



**HAL**  
open science

# Contributions à l'étude d'équations intégrodifférentielles déterministes et stochastiques

Louk-Man Issaka

► **To cite this version:**

Louk-Man Issaka. Contributions à l'étude d'équations intégrodifférentielles déterministes et stochastiques. Mathématiques [math]. Université Gaston Berger de Saint Louis, 2020. Français. NNT : . tel-04160456

**HAL Id: tel-04160456**

**<https://hal.science/tel-04160456v1>**

Submitted on 12 Jul 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES ET DES TECHNOLOGIES

U.F.R DE SCIENCES APPLIQUÉES ET DE TECHNOLOGIES

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GASTON BERGER

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Option : Probabilité et Statistique

Présentée et soutenue publiquement par

**Louk-Man ISSAKA**

le 05 Décembre 2020

# Contributions à l'étude d'équations intégrodifférentielles déterministes et stochastiques

Thèse dirigée par Professeur Mamadou Abdoul Diop

## JURY

<b>Mamadou, SY</b>	Professeur Titulaire, Université Gaston Berger de Saint Louis	Président/Examinateur
<b>Aboubakary, DIAKHABY</b>	Professeur Titulaire, Université Gaston Berger de Saint Louis	Rapporteur
<b>Alassane, DIEDHIOU</b>	Professeur Titulaire, Université Assane Seck, Ziguinchor	Rapporteur
<b>Carlos, OGOUYANDJOU</b>	Maître de Conférences, Université d'Abomey-Calavi	Examinateur
<b>Ngalla, DJITTE</b>	Professeur Titulaire, Université Gaston Berger de Saint Louis	Examinateur
<b>El Hadji, DEME</b>	Maître de Conférences, Université Gaston Berger de Saint Louis,	Examinateur
<b>Mamadou Abdoul, Diop</b>	Professeur Titulaire, Université Gaston Berger de Saint Louis	Directeur

Préparée au sein du **Laboratoire d'Analyse Numérique et Informatique.**

---

# Dédicace

---

**À MA TRÈS CHÈRE FEUE GRAND-MÈRE SAMATA BOUKARI**

Que le très miséricordieux t'ouvre les portes du paradis

**À MA TRÈS CHÈRE MÈRE MOUNIRA TCHEDRE**

Source inépuisable de tendresse, de patience et de sacrifice. Ta prière et ta Bénédiction m'ont été d'un grand secours tout au long de ma vie.

Quoique je puisse dire et écrire, je ne pourrais exprimer ma grande affection et ma profonde reconnaissance. J'espère ne jamais te décevoir, ni trahir ta confiance et tes sacrifices. Puisse Dieu tout puissant, te préserver et t'accorder la santé, la longue vie et le Bonheur.

**À MON FRÈRE ET PETITES SŒURS RACHID, KOUBOURAT,  
SHERIFA ET SICRATOU**

Vous m'avez toujours écouté attentivement et aidé inlassablement, que ce travail soit pour vous un modeste témoignage de ma profonde affection.

**À TOUS MES ONCLES TCHEDRE MOUHAMED, TCHEDRE  
AMINOU, TCHEDRE SEYDOU etc.**

L'affection que j'ai pour vous est sans aucune mesure, que Dieu accomplisse vos vœux et vous accorde une longue vie.

---

---

# Remerciements

---

JE resterai reconnaissant, toute ma vie, à plusieurs personnes qui m'ont aidé à franchir de nombreuses étapes difficiles de ma vie. Je ne peux qu'être d'accord avec ARISTOTE, et dire «Il y'a parmi nous des magiciens et magiciennes, mais personne ne le sait...». À ces magiciens et magiciennes, c'est un réel plaisir pour moi de leur dédier ces remerciements.

Je tiens à manifester mon plus profond et sincère remerciement à mon directeur de thèse, Professeur Mamadou Abdoul DIOP, non seulement pour m'avoir fait confiance depuis tout ce temps, mais aussi pour m'avoir permis de m'immerger dans le monde de la recherche que je souhaite ne plus quitter, mais également pour son écoute, son énergie débordante, sa gentillesse, ses encouragements quasi permanents, son soutien sans cesse, ses qualités pédagogiques et sa grande humanité.

Il m'a permis, entre autres, de rencontrer de grands mathématiciens, qui ont enrichi mon travail et que j'ai le privilège de compter dans mon jury.

Je remercie sincèrement le président du jury, Professeur Mamadou SY d'avoir accepté de présider ce jury. C'est un honneur pour moi que vous présidez ce jury, pour cela recevez mes sincères remerciements.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements aux Professeurs Aboubakary DIAKHABY de l'université Gaston Berger, Saint-Louis (Sénégal), Alassane DIEDHIOU de Université Assane Seck, Ziguinchor, (Sénégal) et Carlos OGOUYANDJOU de l'Université d'Abomey-Calavi (Bénin) pour m'avoir fait l'honneur d'être des rapporteurs de ma thèse. Vos précieuses critiques et suggestions m'ont permis d'améliorer la qualité scientifique de ce travail. Veuillez recevoir ici l'expression de mon plus profond respect et de ma gratitude infinie.

Mes remerciements s'adressent également aux Professeurs Ngalla DJITTE et El Hadji DEME pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux en examinant cette thèse, pour

---

leurs conseils avisés et pour l'honneur qu'ils m'ont fait en participant à ce jury.

Il m'est impensable de juger le parcours d'un individu sans connaître ses professeurs. Ce sont eux, tant bien que mal, qui nous impressionnent et nous orientent. Mes remerciements vont à l'endroit de tous les professeurs du département de mathématique. Particulièrement, je remercie les Professeurs Gane Samb LO, Aliou DIOP, Ali Souleymane DABYE, Ahmadou Bamba SOW, Abdou Ka DIONGUE, Daouda SANGARE, Mariama NDIAYE DIAKHABY, Moustapha SENE etc. C'est aussi une occasion de dire merci à tous les professeurs de l'Université de Kara, particulièrement ceux de la Faculté des sciences et techniques (Fa.S.T-UK). De près ou de loin, j'ai profité de vos savoirs, je vous en remercie.

Je remercie l'UFR-SAT de m'avoir permis de faire une thèse, son équipe administrative et pédagogique. Merci particulièrement à Ibrahim Ndiaye (le comptable de l'UFR ), à Mme Fatima Gomiz, à Mme Rokhaya SOW (chef du service pédagogique ) pour leur sympathie. Ils ont tous contribué au bon fonctionnement de ce travail.

Je souhaite aussi remercier le Réseau EDP-Modélisation et contrôle ainsi que le Centre d'Excellence Africain (CEA-MITIC) pour leurs soutiens et leurs apports dans nos différents séminaires. Je saisi de cette occasion pour remercier le Professeur Hamidou TOURE, le coordinateurs du Réseau EDP-Modélisation et contrôle pour tous ses commentaires, suggestions et remarques lors de nos différents séminaires.

Pendant toutes ces années d'études, j'ai beaucoup apprécié l'ambiance amicale qui a régné au Laboratoire d'Analyse Numérique Informatique (LANI), je tiens à remercier tous ses membres Docteur Aziz Mané, Mahamat Hassan Mahamat Hamit, Barka Ibrahim Mahamat, Amadou Amana Diop, Hasna Hmoyed, Mouhamed Salem. Je tiens également à remercier tous les doctorants qui ont séjourné dans notre Laboratoire, Fulbert Kuessi Allognissode, Kora Hafiz Bete, Mariam B Traore, Reine Kakpo, j'ai aimé nos débats sur les différentes notions mathématiques.

Ce travail est le fruit d'énormes sacrifices de la part de ma famille, alors de ce fait, c'est un plaisir pour moi de la remercier avec un grand amour. De ce fait, j'exprime ma profonde reconnaissance à tous les membres de ma famille qui n'ont jamais épargné un effort pour m'aider. Merci d'accepter de me financer sans me poser trop de questions. Cette confiance m'a vraiment aidé.

J'aurai difficilement pu terminer ma thèse dans de bonnes conditions sans l'aide de Dr Evrard Marie Diokel Ngom. Il a su m'orienter et me conseiller lorsque la situation

devenait critique, pour m'offrir par la suite des ouvertures que je n'aurai pu imaginer. Mais, c'est certainement encore plus pour le plaisir des discussions que nous avons partagées, que je le remercie.

Je profite également de cette page pour remercier toute la communauté togolaise à l'Université Gaston Berger de Saint-Louis. Nos rencontres répétées pour partager les plats de chez nous, la fraternité et le sens de respect de tous les membres de la communauté m'ont permis de me sentir comme chez moi. Je tiens à remercier particulièrement Esoham ALI et sa femme Agath, pour leur sympathie et leur détermination à aider toute la communauté.

Enfin, je souhaite également remercier tous mes ami(e)s que j'aime tant, Mbissine Ndiaye, Mami Aïda Diagne, Danso Ibrahima, Abdou Salam Latif, Ibrahima Traoré, la liste n'est pas exhaustive, pour leur sincère amitié.

---

# RÉSUMÉ

---

Le sujet de cette thèse se situe dans le cadre de l'étude des équations intégrodifférentielles déterministes et stochastiques. Les équations intégrodifférentielles apparaissent dans de nombreuses applications telles que la physique, la finance mathématique, la biologie, la télécommunication, etc. Ici, le cas aléatoire sera schématisé soit par un processus de Wiener, soit par un mouvement Brownien fractionnaire. Un mouvement Brownien est tel que ses petits accroissements modélisent bien le bruit blanc.

L'objectif est d'étudier les aspects quantitatifs et qualitatifs des équations intégrodifférentielles déterministes et stochastiques, plus précisément, il s'agirait d'établir sous des conditions bien définies les résultats d'existence, d'unicité, de stabilité et d'attractivité des classes d'équations intégrodifférentielles.

La principale méthode utilisée pour la résolution des équations est la théorie de l'opérateur résolvant au sens de Grimmer [50]. Cette théorie sert de formulation abstraite aux équations intégrodifférentielles. D'autres outils, comme la théorie du point fixe et les théories d'analyses fonctionnelles et stochastiques, ont aussi servi à l'analyse de chaque classe d'équations considérée. Ces outils sont plus efficaces pour l'étude des équations intégrodifférentielles.

Cette thèse est composée de cinq (05) chapitres. Le premier introduit les outils nécessaires à la bonne compréhension de tous les autres chapitres. Le second chapitre est dédié à l'étude d'une classe d'équations intégrodifférentielles déterministes. Cette classe d'équations a été étudiée en utilisant la théorie de la mesure de non-compacité et la théorie du point fixe. Le troisième chapitre est consacré à l'étude d'une classe d'équations intégrodifférentielles stochastiques à condition non-locale. L'avant-dernier chapitre établit les conditions d'existence et d'unicité de solution faible du système stochastique (4.1), avant d'établir les conditions de la stabilité exponentielle. Le dernier traite les équations intégrodifférentielles stochastiques impulsives à retard fini. Plus précisément, il établit les ensembles attractifs et quasi-invariants et étudie la stabilité exponentielle du système stochastique (5.1). Dans l'optique de prouver l'applicabilité de nos différents résultats abstraits, nous avons, pour chaque classe d'équations étudiée,

présenté un exemple illustratif pour soutenir la faisabilité de nos résultats abstraits trouvés.

## Mots clés

Équation intégrodifférentielle stochastique, Équation différentielle impulsive, Équation différentielle non-locale, Équation différentielle stochastique à retard de type neutre,  $C_0$ -semi-groupe, opérateur résolvant, théorie du point fixe, processus de Wiener, mouvement Brownien fractionnaire, solution faible, stabilité exponentielle, ensemble globalement attractif, ensemble quasi invariant.

---

---

# Abstract

---

The subject of this thesis is within the framework of the study of deterministic and stochastic integrodifferential equations. Differential equations are found in numerous application such as physics, mathematical finance, biology etc. In this thesis, we will mathematically shematize chance by either a wiener process or a fractional Brownian motion. The latter is such that its small increments models white noise accurately.

The aim in this work is to study the qualitative and quantitative aspects of deterministic and stochastic integrodifferential equations and more precisely, we will establish the existence, uniqueness and stability of mild solutions and the attractive and quasi-invariant sets of these systems. The main method used for the equations resolution is the operator resolvent theory introduced by Grimer [50]. This is used as a abstract formulation of integrodifferential equations. The theory of the fixed point and theories of stochastic and functional analysis are also used in the analysis of each class of considered equations. These tools are more efficient for the study of integrodifferential equations. This thesis is divided into five chapters.

The first chapter introduce the necessary elements for a good understanding of other chapters. The second study the impulsive stochastic integrodifferential equation. Hausdorff's compactness measure and the fixed point are used to study this class of equations. A class of stochastic integrodifferential equations with non local condition is studied in third chapter. The next to last chapter establish the sufficient conditions of existence and stability exponential of mild solutions. The last chapter concerns the study of impulsive stochastic integrodifferential equations and more precisely studied the exponential stability of the mild solution after estabilshing its global attractiveness and quasi-invariant sets.

In order to prove the feasibility of results obtained, we have given, for each class of equations studied, an illustrative.

## Key words

Stochastic Integrodifferential Equation, Impulsive Differential Equation, Stochastic Integrodifferential Equation, Nonlocal Differential Equation, Neutral Delay Stochastic Differential Equation,  $C_0$ -semi-group; Resolvent Operators, Fixed Point Theory, Wiener Process; Fractional Brownian Motion; Mild Solution, Exponential Stability, Attractiveness Set, Quasi-invariant Set.

---

---

# Notations générales

---

## Liste des abréviations

- càdlàg : Continu à droite et admettant une limite à gauche.  
i.i.d : Identiquement et indépendamment distribué.  
EDO : Équation différentielle ordinaire.  
EDI : Équation différentielle impulsive  
EDR : Équation différentielle à retard.  
EDS : Équation différentielle stochastique.  
EIS : Équation intégrodifférentielle stochastique  
EDRN : Équation différentielle à retard de type neutre.

## Liste des notations

- $\mathbb{N}$  : L'ensemble des entiers naturels.  
 $\mathbb{N}^*$  : L'ensemble des entiers naturels non nuls.  
 $\mathbb{R}$  : L'ensemble des réels et  $\mathbb{R}^d = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{d \text{ fois}}$ .  
 $\mathcal{C}^k$  : L'ensemble des fonctions  $k$  fois dérivables et dont toutes les dérivées sont continues.  
 $\mathcal{C}(E, F)$  : L'espace des fonctions continues de  $E$  dans  $F$   
 $\mathbb{1}_A$  : L'indicatrice de l'ensemble  $A$ .  
 $\mathbb{P}(A)$  : La probabilité de l'évènement  $A$ .  
 $\mathbb{X}$  espace de Banach de norme  $\|\cdot\|$ .  
 $\mathcal{L}(E, \mathbb{X})$  Espace des opérateurs linéaires bornés de  $E$  dans  $\mathbb{X}$ .  
 $L^2(\cdot)$  : espace de fonctions de carré intégrable.  
 $\Omega$  : l'univers des réalisations.

---

$\mathbb{E}(X)$ :	L'espérance mathématique de la variable aléatoire $X$ .
$\longrightarrow$ :	$t \longrightarrow 0$ $t$ convergence vers 0
$\searrow$ :	$t \searrow 0$ veut dire $t$ décroît vers 0.
$tr(\cdot)$ :	La trace.
$A$ :	Opérateur linéaire fermé à domaine dense.
$D(A)$ :	Domaine de $A$
$\Gamma(t)$ :	Opérateur linéaire fermé.
$\Delta$ :	Delta
$t \wedge s$ :	le minimum entre $s$ et $t$
$\varphi$ :	La donnée initiale dans l'espace de phase.
$h$ :	La fonction non locale
$t$ :	La variable temps
$x$ :	La variable d'espace et $x_t$ La fonction historique de $x$
$\{S(t)\}_{t \geq 0}$ :	Le $c_0$ -semi-groupe sur $\mathcal{X}$
$\{\mathcal{R}(t)\}_{t \geq 0}$ :	L'opérateur résolvant sur $\mathcal{X}$

---

---

# Table des matières

---

<b>Remerciements</b>	<b>ii</b>
<b>Resumé &amp; Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Notations générales</b>	<b>ix</b>
<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>9</b>
1.1 Notions sur les opérateurs . . . . .	9
1.2 Rappels sur les espaces de Hilbert . . . . .	13
1.2.1 Bases hilbertiennes, séparabilité . . . . .	13
1.2.2 Opérateurs de Hilbert-Schmidt et opérateurs nucléaires . . . . .	15
1.3 Mesure de non compacité . . . . .	17
1.3.1 Notion générale sur la mesure de non compacité . . . . .	18
1.3.2 Mesure de non compacité de Hausdorff . . . . .	19
1.4 Rappels sur quelques équations fonctionnelles . . . . .	20
1.4.1 Définitions et généralités . . . . .	20
1.4.2 Introduction aux équations différentielles à retard . . . . .	21
1.4.3 Équations différentielles fonctionnelles Impulsives . . . . .	27
1.4.4 Concept des équations intégrodifférentielles . . . . .	29
1.5 Théorie des semi-groupes et d'opérateur résolvant . . . . .	30
1.5.1 $C_0$ -Semi-groupe . . . . .	30
1.5.2 Générateur infinitésimal . . . . .	33
1.5.3 Semi-groupes sur un espace de Hilbert . . . . .	36
1.5.4 Théorie de l'opérateur résolvant . . . . .	36
1.6 Théorèmes du point fixe . . . . .	38
1.6.1 Théorème du point fixe de Banach(1922) [12] . . . . .	39
1.6.2 Théorème du point fixe de Krasnoselskii . . . . .	39
1.6.3 Théorème du point fixe de Mönch . . . . .	39
1.6.4 Théorème du point fixe de Darbo généralisé . . . . .	39

1.7	Rappel sur quelques outils stochastiques . . . . .	40
1.7.1	Processus stochastiques . . . . .	43
1.7.2	Mouvement brownien ou processus de Wiener . . . . .	47
1.7.3	Mouvement Brownien fractionnaire (mBf) . . . . .	49
<b>2</b>	<b>Existence et unicité de solutions faibles pour une classe d'équations intégrodifférentielles impulsives à condition non locale via la mesure de non compacité</b>	<b>56</b>
2.1	Introduction . . . . .	56
2.2	Préliminaires . . . . .	57
2.3	Résultats d'existence et d'unicité de solutions faibles . . . . .	58
2.4	Exemple . . . . .	63
<b>3</b>	<b>Résultats sur les équations intégrodifférentielles stochastiques non locale dirigées par un mouvement Brownien fractionnaire</b>	<b>65</b>
3.1	Introduction . . . . .	65
3.2	Définition et Rappels . . . . .	67
3.3	Résultat d'existence et d'unicité de solutions faibles du système stochastique	67
3.4	Exemple . . . . .	75
<b>4</b>	<b>Existence et stabilité d'une classe d'équations intégrodifférentielles stochastiques mixtes</b>	<b>77</b>
4.1	Introduction . . . . .	77
4.2	Préliminaires . . . . .	79
4.3	Résultat d'existence de solution faible du système stochastique à retard . . .	81
4.4	Stabilité exponentielle en moyenne quadratique . . . . .	88
4.5	Exemple . . . . .	92
<b>5</b>	<b>Attractivité et <math>p</math>-stabilité exponentielle d'une classe d'équations intégrodifférentielles stochastiques neutres impulsives mixtes</b>	<b>96</b>
5.1	Introduction . . . . .	96
5.2	Préliminaires . . . . .	98
5.3	Ensembles globalement attractifs et quasi-invariants . . . . .	100
5.4	Stabilité $p$ -exponentielle . . . . .	106
5.5	Exemple . . . . .	108
	<b>Conclusion et Perspectives</b>	<b>111</b>

---

# Introduction

---

## Introduction générale

La connaissance parfaite des phénomènes d'un écosystème est un enjeu majeur pour la gestion des ressources et de l'environnement. Pour avoir cette connaissance, on passe très souvent soit par une observation directe, soit par une expérimentation in vitro ou in situ (observation des phénomènes au laboratoire ou sur place), ou soit encore par une modélisation mathématique et informatique. La modélisation mathématique consiste à définir un (ou plusieurs) modèle(s), de nature mathématique, permettant de rendre compte, d'une manière suffisamment générale, un phénomène donné, qu'il soit physique, biologique, économique ou autre. Elle nécessite, dans cet objectif, un ensemble de techniques permettant de disposer d'une représentation mathématique du système étudié. Pour cela, elle exige une connaissance précise des phénomènes intervenants dans le système et une aptitude à les représenter par des équations mathématiques. Les équations différentielles formulées, pour la première fois, sous la plume de Leibniz<sup>1</sup> en 1686, décrivent l'évolution d'un phénomène en mettant en relation une fonction et ses dérivées. Ces équations se présentent sous forme générale suivante :

$$x'(t) = F(t, x(t))$$

où  $x$  est la fonction d'état à déterminer et  $F$  une fonction continue satisfaisant un certain nombre de conditions données, sont apparues en mathématiques par le biais des problèmes d'origine mécanique ou géométrique, par exemple :

- Mouvement du pendule circulaire,
- Problème du mouvement de deux corps qui s'attirent mutuellement suivant la loi de la gravitation Newtonienne,
- Problème de l'étude de mouvements de corps "élastiques" (tiges, ressorts, cordes vibrantes).
- Problème de l'équation de la courbe (appelée chaînette) décrivant la forme prise par une corde, suspendue aux deux extrémités et soumise à son propre poids.

Pendant des décennies, les chercheurs ont utilisé les équations différentielles ordinaires ou les équations différentielles partielles pour décrire les systèmes dont l'état du futur est déterminé

---

1. Philosophe et scientifique allemand, 1646-1716

par l'état présent en négligeant la présence des retards. Or, la présence des retards peut influencer la performance et la stabilité du système, et donc, il est très important d'introduire les retards dans la modélisation. Les équations différentielles à retards (héréditaire) définies comme des équations différentielles faisant intervenir des arguments de temps différents, servent à modéliser un grand nombre de phénomènes. Les systèmes à retards forment une classe de systèmes de dimension infinie largement utilisés pour modéliser et analyser les phénomènes de la vie réelle. Nous pouvons citer, en guise d'exemple, l'intervention du retard dans les domaines suivants :

- La biologie : Hutchinson [67] a modélisé l'évolution d'une population d'individus d'une seule espèce par une équation faisant intervenir un retard. Volterra [132], pour la même étude, a intégré l'effet de pollution de l'environnement par les individus. Cette pollution ayant des effets toxiques s'accumulant (d'où l'introduction de retards distribués), et provoquant éventuellement la mort avec un certain retard. Des retards apparaissent également dans ces modèles d'évolution des populations lorsqu'on prend en compte le temps de maturation d'un individu. De plus, les périodes de procréation n'apparaissent qu'à certaines saisons, différents types de retards peuvent intervenir. Une étude de ces modèles a été réalisée par Gopalsamy [47].
- La mécanique : Des retards distribués apparaissent dans les équations de mouvement des systèmes viscoélastiques soumis à des contraintes (bois, polymères, plastique, glace... ) [46, 18]. Certains modèles de moteurs pneumatiques font aussi intervenir des retards ponctuels.  
Les phénomènes de transport (tuyauteries, tapis roulant, ... ) se traduisent bien sûr également en terme de retards.
- La physique : Certains mouvements, même très rapides, ne peuvent pas toujours être considérés comme instantanés (propagation des champs électromagnétiques, de la chaleur, des électrons dans un oscillateur, d'une information pour la commande d'un satellite depuis la terre). De plus, la durée d'un traitement numérique des informations n'est pas toujours négligeable [48].
- La médecine : Les réponses à des événements particuliers ou les actions de certains médicaments ne sont pas instantanées (processus de sécrétion de l'insuline, délai entre le début de la stimulation des lymphocytes et le début de la production d'anticorps )
- L'économie : Il faut prendre en compte les temps de réaction à un événement, comme par exemple le retard entre une décision et la délivrance des biens sur le marché [52].

Durant ces dernières années, cette théorie a été développée intensivement, et occupe une part importante dans le vocabulaire des chercheurs, compte tenu de ses nombreuses applications dans divers domaines tels que viscoélasticité, mécanique, réacteur nucléaire, télécommuni-

cation, microbiologie, épidémiologie, physiologie et tant d'autres domaines. D'un point de vue pragmatique, tous les processus physiques comportent des retards, même s'ils peuvent éventuellement être négligés face aux autres dynamiques du processus. Ces retards interviennent dès que le procédé comporte des phénomènes de transport (mélanges chimiques, tapis roulants...), des phénomènes de transmission d'informations, des acquisitions de mesures, etc. Elles expriment une relation entre une fonction et ses dérivées pour des valeurs présentes et passées. Ces équations se présentent généralement sous la forme contractée suivante :

$$x'(t) = F(t, x_t)$$

où  $x$  est la fonction inconnue,  $x_t$  est appelé la fonction historique définie  $x_t(\omega) = x(t + \omega)$  avec  $\omega \in [-r, 0]$  pour tout  $r \geq 0$ .

La présence des équations différentielles et des équations intégrales est courante dans de nombreux domaines des sciences et de l'ingénierie. Cependant, les travaux de recherche dans ce domaine aboutissent à un nouveau sujet spécifique, dans lequel les opérateurs différentiels et les opérateurs intégraux apparaissent ensemble dans la même équation. Ces types d'équations sont connus sous le nom d'équation intégrodifférentielle. Le type général de l'équation intégrodifférentielle est présenté sous la forme suivante :

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s)x(s)ds,$$

où  $a$  et  $b$  sont des bords de l'intégrale,  $\lambda$  une constante,  $x$  est la fonction inconnue,  $K$  est le noyau de l'intégrale.  $f$  et  $K$  sont données d'avance mais les bords de l'intégrale  $a$  et/ou  $b$  peuvent être fixes. Ces équations ressemblent aux équations différentielles ordinaires par leurs méthodes de résolutions. Elles présentent plus d'avantage pour modéliser beaucoup de problèmes d'évolutions comme les problèmes liés à la biologie, à la chimie, à la physique, à la télécommunication etc.

Dans de nombreux processus d'évolution, on constate un changement instantané dans le comportement du système. Ces processus subissent des perturbations négligeables par rapport à la durée du processus. Lors de la modélisation de ces problèmes qui sont caractérisés par le fait qu'à un certain moment, ils subissent un changement brusque, il est naturel de supposer que ces perturbations agissent sous forme d'impulsion. La théorie des équations différentielles impulsives développée, pour la première fois, par Mil'man et Myshkis, fournit les outils mathématiques pour décrire les phénomènes qui sont assujettis à ces perturbations. Cette théorie a été utilisée pour étudier de nombreux phénomènes comme l'effet de la vaccination ou tout facteur de stress sur une population cellulaire [135, 81], les systèmes de proies-prédateurs [91, 92], les impacts du changement climatique sur la dynamique [129] etc. Une équation impulsive est définie par une équation différentielle qui caractérise l'évolution d'un système

entre deux impulsions, un critère d'impulsion qui détermine le moment où les impulsions se produisent et un ensemble de fonctions d'impulsion qui définissent l'effet des impulsions sur le système. Ces équations sont généralement présentées sous la forme :

$$x'(t) = F(t, x_t), \text{ pour } t \neq \tau_k$$

$$\Delta x = I_k(x) \text{ pour } t = \tau_k,$$

où  $\Delta x = x^+ - y$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , les temps d'impulsions  $\tau_k$  supposés croissants et  $I_k$  est la taille du saut. Ici,  $x^+$  représente la valeur qui suit immédiatement le changement brusque et en général diffère de  $x$ . Le développement de cette théorie était relativement lent à cause de la difficulté de manipulation de telles équations. Après, beaucoup de chercheurs ont participé à l'enrichissement de cette théorie où ils lancèrent différentes études sur ce sujet et beaucoup de résultats ont été obtenus dès lors. Pour plus de détails concernant la théorie des équations impulsives voir [8, 9, 10] et les références qui y figurent.

La résolution d'un problème passe par la connaissance, au préalable, de certaines informations sur le domaine ou la frontière. En général, dans les modèles mathématiques, des informations supplémentaires sur la frontière du domaine (en fonction du temps ou de la dimension spatiale) sont fournies. La condition initiale classique reconnue aussi sous le nom de la condition initiale de Cauchy est donnée par  $x(0) = x_0$ , où  $x_0$  est l'état initial du système au temps  $t = 0$ . Cependant, dans le monde réel tel qu'en informatique, en science environnementale, en démographie, etc ; cette condition ne prend pas en compte certaines mesures du problème. Le concept de la "condition non locale" introduit par Byszewski [23] vient pallier quelques insuffisances dues aux conditions traditionnelles du problème de Cauchy lors de la modélisation. Cette condition explicitée souvent sous la forme  $x(0) = x_0 + h(x)$  ( avec  $h$  une fonction satisfaisant certaines contraintes ) explique mieux les problèmes en tant que système dynamique étudié dans [145, 120]. Cette condition a un effet sur la solution et donne une meilleure précision de la mesure physique que la condition classique. Vu l'importance de cette condition, de nombreux chercheurs se sont investis sur ces travaux, en guise d'exemple on peut citer les travaux de S. Berman [16, 17], des travaux de J.H. Liu et al. [87], des travaux de Liang and Xiao [88] et de Ibrahim [133].

Les effets aléatoires constituent une autre source de perturbations ou d'incertitudes dans les systèmes réels. De nombreux systèmes dynamiques ont des structures variables sujettes à de brusques changements aléatoires pouvant résulter sur des phénomènes tels que des défaillances et des réparations des composantes, des modifications dans les interconnexions des sous-systèmes ou des changements soudains d'environnement. Par conséquent, les perturbations stochastiques doivent être prises en compte lors de la modélisation. La théorie des processus stochastiques est l'une des branches de mathématiques qui est utilisée pour traiter des phénomènes qui varient d'une façon irrégulière dans le temps et dans l'espace [103]. En

d'autres termes, tout processus dont l'évolution peut être analysée en termes de probabilité est un processus stochastique. Ayant fait son essor dans les années 1950, elle permet de modéliser les phénomènes de la vie courante sous la forme des équations différentielles stochastiques (EDS). Ces équations différentielles stochastiques sont une généralisation des équations différentielles ordinaires (EDO) auxquelles on rajoute un terme de bruit blanc. Elles décrivent, en général, l'évolution dans le temps d'un système physique, par exemple, la position à l'instant  $t$  d'un satellite ou la température d'une matière en agitation. Le terme aléatoire (bruit) qui apparaît dans l'équation différentielle stochastique est représenté, mathématiquement, par un mouvement Brownien. Le mouvement Brownien est le nom du phénomène correspondant au mouvement aléatoire de particules dans un fluide. Le premier à l'avoir mis en évidence est le botaniste Robert Brown en 1827. Ce mouvement Brownien a ensuite été défini rigoureusement par Louis Bachelier en 1900. De grands scientifiques ont travaillé la-dessus au 20e siècle, comme Paley, Zygmund, Wiener ou encore Einstein. Il possède de nombreuses propriétés intéressantes, et sert notamment à poser et à résoudre des EDS, qui sont importantes dans de nombreux domaines : physique, biologie, écologie, finance.... Cependant, la plupart des phénomènes d'évolution présente une dépendance à court ou à long terme. Le terme aléatoire le plus populaire utilisé en mathématique pour modéliser ces phénomènes est le mouvement Brownien fractionnaire. Ce mouvement Brownien fractionnaire (mBf en abrégé), également appelé mouvement brownien fractal, est une généralisation du mouvement Brownien.

Le mouvement Brownien fractionnaire est comparable à une marche aléatoire continue. Bien que, contrairement au mouvement brownien régulier, le mBf ait des incréments dépendants, qui signifient que l'"état" actuel d'un mBf dépend des "états précédents". Cette dépendance est mesurée sur une échelle de zéro à un. Cette mesure s'appelle l'indice de Hurst,  $H \in (0, 1)$ , du nom de l'hydrologue Harold Edwin Hurst pour ses travaux dans le domaine de l'hydrologie. Dans ses travaux, Hurst a étudié la variance annuelle des niveaux du Nil, et l'a appliquée à la statistique dite  $R/S$ , où  $R$  correspond à la plage des sommes partielles des données et  $S$  à l'écart type de l'échantillon. La statistique  $R/S$  devrait croître jusqu'à  $n^{1/2}$  sous les hypothèses normales d'observations indépendantes et distribuées de manière identique et de variance finie, où  $n$  est la taille de l'échantillon. Fait intéressant, les données du Nil ont indiqué une croissance de  $n^H$ , où  $H \in (1/2, 1)$ . La marche aléatoire donne généralement une croissance de  $n^{1/2}$  et la limite d'échelle de la marche aléatoire en dimension un est le mouvement brownien. Il faut donc que la croissance  $n^H$ , avec  $H \in (1/2, 1)$  corresponde à autre chose [130]. Mandelbrot a remarqué que, bien que le mouvement brownien ait un écart-type  $t^{1/2}$ , le mouvement brownien fractionnaire a un écart-type de  $t^H$ , où  $0 < H < 1$ , et donc mBf pourrait être plus approprié pour ce comportement [97].

---

L'indice Hurst décrit l'irrégularité du chemin du mBf auquel il est associé, où une valeur de  $1/2$  correspond à des incréments non corrélés. Une valeur supérieure à  $1/2$  correspond à une corrélation positive. Heuristiquement, si un processus correspondant à une valeur de  $H$  qui se situe dans cette plage monte pendant un intervalle, il continuera probablement à monter pendant le prochain intervalle. En revanche, les valeurs inférieures à  $1/2$  correspondent à une corrélation négative. En outre, si un processus dont les incréments sont corrélés positivement présente une croissance à la hausse dans un intervalle, il sera probablement réduit dans l'intervalle suivant. Une application utile de mBf pour les valeurs de  $H \in (1/2, 1)$  consiste à décrire le comportement des prix des actifs et la volatilité des marchés boursiers [114]. Le mouvement brownien fractionnaire, écrit  $B^H(t)$ , est une généralisation du mouvement brownien, qui est un mBf avec l'indice de Hurst  $H = 1/2$ . Il s'avère que les mouvements browniens fractionnaires se divisent en ces trois cas très différents, correspondant à l'intervalle auquel  $H$  est associé.

En 1940, c'est Andrei Kolmogorov, alors qu'il étudiait les courbes en spirale dans l'espace de Hilbert, qui introduisait pour la première fois le mouvement brownien fractionnaire. Cependant, ce n'est que lorsque Mandelbrot a reconnu l'importance de mBf qu'il a tiré, avec Van Ness, bon nombre de ses propriétés importantes dans leur célèbre article [98] en 1968. C'est dans cet article que le mouvement brownien fractionnel tire son nom, ce qui vient de sa représentation sous la forme d'une intégrale stochastique fractionnaire par rapport au mouvement brownien. Une intégrale est appelée stochastique lorsque l'intégrateur, l'intégrale ou les deux sont des processus stochastiques, ce qui en fait un processus aléatoire.

## Objectif

L'étude de l'existence, de l'unicité, de la stabilité de solution des équations intégrodifférentielles déterministes et stochastiques est un sujet très important à exploiter grâce à sa facilité d'interpréter les phénomènes de la vie réelle. Dans cette thèse, notre objectif est d'étudier avec des outils mathématiques les aspects quantitatifs et qualitatifs des équations intégrodifférentielles déterministes et stochastiques. Nous espérons étudier la stabilité, l'attractivité et la quasi invariance une fois que l'on établisse l'existence de solutions faibles.

## Organisation des chapitres

Pour répondre aux objectifs de ce présent travail de recherche, nous organisons ce document en cinq (05) chapitres qui traitent des différentes classes d'équation intégrodifférentielle déterministes et stochastiques. Nous présentons ici quelques points de chacun de ces chapitres :

---

Dans le chapitre 1, nous avons présenté une collection des résultats existants sur les espaces de Hilbert, la mesure de non compacité, la théorie des  $C_0$ -semi-groupes, le calcul stochastique, les équations intégrodifférentielles et quelques Lemmes qui lui sont utiles pour les chapitres qui suivent.

Le chapitre 2, présente l'étude d'existence de solution d'une classe d'équation intégrodifférentielle impulsive à condition non locale. En utilisant la théorie des opérateurs résolvant et la mesure de non compacité de Hausdorff, nous pourrons établir que le système (2.1) admette au moins une solution.

Dans le chapitre 3, on étudie l'existence et l'unicité de solution d'une classe d'équations intégrodifférentielles stochastiques dirigées par un mouvement brownien fractionnaire. En se basant sur les inégalités élémentaires et la théorie de l'opérateur résolvant, on établit des nouveaux résultats sur la solution faible de l'équation (3.1).

L'objectif du chapitre 4 est d'étudier l'existence et la stabilité exponentielle d'une classe d'équation intégrodifférentielle stochastique dirigée par un mouvement Brownien dans un espace de Hilbert. En utilisant la théorie de l'opérateur résolvant [50], la mesure de non compacité, le théorème du point fixe de Mönch, nous montrerons que la solution faible du système (5.1) existe et est exponentiellement stable en moyenne quadratique.

Le chapitre 5 s'appuie sur la théorie des opérateurs résolvants et les intégrales-impulsives, pour quelques aspects qualitatifs et quantitatifs d'une classe d'équations intégrodifférentielles stochastiques à retard de type neutre impulsive dirigée par un mBf. Nous étudions, tout d'abord, les ensembles attractifs et invariants de la solution de l'équation stochastique, après avoir discuté de l'existence de solution. Ensuite on étudiera la stabilité exponentielle de la solution. Pour prouver l'applicabilité de nos résultats abstraits, on donnera un exemple illustratif.

La conclusion rappellera les différentes contributions apportées par cette thèse, puis dégagera plusieurs axes de recherche pouvant contribuer à compléter l'ensemble des travaux présentés ici.

# Chapitre Premier

## Préliminaires

Dans ce chapitre, nous donnons quelques définitions, notions et résultats d'analyse fonctionnelle (espaces, opérateurs, ...), d'analyse stochastique, de la théorie de la famille des opérateurs résolvants et quelques théorèmes du point fixe qui nous seront utiles aux chapitres suivants.

### 1.1 Notions sur les opérateurs

**Définition 1.1.1** (Espace de Banach). *On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet sur le corps  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}$ .*

**Exemple 1.1.1.** *Soit  $J$  un intervalle compact de  $\mathbb{R}$ . Les espaces :*

- $\mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ , des fonctions continues sur  $J$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,
  - $\mathcal{L}^1(J, \mathbb{R})$ , des fonctions intégrables, définies sur  $J$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,
  - $\mathcal{B}(J, \mathbb{R})$  des fonctions bornées, définies sur  $J$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,
  - $\mathcal{B}\mathcal{M}(J, \mathbb{R})$ , des fonctions mesurables et bornées, définies sur  $J$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,
- munies respectivement des normes suivantes :*

$$\|x\|_{\mathcal{C}} = \max_{t \in J} |x(t)|, \quad |x|_{\mathcal{L}^1} = \int_0^1 |x(t)| dt, \quad |x|_{\mathcal{B}} = |x|_{\mathcal{B}\mathcal{M}} = \sup_{t \in J} |x(t)|$$

*sont des espaces de Banach sur  $\mathbb{R}$*

**Définition 1.1.2** (Opérateur continu). *Un opérateur  $T$  défini d'un espace de Banach  $\mathcal{X}$  dans lui-même est dit continu si pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $\mathcal{X}$  qui converge vers  $x \in \mathcal{X}$ , la suite  $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $Tx$ .*

**Définition 1.1.3.** *Soient  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  deux espaces normés, un opérateur  $T$  défini sur  $\mathcal{X}$  dans  $\mathcal{Y}$  est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes :*

- Pour tout  $x, y \in \mathcal{X}$  on a  $T(x + y) = T(x) + T(y)$
- Pour tout  $x \in \mathcal{X}$  et  $\forall \lambda \in \mathbb{K} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ , on a  $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ .

On désigne  $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  l'ensemble des opérateurs linéaires de  $\mathcal{X}$  dans  $\mathcal{Y}$ .

**Définition 1.1.4.** *Un opérateur linéaire  $T$  défini sur  $\mathcal{X}$  dans  $\mathcal{X}$  est dit borné s'il existe une constante positive  $C$ , telle que :*

$$\|T(x)\|_{\mathcal{X}} \leq C \|x\|_{\mathcal{X}}, \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

**Définition 1.1.5.** *Un opérateur intégral linéaire  $T$  est un opérateur linéaire qui admet une formulation de la forme suivante :*

$$T\phi(x) = \int_{\Omega} K(x, y)\phi(y)dy,$$

la fonction  $K$  est appelée noyau de l'opérateur  $T$ .

**Définition 1.1.6.** *Soit un opérateur  $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ .  $x \in \mathbb{X}$  est appelé un point fixe de  $T$  si  $T(x) = x$ .*

Soit  $\mathcal{C}(J, \mathbb{X})$  l'espace des fonctions continues d'un intervalle compact  $J$  de  $\mathbb{R}$  dans l'espace de Banach  $\mathbb{X}$  et soit  $M$  un sous ensemble de  $\mathcal{C}(J, \mathbb{X})$ .

**Définition 1.1.7** (Ensemble équicontinu).  *$M$  est dit équicontinu si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall t_1, t_2 \in J, \|t_1 - t_2\| \leq \delta \longrightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \epsilon \forall f \in M.$$

**Définition 1.1.8** (Ensemble uniformément borné).  *$M$  est dit uniformément borné si :*

$$\exists c > 0 : \|f(t)\| \leq c \forall t \in J \text{ et } \forall f \in M.$$

**Définition 1.1.9** (Les ensembles compacts). *On dit qu'un ensemble  $A$  de  $\mathbb{X}$  est compact si de toute suite d'éléments de  $A$ , on peut extraire une sous-suite converge vers un élément de  $A$ .*

**Définition 1.1.10** (Ensemble relativement compact).  *$M$  est dit relativement compact si  $\bar{M}$  (adhérence de  $M$ ) est compact.*

**Définition 1.1.11.** *Soit  $\mathbb{X}$  un espace de Banach et  $T$  un élément de  $\mathcal{L}(\mathbb{X})$ . On dit que  $T$  est compact s'il transforme tout sous-ensemble borné  $G$  de  $\mathbb{X}$  en un ensemble relativement compact. En d'autres termes,  $T$  est un opérateur compact si, pour toute suite bornée  $(x_n)$  dans  $\mathbb{X}$ , la suite  $(Tx_n)$  contient une sous-suite convergente.*

On désignera par  $\mathcal{K}(\mathbb{X})$  l'ensemble des opérateurs compacts de  $\mathbb{X}$  dans lui-même.

**Théorème 1.1.1.** *Tout opérateur compact est borné, c'est-à-dire que l'on a l'inclusion  $\mathcal{K}(\mathbb{X}) \subset \mathcal{L}(\mathbb{X})$ .*

En général, la réciproque de ce théorème n'est évidemment pas vraie. Les opérateurs compacts sont très particuliers ; par exemple si  $\mathbb{X}$  est de dimension infinie, l'identité n'est pas un opérateur compact, puisque cela entraînerait l'existence d'un voisinage de l'origine relativement compacte dans  $\mathbb{X}$  et par suite  $\mathbb{X}$  serait de dimension finie.

En revanche, si  $\mathbb{X}$  est de dimension finie, tout opérateur linéaire dans  $\mathbb{X}$  est compact, puisque si  $\mathbb{Y}$  est un sous-ensemble borné de  $\mathbb{X}$ , son image  $T(\mathbb{Y})$  est bornée et donc son adhérence  $\overline{T(\mathbb{Y})}$  est compacte.

**Théorème 1.1.2. (Arzela-Ascoli)**

Soit  $(\mathcal{X}, d)$  un espace métrique compact,  $(\mathcal{Y}, \delta)$  un espace métrique complet.

Une partie  $A$  de  $\mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  est relativement compacte si et seulement si :

- $A$  est équicontinue, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathcal{X}, \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall f \in A, \forall y \in \mathcal{X}, (d(x, y) \leq \eta) \implies (\delta(f(x), f(y)) < \epsilon)$$

- Pour tout  $x \in \mathcal{X}$ , l'ensemble  $A(x) = \{f(x), f \in A\}$  est relativement compact.

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les parties compactes sont exactement les parties fermées et bornées. Dans un espace vectoriel topologique séparé, les parties relativement compactes restent bornées, mais la réciproque est fausse.

**Définition 1.1.12.** Un sous-ensemble  $A$  d'un espace vectoriel normé  $E$  est dit

1. Affine si et seulement si :

$$\forall x, y \in A, \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{R}, ; (1 - \lambda)x + \lambda y \in A.$$

2. Convexe si et seulement si :

$$\forall x, y \in A, \text{ et } \forall \lambda \in [0, 1], ; (1 - \lambda)x + \lambda y \in A.$$

Autrement dit, un ensemble est affine (resp. convexe) s'il contient une droite (resp. tout segment) passant par deux de ses points.

**Définition 1.1.13.** Soit  $A \subset \mathcal{X}$ . L'intersection de tous les convexes contenant  $A$  est un convexe et c'est le plus petit convexe contenant  $A$ . On l'appelle l'enveloppe convexe de  $A$  et on le note  $\text{conv}A$ . On dit que l'enveloppe convexe et fermée de l'ensemble  $\Omega$  est le plus petit convexe et fermé contenant  $\Omega$  i.e.

$$\text{Conv}A = \left\{ x \in \mathcal{X} : x = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i, n \in \mathbb{N}, a_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

**Définition 1.1.14.** On dit qu'une fonction  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  est Lipschitzienne, s'il existe une constante  $k \geq 0$  telle que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|$$

pour tout  $x, y \in \mathcal{X}$ .

- La plus petite valeur  $k$  satisfaisant cette propriété pour la fonction  $f$  est appelée la constante de Lipschitz.
- Si  $k > 1$ , la fonction  $f$  est dite non-expansive.
- Si  $k < 1$ , la fonction est dite contraction.

**Proposition 1.1.1.** *Toute fonction Lipschitzienne est continue*

**Remarque 1.1.1.**

- Une application non-expansive n'admet pas nécessairement un point fixe, par exemple, l'opérateur de translation dans un espace de Banach  $x \mapsto x + v$  pour  $v$  non identiquement nulle.
- Le point fixe d'une application non-expansive n'est pas nécessairement unique (exemple l'identité).

**Théorème 1.1.3** (Convergence dominée de Lebesgue [80]).

Soit  $\mathcal{X}$  un espace de Banach. Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'opérateurs de  $\mathcal{X}$  dans lui-même, telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n \in L^1(\mathcal{X}, \mathcal{X})$  et soit  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ . On suppose que :

1. La suite  $(f_n(x))_n$  converge vers  $f(x)$  pour presque tout  $x \in \mathcal{X}$
2. Il existe une fonction  $g \in L^1(\mathcal{X}, \mathbb{R})$  telle que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\|f_n(x)\| \leq g(x)$ , pour presque tout  $x \in \mathcal{X}$ .

Alors

$$f \in L^1(\mathcal{X}, \mathcal{X}) \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\mathcal{L}^1} = 0.$$

**Définition 1.1.15** (Applications compactes). Soient  $\mathcal{X}$  un espace de Banach et  $\Omega \subset \mathcal{X}$ ,  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  une application.

- On dit que  $f$  est compacte si  $f(\bar{\Omega})$  est compact
- L'application  $f$  est dite totalement bornée si  $f(A)$  est relativement compacte pour tout sous ensemble borné  $A$  de  $\mathcal{X}$
- L'application  $f$  est dite complètement continue si  $f$  est continue et totalement bornée.

**Remarque 1.1.2.** *Toute application continue et compacte est complètement continue. La réciproque est vraie si elle est bornée.*

**Définition 1.1.16** (Fonction de Carathéodory). Soit  $X$  un espace de Banach. Une fonction  $f : I \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  est dite de Carathéodory si :

1. La fonction  $t \mapsto f(t, x)$  est mesurable sur  $I$ ,  $\forall x \in \mathcal{X}$
2. La fonction  $x \mapsto f(t, x)$  est continue pour presque tout  $t \in I$   
Si de plus la fonction  $f$  vérifie la condition suivante :
3.  $\forall r > 0$ ,  $\exists h \in L^1(I, \mathbb{R})$  tel que  $|f(t, x)| \leq h(t)$ , p.p  $t \in I$  et  $\forall x : |x| \leq r$ ,  $f$  est dite  $\mathcal{L}^1$ -Carathéodory.

## 1.2 Rappels sur les espaces de Hilbert

Soit  $\mathbb{Y}$  un espace vectoriel sur le corps des réels (en abrégé, un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel). Un produit scalaire sur  $\mathbb{Y}$  est une application

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{Y} \times \mathbb{Y} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

telle que

- (S1) Pour tout  $y \in \mathbb{Y}$  fixé,  $\langle \cdot, y \rangle$  est linéaire ;
- (S2) Pour tous  $x, y \in \mathbb{Y}$ ,  $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$  ;
- (S3) Pour tout  $x \in \mathbb{Y}$ ,  $\langle x, x \rangle \leq 0$  et  $\langle x, x \rangle = 0$  si et seulement si  $x = 0$ .

La paire  $(\mathbb{Y}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est appelée espace préhilbertien réel.

**Définition 1.2.1.** *Un espace de Hilbert est un espace pré-hilbertien complet.*

On peut citer, en guise d'exemple, quelques espaces de Hilbert :

1.  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire euclidien est un espace de Hilbert réel ;
2.  $\mathbb{C}^n$  muni du produit hermitien usuel est un espace de Hilbert complexe ;
3.  $l(\mathbb{R})^2$ , l'espace des suites réelles de carré sommable, muni du produit scalaire  $\langle x, y \rangle := \sum_{j \in \mathbb{N}^*} x_j y_j$ , est un espace de Hilbert réel ;
4.  $l(\mathbb{C})^2$ , l'espace des suites complexes de carré sommable, muni du produit hermitien  $\langle x, y \rangle := \sum_{j \in \mathbb{N}^*} x_j \bar{y}_j$ , est un espace de Hilbert complexe.

