X \rightarrow \mathbb{A}^2$  du point  $(0, 0)$ . On obtient alors la figure suivante, où apparaît sous forme d’arc de cercle le diviseur exceptionnel  $E = f^{-1}(\{(0, 0)\})$ .



Si l’on note  $A$  la transformée stricte de  $\{(1 - au)v = 0\}$  (en bleu sur la figure) et  $B$  l’union de  $E$  et de la transformée stricte de  $\{u(v - u)(1 - v) = 0\}$  (en rouge sur la figure), alors on est amené à considérer le groupe de cohomologie relative

$$H^2(X \setminus A, B \setminus A \cap B). \quad (1.7)$$

On vérifie que la forme différentielle  $\alpha = f^*\left(\frac{a du}{1-au} \frac{dv}{v}\right)$  n’acquiert pas de pôle le long de  $E$  et est donc bien définie sur  $X \setminus A$ . La transformée stricte (au sens de la topologie analytique) du triangle  $\{0 \leq u \leq v \leq 1\}$  est coloriée en rouge sur la figure ci-dessus; c’est un cycle relatif  $\sigma$  sur  $(X \setminus A)(\mathbb{C})$ , en forme de quadrilatère, dont le bord vit sur  $B(\mathbb{C})$ . L’intégrale de  $\alpha$  le long de  $\sigma$  est égale à  $\text{Li}_2(a)$  puisque l’éclatement  $f$  est un isomorphisme en-dehors d’un ensemble de mesure nulle. Conclusion :  $\text{Li}_2(a)$  est une période de (1.7), associées aux classes  $[\alpha]$  et  $[\sigma]$ .

Le lecteur attentif aura remarqué que les groupes de cohomologie relative (1.4) et (1.7) sont isomorphes, via le changement de variables  $(u, v) = (xy, y)$  qui identifie le complémentaire dans  $X$  de la transformée stricte de  $\{v = 0\}$  avec  $\mathbb{A}^2$ . Néanmoins, on peut arguer que la géométrie de la seconde représentation intégrale (1.6) est en un sens plus simple que celle liée à la première (1.3) puisqu’elle est issue d’un arrangement de droites affines dans le plan. C’est le point de vue qu’on adoptera et développera par la suite.

### Polylogarithmes (multiples) et valeurs zêta (multiples)

Le dilogarithme se généralise naturellement en les *polylogarithmes classiques*

$$\text{Li}_n(a) = \sum_{k \geq 1} \frac{a^k}{k^n},$$

pour  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ , qui ont des représentations intégrales similaires au dilogarithme. En faisant  $a = 1$  on obtient une valeur spéciale de la fonction zêta de Riemann, pour  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  :

$$\zeta(n) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^n} .$$

Plus généralement, une célèbre conjecture due à Zagier [Zag91] affirme que la valeur en  $n$  de la fonction zêta de Dedekind d'un corps de nombres s'exprime en termes d'évaluations de  $\text{Li}_n$ . Les progrès faits sur cette conjecture [BD94, Gon95, GR18] sont tous basés sur l'interprétation des polylogarithmes classiques comme périodes de certains groupes de cohomologie relative. On renvoie le lecteur à [Dup21] pour un survol de ces sujets, fortement connectés à l'étude de la  $K$ -théorie algébrique des corps.

Plus généralement, les *polylogarithmes multiples* [Gon95] sont définis, pour des entiers  $n_1, n_2, \dots, n_r \geq 1$ , par les sommes multiples

$$\text{Li}_{n_1, n_2, \dots, n_r}(a_1, a_2, \dots, a_r) = \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_r} \frac{a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_r^{k_r}}{k_1^{n_1} k_2^{n_2} \dots k_r^{n_r}} , \quad (1.8)$$

En généralisant la formule intégrale (1.6) pour le dilogarithme, on peut les encoder sous la forme d'*intégrales itérées* (ou *hyperlogarithmes*)

$$\text{I}(x_0; x_1, \dots, x_n; x_{n+1}) = \int_{x_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq x_{n+1}} \frac{dt_1}{t_1 - x_1} \dots \frac{dt_n}{t_n - x_n} . \quad (1.9)$$

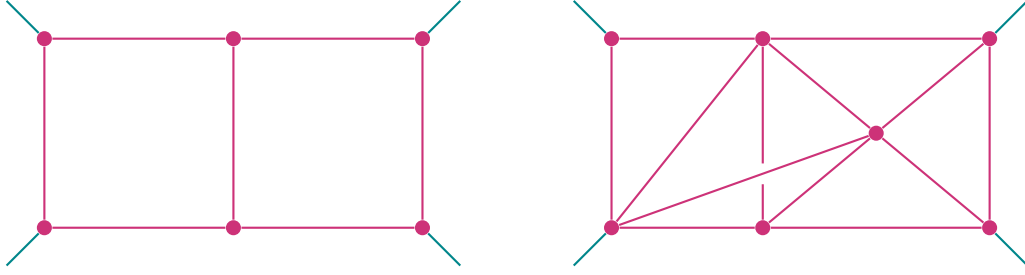
Les spécialisations en  $a_1 = a_2 = \dots = a_r = 1$  de (1.8) sont appelées *valeurs zêta multiples*,

$$\zeta(n_1, n_2, \dots, n_r) = \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_r} \frac{1}{k_1^{n_1} k_2^{n_2} \dots k_r^{n_r}} . \quad (1.10)$$

Ce sont des “constantes fondamentales” qui apparaissent naturellement dans de nombreux domaines des mathématiques, mais aussi en physique des particules via les intégrales de Feynman. L'interprétation cohomologique des valeurs zêta multiples a permis des avancées récentes impressionnantes, au premier rang desquelles le théorème de Brown [Bro12]. On renvoie le lecteur à [Dup22] pour un survol sur les valeurs zêta multiples.

## Amplitudes

Les périodes apparaissent naturellement en physique des particules, via le formalisme des *intégrales de Feynman* de la théorie quantique des champs, qui mesurent la probabilité des interactions entre particules élémentaires à haute énergie. Ces intégrales et leurs variantes sont généralement appelées *amplitudes de diffusion* et sont indexées par des objets combinatoires de type “graphe de Feynman”. Par exemple, les deux graphes suivants représentent deux processus de diffusion de quatre particules (les arêtes externes). Une arête interne représente la trajectoire d'une particule, et un sommet représente une interaction entre particules.



L'étude des groupes de cohomologie sous-jacents aux intégrales de Feynman a été initiée par Bloch, Esnault, et Kreimer [BEK06] et continuée par Brown [Bro15]. En se basant sur la “représentation paramétrique” des intégrales de Feynman, la géométrie correspondante est celle des *hypersurfaces de graphe*, qui sont des hypersurfaces singulières  $\{\Psi_\Gamma = 0\}$  et  $\{\Xi_\Gamma = 0\}$  de l'espace projectif associées à un graphe  $\Gamma$ .

## 1.2 Motifs et théorie de Galois motivique

### 1.2.1 Le formalisme motivique

La théorie des motifs, pensée par Grothendieck, est une “théorie de cohomologie universelle” pour les variétés algébriques. On se permet dans cette introduction d'être imprécis et de travailler dans un formalisme motivique non spécifié pour les variétés sur  $\mathbb{Q}$ , qui prend la forme d'une catégorie  $\text{Mot}$  qu'on appelle la catégorie des motifs et dont les objets sont appelés motifs. Pour chaque paire  $(X, Y)$  de variétés algébriques définies sur  $\mathbb{Q}$  et chaque entier  $n \in \mathbb{N}$ , on dispose d'un objet  $M^n(X, Y)$  qu'on appelle le motif de la paire  $(X, Y)$  en degré  $n$ . Ces objets jouent le rôle de groupes de cohomologie universels. Concrètement, on a des *foncteurs de réalisation* de de Rham et de Betti

$$\omega_{\text{dR}} : \text{Mot} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}}, M \mapsto M_{\text{dR}} \quad \text{et} \quad \omega_{\text{B}} : \text{Mot} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}}, M \mapsto M_{\text{B}}$$

vers les espaces vectoriels de dimension finie, qui envoient  $M^n(X, Y)$  sur  $H_{\text{dR}}^n(X, Y)$  et  $H_{\text{B}}^n(X, Y)$  respectivement. On a de plus un isomorphisme de foncteurs

$$\omega_{\text{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \omega_{\text{B}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \tag{1.11}$$

qui relève (1.1).

On attend plus de la théorie des motifs. D'abord, les morphismes dans  $\text{Mot}$  (et plus généralement les groupes d'extensions) doivent être d'origine géométrique, c'est-à-dire reliés aux cycles algébriques. Ensuite, la catégorie  $\text{Mot}$  doit ressembler formellement à la catégorie des espaces vectoriels sur  $\mathbb{Q}$ , et doit notamment être  $\mathbb{Q}$ -linéaire tensorielle rigide. Dans cette introduction on demande en plus que la catégorie  $\text{Mot}$  soit *tannakienne* [SR72, Del90] et donc notamment abélienne. Le lecteur trouvera plus de détails sur les motifs dans les ouvrages [And04] et [HMS17].

### 1.2.2 Exemples

Les exemples suivants montrent l'intrication entre l'étude des relations entre périodes et l'étude de la structure de la catégorie des motifs.

## Le motif trivial

Le motif  $M^0(\text{point})$  est noté  $\mathbb{Q}(0)$ . Ses périodes sont les nombres rationnels.

## Les motifs de Lefschetz et de Tate

Le motif  $M^1(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\})$  est noté  $\mathbb{Q}(-1)$  et appelé *motif de Lefschetz*. Il n'est pas isomorphe au motif trivial  $\mathbb{Q}(0)$  même s'il a les mêmes réalisations (espace vectoriel de dimension 1). En effet, les périodes de  $\mathbb{Q}(0)$  sont des nombres rationnels, alors que  $2i\pi$  est une période de  $\mathbb{Q}(-1)$ .

Puisque  $\text{Mot}$  est une catégorie tensorielle rigide, le motif de Lefschetz a un dual qu'on note  $\mathbb{Q}(1) = \mathbb{Q}(-1)^\vee$ , et qu'on appelle le *motif de Tate*. Comme  $\mathbb{Q}(1) \otimes \mathbb{Q}(-1) \simeq \mathbb{Q}(0)$ , les périodes de  $\mathbb{Q}(1)$  contiennent  $(2i\pi)^{-1}$ , ce qui explique *a posteriori* le fait d'inclure  $\pi^{-1}$  dans l'algèbre des périodes (définition 1.2). C'est la dualité de Poincaré qui explique qu'on n'a pas besoin d'inverser plus de périodes effectives.

Plus généralement, on définit les motifs  $\mathbb{Q}(-n)$ , pour  $n \in \mathbb{Z}$ , comme les puissances tensorielles  $\mathbb{Q}(-n) = \mathbb{Q}(-1)^{\otimes n}$ , dont les périodes contiennent  $(2i\pi)^n$ . Pour un motif  $M$ , on note  $M(-n) = M \otimes \mathbb{Q}(-n)$  ses *twists à la Tate*.

## Les motifs de Kummer

Pour  $a \in \mathbb{Q}^\times \setminus \{1\}$ , le motif  $M^1(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}, \{1, a\})$  est appelé *motif de Kummer* de paramètre  $a$  et noté  $K_a$ . La suite exacte longue en cohomologie relative se relève à la catégorie des motifs et induit une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}(0) \longrightarrow K_a \longrightarrow \mathbb{Q}(-1) \longrightarrow 0.$$

On voit donc que  $K_a$  a la structure d'une extension de  $\mathbb{Q}(-1)$  par  $\mathbb{Q}(0)$ , qui est reflétée dans la structure triangulaire par blocs de sa matrice des périodes (1.2). Cette extension n'est généralement pas scindée, ce qu'on peut expliquer via les périodes : aucune opération élémentaire (à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ ) sur les lignes et les colonnes ne peut rendre la matrice (1.2) diagonale, à cause du fait que  $1, \log(a)$  et  $2i\pi$  engendrent un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension 3 pour un  $a$  général ( $a \notin \{-1, 1\}$  suffit).

Il se trouve que (dans tout formalisme motivique digne de ce nom) toutes les extensions de  $\mathbb{Q}(-1)$  par  $\mathbb{Q}(0)$  sont de la forme  $K_a$ . Plus précisément, on a un isomorphisme

$$\text{Ext}_{\text{Mot}}^1(\mathbb{Q}(-1), \mathbb{Q}(0)) \simeq \mathbb{Q}^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

par lequel la classe d'extension de  $K_a$  correspond à  $a \otimes 1 \in \mathbb{Q}^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ .

## Les motifs dilogarithmiques

Les groupes de cohomologie relative (1.4) ou (1.7) se relèvent en des *motifs dilogarithmiques*, qu'on note  $L_a^{(2)}$ . La structure triangulaire de la matrice des périodes (1.5) reflète la structure d'une extension

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}(0) \longrightarrow L_a^{(2)} \longrightarrow K_a(-1) \longrightarrow 0.$$

Comme  $K_a(-1)$  est une extension de  $\mathbb{Q}(-2)$  par  $\mathbb{Q}(-1)$ , on voit que  $L_a^{(2)}$  est une extension itérées des motifs  $\mathbb{Q}(-2)$ ,  $\mathbb{Q}(-1)$ ,  $\mathbb{Q}(0)$ . Il appartient donc à la catégorie des *motifs de Tate mixtes*, qui sont les extensions itérées de  $\mathbb{Q}(-n)$  pour différents  $n \in \mathbb{Z}$ .

### Motifs de Tate mixtes

Grâce aux travaux de Levine [Lev93], basés sur la catégorie triangulée des motifs de Voevodsky [Voe00] et les travaux de Borel sur la  $K$ -théorie [Bor74], on dispose pour tout corps de nombres  $F$  d'une catégorie tannakienne des motifs de Tate mixtes sur  $F$ , notée  $\text{MT}(F)$ . Des exemples d'objets de  $\text{MT}(F)$  sont les motifs de Kummer  $K_a$  pour  $a \in F^\times$ , ou les motifs dilogarithmiques  $L_a^{(2)}$  pour  $a \in F^\times \setminus \{1\}$ .

### 1.2.3 La machine tannakienne et la théorie de Galois des périodes

#### Groupes de Galois motiviques

Dans un formalisme motivique où la catégorie  $\text{Mot}$  est tannakienne, et où les foncteurs de réalisation  $\omega_{\text{dR}}$  et  $\omega_{\text{B}}$  sont des foncteurs fibre, la machine tannakienne donne accès à des  $\mathbb{Q}$ -schémas en groupes

$$G_{\text{dR}} = \underline{\text{Aut}}^{\otimes}(\omega_{\text{dR}}) \quad \text{et} \quad G_{\text{B}} = \underline{\text{Aut}}^{\otimes}(\omega_{\text{B}}),$$

appelés *groupes de Galois motiviques*. Ce sont des schémas en groupes universels qui agissent linéairement sur les réalisations (de de Rham et de Betti respectivement) de chaque motif, de manière compatible au produit tensoriel et aux morphismes entre motifs. De manière plus formelle,  $\omega_{\text{dR}}$  et  $\omega_{\text{B}}$  induisent des foncteurs

$$\text{Mot} \rightarrow \text{Rep}(G_{\text{dR}}) \quad \text{et} \quad \text{Mot} \rightarrow \text{Rep}(G_{\text{B}}).$$

Le théorème fondamental de reconstruction tannakienne [SR72, Del90] affirme que ces foncteurs sont des équivalences de catégories. On peut donc, au moins abstraitement, exprimer la structure des motifs dans le langage de la théorie des représentations des groupes algébriques.

Il est absurde d'espérer décrire facilement les *points* d'un groupe de Galois motivique, et l'objet auquel on a en fait accès est l'algèbre  $\mathcal{O}(G_{\text{dR}})$  des *fonctions* sur le groupe, via le formalisme des coefficients matriciels. Par exemple, une fonction sur  $G_{\text{dR}}$  est une classe d'équivalence de triplets  $(M, f, v)^{\text{dR}}$ , où  $M$  est un motif,  $v \in M_{\text{dR}}$ , et  $f \in M_{\text{dR}}^{\vee}$ . Tout point  $g$  de  $G_{\text{dR}}$  induit un automorphisme linéaire  $g_M$  de  $M_{\text{dR}}$ , et  $(M, f, v)^{\text{dR}}$  est la fonction  $g \mapsto \langle f, g_M(v) \rangle$ . Les relations linéaires entre ces coefficients matriciels sont engendrées par les relations évidentes : pour chaque morphisme  $a : M \rightarrow N$  dans la catégorie des motifs on a une égalité

$$(M, a_{\text{dR}}^{\vee}(g), v)^{\text{dR}} = (N, g, a_{\text{dR}}(v))^{\text{dR}} \quad (1.12)$$

où  $v \in M_{\text{dR}}$  et  $g \in N_{\text{dR}}^{\vee}$ , et où l'on note  $a_{\text{dR}} : M_{\text{dR}} \rightarrow N_{\text{dR}}$  l'application linéaire induite par  $a$  via le foncteur de réalisation de de Rham.

Dualement à la loi de groupe sur  $G_{\text{dR}}$  on a une structure d'algèbre de Hopf sur  $\mathcal{O}(G_{\text{dR}})$  et notamment un coproduit

$$\Delta : \mathcal{O}(G_{\text{dR}}) \rightarrow \mathcal{O}(G_{\text{dR}}) \otimes \mathcal{O}(G_{\text{dR}})$$

qui se calcule sur les coefficients matriciels par la formule générale

$$\Delta(M, f, v)^{\text{dR}} = \sum_i (M, f, e_i)^{\text{dR}} \otimes (M, e_i^\vee, v)^{\text{dR}},$$

où  $(e_i)$  est une base de  $M_{\text{dR}}$  et  $(e_i^\vee)$  la base duale.

