



**HAL**  
open science

# Propriétés structurelles, combinatoires et logiques des pavages

Alexis Ballier

► **To cite this version:**

Alexis Ballier. Propriétés structurelles, combinatoires et logiques des pavages. Informatique [cs]. Université d'Aix-Marseille I, 2009. Français. NNT: . tel-04149707

**HAL Id: tel-04149707**

**<https://hal.science/tel-04149707>**

Submitted on 3 Jul 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ**  
ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE 184

## **THÈSE**

présentée pour obtenir le grade de  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE

*Spécialité : Informatique*

par

**Alexis Ballier**

sous la direction de Bruno DURAND et Emmanuel JEANDEL

### **Propriétés structurelles, combinatoires et logiques des pavages**

soutenue publiquement le 30 novembre 2009

#### **JURY**

|                  |                                       |                   |
|------------------|---------------------------------------|-------------------|
| Bruno DURAND     | Université d'Aix-Marseille I          | <i>Directeur</i>  |
| Emmanuel JEANDEL | Université d'Aix-Marseille I          | <i>Directeur</i>  |
| Jacques MAZOYER  | École Normale supérieure de Lyon      | <i>Rapporteur</i> |
| Laurent VUILLON  | Université de Savoie                  | <i>Rapporteur</i> |
| Arnaud DURAND    | Université Denis Diderot - Paris 7    | <i>Membre</i>     |
| Sandrine JULIA   | Université de Nice - Sophia Antipolis | <i>Membre</i>     |

# Résumé

Les pavages du plan discret expriment les conséquences de contraintes géométriques simples. Ils sont définis par les agencements de couleurs qu'il est possible de former localement. Les pavages forment ainsi des coloriage du plan discret respectant un ensemble fini de contraintes locales. Malgré la simplicité de cette définition, les objets obtenus peuvent être complexes : l'existence même de pavages sous un jeu de contraintes donné est indécidable.

Dans cette thèse nous nous intéressons à l'ensemble des pavages valides pour des contraintes données ; nous étudions la structure de cet ensemble tout autant que celle des pavages eux-mêmes. Nous prouvons que les ensembles de pavages ne peuvent avoir que trois types de cardinalité : finie, dénombrable ou la cardinalité du continu. En étudiant différentes façons de structurer un ensemble de pavages, nous caractérisons chacune des trois cardinalités possibles par la structure des pavages obtenus. Les plus simples sont les ensembles de pavages finis : nous prouvons que ce sont ceux qui ne contiennent que des pavages périodiques. Les ensembles de pavages dénombrables, grâce à leur cardinalité intermédiaire, ont de nombreuses propriétés : nous les utilisons pour en exhiber les pavages typiques. Enfin, nous caractérisons les façons d'obtenir un nombre indénombrable de pavages.

Par la suite, nous étendons cette étude au cas où les contraintes ne sont plus vérifiées partout : nous considérons des pavages où nous autorisons, en une faible proportion de points, à ne pas respecter les contraintes. Nous montrons que, en présence d'erreurs, certains types de contraintes n'autorisent que des objets proches de pavages sans erreur, exhibant ainsi une certaine forme de stabilité. En revanche, d'autres types de contraintes, pour lesquelles nous avons exhibé certains pavages ayant une structure particulière, peuvent faire apparaître des objets plus éloignés lorsque nous introduisons des erreurs.

Enfin, nous faisons un retour sur les aspects logiques des pavages, vus comme des modèles de théories logiques. En codant les contraintes de pavages par des formules du premier ordre nous obtenons des correspondances entre la structure des pavages et des propriétés de la théorie. Cette approche nous ouvre de nouveaux horizons : l'axiomatisation du plan discret repose sur une présentation du groupe qui le caractérise. Nous étudions donc les généralisations possibles de nos résultats structurels au cas des pavages sur des groupes de présentation finie.

## Remerciements

Après avoir passé plusieurs longs mois à l'écriture de ce manuscrit, c'est, paradoxalement, pour l'écriture de cette partie que la page blanche m'effraie le plus. Aboutissement de presque quatre années de travail, c'est non sans un pincement au cœur que je me dois d'y mettre un point final, à quelques jours du grand départ.

Il paraît que ça se fait, et puisque cette thèse n'aurait jamais vu le jour sans l'aide précieuse de mes directeurs de thèse Emmanuel Jeandel et Bruno Durand, les premiers remerciements leur sont donc destinés. Ensuite je remercie les membres éminents de l'équipe Escape au LIF, à commencer par les plus anciens : Nicolas pour ce qu'une discussion avec lui peut apprendre, Greg pour ses hymnes ô combien importants, Gaétan pour ses débats toujours (im)pertinents, Laurent pour avoir dédouané mon absentéisme pendant quelques années, Victor pour permettre de ne pas s'ennuyer lorsqu'on n'a rien à faire, Benoît pour avoir été le premier à proposer les balades les plus périlleuses, Jérémie, ah non pardon, il n'est pas dans la bonne équipe, Martin pour ne jamais se décourager à la fermeture des bars, Alex parce qu'il ne faut pas l'oublier, Thomas pour ne pas avoir peur des plans de Benoît, Pascal pour sa bonne foi, Tarik parce qu'il boit des bières, Fabien pour réussir, quelques fois, à se séparer de Greg. Pour rester dans le registre purement scientifique, je remercie aussi les participants aux rencontres FRAC avec qui il est toujours agréable de discuter. Enfin, on se demande ce qu'il fait là mais le temps passé dans nos bureaux lui vaut une place ici, et puis il a vu un titre cette année, à savoir Guillaume.

Si vous n'avez pas encore arrêté de lire ni tourné la page je vous en félicite. Je suppose que la liste du précédent paragraphe a été pénible à lire, et puisqu'il serait inutile et fastidieux de donner une liste exhaustive des bons moments passés lors de ces quatre années à Marseille et ailleurs et que j'oublierais certainement beaucoup trop de personnes qui le prendraient, peut être, mal, je vais m'arrêter là. . .



# Table des matières

|   |            |
|---|------------|
| <b>Introduction</b>   | <b>vii</b> |
| <b>I Structure</b>  | <b>1</b>   |
| <b>1 Définitions et résultats classiques</b>                              | <b>3</b>   |
| 1.1 Les configurations . . . . .  | 4          |
| 1.2 Motifs et relations entre motifs . . . . .                            | 6          |
| 1.3 Tuiles de Wang . . . . .  | 9          |
| 1.4 Motifs interdits . . . . .  | 10         |
| 1.5 Contraintes locales et automates cellulaires . . . . .                | 12         |
| 1.6 Régularité . . . . .  | 13         |
| 1.7 Apériodicité et indécidabilité . . . . .                              | 16         |
| 1.7.1 Substitutions . . . . .   | 17         |
| 1.7.2 Codage de substitutions . . . . .                                   | 19         |
| 1.7.3 Codage du calcul . . . . .  | 30         |
| 1.7.4 Extensions de l'indécidabilité . . . . .                            | 35         |
| <b>2 Le pré-ordre <math>\preceq</math></b>                                | <b>37</b>  |
| 2.1 Définitions et propriétés générales . . . . .                         | 37         |
| 2.2 Langages de configurations . . . . .                                  | 38         |
| 2.2.1 Liens entre les langages de configurations et les pavages . . . . . | 41         |
| 2.2.2 Stabilité des langages de configurations . . . . .                  | 42         |
| 2.3 <i>Extrema</i> pour $\preceq$ . . . . .                               | 43         |
| 2.4 Les niveaux pour $\preceq$ . . . . .                                  | 46         |
| <b>3 Topologie des pavages</b>  | <b>47</b>  |
| 3.1 Topologie . . . . .   | 47         |
| 3.2 Sous-shifts . . . . .   | 48         |
| 3.3 Stabilité des espaces de pavages . . . . .                            | 51         |
| 3.4 Cantor-Bendixson . . . . .  | 53         |
| 3.5 Liens et problèmes ouverts . . . . .                                  | 56         |

|            |  |            |
|------------|--|------------|
| <b>4</b>   | <b>Espaces de pavages et cardinalité</b>                               | <b>59</b>  |
| 4.1        | Espaces finis de pavages . . . . .                                     | 59         |
| 4.2        | Espaces dénombrables de pavages . . . . .                              | 61         |
| 4.3        | Espaces indénombrables de pavages . . . . .                            | 73         |
| 4.4        | Décidabilité et indécidabilité des propriétés de cardinalité . . . . . | 76         |
| 4.5        | Conclusions . . . . .  | 76         |
| <b>5</b>   | <b>Généralisations aux groupes finiment engendrés</b>                  | <b>79</b>  |
| 5.1        | Définitions . . . . .  | 79         |
| 5.2        | Topologie et sous-shifts . . . . .                                     | 81         |
| 5.3        | Généralisation des résultats . . . . .                                 | 82         |
| 5.4        | Morphismes . . . . .   | 85         |
| <b>II</b>  | <b>Logique</b>   | <b>87</b>  |
| <b>6</b>   | <b>Des pavages aux formules</b>  | <b>91</b>  |
| 6.1        | Langages et structures . . . . .                                       | 91         |
| 6.2        | Équivalences entre structures et configurations . . . . .              | 92         |
| 6.2.1      | Isomorphisme . . . . .   | 92         |
| 6.2.2      | Équivalence élémentaire . . . . .                                      | 93         |
| 6.3        | Axiomatisation . . . . .   | 95         |
| 6.3.1      | L'espace $\mathbb{Z}^2$ . . . . .                                      | 95         |
| 6.3.2      | Axiomatisation des couleurs . . . . .                                  | 97         |
| 6.3.3      | Théorie d'un jeu de tuiles . . . . .                                   | 98         |
| <b>7</b>   | <b>Traduction des propriétés</b>                                       | <b>99</b>  |
| 7.1        | Liens avec $\preceq$ . . . . .   | 101        |
| 7.2        | Applications de ces résultats en théorie des modèles . . . . .         | 102        |
| 7.3        | Logique monadique du second ordre . . . . .                            | 103        |
| 7.4        | Conclusion . . . . .   | 104        |
| <b>III</b> | <b>Robustesse aux erreurs</b>  | <b>107</b> |
| <b>8</b>   | <b>Robustesse aux erreurs</b>  | <b>109</b> |
| 8.1        | Définitions . . . . .  | 110        |
| 8.2        | Robustesse . . . . .   | 111        |
| 8.2.1      | Procédé de nettoyage itératif . . . . .                                | 111        |
| 8.2.2      | Robustesse aux erreurs des jeux de tuiles périodiques . . . . .        | 114        |
| 8.3        | Non robustesse . . . . .   | 115        |
| 8.4        | Conclusions et problèmes ouverts . . . . .                             | 118        |
|            | <b>Bibliographie</b>   | <b>119</b> |

# Introduction

Les pavages sont un moyen simple et visuel d'exprimer des contraintes géométriques. Les règles se rapprochent très fortement de celles d'un jeu que nous connaissons tous : un *puzzle*. Les pièces d'un *puzzle* sont des pièces carrées avec des excroissances et des creux sur leurs bords ; la forme des bords impose la façon d'agencer les pièces les unes à côté des autres. Les pièces d'un *puzzle* ont, de plus, un motif sur une des faces pour qu'une fois le *puzzle* complété, c'est-à-dire lorsque nous avons agencé correctement toutes les pièces, on obtienne un dessin. Cette vision naïve des pavages comme de simples *puzzles* peut nous amener à penser que le sujet ne va pas être bien difficile : il est courant de trouver dans le commerce des *puzzles* avec quelques milliers de pièces et pourtant ils ne sont pas difficiles à résoudre. En réalité, le motif dessiné sur chacune des pièces d'un *puzzle* aide grandement à sa résolution : le jeu devient beaucoup plus difficile lorsque l'on tente de le résoudre en regardant les pièces seulement sur la face non dessinée. Le cas général peut être encore plus complexe : un exemple qui illustre bien cette complexité est *Eternity II* [Ete]. La société éditant *Eternity II* offre deux millions de dollars au premier qui résoudra ce *puzzle* de seulement 256 pièces !

Historiquement, les pavages ont été formalisés par Hao Wang [Wan60, Wan61] dans le but d'étudier la décidabilité de certaines classes de formules logiques. Le modèle de Wang s'exprime de manière simple : on considère des pavés carrés, tous de même taille, avec des bords colorés appelés tuiles de Wang. Nous considérons un nombre fini de carrés de ce type, que nous appelons *jeu de tuiles*. Deux tuiles de Wang peuvent être mises côte à côte si les couleurs sur leurs côtés adjacents correspondent. Nous avons une infinité de tuiles de chaque type. Nous n'avons pas le droit de faire de symétrie ni de rotation sur les tuiles : les contraintes d'adjacence étant symétriques et puisque nous avons une infinité de tuiles de chaque type, il est aisé de construire un motif que l'on peut répéter périodiquement en considérant des rotations et symétries de ces tuiles.

Le modèle des tuiles de Wang se rapproche beaucoup des *puzzles* : les excroissances et les creux sur les bords des pièces d'un *puzzle* correspondent aux couleurs sur les côtés des tuiles de Wang. En général nous n'effectuons pas de symétrie sur les pièces d'un *puzzle* : ceci reviendrait à poser une pièce face cachée. Nous pouvons facilement empêcher les rotations : si l'on ne met que des excroissances sur les faces du haut et de droite et que des creux sur les faces du bas et de gauche, il devient impossible d'assembler les pièces en faisant des rotations. La différence majeure entre une tuile de Wang et une pièce de *puzzle* est que nous avons autant de tuiles de Wang d'un certain type que nous le désirons.



Bien que le modèle soit légèrement différent, nous pouvons être convaincus que résoudre *Eternity II* n'est pas aussi simple que cela en a l'air en étudiant les pavages finis par des tuiles de Wang. Les pavages finis ont suscité un grand intérêt en théorie de la complexité : Leonid A. Levin s'en sert pour exhiber un problème NP-complet en moyenne [Lev86], Peter van Emde Boas l'utilise comme problème NP-complet de base [vEB97], ou encore récemment dans le but d'obtenir des fonctions one-way [KN08].

Le passage à l'infini entraîne un saut de complexité. Wang conjecturait [Wan61] dans les années soixante qu'il était possible de trouver un algorithme qui, à partir d'un jeu de tuiles, décide s'il est possible de trouver un agencement correct de ces tuiles remplissant le plan discret. Ce problème de décision est appelé dans la littérature le *domino problem*. Ce problème provenait du monde de la logique : l'indécidabilité du *domino problem* entraîne l'indécidabilité de la satisfiabilité d'une certaine classe de formules logiques [Wan61, BGG97]. La décidabilité de cette classe de formules était un problème ouvert à l'époque. Pendant que R. Berger, un étudiant de Wang, s'attelait au *domino problem* en général, Kahr, Moore et Wang montraient, en 1962, l'indécidabilité d'une version plus faible du *domino problem* qui suffisait pour obtenir l'indécidabilité de la classe de formules voulue [KMW62]. Quelques années plus tard, Berger montrait l'indécidabilité du *domino problem* [Ber66, Ber64]. Berger avait construit un jeu de tuiles apériodique (c'est-à-dire qui pave le plan mais pour lequel il n'existe pas de pavage périodique) et encodait le diagramme espace-temps d'une machine de Turing à l'intérieur de tout pavage. Par la suite, de nombreuses améliorations et simplifications plus ou moins proches de cette construction ont été apportées [Rob71, Oli08]. Des constructions rajoutent des contraintes au jeu de tuiles, restreignant ainsi le *domino problem* à une classe moins large de jeux de tuiles ; ces constructions permettent d'obtenir des résultats d'indécidabilité pour les automates cellulaires [MR98, Kar92]. D'autres constructions, modifiant légèrement la construction de Berger, améliorent la réduction pour obtenir des résultats d'inséparabilité récursive pour certaines classes de jeux de tuiles [GK72] que l'on peut transférer à l'étude de classes de formules logiques [BGG97]. Encore d'autres constructions permettent d'obtenir des pavages complexes [DLS01, DLS08] ou avec peu de régularité [CD04]. Enfin, des constructions bien plus éloignées de celle de Berger permettent d'obtenir des résultats d'indécidabilité pour des structures autres que  $\mathbb{Z}^2$  [CK97, Cul96, Kar96, Kar08] ou de continuer le travail original de Wang sur certaines classes de formules [AL74].

Même si l'étude des pavages finis ou infinis ont *a priori* des applications et des problématiques dans des domaines différents (théorie de la complexité pour les premiers contre théorie de la calculabilité pour les seconds), ils sont pourtant très liés *via* un théorème de compacité sur lequel nous revenons formellement au Chapitre 3. Si l'on peut construire des pavages finis arbitrairement grands respectant les contraintes imposées par un jeu de tuiles alors il existe un agencement de ces tuiles remplissant le plan entier tout en respectant ces contraintes. C'est ce résultat qui motiva la conjecture que le *domino problem* était décidable [Wan61] : si l'on ne pave pas le plan alors il existe une partie finie impossible à paver. L'algorithme de décision proposé, basé sur la conjecture fautive que tout jeu de tuiles pavant le plan peut le paver périodiquement est le suivant : on cherche à paver des carrés finis de plus en plus grands jusqu'à, soit ne plus pouvoir paver et dans ce cas le jeu de tuiles ne pave pas le plan, soit pouvoir

répéter périodiquement le pavage fini obtenu. Dans sa preuve d'indécidabilité, Berger commence par construire un jeu de tuiles n'admettant aucun pavage périodique.

De nos jours, nous connaissons de nombreuses méthodes pour construire des jeux de tuiles apériodiques [DLS05, Oll08, Rob71, CK97, GS86, Knu97]. L'existence de jeux de tuiles apériodiques signifie que le pavage le plus régulier d'un jeu de tuiles qui pave le plan ne sera pas forcément périodique : la périodicité n'est pas la propriété de régularité intrinsèque à un jeu de tuiles qui pave le plan. En revanche, à la fin des années quatre-vingt dix Bruno Durand montra que tout jeu de tuiles qui pave le plan admet un pavage *quasi-périodique* [Dur99]. Cette notion de quasi-périodicité peut être définie de plusieurs façons différentes que nous verrons au cours de ce manuscrit, la plus visuelle étant celle-ci : un pavage est quasi-périodique si tout motif apparaissant dans ce pavage peut être trouvé dans n'importe quelle partie suffisamment grande de ce pavage (Section 1.6). La taille de la fenêtre à regarder pour trouver un motif peut être vue comme une mesure du degré de quasi-périodicité d'un pavage et par conséquent une mesure de sa régularité (ou inversement de sa complexité). Malgré la simplicité des contraintes imposées par les pavages, il est possible de construire des jeux de tuiles pour lesquels tous les pavages quasi-périodiques ont une telle mesure non récursive [CD04]. En d'autres termes, même si tout jeu de tuiles pavant le plan admet un pavage avec une certaine régularité, cette régularité n'est pas récursivement observable.

Nous pouvons définir d'autres mesures de complexité pour les pavages. Une mesure très grossière consiste à regarder la cardinalité de l'ensemble de tous les pavages possibles. Nous étudions en détails les différentes cardinalités possibles d'un ensemble de pavages au Chapitre 4 : cette partition simple induit des propriétés sur la structure possible des pavages. Un peu plus finement, en dynamique symbolique on aime bien regarder la proportion de motifs apparaissant dans des pavages par rapport au nombre total de motifs possibles, ce qui permet de définir une notion d'entropie [LM95]. Récemment, M. Hochman et T. Meyerovitch ont même réussi à caractériser l'entropie des ensembles de pavages : cette entropie est celle des réels récursivement approximables par le haut [HM10]. Enfin, une notion très forte de complexité consiste à considérer la complexité de Kolmogorov des motifs apparaissant dans un pavage : un pavage complexe dans ce sens ne peut pas être décrit de manière simple. Encore une fois, il est possible de construire des jeux de tuiles dont tous les motifs apparaissant dans un pavage ont une complexité de Kolmogorov maximale [DLS01].

La Partie I de ce manuscrit est très largement dédiée à l'étude de la complexité des pavages. Pour ce faire nous utilisons des méthodes topologiques tirées du monde de la dynamique symbolique et décrites au Chapitre 3 ainsi que des méthodes plus combinatoires, définies au Chapitre 2, qui consistent à étudier les motifs apparaissant dans un pavage. Le couplage de ces deux points de vue, dont nous verrons qu'ils ne sont pas si éloignés, nous permet au Chapitre 4 de caractériser la cardinalité de l'ensemble des pavages valides d'un jeu de tuiles par l'existence de certains types de pavages.

Les liens entre les pavages du plan (ou une définition plus générale : les *sous-shifts*, voir Section 3.2), qui sont des objets statiques, avec le monde de la dynamique symbolique peuvent sembler un peu flous pour l'instant. L'idée générale est qu'on étudie la dynamique du décalage (ce qui revient à traduire toutes les tuiles d'un pavage) dans un ensemble de pavages. On peut se convaincre que la dynamique du décalage permet de capturer celle de certains systèmes dynamiques par un exemple simple : considérons

le système dynamique  $x \rightarrow 2x \pmod{1}$ ; si l'on considère un mot infini étant l'écriture binaire d'un réel, l'application de cette fonction revient à effacer le premier bit et à décaler les autres bits vers la gauche. La dynamique du décalage sur l'ensemble des mots binaires infinis capture ainsi celle de ce système dynamique réel. En règle générale le domaine de la dynamique symbolique s'intéresse à des mots infinis, c'est-à-dire des pavages d'une demi-droite discrète [Hed69, GH55, LM95]. Cependant, ce formalisme et les résultats de ce domaine peuvent être facilement étendus au cas du plan discret [Lin04]. L'étude faite au Chapitre 3 des pavages sous un point de vue topologique est très fortement inspirée des méthodes de dynamique symbolique.

Nous avons déjà évoqué le fait que les pavages du plan ont été introduits dans le but de modéliser certaines classes de formules logiques [Wan61]. Nous faisons un retour sur les aspects logiques des pavages à la Partie II de ce manuscrit. Nous montrons comment coder et axiomatiser les pavages du plan en logique du premier ordre. Ce codage nous permet de caractériser des propriétés structurelles des jeux de tuiles et des pavages par des propriétés de la théorie que nous obtenons après ce codage. Deux pavages contiennent les mêmes motifs si et seulement si leur théorie du premier ordre est égale. Un jeu de tuiles admet un pavage périodique si et seulement si il existe un modèle fini de son axiomatisation. La théorie d'un jeu de tuiles est complète si et seulement si le *sous-shift* qu'il définit est minimal. Dans la plupart des cas, ces équivalences nécessitent des résultats structurels sur les pavages que nous montrons à la Partie I. Un point remarquable dans la façon dont nous axiomatisons les pavages du plan est que nous avons seulement besoin d'axiomatiser une présentation du groupe  $\mathbb{Z}^2$  : c'est de cette façon dont B. Poizat codait les pavages du plan en logique du premier ordre [Poi82]. Nous pouvons ainsi nous demander quels sont les résultats structurels qui se généralisent au cas des groupes de présentation finie, *i.e.*, lorsque nous n'essayons plus de paver le plan discret mais le graphe de Cayley d'un tel groupe. Nous faisons une telle étude au Chapitre 5; les résultats topologiques se généralisent facilement, d'autres résultats qui font intervenir la structure de  $\mathbb{Z}^2$  peuvent aussi être généralisés en adaptant la démonstration et enfin certains résultats ne peuvent pas être généralisés et doivent être reformulés pour être valides dans le cas de groupes quelconques. Des avancées récentes exhibant de forts liens entre la décidabilité de la théorie monadique du second ordre du graphe de Cayley d'un groupe et la structure du groupe [KL05, MS83] (voir la Section 7.3) ainsi que des liens entre la théorie monadique du second ordre d'un jeu de tuiles et la structure du *sous-shift* qu'il définit [JT09] nous permettent d'espérer pouvoir un jour caractériser efficacement les classes de groupes pour lesquels le *domino problem* est décidable. Nous rappelons que, sur  $\mathbb{Z}$  ce problème est décidable (ceci revient à trouver un cycle dans un graphe) alors que sur  $\mathbb{Z}^2$  il ne l'est pas [Ber66].

En informatique théorique, les pavages sont un outil puissant depuis que Berger a montré que l'on pouvait encoder du calcul dans des pavages [Ber66]. Dans d'autres domaines les pavages servent plus de modèle que d'objet d'étude. Un de ces domaines est bien sûr la cristallographie : jusqu'à la découverte des *quasi-cristaux* au début des années quatre-vingt [SBGC84, INF85], on ne connaissait que des cristaux ayant une structure périodique ; les quasi-cristaux ne sont pas périodiques mais quasi-périodiques et l'existence de pavages apériodiques constitue une explication de ce phénomène. Charles Radin propose un modèle cristallographique par des pavages où il est possible de ne pas respecter les contraintes imposées par le jeu de tuiles. Intuitivement, on as-

socié aux contraintes une notion d'énergie (une contrainte non respectée nécessite plus d'énergie qu'une contrainte respectée) et on considère les structures minimisant l'énergie [Rad85, Rad92]. La partie **III** de ce manuscrit est dédiée à l'étude de pavages dans lesquels nous autorisons certaines contraintes à ne pas être respectées. Nous proposons un modèle formel, différent de celui de C. Radin, de ce qu'est un pavage avec erreurs. Nous montrons que dans le cas où il n'existe que des pavages périodiques, tout pavage dont les erreurs sont distribuées avec une faible probabilité est proche d'un pavage sans erreur. De plus, nous proposons un procédé local permettant de se ramener à un pavage sans erreur. Pour le cas où il n'existe qu'une infinité dénombrable de pavages, nous montrons que certaines erreurs ont des conséquences sur une infinité de points et donc qu'aucun procédé local ne peut corriger ces erreurs. Enfin, nous montrons qu'il ne peut pas exister d'algorithme décidant si, pour un jeu de tuiles, les pavages avec erreurs seront proches de pavages sans erreurs.

La Partie **I** de ce manuscrit décrit les pavages et présente les résultats que nous avons obtenus. Nous présentons les différents modèles et résultats classiques au Chapitre **1**, nous introduisons un pré-ordre sur les pavages et étudions ses propriétés au Chapitre **2**, nous définissons et étudions la topologie des ensembles de pavages au Chapitre **3**. Au Chapitre **4**, nous combinons les méthodes développées aux chapitres **2** et **3** pour étudier de manière fine la structure des pavages obtenus pour les différentes cardinalités possibles d'un ensemble de pavages. Enfin, le Chapitre **5** constitue une généralisation de nos résultats au cas des pavages sur des groupes finiment engendrés. La Partie **II** fait un retour sur les propriétés logiques des pavages : nous expliquons comment coder un jeu de tuiles en une théorie logique au Chapitre **6**. Grâce aux résultats obtenus à la Partie **I**, nous transférons des propriétés du jeu de tuiles à la théorie le codant au Chapitre **7**. La Partie **III** de ce manuscrit est consacrée à l'étude des pavages dans le cas où nous autorisons une faible proportion d'erreurs. Les résultats de la Partie **I** nous permettent d'étudier ce cas : les ensembles de pavages finis sont toujours robustes à une faible proportion d'erreurs alors que les ensembles de pavages infinis dénombrables contiennent des pavages qui ne peuvent pas être corrigés localement lorsque nous autorisons des erreurs.



**Première partie**

**Structure**



# Chapitre 1

## Définitions et résultats classiques

La première formalisation des pavages tels que nous les connaissons aujourd'hui est due à Hao Wang [Wan61]. Ce formalisme reste encore aujourd'hui le plus utilisé dans la littérature. Nous le présentons à la Section 1.3. D'autres formalismes, moins connus ou provenant d'autres domaines tels que la dynamique symbolique, existent et sont présentés dans ce chapitre aux Sections 1.4 et 1.5. Ils seront souvent plus faciles à manipuler dans notre cadre.

Tous ces formalismes peuvent être regroupés sous la même idée : on colorie le plan discret  $\mathbb{Z}^2$  par des couleurs prises dans un ensemble fini ; nous appelons ces coloriage de  $\mathbb{Z}^2$  des configurations. La Section 1.1 décrit et fixe les notations communes. Ensuite nous imposons des contraintes sur la façon d'agencer ces couleurs. Les Sections 1.3, 1.4 et 1.5 présentent les différentes façons d'exprimer ces contraintes. Nous montrons aussi les équivalences entre ces différents modèles. De façon générale, nous appelons pavage un agencement des couleurs respectant des contraintes données.

L'idée essentielle des pavages est que ces contraintes peuvent être décrites de manière finie. La définition que nous utiliserons le plus souvent est celle qui interdit à certains motifs d'apparaître dans une configuration (Section 1.4). Un motif peut être vu comme un coloriage d'une partie finie de  $\mathbb{Z}^2$ , ce qui les rend faciles à décrire. À la Section 1.2 nous définissons formellement ce que sont les motifs ainsi que les opérations utilisées au cours de ce manuscrit.

Parmi tous les agencements de couleurs possibles sur le plan, certains sont plus structurés que d'autres. Dans ce chapitre nous présentons deux types de structure pour les configurations : la *périodicité* et la *quasi-périodicité* (Section 1.6). Une question importante sera de déterminer si des configurations avec de telles propriétés structurelles existent.

Nous pouvons ensuite nous poser la question de l'existence de pavages avec de telles régularités. Nous montrons à la Section 1.7 qu'il n'existe pas forcément de pavage périodique respectant un ensemble de contraintes alors qu'il existe des pavages valides pour ces mêmes contraintes. Certains de ces jeux de tuiles constituent les briques



de base à la preuve d'indécidabilité du *domino problem* : déterminer algorithmiquement s'il existe un agencement des couleurs respectant un ensemble de contraintes.

## 1.1 Les configurations

Bien que l'on puisse trouver dans la littérature différentes façons de formaliser les pavages, les différences entre ces modèles sont dans la façon d'exprimer les contraintes. Ces formalisations peuvent ainsi toutes être regroupées dans un cadre unifié à partir duquel nous rajouterons des contraintes pour obtenir les divers modèles. Dans cette section, nous présentons les définitions et notations communes à tous les modèles présentés et étudiés au cours de ce manuscrit.

Nous cherchons à paver le plan  $\mathbb{Z}^2$  par un ensemble *fini* de couleurs  $\mathbf{Q}$  : on considère chaque cellule du plan comme une case à colorier tel que représenté sur la Figure 1.1.

**Définition 1.1** (Configurations). *Une configuration est une application de  $\mathbb{Z}^2$  dans un ensemble fini  $\mathbf{Q}$ , i.e., un élément de  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$ .*

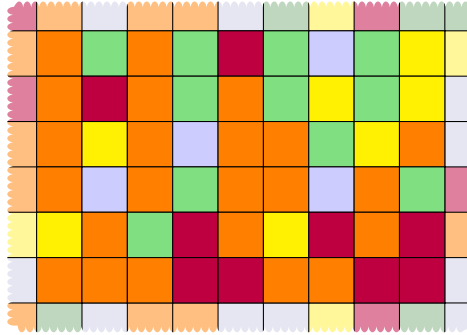


FIGURE 1.1 – Exemple de configuration

Comme nous voulons modéliser des contraintes géométriques locales, la position relative des cellules (comme par exemple, une cellule bleue est toujours à côté d'une cellule rouge) est plus importante que leur position absolue (par exemple, la cellule en  $(0, 0)$  est bleue). Naturellement interviennent les *décalages* (*shifts* en anglais) ou *translations* :

**Définition 1.2** (Translation). *Pour  $z \in \mathbb{Z}^2$  et une configuration  $c \in \mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$ , on définit le translaté par  $z$  de  $c$  :  $\sigma_z(c) : x \rightarrow c(x - z)$ .*

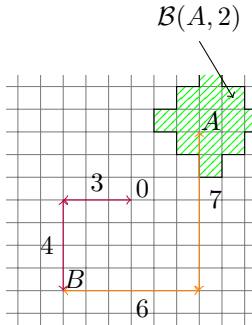
Intuitivement, appliquer  $\sigma_v$  à une configuration  $c$  revient à déplacer l'origine du plan en  $v$ . On remarque que nous n'avons pas représenté la position de l'origine sur la Figure 1.1 : cette omission est volontaire. En effet, toutes les propriétés que nous

études ne prêtent pas d'importance à la position de l'origine. Même si deux configurations égales modulo un décalage peuvent être différentes, elles seront, informellement, les mêmes. Il devient alors naturel de définir et de s'intéresser essentiellement aux ensembles invariants par translation :

**Définition 1.3** (Invariance par translation). *Un sous-ensemble  $\mathbf{S}$  de  $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  est dit invariant par translation si, pour tout  $v \in \mathbb{Z}^2$ , l'application de  $\sigma_v$  le laisse invariant, c'est-à-dire : pour tout élément  $c$  de  $\mathbf{S}$  et pour tout  $v \in \mathbb{Z}^2$ ,  $\sigma_v(c)$  est aussi dans  $\mathbf{S}$ .*

Pour pouvoir nous repérer plus facilement dans le plan, nous pouvons définir une norme sur  $\mathbb{Z}^2$  qui correspond à la norme 1, ou norme de Manhattan, héritée de  $\mathbb{R}^2$  vu comme  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel :  $\|(x, y)\|_{\mathbb{Z}^2} = |x| + |y|$ . Pour simplifier les notations, nous noterons  $\|\cdot\|_{\mathbb{Z}^2}$  comme  $\|\cdot\|$ . Étant donné que pour des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie toutes les normes sont équivalentes, la norme choisie n'a que peu d'importance. Le choix de la norme influence essentiellement les représentations, ainsi nous la fixons ici une fois pour toutes pour le reste du manuscrit tout en gardant à l'esprit que les résultats ne dépendent pas de la norme choisie.

Cette norme induit une distance et permet de définir la notion de boule sur  $\mathbb{Z}^2$ . Pour un point  $x$  de  $\mathbb{Z}^2$ , la *boule de centre  $x$  et de rayon  $r$*  est l'ensemble des points à distance inférieure à  $r$  de  $x$ , i.e.,  $\mathcal{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{Z}^2, \|x - y\| \leq r\}$ . Pour un sous-ensemble  $\mathbf{E}$  de  $\mathbb{Z}^2$ , nous notons  $\mathcal{B}(\mathbf{E}, r)$  l'union des boules de rayon  $r$  centrées en un point de  $\mathbf{E}$ , i.e., l'ensemble  $\bigcup_{x \in \mathbf{E}} \mathcal{B}(x, r)$ . Un exemple de cette norme et des boules engendrées est donné sur la Figure 1.2.



$$\|A - B\| = 13$$

$$\|B\| = 7$$

FIGURE 1.2 – Norme et boules sur  $\mathbb{Z}^2$

## 1.2 Motifs et relations entre motifs

Une notion qui est fondamentale tout au long de ce manuscrit est celle de motif ; les configurations ne peuvent pas forcément être décrites de manière simple car ce sont des objets infinis. Les motifs, que nous voyons comme des coloriage de parties finies de  $\mathbb{Z}^2$  tels que représentés sur la Figure 1.3, sont les objets de base qui nous servent à exprimer des contraintes géométriques :

**Définition 1.4** (Motif). *Un motif  $\mathbf{P}$  est une application d'un sous-ensemble fini de  $\mathbb{Z}^2$  dans  $\mathbf{Q}$ . Nous noterons  $\mathcal{D}_{\mathbf{P}}$  son domaine de définition.*

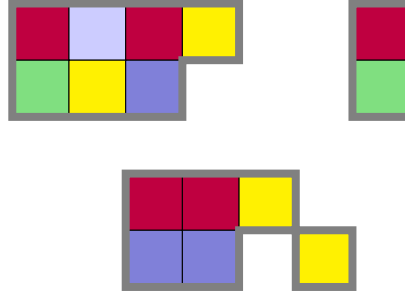


FIGURE 1.3 – Exemple de motifs sur  $\mathbb{Z}^2$

La notion d'apparition d'un motif dans une configuration est tout aussi fondamentale ; tout comme les configurations, les motifs ne sont pas définis à décalage près. Puisque notre étude se porte essentiellement sur les ensembles invariants par translation, il devient alors naturel de considérer l'apparition d'un motif dans une configuration sans se soucier de sa position. On dit que la configuration  $c$  contient le motif  $\mathbf{P}$  (ou que  $\mathbf{P}$  apparaît dans  $c$ ) s'il existe un élément  $v \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $\mathbf{P}$  apparaisse à la position  $v$  dans  $c$ , i.e.,  $\sigma_v(c)|_{\mathcal{D}_{\mathbf{P}}} = \mathbf{P}$ . Nous dirons que le motif  $\mathbf{P}$  est *omis* ou *absent* de  $c$  s'il n'apparaît pas dans  $c$ .

En tant qu'applications à support fini, les motifs se prêtent bien à des opérations algébriques telles que l'union ou l'intersection. Bien entendu, ces opérations ne sont pas toujours bien définies. Il nous faut tout d'abord nous assurer que deux motifs ne définissent pas deux couleurs différentes pour le même point avant d'aller plus loin :

**Définition 1.5** (Compatibilité de motifs). *On dit que deux motifs  $\mathbf{M}_1$  et  $\mathbf{M}_2$  sont compatibles lorsqu'ils coïncident sur leur ensemble de définition, i.e. :*

$$\mathbf{M}_1|_{\mathcal{D}_{\mathbf{M}_1} \cap \mathcal{D}_{\mathbf{M}_2}} = \mathbf{M}_2|_{\mathcal{D}_{\mathbf{M}_1} \cap \mathcal{D}_{\mathbf{M}_2}}$$

Lorsque cette condition de compatibilité est vérifiée nous pouvons définir l'intersection de deux motifs qui donne un troisième motif défini sur le domaine commun aux deux premiers et définissant les mêmes couleurs tel que représenté sur la Figure 1.4.

**Définition 1.6** (Intersection de motifs). *Soient  $\mathbf{M}_1$  et  $\mathbf{M}_2$  deux motifs compatibles, on note  $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2$  le motif défini sur  $\mathcal{D}_{\mathbf{M}_1} \cap \mathcal{D}_{\mathbf{M}_2}$  par  $\mathbf{M}_1|_{\mathcal{D}_{\mathbf{M}_1} \cap \mathcal{D}_{\mathbf{M}_2}}$  ( $= \mathbf{M}_2|_{\mathcal{D}_{\mathbf{M}_1} \cap \mathcal{D}_{\mathbf{M}_2}}$ ).*

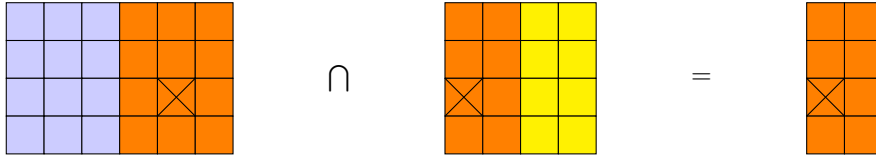


FIGURE 1.4 – Exemple d'intersection de deux motifs.

De même que pour l'intersection, nous pouvons recoller deux motifs compatibles en considérant l'union des points définis par chacun des deux premiers tel que représenté sur la Figure 1.5 :

**Définition 1.7** (Union de motifs). Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux motifs compatibles. On note  $M_1 \cup M_2$  le motif :

$$x \mapsto \begin{cases} M_1(x) & \text{si } x \in \mathcal{D}_{M_1} \\ M_2(x) & \text{si } x \in \mathcal{D}_{M_2} \end{cases}$$

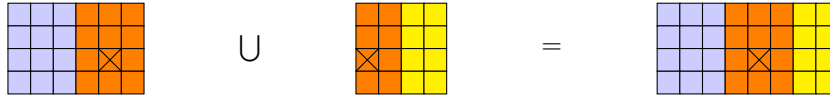


FIGURE 1.5 – Exemple d'union de deux motifs.

On remarque que ces opérations d'union et d'intersection de motifs dépendent de la position de l'origine : elles ne sont pas définies à décalage près.

Une relation naturelle entre les motifs est celle de sous-motif : un motif est sous-motif d'un autre s'il définit moins de points. Cette notion est considérée à décalage près tel que représenté sur la Figure 1.6.

**Définition 1.8** (Sous-motif). On dit qu'un motif  $M$  est un sous-motif d'un motif  $N$ , noté  $M \sqsubseteq N$  si  $M$  apparaît dans  $N$ , i.e. :

$$\exists v \in \mathbb{Z}^2, \sigma_v(N)|_{\mathcal{D}_M} = M$$

Cette notion de sous-motif est naturelle dans notre cadre dans le sens où, si une configuration contient un motif alors elle contient aussi tous ses sous-motifs. Lorsque nous construisons des motifs de plus en plus grands pour la relation de sous-motif, la limite de ces motifs, si nous pouvons lui donner un sens, ne définit pas forcément une configuration. Pour pallier à ce problème nous avons besoin de définir la notion d'extension omnidirectionnelle :

**Définition 1.9** (Extension omnidirectionnelle). On dit qu'un motif  $N$  est une extension omnidirectionnelle d'un motif  $M$ , noté  $M \ll N$ , lorsqu'il existe  $v \in \mathbb{Z}^2$  tel que :

$$\sigma_v(N)|_{\mathcal{D}_M} = M \text{ et } \mathcal{B}(\mathcal{D}_M, 1) \subseteq \mathcal{D}_{\sigma_v(N)}$$

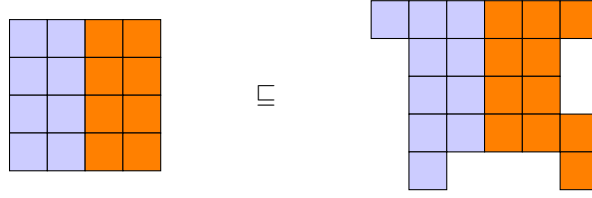


FIGURE 1.6 – Exemple d'un motif qui est sous-motif d'un autre

L'idée derrière cette notion d'extension omnidirectionnelle est simple : si l'on a une suite de motifs  $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$  avec  $M_i \ll M_{i+1}$ , alors il existe une suite  $v = (v_i)_{i \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathbb{Z}^2$  telle que  $\sigma_{v_{i+1}}(M_{i+1})|_{\mathcal{D}_{\sigma_{v_i}(M_i)}} = \sigma_{v_i}(M_i)$  et  $\mathcal{B}(\mathcal{D}_{\sigma_{v_i}(M_i)}, 1)$  soit contenue dans  $\mathcal{D}_{\sigma_{v_{i+1}}(M_{i+1})}$ . On peut définir une configuration  $c_v^M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \sigma_{v_i}(M_i)$ . Puisque chaque motif est centré comme il se doit, de sorte à être compatible avec les motifs précédents, chaque point est défini au plus une fois. Comme l'union des ensembles de définition de tous les  $M_i$  recouvre le plan, tout point du plan est bien défini. Un exemple de deux motifs dont l'un est une extension omnidirectionnelle de l'autre est représenté sur la Figure 1.7.

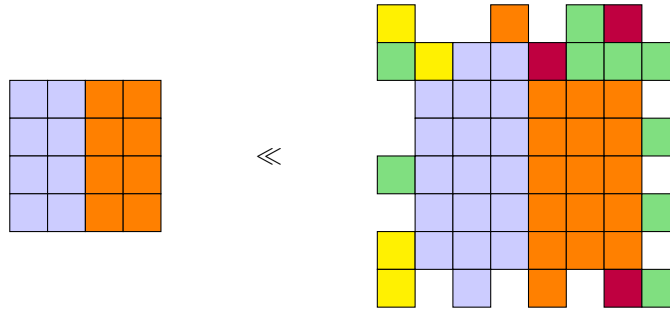


FIGURE 1.7 – Exemple d'un motif qui est extension omnidirectionnelle d'un autre

### 1.3 Tuiles de Wang

La première formalisation des pavages faite par Hao Wang [Wan61] était faite avec ce que nous appelons aujourd'hui des tuiles de Wang. Bien que ce formalisme ne soit pas forcément adapté à l'étude faite dans ce manuscrit, il reste de loin le plus utilisé dans la littérature. Nous n'utilisons que très rarement ce formalisme mais montrons que les autres formalismes peuvent se ramener facilement aux tuiles de Wang. Ces équivalences nous permettent d'utiliser dans notre cadre des résultats classiques qui ont été initialement formalisés avec des tuiles de Wang.

Une tuile de Wang est une tuile carrée sur laquelle chaque bord a une couleur tel que représenté sur la Figure 1.8. Dans un pavage nous n'avons le droit de poser côte à côte deux tuiles que si les couleurs sur leurs côtés adjacents sont identiques. Tel que représenté sur la Figure 1.9, l'ensemble des tuiles de Wang définissant un jeu de tuiles est vu comme l'ensemble  $\mathcal{Q}$ , que nous avons appelé couleurs auparavant. Cet ensemble est fini par définition et ainsi un pavage du plan par cet ensemble de tuiles est un agencement des tuiles tel que les côtés adjacents aient la même couleur.

Les tuiles de Wang présentées sur la Figure 1.8 sont celles inventées et décrites par J. Kari et K. Culik II. dans [CK97, Cul96, Kar96].



FIGURE 1.8 – Exemple d'un jeu de tuiles de Wang

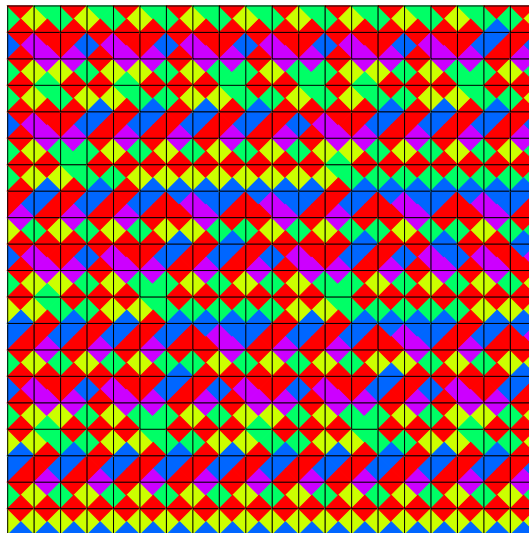


FIGURE 1.9 – Exemple d'un carré pavé par les tuiles de Wang de la Figure 1.8

## 1.4 Motifs interdits

Dans ce manuscrit, nous utiliserons souvent une autre façon de définir les pavages : nous considérons des ensembles de motifs interdits.

**Définition 1.10.** *Un ensemble de motifs interdits  $\mathcal{F}$  est un ensemble de motifs, une configuration est valide pour  $\mathcal{F}$  si elle ne contient aucun des motifs de  $\mathcal{F}$ .*

*Nous notons  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  l'ensemble des configurations valides pour  $\mathcal{F}$ .*

*Un ensemble de configurations est appelé un espace de pavages généralisé lorsqu'il existe un ensemble de motifs interdits (non nécessairement fini) le définissant.*

**Définition 1.11** (Espace de pavages). *Si  $\mathcal{F}$  est un ensemble fini de motifs,  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  est aussi appelé un espace de pavages par  $\mathcal{F}$ .*

Par exemple, pour l'ensemble fini de motifs interdits représenté sur la Figure 1.10, son espace de pavages associé est celui représenté sur la Figure 1.11.