### 1.2.1 Bases hilbertiennes, séparabilité

La notion de base orthonormale est familière lorsque l'on parle des espaces  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{C}^n$  (munis de leurs produits scalaire et hermitien usuels). Nous allons étendre cette notion aux espaces de Hilbert généraux. Soit  $(\mathbb{Y}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien quelconque. Une famille  $(e_j)_{j \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{Y}$  est dite orthogonale lorsque toute sous famille finie de  $(e_j)$  est orthogonale. De même,  $(e_j)$  est dite orthonormale lorsque toute sous-famille finie de  $(e_j)$  est orthonormale.

**Définition 1.2.2.** [22] *Une suite orthonormée  $(e_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$  dans un espace de Hilbert  $\mathbb{Y}$  est appelée une base hilbertienne, ou encore une suite totale, si*

- $\forall i, j, (e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- *Le sous espace engendré par la famille  $(e_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$  est dense dans  $\mathbb{Y}$ .*

**Proposition 1.2.1.** [22] Si  $(e_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$  est une base hilbertienne de  $\mathbb{Y}$ , alors tout  $x \in \mathbb{Y}$  s'écrit de manière unique sous la forme  $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j$  avec  $x_i = \langle e_j, x \rangle$ ,  $x_i \in \mathbb{C}$ . De plus,  $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^2$  (formule de Parseval)

On a les résultats suivants sur l'existence d'une base hilbertienne.

**Définition 1.2.3.** Un e.v.n.  $\mathbb{X}$  est dit séparable s'il admet un sous-ensemble dénombrable dense, c'est-à-dire un sous-ensemble de la forme

$$S := \{x_k / k \in \mathbb{N}^*\}$$

tel que tout  $x \in \mathbb{X}$  est la limite (en norme) d'une suite d'éléments de  $S$ .

**Théorème 1.2.1.** [25] Tout espace de Hilbert séparable possède une base hilbertienne.

**Définition 1.2.4.** Dans un e.v.n.  $\mathbb{X}$ , une famille  $(e_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$  est dite totale lorsque le sous-espace vectoriel qu'elle engendre est dense dans  $\mathbb{X}$ .

**Théorème 1.2.2.** (Théorème de représentation de Riesz) Soit  $l$  une forme linéaire continue sur un espace de Hilbert  $H$ . Alors, il existe un (unique) vecteur  $y_l \in H$  tel que, pour tout  $x \in H$

$$l(x) = \langle x, y_l \rangle.$$

**Théorème 1.2.3.** Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $B_H$  sa boule-unité. Alors  $B_H$  est compacte si et seulement si  $H$  est de dimension finie.

**Théorème 1.2.4.** Dans un e.v.n.  $\mathbb{X}$ , une famille  $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$  est dite totale lorsque le sous-espace vectoriel qu'elle engendre est dense dans  $\mathbb{X}$

Nous allons définir les opérateurs auto-adjoints dans un espace de Hilbert.

**Définition 1.2.5.** Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{Y})$ . On appelle adjoint de  $T$ , l'opérateur  $T^*$ , c'est à dire

$$(Tu, v) = (u, T^*v) \quad \text{pour } u, v \in \mathbb{Y}.$$

Rappelons un théorème de décomposition spectrale des opérateurs compacts auto-adjoints dans un espace de Hilbert.

**Théorème 1.2.5.** [22] Si  $\mathbb{Y}$  est séparable et  $T$  un opérateur compact auto-adjoint sur  $\mathbb{Y}$ , alors  $\mathbb{Y}$  admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de  $T$ .

## 1.2.2 Opérateurs de Hilbert-Schmidt et opérateurs nucléaires

### Opérateurs de Hilbert-Schmidt

Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach,

**Définition 1.2.6.** [22] Soit  $T \in \mathcal{L}(Y)$ . On dit que  $T$  est de Hilbert-Schmidt, s'il existe une base hilbertienne  $(e_i)_{i \geq 0}$  de  $Y$  telle que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|Te_i\|^2 < \infty.$$

La somme précédente est indépendante de la base choisie. Tout opérateur de Hilbert-Schmidt est compact. L'ensemble de tous les opérateurs de Hilbert-Schmidt muni de la norme

$$\|T\|_{\mathcal{HS}} = \left( \sum_{i \geq 1} \|Te_i\|_Y^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.1)$$

est un espace de Hilbert.

**Proposition 1.2.2.** Soit  $T \in \mathcal{L}(Y)$  est de Hilbert-Schmidt, alors son adjoint  $T^*$  est aussi un opérateur de Hilbert-Schmidt.

En effet, on a

$$\sum_{i \geq 1} \|Te_i\|_Y^2 = \sum_{i \geq 1} \|T^*e_i\|_Y^2,$$

ce qui montre que  $\|T\|_{\mathcal{HS}} = \|T^*\|_{\mathcal{HS}}$ .

**Théorème 1.2.6.** (de diagonalisation) Soit  $T \in \mathcal{L}(Y)$  un opérateur de Hilbert-Schmidt auto-adjoint. Alors, il existe une famille orthonormale finie ou infinie dénombrable  $(\phi_i)_{i \in \mathcal{D}}$  composée de valeurs propres de  $T$  telles que  $\lambda_i$  est la valeur propre associée à  $\phi_i$ , et on a

$$Tx = \sum_{i \in \mathcal{D}} \lambda_i \langle x, \phi_i \rangle \phi_i \quad \text{pour tout } x \in Y$$

(série convergente dans  $Y$  si  $\mathcal{D} = \mathbb{N}^*$  et somme ordinaire si  $\mathcal{D}$  est fini). De plus, si l'ensemble  $\{\lambda_i, i \in \mathcal{D}\}$  est infini, on a  $\sum_{i \in \mathcal{D}} \lambda_i^2 < \infty$ .

**Exemple 1.2.1.** 1. (Opérateurs diagonaux) : Soit  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une base hilbertienne de  $H$  et  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite fixée de nombres complexes tels que  $\sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$ . Pour tout  $x \in H$ , posons

$$Tx = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Alors  $T$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt sur  $H$  et pour tout  $n \geq 1$ ,  $Te_n = \lambda_n e_n$  i.e.  $\lambda_n$  est une valeur propre de  $T$  et  $e_n$  un vecteur propre associé. Autrement dit la matrice de  $T$  dans la base hilbertienne  $(e_n)$  est diagonale et sa diagonale est composée des coefficients  $\lambda_n$ .

2. (Opérateurs à noyau) : Soit  $k : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ( $a < b$ ) une fonction continue.

Pour tout  $f \in L^2([a, b])$ , on considère la fonction  $Kf$  définie pour  $t \in [a, b]$  par :

$$Kf = \int_a^b K(t, s)f(s)ds.$$

Alors  $K$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt de l'espace de Hilbert  $L^2([a, b])$  sur lui-même.

**Lemme 1.2.1.** (compacité d'un opérateur de Hilbert-Schmidt) : Si  $T \in \mathcal{L}(H)$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt et  $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée de vecteurs de  $H$ , alors la suite  $(Tx^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  admet toujours une sous-suite convergente.

## Opérateurs nucléaires

Soient  $\mathbb{X}$  et  $\mathbb{Y}$  deux espaces de Banach et soit  $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$  l'espace vectoriel de tous les opérateurs linéaires bornés de  $\mathbb{X}$  dans  $\mathbb{Y}$ . On note  $\mathbb{X}^*$  et  $\mathbb{Y}^*$ , les espaces dual de  $\mathbb{X}$  et  $\mathbb{Y}$  respectivement.

**Définition 1.2.7.** Un élément  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$  est dit un opérateur à trace ou nucléaire s'il existe deux suites  $(y_n)_n \subset \mathbb{Y}$  et  $(\phi_n)_n \subset \mathbb{X}^*$  telles que

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \phi_n(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{X},$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|_{\mathbb{Y}} \|\phi_n\|_{\mathbb{X}^*} < \infty. \quad (1.2)$$

On note  $\mathcal{L}_1(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$  l'espace de tous les opérateurs nucléaires de  $\mathbb{X}$  dans  $\mathbb{Y}$ , muni de la norme

$$\|T\|_{\mathcal{L}_1(\mathbb{X}, \mathbb{Y})} = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|_{\mathbb{Y}} \|\phi_n\|_{\mathbb{X}^*} : T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \phi_n(x), x \in \mathbb{X} \right\},$$

est un espace de Banach. Soit  $\mathbb{Z}$  un autre espace de Banach, il est clair que si  $T \in \mathcal{L}_1(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$  et  $S \in \mathcal{L}_1(\mathbb{Y}, \mathbb{Z})$  alors  $TS \in \mathcal{L}_1(\mathbb{X}, \mathbb{Z})$  et  $\|TS\|_{\mathcal{L}_1(\mathbb{X}, \mathbb{Z})} \leq \|T\|_{\mathcal{L}_1(\mathbb{X}, \mathbb{Y})} \|S\|_{\mathcal{L}_1(\mathbb{Y}, \mathbb{Z})}$ . Soit  $\mathbb{H}$  un espace de Hilbert séparable et soit  $\{e_n\}$  un système orthonormal complet dans  $\mathbb{H}$ . Si  $T \in \mathcal{L}_1(\mathbb{H})$  alors nous définissons

$$\text{Tr}T = \sum_{i=1}^{\infty} \langle Te_i, e_i \rangle$$

**Proposition 1.2.3.** *Si  $T \in \mathcal{L}_1(\mathbb{H})$  alors  $\text{Tr}T$  est un nombre bien défini indépendant du choix de base orthonormale  $\{e_k\}$ .*

**Preuve.** Soit  $\{a_j\} \subset \mathbb{H}$  et  $\{\phi_j\} \subset \mathbb{H}^*$  deux suites telles que

$$Th = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \phi_n(h), \quad h \in \mathbb{H}.$$

et satisfaisant la relation (1.2). Soit  $b_j \in \mathbb{H}$  tel que  $\phi_j(h) = \langle h, b_j \rangle$ . Alors

$$\langle Te_k, e_k \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle e_k, a_j \rangle \langle e_k, b_j \rangle.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle Te_k, e_k \rangle| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, a_j \rangle \langle e_k, b_j \rangle| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, a_j \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, b_j \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| |b_j| < \infty \end{aligned}$$

Puisque

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle Te_k, e_k \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, a_j \rangle \langle e_k, b_j \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle a_j, b_j \rangle,$$

la définition de  $\text{Tr}T$  est indépendante de la base  $\{e_k\}$

□

On note aussi que

$$|\text{Tr}T| \leq \|T\|_{\mathcal{L}_1(\mathbb{H})} \quad (1.3)$$

**Proposition 1.2.4.** *Un opérateur non négatif  $T \in \mathcal{L}_1(\mathbb{H})$  est à trace si et seulement si pour une base orthonormale  $\{e_k\}$  sur  $\mathbb{H}$ , on a*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle Te_i, e_i \rangle < \infty.$$

De plus dans ce cas  $|\text{Tr}T| = \|T\|_{\mathcal{L}_1(\mathbb{H})}$ .

### 1.3 Mesure de non compacité

Le degré de non compacité d'un ensemble est mesuré à l'aide de fonctions appelées mesures de non compacité. La mesure de non compacité est un outil très utile dans les espaces de Banach. Elle a été introduite pour la première fois par Kuratowski [82] en 1930 et est devenue très utile dans la théorie du point fixe, dans l'étude des équations différentielles et fonctionnelles, les équations intégrales et intégrodifférentielles, l'optimisation, etc. Il existe

plusieurs notions de mesure de non compacité mais dans cette section, nous donnons une notion générale sur la mesure de non compacité avant de s'intéresser à la mesure de non compacité de Hausdorff, celle qui nous servira à étudier les systèmes des chapitres 2 et 4. Considérons  $\mathcal{X}$  est un espace de Banach muni de la norme  $\|\cdot\|$ . On note par  $\mathcal{A}$  la famille de tous les sous-ensembles bornés non vides de  $\mathcal{X}$  et par  $\mathcal{N}_{\mathcal{X}}$  sa sous-famille constituée de tous les ensembles relativement compacts.

### 1.3.1 Notion générale sur la mesure de non compacité

**Définition 1.3.1.** Soit l'application  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty[$ . On dit que  $\mu$  est une mesure de non compacité (MNC en abrégé) dans l'espace de Banach  $\mathcal{X}$ , si elle satisfait les conditions suivantes :

- (i) La famille  $\text{Ker}\mu(A) = \{A \in \mathcal{A} \text{ telle } \mu(A) = 0\}$  est non vide et  $\text{ker}(\mu) \subset \mathcal{N}_{\mathcal{X}}$  ;
- (ii)  $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$  pour tout  $A, B \in \mathcal{A}$  ;
- (iii)  $\mu(A) = \mu(\bar{A}) = \mu(\text{Conv}A)$ ,  $\forall A \in \mathcal{A}$  ;
- (iv)  $\mu((1-\lambda)A + \lambda B) \leq (1-\lambda)\mu(A) + \lambda\mu(B)$ , pour tout  $\lambda \in [0, 1]$  et  $A, B \in \mathcal{A}$  ;
- (v) Si  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'ensembles de  $\mathcal{A}$  telle que  $A_{n+1} \subset A_n$ ,  $\bar{A}_n = A_n (n = 1, 2, \dots)$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$  alors  $A_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$  et  $A_\infty \in \text{Ker}(\mu)$

La famille  $\text{ker}\mu$  décrite dans la condition (i) est appelée le noyau de la mesure de la non compacité  $\mu$ . De la condition (v), on déduit que  $\mu(A_\infty) \leq \mu(A_n)$  pour tout  $n = 1, 2, \dots$ , ce qui implique que  $\mu(A_\infty) = 0$ . Donc  $\mu(A_\infty)$  appartient au noyau décrit dans la condition (i).

**Exemple 1.3.1.** La fonction  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty[$  telle que

$$\phi(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A \text{ est relativement compact} \\ 1, & \text{sinon} \end{cases}$$

est une mesure de non compacité. En effet, les deux premiers points sont évidents. Pour le (iii) on a  $(A_1 \cup A_2)$  est compact si et seulement si  $A_1$  et  $A_2$  sont relativement compacts, donc dans tous les cas on a  $\phi(A_1 \cup A_2) = \max\{\phi(A_1), \phi(A_2)\}$

**Exemple 1.3.2.** La fonction  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty[$  telle que

$$\phi(A) = \begin{cases} \inf_{x \in A} |x|, & \text{si } A \text{ est borné} \\ \infty, & \text{si } A \text{ n'est pas borné} \end{cases}$$

n'est pas une mesure de non compacité. En effet, soient  $A_1$  et  $A_2$  deux ensembles bornés de  $\mathbb{R}$  avec  $A_1 \subset A_2$ . D'une part on a

$$\phi(A_1 \cup A_2) = \phi(A_2).$$

D'autre part, on a  $A_1 \subset A_2 \implies \inf_{x \in A_2} |x| \leq \inf_{x \in A_1} |x|$ . Par suite  $\max\{\phi(A_1), \phi(A_2)\} = \phi(A_1)$  donc la troisième propriété n'est pas vérifiée.

On distingue quelques classes importantes de la mesure de non compacité [13].

**Définition 1.3.2.** Soit  $\mu$  une mesure de non compacité dans un espace de Banach  $\mathcal{X}$ . On dit que  $\mu$  est :

(vi) homogène si  $\mu(\lambda A) = |\lambda| \mu(A)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$

(vii) sous-additive si  $\mu(A + B) \leq \mu(A) + \mu(B)$

(viii) sous-linéaire si elle est à la fois homogène et sous-additive

**Définition 1.3.3.** On dit que  $\mu$  admet la propriété de maximum si

(ix)  $\mu(A \cup B) = \max\{\mu(A), \mu(B)\}$

### 1.3.2 Mesure de non compacité de Hausdorff

Elle est très utilisée dans la théorie des points fixes, donnant des résultats d'existence ou de stabilité des équations différentielles.

**Définition 1.3.4.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique, et  $Q$  un sous ensemble borné de  $X$ . La mesure de non compacité de Hausdorff de  $Q$  noté par  $\chi(Q)$ , est la borne inférieure de l'ensemble de tous les nombres  $\epsilon \geq 0$  tels que l'ensemble  $Q$  admet un recouvrement fini par des boules de rayon  $r \leq \epsilon$  i.e.

$$\begin{aligned} \chi(Q) &= \inf \{ \epsilon > 0 : Q \subset \cup_{i=1}^n B(x_i, r_i), x_i \in X; r_i < \epsilon (i = 1, \dots, n); n \in \mathbb{N} \} \\ &= \inf \{ \epsilon > 0 : Q \text{ admet un recouvrement fini par des boules de rayon } \leq \epsilon \} \end{aligned}$$

La fonction  $\chi$  est appelée la mesure de non compacité de Hausdorff.

**Remarque 1.3.1.** Dans le cas où  $Q$  est un sous-ensemble non vide et non borné, alors  $\chi(Q) = \infty$ .

La mesure de Hausdorff ainsi définie satisfait les propriétés données par le lemme suivant :

**Lemme 1.3.1.** soient  $Q, Q_1$  et  $Q_2$  des sous-ensembles bornés d'un espace métrique  $(\mathcal{X}, d)$ . Alors

1.  $\chi(Q) = 0$  si et seulement si  $\bar{Q}$  est compact (régularité)
2.  $\chi(Q) = \chi(\bar{Q})$  (Invariance au passage de la fermeture)
3.  $Q_1 \subset Q_2 \implies \chi(Q_1) \leq \chi(Q_2)$  (monotonie)
4.  $\chi(Q_1 \cup Q_2) = \max\{\chi(Q_1), \chi(Q_2)\}$  (propriété maximum)

5.  $\chi(Q_1 + Q_2) \leq \chi(Q_1) + \chi(Q_2)$  (*sous-additivité*)
6.  $\chi(Q + x) \leq \chi(Q)$ ,  $\forall x \in \mathbb{X}$  (*invariance par translation*)
7.  $\chi(\lambda Q) \leq |\lambda| \chi(Q)$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$  (*semi-homogénéité*)
8. Si  $f : D(f) \subseteq \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Z}$  est  $\kappa$ -Lipschitz continu, alors  $\chi_{\mathbb{Z}}(fU) \leq \kappa \chi_{\mathbb{Z}}(U)$  pour tout sous ensemble borné  $U \subseteq D(f)$ ;
9.  $\chi(Q) = \chi(\text{conv}(Q))$ ,  $\forall x \in \mathbb{X}$  (*invariance par passage d'enveloppe convexe*)

**Définition 1.3.5.** Une application  $f : Q \subseteq \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$  est une  $\chi_{\mathbb{Y}}$ -contraction s'il existe une constante  $0 < \kappa < 1$  telle que  $\chi_{\mathbb{Y}}(f(U)) \leq \kappa \chi_{\mathbb{Y}}(U)$  pour tout sous ensemble fermé  $U \subseteq Q$ , où  $\mathbb{Y}$  est un espace de Banach.

**Lemme 1.3.2.** [20] Si  $Q$  est borné, alors pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe une suite  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Q$  telle que  $\chi(Q) \leq 2\chi(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) + \epsilon$ .

## 1.4 Rappels sur quelques équations fonctionnelles

Une équation fonctionnelle est une équation dont l'inconnue est une fonction. Dans cette section, nous rappelons les éléments de bases sur les différents types d'équations qui apparaissent dans cette thèse. Il s'agira d'équations différentielles ordinaires (EDO), d'équation intégrodifférentielles, d'équations différentielles impulsives, d'équations différentielles à retard et d'équations différentielles non locales.

### 1.4.1 Définitions et généralités

Soit  $J$  un intervalle d'intérieur non vide de  $\mathbb{R}$ ,  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  avec  $n \geq 1$ . Si  $x$  est une fonction d'une variable réelle positive  $t$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  dérivable, nous noterons par  $x'(t)$  sa dérivée par rapport à  $t$ . Dans notre travail, nous nous intéresserons seulement aux équations différentielles du 1er ordre.

**Définition 1.4.1** (Équation différentielle). Soit  $F : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction.

On appelle équation différentielle du premier ordre associée à  $F$  l'équation suivante :

$$x'(t) = F(t, x(t)). \quad (1.4)$$

L'inconnue de cette équation est une fonction d'une seule variable et l'équation traduit une relation entre l'inconnue (notée ici  $x$ ), sa variable (notée ici  $t$ ) et sa dérivée première ( $x'$ ).

Lorsque la fonction  $F$  ne dépend pas explicitement de  $t$  i.e. si  $F$  est défini sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , on dit que l'équation (1.4) est autonome, dans le cas contraire, on dit qu'il est

non autonome. De plus, si  $F$  est affine, i.e.  $F(t, x) = A(t)x + B(t)$ , avec  $A(t) \in M_n(\mathbb{R})$  et  $B(t) \in \mathbb{R}^n$  pour tout  $t \in J$ , on dit que c'est une équation différentielle linéaire.

**Définition 1.4.2** (Solution locale). *Une solution locale de (1.4) est la donnée d'un couple  $(J, x)$  où  $J$  est un intervalle d'intérieur non vide de  $\mathbb{R}$  et  $x$  est une fonction de  $J$  à valeur dans  $\mathbb{R}^n$  dérivable sur  $J$  et vérifiant les conditions suivantes :*

- (i)  $(t, x(t)) \in J \times \Omega$  pour tout  $t \in J$
- (ii)  $x' = F(t, x(t))$  pour tout  $t \in J$

**Définition 1.4.3** (Prolongement de solutions).

*Soient  $(J_1, x_1)$  et  $(J_2, x_2)$  deux solutions de (1.4).  $(J_2, x_2)$  est un prolongement de  $(J_1, x_1)$  si  $J_1 \subset J_2$  et pour tout  $t \in J_1$ ,  $x_2(t) = x_1(t)$ .*

**Définition 1.4.4** (Solution maximale). *Une solution  $(J, x)$  de (1.4) est maximale si elle n'admet aucun prolongement  $(J_0, x_0)$  avec  $J$  inclus strictement dans  $J_0$ .*

**Définition 1.4.5.** *Soit  $F : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  vérifiant  $x' = F(\cdot, x)$ .  $(J, x)$  est solution globale de (1.4) si c'est une solution définie sur  $J$  tout entier.*

Dans les problèmes concrets faisant intervenir des équations différentielles, comme en dynamique de population, on connaît l'état du système initialement, et on veut montrer que la solution de l'équation différentielle vérifie cette condition initiale. Ces types de problèmes sont appelés problème de Cauchy, et sont définis de la manière suivante :

**Définition 1.4.6** (Problème de Cauchy). *Étant donné un point  $(t_0, x_0) \in J \times \Omega$ , le problème de Cauchy consiste à trouver une solution  $(J, x)$  de (1.4) telle que  $t_0 \in J$  et  $x(t_0) = x_0$ .*

Résoudre un problème de Cauchy, revient donc à chercher toutes les fonctions définies sur un intervalle  $J \subset \mathbb{R}$ , qui satisfont l'équation et qui vérifient la condition initiale.

## 1.4.2 Introduction aux équations différentielles à retard

Les équations à retard sont souvent plus réalistes pour décrire des phénomènes naturels comparés à eux-mêmes sans le retard. Nous présentons quelques informations utiles à ce sujet. Pour plus de détails, on renvoie le lecteur aux monographies [128]

### Historique des équations différentielles à retard

Après la Première Guerre mondiale, l'utilisation de systèmes de contrôle a conduit à étudier une classe complètement différente de celle des équations différentielles ordinaires ; ces équations sont appelées équations différentielles à retard (EDR). Ces équations décrivent

l'évolution ( $x'$ ) d'un phénomène en fonction de son état dans le passé  $x(t-r)$ , ( $r$  un nombre réel strictement positif que l'on appelle le retard). Les équations à retard ont été introduites pour modéliser des phénomènes dans lesquels il y a un décalage temporel entre l'action sur le système et la réponse du système à cette action. Le retard est rencontré naturellement en biologie, physiologie, économie, dynamique des populations, chimie, etc.

Les équations à retard interviennent dans de nombreux domaines d'applications des mathématiques et en particulier en biologie.

## Définitions et classifications des équations différentielles à retard

L'ensemble de solutions d'une équation différentielle linéaire à retard sont de dimension infinie contrairement aux équations différentielles ordinaires sans retard. La condition initiale d'une équation à retard est définie sur un intervalle de longueur dépendant du retard.

Soit  $r > 0$ , un réel donné,  $t_0 \in \mathbb{R}$ . On note par  $C := C([t_0 - r, t_0], \mathbb{R})$  l'espace de Banach des fonctions continues définies sur l'intervalle  $[t_0 - r, t_0]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , muni de la norme de la convergence uniforme  $\|\cdot\|$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

**Définition 1.4.7.** On appelle *équation différentielle à retard*, une équation de la forme

$$x'(t) = f(t, x(t), x_t), \quad t \geq t_0, \quad (1.5)$$

où  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue,  $x_t(s) = x(t+s)$ ,  $s \in [t_0 - r, t_0]$ . Le nombre  $r$  est appelé le retard; le cas  $r = 0$  correspond au cas des équations différentielles ordinaires.

**Définition 1.4.8.** Une condition initiale pour l'équation (1.5) est donnée par la fonction :

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [t_0 - r, t_0]$$

où  $\varphi \in C$ .

**Définition 1.4.9.** On dit que  $x$  est une solution de l'équation (1.5) s'il existe  $\alpha > 0$  tel que

- $x$  définie et continue sur  $[t_0 - r, t_0 + \alpha]$ ,
- $x$  dérivable sur  $[t_0, t_0 + \alpha[$  et satisfait l'équation (1.5) sur  $[t_0, t_0 + \alpha[$ .

Les équations fonctionnelles à retard peuvent être classées comme linéaires ou non linéaires, autonomes ou non autonomes, périodiques ou non, ou encore selon les types de retards. Dans ce paragraphe, on s'intéresse à donner une classification des EDR selon les types de retards cités dans la littérature où on distingue deux classes principales. La première est dite «d'équations différentielles retardées» et la seconde «d'équations différentielles de type neutre» .

### 1. Équations différentielles retardées

Dans cette première classe, on trouve les sous catégories suivantes :

- Équations différentielles à retard constant sous leur forme la plus simple, les équations différentielles à retard constant, discret ou ponctuel s'écrivent comme suit :

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)),$$

où  $f$  est donnée et  $\tau$  est une constante positive. À titre d'exemple, nous trouvons ce type d'équations dans le modèle des mouches de Nicholson [110]

- **Équations différentielles à retard variable** : Le retard dans ce cas varie dans la variable temporelle ou bien dépendant de l'état. À titre d'exemples, on trouve les équations différentielles à retard dépendant du temps dans les modèles de transport et celles qui dépendent de l'état dans le modèle décrivant l'évolution d'une population de poissons dont les larves consomment une nourriture [6] ou le problème de deux corps en électrodynamique classique [39, 38, 40]

## 2. Équations à retard variant dans le temps

Elles se mettent sous la forme simplifiée suivante :

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t))),$$

où  $f$  est donnée.

3. **Équations à retard variable dépendant de l'état** Sous leur forme la plus simple, ces équations s'écrivent comme suit :

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(x(t)))),$$

où  $f$  est donnée.

Selon le problème à modéliser, on peut rencontrer d'autres types d'équations à retard.

- **Équations à retard variable arbitraire** : le retard et sa dérivée ne sont pas limités
- **Équations à retard majoré** : cette sous-catégorie suppose la connaissance d'une valeur maximale sur le retard telle que :

$$0 \leq \tau \leq \tau_{\max}.$$

Si  $\tau(t) = \tau$  est constant, il reste en pratique incertain, et la contrainte ci-dessus assure un intervalle borné. Ce type de retard a été très largement abordé dans la littérature.

- **Équations différentielles à retard de type neutre (EDN)**

Ces Équations notées en abrégé EDN, se différencient des EDR par le fait que la dérivée de l'état au temps actuel dépend non seulement des valeurs de l'état passé, mais aussi de la dérivée d'ordre le plus élevé intervenant dans l'équation du temps passé. En écriture simplifiée, ces équations sont sous la forme :

$$\frac{d}{dx}[Dx(t - \tau(t))] = f(t, x(t), x(t - \tau(t))),$$

où  $f$  est donnée et  $\mathcal{D}$  est un opérateur.

- **Équations différentielles à retard distribué** : Ce type d'équations a été traité dans la littérature pour la conception d'observateurs pour des systèmes non linéaires ; pour prouver la stabilité des systèmes linéaires de type neutre ; la stabilisation robuste des systèmes neutres incertains et la commande robuste. Sous leur forme la plus simple, ces équations s'écrivent comme suit :

$$x'(t) = -\alpha x(t) - \beta \int x(t-a) d\eta,$$

Par exemple, la chauve souris, à la chasse, étant aveugle, elle émet des sons, pour utiliser les parois des grottes, afin de localiser sa proie. L'écho obtenu par le rebondissement de ces cris représente le retard qui dépend de l'état, qui est le prédateur. On trouve ce type d'équations aussi dans le modèle de sida [109] ou le modèle de dynamique des populations présenté par Volterra en 1934 où il a utilisé un terme de retard distribué pour examiner un effet cumulatif sur le taux de mortalité d'une espèce.

## Concept de solution

Il existe une nette différence entre les solutions d'une EDO et d'une EDR. Par exemple, l'EDR suivante :

$$\dot{u}(t) = \frac{\pi}{2} u(t-r), \quad \text{pour } r \geq 0 \quad (1.6)$$

est une EDO si  $r = 0$ . Pour déterminer une solution explicite sur un intervalle  $[0, \beta]$ , il suffit dans ce cas de donner une condition initiale au point  $t = 0$ . Supposons à présent que  $r > 0$ . On aimerait donner une notion de solution pour cette équation sur l'intervalle  $[0, \beta]$ , où  $\beta > r$ . Pour déterminer une solution au temps antérieur à  $t = 0$ , nous avons besoin de donner une valeur au temps  $-r$ . Mais, nous pouvons constater qu'il n'est pas suffisant de donner une valeur au point  $-r$ , puisque pour  $r = 1$ , l'équation (1.6) admet comme solutions les fonctions

$$t \mapsto \sin\left[\frac{\pi}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right)\right] \quad \text{et} \quad t \mapsto \cos\left[\frac{\pi}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right)\right]$$

qui coïncident au temps  $t = 0$ . Cette condition n'est donc pas suffisante pour déterminer complètement la solution. D'autre part, pour  $0 \leq t < r$ , nous avons  $t - r < 0$  et ainsi la partie de droite de cette équation n'est pas définie. Cette difficulté peut être contournée de deux manières :

1. On considère comme solution, une fonction qui satisfait (1.6) pour  $t \in [0, \beta]$ . Et pour  $t - r < 0$ , on assume que  $s(t-r) = \varphi(t-r)$  où  $\varphi$  est une fonction donnée définie sur  $[-r, 0]$ .

2. On interprète une solution de (1.6) sur  $[0, \beta]$  comme une fonction définie sur cet intervalle, mais qui satisfait (1.6) seulement pour  $r \leq t \leq \beta$ .

Bien entendu, dans ces deux approches, nous devons aussi indiquer, comme dans le cas des EDO, la classe des fonctions pour laquelle une solution est choisie et dans quel sens l'équation est satisfaite : partout, presque-partout, etc. En substance, ces deux approches sont équivalentes. Le passage de la première à la seconde est fait par extension de la solution  $u$  par la fonction initiale  $\varphi$ . Inversement, pour une solution  $u : [0, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  dans le sens de la deuxième définition, la restriction de  $u$  sur  $[r, \beta]$  est une solution dans le premier sens pour une fonction initiale  $\varphi$  qui est égale à la restriction de  $u$  sur  $[0, +r]$ . Ainsi, le choix de l'une des approches au détriment de l'autre est lié considérablement au point de vue particulier : soit la fonction initiale est un objet indépendant ou alors une partie de la solution. A cause des limitations sur les systèmes physiques (par exemple les processus de contrôle), les fonctions initiales ne peuvent pas être quelconques, car étant soumises généralement à un certain nombre de contraintes. Nous considérons ici la première approche. Autrement dit, nous choisissons une fonction comme condition initiale sur un intervalle de longueur, le retard. Sauf pour quelques considérations techniques, les notions de solutions pour une équation à retard de type neutre sont les mêmes que celles des systèmes à retard.

## Axiomes sur l'espace de phase

L'objectif principal de cette partie est de traiter les équations différentielles fonctionnelles à retard infini sur un espace abstrait caractérisé par plusieurs axiomes qui sont satisfaits par différentes sortes d'espaces de fonctions.

### Historique

La première approche d'axiomatisation pour les équations à retard infini a été donnée par Coleman et Mizel [31, 32]. La norme typique que les auteurs avaient utilisée n'assumait pas la continuité de la partie de droite. Pour remédier à ce problème, Hale [53] a introduit quelques nouveaux axiomes. Des contributions à ces axiomes ont été apportées par Hino [60, 61] et Natio [107, 108]. De plus Hale et Kato [57] et Schumacher [124, 125] ont donné plus de développement systématique à ce sujet. Indépendamment, d'autres papiers sur le sujet ont été publiés par plusieurs auteurs dont Hale [55, 56], Hino et Murakami [62], Hino et Yoshizawa [64], Kaminogo [71], Kappel et Schappacher [72], Kato [73]-[74], Mukarami [104, 105], Mukarami et Natio [106], Sawono [122], Kolmanovskii et Myshikis [75], H. O. Peitgen et H. O. Walther [116].

### Axiomes

Soient  $0 < r \leq \infty$  une constante donnée,  $A > 0$  et  $u : [\sigma - r, \sigma + A] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction

donnée et  $u_t : [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par  $u_t(\sigma) = u(t + \sigma)$  pour tout  $t \in [\sigma, \sigma + A]$  et  $-r \leq \sigma \leq 0$ . Considérons la forme générale d'une équation différentielle à retard suivante :

$$\dot{u}(t) = F(t, u_t) \quad \text{pour } t \geq 0, \quad (1.7)$$

où  $F(t, \varphi)$  est définie pour tout  $t \geq 0$  et  $\varphi$  dans un espace de fonctions définies de  $[-r, 0]$  à valeurs dans un espace de Banach  $\mathbb{X}$ . Cet espace est appelé espace des données initiales, espace des états, ou encore espace de phase. Supposons que pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$  et  $\varphi$  pris dans un espace de phase, le problème (1.7) admet une solution bien définie notée  $u(t, \varphi, f)$ ,  $t \geq \sigma - r$ ,  $u(\theta + \sigma) = \varphi(\theta)$ ,  $\theta \in [-r, 0]$  et  $u_t$  un élément de l'espace de phase. Alors, puisque la dynamique du système est régie par le terme  $u_t$ , le problème basique est de discuter des propriétés de la fonction  $t \mapsto u_t$ .

Dans le cas de retard fini ( $r < \infty$ ), la plupart des propriétés de la fonction  $t \mapsto u_t$  ne sont pas aussi sensibles à l'espace de phase si on définit une solution de (1.7) passant par  $(\sigma, \varphi)$  de manière naturelle comme une extension continue à droite de cet espace au point  $t = \sigma$  par la relation (1.7). Après un retard d'intervalle  $r$ ,  $u_t$  reste dans l'espace  $\mathcal{C}$  des fonctions continues de  $[-r, 0] \rightarrow \mathbb{X}$  pris comme espace de phase qu'on munit de la norme de la convergence uniforme :

$$\|\varphi\|_{\mathcal{C}} = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)| \quad \text{pour } \varphi \in \mathcal{C}.$$

Ainsi, il est suffisant, dans la plupart des problèmes, de considérer l'équation (1.7) sur l'espace de phase  $\mathcal{C}$  des fonctions continues. On admet également souvent les espaces  $\mathbb{L}^p(\mathbb{X})$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

Mais, lorsque le retard est infini ( $r = \infty$ ), le comportement qualitatif de l'opérateur solution  $t \mapsto u_t(\theta) = u(t + \theta)$  pour  $-\infty \leq \theta \leq 0$ , dépendra toujours de l'espace des données initiales. Il devient ainsi important de comprendre, d'une manière abstraite, les propriétés de l'espace de phase qui permettront le développement de la théorie fondamentale d'existence, d'unicité, de dépendance continue, de régularité, etc. Le choix de l'espace de phase devient donc crucial pour l'étude du comportement de la solution du système (1.7). Une large variété d'espaces de phase est utilisée dans la théorie des équations différentielles fonctionnelles avec retard infini [54, 63]. Le choix usuel est un espace normé satisfaisant une suite d'axiomes qui a été introduit pour la première fois en 1978 par Hale et Kato [57] et largement discutée par Hino et al.[63]. Dans cette thèse, nous utilisons la théorie de Hale et Kato [57] pour les équations différentielles fonctionnelles basées sur un espace de données initiales qui satisfait quelques axiomes très raisonnables.

Spécialement,  $\mathcal{B}$  sera un espace linéaire de fonctions définies de  $[-\infty, 0]$  à valeurs dans

l'espace de Hilbert  $\mathcal{X}$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$  qui sera spécifié au chapitre 4. Il satisfait les axiomes suivants, qui sont établis pour des fonctions mesurables :

(**ai**) si  $x : ]-\infty, a[ \rightarrow \mathcal{X}$ ,  $a > 0$ , est continue sur  $[0, a[$  et  $x_0$  sur  $\mathcal{B}$ , alors pour tout  $t \in [0, a[$  on a les conditions suivantes :

(a)  $x_t \in \mathcal{B}$ ,

(b)  $\|x(t)\| \leq L\|x_t\|_{\mathcal{B}}$ ,

(c)  $\|x_t\|_{\mathcal{B}} \leq \Gamma(t) \sup\{\|x(s)\| : 0 \leq s \leq t\} + N(t)\|x_0\|_{\mathcal{B}}$ , où  $L > 0$  est une constante ;  $\Gamma, N : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$ ,  $\Gamma$  est continue,  $N$  est localement bornée, et  $L, \Gamma, N$  sont indépendants de  $x(\cdot)$ .

(**aii**) pour la fonction  $x(\cdot)$  dans (**ai**),  $x_t$  est une fonction définie de  $[0, a[$  dans  $\mathcal{B}$ .

(**aiii**) l'espace  $\mathcal{B}$  est complet.

La fonction  $x$  dans (**ai**) est parfois appelée une fonction admissible de  $\mathcal{B}$  dans  $[0, a[$ .

### 1.4.3 Équations différentielles fonctionnelles Impulsives

Pour mieux comprendre l'effet des impulsions dans cette thèse, nous survolons, (sans rentrer dans les détails) dans cette sous section les notions de base sur les équations différentielles impulsives.

Une équation impulsive est définie par une équation différentielle, qui caractérise l'évolution d'un système entre deux impulsions, un critère d'impulsion, qui détermine le moment où les impulsions se produisent, et un ensemble de fonctions d'impulsions, qui définit l'effet des impulsions sur le système. On définit ces équations à partir des équations différentielles ordinaires auxquelles on ajoute une condition d'impulsion. Elles se présentent donc sous la forme

$$x'(t) = F(t, x(t)), \text{ pour } t \neq \tau_k$$

$$\Delta x = I_k(x) \text{ pour } t = \tau_k$$

où  $\Delta x = x^+ - y$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , les temps d'impulsions  $\tau_k$  supposés croissants et  $I_k$  est la taille du saut. Ici,  $x^+$  représente la valeur qui suit immédiatement après le changement brusque et en général différent de  $x$ . La théorie des équations différentielles est une nouvelle théorie qui intervient dans plusieurs domaines incluant mécanique, ingénierie, biotechnologie etc. Pour plus de détails concernant la théorie des équations intégrodifférentielles impulsive voir [10, 8, 9] et les références qui y figurent.

#### Classification des équations impulsives

On distingue trois types d'équations différentielles impulsives.

Classe 1 : Équations dont le moment d'impulsion est fixe

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(t, x(t)), \text{ pour } t \neq \tau_k \\ \Delta x &= I_k(x) \text{ pour } t = \tau_k \end{aligned} \quad (1.8)$$

Dans ces équations, les impulsions sont fixées en définissant la suite  $\tau_k : \tau_k < \tau_{k+1}$  ( $k \in K \subset \mathbb{Z}$ ).

Pour  $t \in ]\tau, \tau_{k+1}[$ , la solution  $x(t)$  de l'équation (1.8) (si elle existe) satisfait la relation  $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ , et pour  $t = \tau_k$  satisfait la relation  $x(\tau_k^+) = x(\tau_k^-) + I(x(\tau_k^-))$

Classe 2 : Équations dont le moment d'impulsion dépend de  $x$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(t, x(t)), \text{ pour } t \neq \tau_k \\ \Delta x &= I_k(x) \text{ pour } t = \tau_k(x) \end{aligned} \quad (1.9)$$

où  $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\tau_k < \tau_{k+1}$  ( $k \in K \subset \mathbb{Z}$ ,  $x \in \Omega$ ). L'impulsion se produit lorsque le point  $(t, x)$  de la courbe rencontre une hypersurface  $\sigma_k$  de l'équation  $t = \tau_k(x)$

Classe 3 : Équations impulsives autonomes

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x(t)), \text{ pour } x \in \sigma \\ \Delta x &= I_k(x) \text{ pour } x \in \sigma \end{aligned} \quad (1.10)$$

où  $\sigma$  est une variété de dimension  $(n - 1)$  contenue dans un espace de phase  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ . L'impulsion intervient lorsque la solution  $x(t)$  croise la variété  $\sigma$

## L'espace des fonctions continues par morceaux

Les solutions d'une équation différentielle impulsive sont en général des fonctions continues par morceaux. Alors, l'espace fonctionnel approprié pour de telles solutions est l'espace des fonctions continues par morceaux.

**Définition 1.4.10.** Soit  $\theta = (\theta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels strictement croissante sur  $J = ]t_0, +\infty[$ , telle que

$$|\theta_k| \rightarrow \infty \text{ quand } k \rightarrow \infty, \quad k \in \mathbb{N}$$

On dit que la fonction  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  appartient à l'espace  $\mathcal{PC}(J, \mathbb{R})$  si

- $f$  est continue sur chaque intervalle  $]\theta_k, \theta_{k+1}[$ .
- $f$  possède une limite à droite  $f(\theta_k^+) = \lim_{t \rightarrow \theta_k^+} f(t)$  et la limite à gauche  $f(\theta_k^-) = \lim_{t \rightarrow \theta_k^-} f(t)$  existe telle que  $f(\theta_k^-) = f(\theta_k)$ .

De même,  $f$  est dite dans l'espace  $\mathcal{PC}^1(J, \mathbb{R})$  si  $f$  et  $f'$  appartiennent à  $\mathcal{PC}(J, \mathbb{R})$

### 1.4.4 Concept des équations intégrodifférentielles

Les équations intégrodifférentielles sont utilisées pour modéliser de nombreux phénomènes dans plusieurs domaines, notamment en biologie, informatique, physique, mécanique etc.. Les équations intégrodifférentielles sont des équations qui comportent à la fois l'opérateur d'intégration et de dérivation. La forme générale des équations intégrodifférentielles de premier ordre est :

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t) + \lambda \int_{g(t)}^{h(t)} K(t, s)x(s)ds,$$

où  $g(t)$  et  $h$  sont des bords de l'intégrale,  $\lambda$  une constante,  $x$  est la fonction inconnue,  $K(t, s)$  est le noyau de l'intégrale.  $f$  et  $K$  sont données d'avance, mais l'un ou/et les deux bords de l'intégrale  $g(t)$  et  $h(t)$  peuvent être fixés. La fonction  $x(t)$  à déterminer, apparaît sous le signe de l'intégrale et est en relation avec sa dérivée. Ces équations ressemblent aux équations différentielles ordinaires par leurs méthodes de résolutions. Selon la nature des bords, on distingue différents types d'équations intégrodifférentielles.

#### Équation intégrodifférentielle de Fredholm

Les équations intégrodifférentielles de Fredholm interviennent lorsqu'on veut convertir les équations différentielles aux équations intégrales (les équations dans lesquelles la fonction à déterminer apparait sous le signe d'intégration). Dans ce cas, les limites d'intégrations sont fixées, et donc ne dépendent pas de  $t$ . La forme générale de premier ordre est

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s)x(s)ds,$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes.

#### Équation intégrodifférentielle de Volterra

Les équations différentielles de type Volterra sont apparues lorsqu'on cherche à convertir les problèmes de valeurs initiales aux équations intégrales. Dans ces types d'équations, au moins, un des bords d'intégration est une fonction du temps. La donnée d'une condition initiale est primordiale pour déterminer la solution particulière. La forme générale est

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t, s)x(s)ds,$$

où  $a$  est une constante.

**Remarque 1.4.1.** *Dans cette thèse, les équations que nous allons utiliser seront de type Volterra*

## 1.5 Théorie des semi-groupes et d'opérateur résolvant

### 1.5.1 $C_0$ -Semi-groupe

Soit  $\mathcal{X}$  un espace de Banach et  $\mathcal{L}(\mathcal{X})$  l'ensemble des opérateurs linéaires et bornés de  $\mathcal{X}$ .  $\mathcal{L}(\mathcal{X})$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$  définie par

$$\|S\|_{\mathcal{X}} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|S(t)\|,$$

pour tout  $S \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  est un espace de Banach.

**Définition 1.5.1.** Une famille d'opérateurs linéaires bornés  $(S(t))_{t \geq 0}$  sur  $\mathcal{X}$  est un semigroupe sur  $\mathcal{X}$  si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i)  $S(0) = \mathbf{I}$ ;

(ii)  $S(t+s) = S(t)S(s)$ , pour tous  $t \geq 0$  et  $s \geq 0$  (Propriété Semi-groupe);

Si de plus, la condition

$$\lim_{t \rightarrow 0} S(t) = I,$$

dans la topologie uniforme, alors le semigroupe est dit semigroupe uniformément continue.

**Lemme 1.5.1.** Soit  $\mathcal{X}$  un espace de Banach et soit  $A$  un opérateur linéaire borné sur  $\mathcal{X}$ . Alors, la famille  $(S(t))_{t \geq 0}$  d'opérateurs linéaires bornés sur  $\mathcal{X}$  définie par  $S(t) = e^{tA}$  ( $t \geq 0$ ) satisfait la propriété algébrique et est uniformément continue.

**Preuve.**

1.  $S(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$  est un opérateur borné car c'est une limite d'une suite de Cauchy  $U_n = \sum_{k=0}^n \frac{(tA)^k}{k!}$  dans l'espace des opérateurs linéaires bornés  $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ . En effet, soit  $\epsilon > 0$  donné et soient  $m, n \in \mathbb{N}$  avec  $m > n$ . Alors, on a

$$\|U_m - U_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m \frac{(tA)^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{t^k \|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{\|tA\|^k}{k!}$$

car  $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ .

D'autre part, la série  $\sum_{k=n+1}^m \frac{t^k \|A^k\|}{k!}$  converge dans  $\mathbb{R}$  et sa limite est le nombre réel positif  $e^{t\|A\|}$ , le critère de convergence de Cauchy pour les séries convergentes montre en fait qu'il existe  $n_0(\epsilon)$  un entier tel que pour tout  $m, n \geq n_0$ , ( $n < m$ ) on a :

$$\sum_{k=n+1}^m \frac{t^k \|A^k\|}{k!} < \epsilon$$

et par suite

$$\|U_m - U_n\| < \epsilon \text{ pour } m, n \geq n_0 (n < m).$$

Et comme  $\mathcal{L}(\mathbb{X})$  est un espace de Banach, alors  $e^{tA} \in \mathcal{L}\mathbb{X}$  pour tout  $t \in [0, +\infty[$ .

2. (Les conditions de semi-groupe), on a par définition  $e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = Id_{\mathbb{X}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$ , ceci donne  $S(0) = Id_{\mathbb{X}}$ . D'autre part,  $\forall t_1, t_2 \in [0, +\infty[$ , on a

$$S(t_1 + t_2) = e^{(t_1+t_2)A} = e^{t_1A} \cdot e^{t_2A} = S(t_1) \cdot S(t_2)$$

et par suite la propriété algébrique est satisfaite.

Maintenant, on a

$$\|S(t) - Id_{\mathbb{X}}\| = \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} = e^{t\|A\|} - 1,$$

et par suite par passage à la limite, on aura

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow 0} \|S(t) - Id_{\mathbb{X}}\| \leq \lim_{t \rightarrow 0} (e^{t\|A\|} - 1) = 0.$$

Ceci donne que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|S(t) - Id_{\mathbb{X}}\| = 0$$

ce qui prouve le résultat. □

**Définition 1.5.2** ( $C_0$ -semi-groupe). *Un semi-groupe d'opérateurs linéaires  $\{S(t); t > 0\}$  est dit fortement continu (ou  $C_0$ -semi-groupe ou encore semi-groupe) si pour tout*

$$x \in \mathbb{X}, \lim_{t \searrow 0} S(t)x = x.$$

**Remarque 1.5.1.** *On remarque que tout semi-groupe uniformément continu est fortement continu, mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie comme on peut le voir dans l'exemple ci-dessous.*

**Exemple 1.5.1.** *Soit  $\mathbb{X} = \mathcal{C}_{ub}(\mathbb{R}_+)$  espace de toutes les fonctions bornées et uniformément continues et bornées  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$ , muni de la norme  $\|\cdot\|_{\infty}$  et  $\{S(t), t \geq 0\}$  défini par*

$$[S(t)f](s) = f(t + s),$$

*pour tout  $f \in \mathbb{X}$  et  $t, s \in \mathbb{R}$ . En effet, il est trivial de montrer que  $\{S(t); t \geq 0\}$  vérifie les conditions (i) et (ii) de la Définition 1.5.1 et donc, c'est un semi-groupe des opérateurs linéaires. Mieux, de plus,  $\{S(t), t \geq 0\}$  est  $C_0$  semi-groupe mais pas uniformément continu, car s'il était uniformément continu alors, la boule unité serait équicontinue dans  $\mathbb{X}$ , ce qui n'est pas vrai. Donc  $\{S(t), t \geq 0\}$  n'est pas uniformément continu.*

**Théorème 1.5.1.** Soit  $(S(t))_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu sur  $\mathbb{X}$ . Alors, il existe des constantes  $\gamma \geq 0$  et  $M \geq 1$  telles que :

$$\|S(t)\| \leq Me^{\gamma t} \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

**Preuve.** Montrons qu'il existe  $\eta > 0$  tel que  $\|S(t)\|$  est borné pour tout  $0 \leq t \leq \eta$ . Supposons qu'il existe une suite  $(t_n)_n \subset \mathbb{R}^+$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$  et  $\|S(t_n)\| \geq n$ . Du Théorème de Banach-Steinhaus, «Uniform Boundedness Principle», on déduit qu'il existe  $x \in \mathbb{X}$  tel que  $\|S(t_n)x\|$  est non borné. Ce qui contredit la condition de la définition 1.5.2. Par conséquent, il existe  $\eta > 0$  et  $M > 0$  tels que :

$$\|S(t)\| \leq M \quad \text{pour tout } 0 \leq t \leq \eta.$$

Étant donné que  $S(0) = I$ , on a  $M \geq 1$ .