On utilisera aussi la terminologie *période de de Rham* pour les éléments de  $\mathcal{O}(G_{\text{dR}})$  ainsi que la notation

$$\mathcal{P}^{\text{dR}} = \mathcal{O}(G_{\text{dR}}).$$

### Périodes motiviques

Puisqu'on dispose de deux foncteurs fibre naturels  $\omega_{\text{dR}}$  et  $\omega_{\text{B}}$  sur la catégorie des motifs, la machine tannakienne fournit un toiseur

$$T = \underline{\text{Isom}}^{\otimes}(\omega_{\text{dR}}, \omega_{\text{B}})$$

dont les points sont les isomorphismes entre les deux foncteurs de réalisation qui respectent la structure tensorielle. C'est un bitorseur sous les groupes de Galois motiviques  $G_{\text{dR}}$  et  $G_{\text{B}}$ . L'isomorphisme de comparaison (1.11) est un point complexe canonique de  $T$ .

**Définition 1.4.** L'algèbre des *périodes motiviques*  $\mathcal{P}^{\text{mot}}$  est l'algèbre des fonctions sur  $T$  :

$$\mathcal{P}^{\text{mot}} = \mathcal{O}(T).$$

Le morphisme d'algèbres induit par (1.11) est noté

$$\text{per} : \mathcal{P}^{\text{mot}} \rightarrow \mathbb{C}$$

et appelé le *morphisme des périodes*.

Concrètement, une période motivique est une classe d'équivalence de coefficients matriciels  $(M, \varphi, v)^{\text{mot}}$ , où  $M$  est un motif,  $v \in M_{\text{dR}}$ , et  $\varphi \in M_{\text{B}}^\vee$ . Les relations linéaires entre coefficients matriciels sont engendrées par les relations évidentes

$$(M, a_{\text{B}}^\vee(\psi), v)^{\text{mot}} = (N, \psi, a_{\text{dR}}(v))^{\text{mot}} \quad (1.13)$$

issues des morphismes entre motifs comme pour (1.12). Le morphisme des périodes se calcule par la formule

$$\text{per}(M, \varphi, v)^{\text{mot}} = \langle \varphi, \text{comp}(v) \rangle.$$

Au vu du théorème 1.3, toute période peut donc se relever, via le morphisme  $\text{per}$ , en une période motivique du type  $(M^n(X, Y)(j), [\sigma], [\alpha])^{\text{mot}}$ . Tout motif étant un sous-quotient d'un objet  $M^n(X, Y)(j)$ , l'image du morphisme  $\text{per}$  est exactement l'algèbre  $\mathcal{P}$ . On voit les périodes motiviques (les éléments de  $\mathcal{P}^{\text{mot}}$ ) comme des versions "abstraites" ou "formelles" des périodes. La conjecture des périodes de Grothendieck affirme qu'il n'y a en fait aucune différence entre  $\mathcal{P}^{\text{mot}}$  et  $\mathcal{P}$ .

**Conjecture 1.5** (Conjecture des périodes). *Le morphisme  $\text{per} : \mathcal{P}^{\text{mot}} \rightarrow \mathbb{C}$  est injectif, et induit donc un isomorphisme d'algèbres  $\mathcal{P}^{\text{mot}} \simeq \mathcal{P}$ .*

Cette conjecture affirme que toutes les relations  $\mathbb{Q}$ -linéaires entre périodes sont “d’origine géométrique” au sens où elles proviennent des relations (1.13) issues des morphismes dans la catégorie des motifs.

On renvoie le lecteur à la lettre d’André en appendice de [Ber20] pour plus de détails et de contexte historique sur la conjecture des périodes, et à [And09] pour une discussion de certains cas particuliers de la conjecture. Mentionnons simplement ici le fait que cette conjecture est équivalente à une liste (indexée par les motifs !) d’énoncés de transcendance de certaines familles de périodes, qui sont généralement très difficiles. Par exemple, un cas particulier est la transcendance des valeurs zêta  $\zeta(n)$ , qui est un problème ouvert pour tout  $n$  impair (on ne sait par exemple pas montrer que  $\zeta(5)$  est irrationnel).

### Théorie de Galois des périodes (motiviques)

On a déjà mentionné le fait que  $T$  est, par définition, un bitorseur sous les groupes de Galois motiviques  $G_{\mathrm{dR}}$  et  $G_{\mathrm{B}}$ . Cela implique que l’algèbre  $\mathcal{P}^{\mathrm{mot}}$  est munie d’actions de  $G_{\mathrm{dR}}$  et  $G_{\mathrm{B}}$ . Si l’on croit à la conjecture des périodes, les groupes de Galois motiviques agissent donc sur l’algèbre  $\mathcal{P}$ , mettant à jour une *théorie de Galois des périodes* (en fait *deux* théories de Galois, pour l’action des deux groupes de Galois motiviques). Cette théorie généralise en effet la théorie de Galois classique des nombres algébriques, qu’on retrouve en considérant les motifs  $M^0(\mathrm{Spec}(K))$ , pour  $K$  un corps de nombres. L’idée d’une théorie de Galois des périodes est due à André [And09].

La conjecture des périodes étant présentement hors de portée, on se contente de travailler avec la théorie de Galois des périodes motiviques, qui est l’action de  $G_{\mathrm{dR}}$  (qu’on privilégie à  $G_{\mathrm{B}}$  pour le reste de cette introduction) sur l’algèbre  $\mathcal{P}^{\mathrm{mot}}$ . De manière duale, on a une coaction

$$\rho : \mathcal{P}^{\mathrm{mot}} \rightarrow \mathcal{P}^{\mathrm{mot}} \otimes \mathcal{O}(G_{\mathrm{dR}})$$

qui se calcule sur les coefficients matriciels par la formule générale

$$\rho(M, \varphi, v)^{\mathrm{mot}} = \sum_i (M, \varphi, e_i)^{\mathrm{mot}} \otimes (M, e_i^\vee, v)^{\mathrm{dR}},$$

où  $(e_i)$  est une base de  $M_{\mathrm{dR}}$  et  $(e_i^\vee)$  la base duale. On l’appelle la *coaction motivique*.

Au cœur des travaux de Goncharov et de Brown mentionnés ci-dessus sur les polylogarithmes multiples (1.8) et les valeurs zêta multiples (1.10) figure une jolie formule [Gon05, Bro12] pour la coaction motivique des intégrales itérées (1.9) :

$$\begin{aligned} & \rho(\mathbb{I}^{\mathrm{mot}}(a_0; a_1, \dots, a_n; a_{n+1})) \\ &= \sum \mathbb{I}^{\mathrm{mot}}(a_0; a_{i_1}, \dots, a_{i_k}; a_{n+1}) \otimes \left( \prod_{j=0}^k \mathbb{I}^{\mathrm{dR}}(a_{i_j}; a_{i_{j+1}}, \dots, a_{i_{j+1}-1}; a_{i_{j+1}}) \right), \end{aligned} \quad (1.14)$$

où la somme porte sur les multi-indices  $0 = i_0 < i_1 < \dots < i_k < i_{k+1} = n + 1$ . On renvoie au §3.3 pour la signification des versions “de de Rham”  $\mathbb{I}^{\mathrm{dR}}(\dots) \in \mathcal{P}^{\mathrm{dR}}$ .



## Une “théorie de Galois cosmique” ?

Cartier [Car01] et Goncharov [Gon05] ont émis l’hypothèse que l’espace engendré par les intégrales de Feynman (ou plutôt leurs versions motiviques) est clos sous l’action du groupe de Galois motivique. Dans le cadre de la théorie  $\phi^A$ , cette hypothèse a été vérifiée par Panzer et Schnetz [PS16]. On peut aussi espérer que la coaction motivique correspondante soit donnée par une formule *purement combinatoire* en termes des graphes de Feynman.

## Les motifs de Tate mixtes et le “programme de Goncharov”

Soit  $F$  un corps de nombres. On dispose d’une catégorie tannakienne  $\text{MT}(F)$  des motifs de Tate mixtes sur  $F$ , qui a un foncteur de réalisation canonique  $\text{MT}(F) \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}}$  (qui est une structure  $\mathbb{Q}$ -linéaire sur le foncteur de réalisation de de Rham). On note  $G_F$  le groupe de Galois motivique correspondant, il a la structure d’un produit semi-direct  $G_F = U_F \rtimes \mathbb{G}_m$  où  $U_F$  est pro-unipotent. On note  $\mathcal{H}(F) = \mathcal{O}(U_F)$ , c’est une algèbre de Hopf graduée qui contient toute l’information de la structure abstraite des motifs de Tate mixtes sur  $F$ . Grâce aux liens entre groupes d’extensions dans  $\text{MT}(F)$  et  $K$ -théorie rationnelle de  $F$ , on peut calculer les groupes  $K_n(F)_{\mathbb{Q}}$  à partir de  $\mathcal{H}(F)$  via des *complexes motiviques* dans l’esprit du complexe de Bloch–Suslin [Blo77, Blo78, Sus90] pour le  $K_3$ .

Un thème récurrent des travaux de Goncharov est la recherche d’une description aussi concrète et simple que possible de l’algèbre de Hopf  $\mathcal{H}(F)$ , pour un corps  $F$  quelconque (voir [Dup21] pour une introduction à ces idées).

## 1.3 Arrangements et cohomologie

### 1.3.1 Périodes des arrangements d’hyperplans

L’exemple du dilogarithme étudié plus haut motive l’introduction d’une classe de motifs et de périodes indexée par la donnée de deux familles d’hyperplans dans l’espace affine ou projectif. Pour fixer les idées, soient  $L$  et  $M$  deux unions finies d’hyperplans de l’espace projectif  $\mathbb{P}^n$ . On étudie des intégrales du type  $\int_{\sigma} \alpha$  où  $\alpha$  est un  $n$ -forme différentielle avec des pôles le long de  $L$  et  $\sigma$  est un  $n$ -cycle relatif avec bord le long de  $M$ . Si  $L$  et  $M$  sont en position générique, de telles intégrales sont des périodes du groupe de cohomologie relative  $H^n(\mathbb{P}^n \setminus L, M \setminus L \cap M)$ . Mais en général, comme on l’a vu dans le cas du dilogarithme, il faut procéder à une suite d’éclatements  $X \rightarrow \mathbb{P}^n$  le long d’intersections multiples d’hyperplans et considérer un groupe de cohomologie relative

$$H^n(X \setminus A, B \setminus A \cap B) \tag{1.15}$$

où  $A$  (resp.  $B$ ) est l’union de la transformée stricte de  $L$  (resp.  $M$ ) et de certains diviseurs exceptionnels. Ces groupes de cohomologie relative sont introduits par Beilinson, Goncharov, Varchenko et Schechtman [BVG90] et leurs périodes sont appelées *polylogarithmes d’Aomoto*. Elles contiennent tous les polylogarithmes multiples (1.8), et forment une classe-test de périodes pour lesquelles on peut espérer comprendre la théorie de Galois motivique de manière relativement explicite et combinatoire.

L'étude des groupes de cohomologie relative (1.15) s'inscrit dans une tradition, qu'on rappelle maintenant, de l'étude de la cohomologie des complémentaires d'arrangements d'hyperplans.

### 1.3.2 Arnol'd

La théorie moderne des arrangements d'hyperplans débute avec un célèbre théorème d'Arnol'd, qui donne une présentation de l'algèbre de cohomologie de l'espace de configuration de  $n$  points dans le plan complexe,

$$\text{Conf}(n, \mathbb{C}) = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \forall i \neq j, z_i \neq z_j\}.$$

Cet espace est important en théorie des groupes puisqu'il s'agit d'un espace classifiant pour le groupe de tresses pures à  $n$  brins. Dans toute la fin de l'introduction on note  $H^\bullet$  la cohomologie singulière à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ .

**Théorème 1.6** (Arnol'd [Arn69]). *L'algèbre  $H^\bullet(\text{Conf}(n, \mathbb{C}))$  est engendrée par les classes des 1-formes fermées*

$$\omega_{i,j} = \frac{1}{2i\pi} \text{dlog}(z_i - z_j)$$

*et les relations sont engendrées par les identités entre 2-formes*

$$\omega_{i,j} \wedge \omega_{j,k} - \omega_{i,j} \wedge \omega_{i,k} + \omega_{j,k} \wedge \omega_{i,k} = 0.$$

Arnol'd conjecture qu'un tel résultat se généralise à un arrangement d'hyperplans quelconque.

**Définition 1.7.** Un *arrangement d'hyperplans* (complexe, central) est un ensemble fini d'hyperplans linéaires d'un espace vectoriel complexe de dimension finie.

On note maintenant  $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_r\}$  un arrangement d'hyperplans dans  $\mathbb{C}^n$ . Pour chaque hyperplan  $H_i$  on choisit une forme linéaire  $f_i$  qui le définit. On s'intéresse à la topologie du complémentaire  $\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{A} = \mathbb{C}^n \setminus (H_1 \cup \dots \cup H_r)$ . Le cas de l'*arrangement des tresses*, donné par les hyperplans  $\{z_i = z_j\}$  dans  $\mathbb{C}^n$ , redonne l'espace de configuration étudié par Arnol'd.

### 1.3.3 Brieskorn

Brieskorn prouve l'énoncé général conjecturé par Arnol'd.

**Théorème 1.8** (Brieskorn [Bri73]). *L'algèbre  $H^\bullet(\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{A})$  est engendrée par les classes des 1-formes fermées*

$$\omega_i = \frac{1}{2i\pi} \text{dlog}(f_i).$$

*Plus précisément, elle est isomorphe à la sous- $\mathbb{Q}$ -algèbre engendrée par les  $\omega_i$  dans l'algèbre des formes différentielles sur  $\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{A}$ .*

La deuxième partie du théorème de Brieskorn est importante : si on note  $E^\bullet(X)$  le complexe de de Rham à coefficients complexes d'une variété différentielle  $X$ , on obtient une inclusion canonique

$$H^\bullet(\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{A}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \hookrightarrow E^\bullet(\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{A})$$

qui est un quasi-isomorphisme d'algèbres différentielles graduées commutatives, où  $H^\bullet(\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{A})$  a une différentielle nulle. On dit alors que  $\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{A}$  est un espace *formel* au sens de la théorie de l'homotopie rationnelle. Cela signifie que son algèbre de cohomologie contient toute l'information sur son type d'homotopie rationnel.

Une autre information notable qu'apporte le théorème de Brieskorn a trait à la théorie de Hodge mixte au sens de Deligne [Del71a, Del71b]. Comme  $\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{A}$  est une variété algébrique complexe lisse, son  $H^k$  a une structure de Hodge mixte canonique avec des poids compris entre  $k$  et  $2k$ . Le théorème de Brieskorn implique que  $H^k(\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{A})$  est en fait pur de poids  $2k$  et de type  $(k, k)$ . En effet, cela revient au fait que  $H^1(\mathbb{C}^*)$  est pur de poids 2 et de type  $(1, 1)$ , puisque le théorème de Brieskorn donne un morphisme surjectif de structures de Hodge

$$\Lambda^\bullet(H^1(\mathbb{C}^*)^{\oplus r}) \rightarrow H^k(\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{A}).$$

Nous verrons plus bas que ces énoncés de formalité et de pureté concernant  $\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{A}$  sont intimement liés.

### 1.3.4 Orlik–Solomon

Le théorème de Brieskorn ne précise pas la forme des relations entre les formes  $\omega_i$ . Ces relations ont été précisées par Orlik et Solomon, et sont étonnamment simples à décrire. Pour une famille  $\{H_{i_0}, H_{i_1}, \dots, H_{i_k}\}$  d'hyperplans de  $\mathcal{A}$  qui sont linéairement dépendants, on a une relation en degré  $k$  entre les formes différentielles  $\omega_i$  :

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j \omega_{i_0} \wedge \dots \wedge \widehat{\omega_{i_j}} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k} = 0. \quad (1.16)$$

**Théorème 1.9** (Orlik–Solomon [OS80]). *Les relations (1.16) engendrent les relations entre les  $\omega_j$ .*

Ce résultat motive les définitions suivantes. Soit  $\Lambda^\bullet(e_1, \dots, e_r)$  l'algèbre commutative graduée libre sur des générateurs  $e_i$  en degré 1, correspondant aux hyperplans de  $\mathcal{A}$ , et soit  $\partial$  l'unique dérivation de  $\Lambda^\bullet(e_1, \dots, e_r)$  qui envoie chaque générateur  $e_i$  sur 1. Elle est donnée sur les monômes par la formule :

$$\partial(e_{i_0} \wedge e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) = \sum_{j=0}^k (-1)^j e_{i_0} \wedge \dots \wedge \widehat{e_{i_j}} \wedge \dots \wedge e_{i_k}.$$

**Définition 1.10.** L'algèbre d'Orlik–Solomon de  $\mathcal{A}$  est le quotient

$$A_\bullet(\mathcal{A}) = \Lambda^\bullet(e_1, \dots, e_r) / I_\bullet(\mathcal{A})$$

où  $I_\bullet(\mathcal{A})$  est l'idéal engendré par les  $\partial(e_{i_0} \wedge e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k})$  pour  $\{H_{i_0}, H_{i_1}, \dots, H_{i_k}\}$  une famille d'hyperplans linéairement dépendants de  $\mathcal{A}$ .