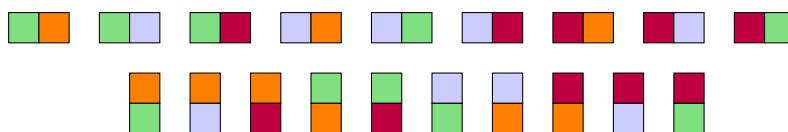


FIGURE 1.10 – Exemple de motifs interdits

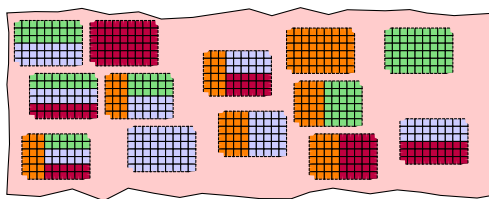


FIGURE 1.11 – Exemple d'un ensemble de pavages par les motifs interdits représentés sur la Figure 1.10

Les espaces de pavages généralisés sont strictement plus expressifs que les espaces de pavages. On peut trouver des ensembles infinis de motifs définissant un espace de pavages généralisé qui ne soit pas un espace de pavages. Prenons par exemple  $\mathbf{Q} = \{\square, \blacksquare\}$  et  $\mathcal{F}$  égal à tous les motifs contenant au moins deux points  $\blacksquare$ . L'espace de pavages généralisé défini par cet ensemble de motifs interdits, représenté sur la Figure 1.12, est l'ensemble des configurations contenant au plus un point  $\blacksquare$ . Un ensemble de motifs interdits définissant le même ensemble de configurations ne peut pas contenir de motif constitué uniquement de points  $\square$ . Si l'on suppose cet ensemble fini alors il existe un motif contenant deux points  $\blacksquare$  qui est autorisé (car il existe une infinité de tels motifs) et par conséquent l'espace de pavages qu'il définit contient une configuration

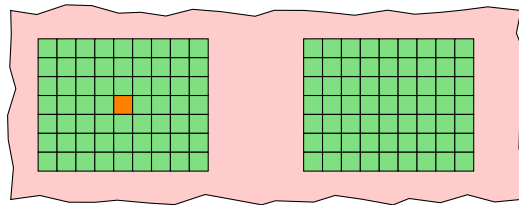


FIGURE 1.12 – Exemple d'un espace de pavages généralisé qui n'est pas un espace de pavages

contenant deux points  $\blacksquare$ . En conclusion, il existe des espaces de pavages généralisés qui ne sont pas des espaces de pavages.

Il est aisé d'encoder les tuiles de Wang dans ce modèle. L'ensemble des motifs interdits est l'ensemble des couples de tuiles de Wang mises côte à côte et dont les côtés adjacents n'ont pas la même couleur. Cet ensemble de motifs interdits ainsi défini est fini car il n'y a qu'un nombre fini de tuiles de Wang ; l'espace de pavages qu'il définit est égal à l'ensemble des pavages possibles par les tuiles de Wang originales.

Le codage inverse est, lui aussi, possible mais n'est pas aussi direct : le formalisme des tuiles de Wang ne permet d'exprimer que des contraintes sur des motifs constitués de deux cellules mises côte à côte. En revanche, puisque nous considérons un ensemble fini de motifs interdits, ils sont de taille bornée, mettons par  $n \times n, n \geq 2$ . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que tous les motifs interdits de  $\mathcal{F}$  sont définis sur  $n \times n$  et nous pouvons considérer  $\mathbf{Q}' = \mathbf{Q}^{n \times n} \setminus \mathcal{F}$  ; la couleur du haut d'une tuile de Wang  $t \in \mathbf{Q}'$  est définie par les  $n - 1$  lignes du haut, celle de gauche par les  $n - 1$  colonnes de gauche, celle du bas par les  $n - 1$  lignes du bas et enfin celle de droite par les  $n - 1$  colonnes de droite. Cette transformation d'un motif autorisé en tuile de Wang est représentée sur la Figure 1.13.

Maintenant pour une configuration de tuiles de Wang  $c' \in (\mathbf{Q}')^{\mathbb{Z}^2}$ , nous lui associons une configuration  $c \in \mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  en projetant chaque point de  $c'$  selon son coin inférieur gauche, c'est-à-dire, pour  $x \in \mathbb{Z}^2$ ,  $c'(x) \in \mathbf{Q}' \subseteq \mathbf{Q}^{n \times n}$  et  $c(x) = c'(x)(0, 0)$ . Pour un pavage  $c'$  par les tuiles de Wang ainsi décrites, son projeté  $c$  est une configuration de  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$ .  $c'$  est un pavage valide pour les tuiles de Wang si et seulement si  $c$  ne contient aucun motif de  $\mathcal{F}$ .

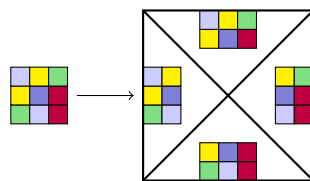


FIGURE 1.13 – Exemple transformation d'un motif autorisé en tuile de Wang



## 1.5 Contraintes locales et automates cellulaires

Une dernière façon de définir les pavages que nous présentons ici est celle par contraintes locales [CD04]. Ce formalisme a un point de vue plus axé vers la vérification des contraintes : on vérifie localement, en chaque point, que les contraintes sont valides. La vérification est faite de façon uniforme sur tout le plan.

**Définition 1.12** (Contraintes locales). *Une contrainte locale est une paire  $\tau = (\mathbf{V}, \delta)$ , où  $\mathbf{V}$  est un sous-ensemble fini de  $\mathbb{Z}^2$  appelé le voisinage.  $\delta$  est la fonction de contrainte de  $\mathbf{Q}^{\mathbf{V}}$  dans  $\{0, 1\}$ .*

L'idée de cette définition est simple : on fixe une taille de motifs et on associe à chaque motif défini sur ce domaine fixé une valeur dans  $\{0, 1\}$  qui représente le fait que le motif soit, respectivement, autorisé ou interdit d'apparaître dans un pavage. La contrainte locale  $\tau = (\mathbf{V}, \delta)$  s'étend naturellement en une fonction de contraintes globale :  $\Delta_\tau : \mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$  en l'appliquant en chaque point du plan :  $\Delta_\tau(c)(x) = \delta((c+x)|_{\mathbf{V}})$ .

**Définition 1.13** (Pavages par contraintes locales). *Une configuration  $c \in \mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  est valide pour la contrainte locale  $\tau = (\mathbf{V}, \delta)$  lorsqu'elle satisfait la contrainte locale en tout point. Nous dirons qu'une telle configuration est un pavage par  $\tau$ .*

On note  $\mathbf{T}_\tau$  l'ensemble des configurations valides pour la contrainte locale  $\tau$ . On a :

$$\mathbf{T}_\tau = \Delta_\tau^{-1}(\bar{0})$$

avec  $\bar{0}$  représentant la configuration (uniforme) ayant pour valeur 0 en tout point.

On s'aperçoit que c'est vraiment la même chose que la définition par motifs interdits : on obtient une fonction qui associe à des motifs une valeur 0 ou 1 par la fonction de contrainte, ainsi les motifs à valeur 1 sont interdits. Réciproquement, pour un ensemble fini de motifs interdits, qui sont donc de taille bornée, il suffit de considérer un voisinage englobant tous les domaines de définition de ces motifs et d'associer une valeur 0 si un tel motif ne contient pas de motif interdit, 1 sinon.

La fonction  $\Delta_\tau$  est une fonction par blocs (voir [LM95, Chapitre 1, Paragraphe 5]), c'est-à-dire un automate cellulaire mais dont l'espace d'arrivée n'est pas le même que l'espace de départ) de  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  dans  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$ . Par exemple cette vision des pavages permet de déduire l'indécidabilité de la réversibilité d'un automate cellulaire sur  $\mathbb{Z}^2$  de l'indécidabilité de la pavabilité du plan [Kar90].

De ce point de vue nous pouvons aussi déduire une équivalence avec le monde des automates cellulaires : les espaces de pavages correspondent aux points fixes des automates cellulaires. En effet, l'ensemble des points fixes est facilement codé par une telle contrainte locale : considérer le même voisinage et les points tels que  $\delta(V(x)) = x$  s'envoient sur 0, les autres sur 1. Une contrainte locale est tout aussi facilement codée en automate cellulaire : si la contrainte n'est pas vérifiée alors on change d'état.

## 1.6 Régularité

Nous en avons désormais fini avec les diverses façons possibles de formaliser les contraintes géométriques servant à définir les pavages, et pouvons maintenant étudier les propriétés des pavages eux-mêmes.

Les configurations les plus régulières sont les configurations monochromes, ou constantes, mais ne sont guère intéressantes. Une autre notion de forte régularité d'une configuration est la périodicité : toutes les couleurs sont répétées périodiquement selon le même vecteur.

**Définition 1.14** (Périodicité selon un vecteur). *On dit qu'une configuration  $c$  est périodique selon le vecteur  $v$  si  $\sigma_v(c) = c$ .*

On remarque que le vecteur nul  $(0, 0)$  est toujours une période par définition. Nous dirons qu'une configuration a une *direction de périodicité* s'il existe un vecteur non nul tel qu'elle soit périodique selon ce vecteur.

Il est naturel de considérer l'ensemble des vecteurs selon lesquels une configuration est périodique. Pour une configuration  $c$  nous appelons *l'ensemble de périodes* de  $c$  le sous-ensemble de  $\mathbb{Z}^2$ , noté  $\mathcal{P}_c$ , constitué des vecteurs selon lesquels  $c$  est périodique.

On remarque que  $\mathcal{P}_c$  est un sous-groupe de  $\mathbb{Z}^2$  car  $\sigma$  définit une action de  $\mathbb{Z}^2$  sur  $\mathcal{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  :  $\sigma_{v+w} = \sigma_v \circ \sigma_w$ . Les sous-groupes de  $\mathbb{Z}^2$  sont des sous-réseaux et de trois types :

- Réduits au sous-groupe trivial,  $\mathcal{P}_c = \{(0, 0)\}$ , lorsque  $c$  n'admet aucun vecteur de périodicité
- Engendrés par un seul élément,  $\mathcal{P}_c = v\mathbb{Z}$ , lorsque  $c$  n'admet qu'une seule direction de périodicité
- $\mathcal{P}_c = v\mathbb{Z} \oplus w\mathbb{Z} = \{(iv, jw) | i, j \in \mathbb{Z}\}$ , lorsque  $c$  admet deux directions de périodicité non colinéaires.

La plus forte notion de périodicité est donc lorsqu'une configuration admet deux vecteurs de périodicité libres :

**Définition 1.15** (Bipériodicité). *On dit qu'une configuration est bipériodique ou totalement périodique si elle est constituée d'un motif carré répété périodiquement.*

*Plus formellement :  $c$  est bipériodique s'il existe un entier non nul  $i$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{Z}^2$  on ait :  $c(x + (i, 0)) = c(x + (0, i)) = c(x)$ .*

*Dans ce cas on dit que  $c$  est bipériodique de bipériode  $i$ .*

Un exemple de configuration bipériodique est représenté sur la Figure 1.14. Il est aisé de prouver que cette définition est équivalente au fait d'avoir deux directions de périodicité non colinéaires.

Un résultat datant du début de l'étude formelle des pavages nous permet de déduire l'existence de pavages périodiques à partir d'un pavage admettant une direction de périodicité :

**Lemme 1.16** (Folklore). *Si un ensemble de pavages  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  contient une configuration avec une direction de périodicité alors  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  contient une configuration bipériodique.*

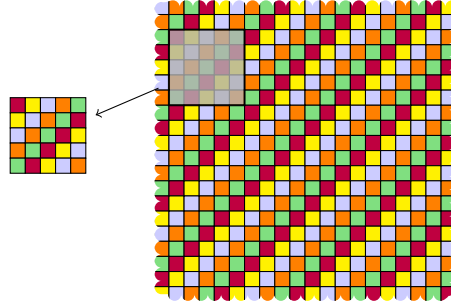


FIGURE 1.14 – Exemple de configuration bipériodique avec son motif répété périodiquement

*Démonstration.* L'ensemble  $\mathcal{F}$  des motifs interdits étant fini, nous pouvons les supprimer tous définis sur le même ensemble de définition :  $n \times n$ , pour un certain entier  $n$ .

Soit  $c$  une configuration de  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  ayant  $v = (x, y)$  comme vecteur de périodicité; sans perte de généralité, quitte à prendre  $2nv$  comme vecteur de périodicité pour  $c$ , on peut supposer que  $x$  et  $y$  sont des multiples de  $2n$ . Posons  $\mathbf{Q}' = \mathbf{Q}^{x \times y}$ .

Considérons maintenant la configuration  $c'$  de  $\mathbf{Q}'^{\mathbb{Z}^2}$  qui à  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$  associe le motif de taille  $x \times y$  situé à la position  $(ix, iy + jy)$  dans  $c$ . Ainsi,  $c'$  admet le vecteur  $(1, 0)$  comme vecteur de périodicité. Intuitivement, cette configuration  $c'$  est une rotation et un groupage des cellules de  $c$  de sorte que toutes les lignes horizontales soient les mêmes et que  $c'$  ait des contraintes de tuiles de Wang. Ainsi, nous ne considérons maintenant qu'une ligne horizontale de  $c'$ .

La suite  $(c'(0, j))_{j \in \mathbb{N}}$  est à valeurs dans un ensemble fini ( $\mathbf{Q}' = \mathbf{Q}^{x \times y}$ ) et contient donc deux éléments qui se répètent. Par invariance par décalage, nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $c'(0, 0) = c'(0, b)$ , avec  $b > 0$ .

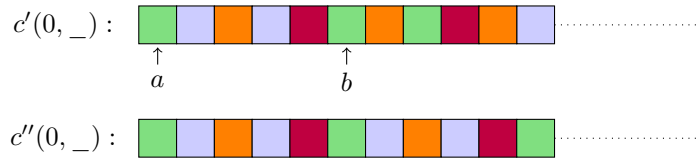


FIGURE 1.15 –  $c'$  : "projeté" de  $c$  et deux cellules qui se répètent;  $c''$  : répétition de  $c'(0, a) \dots c'(0, b - 1)$

On remarque que la configuration  $d$  constituée du motif  $c'(0, 0) \dots c'(0, b - 1)$  répété périodiquement est une configuration valide. Ainsi, nous définissons la configuration  $d'$  comme étant la configuration définie sur  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  obtenue à partir de  $d$  par la transformation inverse de  $c$  vers  $c'$  (i.e., une configuration de  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  qui à  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$  associe  $c'(0, \frac{i-j}{y} \bmod b)(i \bmod x, (i-j) \bmod y)$ ). On vérifie aisément que  $d'$  est une configuration bipériodique. De plus,  $d'$  est bien dans  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  car sinon  $c$  contiendrait

un motif de  $\mathcal{F}$ . □

Attention, lorsque l'on n'impose pas à  $\mathcal{F}$  d'être fini, le Lemme 1.16 n'est plus forcément vrai : il existe des espaces de pavages généralisés avec des configurations admettant un vecteur de périodicité mais ne contenant aucune configuration bipériodique. L'idée est simple : il faut construire un ensemble de motifs interdits sur  $\mathbb{Z}$  pour lesquels il existe des pavages valides mais aucun périodique. Une fois ces pavages unidimensionnels obtenus, il suffit de les répéter périodiquement pour obtenir le contre-exemple voulu. Il existe de tels ensembles de motifs interdits sur  $\mathbb{Z}$  : par exemple, pour  $\mathbf{Q} = \{a, b\}$ , prenons  $\mathcal{F}$  comme l'ensemble de tous les cubes sur  $\mathbf{Q}^*$  (les mots de la forme  $www$ ). Puisque la suite de Thue-Morse est un mot infini à deux lettres ne contenant aucun cube (voir par exemple [Lot83]), il existe des pavages valides pour  $\mathcal{F}$  et il est clair qu'aucun d'entre eux n'est périodique puisqu'aucun ne contient de cube. En forçant une direction de périodicité verticale et en gardant ces contraintes horizontales, *i.e.*, en remontant en dimension 2, on obtient le contre-exemple voulu.

Comme nous l'avons fait pour démontrer le Lemme 1.16, il sera parfois utile de descendre en dimension 1 pour représenter les configurations admettant une direction de périodicité. Nous définissons pour cela la notion de projection perpendiculairement à un vecteur (de périodicité). Pour une configuration  $c$  qui n'a qu'une seule direction de périodicité, ceci correspond à quotienter  $\mathbb{Z}^2$  par  $\mathcal{P}_c$ , à considérer la configuration  $c'$  définie sur  $\mathbb{Z}^2/\mathcal{P}_c$  et si  $f$  est l'injection canonique de  $\mathbb{Z}^2/\mathcal{P}_c$  dans  $\mathbb{Z}^2$ , alors  $c'(a) = c(f(a))$ . Il ne reste plus qu'à appliquer la rotation et le groupage nécessaires pour définir  $c'$  sur  $\mathbb{Z}$  au lieu de  $\mathbb{Z}^2/\mathcal{P}_c$  :

**Définition 1.17.** Soit  $c$  une configuration de  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  périodique selon le vecteur  $v = (x, y) \neq (0, 0)$ . Le projeté perpendiculairement à  $v$  de  $c$  est la configuration  $c'$  de  $(\mathbf{Q}^{2x \times 2y})^{\mathbb{Z}}$  définie par :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbf{Q}^{2x \times 2y} \\ c' : a &\rightarrow c'(a) : \begin{array}{l} [0; 2x - 1] \times [0; 2y - 1] \rightarrow \mathbf{Q} \\ b \rightarrow c(a(y, -x) + b) \end{array} \end{aligned}$$

Un exemple d'une telle projection est représenté sur la Figure 1.16.

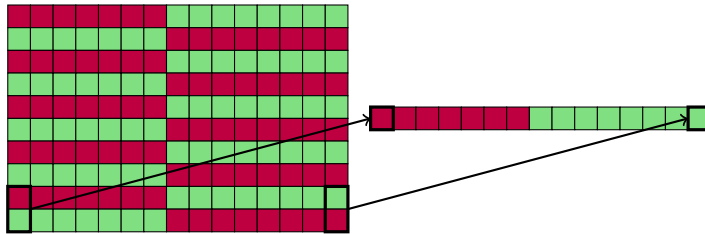


FIGURE 1.16 – Exemple de projection perpendiculairement à un vecteur de périodicité

Une autre notion de régularité pour les configurations est celle de quasi-périodicité. Elle est (strictement) plus faible que la bipériodicité et l’englobe. On retrouve des équivalents de cette notion dans divers domaines : pavage *quasi-périodique* en informatique fondamentale [Dur99], configuration *uniformément récurrentes* ou *presque périodiques* en dynamique symbolique et théorie des langages [GH55, Hed69], et *quasi-cristaux* en physique [LS84].

**Définition 1.18** (Quasi-périodicité). *Une configuration  $c$  est quasi-périodique si tout motif apparaissant dans  $c$  apparaît dans toute zone suffisamment grande.*

*Plus précisément, si un motif  $M$  apparaît dans  $c$  alors il existe un domaine fini  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{Z}^2$  tel que tout motif défini sur  $\mathcal{D}$  qui apparaît dans  $c$  contient  $M$ .*

Il est clair que les configurations bipériodiques sont quasi-périodiques : pour un motif  $M$  de taille  $n \times n$  dans une configuration de bipériode  $p$ , tout motif de taille  $(n+p) \times (n+p)$  contient  $M$ . Le motif, extrait d’un pavage, représenté sur la Figure 1.9 est un exemple d’une configuration quasi-périodique mais pas bipériodique.

## 1.7 Apériodicité et indécidabilité

Lors de l’introduction nous avons défini le *domino problem* : le problème de décider algorithmiquement si un jeu de tuiles admet un pavage du plan  $\mathbb{Z}^2$ . Un résultat (de type compacité, voir la Section 3.1) dit que si l’on est capable de paver des zones arbitrairement grandes de  $\mathbb{Z}^2$  alors on est capable de paver le plan tout entier (voir par exemple le Lemme 3.5). En contraposant, si un jeu de tuiles ne pave pas le plan alors il existe une zone finie de  $\mathbb{Z}^2$  qu’il est impossible de paver. Une conjecture de Wang [Wan61] était que tout jeu de tuiles pavant le plan peut le paver de façon bipériodique ; ainsi un possible algorithme de décision pour le *domino problem* est d’essayer de paver tous les carrés de taille  $n \times n$ , et ce en recollant les bords périodiquement. La conjecture de Wang entraîne la terminaison de cet algorithme. Soit le jeu de tuiles admet un pavage bipériodique et dans ce cas on trouve une période par cet algorithme, soit il ne pave pas le plan et donc on n’arrivera plus à paver un carré  $n \times n$  pour  $n$  suffisamment grand.

Il existe des jeux de tuiles apériodiques [CK97] (qui peuvent paver le plan mais jamais de façon périodique). De tels jeux de tuiles apériodiques sont des contre-exemples à la conjecture de Wang. En fait, le *domino problem* est indécidable. L’indécidabilité du *domino problem* entraîne automatiquement l’existence de jeux de tuiles apériodiques. Nous le prouvons ici en deux étapes : en construisant un jeu de tuiles apériodique puis en codant un problème indécidable dans ce jeu de tuiles. On peut trouver de nombreuses constructions de jeux de tuiles apériodiques plus ou moins complexes dans la littérature [Ber66, Rob71, CK97, Cul96, Kar96, DLS05, DRS08, Kar08, Oll08].

Puisqu’une telle construction sera utilisée et nécessaire à plusieurs reprises dans ce manuscrit, nous présentons dans cette section la construction due à Nicolas Ollinger [Oll08], basée sur des systèmes de substitutions  $2 \times 2$ , qui nous servira de référence dans le reste du manuscrit. Cette construction explicite des idées combinatoires que l’on retrouve de plus en plus développées depuis Berger [Ber64] jusqu’à Durand-Levin-Shen [DLS05].

### 1.7.1 Substitutions

**Définition 1.19** (Substitution  $2 \times 2$ ). Une substitution  $2 \times 2$  est une application de  $\mathbf{Q}$  dans  $\mathbf{Q}^{\{0,1\}^2}$ .

Pour une substitution, nous noterons  $s_i$  pour  $i \in \{0, 1\}^2$  sa projection sur la  $i^e$  composante. Une substitution  $2 \times 2$  avec ses projections est représentée sur la Figure 1.17. Une substitution  $s$  s'étend naturellement en une application  $S$  de  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  dans  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  telle que, pour  $z \in \mathbb{Z}^2$  et  $x \in \{0, 1\}^2$  on ait :

$$S(c)(2z + x) = s_x(c(z))$$

Un exemple de l'application d'une substitution à un motif est représenté sur la Figure 1.18. On remarque que  $S$  commute faiblement avec les translations :  $S(\sigma_v(c)) = \sigma_{2v}(S(c))$ .

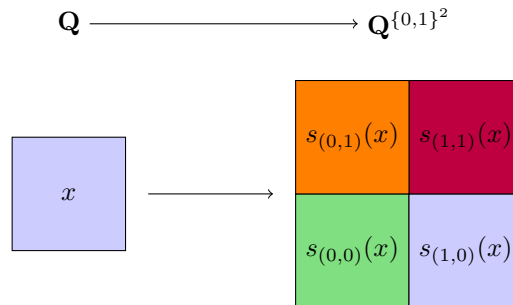


FIGURE 1.17 – Exemple de substitution

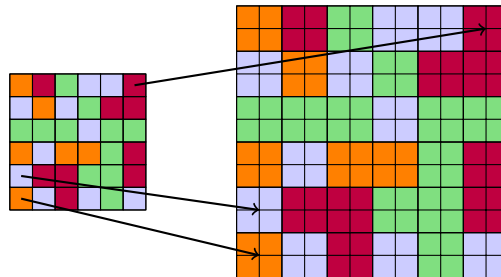


FIGURE 1.18 – Exemple de substitution appliquée à un bout de configuration

Nous pouvons construire le plus grand sous-ensemble de  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  stable par  $S$  en itérant la substitution à partir de  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  :

**Définition 1.20** (Ensemble limite d'une substitution). *Nous itérons la substitution à partir de toutes les configurations :*

- $\Lambda_0 = \mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$
- $\Lambda_{n+1} = \bigcup_{x \in \{0,1\}^2} \sigma_x(S(\Lambda_n))$

$$\mathbf{T}_s = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n$$

C'est cet ensemble  $\mathbf{T}_s$  que nous allons chercher à coder par un jeu de tuiles. Sous certaines conditions sur la substitution  $s$ ,  $\mathbf{T}_s$  ne contient aucune configuration périodique. Nous ne pouvons pas réellement coder  $\mathbf{T}_s$  mais ce que nous allons faire c'est construire un jeu de tuiles défini par un ensemble fini de motifs interdits  $\mathcal{F}$  tel que  $\emptyset \neq \mathbf{T}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathbf{T}_s$ . Cette condition est suffisante pour nous assurer que le jeu de tuiles codant  $s$  est apériodique dans le cas où  $\mathbf{T}_s$  ne contient aucune configuration périodique. Nous y reviendrons au moment opportun mais il sera facile de vérifier cette condition sur  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  : si l'image par la substitution de tout motif apparaissant dans un pavage de  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  est un motif valide pour  $\mathcal{F}$  alors  $S(\mathbf{T}_{\mathcal{F}}) \subseteq \mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  et donc  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathbf{T}_s$  ; de plus, en partant d'un motif réduit à une seule tuile nous pouvons construire un pavage du plan valide pour  $\mathcal{F}$ , ce qui montre  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$ .

Pour obtenir le résultat voulu, nous cherchons donc à construire :

- Une substitution  $s$  telle que  $\mathbf{T}_s$  soit apériodique
- Un ensemble fini de motifs interdits  $\mathcal{F}$  tel que l'image par  $S$  de tout motif apparaissant dans un pavage de  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  soit valide pour  $\mathcal{F}$ .

Concentrons-nous d'abord sur le premier point en montrant une condition suffisante sur la substitution  $s$  pour que  $\mathbf{T}_s$  soit apériodique. Une substitution  $s$  est dite *non-ambiguë* si pour toute configuration  $c$  de  $\mathbf{T}_s$  il existe une unique configuration  $c'$  de  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  et un unique vecteur  $x \in \{0,1\}^2$  tels que  $c = \sigma_x(S(c'))$ .

**Lemme 1.21** ([Oll08]). *Si  $s$  est une substitution non-ambiguë alors  $\mathbf{T}_s$  ne contient aucune configuration périodique.*

*Démonstration.* Par l'absurde, soit  $c$  une configuration périodique de  $\mathbf{T}_s$ , de vecteur de périodicité  $v$ , que l'on peut supposer de norme minimale. Comme  $s$  est non-ambiguë, il existe une unique configuration  $c'$  et un unique élément  $x$  de  $\{0,1\}^2$  tels que  $c = \sigma_x(S(c'))$ . Par construction,  $\sigma_{v+x}(S(c')) = \sigma_x(S(c'))$ . Le vecteur  $v+x$  peut s'écrire  $2v'+x'$  avec  $v' \in \mathbb{Z}^2$  et  $x' \in \{0,1\}^2$  en faisant la division euclidienne par 2 des composantes de  $v+x$ . Puisque  $s$  commute faiblement avec les translations,  $\sigma_{2v'+x'}(S(c')) = \sigma_{x'}(S(\sigma_{v'}(c')))$  et  $\sigma_{v'}(c') = c'$ . Comme  $c$  est dans tous les  $\Lambda_n$ ,  $c'$ , qui est l'unique antécédent de  $c$  par  $S$ , est dans tous les  $\Lambda_{n-1}$ , donc  $c' \in \mathbf{T}_s$ .

Par conséquent,  $v'$  est un vecteur de périodicité strictement plus petit que  $v$  pour une configuration de  $\mathbf{T}_s$ , une contradiction avec le choix de  $v$ .  $\square$

Le Lemme 1.21 nous assure l'apériodicité de l'ensemble limite d'une substitution mais la non-ambiguë n'est pas une condition que nous pouvons vérifier facilement.

**Lemme 1.22** ([DLS05]). *Si une substitution  $s$  est injective et ses projections (les fonctions  $s_x$  pour  $x \in \{0, 1\}^2$ ) ont des images deux à deux disjointes, alors elle est non-ambiguë.*

*Démonstration.* Soit  $c$  une configuration de  $\mathbf{T}_s$ . Comme  $c$  est dans  $\Lambda_1$ , il existe  $a \in \mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  et  $x \in \{0, 1\}^2$  tels que  $c = \sigma_x(S(a))$ . Soit  $a'$  une configuration et  $x'$  un vecteur de  $\{0, 1\}^2$  tels que  $c = \sigma_{x'}(S(a'))$ . Nous avons *a fortiori*  $s_x(a(0, 0)) = s_{x'}(a'(0, 0))$ ; comme les projections de  $s$  ont des images disjointes deux à deux, nous avons forcément  $x = x'$ . Ainsi,  $S(a) = S(a')$ . Puisque  $s$  est injective,  $S$  l'est aussi et nous obtenons  $a = a'$  ce qui prouve la non-ambiguïté de  $s$ .  $\square$

Nous allons coder une substitution vérifiant ces conditions.

## 1.7.2 Codage de substitutions

Nous cherchons à construire une substitution  $s$  et un ensemble fini de motifs  $\mathcal{F}$  tels que :


1. Les fonctions  $s_x$  pour  $x \in \{0, 1\}^2$  ont une image disjointe
2.  $s$  est injective
3. L'image par  $s$  de tout motif valide pour  $\mathcal{F}$  est valide pour  $\mathcal{F}$ .


Nous allons construire un jeu de tuiles en trois niveaux : chacun des niveaux nous assure une de ces trois conditions. Le jeu de tuiles final est un sous-ensemble du produit de ces trois niveaux.


**Définition 1.23** (Premier niveau). *Le premier niveau  $L_1$  est un ensemble de quatre couleurs représenté sur la Figure 1.19 sur lequel nous rajoutons une structure de groupe pour simplifier les notations :*

$$L_1 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$$

$L_1$   
 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$

  
(0, 0)

  
(1, 0)

  
(0, 1)


  
(1, 1)

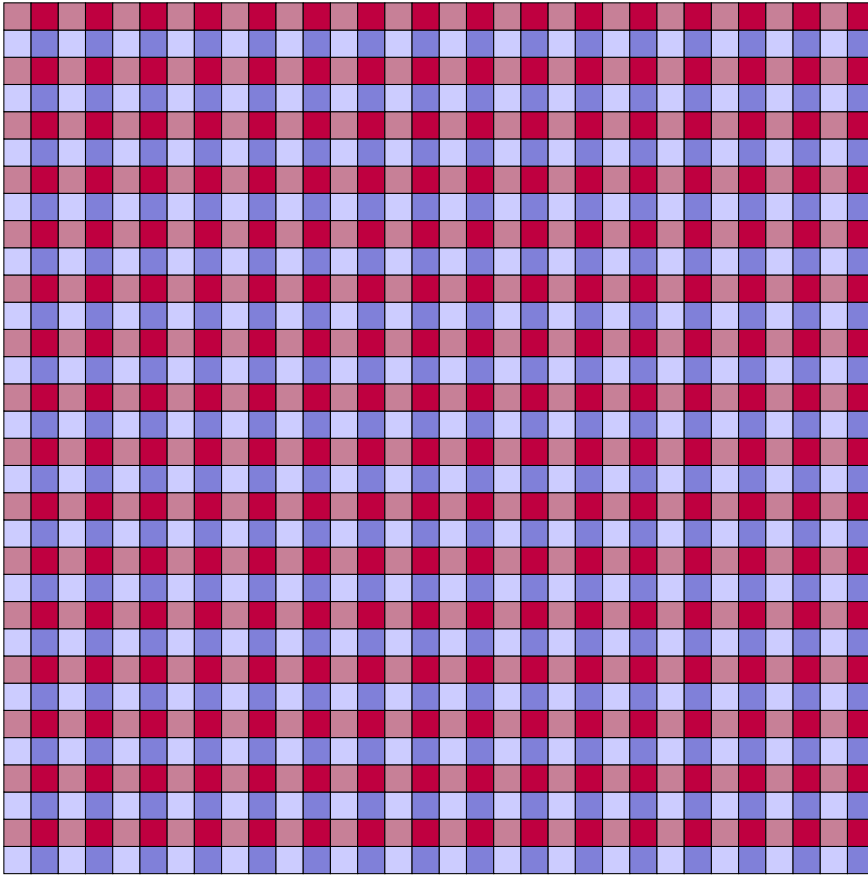
FIGURE 1.19 – Premier niveau

**Définition 1.24** ( $s_1$ ). *La substitution  $s_1$ <sup>1</sup> associée à  $L_1$ , représentée sur la Figure 1.20, est la substitution constante définie formellement comme suit :*

$$s_1(x) = \begin{array}{|c|c|} \hline (0, 1) & (1, 1) \\ \hline (0, 0) & (1, 0) \\ \hline \end{array}$$





FIGURE 1.21 –  $S_1^5(0,0)$ 

celle du quart supérieur droit. Ainsi, les tuiles  $X$  sont uniquement déterminées par la couleur du fil sur leur quart inférieur gauche.

La représentation de ces trois types de tuiles sur la Figure 1.22 nous permet d'exprimer les contraintes d'adjacence pour ces tuiles : elles peuvent être mises côte à côte seulement si les fils qui se touchent sur leur bord adjacent ont la même couleur.

Les fils, c'est-à-dire, les différentes couleurs apparaissant sur ce deuxième niveau  $\mathcal{L}_2$ , servent ainsi à propager les couleurs.

**Définition 1.26** (Tuiles de  $L_2$ ). *L'ensemble de tuiles  $L_2$  est un sous-ensemble du produit du premier niveau  $L_1$  et du deuxième niveau  $\mathcal{L}_2$ .*

$L_2$  est représenté sur la Figure 1.23 et défini formellement comme suit :

$$\begin{aligned} L_2^X &= \{(0,0), (1,1)\} \times \{X(a) | a \in L_1\} \\ L_2^H &= \{(0,0), (1,0)\} \times \{H(a,b) | a, b \in L_1\} \\ L_2^V &= \{(0,0), (0,1)\} \times \{V(a,b) | a, b \in L_1\} \end{aligned}$$

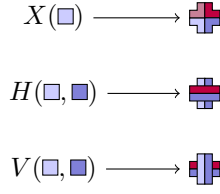


FIGURE 1.22 – Le deuxième niveau

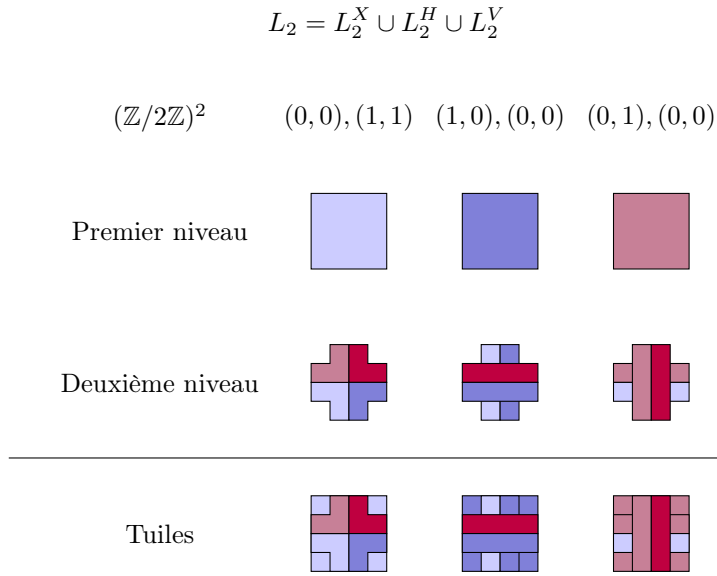


FIGURE 1.23 – Les deux premiers niveaux

**Définition 1.27** ( $s_2$ ). La substitution  $s_2$  associée au deuxième niveau est représentée sur la Figure 1.24 et définie formellement comme suit :

$$\begin{aligned}
 L_1 \times \mathfrak{L}_2 &\rightarrow (L_1 \times \mathfrak{L}_2)^{(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2} \\
 s_2(x, X(m)) &= \begin{array}{|c|c|} \hline ((0, 1), V(m + (0, 1), x)) & ((1, 1), X(x)) \\ \hline ((0, 0), X(m)) & ((1, 0), H(x, m + (1, 0))) \\ \hline \end{array} \\
 s_2(x, H(m, o)) &= \begin{array}{|c|c|} \hline ((0, 1), V(m, x)) & ((1, 1), X(x)) \\ \hline ((0, 0), H(m, o)) & ((1, 0), H(x, o)) \\ \hline \end{array} \\
 s_2(x, V(m, o)) &= \begin{array}{|c|c|} \hline ((0, 1), V(m, x)) & ((1, 1), X(x)) \\ \hline ((0, 0), V(m, o)) & ((1, 0), H(x, o)) \\ \hline \end{array}
 \end{aligned}$$

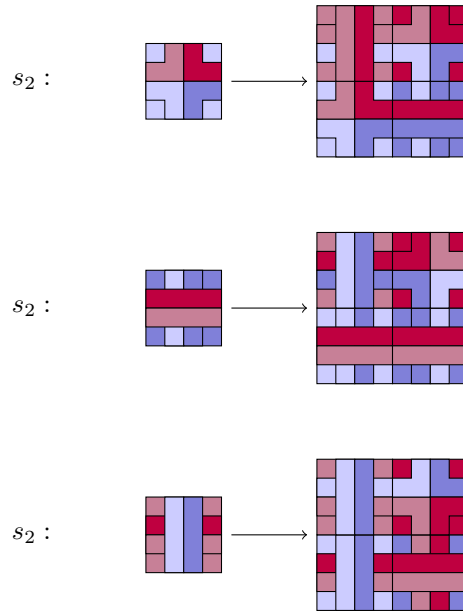


FIGURE 1.24 – Substitution associée au deuxième niveau

Lorsque nous itérons  $s_2$  à partir de  $((0, 0), X((0, 0)))$  (ou graphiquement à partir de  $\blacksquare$ ) nous obtenons des configurations telles que celle représentée sur la Figure 1.25. Les tuiles de  $L_2$  sont exactement toutes les tuiles présentes sur la Figure 1.25.

La substitution  $s_2$  est injective car toutes ses images sont du type :

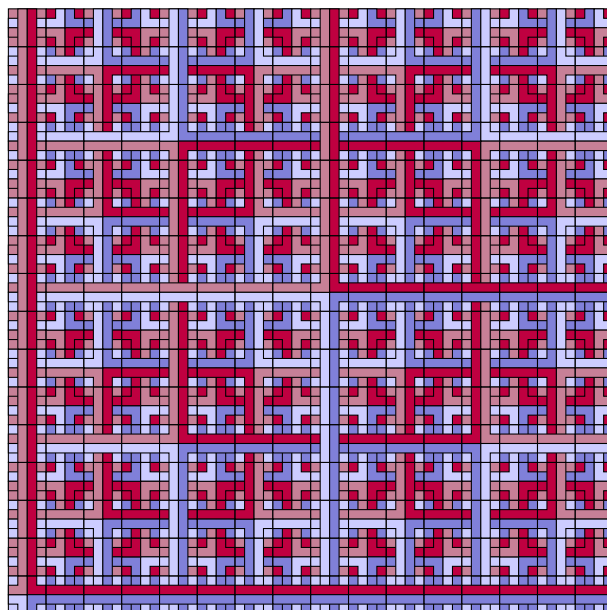
|               |                  |
|---------------|------------------|
| -             | $((1, 1), X(x))$ |
| $((0, 0), K)$ | -                |

et une telle image ne peut avoir qu'un unique antécédent par  $s_2 : (x, K)$ .

Outre les contraintes imposées indépendamment par les deux niveaux et décrites auparavant, la façon dont nous couplons ces deux niveaux impose des contraintes supplémentaires, par exemple, les tuiles de type  $X$  sont forcément adjacentes à des tuiles de type  $H$  ou  $V$ .

Ces contraintes ne sont malheureusement pas encore suffisantes : il existe des motifs  $2 \times 2$  de  $L_2$  valides pour ces contraintes mais n'ayant pas d'antécédent par  $s_2$ . La tuile  $((1, 1), H(m, o))$  est dans  $L_1 \times \mathcal{L}_2$  mais pas dans  $L_2$ . Lorsque on lui applique  $s_2$  nous obtenons un motif  $2 \times 2$  de tuiles de  $L_2$  respectant les contraintes d'adjacence comme représenté sur la Figure 1.26.

Pour résoudre ce problème nous avons besoin d'un troisième niveau : un bit d'information codant où se trouve le coin (une tuile de type  $X$ ) le plus proche. Ce troisième niveau est représenté sur la Figure 1.27 et est couplé à  $L_2$ . Une tuile de type  $X$  a toujours son troisième niveau de type  $x$  (nous sommes sur le coin le plus proche), une

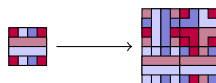
FIGURE 1.25 –  $S_2^4((0, 0), X((0, 0)))$ 

tuile de type  $H$  a un troisième niveau de type  $g$  ou  $d$  (selon si le coin est à gauche ou à droite), une tuile de type  $V$  a un troisième niveau de type  $h$  ou  $b$  (selon si le coin est en haut ou en bas).

Nous pouvons associer une substitution  $s_3$  à ce troisième niveau : celle représentée sur la Figure 1.28 et dont une itération à partir de  $x$  est représentée sur la Figure 1.29.

Les contraintes d'adjacence pour le troisième niveau sont simples : les tuiles horizontales (respectivement verticales) adjacentes horizontalement (respectivement verticalement) doivent être en accord sur la direction où trouver le coin le plus proche ; à gauche (respectivement à droite) d'une tuile verticale ne peut se trouver qu'une tuile  $x$  ou  $g$  (respectivement  $x$  ou  $d$ ) ; en haut (respectivement en bas) d'une tuile horizontale ne peut se trouver qu'une tuile  $x$  ou  $h$  (respectivement  $x$  ou  $b$ ).

$$\notin L_2 \quad \in L_2^{(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2}$$

FIGURE 1.26 – Exemple de motif  $2 \times 2$  n'ayant pas d'antécédent par  $s_2$

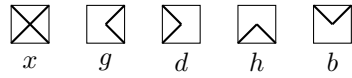


FIGURE 1.27 – Troisième niveau  $L_3$

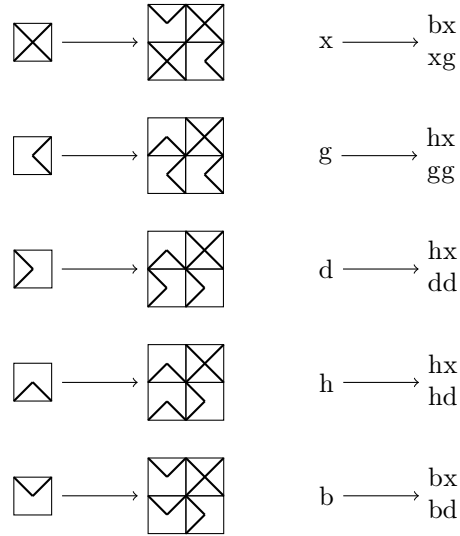


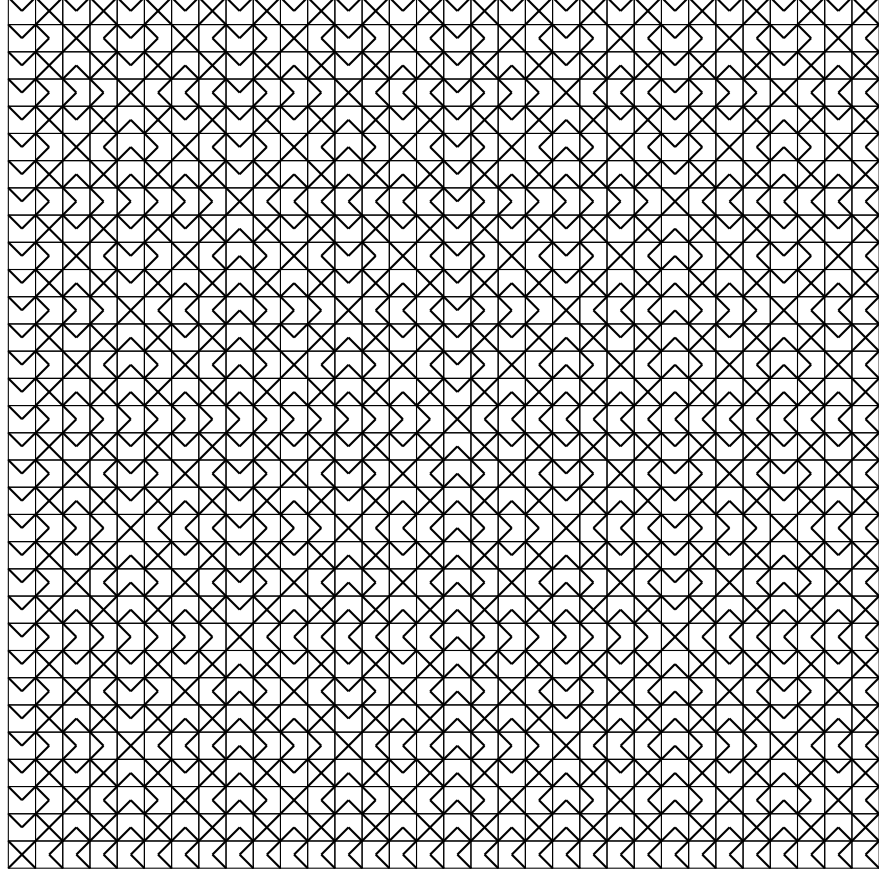
FIGURE 1.28 – Substitution  $s_3$  associée au troisième niveau

Un tel troisième niveau semble ne pas apporter de contrainte supplémentaire et l'exemple de la Figure 1.26 est toujours valide mais nous pouvons prendre un sous-ensemble de  $L_2 \times L_3$  ayant la propriété voulue : lorsque les fils orthogonaux aux fils propageant les couleurs sur des tuiles  $H$  ou  $V$  contiennent une couleur  $(1, 1)$  alors le troisième niveau pointe dans la direction de cette couleur.

**Définition 1.28** ( $S$ ). *La substitution finale  $S$  est définie comme suit :*

$$S : \begin{cases} L_1 \times L_2 \times L_3 & \rightarrow (L_1 \times L_2 \times L_3)^{(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2} \\ (a, b, c) & \rightarrow \{x \rightarrow (s_2(a, b)(x)_1, s_2(a, b)(x)_2, s_3(c)(x))\} \end{cases}$$

L'intuition derrière la définition du jeu de tuiles final  $\tau$  est que l'on va itérer  $S$  à partir de  $((0, 0), X(0, 0), x)$  un certain nombre de fois et prendre comme tuiles toutes les tuiles apparaissant dans le motif obtenu. Le nombre d'itérations est ici 5, comme on le montrera au Lemme 1.33. L'idée est d'obtenir un ensemble de tuiles stable par  $S$  mais surtout dont tous les motifs apparaissant dans un pavage du plan sont obtenus par application de  $S$ .

FIGURE 1.29 –  $S_3^5(x)$ 

**Définition 1.29** (Jeu de tuiles).

$$\tau' = \begin{cases} \{(a, X(b), x) \mid (a, X(b)) \in L_2\} \\ \cup \\ \{(a, H(b, c), x) \mid (a, H(b, c)) \in L_2, x \in \{g, d\}\} \\ \cup \\ \{(a, V(b, c), x) \mid (a, V(b, c)) \in L_2, x \in \{h, b\}\} \end{cases}$$

$$\tau = \tau' \setminus \left\{ \begin{array}{l} (-, V(-, (1, 1)), h), (-, V(-, (1, 0)), b) \\ (-, H((1, 1), -), d), (-, H((0, 1), -), g) \end{array} \right\}$$

Les contraintes d'adjacentes pour  $\tau$  sont celles imposées par les niveaux le constituant : deux tuiles de  $\tau$  peuvent être mises côte à côte seulement si leurs composantes sur  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  peuvent être mises côte à côte.

Le jeu de tuiles  $\tau$  est représenté sur la Figure 1.30, une itération de la substitution finale  $S$  à partir de  $((0, 0), X(0, 0), x)$  est représentée sur la Figure 1.31.