On pose  $\gamma = \frac{\ln(M)}{\eta} \geq 0$ . Soit  $t \geq 0$ , et soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq \delta \leq \eta$  tels que  $t = n\eta + \delta$ . Utilisant les propriétés de semi-groupe, nous avons

$$\|S(t)\| \leq \|S(\delta)\| \|S(\eta)^n\| \leq M^{n+1} \leq MM^{t/\eta} = Me^{\gamma t}.$$

□

- Si  $M = 1$ , alors  $S(t)$  est appelé un semigroupe de pseudo-contraction.
- Si  $\gamma = 0$ , alors  $S(t)$  est appelé uniformément borné, et si  $\gamma = 0$  et  $M = 1$  (i.e,  $\|S(t)\| \leq 1$ ), alors  $S(t)$  est appelé un semigroupe de contractions.
- Si pour tout  $x \in \mathbb{X}$ , application  $t \rightarrow S(t)x$  est différentiable pour  $t > 0$ , alors  $S(t)$  est appelé un semigroupe différentiable.
- Un semigroupe d'opérateurs linéaires  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  est appelé compact si les opérateurs  $(S(t))_{t > 0}$  sont compacts.

**Corollary 1.5.2.** Si  $(S(t))_{t \geq 0}$  est un semi-groupe fortement continu sur  $\mathbb{X}$  alors, pour tout  $x \in \mathbb{X}$ , l'application  $t \mapsto S(t)x$  est continue de  $[0, +\infty[$  dans  $\mathbb{X}$ .

**Preuve.**

(i) Soient  $t, h \geq 0$ , nous avons

$$\|S(t+h)x - S(t)x\| \leq \|S(t)\| \|S(h)x - x\| \leq Me^{\gamma t} \|S(h)x - x\|.$$

On a donc

$$\lim_{h \searrow 0} \|S(h)x - x\| = 0.$$

(ii) Soient  $t > 0$  et  $t \geq h \geq 0$ , nous avons

$$\|S(t-h)x - S(t)x\| \leq Me^{\gamma(t-h)} \|x - S(h)x\|.$$

On conclut avec le résultat montré en (i).

□

**Proposition 1.5.1.** *Si  $(S(t))_{t \geq 0}$  est un semi-groupe uniformément continu d'opérateur linéaire, alors  $S(t)$  est inversible.*

**Preuve.** Par hypothèse, on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0} S(t) - I = 0$$

donc, il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$\|S(t) - I\|_{\mathcal{L}(\mathbb{X})} < 1$$

pour tout  $t \in ]0, \delta]$ . Alors, pour tout  $t \in ]0, \delta]$ ,  $S(t)$  est inversible. Soit  $t > \delta$ . Alors, il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\eta \in ]0, \delta[$  tels que  $t = n\delta + \eta$ . Par conséquent,  $S(t) = S(\delta)^n S(\eta)$  et donc  $S(t)$  est inversible. Ce qui complète la preuve.

□

## 1.5.2 Générateur infinitésimal

Un générateur infinitésimal ou générateur d'un semi-groupe d'opérateurs linéaires  $(S(t))_{t \geq 0}$  est un opérateur  $A : D(A) \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  défini par

$$D(A) = \left\{ x \in \mathbb{X} \mid \text{la limite } \lim_{t \searrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\},$$

et

$$Ax = \lim_{t \searrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \quad \text{pour tout } x \in D(A).$$

On dira tout simplement  $A$  génère  $(S(t))_{t \geq 0}$ .

**Exemple 1.5.2.** *Le générateur du semi groupe de l'Exemple 1.5.1 est*

$$D(A) = \left\{ f \in \mathbb{X} / \exists \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} (f(t + \cdot) - f) = f' \right\}$$

et

$$Af = f' \text{ pour tout } f \in D(A).$$

Il est important de rappeler que ce semi-groupe n'est pas uniformément continu puisque, l'opérateur  $A$  n'est pas borné.

**Remarque 1.5.2.** *Le générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi-groupe est un opérateur linéaire.*

**Théorème 1.5.3.** *Soit  $(S(t))_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu sur  $\mathbb{X}$  et  $(A, D(A))$  son générateur infinitésimal. Les propriétés suivantes sont vérifiées.*

(i) Pour tout  $x \in \mathbb{X}$ , on a

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(s)x ds = S(t)x$$

(ii) Pour tout  $x \in \mathbb{X}$  et tout  $t > 0$ ,  $\int_0^t S(s)x ds$  appartient à  $D(A)$  et

$$A \left( \int_0^t S(s)x ds \right) = S(t)x - x.$$

(iii) Si  $x \in D(A)$  alors  $S(t)x \in D(A)$  et

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

(iv) Si  $x \in D(A)$  alors

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t S(\tau)Ax d\tau = \int_s^t AS(\tau)x d\tau \quad (1.11)$$

**Preuve.**

(i) Soit  $x \in \mathbb{X}$ . Le résultat (i) découle de la continuité de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{X}$  de l'application  $t \mapsto S(t)x$ .

(ii) Utilisant les propriétés de semi-groupe, et le fait que  $S(h) \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$  pour  $h > 0$ , nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \frac{S(h)-I}{h} \int_0^t S(s)x ds &= \frac{1}{h} \int_0^t (S(s+h)x - S(s)x) ds \\ &= \frac{1}{h} \int_h^{t+h} S(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^t S(s)x ds = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^h S(s)x ds. \end{aligned} \quad (1.12)$$

En passant à la limite quand  $h$  tend vers zéro, nous obtenons

$$A \int_0^t S(s)x ds = S(t)x - x.$$

(iii) Soit  $x \in D(A)$  et  $h > 0$ , on a :

$$\frac{S(h)-I}{h} S(t)x = S(t) \frac{S(h)-I}{h} x$$

En passant à la limite quand  $h$  tend vers zéro, nous obtenons :

$$AS(t)x = S(t)Ax = \frac{d^+}{dt} S(t)x.$$

Calculons  $\frac{d^-}{dt} S(t)x - S(t)Ax$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (S(t)x - S(t-h)x) - S(t)Ax &= S(t-h) \frac{S(h)x-x}{h} - S(t)Ax \\ &= S(t-h) \left( \frac{S(h)x-x}{h} - Ax \right) + (S(t-h) - S(t)) Ax. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Nous pouvons facilement établir que :

$$\lim_{h \searrow 0} \|S(t-h) - S(t)\| = 0 \quad \text{pour tout } t > 0,$$

et  $\|S(t-h)\|$  est uniformément borné pour  $h \in [0, t]$ . Par passage à la limite dans l'égalité précédente, nous obtenons :

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} (S(t)x - S(t-h)x) - S(t)Ax = 0,$$

i.e.  $\frac{d^-}{dt} S(t)x - S(t)Ax = 0$ .

(iv) Le résultat s'obtient en intégrant l'identité (iii) entre  $s$  et  $t$ .

□

**Corollary 1.5.4.** *Si  $(A, D(A))$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe  $S(t)_{t \geq 0}$  fortement continu sur  $\mathbb{X}$  alors*

- $D(A)$  est dense dans  $\mathbb{X}$ , et
- $A$  est fermé.

**Preuve.**

- Soit  $x \in \mathbb{X}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $x_n = \frac{1}{n} \int_0^{\frac{1}{n}} S(s)x ds$  d'après l'assertion (ii) du Théorème 1.5.3, on a  $x_n \in D(A)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et, par l'assertion (i) du Théorème 1.5.3, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^{\frac{1}{n}} S(s)x ds = x$$

Ainsi,  $D(A) = X$ .

- Soit  $x_n$  une suite d'éléments de  $D(A)$  telle que  $x_n \rightarrow x$  et  $Ax_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$ . Montrons que  $x \in D(A)$  et que  $Ax = y$ .

Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_n \in D(A)$ , alors d'après la formule (1.11), on a

$$S(t)x_n - x_n = \int_0^t S(s)Ax_n ds, \quad \forall n \in \mathbb{N}, t \geq 0. \quad (1.14)$$

Soit  $t > 0$ . Alors pour tout  $s \in [0, t]$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a

$$\begin{aligned} \|S(s)Ax_n - S(s)y\| &= \|S(s)(Ax_n - y)\| \\ &\leq \|S(s)\| \|Ax_n - y\| \\ &\leq Me^{\gamma t} \|Ax_n - y\| \end{aligned}$$

Donc  $(S(s)Ax_n)_{n > 0}$  converge quand  $n \rightarrow +\infty$  vers  $S(s)y$  uniformément en  $s$  sur  $[0, t]$ .

Il vient alors de l'égalité 1.14 et du théorème d'interversion de la limite et l'intégrale que :

$$S(t)x - x = \int_0^t S(s)y ds.$$

Donc

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t S(s)y ds = y$$

Ainsi  $x \in D(A)$  et  $Ax = y$ .

□

### 1.5.3 Semi-groupes sur un espace de Hilbert

Dans cette section, nous supposons que  $\mathbb{X}$  est un espace de Hilbert.

**Théorème 1.5.5.** *Soit  $(A, D(A))$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe  $(S(t))_{t \geq 0}$  fortement continu sur  $\mathbb{X}$ . Si l'opérateur  $A$  est auto-adjoint<sup>1</sup> alors, pour tout  $x_0 \in \mathbb{X}$ ,  $x(t) = S(t)x_0$  est l'unique solution du problème*

$$\begin{aligned} x &\in C([0, \infty); \mathbb{X}) \cap C((0, \infty); D(A)) \cap C^1((0, \infty); \mathbb{X}), \\ x'(t) &= Ax(t) \quad \text{pour tout } t > 0, \quad x(0) = x_0. \end{aligned}$$

De plus, pour tout  $t > 0$ , on a

$$\|Ax(t)\| \leq \frac{1}{t\sqrt{2}}\|x_0\| \quad \text{et} \quad -(Ax(t), x(t)) \leq \frac{1}{2t}\|x_0\|^2,$$

et

$$\|Ax(t)\|^2 \leq -\frac{1}{2t}(Ax(t), x(t)) \quad \text{si } x_0 \in D(A).$$

**Théorème 1.5.6.** *Soit  $(A, D(A))$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe  $(S(t))_{t \geq 0}$  fortement continu sur  $\mathbb{X}$ . Si l'opérateur  $A$  est anti-adjoint, alors, le semi-groupe  $(S(t))_{t \geq 0}$  s'étend à un groupe  $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$  tel que :*

$$\begin{aligned} \forall x_0 \in \mathbb{X}, S(\cdot)x_0 &\in C(\mathbb{R}; \mathbb{X}), \\ \forall x_0 \in \mathbb{X}, \forall t \in \mathbb{R}, \|S(\cdot)x_0\| &= \|x_0\|, \\ \forall t \in \mathbb{R}, \forall s \in \mathbb{R}, S(s+t) &= S(s)S(t), \end{aligned} \tag{1.15}$$

et pour tout  $x_0 \in D(A)$ ,  $x(t) = S(t)x_0$  vérifie

$$\begin{aligned} x &\in C(\mathbb{R}; D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}; \mathbb{X}), \\ x'(t) &= Ax(t) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \quad x(0) = x_0. \end{aligned} \tag{1.16}$$

### 1.5.4 Théorie de l'opérateur résolvant

Dans cette section, nous introduisons la théorie de l'opérateur résolvant introduite par Grimmer [50]. Cette théorie fournit l'existence et l'unicité de l'opérateur résolvant pour une équation intégrodifférentielle. Dans la résolution des équations intégrodifférentielle, l'opérateur résolvant joue le rôle du semi-groupe mais ne respecte pas la loi de semi-groupe. Soient  $\mathbb{X}$  et  $\mathbb{Y}$  deux espaces de Banach ;  $A$  et  $\Gamma(t)$  des opérateurs linéaires fermés de domaine  $D(A)$ . Munissons l'espace  $\mathbb{X}$  de la norme du graphe suivante :

$$\|x\|_{\mathbb{X}} := \|Ax\| + \|x\|, \quad \text{pour } x \in \mathbb{X}.$$

1. Un opérateur  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$  est dit auto-adjoint (ou parfois hermitien) s'il est égal à son adjoint, c'est-à-dire si, quels que soient  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{X}$ ,  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$

Considérons l'équation intégrodifférentielle suivante :

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + \int_0^t \Gamma(t-s)x(s)ds, \quad \text{pour } t \geq 0, \\ x(0) &= x_0 \in \mathbb{X}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

La définition suivante nous donne l'opérateur résolvant introduit par R. Grimmer.

**Définition 1.5.3.** [50] On appelle opérateur résolvant associé à l'équation (1.17), tout opérateur linéaire  $\mathcal{R}(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$  pour  $t \geq 0$ , satisfaisant les propriétés suivantes :

- (i)  $\mathcal{R}(0) = \mathbf{I}$  et  $\|\mathcal{R}(t)\| \leq \gamma e^{\delta t}$  pour tout  $\gamma > 0$  et  $\delta$  des constantes de  $\mathbb{R}$ .
- (ii) Pour tout  $x \in \mathbb{X}$ ,  $\mathcal{R}(t)x$  est fortement continu pour tout  $t \geq 0$ .
- (iii)  $\mathcal{R}(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$  pour  $t \geq 0$ . Pour  $x \in \mathbb{X}$ ,  $\mathcal{R}(\cdot)x \in C^1(\mathbb{R}^+; \mathbb{X}) \cap C(\mathbb{R}^+; \mathbb{X})$  et

$$\begin{aligned} \mathcal{R}'(t)x &= A\mathcal{R}(t)x + \int_0^t \Gamma(t-s)\mathcal{R}(s)x ds \\ &= \mathcal{R}(t)Ax + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)\Gamma(s)x ds \quad \text{pour } t \geq 0. \end{aligned}$$

**Remarque 1.5.3.** Il y a lieu de remarquer que lorsqu'on est dans un intervalle borné  $t \in [0, b]$  pour tout  $b > 0$ , alors il existerait une certaine constante  $M > 0$  telle que

$$\|\mathcal{R}(t)\| \leq M. \quad (1.18)$$

**Exemple 1.5.3.** Soient  $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ ,  $Ax = 2x$ , et  $\Gamma(t)x = -2x$  dans l'équation (1.17). Alors, dans ce cas, on a

$$\mathcal{R}(t)x_0 = e^t(\sin(t) + \cos(t))x_0 \quad \text{et} \quad S(t)x_0 = e^{2t}x_0.$$

Dans l'exemple ci-dessus, il est important de souligner le fait que

$$[\mathcal{R}(t+s) - \mathcal{R}(t)\mathcal{R}(s)] = e^{t+s}[-2\sin(t)\sin(s)] \quad \text{pour tout } t, s \in \mathbb{R}^+,$$

ce qui montre que l'opérateur résolvant  $\mathcal{R}(t)$  défini par la relation (1.17) ne vérifie pas la loi de semi groupe, c'est-à-dire,

$$\mathcal{R}(t+s) \neq \mathcal{R}(t)\mathcal{R}(s).$$

Maintenant nous énumérons les hypothèses suivantes :

- (H1) L'opérateur  $A$  est un générateur d'un  $C_0$ -semi-groupe  $(S(t))_{t \geq 0}$  on  $\mathbb{X}$ .
- (H2) Pour tout  $t \geq 0$ ,  $\Gamma(t)$  et un opérateur linéaire fermé de  $D(A)$  dans  $\mathbb{X}$  et  $\Gamma(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$ . Pour tout  $x \in \mathbb{X}$ , l'application  $t \mapsto \Gamma(t)x$  est bornée, différentiable et de dérivé  $t \mapsto \Gamma'(t)x$  bornée et uniformément continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

En ce qui concerne l'existence de l'opérateur résolvant de l'équation (1.17), le résultat suivant nous donne une réponse satisfaisante.

**Théorème 1.5.7.** [50] *Si nous admettons que les hypothèses (H1) – (H2) sont vérifiées, alors il existe un unique opérateur résolvant associé au problème intégrodifférentiel (1.17).*

**Lemme 1.5.2.** [35] *On suppose que (H1)-(H2) sont vérifiés. L'opérateur résolvant  $(\mathcal{R}(t))_{t \geq 0}$  est compact pour  $t > 0$  si et seulement si le semi-groupe  $(S(t))_{t \geq 0}$  est compact pour  $t > 0$ .*

**Lemme 1.5.3.** [87] *Sous les hypothèses (H1) – (H2), et si l'opérateur résolvant  $(\mathcal{R}(t))_{t \geq 0}$  est compact pour tout  $t > 0$ , alors sa norme est continue (ou continue dans la topologie uniforme des opérateurs) pour tout  $t > 0$ .*

**Lemme 1.5.4.** [45] *Soit  $A$  un générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi-groupe  $(S(t))_{t \geq 0}$ , et soit  $(\Gamma(t))_{t \geq 0}$  satisfaisant (H2). Alors, l'opérateur résolvant  $(\mathcal{R}(t))_{t \geq 0}$  de l'équation (1.17) est un opérateur continu en norme pour tout  $t > 0$  si et seulement si  $(S(t))_{t \geq 0}$  est opérateur continu en norme pour  $t > 0$ .*

**Lemme 1.5.5.** [87] *Pour tout  $b > 0$ , il existe une constante  $L = L(b)$  telle que*

$$\|\mathcal{R}(t + \epsilon) - \mathcal{R}(\epsilon)\mathcal{R}(t)\|_{L(\mathbb{X})} \leq L\epsilon \text{ pour } 0 \leq \epsilon \leq t \leq b.$$

L'opérateur résolvant donne un certain résultat sur l'existence de solution de l'équation intégrodifférentielle suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + \int_0^t \Gamma(t-s)x(s)ds + \mu(t) & \text{pour } t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{X}, \end{cases} \quad (1.19)$$

où  $\mu : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{X}$  est une fonction continue.

**Définition 1.5.4.** [50] *Une fonction  $x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{X}$  est solution stricte de l'équation (1.19) si*

$$x \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{X}) \cap C(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$$

et  $z$  satisfait l'équation (1.19).

**Théorème 1.5.8.** [50] *Supposons que (H1) – (H2) sont satisfait. Si  $x$  est solution stricte de l'équation (1.19), alors*

$$x(t) = \mathcal{R}(t)x_0 + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)\mu(s)ds \text{ pour } t \geq 0.$$

## 1.6 Théorèmes du point fixe

Il existe plusieurs méthodes de résolutions des équations différentielles, mais la théorie du point fixe demeure l'une des meilleures méthodes. Cette théorie introduite par S. Banach [12] est devenue un vaste champ de recherches pour plusieurs auteurs qui cherchent à résoudre plusieurs problèmes de la vie. Dans notre travail, la théorie du point fixe joue un rôle capital. Il existe plusieurs théorèmes de points fixes, mais dans cette section, nous n'allons annoncer que les théorèmes de points fixes qui nous seront utiles lors de nos démonstration des résultats.

### 1.6.1 Théorème du point fixe de Banach(1922) [12]

Ce théorème est dit principe de l'application contractante, il est la base de la théorie du point fixe. Ce principe garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même.

**Lemme 1.6.1.** *Soient  $(\mathbb{X}, d)$  un espace métrique complet et  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  une application contractante de constante de contraction  $k$ . Alors,*

$$\exists !x \in \mathbb{X} \text{ tel que } Tx = x.$$

### 1.6.2 Théorème du point fixe de Krasnoselskii

Nous donnons un théorème d'existence du point fixe concernant les applications  $F = \mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2$  où  $\mathbb{F}_1$  est continu et compact et  $\mathbb{F}_2$  une contraction

**Lemme 1.6.2.** *([146], Théorème du point fixe de Krasnoselskii) Soit  $\mathbb{X}$  un espace de Banach et  $V \subset \mathbb{X}$  un sous ensemble non vide fermé, borné et convexe de  $\mathbb{X}$ . Soient  $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2 : V \rightarrow \mathbb{X}$  deux applications de  $V$  telles que*

- (i)  $\mathbb{F}_1x + \mathbb{F}_2y \in V, \forall x, y \in V$ ;
- (ii)  $\mathbb{F}_1$  est une contraction;
- (iii)  $\mathbb{F}_2$  est complètement continue (continue et compacte).

Alors, l'équation  $\mathbb{F}_1x + \mathbb{F}_2x = x$  admet une solution sur  $V$ .

### 1.6.3 Théorème du point fixe de Mönch

En 1980, Mönch a généralisé les théorèmes du point fixe de Schauder, de Darbo et de Sadowski dans le théorème suivant :

**Lemme 1.6.3.** *[2] Soit  $D$  un sous ensemble fermé, borné et convexe d'un espace de Banach  $\mathbb{X}$  tel que  $0 \in D$ . Si  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{X}$  une application continue et de type Mönch, c'est-à-dire vérifie la propriété suivante :*

$$M \subset D, M \text{ est dénombrable, } M \subset \bar{co} \left( \{0\} \cup \Phi(M) \right) \Rightarrow \bar{M} \text{ est compact.}$$

Alors, l'application  $\Phi$  a un point fixe dans  $D$ .

### 1.6.4 Théorème du point fixe de Darbo généralisé

Il y a environ 50 ans, le mathématicien italien Gabriele Darbo a publié un théorème du point fixe [25], qui assure l'existence d'un point fixe pour les opérateurs dits condenseurs,

et généralise le principe classique du point fixe de Schauder et (une variante spéciale) la cartographie de contraction du principe de Banach. Le théorème de Darbo n'a pas seulement un intérêt théorique, il a également trouvé de nombreuses applications en analyse linéaire et non linéaire. De manière typique, de telles applications se caractérisent par une certaine «perte de compacité» de nombreux domaines : imbriquant des théorèmes entre espaces de Sobolev avec exposant critique, imbriquement sur des domaines à frontière irrégulière, opérateurs de composition linéaire sur le disque unitaire complexe, équations intégrales avec noyaux fortement singuliers, équations différentielles sur les domaines non bornés, équations différentielles fonctionnelles de type neutre ou avec argument divergeant, opérateurs différentiels linéaires à spectre essentiel non vide, opérateurs de superposition non linéaires entre les divers espaces de fonctions, les problèmes de valeurs initiales dans les espaces de Banach et bien plus encore.

**Définition 1.6.1.** *Supposons que  $\mathbf{D}$  est un sous ensemble non vide d'un espace de Banach  $\mathbb{X}$  et  $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{X}$  est un opérateur continu. On dit que  $f$  satisfait la condition Darbo (avec une constante  $\kappa \geq 0$ ) par rapport à une mesure de non compacité si, pour tout sous ensemble borné  $V$  de  $\mathbf{D}$ , l'inégalité suivante est vraie :*

$$\chi(f(V)) \leq \kappa\chi(V).$$

Le Lemme suivant généralise en 1955, le théorème du point fixe Darbo.

**Lemme 1.6.4.** *([90]) Soit  $\mathbf{D}$  est un sous ensemble borné, convexe et fermé d'espace de Banach  $\mathbb{X}$ , soit  $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{D}$  un opérateur continu tel que  $f(\mathbf{D})$  soit borné. Pour tout sous ensemble  $V \subset \mathbf{D}$ , posons*

$$f^1(V) = F(V), \quad f^n(V) = F(\bar{co}(f^{n-1}(V))), \quad n = 2, 3, \dots$$

*S'il existe une constante  $0 \leq \kappa \leq 1$  et un entier naturel non nul  $n_0$  tels que pour tout ensemble borné  $V \subset \mathbf{D}$ ,  $\chi(f^{n_0}(V)) \leq \kappa\chi(V)$ , alors  $f$  a un point fixe dans  $\mathbf{D}$ .*

## 1.7 Rappel sur quelques outils stochastiques

Cette section consiste en des rappels de calcul stochastique. Nous présentons le minimum suffisant des outils stochastiques utilisés tout au long du document. Pour plus de détails, nous nous référons [99].  $\Omega$  est l'ensemble de tous les événements élémentaires et  $\mathcal{P}(\Omega)$  désigne la famille des parties  $A$  de  $\Omega$ . Pour tout  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ , on écrira  $A^c := \Omega \setminus A$ .

**Définition 1.7.1.** *Une tribu ( $\sigma$ -algebra en anglais) sur  $\Omega$  est une famille de partie de  $\Omega$  vérifiant les propriétés suivantes :*

- $\emptyset \in \mathcal{F}$ .
- Si  $A \in \mathcal{F}$ , alors  $A^c \in \mathcal{F}$ .
- Si  $A_n \in \mathcal{F}$  pour tout  $n$ , alors  $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ .

Un espace mesurable est un espace muni d'une tribu.

**Proposition 1.7.1.** *Une intersection de tribus est une tribu.*

Soit  $\mathcal{F}$  une tribu. Une sous-tribu de  $\mathcal{F}$  est une tribu  $\mathcal{G}$  telle que  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ , soit  $A \in \mathcal{G}$  implique  $A \in \mathcal{F}$ . La plus petite tribu contenant une famille d'ensembles est l'intersection de toutes les tribus qui contiennent cette famille. Elle est en général difficile (voire impossible) à décrire plus précisément.

**Définition 1.7.2.** *La tribu engendrée par une famille d'ensembles  $A$  est la plus petite tribu contenant cette famille, on la note  $\sigma(A)$ . Elle est l'intersection de toutes les tribus contenant  $A$ .*

Si  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  sont deux tribus, on note  $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$  la tribu engendrée par  $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ . C'est la plus petite tribu contenant les deux tribus  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$ .

**Exemple 1.7.1.** *Soient  $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$  et  $(\mathcal{Y}, \mathcal{G})$  deux espaces mesurables, et*

$$\mathcal{X} \times \mathcal{Y} := \{(x, y) : x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}\}$$

*leur produit cartésien. On peut définir une tribu naturelle sur  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$  en considérant la famille des rectangles  $\mathbf{R} = \{A \times B : A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G}\}$ . Alors,  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} := \sigma(\mathbf{R})$  est la tribu produit. L'espace mesurable  $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$  est l'espace produit.*

**Définition 1.7.3.** *Soient  $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$  et  $(\mathcal{Y}, \mathcal{G})$  deux espaces mesurables. Une application  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  est dite  $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ -mesurable (ou plus simplement mesurable) si la préimage d'un ensemble mesurable est un mesurable, c'est-à-dire si  $B \in \mathcal{G}$  implique  $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ .*

La façon dont on définit la mesurabilité d'une application rappelle la continuité en topologie : si  $(\mathcal{X}, \mathcal{F}), (\mathcal{Y}, \mathcal{G})$  sont deux espaces topologiques ( $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  sont les ouverts de  $\mathcal{X}$ , respectivement  $\mathcal{Y}$ ), une fonction  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  est dite continue si la préimage d'un ouvert de  $\mathcal{Y}$  est un ouvert de  $\mathcal{X}$ . On rappelle que la composition de deux fonctions mesurables est mesurable. Pour vérifier qu'une fonction est mesurable, on utilisera souvent le résultat suivant :

**Lemme 1.7.1.** *Soient  $(\mathcal{X}, \mathcal{F}), (\mathcal{Y}, \mathcal{G})$  deux espaces mesurables, et soit  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ . Si une famille  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathcal{Y})$  est telle que  $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{G}$ , et telle que  $f^{-1}(C) \in \mathcal{F}$  pour tout  $C \in \mathcal{C}$ , alors  $f$  est  $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ -mesurable.*

En particulier, une application continue entre deux espaces topologiques  $(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}), (\mathcal{Y}, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}})$ , est  $(\mathcal{B}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}), \mathcal{B}(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}))$ -mesurable.

**Définition 1.7.4.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espace mesurable. Une variable aléatoire réelle (v.a.r.)  $X$  est une application mesurable de  $(\Omega, \mathcal{F})$  dans  $\mathbb{R}$  (donc telle que  $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}, \forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ )

**Définition 1.7.5.** La tribu engendrée par une variable aléatoire  $x$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  est l'ensemble des parties de  $\Omega$  qui s'écrivent  $x^{-1}(A)$  où  $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ . On note cette tribu  $\sigma(x)$ .

La tribu  $\sigma(x)$  est contenue dans  $\mathcal{F}$ . C'est la plus petite tribu sur  $\Omega$  rendant  $x$  mesurable. Une v.a.r.  $x$  est  $\mathcal{G}$ -mesurable si  $\sigma(x) \subset \mathcal{G}$ .

**Définition 1.7.6.** Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$  un espace mesurable. Une fonction (application) d'ensemble  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$  est une mesure si elle satisfait les conditions suivantes :

- $\mu(\emptyset) = 0$ ,
- $\mu$  est  $\sigma$ -additive : si  $A_n$  est une suite d'ensembles mesurables deux à deux disjoints alors

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \quad (1.20)$$

Le triplet  $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$  est appelé espace mesuré.

En particulier, (1.20) implique que  $\mu$  est additive : si  $A, B \in \mathcal{F}$  sont disjoints, alors  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ . En général, la construction d'un espace mesuré non-trivial est une tâche délicate.

**Exemple 1.7.2.** . Sur  $\mathcal{X}$  muni d'une tribu quelconque, fixons  $x \in \mathcal{X}$  et définissons, pour tout  $A \in \mathcal{F}$ ,  $\delta_x(A) = \mathbb{1}_A(x)$ . Alors,  $\delta_x$  est une mesure appelée masse de Dirac en  $x$ .

**Exemple 1.7.3.** Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$  un espace mesuré,  $(\mathcal{Y}, \mathcal{G})$  un espace mesurable. Une application mesurable  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  permet de transporter  $\mu$  de  $\mathcal{X}$  sur  $\mathcal{Y}$ . En effet,  $\nu := \mu \circ f^{-1}$  définit une mesure sur  $(\mathcal{Y}, \mathcal{G})$ , appelée transport de  $\mu$  par  $f$ .

On verra que certaines propriétés d'un espace mesurable  $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$  peuvent dépendre fortement de la masse que la mesure associe à l'espace tout entier. La mesure est finie si  $\mu(\mathcal{X}) < \infty$ , et  $\sigma$ -finie s'il existe une suite  $X_n \in \mathcal{F}$ ,  $\mu(X_n) < \infty$ , telle que  $\mathcal{X} = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ . Une mesure est une probabilité si  $\mu(\mathcal{X}) = 1$ ; dans ce cas,  $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$  est appelé espace de probabilité ou espace probabilisé. Par exemple,  $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$  est un espace de probabilité, qui modélise l'expérience qui consiste à tirer un nombre  $x \in [0, 1]$  au hasard (uniformément).

Un fait inévitable, en théorie de la mesure, est la présence d'ensembles non-vides mais invisibles du point de vue de la mesure : on définit les ensembles de mesure nulle par :

$$\mathcal{N}_0^\mu = \{N \in \mathcal{F} : \mu(N) = 0\}.$$

Ainsi que les ensembles négligeables (par rapport à  $\mu$ ) par :

$$\mathcal{N}^\mu := \{B \in \mathcal{P}(X) : \exists N \in \mathcal{N}_0^\mu, N \supset B\}.$$

Les ensembles négligeables ne peuvent être ignorés ; ils joueront un rôle central dans toute la théorie de l'intégration et surtout des processus stochastiques. Leur propriété fondamentale, facile à vérifier, est la suivante.

**Lemme 1.7.2.** *Les unions dénombrables d'ensembles négligeables (ou de mesure nulle) sont négligeables.*

Dans la définition donnée ci-dessus, les ensembles négligeables ne sont pas nécessairement mesurables. On le verra plus tard, il est souvent nécessaire de travailler avec un espace mesuré dans lequel tous les ensembles négligeables sont mesurables. Dans ce cas, on dira que  $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$  est complet. Cependant, tout espace mesurable peut être complété, comme le montre la proposition suivante.

**Proposition 1.7.2.** *Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$  un espace mesuré. La tribu  $\mathcal{F}_\mu := \sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{N}^\mu)$  est la tribu complétée par rapport à  $\mu$ . On a :*

$$\overline{\mathcal{F}_\mu} = \{A \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) : \exists B, B' \in \mathcal{F} : B \subset A \subset B', \mu(B' \setminus B) = 0\}. \quad (1.21)$$

Soit  $A \in \overline{\mathcal{F}_\mu}$ . Si  $B, B'$  sont comme dans (1.21), on définit  $\bar{\mu}(A) := \mu(B) = \mu(B')$ . Alors,  $\bar{\mu}$  définit une mesure sur  $(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{F}_\mu})$ . L'espace mesuré  $(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{F}_\mu}, \bar{\mu})$  est complet, appelé le complété de  $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$ . De plus,  $\bar{\mu}$  est l'unique mesure sur  $(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{F}_\mu})$  qui coïncide avec  $\mu$  sur  $\mathcal{F}$ .

Au vu du résultat précédent, on pourra toujours supposer que les espaces mesurables considérés sont complets.

## 1.7.1 Processus stochastiques

**Définition 1.7.7.** [69] *Un processus stochastique indexé par  $I$  à valeurs dans  $\mathcal{X}$  est une famille de variables aléatoires  $x = \{x_t\}_{t \in I}$  définies sur un même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  à valeurs dans un espace mesurable  $(\mathcal{X}, \mathcal{E})$  appelé espace d'état du processus.*

Soit  $x = \{x_t\}_{t \in I}$  un processus aléatoire indexé par  $I$ .

- Si  $I = \mathbb{N}$  ou  $\mathbb{Z}$ , on dit que  $x$  est une suite aléatoire (et dans ce cas  $t$  est le plus souvent noté par  $n$  ou  $k$ ) ou processus en temps discret ;
- Si  $I = [0, T], T \in \mathbb{R}^+$ , ou  $I = \mathbb{R}_+, x$  est une fonction aléatoire ou processus en temps continu ;
- Si  $I = \mathbb{N}^d$  ou  $\mathbb{R}^d$ ,  $x$  est appelé champ aléatoire.

- Si  $\mathbf{I} = \{1, \dots, n\}$  est fini alors  $x = (x_1, \dots, x_n)$  est également appelé vecteur aléatoire ou champ aléatoire.

Sauf mention contraire, nous supposons que  $\mathbf{I} = [0, +\infty[$ . L'idée du concept de processus stochastique est d'observer l'évolution d'une variable aléatoire au cours du temps.

**Définition 1.7.8.** *Étant donné un processus stochastique  $x = (x_t)_{t \geq 0}$ , les lois finies-dimensionnelles de  $x$  sont les lois de tous les vecteurs  $(x_{t_1}, \dots, x_{t_n})$ ,  $t_1, \dots, t_n \in \mathbf{I}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . L'ensemble des lois fini-dimensionnelles caractérise la loi  $\mathbb{P}_x$  du processus  $x$ .*

On appelle trajectoire du processus  $x$ , l'application  $t \mapsto x_t(\omega)$  pour  $\omega \in \Omega$  fixé.

Un processus est à trajectoires continues (resp. continues à droite, continues à gauche) si  $t \rightarrow x_t(\omega)$  est continue (respectivement continue à droite, continue à gauche) pour presque tout  $\omega \in \Omega$ .

**Définition 1.7.9.** [69] *Un processus stochastique  $x$  est dit mesurable si l'application  $(t, \omega) \mapsto x_t(\omega)$  de  $\mathbb{R}^+ \times \Omega$  dans  $\mathcal{E}$  est mesurable par rapport aux tribus  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{F}$  et  $\mathcal{E}$ .*

**Définition 1.7.10** (Égalité entre deux processus [69]).

- Soient  $x$  et  $y$  deux processus stochastiques.  $x$  est une modification de  $y$  si

$$\forall t \geq 0, \mathbb{P}(x_t = y_t) = 1.$$

*c'est-à-dire  $\forall t \geq 0$ , il existe  $\mathcal{N}_t$  négligeable tel que  $\forall \omega \notin \mathcal{N}_t$  on ait  $x_t(\omega) = y_t(\omega)$*

- Deux processus stochastiques  $x$  et  $y$  sont dits indistinguables si

$$\mathbb{P}(x_t = y_t \ \forall t \geq 0) = 1.$$

*c'est-à-dire  $\forall t \geq 0$ , il existe  $\mathcal{N}$  négligeable tel que  $\forall \omega \notin \mathcal{N}$  on ait  $x_t(\omega) = y_t(\omega)$ .*

Dans la suite, quand nous écrirons  $x \stackrel{\mathcal{L}}{=} y$  égalité en loi de deux processus, nous signifierons l'égalité de toutes les lois fini-dimensionnelles de  $x$  et de  $y$ .

$$(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (y_{t_1}, \dots, y_{t_n}),$$

pour tout  $t_1, \dots, t_n \in \mathbf{I}$

**Remarque 1.7.1.** *Si  $x$  et  $y$  sont indistinguables, alors  $x$  est une modification de  $y$  mais la réciproque est fautive.*

**Définition 1.7.11.** *Un processus  $y = (y_t)_{t \in J}$  est un processus gaussien si toutes ses lois de dimension finie sont gaussiennes i.e.*

$$\forall n \geq 1, \forall t_1 < t_2 < \dots < t_n \in J, (y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_n}) \text{ est un vecteur gaussien.}$$

**Définition 1.7.12.** *Un processus est dit :*

1. *À accroissements indépendants si pour tous  $0 < t_1 < \dots < t_n$ , les variables aléatoires  $y_{t_1}, y_{t_2} - y_{t_1}, \dots, y_{t_n} - y_{t_{n-1}}$  sont indépendantes.*
2. *À accroissements stationnaires si la loi des accroissements  $y_{t+h} - y_t$  ne dépend pas de  $h > 0$ .*

**Définition 1.7.13.** *On dit qu'un processus  $(y_t)_{t \geq 0}$  est à variation finie sur  $[0, T]$  si :*

$$\sup_{(t_i)} \sum_i |y_{t_{i+1}} - y_{t_i}| < \infty.$$

*Et à variation quadratique finie sur  $[0, T]$  si :*

$$\sup_{(t_i)} \sum_i |y_{t_{i+1}} - y_{t_i}|^2 < \infty.$$

*La borne supérieure est prise sur la famille de subdivisions  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = T$  de  $[0, T]$ .*

Les tribus jouent un rôle très important dans l'étude des processus stochastiques, car elles représentent l'information disponible et permettent de traduire les notions du passé, du présent et du futur.

**Définition 1.7.14** ( Filtration.). *Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité et  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  une famille de sous-tribus de  $\mathcal{F}$ . On dit que  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  est une filtration si c'est une famille croissante, au sens où  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$  pour tout  $0 \leq s \leq t < \infty$ .*

*On définit alors  $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_t \mathcal{F}_t)$  et pour tout  $t$ ,  $\mathcal{F}_{t+} = \cup_\varepsilon \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$ .*

**Définition 1.7.15.** [69] *On dit qu'une filtration  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  est :*

- *Complète si  $\mathcal{F}_0$  contient tous les ensembles  $\mathbb{P}$ -négligeables de  $\mathcal{F}$  que nous notons  $\mathcal{N}$  i.e  $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$ .*
- *Continue à droite si  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$  pour tout  $t$ .*
- *Satisfait les conditions habituelles si elle est continue à droite et complète.*

Si l'on se donne un processus  $y$ , on introduit la filtration  $\mathcal{G}_t = \sigma(y_s; s \leq t)$ , appelée filtration naturelle de  $y$ . Mais  $\mathcal{G}_0$  ne contient pas nécessairement  $\mathcal{N}$ . C'est pour cela que l'on introduit souvent la filtration naturelle augmentée de  $y$  définie par  $\mathcal{F}_t^Y = \sigma(\mathcal{N} \cup \mathcal{G}_t)$ .

Dans la suite, lorsque nous parlerons de filtration naturelle, il s'agira toujours de filtration naturelle augmentée. Un processus est toujours adapté à sa filtration naturelle. Si  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  est une filtration sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , on dit que  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  est un espace de probabilité filtré.

**Définition 1.7.16.** [69]

1. Un processus stochastique  $y = (y_t)_{t \geq 0}$  est adapté à la filtration  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  si, pour tout  $t \geq 0$ ,  $y_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.
2. Un processus stochastique  $y = (y_t)_{t \geq 0}$  est dit progressivement mesurable par rapport à la filtration  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  si l'application  $(s, \omega) \rightarrow y_s(\omega)$  de  $[0, t] \times \Omega$  dans  $\mathbb{X}$  est mesurable par rapport à  $\mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t$  et  $\mathcal{E}$ .

Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté. On peut également noter que si  $x$  est un processus stochastique mesurable et adapté, on peut alors en déduire qu'il possède une modification progressivement mesurable. On a également le résultat suivant.

**Proposition 1.7.3.** [69] *Si  $y = (y_t)_{t \geq 0}$  est un processus stochastique dont les trajectoires sont continues à droite (ou continues à gauche), alors  $y$  est mesurable et  $y$  est progressivement mesurable s'il est en plus adapté.*

**Définition 1.7.17.** *Soit  $x = (x_t)_{t \in \mathbf{I}}$  un processus stochastique indexé par  $\mathbf{I} = [0, T]$  (avec  $T$  un réel positif fixé) à valeurs dans  $(\mathbb{X}, \mathcal{E})$ .*

1.  $x$  est continu en probabilité sur  $\mathbf{I}$  si  $\forall t \in \mathbf{I}, \epsilon > 0, \lim_{s \rightarrow t} \mathbb{P}(d(x_t, x_s) > \epsilon) = 0$ .
2.  $x$  est continu en moyenne d'ordre  $p \geq 1$  si  $\forall t \in \mathbf{I}, \mathbb{E}[|x_t|^p]$  est fini et l'application  $t \rightarrow x_t$  est continue de  $\mathbf{I}$  dans l'espace normé  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  i.e.  $\lim_{s \rightarrow t} \mathbb{E}[|x_t - x_s|^p] = 0$ .
3.  $x$  est presque sûrement à trajectoires continues s'il existe  $\mathcal{N}$  négligeable tel que  $\forall \omega \notin \mathcal{N}$  l'application  $t \rightarrow x_t$  est continue.
4.  $x$  est dit continu à droite et limité à gauche (càdlàg) s'il existe  $\mathcal{N}$  négligeable tel que  $\forall \omega \notin \mathcal{N}$  l'application  $t \rightarrow x_t$  soit continue à droite et limitée à gauche, c'est-à-dire

$$\lim_{s \searrow t} X_s(\omega) = X_t(\omega), \text{ et } \lim_{s \nearrow t} X_s(\omega) \text{ existe et est fini}$$

**Théorème 1.7.1.** *Si  $x$  et  $y$  sont càdlàg et  $x$  est une modification de  $y$  alors  $x$  et  $y$  sont indistinguables.*

**Preuve.** Soient  $\mathcal{N}_x$  l'ensemble des  $\omega$  tels que  $x(\omega)$  ne soit pas continu à droite et  $\mathcal{N}_y$  l'ensemble des  $\omega$  tels que  $y(\omega)$  ne soit pas continu à droite.

Soit  $\mathcal{M} = \{\omega \in \Omega : \exists q \in \mathbb{Q} \text{ tel que } x_q(\omega) \neq y_q(\omega)\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{\omega \in \Omega : x_q(\omega) \neq y_q(\omega)\}$ .

On pose  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_x \cup \mathcal{N}_y \cup \mathcal{M}$ , c'est un négligeable. Soient  $t \geq 0$  et  $\omega \notin \mathcal{N}$  alors  $x_r(\omega) = y_r(\omega)$  pour tout  $r \in \mathbb{Q}$  faisant tendre  $r \in \mathbb{Q}$  tel que  $(r > t)$  vers  $t$  et par la continuité à droite  $x_t(\omega) = y_t(\omega)$ , d'où  $x$  et  $y$  sont indistinguables.

□

**Définition 1.7.18.**  $x_t$  et  $y_t$  deux processus définis sur le même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  sont dits indépendants si les sous tribus  $\mathcal{F}_x = \sigma\{x_t, t \in \mathbf{I}\}$  et  $\mathcal{F}_y = \sigma\{y_t, t \in \mathbf{I}\}$  engendrées par les  $x_t$ , respectivement les  $y_t$ , sont indépendantes relativement à  $\mathbb{P}$ .

**Définition 1.7.19** (Martingale). Soit  $x = (x_t)_{t \geq 0}$  un processus adapté et intégrable, on dit que  $x$  est

1. Une martingale si  $\forall 0 \leq s \leq t, \mathbb{E}[x_t / \mathcal{F}_s] = x_s$
2. Une surmartingale si  $\forall 0 \leq s \leq t, \mathbb{E}[x_t / \mathcal{F}_s] \leq x_s$
3. Une sousmartingale si  $\forall 0 \leq s \leq t, \mathbb{E}[x_t / \mathcal{F}_s] \geq x_s$

**Lemme 1.7.3.** Soit  $x$  une martingale et  $\varphi$  une fonction convexe telle que pour tout  $t$ ,  $\varphi(x_t) \in L^1$ , alors  $\varphi(x)$  est une sous-martingale; si  $\varphi$  est concave, alors  $\varphi(x)$  est une surmartingale.

**Définition 1.7.20.** On dit que la martingale  $x$  est fermée par  $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , si  $x_t = \mathbb{E}(Y / \mathcal{F}_t)$ .

**Proposition 1.7.4.** [118] Toute martingale admet une modification càdlàg .

**Théorème 1.7.2** (de convergence des martingales). Soit  $x$  une sur (ou sous)-martingale càd telle que  $\sup_t \mathbb{E}[|x_t|] < \infty$ . Alors,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_t$  existe presque sûrement et appartient à  $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

Si  $x$  est fermée par  $Z$ , elle l'est aussi par  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_t$  notée  $x_\infty$  qui vaut  $\mathbb{E}[Z / \vee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t]$ .

**Définition 1.7.21.** Le processus croissant  $\langle M \rangle$  est défini au temps  $t$  par :

$$\langle M \rangle_t = \lim_{|\pi| \rightarrow 0} \mathbb{P} \left( \sum_{t_i \in \pi} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 \right)$$

où  $\pi$  sont les partitions de  $[0, t]$ .

**Remarque 1.7.2.** Les martingales de carré intégrable admettent un crochet.

**Proposition 1.7.5.**  $\langle M \rangle_t$  est l'unique processus continu croissant adapté tel que  $M_t^2 - \langle M \rangle_t$  est une martingale.

## 1.7.2 Mouvement brownien ou processus de Wiener

### Définition et Propriétés

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité filtré complet vérifiant les conditions habituelles,  $(\mathcal{X}, \langle \cdot \rangle_{\mathcal{X}}, | \cdot |_{\mathcal{X}})$  et  $(\mathcal{Y}, \langle \cdot \rangle_{\mathcal{Y}}, | \cdot |_{\mathcal{Y}})$  deux espaces de Hilbert séparables .

**Définition 1.7.22** (Mouvement brownien standard). Le mouvement brownien standard est un processus stochastique réel  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  vérifiant

1.  $B_0 = 0$ ,  $\mathbb{P}$ -p.s. ( $B$  est issu de 0)

2. Pour tout  $0 \leq s \leq t$ ,  $B_t - B_s$  est une variable gaussienne  $\mathcal{N}(0, t - s)$  indépendante de la tribu  $\mathcal{F}_s$  engendrée par  $\{B_u, u \leq s\}$ .

Il est intéressant de noter qu'une combinaison linéaire de mouvements browniens standards indépendants avec coefficients non tous nuls est, à une constante près, un mouvement brownien.

**Proposition 1.7.6.**  $B_t$  est un processus gaussien dont la fonction de covariance est :

$$R(t, s) = \text{Cov}(B_t, B_s) = s \wedge t$$

**Preuve.**

$$R(s, t) = \text{Cov}(B_t, B_s) = \mathbb{E}(B_t B_s) - \mathbb{E}(B_t)\mathbb{E}(B_s).$$

Comme  $B_t$  suit une loi gaussienne centrée ( $\mathbb{E}(B_t) = 0$ ) donc :

$$R(s, t) = \mathbb{E}(B_t B_s + B_s^2 - B_s^2) = \mathbb{E}(B_s^2) + \mathbb{E}(B_s(B_t - B_s)).$$

Pour  $s \leq t$ , on utilise l'indépendance, et  $B_t \sim \mathcal{N}(0, s)$ . Nous obtenons la valeur

$$R(s, t) = \mathbb{E}(B_s^2) + \mathbb{E}(B_s)\mathbb{E}(B_t - B_s) = \mathbb{E}(B_s^2) = s.$$

□

Soit  $Q \in L(\mathbb{X})$  un opérateur symétrique positif tel que  $\text{Tr}(Q) < \infty$ . Alors, il existe un système orthonormal  $\{e_k\}_{k \geq 1}$  dans  $\mathbb{X}$ , et une suite  $(\lambda_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}^+$  tels que

$$Qe_k = \lambda_k e_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

**Définition 1.7.23.** [117] Un processus stochastique  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  à valeurs dans  $\mathbb{X}$  adapté à la filtration  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  est un  $Q$ -processus de Wiener si

- i)  $B(0) = 0$ ,  $\mathbb{P}$  p.s.
- ii) Les trajectoires de  $B$  sont continues presque sûrement.
- iii) Les incréments de  $B$  sont indépendants<sup>2</sup> et stationnaires<sup>3</sup>.
- iv)  $\mathbb{E}(B_t) = 0$ ,  $\text{Cov}[B_t, B_s] = (t - s)Q$ , pour tout  $0 \leq s \leq t$
- v)  $B$  est adaptée à la filtration  $(\mathcal{F}_t)$ , c'est-à-dire pour tout  $t \geq 0$ ,  $B_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

Si le processus  $B$  vérifie ces trois propriétés sur  $[0, T]$ , on dit aussi que  $B$  est un  $Q$ -processus de Wiener sur  $[0, T]$ .