Le théorème d’Orlik–Solomon et le théorème de Brieskorn donnent lieu à un isomorphisme d’algèbres graduées commutatives

$$A_{\bullet}(\mathcal{A}) \longrightarrow H^{\bullet}(\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{A}), \quad e_i \mapsto [\omega_i].$$

Une conséquence importante de ce théorème est que l’algèbre de cohomologie de  $\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{A}$  ne dépend que de la combinatoire de  $\mathcal{A}$ , c’est-à-dire de l’information des familles linéairement dépendantes à l’intérieur de  $\mathcal{A}$  (ou de manière plus savante, du matroïde sous-jacent à  $\mathcal{A}$ ). Un tel résultat ne coule pas de source : on sait par exemple que le groupe fondamental de  $\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{A}$  n’est pas un invariant combinatoire [Ryb11]. Parmi les questions élémentaires ouvertes dans la théorie des arrangements d’hyperplans, mentionnons la suivante : la cohomologie de la fibre de Milnor globale  $F_{\mathcal{A}} = \{f_1 f_2 \cdots f_r = 1\}$  d’un arrangement d’hyperplans  $\mathcal{A}$  est-elle un invariant combinatoire ? On renvoie à [Dim17] pour plus de détails.

### 1.3.5 La théorie de Hodge mixte des variétés lisses

Certains des travaux décrits dans ce mémoire ont été motivés par la volonté de réconcilier les travaux classiques de Brieskorn et Orlik–Solomon avec ceux de Deligne [Del71a, Del71b] et Morgan [Mor78] sur la topologie des variétés algébriques complexe lisses, qu’on rappelle maintenant.

Un outil classique en topologie est de comprendre la cohomologie d’un espace  $Z$  en l’écrivant comme union de sous-espaces  $Z_1$  et  $Z_2$ , par exemple deux ouverts (suite exacte longue de Mayer–Vietoris), ou un ouvert et le fermé complémentaire (suite exacte longue de localisation). L’approche de Deligne est, pour une variété algébrique complexe lisse  $U$ , de comprendre sa cohomologie “par excès”, c’est-à-dire en l’écrivant  $U = X \setminus D$  où  $X$  est une variété algébrique propre et lisse, et  $D$  est un diviseur à croisements normaux. Dans ce mémoire on supposera pour simplifier que  $U$  est quasi-projective, de sorte que  $X$  peut être choisie projective ; on se restreindra aussi au cas de diviseurs à croisements normaux *simples*, c’est-à-dire dont les composantes irréductibles sont lisses.

Deligne construit une structure de Hodge mixte canonique sur la cohomologie  $H^{\bullet}(U)$ , qui ne dépend pas du choix de  $(X, D)$  bien que la définition utilise un tel choix. La construction de Deligne se base sur les formes logarithmiques. Dans un bon système local de coordonnées holomorphes  $(z_1, \dots, z_n)$  sur  $X$ , le diviseur à croisements normaux  $D$  est donné par une équation  $z_1 \cdots z_r = 0$  et une forme méromorphe sur  $X$  est dite logarithmique le long de  $D$  si elle s’écrit localement comme combinaison linéaire de formes

$$\alpha \wedge \frac{dz_{i_1}}{z_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{dz_{i_s}}{z_{i_s}} \tag{1.17}$$

avec  $\alpha$  holomorphe sur  $X$  et  $1 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq r$ . L’espace des formes logarithmiques est stable par la différentielle extérieure et on obtient donc un complexe de faisceaux sur  $X$  noté  $\Omega_X^{\bullet}(\log D)$ . Par un théorème dû à Hodge et Atiyah [HA55], il calcule la cohomologie de  $U = X \setminus D$  à coefficients complexes :

$$H^{\bullet}(U) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{H}^{\bullet}(X, \Omega_X^{\bullet}(\log D)).$$

Deligne définit alors la filtration de Hodge  $F$  et la filtration par le poids  $W$  sur  $H^{\bullet}(U) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$  comme les filtrations induites en cohomologie par deux filtrations  $F$  et  $W$  sur  $\Omega_X^{\bullet}(\log D)$ .

La filtration de Hodge est donnée par  $F^k \Omega_X^\bullet(\log D) = \Omega_X^{\geq k}(\log D)$ . Pour la filtration par le poids,  $W_k \Omega_X^\bullet(\log D)$  est défini comme le sous-espace de  $\Omega_X^\bullet(\log D)$  engendré par les formes (1.17) avec  $s \leq k$ . Le théorème principal de [Del71b] est que la filtration  $W$  sur  $H^\bullet(U) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$  est en fait définie sur  $H^\bullet(U)$  et que  $(H^\bullet(U), W, F)$  est une structure de Hodge mixte.

La suite spectrale associée à la filtration par le poids est particulièrement intéressante. Elle prend la forme :

$$E_1^{-p,q} = \bigoplus_{|I|=p} H^{-2p+q}(D_I)(-p) \implies H^{-p+q}(U) \quad (1.18)$$

où l'on a numéroté les composantes irréductibles  $D_i$  de  $D$ , et  $D_I$  désigne l'intersection des composantes  $D_i$  pour  $i \in I$ . La théorie de Hodge mixte implique que (1.18) dégénère à la page  $E_2$ , et constitue donc un outil précieux pour "calculer" la cohomologie de  $U$  en connaissant celle de  $X$ , des  $D_i$ , des  $D_i \cap D_j$ , etc.

Les travaux de Morgan [Mor78], faisant suite à [DGMS75], vont plus loin et montrent que la page  $E_1$  de (1.18) est munie d'une structure d'algèbre différentielle graduée commutative qui est un modèle pour  $U$  au sens de l'homotopie rationnelle. Par conséquent, la théorie de Hodge mixte donne des contraintes explicites sur le type d'homotopie rationnel d'une variété algébrique complexe lisse. Ces contraintes ont ensuite été précisées et généralisées à toutes les variétés algébriques par Hain [Hai87a, Hai87b].

## Chapitre 2

# Topologie, géométrie, et combinatoire des arrangements

### 2.1 Le modèle d’Orlik–Solomon pour les arrangements d’hypersurfaces

Supposons qu’on ne connaisse pas les travaux de Brieskorn et Orlik–Solomon sur les arrangements d’hyperplans et qu’on souhaite les retrouver en appliquant les outils généraux de Deligne et Morgan sur la topologie des variétés algébriques complexes lisses. Avec les notations du chapitre précédent, on se place dans le cas où  $U$  est le complémentaire dans  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  d’un arrangement d’hyperplans projectifs  $\mathcal{A}$ . On a alors besoin de voir  $U$  comme le complémentaire d’un diviseur à croisements normaux dans une variété projective lisse, ce qui nécessite de résoudre les singularités de  $\mathcal{A}$ . Les travaux de De Concini et Procesi [DCP95] donnent une parfaite compréhension combinatoire et cohomologique de ces résolutions des singularités. Le modèle (1.18) qui en résulte pour  $U$  est explicite, mais trop compliqué pour qu’on puisse en extraire facilement les résultats de Brieskorn et Orlik–Solomon sur la topologie de  $U$ . En effet, la résolution des singularités fait exploser le nombre de diviseurs (on ajoute un diviseur exceptionnel à chaque éclatement) ainsi que la taille de la cohomologie de chaque diviseur.

Dans [Dup15] nous avons voulu étendre les travaux de Deligne et Morgan pour qu’ils s’appliquent naturellement aux arrangements d’hyperplans sans qu’il soit nécessaire de procéder à une résolution des singularités. On relaxe la notion de diviseur à croisements normaux grâce à la définition suivante.

**Définition 2.1.** Soit  $X$  une variété algébrique complexe lisse. Un *arrangement d’hypersurfaces* dans  $X$  est un diviseur de  $X$  qui ressemble localement à un arrangements d’hyperplans : autour de chaque point de  $X$  on peut trouver un système de coordonnées holomorphes dans lequel le diviseur est donné par un produit d’équations linéaires.

Soit  $\mathcal{A}$  un arrangement d’hypersurfaces. Dans la suite on fait l’hypothèse simplificatrice que les composantes irréductibles de  $\mathcal{A}$  sont lisses (comme pour les diviseurs à croisements normaux simples). Un arrangements d’hypersurfaces induit une stratification de la variété ambiante  $X$ , et on appelle *strate* de  $\mathcal{A}$  les strates correspondantes. Ce sont des sous-variétés

localement fermées, connexes et lisses, de  $X$ . (Cette terminologie constrate avec la terminologie de [Dup15] où l'on appelle strate les *adhérences* des strates.) On note  $\mathcal{S}_r(\mathcal{A})$  l'ensemble des strates de codimension  $r$  de  $\mathcal{A}$ . À une strate  $S$  correspond une donnée locale, qui est l'arrangement d'hyperplans donné par les espaces tangents des composantes irréductibles de  $\mathcal{A}$  qui contiennent  $S$ , à l'intérieur de l'espace tangent à  $X$  en n'importe quel point de  $S$ . On note  $A_S(\mathcal{A})$  la composante de degré maximal  $\text{codim}(S)$  de l'algèbre d'Orlik–Solomon de cet arrangement d'hyperplans. C'est un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension finie qui ne dépend que de la combinatoire de  $\mathcal{A}$ . Si  $\mathcal{A}$  est un diviseur à croisements normaux alors  $A_S(\mathcal{A})$  est de dimension 1 pour chaque strate  $S$ ; plus précisément, c'est le déterminant de l'ensemble des composantes irréductibles de  $\mathcal{A}$  qui contiennent  $S$ .

On définit une notion de forme logarithmique le long d'un arrangement d'hypersurfaces  $\mathcal{A}$ . Dans un bon système de coordonnées holomorphes sur  $X$ ,  $\mathcal{A}$  est donné par une équation  $f_1 \cdots f_r = 0$  où les  $f_i$  sont linéaires, et une forme méromorphe sur  $X$  est dite logarithmique le long de  $\mathcal{A}$  si elle s'écrit localement comme combinaison linéaire de formes

$$\alpha \wedge \frac{df_{i_1}}{f_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{df_{i_s}}{f_{i_s}}$$

avec  $\alpha$  holomorphe sur  $X$  et  $1 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq r$ . L'espace des formes logarithmiques est stable par la différentielle extérieure et on obtient donc un complexe de faisceaux sur  $X$  qu'on note  $\Omega_X^\bullet(\mathcal{A})$ . On montre qu'il calcule la cohomologie du complémentaire  $X \setminus \mathcal{A}$ .

**Théorème 2.2** ([Dup15], Theorem 1.3). *On a un isomorphisme :*

$$H^\bullet(X \setminus \mathcal{A}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq H^\bullet(X, \Omega_X^\bullet(\mathcal{A})).$$

La preuve est un raisonnement local par récurrence sur le nombre de composantes irréductibles d'un arrangement d'hyperplans, en utilisant la stratégie de suppression-contraction par rapport à un hyperplan.

*Remarque 2.3.* Il existe une définition générale de forme différentielle à pôles logarithmiques le long d'un diviseur, due à Saito [Sai80], qui ne correspond pas à la nôtre. Pour un diviseur  $D$  donné par une équation locale  $f = 0$ , Saito définit une forme logarithmique le long de  $D$  comme une forme méromorphe  $\omega$  sur  $X \setminus D$  telle que  $f\omega$  et  $f d\omega$  s'étendent en des formes holomorphes sur  $X$ . On obtient un complexe de faisceaux  $\Omega_X^\bullet(\log D)$  sur  $X$ , qui coïncide avec celui de Deligne si  $D$  est un diviseur à croisements normaux. Dans le cas d'un arrangement d'hypersurfaces, on a une inclusion  $\Omega_X^\bullet(\mathcal{A}) \subset \Omega_X^\bullet(\log \mathcal{A})$  qui est stricte en général. La question de savoir si les formes logarithmiques au sens de Saito calculent la cohomologie du complémentaire d'un arrangement d'hyperplans est ouverte.

En imitant Deligne on définit des filtrations  $F$  et  $W$  sur  $\Omega_X^\bullet(\mathcal{A})$ . Un point central est de calculer les gradués pour  $W$ ; ils sont donnés par la formule :

$$\text{gr}_k^W \Omega_X^\bullet(\mathcal{A}) \simeq \bigoplus_{S \in \mathcal{S}_k(\mathcal{A})} (i_{\overline{S}})_* \Omega_{\overline{S}}^{\bullet-k} \otimes A_S(\mathcal{A}),$$

où  $i_{\overline{S}} : \overline{S} \hookrightarrow X$  est l'immersion fermée de l'adhérence d'une strate  $S$  dans  $X$ . Cet isomorphisme est induit par les résidus (au sens naïf) de formes logarithmiques le long de composantes irréductibles de  $\mathcal{A}$ . L'apparition de  $A_S(\mathcal{A})$  reflète le fait qu'en général ces résidus ne commutent pas entre eux (même au signe près).

**Théorème 2.4** ([Dup15], Theorem 1.2). *Soit  $X$  une variété algébrique complexe lisse, soit  $\mathcal{A}$  un arrangement d’hypersurfaces dans  $X$ . On a une suite spectrale*

$$E_1^{-p,q} = \bigoplus_{S \in \mathcal{S}_p(\mathcal{A})} H^{-2p+q}(\overline{S})(-p) \otimes A_S(\mathcal{A}) \implies H^{-p+q}(X \setminus \mathcal{A}). \quad (2.1)$$

*Si  $X$  est projective, cette suite spectrale dégénère à la page  $E_2$ , et la page  $E_1$  a une structure d’algèbre différentielle graduée commutative qui est un modèle de  $X \setminus \mathcal{A}$  au sens de l’homotopie rationnelle.*

Dans le cas où  $X$  est projective, on appelle la page  $E_1$  de (2.1) le *modèle d’Orlik–Solomon* de l’arrangement d’hypersurfaces, qu’on note  $M(X, \mathcal{A})$ . La preuve du fait qu’il s’agit d’un modèle au sens de l’homotopie rationnelle repose sur le modèle de Morgan (cas d’un diviseur à croisements normaux) et la functorialité de notre construction par rapport aux éclatements. On calcule explicitement un quasi-isomorphisme

$$M(X, \mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} M(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{A}}) \quad (2.2)$$

associé à une suite d’éclatements  $\tilde{X} \rightarrow X$  le long de strates de  $\mathcal{A}$ , où  $\tilde{\mathcal{A}}$  désigne la transformée totale de  $\mathcal{A}$ . Ces quasi-isomorphismes ont été étudiés sous l’angle combinatoire et généralisés au cas de matroïdes généraux par Bibby, Denham, et Feichtner [BDF21].

La première partie du théorème 2.4 était déjà connu grâce aux travaux de Looijenga [Loo93, §2], qui utilise des méthodes différentes, sans formes différentielles, et qui ne disent rien sur le type d’homotopie rationnel de  $X \setminus \mathcal{A}$ .

## 2.2 Pureté implique formalité

L’article [Dup16] est un compagnon de [Dup15] où l’on étudie le lien entre deux corollaires du théorème de Brieskorn : la pureté et la formalité du complémentaire d’un arrangement d’hyperplans complexe. On prouve, en se basant sur les travaux de Morgan, un résultat de “pureté implique formalité”. On se place dans le cadre de la formalité partielle, qui a la définition suivante. Soit  $r$  un entier naturel ou  $\infty$ . On dit qu’un morphisme  $f : A \rightarrow B$  d’algèbres différentielles graduées commutatives est un  $r$ -quasi-isomorphisme si l’application induite en cohomologie  $H^i(A) \rightarrow H^i(B)$  est un isomorphisme pour  $i \leq r$  et une injection pour  $i = r + 1$ . Une variété différentielle  $U$  est dite  $r$ -formelle si l’algèbre différentielle graduée commutative  $E^\bullet(U)$  des formes différentielles à coefficients complexes sur  $U$  est reliée par un zig-zag de  $r$ -quasi-isomorphismes à une algèbre différentielle graduée commutative dont la différentielle est nulle. La notion de  $\infty$ -formalité est la notion usuelle de formalité.

**Théorème 2.5** ([Dup16], Theorem 1.1). *Soit  $U$  une variété algébrique complexe lisse, soit  $r$  un entier naturel ou  $\infty$ , et supposons qu’une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

- (1) *pour tout entier  $k \leq r + 1$ ,  $H^k(U)$  est pure de poids  $k$  ;*
- (2) *pour tout entier  $k \leq r$ ,  $H^k(U)$  est pure de poids  $2k$ .*

*Alors  $U$  est  $r$ -formel.*



Le cas de l’hypothèse (1) avec  $r = \infty$  généralise le résultat principal de [DGMS75] dans le cas où  $U$  est projective lisse ; on a aussi comme corollaire la formalité de  $X - \{p\}$  où  $X$  est projective lisse et  $p \in X$ .

Le cas de l’hypothèse (2) avec  $r = \infty$  était déjà connu (même si nous n’en avons pas trouvé de trace publiée), voir par exemple la lettre de Beilinson à Kontsevich [Bei00]. En fait, l’argument de Beilinson est plus simple que le nôtre au sens où il n’utilise pas les travaux de Morgan mais seulement ceux de Deligne. Il suffit en effet de remarquer que sous l’hypothèse de poids le morphisme naturel

$$H^0(X, \Omega_X^\bullet(\log D)) \longrightarrow E^\bullet(U)$$

est un quasi-isomorphisme grâce à la théorie de Hodge mixte, pour toute paire  $(X, D)$  telle que  $X$  est projective lisse,  $D$  est un diviseur à croisements normaux, et  $U = X \setminus D$ . Une variété  $U$  qui satisfait à l’hypothèse (2) avec  $r = \infty$  a donc un quasi-isomorphisme *canonique* de formalité

$$H^\bullet(U) \longrightarrow E^\bullet(U),$$

c’est-à-dire des représentants *canoniques* de classes de cohomologie par des formes différentielles (logarithmiques sur n’importe quelle compactification). Il s’agit d’une situation géométrique très spéciale et particulièrement favorable !