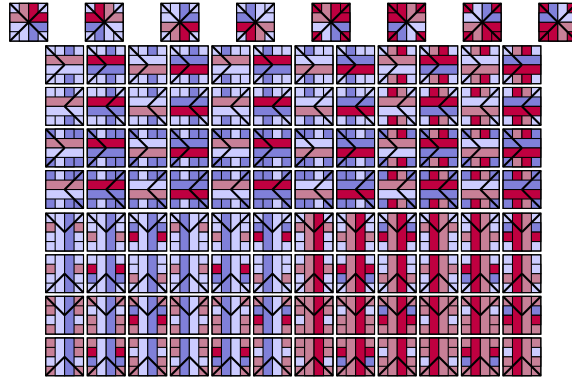


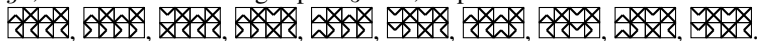
FIGURE 1.30 – 104 tuiles

Nous avons maintenant construit un jeu de tuiles qui est censé coder la substitution  $S$ ; il ne nous reste plus qu'à démontrer que la construction est valide, c'est-à-dire que tous les pavages par  $\tau$  sont bien dans  $\mathbf{T}_s$ .

**Lemme 1.30.** *Un motif  $M$  est pavé correctement par  $\tau$  si et seulement si  $S(M)$  l'est.*

*Démonstration.* Pour un motif constitué d'une seule tuile, nous n'avons qu'à vérifier que l'image par  $s$  respecte bien les contraintes de  $\tau$ . Pour des motifs plus grands nous ne traitons que le cas où les contraintes horizontales ne sont pas respectées; le cas des contraintes verticales étant symétrique.

$\Rightarrow$ : Sur le troisième niveau, les seuls cas possibles sont :  $gg, dd, xg, dx, hd, bd, gh, gb, hx$  et  $bx$ . Leurs images par  $s_3$  sont, respectivement :



On vérifie que les contraintes sont bien respectées dans tous les cas.

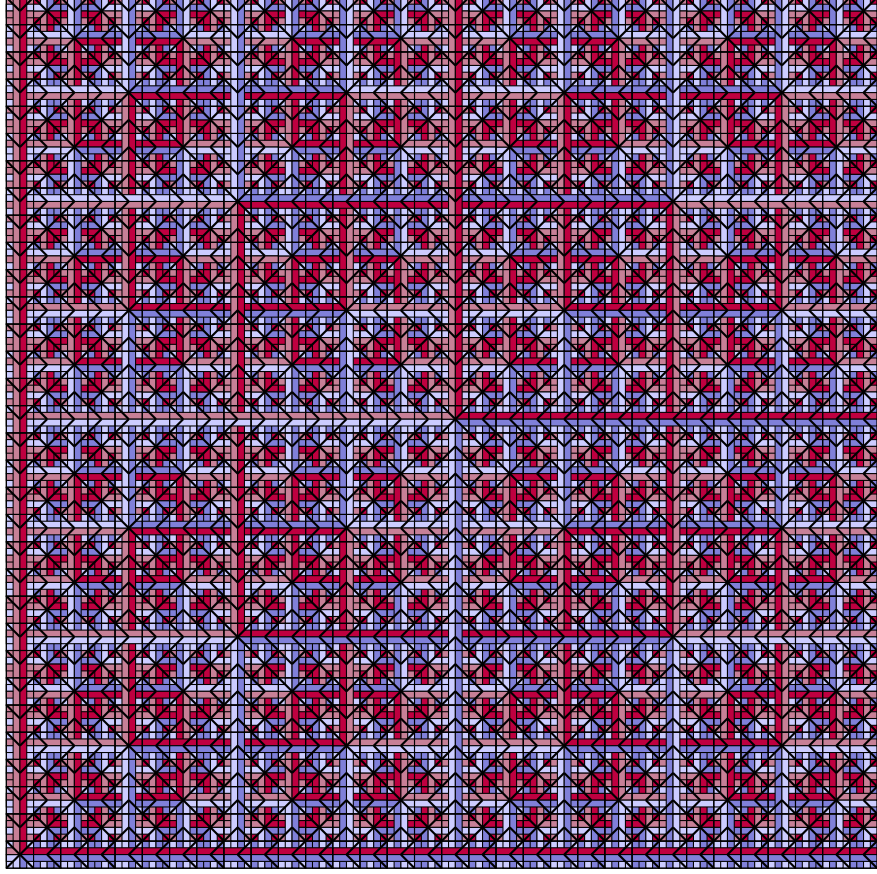
Les contraintes horizontales sur le deuxième niveau sont propagées par  $s$ . Il reste maintenant à vérifier que les nouvelles couleurs introduites par  $s$ , qui ne dépendent que du premier niveau, sont bien compatibles. Le premier niveau est forcément du type  $x; x + (1, 0)$  et donc l'image par  $s$  est du type :

|   |        |                    |                 |
|---|--------|--------------------|-----------------|
| – | $X(x)$ | $V(–, x + (1, 0))$ | $X(x + (1, 0))$ |
| – | –      | –                  | –               |

Et ainsi les contraintes de  $\tau$  sont toujours respectées.

$\Leftarrow$ : De la même façon, pour deux tuiles  $a$  et  $b$  de  $\tau$ , si  $s(a); s(b)$  est valide alors le premier niveau de  $a; b$  est valide. Si les couleurs propagées horizontalement et le troisième niveau dans  $s(a); s(b)$  sont valides alors il en est de même pour  $a; b$  car  $s$  est égal à l'identité en  $(0, 0)$  sur les deuxièmes et troisièmes niveaux.  $\square$



FIGURE 1.31 –  $S^5((0, 0), X(0, 0), x)$ 

**Lemme 1.31.** *Un motif  $M'$  de taille  $4 \times 4$  pavé correctement par  $\tau$  et dont la couleur en  $(1, 1)$  est  $(0, 0)$  contient en position  $(1, 1)$  un motif  $M$  de taille  $2 \times 2$  égal à  $S(x)$  pour un certain  $x \in \tau$ .*

*Démonstration.* Par définition des règles sur le premier niveau,  $M$  est de la forme :


|                    |                     |
|--------------------|---------------------|
| $((0, 1), o, t_3)$ | $((1, 1), X(p), x)$ |
| $((0, 0), m, t_1)$ | $((1, 0), n, t_2)$  |

Nous savons que  $S(p, m, t_1) = M$ ; il nous reste donc à montrer que  $(p, m, t_1)$  est bien dans  $\tau$ .

Premièrement,  $(p, m)$  est dans  $L_2$  : les cas gênants sont  $((1, 1), H)$ ,  $((1, 1), V)$ ,  $((0, 1), H)$  et  $((1, 0), V)$ . Nous n'allons traiter que les cas avec  $H$ , ceux avec  $V$  étant


symétriques. Si  $p = (1, 1)$  et  $m = H(a, b)$ , alors  $\mathbf{M}$  est :

|                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|
| $((0, 1), V(a, (1, 1)))$ | $((1, 1), X((1, 1)))$    |
| $((0, 0), H(a, b))$      | $((1, 0), H((1, 1), b))$ |

et le troisième niveau ne peut être que de la forme  mais les contraintes sur le troisième niveau interdisent ce cas.

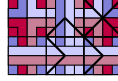
De même pour  $p = (0, 1)$  et  $m = H(a, b)$ , nous obtenons un motif  $\mathbf{M}$  de la forme :

|                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|
| $((0, 1), V(a, (0, 1)))$ | $((1, 1), X((0, 1)))$    |
| $((0, 0), H(a, b))$      | $((1, 0), H((0, 1), b))$ |

et donc un troisième niveau de la forme  donc  $t_1 = d$  et  $\mathbf{M}$  est de la forme :



maintenant, si l'on regarde les tuiles que l'on peut poser autour de  $\mathbf{M}$ , on obtient :



et ainsi les contraintes sur le troisième niveau ne sont plus respectées : la tuile en  $(-1, 0)$  doit avoir son troisième niveau pointant vers la droite mais a une tuile couleur  $(1, 1)$  à gauche sur la ligne verticale ; par conséquent ce cas est impossible donc  $(p, m) \in L_2$  et  $(p, m, t_1) \in \tau'$ .

Ainsi,  $(p, m, t_1) \in \tau$  sinon  $((0, 0), m, t_1)$  ne serait pas dans  $\tau$  non plus.  $\square$

**Corollaire 1.32.** *Tout motif de taille  $2(n + 1) \times 2(n + 1)$  correctement pavé par  $\tau$  contient en son centre un motif  $\mathbf{M}$  de taille  $2n \times 2n$  tel qu'il existe un motif  $\mathbf{M}'$  de taille  $n \times n$  pavé correctement par  $\tau$  tel que  $S(\mathbf{M}') = \mathbf{M}$ .*

*Démonstration.* Appliquer le Lemme 1.31 sur tous les motifs  $4 \times 4$  intérieurs ; la validité pour  $\tau$  de l'antécédent obtenu est assurée par le Lemme 1.30.  $\square$

**Lemme 1.33.** *Toute tuile de  $\tau$  apparaît dans  $S^5((1, 1), X(0, 0), x)$ .*

*Démonstration.* On peut vérifier que l'on observe bien toutes les 104 tuiles de  $\tau$  sur la Figure 1.31.  $\square$

**Corollaire 1.34.** *Pour tout motif  $\mathbf{M}$  apparaissant dans un pavage par  $\tau$  il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathbf{M} \sqsubseteq S^n((1, 1), X(0, 0), x)$ .*

*Démonstration.* Prendre un motif suffisamment grand dans un pavage où apparaît  $\mathbf{M}$  de sorte à pouvoir appliquer successivement le Lemme 1.31 pour obtenir  $m \in \mathbb{N}$  et  $x \in \tau$  tel que  $\mathbf{M} \sqsubseteq S^m(x)$  puis appliquer le Lemme 1.33 pour trouver  $x$  dans  $S^k((1, 1), X(0, 0), x)$  et donc  $n = m + k$  convient.  $\square$

**Théorème 1.35.** *Tous les pavages par  $\tau$  contiennent les mêmes motifs.*

*Démonstration.* Premièrement, il est clair que  $\tau$  ne pave pas le plan si l'on enlève la tuile  $((1, 1), X((0, 0)), x)$  : toutes les tuiles aux positions  $(2i + 1, 2j + 1)$  contiennent une tuile du type  $((1, 1), X, x)$  et la propagation verticale et horizontale des couleurs fait que tous les  $((1, 1), X(x), x)$  apparaissent aux positions  $(1, 1)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(1, 3)$  et  $(3, 3)$ . Par conséquent tout pavage du plan par  $\tau$  contient cette tuile.

Soient  $a$  et  $b$  deux pavages par  $\tau$  et  $\mathbf{M}$  un motif apparaissant dans  $a$ . D'après le Corollaire 1.34, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathbf{M}$  soit sous-motif de  $S^n((1, 1), X(0, 0), x)$ . En appliquant  $n$  fois le Lemme 1.30 sur des motifs suffisamment grands de  $b$  on trouve un pavage par  $\tau$  :  $b'$  tel que  $S^n(b') = b$ . Puisque  $((1, 1), X((0, 0)), x)$  apparaît dans  $b'$ ,  $S^n((1, 1), X(0, 0), x)$  apparaît dans  $b$  et donc  $\mathbf{M}$  apparaît dans  $b$ .

Nous concluons que tout motif apparaissant dans  $a$  apparaît aussi dans  $b$ , ce qui prouve le résultat car  $a$  et  $b$  sont quelconques.  $\square$

**Théorème 1.36** ([Oll08]). *Le jeu de tuiles  $\tau$  est apériodique : il pave le plan et n'admet aucun pavage périodique.*

*Démonstration.*  $\tau$  pave le plan : la suite  $(S^n((0, 0), X(0, 0), x))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de motifs pavés correctement par  $\tau$  (Lemme 1.30) et de taille strictement croissante ; de plus le Lemme 1.30 nous assure que l'image par  $S$  de tout pavage par  $\tau$  est un pavage par  $\tau$ . Par conséquent,  $\emptyset \neq \mathbf{T}_\tau \subseteq \mathbf{T}_s$ .

Comme  $s$  est injective et les images de ses projections sont deux à deux disjointes, elle est non-ambiguë, et ainsi  $\mathbf{T}_s$  ne contient aucune configuration périodique, et donc  $\mathbf{T}_\tau$  non plus.  $\square$

### 1.7.3 Codage du calcul

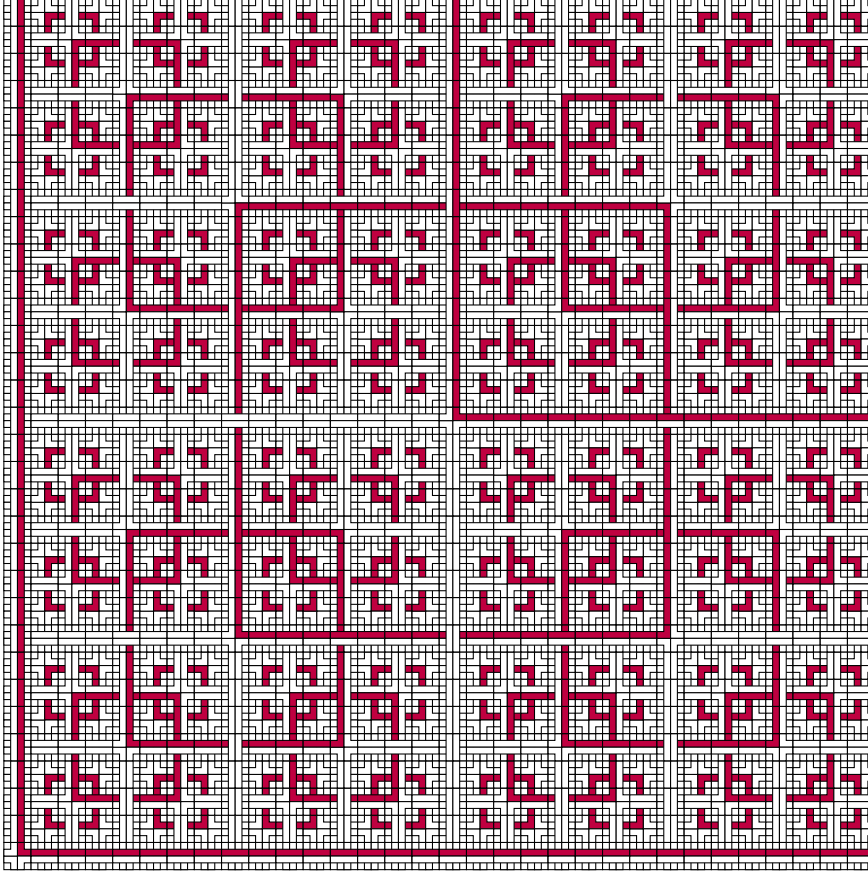
Nous avons désormais construit un jeu de tuiles apériodique. Ce n'est que la première étape de notre preuve d'indécidabilité du *domino problem*. La seconde consiste à encoder une machine de Turing dans ce jeu de tuiles apériodique et ceci se fait, encore une fois, grâce à des substitutions car le jeu de tuiles  $\tau$  permet de coder n'importe quelle substitution en le modifiant légèrement.

Soit  $s'$  une substitution  $2 \times 2$  sur l'alphabet  $\Sigma$ . L'idée est d'utiliser les carrés dont les contours sont  $(1, 1)$  pour propager l'historique de la substitution  $s'$ . Ces carrés  $(1, 1)$  sont représentés sur la Figure 1.32.

Le jeu de tuiles  $\tau(s')$  codant  $s'$  est obtenu à partir de  $\tau$  en remplaçant  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$  par  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times \Sigma$  sur les deux premiers niveaux. Les règles de pavage sont étendues à  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times \Sigma$ .

Les lettres de  $\Sigma$  doivent être égales sur le premier niveau entre les cellules  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  et  $(1, 1)$ , c'est-à-dire un premier niveau ayant sa première composante à valeur  $\square$  impose sa deuxième composante aux cellules à sa droite, en haut, et en haut à droite.

Les tuiles de type  $X$  et  $V$  sont de plus contraintes par  $s'$ . Pour une tuile  $X$ , soit  $a$  la lettre de  $\Sigma$  sur le fil de couleur  $(1, 1)$  du deuxième niveau et  $b$  la lettre de  $\Sigma$  sur son premier niveau. La contrainte est :  $b = s'(a)(u)$  où  $u$  représente la position du fil  $(1, 1)$   $((0, 0)$  pour en haut à droite,  $(1, 0)$  pour en bas à droite,  $(0, 1)$  pour en haut à gauche et  $(1, 1)$  pour en bas à gauche). Pour les tuiles  $V$  ayant deux fils de couleur  $(1, 1)$  sur leur

FIGURE 1.32 – Les carrés  $(1, 1)$  utilisés pour forcer les substitutions

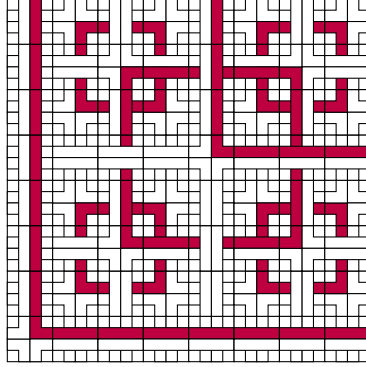
deuxième niveau, soit  $a$  la lettre de  $\Sigma$  sur le fil vertical et  $b$  celle sur le fil horizontal ; la contrainte est :  $b = s'(a)(u)$  où  $u = (x, y)$  dépend de la position des fils ( $x = 0$  pour le fil droit,  $x = 1$  pour le fil gauche,  $y = 0$  pour le fil du bas et  $y = 1$  pour le fil du haut). Soit  $\pi$  la projection de  $\tau(s')$  vers  $\Sigma$  :  $\pi((u, a), -, -) = s'(a)(u)$ .

**Théorème 1.37** ([Oll08]).  $\tau(s')$  code la substitution  $s'$  via la projection  $\pi$  :

$$\pi(\mathbf{T}_{\tau(s')}) = \mathbf{T}_{s'}$$

*Démonstration.* Les tuiles de type  $V$  permettent de synchroniser les carrés  $(1, 1)$  de différentes tailles entre eux tel que représenté sur la Figure 1.33. Puisque le Corollaire 1.34 nous assure que tous les motifs de  $\mathbf{T}_{\tau}$  sont de cette forme, nous obtenons :  $S(\pi(\mathbf{T}_{\tau(s')})) \subseteq \pi(\mathbf{T}_{\tau(s')})$  donc  $\pi(\mathbf{T}_{\tau(s')}) \subseteq \mathbf{T}_{s'}$ .

Un *historique* pour une configuration  $c$  de  $\mathbf{T}_{s'}$  est une suite  $(C_i, v_i)_{i \in \mathbb{N}}$  (où  $C_i \in \mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  et  $v_i \in \{0, 1\}^2$ ) telle que  $c = C_0$  et  $C_i = \sigma_{v_i}(S'(C_{i+1}))$ . Les éléments  $c$  de  $\mathbf{T}_{s'}$

FIGURE 1.33 – Les carrés  $(1, 1)$  utilisés pour forcer les substitutions

admettent tous un historique [Oll08]<sup>2</sup>. En codant  $C_i$  sur les carrés  $(1, 1)$  de taille  $2^i + 1$  nous obtenons  $\mathbf{T}_{s^i} \subseteq \pi(\mathbf{T}_{\tau(s^i)})$ .  $\square$

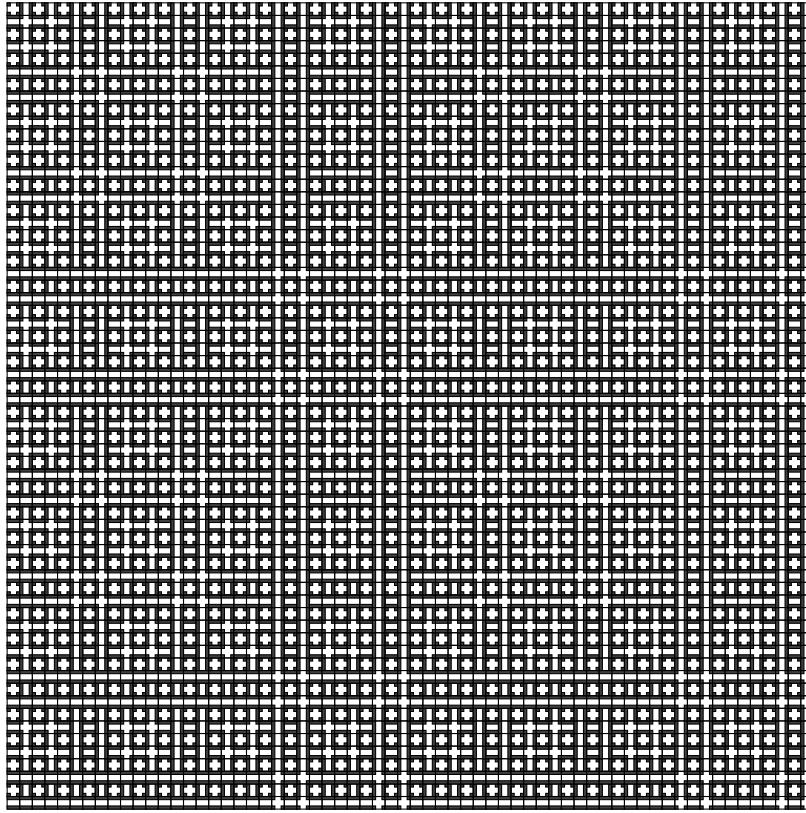
Considérons maintenant la substitution  $\mathfrak{s}$  sur  $\Sigma = \{t, h, v, T, H, V\}$  suivante :

$$\begin{array}{lll} T \rightarrow \begin{array}{cc} t & t \\ t & t \end{array} & H \rightarrow \begin{array}{cc} h & h \\ h & h \end{array} & V \rightarrow \begin{array}{cc} v & v \\ v & v \end{array} \\ t \rightarrow \begin{array}{cc} T & V \\ H & T \end{array} & h \rightarrow \begin{array}{cc} T & V \\ H & H \end{array} & v \rightarrow \begin{array}{cc} T & V \\ H & V \end{array} \end{array}$$

Si l'on représente la lettre  $T$  par  $\blacksquare$ , la lettre  $V$  par  $\blacksquare$  et la lettre  $H$  par  $\blacksquare$  nous obtenons après quelques itérations de  $\mathfrak{s}$  des configurations telles que celle représentée sur la Figure 1.34. On encode cette substitution en  $\tau(\mathfrak{s})$  avec la contrainte additionnelle que seules les lettres  $H, T$  et  $V$  peuvent apparaître sur le premier niveau (ce qui revient à coder  $\mathfrak{s}^2$  qui est une substitution  $4 \times 4$  mais le Théorème 1.37 n'est énoncé que pour les substitutions  $2 \times 2$ ). En projetant par  $\pi_{\mathfrak{s}}$  un pavage par un tel  $\tau(\mathfrak{s})$  les seuls pavages obtenus sont de la forme de ceux représentés sur la Figure 1.34.

Nous pouvons décrire plus précisément les pavages de  $\pi_{\mathfrak{s}}(\mathbf{T}_{\mathfrak{s}})$  : ils contiennent des carrés arbitrairement grands constitués de tuiles  $T$  reliées horizontalement par des tuiles  $H$  et verticalement par des tuiles  $V$ . Ces carrés sont représentés sur la Figure 1.35. Nous pouvons coder un autre jeu de tuiles de Wang dans ces carrés. En effet, les tuiles  $T$  ( $\blacksquare$ ) peuvent contenir des tuiles de Wang en imposant des contraintes de couleurs sur leurs bords. Les tuiles  $H$  ( $\blacksquare$ ) et  $V$  ( $\blacksquare$ ) servent à propager les couleurs : les couleurs sur les bords gauche et droite (respectivement haut et bas) des tuiles  $H$  (respectivement  $V$ ) sont toujours identiques. Ces carrés contiennent  $n \times n$  tuiles  $T$  qui codent le jeu de tuiles initial pour des  $n$  aussi grands qu'on veut. Par conséquent, si le jeu de tuiles codé pave le plan, il existe des carrés  $n \times n$  pavés par le jeu de tuiles initial pour des  $n$  aussi grands qu'on veut. Réciproquement, si l'on sait paver des carrés  $n \times n$

2. Par définition de  $\mathbf{T}_{s^i}$ , nous avons des suites finies de tels historiques de longueur arbitrairement grande. L'existence d'un historique infini est obtenue par compacité.

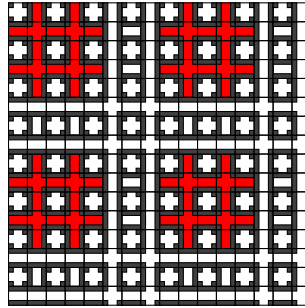
FIGURE 1.34 –  $s^6(T)$ 

par le jeu de tuiles initial, pour des  $n$  arbitrairement grands, le jeu de tuiles codé pave le plan.

De plus, nous pouvons repérer la tuile  $T$  située dans le coin inférieur gauche : c'est la seule tuile  $T$  reliée à gauche à une tuile  $V$  par des tuiles  $H$  et en bas à une tuile  $H$  par des tuiles  $V$  (les autres tuiles  $T$  dans un tel carré ont au moins une de ces deux tuiles qui est une tuile  $T$ ). Ceci nous permet d'imposer la tuile dans le coin inférieur gauche de ces carrés. Ce codage se résume par la proposition suivante :

**Proposition 1.38.** *Nous pouvons coder (récursivement) tout jeu de tuiles  $\mathcal{F}$  par un jeu de tuiles  $s(\mathcal{F})$  tel que  $s(\mathcal{F})$  pave le plan si et seulement si on peut paver le quart de plan  $\mathbb{N}^2$  par  $\mathcal{F}$  avec une tuile fixée en  $(0, 0)$ <sup>3</sup>.*

3. En réalité nous avons seulement montré que nous pouvons paver des carrés arbitrairement grands avec  $\mathcal{F}$  et une tuile fixée dans le coin inférieur gauche, le passage à l'infini ( $\mathbb{N}^2$ ) nécessite un argument de compacité que nous verrons au Chapitre 3. Bien que nous puissions continuer à travailler avec de tels motifs carrés arbitrairement grands, il est plus compréhensible d'exprimer la proposition en termes de pavages de  $\mathbb{N}^2$ .



La partie rouge constitue ce que nous appelons des carrés  $2 \times 2$ .

FIGURE 1.35 – Les carrés de  $s$

Nous nous plaçons désormais dans ce contexte : nous ne considérons plus le jeu de tuiles servant à coder  $T_s$  mais seulement un codage d'un jeu de tuiles ayant les propriétés de la Proposition 1.38. Nous allons maintenant décrire seulement le jeu de tuiles à coder ; la Proposition 1.38 nous assure que le jeu de tuiles initial pave le quart de plan  $\mathbb{N}^2$  en imposant la tuile en  $(0, 0)$  si et seulement si le jeu de tuiles codé pave le plan.

Nous codons une machine de Turing dans un jeu de tuiles pour lequel nous pouvons imposer la tuile en  $(0, 0)$ . Chaque tuile contient la valeur du ruban, deux bits indiquant la position de la tête de la machine de Turing par rapport à la tuile (à gauche, à droite ou ici) et l'état de la machine. Pour une machine fixée, nous avons ainsi un nombre fini de tuiles. Les bits codant la position de la tête par rapport à une tuile nous assurent qu'il n'y a qu'une seule tête par ligne horizontale. En  $(0, 0)$  nous mettons la tuile représentant l'état initial de la machine de Turing et sa tête sur un ruban vide. À droite de l'état initial il n'y a que des tuiles représentant le ruban vide. La première ligne d'un pavage de  $\mathbb{N}^2$  par un tel jeu de tuiles représente ainsi l'état initial de la machine de Turing et de son ruban. À chaque étape du calcul, la tête de la machine de Turing effectue trois actions : elle écrit sur le ruban, elle change son état et elle se déplace à gauche, à droite ou sur la même position. Nous pouvons ainsi forcer, de manière locale, que la  $n^e$  ligne d'un pavage de  $\mathbb{N}^2$  par ce jeu de tuiles représente l'état de la machine de Turing et de son ruban après  $n$  étapes de calcul<sup>4</sup>.

On remplace l'état d'arrêt de la machine par une tuile incompatible avec toutes les autres et ainsi, ce jeu de tuiles pave  $\mathbb{N}^2$  avec la tuile en  $(0, 0)$  fixée si et seulement si la machine codée ne s'arrête pas.

Ceci nous donne, enfin, le théorème voulu :

**Théorème 1.39** ([Ber66]). *Le domino problem est indécidable.*

4. Nous invitons le lecteur qui n'en est pas convaincu à se référer aux nombreuses descriptions détaillées de cette méthode, par exemple [LP81].

### 1.7.4 Extensions de l'indécidabilité

Nous pouvons utiliser cette construction pour obtenir différents résultats d'indécidabilité en plus du *domino problem*. Une des premières constructions dans ce sens fut faite pour montrer que trois classes de jeux de tuiles (ceux pavant le plan mais seulement périodiquement, ceux pavant seulement aperiodiquement et ceux ne pavant pas) sont récursivement inséparables [GK72]. Nous avons légèrement modifié la construction originale [BGG97, Annexe A] pour obtenir des résultats d'inséparabilité que nous allons réutiliser plus tard.

**Proposition 1.40.** *Il existe une fonction récursive qui à une machine de Turing  $M$  associe un jeu de tuiles  $\tau(M)$  tel que :*

- si  $M$  s'arrête dans l'état 1 alors  $\tau(M)$  n'admet que des pavages périodiques ;
- si  $M$  s'arrête dans l'état 2 alors  $\tau(M)$  admet un nombre infini dénombrable de pavages valides ;
- si  $M$  ne s'arrête pas alors l'ensemble des pavages par  $\tau(M)$  peut s'écrire comme l'union disjointe d'un espace de pavages aperiodique et d'un espace de pavages fini.

*Démonstration.* Pour une machine de Turing  $M$ , nous avons seulement besoin d'ajuster la façon dont nous gérons l'état d'arrêt. Plutôt que de l'enlever, ce qui revient à empêcher de paver si la machine ne s'arrête pas, nous forçons les tuiles de sorte à obtenir le résultat voulu. Nous avons besoin de revenir au codage de  $s$  par le jeu de tuiles  $\tau$  puisque ce sont les pavages finaux qui nous intéressent.

Les deux états d'arrêt sont propagés verticalement par les tuiles  $V$  de  $s$  à la différence que nous interdisons qu'une tuile  $V$  propageant les états 1 ou 2 de la machine de Turing rencontre une tuile  $H$  juste au-dessus, au lieu de cela nous rajoutons des nouvelles tuiles  $H(x)^\uparrow, H(x)^\downarrow, V(x)^\rightarrow, V(x)^\leftarrow, T(x)^\nearrow, T(x)^\searrow, T(x)^\swarrow$  et  $T(x)^\nwarrow$  pour  $x \in \{1, 2\}$ . Les contraintes sur les niveaux de codage de  $s$  sont inchangées pour ces nouvelles tuiles et elles respectent les mêmes contraintes que leurs homologues non marquées dans la direction opposée à la flèche mais elles ont les contraintes supplémentaires suivantes :

- au-dessus d'une tuile  $H(x)^\uparrow$  ne peut apparaître qu'une tuile  $H(x)^\downarrow$  ;
- à gauche d'une tuile  $H(x)^\uparrow$  (respectivement  $H(x)^\downarrow$ ) ne peut apparaître qu'une tuile  $H(x)^\uparrow$  ou une tuile  $T(x)^\nwarrow$  (respectivement  $H(x)^\downarrow$  ou  $T(x)^\swarrow$ ) ;
- à droite d'une tuile  $H(x)^\uparrow$  (respectivement  $H(x)^\downarrow$ ) ne peut apparaître qu'une tuile  $H(x)^\uparrow$  ou une tuile  $T(x)^\nearrow$  (respectivement  $H(x)^\downarrow$  ou  $T(x)^\searrow$ ) ;
- au-dessus d'une tuile  $T(x)^\nwarrow$  (respectivement  $T(x)^\nearrow$ ) ne peut apparaître qu'une tuile  $T(x)^\swarrow$  (respectivement  $T(x)^\searrow$ ) ;
- à gauche d'une tuile  $T(1)^\nwarrow$  (respectivement  $T(1)^\swarrow$ ) ne peut apparaître qu'une tuile  $T(1)^\nearrow$  (respectivement  $T(1)^\searrow$ ) ;
- à gauche d'une tuile  $V(1)^\leftarrow$  ne peut apparaître qu'une tuile  $V(1)^\rightarrow$  ;
- à gauche de tuiles  $V(2)^\leftarrow, T(2)^\nwarrow$  et  $T(2)^\swarrow$  ne peut apparaître qu'une nouvelle tuile  $G$  ;
- à droite de tuiles  $V(2)^\rightarrow, T(2)^\nearrow$  et  $T(2)^\searrow$  ne peut apparaître qu'une nouvelle tuile  $D$  ;



- les tuiles  $G$  et  $D$  ne peuvent avoir que les tuiles sus-citées et elles mêmes autour d'elles.

Lorsque la machine  $M$  s'arrête dans l'état 1, si le pavage contient une tuile  $G$  ou  $D$  alors il est monochromatique. Sinon, la construction du jeu de tuiles  $\tau$  sous-jacent force tout motif à être de la bonne forme d'après le Corollaire 1.32 : il est constitué de carrés de taille croissante jusqu'à ce que l'état d'arrêt 1 de la machine apparaisse, dans ce cas le carré dans lequel s'est arrêté le calcul est entouré de tuiles  $H(1)$ ,  $V(1)$  et  $T(1)$  et la seule façon de compléter est de répéter ce carré périodiquement. Dans tous les cas, lorsque la machine s'arrête dans l'état 1, il n'existe que des pavages périodiques.

Lorsque la machine  $M$  s'arrête dans l'état 2, les pavages monochromatiques  $G$  ou  $D$  sont valides mais si une autre tuile apparaît alors le calcul de  $M$  commence pour s'arrêter dans l'état 2 et former un carré entouré par des tuiles  $H(2)$ ,  $V(2)$  et  $T(2)$ . La seule façon de compléter ce carré pour obtenir un pavage valide est de le répéter périodiquement verticalement et de placer un demi-plan de  $G$  à sa gauche et un demi-plan de  $D$  à sa droite. Lorsque la machine  $M$  s'arrête dans l'état 2 il existe ainsi un nombre infini dénombrable de pavages.

Lorsque la machine  $M$  ne s'arrête pas, l'espace de pavages fini est constitué des pavages monochromatiques  $G$  et  $D$ . Si on ne considère pas ces pavages monochromatiques alors nous avons un jeu de tuiles pavant le plan mais n'admettant aucun pavage périodique (Théorème 1.36).  $\square$

**Corollaire 1.41.** *Les trois classes de jeux de tuiles suivantes sont récursivement inséparables :*

- les jeux de tuiles n'admettant que des pavages périodiques ;
- les jeux de tuiles admettant un nombre infini dénombrable de pavages ;
- les jeux de tuiles dont l'ensemble des pavages peut s'écrire comme l'union disjointe d'un espace de pavages fini et d'un espace de pavages apériodique.

*Démonstration.* Les classes de machines de Turing codées par la Proposition 1.40 sont récursivement inséparables.  $\square$

# Chapitre 2

## Le pré-ordre $\preceq$

Après les définitions du Chapitre 1, nous avons le sentiment que les motifs jouent un rôle important dans l'étude des pavages. Dans ce chapitre nous définissons un pré-ordre basé sur les motifs apparaissant dans les configurations ; ce pré-ordre a été introduit pour l'étude des pavages par Bruno Durand [Dur99]. Cependant, on peut trouver des références plus anciennes : par exemple, Bruno Poizat disait qu'un pavage *s'abrite* dans un autre [Poi82]. De par la définition de ce pré-ordre, nous sommes ensuite amenés à caractériser les langages de configurations, c'est-à-dire l'ensemble des motifs apparaissant dans une configuration (Section 2.2), pour enfin étudier la structure de ce pré-ordre sur  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  aux Sections 2.3 et 2.4.

### 2.1 Définitions et propriétés générales

**Définition 2.1** (Le préordre  $\preceq$ ). Soient  $x$  et  $y$  deux configurations de  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$ , on note  $x \preceq y$  si tout motif qui apparaît dans  $x$  apparaît aussi dans  $y$ .

On dit que deux configurations  $x$  et  $y$  sont *localement isomorphes* si  $x \preceq y$  et  $y \preceq x$ . On note cette relation par  $\approx$ . Un exemple de deux configurations comparables pour  $\preceq$  qui ne sont pas localement isomorphes est représenté sur la Figure 2.1. Par définition,  $\approx$  est une relation symétrique, ce qui en fait une relation d'équivalence. La classe d'équivalence de  $x$  pour  $\approx$  est notée  $\langle x \rangle$ . On note ainsi  $x \prec y$  si  $x \preceq y$  et  $x \not\approx y$ . On note  $\Gamma(c)$  l'ensemble  $\{x \in \mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2} \mid x \preceq c\}$ . On remarque que  $\Gamma(c)$  est un espace de pavages généralisé : il est défini par l'ensemble de motifs interdits  $\mathcal{F}$  égal à l'ensemble des motifs n'apparaissant pas dans  $c$ .

Ce pré-ordre se prête naturellement à l'étude des espaces de pavages généralisés définis par un ensemble de motifs interdits  $\mathcal{F}$  :  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  est clos vers le bas pour  $\preceq$ . Si  $c$  est un élément de  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  alors  $\Gamma(c)$  est un sous-ensemble de  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$ .

**Proposition 2.2.** Pour deux configurations  $x$  et  $y$  les points suivants sont équivalents :

- $x \preceq y$
- $x \in \Gamma(y)$
- $\Gamma(x) \subseteq \Gamma(y)$ .

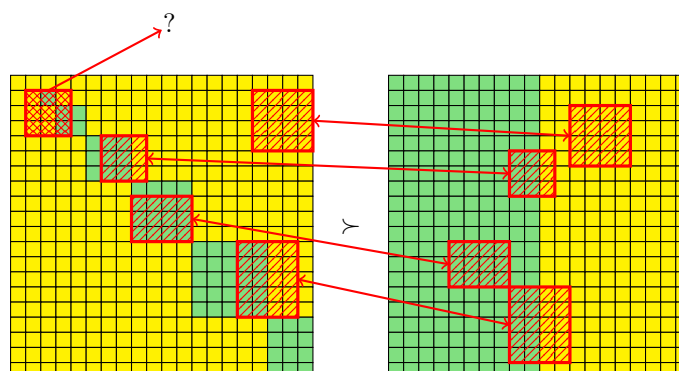


FIGURE 2.1 – Exemple de deux configurations comparables pour  $\preceq$  mais pas localement isomorphes

Pour un ensemble de configurations donné, nous pouvons représenter ce pré-ordre sous forme de diagramme de Hasse ; un exemple d'un tel diagramme pour les pavages obtenus à partir des motifs interdits présentés sur la Figure 1.10 est représenté sur la Figure 2.2.

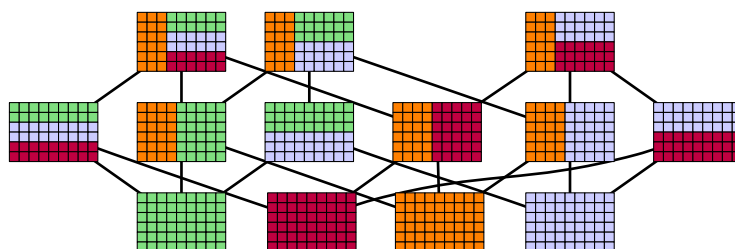


FIGURE 2.2 – Exemple d'un diagramme de Hasse pour  $\preceq$  pour l'ensemble de pavages obtenus à partir du jeu de tuile de la Figure 1.10. Une arête entre deux configurations  $a$  et  $b$ , si  $a$  est au dessous de  $b$ , signifie  $a \preceq b$ . Nous ne représentons pas les relations obtenues par transitivité.

## 2.2 Langages de configurations

La définition de l'ordre  $\preceq$  ne fait intervenir que les motifs finis apparaissant dans une configuration ; nous sommes ainsi tentés de redéfinir cet ordre en termes d'inclusion de langages :

**Définition 2.3** (Langage d'une configuration). *Pour une configuration  $c$  on note  $\mathcal{L}(c)$  l'ensemble des motifs apparaissant dans  $c$ .*

On remarque que  $x \preceq y$  si et seulement si  $\mathcal{L}(x) \subseteq \mathcal{L}(y)$ . De plus nous pouvons caractériser les ensembles de motifs correspondant au langage d'une configuration :

**Théorème 2.4** (Caractérisation des langages de configurations). *Pour un ensemble non-vide de motifs  $\mathcal{L}$ , il existe une configuration  $c$  telle que  $\mathcal{L}$  soit le langage de  $c$  ( $\mathcal{L} = \mathcal{L}(c)$ ) si et seulement si  $\mathcal{L}$  vérifie les 3 points suivants :*

1. Pour chaque motif  $\mathbf{M}$  dans  $\mathcal{L}$ , tout sous-motif de  $\mathbf{M}$  est aussi dans  $\mathcal{L}$
2. Pour chaque motif  $\mathbf{M}$  dans  $\mathcal{L}$ , il existe une extension omnidirectionnelle de  $\mathbf{M}$  dans  $\mathcal{L}$
3. Pour tous motifs  $\mathbf{M}_1$  et  $\mathbf{M}_2$  dans  $\mathcal{L}$ , il existe un motif  $\mathbf{M}$  dans  $\mathcal{L}$  contenant les deux ( $\mathbf{M}_1 \sqsubseteq \mathbf{M}, \mathbf{M}_2 \sqsubseteq \mathbf{M}$ ).

*Démonstration.* Il est clair que, pour une configuration donnée  $c$ ,  $\mathcal{L}(c)$  vérifie les 3 conditions.

Supposons maintenant que  $\mathcal{L}$  vérifie les 3 conditions et construisons une configuration  $c$  telle que  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(c)$ . Comme l'ensemble des motifs est dénombrable,  $\mathcal{L}$  l'est aussi et l'on peut ainsi écrire :  $\mathcal{L} = \{\mathbf{P}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ .

On pose  $\mathbf{M}_0 = \mathbf{P}_0$ . Nous définissons  $\mathbf{M}_i$  à partir de  $\mathbf{M}_{i-1}$ . La propriété 3 nous assure qu'il existe un motif dans  $\mathcal{L}$  dont  $\mathbf{M}_{i-1}$  et  $\mathbf{P}_i$  sont tous deux sous-motifs : soit  $\mathbf{N}_i$  ce motif. De plus la propriété 2 nous assure qu'il existe une extension omnidirectionnelle de ce motif  $\mathbf{N}_i$ , que nous définissons comme  $\mathbf{M}_i$ .

Ainsi nous avons construit une suite de motifs  $(\mathbf{M}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  qui croît vers une configuration  $c$  de  $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  telle que  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}(c)$ .

Pour l'inclusion réciproque, un motif de  $c$  est sous-motif d'un certain  $\mathbf{M}_i$  par construction et est ainsi dans  $\mathcal{L}$  car il est stable par sous-motif d'après la propriété 1.

Nous avons ainsi construit une configuration  $c$  telle que  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(c)$ .  $\square$

Cette caractérisation des langages de configurations et du pré-ordre  $\preceq$  en fonction de ces langages nous permettent de construire des ensembles de configurations ayant certaines propriétés : il suffit de construire des langages vérifiant les conditions du Théorème 2.4.

**Théorème 2.5.** *L'ordre  $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$  s'injecte dans  $(\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}, \preceq)$ .*

On remarque que le Théorème 2.5 ne traite que de  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  au lieu de  $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^2}$ . Lorsque  $\mathbb{Q}$  a au moins deux éléments, il est facile d'injecter  $(\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}, \preceq)$  dans  $(\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}}, \preceq)$  puis dans  $(\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^2}, \preceq)$  et ceci ne fait que rendre le résultat plus fort.

*Démonstration.* Pour un sous-ensemble  $E$  de  $\mathbb{N}$ , on cherche à lui associer un langage de configuration  $\mathcal{L}_E$  tel que  $E \subseteq E'$  si et seulement si  $\mathcal{L}_E \subseteq \mathcal{L}_{E'}$ .

Soit  $n$  un entier, on l'encode par un motif  $\mathbf{M}_n$  de taille  $2(n+1)$  de la forme  $01^{2n}0$ . On définit  $\mathcal{L}_E$  comme l'ensemble de tous les motifs n'ayant pas  $\mathbf{M}_n$  comme sous-motif pour  $n \notin E$ . Puisque tous les  $\mathbf{M}_n$  sont incomparables pour l'ordre  $\sqsubseteq$ , on a :  $E \subseteq E' \Leftrightarrow \mathcal{L}_E \subseteq \mathcal{L}_{E'}$ .

On va maintenant vérifier que  $\mathcal{L}_E$  vérifie les conditions du Théorème 2.4 pour nous assurer qu'il existe une configuration de  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  ayant  $\mathcal{L}_E$  comme langage.

- $\mathcal{L}_E$  est clos par sous-motif par définition : si un motif de  $\mathcal{L}_E$  n'a pas de  $M_n$  pour  $n \notin E$  comme sous-motif alors il en va de même pour tous ses sous-motifs.
- Si l'on a un motif  $P$  commençant par un nombre pair de 1, on rajoute 1 à sa gauche, sinon on rajoute seulement 0, de sorte à ne pas créer de motif  $M_n$ ; on fait de même à sa droite et nous avons ainsi construit une extension omnidirectionnelle de  $P$  qui est aussi dans  $\mathcal{L}_E$ .
- Lorsque l'on a deux motifs  $P_1$  et  $P_2$  de  $\mathcal{L}_E$ , on les étend tous les deux comme précédemment avec 1 ou 0 à gauche et à droite puis on les étend une fois de plus en rajoutant un 0 à gauche et à droite. Une fois cette extension effectuée, on les met bout à bout, de sorte à obtenir un motif  $P$  avec  $P_1 \sqsubseteq P$  et  $P_2 \sqsubseteq P$ ; de plus  $P$  ne contient pas plus de motif  $M_n$  que ceux qui étaient déjà dans  $P_1$  ou  $P_2$  et est ainsi aussi dans  $\mathcal{L}_E$ .

Par conséquent,  $\mathcal{L}_E$  vérifie les conditions du Théorème 2.4 et il existe une configuration  $c_E$  de  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  telle que  $\mathcal{L}(c_E) = \mathcal{L}_E$ . Ainsi on a :  $c_E \preceq c_{E'} \Leftrightarrow E \subseteq E'$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

**Corollaire 2.6.** *Quand  $Q$  a au moins deux éléments, il existe des chaînes infinies croissantes, des chaînes infinies décroissantes et des antichaînes infinies dans  $(\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^2}, \preceq)$ .*

Après avoir considéré de manière générale le langage d'une configuration nous pouvons nous intéresser au nombre d'occurrences de certains motifs. Une simple remarque permet de distinguer deux types de configurations en fonction de l'occurrence de certains motifs :

**Remarque 2.7.** *Soit une configuration contient un motif qui n'apparaît qu'une seule fois soit tous ses motifs apparaissent une infinité de fois.*

*Démonstration.* Si un motif apparaît un nombre fini de fois, le motif qui les contient tous n'apparaît qu'une seule fois.  $\square$

De plus, la relation  $\prec$  permet de déduire le nombre d'occurrences de certains motifs dans des configurations :

**Lemme 2.8.** *Pour deux configurations  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  telles que  $x \prec y$  alors tous les motifs de  $x$  apparaissent une infinité de fois dans  $y$ .*

*Démonstration.* Les motifs de  $x$  apparaissant une infinité de fois apparaissent aussi une infinité de fois dans  $y$  : pour un motif  $N$  apparaissant une infinité de fois dans  $x$ , il suffit de considérer, pour tout entier  $n$ , un motif  $M_n$  contenant  $n$  fois le motif  $N$ ; tous les motifs  $M_n$  apparaissent dans  $y$  et ainsi  $N$  apparaît une infinité de fois dans  $y$ .