Nous rappelons que la condition (iv) ci-dessus signifie que pour tout  $h \in \mathbb{X}$  et  $0 \leq s \leq t$ , la variable aléatoire à valeurs réelles  $\langle B_t - B_s, h \rangle_{\mathbb{X}}$  est gaussienne de moyenne nulle et de

- 
- 2.  $\sigma(B(t) - B(s))$  est indépendant de  $\mathcal{F}_s$  pour  $t > s \geq 0$ .
  - 3. Loi de probabilité de  $B(t) - B(s)$  est la loi normale centrée d'opérateur de variance-covariance  $(t - s)Q$  pour tout  $t \geq s \geq 0$

variance  $(t-s)\langle Qh, h \rangle_{\mathbb{Y}}$ . En particulier, nous remarquons que  $E(\|B_t\|^2)_{\mathbb{Y}} = t\text{Tr}Q$  qui est l'une des raisons pour lesquelles l'hypothèse  $\text{Tr}Q < \infty$  est essentielle.

D'après ce qui nous précède, le processus de Wiener est gaussien et pour tout  $(e_i) \subset \mathbb{X}$  un ensemble orthonormé de vecteurs propres de  $Q$  à valeurs propres correspondantes  $\lambda_i$   $i \in \mathbb{N}^*$  tels que  $\text{Tr}Q = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$  alors

$$B(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(t)e_i,$$

où  $\beta_i(t) = \langle B(t), e_i \rangle$ ,  $i = 1, 2, \dots$  sont des familles de mouvements browniens mutuellement indépendants sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

**Proposition 1.7.7.** *Pour tout opérateur  $Q$  positif symétrique à trace sur un espace séparable de Hilbert  $\mathbb{X}$ , il existe un  $Q$ -processus Wiener  $(B(t))_{t \geq 0}$ .*

Nous donnons les propriétés suivantes d'un  $Q$ -processus de Wiener.

**Proposition 1.7.8.** [117] *Soit  $B(t)$  un  $Q$ -processus de Wiener tel que  $\text{tr}(Q) < \infty$ . Alors,*

i)  $\mathbb{E}(B(t)) = \int_{\Omega} B(t)(\omega) d\mathbb{P}(d\omega) = 0$  et  $\text{Cov}(B(t)) = [B(t) - \mathbb{E}(B(t))] \otimes [B(t) - \mathbb{E}(B(t))] = tQ$

ii) *Pour tout  $t \geq 0$   $B$  admet l'écriture suivante  $B(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \beta_k(t) e_k$  où  $\beta_k(t)$  sont une suite de mouvements browniens standards sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  mutuellement indépendantes.*

**Exemple 1.7.4.** *Tout mouvement Brownien  $B = (B_t, t \geq 0)$  est un processus de Lévy. On a*

$$\mathbb{E}[e^{i(u, B_t)}] = e^{ti(b, u) - \frac{1}{2}(u, Au)}.$$

**Définition 1.7.24.** *Soit  $Q$  un opérateur linéaire borné symétrique (auto-adjoint) et positif sur  $\mathbb{X}$ . Une famille de variables aléatoires  $\tilde{W} = \{W_t(h), t \geq 0, h \in \mathbb{X}\}$  est un processus de Wiener cylindrique sur  $\mathbb{X}$  si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *Pour tout  $h \in \mathbb{X}$ ,  $\tilde{W} = \{W_t(h), t \geq 0\}$  définit un mouvement brownien avec variance  $t\langle Qh, h \rangle$  ;*
2. *Pour tout  $s, t \in \mathbb{R}^+$  et  $h, g \in \mathbb{X}$ ,*

$$\mathbb{E}(\tilde{W}_s(h)\tilde{W}_t(g)) = (s \wedge t)\langle Qh, g \rangle$$

*Si  $Q = \text{Id}_{\mathbb{X}}$  est l'opérateur identité de  $\mathbb{X}$ , Alors,  $\tilde{W}$  sera appelé un processus de Wiener cylindrique standard. Et  $Q$  est un opérateur de covariance de  $\tilde{W}$ .*

### 1.7.3 Mouvement Brownien fractionnaire (mBf)

Le mouvement brownien fractionnaire a été introduit par Kolmogorov en 1940. Son étude a été reprise et approfondie par Mandelbrot et Van Ness en 1968. Dans ce paragraphe, on va

introduire le mouvement Brownien fractionnaire (mBf) et, on va donner quelques propriétés qui attirent des chercheurs à s'intéresser à celui-ci.

### Définition et propriétés

**Définition 1.7.25.** *Un mouvement Brownien fractionnaire (mBf en abrégé) de paramètre de Hurst  $H \in (0, 1)$  est un processus gaussien continu centré, noté  $\{B_t^H : t \in \mathbb{R}\}$  défini sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et vérifiant :*

- (i)  $B_0^H = 0$
- (ii)  $\mathbb{E}[(B_t^H)^2] = |t|^{2H} \forall t \in \mathbb{R}$
- (iii)  $B^H$  a des accroissements stationnaires.

On peut aussi donner une définition équivalente qui laisse apparaître les propriétés du mouvement Brownien fractionnaire.

**Définition 1.7.26.** *Le mouvement Brownien fractionnaire  $\{B_t^H : t \in \mathbb{R}\}$  d'indice de Hurst  $H \in (0, 1)$  est le seul processus à vérifier :*

1. *Auto-similarité :  $\forall a > 0, (a^{-H} B_{at})_{t \geq 0}$  a la même loi que  $(B_t)_{t \geq 0}$  ;*
2. *Accroissements stationnaires :  $\forall h, > 0, (B_{t+h} - B_h)_{t \geq 0}$  a la même loi que  $(B_t)_{t \geq 0}$*
3. *Gaussien avec  $\mathbb{E}(B_1) = 0$  et  $\mathbb{E}(B_1^2) = 1$ .*

Sa fonction de covariance est

$$R_H(t, s) = \frac{1}{2}(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t - s|^{2H}) \quad (1.22)$$

Nous remarquons que le mBf d'indice de  $H = 1$  est donné par  $B_t^1 = Gt$  avec  $G$  une variable normale centrée réduite. Donc, ce cas est peu intéressant. Si  $H = \frac{1}{2}$  alors la fonction de covariance est  $R_H(t, s) = \min(t, s)$  et donc, on retrouve le mouvement brownien standard à accroissement indépendant. Dans le cas où  $H \neq \frac{1}{2}$ , le mBf n'est ni une semi-martingale, ni un processus de Markov.

**Théorème 1.7.3** (Continuité Hölderienne). *Tout mouvement Brownien Fractionnaire admet une modification dont les trajectoires ont une continuité de Höder d'ordre  $\gamma < H$  sur tout intervalle  $[0, p]$  avec  $p > 0$ .*

**Preuve.** Il suffit de montrer que, pour tout  $\alpha > 0$ , il existe une constante  $C_\alpha$  telle que, pour tout  $(s, t) \in [0, p]^2$  :

$$\mathbb{E}[|B_t^H - B_s^H|^\alpha] \leq C_\alpha |t - s|^{\alpha H} \quad (1.23)$$

En effet, la condition (1.23) assure, par le théorème de régularité de Kolmogorov (voir [119] Théorème 2.1 page 25) que  $\{B_t^H : t \in [0, p]\}$  admet une modification dont les trajectoires

sont Höder continues d'ordre  $\gamma \in [0, \frac{\alpha H - 1}{\alpha}[$  pour tout  $\alpha > 0$ , ce qui montre le résultat. La condition (1.23) découle de la stationnarité des accroissements et de l'auto-similarité :

$$\mathbb{E}[|B_t^H - B_s^H|^\alpha] = \mathbb{E}[|B_{t-s}^H|^\alpha] = |t - s|^{\alpha H} \mathbb{E}[|B_1^H|^\alpha].$$

D'où le résultat avec  $C_\alpha = \mathbb{E}[|B_1^H|^\alpha] < +\infty$ .

□

**Proposition 1.7.9.** *Soit  $H \in ]0, 1[$  et  $B^H$  un mBf d'indice  $H$ . Alors :*

- $B^H$  est une semimartingale si et seulement si  $H = \frac{1}{2}$
- $B^H$  est un processus de Markov si et seulement si  $H = \frac{1}{2}$

**Théorème 1.7.4** (Non différentiabilité). *Les trajectoires du mouvement Brownien fractionnaire sont  $\mathbb{P}$ -p.s. non différentiable en  $t_0$ .*

**Propriété 1.7.1.** *Les accroissements de  $B^H$  sont à dépendance à long terme si et seulement si  $H > \frac{1}{2}$ .*

**Propriété 1.7.2.** *Les accroissements du mouvement Brownien fractionnaires sont positivement corrélés si  $\frac{1}{2} < H < 1$ , négativement corrélés si  $0 < H < \frac{1}{2}$  (on parle d'anti-persistence) et indépendants si  $H = \frac{1}{2}$ .*

## Représentations intégrales du mouvement Brownien fractionnaire

1. Représentation en moyenne mobile : Mandelbrot et Van Ness [98] ont défini le mbf de la manière suivante :

$$B_t^H = \frac{1}{C_H} \int_{\mathbb{R}} \left[ (t-x)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-x)_+^{H-\frac{1}{2}} \right]^2 dW_x$$

où

$$C_H^2 = \int_{\mathbb{R}} \left[ (1-x)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-x)_+^{H-\frac{1}{2}} \right]^2 dx = \int_0^{+\infty} \left[ (1+x)^{H-\frac{1}{2}} - x^{H-\frac{1}{2}} \right]^2 dx + \frac{1}{2H},$$

$x_+ = \max(x, 0)$  et  $W$  est un mouvement brownien standard. En effet il est facile de voir que  $B$  est bien défini et pour  $t < s$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] &= \frac{1}{C_H^2} \int_{\mathbb{R}} \left[ (t-x)_+^{H-\frac{1}{2}} - (s-x)_+^{H-\frac{1}{2}} \right]^2 dx \\ &= \frac{1}{C_H^2} \int_{\mathbb{R}} \left[ (t-s-x)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-x)_+^{H-\frac{1}{2}} \right]^2 dx \\ &= |t-s|^{2H} \underbrace{\frac{1}{C_H^2} \int_{\mathbb{R}} \left[ (1-u)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-u)_+^{H-\frac{1}{2}} \right]^2 du}_1 \end{aligned}$$

Donc,  $B$  est gaussien, centré et a pour fonction de covariance la fonction  $R_H$  donnée par (1.22).

Les propriétés trajectoires du mBf sont plus facilement étudiables avec ce type de représentation intégrale.

2. La représentation harmonisable : Soit  $0 < H < 1$ . Le mouvement Brownien fractionnaire a la représentation

$$B_t^H = \frac{1}{C_H} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx} - 1}{ix} |x|^{-(H-\frac{1}{2})} d\tilde{W}_x,$$

où  $\tilde{W}_x$  est un mouvement Brownien à valeur complexe,  $C(H) = \left( \frac{\pi}{H\Gamma(2H)\sin(H\pi)} \right)^{\frac{1}{2}}$

3. Représentation de Levy-Hida : On peut aussi représenter le mouvement Brownien fractionnaire comme une intégrale de Wiener sur un intervalle fini  $[0, T]$ . Soient  $w_t$  un processus de Wiener et  $K_H(t, s)$  le noyau défini par :

$$K_H(t, s) = d_H(t-s)^{H-\frac{1}{2}} + s^{H-\frac{1}{2}} F_1\left(\frac{t}{s}\right) \quad (1.24)$$

où  $d_H$  est une constante et

$$F_1(z) = d_H \left( \frac{1}{2} - H \right) \int_0^{z-1} \theta^{H-\frac{3}{2}} \left( 1 - (\theta+1)^{H-\frac{1}{2}} \right) d\theta, \quad z > 1.$$

Le noyau ainsi défini satisfait la relation

$$K_H(s, t) = d_H \left( H - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{s}{t} \right)^{\frac{1}{2}-H} (t-s)^{H-\frac{3}{2}}$$

Si  $H \in ]\frac{1}{2}, 1[$  : Le noyau a la simple expression suivante :

$$K_H(t, s) = c_H s^{\frac{1}{2}-H} \int_s^t |u-s|^{H-\frac{3}{2}} u^{H-\frac{1}{2}} du, \quad t > s,$$

où  $c_H = \left( \frac{H(2H-1)}{\beta(2-2H, H-\frac{1}{2})} \right)$ .

la représentation de Levy-Hida du mouvement Brownien fractionnaire est la suivante :

$$B_t^H = \int_0^t K_H(t, s) dw_s, \quad 0 < s < t < \infty.$$

## Intégration par rapport au mBf

Notre objectif est de donner un sens à l'intégrale de Wiener respectant un mouvement Brownien fractionnaire. Pour plus de détails, consulter [41, 49]

Soit  $T \geq 0$ , notons par  $\Lambda$  l'ensemble des fonctions étagées sur  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire

$$\Lambda = \left\{ \phi : \phi(t) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i 1_{[t_i, t_{i+1}[}(t), \quad 0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = T \right. \\ \left. \text{et } x_i \in \mathbb{R}, \quad i = \{1, 2, \dots, n-1\} \right\}$$

Pour  $\phi \in \Lambda$ , on définit l'intégrale de Wiener par rapport à  $B^H$  comme suit :

$$\int_0^T \phi(s) dB^H(s) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i (\beta^H(t_{i+1}) - \beta^H(t_i)).$$

La moyenne de cette variable aléatoire est zéro et le moment d'ordre deux (2) vaut :

$$\mathbb{E} \left\| \int_0^T \phi(s) dB^H(s) \right\|^2 = \int_0^T \int_0^T \langle \phi(s), \phi(t) \rangle H(2H-1) |s-t|^{2H-2} ds dt.$$

Soit  $\mathcal{H}$  l'espace de Hilbert défini comme étant la fermeture de  $\Lambda$  pour le produit scalaire

$$\langle 1_{[0,t]}, 1_{[0,s]} \rangle_{\mathcal{H}} = R_H(t, s),$$

avec  $R_H$  défini par (1.22). On a vu que  $B_t^H = \int_0^t K_H(t, s) W_s$  avec  $W$  un mouvement brownien standard et  $K_H$  le noyau de Volterra défini par (1.24). Définissons l'opérateur linéaire suivant :

$$K_H^* : \Lambda \longrightarrow L^2([0, T]) \quad \text{donné par :}$$

$$(K_H^* \varphi)(s) = \int_s^T \varphi(t) \frac{\partial K}{\partial t}(t, s) dt,$$

on a alors

$$\begin{aligned} \langle K^* 1_{[0,t]}, K^* 1_{[0,s]} \rangle_{L^2} &= \langle K(t, \cdot) 1_{[0,t]}, K(s, \cdot) 1_{[0,t]} \rangle \\ &= \int_0^{t \wedge s} K_H(t, u) K_H(s, u) du \\ &= R_H(t, s) \\ &= \langle 1_{[0,t]}, 1_{[0,s]} \rangle_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

Donc  $K_H^*$  se prolonge en une isométrie de  $\mathcal{H}$  sur un sous-espace fermé de  $L^2[0, T]$  et on a  $\mathcal{H} = (K_H^*)^{-1}(L^2[0, T])$ .

Considérons  $W = \left\{ W(t), t \in [0, T] \right\}$  défini par

$$W(t) = B^H((K_H^*)^{-1} 1_{[0,t]}),$$

il vient que  $W$  est un processus de Wiener et  $B^H$  a la représentation suivante :

$$B^H(t) = \int_0^t K_H(t, s) dW(s).$$

En effet, pour tout  $s, t \in [0, T]$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W(t)W(s)) &= \mathbb{E}(B^H((K_H^*)^{-1} 1_{[0,t]})B^H((K_H^*)^{-1} 1_{[0,s]})) \\ &= \langle ((K_H^*)^{-1} 1_{[0,t]}), ((K_H^*)^{-1} 1_{[0,s]}) \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle 1_{[0,t]}, 1_{[0,s]} \rangle = s \wedge t. \end{aligned}$$

De plus, pour tout  $\varphi \in \Lambda$ ,

$$\int_0^T \varphi(s) dB^H(s) = \int_0^T (K_H^* \varphi)(t) dW(t)$$

si et seulement si  $K_H^* \varphi \in L^2([0, T])$ .

En notant

$$L_H^2([0, T]) = \left\{ \varphi \in \Lambda, K_H^* \varphi \in L^2([0, T]) \right\},$$

pour  $H > \frac{1}{2}$  nous avons,

$$L^{\frac{1}{H}}([0, T]) \subset L^2_H([0, T]), \quad (1.25)$$

De plus, nous avons le résultat suivant :

**Lemme 1.7.4.** (Nualart [115]) pour  $\varphi \in L^{\frac{1}{H}}([0, T])$ ,

$$H(2H - 1) \int_0^T \int_0^T |\varphi(r)| |\varphi(u)| |r - u|^{2H-2} dr du \leq C_H \|\varphi\|_{L^{\frac{1}{H}}([0, T])}^2.$$

## Mouvement Brownien fractionnaire dans un espace de Hilbert

Nous nous intéressons maintenant au  $mBf$  à valeur dans un espace de Hilbert en donnant la définition de l'intégrale stochastique correspondante.

Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé,  $\mathbb{X} = (\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}}, (\cdot, \cdot)_{\mathbb{X}})$  un espace séparable de Hilbert et un paramètre de Hurst  $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ . Soit  $Q$  un opérateur auto-adjoint positif sur  $\mathbb{X}$ . La définition suivante est analogue à la définition d'un mouvement brownien infini-dimensionnel indexé par le paramètre de Hurst  $H$ .

**Définition 1.7.27.** Un processus Gaussien à valeurs dans  $\mathbb{X}$ ,  $(B_Q^H(t), t \geq 0)$  sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  est appelé un mouvement Brownien fractionnaire de type  $Q$ -covariance de paramètre  $H$  (ou tout simplement un mouvement  $Q$ -Brownien fractionnaire de paramètre  $H$ ) si ce processus satisfait

- (i)  $\mathbb{E}[B_Q^H(t)] = 0$  pour tout  $t \geq 0$
- (ii)  $\text{Cov}(B_Q^H(t), B_Q^H(s)) = \frac{1}{2} [t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}] Q$  pour tout  $s, t \in \mathbb{R}^+$
- (iii)  $(B_Q^H(t), t \geq 0)$  est à trajectoire continue presque sûrement.

L'existence d'un mouvement  $Q$ -Brownien fractionnaire est donnée par la proposition suivante :

**Proposition 1.7.10.** Soient  $H \in ]1/2, 1[$  et  $Q$  un opérateur linéaire tels que  $Q = Q^*$  et  $Q \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ , alors il existe un  $Q$ -mouvement Brownien fractionnaire de paramètre  $H$ .

On peut aussi définir un mouvement Brownien fractionnaire de type covariance directement par la relation (??) comme défini dans [49]. Dans ce cas, on utilise le mouvement Brownien fractionnaire cylindrique standard par analogie du processus de Wiener cylindrique. Le mouvement Brownien fractionnaire standard cylindrique dans  $\mathbb{X}$  est défini par la série

$$B^H(t) \sum_{n=1}^{\infty} B_n^H(t) e_n, \quad t \geq 0 \quad (1.26)$$

où  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une base orthonormale complète dans  $\mathbb{X}$ ,  $(B_n^H, n \in \mathbb{N}, t \geq 0)$  est une suite de mouvement Brownien fractionnaire indépendant de paramètre  $H \in (1/2, 1)$ . On sait que la série (1.26) ne converge pas nécessairement dans l'espace  $L^2(\Omega, \mathbb{X})$ . Donc  $B^H(t)$  n'est pas bien défini comme une variable aléatoire dans  $\mathbb{X}$ . Considérons, à présent, un processus à valeurs dans  $\mathbb{X}$  défini par :

$$B_Q^H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^H(t) Q^{\frac{1}{2}} e_n, \quad t \geq 0. \quad (1.27)$$

Si  $Q$  est un opérateur auto-adjoint à trace positif, la série (1.27) converge dans l'espace  $\mathbb{X}$ , cela revient à dire que  $B_Q^H(t) \in L^2(\Omega, \mathbb{Y})$ . Alors, nous dirons que  $B_Q^H(t)$  est un mouvement Brownien fractionnaire  $Q$ -cylindrique à valeur dans  $\mathbb{X}$  d'opérateur de covariance  $Q$ . Par exemple, si  $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de nombres réels positifs tels que  $Qe_n = \sigma_n e_n$ , en supposant que  $Q$  est un opérateur nucléaire dans  $\mathbb{Y}$  (c'est-à-dire  $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty$ ), alors le processus

$$B_Q^H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^H(t) Q^{1/2} e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\sigma_n} B_n^H(t) e_n, \quad t \geq 0,$$

est bien défini comme un mouvement Brownien fractionnaire cylindrique à valeurs dans  $\mathbb{Y}$ .

Soit  $\varphi : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}_2^0(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$  telle que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|K_H^*(\varphi Q^{1/2} e_n)\|_{\mathcal{L}^2([0, T]; \mathbb{X})} < \infty. \quad (1.28)$$

Nous avons la définition suivante :

**Définition 1.7.28.** *Étant donné  $H \in ]0, 1[$  et soit  $\varphi : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}_2^0(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$  satisfaisant (1.28).*

*Alors, l'intégrale stochastique par rapport un mouvement Brownien fractionnaire est définie, pour tout  $t \geq 0$ , comme suit :*

$$\begin{aligned} \int_0^t \varphi(s) dB_Q^H(s) &:= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \varphi(s) Q^{1/2} e_n dB_n^H(s) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (K_H^*(\varphi Q^{1/2} e_n))(s) dW(s). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Notons que si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi Q^{1/2} e_n\|_{L^{\frac{1}{H}}([0, T]; \mathbb{X})} < \infty,$$

alors, nous avons (1.28), et on retrouve immédiatement (1.25). Maintenant, nous terminons cette sous section en énonçant le résultat suivant qui est fondamental pour prouver notre résultat.

**Lemme 1.7.5.** [21] *Si  $\psi : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}_2^0(Y, X)$  satisfait  $\int_0^t \|\psi\|_{\mathcal{L}_2^0}^2 ds < \infty$ ,*

*alors la somme dans (1.29) est bien définie comme une variable aléatoire à valeurs dans  $X$  et nous avons :*

$$\mathbb{E} \left\| \int_0^t \psi(s) dB^H(s) \right\|^2 \leq 2Ht^{2H-1} \int_0^t \|\psi(s)\|_{\mathcal{L}_2^0}^2 ds.$$

## Existence et unicité de solutions faibles pour une classe d'équations intégrodifférentielles impulsives à condition non locale via la mesure de non compacité

---

### Résumé

L'objectif principal de ce chapitre est d'étudier l'existence de solutions faibles d'une classe d'équations intégrodifférentielles impulsives à condition non locale via la mesure de non compacité. Nous utiliserons la théorie de l'opérateur résolvant introduite par Grimmer [50] et certains théorèmes du point fixe pour établir le résultat d'existence. Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'une soumission<sup>1</sup> dans *Le mathematich*.

### 2.1 Introduction

Considérons le système impulsif non local suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + F(t, x(t), Gx(t)) + \int_0^t \Gamma(t-s)x(s)ds, \quad t \in [0, a], \quad t \neq t_i, \\ \Delta x(t_i) &= I_i(x(t_i)) \quad i = 1, 2, \dots, p, \\ x(0) &= x_0 + h(x), \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $A : D(A) \subseteq \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu  $\{S(t), t \geq 0\}$  dans un espace de Hilbert  $\mathbb{X}$ ,  $\Gamma(t)$  est un opérateur linéaire sur  $\mathbb{X}$  de domaine  $D(\Gamma) \supset D(A)$  et indépendant de  $t$ .  $F : [0, a] \times \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ ,  $Gx(t) = \int_0^t g(t, s)x(s)ds$ ,

---

1. Louk-Man Issaka; Mariam B Traoré; Hasna Hmoyed and Mamadou Abdoul Diop; *Nonlocal Integro-differential equations via Hausdorff measure of noncompactness*, *Le mathematich*, **soumis en 2020**

$g \in C[J, \mathbb{R}^+]$ ,  $J = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq t \leq a\}$ ,  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p < a$  avec  $t_{p+1} = a$ ,  $h : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ , et  $\Delta x(t_i) = x(t_i^+) - x(t_i^-)$  avec  $x(t_i^+)$ ,  $x(t_i^-)$  représentant respectivement la limite à droite et à gauche de  $x$  au temps  $t_i$ . Ici,  $PC([0, a], \mathbb{X}) = \{x : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X} \text{ est continu à } t \neq t_i, \text{ continu à gauche au point } t = t_i, \text{ et admettant une limite à droite } x(t_i^+) \text{ pour } i = 1, 2, \dots, p\}$ . Notons que l'ensemble  $PC([0, a], \mathbb{X})$  muni de la norme  $\|x\| = \sup\{\|x(t)\| : t \in [0, a]\}$  est un espace de Banach.

L'équation (2.1) présente deux grands axes d'étude intensive ces dernières années. Le premier axe concerne les équations différentielles à condition non locale, c'est-à-dire les problèmes non locaux. Ces types de problèmes ont vu le jour dans les années 1990 par l'intermédiaire des travaux de Byszewski et Lakshmikantham [24]. Ils ont étudié l'existence et l'unicité de solutions faibles des équations différentielles non locales. Comme nous l'avons dit plus haut, les problèmes non locaux modélisent mieux les problèmes de la vie réelle que les problèmes classiques et, c'est la raison pour laquelle dans la littérature, il existe plusieurs papiers qui étudient les équations différentielles à conditions non locales. En guise d'exemples de travaux sur la condition non locale, nous renvoyons le lecteur aux travaux [24, 86, 93, 112, 113]. Le deuxième axe est dédié aux équations différentielles impulsives. Ces dernières années, la théorie des équations différentielles impulsives est devenue un domaine de recherche très importante, en raison de son utilité, pour décrire les systèmes dont l'état change rapidement à certains moments, et qu'il est impossible de traiter avec les équations différentielles habituelles. Les systèmes impulsifs sont des systèmes constitués d'une partie continue et d'une partie discrète représentant les impulsions. Compte tenu de leur importance, de nombreux auteurs se sont intensivement investis dans la résolution des équations intégrodifférentielles impulsives et leurs applications dans les espaces de Banach ( pour plus de détails, voir [5, 37, 10, 15, 51, 89, 58, 100, 121] et les références qui y figurent).

## 2.2 Préliminaires

Soit  $D$  un sous-ensemble non vide d'un espace de Banach  $\mathbb{X}$ . Pour le reste de ce chapitre, les lemmes suivants nous seront d'une grande utilité.

**Lemme 2.2.1.** [13] Si  $D \subseteq PC([0, a], \mathbb{X})$  est borné, alors  $\chi(D(t)) \leq \chi(D)$  pour tout  $t \in [0, a]$ , où  $Q(t) = \{x(t) : x \in Q\} \subseteq \mathbb{X}$ . De plus, si on suppose que  $D$  est équicontinu sur  $[0, a]$ , alors  $\chi(D(t))$  est continu sur  $[0, a]$ , et  $\chi(D) = \sup\{\chi(D(t)) : t \in [0, a]\}$ .

**Lemme 2.2.2.** [102] Si  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset L^1([0, a], \mathbb{X})$  est uniformément intégrable, alors  $\chi(\{x_n(t)\}_{n=1}^\infty)$  est mesurable et

$$\chi\left(\left\{\int_0^t x_n(s) ds\right\}_{n=1}^\infty\right) \leq 2 \int_0^t \chi\{x_n(s)\}_{n=1}^\infty ds.$$

**Lemme 2.2.3.** [143] Nous supposons que  $0 < \epsilon < 1$ ,  $h > 0$  et nous posons que

$$S = \epsilon^n + C_n^1 \epsilon^{n-1} h + C_n^2 \epsilon^{n-2} \frac{h^2}{2!} + \dots + \frac{h^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Alors  $S = o(1/n^s)$  ( $n \rightarrow +\infty$ ), où  $s > 0$  est un réel arbitraire et  $C_n^1, C_n^2, \dots$ , sont les coefficients binomiaux [96]

**Définition 2.2.1.** Une fonction  $x \in PC([0, a] : \mathbb{X})$  est solution faible du système impulsif (2.1) si  $x$  satisfait l'équation suivante :

$$x(t) = \begin{cases} \mathcal{R}(t)[x_0 - h(x)] + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)F(s, x(s), Gx(s))ds, & t \in [0, t_1]; \\ \mathcal{R}(t-t_1)(x(t_1^-) + I_1(x(t_1^-))) + \int_{t_1}^t \mathcal{R}(t-s)F(s, x(s), Gx(s))ds, & t \in [t_1, t_2]; \\ \vdots \\ \mathcal{R}(t-t_p)(x(t_p^-) + I_p(x(t_p^-))) + \int_{t_p}^t \mathcal{R}(t-s)F(s, x(s), Gx(s))ds, & t \in [t_p, a]. \end{cases}$$

## 2.3 Résultats d'existence et d'unicité de solutions faibles

Dans cette section, nous allons énoncer nos résultats d'existence et d'unicité de solutions faibles du système (2.1) et nous utiliserons la mesure de non compacité et le Lemme 1.6.4 pour montrer nos principaux résultats.

Pour des constantes  $\gamma$  et  $\lambda$ , nous définissons

$$D = \{x \in PC([0, a], \mathbb{X}), \|x(t)\| \leq \gamma, \|Gx(t)\| \leq \lambda, \forall t \in [0, a]\}. \quad (2.2)$$

Dans la suite de ce chapitre, les hypothèses suivantes nous seront nécessaires.

(H<sub>1.1</sub>) L'opérateur résolvant  $\mathcal{R}(t)$  est équicontinu et, il existe une constante  $M$  telle que  $M = \sup\{\|\mathcal{R}(t)\|, t \in [0, a]\}$

(H<sub>1.2</sub>) Il existe deux constantes positives  $c$  et  $\delta$  telles que, la fonction  $h : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  satisfait

$$\|h(x)\| \leq c\|x\| + \delta, \quad \forall x \in PC([0, a], \mathbb{X})$$

(H<sub>1.3</sub>) La fonction  $F : [0, a] \times \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  satisfait les conditions de Carathéodory, c'est-à-dire,  $F(\cdot, x, (Gx))$  est mesurable pour tout  $x \in \mathbb{X}$ , et  $F(t, \cdot, \cdot)$  continue pour tout  $t \in [0, a]$ ;

(H<sub>1.4</sub>) Il existe une fonction  $L \in L^1([0, a], \mathbb{R}^+)$  et une fonction continue et croissante  $\nu : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que  $\|F(t, x, (Gx))\| \leq L(t)\nu(\|x\|, \|Gx\|)$  pour  $x \in \mathbb{X}$ ,  $t \in [0, a]$  presque partout ;

(H<sub>1.5</sub>) Il existe  $K, K_1 \in L^1([0, a], \mathbb{R}^+)$  telle que pour tout ensemble borné  $B_1, B_2 \subset \mathbb{X}$

$$\chi(F(t, B_1, B_2)) \leq K(t)\chi(B_1) + K_1(t)\chi(B_2)$$

pour tout  $t \in [0, a]$ ;

(H<sub>1.6</sub>) Les fonctions  $I_j : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ , sont complètement continues et uniformément bornées, et  $\max_{1 \leq k \leq p, x \in D} \|I_k(x)\| = \varsigma$ ;

(H<sub>1.7</sub>) Il existe une constante positive  $r$  telle que

$$M[\|x_0\| + (c\gamma + \delta) + \varsigma] + M\nu(r, \lambda) \int_0^a L(s)ds \leq r,$$

où  $M, c, \delta, \varsigma, \nu$  sont donnés par les hypothèses (H<sub>1.1</sub>) – (H<sub>1.2</sub>).

Il est important de remarquer que si  $\|F(t, x_1, x_2) - F(t, u_1, u_2)\| \leq L\|x_1 - u_1\| + L_1\|x_2 - u_2\|$ ,  $t \in [0, a]$ ,  $x_1, x_2, u_1, u_2 \in \mathbb{X}$ , alors  $\chi(f(t, B_1, B_2)) \leq K(t)\chi(B) + K_1(t)\chi(B_2)$  pour tout ensemble borné  $B_1, B_2 \subset \mathbb{X}$  et  $t \in [0, a]$

**Théorème 2.3.1.** *Supposons que les conditions (H1)–(H2) et (H<sub>1.1</sub>)–(H<sub>1.7</sub>) sont satisfaites. Alors, le système (2.1) a au moins une solution faible.*

**Preuve.** Considérons l'opérateur  $\psi : PC([0, a], \mathbb{X}) \rightarrow PC([0, a], \mathbb{X})$  défini par

$$\psi x(t) = \begin{cases} \mathcal{R}(t)[x_0 - h(x)] + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)F(s, x(s), Gx(s))ds, & t \in [0, t_1]; \\ \mathcal{R}(t-t_1)(x(t_1^-) + I_1(u(t_1^-))) + \int_{t_1}^t \mathcal{R}(t-s)F(s, x(s), Gx(s))ds, & t \in [t_1, t_2]; \\ \vdots \\ \mathcal{R}(t-t_p)(x(t_p^-) + I_p(x(t_p^-))) + \int_{t_p}^t \mathcal{R}(t-s)F(s, x(s), Gx(s))ds, & t \in [t_p, a]. \end{cases} \quad (2.3)$$

pour tout  $x \in PC([0, a], \mathbb{X})$ . Il s'agit de montrer que l'opérateur  $\psi$  satisfait les hypothèses du Lemme 1.6.4. De ce fait, nous subdivisons cette démonstration en plusieurs étapes.

**Etape 1** Tout d'abord, nous allons montrer que l'opérateur  $\psi$  est continu et  $\psi(D)$  est borné. Pour cela, nous considérons une suite  $(x_n) \subset PC([0, a], \mathbb{X})$  telle que  $x_n \rightarrow x$  dans  $PC([0, a], \mathbb{X})$ . Alors, d'après (H<sub>1.3</sub>), il résulte que  $F(s, x_n(s), Gx_n(s)) \rightarrow F(s, x(s), Gx(s))$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Et donc, pour tout  $\epsilon > 0$  suffisamment petit et  $n \rightarrow \infty$ , on a

$$\begin{aligned} \|\psi x_n(t) - \psi x(t)\| &\leq M \int_0^{t_1} \|F(s, x_n(s), Gx_n(s)) - F(s, x(s), Gx(s))\| ds \\ &\leq \epsilon M, \quad \forall t \in [0, t_1], \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \|\psi x_n(t) - \psi x(t)\| &\leq N [\|x_n(t_i^-) - x(t_i^-)\| + \|I_i(x_n(t_i^-)) - I_i(x(t_i^-))\|] \\ &\quad + \epsilon M, \quad \forall t \in (t_i, t_{i+1}], \end{aligned} \quad (2.5)$$

pour tout  $i = 1, 2, \dots, p$ . Il suffit d'utiliser l'hypothèse  $(\mathbf{H}_{1.3})$  et les équations (2.4)-(2.5) pour conclure que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\psi x_n - \psi x\|_{PC} = 0. \quad (2.6)$$

Considérons, à présent, l'ensemble  $D$  défini par (2.2). Cet ensemble  $D \subseteq PC([0, a], \mathbb{X})$  est borné et convexe. Et pour tout  $x \in D, t \in [0, t_1]$ , on a

$$\begin{aligned} \|(\psi x)(t)\| &\leq \|\mathcal{R}(t)[x_0 - g(x)]\| + \int_0^{t_1} \|\mathcal{R}(t-s)F(s, x(s), Gx(s))\| ds \\ &\leq M[\|x_0\| + (c\|x\| + \delta)] + M\nu(\gamma, \lambda) \int_0^{t_1} L(s) ds \\ &\leq M[\|x_0\| + (c\gamma + \delta)] + M\nu(\gamma, \lambda) \int_0^{t_1} L(s) ds. \end{aligned} \quad (2.7)$$

De la même manière, pour tout  $x \in D$  et  $i = 1, 2, \dots, p$ , on obtient

$$\|(\psi x)(t)\| \leq M[\|x_0\| + (c\gamma + \delta) + \varsigma] + M\nu(\gamma, \lambda) \int_0^{t_1} L(s) ds \quad t \in [t_i, t_{i+1}]. \quad (2.8)$$

Donc, des équations (2.7), (2.8) et des hypothèses  $(\mathbf{H}_{1.3})$  et  $(\mathbf{H}_{1.7})$ , on tire que :

$$\|(\psi x)(t)\| \leq M[\|x_0\| + (c\gamma + \delta) + \varsigma] + M\nu(\gamma, \lambda) \int_0^{t_1} L(s) ds \leq r \quad t \in [0, a].$$

Ce qui implique que  $\psi : D \rightarrow D$  est borné.

**Etape 2** Ensuite nous montrons que  $\psi(D)$  est équicontinu où  $D$  est l'ensemble défini par (2.2). Pour tout  $z_1, z_2 \in [0, t_1]$  tels que  $z_1 < z_2$  et pour tout  $\psi \in D(x)$  on a

$$\begin{aligned} \|(\psi x)(z_2) - (\psi x)(z_1)\| &\leq \|\mathcal{R}(z_2) - \mathcal{R}(z_1)\| \|x_0 - h(x)\| \\ &\quad + \left\| \int_0^{z_2} \mathcal{R}(z_2 - s)F(s, x(s), Gx(s)) ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{z_1} \mathcal{R}(z_2 - s)f(s, x(s), Gx(s)) ds \right\| \\ &\leq \|\mathcal{R}(z_2) - \mathcal{R}(z_1)\| \|x_0 - h(x)\| \\ &\quad + \int_0^{z_1} \|\mathcal{R}(z_2 - s) - \mathcal{R}(z_1 - s)\| L(s) \nu(\gamma, \lambda) ds \\ &\quad + \int_0^{z_1} \|\mathcal{R}(z_2 - s)\| L(s) \nu(\gamma, \lambda) ds \\ &\leq \|\mathcal{R}(z_2) - \mathcal{R}(z_1)\| [\|x_0\| - (c\gamma + \delta)] \\ &\quad + \int_0^{z_1} \|\mathcal{R}(z_2 - s) - \mathcal{R}(z_1 - s)\| L(s) \nu(\gamma, \lambda) ds \\ &\quad + \int_0^{z_1} \|\mathcal{R}(z_2 - s)\| L(s) \nu(\gamma, \lambda) ds. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Par le même calcul que précédent, on obtient pour tout  $z_1, z_2 \in [t_i, t_{i+1}]$ , et  $z_1 < z_2$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$

$$\begin{aligned} \|(\psi x)(z_2) - (\psi x)(z_1)\| &\leq \|\mathcal{R}(z_2) - \mathcal{R}(z_1)\| [\|x_0\| + (c\gamma + \delta) + \Lambda] \\ &\quad + \int_0^{z_2} \|\mathcal{R}(z_2 - s) - \mathcal{R}(z_1 - s)\| L(s) \nu(\gamma, \lambda) ds \\ &\quad + \int_0^{z_1} \|\mathcal{R}(z_2 - s) - \mathcal{R}(z_1 - s)\| L(s) \nu(\gamma, \lambda) ds. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Ainsi, de (2.9) et de (2.10), on obtient :

$$\lim_{z_1 \rightarrow z_2} \|(\psi x)(z_2) - (\psi x)(z_1)\| = 0.$$

Autrement dit  $\psi(D)$ , est équicontinu.

Soit  $\mathbb{V}_0 = \bar{c}o(\psi(D))$ . Pour tout  $V \subset \mathbb{V}_0$  et  $\epsilon > 0$ , grâce aux Lemme 1.3.2 et Lemme 2.2.2, il existe une suite  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$  telle que

$$\begin{aligned} \chi(\psi^1 V(t)) &= \chi(\psi V(t)) \\ &\leq 2\chi \left( \int_0^t \mathcal{R}(t-s)F(s, \{x_n(s)\}_{n=1}^{+\infty}, (G\{x_n(s)\}_{n=1}^{+\infty})) ds + \epsilon \right) \\ &\leq 4 \int_0^t \chi(\mathcal{R}(t-s)F(s, \{x_n(s)\}_{n=1}^{+\infty}, (G\{x_n(s)\}_{n=1}^{+\infty}))) ds + \epsilon \\ &\leq 4M \int_0^t (K(s)\chi\{x_n(s)\}_{n=1}^{+\infty} + \kappa K_1(s)\chi\{x_n(s)\}_{n=1}^{+\infty}) ds + \epsilon \\ &\leq 4M \left( \chi\{x_n(s)\}_{n=1}^{+\infty} \int_0^t K(s) + \kappa \chi\{x_n(s)\}_{n=1}^{+\infty} \int_0^t K_1(s) ds \right) + \epsilon \\ &\leq 4M \left( \chi_{PC} \int_0^t K(s) + \kappa \chi_{PC}(V) \int_0^t K_1(s) ds \right) + \epsilon \\ &\leq 4M \chi_{PC}(V) \int_0^t (K(s) + \kappa K_1(s)) ds \quad t \in [0, t_1], \end{aligned}$$

où le Lemme 2.2.2 a été utilisé. D'une manière similaire, on a :

$$\chi(\psi^1 V(t)) \leq 4M \chi_{PC}(V) \int_0^t (K(s) + \kappa K_1(s)) ds + \rho_1 \chi_{PC} + \epsilon \quad t \in [t_i, t_{i+1}] \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (2.11)$$

Comme  $D([0, a], \mathbb{R}^+)$  est dense dans  $L^1([0, a], \mathbb{R}^+)$ , il existe donc une fonction continue  $\varphi : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^+$  avec  $\max\{|\phi(t)| : t \in [0, a]\} = N$  satisfaisant la relation  $\int_0^a |K(s) + \kappa K_1(s) - \phi(s)| ds < \eta$  pour tout  $\eta > 0$  ( $\eta < \frac{1}{M}$ ), donc, (2.11) prend la forme

$$\begin{aligned} \chi(\psi^1 V(t)) &\leq 4M \left( \int_0^t |K(s) + \kappa K_1(s) - \varphi(s)| ds + \int_0^t |\phi(s)| ds \right) \chi_{PC}(V) \\ &\quad + \rho_1 \chi_{PC} + \epsilon \\ &\leq (\sigma + bt) \chi_{PC}(V) + \rho_1 \chi_{PC} + \epsilon, \end{aligned}$$

où  $\sigma = 4M\eta$ ,  $b = 4MN$  et  $\rho_1 = 2M \sum_{i=1}^p \varsigma_i$ . Encore une fois, d'après le Lemme 1.3.2, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe une suite  $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \bar{c}o(Q^1 B)$  telle que :

$$\begin{aligned} \chi(\psi^2 V(t)) &= \chi(\psi(\bar{c}o(\psi^1 V(t)))) \\ &\leq 2\chi \left( \int_0^t \mathcal{R}(t-s)F(s, \{z_n(s)\}_{n=1}^{+\infty}, (G\{z_n(s)\}_{n=1}^{+\infty})) ds + \epsilon \right) \\ &\leq 4 \int_0^t \chi(\mathcal{R}(t-s)F(s, \{z_n(s)\}_{n=1}^{+\infty}, (G\{z_n(s)\}_{n=1}^{+\infty}))) ds + \epsilon \\ &\leq 4M \int_0^t (K(s)\chi\{z_n(s)\}_{n=1}^{+\infty} + \kappa K_1(s)\chi\{z_n(s)\}_{n=1}^{+\infty}) ds + \epsilon \\ &\leq 4M \int_0^t (K(s) + \kappa K_1(s)) (\psi^1 V(s)) ds + \epsilon \\ &\leq 4M \int_0^t \{|K(s) + \kappa K_1(s) - \varphi(s)| + \varphi(s)\} [(a + bs) + \rho_1] \chi_{PC}(V) ds + \epsilon. \end{aligned}$$

Par la même manière, pour tout  $t \in ]t_i, t_{i+1}]$   $i = 1, 2, \dots, p$ , on a

$$\begin{aligned} \chi(\psi^2 V(t)) &\leq 4M \int_0^t \{|K(s) + \kappa K_1(s) - \varphi(s)| + \varphi(s)\} [(\sigma + bs) + \rho_1] \chi_{PC}(V) ds \\ &\quad + \rho_2 \chi_{PC}(V) + \epsilon \\ &\leq 4M \int_0^t |K(s) + \kappa K_1(s) - \varphi(s)| ds [(\sigma + bt) + \Lambda_1] \chi_{PC}(V) ds \\ &\quad + 4M \int_0^t [N[(\sigma + bs) + \rho_1] ds] \chi_{PC}(V) + \rho_2 \chi_{PC}(V) + \epsilon \\ &\leq \left( \sigma^2 + 2\sigma bt + \frac{(bt)^2}{2!} \right) \chi_{PC}(V) + [(\sigma + bt)\rho_1] \chi_{PC}(V) + \rho_2 \chi_{PC}(V) + \epsilon. \end{aligned}$$

Donc, par induction mathématique, pour tout entier  $n$  et pour tout  $t \in [0, a]$ , on a

$$\begin{aligned} \chi_{PC}(\psi^n V(t)) &\leq \left( \sigma^n + C_n^1 \sigma^{n-1} (bt) + C_n^2 \sigma^{n-2} \frac{(bt)^2}{2!} \dots + \frac{(bt)^n}{n!} \right) \chi_{PC}(V) + \\ &\quad + \left( \sigma^{n-1} + C_{n-1}^1 \sigma^{n-2} (bt) + C_{n-1}^2 \sigma^{n-3} \frac{(bt)^2}{2!} \dots + \frac{(bt)^{n-1}}{(n-1)!} \right) \rho_{n-1} \chi_{PC}(V) \\ &\quad + \rho_n \chi_{PC}(V). \end{aligned}$$

En appliquant le Lemme 2.2.1, on peut obtenir :

$$\begin{aligned} \chi(\psi^n V(t)) &\leq \left( \sigma^n + C_n^1 \sigma^{n-1} (b) + C_n^2 \sigma^{n-2} \frac{(b)^2}{2!} + \dots + \frac{(b)^n}{n!} \right) \chi_{PC}(V) + \\ &\quad + \left( \sigma^{n-1} + C_{n-1}^1 \sigma^{n-2} (b) + C_{n-1}^2 \sigma^{n-3} \frac{(b)^2}{2!} + \dots + \frac{(b)^{n-1}}{(n-1)!} \right) \rho_{n-1} \chi_{PC}(V) \\ &\quad + \rho_n \chi_{PC}(V). \end{aligned}$$

Et d'après le Lemme 2.2.3, il existe un entier naturel  $n_0$  tel que :

$$\begin{aligned} \sigma^{n_0} + C_{n_0}^1 \sigma^{n_0-1} (b) + C_{n_0}^2 \sigma^{n_0-2} \frac{(b)^2}{2!} + \dots + \frac{(b)^{n_0}}{n_0!} &= R < 1, \\ \sigma^{n_0-1} + C_{n_0-1}^1 \sigma^{n_0-2} (b) + C_{n_0-1}^2 \sigma^{n_0-3} \frac{(b)^2}{2!} + \dots + \frac{(b)^{n_0-1}}{(n_0-1)!} &= T < 1, \\ \rho_{n_0-1} = l \quad \text{et} \quad \rho_{n_0} = q. \end{aligned}$$

Donc

$$\chi_{PC}(\psi^{n_0} V) \leq R \chi_{PC}(V) \chi_{PC} + T l \chi_{PC} + q \chi_{PC}(V) \leq (R + T l + q) \chi_{PC}.$$

Ce qui implique d'après le Lemme 1.6.4 que  $\psi$  admet au moins un point fixe dans  $\mathbb{V}_0$ , ce qui veut dire que, le système (2.1) a au moins une solution faible dans  $\mathbb{V}_0$ . Ce qui complète la preuve. □

**Théorème 2.3.2.** *Sous les hypothèses (H1) – (H2) et (H<sub>1.1</sub>) – (H<sub>1.6</sub>), il existe au moins une solution faible du système (2.1) pourvu que*

$$\int_0^a L(s) ds < \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{T - M[||x_0|| + (cT + \delta) + \varsigma]}{M\nu(T, \lambda)}.$$

**Preuve.** La démonstration de cette preuve est similaire à celle du Théorème 2.3.1

□

Pour le reste de ce chapitre, nous aurons besoin de condition suivante :

(**H<sub>1.2'</sub>**) Soit  $h : PC([0, a], \mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{X}$  une fonction continue et compacte. Alors, il existe une constante positive  $\tau > 0$  telle que  $\|h(x)\| \leq \tau$  pour tout  $x \in PC([0, a], \mathbb{X})$ .