Comme application du théorème 2.5 on répond à une question de De Concini et Procesi sur les arrangements toriques [DCP05]. Un arrangement torique  $\mathcal{T}$  est un ensemble de sous-ttores d’un tore  $T = (\mathbb{C}^*)^n$  (éventuellement décalés par un élément de  $T$ ). On s’intéresse au complémentaire  $(\mathbb{C}^*)^n \setminus \mathcal{T}$  d’un arrangement torique, qui est une version “trigonométrique” d’un arrangement d’hyperplans. Nos méthodes permettent de prouver automatiquement la version torique du théorème de Brieskorn, comme application du cas de l’hypothèse (2) du théorème 2.5.

**Théorème 2.6** ([Dup16], Theorem 1.3). *Le complémentaire d’un arrangement torique est formel.*

Notons pour conclure les travaux de Chataur et Cirici [CC17] qui démontrent entre autres choses un résultat de “pureté implique formalité” dans le cas des variétés projectives singulières. L’article [CH20] de Cirici et Horel prolonge et généralise grandement ces travaux et les nôtres dans un langage plus homotopique et fonctoriel, de même que l’article compagnon [CH22] dans le cadre de la cohomologie étale  $\ell$ -adique.

## 2.2.1 Une suite spectrale de localisation dans le cadre motivique

Dans [Pet17], Petersen construit une suite spectrale qui généralise (2.1) dans un cadre très général d’une variété stratifiée, avec des méthodes faisceautiques généralisant celles de [Loo93]. Dans [DJ20] nous avons relevé la suite spectrale de Petersen aux catégories triangulées des motifs étales DA à coefficients dans un anneau fixé  $\mathbb{K}$  [Ayo07a, Ayo07b, Ayo14, CD16, CD19].

On travaille avec des schémas qui sont tous séparés sur une base noethérienne  $B$ . Soit  $X$  un schéma stratifié avec une unique strate ouverte  $X_0$ , et notons  $j : X_0 \hookrightarrow X$  l’immersion ouverte correspondante. On note aussi  $i_{\overline{S}}^X : \overline{S} \hookrightarrow X$  l’immersion fermée de l’adhérence

d'une strate  $S$ . On note  $\hat{P}$  le poset des strates et on fixe une application strictement croissante  $\sigma : \hat{P} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $\sigma(X_0) = 0$ . À chaque strate  $S$  est associée un complexe de  $\mathbb{K}$ -modules  $C^\bullet(S)$  qui calcule la cohomologie réduite de l'intervalle ouvert  $(X_0, S)$  dans  $\hat{P}$ .

**Théorème 2.7** ([DJ20], Main theorem). *Pour tout  $\mathcal{F} \in \text{DA}_X$  on a un système de Postnikov dans  $\text{DA}_X$  :*

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & & \longrightarrow & F^2 & \longrightarrow & F^1 & \longrightarrow & F^0 = j_{!}j^{!}\mathcal{F} \\ & & \swarrow & \nearrow & & \swarrow & \nearrow & \\ & & +1 & & & +1 & & \\ & & G^2 & & & G^1 & & \\ & & \swarrow & \nearrow & & \swarrow & \nearrow & \\ & & & & & & & G^0 \end{array}$$

où les “gradués” sont donnés par la formule

$$G^k = \bigoplus_{\substack{S \in \hat{P} \\ \sigma(S)=k}} (i_{\overline{S}}^X)_* (i_{\overline{S}}^X)^* \mathcal{F} \otimes C^\bullet(S).$$

Les morphismes connectants  $G^k \rightarrow G^{k+1}[1]$  sont calculés explicitement. Ce système de Postnikov est fonctoriel en  $\mathcal{F}$  et pour une classe de morphismes stratifiés.

Dans le projet en cours [DF22], nous appliquons ce théorème (dans le cas d'un objet  $\mathcal{F}$  non constant) à la construction explicite des motifs polylogarithmiques de [BD94] (voir aussi le §3.2).

## 2.3 Bi-arrangements et cohomologie

L'article [Dup17] s'intéresse au calcul de groupes de cohomologie relative tels que (1.7), issues d'arrangements d'hyperplans dans l'espace affine ou projectif. On y introduit une notion de *bi-arrangement* d'hyperplans qui reflète le fait qu'un hyperplan peut jouer le rôle (noté  $\lambda$ ) de diviseur des pôles d'une forme différentielle, ou celui (noté  $\mu$ ) de partie du bord d'un domaine d'intégration. Il en va de même pour chaque diviseur exceptionnel issu de l'éclatement d'une strate d'un arrangement d'hyperplans. Pour cette raison on doit associer une “couleur”  $\lambda$  ou  $\mu$  à chaque strate de l'arrangement.

Dans la définition suivante on note  $\mathcal{S}_+(\mathcal{A})$  l'ensemble des strates strictes ( $\neq \mathbb{C}^n$ ) d'un arrangement d'hyperplans  $\mathcal{A}$  dans  $\mathbb{C}^n$ . Pour une égalité  $S = S' \cap S''$  avec  $S, S', S''$  des strates de  $\mathcal{A}$ , on dit que  $S'$  et  $S''$  constituent une *décomposition* de  $S$  si  $S'$  et  $S''$  s'intersectent transversalement ( $S = S' \pitchfork S''$ ) et que tout hyperplan de  $\mathcal{A}$  qui contient  $S$  contient soit  $S'$  soit  $S''$ .

**Définition 2.8.** Un *bi-arrangement d'hyperplans*  $\mathcal{B} = (\mathcal{A}, \chi)$  dans  $\mathbb{C}^n$  est la donnée d'un arrangement d'hyperplans  $\mathcal{A}$  dans  $\mathbb{C}^n$  et d'une *fonction de coloriage*  $\chi : \mathcal{S}_+(\mathcal{A}) \rightarrow \{\lambda, \mu\}$  sur l'ensemble  $\mathcal{S}_+(\mathcal{A})$  des strates strictes de  $\mathcal{A}$ , qui vérifie la *condition de Künneth* : pour toute décomposition  $S = S' \pitchfork S''$  avec  $S'$  et  $S''$  strictes,  $\chi(S) = \chi(S')$  ou  $\chi(S) = \chi(S'')$ .

Puisque des éclatements de  $\mathbb{C}^n$  apparaissent dans la construction des groupes de cohomologie relative qu'on veut étudier, il est naturel de travailler dans un cadre global via la définition suivante.

**Définition 2.9.** Soit  $X$  une variété algébrique complexe lisse. Un *bi-arrangement d'hypersurfaces*  $\mathcal{B} = (\mathcal{A}, \chi)$  dans  $X$  est la donnée d'un arrangement d'hypersurfaces  $\mathcal{A}$  dans  $X$  et d'une fonction de coloriage  $\chi : \mathcal{S}_+(\mathcal{A}) \rightarrow \{\lambda, \mu\}$  qui vérifie la condition de Künneth partout localement.

On se restreint au cas où les composantes irréductibles de  $\mathcal{A}$  sont lisses. On note un bi-arrangement d'hypersurfaces sous la forme  $(\mathcal{L}, \mathcal{M}, \chi)$  où  $\mathcal{L}$  (resp.  $\mathcal{M}$ ) est l'ensemble des composantes irréductibles  $D$  de  $\mathcal{A}$  qui sont telles que  $\chi(D) = \lambda$  (resp.  $\chi(D) = \mu$ ).

Pour un bi-arrangement d'hypersurfaces  $\mathcal{B} = (\mathcal{A}, \chi)$  dans  $X$ , on peut définir une famille de bi-arrangements d'hypersurfaces  $\mathcal{B}^{(n)} = (\mathcal{A}^{(n)}, \chi^{(n)})$  dans des variétés  $X^{(n)}$  de la manière suivante, inspirée par [DCP95]. On pose  $X^{(0)} = X$  et  $\mathcal{B}^{(0)} = \mathcal{B}$ . Pour chaque  $n$ ,  $X^{(n+1)} \rightarrow X^{(n)}$  est l'éclatement le long d'une strate  $S$  de  $\mathcal{B}^{(n)}$  et le bi-arrangement  $\mathcal{B}^{(n+1)}$  est la transformée stricte de  $\mathcal{B}^{(n)}$ , où la fonction de coloriage de  $\mathcal{B}^{(n)}$  est héritée de celle de  $\mathcal{B}^{(n+1)}$ . Notamment, la couleur du diviseur exceptionnel est celle de  $S$ . Après un nombre fini d'étapes on obtient un bi-arrangement d'hypersurfaces  $\mathcal{B}^{(\infty)}$  dans  $X^{(\infty)}$  dont l'arrangement sous-jacent est un diviseur à croisements normaux. On définit alors

$$H^\bullet(\mathcal{B}) = H^\bullet(X^{(\infty)} \setminus \mathcal{L}^{(\infty)}, \mathcal{M}^{(\infty)} \setminus \mathcal{L}^{(\infty)} \cap \mathcal{M}^{(\infty)}),$$

dont on peut montrer qu'il ne dépend que de  $\mathcal{B}$  et pas du choix de la suite d'éclatements. Le but de [Dup17] est de mettre en place des techniques combinatoires et géométriques pour calculer ces groupes de cohomologie relative, dans l'esprit du théorème 2.4.

L'aspect combinatoire du travail est la définition de *groupes d'Orlik–Solomon*  $A_{i,j}^S(\mathcal{B})$  associé à une strate  $S$  d'un bi-arrangement d'hypersurfaces  $\mathcal{B}$ , qui mesurent la complexité combinatoire du bi-arrangement d'hyperplans local autour de  $S$ . Ces groupes sont algorithmiquement calculables par récurrence sur la codimension de  $S$ , d'une manière inspirée par la présentation des algèbres d'Orlik–Solomon de [Loo93]. Les groupes d'Orlik–Solomon forment un *bi-complexe d'Orlik–Solomon*

$$A_{\bullet,\bullet}(\mathcal{B}) = \bigoplus_{S \in \mathcal{S}(\mathcal{B})} A_{\bullet,\bullet}^S(\mathcal{B}).$$

On définit une notion d'*exactitude* pour un bi-arrangement d'hypersurfaces, qui consiste à demander que certains complexes naturels qui apparaissent dans  $A_{\bullet,\bullet}(\mathcal{B})$  soient exacts. Cette notion est un phénomène nouveau lié aux bi-arrangements car tous les arrangements (les bi-arrangements où la fonction de coloriage  $\chi$  est constante égale à  $\lambda$  ou  $\mu$ ) sont exacts. L'exactitude est une notion purement combinatoire qui est algorithmiquement vérifiable mais cela requiert de calculer tout le bi-complexe d'Orlik–Solomon. On introduit et étudie une notion plus forte de *modération* qui est beaucoup plus simple à vérifier en pratique, et produit de nombreux exemples de bi-arrangements exacts.

Le théorème suivant généralise le théorème 2.4 aux bi-arrangements d'hypersurfaces exacts.

**Théorème 2.10** ([Dup17], Theorem 1.3). *Soit  $\mathcal{B}$  un bi-arrangement d'hypersurfaces dans une variété algébrique complexe lisse  $X$ . Si  $\mathcal{B}$  est exact alors il existe une suite spectrale dans la catégorie des structures de Hodge mixtes :*

$$E_1^{-p,q} = \bigoplus_{\substack{i-j=p \\ S \in \mathcal{S}_{i+j}(\mathcal{B})}} H^{q-2i}(\overline{S})(-i) \otimes A_{i,j}^S(\mathcal{B}) \implies H^{-p+q}(\mathcal{B}). \quad (2.3)$$

Le théorème est facile à démontrer dans le cas d'un diviseur à croisements normaux, et la preuve du cas général consiste à analyser le changement de la page  $E_1$  de (2.3) quand on éclate une strate. On définit des quasi-isomorphismes explicites entre les pages  $E_1$  avant et après éclatement qui sont inspirées des formules calculées dans [Dup15] pour les quasi-isomorphismes (2.2) entre modèles d'Orlik–Solomon.

Le théorème 2.10 donne une réponse particulièrement concrète dans le cas d'un bi-arrangement d'hyperplans projectifs dans  $\mathbb{P}^n$ , sous la forme du corollaire suivant, qui généralise le calcul de la cohomologie d'un complémentaire d'arrangement d'hyperplans via l'algèbre d'Orlik–Solomon.

**Théorème 2.11** ([Dup17], Theorem 1.4). *Soit  $\mathcal{B}$  un bi-arrangement d'hyperplans projectifs dans  $\mathbb{P}^n$ . On note  ${}^{(k)}A_{\bullet,\bullet}(\mathcal{B})$  le bi-complexe obtenu en ne gardant que les lignes  $0 \leq i \leq k$  et les colonnes  $0 \leq j \leq n - k$  du bi-complexe d'Orlik–Solomon de  $\mathcal{B}$ , et soit  ${}^{(k)}A_{\bullet}(\mathcal{B})$  son complexe total. Si  $\mathcal{B}$  est exact alors on a des isomorphismes, pour tous  $k, r$  :*

$$\mathrm{gr}_{2k}^W H^r(\mathcal{B}) \simeq H_{2k-r}({}^{(k)}A_{\bullet}(\mathcal{B}))(-k).$$

Ce théorème implique que les parties graduées pour le poids des  $H^{\bullet}(\mathcal{B})$  sont des invariants *combinatoires* des bi-arrangements exacts d'hyperplans projectifs. La structure de Hodge mixte  $H^{\bullet}(\mathcal{B})$  n'est évidemment pas un invariant combinatoire car elle connaît les périodes, qui sont des invariants continus.

Le théorème 2.11 était implicitement contenu dans [BVGS90] pour le cas de la dimension  $n = 2$ , où il est utilisé pour calculer la coaction motivique (ou plutôt le coproduit motivique) des dilogarithmes d'Aomoto. La version générale du théorème permet de calculer la coaction motivique de nombreux polylogarithmes d'Aomoto en dimension supérieure. Cependant, la multiplication des cas combinatoires ne permet pas d'aller plus loin dans ce qui était le but de [BVGS90], la description en termes d'arrangements d'hyperplans de l'algèbre de Hopf fondamentale des motifs de Tate mixtes sur un corps.

## 2.4 Les espaces de modules de Brown

L'article [DV17] s'intéresse à des groupes de cohomologie associés à l'arrangement des tresses, et donc en filiation avec les travaux d'Arnol'd [Arn69]. Plus précisément, on s'intéresse à trois familles d'espaces de modules de courbes de genre zéro notés

$$\mathcal{M}_{0,n} \subset \mathcal{M}_{0,n}^{\delta} \subset \overline{\mathcal{M}}_{0,n}.$$

Le premier,  $\mathcal{M}_{0,n}$ , est l'espace de modules de courbes (projectives et lisses) de genre zéro avec  $n$  points marqués. Il est isomorphe à l'espace de configuration de  $n - 3$  points dans  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ , qui est un complémentaire d'arrangement d'hyperplans (affines) dans  $\mathbb{C}^{n-3}$ . Sa topologie est donc bien comprise grâce aux travaux classiques d'Arnol'd, Brieskorn, et Orlik–Solomon. Le troisième,  $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ , est la compactification canonique de Deligne–Knudsen–Mumford, qui paramètre les courbes projectives avec singularités au plus nodales, de genre zéro avec  $n$  points marqués. Le complémentaire  $\partial\overline{\mathcal{M}}_{0,n} = \overline{\mathcal{M}}_{0,n} \setminus \mathcal{M}_{0,n}$  est un diviseur à croisements normaux dont la combinatoire est celle des arbres à  $n$  feuilles (via l'arbre dual d'une courbe nodale de genre zéro). Par Keel [Kee92] on peut obtenir  $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$  par une suite explicite d'éclatements en

partant de l'espace projectif  $\mathbb{P}^{n-3}$ , ce qui donne une description par générateurs et relations de son algèbre de cohomologie.

L'espace  $\mathcal{M}_{0,n}^\delta$  a été introduit par Brown [Bro09] comme une “compactification partielle” de  $\mathcal{M}_{0,n}$ . C'est le complémentaire de l'union de certaines composantes irréductibles de  $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ . Plus précisément, c'est l'ensemble des (classes de) courbes marquées dont l'arbre dual a un plongement dans le plan compatible avec l'ordre cyclique  $1, 2, \dots, n, 1$  sur les feuilles. Brown montre que  $\mathcal{M}_{0,n}^\delta$  est une variété affine et en donne un système d'équations. La définition de  $\mathcal{M}_{0,n}^\delta$  est motivée par la découverte de Goncharov et Manin [GM04] que toutes les valeurs zêta multiples (1.10) sont des périodes des groupes de cohomologie

$$H^\bullet(\mathcal{M}_{0,n}^\delta, \partial\mathcal{M}_{0,n}^\delta), \quad (2.4)$$

où l'on note  $\partial\mathcal{M}_{0,n}^\delta = \mathcal{M}_{0,n}^\delta \setminus \mathcal{M}_{0,n} = \overline{\mathcal{M}}_{0,n} \cap \mathcal{M}_{0,n}^\delta$  le diviseur à croisements normaux à l'infini dans  $\mathcal{M}_{0,n}^\delta$ .

Afin d'étudier les groupes de cohomologie relative (2.4), il est important de comprendre la géométrie de  $\mathcal{M}_{0,n}^\delta$ , et le théorème suivant est un premier pas dans cette direction.