Soit  $P$  un motif n'apparaissant qu'un nombre fini de fois dans  $x$  et supposons, par l'absurde, que  $P$  n'apparaisse qu'un nombre fini de fois dans  $y$ . Soit  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des motifs de taille  $n \times n$  apparaissant au centre de  $x$ ; à partir d'un certain  $n$ , tous les  $P_n$  contiennent  $P$ . Comme tous les  $P_n$  apparaissent dans  $y$  et  $y$  ne contient qu'un nombre fini d'occurrences du motif  $P$ , à partir d'un certain  $n$ , il n'y a plus qu'un nombre fini de positions possibles où trouver  $P_n$  dans  $y$ . Par conséquent, une infinité de  $P_n$  apparaissent au même endroit, donc ils apparaissent tous à la même position dans  $y$ .

À la limite, le domaine des  $\mathbf{P}_n$  recouvre tout le plan et donc  $y$  est un translaté de  $x$ , donc  $y$  et  $x$  contiennent exactement les mêmes motifs ce qui contredit le fait que nous avons supposé  $x \prec y$ .  $\square$

### 2.2.1 Liens entre les langages de configurations et les pavages

Nous avons vu, à la Section 1.4, que l'on pouvait définir des pavages par un ensemble  $\mathcal{F}$  de motifs interdits ; cette définition a d'autant plus de sens lorsque l'on s'intéresse aux langages des configurations de  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  :

**Remarque 2.9.** Soit  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  l'ensemble des configurations valides pour l'ensemble de motifs interdits  $\mathcal{F}$ , alors, pour une configuration  $c \in \mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$ , on a :

$$c \in \mathbf{T}_{\mathcal{F}} \Leftrightarrow \mathcal{L}(c) \cap \mathcal{F} = \emptyset$$

Cette simple reformulation de la définition en termes de langages de configurations est très utile : elle permet de faire hériter des propriétés de stabilité par intersection, union, etc. des langages de configurations sur  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  à n'importe quel espace de pavages.

Nous avons déjà remarqué que  $\mathbf{T}_{\mathcal{L}(c)^C} = \Gamma(c)$ . Pour obtenir des unions finies, nous pouvons nous contenter de travailler sur les langages : pour deux configurations  $a$  et  $b$ , si l'on prend l'ensemble de motifs  $\mathcal{F} = \mathcal{L}(a)^C \cap \mathcal{L}(b)^C = (\mathcal{L}(a) \cup \mathcal{L}(b))^C$  alors  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  est égal à  $\Gamma(a) \cup \Gamma(b)$ . En effet, il est clair d'après la Remarque 2.9 que  $\Gamma(a) \cup \Gamma(b) \subseteq \mathbf{T}_{\mathcal{F}}$ . Soit  $c$  une configuration de  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$ , on a  $\mathcal{L}(c) \subseteq \mathcal{L}(a) \cup \mathcal{L}(b)$  et si l'on a  $\mathbf{M}_1 \in \mathcal{L}(a) \setminus \mathcal{L}(b)$  et  $\mathbf{M}_2 \in \mathcal{L}(b) \setminus \mathcal{L}(a)$  alors on a  $\mathbf{M} \in \mathcal{L}(a) \cup \mathcal{L}(b)$  tel que  $\mathbf{M}_1 \sqsubseteq \mathbf{M}$  et  $\mathbf{M}_2 \sqsubseteq \mathbf{M}$ , ce qui est impossible. Donc  $\Gamma(a) \cup \Gamma(b) = \mathbf{T}_{\mathcal{F}}$ . En revanche tout ensemble de configurations défini par des motifs interdits n'est pas forcément égal à un certain  $\Gamma(c)$  : il suffit de prendre deux configurations minimales sur la Figure 2.2 pour s'en convaincre.

Malgré cela, nous pouvons tout de même caractériser les langages des espaces de pavages généralisés en relâchant la condition 3 du Théorème 2.4 :

**Théorème 2.10.** Pour un ensemble de motifs  $\mathcal{L}$ , il existe un ensemble de motifs interdits  $\mathcal{F}$  tel que  $\mathcal{L}$  soit le langage de  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  ( $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{T}_{\mathcal{F}})$ ) si et seulement si  $\mathcal{L}$  vérifie les 2 points suivants :

1. Pour chaque motif  $\mathbf{M}$  dans  $\mathcal{L}$ , tout sous-motif de  $\mathbf{M}$  est aussi dans  $\mathcal{L}$
2. Pour chaque motif  $\mathbf{M}$  dans  $\mathcal{L}$ , il existe une extension omnidirectionnelle de  $\mathbf{M}$  dans  $\mathcal{L}$

De plus,  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  est non vide si et seulement si  $\mathcal{L}$  est non vide.

*Démonstration.*  $\Rightarrow$ : Il est clair que, pour un  $\mathcal{F}$  donné,  $\mathcal{L}(\mathbf{T}_{\mathcal{F}})$  vérifie les 2 conditions.

$\Leftarrow$ : On pose  $\mathcal{F} = \mathcal{L}^C$ , l'ensemble des motifs n'étant pas dans  $\mathcal{L}$ . Comme  $\mathcal{L}(\mathbf{T}_{\mathcal{F}}) \cap \mathcal{L}^C = \emptyset$  d'après la Remarque 2.9, on a que  $\mathcal{L}(\mathbf{T}_{\mathcal{F}}) \subseteq \mathcal{L}$ . Si  $\mathcal{L}$  est vide nous n'avons plus rien à prouver. Soit  $\mathbf{M}$  un motif de  $\mathcal{L}$ , on peut trouver une suite d'extensions omnidirectionnelles de  $\mathbf{M}$  d'après le point 2 et cette suite définit une configuration  $c$  à la limite. Comme  $\mathcal{L}$  est stable par sous-motif,  $\mathcal{L}(c) \subseteq \mathcal{L}$ , donc  $\mathcal{L}(c) \cap \mathcal{L}^C = \emptyset$  et ainsi  $c \in \mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  (donc  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  est non vide) et donc  $\mathbf{M} \in \mathcal{L}(\mathbf{T}_{\mathcal{F}})$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

### 2.2.2 Stabilité des langages de configurations

Après les résultats de la section précédente il est clair que les langages de configurations ne sont stables ni par intersection ni par union. Il suffit de considérer l'ensemble de couleurs  $\mathbf{Q} = \{\blacksquare, \color{orange}\square, \color{red}\square\}$ , et les configurations  $c_1$  et  $c_2$  contenant toutes deux un point  $\blacksquare$  et tous les autres points sont de couleur, respectivement,  $\color{orange}\square$  et  $\color{red}\square$ .  $\mathcal{L}(c_1) \cap \mathcal{L}(c_2)$  ne contient que le motif  $\blacksquare$  et est ainsi fini et donc ne peut pas être un langage de configuration;  $\mathcal{L}(c_1) \cup \mathcal{L}(c_2)$  ne contient pas de motif contenant à la fois  $\color{orange}\square$  et  $\color{red}\square$  donc ne peut pas non plus être un langage de configuration.

En revanche, la caractérisation de ces langages du Théorème 2.4 nous permet d'obtenir des résultats de stabilité par union croissante et intersection décroissante :

**Lemme 2.11** (Stabilité par union croissante). *Si  $(\mathcal{L}(c_i))_{i \in \mathbb{N}}$  est une chaîne croissante pour l'inclusion alors il existe une configuration  $c$  telle que :*

$$\mathcal{L}(c) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{L}(c_i)$$

*Démonstration.* Nous allons utiliser la caractérisation du Théorème 2.4. Notons  $\mathcal{L}$  l'union de tous les  $\mathcal{L}(c_i)$ .

Pour la propriété de stabilité par sous-motif (point 1) : un motif de  $\mathcal{L}$  apparaît dans un certain  $\mathcal{L}(c_i)$  donc tous ses sous-motifs aussi, ainsi  $\mathcal{L}$  est stable par sous-motif. Il existe une extension omnidirectionnelle de ce motif dans  $\mathcal{L}(c_i)$  qui est donc aussi dans  $\mathcal{L}$ ;  $\mathcal{L}$  vérifie ainsi le point 2 du Théorème 2.4.

Pour le point 3, soient  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{N}$  deux motifs de  $\mathcal{L}$ ; comme  $(\mathcal{L}(c_i))_{i \in \mathbb{N}}$  est une chaîne croissante pour l'inclusion, ces motifs apparaissent tous deux dans le même  $\mathcal{L}(c_i)$ . Il existe donc un motif  $\mathbf{M}$  contenant les deux dans  $\mathcal{L}(c_i)$  qui est donc aussi dans  $\mathcal{L}$ .

Ainsi  $\mathcal{L}$  vérifie les 3 conditions du Théorème 2.4 ce qui nous assure de l'existence d'une configuration  $c$  telle que  $\mathcal{L}(c) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{L}(c_i)$ .  $\square$

On remarque que ni la preuve du Lemme 2.11 ni celle du Théorème 2.4 ne font intervenir le fait que  $\mathbf{Q}$  est fini, ainsi, bien que cela sorte du cadre de notre étude, le résultat précédent reste vrai sans cette restriction sur  $\mathbf{Q}$ .

**Lemme 2.12** (Sous-stabilité par intersection décroissante). *Pour une chaîne décroissante pour l'inclusion  $(\mathcal{L}(c_i))_{i \in \mathbb{N}}$ , il existe une configuration  $c$  telle que :*

$$\mathcal{L}(c) \subseteq \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{L}(c_i)$$

*Démonstration.* Notons  $\mathcal{L} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{L}(c_i)$ ; dans un premier temps nous utilisons la caractérisation du Théorème 2.10 pour montrer qu'il existe un espace de pavages généralisé  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  tel que  $\mathcal{L}(\mathbf{T}_{\mathcal{F}}) = \mathcal{L}$ .

Soit  $\mathbf{M} \in \mathcal{L}$  : tous ses sous-motifs sont aussi dans  $\mathcal{L}$  car ils sont dans tous les  $\mathcal{L}(c_i)$  d'après le point 1 du Théorème 2.4; donc  $\mathcal{L}$  vérifie le point 1 du Théorème 2.10. Soit  $\mathbf{D}$  un domaine nous assurant que tout motif défini sur  $\mathbf{D}$  qui contient  $\mathbf{M}$  en son centre soit une extension omnidirectionnelle de  $\mathbf{M}$  :  $\mathbf{D} = \mathcal{B}(\mathcal{D}_{\mathbf{M}}, 1)$ . Il n'existe qu'un nombre fini de motifs définis sur  $\mathbf{D}$  et tous les  $\mathcal{L}(c_i)$  contiennent une extension omnidirectionnelle

de  $\mathbf{M}$  définie sur  $\mathbf{D}$ , par conséquent, il existe un motif  $\mathbf{N}$  défini sur  $\mathbf{D}$  qui soit une extension omnidirectionnelle de  $\mathbf{M}$  dans une infinité de  $\mathcal{L}(c_i)$ . Comme les  $\mathcal{L}(c_i)$  sont décroissants pour l'inclusion, ce motif  $\mathbf{N}$  appartient à tous les  $\mathcal{L}(c_i)$  et donc à  $\mathcal{L}$ , ce qui montre que  $\mathcal{L}$  vérifie le point 2 du Théorème 2.10.

L'ensemble des motifs de taille  $1 \times 1$  est fini et tous les  $\mathcal{L}(c_i)$  en contiennent au moins un; par conséquent il existe un de ces motifs qui appartient à tous les  $\mathcal{L}(c_i)$  et donc à  $\mathcal{L}$ .  $\mathcal{L}$  est donc non vide.

Il existe donc un espace de pavages généralisé non vide  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  tel que  $\mathcal{L}(\mathbf{T}_{\mathcal{F}}) = \mathcal{L}$ . Pour un certain  $c \in \mathbf{T}_{\mathcal{F}}$ , par définition,  $\mathcal{L}(c) \subseteq \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{L}(c_i)$ .  $\square$

La preuve du Théorème 2.12 fait intervenir des arguments du type "il n'y a qu'un nombre fini d'objets possibles et un nombre infini de tiroirs, donc un objet est dans une infinité de tiroirs"; caché derrière ces arguments simples se trouve de la compacité, sur laquelle nous revenons au Chapitre 3.

Nous avons appelé le Lemme 2.12 un lemme de sous-stabilité par intersection décroissante car, contrairement au Lemme 2.11, nous n'avons pas l'égalité. En effet, il existe des suites décroissantes de langages de configurations dont l'intersection n'est pas égale à un langage de configurations. Soit  $\mathbf{Q} = \{\blacksquare, \square, \blacksquare\}$  et  $\mathcal{L}_n$  l'ensemble des motifs ne contenant pas deux points  $\blacksquare$  à distance inférieure à  $n$ . Il est aisé de vérifier que  $\mathcal{L}_n$  respecte bien les conditions du Théorème 2.4 et que  $\mathcal{L}_{n+1} \subset \mathcal{L}_n$ . Le langage  $\mathcal{L} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}_n$  est constitué de tous les motifs contenant au plus un point  $\blacksquare$  et contient ainsi les motifs  $\blacksquare \square$  et  $\square \blacksquare$  mais on ne peut pas trouver de motif contenant ces deux derniers puisqu'il devrait contenir deux points  $\blacksquare$  et ne peut donc pas être un langage de configuration d'après le Théorème 2.4.

De plus, contrairement au Lemme 2.11 pour l'union croissante de langages de configurations, la preuve du Lemme 2.12 utilise le fait que  $\mathbf{Q}$  est fini, on peut construire un contre-exemple à ce lemme avec  $\mathbf{Q} = \mathbb{N}$ :  $\mathcal{L}_n$  est l'ensemble des motifs ne contenant aucun point à valeur  $i$  pour  $i < n$ ; on obtient  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}_n = \emptyset$  même si les  $\mathcal{L}_n$  vérifient les conditions du Théorème 2.4.

## 2.3 Extrema pour $\preceq$

L'étude des langages de configurations faite à la Section 2.2, et notamment les résultats de stabilité de la Section 2.2.2 permettent d'obtenir des résultats sur les ensembles de pavages: l'existence de bornes pour les chaînes croissantes ou décroissantes pour  $\preceq$  de configurations et par conséquent l'existence d'éléments minimaux et maximaux pour  $\preceq$ . Dans cette section nous utilisons le lemme de Zorn que nous rappelons ici:

**Lemme 2.13 (Zorn).** *Tout ensemble inductif (ordonné et tel que toute chaîne admet un majorant) admet au moins un élément maximal.*

La méthodologie pour montrer l'existence d'*extrema* pour  $\preceq$  est maintenant claire: il suffit de montrer que toute chaîne croissante (respectivement décroissante) admet un majorant (respectivement minorant) pour obtenir l'existence de maximaux (respectivement minimaux).



**Proposition 2.14.** *Toute chaîne infinie de configurations décroissante pour  $\preceq$  admet un minorant.*

*Démonstration.* C'est une simple reformulation du Lemme 2.12 puisque pour deux configurations  $x$  et  $y$ ,  $x \preceq y$  si et seulement si  $\mathcal{L}(x) \subseteq \mathcal{L}(y)$ .  $\square$

Nous avons déjà évoqué la conjecture de Wang [Wan61] : tout espace de pavages non vide contient une configuration périodique. Nous avons montré au Chapitre 1 que cette conjecture était fausse. Grâce au formalisme apporté par le pré-ordre  $\preceq$ , nous pouvons désormais montrer une version plus faible d'un tel résultat d'existence :

**Théorème 2.15** ([Dur99]). *Tout espace de pavages généralisé non vide contient un élément minimal pour  $\preceq$ .*

*Démonstration.* L'existence d'un pavage minimal est assurée par le lemme de Zorn puisque toute chaîne infinie décroissante de configurations admet un minorant d'après la Proposition 2.14. Ce pavage minimal obtenu reste dans l'ensemble de pavages initial d'après la Proposition 2.2.  $\square$

En vérité, nous n'avons pas réellement besoin du lemme de Zorn ici, si ce n'est pour avoir une preuve concise ; la preuve originale par B. Durand [Dur99] n'en faisait pas usage :

*Démonstration alternative.* Soit  $\mathcal{F}$  un ensemble de motifs interdits et  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  l'espace de pavages associé. Considérons le langage  $\mathcal{L}(\mathbf{T}_{\mathcal{F}}) = \{\mathbf{M}_i, i \in \mathbb{N}\}$  et posons  $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$  ; si  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}_i \cup \{\mathbf{M}_i\}}$  est vide alors posons  $\mathcal{F}_{i+1} = \mathcal{F}_i$  sinon  $\mathcal{F}_{i+1} = \mathcal{F}_i \cup \{\mathbf{M}_i\}$ . Par construction, les  $(\mathcal{L}(\mathbf{T}_{\mathcal{F}_i}))_{i \in \mathbb{N}}$  forment une suite d'ensembles non vides décroissante pour l'inclusion.  $\mathcal{L} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{L}(\mathbf{T}_{\mathcal{F}_i})$  est stable par sous-motif et est non vide car tous les  $\mathcal{L}(\mathbf{T}_{\mathcal{F}_i})$  contiennent le motif vide.  $\mathcal{L}$  est de plus stable par extension omnidirectionnelle : soit  $\mathbf{M}$  un motif de  $\mathcal{L}$  et  $\mathbf{D} = \mathcal{B}(\mathcal{D}_{\mathbf{M}}, 1)$ . Les motifs définis sur  $\mathbf{D}$  contenant  $\mathbf{M}$  sont des extensions omnidirectionnelles de  $\mathbf{M}$ . Il n'existe qu'un nombre fini de tels motifs et chaque  $\mathcal{L}(\mathbf{T}_{\mathcal{F}_i})$  en contient un. Par conséquent, il en existe un qui est dans une infinité de  $\mathcal{L}(\mathbf{T}_{\mathcal{F}_i})$  et donc dans tous les  $\mathcal{L}(\mathbf{T}_{\mathcal{F}_i})$  car ils forment une suite décroissante pour l'inclusion.

Soit  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  l'espace de pavages généralisé tel que  $\mathcal{L}(\mathbf{T}_{\mathcal{F}}) = \mathcal{L}$ , qui existe d'après le Théorème 2.10, et  $c$  une configuration de  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$ . On a  $\mathcal{L}(c) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{T}_{\mathcal{F}})$ . Supposons qu'il existe un motif  $\mathbf{M}_i$  qui soit dans  $\mathcal{L}(\mathbf{T}_{\mathcal{F}})$  mais pas dans  $\mathcal{L}(c)$ . Puisque  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}_i \cup \{\mathbf{M}_i\}}$  est non vide (il contient  $c$ ),  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}_i \cup \{\mathbf{M}_i\}}$  est aussi non vide. Ainsi, par construction,  $\mathbf{M}_i$  n'est pas dans  $\mathcal{L}(\mathbf{T}_{\mathcal{F}_{i+1}})$  et n'est donc pas dans  $\mathcal{L}$  ; contradiction.

Nous avons donc :  $\mathcal{L}(c) = \mathcal{L}(\mathbf{T}_{\mathcal{F}})$ . Puisque les espaces de pavages sont stables par  $\preceq$ ,  $c$  est minimale pour  $\preceq$ .  $\square$

La conjecture de Wang mettait en avant une configuration avec une structure régulière : une configuration périodique. Bien que moins réguliers, nous pouvons caractériser la structure des minimaux pour  $\preceq$  :

**Proposition 2.16** ([Dur99]). *Une configuration  $c$  est minimale pour  $\preceq$  si et seulement si  $c$  est quasi-périodique.*

*Démonstration.*  $\Leftarrow$ : Soit  $x$  une configuration telle que  $\mathcal{L}(x) \subsetneq \mathcal{L}(c)$ . Soit  $\mathbf{M}$  un motif qui est dans  $\mathcal{L}(c)$  mais pas dans  $\mathcal{L}(x)$ . Par définition de la quasi-périodicité, tout motif suffisamment grand de  $\mathcal{L}(c)$  contient  $\mathbf{M}$  et donc tous les motifs de  $\mathcal{L}(x)$  sont de taille bornée, une contradiction.

$\Rightarrow$ : Par l'absurde, soit  $\mathbf{M}$  un motif de  $c$  n'apparaissant pas dans des motifs arbitrairement grands. Comme les motifs ne contenant pas  $\mathbf{M}$  sont en nombre infini, nous pouvons trouver une suite de motifs  $(\mathbf{M}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  où  $\mathbf{M}_{i+1}$  est une extension omnidirectionnelle de  $\mathbf{M}_i$  : les extensions omnidirectionnelles de  $\mathbf{M}_i$  définies sur  $\mathcal{B}(\mathcal{D}_{\mathbf{M}_i}, 1)$  et ne contenant pas  $\mathbf{M}$  sont en nombre fini et il existe une infinité de motifs arbitrairement grands ne contenant pas  $\mathbf{M}$ ; on construit la suite  $(\mathbf{M}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  en prenant  $\mathbf{M}_0$  égal au motif vide et en préservant l'invariant qu'il existe une infinité d'extensions omnidirectionnelles de  $\mathbf{M}_i$  ne contenant pas  $\mathbf{M}$ . L'ensemble des sous-motifs de ces  $\mathbf{M}_i$  est un langage de configuration ne contenant pas  $\mathbf{M}$  et donc la configuration réalisant ce langage est strictement inférieure à  $c$  pour  $\preceq$ , ce qui contredit l'hypothèse que  $c$  est minimale pour  $\preceq$ .  $\square$

Puisque  $\approx$  est une relation d'équivalence, il paraît naturel de s'intéresser aux classes d'équivalence d'un ensemble  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  de configurations valides pour  $\mathcal{F}$ . Nous pouvons d'ores et déjà obtenir des résultats sur la nature des configurations présentes dans  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  lorsqu'il n'y a qu'une seule classe d'équivalence pour  $\approx$  :

**Lemme 2.17.** *Pour un espace de pavages généralisé  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$ , si tous les pavages de  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  sont localement isomorphes (contiennent les mêmes motifs) alors tous les pavages de  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  sont minimaux pour  $\preceq$  et, a fortiori, tous les motifs qui apparaissent dans un pavage apparaissent une infinité de fois.*

*Démonstration.* Les espaces de pavages généralisés sont stables par  $\preceq$  donc  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  ne contient que des minimaux pour  $\preceq$ . D'après la Proposition 2.16, tous les pavages de  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  sont quasi-périodiques. Ainsi tout motif apparaissant dans un pavage apparaît une infinité de fois dans celui-ci par définition de la quasi-périodicité.  $\square$

Maintenant, si l'on s'intéresse aux chaînes croissantes de configurations alors la reformulation du Lemme 2.11 nous donne le résultat suivant :

**Proposition 2.18.** *Toute chaîne de configurations croissante pour  $\preceq$  a une borne supérieure.*

**Théorème 2.19** ([BDJ08]). *Tout espace de pavages généralisé non vide contient un élément maximal pour  $\preceq$ .*

*Démonstration.* D'après la Proposition 2.18, toute chaîne croissante  $(c_i)_{i \in I}$  a une borne supérieure, notée  $c$ . D'après le Lemme 2.11,  $\mathcal{L}(c) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{L}(c_i)$ . Il reste à prouver que  $c$  est bien dans  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  : si elle ne l'était pas alors un motif interdit apparaît dans  $c$ , donc dans un  $\mathcal{L}(c_i)$  et ainsi dans un élément de cette chaîne croissante, ce qui est faux car nous avons supposé tous les éléments de la chaîne dans  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$ . L'existence d'un élément maximal vient ensuite par application du lemme de Zorn.  $\square$

Malheureusement, par opposition aux minimaux, nous n'avons pas de caractérisation des maximaux.

## 2.4 Les niveaux pour $\preceq$

Une partie importante de cette thèse est l'étude de la structure discrète qu'induit  $\preceq$  sur les ensembles de pavages. Le Théorème 2.15 nous assure l'existence de minimaux pour  $\preceq$  dans tout espace de pavages généralisé; nous disons que les minimaux sont au niveau 0.

**Proposition 2.20.** *Pour toute configuration  $c$  de  $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^2}$ , il existe une configuration minimale  $c'$  telle que  $c' \preceq c$ .*

*Démonstration.*  $\Gamma(c)$  est un espace de pavages généralisé sur lequel nous appliquons le Théorème 2.15.  $\square$

**Définition 2.21** (Niveaux pour  $\preceq$ ). *Une configuration  $c$  dans un espace de pavages généralisé  $\mathbf{S}$  est au niveau  $n$  si  $n$  est la longueur de la plus longue chaîne strictement décroissante partant de  $c$ .*

*S'il existe de telles suites arbitrairement grandes, nous dirons que  $c$  a un niveau infini.*

La Proposition 2.20 nous assure qu'une chaîne strictement décroissante de longueur finie maximale termine au niveau 0. Un exemple du diagramme de Hasse pour  $\preceq$  pour l'ensemble de contraintes de la Figure 1.10 est représenté sur la Figure 2.3 avec la notion de niveaux.

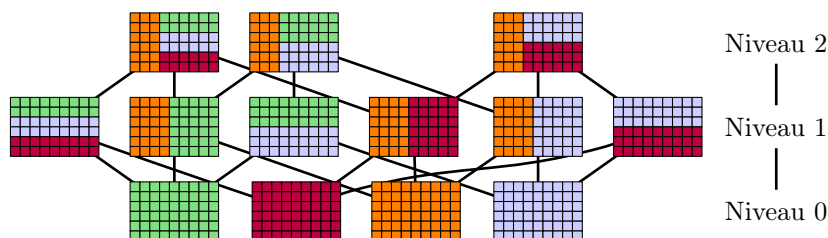


FIGURE 2.3 – Exemple d'un diagramme de Hasse et des niveaux associés pour l'espace de pavages obtenus à partir du jeu de tuile de la Figure 1.10.

Bien entendu cette notion de niveaux peut être mal définie : il se peut très bien qu'il y ait des configurations de niveau infini sans pour autant qu'il existe un niveau 1, etc. Pour l'instant nous avons seulement prouvé l'existence du niveau 0 et une partie de notre travail consiste à prouver l'existence de certains niveaux.

## Chapitre 3

# Topologie des pavages

Au chapitre précédent nous avons défini et commencé à étudier la structure du pré-ordre  $\preceq$  sur les espaces de pavages. Un moyen beaucoup plus classique [Moz88] d'étudier les espaces de pavages est de procéder à une étude topologique de ces espaces. Ces méthodes sont très fortement inspirées du monde de la dynamique symbolique [MH38, Hed69]. Les objets étudiés dans ce domaine sont un espace topologique et une application continue sur cet espace. Bien que nous ne nous plaçons pas dans le cadre le plus général en étudiant les espaces de pavages, les propriétés topologiques de ces espaces permettent souvent d'obtenir des démonstrations courtes et élégantes.

Nous définissons dans ce chapitre la topologie usuelle utilisée sur les espaces de pavages (Section 3.1). En premier lieu, cette topologie nous permet de caractériser les espaces de pavages par des propriétés topologiques (Section 3.2). Ensuite, nous pouvons appliquer des méthodes classiques (par exemple la dérivation de Cantor-Bendixson) aux espaces de pavages (Section 3.4). Ces méthodes nous permettent de déduire des implications entre l'existence de certaines configurations et la cardinalité de l'espace de pavages considéré. Ce chapitre constitue ainsi les fondations de l'étude des espaces de pavages selon leur cardinalité faite au Chapitre 4.

### 3.1 Topologie

Dans cette section nous définissons une topologie sur l'ensemble des configurations. Ceci nous permettra d'étudier plus en détails les propriétés des espaces de pavages en utilisant la topologie induite. La topologie est définie de la façon suivante : nous munissons  $\mathbf{Q}$  de sa topologie discrète et considérons  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  muni de la topologie produit.

Cette topologie sur  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  est très liée aux motifs que nous avons définis dans le Chapitre 1. Les ensembles  $\mathcal{O}_M = \{c \in \mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}, c|_{\mathcal{D}_M} = M\}$  forment une base de cette topologie. Ces ensembles  $\mathcal{O}_M$  sont parfois appelés cylindres dans la littérature. On remarque que ces  $\mathcal{O}_M$  sont aussi fermés car  $\mathbf{Q}$  est discret. Les  $\mathcal{O}_M$  forment ainsi une base d'ouverts-fermés de la topologie de  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$ .

De plus, cet espace produit est métrisable, comme tout produit dénombrable d'espaces métriques, par la distance suivante :

$$d(x, y) = 2^{-\min\{\|i\|, x^{(i)} \neq y^{(i)}\}}$$

Cette métrique nous éclaire un peu plus sur la notion de convergence d'une suite de configurations : la suite  $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$  converge vers une configuration  $c$  si et seulement si les  $c_i$  coïncident avec  $c$  sur des zones de plus en plus grandes au centre.

Une des propriétés topologiques les plus connues et utilisées de  $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  est sa compacité, obtenue grâce au théorème de Tychonoff :

**Théorème 3.1.**  $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  muni de la topologie produit est compact.

Nous n'avons pas réellement besoin du théorème de Tychonoff, qui fait intervenir l'axiome du choix, pour obtenir la compacité de  $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  ; nous avons déjà utilisé cette propriété à la Section 2.2.2 que nous avons montrée grâce à une variante du lemme de Koenig. Soit  $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de configurations de  $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  ; nous construisons un arbre de la façon suivante : on l'enracine par le motif vide, les noeuds à profondeur  $n$  sont les motifs centrés définis sur  $[-2n - 1; 2n + 1]^2$  pris dans un  $c_i$  pour  $i \geq n$ , une arête est présente entre un motif  $\mathbf{M}$  à profondeur  $n$  et un motif  $\mathbf{N}$  à profondeur  $n + 1$  si  $\mathbf{N}$  est une extension omnidirectionnelle de  $\mathbf{M}$ . Nous avons ainsi construit un arbre infini à branchement fini : il n'y a qu'un nombre fini de noeuds à une profondeur donnée. Par le lemme de Koenig, cet arbre contient un chemin infini. Le chemin infini ainsi obtenu est étiqueté par des motifs centrés qui forment une suite d'extensions omnidirectionnelles successives. À la limite, ce chemin définit une configuration qui est valeur d'adhérence de la suite  $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ .

**Proposition 3.2.** Lorsque  $\mathbf{Q}$  contient au moins deux éléments,  $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  est un espace sans point isolé (parfait).

*Démonstration.* La métrique sur  $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  nous assure que l'on peut trouver des configurations arbitrairement proches de toute configuration de  $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  en modifiant un point suffisamment loin de l'origine de  $\mathbb{Z}^2$ .  $\square$

## 3.2 Sous-shifts

Le terme de sous-shift provient du monde de la dynamique symbolique [LM95, MH38]. En général le terme de sous-shift est utilisé en dimension 1 ; ici nous utilisons la version multidimensionnelle [Lin04]. Les sous-shifts constituent une caractérisation élégante des espaces de pavages généralisés et permettent d'utiliser des outils topologiques pour l'étude des pavages.

**Définition 3.3.** Un sous-shift est un sous-ensemble de  $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  qui est fermé pour la topologie produit et invariant par translation.

**Théorème 3.4.** Un sous-ensemble  $\mathbf{S}$  de  $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  est un sous-shift si et seulement si  $\mathbf{S}$  est un espace de pavages généralisé  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$ .

*Démonstration.*  $\Leftarrow$ : Par définition,  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  est invariant par translation. Comme  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  est métrique, pour montrer que  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  est fermé, il nous suffit de montrer que toute suite convergente  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  a sa limite dans  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$ . Soit  $c$  cette limite; si  $c$  contient un motif de  $\mathcal{F}$  alors par définition de la métrique de  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $c_N$  contient aussi ce motif, ce qui est impossible et ainsi  $c \in \mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  et  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  est donc fermé.

$\Rightarrow$ : Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble des motifs n'apparaissant dans aucun élément de  $\mathbf{S}$ ; par définition  $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  car aucun élément de  $\mathbf{S}$  ne contient un motif de  $\mathcal{F}$ . Soit  $c \in \mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  et  $\mathbf{M}_n$  le motif carré de taille  $n \times n$  centré en  $(0, 0)$  dans  $c$ . Ce motif  $\mathbf{M}_n$  apparaît dans une configuration de  $\mathbf{S}$  et même aussi centré en  $(0, 0)$  par  $\sigma$ -invariance dans un  $c_n \in \mathbf{S}$ . Par construction,  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$  et comme  $\mathbf{S}$  est fermé,  $c \in \mathbf{S}$ . D'où  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathbf{S}$ .  $\square$

Lorsque cet ensemble de motifs interdit est *fini* on dit que  $c$ 'est un *sous-shift de type fini* (ou SFT pour *subshift of finite type*) et cela correspond à un espace de pavages.

Puisque  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  est compact, les espaces de pavages généralisés le sont eux aussi en tant que sous-ensembles fermés de  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$ . Il est de plus possible de traduire cette propriété de compacité en termes de motifs pour obtenir un résultat plus combinatoire :

**Lemme 3.5.** *Pour un espace de pavages généralisé  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  et pour chaque sous-ensemble fini  $\mathbf{D}$  de  $\mathbb{Z}^2$  il existe  $\mathcal{C}_{\mathbf{D}}$ , une extension finie de  $\mathbf{D}$  telle que si  $\mathbf{P}$  est un motif défini sur  $\mathcal{C}_{\mathbf{D}}$  qui ne contient aucun motif de  $\mathcal{F}$  alors  $\mathbf{P}|_{\mathbf{D}}$  apparaît dans une configuration de  $\mathbf{S}$ .*

Cela signifie que si l'on peut trouver des motifs suffisamment grands pavés correctement alors nous sommes certains qu'une petite sous-partie de ces motifs apparaît dans un pavage valide de tout le plan. La fonction qui, étant donné un jeu de tuiles, renvoie l'ensemble  $\mathcal{C}_{\mathbf{D}}$ , même à  $\mathbf{D} = \{(0, 0)\}$  fixé, n'est pas calculable puisque cela nous permettrait de décider de la pavabilité du plan. Même à jeu de tuiles fixé, on ne peut pas calculer  $\mathcal{C}_{\mathbf{D}}$  : il existe des jeux de tuiles pour lesquels chaque motif de taille  $n \times n$  qui apparaît dans un pavage a une complexité de Kolmogorov  $\Omega(n)$  [DLS01, DLS08]. La fonction qui, avec un tel jeu de tuiles fixé, calcule  $\mathcal{C}_{\mathbf{D}}$  en fonction de  $\mathbf{D} = \{0, \dots, n\}^2$  peut ne pas être calculable. Par conséquent, les arguments de compacité utilisés sur les espaces de pavages sont bien souvent non constructifs et il y a peu d'espoir d'arriver à en tirer un algorithme.

*Démonstration.* Par définition de la distance  $d$  sur  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$ , il existe  $\varepsilon_{\mathbf{D}}$  tel que si  $x$  et  $y$  sont deux configurations telles que  $d(x, y) < \varepsilon_{\mathbf{D}}$  alors  $x|_{\mathbf{D}} = y|_{\mathbf{D}}$ . Toutes les configurations de  $\mathcal{B}(\mathbf{T}_{\mathcal{F}}, \varepsilon_{\mathbf{D}})$  sont donc égales à un élément de  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  sur  $\mathbf{D}$ .

Soit  $\mathbf{C}_n$  l'ensemble (fermé dans  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$ ) des configurations de  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  dont le motif de taille  $n \times n$  en leur centre ne contient aucun motif de  $\mathcal{F}$ . On a :  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{C}_n = \mathbf{T}_{\mathcal{F}}$ . Comme  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\mathbf{C}_n \setminus \mathcal{B}(\mathbf{T}_{\mathcal{F}}, \varepsilon_{\mathbf{D}})) = \emptyset$ , par compacité il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathbf{C}_n \subseteq \mathcal{B}(\mathbf{T}_{\mathcal{F}}, \varepsilon_{\mathbf{D}})$ .

Ceci signifie que toutes les configurations de  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  qui contiennent un motif valide en leur centre de taille  $N \times N$  sont à distance inférieure à  $\varepsilon_{\mathbf{D}}$  d'une configuration de  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$ , ainsi le motif défini sur  $\mathbf{D}$  en leur centre apparaît dans un élément de  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$ . L'ensemble  $\mathcal{C}_{\mathbf{D}} = N \times N$  convient pour le résultat voulu.  $\square$

De plus, nous pouvons caractériser les espaces de pavages :

**Proposition 3.6** (Folklore, [Sch02]). *Un sous-shift  $\mathbf{S}$  est de type fini si et seulement si pour toute chaîne de sous-shifts décroissante pour l'inclusion  $(\mathbf{S}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  telle que  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{S}_i = \mathbf{S}$  alors il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathbf{S}_N = \mathbf{S}$ .*

*Démonstration.*  $\Rightarrow$ : Par définition,  $\mathbf{S}$  est caractérisé par un ensemble fini  $\mathcal{F}$  de motifs interdits. Soit  $\mathcal{F}_i$  l'ensemble des motifs n'apparaissant dans aucun élément de  $\mathbf{S}_i$ , i.e.,  $\mathcal{F}_i = \mathcal{L}(\mathbf{S}_i)^C$ ; par hypothèse les  $\mathcal{F}_i$  forment une suite croissante pour l'inclusion. De plus  $\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_i$ : s'il existe un motif de  $\mathcal{F}$  apparaissant dans une configuration  $c_i \in \mathbf{S}_i$  pour chaque entier  $i$  alors, en centrant les  $c_i$  sur ce motif et en prenant une valeur d'adhérence de cette suite par compacité, on pourrait trouver une configuration de  $\mathbf{S}$  contenant ce motif. Comme  $\mathcal{F}$  est fini, il existe un entier  $N$  tel que  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_N$  et ainsi  $\mathbf{S}_N \subseteq \mathbf{S}$  et donc  $\mathbf{S}_N = \mathbf{S}$  car  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{S}_i = \mathbf{S}$ .

$\Leftarrow$ : Soit  $\mathcal{F}_n$  l'ensemble de tous les motifs de taille  $n \times n$  n'apparaissant pas dans une configuration de  $\mathbf{S}$ . On a  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{T}_{\mathcal{F}_n} = \mathbf{S}$ , ainsi, par hypothèse, il existe  $N$  tel que  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}_N} = \mathbf{S}$  donc  $\mathbf{S}$  est de type fini.  $\square$

Cette proposition permet d'obtenir un résultat de type compacité pour les motifs interdits définissant un espace de pavage :

**Proposition 3.7.** *Soit  $\mathcal{F}$  un ensemble de motifs, si  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  est un espace de pavages alors il existe un sous-ensemble fini  $\mathcal{F}'$  de  $\mathcal{F}$  tel que  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}} = \mathbf{T}_{\mathcal{F}'}$ .*

*Démonstration.*  $\mathcal{F} = \{\mathbf{M}_i, i \in \mathbb{N}\}$ . Il suffit de prendre  $\mathcal{F}_n = \{\mathbf{M}_i, i \leq n\}$  pour obtenir  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{T}_{\mathcal{F}_n}$  et d'appliquer la Proposition 3.6 pour obtenir  $\mathcal{F}_N$ , un sous-ensemble fini de  $\mathcal{F}$ , tel que  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}} = \mathbf{T}_{\mathcal{F}_N}$ .  $\square$

De plus, la compacité des sous-shifts nous permet d'obtenir une condition suffisante, qui sera utilisée par la suite, pour qu'un sous-shift soit de type fini :

**Proposition 3.8.** *Si un sous-shift  $\mathbf{S}$  est fini alors il est de type fini.*

*Démonstration.* Comme  $\mathbf{S}$  est fini, il est discret, c'est-à-dire qu'il existe un réel strictement positif  $\varepsilon$  tel que,  $\forall x, y \in \mathbf{S}, d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow x = y$ . Ceci implique que pour toute configuration  $x$  de  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$ , il existe au plus un point  $y$  dans  $\mathbf{S}$  tel que  $d(x, y) \leq \varepsilon/3$ . En particulier, si  $\mu \leq \varepsilon/3$ , pour tout point  $x$  de  $\mathcal{B}(\mathbf{S}, \mu)$ , si  $y$  est une configuration de  $\mathbf{S}$  telle que  $d(x, y) \leq \varepsilon/3$  alors  $d(x, y) \leq \mu$ .

Soit maintenant  $\mu = \min(0.5, \varepsilon/6)$ . Soit  $(\mathbf{S}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de sous-shifts décroissante pour l'inclusion telle que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{S}_n = \mathbf{S}$ . Comme  $\mathcal{B}(\mathbf{S}, \mu)$  est un ouvert, pour tout  $n$ ,  $\mathbf{S}_n \setminus \mathcal{B}(\mathbf{S}, \mu)$  est un fermé et donc  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\mathbf{S}_n \setminus \mathcal{B}(\mathbf{S}, \mu))$  est une intersection vide de fermés. Par conséquent, la compacité de  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  nous assure qu'il existe  $N_\mu \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathbf{S}_{N_\mu} \subseteq \mathcal{B}(\mathbf{S}, \mu)$ .

Soit maintenant  $x$  un élément de  $\mathbf{S}_{N_\mu}$ . Il existe  $x_S$  dans  $\mathbf{S}$  tel que  $d(x, x_S) \leq \mu$ . De plus,  $d(\sigma_{(0,1)}(x), \sigma_{(0,1)}(x_S)) \leq 2\mu \leq \varepsilon/3$ . Donc  $d(\sigma_{(0,1)}(x), \sigma_{(0,1)}(x_S)) \leq \mu$ . Il en va de même pour  $\sigma_{(1,0)}(x)$  et  $\sigma_{(1,0)}(x_S)$  et on en déduit ainsi, pour tout vecteur  $v \in \mathbb{Z}^2$ ,  $d(\sigma_v(x), \sigma_v(x_S)) \leq \mu < 1$ . Donc  $x = x_S$ .

Par conséquent  $\mathbf{S}_{N_\mu} = \mathbf{S}$ . On en conclut que  $\mathbf{S}$  est de type fini par la Proposition 3.6.  $\square$

**Théorème 3.9.** *Soit  $(\mathbf{S}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de sous-shifts de type fini non vides et deux à deux disjoints, alors l'ensemble  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{S}_i$  n'est pas fermé.*

*Démonstration.* Par l'absurde, supposons que  $\mathbf{S} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{S}_i$  soit fermé (et donc un sous-shift car il est invariant par translation). Pour chaque entier  $i$ , soit  $x_i$  une configuration de  $\mathbf{S}_i$ . Par compacité de  $\mathbf{S}$ , il existe une configuration  $x$  qui est point d'accumulation de la suite  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . Sans perte de généralité nous pouvons supposer que  $x$  est dans  $\mathbf{S}_1$ .

Comme aucun des  $x_i, i \geq 2$ , n'est dans  $\mathbf{S}_1$ , il existe un motif dans  $x_i$  qui est interdit dans  $\mathbf{S}_1$ . Soit  $v_i$  le point le plus proche de l'origine (pour la norme  $\|\cdot\|$ ) où apparaît ce motif dans  $x_i$ . Comme  $\mathbf{S}_1$  est de type fini, ce motif est de taille bornée. Puisque  $x$  est un point d'accumulation de la suite  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $v_i$  tend vers l'infini quand  $i$  tend vers l'infini.

Soit  $y_i = \sigma_{v_i}(x_i)$ . Nous pouvons supposer sans perte de généralité, quitte à prendre une extraction, que la suite  $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  converge vers  $y \in \mathbf{S}$ . Comme les motifs sur lesquels nous nous sommes centrés pour obtenir les  $y_i$  sont de taille bornée,  $y$  contient un motif interdit pour  $\mathbf{S}_1$  : à partir d'un certain rang,  $y_i$  coïncide avec  $y$  sur un domaine contenant un motif interdit dans  $\mathbf{S}_1$ . De plus,  $y_i$  contient, en son centre, un motif défini sur  $[0; -v_i/2]^2$  n'étant pas interdit par  $\mathbf{S}_1$ . Nous pouvons supposer sans perdre de généralité que  $v_i$  appartient toujours au même quart de plan de  $\mathbb{Z}^2$ . Ceci entraîne que  $y$  contient un quart de plan constitué de motifs qui ne sont pas interdits pour  $\mathbf{S}_1$  car  $v_i$  tend vers l'infini quand  $i$  tend vers l'infini.

Comme les  $\mathbf{S}_i$  sont fermés et invariants par translation, une suite de décalés de  $y$  dans ce quart de plan converge vers un élément de  $\mathbf{S}_1$  et comme les  $\mathbf{S}_i$  ont été supposés disjoints,  $y$  est aussi dans  $\mathbf{S}_1$  ce qui est impossible par construction.  $\square$

### 3.3 Stabilité des espaces de pavages

Comme les espaces de pavages sont des ensembles, nous sommes en droit de nous poser la question de leur stabilité vis-à-vis des opérations ensemblistes classiques : l'union et l'intersection, finie ou infinie.

La caractérisation des espaces de pavages généralisés par les sous-shifts (Théorème 3.4) nous permet d'en déduire directement les propriétés de stabilité suivantes :

**Théorème 3.10** (Stabilité des espaces de pavages généralisés). *Les espaces de pavages généralisés sont stables par :*

- Union finie
- Intersection quelconque.

*Démonstration.* L'invariance par translation est stable par union et intersection quelconque. Le fait d'être topologiquement fermé est stable par union finie et intersection quelconque.  $\square$

Les sous-shifts de type fini étant des cas particuliers des espaces de pavages généralisés, le Théorème 3.9 montre que les espaces de pavages généralisés ne sont pas stables par union quelconque, même si l'on suppose l'union disjointe car il existe une



infinité de sous-shifts de type fini disjoints : il suffit de considérer ceux contenant toutes les configurations de bipériode  $p$  pour  $p$  premier. L'intersection d'espaces de pavages généralisés peut aussi se faire au niveau des motifs interdits plutôt qu'au niveau topologique via la remarque suivante :

**Remarque 3.11.** *Pour une famille  $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$  d'ensembles de motifs :*

$$\bigcap_{i \in I} \mathbf{T}_{\mathcal{F}_i} = \mathbf{T}_{\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i}$$

Les espaces de pavages ont aussi des propriétés de stabilité par ces opérations ensemblistes, même si elles sont plus faibles :

**Théorème 3.12** (Stabilité des espaces de pavages). *Les espaces de pavages sont stables par :*

- *Union disjointe finie*
- *Intersection finie.*

*Démonstration.* L'intersection finie est une conséquence directe de la Remarque 3.11.

Pour l'union disjointe finie, nous n'allons le prouver que pour deux espaces de pavages disjoints, la généralisation à une union disjointe finie venant d'une induction *ad hoc*.

Soient  $\mathbf{S}_1$  et  $\mathbf{S}_2$  deux sous-shifts de type fini disjoints.  $\mathbf{S}_1$  et  $\mathbf{S}_2$  étant deux compacts disjoints, il existe un réel strictement positif  $\varepsilon$  tel que  $d(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) > \varepsilon$ . Soit  $n$  un entier tel que si deux configurations coïncident en leur centre sur un motif de taille  $[-n; n]^2$  alors elles sont à distance inférieure à  $\varepsilon/2$ . Nous pouvons de plus supposer que les domaines de définition des motifs interdits par  $\mathbf{S}_1$  et  $\mathbf{S}_2$  sont inclus dans  $[-n; n]^2$  car il n'y en a qu'un nombre fini. Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble des motifs définis sur  $[-n; n]^2$  qui n'apparaissent dans aucune configuration de  $\mathbf{S}_1$  ni de  $\mathbf{S}_2$ . Nous allons montrer :  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}} = \mathbf{S}_1 \amalg \mathbf{S}_2$ .

Il est clair que  $\mathbf{S}_1 \amalg \mathbf{S}_2$  est un sous-ensemble de  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$ .

Par définition de  $n$ , les motifs de taille  $[-n; n]^2$  apparaissant dans une configuration de  $\mathbf{S}_1$  et ceux apparaissant dans une configuration de  $\mathbf{S}_2$  forment des ensembles disjoints. Soit  $c$  une configuration de  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$ . Le motif de taille  $[-n; n]^2$  au centre de  $c$  apparaît dans une configuration de  $\mathbf{S}_1$  ou une de  $\mathbf{S}_2$  ; mettons que ce soit une configuration  $x$  de  $\mathbf{S}_1$ .