**Théorème 2.3.3.** *Supposons les conditions (**H1**) – (**H2**), (**H<sub>1.1</sub>**), (**H<sub>1.2'</sub>**) et (**H<sub>1.3</sub>**) – (**H<sub>1.7</sub>**). Alors, il existe au moins une solution faible pour le système (2.1), pourvu qu'il existe une constante  $r$  telle que :*

$$M[\|x_0\| + \tau + \rho] + M\nu(\gamma, \lambda) \int_0^a L(s)ds \leq r.$$

**Preuve.** Cette preuve utilise également les mêmes arguments que la preuve du Théorème 2.3.1.

□

## 2.4 Exemple

Dans section nous donnons un exemple illustratif de nos résultats abstrait. Pour cela nous considérons le système intégrodifférentiel non local suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z(t,w)}{\partial t} = q(x)z(t,w) + \int_0^t b(t-s)q(x)z(t,w)ds + \sin^2 z(t,w) \\ \quad + \int_0^a \frac{z(s,w)}{\sqrt{(1+t)(2+s)^3}} ds, \quad t \in [0, a], t \neq t_i, 0 \leq w \leq 1 \\ z(t,0) = z(t,1) = 0 \text{ pour } t \in [0, a], \\ z(0,w) = z_0 + \int_0^a \sqrt{3+s^2} \log(2+|z(s,w)|) ds, \quad t \in [0, a], t \neq t_i, 0 \leq w \leq 1 \\ \Delta z(t,w) = \int_0^a \frac{(1+|\cos^2 z(s,w)|)}{\sqrt[3]{t^2+s^2+7}} ds, \quad i \geq 1, \end{array} \right. \quad (2.12)$$

où  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p < a$  et  $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_q < a$ . Soit  $\mathbb{X} = L^2([0, 1], \mathbb{C})$  l'espace des fonctions carrées intégrables sur  $[0, 1]$  et supposons que :

1.  $b : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$  est une fonction de classe  $C^1$  avec  $b'$  sa fonction dérivée vérifiant  $|b'(t)| \leq b(t)$  pour tout  $t \geq 0$ .
2.  $q : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$  est une fonction continue satisfaisant  $\sup_{s \in [0,1]} \text{Re}(q(s)) < \infty$  et  $\overline{q([0, 1])} \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re}\lambda \geq \xi\}$  borné pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ .

Afin de représenter le système non local (2.12) sous la forme du système abstrait (2.1), nous définissons sur  $\mathbb{X}$  l'opérateur multiplicatif  $A$  comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} D(A) = \{N \in \mathbb{X} : q.N \in \mathbb{X}\} \\ AN = q.N. \end{array} \right.$$

D'après [[43], p. 121], on sait que  $A$  génère un semi-groupe multiplicatif continu en norme

$$(S_q(t))_{t \geq 0} \text{ sur } \mathbb{X} \text{ donné par } S_q(t)N = e^{tq}N \text{ pour } t \geq 0 \text{ et } N \in \mathbb{X}.$$

Posons  $x(t) = z(t, w)$  pour tout  $t \geq 0$  et  $w \in [0, 1]$  et définissons l'opérateur  $\Gamma(t) : \mathbb{Y} \mapsto \mathbb{X}$  comme suit :  $\Gamma(t)N = b(t)AN$  pour  $t \geq 0$  et  $N \in D(\Gamma)$ . Ainsi, on peut donc réécrire le système non local (2.12) sous la forme abstraite suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + F(t, x(t), Gx(t)) + \int_0^t \Gamma(t-s)x(s)ds, \quad t \in [0, a], \quad t \neq t_i, \\ \Delta x(t_i) &= I_i(x(t_i)) \quad i = 1, 2, \dots, p, \\ x(0) &= x_0 + h(x). \end{cases} \quad (2.13)$$

Il est évident que :

$$\begin{aligned} |\Gamma(t)x| &\leq b(t)|x|, \\ \left| \frac{d}{dt} \Gamma(t)x \right| &\leq c(t)|x|_{\mathbb{Y}}, \end{aligned}$$

pour tout  $x \in \mathbb{Y}$  et  $t \in \mathbb{R}^+$ . Ce qui nous permet de conclure que les hypothèses **(H1)** et **(H2)** sont vérifiées. Par conséquent, d'après le Lemme 1.5.4, le système non local (2.13) admet un opérateur résolvant  $(\mathcal{R}(t))_{t \geq 0}$  dans  $\mathbb{X}$  qui est continu en norme pour tout  $t > 0$ . On peut facilement montrer aussi que toutes les hypothèses du Théorème 2.3.1 sont vérifiées pour tout positif assez grand  $r$ . Par conséquent, on peut appliquer la conclusion du Théorème 2.3.1 au problème (2.12).

## Résultats sur les équations intégrodifférentielles stochastiques non locale dirigées par un mouvement Brownien fractionnaire

### Résumé

Ce chapitre est dédié à l'étude de l'existence de solutions faibles d'une classe d'équations intégrodifférentielles stochastiques à condition non locale dirigées par un mouvement Brownien fractionnaire indexé par  $H \in (1/2, 1)$  dans un espace séparable de Hilbert. En se basant sur la théorie des opérateurs résolvants introduite par Grimmer [50], des résultats de l'analyse stochastique et des critères du point fixe, nous obtenons des résultats sur l'existence et l'unicité de solutions faibles du système stochastique (3.1). A la fin de ce chapitre, nous donnerons un exemple qui illustre l'applicabilité des résultats abstraits obtenus. Les résultats de ce chapitre ont été d'une publication<sup>1</sup> dans **Open Mathematics**.

### 3.1 Introduction

Une équation différentielle stochastique (EDS) est une généralisation de la notion d'équation différentielle ordinaire (EDO) à laquelle l'on rajoute un terme aléatoire (bruit blanc). Les EDS permettent de modéliser des trajectoires aléatoires, telles que des cours de bourse ou des mouvements de particules soumises à des phénomènes de diffusion. Elles permettent aussi de traiter théoriquement ou numériquement des problèmes issus de la théorie des équations aux dérivées partielles. Les domaines d'application des EDS sont vastes. Il existe plusieurs termes aléatoires qu'on ajoute aux EDO pour obtenir des EDS, mais le terme le plus populaire qui

---

1. Louk-Man Issaka, Mamadou Abdoul Diop and Hasna Hmoyed *Nonlocal stochastic integrodifferential equation driven by fractional Brownian motions*, *Open Mathematics*, 18 (2020), 1-16, DOI : [10.1515/math-2020-0063](https://doi.org/10.1515/math-2020-0063)

prend en compte la dépendance d'un phénomène à court ou à long terme est le mouvement Brownien fractionnaire.

Le mouvement Brownien fractionnaire (fBm) est l'une des généralisations naturelles du mouvement brownien. C'est une famille de processus gaussiens centrés et continus indexés par le paramètre de Hurst  $H \in (0, 1)$ . Lorsque  $H = \frac{1}{2}$ , il est réduit au mouvement brownien standard, sinon, il n'est ni un processus de Markov, ni une martingale et donc il n'est donc pas possible d'utiliser l'analyse stochastique classique. Le mouvement Brownien fractionnaire a été introduit par Kolmogorov [79] en 1940 et possède des propriétés très importantes telles que l'auto-similarité et la non-stationnarité. Mandelbrot et Van Ness [98] l'ont rendu célèbre en l'introduisant dans des modèles financiers et en étudiant ses propriétés. Ces propriétés permettent à fBm d'être utilisé dans plusieurs domaines tels que la télécommunication, la biologie, la finance, l'ingénierie, etc. Pour cela, il est avantageux et important d'investir dans le calcul stochastique dirigé par fBm. Cette raison a permis à un bon nombre de chercheurs (voir [3, 19, 30, 65, 101]) d'effectuer des travaux de recherches approfondies sur les équations différentielles stochastiques dirigées par le mouvement brownien fractionnaire (fBm). Ils ont développé plusieurs méthodes d'étude. Pour plus de détails sur le mouvement brownien fractionnaire, voir [7, 21, 28, 33, 42] et les références qu'ils contiennent.

Inspiré par la discussion précédente, notre étude, dans ce chapitre, portera sur l'existence de solution faible d'une classe d'équations intégrodifférentielles stochastiques non locale de la forme suivante :

$$\begin{cases} dx(t) &= \left( Ax(t) + F(t, x(t)) + \int_0^t \Gamma(t-s)x(s)ds \right) dt + \sigma(t)dB^H(t), \quad t \in J := [0, b], \\ x_0(t) &= x(0) + h(x), \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $A$  est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu  $\{S(t), t \geq 0\}$  dans un espace de Hilbert  $\mathcal{X}$ ;  $\Gamma : D(\Gamma) \rightarrow \mathcal{X}$  est un opérateur linéaire fermé de  $D(\Gamma) \supset D(A)$ , qui est indépendant de  $t$ .  $B^H = \{B^H(t), t \in J\}$  est un mouvement Brownien fractionnaire de paramètre de Hurst  $H \in ]\frac{1}{2}, 1[$  sur un espace séparable de Hilbert  $\mathcal{V}$ . Soit  $(\Omega, \mathcal{F}_b, \mathbb{P})$  un espace probabilisé avec  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, b]}$  la filtration normale. Le processus  $\{x(t)\}_{t \in [0, b]}$  est a valeurs dans un espace réel séparable de Hilbert  $\mathcal{X}$ .  $F, \sigma, h$  sont des fonctions appropriées qui satisferont des hypothèses qui nous préciserons plus tard.  $x_0$  est une variable aléatoire  $\mathcal{F}_0$ -mesurable indépendante de  $B^H$  de moment d'ordre deux (2) fini.

Nous savons que de nombreux résultats d'existence d'équations différentielles stochastiques avec des conditions non locales exigent la compacité des termes locaux. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'affaiblissement de ces hypothèses concernant les termes non locaux.

## 3.2 Définition et Rappels

On considère  $\mathbb{V}$  et  $\mathbb{X}$  deux espaces réels séparables de Hilbert et  $(\Omega, \mathcal{F}_b, \mathbb{P})$  un espace de probabilité complet muni de sa filtration normale  $\mathcal{F}_{t \in [0, b]}$ . On désigne par  $\mathcal{F}_b$  un  $\sigma$ -algèbre prévisible sur  $\Omega_b := [0, b] \times \Omega$ . L'espace  $\mathbb{X}$  sera muni des boréliens  $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ .

On définit les espaces de Banach suivants :

$$L(\mathbb{V}, \mathbb{X}) := \{f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{X} / \text{un opérateur linéaire et borné}\},$$

$$L^2(\Omega, \mathcal{F}_b, \mathbb{X}) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{X} / f \text{ est } \mathcal{F}_b\text{- une variable aléatoire de carrée intégrable}\},$$

$$C(J, L^2(\Omega, \mathcal{F}_b, \mathbb{X})) := \left\{ x : J \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}_b, \mathbb{X}) / x \text{ est continu de } J \right. \\ \left. \text{dans } L^2(\Omega, \mathcal{F}_b, \mathbb{X}) \text{ telle que } \sup_{t \in J} \mathbb{E} \|x(t)\|^2 < \infty \right\}$$

$$\mathbf{C} := \{x : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{X} / x \in C(J, L^2(\Omega, \mathcal{F}_b, \mathbb{X})) \text{ est un processus stochastique } \mathcal{F}_t\text{- adapté}\}.$$

Pour  $x \in \mathbf{C}$ , on définit la norme  $\|x\|_{\mathbf{C}}^2 = (\sup_{t \in J} \mathbb{E} \|x(t)\|^2)$ . Il est clair que  $(\mathbf{C}, \|\cdot\|_{\mathbf{C}})$  est un espace de Banach.

La définition suivante nous donne la notion de solution faible du système stochastique (3.1)

**Définition 3.2.1.** *On appelle solution faible du système stochastique (3.1), tout processus stochastique  $x \in \mathbf{C}$  à valeur dans  $\mathbb{X}$  qui satisfait les conditions suivantes :*

1.  $x(0) + h(x) = x_0$  ;
2. pour tout  $t \in J$ , on a l'équation intégrale suivante :

$$x(t) = \mathcal{R}(t)[x_0 - h(x)] + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)F(s, x(s))ds + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)\sigma(s)dB^H(s), \quad P\text{-}a.s.$$

Définissons l'opérateur  $\mathbb{F}$  sur  $\mathbf{C}$  défini par :

$$\mathbb{F}(t) = \mathcal{R}(t)[x_0 - h(x)] + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)F(s, x(s))ds + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)\sigma(s)dB^H(s), \quad P\text{-}p.s. \quad (3.2)$$

## 3.3 Résultat d'existence et d'unicité de solutions faibles du système stochastique

Avant de donner les résultats d'existences et d'unicité des solutions faibles pour le problème (3.1), nous introduisons les hypothèses suivantes :

(**H**<sub>2.1</sub>) La fonction  $F : J \times \Omega \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  est mesurable de  $(\Omega_b \times \mathbb{X}, \mathcal{P}_b \times \mathcal{B})$  dans  $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$ .

De plus, il est à croissance linéaire par rapport à la variable  $x$  c'est-à-dire, il existe une constante positive  $c_1 > 0$  telle que :

$$\|F(t, \omega, x)\| \leq c_1(1 + \|x\|), \quad \forall x \in \mathbb{X}, \forall t \in J, \text{ presque partout } \omega \in \Omega.$$

(H<sub>2.2</sub>) Il existe une constante  $L_1 > 0$  telle que :

$$\|F(t, \omega, x) - F(t, \omega, y)\| \leq L_1 \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{X}, \forall t \in J, \text{ presque partout } \omega \in \Omega.$$

(H<sub>2.3</sub>) La fonction  $\sigma : J \rightarrow L_Q^0(\mathbb{V}, \mathbb{X})$  est mesurable et il existe une constante positive  $c_2 > 0$  telle que

$$(i) \quad \sup_{0 \leq s \leq b} \|\sigma(s)\|_{L_Q^0(\mathbb{V}, \mathbb{X})}^2 \leq c_2,$$

$$(ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|\sigma Q^{\frac{1}{2}} e_n\|_{L^{\frac{1}{H}}([0, b], \mathbb{X})} < \infty,$$

$$(iii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|\sigma Q^{\frac{1}{2}} e_n\|_{\mathbb{X}} \text{ est uniformément convergent pour } t \in [0, b].$$

(H<sub>2.4</sub>) Il existe une constante  $L_2 > 0$  telle que  $h : \mathbf{C} \rightarrow \mathbb{X}$  satisfait

$$\|h(x_1) - h(x_2)\|^2 \leq L_2 \|x_1 - x_2\|_{\mathbf{C}}^2.$$

(H<sub>2.5</sub>) Il existe une constante  $c_3 > 0$  telle que :

$$\|h(x)\| \leq c_3(1 + \|x\|), \forall x \in \mathbf{C}, \text{ presque partout } \omega \in \Omega.$$

**Lemme 3.3.1.** *Supposons que les hypothèses (H<sub>2.1</sub>), (H<sub>2.3</sub>) et (H<sub>2.5</sub>) sont satisfaites. Alors, pour tout  $x \in \mathbf{C}$ , l'application  $t \mapsto (\mathbb{F}x)(t)$  est continue sur l'intervalle  $[0, b]$  dans  $L^2$ .*

*Démonstration.* Considérons l'opérateur  $\mathbb{F}$  sur  $\mathbf{C}$  défini par :

$$(\mathbb{F}x)(t) = \mathcal{R}(t)[x_0 - h(x)] + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)F(s, x(s))ds + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)\sigma(s)dB^H(s) \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Soit  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq b$ . Alors, pour tout  $x \in \mathbf{C}$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\|(\mathbb{F}x)(t_2) - (\mathbb{F}x)(t_1)\|^2 &\leq 3\mathbb{E}\|(\mathcal{R}(t_2) - \mathcal{R}(t_1))[x_0 - h(x)]\|^2 \\ &\quad + 3\mathbb{E}\left\|\int_0^{t_2} \mathcal{R}(t_2-s)F(s, x(s))ds - \int_0^{t_1} \mathcal{R}(t_1-s)F(s, x(s))ds\right\|^2 \\ &\quad + 3\mathbb{E}\left\|\int_0^{t_2} \mathcal{R}(t_2-s)\sigma(s)dB^H(s) - \int_0^{t_1} \mathcal{R}(t_1-s)\sigma(s)dB^H(s)\right\|^2 \\ &:= I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned}$$

avec

$$I_1 = 3\mathbb{E}\|(\mathcal{R}(t_2) - \mathcal{R}(t_1))[x_0 - h(x)]\|^2 \quad (3.3)$$

$$I_2 = 3\mathbb{E}\left\|\int_0^{t_2} \mathcal{R}(t_2-s)F(s, x(s))ds - \int_0^{t_1} \mathcal{R}(t_1-s)F(s, x(s))ds\right\|^2 \quad (3.4)$$

$$I_3 = 3\mathbb{E}\left\|\int_0^{t_2} \mathcal{R}(t_2-s)\sigma(s)dB^H(s) - \int_0^{t_1} \mathcal{R}(t_1-s)\sigma(s)dB^H(s)\right\|^2. \quad (3.5)$$

Il suffira maintenant de montrer que chaque  $I_i$  tend vers 0 quand  $t_2 \rightarrow t_1$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

On sait, d'après la Définition 1.5.3, que  $\mathcal{R}(t)$  est fortement continu, donc on a :

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} (\mathcal{R}(t_2) - \mathcal{R}(t_1))[x_0 - h(x)] = 0.$$

Or, d'après l'hypothèse  $(\mathbf{H}_{2.5})$  et la Définition 1.5.3, on a la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{R}(t_2) - \mathcal{R}(t_1))[x_0 - h(x)]\| &\leq 2M(\|x_0\| + \|h(x)\|) \\ &\leq 2M(\|x_0\| + c_3(1 + \|x\|)) \in L^2(\Omega). \end{aligned}$$

D'après ces deux résultats, on peut donc appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue pour conclure que

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} I_1 = 0.$$

Par un calcul direct, on obtient

$$\begin{aligned} I_2 &\leq 6\mathbb{E} \left\| \int_0^{t_1} (\mathcal{R}(t_2 - s) - \mathcal{R}(t_1 - s))F(s, x(s))ds \right\|^2 + 6\mathbb{E} \left\| \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{R}(t_2 - s)F(s, x(s))ds \right\|^2 \\ &:= I_{21} + I_{22} \end{aligned}$$

avec

$$I_{21} = 6\mathbb{E} \left\| \int_0^{t_1} (\mathcal{R}(t_2 - s) - \mathcal{R}(t_1 - s))F(s, x(s))ds \right\|^2$$

et

$$I_{22} = 6\mathbb{E} \left\| \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{R}(t_2 - s)F(s, x(s))ds \right\|^2.$$

Pour  $I_{21}$ , on a

$$I_{21} \leq 6\mathbb{E} \int_0^{t_1} \|(\mathcal{R}(t_2 - s) - \mathcal{R}(t_1 - s))F(s, x(s))\|^2 ds.$$

En exploitant les conditions (i) et (ii) de la Définition 1.5.3, pour tout  $s, t_1, t_2 \in [0, b]$ , on a

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} (\mathcal{R}(t_2 - s) - \mathcal{R}(t_1 - s))F(s, x(s)) = 0$$

et d'après les inégalités élémentaires et la condition  $(\mathbf{H}_{2.1})$ , on a

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{R}(t_2 - s) - \mathcal{R}(t_1 - s))F(s, x(s))\|^2 &\leq 2M^2\|F(s, x(s))\|^2 \\ &\leq 2M^2c_1^2(1 + \|x\|)^2 \\ &\leq 4M^2c_1^2(1 + \|x\|^2). \end{aligned}$$

D'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on conclut que

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} I_{21} = 0.$$

L'utilisation de  $(\mathbf{H}_{2.1})$ , de la Définition 1.5.3 et de l'inégalité de Hölder pour  $I_{22}$ , nous donne

$$I_{22} \leq M^2c_1^2(t_2 - t_1) \int_{t_1}^{t_2} \mathbb{E}(1 + \|x(s)\|)^2 ds \leq 2M^2c_1^2(t_2 - t_1) \int_{t_1}^{t_2} (1 + \mathbb{E}\|x(s)\|^2) ds,$$

et on conclut que

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} I_{22} = 0.$$

À la lumière des deux dernières limites, on a  $\lim_{t_2 \rightarrow t_1} I_2 = 0$ .

Pour le terme  $I_3$ , nous avons

$$\begin{aligned} I_3 &\leq 6\mathbb{E} \left\| \int_0^{t_1} (\mathcal{R}(t_2 - s) - \mathcal{R}(t_1 - s))\sigma(s)dB^H(s) \right\|^2 + 6\mathbb{E} \left\| \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{R}(t_2 - s)\sigma(s)dB^H(s) \right\|^2 \\ &\leq I_{31} + I_{32}, \end{aligned}$$

où

$$I_{31} = 6\mathbb{E} \left\| \int_0^{t_1} (\mathcal{R}(t_2 - s) - \mathcal{R}(t_1 - s))\sigma(s)dB^H(s) \right\|^2$$

et

$$I_{32} = 6\mathbb{E} \left\| \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{R}(t_2 - s)\sigma(s)dB^H(s) \right\|^2.$$

En utilisant le Lemme 2.2.1, on obtient

$$I_{31} \leq C_H t_1^{2H-1} \int_0^{t_1} \|(\mathcal{R}(t_2 - s) - \mathcal{R}(t_1 - s))\sigma(s)\|_{L_Q^0(\mathbb{V}, \mathbb{X})}^2 ds.$$

Puisque  $(\mathcal{R}(t))_{t \geq 0}$  est fortement continue, en se servant de  $(\mathbf{H}_{2.3})$ , on obtient

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} (\mathcal{R}(t_2 - s) - \mathcal{R}(t_1 - s))\sigma(s) = 0,$$

et

$$\|(\mathcal{R}(t_2 - s) - \mathcal{R}(t_1 - s))\sigma(s)\|^2 \leq 2N^2 c_2^2 (e^{t_2 \eta} + e^{t_1 \eta}),$$

donc, d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} I_{31} = 0.$$

En appliquant une fois encore le Lemme 2.2.1, on obtient

$$\begin{aligned} I_{32} &\leq C_H (t_2 - t_1) \int_{t_1}^{t_2} \|\mathcal{R}(t_2 - s)\sigma(s)\|_{L_Q^0(\mathbb{V}, \mathbb{X})}^2 ds \\ &\leq C_H (t_2 - t_1) M^2 c_2^2, \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} I_3 = 0.$$

Tous ces résultats montrent que  $\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \mathbb{E} \|(\mathbb{F}x)(t_2) - (\mathbb{F}x)(t_1)\|^2 = 0$ . Ainsi, on conclut que la fonction  $t \mapsto (\mathbb{F}x)(t)$  est continue sur  $[0, b]$  dans le sens de  $L^2$ .  $\square$

**Lemme 3.3.2.** *On suppose que  $(\mathbf{H}_{2.1})$ ,  $(\mathbf{H}_{2.3})$  et  $(\mathbf{H}_{2.5})$  sont satisfaites. Alors, l'opérateur  $\mathbb{F}$  est défini de  $\mathbf{C}$  dans  $\mathbf{C}$ .*

*Démonstration.* Pour tout  $x \in \mathbf{C}$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|(\mathbb{F}x)(t)\|^2 &\leq 3\mathbb{E} \|\mathcal{R}(t)[x_0 - h(x)]\|^2 + 3\mathbb{E} \left\| \int_0^t \mathcal{R}(t-s)F(s, x(s))ds \right\|^2 \\ &\quad + 3\mathbb{E} \left\| \int_0^{t_2} \mathcal{R}(t-s)\sigma(s)dB^H(s) \right\|^2 \\ &:= P_1 + P_2 + P_3. \end{aligned}$$

Pour calculer  $P_1$ , on utilise  $(\mathbf{H}_{2.3})$  et on a

$$P_1 \leq 6M^2\mathbb{E}(\|x_0\|^2 + \|h(x)\|^2) \leq 6M^2[\mathbb{E}\|x_0\|^2 + 2c_2^2(1 + \|x\|_{\mathbf{C}}^2)].$$

D'après  $(\mathbf{H}_{2.2})$ , la Définition 1.5.3 et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} P_2 &\leq 3M^2\mathbb{E}\left(\int_0^t \|F(s, x(s))\| ds\right)^2 \\ &\leq 3(Mc_1)^2 t \mathbb{E}\left(\int_0^t (1 + \|x(s)\|)^2 ds\right) \\ &\leq 6(Mc_1)^2 b(1 + \|x\|_{\mathbf{C}}^2). \end{aligned}$$

En combinant  $(\mathbf{H}_{2.3})$  et le Lemme 2.2.1 nous avons

$$P_3 \leq 3C_H t^{2H-1} \int_0^t \|\mathcal{R}(t-s)\sigma(s)\|_{L_Q^0(\mathbb{V}, \mathbb{X})}^2 ds \leq 3C_H M^2 b^{2H} c_2.$$

Lorsqu'on regroupe toutes ces estimations, on obtient donc que

$$\|\mathbb{F}x\|_{\mathbf{C}}^2 = \sup_{t \in J} \mathbb{E}\|(\mathbb{F}x)(t)\|^2 < \infty.$$

D'après le Lemme 3.3.1,  $(\mathbb{F}x)(t)$  est continu sur  $[0, b]$  et alors  $\mathbb{F}$  est défini de  $\mathbf{C}$  dans  $\mathbf{C}$ . Ce qui met fin à la preuve.  $\square$

**Théorème 3.3.1.** *Sous les hypothèses  $(\mathbf{H1}) - (\mathbf{H2})$  et  $(\mathbf{H}_{2.1}) - (\mathbf{H}_{2.5})$ , le système stochastique (3.1) a une unique solution faible dans  $\mathbf{C}$ , si la condition*

$$2M^2(L_2^2 + L_1^2 b^2) < 1 \tag{3.6}$$

*est satisfaite.*

*Démonstration.* La preuve de ce théorème utilise le principe de contraction. Pour cela, on commence par montrer que l'opérateur  $\mathbb{F}$  est une contraction. Pour tout  $x_1, x_2 \in \mathbf{C}$ , d'après les hypothèses  $(\mathbf{H}_{2.3})$  et  $(\mathbf{H}_{2.4})$  et la Définition 1.5.3, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\|(\mathbb{F}x_1)(t) - (\mathbb{F}x_2)(t)\|^2 &\leq 2\mathbb{E}\|R(t)[h(x_1) - h(x_2)]\|^2 \\ &\quad + 2\mathbb{E}\left\|\int_0^t R(t-s)[F(s, x_1) - F(s, x_2)] ds\right\|^2 \\ &\leq 2M^2\mathbb{E}\|h(x_1) - h(x_2)\|^2 + 2M^2\mathbb{E}\left(\int_0^t \|F(s, x_1) - F(s, x_2)\| ds\right)^2 \\ &\leq 2M^2 L_2 \|x_1 - x_2\|_{\mathbf{C}}^2 + M^2 b^2 \mathbb{E}\left(\int_0^t \|F(s, x_1) - F(s, x_2)\| ds\right)^2 \\ &\leq (L_2 + L_1^2 b^2) 2M^2 \|x_1 - x_2\|_{\mathbf{C}}^2. \end{aligned}$$

Alors,

$$\|(\mathbb{F}x_1)(t) - (\mathbb{F}x_2)(t)\|_{\mathbf{C}}^2 \leq 2M^2(L_2 + L_1^2 b^2) \|x_1 - x_2\|_{\mathbf{C}}^2.$$

Ce qui implique de l'équation (3.6), que  $\mathbb{F}$  est une contraction. Selon le principe de contraction, on sait donc que l'opérateur  $\mathbb{F}$  admet un unique point fixe  $x$  dans  $\mathbf{C}$ , qui est la solution faible du système (3.1). La preuve est donc complète.  $\square$

Dans la suite de ce chapitre, nous allons utiliser le théorème du point fixe de Krasnoselskii pour établir les résultats pour le système stochastique (3.1). A cette fin, nous introduisons l'hypothèse supplémentaire suivante :

(H<sub>2.6</sub>) l'opérateur résolvant  $\mathcal{R}(t)$  est compact pour  $t > 0$ .

**Théorème 3.3.2.** *Si les hypothèses (H1) – (H2) et (H<sub>2.3</sub>) – (H<sub>2.6</sub>) sont satisfaites, alors le système stochastique (3.1) a une solution faible dans  $\mathbf{C}$ , pourvu que la condition*

$$M^2 L_2 + 12M^2 c_3^2 + 6M^2 c_1^2 b^2 < 1, \quad (3.7)$$

soit vérifiée.

*Démonstration.* Sans perte de généralité, choisissons  $r > 0$  de sorte que

$$r^2 \geq \frac{6M^2 \mathbb{E} \|x_0\| + 12M^2 c_3^2 + 3M^2 C_H b^{2H-1} c_2^2 + 6M^2 c_1^2 b}{1 - 12M^2 c_3^2 - 6M^2 c_1^2 b^2}. \quad (3.8)$$

Considérons  $\mathbf{D}_r = \{x \in \mathbf{C} : \|x\|_{\mathbf{C}} \leq r\}$ . Alors  $\mathbf{D}_r \subset \mathbf{C}$  est un sous ensemble borné, convexe et fermé de  $\mathbf{C}$ .

Définissons deux opérateurs  $\mathbb{F}_1$  et  $\mathbb{F}_2^*$  sur  $\mathbf{D}_r$  comme suit :

$$\begin{aligned} (\mathbb{F}_1 x)(t) &= \mathcal{R}(t)[x_0 - h(x)] + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)\sigma(s)dB^H(s), \quad t \in [0, b], \\ (\mathbb{F}_2^* x)(t) &= \int_0^t \mathcal{R}(t-s)F(s, x(s))ds, \quad t \in [0, b]. \end{aligned}$$

On se donne la tâche de montrer que les opérateurs  $\mathbb{F}_1$  et  $\mathbb{F}_2^*$  satisfont les conditions du Lemme 1.6.2. Pour atteindre notre objectif, nous subdivisons cette preuve en plusieurs étapes.

**Étape 1.** Pour tout  $x, y \in \mathbf{D}_r$ , montrons que  $\mathbb{F}_1 y + \mathbb{F}_2^* x \in \mathbf{D}_r$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|(\mathbb{F}_1 y)(t) + (\mathbb{F}_2^* x)(t)\|^2 &\leq 3\mathbb{E} \|R(t)[y_0 - h(y)]\|^2 + 3\mathbb{E} \left\| \int_0^t R(t-s)\sigma(s)dB^H(s) \right\|^2 \\ &\quad + 3\mathbb{E} \left\| \int_0^t R(t-s)F(s, x(s))ds \right\|^2 \\ &\leq 6M^2(\mathbb{E} \|y_0\|^2 + \|h(y)\|^2) \\ &\quad + 3C_H t^{2H-1} \int_0^t \|R(t-s)\sigma(s)\|^2 ds \\ &\quad + 3M^2 \mathbb{E} \left( \int_0^t \|F(s, x(s))\| ds \right)^2 \\ &\leq 6M^2(\mathbb{E} \|y_0\| + 2c_3^2(1+r^2)) \\ &\quad + 3M^2 C_H b^{2H-1} c_2^2 + 6M^2 c_1^2 b^2 (1+r^2), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \|(\mathbb{F}_1 y)(t) + (\mathbb{F}_2^* x)(t)\|_{\mathbf{C}}^2 &\leq 6M^2 \mathbb{E} \|y_0\| + 12M^2 c_3^2 + 3M^2 C_H b^{2H-1} c_2^2 + 6M^2 c_1^2 b^2 \\ &\leq (12M^2 c_3^2 + 6M^2 c_1^2 b^2) r^2 \leq r^2. \end{aligned}$$

Donc,  $\mathbb{F}_1 y + \mathbb{F}_2^* x \in \mathbf{D}_r$ .

**Étape 2.** Cette étape consiste à montrer que  $\mathbb{F}_1$  est une contraction.

Pour tout  $x_1, x_2 \in \mathbf{C}$  et grâce à l'hypothèse  $(\mathbf{H}_{2.2})$ , on a

$$\mathbb{E} \|(\mathbb{F}_1 x_1)(t) - (\mathbb{F}_1 x_2)(t)\|^2 = \mathbb{E} \|\mathcal{R}(t)[h(x_1) - h(x_2)]\|^2 \leq M^2 L_2 \|x_1 - x_2\|_{\mathbf{C}}^2.$$

Alors,

$$\|(\mathbb{F}_1 x_1)(t) - (\mathbb{F}_1 x_2)(t)\|_{\mathbf{C}}^2 \leq M^2 L_2 \|x_1 - x_2\|_{\mathbf{C}}^2.$$

Ce qui implique, d'après l'équation (3.7), que  $\mathbb{F}_1$  est une contraction sur  $\mathbf{D}_r$ .

**Étape 3.** Le but de cette étape est de montrer que  $\mathbb{F}_2$  est complètement continu. Pour des raisons de clarté, nous morcelons cette démonstration en plusieurs sous-étapes.

**Sous-étape 1.**  $\{\mathbb{F}_2^* x | x \in \mathbf{D}_r\}$  est uniformément borné.

Pour tout  $x \in \mathbf{D}_r$ , en appliquant  $(\mathbf{H}_{2.2})$ , (3.7) et de l'inégalité de Hölder, on peut avoir

$$\begin{aligned} \sup_{t \in J} \mathbb{E} \|(\mathbb{F}_2^* x)(t)\|^2 &\leq M^2 c_1^2 \sup_{t \in J} \mathbb{E} \left( \int_0^t (1 + \|x(s)\|) ds \right)^2 \\ &\leq 2M^2 c_1^2 b^2 (1 + r^2) \leq r^2, \end{aligned}$$

ce qui implique que  $\{\mathbb{F}_2^* x | x \in \mathbf{D}_r\}$  est uniformément borné.

**Sous-étape 2.**  $\{\mathbb{F}_2^* x | x \in \mathbf{D}_r\}$  est un ensemble équicontinu.

Soient  $x \in \mathbf{D}_r$  et  $0 < t_1 < t_2 \leq b$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|(\mathbb{F}_2^* x)(t_2) - (\mathbb{F}_2^* x)(t_1)\|^2 &= \mathbb{E} \left\| \int_0^{t_1-\epsilon} [\mathcal{R}(t_2-s) - \mathcal{R}(t_1-s)] F(s, x(s)) ds \right. \\ &\quad + \int_{t_1-\epsilon}^{t_1} [\mathcal{R}(t_2-s) - \mathcal{R}(t_1-s)] F(s, x(s)) ds \\ &\quad \left. + \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{R}(t_2-s) F(s, x(s)) ds \right\|^2 \\ &\leq 3 \mathbb{E} \left\| \int_0^{t_1-\epsilon} [\mathcal{R}(t_2-s) - \mathcal{R}(t_1-s)] F(s, x(s)) ds \right\|^2 \\ &\quad + 3 \mathbb{E} \left\| \int_{t_1-\epsilon}^{t_1} [\mathcal{R}(t_2-s) - \mathcal{R}(t_1-s)] F(s, x(s)) ds \right\|^2 \\ &\quad + 3 \mathbb{E} \left\| \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{R}(t_2-s) F(s, x(s)) ds \right\|^2 \\ &\leq 3b \int_0^{t_1-\epsilon} \|\mathcal{R}(t_2-s) - \mathcal{R}(t_1-s)\|_{\mathcal{L}^X}^2 C_1^2 (1+r)^2 ds \\ &\quad + 3b \int_{t_1-\epsilon}^{t_1} \|\mathcal{R}(t_2-s) - \mathcal{R}(t_1-s)\|_{\mathcal{L}^X}^2 C_1^2 (1+r)^2 ds \\ &\quad + 3b \int_{t_1}^{t_2} \|\mathcal{R}(t_2-s)\|_{\mathcal{L}^X}^2 C_1^2 (1+r)^2 ds. \end{aligned} \tag{3.9}$$

En utilisant  $(\mathbf{H}_{2.6})$ , on déduit que le membre du droit de l'inégalité précédente, indépendant de  $x \in \mathbf{D}_r$  tend vers zéro quand  $t_2 \rightarrow t_1$  et  $\epsilon$  est suffisamment petit. Donc, l'ensemble  $\{\mathbb{F}_2^* x | x \in \mathbf{D}_r\}$  est équicontinu.

On note qu'ici, on a considéré le cas  $0 < t_1 < t_2 \leq b$ , car les autres cas  $t_1 < t_2 \leq 0$  et  $t_1 \leq 0 \leq t_2 \leq b$  sont simples.

**Sous-étape 3.** Pour tout  $t \in [0, b]$ , l'ensemble  $V(t) = \{(\mathbb{F}_2^*x) | x \in \mathbf{D}_r\}$  est relativement compact.

Lorsque  $t = 0$ , c'est trivial de montrer que  $V(0)$  est relativement compact. A présent, considérons le cas  $t \in ]0, b]$ . Soient  $0 < t \leq b$  fixé et  $\epsilon$  un nombre réel tel que  $\epsilon \in ]0, t[$ . Pour tout  $x \in \mathbf{D}_r$ , on définit les opérateurs

$$(\mathbb{F}_2^{*\epsilon}x)(t) = \mathcal{R}(\epsilon) \int_0^{t-\epsilon} \mathcal{R}(t-s-\epsilon)F(s, x(s))ds$$

et

$$(\tilde{\mathbb{F}}_2^\epsilon x)(t) = \int_0^{t-\epsilon} \mathcal{R}(t-s)F(s, x(s))ds.$$

D'après le Lemme 1.5.5 et d'après le fait que l'opérateur  $\mathcal{R}(\epsilon)$  est compact, alors l'ensemble  $\mathbb{F}_\epsilon^*(t) = \{(\mathbb{F}_2^{*\epsilon}x)(t) : x \in \mathbf{D}_r\}$  est relativement compact dans  $\mathcal{X}$ , pour tout  $0 < \epsilon < t$ . De plus, d'après le Lemme 1.5.5, et l'inégalité de Hölder, pour tout  $x \in \mathbf{D}_r$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\|(\mathbb{F}_2^{*\epsilon}x)(t) - (\tilde{\mathbb{F}}_2^\epsilon x)(t)\|^2 &= \left\| \mathcal{R}(\epsilon) \int_0^{t-\epsilon} \mathcal{R}(t-s-\epsilon)F(s, x(s))ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{t-\epsilon} \mathcal{R}(t-s)F(s, x(s))ds \right\|^2 \\ &\leq b \int_0^{t-\epsilon} \|\mathcal{R}(\epsilon)\mathcal{R}(t-s-\epsilon) - \mathcal{R}(t-s)\|_{\mathcal{L}(X)}^2 \\ &\quad \times \mathbb{E}\|F(s, x(s))\|^2 ds \\ &\leq b(L\epsilon)^2 \int_0^{t-\epsilon} \mathbb{E}\|F(s, x(s))\|^2 ds \\ &\leq b(L\epsilon)^2(t-\epsilon)[c_1^2(1+r)^2] \\ &\leq b(L\epsilon)^2(t-\epsilon)[c_1^2(2+2r)] \end{aligned}$$

Donc, l'ensemble  $\tilde{\mathbb{F}}_\epsilon(t) = \{(\tilde{\mathbb{F}}_2^\epsilon x)(t) : x \in \mathbf{D}_r\}$  est précompact dans  $\mathcal{X}$  d'après le critère des ensembles totalement bornés.

En répétant la même idée, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\|(\mathbb{F}_2^*x)(t) - (\tilde{\mathbb{F}}_2^\epsilon x)(t)\|^2 &= \mathbb{E}\left\| \int_0^t \mathcal{R}(t-s)F(s, x(s))ds - \int_0^{t-\epsilon} \mathcal{R}(t-s)F(s, x(s))ds \right\|^2 \\ &\leq \int_{t-\epsilon}^t \|\mathcal{R}(t-s)\| \mathbb{E}\|F(s, x(s))\|^2 ds \\ &\leq M^2 \int_{t-\epsilon}^t \mathbb{E}\|F(s, x(s))\|^2 ds \\ &\leq M^2 c_1^2(1+r^2)^2 \epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

et, il existe des ensembles précompacts  $\tilde{\mathbb{F}}_\epsilon(t) = \{(\tilde{\mathbb{F}}_2^\epsilon x)(t) : x \in \mathbf{D}_r\}$  arbitraire qui recouvre  $\{(\mathbb{F}_2^*x)(t) : x \in \mathbf{D}_r\}$ . Ainsi, l'ensemble  $\{(\mathbb{F}_2^*x)(t) : x \in \mathbf{D}_r\}$  est précompact dans  $\mathcal{X}$ .

En regroupant toutes ces sous-étapes et d'après le théorème de Arzola-Ascoli, on conclut que  $\mathbb{F}_2^*$  est complètement continu. Grâce au Lemme 1.6.2,  $\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2^*$  admet un point fixe dans  $\mathbf{D}_r$ . Par conséquent, le système stochastique (3.1) a une solution faible. Ce qui complète la preuve.  $\square$

### 3.4 Exemple

Dans cette partie du chapitre, on présente une application de notre résultat abstrait obtenu dans la section précédente. Pour cela nous considérons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} u(t, y) = \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} u(t, y) + F(t, X(t, z)) + \int_0^t b(t-s)u(s, y)ds + \sigma(t) \frac{dB^H(t)}{dt}, \\ t \in [0, 1], y \in [0, \pi] \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, t \in [0, 1], \\ u(0, y) + \sum_{i=1}^m a_i(y)u(t_i, y) = u_0(y), y \in [0, \pi], \end{array} \right. \quad (3.10)$$

où  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < b = 1$ ,  $B^H(t)$  représente un mouvement Brownien fractionnaire cylindrique, défini sur un espace de probabilité complet  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{F_t\})$ ,  $a_i \in L^2([0, \pi])$  et  $b : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue. Afin de réécrire l'équation intégrodifférentielle stochastique sous la forme abstraite (3.1), on pose  $H = \mathcal{X} = \mathcal{V} = L^2([0, \pi])$  muni de la norme  $\|\cdot\|$ . On définit l'opérateur  $A$  par  $Au(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  de domaine

$$D(A) = \{u \in H, u, u'' \text{ sont absolument continus, } u'' \in H \text{ et } u(0) = u(\pi) = 0\}.$$

Notons qu'il existe une base orthonormale complète  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de valeurs propres de  $A$  avec  $e_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nz)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , et  $A$  génère un semi-groupe fortement continu  $\{S(t), t \geq 0\}$  compact [146, 145]. Donc, les hypothèses **(H1)** et **(H<sub>2.6</sub>)** sont satisfaites. Dans le but de définir l'opérateur  $Q : \nu \rightarrow \nu$ , on choisit une suite  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ , et on pose  $Qe_n = \alpha_n e_n$  et, on suppose que

$$tr(Q) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_n} < \infty.$$

Définissons le processus  $B^H(t)$  par

$$B^H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_n} \beta_n^H(t) e_n, \quad t \geq 0, H \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

où  $\{\beta_n^H\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de mouvements Browniens fractionnaires unidimensionnels mutuellement indépendants.

Soit  $\Gamma : D(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  un opérateur défini par  $\Gamma(t)(fy) = b(t)Ay$  pour  $t \geq 0$ ,  $y \in D(A)$  et on pose

$$\begin{aligned} u(t)(z) &= u(t, z), \quad F(t, u(t))(z) = F(t, u(t, z)), \quad h(u) = \sum_{i=1}^m a_i(y)u(t_i, y), \\ h_i &= \sup_{y \in [0, \pi]} \|a_i(y)\|^2; \quad \sigma = I. \end{aligned}$$

Le système (3.10) peut être récrit sous la forme abstraite suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} dx(t) = (Ax(t) + F(t, x(t)) + \int_0^t \Gamma(t-s)x(s)ds)dt + \sigma(t)dB^H(t), \quad t \in J := [0, b], \\ x_0(t) = x(0) + h(x). \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Soit  $b : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$  un borné et une fonction de classe  $C^1$  telle  $b'$  est borné et uniformément continu, alors **(H2)** est satisfait et donc, d'après le Théorème 1.5.7 l'équation (1.17) a un opérateur résolvant  $(\mathcal{R}(t))_{t \geq 0}$  sur  $\mathcal{L}(\mathbb{X})$ .

Si on définit

$$F(t, u(t))(z) = \frac{e^{-t}|u(t, z)|}{(1 + e^t)(1 + |u(t, z)|)},$$

on voit facilement que  $F$  satisfait **(H<sub>2.1</sub>)**. De plus,

$$\begin{aligned} \|F(t, u(t)) - F(t, v(t))\| &= \left\| \frac{e^{-t}|u(t, z)|}{(1+e^t)(1+|u(t, z)|)} - \frac{e^{-t}|v(t, z)|}{(1+e^t)(1+|v(t, z)|)} \right\| \\ &= \frac{e^{-t}}{(1+e^t)} \left\| \frac{|u(t, z)|(1+|v(t, z)|) - |v(t, z)|(1+|u(t, z)|)}{(1+|u(t, z)|)(1+|v(t, z)|)} \right\| \\ &= \frac{e^{-t}||u(t, z)| - |v(t, z)||}{(1+e^t)(1+|u(t, z)|)(1+|v(t, z)|)} \\ &\leq \frac{e^{-t}}{1+e^t} |u(t, z) - v(t, z)| \\ &\leq \frac{1}{2} |u(t, z) - v(t, z)| \end{aligned}$$

Alors, **(H<sub>2.2</sub>)** est satisfaite. Il est facile de montrer que les hypothèses **(H<sub>2.3</sub>)**, **(H<sub>2.4</sub>)**, **(H<sub>2.5</sub>)** et **(3.6)** sont satisfaites d'après le Théorème 3.3.1, le système (3.1) a une solution faible sur  $[0, b]$ .

## Existence et stabilité d'une classe d'équations intégrodifférentielles stochastiques mixtes

### Résumé

L'objectif de ce chapitre est d'étudier la stabilité d'une classe d'équations intégrodifférentielles stochastiques impulsives dirigées par un processus de Wiener et un mouvement Brownien fractionnaire en utilisant la mesure de non compacité de Hausdorff et le théorème du point fixe de Mönch. Les conditions suffisantes d'existence de solutions faibles ont été obtenues. Entre autres, nous avons établi de nouvelles inégalités intégrales-impulsives pour discuter de la stabilité exponentielle de solution faible. Pour finir, nous avons aussi donné, un exemple pour montrer l'applicabilité de nos résultats abstraits. Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'une publication<sup>1</sup>.

### 4.1 Introduction

L'étude des aspects qualitatifs et quantitatifs des systèmes est un domaine qui attire l'attention des chercheurs depuis des années. Un des aspects qualitatifs les plus abordés des systèmes dynamiques est la propriété asymptotique des solutions ou des trajectoires, c'est-à-dire le comportement des solutions lorsque le temps devient grand. Il est naturel de se demander si un petit changement dans l'état initial du système va le conduire à un comportement similaire. Cette question trouve sa réponse dans la théorie de la stabilité étudiée pour la première fois au début du *XIX*<sup>e</sup> siècle par Lyapounov. Cette théorie traite la stabilité des solutions d'équations différentielles et des trajectoires des systèmes dynamiques sous des petites perturbations des conditions initiales. Les premiers résultats sur la stabilité

---

1. Mamadou Abdoul Diop, Khalil Ezzinbi, Louk-Man Issaka and Kasinathan Ramkumar, *Stability for some impulsive neutral stochastic functional integro-differential equations driven by fBm*, *Cogent Mathematics & Statistics*, 7(1) (2020), 1782120, DOI : 10.1080/25742558.2020.1782120.

viennent de la mécanique lors de l'étude de la stabilité des corps rigides sous l'effet des forces gravitationnelles (voir les travaux de E. Torricelli en 1644 [131]). L'importance de la notion de stabilité réside dans le fait qu'elle est commune à plusieurs domaines, d'une part, et d'un point de vue technique, elle est nécessaire au fonctionnement des engins. La formalisation de l'étude de la stabilité des systèmes a commencé dans les années 60 avec Krasovskii (1963), qui a étendu la méthode directe de Lyapunov. Cependant, des études moins formalisées avaient été réalisées auparavant, notamment par Volterra, qui, dans les années 30, avait étudié la stabilité d'un système en utilisant une fonctionnelle. Les méthodes alors proposées étaient généralement très complexes, la détermination d'une fonctionnelle ou d'une fonction de Lyapunov étant encore moins aisée que dans le cas des équations différentielles ordinaires.

Ces dernières années, les recherches dans ce domaine se sont développées, fournissant des méthodes relativement simples et de plus en plus précises pour l'étude des systèmes déterministes et stochastiques (voir [58, 76, 77, 78]). L'un des critères de stabilité qu'on rencontre dans la littérature est la stabilité exponentielle. Ce critère traduit la décroissance du système lorsque le temps tend vers l'infini. Ce principe a été introduit par Malkine en 1935, ensuite sa généralisation au système complexe a été réalisée par Jack K. Hale et LaSalle en 1967.

Dans ce chapitre, nous nous focalisons sur l'existence et la stabilité exponentielle d'une classe d'équations intégrodifférentielles stochastiques impulsives de type neutre dirigées par un processus de Wiener et un mouvement Brownien fractionnaire de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} d[x(t) - \tilde{G}(t, x_t)] = A [x(t) - \tilde{G}(t, x_t)] dt + \int_0^t \Gamma(t-s)[x(s) - \tilde{G}(s, x_s)] ds dt \\ \quad + f(t, x_t) dt + q(t, x_t) dw(t) + \sigma(t) dB_Q^H(t), \quad t \in I = [0, T], t \neq t_k, \\ \Delta x(t_k) = I_k(t_k), \quad k = 1, 2, \dots, m, \\ x_0(t) = \varphi(t) \in L^2(\Omega, \mathcal{B}_\rho), \quad \text{pour } \mathbb{P} - p.s. \quad t \in ]-\infty, 0], \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où  $A$  est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe  $(S(t))_{t \geq 0}$  fortement continu d'un opérateur linéaire dans un espace de Hilbert  $\mathbb{Y}$ ;  $B_Q^H$  est un mouvement Brownien fractionnaire de paramètre de Hurst  $H \in ]1/2, 1[$  et  $\{w(t) : t \in [0, T]\}$  un processus de Wiener standard dans un espace réel et séparable de Hilbert  $\mathbb{Y}$ . De plus, on suppose aussi que  $w$  et  $B_Q^H$  sont indépendants;  $f, \tilde{G} : [0, T] \times \mathcal{B}_\rho \rightarrow \mathbb{Y}$ ,  $q : [0, T] \times \mathcal{B}_\rho \rightarrow L_2^0(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ ,  $\sigma : [0, T] \rightarrow L_2^0(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$  sont des fonctions spécifiques qu'on précisera plus tard; les impulsions  $I_k : \mathcal{B}_T \rightarrow \mathbb{Y}$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) sont des fonctions bornées et les temps  $t_k$  satisfont  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots < t_m < T$ ,  $x(t_k^+)$  et  $x(t_k^-)$  désigne la limite à droite et à gauche de  $x(t)$  aux temps  $t_k$ .  $\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k^-)$  représente le saut de l'état  $x$  au temps  $t_k$ , où  $I_k$  détermine la taille du saut; la fonction histoire  $x_t : \Omega \rightarrow \mathcal{B}_\rho$  est définie par  $x_t(\theta) = x(t + \theta)$  pour  $t \geq 0$  appartenant à l'espace de phase  $\mathcal{B}_\rho$  qu'on précisera plus tard, la donnée initiale  $\phi = \{\phi(t) : -\infty < t \leq 0\}$  est un processus stochastique  $\mathcal{F}_0$ -mesurable,  $\mathcal{B}_\rho$ -valeur indépendant du processus de Wiener  $w$  et mBf  $B_Q^H$  du

moment d'ordre deux fini.