**Théorème 2.12** ([DV17], Theorem A). *Pour tous  $k$  et  $n$ , la structure de Hodge mixte sur  $H^k(\mathcal{M}_{0,n}^\delta)$  est pure de poids  $2k$  et type  $(k, k)$ .*

Notons que le théorème 2.5 implique alors que  $\mathcal{M}_{0,n}^\delta$  est, à l'instar de  $\mathcal{M}_{0,n}$  et  $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ , formel au sens de l'homotopie rationnelle. Le théorème 2.12 avait été conjecturé par Bergström et Brown [BB10] qui en avaient déduit des formules récursives pour les nombres de Betti des  $\mathcal{M}_{0,n}^\delta$ . De manière étonnante, ils avaient reconnu pour les  $\dim H^{n-3}(\mathcal{M}_{0,n}^\delta)$  une suite de nombres (listée comme A134988 dans l'OEIS [OEI22]) découverte par Salvatore et Tauraso [ST09] dans un cadre très différent, celui de l'opérade *Lie* qui encode les algèbres de Lie. Plus précisément, le résultat principal de Salvatore et Tauraso est que l'opérade non symétrique sous-jacente à *Lie* est libre, et la suite A134988 donne le nombre de générateurs en chaque arité. Cela suggère une interprétation opéradique du théorème 2.12, qui concerne l'opérade de gravité *Grav* définie par Getzler [Get94, Get95]. Rappelons que cette opérade est la suspension opéradique d'une opérade définie en arité (au sens cyclique)  $n$  par

$$H_{\bullet-1}(\mathcal{M}_{0,n})$$

et dont les morphismes de composition opéradique sont les duaux des morphismes de résidu le long des composantes irréductibles de  $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ . La partie de degré 0 de l'opérade de gravité est simplement l'opérade *Lie*. L'interprétation opéradique du théorème 2.12 est la suivante, qui contient en degré 0 une interprétation géométrique du résultat de Salvatore et Tauraso.

**Théorème 2.13** ([DV17], Theorem B). *L'opérade de gravité non symétrique est libre, avec un espace de générateurs en arité  $n$  et degré  $k$  (non canoniquement) isomorphe à  $H_{k+n-3}(\mathcal{M}_{0,n}^\delta)$ .*

Les théorèmes 2.12 et 2.13 ont été prouvés en même temps par Alm et Petersen [AP17] en utilisant des méthodes différentes des nôtres.

*Remarque 2.14.* Au sujet de l'opérade de gravité, l'article [DH18] étudie et relie les deux définitions de cette opérade présentes dans la littérature. De plus, nous y montrons que deux modèles de chaînes de l'opérade de gravité, l'un dû à Getzler–Kapranov [GK98] et l'autre à Westerland [Wes08], sont tous les deux formels. Pour le modèle de Getzler–Kapranov, cela revient essentiellement au cas de l'hypothèse (1) du théorème 2.5.

Mentionnons deux problèmes encore ouverts sur la cohomologie de  $\mathcal{M}_{0,n}^\delta$ .

- ▷ On ne connaît pas de présentation par générateurs et relations des algèbres  $H^\bullet(\mathcal{M}_{0,n}^\delta)$ . Notons que  $H^1(\mathcal{M}_{0,n}^\delta) = 0$  pour tout  $n$ , ce qui implique que les générateurs doivent au moins inclure le  $H^2$  et le  $H^3$ .
- ▷ On ne connaît pas de présentation de l'opéade non symétrique  $\{H_\bullet(\mathcal{M}_{0,n}^\delta)\}$ . Notons que pour des raisons de degré toute la partie  $H_{n-3}(\mathcal{M}_{0,n}^\delta)$ , de taille  $\sim e^{-1}n!$ , doit faire partie des générateurs.

Des progrès sur ces questions permettraient de mieux comprendre les groupes de cohomologie relative (2.4) via la suite spectrale en cohomologie relative, dont la première page est la construction cobar (non symétrique) de la coopéade  $\{H^\bullet(\mathcal{M}_{0,n}^\delta)\}$ .

## 2.5 Polynômes de Tutte universels

L'article [DFM18] s'intéresse aux invariants combinatoires des arrangements d'hyperplans et plus généralement des matroïdes, ainsi que de certaines variantes. Plus spécifiquement, on y développe un formalisme qui produit des invariants de type "polynôme de Tutte" pour certains objets combinatoires.

Rappelons que pour un matroïde  $M$ , le polynôme de Tutte  $\mathfrak{T}_M$  est un polynôme en deux variables  $x, y$  défini par la formule

$$\mathfrak{T}_M(x, y) = \sum_{A \subset E(M)} (x-1)^{\text{rg}(M) - \text{rg}(A)} (y-1)^{|A| - \text{rg}(A)},$$

où  $E(M)$  est l'ensemble sous-jacent à  $M$  et  $\text{rg}$  est la fonction de rang du matroïde. C'est un invariant universel de suppression-contraction au sens où il vérifie la formule de récurrence, pour tout  $e \in E(M)$  :

$$\mathfrak{T}_M(x, y) = \begin{cases} x \mathfrak{T}_{M/e}(x, y) & \text{si } e \text{ est une coboucle de } M; \\ y \mathfrak{T}_{M \setminus e}(x, y) & \text{si } e \text{ est une boucle de } M; \\ \mathfrak{T}_{M/e}(x, y) + \mathfrak{T}_{M \setminus e}(x, y) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Des variantes du polynôme de Tutte ont été introduites et étudiées dans de nombreux autres contextes, et notamment :

- ▷ les graphes coloriés, importants en théorie des noeuds puisqu'on peut encoder un diagramme de noeud par un graphe à deux couleurs (le polynôme de Jones du noeud est alors une spécialisation du polynôme de Tutte du graphe colorié) [BR99];
- ▷ les perspectives de matroïdes, qui jouent le rôle de morphismes entre matroïdes [LV75, LV99];
- ▷ les delta-matroïdes, qui contrôlent la combinatoire des graphes plongés dans des surfaces [BR02];
- ▷ les matroïdes arithmétiques, qui contrôlent la combinatoire des arrangements toriques [DM13, BM14];

Dans [DFM18] nous mettons en place une machinerie générale qui produit des invariants universels de type “polynôme de Tutte” pour tous ces objets, et d’autres. On y revisite des travaux de Duchamp, Hoang-Nghia, Krajewski et Tanasa [DHNKT13] et de Krajewski, Mofatt et Tanasa [KMT18] où les polynômes de Tutte et leurs variantes sont vus au travers du prisme des algèbres de Hopf combinatoires. Notre construction rend ce point de vue plus général et universel au sens catégorique.

Le formalisme de [DFM18] concerne les *systèmes de mineurs*, qui sont des structures combinatoires qui ont une notion de restriction (suppression) et de contraction. De manière plus formelle, un système de mineurs  $S$  est une espèce ensembliste (un foncteur  $E \mapsto S[E]$  de la catégorie des ensembles finis et bijections vers la catégorie des ensembles) qui a en plus une structure comultiplicative

$$\Delta_{A,B} : S[E] \rightarrow S[A] \times S[B] \quad (2.5)$$

pour toute partition  $E = A \sqcup B$ , vérifiant certains axiomes évidents. (Ici on suppose pour simplifier que  $S[\emptyset]$  a un seul élément.) Cette structure encode la restriction et la contraction d’objets combinatoires :

$$\Delta_{A,E \setminus A}(X) = (X|A, X/A).$$

Une notion centrale est celle de *norme*, qui est un morphisme  $N : S \rightarrow U$  vers un monoïde  $U$  (vu comme une espèce constante) qui vérifie

$$N(X) = N(X|A) N(X/A)$$

pour tout  $A \subset E$  et  $X \in S[E]$ . Il existe une norme universelle à valeurs dans un monoïde  $U(S)$  qu’on appelle *monoïde de Grothendieck* de  $S$ , et dont on donne une présentation par générateurs et relations. Dans le cas où  $S = \text{Mat}$  est le système de mineurs des matroïdes, le monoïde de Grothendieck est libre sur deux générateurs  $u, v$ , et la norme universelle est  $M \mapsto u^{\text{rg}(M)} v^{\text{corg}(M)}$ .

Soit  $\mathbb{K}$  un anneau commutatif et considérons  $\mathbb{K}S$ , l’espace vectoriel gradué dont une base en degré  $n$  est donné par l’ensemble des classes d’isomorphisme d’éléments de  $S[\{1, \dots, n\}]$ . En linéarisant (2.5) on obtient un coproduit

$$\Delta : \mathbb{K}S \rightarrow \mathbb{K}S \otimes \mathbb{K}S, X \mapsto \sum_{A \subset E} (X|A) \otimes (X/A)$$

qui fait de  $\mathbb{K}S$  une cogèbre graduée. Cette construction est classique en combinatoire [JR79] et produit de nombreuses “cogèbres combinatoires” classiques, qui sont souvent munies en plus de structures d’algèbres de Hopf.

**Définition 2.15** ([DFM18], Définition 3.19). Soit  $S$  un système de mineurs, et soient  $N_1, N_2 : \mathbb{K}S \rightarrow \mathbb{K}[U(S)]$  deux copies de (la linéarisation de) la norme universelle de  $S$ . On définit l’*invariant de Tutte universel* de  $S$  comme la convolution

$$T = N_1 * N_2 : \mathbb{K}S \rightarrow \mathbb{K}[U(S) \times U(S)].$$

Cette définition simple permet de retrouver toutes les variantes du polynôme de Tutte déjà mentionnées, et d’autres. Une nouveauté de notre construction par rapport à certaines définitions existantes est l’apparition des anneaux  $\mathbb{K}[U(S)]$  qui ne sont pas nécessairement

des anneaux de polynômes à cause de relations dans  $U(S)$ , ce qui clarifie certaines constructions *ad hoc* dans la littérature, comme l'apparition de racines carrées dans [KMT18].

Une application de notre formalisme est la dérivation de “formules de convolution” universelles pour les invariants de Tutte, dans l'esprit de celle de Kook–Reiner–Stanton [KRS99] et Etienne–Las Vergnas [ELV98] pour les matroïdes. On démontre notamment une formule de convolution pour les polynômes de Tutte des matroïdes arithmétiques dont un cas particulier avait été considéré par Backman et Lenz [BL16].



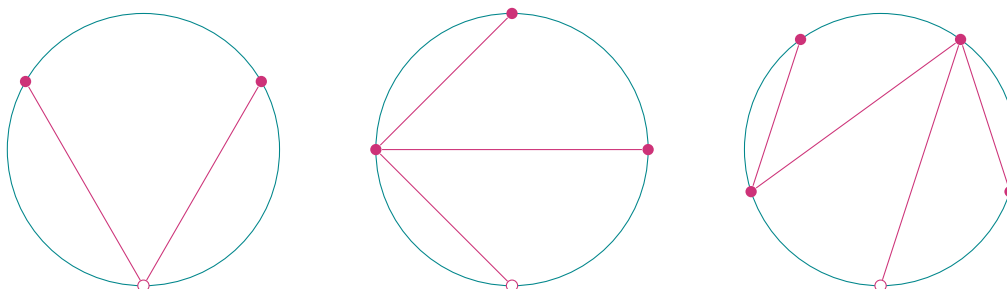


## Chapitre 3

# Structure des périodes des motifs mixtes

### 3.1 La coaction motivique des polylogarithmes de dissection

L'article [Dup14] s'intéresse à une classe d'intégrales qui généralise les intégrales itérées (1.9), comme classe-test de périodes pour lesquelles on peut espérer une formule simple et combinatoire pour la coaction motivique. Ces intégrales s'appellent *polylogarithmes de dissection* et sont indexées par une classe d'objets combinatoires appelés *diagrammes de dissection*, et qui sont aussi apparus dans la littérature sous le nom d'*arbres non croisés*. Un diagramme de dissection de degré  $n$  est un ensemble de  $n$  cordes d'un  $(n + 1)$ -gone orienté enraciné qui ne s'intersectent pas et ne forment pas de cycle. La figure suivante montre des diagrammes de dissection de degrés 2, 3, et 4 (les polygones sont dessinés comme des cercles, la racine est dessinée en blanc).



On considère maintenant des diagrammes de dissection décorés par un corps  $F \subset \mathbb{C}$ , au sens où chaque corde et chaque côté du polygone est décoré par un élément de  $F$ . On impose en plus une condition de généricité sur les décorations, qui revient à interdire un nombre fini de relations linéaires entre les décorations. À un diagramme de dissection décoré générique de degré  $n$  on associe une intégrale appelée *polylogarithme de dissection*

$$I(D) = \int_{\Delta_D} \omega_D,$$

où  $\Delta_D$  est un  $n$ -simplexe qui dépend des décorations des côtés du polygone, et  $\omega_D$  est une  $n$ -forme différentielle définie par la forme de  $D$  et les décorations des cordes. Plus précisément,

$\omega_D$  est le produit des formes  $d\log(x_i - x_j - \alpha)$  pour une corde  $D$  décorée  $\alpha$  entre les sommets  $i$  et  $j$  du polygone, où la racine compte comme  $x_0 = 0$ . Un exemple est donné par la figure suivante.

$$D = \int \int_{a \leq x \leq y \leq b} \frac{dx dy}{(x - u)(y - x - v)}$$

Les polylogarithmes de dissection sont des cas particuliers de polylogarithmes d'Aomoto. Ils contiennent les intégrales itérées (1.9), qui correspondent aux diagrammes de dissection où toutes les cordes pointent vers la racine (corolles).

Dans le cas où  $F$  est un corps de nombres, les polylogarithmes de dissection sont des périodes de motifs de Tate mixtes sur  $F$ , et se relèvent en des périodes motiviques  $I^{\text{mot}}(D)$  qui vivent dans l'algèbre  $\mathcal{P}^{\text{mot}}$ . On définit aussi des variantes “de de Rham”  $I^{\text{dR}}(D)$  qui vivent dans l'algèbre  $\mathcal{P}^{\text{dR}}$  (voir le §3.3 pour plus de détails). Pour simplifier on les voit comme des éléments du quotient  $\mathcal{H}(F) = \mathcal{O}(U_{\text{dR}})$  introduit au §1.2.3. Le théorème principal de [Dup14] est le calcul combinatoire de la coaction motivique des polylogarithmes de dissection (génériques).

**Théorème 3.1** ([Dup14], Theorem 5.9 et Remark 5.11). *La coaction motivique des polylogarithmes de dissection (génériques) est donnée par la formule de “suppression-contraction”*

$$\rho(I^{\text{mot}}(D)) = \sum_C \pm I^{\text{mot}}(D|C) \otimes I^{\text{dR}}(D/C),$$

où la somme porte sur les parties  $C$  de l'ensemble des cordes, et  $D|C$ ,  $D/C$  sont des opérations de restriction à  $C$  et de contraction de  $C$  des diagrammes de dissection.

La preuve du théorème repose sur l'analyse de certains motifs de cohomologie relative

$$M(D) = M^n(\mathbb{A}^n \setminus \mathcal{A}_D, \mathcal{B}_D \setminus \mathcal{A}_D \cap \mathcal{B}_D)$$

où  $\mathcal{A}_D$  et  $\mathcal{B}_D$  sont des arrangements d'hyperplans. La généralité des décorations assure que l'arrangement  $\mathcal{A}_D \cup \mathcal{B}_D$  est un diviseur à croisement normaux de  $\mathbb{A}^n$  et permet de s'affranchir des problèmes liés à la résolution des singularités abordés au chapitre précédent. Dans le cas particulier des corolles, le théorème 3.1 redonne la formule de coaction des intégrales itérées (génériques) de Goncharov [Gon05].

On peut interpréter le théorème 3.1 sous l'angle des algèbres de Hopf combinatoires comme au §2.5. Pour simplifier, considérons les variantes  $I^{\text{dR}}(D) \in \mathcal{H}(F)$ , dont le coproduit est donnée par la formule

$$\Delta(I^{\text{dR}}(D)) = \sum_C \pm I^{\text{dR}}(D|C) \otimes I^{\text{dR}}(D/C).$$

On définit une algèbre de Hopf graduée  $\mathcal{D}$  dont l’algèbre sous-jacente est la  $\mathbb{Q}$ -algèbre commutative libre sur l’ensemble des diagrammes de dissection. Le coproduit  $\Delta : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} \otimes \mathcal{D}$  est donné par la formule de “suppression-contraction”

$$\Delta(D) = \sum_C \pm(D|C) \otimes (D/C).$$

La structure de cette algèbre de Hopf combinatoire a été étudiée par Mammez [Mam20]. Les diagrammes de dissection décorés (génériquement) par un corps  $F$  engendrent une algèbre de Hopf combinatoire  $\mathcal{D}^{\text{gen}}(F)$  avec le même genre de formule pour le coproduit. Le théorème 3.1 affirme qu’on a un morphisme d’algèbres de Hopf

$$\mathcal{D}^{\text{gen}}(F) \rightarrow \mathcal{H}(F), \quad D \mapsto \text{I}^{\text{dR}}(D).$$

### 3.2 Motifs associés aux valeurs zêta impaires

L’article [Dup18] s’intéresse aux valeurs aux entiers  $n \geq 2$  de la fonction zêta de Riemann,

$$\zeta(n) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^n},$$

qui sont des périodes comme le montre la formule intégrale

$$\zeta(n) = \int_{[0,1]^n} \frac{dx_1 \cdots dx_n}{1 - x_1 \cdots x_n}. \quad (3.1)$$

En adaptant la stratégie développée par Brown [Bro16], on y étudie les interactions entre propriétés diophantiennes et cohomologiques des valeurs zêta.