Puisque  $d(c, x) < \varepsilon/2$ , pour un vecteur  $v \in \{(0, 1), (1, 0)\}$ , nous obtenons :  $d(\sigma_v(c), \sigma_v(x)) < \varepsilon$ . Ainsi, le motif de taille  $[-n; n]^2$  au centre de  $\sigma_v(c)$  ne peut pas apparaître dans une configuration de  $\mathbf{S}_2$ , donc il apparaît dans une configuration de  $\mathbf{S}_1$ . D'où  $d(\sigma_v(c), y) \leq \varepsilon/2$  pour une configuration  $y$  de  $\mathbf{S}_1$ .

En itérant cette méthode on obtient que pour tout vecteur  $v$  de  $\mathbb{Z}^2$ , le motif de taille  $[-n; n]^2$  au centre de  $\sigma_v(c)$  apparaît dans une configuration de  $\mathbf{S}_1$ . En d'autres termes,  $c$  ne contient aucun motif interdit par  $\mathbf{S}_1$ , donc  $c \in \mathbf{S}_1$ .  $\square$

Les espaces de pavages ne sont pas stables par intersection quelconque pour la simple et bonne raison que tout espace de pavages généralisé peut s'écrire comme intersection dénombrable d'espaces de pavages et qu'il existe des espaces de pavages généralisés qui ne sont pas des espaces de pavages (voir la Section 1.4 et la Figure 1.12).

Le Théorème 3.9 dit qu'une union disjointe infinie d'espaces de pavages n'est jamais fermée, ainsi, *a fortiori*, une telle union disjointe n'est jamais un espace de pavage.

Une union non disjointe d'espaces de pavages peut ne pas être un espace de pavages. Considérons  $\mathbf{Q} = \{\blacksquare, \blacksquare, \blacksquare\}$ ,  $\mathcal{F}_1 = \{\blacksquare\}$  et  $\mathcal{F}_2 = \{\blacksquare\}$ .  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}_1}$  est égal à  $\{\blacksquare, \blacksquare\}^{\mathbb{Z}^2}$  alors que  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}_2}$  est égal à  $\{\blacksquare, \blacksquare\}^{\mathbb{Z}^2}$ . On obtient  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}_1} \cup \mathbf{T}_{\mathcal{F}_2}$  en interdisant tous les motifs constitués de deux points : un  $\blacksquare$  et un  $\blacksquare$ . Si cette union était de type fini, il existerait un sous-ensemble fini de ces motifs la définissant ; or un tel sous-ensemble fini autoriserait une configuration constituée de points  $\blacksquare$  partout sauf en deux points, un  $\blacksquare$  et un  $\blacksquare$  qui n'est pas dans  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}_1} \cup \mathbf{T}_{\mathcal{F}_2}$ .

### 3.4 Cantor-Bendixson

Dans cette section nous définissons les notions de dérivée topologique et de rang de Cantor-Bendixson [Kur66] que nous appliquerons aux pavages et sous-shifts.

Dans un espace topologique  $\mathbf{S}$ , un élément  $c$  est *isolé* dans  $\mathbf{S}$  s'il existe un ouvert  $\mathcal{O}$  tel que  $\mathbf{S} \cap \mathcal{O} = \{c\}$ . Dans notre cas, puisque les ensembles  $\mathcal{O}_{\mathbf{M}}$  forment une base de la topologie, une configuration  $c$  est isolée dans un ensemble de configurations  $\mathbf{S}$  si et seulement si il existe un motif  $\mathbf{P}$  (de domaine  $\mathcal{D}_{\mathbf{P}}$ ) tel que  $c$  soit l'unique configuration de  $\mathbf{S}$  à contenir  $\mathbf{P}$  en son centre ( $c|_{\mathcal{D}_{\mathbf{P}}} = \mathbf{P}$ ). Autrement dit,  $c$  est l'unique configuration à décaler près à contenir le motif  $\mathbf{P}$ . On dit que  $\mathbf{P}$  isole  $c$  dans  $\mathbf{S}$ .

**Définition 3.13** (Dérivée topologique). *Pour un ensemble de configurations  $\mathbf{S}$ , sa dérivée topologique est constituée de ses éléments qui ne sont pas isolés dans  $\mathbf{S}$ ; on la note  $\mathbf{S}'$ .*

On remarque que si notre ensemble  $\mathbf{S}$  est un sous-shift et si  $\mathbf{P}$  isole  $c$  dans  $\mathbf{S}$  alors toute configuration de  $\mathbf{S}$  qui contient  $\mathbf{P}$  est isolée ; de plus, l'ensemble des points isolés de  $\mathbf{S}$  est un ouvert de  $\mathbf{S}$  en tant qu'union de singletons ouverts, par conséquent,  $\mathbf{S}'$  est un sous-shift. En revanche, la dérivation topologique ne préserve pas le fait d'être de type fini comme on peut le voir sur la suite de dérivations représentée sur la Figure 3.1 : les configurations isolées sont celles sur la première ligne, si l'on veut interdire aux configurations de cette ligne d'être valides mais en autorisant toutes les autres par un ensemble fini de motifs interdits alors nous autorisons forcément une configuration du type de celle sur la première ligne à être valide.

**Définition 3.14** (Dérivation topologique). *Nous définissons la dérivée topologique pour tout ordinal  $\lambda$  par induction :*

- $\mathbf{S}^{(0)} = \mathbf{S}$
- $\mathbf{S}^{(\alpha+1)} = (\mathbf{S}^{(\alpha)})'$
- $\mathbf{S}^{(\lambda)} = \bigcap_{\alpha < \lambda} \mathbf{S}^{(\alpha)}$

De même que pour  $\mathbf{S}'$ , si  $\mathbf{S}$  est un sous-shift alors pour tout ordinal  $\lambda$ ,  $\mathbf{S}^{(\lambda)}$  est un sous-shift aussi d'après le Théorème 3.10.

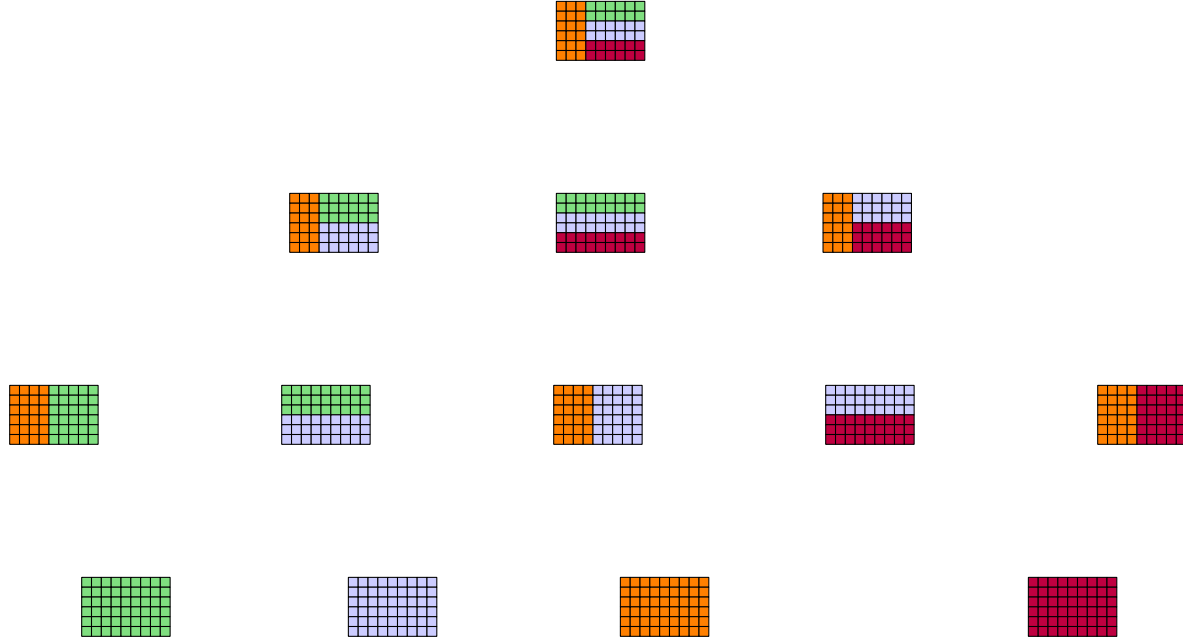


FIGURE 3.1 – Exemple d’une suite de dérivations topologiques pour l’ensemble de pavages obtenus à partir du jeu de tuile de la Figure 1.10. La première ligne représente les configurations isolées, la deuxième celles isolées une fois que la première a été enlevée et ainsi de suite.

**Définition 3.15.** Un élément  $c$  de  $\mathbf{S}$  est de rang  $\beta$  (dans  $\mathbf{S}$ ) si  $\beta$  est le plus petit ordinal tel que  $c \notin \mathbf{S}^{(\beta)}$ .

S’il n’existe pas de tel  $\beta$ , alors nous disons que  $c$  n’a pas de rang de Cantor-Bendixson.

Lorsqu’il est bien défini, nous noterons ce rang  $\rho(c)$ .

Par exemple, toutes les configurations quasi-périodiques n’admettant aucune direction de périodicité n’ont pas de rang de Cantor-Bendixson dans n’importe quel sous-shift. Soit  $c$  une telle configuration. Un sous-shift contenant  $c$  contient  $\Gamma(c)$ . Tout motif apparaissant dans  $c$  apparaît une infinité de fois par définition de la quasi-périodicité.  $c$  n’est pas isolée dans  $\Gamma(c)$  : pour tout motif  $M$  apparaissant au centre de  $c$ , ce motif apparaît ailleurs dans  $c$  et ainsi au centre de  $\sigma_v(c)$  pour un certain  $v \in \mathbb{Z}^2$  et  $c \neq \sigma_v(c)$  sinon  $c$  admettrait un vecteur de périodicité non trivial.

L’étude du rang de Cantor-Bendixson sur les sous-shifts amène d’intéressantes propriétés. Pour un sous-shift  $\mathbf{S}$ , il existe un ordinal dénombrable  $\lambda$  tel que  $\mathbf{S}^{(\lambda)} = \mathbf{S}^{(\lambda+1)}$ . En effet, à chaque étape de l’induction on interdit à des motifs d’apparaître à une position donnée et il n’y a qu’un nombre dénombrable de motifs. On appelle le plus petit de ces ordinaux le rang de Cantor-Bendixson de  $\mathbf{S}$  [Kur66, Paragraphe 24]. Par consé-

quent, si le rang de Cantor-Bendixson est bien défini pour toutes les configurations alors  $\mathbf{S}$  est dénombrable en tant qu'union dénombrable d'ensembles dénombrables. Lorsque ce n'est pas le cas, le rang de Cantor-Bendixson permet de mieux décrire ce qu'il se passe :

**Lemme 3.16.** *Un sous-shift  $\mathbf{S}$  est soit dénombrable soit a un sous-ensemble parfait non-vide.*

*Démonstration.* Soit  $\lambda$  le rang de Cantor-Bendixson de  $\mathbf{S}$ .  $\mathbf{S}^{(\lambda)} = \mathbf{S}^{(\lambda+1)}$  est donc un ensemble parfait : il ne contient aucun point isolé et est fermé. Par conséquent, si  $\mathbf{S}^{(\lambda)}$  est vide alors  $\mathbf{S}$  est dénombrable car tous ses éléments ont un rang de Cantor-Bendixson.  $\square$

De plus, les propriétés particulières de la topologie utilisée sur  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  permettent de renforcer le Lemme 3.16.  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  étant un espace compact, parfait et 0-dimensionnel (il admet une base d'ouverts-fermés), le résultat général suivant permet de régler le cas où  $\mathbf{S}$  n'est pas dénombrable :

**Proposition 3.17.** *Tout espace compact parfait non vide et 0-dimensionnel a au moins la cardinalité du continu.*

*Démonstration.* Pour cela nous allons montrer que tout ouvert-fermé peut être coupé en deux ouverts-fermés non vides. Le résultat sera ainsi obtenu en partant de l'espace lui-même qui est ouvert fermé en le coupant en deux, puis en réitérant sur ces deux ouverts-fermés obtenus pour obtenir  $2^{\aleph_0}$  suites décroissantes d'ouverts-fermés.

Soient  $\mathbf{C}$  un ouvert-fermé et  $x, y \in \mathbf{C}, x \neq y$ . Comme notre espace est séparé, on a un ouvert (que l'on peut aussi supposer fermé car l'espace est 0-dimensionnel)  $\mathcal{O}$  tel que  $x \in \mathcal{O}$  et  $y \notin \mathcal{O}$ . Ainsi  $\mathbf{C} = \mathcal{O} \cup \mathbf{C} \setminus \mathcal{O}$ , où tous deux sont des ouverts-fermés non vides.

Comme l'espace est compact, une intersection infinie d'ouverts-fermés non-vides et décroissants ne peut pas être vide. Ainsi, chacune de ces  $2^{\aleph_0}$  suites définit au moins un élément, ce qui montre que l'espace a au moins la cardinalité du continu.  $\square$

**Théorème 3.18** ([BDJ08]). *Un sous-shift  $\mathbf{S}$  est dénombrable si et seulement si tous ses éléments ont un rang de Cantor-Bendixson.*

*Démonstration.* Nous avons déjà remarqué qu'il existe un ordinal dénombrable  $\lambda$  tel que  $\mathbf{S}^{(\lambda)} = \mathbf{S}^{(\lambda+1)}$ . Si  $\mathbf{S}$  est dénombrable alors  $\mathbf{S}^{(\lambda)}$  est vide d'après la Proposition 3.17 car c'est un ensemble parfait. Ainsi, tous ses éléments ont un rang de Cantor-Bendixson bien défini.

La réciproque a été faite plus haut : il suffit de remarquer que la dérivation topologique donne une surjection de l'ensemble dénombrable des ouverts  $\mathcal{O}_{\mathbf{M}}$  dans  $\mathbf{S}$  lorsque  $\mathbf{S}^{(\lambda)} = \emptyset$ .  $\square$

**Théorème 3.19** ([BDJ08]). *Un sous-shift est soit fini, soit infini dénombrable soit a la cardinalité du continu.*

*Démonstration.* Lemme 3.16 et Proposition 3.17.  $\square$

Le Théorème 3.19 est ce qui constitue le cœur de l'organisation du Chapitre 4. Bien que le Théorème 3.18 constitue en lui-même une caractérisation des sous-shifts dénombrables, nous cherchons à obtenir des résultats plus forts. Exhiber des pavages particuliers sous certaines conditions de cardinalité permet de travailler à partir de ces configurations par la suite.

### 3.5 Liens et problèmes ouverts

Alors qu'au Chapitre 2 nous avons défini et étudié un pré-ordre de nature combinatoire sur les pavages ( $\preceq$ ), dans ce chapitre nous nous sommes concentrés sur la topologie des espaces de pavages (ou sous-shifts). Cette topologie nous a permis de définir le rang de Cantor-Bendixson  $\rho$  sur ces espaces. Ces deux notions ne sont pas complètement disjointes et c'est ce qui va nous permettre d'aller plus loin :

**Proposition 3.20** ([BDJ08]). *Soient deux configurations  $x$  et  $y$  ayant un rang de Cantor-Bendixson dans  $\mathbf{S}$  telles que  $x \prec y$ . Alors  $\rho(x) > \rho(y)$ .*

*Démonstration.* Par définition de  $\preceq$ , tout motif qui apparaît dans  $x$  apparaît aussi dans  $y$ . Par conséquent, si  $\mathbf{P}$  isole  $x$  dans  $\mathbf{S}^{(\lambda)}$ ,  $x$  est le seul pavage à contenir  $\mathbf{P}$  dans  $\mathbf{S}^{(\lambda)}$ , ainsi  $y$  ne peut pas être dans  $\mathbf{S}^{(\lambda)}$ .  $\square$

Puisque d'après le Théorème 3.18, tous les éléments d'un sous-shift dénombrable ont un rang de Cantor-Bendixson, la Proposition 3.20 indique qu'une chaîne infinie croissante pour  $\prec$  nous donnerait une chaîne infinie décroissante d'ordinaux, ce qui est impossible, nous obtenons le théorème suivant :

**Théorème 3.21** ([BDJ08]). *Si un sous-shift  $\mathbf{S}$  est dénombrable, alors il n'existe pas de chaîne infinie croissante pour  $\prec$ .*

**Lemme 3.22.** *Soit  $x$  une configuration de  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  et  $\Gamma(x)^\prec = \Gamma(x) \setminus \langle x \rangle$  l'ensemble  $\{c \in \mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}, c \prec x\}$ . Alors  $\Gamma(x)^\prec$  est un sous-shift si et seulement si  $x$  contient un motif  $\mathbf{P}$  n'apparaissant dans aucune configuration de  $\Gamma(x)^\prec$ .*

*Démonstration.*  $\Leftarrow$ :  $\Gamma(x)$  est un sous-shift, si de plus on interdit au motif  $\mathbf{P}$  d'apparaître, on obtient  $\Gamma(x)^\prec$  qui est donc aussi un sous-shift.

$\Rightarrow$ : Par définition,  $\Gamma(x)^\prec$  est invariant par décalage. Par l'absurde, supposons que tout motif de  $x$  apparaît dans une configuration de  $\Gamma(x)^\prec$ . Soit  $\mathbf{P}_n$  la suite de motifs de taille  $[-n; n]^2$  apparaissant au centre de  $x$ . Le motif  $\mathbf{P}_n$  apparaît au centre d'une configuration  $x_n$  de  $\Gamma(x)^\prec$ . La suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x$ . Comme nous avons supposé que  $\Gamma(x)^\prec$  était un sous-shift, et donc *a fortiori* fermé,  $x \in \Gamma(x)^\prec$  ce qui est impossible.  $\square$

La Proposition 3.20 ainsi que le Lemme 3.22 nous assurent que si  $x$  est une configuration telle que  $\Gamma(x)$  soit dénombrable, alors  $\Gamma(x)^\prec = \Gamma(x)'$  est un sous-shift.

Pour un sous-shift dénombrable de rang de Cantor-Bendixson fini, noté  $n$ , la Proposition 3.20 montre qu'il n'existe pas de chaîne strictement croissante pour  $\preceq$  de longueur supérieure à  $n$ ; ceci prouve que les niveaux pour  $\preceq$  dans un tel sous-shift sont

bien définis, discrets, et même bornés par  $n$ . Ceci amène naturellement au problème ouvert suivant :

**Problème ouvert 1.** *Est-ce que le rang de Cantor-Bendixson d'un sous-shift (de type fini ?) dénombrable est forcément fini ?*

Une réponse à cette question semble hors de portée pour l'instant. Nous ne connaissons aucun exemple de sous-shift dénombrable de rang de Cantor-Bendixson infini. Nous pouvons en construire de rang de Cantor-Bendixson arbitrairement grand, nous y revenons au Chapitre 4.

Nous pouvons aussi construire un sous-espace dénombrable et compact du Cantor  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Cette construction est inspirée d'une méthode générale pour construire des espaces de cardinalité  $\alpha$  et de rang de Cantor-Bendixson  $\alpha$  détaillée dans [Mil09]. Considérons les ensembles  $B_k^i = \{1^{k+1}0(1^+0)^i1^\omega\}$ . Chaque point de  $B_k^i$  est point d'accumulation de points de  $B_k^{i+1}$ . Par conséquent, les ensembles  $A_k = \bigcup_{i \leq k} B_k^i \cup \{1^\omega\}$  sont des ensembles dénombrables de rang de Cantor-Bendixson au moins  $k$ . De plus les  $A_k$  sont fermés : si l'on fait grandir le nombre de uns dans une partie  $1^+0$  d'un élément d'un  $B_k^i$  alors on converge vers un élément de  $B_k^j$  avec  $j < i$ , donc un élément de  $A^k$ . L'ensemble  $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$  est un ensemble dénombrable de rang de Cantor-Bendixson infini. L'ensemble  $A$  est fermé : soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergente d'éléments de  $A$ . Si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne visite qu'un nombre fini de  $A_k$  alors sa limite est dans  $A$ . Sinon, nous pouvons supposer sans perte de généralité (quitte à extraire) que  $a_n$  est dans  $A_m$  avec  $m \geq n$ . Ainsi,  $a_n$  commence par un mot de la forme  $1^n \dots$  et converge vers  $1^\omega$ . L'ensemble  $A$  est ainsi un sous-espace compact et dénombrable du Cantor qui est de rang de Cantor-Bendixson infini.

Nous pouvons être amenés à penser que cet ensemble  $A$  permet de construire un sous-shift qui infirmerait le Problème ouvert 1 : pourquoi ne pas le compléter à gauche par  ${}^\omega 2$  et prendre la clôture topologique de l'ensemble de ses décalés ? Nous obtenons ainsi un sous-shift  $\mathbf{S}$  de  $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{Z}}$ . En revanche, nous ne pouvons pas éviter les configurations du type :  $\dots 1^{a_i-1}01^{a_i}01^{a_i+1}0 \dots$  où  $a_i$  est une suite indexée par  $\mathbb{Z}$  et à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ , ce qui rend le sous-shift obtenu non dénombrable.

Cependant, ce sous-shift est indénombrable et de rang de Cantor-Bendixson infini. Un élément  $x$  de  $A$  est isolé dans  $A$  si et seulement si tous les décalés de  ${}^\omega 2x$  sont isolés dans  $\mathbf{S}$  : si  $w$  isole une configuration de  $A$  alors  $2w$  isole une configuration de  $\mathbf{S}$ . Par conséquent, pour tout entier  $n$ , il existe des éléments isolés dans  $\mathbf{S}^{(n)}$ , donc  $\mathbf{S}$  est un sous-shift indénombrable de rang de Cantor-Bendixson infini.



## Chapitre 4

# Espaces de pavages et cardinalité

Dans ce chapitre nous faisons une étude systématique des espaces de pavages (généralisés ou non) en fonction de leur cardinalité. Le Théorème 3.19 montre qu'il n'y a que trois cas possibles pour la cardinalité d'un espace de pavages : fini (Section 4.1), infini dénombrable (Section 4.2) ou la cardinalité du continu (Section 4.3). Bien que nous ayons déjà obtenu des caractérisations des espaces de pavages de cardinalité dénombrable à la Section 3.4, notre travail va être ici de caractériser ces espaces de pavages par des propriétés géométriques, d'exhiber certaines configurations particulières sous certaines conditions de cardinalité, ou encore de déduire des propriétés structurelles fortes sur les espaces de pavages d'une cardinalité donnée.

### 4.1 Espaces finis de pavages

Dans cette section nous étudions les espaces de pavages généralisés finis. Nous pouvons d'ores et déjà commencer par le théorème fondamental pour cette section qui caractérise de tels espaces de pavages :

**Théorème 4.1** ([BDJ08]). *Un espace de pavages généralisé  $S$  est fini si et seulement si il ne contient que des configurations bipériodiques.*

On remarque qu'un simple argument de compacité ne suffit pas à prouver ce théorème : il n'y a pas de raison pour qu'une suite convergente de pavages périodiques (de période croissante) converge vers une configuration non périodique ; en effet il existe de telles suites, telle celle représentée sur la Figure 4.1.

L'idée principale de la preuve est la suivante : même si l'on ne peut pas conclure directement qu'une suite de configurations périodiques n'a pas de limite périodique, nous pouvons prendre des décalés de ces configurations pour obtenir une suite ne convergeant pas vers une limite périodique tel que représenté sur la Figure 4.2. C'est ce que nous avons fait pour démontrer le Théorème 3.9, que nous réutilisons ici.





FIGURE 4.1 – Exemple de configurations périodiques ayant une limite périodique.

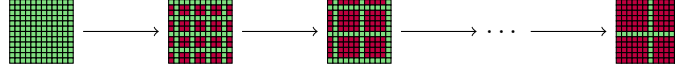


FIGURE 4.2 – Exemple de configurations périodiques ayant une limite non périodique.

*Démonstration.* Comme les espaces de pavages généralisés sont invariants par translation, les espaces de pavages généralisés finis ne contiennent que des configurations bipériodiques.

Supposons que  $\mathbf{S}$  soit infini mais ne contienne que des configurations bipériodiques. Soit  $\mathbf{S}_n$  l'ensemble des configurations de  $\mathbf{S}$  de bipériode exactement  $n$  (i.e., si  $i < n$ , les configurations de bipériode  $i$  ne sont pas dans  $\mathbf{S}_n$ ).

Les  $\mathbf{S}_n$  sont finis car, à  $n$  fixé, il n'existe qu'un nombre fini de configurations de bipériode  $n$ , de plus ils sont fermés et invariants par décalage ; ce sont donc des sous-shifts de type fini d'après la Proposition 3.8.

Par définition, les  $\mathbf{S}_n$  sont disjoints deux à deux. Si l'on suppose  $\mathbf{S}$  infini alors il existe une infinité de  $\mathbf{S}_n$  non vides et, d'après le Théorème 3.9,  $\mathbf{S}$  ne peut pas être fermé et n'est donc pas un sous-shift.  $\square$

Maintenant que nous savons caractériser les espaces de pavages généralisés finis, il ne nous reste plus qu'à étudier plus en détails leur structure. Premièrement, un espace de pavages généralisé  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  fini est discret, c'est à dire qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que, pour deux configurations  $x$  et  $y$  de  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$ , si  $d(x, y) < \varepsilon$  alors  $x = y$ . Nous pouvons traduire cette propriété en termes de motifs : un espace de pavages généralisé  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  est fini si et seulement si il existe un sous ensemble fini  $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$  de  $\mathbb{Z}^2$  tel que si deux configurations  $x$  et  $y$  de  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  coïncident sur  $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$  alors elles sont égales partout. En effet, s'il existe un tel domaine  $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$ , on peut mettre en bijection  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  et l'ensemble fini des motifs définis sur  $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$  donc  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  est fini ; pour la réciproque si  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  est infini alors il existe un point d'accumulation et par définition de la métrique sur  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  il ne peut pas exister de tel domaine fini.

**Définition 4.2.** Pour un ensemble de pavages généralisé fini  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  nous notons  $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$  et l'appellerons le domaine critique de  $\mathcal{F}$ , l'ensemble vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbf{T}_{\mathcal{F}}, x|_{\mathcal{X}_{\mathcal{F}}} = y|_{\mathcal{X}_{\mathcal{F}}} \Rightarrow x = y$$

Le Lemme 3.5 nous assure que, lorsque nous avons un motif suffisamment grand pavé correctement, alors une partie de ce motif apparaît dans un pavage du plan. Cette propriété permet de faire hériter aux motifs apparaissant dans une configuration d'un

espace de pavages généralisé la notion d'union définie à la Section 1.2, sous certaines conditions de taille :

**Lemme 4.3** (Lemme de recollement). *Pour un espace fini de pavages généralisé  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$ , si  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont deux motifs compatibles qui apparaissent dans deux (possiblement différentes) configurations de  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  et s'ils contiennent  $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$  dans leur domaine de définition commun ( $\mathcal{X}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{D}_{\mathbf{A}} \cap \mathcal{D}_{\mathbf{B}}$ ) alors  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$  apparaissent dans la même configuration de  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$ .*

*Démonstration.* Soit  $a$  un pavage contenant  $\mathbf{A}$  et  $b$  un pavage contenant  $\mathbf{B}$ ; comme  $\mathcal{X}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{D}_{\mathbf{A}} \cap \mathcal{D}_{\mathbf{B}}$ ,  $a$  et  $b$  sont égales sur  $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$  donc égales partout. Ainsi,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$  apparaissent dans  $a (= b)$ .  $\square$

Maintenant, par induction, si nous avons une suite de motifs  $(\mathbf{M}_n)_{0 \leq n < N}$  tels qu'il existe  $v_n \in \mathbb{Z}^2$  avec  $\sigma_{v_n}(\mathcal{X}_{\mathcal{F}}) \subseteq \mathcal{D}_{\mathbf{M}_n} \cap \mathcal{D}_{\mathbf{M}_{n+1}}$  et tous les  $\mathbf{M}_n$  apparaissent dans une configuration de  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  alors le motif  $\bigcup_{0 \leq n < N} \mathbf{M}_n$  apparaît aussi dans un pavage du plan.

## 4.2 Espaces dénombrables de pavages

Au Chapitre 3 nous avons démontré l'équivalence entre la dénombrabilité d'un espace de pavages et le fait que tous les pavages aient un rang de Cantor-Bendixson bien défini (Théorème 3.18). Ce résultat, bien que très utile et utilisé dans cette section, ne nous dit rien sur la forme des configurations d'un espace de pavages dénombrable ni sur la structure d'un tel espace. Cette section est ainsi dédiée à l'étude approfondie de la structure de tels espaces.

En restreignant la cardinalité d'un espace de pavages au dénombrable, nous obtenons des contraintes fortes sur la forme des configurations qu'il contient. En premier lieu, nous pouvons déduire l'égalité des relations  $\approx$  (avoir les mêmes motifs) et "être égal modulo une translation" dans de tels espaces de pavages à partir du lemme suivant :

**Lemme 4.4.** *Si un espace de pavages généralisé  $\mathbf{S}$  contient deux configurations  $x$  et  $y$  telles que  $x \approx y$  et  $x$  n'est pas un translaté de  $y$  alors  $\mathbf{S}$  a la cardinalité du continu.*

*Démonstration.* Nous allons montrer que  $\Gamma(x)$  est un espace parfait, i.e., fermé sans point isolé; ainsi  $\Gamma(x)$  a la cardinalité du continu d'après la Proposition 3.17 et il en va de même pour  $\mathbf{S}$  car  $\Gamma(x)$  est un sous ensemble de  $\mathbf{S}$ .

Par l'absurde, supposons que  $\Gamma(x)$  contienne un point isolé  $z$ . Il existe un  $v \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $z = \sigma_v(x)$  sinon  $z$  serait limite d'une suite non stationnaire de décalés de  $x$  et ainsi non isolé. Soit  $\mathbf{P}$  un motif isolant  $z$  dans  $\mathbf{S}$ , i.e., tel que  $\Gamma(x) \cap \mathcal{O}_{\mathbf{P}} = \{z\}$ .  $\mathbf{P}$  apparaît aussi dans  $y$ , ainsi il existe  $w \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $\sigma_w(y) \in \mathcal{O}_{\mathbf{P}}$ , donc  $\sigma_w(y) = z = \sigma_v(x)$  et ainsi  $x$  serait un décalé de  $y$ .  $\square$

**Corollaire 4.5.** *Dans un espace dénombrable de pavages généralisé, si  $x$  et  $y$  sont deux configurations telles que  $x \approx y$  alors  $x$  est un translaté de  $y$ .*

De plus, nous savons d'après le Théorème 2.15 que tout espace de pavages généralisé contient un élément minimal pour  $\preceq$ . La Proposition 2.16 caractérise ces minimaux par les configurations quasi-périodiques mais si  $x$  est un élément minimal d'un espace dénombrable de pavages alors le Lemme 4.4 nous assure que  $\Gamma(x)$  ne contient que des translatés de  $x$  et nous obtenons ainsi une nouvelle caractérisation des minimaux dans les espaces dénombrables de pavages :

**Corollaire 4.6** ([Dol95, BDJ08]). *Tous les éléments minimaux pour  $\preceq$  d'un espace dénombrable de pavages généralisé sont bipériodiques.*

Le Corollaire 4.6 était un résultat déjà connu [Dol95]. La preuve faisait intervenir de nombreux arguments combinatoires qui mimaient le formalisme du rang de Cantor-Bendixson.

Rappelons qu'un espace de pavages généralisé infini ne peut pas ne contenir que des configurations bipériodiques d'après le Théorème 4.1. Ainsi, d'après le Corollaire 4.6, une telle configuration non bipériodique dans un espace de pavages généralisé dénombrable ne peut pas être minimale pour  $\preceq$ . Ceci signifie que, dans un espace de pavages généralisé infini dénombrable, il existe des configurations qui ont un niveau non nul pour  $\preceq$ . Nous pouvons en dire un peu plus sur les niveaux des configurations dans les espaces de pavages dénombrables :

**Lemme 4.7.** *Dans un espace de pavages généralisé dénombrable il n'existe pas de chaîne infinie décroissante pour  $\preceq$  jusqu'au niveau 0.*

*Démonstration.* Par l'absurde, soit  $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une telle chaîne infinie décroissante et  $\mathbf{S} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \Gamma(c_i)$ .  $\mathbf{S}$  est un espace de pavages généralisé qui ne contient que des configurations bipériodiques; or le Théorème 4.1 stipule que les espaces de pavages généralisés ne contenant que des configurations bipériodiques sont finis. La Proposition 3.8 montre que tout espace de pavages généralisé fini est un espace de pavages. Ainsi la chaîne strictement décroissante d'espaces de pavages généralisés  $(\Gamma(c_i))_{i \in \mathbb{N}}$  est stationnaire d'après la caractérisation des espaces de pavages par la Proposition 3.6, ce qui est impossible.  $\square$

Par conséquent, le Lemme 4.7 nous assure que le niveau 1 est toujours bien défini dans des espaces de pavages généralisés dénombrables :

**Lemme 4.8** ([BDJ08]). *Un espace de pavages généralisé dénombrable  $\mathbf{S}$  contient une configuration au niveau 1 pour  $\preceq$ .*

*Démonstration.* Considérons l'ensemble  $\mathbf{S}'$  des configurations non minimales dans  $\mathbf{S}$  et soit  $(c_i)_{i \in I}$  une chaîne infinie décroissante dans  $\mathbf{S}'$ . D'après le Lemme 4.7, l'ensemble des configurations  $c \in \mathbf{S}$  telles que  $\forall i \in I, c \preceq c_i$  ne peut pas être constitué seulement de configurations minimales, ainsi il existe  $c' \in \mathbf{S}'$  telle que  $\forall i \in I, c' \preceq c_i$ . Par conséquent la chaîne  $(c_i)_{i \in I}$  a un minorant dans  $\mathbf{S}'$ .

Par le lemme de Zorn,  $\mathbf{S}'$  admet un élément minimal pour  $\preceq$ . Cet élément minimal est tel que toutes les configurations lui étant strictement inférieures pour  $\preceq$  sont minimales pour  $\preceq$  dans  $\mathbf{S}$ , ainsi, un élément minimal dans  $\mathbf{S}'$  est au niveau 1 dans  $\mathbf{S}$ .  $\square$

Maintenant que nous avons prouvé l'existence du niveau 1 dans les espaces de pavages généralisés dénombrables, nous pouvons essayer de caractériser les configurations à ce niveau :

**Théorème 4.9.** *Dans un espace de pavages généralisé dénombrable  $\mathbf{S}$ , une configuration  $c$  au niveau 1 ne peut être que d'un des deux types suivants :*

1.  *$c$  a tous ses motifs qui apparaissent une infinité de fois : dans ce cas  $c$  admet une direction de périodicité (mais pas deux) et coïncide sur deux demi-plans avec une (pour chaque demi-plan) configuration  $x \prec c$*
2.  *$c$  contient un motif  $n$ 'apparaissant qu'une seule fois : dans ce cas  $c$  est égal à une configuration bipériodique sauf sur un domaine fini.*

*Démonstration.* D'après la Remarque 2.7,  $c$  contient un motif qui n'apparaît qu'une seule fois ou alors tous ses motifs apparaissent une infinité de fois.

**Cas 1 :**  $c$  a tous ses motifs qui apparaissent une infinité de fois. D'après le Théorème 3.18, il existe un ordinal  $\lambda$  pour lequel  $c$  est isolée dans  $\mathbf{S}^{(\lambda)}$ . Soit  $\mathbf{P}$  un motif qui isole  $c$  dans  $\mathbf{S}^{(\lambda)}$  ; par hypothèse,  $\mathbf{P}$  apparaît une infinité de fois dans  $c$ , ainsi il apparaît au même endroit dans  $\sigma_v(c)$  pour un certain  $(0, 0) \neq v \in \mathbb{Z}^2$ . Comme  $\mathbf{P}$  isole  $c$ , nous obtenons  $\sigma_v(c) = c$  donc  $c$  admet une direction de périodicité.

Maintenant, si  $c$  admettait deux directions de périodicité,  $c$  serait bipériodique et donc au niveau 0.

L'ensemble  $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{(\lambda+1)} \cap \Gamma(c)$  est un espace de pavages généralisé ne contenant que des configurations  $x \prec c$ , donc que des configurations bipériodiques d'après le Corollaire 4.6.  $\mathbf{T}$  est fini d'après le Théorème 4.1 et est donc un espace de pavages d'après la Proposition 3.8. Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble fini de motifs tel que  $\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\mathcal{F}}$ . Soit  $y$  une configuration de  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  (on a  $y \prec c$  et  $y$  minimale pour  $\preceq$ ). Puisque nous avons déjà montré que  $c$  admettait une direction de périodicité, il nous suffit de montrer que  $c$  coïncide sur un quart de plan avec  $y$ .

Pour un  $n$  donné, soit  $\mathbf{A}_n$  le motif carré de taille  $n \times n$  centré en  $(0, 0)$  dans  $y$ .  $\mathbf{A}_n$  apparaît quelque part dans  $c$  car  $y \prec c$ . Soit  $\mathbf{P}_n$  un motif carré de taille  $k_n \times k_n$  de  $c$  tel que, une fois  $\mathbf{A}_n$  trouvé dans  $c$ , on étende au maximum la taille du domaine de définition de ce motif jusqu'à ce que l'on trouve un motif de  $\mathcal{F}$  ; on remarque qu'un tel motif maximal existe car sinon on aurait  $c \preceq y$ .

Ainsi, il existe un point au bord de  $\mathbf{P}_n$  où apparaît un motif de  $\mathcal{F}$  ; soit  $c_n$  le décalé de  $c$  centré sur ce motif. Par compacité et quitte à prendre une extraction de la suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on peut supposer cette suite convergente et on note sa limite  $z$ .

Nous pouvons aussi supposer que la position de  $\mathbf{P}_n$  dans  $c_n$  apparaît toujours dans le même quart de plan, quitte à extraire encore une fois. Comme la taille de  $\mathbf{P}_n$  tend vers l'infini quand  $n$  tend vers l'infini (par définition on a :  $k_n \geq n$ ),  $z$  coïncide sur un quart de plan avec  $y$ . De plus, chaque  $c_n$  contient en  $(0, 0)$  un motif de  $\mathcal{F}$  puisqu'ils sont de taille bornée, il en va ainsi de même pour leur limite  $z$ . Nous avons ainsi :  $y \prec z \preceq c$ , et comme nous avons supposé  $c$  au niveau 1,  $z \approx c$ . D'après le Corollaire 4.5,  $z$  est un décalé de  $c$  et ainsi  $c$  contient un quart de plan coïncidant avec  $y$ . La direction de périodicité de  $c$  nous permet d'étendre ce quart de plan à un demi-plan.

Sur l'autre demi-plan, nous pouvons extraire une suite de décalés de  $c$  convergeant vers une configuration périodique (car la limite ne contient pas  $\mathbf{P}$ ). Par le même rai-

sonnement nous en déduisons que  $c$  coïncide avec une configuration périodique sur un demi-plan disjoint du premier.

**Cas 2 :** Il existe un motif  $M$  n'apparaissant qu'une seule fois dans  $c$ . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer  $S = \Gamma(c)$ . Comme toutes les configurations minimales ont tous leurs motifs qui apparaissent une infinité de fois, si l'on interdit dans  $\Gamma(c)$  le motif  $M$  (n'apparaissant qu'une seule fois dans  $c$ ) on obtient un espace de pavages généralisé  $S'$  constitué des configurations strictement inférieures à  $c$  pour  $\preceq$ . Ainsi  $S'$  ne contient que des configurations périodiques et est donc fini d'après le Théorème 4.1.  $S'$  est donc un espace de pavages d'après la Proposition 3.8. Soit  $\mathcal{F}$  un ensemble fini de motifs tel que  $S' = \mathbf{T}_{\mathcal{F}}$ .

Considérons l'ensemble  $\mathbf{K} \subseteq \mathbb{Z}^2$  des points où apparaît un motif de  $\mathcal{F}$  dans  $c$ . Si  $\mathbf{K}$  est infini, nous avons une suite de translatés de  $c$  qui contiennent tous un motif interdit dans  $S'$  en leur centre. Quitte à extraire, nous pouvons supposer cette suite convergente par compacité, de limite notée  $x$ . Par construction  $x$  n'est pas dans  $S'$  car les motifs de  $\mathcal{F}$  sont de taille bornée et n'est donc pas minimale dans  $\Gamma(c)$ ; de plus  $x$  ne contient pas le motif  $M$  et ainsi  $x \prec c$ , ce qui contredit le fait que  $c$  est au niveau 1.

Comme  $S'$  est fini, soit  $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$  le domaine critique de  $\mathcal{F}$  et soit  $\mathcal{D} = \mathcal{B}(\mathcal{X}_{\mathcal{F}}, 1)$ . D'après le Lemme 3.5, il existe un domaine  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$  tel que tout motif défini sur  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$  ne contenant aucun motif de  $\mathcal{F}$  contienne en son centre un motif défini sur  $\mathcal{D}$  présent dans une configuration de  $S'$ .

Comme  $\mathbf{K}$  et  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$  sont finis, l'ensemble  $\mathbf{P}$  des points de  $\mathbb{Z}^2$  où apparaît un motif défini sur  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$  contenant un motif de  $\mathcal{F}$  est fini.

Grâce à la structure de  $\mathbb{Z}^2$  et quitte à enlever un nombre fini de points à  $\mathbf{P}$ , nous pouvons le supposer connexe. Par définition du domaine critique  $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$  nous pouvons appliquer le Lemme 4.3 sur les points de  $\mathbf{P}$  et ainsi  $c$  est égal à une configuration de  $S'$ , *i.e.*, une configuration bipériodique, sauf sur un domaine fini  $\mathbf{P}$ .  $\square$

La caractérisation des configurations au niveau 1 dans un espace de pavages généralisé dénombrable faite au Théorème 4.9 nous indique que les configurations ne sont que deux types : ceux représentés sur la Figure 4.3. Le fait que les configurations au niveau 1 coïncident sur des demi-plans avec des configurations périodiques nous montre qu'elles ne sont guère plus compliquées que celles représentées sur la Figure 4.3.

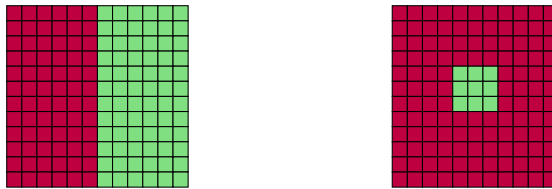
De plus, nous pouvons éliminer certains cas lorsque nous travaillons avec des espaces de pavages et non plus des espaces de pavages généralisés :

**Lemme 4.10** ([BDJ08]). *Tous les motifs d'une configuration au niveau 1 d'un espace de pavages dénombrable apparaissent une infinité de fois.*

*Démonstration.* Par l'absurde, soit  $c$  une configuration au niveau 1 dans un espace de pavages dénombrable  $S$  contenant un motif  $P$  qui n'apparaît qu'une seule fois. D'après le Théorème 4.9,  $c$  est bipériodique partout sauf sur un domaine fini.

Comme nous n'avons qu'un nombre fini de contraintes, nous pouvons remplacer une partie finie de la partie bipériodique de  $c$  par un motif différent :  $P$ . Nous pouvons faire cette manipulation à une infinité de positions différentes comme représenté sur la Figure 4.4 et ainsi obtenir une infinité non dénombrable de pavages dans  $S$ .  $\square$

On remarque que le résultat du Lemme 4.10 nécessite que l'ensemble des motifs interdits considéré soit fini ; en effet, le résultat devient faux pour certains espaces de



Un vecteur de périodicité Périodique sauf sur un domaine fini

FIGURE 4.3 – Les deux types de configurations au niveau 1 dans un espace de pavages généralisé

pavages généralisés. Soit  $\mathcal{Q} = \{\blacksquare, \blacklozenge\}$ . L'ensemble des motifs interdits est l'ensemble de tous les motifs contenant deux points  $\blacklozenge$ . Un diagramme de Hasse de l'ordre  $\preceq$ , sur lequel on peut voir que la configuration au niveau 1 a un motif apparaissant une seule fois, est représenté sur la Figure 4.5.

L'existence du niveau 1, l'application du Théorème 4.9 et l'élimination d'un cas grâce au Lemme 4.10 nous permet d'établir un premier résultat d'existence d'un certain type de configuration pour les espaces de pavages dénombrables :

**Théorème 4.11** ([BDJ08]). *Un espace de pavages dénombrable contient une configuration qui admet une direction de périodicité mais pas deux.*

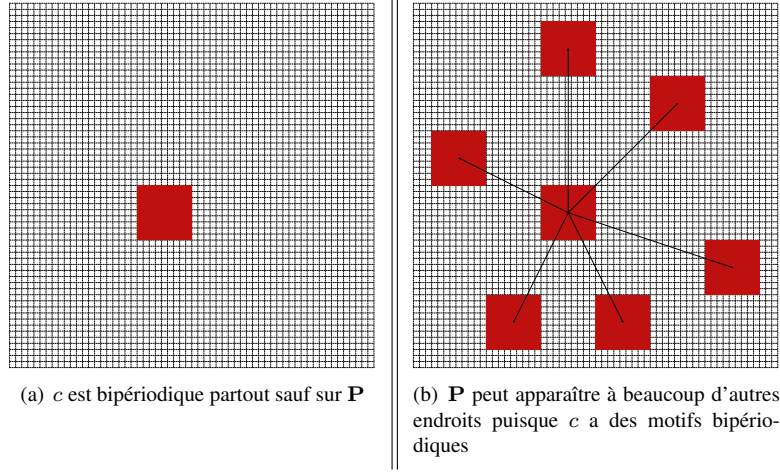
Encore une fois ce résultat nécessite que l'ensemble des motifs interdits soit fini. L'espace de pavages représenté sur la Figure 4.5 constitue un espace de pavages généralisé et il ne contient pas de configuration avec exactement une direction de périodicité.

Le Théorème 4.9 décrit la forme des configurations au niveau 1 dans les espaces de pavages généralisés ; la nature du pré-ordre  $\preceq$  nous permet de borner facilement le nombre de configurations minimales qui leur sont inférieures :

**Corollaire 4.12.** *Dans un espace de pavages généralisé dénombrable, les configurations au niveau 1 ont au plus deux configurations (minimales) au-dessous d'elles pour  $\preceq$ .*

*Démonstration.* D'après le Théorème 4.9, ces configurations contiennent un demi-plan de chaque configuration au-dessous d'elles pour  $\preceq$  ; elles ne peuvent contenir que deux demi-plans et par conséquent ne peuvent pas avoir plus de deux configurations au-dessous d'elles pour  $\preceq$ .  $\square$

Nous avons défini, à la Section 1.6, la notion de projection perpendiculairement à un vecteur de périodicité d'une configuration en admettant un. Ceci permet de se ramener en dimension 1 et de pouvoir décrire et travailler plus facilement avec ces configurations. Ainsi, après projection, une telle configuration devient un élément de  $\mathcal{Q}^{\mathbb{Z}}$ , i.e., un mot bi-infini  $\dots a_{-1}a_0a_1\dots$ . Pour simplifier les notations, nous noterons  ${}^{\omega}XYZ{}^{\omega}$  le mot  $\dots XXXXXXYZZZZZ\dots$ .

FIGURE 4.4 – Que se passe-t-il si  $c$  a un motif qui n'apparaît qu'une seule fois ?

**Lemme 4.13.** *Dans un espace de pavages dénombrable, une configuration  $x$  au niveau 1 (qui a donc une direction de périodicité  $v$ ) est de la forme  ${}^\omega\text{ABC}^\omega$  lorsque projetée perpendiculairement à  $v$ .*

*On peut de plus supposer  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  de même taille et  $\mathbf{A} \neq \mathbf{C}$ .*

*Démonstration.* Soit  $c$  le mot bi-infini qui est la projection de  $x$  perpendiculairement à  $v$ . D'après le Théorème 4.9,  $x$  contient deux demi-plans périodiques, ainsi  $c$  contient deux demi-droites périodiques et est de la forme  ${}^\omega\text{ABC}^\omega$ .