Rappelons que les équations à retard ont été introduites pour modéliser des phénomènes dans lesquels il y'a un décalage temporel entre l'action sur le système et la réponse du système à cette action : par exemple, dans les processus de naissance des populations biologiques (cellules, bactéries,...), ou des processus qui nécessitent qu'un certain seuil soit atteint avant que le système ne soit activé . Durant ces dernières années, la théorie des équations différentielles à retard est devenue un domaine de recherche très actif en raison de son application dans de nombreux phénomènes physiques, mécaniques, biologiques et autres. Pour plus de détails voir [18, 46, 47, 48, 58, 67, 70, 132].

## 4.2 Préliminaires

Tout au long de ce chapitre, l'espace des données initiales sera considéré comme un sous-espace  $\mathcal{B}_\rho$  de l'espace axiomatisé défini dans la sous section 1.4.2. Soit  $\rho : ]-\infty, 0] \rightarrow ]0, \infty[$  une fonction continue telle que  $l = \int_{-\infty}^0 \rho(t)dt < \infty$ . Pour tout  $\tau > 0$ , on définit l'espace de Banach  $(\mathcal{B}_\rho, \|\cdot\|_{\mathcal{B}_\rho})$  par

$$\mathcal{B}_\rho = \left\{ \psi : ]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{Y} : (\mathbb{E}\|\psi(\theta)\|^2)^{1/2} \text{ est une fonction bornée et mesurable sur } [-\tau, 0] \text{ et } \int_{-\infty}^0 \rho(s) \sup_{s \leq \theta \leq 0} (\mathbb{E}\|\psi(\theta)\|^2)^{1/2} ds < \infty \right\},$$

munie de la norme

$$\|\psi\|_{\mathcal{B}_\rho} = \int_{-\infty}^0 \rho(s) \sup_{s \leq \theta \leq 0} (\mathbb{E}\|\psi(\theta)\|^2)^{1/2} ds.$$

Considérons l'espace

$$\mathcal{B}_{T_\rho} = \{x : ]-\infty, T] \rightarrow \mathbb{Y}; x_k \in C(I_k, \mathbb{Y}), k = 0, 1, \dots, m, \text{ et il existe } x(t_k^+) \text{ et } x(t_k^-) \text{ avec } x(t_k) = x(t_k^-), k = 1, \dots, m, v_0 = \phi \in L^2(\Omega, \mathcal{B}_\rho) \text{ sur } ]-\infty, 0]\}.$$

Soit  $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_{T_\rho}}$  la norme sur  $\mathcal{B}_{T_\rho}$  définie par

$$\|x\|_{\mathcal{B}_{T_\rho}} = \|x_0\|_{\mathcal{B}_\rho} + \sup_{s \in I} (\mathbb{E}\|x(s)\|^2)^{1/2}, \quad x \in \mathcal{B}_{T_\rho}.$$

**Lemme 4.2.1.** ([146]) *Supposons  $x \in \mathcal{B}_{T_\rho}$ , alors pour tout  $t \in I, x_t \in \mathcal{B}_\rho$ . De plus*

$$l(\mathbb{E}\|x(s)\|^2)^{1/2} \leq \|x_t\|_{\mathcal{B}_\rho} \leq \|x_0\|_{\mathcal{B}_\rho} + l \sup_{s \in I} (\mathbb{E}\|x(s)\|^2)^{1/2}$$

où  $l = \int_{-\infty}^0 \rho(s)ds < \infty$ .

Le lemme suivant nous sera utile pour prouver nos résultats.

**Lemme 4.2.2.** Si  $G \subset C([0, T]; L_2^0(\mathbb{X}, \mathbb{Y}))$ ,  $B$  un processus de Wiener, alors

$$\chi \left( \int_0^t G(s) dB(s) \right) \leq \sqrt{T} \chi(G(s)),$$

où

$$\int_0^t G(s) dB(s) = \left\{ \int_0^t u(s) dB(s) : \text{for all } u \in G, t \in [0, T] \right\}.$$

**Preuve.** Soit  $\mu, \nu \in G$ . Nous définissons les processus stochastiques suivant :

$$D_1 = \int_0^t \mu(s) dB(s) \quad D_2 = \int_0^t \nu(s) dB(s).$$

Alors  $D_1, D_2 \in L^2(\Omega, \mathbb{Y})$ . Soit  $d(D_1, D_2)$  la distance entre  $D_1$  et  $D_2$  dans  $L^2(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ , d'après la définition de la norme dans  $L^2(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ , on peut obtenir que :

$$\begin{aligned} d^2(D_1, D_2) &= \mathbb{E}(D_1 - D_2)^2 \\ &= \mathbb{E} \left( \int_0^t \mu(s) dB(s) - \int_0^t \nu(s) dB(s) \right)^2 \\ &\leq \mathbb{E} \left( \int_0^t (\mu(s) - \nu(s))^2 ds \right) \\ &\leq \int_0^t \mathbb{E} (\mu(s) - \nu(s))^2 ds. \end{aligned}$$

Par conséquent, on conclut que :

$$d(D_1, D_2) \leq \sqrt{T} d(\mu, \nu). \quad (4.2)$$

Grâce au théorème de recouvrement fini et de la mesure de non compacité de Hausdorff d'ensembles non vide  $G$ , on sait pour tout  $\varepsilon > 0$  arbitraire, il existe une suite  $\{u_i\} \subset G (i = 1, 2, \dots, n)$  et une constante positive  $m$ , tels que

$$G \subset \bigcup_{i=1}^n B(u_i(s), \varepsilon + m), \quad (4.3)$$

où  $B(u_i(s), \varepsilon + m)$  représente la boule ouverte de rayon  $r = \varepsilon + m$  et de centre  $u_i (i = 1, 2, \dots, n)$ . D'après (4.2) et (4.3) il est facile de vérifier que  $\int_0^t G(s) dB(s)$  peut être recouvert par

$$\bigcup_{i=1}^n B \left( \int_0^t u_i(s) dw(s), \varepsilon + \sqrt{T} m \right).$$

Comme  $\varepsilon$  est arbitraire, ceci implique que  $\chi \left( \int_0^t G(s) dB(s) \right) \leq \chi(G(s))$ . La preuve est achevée.  $\square$

**Définition 4.2.1.** Un processus stochastique  $\{x(t), t \in ]-\infty, T]\}$  à valeur dans  $\mathbb{Y}$  est dit solution faible du système (4.1), si

- (1)  $x(t)$  est mesurable,  $\mathcal{F}_t$ -adapté, et est càdlàg sur  $0 \leq t \leq T$  presque partout ;
- (2) Pour  $t \in ]-\infty, 0]$ ,  $x(t) = \phi(t)$ ;

(3) Pour tout  $0 \leq t \leq T$ , satisfait l'équation intégrale suivante :

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{R}(t) \left[ \phi(0) - \tilde{G}(0, \phi(0)) \right] + \tilde{G}(t, x_t) \\ &+ \int_0^t \mathcal{R}(t-s) f(s, x_s) ds + \int_0^t \mathcal{R}(t-s) q(s, x_s) dw(s) \\ &+ \sum_{0 < t_k < t} \mathcal{R}(t-t_k) I_k(x_k) + \int_0^t \mathcal{R}(t-s) \sigma(s) dB_Q^H(s). \end{aligned} \quad (4.4)$$

### 4.3 Résultat d'existence de solution faible du système stochastique à retard

Dans cette section, nous allons énoncer et prouver le théorème qui assure l'existence de solution faible du système (4.1). Nous imposons les conditions techniques suivantes :

(H<sub>3.1</sub>) Le semi-groupe  $(S(t))_{t \geq 0}$  est continue en norme.

(H<sub>3.2</sub>) La fonction  $\sigma : I \rightarrow L_Q^0(\mathcal{X}, \mathbb{Y})$  satisfait

$$(i) \int_0^t \|\sigma(s)\|_{L_Q^0}^2 ds < \infty, \quad \forall t \in I,$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} \|\sigma Q^{1/2} e_n\|_{L^2([0, T], \mathbb{Y})} < \infty,$$

$$(iii) \sum_{n=1}^{\infty} \|\sigma(t) Q^{1/2} e_n\|_{\mathbb{Y}} \text{ est uniformément convergent pour tout } t \in I.$$

(H<sub>3.3</sub>) La fonction  $\tilde{G} : I \times \mathcal{B}_\rho \rightarrow \mathbb{Y}$  satisfait

(i)  $\tilde{G}$  est une fonction continue et il existe une constante  $\kappa_{\tilde{G}} > 0$ , telle que la fonction  $\tilde{G}$  est à valeur dans  $\mathbb{Y}$  et satisfait pour tout  $x, y \in \mathcal{B}_\rho$  et  $t \in I$ ,

$$\|\tilde{G}(t, x) - \tilde{G}(t, y)\|^2 \leq \kappa_{\tilde{G}} \|x - y\|_{\mathcal{B}_\rho}^2,$$

$$\|\tilde{G}(t, x)\|^2 \leq \kappa_{\tilde{G}} (1 + \|x\|_{\mathcal{B}_\rho}^2).$$

(ii) Il existe une fonction positive  $l_{\tilde{G}} \in L^1(I, \mathbb{R}^+)$ , telle que pour tout sous-ensemble borné  $\Theta_1 \subset \mathcal{B}_\rho$ , satisfait

$$\chi \left( \tilde{G}(t, \Theta_1) \right) \leq l_{\tilde{G}}(t) \sup_{\theta \in ]-\infty, 0]} \chi(\Theta_1(\theta)), \quad \Theta^* = \sup_{t \in I} l_{\tilde{G}}(t).$$

(H<sub>3.4</sub>) La fonction  $f : I \times \mathcal{B}_\rho \rightarrow \mathbb{Y}$  satisfait

(i) pour tout  $x \in \mathcal{B}_\rho$ ,  $f(\cdot, x) : I \rightarrow \mathbb{Y}$  est mesurable et pour tout  $t \in I$ ,  $f(t, \cdot) : \mathcal{B}_\rho \rightarrow \mathbb{Y}$  est continu.

(ii) il existe une fonction continue  $\zeta_f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  et une fonction continue et croissante  $\Pi_f : \mathbb{R}^+ \rightarrow ]0, \infty[$  telles que

$$\|f(t, x)\|^2 \leq \zeta_f(t) \Pi_f(\|x\|_{\mathcal{B}_\rho}^2),$$

(iii) il existe une fonction positive  $l_f \in L^1(I, \mathbb{R}^+)$  telle que, pour tout sous-ensemble borné

$$\Theta_2 \subset \mathcal{B}_\rho$$

$$\chi(f(t, \Theta_2)) \leq l_f(t) \sup_{\theta \in ]-\infty, 0]} \chi(\Theta_2(\theta)).$$

(H<sub>3.5</sub>) La fonction  $q : I \times \mathcal{B}_\rho \rightarrow L_2^0(\mathcal{X}, \mathbb{Y})$  satisfait

(i) pour  $x \in \mathcal{B}_\rho$ ,  $q(\cdot, x) : I \rightarrow L_2^0(\mathcal{X}, \mathbb{Y})$  est mesurable et pour tout  $t \in I$ ,  $q(t, \cdot) : \mathcal{B}_\rho \rightarrow L_2^0(\mathcal{X}, \mathbb{Y})$  est continu;

(ii) il existe une fonction continue  $\zeta_q : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  et une fonction continue et croissante  $\Pi_q : \mathbb{R}^+ \rightarrow ]0, \infty[$  telles que

$$\|q(t, x)\|^2 \leq \zeta_q(t) \Pi_q(\|x\|_{\mathcal{B}_\rho}^2),$$

(iii) il existe une fonction positive  $l_{\tilde{G}} \in L^2(I, \mathbb{R}^+)$  telle que, pour tout sous ensemble borné

$$\Theta_3 \subset \mathcal{B}_\rho$$

$$\chi(\tilde{G}(t, x)) \leq l_{\tilde{G}}(t) \sup_{\theta \in ]-\infty, 0]} \chi(\Theta_3(\theta)).$$

(H<sub>3.6</sub>) La fonction continue  $I_k : \mathcal{B}_\rho \rightarrow \mathbb{Y}$  satisfait

(i) il existe  $L_k > 0, k = 1, 2, \dots, m$ , telles que pour tout  $x, y \in \mathcal{B}_{T_\rho}$  et  $\sum_{k=1}^m L_k < \infty$

$$\|I_k(x) - I_k(y)\|^2 \leq L_k \|x - y\|_{\mathcal{B}_{T_\rho}}^2 \text{ and } I_k(0) = 0,$$

(ii) il existe  $l_k > 0, k = 1, 2, \dots, m$ , telles que pour tout sous-ensemble borné  $\Theta_4 \subset \mathcal{B}_{T_\rho}$

$$\sigma(I_k(\Theta_4)) \leq l_k \sup_{\theta \in ]-\infty, 0]} \chi(\Theta_4(\theta)).$$

(H<sub>3.7</sub>)

$$24 (\kappa_{\tilde{G}} + M^2 m \sum_{k=1}^m L_k) l^2 + 6TM^2 \int_0^T \zeta_f(s) ds \limsup_{\ell \rightarrow \infty} \frac{\Pi_f(\ell)}{\ell} + 6TM^2 \int_0^T \zeta_q(s) ds \limsup_{\ell \rightarrow \infty} \frac{\Pi_q(\ell)}{\ell} < 1.$$

**Théorème 4.3.1.** *Supposons que les hypothèses (H1)-(H2) et (H<sub>3.1</sub>)-(H<sub>3.7</sub>) sont vérifiées, alors le système (4.1) a au moins une solution faible sur  $] - \infty, T]$  pourvu que*

$$\Theta^* + MT \|l_f\|_{L^1(I, \mathbb{R}^+)} + M \|l_q\|_{L^2(I, \mathbb{R}^+)} + M \sum_{n=1}^m l_n < 1. \quad (4.5)$$

**Preuve.** Considérons l'opérateur  $\Lambda : \mathcal{B}_{T_\rho} \rightarrow \mathcal{B}_{T_\rho}$  défini par

$$\Lambda(x(t)) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in ]-\infty, 0], \\ \mathcal{R}(t) \left[ \varphi(0) - \tilde{G}(0, \varphi(0)) \right] + \tilde{G}(t, x_t) \\ + \int_0^t \mathcal{R}(t-s) f(s, x_s) ds + \int_0^t \mathcal{R}(t-s) q(s, x_s) dw(s) \\ + \sum_{0 < t_k < t} \mathcal{R}(t-t_k) I_k(x_k) + \int_0^t \mathcal{R}(t-s) \sigma(s) dB_Q^H(s), & t \in [0, T]. \end{cases} \quad (4.6)$$

Nous allons prouver que l'opérateur  $\Lambda$  admet un point fixe qui est solution du système (4.1)

Pour  $\varphi \in \mathcal{B}_\rho$ , on définit :

$$\hat{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in ]-\infty, 0], \\ \mathcal{R}(t)\varphi(0), & t \in I. \end{cases}$$

Alors  $\hat{\varphi}(t) \in \mathcal{B}_{T_\rho}$ . Posons  $x(t) = y(t) + \hat{\varphi}(t), t \in ]-\infty, T]$ . Il est évident que  $x$  satisfait le système (4.1) si et seulement si  $y_0 = 0$  pour  $t \in ]-\infty, b]$  et

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{R}(t) \left[ -\tilde{G}(0, \varphi(0)) \right] + \tilde{G}(t, y_t + \hat{\varphi}_t) \\ &+ \int_0^t \mathcal{R}(t-s) f(s, y_s + \hat{\varphi}_s) ds + \int_0^t \mathcal{R}(t-s) \tilde{G}(s, y_s + \hat{\varphi}_s) dw(s) \\ &+ \sum_{0 < t_k < t} \mathcal{R}(t-t_k) I_k(y_{t_k} + \hat{\varphi}_{t_k}) + \int_0^t \mathcal{R}(t-s) \sigma(s) dB_Q^H(s). \quad t \in I. \end{aligned}$$

Définissons l'ensemble  $\mathcal{B}_{T_\rho}^0 = \{y \in \mathcal{B}_{T_\rho}, y_0 = 0\}$  tel que pour tout  $y \in \mathcal{B}_{T_\rho}^0$ , on a

$$\|y\|_{\mathcal{B}_{T_\rho}^0} = \|y\|_{\mathcal{B}_\rho} + \sup_{s \in I} (\mathbb{E}\|y(s)\|^2)^{1/2} = \sup_{s \in I} (\mathbb{E}\|y(s)\|^2)^{1/2}.$$

Alors,  $(\mathcal{B}_{T_\rho}^0, \|\cdot\|_{\mathcal{B}_{T_\rho}^0})$  est un espace de Banach. Pour tout  $r > 0$ , posons  $\bar{B}_r = \{y \in \mathcal{B}_{T_\rho}^0 : \|y\|_{\mathcal{B}_{T_\rho}^0} \leq r\}$ , alors  $\bar{B}_r \subset \mathcal{B}_{T_\rho}^0$  est un sous ensemble borné, fermé et convexe et pour tout  $y \in \bar{B}_r$ , du Lemme 4.2.1, on a

$$\begin{aligned} \|y_t + \hat{\varphi}_t\|_{\mathcal{B}_\rho}^2 &\leq 2\|y_t\|_{\mathcal{B}_\rho}^2 + 2\|\hat{\varphi}_t\|_{\mathcal{B}_\rho}^2 \\ &\leq 4l^2 \sup_{s \in I} \mathbb{E}\|y(s)\|^2 + 4\|y_0\|_{\mathcal{B}_\rho}^2 + 4l^2 \sup_{s \in I} \|\hat{\varphi}(s)\|^2 + 4\|\hat{\varphi}\|_{\mathcal{B}_\rho}^2 \\ &\leq 4l^2(r + M^2|\varphi(0)|) + 4\|\hat{\varphi}\|_{\mathcal{B}_\rho}^2 := \tilde{r}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

Définissons l'opérateur  $\Upsilon : \mathcal{B}_{T_\rho}^0 \rightarrow \mathcal{B}_{T_\rho}^0$  par :

$$\Upsilon y(t) = \begin{cases} 0, & t \in ]-\infty, 0], \\ \mathcal{R}(t) \left[ -\tilde{G}(0, \varphi(0)) \right] + \tilde{G}(t, y_t + \hat{\varphi}_t) \\ + \int_0^t \mathcal{R}(t-s) f(s, y_s + \hat{\varphi}_s) ds + \int_0^t \mathcal{R}(t-s) \tilde{G}(s, y_s + \hat{\varphi}_s) dw(s) \\ + \sum_{0 < t_k < t} \mathcal{R}(t-t_k) I_k(y_{t_k} + \hat{\varphi}_{t_k}) + \int_0^t \mathcal{R}(t-s) \sigma(s) dB_Q^H(s), & t \in I. \end{cases} \quad (4.8)$$

Nous subdivisons la preuve en plusieurs étapes.

**Étape 1.** Il existe un nombre positif  $r$  tel que  $\Upsilon(\bar{B}_r) \subset \bar{B}_r$ .

Supposons que  $\Upsilon(\bar{B}_r) \not\subseteq \bar{B}_r$ , alors pour tout nombre positif  $r$ , il existe une fonction  $y^r \in \bar{B}_r$  mais  $\Upsilon(y^r) \notin \bar{B}_r$ , implique que pour un certain  $t = t(r) \in I$ ,  $\mathbb{E}\|\Upsilon(y^r)(t)\|^2 > r$ . De ce fait, on a

$$\begin{aligned}
r &< \mathbb{E}\|\Upsilon(y^r)(t)\|^2 \leq 6\mathbb{E}\left\|\mathcal{R}(t)\left[\varphi(0) - \tilde{G}(0, \varphi(0))\right]\right\|^2 + 6\mathbb{E}\left\|\tilde{G}(t, y_t^r + \hat{\varphi}_t)\right\|^2 \\
&+ 6\mathbb{E}\left\|\int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, y_s^r + \hat{\varphi}_s)ds\right\|^2 + 6\mathbb{E}\left\|\int_0^t \mathcal{R}(t-s)\tilde{G}(s, y_s^r + \hat{\varphi}_s)dw(s)\right\|^2 \\
&+ 6\mathbb{E}\left\|\sum_{0 < t_k < t} \mathcal{R}(t-t_k)I_k(y_{t_k} + \hat{\varphi}_{t_k})\right\|^2 + 6\mathbb{E}\left\|\int_0^t \mathcal{R}(t-s)\sigma(s)dB_Q^H(s)\right\|^2 \\
&:= \sum_i^6 p_i.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

En utilisant le Lemme 1.7.4 et les conditions :  $(\mathbf{H}_{3.1})$ - $(\mathbf{H}_{3.6})$ , nous avons

$$\begin{aligned}
p_1 &= 6\mathbb{E}\left\|\mathcal{R}(t)\left[-\tilde{G}(0, \varphi(0))\right]\right\|^2 \leq 6M^2\mathbb{E}\left\|\tilde{G}(0, \varphi(0))\right\|^2 \\
&\leq 6M^2\kappa_{\tilde{G}}(1 + \|\varphi\|_{\mathcal{B}_\rho}^2),
\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
p_2 &= 6\mathbb{E}\left\|\tilde{G}(t, y_t^r + \hat{\varphi}_t)\right\|^2 \leq 6\kappa_{\tilde{G}}(1 + \|y_t^r + \hat{\varphi}_t\|_{\mathcal{B}_\rho}^2) \\
&\leq 6\kappa_{\tilde{G}}(1 + r'),
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
p_3 &= 6\mathbb{E}\left\|\int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, y_s^r + \hat{\varphi}_s)ds\right\|^2 \\
&\leq 6TM^2 \int_0^t \zeta_f(s)\Pi_f(\|y_t^r + \hat{\varphi}_t\|_{\mathcal{B}_\rho}^2)ds \\
&\leq 6TM^2 \int_0^t \zeta_f(s)\Pi_f(r')ds,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
p_4 &= 6\mathbb{E}\left\|\int_0^t \mathcal{R}(t-s)\tilde{G}(s, y_s^r + \hat{\varphi}_s)dw(s)\right\|^2 \\
&\leq 6TM^2 \int_0^t \zeta_{\tilde{G}}(s)\Pi_{\tilde{G}}(\|y_t^r + \hat{\varphi}_t\|_{\mathcal{B}_\rho}^2)ds \\
&\leq 6TM^2 \int_0^t \zeta_{\tilde{G}}(s)\Pi_{\tilde{G}}(r')ds,
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
p_5 &= 6\mathbb{E}\left\|\sum_{0 < t_k < t} \mathcal{R}(t-t_k)I_k(y_{t_k} + \hat{\varphi}_{t_k})\right\|^2 \\
&\leq 6M^2m \sum_{k=1}^m L_k r',
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
p_6 &= 6\mathbb{E}\left\|\int_0^t \mathcal{R}(t-s)\sigma(s)dB_Q^H(s)\right\|^2 \\
&\leq 6cM^2H(2H-1)T^{2H} \sup_{0 \leq s \leq T} \|\sigma(s)\|_{L_Q^0}^2.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Ainsi, des équations (4.10)-(4.15) on obtient que

$$\begin{aligned}
r < \sum_{i=1}^6 P_i &\leq 6M^2\kappa_{\tilde{G}}(1 + \|\varphi\|_{\mathcal{B}_\rho}^2) + 6\kappa_{\tilde{G}}(1 + r') \\
&\quad + 6TM^2 \int_0^t \zeta_f(s) \Pi_f(r') ds \\
&\quad + 6TM^2 \int_0^t \zeta_{\tilde{G}}(s) \Pi_{\tilde{G}}(r') ds + 6M^2m \sum_{k=1}^m L_k r' \\
&\quad + 6cM^2H(2H-1)T^{2H} \sup_{0 \leq s \leq T} \|\sigma(s)\|_{L_Q^0}^2 \\
&\leq 6 \left[ \kappa_{\tilde{G}} + M^2m \sum_{k=1}^m L_k \right] r' \\
&\quad + 6M^2\kappa_{\tilde{G}}(1 + \|\varphi\|_{\mathcal{B}_\rho}^2) + 6\kappa_{\tilde{G}} \\
&\quad + 6cM^2H(2H-1)T^{2H} \sup_{0 \leq s \leq T} \|\sigma(s)\|_{L_Q^0}^2 \\
&\quad + \left[ 6TM^2 \int_0^t \zeta_f(s) \Pi_f(r') ds + 6TM^2 \int_0^t \zeta_{\tilde{G}}(s) \Pi_{\tilde{G}}(r') ds \right].
\end{aligned} \tag{4.16}$$

En divisant l'expression (4.16) par  $r$  et en faisant tendre  $r$  vers l'infini, nous obtenons.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r'}{r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{4l^2(r + M^2|\varphi(0)|^2) + 4\|\hat{\varphi}\|_{\mathcal{B}_\rho}^2}{r} = 4l^2.$$

Il nous suffira d'utiliser le point (ii) de l'hypothèse  $(\mathbf{H}_{3.4})$  et de (ii) de l'hypothèse  $(\mathbf{H}_{3.5})$  pour avoir

$$\begin{aligned}
24 \left( \kappa_{\tilde{G}} + M^2m \sum_{k=1}^m L_k \right) l^2 + 6TM^2 \int_0^t \zeta_f(s) ds \limsup_{\ell \rightarrow \infty} \frac{\Pi_f(\ell)}{\ell} \\
+ 6TM^2 \int_0^t \zeta_{\tilde{G}}(s) ds \limsup_{\ell \rightarrow \infty} \frac{\Pi_{\tilde{G}}(\ell)}{\ell} \geq 1.
\end{aligned}$$

Ce qui contredit l'hypothèse  $(\mathbf{H}_{3.7})$ . De ce fait, il existe une constante  $r$  positive telle que  $\Upsilon(\bar{B}_r) \subset \bar{B}_r$ .

**Étape 2.** L'opérateur  $\Upsilon$  est continu dans  $\bar{B}_r$ .

Soit une  $\{y^n(t)\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{B}_{T_p}^0$ , telle que  $y^n \rightarrow y(n \rightarrow \infty) \in \mathcal{B}_{T_p}^0$ . Alors il existe un nombre réel  $r > 0$  tel que  $\|y^n(t)\|^2 < r$  pour tout  $n$  et pour tout  $t \in I$ ,  $y^n \in \bar{B}_r$  et  $y \in \bar{B}_r$ . D'après (4.7), on a  $\|y_t^n + \hat{\varphi}_t\|_{\mathcal{B}_\rho}^2 < r'$ ,  $t \in I$ . D'après les hypothèses  $(\mathbf{H}_{3.3})$ - $(\mathbf{H}_{3.6})$ , on obtient :

- (i)  $\tilde{G}(t, y_t^n + \hat{\varphi}_t) \rightarrow \tilde{G}(t, y_t + \hat{\varphi}_t)$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,
- (ii)  $f(t, y_t^n + \hat{\varphi}_t) \rightarrow f(t, y_t + \hat{\varphi}_t)$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,
- (iii)  $q(t, y_t^n + \hat{\varphi}_t) \rightarrow q(t, y_t + \hat{\varphi}_t)$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,
- (iv)  $\mathbb{E}\|I_k(t, y_{t_k}^n + \hat{\varphi}_{t_k}) - I_k(t, y_{t_k} + \hat{\varphi}_{t_k})\|^2 \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ .

Comme  $\|f(t, y_t^n + \hat{\varphi}_t) - f(t, y_t + \hat{\varphi}_t)\|^2 \leq \zeta_f(t) \Pi_f(r')$ ,

$\|q(t, y_t^n + \hat{\varphi}_t) - q(t, y_t + \hat{\varphi}_t)\|^2 \leq \zeta_f(t) \Pi_f(r')$ ,

par application du théorème de la convergence dominée, nous avons pour tout  $t \in I$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\|\Upsilon y^n(t) - \Upsilon y(t)\|^2 &\leq 4\mathbb{E}\|\tilde{G}(t, y_t^n + \hat{\varphi}_t) - \tilde{G}(t, y_t + \hat{\varphi}_t)\|^2 \\ &\quad + 4TM^2 \int_0^t \mathbb{E}\|f(s, y_s^n + \hat{\varphi}_s) - f(s, y_s + \hat{\varphi}_s)\|^2 ds \\ &\quad + 4M^2 \int_0^t \mathbb{E}\|q(s, y_s^n + \hat{\varphi}_s) - q(s, y_s + \hat{\varphi}_s)\|^2 ds \\ &\quad + 4M^2 m \sum_{i=1}^m \mathbb{E}\|I_k(t, y_{t_k}^n + \hat{\varphi}_{t_k}) - I_k(t, y_{t_k} + \hat{\varphi}_{t_k})\|^2 \rightarrow 0, \text{ p.s. } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}\|\Upsilon y^n(t) - \Upsilon y(t)\|_{\mathcal{B}_T}^2 \rightarrow 0, \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

Ceci implique que  $\Upsilon$  est continu dans  $\bar{B}_r$ .

**Étape 3.** L'opérateur  $\Upsilon(\bar{B}_r)$  est équicontinu sur  $I$ .

Soient  $t_1, t_2 \in ]0, T[$  tels  $t_1 < t_2$  et  $y \in \bar{B}_r$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\|\Upsilon y(t_2) - \Upsilon y(t_1)\|^2 &\leq 6(\Theta^*)^2 \|\mathcal{R}(t_2) - \mathcal{R}(t_1)\|^2 \\ &\quad + 6\mathbb{E}\|\tilde{G}(t_2, y_{t_2} + \hat{\varphi}_{t_2}) - \tilde{G}(t_1, y_{t_1} + \hat{\varphi}_{t_1})\|^2 \\ &\quad + 12\mathbb{E}\left\| \int_0^{t_1} [\mathcal{R}(t_2 - s) - \mathcal{R}(t_1 - s)] f(s, y_s + \hat{\varphi}_s) ds \right\|^2 \\ &\quad + 12\mathbb{E}\left\| \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{R}(t_2 - s) f(s, y_s + \hat{\varphi}_s) ds \right\|^2 \\ &\quad + 12\mathbb{E}\left\| \int_0^{t_1} [\mathcal{R}(t_2 - s) - \mathcal{R}(t_1 - s)] q(s, y_s + \hat{\varphi}_s) dw(s) \right\|^2 \\ &\quad + 12\mathbb{E}\left\| \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{R}(t_2 - s) q(s, y_s + \hat{\varphi}_s) dw(s) \right\|^2 \\ &\quad + 6\mathbb{E}\left\| \sum_{k=1}^m [\mathcal{R}(t_2 - t_k) - \mathcal{R}(t_1 - t_k)] I_k(y_{t_k} + \hat{\varphi}_{t_k}) \right\|^2 \\ &\quad + 12\mathbb{E}\left\| \int_0^{t_1} [\mathcal{R}(t_2 - t_k) - \mathcal{R}(t_1 - t_k)] \sigma(s) dB_Q^H(s) \right\|^2 \\ &\quad + 12\mathbb{E}\left\| \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{R}(t_2 - s) \sigma(s) dB_Q^H(s) \right\|^2 \\ &\leq 12 \|h(0, \varphi(0))\|^2 \|\mathcal{R}(t_2) - \mathcal{R}(t_1)\|^2 \\ &\quad + 12t_1 \Pi_f(r') \int_0^{t_1} \|\mathcal{R}(t_2 - s) - \mathcal{R}(t_1 - s)\|^2 \zeta_f(s) ds \\ &\quad + 12M^2 \Pi_f(r')(t_2 - t_1) \int_{t_1}^{t_2} \zeta_f(s) ds \\ &\quad + 12\Pi_q(r') Tr(Q) \int_0^{t_1} \|\mathcal{R}(t_2 - s) - \mathcal{R}(t_1 - s)\|^2 \zeta_q(s) ds \\ &\quad + 12M^2 \Pi_q(r') Tr(Q) \int_{t_1}^{t_2} \zeta_q(s) ds \\ &\quad + 6(\sum_{k=1}^m L_k) \|\mathcal{R}(t_2 - t_k) - \mathcal{R}(t_1 - t_k)\|^2 \\ &\quad + 12cM^2 H(2H - 1)t^{2H} \int_0^{t_1} \|\mathcal{R}(t_2 - s) - \mathcal{R}(t_1 - s)\|^2 \|\sigma(s)\|_{L_Q^0}^2 ds \\ &\quad + 12cM^2 H(2H - 1)t^{2H} M^2 \int_{t_1}^{t_2} \|\sigma(s)\|_{L_Q^0}^2 ds. \end{aligned}$$

Le terme de droit tend vers zéro quand  $t_2 \rightarrow t_1$  comme  $\mathcal{R}(t)$  est continu en norme. Ce qui prouve l'équicontinuité. Dans cette démonstration, on a considéré le cas  $0 < t_1 < t_2 \leq T$ ,

l'autre cas  $t_1 < t_2 \leq 0$  se traite de la même manière.

**Étape 4.** Nous vérifions que les conditions de Mönch sont satisfaites.

Supposons qu'il existe un sous-ensemble non vide, borné arbitraire  $W^* \subset \mathcal{B}_{T_p}^0$  et  $y_1, y_2 \in W^*$ .

On peut donc avoir  $d(\Upsilon y_1(t), \Upsilon y_2(t)) = d(\hat{\Upsilon} y_1(t), \hat{\Upsilon} y_2(t))$ . Ce qui est similaire à la preuve du Lemme 4.2.2, on a donc

$\chi(\Upsilon y(t)) = \chi(\hat{\Upsilon} y(t))$ , où

$$\begin{aligned} \hat{\Upsilon} y(t) &= \left[ \mathcal{R}(t)[- \tilde{G}(0, \varphi(0))] + \tilde{G}(t, y_t + \hat{\varphi}_t) \right] \\ &+ \left[ \int_0^t \mathcal{R}(t-s) f(s, y_s + \hat{\varphi}_s) ds + \int_0^t \mathcal{R}(t-s) q(s, y_s + \hat{\varphi}_s) dw(s) \right] \\ &+ \sum_{0 < t_k < t} \mathcal{R}(t_k - t) I_k(y_{t_k} + \hat{\varphi}_{t_k}) \\ &:= \hat{\Upsilon}_1 + \hat{\Upsilon}_2 + \hat{\Upsilon}_3. \end{aligned}$$

Soit  $D \subset \bar{B}_r$  un ensemble dénombrable tel que  $D \subset \bar{c}o(\{0\} \cup \Upsilon(D))$ . Notre objectif est de démontrer que  $\chi(D) = 0$ . Sans perte de généralité, nous supposons que  $D = \{y^n\}_{n=1}^{+\infty}$ . D'après l'Étape 3, il est facile de vérifier que  $\bar{c}o(\{0\} \cup \Upsilon(D))$  est équicontinu sur  $I$ .

D'après les hypothèses  $(\mathbf{H}_{3.1})$  et  $(ii)$  de  $(\mathbf{H}_{3.3})$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \chi(\{\hat{\Upsilon}_1 y^n(t)\}_{n=1}^{\infty}) &\leq \Theta^* \sup_{-\infty < \theta \leq 0} \chi(\{y_t^n(\theta) + \hat{\varphi}_t(\theta)\}_{n=1}^{\infty}) \\ &\leq \Theta^* \end{aligned} \quad (4.17)$$

En combinant le Lemme 4.2.2 et  $(iii)$  de  $(\mathbf{H}_{3.4})$ ,  $(iii)$  de  $(\mathbf{H}_{3.5})$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \chi(\{\hat{\Upsilon}_2 y^n(t)\}_{n=1}^{\infty}) &\leq MT \int_0^t l_f(s) \sup_{-\infty < \theta \leq 0} \chi(\{y_s^n(\theta) + \hat{\varphi}_s(\theta)\}_{n=1}^{\infty}) ds \\ &+ M \|l_{\tilde{G}}\|_{L^2(I, \mathbb{R}^*)} \sup_{-\infty < \theta \leq 0} \chi(\{y_t^n(\theta) + \hat{\varphi}_t(\theta)\}_{n=1}^{\infty}) \\ &\leq (MT \|l_f\|_{L^1(I, \mathbb{R}^*)} + M \|l_{\tilde{G}}\|_{L^2(I, \mathbb{R}^*)}) \sup_{0 \leq \theta \leq T} \chi(\{y^n(\theta)\}). \end{aligned}$$

D'après  $(\mathbf{H}_{3.1})$  et  $(ii)$  de  $(\mathbf{H}_{3.6})$ , on a

$$\begin{aligned} \chi(\{\hat{\Upsilon}_3 y^n(t)\}_{n=1}^{\infty}) &\leq M \sum_{n=1}^m l_k \sup_{-\infty < \theta \leq 0} \chi(\{y_t^n(\theta) + \hat{\varphi}_t(\theta)\}_{n=1}^{\infty}) \\ &\leq M \sum_{n=1}^m l_k \sup_{0 \leq \theta \leq T} \chi(\{y^n(\theta)\}). \end{aligned}$$

Des inégalités ci-dessus et du Lemme 1.3.1, on obtient que

$$\begin{aligned} \chi(\{\Upsilon y^n(t)\}_{n=1}^{\infty}) &= \chi(\{\hat{\Upsilon} y^n(t)\}_{n=1}^{\infty}) \\ &\leq \chi(\{\hat{\Upsilon}_1 y^n(t)\}_{n=1}^{\infty}) \\ &\quad + \chi(\{\hat{\Upsilon}_2 y^n(t)\}_{n=1}^{\infty}) + \chi(\{\hat{\Upsilon}_3 y^n(t)\}_{n=1}^{\infty}) \\ &\leq (\Theta^* + MT \|l_f\|_{L^1(I, \mathbb{R}^*)} + M \|l_{\tilde{G}}\|_{L^2(I, \mathbb{R}^*)} + M \sum_{n=1}^m l_k) \\ &\quad \times \chi(\{y^n(t)\}_{n=1}^{\infty}) \\ &= M^* \chi(\{y^n(t)\}_{n=1}^{\infty}), \end{aligned}$$

où

$$M^* = \Theta^* + MT\|l_f\|_{L^1(I, \mathbb{R}^*)} + M\|l_{\tilde{G}}\|_{L^2(I, \mathbb{R}^*)} + M \sum_{n=1}^m l_k < 1.$$

En utilisant le Lemme 1.3.1, on obtient que :

$$\chi(D) \leq \chi(\bar{c}o(\{0\} \cup \Upsilon(D))) = \chi(\Upsilon(D)) \leq M^* \chi(D).$$

Ce qui implique que  $\chi(D) = 0$ ,  $D$  est un ensemble relativement compact. D'après le Lemme 1.6.3, on sait que  $\Upsilon$  a un point fixe dans  $D$ . Ce qui achève la preuve.

□

**Remarque 4.3.1.** *Il convient de noter que la fonction  $\sigma$  est indépendante de  $y(t), t \in ]-\infty, T]$ . Donc, nous avons  $\chi\left(\int_0^t \mathcal{R}(t-s)\sigma(s)dB_Q^H(s)\right) = 0$ .*

## 4.4 Stabilité exponentielle en moyenne quadratique

La stabilité est une notion vaste dans le monde des mathématiques, dans cette section, nous allons nous focaliser sur la stabilité exponentielle. Cette dernière nous permet de connaître le comportement asymptotique de la solution lorsque le temps devient grand, plus précisément, elle permet d'évaluer la vitesse de décroissance de la solution du système quand le temps  $t$  tend vers infini. Pour cette étude, nous avons besoin des hypothèses suivantes :

(H<sub>3.8</sub>) Il existe des constantes positives  $M > 0$  et  $\lambda > 0$  telles que  $\|\mathcal{R}(t)\| \leq Me^{-\lambda t}, \forall t \geq 0$ .

(H<sub>3.9</sub>) Il existe des nombres réels positifs  $K_1, K_2, K_3$  et certaines fonctions continues  $\varepsilon_i : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}^+, i = 1, 2, 3$ , tels que pour tout  $x \in \mathcal{B}_\rho$

$$\|\tilde{G}(t, x)\|^2 \leq K_1 \|x\|^2 + \varepsilon_1(t),$$

$$\|f(t, x)\|^2 \leq K_2 \|x\|^2 + \varepsilon_2(t),$$

$$\|q(t, x)\|^2 \leq K_3 \|x\|^2 + \varepsilon_3(t).$$

(H<sub>3.10</sub>) Il existe des nombres réels positifs  $q_1, q_2, q_3$  tels que

$$\varepsilon_i(t) \leq q_i e^{-\lambda t}, \quad \forall t \geq 0, i = 1, 2, 3,$$

(H<sub>3.11</sub>) La fonction  $\sigma : I \rightarrow L_Q^0(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$  satisfait la condition (H<sub>3.2</sub>) et

$$\int_0^\infty e^{\lambda s} \|\sigma(s)\|_{L_{pQ}}^2 ds < \infty.$$

**Lemme 4.4.1.** *Supposons la fonction  $z : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$  et qu'il existe des constantes positives  $\gamma, \alpha_i (i = 1, 2, 3)$  et  $\beta_k (k = 1, 2, \dots, m)$  telles que*

$$z(t) \leq \begin{cases} \alpha_1 e^{-\gamma t}, & t \in ]-\infty, 0], \\ \alpha_1 e^{-\gamma t} + \alpha_2 \sup_{-r \leq \theta \leq 0} z(t+\theta) + \alpha_3 \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} \sup_{-r \leq \theta \leq 0} z(t+\theta) ds \\ + \sum_{t_k < t} \beta_k e^{-\gamma(t-t_k)} \sup_{-r \leq \theta \leq 0} z(t_k + \theta), & t \geq 0, \end{cases} \quad (4.18)$$

Si  $\alpha_2 + \frac{\alpha_3}{\gamma} + \sum_{k=1}^m \beta_k < 1$ , alors  $z(t) \leq Me^{-\gamma t}$  ( $t \geq -\tau$ ), où  $\gamma > 0$  est une racine positive de l'équation algébrique :  $\alpha_2 e^{\gamma\tau} + \frac{\alpha_3}{\gamma-\lambda} e^{\gamma\tau} + \sum_{k=1}^m \beta_k e^{\gamma\tau} = 1$ , et  $M = \max\{\alpha_1, \frac{\alpha_1(\gamma-\lambda)}{\alpha_3 e^{\gamma\tau}}\} > 0$ .

**Preuve.** Soit  $F(\mu) = \alpha_2 e^{\mu\tau} + \frac{\alpha_3}{\gamma-\mu} e^{\mu\tau} + \sum_{k=1}^m \beta_k e^{\mu\tau} - 1$ , on a  $F(0)F(\gamma^-) < 1$ . D'après le théorème d'existence de racine, il existe une constante positive  $\lambda \in (0, \gamma)$  telle que  $F(\lambda) = 0$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , nous posons

$$C_\varepsilon = \max\left\{\alpha_1 + \varepsilon, \frac{(\alpha_1 + \varepsilon)(\gamma - \lambda)}{\alpha_3 e^{\gamma\tau}}\right\} > 0.$$

Dans le souci de démontrer ce Lemme, nous admettons que l'équation (4.18) implique

$$z(t) \leq C_\varepsilon e^{-\lambda t}, \quad t \in [-\tau, \infty). \quad (4.19)$$

Pour tout  $t \in [-\tau, \infty)$ , (4.19) est satisfait. Par contradiction, supposons qu'il existe  $t_1 > 0$  tel que

$$z(t) \leq C_\varepsilon e^{-\lambda t}, \quad t \in [-\tau, t_1) \quad \text{et} \quad z(t_1) \leq C_\varepsilon e^{-\lambda t_1}, \quad (4.20)$$

combiner avec (4.18) implique (on note que  $0 < \lambda < \gamma$ )

$$\begin{aligned} z(t_1) &\leq \alpha_1 e^{-\gamma t_1} + \alpha_2 C_\varepsilon \sup_{-r \leq \theta \leq 0} z(t_1 + \theta) + \alpha_3 C_\varepsilon \int_0^{t_1} e^{-\gamma(t_1-s)} \sup_{-r \leq \theta \leq 0} e^{-\lambda(s+\theta)} ds \\ &\quad + C_\varepsilon \sum_{t_k < t_1} \beta_k e^{-\gamma(t_1-t_k)} \sup_{-r \leq \theta \leq 0} e^{-\lambda(t_k+\theta)}, \\ &\leq \alpha_1 e^{-\gamma t_1} + \alpha_2 C_\varepsilon e^{-\lambda(t_1-\tau)} + \alpha_3 C_\varepsilon \int_0^{t_1} e^{-\gamma(t_1-s)} e^{-\lambda(s-\tau)} ds \\ &\quad + C_\varepsilon \sum_{t_k < t_1} \beta_k e^{-\lambda(t_1-\tau)} \\ &\leq \alpha_1 e^{-\gamma t_1} - \frac{\alpha_3 C_\varepsilon e^{\lambda\tau}}{\gamma - \lambda} e^{-\gamma t_1} + \left( \alpha_2 e^{\lambda\tau} + \alpha_3 \frac{e^{\lambda\tau}}{\gamma - \lambda} + \sum_{t_k < t_1} \beta_k e^{\lambda\tau} \right) C_\varepsilon e^{-\lambda t_1}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

D'après la définition de  $\lambda$  et  $C_\varepsilon$ , on a :

$$\alpha_2 e^{\lambda\tau} + \frac{\alpha_3}{\gamma - \lambda} e^{\lambda\tau} + \sum_{t_k < t_1} \beta_k e^{\lambda\tau} = 1,$$

et

$$\alpha_1 e^{-\gamma t_1} - \frac{\alpha_3 C_\varepsilon e^{\lambda\tau}}{\gamma - \lambda} e^{-\gamma t_1} \leq \alpha_1 e^{-\gamma t_1} - \frac{\alpha_3 e^{\lambda\tau}}{\gamma - \lambda} e^{-\gamma t_1} \frac{(\alpha_1 + \varepsilon)(\gamma - \lambda)}{\alpha_3 e^{\gamma\tau}} < 0.$$

Ainsi, d'après (4.21), on obtient que  $z(t_1) < C_\varepsilon e^{-\lambda t_1}$ , qui contredit (4.20). Par conséquent l'équation (4.19) est satisfaite. Comme  $\varepsilon$  est arbitraire, donc on a (4.18). La preuve est complète. □

**Théorème 4.4.1.** *Supposons l'hypothèse (i) de  $(\mathbf{H}_{3.6})$  et les hypothèses  $(\mathbf{H}_{3.8}) - (\mathbf{H}_{3.11})$  satisfaites et que :*

$$\frac{5\{[M^2 K_2 / \lambda^2] + [M^2 K_3 / \lambda] + [M^2 m \sum_{k=1}^m L_k]\}}{(1 - k)^2} < 1 \quad (4.22)$$

où  $k = \sqrt{K_1}$ . Alors la solution faible du système (4.1) est exponentiellement stable en moyenne quadratique.

**Preuve.** De l'inégalité (4.22), on peut trouver un réel petit  $\epsilon > 0$  tel que  $\eta = \lambda - \epsilon$  satisfait l'inégalité suivante :

$$k + \frac{5M^2K_2}{\lambda(\lambda - \epsilon)(1 - k)} + \frac{5M^2K_3}{(\lambda - \epsilon)(1 - k)} + \frac{5M^2m \sum_{k=1}^m L_k}{1 - k} < 1.$$

D'après (4.4), on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\|x(t)\|^2 &\leq \frac{1}{k}\mathbb{E}\|\tilde{G}(t, x_t)\|^2 + \frac{5}{1-k}\mathbb{E}\left\{\|\mathcal{R}(t)[\varphi(0) - \tilde{G}(0, \varphi(0))]\|^2\right. \\ &\quad + \left\|\int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, x_s)ds\right\|^2 + \left\|\int_0^t \mathcal{R}(t-s)q(s, x_s)dw(s)\right\|^2 \\ &\quad \left. + \left\|\sum_{0 < t_k < t} \mathcal{R}(t-t_k)I_k(x_{t_k})\right\|^2 + \left\|\int_0^t \mathcal{R}(t-s)\sigma(s)dB_Q^H(s)\right\|^2\right\} \\ &:= \sum_{i=1}^5 F_i. \end{aligned} \quad (4.23)$$

En utilisant les hypothèses  $(\mathbf{H}_{3,8}) - (\mathbf{H}_{3,10})$ , on a :

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{k}\mathbb{E}\|\tilde{G}(t, x_t)\|^2 \leq \frac{1}{k}\{K_1\mathbb{E}\|x_t\|^2 + \varepsilon_1(t)\} \\ &\leq k\mathbb{E}\|x_t\|^2 + E_1e^{-\eta t}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

avec  $E_1 = \frac{q_1}{k}$ .