L’étude des valeurs zêta remonte au célèbre résultat d’Euler selon lequel  $\zeta(2n) \in \mathbb{Q}\pi^{2n}$  pour tout  $n \geq 1$ . Il est conjecturé que les valeurs zêta impaires  $\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \dots$  sont algébriquement indépendantes sur le corps  $\mathbb{Q}(\pi)$ . Beaucoup des résultats dans la direction de cette conjecture, et plus généralement de la compréhension des propriétés diophantiennes des valeurs zêta, reposent sur la construction de familles d’intégrales qui s’évaluent en des combinaisons linéaires de 1 et des valeurs zêta :

$$\int_{\sigma} \omega = a_0 + a_2 \zeta(2) + a_3 \zeta(3) + \cdots + a_n \zeta(n), \quad (3.2)$$

avec  $a_k \in \mathbb{Q}$ . Notamment (voir [Fis04] pour plus de détails) :

- ▷ la preuve par Apéry [Apé79] de l’irrationalité de  $\zeta(2)$  et  $\zeta(3)$ , dans sa version éclaircie par Beukers [Beu79], utilise des familles d’intégrales qui s’évaluent en des combinaisons linéaires  $a_0 + a_2 \zeta(2)$  ou  $a_0 + a_3 \zeta(3)$  ;
- ▷ la preuve par Ball et Rivoal [Riv00, BR01] du fait qu’une infinité de valeurs zêta impaires sont irrationnelles s’appuie sur une famille d’intégrales (3.2) pour lesquelles les coefficients  $a_2, a_4, a_6, \dots$  sont nuls ;
- ▷ les mesures d’irrationalité de Rhin et Viola [RV96, RV01] de  $\zeta(2)$  et  $\zeta(3)$  sont basées sur des généralisations des intégrales de Beukers et des estimations précises des coefficients  $a_2$  et  $a_3$ .

Dans [Dup18] on étudie la famille d'intégrales, qui généralisent (3.1), de la forme

$$\int_{[0,1]^n} \omega \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{P(x_1, \dots, x_n)}{(1 - x_1 \cdots x_n)^N} dx_1 \cdots dx_n, \quad (3.3)$$

où  $n \geq 1$ ,  $N \geq 0$ , et  $P(x_1, \dots, x_n)$  est un polynôme à coefficients rationnels. On dit que  $\omega$  est *intégrable* si son intégrale sur  $[0, 1]^n$  est absolument convergente. La famille d'intégrales (3.3) contient les intégrales de Beukers–Rhin–Viola pour  $\zeta(2)$  et  $\zeta(3)$  et les intégrales de Ball–Rivoal. Deligne a remarqué [Del01] l'importance de l'involution

$$\tau : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}) \quad (3.4)$$

dans les intégrales de Ball–Rivoal, ce qui a inspiré le théorème suivant.

**Théorème 3.2** ([Dup18], Theorem 1.1, Theorem 1.2). *Il existe une famille de  $n$ -cycles relatifs  $(\sigma_2, \dots, \sigma_n)$  à coefficients rationnels dans  $(\mathbb{C}^*)^n \setminus \{x_1 \cdots x_n = 1\}$  tels que pour toute forme intégrable  $\omega$  on ait*

$$\int_{[0,1]^n} \omega = a_0(\omega) + a_2(\omega)\zeta(2) + a_3(\omega)\zeta(3) + \cdots + a_n(\omega)\zeta(n),$$

où  $a_k(\omega)$  est un nombre rationnel pour tout  $k$ , donné pour  $k \in \{2, \dots, n\}$  par la formule intégrale

$$a_k(\omega) = (2i\pi)^{-k} \int_{\sigma_k} \omega. \quad (3.5)$$

De plus, pour  $k \in \{2, \dots, n\}$ , le cycle relatif  $\tau_*(\sigma_k)$  est homologue à  $(-1)^{k-1}\sigma_k$  et donc :

- (1) si  $\tau^*(\omega) = \omega$  alors  $a_k(\omega) = 0$  pour  $k \neq 0$  pair;
- (2) si  $\tau^*(\omega) = -\omega$  alors  $a_k(\omega) = 0$  pour  $k$  impair.

Cela permet de construire des familles d'intégrales (3.3) qui s'évaluent en des combinaisons linéaires de 1 et des valeurs zêta impaires, ou de 1 et des valeurs zêta paires ; les intégrales de Ball–Rivoal en sont un cas particulier. Les formules intégrales (3.5) ont été utilisées (dans le cas  $n = k = 2$ ) par Rhin et Viola [RV96] dans leur analyse de  $\zeta(2)$ .

Le théorème 3.2 est la partie émergée d'une construction géométrique et motivique. Rappelons que dans la catégorie  $\text{MT}(\mathbb{Z}) \subset \text{MT}(\mathbb{Q})$  des motifs de Tate mixtes sur  $\mathbb{Z}$ , les seuls groupes d'extensions non nuls entre les objets simples  $\mathbb{Q}(-n)$  viennent de

$$\text{Ext}_{\text{MT}(\mathbb{Z})}^1(\mathbb{Q}(-(2n+1)), \mathbb{Q}(0)) \simeq \mathbb{Q}, \quad (3.6)$$

et une matrice des périodes de l'unique extension non triviale de  $\mathbb{Q}(-(2n+1))$  par  $\mathbb{Q}(0)$  est :

$$\begin{pmatrix} 1 & \zeta(2n+1) \\ 0 & (2i\pi)^{2n+1} \end{pmatrix}.$$

La difficulté de construire *géométriquement* des combinaisons linéaires (3.2) avec beaucoup de coefficients nuls reflète la difficulté de construire des objets de  $\text{MT}(\mathbb{Z})$  avec beaucoup de parties graduées de poids donné nulles [Bro16, §1.4]. En particulier, la difficulté de construire des combinaisons linéaires de 1 et  $\zeta(2n+1)$  reflète la difficulté de construire *géométriquement*

les extensions (3.6). On sait seulement résoudre ce problème pour le cas de  $2n + 1 = 3$  grâce à [Bro16] qui retrouve les intégrales de Beukers.

Dans [Dup18] on donne une construction géométrique d'un ind-motif  $\mathcal{Z}^{\text{odd}}$  (système inductif d'objets de  $\text{MT}(\mathbb{Z})$ ), qu'on appelle le *motif zêta impair*, qui contient toutes les extensions (3.6) et est minimal. Notre construction repose sur l'analyse de motifs du type (1.4) et de l'involution de Deligne (3.4). Les périodes de  $\mathcal{Z}^{\text{odd}}$  incluent naturellement les intégrales (3.3) pour lesquels  $\tau^*(\omega) = \omega$ , et donnent une interprétation géométrique au théorème de Ball–Rivoal. Un point subtil est qu'en général,  $\tau^*(\omega)$  n'est pas intégrable même si  $\omega$  l'est. La définition de  $\mathcal{Z}^{\text{odd}}$  prend la forme

$$\mathcal{Z}^{\text{odd}} = p^{-1}(\mathcal{T}^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}})$$

où

$$p : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{T}$$

est un morphisme entre un ind-motif  $\mathcal{Z}$  qui a toutes les valeurs zêta comme périodes et un ind-motif auxiliaire  $\mathcal{T}$  qui a une action de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  par l'involution de Deligne.

**Théorème 3.3** ([Dup18], Theorem 1.3). *On a une suite exacte courte*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}(0) \longrightarrow \mathcal{Z}^{\text{odd}} \longrightarrow \bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{Q}(-(2n + 1)) \longrightarrow 0$$

et  $\mathcal{Z}^{\text{odd}}$  a une matrice des périodes

$$\begin{pmatrix} 1 & \zeta(3) & \zeta(5) & \zeta(7) & \cdots & \cdots & \cdots \\ & (2i\pi)^3 & & & & & \\ & & (2i\pi)^5 & & & 0 & \\ & & & (2i\pi)^7 & & & \\ & 0 & & & & \ddots & \end{pmatrix}.$$

### 3.3 Intégration univaluée

L'*intégration univaluée*, formalisée par Brown [Bro14], est un accouplement transcendant entre un groupe de cohomologie de de Rham algébrique  $H^{\text{dR}}(X, Y)$  et son dual. Les coefficients de cet accouplement sont appelées *périodes univaluées*. Dans le cas de familles de (paires de) variétés sur une base, les périodes univaluées définissent des fonctions analytiques réelles *univaluées* des paramètres (d'où la terminologie), contrairement aux périodes classiques qui définissent des fonctions holomorphes *multivaluées*. Par exemple, le motif de Kummer (1.2) a pour période  $\log(a)$ , qui est une fonction holomorphe multivaluée du paramètre  $a \in \mathbb{C}^*$ , alors qu'il a pour période univaluée  $\log |a|^2$ , qui est une fonction analytique réelle univaluée de  $a$ . Un cas particulier de cette construction apparaît sous le nom de *période réelle* dans les travaux de Goncharov [Gon99], et implicitement chez Beilinson et Deligne [BD94], dans le

cadre de l'étude des *polylogarithmes (multiples) univalués*, généralisations du *dilogarithme de Bloch–Wigner* [Blo77, Blo78]

$$P_2(a) = \text{Im}(\text{Li}_2(a) + \log|a| \log(1-a)).$$

Brown [Bro14] a appliqué l'intégration univaluée aux valeurs zêta multiples, introduisant les *valeurs zêta multiples univaluées*  $\zeta^{\text{sv}}(n_1, \dots, n_r)$ , qui sont des évaluations des polylogarithmes multiples univalués et pour lesquelles des formules explicites peuvent être données en termes des valeurs zêta multiples classiques. Ces nombres apparaissent naturellement en physique et notamment en théorie des cordes, ce qui a été une des motivations derrière [BD21a] (voir le §3.4).

Le but de l'article [BD21a] est d'étudier l'intégration univaluée en général et notamment d'en donner des formules explicites. On se place dans le cadre d'un motif de cohomologie relative

$$M = M^n(X \setminus A, B \setminus A \cap B)$$

où  $X$  est une variété projective lisse de dimension  $n$  sur un corps  $k$ ,  $A$  et  $B$  sont deux diviseurs à croisements normaux dans  $X$  qui n'ont aucune composante irréductible en commun et tels que  $A \cup B$  est à croisements normaux. On suppose que  $k$  est un sous-corps de  $\mathbb{R}$ , on a donc une conjugaison complexe sur  $X(\mathbb{C})$ , qui induit une involution notée  $F_\infty : M_B \rightarrow M_B$  et appelée le *Frobenius à l'infini*. En suivant [Bro14], on voit facilement que la composée

$$M_{\text{dR}} \otimes_k \mathbb{C} \xrightarrow{\text{comp}} M_B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow{F_\infty \otimes \text{id}} M_B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow{\text{comp}^{-1}} M_{\text{dR}} \otimes_k \mathbb{C}.$$

est définie sur  $\mathbb{R}$  et induit donc une involution  $\mathbb{R}$ -linéaire

$$s : M_{\text{dR}} \otimes_k \mathbb{R} \longrightarrow M_{\text{dR}} \otimes_k \mathbb{R}$$

qu'on appelle le *morphisme de comparaison univalué*. Dans un contexte motivique tannakien ce morphisme de comparaison est un point réel du groupe de Galois motivique  $G_{\text{dR}}$  et induit donc un morphisme d'algèbres

$$s : \mathcal{P}^{\text{dR}} \longrightarrow \mathbb{R}, (M, f, v)^{\text{dR}} \mapsto \langle f, s(v) \rangle,$$

qu'on appelle le *morphisme des périodes univaluées*.

Le calcul de périodes univaluées via la définition n'est pas pratique car il demande de calculer tous les coefficients d'une matrice de périodes pour ensuite l'inverser. Pour donner des formules explicites on a aussi besoin de donner un sens géométrique à des éléments de l'espace dual  $M_{\text{dR}}^\vee$ . La dualité de Poincaré–Verdier résout ce problème grâce à l'accouplement parfait

$$M^n(X \setminus B, A \setminus A \cap B) \otimes M^n(X \setminus A, B \setminus A \cap B) \longrightarrow \mathbb{Q}(-n). \quad (3.7)$$

Avec cette description du dual de  $M$ , on peut donner une formule pour les périodes univaluées de  $M$  (le théorème de [BD21a] est plus général et permet abstraitement de décrire toutes les périodes univaluées et pas seulement celles qui viennent de formes logarithmiques globales).

**Théorème 3.4** ([BD21a], Theorem 1.4). *Soit  $\omega$  une  $n$ -forme algébrique sur  $X$  avec pôles logarithmiques le long de  $A$ , et soit  $\nu$  une  $n$ -forme algébrique sur  $X$  avec pôles logarithmiques le long de  $B$ , dont la classe est vue dans  $M_{\text{dR}}^{\vee}$  via (3.7). On a alors l'égalité*

$$s(M, [\nu], [\omega])^{\text{dR}} = (2i\pi)^{-n} \int_{X(\mathbb{C})} \nu \wedge \bar{\omega}.$$

Le point subtil de ce théorème est que  $\nu \wedge \bar{\omega}$  n'est pas une forme lisse sur  $X(\mathbb{C})$  mais a des divergences le long de  $A \cup B$ . Si  $\omega$  et  $\nu$  ont des pôles d'ordre supérieur le long de  $A$  et  $B$  respectivement, nous ne savons pas donner de formule explicite pour la période univaluée correspondante, qui devrait être une "régularisation" de l'intégrale divergente  $\int_{X(\mathbb{C})} \nu \wedge \bar{\omega}$  dans l'esprit des travaux de Felder et Kazhdan [FK17, FK18]. Le théorème 3.4 devrait avoir une interprétation naturelle dans le langage de la géométrie logarithmique.

Parmi les exemples d'application du théorème 3.4 étudiés dans [BD21a], notons une réinterprétation géométrique des hauteurs de Néron–Tate archimédiennes pour les courbes. Pour  $X$  une courbe projective lisse de genre  $g$ , et  $D, E$  deux diviseurs disjoints de degré 0 sur  $X$ , la hauteur de Néron–Tate  $\langle D, E \rangle$  est vue comme un quotient de déterminants de périodes univaluées du motif  $M^1(X \setminus A, B)$  où  $A$  et  $B$  sont les supports respectifs de  $D$  et  $E$ .

On déduit du théorème 3.4 une formule générale de "double copie" qui généralise les "relations bilinéaires des périodes" pour les surfaces de Riemann (cas où  $X$  est une courbe projective lisse de genre  $g$  et  $A = B = \emptyset$ ).

**Théorème 3.5** ([BD21a], Theorem 1.4). *Dans le cadre du théorème 3.4 on a l'identité*

$$\int_{X(\mathbb{C})} \nu \wedge \bar{\omega} = \sum_{[\gamma], [\delta]} \langle [\gamma]^{\vee}, [\delta]^{\vee} \rangle \int_{\gamma} \nu \int_{\bar{\delta}} \bar{\omega},$$

où  $[\gamma]$  parcourt une base de  $H_n^{\text{B}}(X \setminus B, A \setminus A \cap B)$  et  $[\gamma]^{\vee}$  est la base duale, et de même pour  $[\delta]$  avec  $A$  et  $B$  échangés.

Un autre contribution de l'article [BD21a] a trait à la *projection de de Rham* [Bro17], qui concerne un morphisme naturel

$$c_0^{\vee} : M_{\text{B}}^{\vee} \longrightarrow M_{\text{dR}}^{\vee} \otimes_k \bar{k},$$

bien défini si  $M$  vérifie une condition de *séparation*, c'est-à-dire si les nombres de Hodge  $h^{p,0}(M)$  sont nuls pour  $p \neq 0$ . On l'obtient en projetant sur la partie de poids 0 et en utilisant la comparaison Betti–de Rham pour les motifs purs de poids 0, qui est définie sur  $\bar{k}$ . On obtient alors un morphisme d'algèbres

$$\pi^{\text{dR}} : \mathcal{P}_{\text{sep}}^{\text{mot},+} \longrightarrow \mathcal{P}^{\text{dR}} \otimes_k \bar{k}, \quad (M, \varphi, v)^{\text{mot}} \mapsto (M, c_0^{\vee}(\varphi), v)^{\text{dR}}$$

où  $\mathcal{P}_{\text{sep}}^{\text{mot},+} \subset \mathcal{P}^{\text{mot}}$  est la sous-algèbre des périodes motiviques de motifs effectifs et séparés. C'est un pont important entre périodes motiviques et périodes de de Rham, qui s'appelle aussi la *projection de de Rham*.



**Théorème 3.6** ([BD21a], Theorem 1.7). Si  $M^n(X \setminus A, B \setminus A \cap B)$  est séparé alors le morphisme

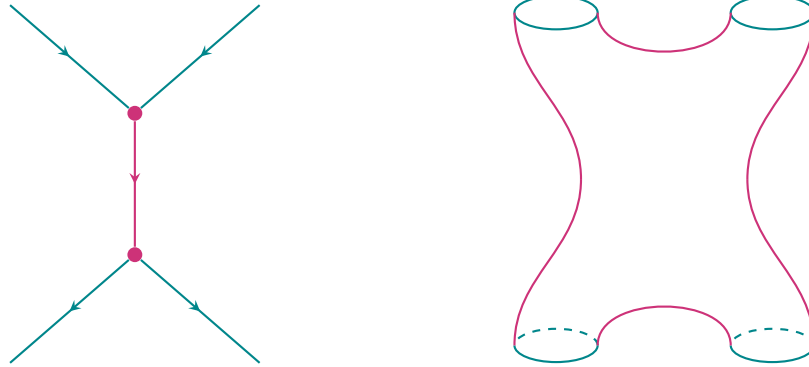
$$c_0^\vee : H_n^B(X \setminus A, B \setminus A \cap B) \longrightarrow H_{\text{dR}}^n(X \setminus B, A \setminus A \cap B) \otimes_k \bar{k}$$

peut être calculé explicitement, l'image  $c_0^\vee(\gamma)$  d'une classe  $\gamma$  pouvant être représentée canoniquement par une  $n$ -forme algébrique globale  $\nu_\gamma$  sur  $X \times_k \bar{k}$  avec pôles logarithmiques le long de  $B$ .