Pour obtenir  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  de la même taille, il suffit de prendre des motifs ayant pour taille un multiple des tailles des motifs que nous venons de construire.

Si l'on a  $\mathbf{A} = \mathbf{C}$ , on a forcément  $\mathbf{ABA} \neq \mathbf{A}^3$  et puisque l'on a une infinité de positions où on peut remplacer  $\mathbf{A}^3$  par  $\mathbf{ABA}$  dans  $\mathbf{A}^\omega$  nous pouvons ainsi obtenir une infinité non dénombrable de pavages valides.  $\square$

**Théorème 4.14.** *Dans un espace de pavages dénombrable, une configuration est au niveau 1 si et seulement si elle admet exactement une direction de périodicité.*

*Démonstration.*  $\Rightarrow$ : Le Lemme 4.10 nous dit qu'une configuration au niveau 1 a tous ses motifs qui apparaissent une infinité de fois; ces configurations admettent exactement une direction de périodicité d'après le Théorème 4.9.

$\Leftarrow$ : Supposons qu'il existe une configuration  $c$  avec exactement une direction de périodicité (notée  $v \neq (0,0)$ ) qui ne soit pas au niveau 1. Sans perte de généralité nous allons travailler dans l'espace de pavages généralisé  $\Gamma(c)$ ; cet espace de pavages contient une configuration  $b$  au niveau 1 pour  $\preceq$  d'après le Lemme 4.8. Comme  $b \preceq c$ ,  $b$  admet aussi  $v$  comme vecteur de périodicité; ainsi  $b$  peut être vu comme  ${}^\omega\text{ABC}^\omega$  d'après le Lemme 4.13. Comme  $b \prec c$ , on peut trouver le motif  $\mathbf{ABC}$  à deux positions différentes dans  $c$  de sorte à trouver un motif  $\mathbf{ABCDABC}$  dans  $c$ . Ainsi, ce motif  $\mathbf{ABCDABC}$  est valide pour notre ensemble de pavages initial et quitte à

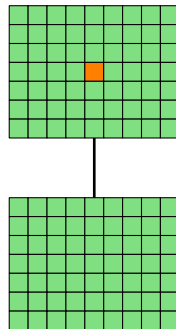


FIGURE 4.5 – Exemple d’un diagramme de Hasse d’un espace de pavages généralisé dénombrable contredisant le Lemme 4.10.

prendre  $C$  suffisamment grand, on peut remplacer des motifs du type  $C^n$  par des motifs  $CDABC^m$  dans  $b$  à une infinité de positions différentes. Ceci nous donnerait  $2^{N_0}$  pavages différents valides pour notre ensemble de pavages initial que l’on a supposé dénombrable.  $\square$

Comme toujours, l’hypothèse que l’ensemble des motifs interdits soit fini est nécessaire : l’espace de pavages généralisé présenté en Figure 4.5 ne vérifie pas les conclusions du Théorème 4.14. De plus, on ne peut pas espérer que la validité du Théorème 4.14 soit équivalente au fait que l’espace de pavages généralisé soit un espace de pavages, l’espace de pavages généralisé présenté en Figure 4.7 est défini par l’ensemble de contraintes représenté sur la Figure 4.6 ; on force la périodicité verticale et on interdit simplement deux occurrences de  $\blacksquare$  sur la même ligne horizontale.

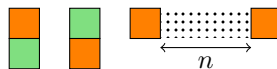


FIGURE 4.6 – Exemple d’un ensemble de motifs interdits qui donne un espace de pavages généralisé dénombrable, qui n’est pas un espace de pavages mais qui vérifie le Théorème 4.14.

Intuitivement, le Lemme 4.13 et le Théorème 4.14 signifient que les configurations au niveau 1 dans un espace de pavages dénombrable sont bien comprises : elles ne sont jamais plus compliquées que celle représentée sur la Figure 4.8.

**Corollaire 4.15.** *Pour toute configuration  $x$  au niveau 1 dans un espace de pavages dénombrable, il existe exactement deux configurations minimales modulo translation dans  $\Gamma(x)$ .*

L’espace de pavages généralisé représenté sur la Figure 4.7 nous donne un exemple d’une configuration au niveau 1 dont tous les motifs apparaissent une infinité de fois



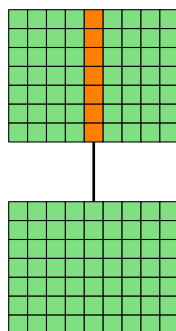


FIGURE 4.7 – Exemple d’un diagramme de Hasse pour un espace de pavages généralisé dénombrable, qui n’est pas un espace de pavages mais qui vérifie le Théorème 4.14.

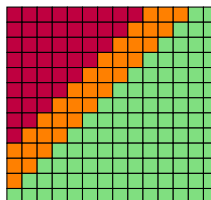


FIGURE 4.8 – Une configuration au niveau 1 dans un espace de pavages dénombrable : le cas le plus compliqué

mais avec une seule configuration au-dessous d’elle ; ceci signifie que la condition d’être un espace de pavages dans l’énoncé du Corollaire 4.15 est nécessaire.

Après avoir prouvé l’existence et même caractérisé le niveau 1 dans les espaces de pavages dénombrables, nous allons montrer que le niveau 2 existe. Un tel résultat d’existence est bien plus difficile à obtenir que pour le niveau 1 et nous ignorons s’il se généralise aux espaces de pavages généralisés.

**Théorème 4.16.** *Dans un espace de pavages dénombrable, il n’existe pas de chaîne infinie décroissante pour  $\preceq$  jusqu’au niveau 1.*

Pour démontrer le Théorème 4.16 nous aurons besoin de lemmes intermédiaires. Leur démonstration est à la suite de celle du théorème pour ne pas l’allourdir encore plus.

*Démonstration.* Par l’absurde, soit  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une telle suite décroissante. Soit  $\mathbf{S} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Gamma(c_n)$  l’espace de pavages généralisé constitué des configurations inférieures à tous les  $c_n$  pour  $\preceq$ . Par hypothèse,  $\mathbf{S}$  ne contient que des configurations au niveau 0 ou 1, c’est-à-dire des configurations admettant au moins une direction de périodicité.

Soit  $a$  une configuration au niveau 1 dans  $\mathbf{S}$  ;  $a$  admet une direction de périodicité, notée  $v \neq (0, 0)$ , et est de la forme  ${}^\omega \mathbf{ABC}^\omega$  perpendiculairement à  $v$  d’après le

Lemme 4.13. On peut supposer  $a$  centrée sur  $\mathbf{B}$  et soit  $\mathbf{M}_k$  le motif de taille  $k \times k$  au centre de  $a$ .

Par hypothèse,  $\mathbf{M}_k$  peut être retrouvé dans tous les  $c_n$  car  $a \preceq c_n$ . De plus nous pouvons en savoir un peu plus sur la façon dont les  $\mathbf{M}_k$  sont retrouvés dans les  $c_n$  grâce au lemme intermédiaire suivant :

**Lemme 4.17.** *Pour chaque  $n$ , il existe  $N_n$  tel que, à chaque fois que l'on retrouve  $\mathbf{M}_i$ ,  $i \geq N_n$ , dans  $c_n$ , le motif  $\mathbf{M}_i$  ne peut pas être étendu indéfiniment selon  $v$  et  $-v$  pour former une bande infinie.*

Nous pouvons supposer ce  $N_n$  minimal, c'est-à-dire tel que l'on puisse trouver une bande infinie de  $\mathbf{M}_{N_n-1}$  dans  $c_n$  répétés selon  $v$  et  $-v$ . Par la suite nous noterons une bande infinie de  $\mathbf{M}$  répétés selon  $v$  et  $-v$  par  $\mathbf{M}^{\updownarrow\omega}$ ; nous dirons qu'une configuration  $c$  contient  $\mathbf{M}^{\updownarrow\omega}$  si une telle bande infinie apparaît dans  $c$ .

On remarque aussi qu'il existe un  $l$  suffisamment grand, qui ne dépend pas de  $n$ , tel que  $c_n$  contienne au plus un  $\mathbf{M}_l^{\updownarrow\omega}$  : s'il en existait deux on aurait dans  $c_n$  un motif du style  $\mathbf{A}^i \mathbf{B} \mathbf{C}^i \mathbf{D} \mathbf{A}^j \mathbf{B} \mathbf{C}^j$  et nous pourrions construire une infinité non dénombrable de configurations valides à partir de  $a$ .

**Lemme 4.18.** *Il existe un  $k$  tel que dans chaque  $c_n$  on puisse trouver des  $\mathbf{M}_i$  pour  $i$  arbitrairement grand tel que le motif  $\mathbf{M}_k$  au centre de  $\mathbf{M}_i$  ne puisse pas être étendu en une bande infinie  $\mathbf{M}_k^{\updownarrow\omega}$ .*

Soit maintenant  $k$  le  $k$  fixé par le Lemme 4.18. Soit  $\mathbf{M}_i$ ,  $i \geq n$ , un motif de  $c_n$  tel que le motif  $\mathbf{M}_k$  en son centre ne puisse pas être étendu en un  $\mathbf{M}_k^{\updownarrow\omega}$ . Considérons la configuration  $x_n$ , un décalé de  $c_n$  centré sur le point où l'on ne peut pas étendre  $\mathbf{M}_k$  à partir de  $\mathbf{M}_i$ .

En extrayant sur ces  $x_n$ , comme  $k$  est fixé et comme les  $\mathbf{M}_i$  sont de taille strictement croissante, nous obtenons une configuration  $x$  avec une bande semi-infinie de  $\mathbf{A}^l \mathbf{B} \mathbf{C}^l$  telle celle représentée sur la Figure 4.9 qui de plus admet un vecteur de périodicité.

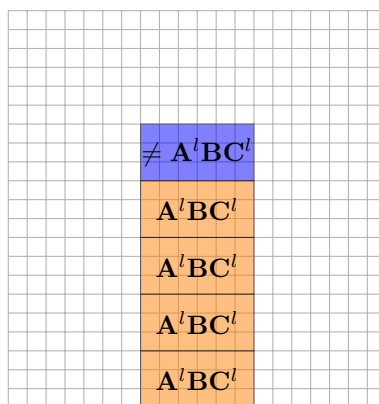


FIGURE 4.9 – Exemple de configuration extraite à partir des  $x_n$ .

Ce vecteur de périodicité ne peut pas être colinéaire à  $v$  sinon nous pourrions, par périodicité, obtenir une contradiction avec le fait que nous avons extrait sur un motif qui n'est pas périodique selon  $v$ .

Ainsi, quitte à prendre un multiple du vecteur de périodicité de  $x$  et à extraire nous pouvons obtenir une configuration contenant une bande infinie du type  $C^1DA^{1\downarrow\omega}$ . La Figure 4.10 représente  $x$  avec un vecteur de périodicité  $w$  et la Figure 4.11 la configuration que l'on peut extraire à partir de  $x$ .

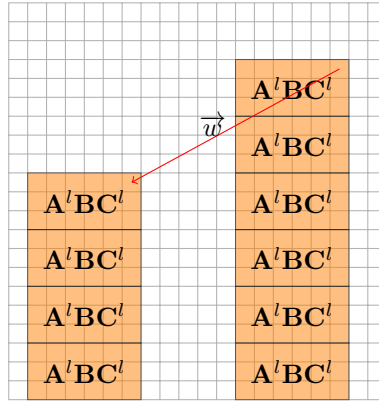


FIGURE 4.10 – Exemple de  $x$  avec son vecteur de périodicité  $w$ .

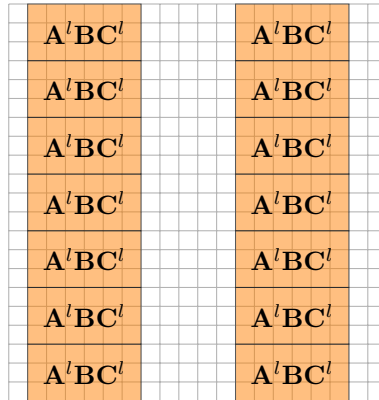


FIGURE 4.11 – Exemple de configuration que l'on peut extraire à partir de  $x$ .

Si ce cas était possible, nous pourrions construire une infinité indénombrable de configurations valides à partir de  $a$ .

En conclusion, dans un espace de pavages dénombrable, il n'existe pas de chaîne infinie décroissante pour  $\preceq$  jusqu'au niveau 1.  $\square$

*Démonstration du Lemme 4.17.* Par l'absurde, supposons le contraire : on peut trouver des  $M_i^{\uparrow\omega}$  pour  $i$  arbitrairement grand dans  $c_n$ . Fixons un  $i$  tel que  $M_i^{\uparrow\omega}$  apparaisse dans  $c_n$  ; comme  $c_n$  est différente de  $a$ , il existe  $j > i$  tel que  $M_j^{\uparrow\omega}$  apparaisse dans  $c_n$  ailleurs que là où apparaît  $M_i^{\uparrow\omega}$ .

Nous obtenons ainsi un motif du type  $A^l BC^l DA^k BC^k$  dans  $c_n$  (par exemple :  $M_i = A^l BC^l$ ,  $M_j = A^k BC^k$  et  $D$  la séparation entre les deux). Ainsi  $C^l DA^k BC^k$  est un motif valide dans notre espace de pavages, et  $a$  contient  $C^\omega$  donc nous avons une infinité de positions où remplacer un certain  $C^m$  par  $C^l DA^k BC^k$  pour obtenir une configuration différente, ce qui nous permet d'obtenir  $2^{\aleph_0}$  configurations différentes et valides dans notre espace de pavages que nous avons supposé dénombrable.  $\square$

*Démonstration du Lemme 4.18.* Premièrement, si la suite  $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, il suffit de prendre  $k$  plus grand que tous les  $N_n$  ; nous pouvons donc supposer  $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$  non bornée.

Prenons  $k$  tel qu'il existe au plus un occurrence de  $M_k^{\uparrow\omega}$  dans tous les  $c_n$ . Supposons que l'on puisse trouver des  $M_i$  dans  $c_n$  pour  $i$  arbitrairement grand le long  $M_k^{\uparrow\omega}$ .

Cette bande de  $M_k$  est de largeur bornée d'après le Lemme 4.17 et sans perte de généralité nous pouvons supposer que la contradiction à l'extension de cette bande se trouve toujours du côté de  $A$  dans  $M_k$ . Ainsi, si l'on prend  $i$  plus grand que la borne sur la taille de ces bandes de  $M_k$  ( $i \geq N_n$ ) on obtient une configuration où nous avons un grand nombre de  $A$  répétés selon  $v$  avec un motif différent de  $A$ , noté  $D$ , au bout, le tout adjacent à  $M_{N_n-1}^{\uparrow\omega}$  tel que représenté sur la Figure 4.12.

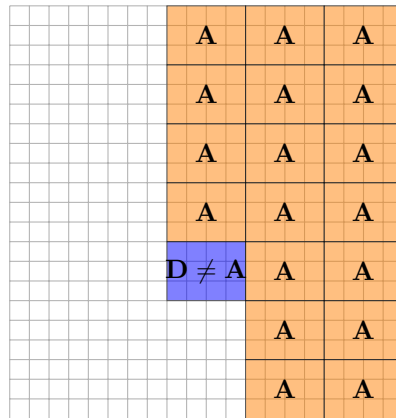


FIGURE 4.12 – Exemple de  $c_n$  lorsque l'on peut trouver des  $M_i$  arbitrairement grands le long d'une bande infinie de  $M_k$ .

Maintenant, comme nous pouvons faire ceci pour chaque  $c_n$  avec des  $M_i$  infiniment grands, et puisque  $N_n$  tend vers l'infini, nous obtenons en extrayant sur  $D$  une configuration du type de celle représentée sur la Figure 4.12 mais avec les motifs  $A$  répétés à l'infini.

Cette configuration admet une direction de périodicité car elle est extraite des  $c_n$  mais cette direction de périodicité nous imposerait  $\mathbf{D} = \mathbf{A}$  que nous avons supposés différents.  $\square$

**Théorème 4.19.** *Un espace de pavages dénombrable contient des configurations sans aucune direction de périodicité si et seulement si il contient une configuration au niveau 2 pour  $\preceq$ .*

*Démonstration.*  $\Rightarrow$ : Le Lemme 4.14 montre que les configurations sans aucune direction de périodicité sont de niveau strictement supérieur à 1 dans un tel espace de pavages. Soit  $\mathbf{S}$  l'ensemble des configurations de niveau strictement supérieur à 1 dans l'espace de pavages considéré. Le Théorème 4.16 nous assure qu'il n'y a pas de chaîne infinie décroissante jusqu'au niveau 1 et le Lemme 4.7 qu'il n'y en a pas jusqu'au niveau 0. Ainsi, toute chaîne décroissante de  $\mathbf{S}$  admet un minorant. Par conséquent, par le lemme de Zorn, il existe un minimal dans  $\mathbf{S}$  : une configuration au niveau 2.

$\Leftarrow$ : Le Lemme 4.14 assure qu'une configuration au niveau 2 n'admet pas de direction de périodicité.  $\square$

Nous avons déjà formulé le Problème ouvert 1 dont une des conséquences est que, pour un espace de pavages dénombrable, il n'existe pas de chaîne infinie décroissante pour  $\preceq$ . C'est-à-dire que les niveaux des configurations dans de tels espaces sont toujours bien définis. Qui plus est, nous savons qu'il n'existe pas de chaîne infinie croissante dans des espaces de pavages dénombrables (voir la Section 3.5). Tout ceci nous amène naturellement au problème suivant :

**Problème ouvert 2.** *Existe-t-il un espace de pavages (généralisé ?) qui soit dénombrable et contienne une chaîne infinie décroissante pour  $\preceq$  ?*

Pour un entier  $n$  fixé, nous savons, cependant, construire des espaces de pavages dénombrables avec des configurations au niveau  $n$ . L'idée est la suivante : on fixe une tuile particulière  $X$  à partir de laquelle partent deux signaux dans des directions différentes. Ces signaux forment un cône. L'intérieur et l'extérieur du cône sont de deux couleurs différentes. Ces deux signaux ne peuvent pas se croiser et on choisit leur direction de sorte qu'au plus une tuile  $X$  puisse apparaître. Ceci nous donne un espace de pavages avec des configurations au niveau 2 : celles où le cône et la tuile  $X$  apparaissent. Les configurations au niveau 1 sont celles où un seul des deux signaux apparaît, coupant ainsi le plan en deux parties de couleurs différentes. Les configurations monochromes sont au niveau 0. Pour atteindre le niveau 3, on force un signal à partir de la tuile  $X$  vers l'intérieur du cône. Ce signal rebondit entre les deux signaux délimitant le cône en découpant l'intérieur du cône en deux zones de couleurs différentes. Cette construction est représentée sur la Figure 4.13.

Pour atteindre les niveaux supérieurs, il suffit de faire partir un nouveau cône à l'intérieur du précédent à chaque fois que le signal rebondissant touche le bord du cône. Ce cône imbriqué est délimité par des signaux parallèles au premier.

On remarque que cette construction augmente le nombre de couleurs à chaque fois que l'on veut gagner en niveaux pour  $\preceq$  et ne peut donc pas être utilisée telle quelle pour construire un espace de pavages dénombrable avec des chaînes infinies décroissantes pour  $\preceq$ .

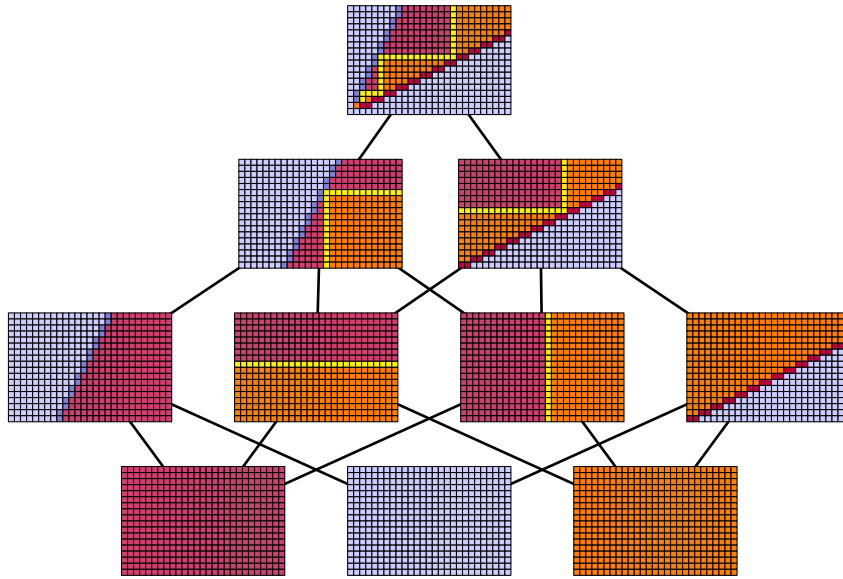


FIGURE 4.13 – Diagramme de Hasse des niveaux pour  $\preceq$  d'un espace de pavages dénombrable avec une configuration au niveau 3.

### 4.3 Espaces indénombrables de pavages

Le Lemme 4.4 nous assure, via la Proposition 3.17, une condition suffisante pour qu'un espace de pavages généralisé ait la cardinalité du continu. Malheureusement cette condition suffisante n'est pas nécessaire mais nous pouvons tout de même caractériser les espaces de pavages généralisés non dénombrables même si cette caractérisation est moins simple que celle des espaces dénombrables (Théorème 3.18).

**Définition 4.20.** *Pour un espace de pavages généralisé  $\mathbf{S}$  et un arbre binaire orienté infini  $T$  dont chaque noeud est étiqueté par un motif,  $T$  est un arbre complet de motifs pour  $\mathbf{S}$  si pour chaque chemin infini  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  dans cet arbre il existe au moins une configuration  $c$  dans  $\mathbf{S}$  vérifiant les points suivants pour tout point  $u_i$  du chemin :*

- *Si le chemin passe par le fils gauche de  $u_i$  alors le motif étiqueté par  $u_i$  apparaît dans  $c$*
- *Si le chemin passe par le fils droit de  $u_i$  alors le motif étiqueté par  $u_i$  n'apparaît pas dans  $c$ .*

L'existence d'un arbre complet de motifs pour un espace de pavages généralisé est une condition suffisante pour qu'il soit indénombrable car cela nous donne une injection explicite de  $2^{\mathbb{N}_0}$  dans  $\mathbf{S}$ . Cependant, il existe des espaces de pavages n'admettant aucun arbre complet de motifs comme par exemple le jeu de 104 tuiles  $\tau$  présenté à la Section 1.7 : il pave le plan et n'admet aucun pavage périodique, par conséquent  $\mathbf{T}_\tau$  ne peut pas être dénombrable mais le Théorème 1.35 dit que tous les pavages par

$\tau$  contiennent les mêmes motifs et donc  $\tau$  ne peut, *a fortiori*, pas admettre d'arbre complet de motifs.

En revanche, lorsque l'on met en conjonction l'existence d'un arbre complet de motifs et le Lemme 4.4 nous obtenons une caractérisation des espaces de pavages généralisés indénombrables :

**Théorème 4.21.** *Un espace de pavages généralisé  $\mathbf{S}$  est indénombrable si et seulement si au moins une de ces conditions est vraie :*

1. *Il contient deux configurations  $x$  et  $y$  telles que  $x \approx y$  et  $x$  n'est pas un décalé de  $y$ .*
2. *Il existe un arbre complet de motifs pour  $\mathbf{S}$ .*

*Démonstration.* Le point 1 nous assure que l'espace de pavages généralisé a la cardinalité du continu via le Lemme 4.4 et la Proposition 3.17 alors que le point 2 nous donne une injection explicite de  $2^{\aleph_0}$  dans notre espace.

Pour la réciproque, soit  $\mathbf{S}$  un espace de pavages généralisé indénombrable ; premièrement, d'après le Lemme 3.16,  $\mathbf{S}$  a un sous-ensemble parfait, nous pouvons donc supposer  $\mathbf{S}$  parfait sans perte de généralité.

Supposons que le point 1 ne soit pas vrai pour  $\mathbf{S}$  ; ceci signifie que la relation d'équivalence  $\approx$  correspond à la relation "être un translaté de" dans  $\mathbf{S}$ . Pour une configuration donnée, l'ensemble de ses translatsés est au plus dénombrable donc les classes d'équivalence pour  $\approx$  dans  $\mathbf{S}$  sont toutes dénombrables ; de plus cela reste vrai pour tout sous-ensemble de  $\mathbf{S}$ .

Pour construire un arbre complet de motifs nous allons maintenant raisonner par induction sur  $\mathbf{S}$  que l'on considère comme un ensemble parfait et dont les classes d'équivalence pour  $\approx$  sont toutes dénombrables.

Considérons l'ensemble  $\mathbf{U}$  (possiblement vide) de configurations de  $\mathbf{S}$  contenant tous les motifs de  $\mathcal{L}(\mathbf{S})$ . Pour un motif  $\mathbf{P}$ , soit  $\mathbf{S} \setminus \{\mathbf{P}\}$  l'ensemble des configurations de  $\mathbf{S}$  ne contenant pas le motif  $\mathbf{P}$ . Par définition, on a :

$$\mathbf{S} = \mathbf{U} \cup \bigcup_{\mathbf{P} \in \mathcal{L}(\mathbf{S})} \mathbf{S} \setminus \{\mathbf{P}\}$$

$\mathbf{U}$  est dénombrable car il correspond à une classe d'équivalence pour  $\approx$  et comme  $\mathbf{S}$  est supposé non dénombrable, il existe un motif  $\mathbf{P}$  tel que  $\mathbf{S} \setminus \{\mathbf{P}\}$  soit indénombrable.

L'ensemble des configurations de  $\mathbf{S}$  ne contenant pas  $\mathbf{P}$  est ainsi un ensemble fermé indénombrable qui contient donc un sous-ensemble parfait ; nous pouvons continuer notre induction avec cet ensemble pour le fils gauche du noeud que nous sommes en train de construire.

L'ensemble des configurations de  $\mathbf{S}$  contenant  $\mathbf{P}$  contient l'ouvert  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$  de  $\mathbf{S}$  qui est non vide car nous n'avons considéré que les motifs apparaissant dans au moins une configuration. Comme  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$  est aussi fermé,  $\mathbf{S} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{P}}$  est un ensemble parfait ne contenant que des configurations où  $\mathbf{P}$  apparaît. Nous pouvons continuer l'induction avec cet ensemble comme fils droit de notre noeud.

Maintenant que notre arbre est construit, chaque chemin infini définit au moins une configuration car sinon nous obtiendrions une intersection vide de fermés qui, par

compacité, serait en fait une intersection finie, *i.e.*, un des ensembles parfaits construits lors de notre induction serait vide, ce qui est impossible.  $\square$

La construction d'un espace de pavages indénombrable qui vérifie le point 2 mais pas le point 1 est calquée sur la méthode pour dessiner des paraboles avec des automates cellulaires. Une ligne verticale (orange sur la Figure 4.14) peut apparaître et force le lancement d'un signal (rouge foncé sur la Figure 4.14) qui va rebondir entre la ligne verticale qui sert de repère et un autre signal qui va dessiner une parabole (vert sur la Figure 4.14). Lorsque le signal rebondit sur la parabole, cette dernière se décale d'une case ; le signal se déplace à vitesse maximale ce qui nous assure que l'on est bien en train de décrire une parabole. De plus, au moment où le signal rebondissant touche la parabole cette dernière a deux tuiles possibles pour se décaler (les cellules jaunes sur la Figure 4.14). Comme il y a une infinité de rebonds entre la parabole et le signal, ceci nous laisse une infinité de choix possibles pour une telle configuration et ainsi nous assure l'indénombrabilité du sous-shift.

Enfin, si l'on connaît tous les motifs d'une configuration, comme le nombre de cellules vertes au-dessus d'une jaune nous indique notre position dans la parabole, on peut reconstruire entièrement (modulo un shift) une configuration à partir de son ensemble de motifs ; ainsi ce sous-shift ne vérifie pas le point 1 du Théorème 4.21 mais est bel et bien indénombrable.

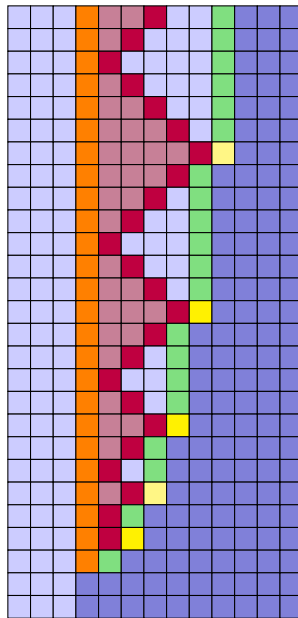


FIGURE 4.14 – Exemple d'une configuration typique d'un espace de pavages vérifiant le point 2 mais pas le point 1 du Théorème 4.21.



## 4.4 Décidabilité et indécidabilité des propriétés de cardinalité

À la Section 1.7, nous avons montré des résultats d'inséparabilité pour certaines classes de jeux de tuiles. Les classes choisies correspondent, en fait, aux trois cardinalités possibles pour des espaces de pavages :

**Théorème 4.22.** *Les classes de jeux de tuiles suivantes sont deux à deux récursivement inséparables :*

$\tau_F$  : les jeux de tuiles n'admettant qu'un nombre fini de pavages

$\tau_{\aleph_0}$  : les jeux de tuiles admettant une infinité dénombrable de pavages

$\tau_C$  : les jeux de tuiles admettant un nombre indénombrable de pavages.

*Démonstration.* Les jeux de tuiles n'admettant qu'un nombre fini de pavages correspondent aux jeux de tuiles n'admettant que des pavages bipériodiques (Théorème 4.1).

Les jeux de tuiles dont l'ensemble des pavages valides peut s'écrire comme l'union disjointe d'un espace de pavages fini et d'un espace de pavages apériodique sont indénombrables : un espace de pavages apériodique est indénombrable car il contient une configuration quasi-périodique (Théorème 2.15 et Proposition 2.16), et l'existence d'une telle configuration entraîne que l'espace de pavages est indénombrable (Lemme 4.4 et Proposition 3.17).

Nous concluons que ces trois classes de jeux de tuiles sont récursivement inséparables via le Corollaire 1.41.  $\square$

**Lemme 4.23.** *Dans un espace de pavages  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$ , si  $c$  est une configuration isolée de  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  alors la fonction de  $\mathbb{Z}^2$  dans  $\mathbf{Q}$ ,  $x \rightarrow c(x)$  est calculable.*

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{P}$  le motif isolant  $c$  dans  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$ . Pour un point  $x \in \mathbb{Z}^2$ , on énumère, pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , tous les motifs de taille  $n \times n$  contenant  $\mathbf{P}$  en leur centre et pavés correctement. On arrête l'énumération lorsque tous les motifs définissent la même valeur au point  $x$ .

Ce procédé termine car  $c$  est la seule configuration de  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  à contenir  $\mathbf{P}$  en son centre et le Lemme 3.5 nous assure que le point  $x$  sera celui d'un pavage du plan (qui ne peut être que  $c$ ) pour  $n$  suffisamment grand.  $\square$

## 4.5 Conclusions

Au chapitre précédent nous avons montré qu'il n'y a que trois cardinalités possibles pour les espaces de pavages : fini, dénombrable ou la cardinalité du continu. Dans ce chapitre nous avons étudié plus finement ces trois cas.

Nous avons caractérisé les espaces de pavages finis : ce sont ceux dont toutes les configurations sont totalement périodiques. Nous avons montré qu'il n'existait que deux façons de créer un nombre indénombrable de pavages : soit une configuration à elle seule engendre un nombre de pavages indénombrable, soit il existe une façon de proposer des motifs à un adversaire en lui laissant le choix d'avoir ou de ne pas avoir ce motif de sorte que ce jeu dure une éternité.

Nous avons poussé beaucoup plus loin l'étude des espaces de pavages dénombrables. Leur cardinalité intermédiaire permet d'espérer d'être capable de les décrire facilement tout en n'étant pas aussi simples que les espaces de pavages finis. Dans ce cas, nous avons pu exhiber certains types de pavages qui apparaissent forcément. Ces pavages particuliers vont nous être utiles dans la suite de ce manuscrit. Malgré tous les outils développés au cours de cette partie, certaines questions restent sans réponse au sujet des espaces de pavages dénombrables : peut-on vraiment avoir de tels espaces ayant des chaînes infinies pour  $\preceq$  ? Peut-on en avoir avec un rang de Cantor-Bendixson infini ?



## Chapitre 5

# Généralisations aux groupes finiment engendrés

Dans ce chapitre nous nous concentrons sur la généralisation des résultats des précédents chapitres à des structures plus générales que  $\mathbb{Z}^2$ . Au Chapitre 3, nous avons défini une topologie sur les pavages et caractérisé les espaces de pavages généralisés par les sous-shifts : les ensembles fermés et invariants par translation. La notion d'invariant par translation nécessite une action de  $\mathbb{Z}^2$  sur  $\mathcal{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  ; de sorte à pouvoir bien définir cette action en changeant la structure sous jacente du plan nous nous restreignons au cas des groupes.

Des travaux sur l'étude des pavages dans le plan hyperbolique ont déjà été effectués, comme par exemple la généralisation à ce plan des résultats d'indécidabilité de la pavabilité [Mar08, Kar08]. Malheureusement dans les deux cas le plan hyperbolique considéré ne forme pas un groupe et ainsi nous ne pouvons pas utiliser nos résultats dans ce cadre. En revanche, nous avons vu que les automates cellulaires étaient des objets très liés aux pavages et certains théorèmes combinatoires sur ces objets ont pu être généralisés au cas des groupes [MM93, CSMS99, Cap07]. Ces travaux, bien qu'axés sur des objets différents, sont beaucoup plus proches de ceux présentés dans ce chapitre.

Tout au long de ce manuscrit nous avons représenté sans le dire explicitement  $\mathbb{Z}^2$  par le graphe de Cayley associé ; nous faisons de même dans le cas des groupes mais pour que le graphe soit localement fini il nous faut rajouter la restriction que le groupe soit finiment engendré. Nous verrons que cette restriction n'est pas seulement une question de représentation et joue un rôle important dans les définitions et démonstrations.

### 5.1 Définitions

Nous noterons  $\mathcal{G}$  un groupe finiment engendré quelconque et  $\mathbb{G}$  un ensemble fini de générateurs de  $\mathcal{G}$ . Par la suite nous supposons toujours que  $\mathbb{G}$  est stable par inverse et que  $\mathcal{G}$  est infini. Par exemple,  $\mathbb{Z}^2$  peut être vu comme un groupe engendré par deux éléments  $a$  et  $b$  et de présentation  $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$ . Avec cette présentation de  $\mathbb{Z}^2$

nous pouvons interpréter  $a$  comme "aller à gauche",  $b$  comme "aller en bas", l'unique relation vérifiée signifie que "aller à gauche puis en bas" revient au même que d'"aller en bas puis à gauche". Cette intuition derrière les présentations de groupes reviendra à la Partie II.

On rappelle que le graphe de Cayley d'un groupe  $\mathcal{G}$  engendré par l'ensemble  $\mathbb{G}$  (stable par inverse) est le graphe dont les sommets sont les éléments de  $\mathcal{G}$  et il y a une arête étiquetée par  $g \in \mathbb{G}$  entre  $x$  et  $y$  si  $xg = y$ . Le graphe de Cayley de  $\mathbb{Z}^2$ , vu comme le groupe de présentation  $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$ , correspond à la grille dont nous nous servons pour le représenter.

Nous pouvons représenter d'autres groupes sous cette forme : le groupe  $PSL_2(\mathbb{Z})$  admet pour présentation  $\langle S, T \mid S^2, T^3 \rangle$  (voir par exemple [Ale99]). Dans notre cadre, seule la présentation du groupe importe et nous pouvons faire abstraction de la provenance de ce groupe. Cette présentation nous permet de représenter le graphe de Cayley de ce groupe sur la Figure 5.1.

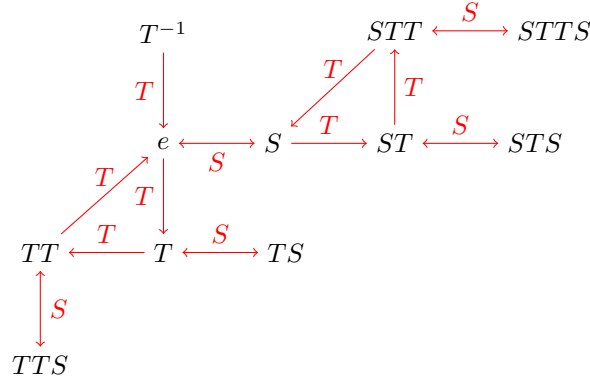


FIGURE 5.1 – Une partie du graphe de Cayley du groupe de présentation  $\langle S, T \mid S^2, T^3 \rangle$

Tout comme précédemment,  $\mathbf{Q}$  est un ensemble fini de couleurs et ainsi les configurations sont des applications de  $\mathcal{G}$  dans  $\mathbf{Q}$ , ou des éléments de  $\mathbf{Q}^{\mathcal{G}}$ .

De même que nous avons une norme sur  $\mathbb{Z}^2$ , nous pouvons définir une norme qui engendre une distance sur  $\mathcal{G}$  :

**Définition 5.1** (Norme sur  $\mathcal{G}$ ). *On définit  $\|g\|_{\mathbb{G}}$  pour  $g \in \mathcal{G}$  comme la longueur d'une plus courte représentation de  $g$  sur l'alphabet  $\mathbb{G}$ .*

En reprenant l'exemple de  $\mathbb{Z}^2$  vu comme le groupe engendré par  $\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ , la norme  $\|\cdot\|_{\{a,b,a^{-1},b^{-1}\}}$  est la même que la norme  $\|\cdot\|$  définie à la Section 1.1.

Puisque nous supposons  $\mathbb{G}$  stable par inverse, nous avons  $\|x\|_{\mathbb{G}} = \|x^{-1}\|_{\mathbb{G}}$  et ainsi cette norme  $\|\cdot\|_{\mathbb{G}}$  permet de définir une distance sur  $\mathcal{G}$  :  $d_{\mathbb{G}}(x, y) = \|xy^{-1}\|_{\mathbb{G}}$ . La distance  $d_{\mathbb{G}}(\cdot, \cdot)$  correspond à la distance sur le graphe de Cayley associé à  $(\mathcal{G}, \mathbb{G})$ .

Les résultats topologiques de la Section 3.1 restent ainsi toujours valides dans ce contexte, la métrique est similaire :

$$d_{\mathbb{G}}(x, y) = 2^{-\min\{\|g\|_{\mathbb{G}}, x(g) \neq y(g)\}}$$

Comme  $\mathbb{G}$  est fini, la convergence pour cette distance d'une suite de configurations  $c_i$  vers une configuration  $c$  signifie que la norme minimale d'un point où  $c_i$  diffère de  $c$  tend vers l'infini lorsque  $i$  tend vers l'infini. Autrement dit,  $c_i$  coïncide avec  $c$  sur des domaines de plus en plus grands au centre.

De même que  $\mathbb{Z}^2$  agissait naturellement par décalage sur  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$ ,  $\mathcal{G}$  agit sur  $\mathbf{Q}^{\mathcal{G}}$  :

**Définition 5.2** (Action (à gauche) de  $\mathcal{G}$  par translation sur  $\mathbf{Q}^{\mathcal{G}}$ ). Soit  $c \in \mathbf{Q}^{\mathcal{G}}$  et  $g \in \mathcal{G}$ , on note  $\sigma_g(c)$  la configuration telle que, pour  $x \in \mathcal{G}$ ,  $\sigma_g(c)(gx) = c(x)$ .

$\mathbb{Z}^2$  étant un groupe commutatif, les actions à droite et à gauche sont identiques dans ce cas ; dans le cadre plus général d'un groupe finiment engendré ce n'est pas forcément le cas, nous travaillons avec les actions à gauche mais les résultats présentés sont aussi vrais si l'on utilise l'action à droite quitte à faire les changements *ad hoc* dans les preuves. Pour simplifier les notations nous ne précisons plus que les actions sont à gauche par la suite.

De même qu'à la Section 1.6 nous avons défini la notion de périodicité, nous pouvons naturellement généraliser cette notion au cas des groupes :

**Définition 5.3** (Périodique selon un sous-groupe). On dit qu'une configuration  $c$  est périodique selon un sous-groupe  $\mathbf{H}$  de  $\mathcal{G}$  si :

$$\forall v \in \mathbf{H}, \sigma_v(c) = c$$

**Définition 5.4** (Orbite). Soit  $\mathbf{F}$  un sous-groupe de  $\mathcal{G}$  et  $c \in \mathbf{Q}^{\mathcal{G}}$ , on note  $O_{\mathbf{F}}(c)$  l'orbite de  $c$  par l'action de  $\mathbf{F}$ , i.e., l'ensemble  $\{\sigma_g(c) | g \in \mathbf{F}\} \subseteq \mathbf{Q}^{\mathcal{G}}$ .

Si une configuration  $c$  est périodique selon  $\mathbf{H}$  et que  $\mathbf{H}$  est d'index fini dans  $\mathcal{G}$  alors on dit que  $c$  est *totalelement périodique* et son orbite par l'action de  $\mathcal{G}$  est finie. Cette définition est équivalente à celle de la bipériodicité donnée au Chapitre 1 lorsque  $\mathcal{G} = \mathbb{Z}^2$  (Définition 1.15). Quand  $\mathbf{H}$  est d'index fini dans  $\mathcal{G}$ , l'ensemble  $X$  des classes à gauche de  $\mathcal{G}$  par rapport à  $\mathbf{H}$  est fini, ainsi il existe une application  $f$  de  $X$  dans  $\mathbf{Q}$  telle que, pour tout  $x$  dans  $X$ ,  $c(x\mathbf{H}) = f(x)$ . Cette dernière reformulation est celle qui correspond à l'intuition que l'on a de la périodicité : un motif répété périodiquement.

De même, si l'on considère  $\langle g \rangle$  le sous-groupe de  $\mathcal{G}$  engendré par  $g$  et l'orbite d'une configuration par l'action de  $\langle g \rangle$ ,  $O_{\langle g \rangle}(c)$  est fini si et seulement si  $c$  est *périodique selon  $g$*  (Définition 1.14), ou encore  $c$  est *périodique selon un sous-groupe d'index fini de  $\langle g \rangle$* .

## 5.2 Topologie et sous-shifts

Les motifs sont toujours définis comme des configurations à support fini ; de même, un motif  $\mathbf{P}$  apparaît dans une configuration  $c$  s'il existe  $g \in \mathcal{G}$  tel que  $\sigma_g(c)|_{\mathcal{D}_{\mathbf{P}}} = \mathbf{P}$ . On remarque que cette notion d'apparition d'un motif dans une configuration dépend, *a priori*, de l'action considérée (à gauche ici). Nous pouvons munir  $\mathbf{Q}^{\mathcal{G}}$  de la topologie produit, les ensembles  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$  pour un motif  $\mathbf{P}$  forment une base de la topologie de  $\mathbf{Q}^{\mathcal{G}}$ .

Puisque  $\mathcal{G}$  est finiment engendré, il est dénombrable : l'ensemble des mots finis sur  $\mathcal{G}$  se surjecte sur  $\mathcal{G}$ . De plus, comme nous avons supposé  $\mathcal{G}$  infini,  $\mathcal{G}$  et  $\mathbb{Z}^2$  ont la même cardinalité et ainsi  $\mathbb{Q}^{\mathcal{G}}$  et  $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  ont la même topologie. En particulier,  $\mathbb{Q}^{\mathcal{G}}$  est compact.

À la Section 3.2 nous avons montré le Théorème 3.4 qui dit que définir un sous-shift  $\mathbf{S}$  (un fermé de  $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  invariant par l'action de  $\mathbb{Z}^2$ ) revient à définir un ensemble  $\mathcal{F}$  de motifs interdits tels que  $\mathbf{S} = \mathbf{T}_{\mathcal{F}}$ . Ce résultat se généralise facilement en faisant les modifications *ad hoc* dans la preuve du Théorème 3.4 au cas de  $\mathbb{Q}^{\mathcal{G}}$  :

**Théorème 5.5.** *Un ensemble  $\mathbf{S}$  est sous-shift (i.e., un fermé de  $\mathbb{Q}^{\mathcal{G}}$  invariant par l'action (à gauche) de  $\mathcal{G}$ ) si et seulement si il existe un ensemble  $\mathcal{F}$  de motifs tels que  $\mathbf{S} = \mathbf{T}_{\mathcal{F}}$ , i.e.,  $\mathbf{S}$  soit l'ensemble des configurations de  $\mathbb{Q}^{\mathcal{G}}$  ne contenant (selon l'action à gauche) aucun des motifs de  $\mathcal{F}$ .*

Par conséquent la Proposition 3.6 caractérisant les espaces de pavages reste aussi valide dans ce cadre :

**Proposition 5.6.** *Un sous-shift  $\mathbf{S}$  est de type fini si et seulement si pour toute chaîne de sous-shifts décroissante pour l'inclusion  $(\mathbf{S}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  telle que  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{S}_i = \mathbf{S}$  alors il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathbf{S}_N = \mathbf{S}$ .*

De même, les sous-shifts finis sont de type fini via la Proposition 3.8 :

**Proposition 5.7.** *Si un sous-shift  $\mathbf{S}$  est fini alors il est de type fini.*

Les résultats sur le rang de Cantor-Bendixson sont tout aussi vrais puisque  $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  et  $\mathbb{Q}^{\mathcal{G}}$  ont la même topologie et ainsi les sous-shifts de  $\mathbb{Q}^{\mathcal{G}}$  ne peuvent avoir que trois type de cardinalité : fini, infini dénombrable ou la cardinalité du continu.

### 5.3 Généralisation des résultats

La section précédente est dédiée à la généralisation triviale des résultats topologiques à  $\mathbb{Q}^{\mathcal{G}}$ . On remarque qu'un théorème fondamental du Chapitre 4 est le fait que si un sous-shift ne contient que des configurations périodiques alors il est fini (Théorème 4.1 qui est une conséquence du Théorème 3.9) : c'est d'une part lui qui permet de caractériser les sous-shifts finis et d'autre part de montrer que le niveau 1 existe dans les sous-shifts dénombrables de  $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  (Lemme 4.8).

La démonstration de ce théorème fait intervenir la structure de  $\mathbb{Z}^2$  elle-même et ne se généralise malheureusement pas aussi facilement. Nous généralisons ici ce résultat au cas des sous-shifts sur des groupes finiment engendrés. La preuve est similaire et nous tentons de mettre en valeur les ressemblances ainsi que les points clés de la démonstration.

**Théorème 5.8.** *Pour un groupe finiment engendré  $\mathcal{G}$ , tout sous-shift de  $\mathbb{Q}^{\mathcal{G}}$  ne contenant que des configurations totalement périodiques est fini.*

L'idée de la preuve est calquée sur celle du Théorème 3.9. Par l'absurde nous commençons par considérer une suite de configurations différentes et totalement périodiques. Nous faisons converger cette suite vers une autre configuration totalement

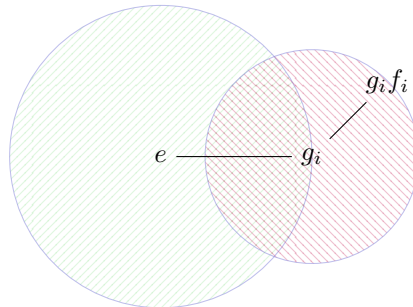
périodique. Les éléments de cette suite contiennent une partie  $M$  de leur limite qui est de plus en plus grande lorsque la suite converge vers sa limite. Au bord de cette partie  $M$  se trouve une partie  $N$  qui n'est pas dans sa limite. Intuitivement nous pouvons borner la taille de cette partie  $N$  car nous avons supposé la limite totalement périodique. Nous nous centrons à la frontière entre  $N$  et  $M$  pour obtenir une nouvelle suite qu'une fois encore nous faisons converger par compacité. Cette limite contient une partie infinie qui coïncide avec une configuration totalement périodique et une partie finie qui est une contradiction avec une telle périodicité. La démonstration qui suit n'est que la formalisation de cette intuition.