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{5}{1-k}\mathbb{E}\|T(t)[\varphi(0) - \tilde{G}(0, \varphi(0))]\|^2 \\ &\leq \frac{10M^2}{1-k}e^{-2\lambda t}\mathbb{E}\|\varphi(0)\|^2 + \frac{10M^2}{1-k}e^{-2\lambda t}\{K_1\|\varphi\|^2 + \varepsilon_1(t)\} \\ &\leq E_2e^{-\eta t} \end{aligned} \quad (4.25)$$

avec  $E_2 = \frac{12M^2}{1-k}[\mathbb{E}\|\varphi(0)\|^2 + \frac{12M^2}{1-k}\|\varphi\|^2 + q_1]$ .

En combinant  $(\mathbf{H}_{3,8}) - (\mathbf{H}_{3,10})$  et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} F_3 &= \frac{5}{1-k}\mathbb{E}\left\|\int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, x_s)ds\right\|^2 \\ &\leq \frac{5}{1-k}\int_0^t M^2e^{-\lambda(t-s)}ds \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\mathbb{E}\|f(s, x_s)\|^2ds \\ &\leq \frac{5M^2K_2}{\lambda(1-k)}\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\mathbb{E}\|x_s\|^2ds + E_3e^{-\eta t}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

avec  $E_3 = \frac{5M^2}{\lambda(1-k)}\frac{q_2}{\lambda - \eta}$ .

Et

$$\begin{aligned} F_4 &= \frac{5}{1-k}\mathbb{E}\left\|\int_0^t \mathcal{R}(t-s)q(s, x_s)dw(s)\right\|^2 \\ &\leq \frac{5M^2}{1-k}\int_0^t e^{-2\lambda(t-s)}\mathbb{E}\|q(s, x_s)\|^2ds \\ &\leq \frac{5M^2K_3}{\lambda(1-k)}\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\mathbb{E}\|x_s\|^2ds + E_4e^{-\eta t}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

avec

$$E_4 = \frac{5M^2}{\lambda(1-k)} \frac{q_3}{\lambda - \eta}.$$

En utilisant le point (i) de  $(\mathbf{H}_{3.6})$  et  $(\mathbf{H}_{3.8})$ , on a :

$$\begin{aligned} F_5 &= \frac{5}{1-k} \mathbb{E} \left\| \sum_{0 < t_k < t} \mathcal{R}(t-t_k) I_k(x_k) \right\|^2 \\ &\leq \frac{5M^2}{1-k} m \sum_{k=1}^m L_k e^{-2\lambda(t-s)} \mathbb{E} \|x_{t_k}\|^2 \\ &\leq \frac{5M^2}{\lambda(1-k)} m \sum_{k=1}^m L_k e^{-\lambda(t-s)} \mathbb{E} \|x_{t_k}\|^2. \end{aligned} \quad (4.28)$$

En appliquant une fois encore le Lemme 1.7.4 et  $(\mathbf{H}_{3.8})$ ,  $(\mathbf{H}_{3.11})$ , on a

$$\begin{aligned} F_6 &= \frac{5}{1-k} \mathbb{E} \left\| \int_0^t \mathcal{R}(t-s) \sigma(s) dB_Q^H(s) \right\|^2 \\ &\leq \frac{6M^2 cH(2H-1)t^{2H-1}}{1-k} \int_0^t e^{-2\lambda(t-s)} \mathbb{E} \|\sigma(s)\|_{L_Q^0}^2 ds \\ &\leq e^{-\eta t} \frac{6M^2 cH(2H-1)t^{2H-1} e^{-\epsilon t}}{1-k} \int_0^t e^{\lambda s} \mathbb{E} \|\sigma(s)\|_{L_Q^0}^2 ds. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Par conséquent, l'hypothèse  $(\mathbf{H}_{3.11})$  assure donc qu'il existe une constante positive  $E_5$ , pour tout  $t \geq 0$  telle que

$$\frac{6M^2 cH(2H-1)t^{2H-1} e^{-\epsilon t}}{1-k} \int_0^t e^{\lambda s} \mathbb{E} \|\sigma(s)\|_{L_Q^0}^2 ds \leq E_5.$$

Alors,

$$F_6 \leq E_5 e^{-\eta t}$$

Des équations (4.24) – (4.29), on obtient donc que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|x(t)\|^2 &\leq k \mathbb{E} \|x_t\|^2 + E_1 e^{-\eta t} + E_2 e^{-\eta t} \\ &\quad + \frac{5M^2 K_2}{\lambda(1-k)} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \mathbb{E} \|x_s\|^2 ds + E_3 e^{-\eta t} \\ &\quad + \frac{5M^2 K_3}{\lambda(1-k)} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \mathbb{E} \|x_s\|^2 ds + E_4 e^{-\eta t} \\ &\quad + \frac{5M^2}{\lambda(1-k)} m \sum_{k=1}^m L_k e^{-\lambda(t-s)} \mathbb{E} \|x_{t_k}\|^2 + E_5 e^{-\eta t} \\ &\leq E e^{-\eta t} + k \sup_{-r \leq \theta \leq 0} \mathbb{E} \|x(t+\theta)\|^2 \\ &\quad + \hat{k} \int_0^t e^{-\eta(t-s)} \sup_{-r \leq \theta \leq 0} \mathbb{E} \|x(s+\theta)\|^2 ds \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \delta_k e^{-\eta(t-t_k)} \sup_{-r \leq \theta \leq 0} \mathbb{E} \|x(t_k+\theta)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Et

$$\mathbb{E}\|x(t)\|^2 \leq Ee^{-\eta t}, \quad \text{pour } t \in ]-\infty, 0],$$

où

$$E = \max \left( \sum_{i=1}^5 E_i, \sup_{-\infty \leq \theta \leq 0} \mathbb{E}\|\varphi(\theta)\|^2 \right), \quad \delta_k = \frac{5M^2}{1-k} mL_k, \quad \hat{k} = \frac{5M^2 K_2}{\lambda(1-k)} + \frac{5M^2 K_3}{1-k}.$$

Comme  $k + \frac{\hat{k}}{\eta} + \sum_{k=1}^m \delta_k < 1$ , combiné avec le Lemme 4.4.1, nous amènent à dire qu'il existe des constantes positives  $K$  et  $\theta$  telles que  $\mathbb{E}\|x(t)\|^2 \leq Ke^{-\theta t}$ ,  $t \geq -\tau$ . Ce qui implique que la solution faible du système (4.1) est exponentiellement stable en moment quadratique.

□

## 4.5 Exemple

Dans cette section, nous exposons un exemple pour illustrer les résultats abstraits obtenus ci-dessus. Considérons l'équation intégrodifférentielle partielle stochastique impulsive de type neutre dirigée par un processus de Wiener et un mBf de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} [x(t, \varphi) - \tilde{G}(t, x(t-r, \varphi))] = q(x)[x(t, \varphi) - \tilde{G}(t, x(t-r, \varphi))] \\ \quad + \int_0^t b(t-s)q(x)[x(t, \varphi) - \tilde{G}(t, x(t-r, \varphi))]ds \\ \quad + f(t, x(t-r_2, \varphi)) + a(t, x(t-s, \varphi))dB(t) + \sigma(t)\frac{dB^H}{dt}(t), 0 \leq \varphi \leq 1, t \in I, t \neq t_k, \\ \Delta x(t_k, \varphi) = I_k(x(t_k - r, \varphi)), \quad t = t_k, k = 1, 2, \dots, m, \\ x(t, 0) - \tilde{G}(t, x(t-r, 0)) = 0, \quad t \in [0, T] \\ x(t, 1) - \tilde{G}(t, x(t-r, 1)) = 0, \quad t \in [0, T] \\ x(\theta, \varphi) = x_0(\theta, \varphi), \quad \theta \in ]-\infty, 0] \text{ et } 0 \leq \varphi \leq 1, \end{array} \right. \quad (4.30)$$

où  $B(t)$  est un mouvement Brownien standard,  $B^H(t)$  un mouvement Brownien fractionnaire de paramètre de Hurst  $H \in ]\frac{1}{2}, 1[$  qui est indépendant de  $B(t)$ , défini sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

Soit  $\mathcal{X} = L^2([0, 1], \mathbb{C})$  l'espace de toutes les fonctions complexe de carrés intégrables sur  $[0, 1]$ .

On suppose que :

1.  $x_0 \in \mathcal{B}_\rho$
2.  $b : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$  est une fonction de classe  $C^1$  avec la fonction dérivée  $b'$  vérifiant  $|b'(t)| \leq b(t)$  pour tout  $t \geq 0$ .
3.  $q : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$  est une fonction continue satisfaisant  $\sup_{s \in [0, 1]} \text{Re}(q(s)) < \infty$ .

On définit l'opérateur multiplicatif  $A$  sur  $\mathbb{X}$  comme suit :

$$\begin{cases} D(A) = \{N \in \mathbb{X} : q.N \in \mathbb{X}\} \\ AN = q.N \end{cases}$$

D'après [[43], p. 121], on sait que  $A$  génère un semi-groupe de multiplication continue en norme

$$(S_q(t))_{t \geq 0} \text{ sur } \mathbb{X} \text{ donnée par } S_q(t)N = e^{tq}N \text{ pour } t \geq 0 \text{ et } N \in \mathbb{X}.$$

Définissons l'opérateur  $\Gamma(t) : \mathbb{Y} \mapsto \mathbb{X}$  comme suit :  $\Gamma(t)N = b(t)AN$  pour  $t \geq 0$  et  $N \in D(A)$ .

$$\text{Soit } \rho(s) = e^{2s}, \quad s < 0. \text{ Alors } l = \int_{-\infty}^0 \rho(s)ds = \frac{1}{2}. \text{ Soit}$$

$$\|\psi\|_{\mathcal{B}_\rho} = \int_{-\infty}^0 \rho(s) \sup_{s \leq \theta \leq 0} (\mathbb{E}\|\psi(\theta)\|^2)^{1/2} ds.$$

Par conséquent, pour  $(t, \psi) \in I \times \mathcal{B}_\rho$ , où  $\psi(\theta)(\varphi) = \psi(\theta, \varphi)$ ,  $(\theta, \varphi) \in ]-\infty, 0] \times [0, 1]$ , posons  $v(t)(\theta) = x(t, \varphi)$  et définissons les fonctions  $h, f, : I \times \mathcal{B}_\rho \rightarrow \mathbb{X}$ ,  $q : I \times \mathcal{B}_\rho \rightarrow \mathcal{L}_2^0(\mathbb{X}, \mathbb{X})$  pour un temps infini comme suit :

$$\begin{aligned} h(t, \psi)(\varphi) &= \int_{-\infty}^0 e^{4\theta} \psi(\theta)(\varphi) d\theta, \\ f(t, \psi)(\varphi) &= \int_{-\infty}^0 f_1(t, \varphi, \theta) f_2(\psi(\theta)(\varphi)) d\theta, \\ q(t, \psi)(\varphi) &= \int_{-\infty}^0 q_1(t, \varphi, \theta) q_2(\psi(\theta)(\varphi)) d\theta, \\ I_k(t, \psi)(\varphi) &= \int_{-\infty}^0 d_k(\theta) \psi(\theta)(\varphi) d\theta, \end{aligned}$$

De plus, supposons que :

$$\mathbf{(A1)} \quad d_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \text{ sont continues avec } L_k = \int_{-\infty}^0 d_k^2(\theta) d\theta < \infty.$$

$$\mathbf{(A2)} \quad f_1(t, \varphi, \theta) \geq 0 \text{ est continu dans } [0, T] \times [0, 1] \times ]-\infty, 0] \text{ et}$$

$$\int_{-\infty}^0 f_1(t, \varphi, \theta) d\theta = P_1(t, \varphi) < \infty \text{ et } \mathcal{P} = \left( \int_0^1 P_1^2(t, \varphi) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

$$\mathbf{(A3)} \quad f_2(\cdot) \text{ est continu,}$$

$$0 \leq f_2(L(\theta, \varphi)) \leq \Phi_f \left( \int_{-\infty}^0 e^{2s} \|L(s, \cdot)\|_{L^2} ds \right) \text{ pour } (\theta, \varphi) \in ]-\infty, 0] \times [0, 1],$$

où  $\Phi_f(\cdot) : [0, \infty[ \rightarrow ]0, \infty[$  est continu et croissant.

$$\mathbf{(A4)} \quad q_1(t, \varphi, \theta) \geq 0 \text{ est continu dans } [0, T] \times [0, 1] \times ]-\infty, 0] \text{ et}$$

$$\int_{-\infty}^0 q_1(t, \varphi, \theta) d\theta = P_2(t, \varphi) < \infty \text{ et } \mathcal{Q} = \left( \int_0^1 P_2^2(t, \varphi) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

(A5)  $q_2(\cdot)$  est continu,

$$0 \leq q_2(L(\theta, \varphi)) \leq \Phi_q \left( \int_{-\infty}^0 e^{2s} \|L(s, \cdot)\|_{L^2} ds \right) \text{ pour } (\theta, \varphi) \in ]-\infty, 0] \times [0, 1],$$

où  $\Phi_q(\cdot) : [0, \infty[ \rightarrow ]0, \infty[$  est continu et croissant.

(A6)  $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continu dans le sens où pour tout  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{t \rightarrow s} |h(t, x_1) - h(s, x_2)|^2 = 0,$$

(A7) Il existe des nombres positifs  $K_1, K_2, K_3$  et des fonction continues  $\zeta_1(\cdot), \zeta_2(\cdot), \zeta_3(\cdot) : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  telles que :

$$|h(t, \tilde{y})|^2 \leq K_1 |\tilde{y}|^2 + \zeta_1(t), \text{ pour } t > 0, \tilde{y} \in \mathbb{R}, \quad (4.31)$$

$$|f(t, \tilde{y})|^2 \leq K_2 |\tilde{y}|^2 + \zeta_2(t), \text{ pour } t > 0, \tilde{y} \in \mathbb{R}, \quad (4.32)$$

$$|q(t, \tilde{y})|^2 \leq K_3 |\tilde{y}|^2 + \zeta_3(t), \text{ pour } t > 0, \tilde{y} \in \mathbb{R}, \quad (4.33)$$

où les  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  satisfont  $|\epsilon_j(t)| \leq S_j e^{-\mu t}$ , pour chaque  $S_j > 0$  très petit et ( $j = 1, 2, 3$ ).

Sous les conditions ci-dessus, l'équation (4.30) prend la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} d[v(t) - \tilde{G}(t, v_t)] = A[v(t) - \tilde{G}(t, v_t)]dt + \int_0^t \Gamma(t-s)[v(s) - \tilde{G}(s, v_s)]dsdt \\ \quad + f(t, v_t)dt + q(t, v_t)dw(t) + \sigma(t)dB_Q^H(t), t \in I = [0, T], t \neq t_k, \\ \Delta v(t_k) = I_k(t_k), k = 1, 2, \dots, m, \\ v_0(t) = \varphi(t) \in L^2(\Omega, \mathcal{B}_\rho), \text{ pour } p.s. t \in ]-\infty, 0], \end{array} \right. \quad (4.34)$$

Comme,

$$\begin{aligned} |\Gamma(t)(t)y|_{\mathcal{X}} &\leq b(t)|y| \\ \left| \frac{d}{dt} \Gamma(t)(t)y \right|_{\mathcal{X}} &\leq c(t)|y|_{\mathbb{Y}} \end{aligned}$$

pour tout  $y \in \mathbb{Y}$  et  $t \in \mathbb{R}^+$ . Donc les hypothèses (H1) et (H2) sont satisfaites. Par conséquent, d'après le Théorème 1.5.7 et Théorème 1.5.4, on conclut que équation (4.34), admet un opérateur résolvant  $(\mathcal{R}(t))_{t \geq 0}$  sur  $\mathcal{X}$  qui est continu en norme pour  $t > 0$ .

En observant les définitions des fonctions  $h, f, q$ , on peut facilement vérifier que les hypothèses (H<sub>3,2</sub>) – (H<sub>3,5</sub>) sont toutes remplies avec

$$\begin{aligned} \kappa_{\tilde{G}} &= \frac{1}{4}, l_{\tilde{G}} = \frac{1}{2}, \zeta_f(t) = \int_0^1 P_1^2(t, \varphi) d\varphi, \zeta_q(t) = \int_0^1 P_1^2(t, \varphi) d\varphi, \\ l_f(t) &= \left( \int_0^1 P_1^2(t, \varphi) d\varphi \right)^{\frac{1}{2}}, l_q(t) = \left( \int_0^1 P_2^2(t, \varphi) d\varphi \right)^{\frac{1}{2}}, \\ L_k &= \int_{-\infty}^0 d_k^2(\theta), l_k = \left( \int_{-\infty}^0 d_k^2(\theta) \right)^{\frac{1}{2}} d\theta. \end{aligned}$$

En supposant que  $(\mathbf{H}_{3.1})$  et  $(\mathbf{H}_{3.6})$  sont satisfaites et

$$h^* + MT\|l_f\|_{L^1(I, \mathbb{R}^+)} + M\|l_g\|_{L^2(I, \mathbb{R}^+)} + M \sum_{n=1}^m l_k < 1. \quad (4.35)$$

Alors toutes les hypothèses données au Théorème 4.3.1 sont satisfaites et on conclut que l'équation (4.34) a au moins une solution faible sur  $[0, T]$ .

Supposons de plus qu'il existe  $\beta_1 > a > 1$  et  $b(t) < \frac{1}{a}e^{-\beta_1 t}$  pour tout  $t \geq 0$ . D'après le Lemme 5.2 dans [36], on a l'estimation suivante  $\|\mathcal{R}(t)\| \leq e^{-\lambda t}$  où  $\lambda = (1 - \frac{1}{a})$ . Ce qui implique que les hypothèses du Théorème 4.4.1 sont vérifiées. Ensuite, le système à retard (4.34) possède une unique solution faible qui est exponentiellement stable pourvu que

$$\frac{5\{[M^2 K_2 / \lambda^2] + [M^2 K_3 / \lambda] + [M^2 m \sum_{k=1}^m L_k]\}}{(1 - k)^2} < 1, \quad (4.36)$$

avec  $k = \sqrt{K_1}$ .

## Attractivité et $p$ -stabilité exponentielle d'une classe d'équations intégrodifférentielles stochastiques neutres impulsives mixtes

---

### Résumé

Dans ce chapitre, nous étudions l'attractivité et la stabilité  $p$ -exponentielle de la solution faible d'une classe d'équations intégrodifférentielles stochastiques neutre impulsives dirigées par un processus de Wiener et un mouvement Brownien fractionnaire (mBf). En utilisant les inégalités intégrales-impulsives et la théorie des opérateurs résolvents, nous allons montrer la stabilité  $p$ -exponentielle avant de faire l'analyse de l'attractivité. Pour clore ce chapitre, nous donnerons un exemple illustratif pour soutenir la faisabilité de nos résultats abstraits. Ce chapitre fait l'objet d'une publication <sup>1</sup>.

### 5.1 Introduction

Pendant des années, l'analyse des systèmes dynamiques n'a été réservée qu'à la détermination de la stabilité, du comportement asymptotique ou du point d'équilibre du système et, dans ce cas, plusieurs résultats ont été obtenus [26, 27, 44, 127, 136]. Cependant, dans beaucoup de problèmes, spécialement dans les problèmes non linéaires et les problèmes stochastiques,

---

1. Mahamat Hassan Mahamat Hamit, Fulbert Kuessi Allognissode, Mohamed Salem Mohamed, Louk-Man Issaka, Mamadou Abdoul Diop, *Attractiveness and exponential  $p$ -stability of neutral stochastic functional integrodifferential equations driven by Wiener process and fBm with impulses effects*, *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*, 9(3) (2020) 351-366, DOI : 10.5890/DNC.2020.09.002

le point d'équilibre n'existe pas, et donc, déterminer des sous-ensembles qui attirent toutes les solutions lorsque le temps croît vers infini, ou des sous-ensembles qui assurent que le système, que l'on traite, reste dans une certaine zone, ou encore les incertitudes sur les états du système ou des forces extérieures qui agissent sur le système et que l'on néglige dans le modèle, n'affecteront pas le comportement asymptotique de ce dernier. Il existe une littérature abondante qui parle des équations différentielles ordinaires, des équations différentielles partielles, des équations différentielles impulsives, des équations différentielles stochastiques et autres [37, 68, 84, 123, 126, 136, 137, 139, 140, 144]. Il existe, particulièrement, deux méthodes souvent utilisées pour déterminer ces sous-ensembles. Il s'agit de la méthode de Lyapounov et celle basée sur les inégalités intégrales ou les inégalités différentielles.

On note que la méthode la plus connue dans l'étude du comportement asymptotique et de la propriété de stabilité est la construction d'une suite de fonctions de Lyapunov. Cependant, cette méthode s'avère très difficile lorsqu'on étudie la stabilité exponentielle des systèmes impulsifs. Néanmoins, ces dernières années, beaucoup d'auteurs (voir [29, 83, 95, 134] ) ont proposé une méthode pour contourner cette difficulté en établissant les inégalités intégrales-impulsives. Motivés par ces travaux précédents, nous allons étudier les ensembles quasi-invariants, globalement attractifs, et la stabilité exponentielle de solution faible du système (5.1) en utilisant les inégalités intégrales-impulsives et la théorie des opérateurs résolvants introduits par Grimmer [50].

Dans ce chapitre, notre objectif est d'établir de nouvelles inégalités intégrales-impulsives pour déterminer les ensembles attractifs et les ensembles quasi-invariants d'une classe d'équations intégrodifférentielles stochastiques impulsives, à retard de type neutre de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} d[x(t) + \tilde{G}(t, x_t)] = \left[ A[x(t) + \tilde{G}(t, x_t)] + f(t, x_t) + \int_0^t \Gamma(t-s)[x(s) + \tilde{G}(s, x_s)] ds \right] dt \\ \quad + q(t, x_t)dw(t) + \sigma(t)dB_Q^H(t), \quad t > 0, \quad t \neq t_k, \\ \Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k^-) = I_k(x(t_k)), \quad t = t_k, \quad k = 1, 2, \dots, \\ x(t) = \varphi(t) \in PC_{\mathcal{F}_0}^B([- \tau, 0], \mathbb{X}), \quad t \in [- \tau, 0], \end{array} \right. \quad (5.1)$$

où  $A : D(A) \subseteq \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$  est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu  $\{S(t), t \geq 0\}$  défini sur  $\mathbb{Y}$ ;  $\Gamma(t)$  un opérateur fermé sur  $\mathbb{Y}$  de domaine  $D(A) \subset D(\Gamma)$  qui est indépendant de  $t$ ,  $t \geq 0$ ;  $B_Q^H$  désigne un mouvement Brownien fractionnaire de paramètre de Hurst  $H$  et  $w$  un processus de Wiener standard sur un espace réel et séparable de Hilbert  $Y$ . En outre, on suppose que  $w$  et  $B_Q^H$  sont indépendants;  $f, \tilde{G} : [0, \infty[ \times PC \rightarrow \mathbb{Y}$  et  $g : [0, \infty[ \times PC \rightarrow \mathcal{L}_2^0(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$  et  $\sigma : [0, +\infty[ \rightarrow \mathcal{L}_2^0(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$  sont des fonctions continues. La valeur initiale  $\varphi = \{\varphi(t) : -\tau \leq t \leq 0\}$  appartient à l'espace  $PC_{\mathcal{F}_0}^B([- \tau, 0]; X)$  qu'on définira

plus tard. La fonction histoire  $x_t : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{Y}$  est définie  $x_t(\theta) = x(t + \theta)$  pour  $t \geq 0$  et appartient à l'espace de phase  $PC$ ; les  $t_k$  satisfont  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < \dots$ , et  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ ;  $x(t_k^+)$  et  $x(t_k^-)$  représentent la limite à droite et à gauche de  $x(t)$  au temps  $t_k$ ; à chaque point  $t_k$  la fonction  $x(t)$  est continue, et  $\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k^-)$  désigne le saut de l'état  $x$  au temps  $t_k$ , où  $I_k$  détermine l'amplitude du saut.

Certains phénomènes de la vie courante sont régis par un changement d'état. Selon la complexité de ces phénomènes, ils peuvent être modélisés en mathématique par les équations différentielles impulsives ou par les équations intégrodifférentielles impulsives qui ont beaucoup d'applications en mécanique, en économie, en médecine, en biologie et en télécommunication [1, 4, 10, 14, 47, 111]. Vu l'importance de ces équations, plusieurs auteurs se sont investis et ont trouvé d'excellents résultats. En guise d'exemple, on peut citer les travaux de M. Dieye et al. [36] et H. Yang et F. Jiang [142] qui ont étudié l'existence, l'unicité et la stabilité exponentielle de solution faible. On cite aussi les travaux de Balasubramaniam et al. [11], qui ont donné des conditions garantissant l'existence d'un contré approché d'une classe d'équations différentielles stochastiques de type neutre et les travaux [34, 138] qui ont étudié les ensembles attractifs et invariants. De plus, les systèmes impulsifs représentent un domaine en évolution rapide tant en théorie qu'en application. Ces systèmes ont aidé beaucoup de chercheurs à étudier de nombreuses propriétés du système dynamique qui intervient dans plusieurs domaines. Spécifiquement, nous citons les travaux [59, 66, 94, 134, 141] qui ont fait l'analyse des ensembles invariants, attractifs, globalement attractifs d'équations différentielles fonctionnelles stochastiques de type neutre.

Dans ce chapitre, nous adopterons le plan suivant. Dans la Section 5.2, nous donnons quelques concepts et définitions de base. Dans la section 5.3, nous allons énoncer et prouver nos résultats. La Section 5.5 est consacrée à l'applicabilité des résultats abstraits trouvés.

## 5.2 Préliminaires

Définition de la solution faible; l'ensemble attractif et quasi-invariant.

**Définition 5.2.1.** *Un processus stochastique  $\{x(t), t \in [-\tau, T]\}$  ( $0 < T < \infty$ ) est appelé solution faible de l'équation 5.1, si pour  $t \in [-\tau, 0]$   $x(t) = \varphi(t)$ , et si les conditions suivantes vérifiées :*

(i)  $x(t)$  est mesurable,  $\mathcal{F}_t$ -adapté, et est càdlàg sur  $t \geq 0$  presque partout

(ii) Pour tout  $t \geq 0$ ,  $x(t)$  satisfait l'équation intégrale suivante :

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{R}(t)[\varphi(0) + \tilde{G}(0, x_0)] - \tilde{G}(t, x_t) + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, x_s)ds \\ &+ \int_0^t \mathcal{R}(t-s)q(s, x_s)dw(s) + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)\sigma(s)dB_Q^H(s) \\ &+ \sum_{0 < t_k < t} \mathcal{R}(t-t_k)I_k(x(t_k^-)). \end{aligned} \quad (5.2)$$

**Définition 5.2.2.** Une solution faible du système (5.1) est  $p$ -exponentiellement ( $p \geq 2$ ) stable, s'il existe des constantes positives  $\lambda > 0$  et  $M_1 > 1$ , telles que pour toute valeur initiale  $\varphi \in PC_{\mathcal{F}_0}^B([- \tau, 0], \mathbb{Y})$ , on a

$$\mathbb{E}\|x(t)\|^p \leq M_1 \|\varphi\|_{L^p}^p e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0. \quad (5.3)$$

**Définition 5.2.3.** L'ensemble  $\Xi \subset PC_{\mathcal{F}_0}^B([- \tau, 0], \mathbb{Y})$  est appelé quasi-invariant de (5.1), s'il existe des constantes positives  $\eta$  et  $\theta$  telles que pour toute valeur initiale  $\varphi \in \Xi$ , la solution  $\eta x_t(0, \varphi) + \theta \in \Xi$ ,  $t \geq 0$ .

**Définition 5.2.4.** L'ensemble  $\Xi \subset PC_{\mathcal{F}_0}^b([-r, 0], \mathbb{Y})$  est un ensemble globalement attractif pour l'équation (5.1), si pour toute valeur initiale  $\varphi \in PC_{\mathcal{F}_0}^b([-r, 0], \mathbb{Y})$ , la solution  $x_t(0, \varphi)$  converge dans  $\Xi$  quand  $t \rightarrow +\infty$ , c'est-à-dire,  $\text{dist}(x_t(0, \varphi), \Xi) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ , où  $\text{dist}(x, \Xi) = \inf_{y \in \Xi} \mathbb{E}\|x - y\|$ .

**Lemme 5.2.1.** ([117], Inégalité intégrale) Pour tout  $r \geq 1$  et pour tout processus  $\mathcal{L}_2^0$ -prévisible  $\varphi(\cdot)$ , nous avons l'inégalité suivante.

$$\sup_{s \in [0, t]} \mathbb{E} \left\| \int_0^s \phi(u)dw(u) \right\|^{2r} \leq C_r \left( \int_0^t (\mathbb{E}\|\phi(s)\|_{\mathcal{L}_2^0}^{2r})^{\frac{1}{r}} ds \right)^r, \quad t \geq 0, \quad (5.4)$$

où  $C_r = (r(2r-1))^r$ .

**Lemme 5.2.2.** (Long al. [120]) Soit  $y(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  Borel mesurable. Si  $y$  est une solution de l'inégalité intégrale

$$y(t) \leq \begin{cases} \|\varphi\|_{\tau} e^{-r(t-t_0)} + b_1 \|y(t)\|_{\tau} + b_2 \int_0^t e^{-r(t-s)} \|y(s)\|_{\tau} ds \\ + \sum_{0 < t_k < t} c_k e^{-r(t-t_k)} y(t_k^-) + l, \quad t \geq t_0, \\ \varphi(t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0], \end{cases} \quad (5.5)$$

où  $\varphi(t) \in PC([t_0 - \tau, t_0], \mathbb{R}^+)$ ,  $r > 0$ ,  $b_1, b_2, c_k (k = 1, 2, \dots)$  et  $l$  sont des constantes positives. Si  $\|\varphi\|_{\tau} \leq K$  pour une certaine constante  $K > 0$

$$\Lambda := b_1 + \frac{b_2}{r} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k < 1. \quad (5.6)$$

Alors, il existe des constantes  $\lambda \in (0, r)$  et  $N \geq K$  telles que

$$y(t) \leq N e^{-\lambda(t-t_0)} + \frac{l}{1-\Lambda}, \quad \forall t \geq t_0 \quad (5.7)$$

où  $\lambda$  et  $N$  satisfont

$$\Lambda_\lambda := b_1 e^{\lambda\tau} + \frac{b_2 e^{\lambda\tau}}{r - \lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k < 1 \quad \text{et} \quad N \geq \frac{K}{1 - \Lambda_\lambda}, \quad (5.8)$$

ou  $b_2 \neq 0$  et

$$\Lambda_\lambda \leq 1 \quad \text{et} \quad N \geq \frac{(r - \lambda) \left[ K - \frac{b_2 l}{r(1 - \Lambda)} \right]}{b_2 e^{\lambda\tau}}. \quad (5.9)$$

**Lemme 5.2.3.** (Z. Li [85]) Soit  $y : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  mesurable. Si  $y(t)$  est solution de l'inégalité intégrale suivante :

$$\begin{aligned} y(t) \leq & b_1 \|y_t\|_\tau + b_2 \int_0^t e^{-r(t-s)} \|y_s\|_\tau ds \\ & + \sum_{0 < t_k < t} c_k e^{-r(t-t_k)} y(t_k^-) + l, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

où  $r > 0$ ,  $b_1, b_2, c_k (k = 1, 2, \dots)$  et  $l$  sont des constantes positives. Si  $\Lambda := b_1 + \frac{b_2}{r} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k < 1$ , et

$$y(t) \leq \frac{l}{1 - \Lambda}, \quad t \in [-\tau, 0], \quad (5.11)$$

alors,

$$y(t) \leq \frac{l}{1 - \Lambda}, \quad t \geq 0. \quad (5.12)$$

### 5.3 Ensembles globalement attractifs et quasi-invariants

Un ensemble attractif est une zone (ou un ensemble) qui attire toutes les trajectoires d'espace de phase, c'est-à-dire un ensemble vers lequel évolue un système quelque soit son état initial. L'étude de cet ensemble permet de voir le comportement d'un système sans avoir à le résoudre. Dans cette section, notre but est d'étudier les ensembles globalement attractifs et quasi-invariants du système (5.1). Pour se faire, nous imposons les hypothèses suivantes.

(**H**<sub>4.1</sub>) Il existe des constantes  $K_f > 0$ ,  $K_q > 0$ ,  $b_f > 0$ , et  $b_q > 0$  telles que pour tout  $x_1, x_2 \in C_c$  et  $t \geq 0$ ,

$$\|f(t, x_2) - f(t, x_1)\| \leq K_f \|x_2 - x_1\|_C, \quad \|f(t, 0)\| \leq b_f, \quad (5.13)$$

$$\|q(t, x_2) - q(t, x_1)\|_{L_2^0} \leq K_q \|x_2 - x_1\|_C, \quad \|q(t, 0)\| \leq b_q. \quad (5.14)$$

(**H**<sub>4.2</sub>) Il existe  $L_{\tilde{G}} > 0$  telle que la fonction  $\tilde{G}$  satisfait pour tous  $x_1, x_2 \in PC$  et  $t \geq 0$ ,

$$\|\tilde{G}(t, x_2) - \tilde{G}(t, x_1)\| \leq L_{\tilde{G}} \|x_2 - x_1\|_C, \quad \tilde{G}(t, 0) \equiv 0. \quad (5.15)$$

(**H**<sub>4.3</sub>) Il existe des constantes positives  $d_k$  telles que pour tous  $x_1, x_2 \in \mathbb{Y}$  et  $\sum_{k=1}^{+\infty} d_k < \infty$ ,

$$\|I_k(x_2(t_k)) - I_k(x_1(t_k))\| \leq d_k \|x_2 - x_1\| \quad \text{et} \quad I_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

(H<sub>4.4</sub>) L'opérateur résolvant est exponentiellement stable, c'est-à-dire, il existe  $\gamma \geq 0$ ,  $M \geq 1$  telles que

$$\|\mathcal{R}(t)\| \leq Me^{-\gamma t}, \quad \forall t \geq 0.$$

(H<sub>4.5</sub>) La fonction  $\sigma : [0, \infty[ \rightarrow \mathcal{L}_2^0(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$  satisfait les conditions suivantes : pour toute base orthonormale complète  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $\mathbb{X}$ , on a

$$(A.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \sigma Q^{1/2} e_n \right\|_{L^2([0, T], \mathbb{Y})} < \infty.$$

$$(A.2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \sigma Q^{1/2} e_n \right\| \text{ est uniformément convergent pour } t \in [0, T].$$

**Remarque 5.3.1.** *Sous les hypothèses (H1) – (H2) et (H<sub>4.1</sub>)-(H<sub>4.3</sub>), (H<sub>4.5</sub>), on montre clairement, en utilisant la méthode itérative de Picard, qu'il existe une unique solution faible du système stochastique à retard (5.1) .*

**Lemme 5.3.1.** *Pour tout  $\sigma : [0, \infty) \rightarrow L_Q^0(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$  vérifiant (H<sub>4.5</sub>) et  $\sup_{t \geq 0} \|\sigma(t)\|_{L_Q^0} < \infty$ , et pour tout  $p \geq 2$ ,  $t > 0$ ,*

$$\mathbb{E} \left\| \int_0^t \mathcal{R}(t-s) \sigma(s) dB_Q^H(s) \right\|^p \leq C \sup_{t \geq 0} \|\sigma(t)\|_{L_Q^0}^p,$$

où  $C > 0$  est une constante dépendant uniquement de  $H, M, p$  et  $\lambda$ .

**Preuve.** D'après l'inégalité de Kahane-Khintchine, il existe une constante  $C_p$  telle que

$$\mathbb{E} \left\| \int_0^t \mathcal{R}(t-s) \sigma(s) dB_Q^H(s) \right\|^p \leq C_p \left( \mathbb{E} \left\| \int_0^t \mathcal{R}(t-s) \sigma(s) dB_Q^H(s) \right\|^2 \right)^{p/2}.$$

Par Définition 1.7.28, on a

$$\mathbb{E} \left\| \int_0^t \mathcal{R}(t-s) \sigma(s) dB_Q^H(s) \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \left\| \int_0^t \mathcal{R}(t-s) \sigma(s) e_n dB_n^H(s) \right\|^2,$$

où  $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$  est une base orthonormale complète dans  $\mathbb{X}$  et  $\{B_n^H(s), n \in \mathbb{N}\}$  est une suite indépendante de mouvement Brownien fractionnaire standard de même indice  $H \in (1/2, 1)$ .

Donc, par utilisation de l'isométrie de Itô et Définition 1.7.28, on peut récrire

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\| \int_0^t \mathcal{R}(t-s) \sigma(s) dB_Q^H(s) \right\|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^t \langle \mathcal{R}(t-s) \sigma(s) e_n, \mathcal{R}(t-\tau) \sigma(\tau) e_n \rangle |s-\tau|^{2H-2} ds d\tau, \\ &\leq H(2H-1) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \|\mathcal{R}(t-\tau) \sigma(\tau)\| \left( \int_0^t \|\mathcal{R}(t-s) \sigma(s)\| |s-\tau|^{2H-2} ds \right) d\tau \\ &\leq H(2H-1) M^2 \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} \|\sigma(\tau)\|_{L_Q^0} \left( \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \|\sigma(s)\|_{L_Q^0} |s-\tau|^{2H-2} ds \right) d\tau. \end{aligned}$$

Alors, on peut conclure que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\| \int_0^t \mathcal{R}(t-s) \sigma(s) dB_Q^H(s) \right\|^2 &\leq H(2H-1)M^2 \left( \sup_{t \geq 0} \|\sigma(t)\|_{L_Q^0} \right)^2 \\ &\quad \times \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-\tau)} \left( \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)} |s-\tau|^{2H-2} ds \right) d\tau. \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable :  $v = t - \tau$   $u = t - s$ , on a

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left\| \int_0^t \mathcal{R}(t-s) \sigma(s) dB_Q^H(s) \right\|^2 \\ &\leq H(2H-1)M^2 \left( \sup_{t \geq 0} \|\sigma(t)\|_{L_Q^0} \right)^2 \int_0^\infty e^{-\lambda v} \left( \int_0^\infty e^{-\lambda u} |u-v|^{2H-2} du \right) dv \\ &= H(2H-1)M^2 \left( \sup_{t \geq 0} \|\sigma(t)\|_{L_Q^0} \right)^2 \left( \int_0^\infty e^{-\lambda v} \left( \int_v^\infty e^{-\lambda u} (u-v)^{2H-2} du \right) dv \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty e^{-\lambda v} \left( \int_0^v e^{-\lambda u} (u-v)^{2H-2} du \right) dv \right) \\ &=: H(2H-1)M^2 \left( \sup_{t \geq 0} \|\sigma(t)\|_{L_Q^0} \right)^2 (A_1 + A_2). \end{aligned}$$

Si on pose  $w = u - v$ , alors on obtient

$$A_1 = \int_0^\infty e^{-2\lambda v} \left( \int_0^\infty e^{-\lambda w} w^{2H-2} dw \right) dv = \frac{1}{2} \lambda^{-2H} \Gamma(2H-1),$$

avec  $\Gamma(\cdot)$  la fonction Gamma standard et une majoration sur le second terme  $A_2$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} A_2 &\leq \int_0^\infty e^{-\lambda v} \left( \int_0^v (v-u)^{2H-2} du \right) dv \\ &= \frac{1}{2H-1} \int_0^\infty e^{-\lambda v} v^{2H-1} dv \\ &= \frac{1}{2H-1} \lambda^{-2H} \Gamma(2H-1). \end{aligned}$$

Et on conclut donc que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\| \int_0^t \sigma(s) dB_Q^H(s) \right\|^p &\leq C_p \left( H(2H-1) \left( \frac{1}{2H-1} + \frac{1}{2} \right) \Gamma(2H-1) \lambda^{-2H} M^2 \right)^{p/2} \\ &\quad \times \sup_{t \geq 0} \|\sigma(t)\|_{L_Q^0}^p. \end{aligned}$$

La preuve est complète. □

**Théorème 5.3.1.** *Supposons que les conditions **(H1)**–**(H2)**, **(H<sub>4.1</sub>)**–**(H<sub>4.5</sub>)** et  $\sup_{t \geq 0} \|\sigma(t)\|_{L_Q^0} < \infty$  sont vérifiées. Alors, l'ensemble  $\Xi = \{x \in \mathbb{Y} : \|x_s\| \leq (1 - \hat{\Lambda})^{-1} \hat{l}\}$  est un ensemble globalement attractif de la solution faible du système (5.1) et l'ensemble  $\Xi_1 = \{\varphi \in \mathbb{Y} : \|\varphi\|^p \leq \gamma, \gamma > 0\}$  est un ensemble quasi-invariant de la solution faible du système (5.1) si les relations suivantes*

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda} &= 6^{p-1} L_G^p + 12^{p-1} M^p r^{-p} L_f^p + 6^{p-1} M^p \left( \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \right)^{p-1} \\ &\quad + 12^{p-1} (p(p-1)/2)^{p/2} (2r(p-1)/(p-2))^{(2-p)/2} M^p L_q^p / r < 1 \end{aligned} \tag{5.16}$$

et

$$\begin{aligned}\hat{l} &= 12^{p-1}M^p r^{-p} b_f^p + 6^{p-1}C \sup_{t \geq 0} \|\sigma(t)\|_{L_Q^0}^p \\ &\quad + 12^{p-1}(p(p-1)/2)^{p/2} (2r(p-1)/(p-2))^{(2-p)/2} M^p b_q^p / r,\end{aligned}$$

Sont satisfaites, avec  $1/p + 1/q = 1$ .

**Preuve.** Soit  $x(t)$ , la solution faible du système (5.1), donc on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\|x(t)\|^p &= \mathbb{E}\|\mathcal{R}(t)[\varphi(0) + \tilde{G}(0, \varphi)] - \tilde{G}(t, x_t) + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, x_s)ds \\ &\quad + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)q(s, x_s)dw(s) + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)\sigma(s, x_s)dB_Q^H(s) \\ &\quad + \sum_{0 < t_k < t} \mathcal{R}(t-s)I_k(x(t_k))\|^p \\ &\leq 6^{p-1}\mathbb{E}\|\mathcal{R}(t)[\varphi(0) + \tilde{G}(0, \varphi)]\|^p + 6^{p-1}\mathbb{E}\|\tilde{G}(t, x_t)\|^p \\ &\quad + 6^{p-1}\mathbb{E}\left\|\int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, x_s)ds\right\|^p + 6^{p-1}\mathbb{E}\left\|\int_0^t \mathcal{R}(t-s)q(s, x_s)dw(s)\right\|^p \\ &\quad + 6^{p-1}\mathbb{E}\left\|\int_0^t \mathcal{R}(t-s)\sigma(s)dB_Q^H(s)\right\|^p + 6^{p-1}\mathbb{E}\left\|\sum_{0 < t_k < t} \mathcal{R}(t-t_k)I_k(x(t_k))\right\|^p \\ &:= \sum_{i=1}^6 H_i(t).\end{aligned}$$

En utilisant **(H<sub>4.2</sub>)** et **(H<sub>4.4</sub>)**, on obtient les estimations suivantes

$$\begin{aligned}H_1(t) &= 6^{p-1}\mathbb{E}\|\mathcal{R}(t)[\varphi(0) + \tilde{G}(0, \varphi)]\|^p \\ &\leq 6^{p-1}\mathbb{E}[\|\mathcal{R}(t)\|^p \|\varphi(0) + \tilde{G}(0, \varphi) - \tilde{G}(0, 0)\|^p] \\ &\leq 6^{p-1}M^p e^{-prt} \mathbb{E}[\|\varphi(0)\| + L_{\tilde{G}}\|\varphi\|_{\mathbf{C}}]^p \\ &\leq 6^{p-1}M^p (1 + L_{\tilde{G}})^p \|\varphi\|_{L^p}^p e^{-rt} \\ &\leq 6^{p-1}M^* \|\varphi\|_{L^p}^p e^{-rt},\end{aligned}\tag{5.17}$$

où  $M^* = M^p(1 + L_{\tilde{G}})^p \geq 1$  est une constance appropriée.

De **(H<sub>4.2</sub>)**, il résulte que

$$\begin{aligned}H_2(t) &= 6^{p-1}\mathbb{E}\|\tilde{G}(t, x_t)\|^p \\ &\leq 6^{p-1}\mathbb{E}\|\tilde{G}(t, x_t) - \tilde{G}(t, 0)\|^p \\ &\leq 6^{p-1}L_{\tilde{G}}^p \mathbb{E}\|x_t\|_{\mathbf{C}}^p.\end{aligned}\tag{5.18}$$

Par application de l'inégalité de Hölder, de  $(\mathbf{H}_{4.1})$ , et de  $(\mathbf{H}_{4.4})$ , il en découle que

$$\begin{aligned}
H_3(t) &= 6^{p-1} \mathbb{E} \left\| \int_0^t \mathcal{R}(t-s) f(s, x_s) ds \right\|^p \\
&\leq 6^{p-1} \mathbb{E} \left( \int_0^t M e^{-r(t-s)} \|f(s, x_s) - f(s, 0) + f(s, 0)\| ds \right)^p \\
&\leq 6^{p-1} \mathbb{E} \left( \int_0^t M e^{-r(t-s)} (K_f \|x_s\|_{\mathbf{C}} + \|f(s, 0)\|) ds \right)^p \\
&\leq 6^{p-1} \mathbb{E} \left( \int_0^t M e^{-r(t-s)} (K_f \|x_s\|_{\mathbf{C}} + b_f) ds \right)^p \\
&\leq 12^{p-1} \mathbb{E} \left( \int_0^t M e^{-r(t-s)} K_f \|x_s\|_{\mathbf{C}} ds \right)^p + 12^{p-1} \mathbb{E} \left( \int_0^t M e^{-r(t-s)} b_f ds \right)^p \\
&\leq 12^{p-1} \mathbb{E} \left( K_f \int_0^t M e^{\frac{-r(t-s)(p-1)}{p}} e^{\frac{-r(t-s)}{p}} \|x_s\|_{\mathbf{C}} ds \right)^p \\
&\quad + 12^{p-1} M^p b_f^p \left( \int_0^t e^{-r(t-s)} ds \right)^p \\
&\leq 12^{p-1} M^p L_f^p \left( \int_0^t e^{-r(t-s)} ds \right)^{p-1} \int_0^t e^{-r(t-s)} \mathbb{E} \|x_s\|_{\mathbf{C}}^p ds + 12^{p-1} M^p r^{-p} b_f^p \\
&\leq 12^{p-1} M^p r^{1-p} L_f^p \int_0^t e^{-r(t-s)} \mathbb{E} \|x_s\|_{\mathbf{C}}^p ds + 12^{p-1} M^p r^{-p} b_f^p.
\end{aligned}$$

En se servant du Lemme 5.2.1, des hypothèses  $(\mathbf{H}_{4.1})$  et  $(\mathbf{H}_{4.4})$ , et de l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
H_4(t) &= 6^{p-1} \mathbb{E} \left\| \int_0^t \mathcal{R}(t-s) q(s, x_s) dw(s) \right\|^p \\
&\leq 6^{p-1} M^p C_p \mathbb{E} \left( \int_0^t \left( e^{-rp(t-s)} \mathbb{E} \|q(s, x_s)\|_{L_2^0}^p \right)^{2/p} ds \right)^{p/2} \\
&\leq 6^{p-1} M^p C_p \left( \int_0^t e^{\frac{-2r(t-s)(p-1)}{p}} e^{\frac{-2r(t-s)}{p}} \left( \mathbb{E} \|q(s, x_s)\|_{L_2^0}^p \right)^{2/p} ds \right)^{p/2} \\
&\leq 6^{p-1} M^p C_p \left( \int_0^t e^{\frac{-2r(t-s)(p-1)}{p-2}} ds \right)^{\frac{p}{2}-1} \left( \int_0^t e^{-r(t-s)} \mathbb{E} \|q(s, x_s)\|_{L_2^0}^p ds \right) \\
&\leq 6^{p-1} (p(p-1)/2)^{p/2} (2r(p-1)/(p-2))^{(2-p)/2} \\
&\quad \times M^p \left( \int_0^t e^{-r(t-s)} \mathbb{E} \|q(s, x_s)\|_{L_2^0}^p ds \right) \\
&\leq 12^{p-1} (p(p-1)/2)^{p/2} (2r(p-1)/(p-2))^{(2-p)/2} \\
&\quad \times M^p L_q^p \left( \int_0^t e^{-r(t-s)} \mathbb{E} \|x_s\|_{\mathbf{C}}^p ds \right) \\
&\quad + 12^{p-1} (p(p-1)/2)^{p/2} (2r(p-1)/(p-2))^{(2-p)/2} M^p b_q^p / r.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

D'après le Lemme 5.3.1, on a

$$H_5(t) = 6^{p-1} \mathbb{E} \left\| \int_0^t \mathcal{R}(t-s) \sigma(s) dB_Q^H(s) \right\|^p \leq 6^{p-1} C \sup_{t \geq 0} \|\sigma(t)\|_{L_Q^0}^p.$$

En utilisant  $(\mathbf{H}_{4.3})$  et inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
H_6(t) &\leq 6^{p-1} M^p \left( \sum_{j=1}^{+\infty} d_j \right)^{p/q} \sum_{0 < t_k < t} d_k e^{-rp(t-t_k)} \mathbb{E} \|x(t_k^-)\|^p \\
&\leq 6^{p-1} M^p \left( \sum_{j=1}^{+\infty} d_j \right)^{p/q} \sum_{0 < t_k < t} d_k e^{-r(t-t_k)} \mathbb{E} \|x(t_k^-)\|^p.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Des inégalités (5.17)-(5.20), il découle que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\|x(t)\|^p &\leq 6^{p-1}M^*\|\varphi\|_{L^p}^p e^{-rt} + 6^{p-1}L_{\hat{G}}^p \mathbb{E}\|x_t\|_{\mathbf{C}}^p \\
&+ 12^{p-1}M^p r^{1-p} L_f^p \int_0^t e^{-r(t-s)} \mathbb{E}\|x_s\|_{\mathbf{C}}^p ds \\
&+ 12^{p-1}(p(p-1)/2)^{p/2} (2r(p-1)/(p-2))^{(2-p)/2} \\
&\quad \times M^p L_q^p \left( \int_0^t e^{-r(t-s)} \mathbb{E}\|x_s\|_{\mathbf{C}}^p ds \right) \\
&+ 6^{p-1}M^p \left( \sum_{j=1}^{+\infty} d_j \right)^{p/q} \sum_{0 < t_k < t} d_k e^{-r(t-t_k)} \mathbb{E}\|x(t_k^-)\|^p + \hat{l}.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Posons

$$\begin{aligned}
\hat{a} &:= 6^{p-1}M^*, \\
\hat{b}_1 &:= 6^{p-1}L_{\hat{G}}^p, \\
\hat{b}_2 &:= 12^{p-1}M^p r^{1-p} L_f^p + 12^{p-1}(p(p-1)/2)^{p/2} (2r(p-1)/(p-2))^{(2-p)/2} M^p L_q^p, \\
\delta_k &:= 6^{p-1}M^p \left( \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \right)^{p/q} d_k.
\end{aligned}$$

De l'équation (5.10), on sait que  $\hat{\Lambda} := \hat{b}_1 e^{\lambda\tau} + \hat{b}_2/r + \sum_{k=1}^{+\infty} \delta_k < 1$ . Comme  $\varphi \in PC_{\mathcal{F}_0}^B((-\tau, 0]; \mathbb{Y})$ , alors il existe  $\hat{K} > 0$ ,  $\hat{N} > 0$ ,  $\lambda \in ]0, r[$  telles que

$$\hat{a}\|\varphi\|_{L^p}^p \leq \hat{K}, \quad \hat{\Lambda}_\lambda := \hat{b}_1 e^{\lambda\tau} + \frac{\hat{b}_2 e^{\lambda\tau}}{r - \lambda} + \sum_{k=1}^{+\infty} \delta_k \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{(r - \lambda) \left[ \hat{K} - \frac{\hat{b}_2 \hat{l}}{r(1 - \hat{\Lambda})} \right]}{\hat{b}_2 e^{\lambda\tau}} \leq \hat{N}.$$

Il résulte du Lemme 5.2.2 que

$$\mathbb{E}\|x(t)\|^p \leq \hat{N} e^{-rt} + (1 - \hat{\Lambda})^{-1} \hat{l}. \tag{5.22}$$

Donc, d'après la Définition 5.2.4,  $\Xi$  est un ensemble globalement attractif de la solution faible du système (5.1).