La “recette”  $\gamma \mapsto \nu_\gamma$  revient essentiellement à l'idée que la forme  $\nu_\gamma$  a des pôles le long des composantes irréductibles de  $B$  où le bord de  $\gamma$  est supporté. Cette notion devrait être essentiellement équivalente à celle de “forme canonique” qui apparaît dans la littérature sur les “géométries positives” en physique des amplitudes [AHBL17].

### 3.4 Amplitudes des cordes en genre zéro

L'article [BD21b] est un compagnon de [BD21a] qui étudie les amplitudes en théorie des cordes avec le point de vue de l'intégration univaluée. Si dans le formalisme des graphes de Feynman les particules sont des objets de dimension zéro (des points) interagissant via un objet de dimension un (le graphe), la théorie des cordes remplace les particules par des objets unidimensionnels (appelés cordes) interagissant via un objet bidimensionnel (appelé surface d'univers). Les cordes sont soit ouvertes (c'est-à-dire un intervalle  $(0, 1)$ ), soit fermées (c'est-à-dire un cercle  $S^1$ ). En première approximation, on peut considérer la surface d'univers comme une surface dont le bord est donnée par les cordes en interaction, ou, puisqu'on ne s'intéresse à la surface d'univers qu'à équivalence conforme près, comme une surface de Riemann épointée. La figure suivante montre une interaction de quatre particules dans la représentation du graphe de Feynman (à gauche) et dans la représentation de la théorie des cordes (à droite).



On considère l'interaction de  $n + 3$  cordes via une surface d'univers de genre zéro, et les amplitudes de diffusion correspondantes, qui s'écrivent naturellement comme des intégrales sur l'espace de modules  $\mathcal{M}_{0,n+3}$  qui paramètre les surfaces d'univers. Il est classique d'écrire ces intégrales dans les “coordonnées simpliciales”  $(t_1, \dots, t_n)$  sur  $\mathcal{M}_{0,n+3}$ , obtenues en fixant les trois derniers points à 1,  $\infty$ , 0. Les amplitudes des cordes sont de deux types, selon que l'on considère des cordes ouvertes ou fermées, et sont données par les formules intégrales :

$$I^{\text{open}}(\omega, \underline{s}) = \int_{0 < t_1 < \dots < t_n < 1} \left( \prod_{0 \leq i < j \leq n+1} (t_j - t_i)^{s_{ij}} \right) \omega$$

et

$$I^{\text{closed}}(\omega, \underline{s}) = (2i\pi)^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} \left( \prod_{0 \leq i < j \leq n+1} |z_j - z_i|^{2s_{ij}} \right) \nu \wedge \bar{\omega}.$$

Les  $s_{ij}$  sont des paramètres physiques appelés *variables de Mandelstam*,  $\omega$  est n'importe quelle forme différentielle algébrique sur  $\mathcal{M}_{0,n+3}$  avec pôles logarithmiques le long de  $\partial\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}$ , et

$$\nu = \pm \prod_{i=0}^n (t_{i+1} - t_i)^{-1} dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n,$$

avec la convention  $t_0 = 0, t_{n+1} = 1$ . Les amplitudes des cordes divergent autour de  $s_{ij} = 0$  et sont données par un développement de Laurent, dont on souhaite étudier les coefficients. Afin de comprendre la partie polaire de ce développement il est pratique d'utiliser les coordonnées diédrales introduites par Brown [Bro09] (et utilisées dans [DV17]), notées  $u_c$  où  $c$  est une corde d'un  $(n+3)$ -gone. Ces coordonnées sont régulières sur  $\mathcal{M}_{0,n+3}^\delta$ . Dans ce système de coordonnées on a les formules

$$I^{\text{open}}(\omega, \underline{s}) = \int_{X_{n+3}^\delta} \left( \prod_c u_c^{s_c} \right) \omega$$

où  $X_{n+3}^\delta$  est le domaine de  $\mathcal{M}_{0,n+3}^\delta(\mathbb{R})$  où toutes les coordonnées  $u_c$  sont  $> 0$ , et

$$I^{\text{closed}}(\omega, \underline{s}) = (2i\pi)^{-n} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{C})} \left( \prod_c |u_c|^{2s_c} \right) \nu \wedge \bar{\omega}.$$

La structure opéradique des espaces de modules  $\mathcal{M}_{0,n+3}^\delta$  permet d'expliciter la structure des divergences des amplitudes des cordes autour de  $s_{ij} = 0$ , via le théorème suivant.

**Théorème 3.7** ([BD21b], Theorem 1.1). *Il existe une renormalisation canonique*

$$I^{\text{open}}(\omega, \underline{s}) = \sum_J \frac{1}{s_J} \int_{X_J} \Omega_J^{\text{ren}} \quad \text{avec} \quad s_J = \prod_{c \in J} s_c,$$

indexée par les ensembles  $J$  de cordes du  $N$ -gone qui ne se croisent pas, et où  $\Omega_J^{\text{ren}}$  est explicitement définie. Les intégrales du côté droit de l'égalité convergent autour de  $s_c = 0$  et sont par définition des produits d'intégrales sur des domaines  $X_r^\delta$ . Un énoncé similaire décrit les amplitudes  $I^{\text{closed}}$  des cordes fermées.

Ce théorème nous permet de considérer le développement de Laurent des amplitudes  $I^{\text{open}}(\omega, \underline{s})$  et  $I^{\text{closed}}(\omega, \underline{s})$  autour de  $\underline{s} = 0$ . On interprète chacun des coefficients comme une période d'un motif  $M^N(\mathcal{M}_{0,N+3}^\delta, \partial\mathcal{M}_{0,N+3}^\delta)$  pour un  $N \geq n$ . En appliquant les résultats de [BD21a] à ces motifs on obtient le résultat suivant.

**Théorème 3.8** ([BD21b], Theorem 1.2, Theorem 1.3). *Il existe une amplitude motivique des cordes en genre zéro*

$$I^{\text{mot}}(\omega, \underline{s}) \in \mathcal{P}_{\text{MT}(\mathbb{Z})}^{\text{mot},+}(\underline{s})$$

qui est une série de Laurent dont les coefficients sont des périodes motiviques effectives des motifs de Tate mixtes sur  $\mathbb{Z}$ . Sa période est donnée par l'amplitude des cordes ouvertes :

$$\text{per } \Gamma^{\text{mot}}(\omega, \underline{s}) = \Gamma^{\text{open}}(\omega, \underline{s}).$$

La période univaluée de sa projection de de Rham est égale à l'amplitude des cordes fermées :

$${}_s \pi^{\text{dR}} \Gamma^{\text{mot}}(\omega, \underline{s}) = \Gamma^{\text{closed}}(\omega, \underline{s}).$$

Ce théorème donne un lien entre amplitudes des cordes ouvertes et fermées (les secondes sont les “versions univaluées” des premières) qui avait été conjecturé par Stieberger [Sti14, ST14].

Une autre conséquence de ce théorème, en utilisant [Bro12], est que les coefficients du développement de Laurent de  $\Gamma^{\text{open}}$  (resp. de  $\Gamma^{\text{closed}}$ ) sont des valeurs zêta multiples (resp. des valeurs zêta multiples univaluées). Une autre preuve de ce fait, qui n'utilise pas le formalisme motivique, a été donnée par Vanhove et Zerbini [VZ18].

Il est naturel d'essayer de généraliser les résultats de [BD21b] aux amplitudes des cordes en genre quelconque. Une difficulté semble être qu'il n'y a pas de consensus sur la définition des amplitudes des cordes ouvertes ! Les amplitudes des cordes fermées, elles, sont données par des intégrales de la forme

$$\int_{\mathcal{M}_{g,n}} \exp \left( \sum_{i < j} s_{ij} G_C(z_i, z_j) \right) \omega \quad (3.8)$$

où  $G_C(z_i, z_j)$  est l'évaluation en deux points marqués  $z_i, z_j$  d'une fonction de Green sur une surface de Riemann  $C$ . Les fonctions de Green sont essentiellement la même chose que les hauteurs non archimédiennes, et les résultats de [BD21a] suggèrent une interprétation de (3.8) comme un quotient de déterminants de périodes univaluées, associées à des motifs à définir et à étudier.

### 3.5 La théorie de Galois motivique des fonctions hypergéométriques de Lauricella

L'article [BD22] étudie l'idée que le groupe de Galois motivique agit de manière simple sur certaines séries formelles (ou de Laurent) dont les coefficients sont des périodes. Cette idée a notamment été suggérée par le travail impressionnant de physiciens [ABD<sup>+</sup>21] sur certaines intégrales de Feynman. L'exemple de base du phénomène dont il est question est la fonction bêta d'Euler,

$$B(s, t) = \int_0^1 x^s (1-x)^t \frac{dx}{x(1-x)} = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}.$$

On a le développement classique en série de Laurent :

$$B(s, t) = \frac{s+t}{st} \exp \left( \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n} \zeta(n) (s^n + t^n - (s+t)^n) \right).$$

Les valeurs zêta  $\zeta(n)$  se relèvent en des versions motiviques  $\zeta^{\text{mot}}(n)$ , qui sont des périodes des motifs de Tate mixtes sur  $\mathbb{Z}$ , et dont la théorie de Galois est très simple. En effet,  $\zeta(2n)$  est une période de  $\mathbb{Q}(-2n)$  et  $\zeta(2n+1)$  est une période d'une extension de  $\mathbb{Q}(-(2n+1))$  par  $\mathbb{Q}(0)$ . On a donc, pour  $g$  un point du groupe de Galois motivique (pro-unipotent, pour simplifier) de  $\text{MT}(\mathbb{Z})$ , une formule

$$g.\zeta^{\text{mot}}(n) = \zeta^{\text{mot}}(n) + a_g^{(n)} \quad (3.9)$$

où  $g \mapsto a_g^{(n)}$  est une fonction sur le groupe de Galois motivique qui est nulle si  $n$  est pair. Si l'on relève  $B(s, t)$  en une série de Laurent  $B^{\text{mot}}(s, t)$  à coefficients dans les périodes motiviques en remplaçant chaque  $\zeta(n)$  par  $\zeta^{\text{mot}}(n)$ , on obtient alors une théorie de Galois "terme à terme" de la forme :

$$g.B^{\text{mot}}(s, t) = A_g(s, t) B^{\text{mot}}(s, t),$$

où  $g \mapsto A_g(s, t)$  est une fonction inversible sur le groupe de Galois à coefficients dans les séries de Laurent. Du point de vue dual de la coaction, cela s'écrit

$$\rho(B^{\text{mot}}(s, t)) = B^{\text{mot}}(s, t) \otimes A(s, t).$$

Il est notable qu'une formule aussi compacte encode la théorie de Galois motivique (3.9) de toutes les valeurs zêta.

Dans un travail en cours [BDFT23] nous montrons que ce phénomène est général et s'applique à toutes les *transformées de Mellin algébriques*, qui sont les intégrales

$$F(s_1, \dots, s_N) = \int_{\sigma} f_1^{s_1} \cdots f_N^{s_N} \omega \quad (3.10)$$

où  $f_i$  sont des fonctions inversibles sur une variété algébrique  $X$ ,  $\omega$  est une forme différentielle algébrique sur  $X$ , et  $\sigma$  est un cycle (éventuellement avec bord) sur  $X(\mathbb{C})$ . Le résultat principal de [BDFT23] est que l'action terme à terme sur les développements en série de Laurent de (3.10) du groupe de Galois motivique s'exprime de manière finie avec des séries formelles. Dit autrement, les transformées de Mellin algébriques ont des groupes de Galois motiviques ("groupes de Galois–Mellin locaux") qui sont des groupes algébriques à coefficients dans des corps de séries de Laurent.

Avant cela, nous avons étudié dans l'article [BD22] un cas particulier de ce phénomène, qui est le cas où  $X$  est un ouvert de  $\mathbb{A}^1$  et les  $f_i$  sont linéaires. Plus précisément, on fixe un corps de nombres  $k \subset \mathbb{C}$ , un nombre fini de points  $\sigma_0 = 0, \sigma_1, \dots, \sigma_n \in \mathbb{A}^1(k)$ , et on considère les fonctions de variables  $s_0, s_1, \dots, s_n$  de type "intégrale hypergéométrique de Lauricella",

$$L_{ij} = -s_j \int_0^{\sigma_i} x^{s_0} \prod_{k=1}^n (1 - x\sigma_k^{-1})^{s_k} \frac{dx}{x - \sigma_j} \quad (1 \leq i, j \leq n).$$

Pour  $n = 1$  et  $\sigma_1 = 1$  on a  $L_{11} = \frac{s_0 s_1}{s_0 + s_1} B(s_0, s_1)$ . Pour  $n = 2$  on retrouve comme cas particulier les intégrales hypergéométriques qui définissent la fonction  ${}_2F_1$  de Gauss :

$$B(b, c-b) {}_2F_1(a, b, c; y) = \int_0^1 x^b (1-x)^{c-b} (1-yx)^{-a} \frac{dx}{x(1-x)}.$$

En général les fonctions  $L_{ij}$  ont des développements en série entière autour de  $s_i = 0$ , dont les coefficients sont toutes des intégrales itérées (1.9). Grâce au formalisme du groupe fondamental motivique de Deligne–Goncharov [DG05] on les relève canoniquement en des périodes motiviques (des motifs de Tate mixtes sur  $k$ ), d’où des séries  $L_{ij}^{\text{mot}}$  à coefficients dans les périodes motiviques. On définit aussi des variantes  $L_{ij}^{\text{dR}}$  à coefficients dans les périodes de de Rham. La coaction motivique des intégrales itérées, donnée par la formule (1.14) (ou plutôt sous la forme d’une formule d’action initialement due à Ihara) se simplifie en une formule de coaction “terme à terme” pour les fonctions  $L_{ij}$ , donnée par le théorème suivant.

**Théorème 3.9** ([BD22], Theorem 1.2). *On a la formule de coaction motivique “terme à terme”*

$$\rho(L_{ij}^{\text{mot}}) = \sum_{k=0}^n L_{ik}^{\text{mot}} \otimes L_{kj}^{\text{dR}},$$

qui s’écrit sous forme matricielle :

$$\rho(L^{\text{mot}}) = L^{\text{mot}} \otimes L^{\text{dR}}.$$

Ce théorème est un “modèle-jouet” du phénomène plus général étudié dans [BDFT23] et qui concerne toutes les transformées de Mellin algébriques. On utilise ces idées pour montrer l’existence d’une “théorie de Galois cosmique” pour les intégrales de Feynman en régularisation dimensionnelle (c’est-à-dire dans une dimension d’espace-temps  $D = 4 - 2\varepsilon$  avec  $\varepsilon$  infiniment petit), qui en coordonnées paramétriques s’écrivent sous la forme de transformées de Mellin algébriques

$$I_{\Gamma}(\varepsilon) = \int_{\sigma_{\Gamma}} f_{\Gamma}^{\varepsilon} \omega_{\Gamma}.$$

Le calcul explicite cette théorie de Galois ainsi que de ses conséquences sur l’arithmétique des intégrales de Feynman est un projet qui devrait nous occuper pendant quelques années.

# Bibliographie

- [ABD<sup>+</sup>21] S. ABREU, R. BRITTO, C. DUHR, E. GARDI et J. MATTHEW : The diagrammatic coaction beyond one loop. *J. High Energy Phys.*, 2021(10):1–66, 2021.
- [AHBL17] N. ARKANI-HAMED, Y. BAI et T. LAM : Positive geometries and canonical forms. *J. High Energ. Phys.*, 2017(11), 2017.
- [And04] Y. ANDRÉ : *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, volume 17 de *Panoramas et Synthèses*. Société Mathématique de France, Paris, 2004.
- [And09] Y. ANDRÉ : Galois theory, motives and transcendental numbers. In *Renormalization and Galois theories*, volume 15 de *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 165–177. Eur. Math. Soc., Zürich, 2009.
- [AP17] J. ALM et D. PETERSEN : Brown’s dihedral moduli space and freedom of the gravity operad. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 50(5):1081–1122, 2017.
- [Apé79] R. APÉRY : Irrationalité de  $\zeta(2)$  et  $\zeta(3)$ . *Astérisque*, 61:11–13, 1979.
- [Arn69] V. I. ARNOL’D : The cohomology ring of the group of dyed braids. *Mat. Zametki*, 5:227–231, 1969.
- [Ayo07a] J. AYOUB : Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique. I. *Astérisque*, 314:x+466 pp. (2008), 2007.
- [Ayo07b] J. AYOUB : Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique. II. *Astérisque*, 315:vi+364 pp. (2008), 2007.
- [Ayo14] J. AYOUB : A guide to (étale) motivic sheaves. In *Proceedings of the ICM*, volume 2014, 2014.
- [BB10] J. BERGSTRÖM et F. BROWN : Inversion of series and the cohomology of the moduli spaces  $\mathcal{M}_{0,n}^\delta$ . In *Motives, quantum field theory, and pseudodifferential operators*, volume 12 de *Clay Math. Proc.*, pages 119–126. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.
- [BD94] A. A. BEILINSON et P. DELIGNE : Interprétation motivique de la conjecture de Zagier reliant polylogarithmes et régulateurs. In *Motives (Seattle, WA, 1991)*, volume 55 de *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 97–121. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [BD21a] F. BROWN et C. DUPONT : Single-valued integration and double copy. *J. reine angew. Math. (Crelle’s Journal)*, 2021(775):145–196, 2021.
- [BD21b] F. BROWN et C. DUPONT : Single-valued integration and superstring amplitudes in genus zero. *Comm. Math. Phys.*, 382(2):815–874, 2021.