*Démonstration.* Par l'absurde, soit  $\mathbf{S}$  un sous-shift infini ne contenant que des configurations totalement périodiques. Tous les points ne sont pas isolés donc il existe ainsi une configuration  $c \in \mathbf{S}$  qui est un point d'accumulation, limite de la suite  $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathbf{S}$ . Pour tout  $i$ ,  $c_i \neq c$  donc il existe  $g_i \in \mathcal{G}$  que l'on peut supposer de longueur minimale tel que  $c_i(g_i) \neq c(g_i)$ . On remarque que  $\lim_{i \rightarrow \infty} \|g_i\|_{\mathbb{G}} = \infty$  car  $\mathcal{G}$  est finiment engendré.

Comme  $c$  est totalement périodique, l'orbite de  $c$  par l'action de  $\mathcal{G}$  est finie. Puisque l'ensemble des  $\sigma_{g_i}^{-1}(c)$  est infini, la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  définie par  $i\mathcal{R}j \Leftrightarrow \sigma_{g_i}^{-1}(c) = \sigma_{g_j}^{-1}(c)$  admet donc une classe d'équivalence infinie par le lemme des pigeons. Nous pouvons supposer sans perte de généralité, en ne prenant que les entiers dans la même classe d'équivalence infinie, que pour tout  $i$  et  $j$ ,  $\sigma_{g_i}^{-1}(c) = \sigma_{g_j}^{-1}(c)$ .

On note  $y_i = \sigma_{g_i}^{-1}(c_i)$ , c'est à dire,  $y_i(x) = \sigma_{g_i}^{-1}(c_i)(g_i^{-1}g_ix) = c_i(g_ix)$ . Par compacité, quitte à extraire, on peut supposer que  $y_i$  converge vers  $y \in \mathbf{S}$ . Soit  $f_i$  un des plus petits points en longueur tel que  $y_i(f_i) \neq y(f_i)$ . De même que pour  $g_i$ ,  $\lim_{i \rightarrow \infty} \|f_i\|_{\mathbb{G}} = \infty$ . Soit  $k_i = \min(\|g_i\|_{\mathbb{G}}, \|f_i\|_{\mathbb{G}})$ .

On remarque que si  $a \in \mathcal{G}$  est tel que  $\|g_ia\|_{\mathbb{G}} < \|g_i\|_{\mathbb{G}}$  et  $\|a\|_{\mathbb{G}} < \|f_i\|_{\mathbb{G}}$ , alors  $c(g_ia) = c_i(g_ia) = y_i(a) = y(a)$ . Ceci correspond à l'intersection des deux parties hachurées de la Figure 5.2.



La partie hachurée verte correspond à la partie de  $c_i$  qui coïncide avec  $c$ . La partie hachurée rouge est celle qui coïncide avec  $y$ .

FIGURE 5.2 – Exemple de  $c_i$



À  $i$  fixé, une représentation minimale de  $g_i$  sur  $\mathbb{G}$  s'écrit  $g_i = b_i c_i$  avec  $c_i$  de taille  $\lfloor k_i/3 \rfloor$ . On pose  $a_i = c_i^{-1}$  et on obtient :

- $\|a_i\|_{\mathbb{G}} \leq \|f_i\|_{\mathbb{G}} - k_i/3$  car  $\|a_i\|_{\mathbb{G}} = \lfloor k_i/3 \rfloor$  et  $\|f_i\|_{\mathbb{G}} \geq k_i$
- $\|g_i a_i\|_{\mathbb{G}} = \|b_i\|_{\mathbb{G}} \leq \|g_i\|_{\mathbb{G}} - k_i/3$ .

Puisque la norme de  $g_i$  tend vers l'infini lorsque  $i$  tend vers l'infini, il existe une infinité de tels  $c_i$  et donc une infinité de tels  $a_i$ . Ceci correspond au fait que l'intersection des deux boules représentées sur la Figure 5.2 peut être arbitrairement grande lorsque nous prenons  $g_i$  et  $f_i$  suffisamment grands. De plus, on remarque que pour  $b \in \mathcal{G}$  tel que  $\|b\|_{\mathbb{G}} < k_i/3$  on a :  $\|g_i a_i b\|_{\mathbb{G}} \leq \|g_i a_i\|_{\mathbb{G}} + \|b\|_{\mathbb{G}} < \|g_i\|_{\mathbb{G}} - k_i/3 + k_i/3 = \|g_i\|_{\mathbb{G}}$ ; de même,  $\|a_i b\|_{\mathbb{G}} \leq \|a_i\|_{\mathbb{G}} + \|b\|_{\mathbb{G}} < \|f_i\|_{\mathbb{G}} - k_i/3 + k_i/3 = \|f_i\|_{\mathbb{G}}$ .

$c$  et  $y$  étant totalement périodiques, ils sont d'orbite finie. On peut ainsi supposer que les  $a_i$  et  $g_i a_i$  sont tels que :  $\forall i, j \in \mathbb{N}, \sigma_{a_i^{-1}}(y) = \sigma_{a_j^{-1}}(y)$  et  $\sigma_{(g_i a_i)^{-1}}(c) = \sigma_{(g_j a_j)^{-1}}(c)$  puisqu'il existe une infinité de  $a_i$  et  $g_i a_i$  différents.

On fixe  $i$  en prenant  $i$  suffisamment grand :  $y(0) = y_i(0)$  est vrai dès que  $f_i > 0$  et  $c_i(g_i) \neq c(g_i)$  par définition de  $g_i$ . Ainsi,  $y(0) \neq c(g_i)$  avec ce  $i$  fixé. On prend  $j$  tel que  $k_j/3 > \|a_i^{-1}\|_{\mathbb{G}}$ . Ainsi :

$$\begin{aligned}
y(0) &= y(a_i a_i^{-1}) \\
&= y(a_j a_i^{-1}) && \text{car } \sigma_{a_i^{-1}}(y) = \sigma_{a_j^{-1}}(y) \\
&= y_j(a_j a_i^{-1}) && \text{car } \|a_j a_i^{-1}\|_{\mathbb{G}} \leq \|a_j\|_{\mathbb{G}} + \|a_i^{-1}\|_{\mathbb{G}} < k_j \leq \|f_j\|_{\mathbb{G}} \\
&= c_j(g_j a_j a_i^{-1}) && \text{par définition} \\
&= c(g_j a_j a_i^{-1}) && \text{car } \|g_j a_j a_i^{-1}\|_{\mathbb{G}} \leq \|g_j a_j\|_{\mathbb{G}} + \|a_i^{-1}\|_{\mathbb{G}} < \|g_j\|_{\mathbb{G}} \\
&= c(g_i a_i a_i^{-1}) && \text{car } \sigma_{(g_i a_i)^{-1}}(c) = \sigma_{(g_j a_j)^{-1}}(c) \\
&= c(g_i)
\end{aligned}$$

Contradiction. □

Le Théorème 5.8 nous permet de généraliser le Théorème 4.1 à  $\mathbf{Q}^{\mathcal{G}}$ . Les sous-shifts finis de  $\mathbf{Q}^{\mathcal{G}}$  sont exactement ceux ne contenant que des configurations totalement périodiques. Ceci nous permet de montrer que le niveau 1 existe dans les sous-shifts dénombrables de  $\mathbf{Q}^{\mathcal{G}}$ . Le Lemme 4.8 n'a besoin que du fait qu'il n'existe pas de chaîne infinie décroissante pour  $\preceq$  allant jusqu'au niveau 0. Les minimaux des sous-shifts dénombrables de  $\mathbf{Q}^{\mathcal{G}}$  sont aussi totalement périodiques et donc le sous-shift limite défini par une telle chaîne infinie serait fini et donc de type fini, ce qui est impossible.

Par conséquent le Théorème 4.9 se généralise tout aussi bien et sa démonstration est exactement la même en remplaçant  $\mathbb{Z}^2$  par  $\mathcal{G}$  et en remarquant que l'ensemble des points  $x$  de  $\mathcal{G}$  tels que  $\|x\|_{\mathbb{G}} \leq n$  est toujours fini quelque soit  $n$  car  $\mathcal{G}$  est finiment engendré :

**Théorème 5.9.** *Dans un sous-shift dénombrable  $\mathbf{S}$  de  $\mathbf{Q}^{\mathcal{G}}$ , une configuration  $c$  au niveau 1 ne peut être que d'un des deux types suivants :*

1.  $c$  a tous ses motifs qui apparaissent une infinité de fois : dans ce cas  $c$  admet une direction de périodicité (et n'est pas totalement périodique)
2.  $c$  contient un motif n'apparaissant qu'une seule fois : dans ce cas il existe un sous ensemble  $K$  de  $\mathcal{G}$  tel que  $c$  soit égale à une configuration totalement périodique sur chacune des composantes connexes de  $\mathcal{G} \setminus K$ .

## 5.4 Morphismes

Pour deux groupes  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$ , une application de  $\mathbf{G}$  dans  $\mathbf{H}$  se relève en une application de  $\mathbf{Q}^{\mathbf{H}}$  dans  $\mathbf{Q}^{\mathbf{G}}$ . Dans cette section nous définissons formellement ce relèvement et étudions les propriétés du relèvement dans le cas où l'application est un morphisme :

**Définition 5.10.** Soient  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$  deux groupes et  $f$  un morphisme de  $\mathbf{G}$  dans  $\mathbf{H}$ . Ceci nous définit une application canonique de  $\mathbf{Q}^{\mathbf{H}}$  dans  $\mathbf{Q}^{\mathbf{G}}$  :

$$\begin{aligned} F : \mathbf{Q}^{\mathbf{H}} &\rightarrow \mathbf{Q}^{\mathbf{G}} \\ c &\rightarrow c \circ f \end{aligned}$$

**Proposition 5.11.**  $F$  est une application continue pour la topologie produit de  $\mathbf{Q}^{\mathbf{H}}$  dans  $\mathbf{Q}^{\mathbf{G}}$ .

**Proposition 5.12.** L'image par  $F$  d'un sous-shift de  $\mathbf{Q}^{\mathbf{H}}$  est un sous-shift de  $\mathbf{Q}^{\mathbf{G}}$ .

*Démonstration.* Les sous-shifts sont des ensembles compacts car fermés dans un ensemble compact et comme  $F$  est continue, l'image d'un sous-shift est donc compacte.

Soit  $\mathbf{S}$  un sous-shift de  $\mathbf{Q}^{\mathbf{H}}$ ,  $c \in \mathbf{S}$  et  $g \in \mathbf{G}$ . Il ne nous reste plus qu'à montrer que  $\sigma_g(F(c))$  est dans  $F(\mathbf{S})$  pour compléter la preuve :

$$\begin{aligned} \sigma_g(F(c))(x) &= F(c)(g^{-1}x) \\ &= c(f(g^{-1}x)) \\ &= c(f(g)^{-1}f(x)) \\ &= \sigma_{f(g)}(c)(f(x)) \end{aligned}$$

Soit  $c' = \sigma_{f(g)}(c) \in \mathbf{S}$ , ainsi  $F(c') = \sigma_g(F(c)) \in F(\mathbf{S})$ .  $\square$

**Théorème 5.13.** Soit  $\mathbf{S}$  un sous-shift de  $\mathbf{Q}^{\mathbf{G}}$  tel que tous les éléments de  $\mathbf{S}$  soient périodiques selon  $\mathbf{H}$ . Si  $\mathbf{H}$  est un sous-groupe finiment engendré de  $\mathbf{G}$  alors il existe un nombre fini de périodes possibles selon  $\mathbf{H}$ .

*Démonstration.* Soit  $f$  l'injection canonique de  $\mathbf{H}$  dans  $\mathbf{G}$ ,  $F(\mathbf{S})$  est un sous-shift de  $\mathbf{Q}^{\mathbf{H}}$  d'après la Proposition 5.12. De plus,  $\mathbf{H}$  est finiment engendré, ainsi le Théorème 5.8 nous assure que  $F(\mathbf{S})$  est fini et alors il n'y a qu'un nombre fini de périodes possibles selon  $\mathbf{H}$  dans  $\mathbf{S}$ .  $\square$

Tout ce formalisme peut être retraduit en termes de sous-shifts sur  $\mathbb{Z}^2$  :

**Théorème 5.14.** Si un sous-shift de  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  ne contient que des configurations périodiques selon la même direction  $v$  (mais possiblement de période différente) alors il n'existe qu'un nombre fini de périodes possibles selon  $v$ .

*Démonstration.* On considère le sous-groupe de  $\mathbb{Z}^2$  engendré par  $v$  et on applique le Théorème 5.13.  $\square$



## **Deuxième partie**

# **Logique**



Un important problème mathématique du début du siècle dernier fut le "*Entscheidungsproblem*" de Hilbert, qui s'énonce ainsi : existe-t-il un algorithme permettant de décider de la validité d'une formule logique ?

Bien entendu, une réelle étude de ce problème nécessite une formalisation précise de ce que sont les formules logiques et les démonstrations : c'est ce qui donna naissance à la logique formelle. Pour éviter de rentrer dans les détails, supposons simplement que nous ayons un nombre fini d'axiomes et un nombre fini de règles de déduction. Sous de telles hypothèses, nous pouvons être facilement convaincus qu'il existe un algorithme qui énumère toutes les conséquences des axiomes par les règles de déduction. Il est, cependant, beaucoup moins clair de savoir si une formule n'est pas conséquence des axiomes choisis. Rappelons qu'une théorie est complète si toute formule ou sa négation peut être prouvée. En ce sens, la complétude d'une théorie est une condition suffisante à l'existence d'un algorithme de décision des formules d'un système logique. Le premier théorème d'incomplétude de Gödel [Gö31] fût un premier pas vers une réponse négative au problème de Hilbert. Ce premier théorème d'incomplétude peut s'énoncer ainsi : tout système logique cohérent, dont les théorèmes sont récursivement énumérables, et qui permet de formaliser l'arithmétique de Peano contient une formule qui ne peut ni être prouvée ni réfutée par ce système. Alonzo Church [Chu36] et Alan Turing [Tur37] ont montré, indépendamment au milieu des années 30, qu'il n'existe pas d'algorithme de décision pour la logique classique du premier ordre grâce aux formalismes, respectivement, des fonctions partielles récursives et des machines de Turing.

Cependant, alors que nous ne savions pas encore montrer l'indécidabilité de la logique du premier ordre, certaines sous classes de cette logique furent montrées décidables. L'arithmétique de Presburger [Pre29] est un exemple d'une telle sous classe. D'autres classes de formules furent montrées "aussi difficiles" que l'intégralité de la logique du premier ordre [Lö15, Her31] ; par "aussi difficile" nous entendons qu'il existe un procédé algorithmique transformant une formule quelconque en une formule de la sous classe tout en préservant sa validité (ou non validité).

Par la suite, le "*Entscheidungsproblem*" de Hilbert devint donc plus un problème de classification des classes de logique qu'un problème de décision. Quels sont les fragments décidables de la logique du premier ordre ? Quels sont ceux qui sont aussi difficiles que la logique toute entière ? Puisque toute formule du premier ordre est équivalente (récursivement) à une formule prénexe (une formule de la forme  $\{\forall, \exists\}^* \varphi$  où  $\varphi$  est une formule sans quantificateur), la logique du premier ordre est naturellement classifiée par les quantificateurs utilisés en forme prénexe. Ensuite nous pouvons restreindre le nombre de constantes, de prédicats et de relations autorisés pour obtenir une classification plus fine. Le problème de la décidabilité de beaucoup de ces classes de formules fût réglé par des méthodes diverses et variées [BGG97]. Une classe qui retient tout particulièrement notre intérêt, par les méthodes utilisées pour l'étude de sa décidabilité, est la classe communément appelée  $\forall\exists\forall$ .

Hao Wang introduit et formalisa les problèmes de pavages dans le but d'étudier ces classes de formules [Wan60, Wan61]. Il montra que la décidabilité de la classe  $\forall\exists\forall$  est équivalente à décider si un jeu de tuiles peut paver le plan [Wan61]. Par la suite, Kahr, Moore et Wang montrèrent qu'une version plus faible du *domino problem* se réduisait à la décidabilité de la classe  $\forall\exists\forall$  et montrèrent son indécidabilité [KMW62, Wan63]. Ceci permit de clore le problème de la décidabilité de la classe de Kahr-

Moore-Wang [BGG97] alors que Berger montrait, quelques années plus tard, l'indécidabilité du *domino problem* [Ber66]

Le formalisme utilisé par Wang est aujourd'hui appelé tuiles de Wang (Section 1.3). Il coda ce formalisme par des formules de la classe  $\forall\exists\forall$  de sorte qu'une formule soit démontrable si et seulement si il est possible de paver le plan par le jeu de tuiles codé. Depuis, des codages similaires et des progrès dans l'étude des pavages ont donné lieu à d'autres applications en logique. Par exemple, J.A. Makowsky se sert de ce codage pour montrer l'existence de théories particulières [Poi82, Mak74], réfutant une possible condition suffisante pour qu'une théorie soit finiment axiomatisable [Mak74]. Les propriétés de la théorie obtenue sont des traductions en théorie des modèles de propriétés des pavages.

Dans cette partie nous étudions en détails les liens étroits entre la logique et les pavages d'une part en proposant un codage du formalisme des pavages en logique (Chapitre 6) et d'autre part en transférant les propriétés des pavages définies lors de la Partie I de ce manuscrit en propriétés des modèles des théories obtenues (Chapitre 7).

## Chapitre 6

# Des pavages aux formules

Nous avons vu au Chapitre 1 comment définir formellement les pavages. Ces définitions ont été faites en deux temps : nous n'avons défini dans un premier temps que les configurations, c'est-à-dire des coloriage de  $\mathbb{Z}^2$  sans aucune contrainte puis avons ensuite ajouté les contraintes formalisant un jeu de tuiles.

Cette démarche est d'autant plus naturelle dans ce chapitre où nous cherchons à encoder le formalisme des pavages en logique du premier ordre. Nous devons tout d'abord fixer un langage sur lequel les configurations définies au Chapitre 1 sont vues comme des structures pour ensuite pouvoir rajouter des axiomes de sorte qu'un modèle de la théorie codant un jeu de tuiles puisse être vu comme un pavage par le jeu de tuiles codé.

Nous ne nous rappelons les définitions et résultats classiques de théorie des modèles que lorsque ceci est absolument nécessaire à la compréhension. Pour des explications plus détaillées nous référons le lecteur aux ouvrages de référence dans le domaine : par Bruno Poizat [Poi85], par David Marker [Mar02] ou par Wilfrid Hodges [Hod93].

### 6.1 Langages et structures

Dans cette section nous cherchons à définir un langage<sup>1 2</sup> où les configurations de  $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  peuvent être vues comme des structures sur ce langage. En premier lieu nous avons besoin de décrire  $\mathbb{Z}^2$ . Nous choisissons de représenter par des fonctions les déplacements dans  $\mathbb{Z}^2$  :

**Définition 6.1** (Déplacements dans  $\mathbb{Z}^2$ ).  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}^2} = \{N, S, E, W\}$  où  $N, S, E$  et  $W$  sont des symboles de fonctions unaires.

L'idée cachée derrière ce choix du langage  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}^2}$  est que  $\mathbb{Z}^2$  peut être vu comme le groupe de présentation  $\langle N, S, E, W \mid NEN^{-1}E^{-1}, NS, EW \rangle$ . En particulier, un point de  $\mathbb{Z}^2$  peut être représenté par un mot sur l'alphabet  $\Sigma = \{N, S, E, W\}$ . Comme

---

1. Dans ce chapitre, le terme langage est utilisé avec un sens différent : nous adoptons le vocabulaire de théorie des modèles.

2. Par convention, tous les langages que nous considérons contiennent la relation d'égalité =.



nous le verrons tout au long de ce chapitre, la logique du premier ordre ne permet pas de capturer complètement le concept de présentation d'un groupe. Nous ne nous en préoccupons pas pour l'instant car ce qui nous intéresse ici est que  $\mathbb{Z}^2$  puisse être vu comme une structure sur  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}^2}$ . Pour simplifier les notations, pour  $x = (i, j) \in \mathbb{Z}^2$ , nous noterons  $S_x$  la fonction  $E^i \circ N^j$ ; avec comme convention que  $N^{-j} = S^j$  et  $E^{-i} = W^i$ .

Au Chapitre 1, nous définissons une configuration comme une application de  $\mathbb{Z}^2$  dans un ensemble fini d'états  $\mathbf{Q}$ . Comme les éléments d'une structure sont censés représenter les points de  $\mathbb{Z}^2$ , pour coder qu'un point de  $\mathbb{Z}^2$  est d'une certaine couleur nous associons à chaque élément  $q$  de  $\mathbf{Q}$  un prédicat unaire  $P_q$ . L'idée est ici qu'une structure  $\mathcal{M}$  sur  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{Q}}$  est constituée d'éléments de  $\mathbb{Z}^2$  et un point  $x$  de  $\mathcal{M}$  vérifie le prédicat  $P_q$  si et seulement si la cellule à la position  $x$  est de couleur  $q$ .

**Définition 6.2** (Langage).  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{Q}} = \mathcal{L}_{\mathbb{Z}^2} \cup \{P_q | q \in \mathbf{Q}\}$  où les  $P_q$  sont des prédicats unaires.

**Proposition 6.3.** Une configuration  $x$  de  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  peut être vue comme une structure  $\mathcal{X}$  sur  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{Q}}$ .

*Démonstration.* Les points de  $\mathbb{Z}^2$  sont vus comme les éléments de la structure  $\mathcal{X}$ , on interprète  $N^{\mathcal{X}}(a)$  comme  $a + (0, 1)$ ,  $E^{\mathcal{X}}(a)$  comme  $a + (1, 0)$ , etc. et enfin  $x(a) = q$  si et seulement si  $\mathcal{X} \models P_q^{\mathcal{X}}(a^{\mathcal{X}})$  ce qui nous donne une interprétation des prédicats unaires  $P_q$ .  $\square$

Nous noterons  $\mathcal{X}$  une configuration  $x$  vue comme une structure sur  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{Q}}$ . Tout comme pour les pavages, lorsque nous avons fixé l'ensemble des couleurs  $\mathbf{Q}$  l'espace des configurations était fixé, une fois  $\mathbf{Q}$  fixé, le langage  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{Q}}$  permettant de décrire les configurations est aussi fixé.

## 6.2 Équivalences entre structures et configurations

Maintenant que nous sommes capables de voir une configurations de  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  comme une structure sur le langage  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{Q}}$  nous pouvons nous intéresser à ce que les propriétés entre structures signifient pour les configurations et vice-versa. Au Chapitre 1 nous avons défini un motif  $\mathbf{M}$  comme une application d'un sous ensemble fini  $\mathcal{D}_{\mathbf{M}}$  de  $\mathbb{Z}^2$  dans  $\mathbf{Q}$ . Nous savons donc exprimer les motifs par des formules : la formule  $\varphi_{\mathbf{M}}(x) = \bigwedge_{w \in \mathcal{D}_{\mathbf{M}}} P_{\mathbf{M}(w)}(S_w(x))$  encode le fait que le motif  $\mathbf{M}$  apparaît au point  $x$  dans une configuration vue comme une structure sur le langage  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{Q}}$ .

### 6.2.1 Isomorphisme

La plus forte notion d'équivalence entre deux structures sur un même langage est l'isomorphisme : deux structures  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont isomorphes s'il existe une bijection  $f$  entre  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  préservant les fonctions (e.g.,  $f(N(x)) = N(f(x))$ ) et les relations (e.g.,  $P_q(x) \Leftrightarrow P_q(f(x))$ ) du langage.

**Lemme 6.4.** *Soient  $x$  et  $y$  deux configurations de  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  et  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  leurs interprétations respectives sur le langage  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{Q}}$ .  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  sont isomorphes si et seulement si  $x$  et  $y$  sont égales modulo un décalage.*

*Démonstration.*  $\Leftarrow$  : Soit  $v \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $\sigma_v(x) = y$ . L'application qui à un élément  $a^{\mathcal{X}}$  de  $\mathcal{X}$  associe  $\mathcal{S}_v^{\mathcal{Y}}(a^{\mathcal{Y}}) \in \mathcal{Y}$  est un isomorphisme de  $\mathcal{X}$  vers  $\mathcal{Y}$  : par définition  $\mathcal{S}_v^{\mathcal{Y}}$  commute avec les fonctions de  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{Q}}$  et les prédicats unaires sont préservés puisque  $\sigma_v(x) = y$ .

$\Rightarrow$  : Soit  $\Theta$  un isomorphisme de  $\mathcal{X}$  vers  $\mathcal{Y}$ . Soit  $(0, 0)^{\mathcal{X}} \in \mathcal{X}$  l'interprétation de  $(0, 0) \in \mathbb{Z}^2$  dans  $\mathcal{X}$  et  $w \in \mathbb{Z}^2$ ,  $\mathcal{S}_w^{\mathcal{X}}((0, 0)^{\mathcal{X}})$  vérifie les mêmes formules dans  $\mathcal{X}$  que  $\mathcal{S}_w^{\mathcal{Y}}(\Theta((0, 0)^{\mathcal{X}}))$  dans  $\mathcal{Y}$  et *a fortiori* les prédicats du type  $P_q$  pour  $q \in \mathbf{Q}$ .  $\Theta((0, 0)^{\mathcal{X}})$  est l'interprétation d'un certain  $v \in \mathbb{Z}^2$  dans  $\mathcal{Y}$  et ainsi  $x(w) = y(v + w)$ , donc  $y = \sigma_v(x)$ .  $\square$

### 6.2.2 Équivalence élémentaire

Une autre équivalence fondamentale entre structures est celle d'équivalence élémentaire. On rappelle que deux structures  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont élémentairement équivalentes si elles vérifient les mêmes formules, *i.e.*, pour toute formule  $\varphi$ , on a  $\mathcal{M} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi$ .

Il existe de nombreux moyens de caractériser l'équivalence élémentaire entre deux structures, celle qui va nous servir à plusieurs reprises est due à William Hanf [Han65] :

**Lemme 6.5** (Lemme de localité de Hanf [Han65]). *Deux structures  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sur un langage  $\mathcal{L}$  ne contenant aucun symbole de fonction sont élémentairement équivalentes si et seulement si pour chaque sphère relationnelle, soit elle apparaît le même nombre fini de fois dans  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  soit elle apparaît une infinité de fois dans  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$ .*

*Démonstration.* Nous devons tout d'abord définir ce qu'est une sphère relationnelle : un point est à distance relationnelle 0 de lui-même, deux points  $x$  et  $y$  sont à distance relationnelle au plus 1 s'il existe une relation  $R$  dans  $\mathcal{L}$  telle que  $R(\dots, x, \dots, y, \dots)$  soit vraie dans la structure considérée, à distance au plus 2 s'il existe un point  $z$  à distance au plus 1 de  $x$  et  $y$  tel que  $R(\dots, x, \dots, z, \dots)$  et  $R(\dots, z, \dots, y, \dots)$  soient vraies dans la structure considérée, etc. La sphère relationnelle centrée en un point  $x$  et de rayon  $n$  est l'ensemble des points à distance relationnelle au plus  $n$  de  $x$ . Deux sphères sont égales si elles vérifient les mêmes formules.

$\Rightarrow$  : Soit  $S$  une sphère n'apparaissant qu'un nombre fini  $k$  de fois dans  $\mathcal{M}$ . La formule exprimant qu'il existe exactement  $k$  de ces sphères est aussi valide dans  $\mathcal{N}$ . Si  $S$  apparaît une infinité de fois dans  $\mathcal{M}$ , les formules exprimant qu'il existe au moins  $n$  de ces sphères sont toutes vraies dans  $\mathcal{N}$ . Ainsi  $S$  apparaît aussi une infinité de fois dans  $\mathcal{N}$ .

$\Leftarrow$  : Nous disons que les points  $a_1, \dots, a_p$  et  $b_1, \dots, b_p$  sont  $k$ -isomorphes s'il existe une bijection  $f$  entre les  $a_1, \dots, a_p$  et les  $b_1, \dots, b_p$  qui soit un isomorphisme entre les sphères relationnelles centrées en  $a_1, \dots, a_p$  de rayon  $3^k$  et celles centrées en  $b_1, \dots, b_p$  de même rayon. C'est à dire, une bijection préservant les relations sur ces sphères et telle que  $f(a_i) = b_i$ .

À  $k > 0$  fixé nous montrons par induction sur  $p$  que si  $a_1, \dots, a_p$  et  $b_1, \dots, b_p$  sont  $k$ -isomorphes alors pour tout  $b_{p+1}$  il existe un  $a_{p+1}$  tel que  $a_1, \dots, a_{p+1}$  et  $b_1, \dots, b_{p+1}$  soient  $k-1$ -isomorphes.

Pour  $p = 0$ , la sphère de rayon  $3^{k-1}$  centrée en  $b_1$  apparaît dans  $\mathcal{N}$  et donc dans  $\mathcal{M}$  centrée en  $a_1$ ;  $a_1$  et  $b_1$  sont donc  $k-1$ -isomorphes.

Supposons que le résultat soit vrai pour  $p$  et montrons le pour  $p+1$ ; nous distinguons deux cas :

- Il existe un  $b_i$  à distance relationnelle inférieure à  $2 \times 3^{k-1}$  de  $b_{p+1}$ . Dans ce cas, la sphère de rayon  $3^{k-1}$  centrée en  $b_{p+1}$  est incluse dans la sphère de rayon  $3^k$  centrée sur ce  $b_i$ . Par conséquent, si  $f$  est le  $k$ -isomorphisme entre  $a_1, \dots, a_p$  et  $b_1, \dots, b_p$  et en prenant  $a_{p+1} = f^{-1}(b_{p+1})$ ,  $f$  est un  $k-1$  isomorphisme entre  $a_1, \dots, a_{p+1}$  et  $b_1, \dots, b_{p+1}$ .
- Tous les  $b_i$  sont à distance relationnelle au moins  $2 \times 3^{k-1}$  de  $b_{p+1}$ . Dans ce cas, toutes les sphères centrées sur un  $b_i$  et de rayon  $3^{k-1}$  sont disjointes de la sphère  $S$  centrée en  $b_{p+1}$  et de même rayon. Cette sphère apparaît un certain nombre de fois, noté  $\alpha$ , centrée en un point à distance inférieure à  $3^{k-1}$  d'un  $b_1, \dots, b_p$ . Elle apparaît donc au moins  $\alpha+1$  fois dans  $\mathcal{N}$  et donc au moins  $\alpha+1$  fois dans  $\mathcal{M}$ . Parmi ces  $\alpha+1$  occurrences de  $S$  dans  $\mathcal{M}$ , l'une d'entre elles est centrée en un point  $a_{p+1}$  à distance au moins  $3^{k-1}$  d'un  $a_1, \dots, a_p$  sinon  $a_1, \dots, a_p$  et  $b_1, \dots, b_p$  ne seraient pas  $k$ -isomorphes. Par conséquent,  $a_1, \dots, a_{p+1}$  et  $b_1, \dots, b_{p+1}$  sont  $k-1$ -isomorphes.

Soit  $\varphi$  une formule sous forme préfixe :  $\varphi = Q_1 x_1, \dots, Q_n x_n, \phi(x_1, \dots, x_n)$  où  $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ . Pour  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{M}$ , il existe  $b_1, \dots, b_n \in \mathcal{N}$  qui leur sont 0-isomorphes, par conséquent, si  $\phi(a_1, \dots, a_n)$  est vraie dans  $\mathcal{M}$ ,  $\phi(b_1, \dots, b_n)$  est vraie dans  $\mathcal{N}$ , donc,  $\mathcal{M} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi$  et  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont des structures élémentairement équivalentes.  $\square$

Ce lemme, qui s'applique à tous les langages sans symbole de fonctions, est prouvé par Francis Oger [Oge04] pour l'appliquer dans un cadre plus général que le cas des pavages du plan discret  $\mathbb{Z}^2$ , Emmanuel Jeandel et Guillaume Theyssier l'utilisent aussi pour améliorer le résultat dans un contexte particulier [JT09].

**Théorème 6.6** ([Poi82, Oge04]). *Soient  $x$  et  $y$  deux configurations de  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  et  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  leurs interprétations respectives sur le langage  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{Q}}$ .  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  sont élémentairement équivalentes si et seulement si  $x$  et  $y$  sont localement isomorphes (contiennent les mêmes motifs).*

*Démonstration.*  $\Rightarrow$  : Nous pouvons exprimer l'apparition d'un motif  $\mathbf{M}$  par une formule du premier ordre :  $\exists a, \varphi_{\mathbf{M}}(a)$ . Ainsi, comme toute formule valide dans  $\mathcal{X}$  l'est dans  $\mathcal{Y}$  et vice-versa, tout motif qui apparaît dans  $x$  apparaît dans  $y$ , ce qui montre que si deux configurations sont élémentairement équivalentes en tant que structures sur  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{Q}}$  alors elles sont localement isomorphes en tant que configurations de  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$ .

$\Leftarrow$  : Pour commencer, nous remplaçons les fonctions unaires  $N, S, E$  et  $W$  par les relations fonctionnelles binaires équivalentes  $N', S', E'$  et  $W'$  :  $N(x) = y \Leftrightarrow N'(x, y)$ .

Dans notre cas, les sphères représentent les motifs. Considérons un point  $a$  et tous les points à distance relationnelle au plus  $n$ , comme notre langage ne contient que des

prédicats fonctionnels binaires qui représentent les fonctions  $N, S, E, W$ , la distance relationnelle n'est rien d'autre que la distance  $d(., .)$  (ou distance de Manhattan) sur  $\mathbb{Z}^2$  (que nous avons définie à la Section 1.1). Ainsi, la sphère au point  $a$  et de rayon  $n$  est le motif défini sur  $\mathcal{B}(a, n)$  de notre configuration.

Les deux configurations  $x$  et  $y$  ont les mêmes motifs. Un motif apparaissant un nombre fini de fois dans  $x$  apparaît le même nombre fini de fois dans  $y$  sinon, en prenant l'union de ces motifs on obtient un motif qui apparaît dans une configuration et pas dans l'autre. Par conséquent, le lemme de localité de Hanf (Lemme 6.5) s'applique et puisque  $x$  et  $y$  contiennent les mêmes motifs, leurs interprétations  $\mathcal{X}'$  et  $\mathcal{Y}'$  sont élémentairement équivalentes sur le langage relationnel considéré. Pour une formule  $\varphi$ , en remplaçant toutes les occurrences de  $N'(a, b)$  par  $N(a) = b$  et de même pour  $S, E$  et  $W$ , nous obtenons que  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  sont élémentairement équivalentes sur  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}^2, \mathcal{Q}}$ .  $\square$

## 6.3 Axiomatisation

Maintenant que nous avons défini un langage  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}^2, \mathcal{Q}}$  dans lequel nous pouvons voir des configurations de  $\mathcal{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  en tant que structures sur ce langage, nous cherchons à obtenir l'interprétation inverse : construire une théorie sur  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}^2, \mathcal{Q}}$  dont nous pouvons interpréter les modèles comme des configurations sur  $\mathcal{Q}^{\mathbb{Z}^2}$ . Nous pouvons déjà savoir que nous n'y arriverons pas grâce au théorème de compacité de théorie des modèles : les formules exprimant qu'il existe deux points à distance au moins  $n$  sont finiment satisfaites par toute interprétation d'une configuration, donc il existe un modèle les satisfaisant toutes. Ce modèle contient deux points à distance infinie et ne peut ainsi pas être l'interprétation d'une configuration. Essayons tout de même de voir ce que nous arrivons à faire malgré cette limitation inévitable.

### 6.3.1 L'espace $\mathbb{Z}^2$

À la Section 6.1 nous interprétons les points de  $\mathbb{Z}^2$  comme des éléments des structures correspondant aux configurations. Pour obtenir une configuration à partir d'un modèle il nous faut tout d'abord axiomatiser  $\mathbb{Z}^2$  dans une théorie.

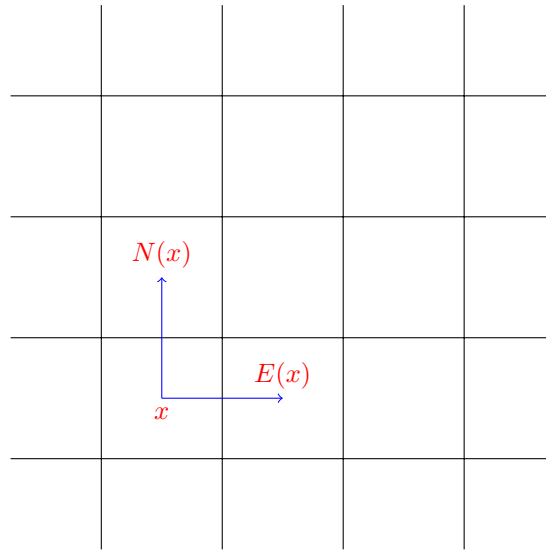
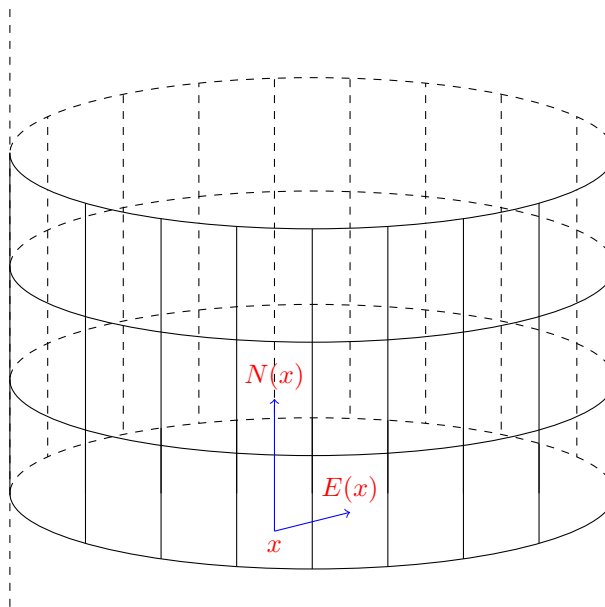
Nous avons déjà remarqué que le plan  $\mathbb{Z}^2$  peut être vu comme un graphe de Cayley du groupe de présentation  $\langle N, S, E, W \mid NEN^{-1}E^{-1}, NS, EW \rangle$ , nous pouvons donc axiomatiser (partiellement) la présentation de  $\mathbb{Z}^2$  :

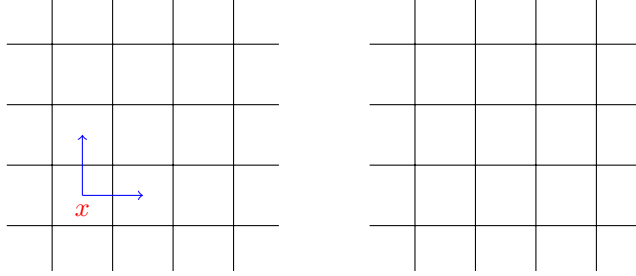
**Définition 6.7.** Nous notons  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2}$  la théorie sur  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}^2, \mathcal{Q}}$  contenant les axiomes suivants :

- $\forall x, N(S(x)) = S(N(x)) = E(W(x)) = W(E(x)) = x$
- $\forall x, N(E(x)) = E(N(x))$

La Figure 6.1 représente ce que l'on voudrait obtenir comme modèle de  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2}$ . Hélas, une structure dans laquelle, par exemple, pour tout  $x$ ,  $E^k(x) = x$  peut aussi être un modèle de  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2}$ . Ces modèles exotiques sont des cylindres (représentant  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ) ou des tores qui correspondent aux modèles finis (représentant  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ ) ou enfin des unions de tels modèles comme représenté sur les Figures 6.2 et 6.3.

Nous pouvons cependant éviter ce genre de "problèmes" en rajoutant des axiomes à  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2}$  :

FIGURE 6.1 – Exemple d'un modèle idéal de  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2}$ .FIGURE 6.2 – Un modèle exotique de  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

FIGURE 6.3 – Un modèle non connexe de  $\mathbb{Z}^2$ 

**Définition 6.8** (Théorie évitant les cas "dégénérés").

$$\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2}^{\infty} = \mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2} \cup \{\forall x, \mathcal{S}_a(x) \neq x\}_{a \in \mathbb{Z}^2}$$

En rajoutant ces axiomes nous perdons la propriété que  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2}$  est finiment axiomatisable. Nous verrons que l'on peut s'affranchir de ces axiomes supplémentaires dans certains cas et ainsi nous ne les utiliserons donc que lorsque cela sera strictement nécessaire. Plus gênant, en revanche, si  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont des modèles de  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2}$  alors  $\mathcal{M} \amalg \mathcal{N}$ , l'union disjointe de  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$ , est aussi un modèle de  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2}$ . On peut voir ceci comme deux copies indépendantes de  $\mathbb{Z}^2$  mises côte à côte comme représenté sur la Figure 6.3. Comme nous l'avons déjà remarqué, par un simple argument de compacité, nous ne pouvons pas nous affranchir de ces modèles au premier ordre. Une solution possible serait d'utiliser le théorème d'omission des types [Mar02, Chapitre 4] pour ne considérer que les modèles omettant le type constitué des formules exprimant "il existe des points à distance au moins  $n$ ", pour tout  $n$ .

### 6.3.2 Axiomatisation des couleurs

Maintenant que nous avons un moyen d'axiomatiser le plan, il ne nous reste plus qu'à axiomatiser les couleurs pour obtenir les configurations. Une configuration est une application (totale) de  $\mathbb{Z}^2$  dans  $\mathbf{Q}$ , ainsi, chaque point d'une configuration a une et une seule couleur associée. Ceci se traduit par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{Q}} &: \forall x, \bigvee_{q \in \mathbf{Q}} P_q(x) \\ B_{\mathbf{Q}} &: \forall x, \bigwedge_{q \neq p \in \mathbf{Q}} (P_q(x) \Rightarrow \neg P_p(x)) \end{aligned}$$

Où  $A_{\mathbf{Q}}$  représente le fait que chaque point a au moins une couleur et  $B_{\mathbf{Q}}$  au plus une.

**Définition 6.9.**

$$\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{Q}} = \mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2} \cup \{A_{\mathbf{Q}}, B_{\mathbf{Q}}\}.$$

Par définition des configurations, une configuration de  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$ , vue en tant que structure sur  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{Q}}$ , est un modèle de  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{Q}}$ . En revanche, un modèle de  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{Q}}$  n'est pas

forcément une configuration à cause des modèles "dégénérés" ou non connexes discutés auparavant. Cependant on peut déplier un tel modèle en une configuration de la façon suivante : soit  $\mathcal{M}$  un modèle de  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{Q}}$  et  $a$  un élément de  $\mathcal{M}$ . On définit la configuration  $c_{\mathcal{M}, a}$  telle que :  $c_{\mathcal{M}, a}(x)$  soit égal à la couleur de  $\mathcal{S}_x(a)$ , i.e. :

$$c_{\mathcal{M}, a}(x) = q \in \mathbf{Q} \Leftrightarrow P_q(\mathcal{S}_x(a))$$

Les axiomes  $A_{\mathbf{Q}}$  et  $B_{\mathbf{Q}}$  nous assurent que cette définition est valide et définit une configuration de  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  puisqu'un modèle vérifie, en un point donné, un et un seul  $P_q$ .

### 6.3.3 Théorie d'un jeu de tuiles

Les axiomes  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{Q}}$  nous permettent d'obtenir une configuration à partir d'un modèle de cette théorie. Nous avons vu au Chapitre 1 plusieurs façons de définir des jeux de tuiles. Étant donné que, pour un motif  $\mathbf{M}$ , la formule  $\varphi_{\mathbf{M}}(x)$  exprime que le motif  $\mathbf{M}$  apparaît au point  $x$ , la définition la plus naturelle dans notre cadre est celle par motifs interdits (voir la Section 1.4).

Pour un motif  $\mathbf{M}$  d'un ensemble  $\mathcal{F}$  de motifs interdits, une structure ne contient pas ce motif si elle vérifie la formule  $\forall x, \neg\varphi_{\mathbf{M}}(x)$ . Ainsi, pour qu'aucun modèle de notre théorie ne contienne de motif interdit il suffit de rajouter ces formules aux axiomes :

**Définition 6.10** (Théorie d'un jeu de tuiles). *Pour un ensemble de motifs interdits  $\mathcal{F}$ , on définit :  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{Q}, \mathcal{F}} = \mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{Q}} \cup \{\forall x, \neg\varphi_{\mathbf{M}}(x) \mid \mathbf{M} \in \mathcal{F}\}$ .*

Lorsque  $\mathcal{F}$  est fini, c'est-à-dire lorsque nous encodons des espaces de pavages, la théorie  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{Q}, \mathcal{F}}$  est aussi finie. Notons que la théorie  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{Q}, \mathcal{F}}$  est universelle. Par exemple, si l'on considère l'ensemble de couleurs  $\mathbf{Q} = \{\square, \blacksquare\}$  et l'ensemble de motifs interdits  $\mathcal{F} = \left\{ \begin{array}{c} \square \blacksquare \\ \blacksquare \square \end{array} \right\}$ , nous obtenons la théorie suivante :

$$\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{Q}, \mathcal{F}} = \left\{ \begin{array}{l} \forall x, N(S(x)) = S(N(x)) = E(W(x)) = W(E(x)) = x \\ \forall x, N(E(x)) = E(N(x)), \forall x, P_{\square}(x) \vee P_{\blacksquare}(x) \\ \forall x, (P_{\square}(x) \Rightarrow \neg P_{\blacksquare}(x)) \wedge (P_{\blacksquare}(x) \Rightarrow \neg P_{\square}(x)) \\ \forall x, P_{\blacksquare}(x) \Rightarrow \neg P_{\square}(E(x)) \\ \forall x, P_{\square}(x) \Rightarrow \neg P_{\blacksquare}(N(x)) \\ \forall x, P_{\blacksquare}(x) \Rightarrow \neg P_{\square}(N(x)) \end{array} \right\}$$

**Proposition 6.11.** *Si  $x$  est un pavage valide pour  $\mathcal{F}$ , alors  $\mathcal{X}$  est un modèle de  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{Q}, \mathcal{F}}$ .*

*Pour un modèle  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{Q}, \mathcal{F}}$  et un point  $a$  de  $\mathcal{M}$ , la configuration  $c_{\mathcal{M}, a}$  est un pavage valide pour  $\mathcal{F}$ .*

*Démonstration.* Premièrement, puisque  $x$  est une configuration de  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$ ,  $\mathcal{X}$  peut être vue comme une structure sur  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{Q}}$  (Proposition 6.3) et  $c_{\mathcal{M}, a}$  est bien une configuration de  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$ .

Deuxièmement, chaque point de  $x$  a une et une seule couleur et donc  $\mathcal{X}$  est un modèle de  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{Q}}$ .

Troisièmement,  $x$  ne contient aucun motif de  $\mathcal{F}$ , donc pour un motif  $\mathbf{M}$  de  $\mathcal{F}$ , la formule  $\forall x, \neg\varphi_{\mathbf{M}}(x)$  est vérifiée par  $\mathcal{X}$ .  $\mathcal{X}$  est bien un modèle de  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{Q}, \mathcal{F}}$ . Réciproquement, comme  $\mathcal{M}$  est un modèle de  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{Q}, \mathcal{F}}$ , le dépliage  $c_{\mathcal{M}, a}$  de  $\mathcal{M}$  en  $a$  ne contient aucun motif de  $\mathcal{F}$ , donc  $c_{\mathcal{M}, a}$  est bien un pavage valide pour  $\mathcal{F}$ .  $\square$

## Chapitre 7

# Traduction des propriétés

Au chapitre précédent nous avons étudié les relations entre les propriétés des configurations et leurs interprétations sur le langage  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}^2, \mathcal{Q}}$ . De plus, nous avons proposé des axiomes permettant de coder d'une part les configurations et d'autre part les contraintes associées à un jeu de tuiles. Dans ce chapitre nous nous intéressons plus spécifiquement aux liens entre les propriétés de la théorie d'un jeu de tuiles et celles du jeu de tuiles lui-même.