Si  $\varphi \in \Xi_1 = \{\varphi \in PC_{\mathcal{F}_0}^B([-\tau, 0]; \mathbb{Y}) : \|\varphi\|_{L^p}^p \leq \gamma, \gamma > 0\}$ , donc on peut réécrire la relation (5.21) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\|x(t)\|^p &\leq 6^{p-1}M^*\gamma + 6^{p-1}L_{\hat{G}}^p \mathbb{E}\|x_t\|_{\mathbf{C}}^p \\
&+ 12^{p-1}M^p r^{1-p} L_f^p \int_0^t e^{-r(t-s)} \mathbb{E}\|x_s\|_{\mathbf{C}}^p ds \\
&+ 12^{p-1}(p(p-1)/2)^{p/2} (2r(p-1)/(p-2))^{(2-p)/2} \\
&\quad \times M^p L_q^p \left( \int_0^t e^{-r(t-s)} \mathbb{E}\|x_s\|_{\mathbf{C}}^p ds \right) \\
&+ 6^{p-1}M^p \left( \sum_{j=1}^{+\infty} a_j \right)^{p/q} \sum_{0 < t_k < t} d_k e^{-r(t-t_k)} \mathbb{E}\|x(t_k^-)\|^p + \hat{l}.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Donc, du Lemme 5.2.3 et (5.12), on a

$$\mathbb{E}\|x(t)\|^p \leq (1 - \hat{\Lambda})^{-1}(6^{p-1}M^*\gamma + \hat{l}) = (1 - \hat{\Lambda})^{-1}6^{p-1}M^*\gamma + (1 - \hat{\Lambda})^{-1}\hat{l}.$$

On conclut alors que  $\Xi_1$  est un ensemble quasi-invariant de la solution faible du système (5.1).

□

## 5.4 Stabilité $p$ -exponentielle

Le théorème suivant montre que la solution faible du système stochastique à retard (5.1) est exponentiellement stable en moyenne d'ordre  $p \geq 2$ .

**Théorème 5.4.1.** *Supposons (H1)-(H2), (H4.1) - (H4.5) avec  $b_f = b_q = 0$  et*

$$\int_0^\infty e^{rs} \|\sigma(s)\|_{L_Q^0}^2 ds < \infty \quad (5.24)$$

*satisfaites, et que l'inégalité suivante :*

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda} &= 6^{p-1}L_G^p + 12^{p-1}M^p r^{-p} L_f^p + 12^{p-1}(p(p-1)/2)^{p/2} (2r(p-1)/(p-2))^{(2-p)/2} \\ &\quad \times M^p L_q^p / r + 6^{p-1}M^p \left( \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \right)^{p/q+1} < 1 \end{aligned} \quad (5.25)$$

*aussi est satisfaite. Alors, la solution faible du système stochastique à retard (5.1) est  $p$ -exponentiellement stable pour tout ( $p \geq 2$ ).*

**Preuve.** De l'équation (5.2), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\|x(t)\|^p &= \mathbb{E}\|\mathcal{R}(t)[\varphi(0) + \tilde{G}(0, \varphi)] - \tilde{G}(t, x_t) + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, x_s)ds \\ &\quad + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)q(s, x_s)dw(s) + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)\sigma(s)dB_Q^H(s) \\ &\quad + \sum_{0 < t_k < t} \mathcal{R}(t-s)I_k(x(t_k))\|^p \\ &\leq 6^{p-1}\mathbb{E}\|\mathcal{R}(t)[\varphi(0) + \tilde{G}(0, \varphi)]\|^p + 6^{p-1}\mathbb{E}\|\tilde{G}(t, x_t)\|^p \\ &\quad + 6^{p-1}\mathbb{E}\left\| \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, x_s)ds \right\|^p \\ &\quad + 6^{p-1}\mathbb{E}\left\| \int_0^t \mathcal{R}(t-s)q(s, x_s)dw(s) \right\|^p \\ &\quad + 6^{p-1}\mathbb{E}\left\| \int_0^t \mathcal{R}(t-s)\sigma(s)dB_Q^H(s) \right\|^p \\ &\quad + 6^{p-1}\mathbb{E}\left\| \sum_{0 < t_k < t} \mathcal{R}(t-t_k)I_k(x(t_k)) \right\|^p \\ &:= 6^{p-1} \sum_{i=1}^6 \Gamma_i. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Comme pour tout  $t > 0$ ,  $\int_0^t \mathcal{R}(t-s)\sigma(s)dB_Q^H(s)$  est une variable aléatoire gaussienne centrée et en utilisant l'inégalité de Kahane-Khintchine, il existe une constante  $C_p$  telle que

$$\mathbb{E} \left\| \int_0^t \mathcal{R}(t-s)\sigma(s)dB_Q^H(s) \right\|^p \leq C_p \left( \mathbb{E} \left\| \int_0^t \mathcal{R}(t-s)\sigma(s)dB_Q^H(s) \right\|^2 \right)^{p/2}.$$

Choisissons un  $\epsilon > 0$  suffisamment petit tel que  $(r - \epsilon)p \geq 2r$  et posons  $\delta := r - \epsilon > 0$ , d'après l'hypothèse  $(\mathbf{H}_{4.5})$  et du Lemme 2 de [28], nous déduisons que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\| \int_0^t \mathcal{R}(t-s)\sigma(s)dB_Q^H(s) \right\|^2 &\leq M^2 c_H (2H-1) t^{2H-1} \int_0^\infty e^{-2r(t-s)} \|\sigma(s)\|_{L_Q^0}^2 ds \\ &\leq M^2 c_H (2H-1) t^{2H-1} \int_0^\infty e^{-r(t-s)} \|\sigma(s)\|_{L_Q^0}^2 ds \\ &\leq e^{-\delta t} M^2 c_H (2H-1) t^{2H-1} e^{-rt} \int_0^\infty e^{rs} \|\sigma(s)\|_{L_Q^0}^2 ds. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Ainsi, l'équation (5.24) nous assure l'existence d'une constante positive  $K$  telle que

$$M^2 c_H (2H-1) t^{2H-1} e^{-rt} \int_0^\infty e^{rs} \|\sigma(s)\|_{L_Q^0}^2 ds \leq K \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Donc,

$$\Gamma_5 \leq C_p K^{p/2} e^{-rt}. \quad (5.28)$$

Notons que  $b_f = 0$ ,  $b_q = 0$ . En remplaçant les équations (5.17) – (5.21) et (5.28) dans l'équation (5.26), on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|x(t)\|^p &\leq 6^{p-1} (M^* \|\varphi\|_{L^p}^p + C_p K^{p/2}) e^{-rt} + 6^{p-1} L_{\tilde{G}}^p \mathbb{E} \|x_t\|_{\mathbf{C}}^p \\ &\quad + 12^{p-1} M^p r^{1-p} L_f^p \int_0^t e^{-r(t-s)} \mathbb{E} \|x_s\|_{\mathbf{C}}^p ds \\ &\quad + 12^{p-1} (p(p-1)/2)^{p/2} (2r(p-1)/(p-2))^{(2-p)/2} \\ &\quad \times M^p L_q^p \left( \int_0^t e^{-r(t-s)} \mathbb{E} \|x_s\|_{\mathbf{C}}^p ds \right) \\ &\quad + 6^{p-1} M^p \left( \sum_{j=1}^{+\infty} a_j \right)^{p/q} \sum_{0 < t_k < t} d_k e^{-r(t-t_k)} \mathbb{E} \|x(t_k^-)\|^p. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Posons

$$\begin{aligned} \hat{a} &:= 6^{p-1} (M^* \|\varphi\|_{L^p}^p + C_p K^{p/2}), \\ \hat{b}_1 &:= 6^{p-1} L_{\tilde{G}}^p, \\ \hat{b}_2 &:= 12^{p-1} M^p r^{1-p} L_f^p + 12^{p-1} (p(p-1)/2)^{p/2} (2r(p-1)/(p-2))^{(2-p)/2} M^p L_q^p, \\ \delta_k &:= 6^{p-1} M^p \left( \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \right)^{p/q} d_k. \end{aligned}$$

De l'équation (5.10), on sait que,  $\hat{\Lambda} := \hat{b}_1 e^{\lambda\tau} + \hat{b}_2/r + \sum_{k=1}^{+\infty} \delta_k < 1$ . Comme  $\varphi \in PC_{\mathcal{F}_0}^B([- \tau, 0]; \mathbb{Y})$ , il existe  $\hat{K} > 0$ ,  $\hat{N} > 0$ ,  $\lambda \in ]0, r[$  telles que

$$\hat{a} \|\varphi\|_{L^p}^p \leq \hat{K}, \quad \hat{\Lambda}_\lambda := \hat{b}_1 e^{\lambda\tau} + \frac{\hat{b}_2 e^{\lambda\tau}}{r - \lambda} + \sum_{k=1}^{+\infty} \delta_k \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{(r - \lambda) \left[ \hat{K} - \frac{\hat{b}_2 \hat{I}}{r(1 - \hat{\Lambda})} \right]}{\hat{b}_2 e^{\lambda\tau}} \leq \hat{N}.$$

En combinant (5.25), (5.29) avec le Lemme 5.2.2, on voit alors, par la Définition 5.2.2, qu'il existe des constantes positives  $\hat{N}$  et  $\lambda$  telles que

$$E\|x(t)\|^p \leq \hat{N} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Ce qui complète la preuve. □

## 5.5 Exemple

Dans cette partie du chapitre, nous donnons un exemple qui illustre nos résultats théoriques trouvés dans la section précédente. Pour cela, nous considérons l'équation intégrodifférentielle stochastique de type neutre à retard fini,  $r_1, r_2$ , et  $r_3$  ( $r > r_i > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ ) suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} d \left[ z(t, \xi) + \alpha_3 \int_{-r_3}^0 z(t+u, \xi) du \right] = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ z(t, \xi) + \alpha_3 \int_{-r_3}^0 z(t+u, \xi) du \right] dt \\ + \left[ \int_0^t b(t-s) \frac{\partial^2}{\partial z^2} [z(s, \xi) + \alpha_3 \int_{-r_3}^0 z(s+u, \xi) du] ds + \alpha_1 \int_{-r_1}^0 z(t+u, \xi) du + v_1 \right] dt \\ + (\alpha_2 z(t-r_2, \xi) + v_2) dw(t) + \sigma(t+u, \xi) dB_Q^H(t), \quad 0 \leq z \leq \pi, t \geq 0, t \neq t_k, \\ \Delta x(t_k) = I_k(x(t_k^-)) = \frac{v_3}{k^2} x(t_k^-), \quad t = t_k, k = 1, 2, \dots, \\ x(t) = \varphi(t) \in PC_{\mathcal{F}_0}^B([- \tau, 0]; L^2[0, \pi]), \quad x(t, 0) = x(t, \pi) = 0, \tau \leq 0, \end{array} \right. \quad (5.30)$$

où  $v_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, 3$  sont des constantes et  $b : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ .

Posons  $\mathbb{Y} = L^2[0, \pi]$  muni de la norme  $|\cdot|$  et  $e_n(x) := \sqrt{2/\pi} \sin(nx)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  les éléments d'une base orthonormale complète dans  $\mathbb{Y}$ .

Soit  $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ ,  $Q = 1$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_n = 0$ ,  $n > 1$  et  $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ , un espace probabilisé filtré complet dans lequel est défini le mouvement Brownien fractionnaire et posons pour  $t \in [-r, 0]$ ,  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_0$ .

Définissons  $A : D(A) \subset \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$  par  $A = \partial^2/\partial x^2$ , de domaine  $D(A) = H^2[0, \pi] \cap H_0^1[0, \pi]$ .

Alors,

$$Av = - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \langle v, e_n \rangle e_n, \quad v \in D(A),$$

où  $e_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , sont des vecteurs propres de  $A$ .

Il est bien connu que  $A$  est un générateur infinitésimal d'un  $c_0$ - semi-groupe  $\{S(t), t \geq 0\}$

dans  $\mathbb{Y}$ .

Soit  $\Gamma : D(A) \subset \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$  un opérateur défini par  $\Gamma(t)v = b(t)Av$  pour tout  $t \geq 0$  et  $v \in D(A)$ .

Si on pose

$$\begin{cases} x(t) = z(t, \cdot), & t \geq 0 \\ \varphi(t) = z_0(t, \cdot) & t \in [-r, 0], \end{cases} \quad (5.31)$$

alors, de l'équation (5.30), on a

$$\begin{aligned} d \left[ x(t)(\xi) + \alpha_3 \int_{-r_3}^0 x(t+u)(\xi) du \right] &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ x(t)(\xi) + \alpha_3 \int_{-r_3}^0 x(t+u)(\xi) du \right] dt \\ &+ \left[ \int_0^t b(t-s) \frac{\partial^2}{\partial x^2} [x(t)(\xi) \right. \\ &+ \alpha_3 \int_{-r_3}^0 x(t+u)(\xi) du] ds \\ &+ \alpha_1 \int_{-r_1}^0 x(t+u)(\xi) du + v_1 \left. \right] dt \\ &+ (\alpha_2 x(t-r_2)(\xi) + v_2) dw(t) \\ &+ \sigma(t+u)(\xi) dB_Q^H(t). \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} d \left[ x(t) + \alpha_3 \int_{-r_3}^0 x(t+u) du \right] &= A \left[ x(t) + \alpha_3 \int_{-r_3}^0 x(t+u) du \right] dt \\ &+ \left[ \int_0^t \Upsilon(t-s) [x(t) + \alpha_3 \int_{-r_3}^0 x(t+u) du] ds \right. \\ &+ \alpha_1 \int_{-r_1}^0 x(t+u) du + v_1 \left. \right] dt \\ &+ (\alpha_2 x(t-r_2) + v_2) dw(t) + \sigma(t+u) dB_Q^H(t) \end{aligned}$$

Donc, l'équation (5.30) prend la forme abstraite de l'équation (5.1).

Supposons que  $b$  est borné et uniformément continu sur  $\mathbb{R}^+$ . De plus, si  $b$  est borné et de classe  $C^1$  telle que la fonction  $b'$  est uniformément continue et bornée, alors les conditions **(H1)** et **(H2)** sont satisfaites, et donc d'après le Théorème 1.5.7, le système stochastique à retard (1.19) admet un opérateur résolvant  $(\mathcal{R}(t))_{t \geq 0}$  dans  $\mathbb{Y}$ .

En utilisant le Lemme 5.2 [36], soit  $\mu > \delta > 1$  et  $b(t) < \frac{1}{a} \exp(-\beta)$ , pour tout  $t \geq 0$ , donc, l'opérateur résolvant décroît exponentiellement vers zéro. Spécifiquement  $\|\mathcal{R}(t)\| < \exp(-at)$  où  $a = 1 - 1/\delta$ .

Maintenant, définissons

$$\tilde{G}(t, x_t) = \alpha_3 \int_{-r_3}^0 x(t+u) du, \quad f(t, x_t) = \alpha_1 \int_{-r_1}^0 x(t+u) du + v_1,$$

et

$$q(t, x_t) = \alpha_2 x(t-r_2) + v_2.$$

Par suite, on a :

$$\|\tilde{G}(t, x_t) - \tilde{G}(t, y_t)\| \leq \alpha_3 \int_{-r_3}^0 \|x - y\|_C du \leq \alpha_3 r_3 \|x - y\|_C$$

avec

$$L_{\tilde{G}} = \alpha_3 r_3.$$

et

$$\|f(t, x_t) - f(t, y_t)\| = \left\| \alpha_1 \int_{-r_1}^0 \|x - y\|_C du \right\| \leq \alpha_1 \int_{-r_1}^0 \|x_s\|_C du \leq \alpha_1 r_1 \|x - y\|_C$$

avec

$$K_f = \alpha_1 r_1 \quad \text{et} \quad b_f \geq v_1,$$

$$\|q(t, x_t) - q(t, y_t)\|_{L_2^0} \leq \alpha_2 \|x - y\|_C$$

avec

$$K_q = \alpha_2 \quad \text{et} \quad b_q \geq v_2.$$

Donc, on peut avoir :

$$M = 1, r = \pi^2, d_k = \frac{v_3}{k^2}.$$

Posons  $p = 2$ , alors, on a :

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda} &= 6L_{\tilde{G}}^2 + 12M^2 r^{-2} L_f^2 + 12M^2 L_q^2 / r + 6M^2 \left( \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \right)^2 < 1 \\ &\leq 6\alpha_3^2 r_3^2 + \frac{12\alpha_1^2 r_1^2}{\pi^4} + \frac{12\alpha_2^2}{\pi^2} + \frac{6v_3^2 \pi^4}{36} := \hat{\Lambda}_0, \\ \hat{l} &= \frac{12v_1^2}{\pi^4} + \frac{12v_2^2}{\pi^2} + 6C \sup_{t \geq 0} \|\sigma(t)\|_{L_Q^0}^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après le Théorème 5.3.1, l'ensemble  $\Xi = \{\varphi \in PC_{\mathcal{F}_0}^B([\tau, 0], \mathbb{Y}) / \|\varphi\|_{L^p}^p \leq (1 - \hat{\Lambda})^{-1} \hat{l}\}$  est globalement attractif pour la solution faible du système (5.30) pourvu que  $\hat{\Lambda}_0 < 1$ .

De plus, si  $v_1 = v_2 = 0$  et  $\hat{\Lambda}_0 < 1$ , alors d'après le Théorème 5.4.1, la solution faible du système (5.30) est exponentiellement stable en moyenne quadratique.

---

# Conclusion et Perspectives

---

Ce chapitre conclut la thèse en donnant un bilan du travail effectué et les perspectives envisageables au terme de cette recherche. Nous rappelons, tout d'abord, les principaux modèles étudiés et les différents résultats obtenus. Ces modèles sont plus réalistes compte tenu du fait qu'ils prennent en compte les aléas de la vie courante. Les outils utilisés (la théorie du point fixe et la théorie de l'opérateur résolvant) permettent d'affaiblir la plupart des conditions qui existaient.

## Conclusion

Tout au long de ce travail, nous n'avons étudié les aspects qualitatifs et quantitatifs des équations intégrodifférentielles déterministes et stochastiques. Dans le cas déterministe, nous avons, en utilisant la mesure de non compacité, établi un certain nombre de résultats d'existence de solutions faibles d'une classe d'équations intégrodifférentielles impulsives à condition non locale.

Dans le cas stochastique, nous n'avons étudié trois (03) différentes classes d'équations. La première classe concerne les équations intégrodifférentielles stochastiques avec condition non locale. Pour ce système, nous avons établi un certain nombre de résultats d'existence, d'unicité de solutions faibles. Les deux dernières classes ont traité les équations intégrodifférentielles stochastiques impulsives de type neutre à retard fini l'un et à retard infini l'autre. Pour ces classes d'équations nous avons étudié l'existence, l'unicité d'une part et l'attractivité, la quasi-invariance d'autre part. Nous avons aussi établi les inégalités intégrales-impulsives pour établir les résultats de stabilité pour ces deux classes d'équations.

Pour parvenir à ces résultats, nous avons principalement utilisé la théorie de l'opérateur résolvant au sens de Grimmer [50]. Cette théorie joue, pour les équations intégrodifférentielles, le rôle de  $C_0$ -semi-groupe pour les équations différentielles. Nous avons aussi utilisé les théories d'analyse fonctionnelle, d'analyse stochastique, de la mesure de non compacité, du théorème du point fixe, etc.

Pour chaque classe d'équations étudiées, nous avons fourni un exemple illustratif. Ces travaux généralisent les travaux existants sur les équations différentielles tout en affaiblissant les

conditions sur l'existence, l'unicité, la stabilité, etc.

## Perspectives

Les thèmes traités dans cette thèse sont d'une très grande utilité, notamment l'existence et l'unicité de solutions faibles, la stabilité exponentielle des systèmes impulsifs et stochastiques, la notion d'ensemble globalement attractif et quasi-invariant des solutions, la notion de condition non locale, les équations intégrodifférentielles à retard. Compte tenu des applications dans divers domaines tels que la physique, mathématiques financières, mécanique, etc., le domaine des équations différentielles stochastiques est en plein essor, et l'amélioration des nouvelles méthodes de calculs stochastiques pour l'analyse d'un processus l'est tout autant. En perspective, dans le court terme, nous comptons améliorer nos résultats de la façon suivante :

- Tout au long du chapitre 2, nous n'avons traité qu'une classe d'équations intégrodifférentielles déterministes. Nous pensons étendre notre étude au cas où le système considéré serait perturbé par une fonction aléatoire.
- Dans le chapitre 3, pour prouver l'existence et l'unicité des solutions faibles, nous avons supposé que les conditions (1.28) et (1.29) sont satisfaites respectivement. Ces conditions sont un peu fortes, et les travaux futurs consisteraient à affaiblir ces conditions. Une autre tâche importante pour ce chapitre consistera à ajouter les impulsions, le retard, et formuler une technique pour étudier l'existence de cette nouvelle classe d'équations.
- Dans l'étude du chapitre 4 et 5, nous avons considéré une équation intégrodifférentielle impulsive à retard constant fini et infini respectivement, nous pensons étudier les aspects qualitatifs et quantitatifs des équations intégrodifférentielles à retard variant et dépendant de l'état du système.

Dans tous les chapitres, nous avons supposé que l'opérateur  $A$  est indépendant du temps, ce qui nous a permis de faire appel à la famille des opérateurs résolvants introduits par Grimmer [50]. Dans les travaux à venir, nous pensons supposer que  $A$  dépend du temps  $t$  et utiliser les propriétés des opérateurs d'évolution pour étudier les aspects qualitatifs et quantitatifs dans son ensemble. Tout au long de cette thèse, les parties stochastiques sont dirigées par le mBf et/ ou le processus de Wiener et, par conséquent, nous pensons aussi utiliser d'autres processus comme le processus de Rosenblatt, le processus de Levy, le processus de Poissons etc.

Les problèmes qui nous intéressent et que nous pensons aborder à l'avenir, sont les problèmes d'inclusions intégrodifférentielles. Les inclusions différentielles représentent une généralisation des équations différentielles où l'on remplace le champ de vecteurs par une application multivaluée, c'est-à-dire une application dont les valeurs sont des sous-ensembles.

---

La solution donnée par les inclusions différentielles est le «domaine atteignable» au lieu d'une seule trajectoire. L'existence de solution dépend, comme pour les EDO, de la régularité de la fonction multivaluée, mais aussi des propriétés de ses valeurs (compacité, convexité). Une inclusion intégrodifférentielle se présente sous la forme suivante :

$$dx \in Axdx + \int_0^t \Gamma(t-s)x(s)ds + C(t,x)dt, t \in J,$$

où  $C$  est une application multivoque appropriée  $\Gamma$  un opérateur linéaire fermé.

---

# Bibliographie

---

- [1] ABDALLAH, C., AND CHIASSON, J. Stability of communication networks in the presence of delays. *fac In Workshop 34*, 23 (2001).
- [2] AGARWAL, R., MEEHAN, M., AND O'REGAN, D. *Fixed Point Theory and Applications*. Cambridge University Press, New York, 2001.
- [3] AHMED, B., CARABALLO, T., AND ABDELGHANI, O. Existence of mild solutions to stochastic delay evolution equations with a fractional brownian motion and impulses. *Stochastic Analysis and Applications 33*, 2 (2015), 244–258.
- [4] AILON, A., AND GIL, M. I. Stability analysis of a rigid robot with output-based controller and time-delay. *Syst. and Control Letters 40*, 1 (2000), 31–35.
- [5] ANGURAJ, A., AND KARTHIKEYAN, K. Existence of solutions for impulsive neutral functional differential equations with nonlocal conditions. *Nonlinear Anal. 70* (2009), 2717–2721.
- [6] ARINO, O., HBID, L. M., AND DE LA PARRA, R. B. *Mathematical Biosciences 150*, 1 (1998), 1–120.
- [7] ARTHI, G., PARK, J., AND JUNG, H. Existence and exponential stability for neutral stochastic integrodifferential equations with impulses driven by a fractional brownian motion. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 32* (2016), 145–157.
- [8] BAINOV, D. D., AND SIMEONOV, P. S. Systems with impulsive effect. *Ellis Horwood Ltd, Chichester* (1989).
- [9] BAINOV, D. D., AND SIMEONOV, P. S. Impulsive differential equations : periodic solutions and applications.
- [10] BAINOV, D. D., SIMEONOV, P. S., AND LAKSHMIKANTHAM, V. Theory of impulsive differential equations. *World Scientific, Singapore* (1989).
- [11] BALASUBRAMANIAM, P., PARK, J. Y., AND MUTHUKUMAR, P. Approximate controllability of neutral stochastic functional differential systems with infinite delay. *Stochastic Anal. Appl. 28*.

- 
- [12] BANACH, S. *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, vol. 3. *Fundamenta Mathematicae*, 1922.
- [13] BANAŚ, J., AND GOEBEL, K. *Measures of Noncompactness in Banach Spaces*. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker, New York, 1980.
- [14] BAO, J., AND HOU, Z. Existence of mild solutions to stochastic neutral partial functional differential equations with non-lipschitz coefficients. *Computers & Mathematics with Applications* 59 (2010), 207–214.
- [15] BENCHOHRA, M., HENDERSON, J., AND NTOUYAS, S. *Impulsive Differential Equations and Inclusions*. 2006.
- [16] BERMAN, S. Gaussian processu with stationary increments : Local times and sample-function properties. *Ann. Statist.* 41 (1970), 1260–1272.
- [17] BERMAN, S. Occupation times of stationary gaussian processus. *Applied Probability* 7 (1970), 721–733.
- [18] BERNARD COLEMAN, M. E. G. Waves in materials with memory : Ii. on the growth and decay of one-dimensional acceleration waves ; ill. thermodynamic influences on the growth and decay of acceleration waves. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 19, 4 (1965), 235–298.
- [19] BIAGINI, F., HU, Y., ØKSENDAL, B., AND ZHANG, T. Stochastic calculus for fractional brownian motion and applications. *Springer, Berlin* (2008).
- [20] BOTHE, D. Multivalued perturbation of m-accretive differential inclusions. *Israel Journal of Mathematics* 108 (1998), 109–138.
- [21] BOUFOUSSI, B., AND HAJJI, S. Neutral stochastic functional differential equations driven by a fractional brownian motion in a hilbert space. *Stastics and probability Letters* 82 (2012), 1549–1558.
- [22] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equation*, 2nd ed. berlin ed. 2011.
- [23] BYSZEWSKI, L. Uniqueness criterion for solution to abstract nonlocal cauchy problem. *Applied Mathematics and Stochastic Analysis* 162 (1991), 49–54.
- [24] BYSZEWSKI, L., AND LAKSHMIKANTHAM, V. Theorem about the existence and uniqueness of solutions of a nonlocal cauchy problem in a banach space. *Applicable Analysis* 40 (1990), 11–19.
- [25] CAO, G., HE, K., AND ZHANG, X. Successive approximations of infinite dimensional sdes with jumps. *Stoch. Dyn.* 5 (2005), 609–619.

- 
- [26] CAO, J. On exponential stability and periodic solutions of cnns with delays. *Phys. Lett. A*, 267 (2000), 312–318.
- [27] CAO, J., ANPING, C., AND XIA, H. Huang, almost periodic attractor of delayed neural networks with variable coefficients. *Phys. Lett. A*, 340 (2005), 104–120.
- [28] CARABALLO, T., GARRIDO-ATIENZA, M. J., AND TANIGUCHI, T. The existence and exponential behavior of solutions to stochastic delay evolution equations with a fractional brownian motion. *Nonlinear Analyse* 74, 11 (2011), 3671–3684.
- [29] CHEN, H. Impulsive-integral inequality and exponential stability for stochastic partial differential equations with delays. *Statistics & Probability Letters* 80 (2010), 50–56.
- [30] CHRISTODOULOU-VOLOS, C., AND SIOKIS, F. M. Long range dependence in stock market returns. *Appl. Financ. Econ.* 16, 18 (2006), 1331–1338.
- [31] COLEMAN, B. D., AND MIZEL, V. J. Norms and semi-groups in the theory of fading memory. *Archives for Rational Mechanics and Analysis* 23, 87–123.
- [32] COLEMAN, B. D., AND MIZEL, V. J. On the stability of solutions of functional differential equations. *Archives for Rational Mechanics and Analysis* 30, 173–196.
- [33] CUI, J., AND WANG, Z. Nonlocal stochastic integrodifferential equations driven by fractional brownian motion. *Advances in Difference Equations* 1 (2016), 115.
- [34] DANG, H. D., AND AGARWAL, R. P. Global attracting and quasi-invariant sets for stochastic volterra-levin equations with jumps. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, serie A, Mathematical Analysis* 21 (2014), 343–353.
- [35] DESCH, W., GRIMMER, R. C., AND SCHAPPACHER, W. Some considerations for linear integrodifferential equations. *J. of Mathematical Analysis and Applications* 104, 219–234.
- [36] DIEYE, M., DIOP, M. A., AND EZZINBI, K. On exponential stability of mild solutions for some stochastics partial integrodifferential equations. *Statistics and Probability Letters* 123 (2017), 61–76.
- [37] DIOP, M. A., EZZINBI, K., ISSAKA, L.-M., AND RAMKUMAR, K. Stability for some impulsive neutral stochastic functional integro-differential equations driven by fbm. *Cogent Mathematics & Statistics* 7 (2020), 1–23.
- [38] DRIVER, R. D. Existence theory for a delay differential system. *Contrib. Differential Eq.* 1 (1963), 317–336.
- [39] DRIVER, R. D. A functional-differential system of neutral type arising in a two-body problem of classical electrodynamics. *Proc. Inter Symposium on Nonli Dif Eqs and Nonlinear Mechanics* (1963), 474–484.

- 
- [40] DRIVER, R. D. A two-body problem of classical electrodynamics : the one dimensional case. *Ann. Phys* 21 (1963), 122–142.
- [41] DUNCAN, T., PASIK-DUNCAN, B., AND MASLOWSKI, B. Fractional brownian motion and stochastic equation in hilbert spaces. *Stochastics and Dynamics* 02, 02 (2002), 225–250.
- [42] DUNG, N. T. Stochastic volterra integro-differential equations driven by fractional brownian motion in a hilbert space. *Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes* 87, 1 (2015), 142–159.
- [43] ENGEL, K.-J., AND NAGEL, R. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [44] ENSARI, T., AND ARIK, S. Global stability analysis of neural networks with multiple time varying delays. *IEEE Trans. Autom. Control*.
- [45] EZZINBI, K., DEGLA, G., AND NDAMBOMVE, P. Controllability for some partial functional integrodifferential equation with nonlocal condition in banach spaces. *Discussiones Mathematicae Differential Inclusions, Control and Optimization* 35 (2015), 25–46.
- [46] FREDERICK, B. Continuous data dependence for abstract volterra integro-differential equations in hilbert space with applications to viscoelasticity. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa- Classe di Scienze* 4, 1 (1977).
- [47] GOPALSAMY, K. *Equations of mathematical ecology*. Kluwer Academic Publishers (1992).
- [48] GORJACHENKO, V. D., ZOLOTAREV, S. L., AND KOLCHIN, V. A. *Quantitative Methods in Nuclear Reactor Dynamics*. Energoatomizdat, Moscow, 1988.
- [49] GRECKSCH, W., AND ANH, V. A parabolic stochastic differential equation with fractional brownian motion input. *Statist. Probab. Letters* 41 (1999), 337–345.
- [50] GRIMMER, R. Resolvent operators for integral equations in a banach space. *Transactions of the American Mathematical Society* 273 (1982), 333–349.
- [51] GUO, D., LAKSHMIKANTHAM, V., AND LIU, X. *Nonlinear integral equations in abstract spaces*. Kluwer Academic, Dordrecht (1996).
- [52] GURI, M. I., AND NIKITOVICH, B. L. On the treatment of chronic forms of disease according to a mathematical model. *System Modeling and Optimization*.
- [53] HALE, J., AND LUNEL, V. Dynamical systems and stability. *J. of Mathematical Analysis and Applications* 26 (1969), 39–59.
- [54] HALE, J., AND LUNEL, V. *Introduction to functional Differential Equations*, vol. 99. Springer-Verlag, Berlin-New York, (1993).

- 
- [55] HALE, J. K. Functional differential equations with infinite delay. *J. of Mathematical Analysis and Applications* 48, 1 (1974), 276–283.
- [56] HALE, J. K. *The solution operator with infinite delay*. International Conference on Differential Equations, New York, 1975.
- [57] HALE, J. K., AND KATO, J. Phase space for retarded equations with infinite delay. *Funkcial. Ekvac* 21 (1978), 11–41.
- [58] HAMIT, M. H. M., ALLOGNISSODE, F. K., MOHAMED, M. S., ISSAKA, L.-M., AND DIOP, M. A. Attractiveness and exponential  $p$ -stability of neutral stochastic functional integrodifferential equations driven by wiener process and fbm with impulses effects. *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity* 9, 3 (2020), 351–366.
- [59] HE, D., AND XU, D. Attracting and invariant sets of fuzzy cohen-grossberg neural networks with time-varying delays. *Phys. Lett.* 372 (2008), 7057–7062.
- [60] HINO, Y. Asymptotic behavior of solutions of some functional differential equations. *Tohoku Mathematical Journal* 22, 2 (1970), 98–108.
- [61] HINO, Y. On the stability of solutions of some functional differential equations. *Funkcialaj Ekvacioj* 14 (1971), 47–60.
- [62] HINO, Y., AND MURAKAMI, S. Favard’s property for linear retarded equations with infinite delay. *Funkcialaj Ekvacioj*, 29 (1986), 11–17.
- [63] HINO, Y., MURAKAMI, S., AND NAITO, T. *Functional differential equations with Infinite Delay*, vol. 1473. Lecture Notes in Mathematics, Berlin, 1991.
- [64] HINO, Y., AND YOSHIZAWA, T. Total stability property in limiting equations with infinite delay. *Cosopis pro Pestrovani Matematiky* 111, 1, 62–69.
- [65] HU, Y. Integral transformations and anticipative calculus for fractional brownian motions. *American Mathematical Society, Providence* 825.
- [66] HUANG, Y., ZHU, W., AND XU, D. Invariant and attracting set of fuzzy cellular neural networks with variable delays. *Applied Mathematics Letters* 22 (2009), 478–483.
- [67] HUTCHINSON, E. G. Circular causal systems in ecology. *Annals of the New York Academy of Sciences* 50 (1948), 221–246.
- [68] IGNATYEV, A. On the stability of invariant sets of systems with impulse effect. *Nonlinear Anal. RWA* 69 (2008), 53–72.
- [69] IOANNIS, K., AND STEVEN, S. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag New York, 1988.
- [70] ISSAKA, L.-M., DIOP, M. A., AND HMOYED, H. Nonlocal stochastic integrodifferential equation driven by fractional brownian motions. *Open Mathematics* 1 (2020), 1–16.

- 
- [71] KAMINOGO, T. Kneser's property and boundary value problems for some retarded functional differential equations. *Tohoku Mathematical Journal* 30, 3 (1978), 471–486.
- [72] KAPPEL, F., AND SCHAPPACHER, W. Some consideration to the fundamental theory of infinite delay equations. *J. of Differential Equations*, 37 (1980), 141–183.
- [73] KATO, J. Razumikhin type theorem for differential equation with infinite delay. *Dynamical systems*, (Ed. Bednarek A. R. and Cesari I.), Academic Press, New York (1977), 441–443.
- [74] KATO, J. Phase space for functional differential equations. *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai. North-Holland, Amsterdam* (1990), 307–325.
- [75] KOLMANOVSKII, V. B., AND MYSHKIS, A. D. *Introduction to the theory and Application of Functional Differential Equations*, vol. 463. Mathematics and its Applications, Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [76] KOLMANOVSKIT, V. B. Stability of some systems with arbitrary after effect. *Reports Russ. Acad. Sei.* 331 (1993), 421–425.
- [77] KOLMANOVSKIT, V. B. Applications of differential inequalities for stability of some functional differential equations. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications* 25, 9-10 (1995), 1017–1028.
- [78] KOLMANOVSKIT, V. B. Stability of some nonlinear functional differential equations. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 2 (1995), 1–14.
- [79] KOLMOGOROV, A. The wiener spiral and some other interesting curves in hilbert space. *Doklady Akademii Nauk SSSR* 26 (1940), 115–118.
- [80] KOLMOGOROV, A., AND FOMNIE, S. *Element de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*. Edition Mir, Moscou, 1977.
- [81] KOU, C., ADIMY, M., AND DUCROT, A. On the dynamics of an impulsive model of hematopoiesis'. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena* 4, 02 (2009), 68–91.
- [82] KURATOWSKI, C. Sur les espaces complets. *Fundamenta Mathematicae* 15 (1930), 301–309.
- [83] LI, D., AND XU, D. Attracting and quasi-invariant sets of stochastic neutral partial functional differential equations. *Acta Mathematica Scientia* 33 (2013), 578–588.
- [84] LI, S., XU, D., ZHOU, X., AND PU, Z. Invariant set and the stable region of a class of partial differential equations with time delays. *Nonlinear Anal. RWA* 2 (2001), 161–169.
- [85] LI, Z. global attractiveness and quasi-invariant sets of impulsive neutral stochastic functional differential equations driven by fbm. *Neurocomputing* 177 (2016), 620–627.

- 
- [86] LIANG, J., LIU, J. H., AND XIAO, T.-J. Nonlocal cauchy problem governed by compact operator families. *Nonlinear Anal.* 57 (2004), 183–189.
- [87] LIANG, J., LIU, J. H., AND XIAO, T.-J. Nonlocal problems for integrodifferential equations. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems* 15 (2008), 815–824.
- [88] LIANG, J., AND XIAO, T.-J. Semilinear integrodifferential equations with nonlocal initial conditions. *Computers and Mathematics with Applications* 47, 6-7 (2004), 863–875.
- [89] LIU, J. H. Nonlinear impulsive evolution equations. *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst.* 6 (1999), 77–85.
- [90] LIU, L., GUO, F., WU, C., AND WU, Y. Existence theorems of global solutions for nonlinear volterra type integral equations in banach spaces. *J. of Mathematical Analysis and Applications* 309 (2005), 638–649.
- [91] LIU, X., AND CHEN, L. Complex dynamics of holling type ii lotka-volterra predator-prey system with impulsive perturbations on the predator. *Chaos Solitons Fractals* 16, 2 (2003), 311–320.
- [92] LIU, Z., AND ZHONG, S. An impulsive periodic predator-prey system with holling type iii functional response and diffusion. *Applied Mathematical Modelling* 36, 12 (2012), 5976–5990.
- [93] LIZAMA, C., AND POZO, J. C. Existence of mild solutions for a semilinear integrodifferential equation with nonlocal initial conditions. *Abstract and Applied Analysis* 2012 (2012).
- [94] LONG, S., TENG, L., AND XU, D. Global attracting set and stability of stochastic neutral partial functional differential equations with impulses.
- [95] LONG, S., TENG, L., AND XU, D. Global attracting set and stability of stochastic neutral partial functional differential equations with impulses. *Statistics & Probability Letters* 82 (2012), 1699–1709.
- [96] LOU, B. Fixed points for operators in a space of continuous functions and applications. *Proceeding American Mathematical Society* 127 (1999), 2259–2264.
- [97] MANDELBROT, B., AND WALLIS, J. Noah, joseph and operational hydrology. *Water Resources Research* 4 (1968), 909–918.
- [98] MANDELBROT, B. B., AND NESS, J. W. V. Fractional brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review* 10, 4 (1968), 422–437.
- [99] MAO, X. *Stochastic Differential Equations and Applications*. Horwood Publishing Limited, 1997.

- 
- [100] MIGORSKI, S., AND OCHAL, A. Nonlinear impulsive evolution inclusions of second order. *Dyn. Syst. Appl.* 16 (1997), 679–687.
- [101] MISHURA, Y. Stochastic calculus for fractional brownian motion and related processes. *Springer, Berlin 1929* (2008).
- [102] MÖNCH, H. Boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations of second order in banach spaces. *Nonlinear Anal.* 4 (1980), 985–999.
- [103] MONTROLL, E. W., AND LEBOWITZ, J. L. *Studies in Statistical Mechanics*, vol. 2. North-Holland Publishing Company–Amsterdam, New York, Oxford, 1979.
- [104] MURAKAMI, S. Perturbation theorems for functional differential equations with infinite delay via limiting equations. *J. of Differential Equations*, 59 (1985), 314–345.
- [105] MURAKAMI, S. Linear periodic functional differential equations with infinite delay. *Funkcialaj Ekvacioj* 29 (1986), 335–361.
- [106] MURAKAMI, S., AND NATIO, T. Fading memory spaces and stability properties for functional differential equations with infinite delay. *Funkcialaj Ekvacioj*, 32 (1989), 91–105.
- [107] NATIO, T. Integral manifolds for linear functional differential equations on some banach space. *Funkcialaj Ekvacioj*, 13 (1970), 199–213.
- [108] NATIO, T. On linear autonomous retarded equations with an abstract space for infinite delay. *J. of Differential Equations* 33, 1 (1979), 74–91.
- [109] NELSON, P. W., AND PERELSON, A. S. Mathematical analysis of delay differential equation models of hiv-1 infection. *Mathematical Biosciences* 179 (2002), 73–94.
- [110] NICHOLSON, A. J. An outline of the dynamics of animal populations. *Australe Journal of Zoo.* 2 (1954), 9–65.
- [111] NIEMEYER, G. D. *Using Wave Variables Intime Delayed Force Reflecting Teleoperation*. PhD thesis, Cambridge, MA, 1996.
- [112] NTOUYAS, S., AND TSAMATOS, P. C. Global existence for second order semilinear ordinary and delay integrodifferential equations with nonlocal conditions. *Appl. Anal.* 67, 3-4 (1997), 245–257.
- [113] NTOUYAS, S., AND TSAMOTAS, P. C. Global existence for semilinear evolution equations with nonlocal conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 210, 3 (1997), 679–687.
- [114] NUALART, D. Stochastic integration with respect to fractional brownian motion and applications. *Contemporary Mathematics* 336 (2003), 3–40.
- [115] NUALART, D. *The Malliavin Calculus and Related Topics.*, 2nd ed. berlin ed. 2006.

- 
- [116] PEITGEN, H.-O., AND WALTHER, H.-O. *Functional Differential Equations and Approximation of fixed Points*. Proceedings, Bonn, July.
- [117] PRATO, G. D., AND ZABCZYK, J. *Stochastic equations in infinite dimensions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [118] PROTTER, P. *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [119] REVUZ, D., AND YOR, M. *Continuous Martingales and Brownian Motion*, vol. 293. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften Fundammental Principe of Mathematical Sciences, 1991.
- [120] SAKTHIVEL, R., REN, Y., DEBBOUCHE, A., AND MAHMUDOV, N. Approximate controllability of fractional stochastic differential inclusions with nonlocal conditions. *Appl. Anal.* 95, 11 (2016), 2361–2382.
- [121] SAMOILENKO, A. M., AND PERESTYUK, N. Impulsive differential equations. *World Scientific, Singapore* (1995).
- [122] SAWANO, K. Exponential asymptotic stability for functional differential equations with infinite retardations. *Tohoku Mathematical Journal* 31 (1979), 363–382.
- [123] SAWANO, K. Positively invariant sets for functional differential equations with infinite delay. *Tohoku Mathematical Journal* 32, 2 (1980), 557–566.
- [124] SCHUMACHER, K. Existence and continuous dependence for differential equations with unbounded delay. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 67, 4 (1978), 315–335.
- [125] SCHUMACHER, K. Dynamical systems with memory on history space with monotonic seminorm. *J. of Dynamical Equations*, 34 (1979), 440–463.
- [126] SEIFERT, G. Positively invariant closed sets for systems of delay differential equations. *Journal of Differential Equations* 22 (1976), 292–304.
- [127] SHUJUN LONG, A. D. X. Delay-dependent stability analysis for impulsive neural networks with time varying delays. *Neurocomputing* 71, 1705–1713.
- [128] SMITH, H. L. Monotone dynamical systems, an introduction to the theory of competitive and cooperative systems. *Mathematical Surveys and Monographs* 41 A.M.S (1995).
- [129] TANG, S., AND CHEN, L. Density-dependent birth rate, birth pulses and their population dynamic consequences. *J. of Mathematical Biology* 44, 2 (2002), 185–199.
- [130] TAQQU, M. Benoît mandelbrot and fractional brownian motion. *Statistical Science* 28, 1 (2013), 131–134.
- [131] VERHULST, F. *Nonlinear Diſerential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag, 1984.

- 
- [132] VOLTERRA, V. Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie. *Gauthiers-Villars, Paris 214* (1931).
- [133] WANG, J., IBRAHIM, A. G., AND FEČKAN, M. Nonlocal impulsive fractional differential inclusions with fractional sectorial operators on banach spaces. *Applied Mathematics and Computation 257* (2015), 103–118.
- [134] WANG, L., AND LI, D. Impulsive-integral inequality for attracting and quasi-invariant sets of impulsive stochastic partial functional differential equations with infinite delays. *Journal of Inequalities and Applications 238* (2013).
- [135] WANG, Q., KLINKE, D. J., AND WANG, Z. Cd8 + t cell response to adenovirus vaccination and subsequent suppression of tumor growth. *modeling, simulation and analysis, BMC. Syst. Biol. 9, 1* (2015), 27.
- [136] XU, D. Integro-differential equations and delay integral inequalities. *Tôhoku Mathematical Journal 44*, 365–378.
- [137] XU, D. Invariant and attracting sets of volterra difference equations with delays. *Computers & Mathematics with Applications 45* (2003), 1311–1317.
- [138] XU, D., AND LONG, S. Attracting and quasi-invariant sets of non-autonomous neural networks with delays. *Neurocomputing 77, 1* (2012), 222–228.
- [139] XU, D., AND YANG, Z. Attracting and invariant sets for a class of impulsive functional differential equations. *J. of Mathematical Analysis and Applications 329* (2007), 1036–1044.
- [140] XU, D., AND ZHAO, H. Invariant set and attractivity of nonlinear differential equations with delays. *Applied Mathematics Letters 15* (2002), 321–325.
- [141] XU, L., AND XU, D. P-attracting and p-invariant sets for a class of impulsive stochastic functional differential equations. *Journal Mathematical Analysis and Applications 57, 1* (2009), 54–61.
- [142] YANG, H., AND JIANG, F. Exponential stability of mild solutions to impulsive stochastic neutral partial differential equations with memory. *Advances in Difference Equations 2013, 148* (2013).
- [143] ZHANG, X., LIU, L., AND WU, Y. Global solutions of nonlinear second order impulsive integrodifferential equations of mixed type in banach spaces. *Nonlinear Anal. 67* (2007), 2335–2349.
- [144] ZHAO, H. Invariant set and attractor of nonautonomous functional differential systems. *J. of Mathematical Analysis and Applications 282* (2002), 437–443.

- [145] ZHOU, Y., AND JIAO, F. Nonlocal cauchy problem for fractional evolution equations. *Nonlinear Analysis Real World Applications* 11, 5, 4465–4475.
- [146] ZHOU, Y., AND JIAO, F. Existence of mild solutions for fractional neutral evolution equations. *Computers and Mathematics with Applications* 59, 3 (2010), 1063–1077.