- [BD22] F. BROWN et C. DUPONT : Lauricella hypergeometric functions, unipotent fundamental groups of the punctured Riemann sphere, and their motivic coactions. *Nagoya Math. J.*, 2022. À paraître.
- [BDF21] C. BIBBY, G. DENHAM et E. M. FEICHTNER : A Leray model for the Orlik–Solomon algebra. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2021.
- [BDFT23] F. BROWN, C. DUPONT, J. FRESÁN et M. TAPUŠKOVIĆ : Galois theory for local Mellin motives and Feynman integrals in dimensional regularization. 2023. To appear.
- [Bei00] A. A. BEILINSON : Letter to M. Kontsevich (16.8.2000), 2000.
- [BEK06] S. BLOCH, H. ESNAULT et D. KREIMER : On motives associated to graph polynomials. *Comm. Math. Phys.*, 267(1):181–225, 2006.
- [Ber20] C. BERTOLIN : Third kind elliptic integrals and 1-motives (with a letter of Y. André and an appendix by M. Waldschmidt). *J. Pure Appl. Algebra*, 224(10):106396, 2020.
- [Beu79] F. BEUKERS : A note on the irrationality of  $\zeta(2)$  and  $\zeta(3)$ . *Bull. London Math. Soc.*, 11(3):268–272, 1979.
- [BL16] S. BACKMAN et M. LENZ : A convolution formula for Tutte polynomials of arithmetic matroids and other combinatorial structures. *arXiv :1602.02664*, 2016.
- [Blo77] S. BLOCH : Applications of the dilogarithm function in algebraic  $K$ -theory and algebraic geometry. In *Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto, 1977)*, pages 103–114. Kinokuniya Book Store, Tokyo, 1978, 1977.
- [Blo78] S. BLOCH : *Higher regulators, algebraic  $K$ -theory, and zeta functions of elliptic curves*. Irvine lecture notes. CRM Monograph Series. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000, 1978.
- [BM14] P. BRÄNDÉN et L. MOCI : The multivariate arithmetic Tutte polynomial. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 366(10):5523–5540, 2014.
- [Bor74] A. BOREL : Stable real cohomology of arithmetic groups. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 7:235–272, 1974.
- [BR99] B. BOLLOBÁS et O. RIORDAN : A Tutte polynomial for coloured graphs. *Combin. Probab. Comput.*, 8(1-2):45–93, 1999. Recent trends in combinatorics (Mátraháza, 1995).
- [BR01] K. BALL et T. RIVOAL : Irrationalité d’une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs. *Invent. Math.*, 146(1):193–207, 2001.
- [BR02] B. BOLLOBÁS et O. RIORDAN : A polynomial of graphs on surfaces. *Math. Ann.*, 323(1):81–96, 2002.
- [Bri73] E. BRIESKORN : Sur les groupes de tresses [d’après V. I. Arnol’ d]. In *Séminaire Bourbaki, 24ème année (1971/1972), Exp. No. 401*, pages 21–44. Lecture Notes in Math., Vol. 317. Springer, Berlin, 1973.
- [Bro09] F. BROWN : Multiple zeta values and periods of moduli spaces  $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ . *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 42(3):371–489, 2009.
- [Bro12] F. BROWN : Mixed Tate motives over  $\mathbb{Z}$ . *Ann. of Math. (2)*, 175(2):949–976, 2012.

- [Bro14] F. BROWN : Single-valued motivic periods and multiple zeta values. *Forum Math. Sigma*, 2:e25, 2014.
- [Bro15] F. BROWN : Feynman amplitudes and cosmic Galois group. *arXiv preprint arXiv :1512.06409*, 2015.
- [Bro16] F. BROWN : Irrationality proofs for zeta values, moduli spaces and dinner parties. *Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory*, 6(2–3):102–165, 2016.
- [Bro17] F. BROWN : Notes on motivic periods. *Commun. Number Theory Phys.*, 11(3): 557–655, 2017.
- [BVG90] A. A. BEĬLINSON, A. N. VARCHENKO, A. B. GONCHAROV et V. V. SHEKHTMAN : Projective geometry and  $K$ -theory. *Algebra i Analiz*, 2(3):78–130, 1990.
- [Car01] P. CARTIER : A mad day’s work : from Grothendieck to Connes and Kontsevich. The evolution of concepts of space and symmetry. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 38(4): 389–408, 2001.
- [CC17] D. CHATAUR et J. CIRICI : Rational homotopy of complex projective varieties with normal isolated singularities. *Forum Math.*, 29(1):41–57, 2017.
- [CD16] D.-C. CISINSKI et F. DÉGLISE : Étale motives. *Compos. Math.*, 152(3):556–666, 2016.
- [CD19] D.-C. CISINSKI et F. DÉGLISE : *Triangulated categories of mixed motives*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Cham, 2019.
- [CH20] J. CIRICI et G. HOREL : Mixed Hodge structures and formality of symmetric monoidal functors. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 53(4):1071–1104, 2020.
- [CH22] J. CIRICI et G. HOREL : Étale cohomology, purity and formality with torsion coefficients. *Journal of Topology*, 15(4):2270–2297, 2022.
- [DCP95] C. DE CONCINI et C. PROCESI : Wonderful models of subspace arrangements. *Selecta Math. (N.S.)*, 1(3):459–494, 1995.
- [DCP05] C. DE CONCINI et C. PROCESI : On the geometry of toric arrangements. *Transform. Groups*, 10(3-4):387–422, 2005.
- [Del71a] P. DELIGNE : Théorie de Hodge. I. In *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970)*, Tome 1, pages 425–430. Gauthier-Villars, Paris, 1971.
- [Del71b] P. DELIGNE : Théorie de Hodge. II. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (40):5–57, 1971.
- [Del90] P. DELIGNE : Catégories tannakiennes. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, volume 87 de *Progr. Math.*, pages 111–195. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [Del01] P. DELIGNE : Letter to T. Rivoal. Princeton, 17 Feb. 2001.
- [DF22] C. DUPONT et J. FRESÁN : A construction of the polylogarithm motive. In preparation, 2022.
- [DFM18] C. DUPONT, A. FINK et L. MOCI : Universal Tutte characters via combinatorial coalgebras. *Algebr. Comb.*, 1(5):603–651, 2018.
- [DG05] P. DELIGNE et A. B. GONCHAROV : Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 38(1):1–56, 2005.



- [DGMS75] P. DELIGNE, P. GRIFFITHS, J. MORGAN et D. SULLIVAN : Real homotopy theory of Kähler manifolds. *Invent. Math.*, 29(3):245–274, 1975.
- [DH18] C. DUPONT et G. HOREL : On two chain models for the gravity operad. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 146(5):1895–1910, 2018.
- [DHNKT13] G. H. E. DUCHAMP, N. HOANG-NGHIA, T. KRAJEWSKI et A. TANASA : Recipe theorem for the Tutte polynomial for matroids, renormalization group-like approach. *Adv. in Appl. Math.*, 51(3):345–358, 2013.
- [Dim17] A. DIMCA : *Hyperplane arrangements*. Springer, 2017.
- [DJ20] C. DUPONT et D. JUTEAU : The localization spectral sequence in the motivic setting. *Preprint : arXiv :2003.04217*, 2020.
- [DM13] M. D’ADDERIO et L. MOCI : Arithmetic matroids, the Tutte polynomial and toric arrangements. *Adv. Math.*, 232:335–367, 2013.
- [Dup14] C. DUPONT : The combinatorial Hopf algebra of motivic dissection polylogarithms. *Adv. Math.*, (264):646–699, 2014.
- [Dup15] C. DUPONT : The Orlik-Solomon model for hypersurface arrangements. *Ann. Inst. Fourier*, 65(6):2507–2545, 2015.
- [Dup16] C. DUPONT : Purity, formality, and arrangement complements. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (13):4132–4144, 2016.
- [Dup17] C. DUPONT : Relative cohomology of bi-arrangements. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 369(11):8105–8160, 2017.
- [Dup18] C. DUPONT : Odd zeta motive and linear forms in odd zeta values (with a joint appendix with Don Zagier). *Compos. Math.*, 154(2):342–279, 2018.
- [Dup21] C. DUPONT : Progrès récents sur la conjecture de Zagier et le programme de Goncharov [d’après Goncharov, Rudenko, Gangl, ...]. *Séminaire Bourbaki, 72ème année, 2019-2021, no. 1176*, pages 294–343, 2021.
- [Dup22] C. DUPONT : Valeurs zêta multiples. In Pascale HARINCK, Alain PLAGNE et Claude SABBAAH, éditeurs : *Périodes et transcendance, Journées mathématiques X-UPS 2019*. Éditions de l’École polytechnique, à paraître, 2022.
- [DV17] C. DUPONT et B. VALLETTE : Brown’s moduli spaces of curves and the gravity operad. *Geom. Topol.*, 21(5):2811–2850, 2017.
- [ELV98] G. ETIENNE et M. LAS VERGNAS : External and internal elements of a matroid basis. *Discrete Math.* 179 (1998), no. 1-3, 111-119, 1998.
- [Fis04] S. FISCHLER : Irrationalité de valeurs de zêta (d’après Apéry, Rivoal, ...). *Astérisque*, (294):vii, 27–62, 2004.
- [FK17] G. FELDER et D. KAZHDAN : Divergent integrals, residues of Dolbeault forms, and asymptotic Riemann mappings. *International Mathematics Research Notices*, 2017(19):5897–5918, 2017.
- [FK18] G. FELDER et D. KAZHDAN : Regularization of divergent integrals. *Selecta Mathematica*, 24(1):157–186, 2018.
- [Get94] E. GETZLER : Two-dimensional topological gravity and equivariant cohomology. *Commun. Math. Phys.*, 163(3):473–489, 1994.

- [Get95] E. GETZLER : Operads and moduli spaces of genus 0 Riemann surfaces. *In The moduli space of curves (Texel Island, 1994)*, volume 129 de *Progr. Math.*, pages 199–230. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1995.
- [GK98] E. GETZLER et M. M. KAPRANOV : Modular operads. *Compositio Math.*, 110(1):65–126, 1998.
- [GM04] A. B. GONCHAROV et Yu. I. MANIN : Multiple  $\zeta$ -motives and moduli spaces  $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ . *Compos. Math.*, 140(1):1–14, 2004.
- [Gon95] A. B. GONCHAROV : Polylogarithms in arithmetic and geometry. *In Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 374–387. Birkhäuser, Basel, 1995.
- [Gon99] A. B. GONCHAROV : Volumes of hyperbolic manifolds and mixed Tate motives. *J. Amer. Math. Soc.*, 12(2):569–618, 1999.
- [Gon05] A. B. GONCHAROV : Galois symmetries of fundamental groupoids and noncommutative geometry. *Duke Math. J.*, 128(2):209–284, 2005.
- [GR18] A. B. GONCHAROV et D. RUDENKO : Motivic correlators, cluster varieties and Zagier’s conjecture on  $\zeta_F(4)$ . *Preprint : arXiv :1803.08585*, 2018.
- [Gro66] A. GROTHENDIECK : On the de Rham cohomology of algebraic varieties. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (29):95–103, 1966.
- [HA55] W. V. D. HODGE et M. F. ATIYAH : Integrals of the second kind on an algebraic variety. *Ann. of Math. (2)*, 62:56–91, 1955.
- [Hai87a] R. M. HAIN : The de Rham homotopy theory of complex algebraic varieties. I. *K-Theory*, 1(3):271–324, 1987.
- [Hai87b] R. M. HAIN : The geometry of the mixed Hodge structure on the fundamental group. *In Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985)*, volume 46 de *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 247–282. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
- [HMS17] A. HUBER et S. MÜLLER-STACH : *Periods and Nori motives*, volume 65 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics*. Springer, Cham, 2017. With contributions by Benjamin Friedrich and Jonas von Wangenheim.
- [JR79] S. A. JONI et G.-C. ROTA : Coalgebras and bialgebras in combinatorics. *Studies in Applied Mathematics*, 61(2):93–139, 1979.
- [Kee92] S. KEEL : Intersection theory of moduli space of stable  $n$ -pointed curves of genus zero. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 330(2):545–574, 1992.
- [KMT18] T. KRAJEWSKI, I. MOFFATT et A. TANASA : Hopf algebras and Tutte polynomials. *Adv. in Appl. Math.*, 95:271–330, 2018.
- [KRS99] W. KOOK, V. REINER et D. STANTON : A convolution formula for the Tutte polynomial. *J. Combin. Theory Ser. B* 76 (1999), no. 2, 297–300., 1999.
- [KZ01] M. KONTSEVICH et D. ZAGIER : Periods. *In Mathematics unlimited—2001 and beyond*, pages 771–808. Springer, Berlin, 2001.
- [Lev93] M. LEVINE : Tate motives and the vanishing conjectures for algebraic  $K$ -theory. *In Algebraic K-theory and algebraic topology (Lake Louise, AB, 1991)*, volume

- 407 de *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 167–188. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993.
- [Loo93] E. LOOIJENGA : Cohomology of  $\mathcal{M}_3$  and  $\mathcal{M}_3^1$ . In *Mapping class groups and moduli spaces of Riemann surfaces (Göttingen, 1991/Seattle, WA, 1991)*, volume 150 de *Contemp. Math.*, pages 205–228. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [LV75] M. LAS VERGNAS : Extensions normales d’un matroïde, polynôme de Tutte d’un morphisme. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 280(22):Ai, A1479–A1482, 1975.
- [LV99] M. LAS VERGNAS : The Tutte polynomial of a morphism of matroids. I. Set-pointed matroids and matroid perspectives. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 49(3): 973–1015, 1999. Symposium à la Mémoire de François Jaeger (Grenoble, 1998).
- [Mam20] C. MAMMEZ : On the combinatorics of the Hopf algebra of dissection diagrams. *J. Algebraic Combin.*, 51(4):479–526, 2020.
- [Mor78] J. W. MORGAN : The algebraic topology of smooth algebraic varieties. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (48):137–204, 1978.
- [OEI22] OEIS FOUNDATION INC. : The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, 2022. Published electronically at <http://oeis.org>.
- [OS80] P. ORLIK et L. SOLOMON : Combinatorics and topology of complements of hyperplanes. *Invent. Math.*, 56(2):167–189, 1980.
- [Pet17] D. PETERSEN : A spectral sequence for stratified spaces and configuration spaces of points. *Geom. Topol.*, 21(4):2527 – 2555, 2017.
- [PS16] E. PANZER et O. SCHNETZ : The Galois coaction on  $\phi^4$  periods. *Commun. Num. Theor. Phys.*, 11:657–705, 2016.
- [Riv00] T. RIVOAL : La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 331(4):267–270, 2000.
- [RV96] G. RHIN et C. VIOLA : On a permutation group related to  $\zeta(2)$ . *Acta Arith.*, 77(1):23–56, 1996.
- [RV01] G. RHIN et C. VIOLA : The group structure for  $\zeta(3)$ . *Acta Arith.*, 97(3):269–293, 2001.
- [Ryb11] G. L. RYBNIKOV : On the fundamental group of the complement of a complex hyperplane arrangement. *Functional Analysis and Its Applications*, 45(2):137–148, 2011.
- [Sai80] K. SAITO : Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 27(2):265–291, 1980.
- [SR72] N. SAAVEDRA RIVANO : Catégories tannakiennes. *Bull. Soc. Math. France*, 100: 417–430, 1972.
- [ST09] P. SALVATORE et R. TAURASO : The operad Lie is free. *J. Pure Appl. Algebra*, 213(2):224–230, 2009.
- [ST14] S. STIEBERGER et T. R. TAYLOR : Closed string amplitudes as single-valued open string amplitudes. *Nuclear Phys. B*, 881:269–287, 2014.

- [Sti14] S. STIEBERGER : Closed superstring amplitudes, single-valued multiple zeta values and the Deligne associator. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 47(15):155401, 2014.
- [Sus90] A. A. SUSLIN :  $K_3$  of a field, and the Bloch group. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 183:180–199, 229, 1990.
- [Voe00] V. VOEVODSKY : Triangulated categories of motives over a field. In *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, volume 143 de *Ann. of Math. Stud.*, pages 188–238. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000.
- [VZ18] P. VANHOVE et F. ZERBINI : Closed string amplitudes from single-valued correlation functions. *Preprint : arXiv :1812.03018*, 2018.
- [Wes08] C. WESTERLAND : Equivariant operads, string topology, and Tate cohomology. *Math. Ann.*, 340(1):97–142, 2008.
- [Zag91] D. ZAGIER : Polylogarithms, Dedekind zeta functions and the algebraic  $K$ -theory of fields. In *Arithmetic algebraic geometry (Texel, 1989)*, volume 89 de *Progr. Math.*, pages 391–430. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1991.
- [Zag07] D. ZAGIER : The dilogarithm function. In *Frontiers in number theory, physics, and geometry. II*, pages 3–65. Springer, Berlin, 2007.