En premier lieu, une conséquence immédiate des résultats présentés au Chapitre 6 permet de lier la consistance de la théorie d'un jeu de tuiles et le fait que le jeu de tuiles puisse paver le plan :

**Lemme 7.1.**  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathcal{Q}, \mathcal{F}}$  est consistante (à un modèle) si et seulement si il existe un pavage valide pour  $\mathcal{F}$ .

*Démonstration.* D'après la Proposition 6.11, un pavage peut être interprété en un modèle de  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathcal{Q}, \mathcal{F}}$  et donc l'existence d'un pavage valide pour  $\mathcal{F}$  implique la consistance de  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathcal{Q}, \mathcal{F}}$ .

Toujours d'après la Proposition 6.11, un modèle  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathcal{Q}, \mathcal{F}}$  se déplie en un point  $a$  de  $\mathcal{M}$  en un pavage valide pour  $\mathcal{F} : c_{\mathcal{M}, a}$ .  $\square$

On remarque que ce lemme implique que dès que  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathcal{Q}, \mathcal{F}}$  admet un modèle alors elle admet un modèle infini : un pavage valide pour  $\mathcal{F}$ . Cependant, nous pouvons tisser des liens supplémentaires entre les modèles finis de  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathcal{Q}, \mathcal{F}}$  et les pavages périodiques valides pour le jeu de tuiles considéré :

**Lemme 7.2.**  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathcal{Q}, \mathcal{F}}$  a un modèle fini si et seulement si  $\mathcal{F}$  admet un pavage bipériodique.

*Démonstration.*  $\Rightarrow$ : Soit  $\mathcal{M}$  un modèle fini de  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathcal{Q}, \mathcal{F}}$  et  $c_{\mathcal{M}, a}$  le pavage valide pour  $\mathcal{F}$  obtenu à partir de  $\mathcal{M}$  en le dépliant à partir de  $a \in \mathcal{M}$ .  $\mathcal{M}$  étant fini, les ensembles  $\{N^j(a) | j \in \mathbb{N}\}$  et  $\{E^i(a) | i \in \mathbb{N}\}$  sont tous deux finis; il existe donc des entiers  $i_1, i_2, j_1$  et  $j_2$  tels que  $E^{i_1}(a) = E^{i_2}(a)$  et  $N^{j_1}(a) = N^{j_2}(a)$ . Par conséquent, pour tout  $x \in \mathbb{Z}^2$ ,  $c_{\mathcal{M}, a}(x + (i_1, 0)) = c_{\mathcal{M}, a}(x + (i_2, 0))$  et  $c_{\mathcal{M}, a}(x + (0, j_1)) = c_{\mathcal{M}, a}(x + (0, j_2))$  donc  $c_{\mathcal{M}, a}$  est bipériodique.



$\Leftarrow$ : Soit  $x$  un pavage bipériodique, de bipériode  $n$ , valide pour  $\mathcal{F}$ . Puisque  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est un modèle de  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2}$  et que pour tout  $a \in \mathcal{X}$ ,  $N^n(a)$ ,  $E^n(a)$  et  $a$  vérifient les mêmes formules, en considérant l'interprétation  $\mathcal{X}'$  de  $x$  en tant que pavage de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{X}'$  est un modèle fini de  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathcal{Q}, \mathcal{F}}$ .  $\square$

Les Lemmes 7.1 et 7.2 suggèrent qu'il y a peu de chances pour que  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathcal{Q}, \mathcal{F}}$  soit une théorie complète; en effet, un modèle fini ne peut pas vérifier les mêmes formules qu'un modèle infini : les formules exprimant "il existe au moins  $n$  points" ne sont pas toutes vraies dans le modèle fini alors qu'elles le sont dans le modèle infini.

En revanche, si nous avons un moyen de nous assurer que  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathcal{Q}, \mathcal{F}}$  n'admet pas de modèle fini, que ce soit parce que  $\mathcal{F}$  n'admet pas de pavage périodique ou en rajoutant des axiomes forçant tous les modèles à être infini comme nous l'avons fait pour construire  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathcal{Q}, \mathcal{F}}^\infty$ , nous obtenons l'équivalence de la complétude de la théorie considérée avec le fait que tous les pavages valides pour  $\mathcal{F}$  contiennent les mêmes motifs :

**Théorème 7.3** ([Poi82, BJ08]). *Un espace de pavages généralisé  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  ne contient qu'une seule configuration modulo isomorphisme local si et seulement si  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathcal{Q}, \mathcal{F}}^\infty$  est complète.*

*Démonstration.*  $\Rightarrow$ : On prouve que tous les modèles de  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathcal{Q}, \mathcal{F}}^\infty$  sont élémentairement équivalents deux à deux. C'est déjà le cas pour les modèles qui sont des configurations (Théorème 6.6) mais il nous reste à le prouver pour tous les modèles.

Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux modèles de  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathcal{Q}, \mathcal{F}}^\infty$  : ce sont des copies de configurations. Tous les motifs qui apparaissent dans une configuration apparaissent une infinité de fois dans cette même configuration d'après le Lemme 2.17. Ainsi le lemme de localité de Hanf (Lemme 6.5) s'applique et  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ . Donc  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathcal{Q}, \mathcal{F}}^\infty$  est complète.

$\Leftarrow$ : Si  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathcal{Q}, \mathcal{F}}^\infty$  est complète, pour tout motif  $\mathbf{M}$ , la formule  $\exists x, \varphi_{\mathbf{M}}(x)$  est soit vraie dans tout modèle soit fausse dans tout modèle; par conséquent, deux pavages valides pour  $\mathcal{F}$  contiennent les mêmes motifs et ainsi  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  ne contient qu'une seule configuration modulo isomorphisme local.  $\square$

Ce théorème nous permet d'obtenir un résultat de décidabilité dans le cas où un espace de pavages ne contient qu'une seule configuration modulo  $\approx$ , et ce, sans aucun vocabulaire relatif à la logique :

**Corollaire 7.4** ([BJ08]). *Si un espace de pavages  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  ne contient qu'un pavage modulo isomorphisme local alors le problème de savoir si un motif apparaît est décidable.*

*Démonstration.* Puisque  $\mathcal{F}$  est fini,  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathcal{Q}, \mathcal{F}}$  est finie et ainsi  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathcal{Q}, \mathcal{F}}^\infty$  est récursivement énumérable. D'après le Théorème 7.3, si  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  ne contient qu'un seul pavage modulo isomorphisme local alors  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathcal{Q}, \mathcal{F}}^\infty$  est une théorie complète. En énumérant récursivement toutes les formules valides de  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathcal{Q}, \mathcal{F}}^\infty$  on trouvera une preuve de  $\exists x, \varphi_{\mathbf{M}}(x)$  ou de sa négation  $\forall x, \neg \varphi_{\mathbf{M}}(x)$  car  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathcal{Q}, \mathcal{F}}^\infty$  est complète.

Par conséquent, cet algorithme permet de décider si un motif  $\mathbf{M}$  apparaît dans une configuration de  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  (si la formule  $\exists x, \varphi_{\mathbf{M}}(x)$  est vraie) ou s'il n'apparaît dans aucune configuration de  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  (si la formule  $\forall x, \neg \varphi_{\mathbf{M}}(x)$  est vraie).  $\square$

Bien que l'algorithme proposé pour décider de l'apparition d'un motif lorsqu'un espace de pavages ne contient qu'une seule configuration modulo  $\approx$  ne soit pas très efficace en termes de complexité, il permet d'obtenir des preuves simples que certains jeux de tuiles n'ont pas cette propriété. Par exemple, le jeu de tuiles proposé par B. Durand, L. Levin et A. Shen dont tous les motifs de taille  $n \times n$  apparaissant dans un pavage valide ont une complexité de Kolmogorov en  $\Theta(n)$  [DLS01, DLS08] ne peut pas avoir la propriété que tous les pavages sont les mêmes modulo  $\approx$ .

## 7.1 Liens avec $\preceq$

La Partie I de ce manuscrit a été largement consacrée à l'étude du pré-ordre  $\preceq$  sur les espaces de pavages. Nous pouvons ainsi nous intéresser à ce que signifie cet ordre pour les interprétations des configurations sur  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}^2, \mathbb{Q}}$ .

**Théorème 7.5.** *Pour deux configurations  $x$  et  $y$  de  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$  et leurs interprétations respectives dans  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}^2, \mathbb{Q}}$ ,  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$ , on a :*

$$x \prec y \Rightarrow \mathcal{X} \amalg \mathcal{Y} \models \text{Th}(\mathcal{Y}) \Rightarrow x \preceq y$$

*Démonstration.* Pour la première implication, d'après le Lemme 2.8, tous les motifs de  $x$  apparaissent une infinité de fois dans  $y$ . Nous pouvons donc montrer que  $\mathcal{Y}$  et  $\mathcal{X} \amalg \mathcal{Y}$  sont élémentairement équivalentes encore une fois grâce au lemme de localité de Hanf. Les motifs n'apparaissant qu'un nombre fini de fois dans  $y$  n'apparaissent pas dans  $x$  ainsi les sphères relationnelles qui sont en nombre fini dans  $\mathcal{Y}$  apparaissent le même nombre de fois dans  $\mathcal{X} \amalg \mathcal{Y}$  et le lemme de Hanf nous permet de conclure que  $\mathcal{Y}$  et  $\mathcal{X} \amalg \mathcal{Y}$  sont élémentairement équivalentes.

Pour la seconde, par l'absurde, soit  $\mathbf{P}$  un motif apparaissant dans  $x$  et pas dans  $y$ . La formule  $\forall x, \neg \varphi_{\mathbf{P}}(x)$  est donc fautive dans  $\mathcal{X}$  mais vraie dans  $\mathcal{Y}$  et ainsi  $\mathcal{X} \amalg \mathcal{Y}$  ne peut pas être un modèle de  $\text{Th}(\mathcal{Y})$ .  $\square$

**Corollaire 7.6.** *Pour deux configurations  $x$  et  $y$ , on a :*

$$x \prec y \Leftrightarrow [\mathcal{X} \amalg \mathcal{Y} \models \text{Th}(\mathcal{Y}) \text{ et } \text{Th}(\mathcal{X}) \neq \text{Th}(\mathcal{Y})]$$

*Démonstration.* D'après le Théorème 6.6,  $x \approx y$  si et seulement si  $\text{Th}(\mathcal{X}) = \text{Th}(\mathcal{Y})$ .  $\square$

On constate que nous n'avons pas d'équivalence pour les implications du Théorème 7.5. Pour la première, il suffit de considérer une configuration  $x$  monochrome et son interprétation  $\mathcal{X}$  sur  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}^2, \mathbb{Q}}$ ; on a  $\mathcal{X} \amalg \mathcal{X} \models \text{Th}(\mathcal{X})$  et pourtant  $x \approx x$ . Pour la seconde, il faut considérer une configuration ayant un motif  $\mathbf{P}$  n'apparaissant qu'une seule fois; on a  $x \preceq x$  et pourtant, la formule exprimant que le motif  $\mathbf{P}$  apparaît deux fois est vraie dans  $\mathcal{X} \amalg \mathcal{X}$  mais pas dans  $\mathcal{X}$ . Cependant, nous pouvons transformer ces implications en équivalences en distinguant ces deux types de configurations :

**Théorème 7.7.** *Pour deux configurations de  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$ ,  $x$  et  $y$ , et leurs interprétations respectives dans  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}^2, \mathbb{Q}}$ ,  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$ , on a :*

- Si  $y$  a tous ses motifs apparaissant une infinité de fois alors  $x \preceq y \Leftrightarrow \mathcal{X} \amalg \mathcal{Y} \models \text{Th}(\mathcal{Y})$
- Si  $y$  contient un motif qui n'apparaît qu'une seule fois alors  $x \prec y \Leftrightarrow \mathcal{X} \amalg \mathcal{Y} \models \text{Th}(\mathcal{Y})$

*Démonstration.* Un sens de chaque équivalence est donné par le Théorème 7.5.

Si  $y$  a tous ses motifs apparaissant une infinité de fois alors le nombre de sphères relationnelles dans  $\mathcal{Y}$  est toujours infini et le lemme de Hanf nous assure que  $x \preceq y \Rightarrow \mathcal{X} \amalg \mathcal{Y} \models \text{Th}(\mathcal{Y})$ .

Si  $y$  a un motif  $\mathbf{P}$  n'apparaissant qu'une seule fois, nous savons déjà que  $\mathcal{X} \amalg \mathcal{Y} \models \text{Th}(\mathcal{Y})$  implique  $x \preceq y$ . Si  $x \approx y$  alors la formule exprimant que  $\mathbf{P}$  apparaît deux fois est vraie dans  $\mathcal{X} \amalg \mathcal{Y}$  mais pas dans  $\mathcal{Y}$ ; donc  $x \prec y$ .  $\square$

**Corollaire 7.8.** *Une configuration  $y$  a tous ses motifs apparaissant une infinité de fois si et seulement si  $\mathcal{Y} \amalg \mathcal{Y} \models \text{Th}(\mathcal{Y})$ .*

*Démonstration.*  $\Rightarrow$ : Théorème 7.7.

$\Leftarrow$ : Si  $y$  contient un motif n'apparaissant qu'une seule fois alors la formule exprimant que ce motif apparaît deux fois est vraie dans  $\mathcal{Y} \amalg \mathcal{Y}$  mais pas dans  $\text{Th}(\mathcal{Y})$ . C'est le seul cas possible d'après la Remarque 2.7.  $\square$

**Corollaire 7.9.** *Pour une configuration  $c$  et un nombre fini de configurations  $c_i$  (et leurs interprétations respectives,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}_i$ ), on a :*

$$\mathcal{C}_1 \amalg \dots \amalg \mathcal{C}_k \models \text{Th}(\mathcal{C}) \Rightarrow [\forall i, c_i \preceq c \text{ et } \exists i, c_i \approx c]$$

*Démonstration.* La première moitié de l'implication ( $\forall i, c_i \preceq c$ ) est une conséquence du Théorème 7.5.

Pour la seconde moitié, par l'absurde, supposons que, pour tout  $i$ ,  $c_i \prec c$ . C'est-à-dire, pour tout  $i$ , il existe un motif  $\mathbf{P}_i$  apparaissant dans  $c$  mais pas dans  $c_i$ . La formule  $\bigwedge_i \exists x, \varphi_{\mathbf{P}_i}(x)$  est vraie dans  $\mathcal{C}$  mais dans aucune des  $\mathcal{C}_i$ , ainsi,  $\mathcal{C}_1 \amalg \dots \amalg \mathcal{C}_k$  ne peut pas être un modèle de  $\text{Th}(\mathcal{C})$ .  $\square$

Lorsque nous considérons un nombre infini de configurations, nous avons toujours que  $\amalg_i \mathcal{C}_i \models \text{Th}(\mathcal{C})$  implique que, pour tout  $i$ ,  $c_i \preceq c$  via le Théorème 7.5; en revanche, la deuxième moitié de la conclusion n'est pas forcément vérifiée : il suffit de considérer une configuration  $c$  sur  $\mathbf{Q} = \{0, 1\}$  contenant tous les motifs et les configurations  $c_i$  où  $c_i$  contient le motif  $\mathbf{P}_i$  entouré de 0;  $\mathbf{P}_i$  parcourant l'ensemble de tous les motifs.

## 7.2 Applications de ces résultats en théorie des modèles

Une théorie finiment axiomatisable, complète et superstable a été exhibée grâce à ces méthodes de traduction de jeux de tuiles en théories du premier ordre. Ceci a été fait historiquement par J.A. Makowsky [Mak74] pour montrer que ces trois propriétés ne sont pas incompatibles puis ensuite expliqué plus en détails par B. Poizat [Poi82].

Nous rappelons qu'une théorie dénombrable est dite superstable si elle n'est pas  $\omega$ -stable mais est  $2^{\aleph_0}$ -stable, c'est-à-dire qu'elle a un nombre non dénombrable de

$\omega$ -types complets non isomorphes mais la cardinalité du continu  $2^{\aleph_0}$ -types complets non isomorphes. Dans notre cas, un  $\kappa$ -type complet est la réunion disjointe d'au plus  $\kappa$  pavages.

L'idée est simple : prenons un ensemble fini de motifs  $\mathcal{F}$  dont l'espace de pavages associé  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  ne contient aucune configuration périodique et qu'une seule configuration modulo isomorphisme local. Le jeu de tuiles apériodique construit par N. Ollinger [Oll08] a bien cette propriété comme nous le détaillons à la Section 1.7 : Théorèmes 1.36 et 1.35.

Transformons un tel jeu de tuiles en une théorie du premier ordre comme expliqué au Chapitre 6 pour obtenir une théorie finiment axiomatisée :  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{Q}, \mathcal{F}}$ . Comme le jeu de tuiles considéré n'admet pas de pavage périodique, le Théorème 7.3 est valide sans nécessiter de rajouter les axiomes forçant tous les modèles à être infinis. Cette théorie est complète et finiment axiomatisable.

Il a été prouvé que ce jeu de tuiles admet  $2^{\aleph_0}$  pavages différents : Corollaire 4.6 et Théorème 2.15 ou encore [Dur99, BDJ08]. Ainsi,  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{Q}, \mathcal{F}}$  admet  $2^{\aleph_0}$  modèles dénombrables qui sont des configurations vues comme des structures sur  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{Q}}$ . Ces modèles ne sont pas isomorphes car il n'y a un nombre dénombrable de décalages possibles sur  $\mathbb{Z}^2$  et ainsi d'isomorphismes par le Lemme 6.4, donc  $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{Q}, \mathcal{F}}$  admet  $2^{\aleph_0}$   $\omega$ -types complets. De plus, il n'y a pas de modèle dégénéré de sorte que tous les modèles de cette théorie sont faciles à décrire : ils consistent de copies de certains de ces  $2^{\aleph_0}$  pavages différents, c'est-à-dire que nous avons seulement à décrire combien de fois apparaît chaque pavage dans un modèle. Ceci prouve que la théorie n'est pas  $\omega$ -stable mais  $2^{\aleph_0}$ -stable donc superstable.

### 7.3 Logique monadique du second ordre

Sans rentrer dans tous les détails, la logique monadique du second ordre est une extension de celle du premier ordre traitée ici où nous pouvons de plus quantifier sur les prédicats unaires. Par conséquent, il existe une formule monadique du second ordre sur le langage  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}^2}$  exprimant le fait qu'un jeu de tuiles pave le plan :

$$\exists P_1, \dots, \exists P_k, \forall x, \left( \bigwedge_{M \in \mathcal{F}} \neg \varphi_M(x) \wedge \mathcal{T}_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{Q}} \right)$$

La convention est de noter les quantifications du second ordre par des variables en majuscules et celles du premier ordre par des minuscules. Ainsi, nous n'utilisons plus les prédicats  $P_q$  mais  $|\mathbf{Q}|$  quantifications existentielles monadiques du second ordre. Si de tels prédicats existent, ceci signifie qu'il existe une répartition des couleurs sur  $\mathbb{Z}^2$  ne faisant apparaître aucun motif de  $\mathcal{F}$ , *i.e.*, un pavage du plan par  $\mathcal{F}$ .

L'indécidabilité du problème du pavage du plan montre que la restriction de la logique monadique du second ordre aux quantifications existentielles du second ordre et universelles du premier ordre avec seulement un nombre fini de fonctions unaires est indécidable.

De plus, un résultat dû à Dietrich Kuske et Markus Lohrey [KL05] permet de caractériser les groupes ayant une théorie monadique du second ordre décidable :

**Théorème 7.10** ([KL05]). *La logique monadique du second ordre d'un groupe  $\mathcal{G}$  finiment engendré par  $\mathbb{G}$  est décidable si et seulement si le graphe de Cayley de  $(\mathcal{G}, \mathbb{G})$  a une largeur arborescente finie.*

Pour éviter d'avoir à rentrer dans les définitions et les détails de la théorie de la largeur arborescente nous allons utiliser une caractérisation des groupes de largeur arborescente finie due à Muller et Schupp :

**Théorème 7.11** ([MS83]). *Un groupe  $\mathcal{G}$  finiment engendré par  $\mathbb{G}$  admet un sous-groupe libre d'index fini si et seulement si le graphe de Cayley de  $(\mathcal{G}, \mathbb{G})$  a une largeur arborescente finie.*

On rappelle que  $\mathcal{H}$  est un sous-groupe d'index fini de  $\mathcal{G}$  si l'ensemble des classes à gauche de  $\mathcal{G}$  selon  $\mathcal{H}$  sont finies, *i.e.*, il n'y a qu'un nombre fini d'ensembles  $g\mathcal{H}$  pour  $g \in \mathcal{G}$ .

Au Chapitre 5 nous avons défini la notion de pavages sur des groupes finiment engendrés, dans ce contexte, les Théorèmes 7.10 et 7.11 ont le corollaire suivant :

**Corollaire 7.12.** *Le problème de savoir si un jeu de tuiles pave un groupe finiment engendré  $(\mathcal{G}, \mathbb{G})$  est décidable lorsque  $\mathcal{G}$  admet un sous-groupe libre d'index fini.*

Puisque le Théorème 7.10 est une équivalence nous pourrions espérer en obtenir une pour la décidabilité du problème du pavage du plan sur les groupes et ainsi caractériser les structures pour lesquelles ce problème est décidable. Mais le Théorème 7.10 traite de toute la logique monadique du second ordre alors que le codage des jeux de tuiles n'est que dans une sous classe (stricte dans le cas général) de cette logique. Ceci nous donne le problème suivant :

**Problème ouvert 3.** *Sous quelles conditions sur le groupe  $\mathcal{G}$  les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *Le problème de la pavabilité de  $\mathcal{G}$  est décidable*
- *$\mathcal{G}$  a un sous-groupe libre d'index fini*

Une fois le Problème 3 résolu il pourrait être intéressant d'étudier le problème de la pavabilité pour des structures plus faibles que les groupes. En effet, la théorie de la largeur arborescente étant une théorie sur les graphes, il n'y a aucune raison d'imposer la régularité et la structure d'un graphe de Cayley au graphe étudié. De plus, une équivalence entre la décidabilité de la pavabilité sur de telles structures plus faibles que les groupes engloberait les résultats d'indécidabilité sur le plan hyperbolique [Mar08, Kar08].

## 7.4 Conclusion

Nous avons vu tout au long de cette partie les liens étroits entre les pavages et la logique du premier ordre et plus particulièrement entre les propriétés de certains espaces de pavages et celles de théorie des modèles de leur interprétation. Les pavages se sont avérés être des exemples intéressants de théories [Mak74, Poi82] ainsi qu'un cadre adéquat pour étudier les propriétés de classes de formules [BGG97].

Le principal problème rencontré dans cette partie est le fait que l'on ne puisse pas s'affranchir facilement des modèles non connexes ; ces modèles, ne représentant pas des configurations, nous empêchent de transférer des résultats de théorie des modèles sur l'existence de certains modèles en termes de pavages. Les configurations peuvent être vues comme des modèles engendrés par un élément. En ce sens, les modèles connexes, *i.e.*, les configurations, sont les modèles de notre théorie, sur le langage  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}^2, \mathbb{Q}} \cup \{0\}$  qui omettent le type  $p(y) = \{y \neq \varphi(0), \varphi \text{ une formule de } \mathcal{L}_{\mathbb{Z}^2, \mathbb{Q}}\}$ . Abderezak Ould Houcine utilise cette méthode ainsi que des procédés très similaires au rang de Cantor-Bendixson (tel que défini à la Section 3.4 dans le cadre des pavages) pour étudier les propriétés des théories n'ayant qu'un nombre dénombrable de modèles finiment engendrés [Hou08].



**Troisième partie**

**Robustesse aux erreurs**





## Chapitre 8

# Robustesse aux erreurs

Tout au long de ce manuscrit nous n'avons considéré que les pavages respectant les contraintes imposées en tout point. Dans ce chapitre nous étudions la robustesse aux erreurs des jeux de tuiles ; la question fondamentale est la suivante : Étant donné un jeu de tuiles, que se passe-t-il lorsque l'on autorise une faible probabilité d'erreurs ? Est-ce que les objets que nous obtenons sont proches d'un pavage du plan sans erreur ?

C'est un problème bien connu en cristallographie où les règles de pavages locales ne sont que celles qui sont le moins coûteuses en énergie. Les erreurs de pavage ne sont plus vues comme strictement interdites, tel que nous l'avons fait tout au long de ce manuscrit, mais seulement comme des possibilités beaucoup moins probables. On peut alors voir un pavage comme un agencement de tuiles minimisant l'énergie. Charles Radin étudie un tel modèle [Rad85, Rad92] en considérant les pavages tels que si l'on modifie une partie finie d'un tel pavage alors l'énergie nécessaire augmente.

Les erreurs d'agencement de tuiles jouent aussi un rôle important dans l'étude des pavages auto-assemblants. En effet, ces modèles sont utilisés pour modéliser la formation de molécules d'ADN et il s'avère que, en pratique, les contraintes imposées ne sont pas toujours respectées. Dans ce domaine, une problématique importante a été de transformer des jeux de tuiles de sorte à ce que, même si l'on autorise quelques erreurs d'agencement, la forme des pavages obtenus soit très proche de celle que l'on aurait sans erreur [WB03, RSY04].

Dans notre cadre, nous pouvons voir un pavage erroné comme un pavage classique par tuiles de Wang (voir la Section 1.3) où nous autorisons une faible proportion de couleurs sur des côtés adjacents à ne pas correspondre. Nous donnons une définition plus formelle de cette notion à la Section 8.1. De sorte à rester le plus général possible, nous supposons que les erreurs sont tirées aléatoirement et indépendamment. Avec ce modèle, des constructions utilisant des méthodes de point fixe permettent d'obtenir des jeux de tuiles robustes à une faible proportion d'erreurs [DRS08, DRS09]. Contrairement aux travaux décrits précédemment qui s'intéressent à la construction de jeux de tuiles robustes aux erreurs, notre but ici est de déterminer des propriétés générales qui impliquent la robustesse aux erreurs ou la non robustesse de certaines classes de jeux de tuiles.

Dans la Section 8.2 nous donnons une construction de "fonctions de nettoyage

d’erreurs” pour les jeux de tuile qui n’admettent que des pavages périodiques. Nous prouvons que, lorsque la probabilité d’erreurs est suffisamment faible, cette construction enlève effectivement les erreurs avec probabilité 1.

D’un autre côté, nous prouvons que la famille des jeux de tuiles qui produisent un nombre dénombrable de pavages ne sont pas localement robustes : nous montrons que la correction d’un nombre fini d’erreurs dans ces pavages peut toujours nécessiter la modification d’une infinité de tuiles, ce qui est incompatible avec la correction locale d’erreurs et donc la robustesse.

Enfin, en utilisant des constructions les résultats d’inséparabilité présentés aux Sections 1.7 et 4.4), nous prouvons que ces deux classes de jeux de tuiles (ceux qui sont robustes et ceux qui ne sont pas localement robustes) sont récursivement inséparables, ce qui montre qu’il est impossible d’obtenir une caractérisation récursive de la robustesse aux erreurs.

## 8.1 Définitions

Nous avons présenté au Chapitre 1 les notations et définitions de pavages ; contrairement au reste du manuscrit, il est plus naturel ici de considérer la définition par contraintes locales (Section 1.5).

De même qu’au Chapitre 1 nous notons  $\mathbf{T}_\tau$  l’ensemble des configurations qui sont des pavages par une contrainte locale  $\tau = (\mathbf{V}, \delta)$ . Dans cette partie nous ne considérons que les jeux de tuiles qui pavent le plan, ainsi  $\mathbf{T}_\tau \neq \emptyset$  est une condition implicite de tous les résultats.

L’intérêt de la définition par contraintes locales est qu’elle s’étend de façon naturelle en une définition de pavages avec erreurs :

**Définition 8.1** (Pavage avec erreur). *Soit  $e$  un élément de  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$  et  $c$  une configuration de  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}^2}$ , on dit que  $c$  est un pavage par  $\tau$  avec la répartition d’erreur  $e$  si  $\Delta_\tau(c) = e$ .*

Par exemple, si l’on considère  $\mathbf{Q} = \{\blacksquare, \blacklozenge\}$ ,  $\mathbf{V} = \{(0, 0)\}$  et  $\delta$  qui associe 1 si la cellule est  $\blacklozenge$ , 0 si elle est  $\blacksquare$ , on obtient un espace de pavages  $\mathbf{T}_\tau$  qui est réduit à un seul point : la configuration monochrome  $\blacksquare$ . Soit maintenant  $e$  une répartition d’erreurs ; un pavage par  $\tau$  avec la répartition d’erreurs  $e$  est une configuration qui vaut  $\blacksquare$  lorsque  $e$  vaut 0 et  $\blacklozenge$  lorsque  $e$  vaut 1. Un exemple d’une telle configuration avec une répartition d’erreurs simplissime est représentée sur la Figure 8.1.

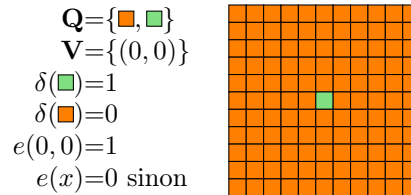


FIGURE 8.1 – Exemple de pavage par  $\tau$  avec la répartition d’erreurs  $e$ .

On remarque qu’avec cette définition de pavages avec erreurs, réparer une erreur est différent de remplacer une tuile erronée par une autre correcte puisque les erreurs peuvent avoir des conséquences qui nécessitent de remplacer d’autres tuiles, même si ces dernières sont localement correctes. Nous observons et prouvons dans un premier temps que les conséquences d’une telle correction ne sont pas problématiques dans le cas où le jeu de tuiles n’admet que des pavages périodiques (Section 8.2) mais peut avoir des conséquences sur une infinité de tuiles dans le cas de jeux de tuiles qui admettent un nombre dénombrable de pavages (Section 8.3).

## 8.2 Robustesse

Dans cette section nous montrons, dans le cas de jeux de tuiles qui n’admettent que des pavages périodiques, comment il est possible de reconstruire par modifications locales un pavage valide à partir d’un avec une faible proportion d’erreurs. La méthode utilisée ici est la même que celle utilisée pour prouver la robustesse aux erreurs de jeux de tuiles fortement apériodiques [DRS08, DRS09]; comme les ensembles de pavages ne contenant que des périodiques ont une structure très simple nous sommes capable d’appliquer les mêmes méthodes. Nous considérons une distribution d’erreurs  $e_\varepsilon$  telle que chaque point de  $\mathbb{Z}^2$  ait une probabilité  $\varepsilon$  d’être égal à 1 indépendamment des autres points, *i.e.*, une distribution de Bernoulli.

Dans un premier temps nous décrivons un procédé générique [DR05, DRS08] qui consiste à considérer les erreurs par “îlots” (et ainsi indépendamment de notre application aux pavages), c’est-à-dire, étant donné une répartition d’erreurs prise à partir d’une distribution de Bernoulli la transforme en une répartition sans erreur avec probabilité 1 selon la distribution de Bernoulli (Section 8.2.1). Ensuite nous utilisons les résultats structurels des Chapitres 3 et 4 et plus particulièrement la section dédiée aux jeux de tuiles n’admettant que des pavages périodiques (Section 4.1) pour appliquer ce procédé générique à ces jeux de tuiles (Section 8.2.2).

### 8.2.1 Procédé de nettoyage itératif

Lorsque  $\varepsilon$  est petit, l’intuition est que les points qui ont pour valeur 1 seront éparpillés, nous n’aurons pas de gros amas de 1; malheureusement les gros amas ont une probabilité non nulle d’apparaître et apparaissent ainsi presque sûrement sur le plan  $\mathbb{Z}^2$ . Nous regroupons tout de même les 1 par paquets que nous appelons îlots :

**Définition 8.2.** *Pour une répartition d’erreurs  $e \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$  et un point  $x \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $e(x) = 1$ ,  $x$  est dans un  $(i, j)$ -îlot de  $e$  s’il n’existe pas de point à distance comprise entre  $i$  et  $j$  qui soit à 1 dans  $e$ , c’est-à-dire :*

$$\forall y \in \mathbb{Z}^2, e(y) = 1 \Rightarrow d_{\mathbb{Z}^2}(x, y) \notin [i; j]$$

On note par  $\mathcal{I}_{i,j}(e)$  le sous-ensemble de  $\mathbb{Z}^2$  des points de  $e$  qui sont dans des  $(i, j)$ -îlots.

Cette notion d'îlot est représentée sur la Figure 8.2. L'idée pour se ramener à une répartition sans erreur à partir d'une répartition d'erreurs tirée aléatoirement est d'effacer certains îlots. Pour l'instant nous faisons abstraction de ce que cela veut dire au niveau des pavages et nous nous contentons de travailler sur les répartitions d'erreurs pour définir une fonction d'effaçage des îlots :

**Définition 8.3.** La fonction  $\mathcal{E}_{i,j}$  de  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$  dans lui-même efface les  $(i, j)$ -îlots d'une répartition d'erreurs :

$$\begin{aligned} \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2} &\rightarrow \\ e &\rightarrow c : c(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathcal{I}_{i,j}(e) \\ e(x) & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Maintenant, si nous considérons des suites croissantes  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et que nous appliquons successivement les fonctions  $\mathcal{E}_{\alpha_n, \beta_n}$  à une répartition d'erreurs donnée nous obtenons un procédé de nettoyage itératif [DR05, DRS08] qui effacera les petits îlots d'erreurs, puis les plus gros, puis ceux encore plus gros, etc.

**Définition 8.4** (Procédé de nettoyage itératif). Pour une répartition d'erreurs  $e$  (i.e., un élément de  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$ ) et deux suites d'entiers  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , nous définissons le procédé de nettoyage itératif  $(e_n^{\alpha, \beta})_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$  de  $e$  selon  $\alpha$  et  $\beta$  :

- $e_0^{\alpha, \beta} = e$
- $e_{n+1}^{\alpha, \beta} = \mathcal{E}_{\alpha_n, \beta_n}(e_n^{\alpha, \beta})$

Nous appelons "îlots de rang  $n$ " les points que nous avons corrigés à la  $n^{\text{ème}}$  itération, c'est-à-dire les  $(\alpha_n, \beta_n)$ -îlots de  $e_n^{\alpha, \beta}$ .

Cette opération est représentée sur la Figure 8.2 où les points noirs sont les points à valeur 1, ceux qui seront "nettoyés" à cette étape sont marqués par une croix, et nous pouvons voir qu'il y a une zone sans erreur entre  $\alpha_n$  et  $\beta_n$ . Cette zone sans erreur, appelée *ceinture de sécurité*, sous certaines conditions, est ce qui nous permet d'appliquer ce résultat générique aux pavages car la zone comprise entre  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  est garantie être sans erreur. Toutefois il faut d'abord nous assurer que ce procédé de nettoyage itératif efface bel et bien toutes les erreurs, ou du moins presque toutes :

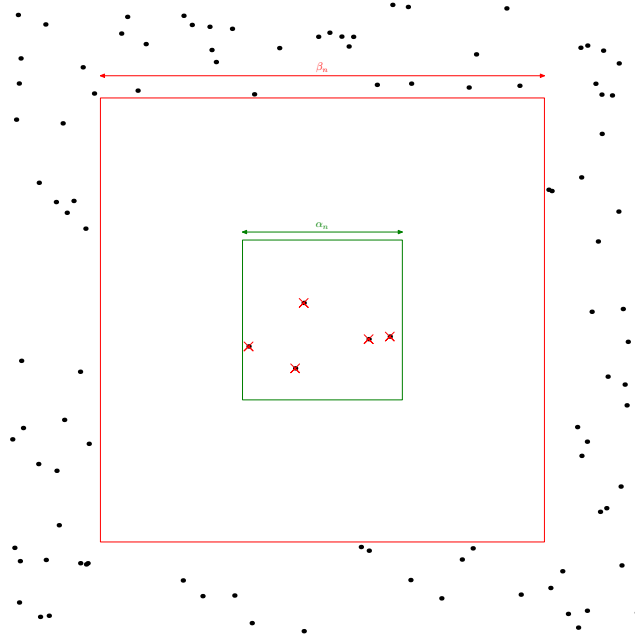
**Théorème 8.5** ([DR05, DRS08]). Si les suites  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  sont telles que :

- $\forall i, 8(\beta_1 + \dots + \beta_i) < \alpha_{i+1} \leq \beta_{i+1}$
- $\sum_i \frac{\log(\beta_i)}{2^i} < \infty$

Alors il existe  $\varepsilon > 0$  (suffisamment petit) tel que, presque sûrement, pour tout élément de  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$  pris avec la distribution de Bernoulli de probabilité  $\varepsilon$ , ce procédé de nettoyage itératif enlève tous les uns.

Nous donnons ici une démonstration du Théorème 8.5 extrêmement similaire à l'originale [DR05, DRS08] par souci de complétude :

*Démonstration.* Nous allons estimer la probabilité de l'évènement "après la  $k^{\text{ème}}$  itération du procédé de nettoyage, le point  $x$  est toujours dans l'état 1". Ceci veut dire que  $x = x_0$  et  $x_1$  étaient dans l'état 1 après  $k - 1$  itérations du procédé, et  $d(x_0, x_1) \in$

FIGURE 8.2 – Îlots de rang  $n$ 

$[\alpha_k, \beta_k]$ . On peut continuer comme ceci :  $x_{00} = x_0$  est dans l'état 1 après  $k - 1$  opérations de nettoyage parce qu'il existait  $x_{01}$  qui était dans l'état 1 après  $k - 2$  opérations de nettoyage.

On peut ainsi construire pour chaque mot binaire  $u$  de longueur au plus  $k$  un point  $x_u$  dans l'état 1 après  $i = k - |u|$  étapes de nettoyage. De plus la distance entre  $x_{u0}$  et  $x_{u1}$  est dans l'intervalle  $[\alpha_i, \beta_i]$ . Ainsi, pour un mot de la forme  $x_{u1v}$ , on a  $d(x_u, x_{u1v}) \leq \beta_1 + \dots + \beta_i$ , ce qui veut dire, avec la condition  $8(\beta_1 + \dots + \beta_i) < \alpha_{i+1}$ , que tous les points de la forme  $x_{u0v'}$  sont distincts de ceux de la forme  $x_{u1v}$ . Ceci nous donne  $\Theta(2^k)$  points distincts.

Maintenant, comptons le nombre de possibilités que l'on a de choisir les points  $x_u$  pour que le point  $x$  soit dans l'état 1 après  $k$  opérations de nettoyage. Notons  $B(\beta_k)$  le nombre de points  $y$  tels que  $d(x, y) \leq \beta_k$ . Nous avons ainsi au plus  $B(\beta_k)$  possibilités pour trouver un point  $x_1$ ,  $B(\beta_{k-1})^2$  possibilités pour  $x_{11}$  et  $x_{01}$ , etc. Ainsi, le logarithme du nombre de possibilités n'excède pas :

$$\log(B(\beta_k)) + 2 \log(B(\beta_{k-1})) + 4 \log(B(\beta_{k-2})) + \dots$$

qui est borné par :

$$D \times (\log(\beta_k) + 2 \log(\beta_{k-1}) + 4 \log(\beta_{k-2}) + \dots)$$

Où  $D$  est une constante ne dépendant que de l'espace considéré puisque  $B(i)$  est un polynôme en  $i$ . Comme  $\sum_i \frac{\log(\beta_i)}{2^i}$  est une série convergente, le logarithme du nombre

de possibilités est borné par  $c2^k$  pour une constante  $c$ , car divisé par  $2^k$  il est une somme partielle de cette série.

Nous pouvons maintenant borner la probabilité qu'un point  $x$  soit encore dans l'état 1 après  $k$  étapes de nettoyage. Elle n'excède pas le nombre de possibilités que l'on a pour choisir les  $x_u$  multipliée par la probabilité que tous ces points  $x_u$  soient dans l'état 1, c'est-à-dire :

$$2^{c2^k} \times \varepsilon^{2^k} = (\varepsilon 2^c)^{2^k}$$

Ainsi, pour  $\varepsilon$  suffisamment petit ( $\varepsilon < 2^{-c}$ ), cette probabilité tend vers 0 lorsque  $k$  tend vers l'infini, donc la probabilité qu'un point reste dans l'état 1 infiniment longtemps est nulle pour cet  $\varepsilon$ .  $\square$

Il est aisé de vérifier que les séquences suivantes vérifient les conditions du Théorème 8.5 après un certain rang :

$$\begin{aligned}\alpha_n &= 2^{n^2} \\ \beta_n &= n\alpha_n\end{aligned}$$

De plus, ce qui va nous intéresser est le fait que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n - \alpha_n = \infty$ , ce qui signifie que nous pouvons avoir des ceintures de sécurité aussi grandes qu'on le désire.

## 8.2.2 Robustesse aux erreurs des jeux de tuiles périodiques

Dans la section précédente nous avons montré que nous pouvions "enlever" les erreurs : nous avons un procédé itératif qui, à partir d'une répartition d'erreurs tirée aléatoirement, la transforme en une répartition sans erreur avec probabilité 1 lorsque la probabilité d'erreurs est suffisamment faible. Nous devons décomposer et itérer un procédé de nettoyage sur les amas de taille  $\alpha_n$  quand il n'y a pas d'erreur entre les distances  $\alpha_n$  et  $\beta_n$ . Il existe des suites vérifiant les conditions du Théorème 8.5 telles que  $\alpha_n - \beta_n$  puisse être arbitrairement grand.

Le Lemme 3.5 nous assure que, lorsque  $\alpha_n - \beta_n$  est suffisamment grand, nous avons une zone au milieu de la ceinture  $\alpha_n - \beta_n$  qui apparaît dans un pavage du plan. Cette zone correspond à la zone bleue sur la Figure 8.3. À la Section 4.1 nous avons montré que si un jeu de tuiles  $\tau$  n'admettait que des pavages périodiques alors, en itérant le Lemme 4.3 sur des motifs apparaissant dans un pavage du plan et coïncidant sur le domaine critique de  $\tau$  nous obtenons un nouveau motif qui apparaît aussi dans un pavage du plan.

Nous pouvons ainsi choisir  $\alpha_n - \beta_n$  suffisamment grand pour que la ceinture de sécurité soit assez large et permette de combiner ces deux résultats. En recollant les motifs de cette ceinture de sécurité nous obtenons un motif qui apparaît dans un pavage du plan. Ainsi, la zone bleue de la Figure 8.3 apparaît dans un pavage du plan.

Pour conclure, il ne nous reste plus qu'à remplacer la partie au milieu de la ceinture de sécurité de sorte qu'il n'y ait plus d'erreur, et ceci peut être fait car cette ceinture apparaît dans un pavage complet du plan. Nous obtenons ainsi notre théorème de robustesse aux erreurs pour les jeux de tuiles périodiques :

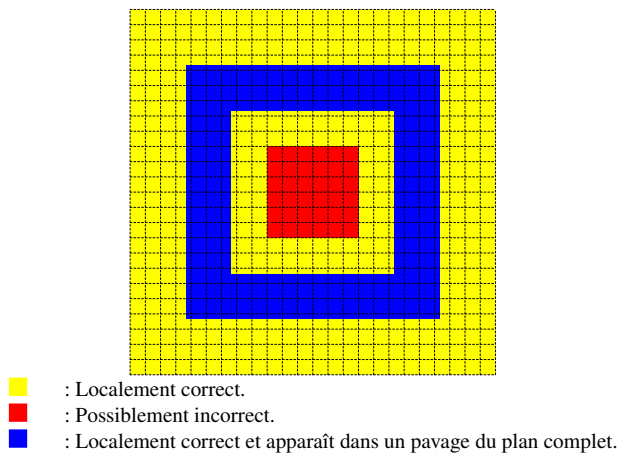


FIGURE 8.3 – Exemple de ce qu’il se passe lorsque la ceinture de sécurité est suffisamment grande.

**Théorème 8.6.** *Si un jeu de tuiles n’admet que des pavages périodiques alors il est robuste à une faible probabilité d’erreurs.*

On remarque que cette méthode de reconstruction d’un pavage valide en entourant les erreurs fonctionne bien évidemment avec un jeu de tuiles qui autorise toutes les configurations ( $\mathbf{T}_\tau = \mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^2}$ ); nous pouvons compliquer un peu ceci en considérant  $\mathbf{Q} = \{0, 1, 2\}$  et les pavages qui peuvent contenir soit que des 1 et des 2 soit que des 0; la méthode de correction s’applique tout aussi bien et le jeu de tuiles n’autorise pas toutes les configurations. De plus il est possible d’utiliser cette méthode pour obtenir des jeux de tuiles apériodiques robustes aux erreurs [DRS08, DRS09]; cependant dans la Section 8.3 nous donnons une condition suffisante pour que cela ne soit pas possible. Nous ne savons pas caractériser les jeux de tuiles pour lesquels cette méthode peut s’appliquer.

### 8.3 Non robustesse

Dans la Section 8.2 nous avons montré qu’il existe une méthode effective de correction des erreurs pour certains jeux de tuiles; cela n’aurait pas beaucoup de sens de définir exactement ce que l’on appelle un jeu de tuiles “robuste aux erreurs” puisqu’il peut très bien exister d’autres méthodes de correction des erreurs mais il semble naturel que toute méthode de correction se doit d’être locale, d’où notre définition de robustesse locale :

**Définition 8.7** (Localement robuste). *Nous disons qu’un jeu de tuiles est localement robuste si pour toute répartition d’erreurs finie (i.e., qui ne contient qu’un nombre fini de 1), tout pavage avec cette répartition d’erreur peut être transformé en un pavage sans erreur en ne modifiant qu’un nombre fini de tuiles.*



Cette définition peut être reliée aux configurations *ground state* utilisées par C. Radin pour modéliser l'ordre cristallin [Rad91, Rad92]. On rappelle qu'une configuration est dite *ground state* si, quelque soit la modification finie que nous lui apportons, nous ne diminuons pas le nombre d'erreurs de pavages. En ce sens, les jeux de tuiles robustes aux erreurs correspondent aux jeux de tuiles pour lesquels les configurations *ground state* sont soit des pavages sans aucune erreur soit ont une infinité d'erreurs de pavage.

Les résultats structurels des sections 4.1 et 8.2 nous assurent que les jeux de tuiles n'admettant que des pavages périodiques sont localement robustes : il suffit de considérer une ceinture de sécurité entourant la zone finie d'erreur et de remplacer la zone erronée à l'intérieur de celle-ci.

**Théorème 8.8.** *Les jeux de tuiles admettant un nombre dénombrable de pavages ne sont pas localement robustes.*

L'idée principale de la preuve peut être comprise à partir de cette remarque simple : considérons l'ensemble d'états  $\mathbf{Q} = \{\square, \blacksquare\}$  et un ensemble de motifs interdits  $\mathcal{F} = \{\begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \square \end{smallmatrix}\}$ . L'ensemble  $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$  des configurations valides pour  $\mathcal{F}$  est simple à décrire : elles sont soit monochromatiques  $\square$  ou  $\blacksquare$  soit contiennent un demi plan  $\square$  à gauche et un demi plan  $\blacksquare$  à droite. La Figure 8.4 représente un exemple d'un pavage par un tel jeu de tuiles. La position de la ligne verticale de séparation entre ces deux demi plans est ce qui permet d'avoir un nombre dénombrable de pavages. Intuitivement, le Théorème 4.11 et le Lemme 4.13 stipulent que cette situation est plus ou moins la seule possible lorsque qu'un jeu de tuiles admet un nombre dénombrable de pavages.

Maintenant si nous cassons la ligne de séparation entre la partie bleue et la partie verte en décalant un demi plan d'une cellule vers la droite comme représenté sur la Figure 8.5, nous aurons besoin de modifier tout un demi plan (et ainsi un nombre infini de tuiles) pour le redécaler dans le bon sens de sorte à obtenir un pavage valide ; de plus cette transformation respecte les conditions de pavage partout sauf en un nombre fini de points.

Dans la preuve qui suit nous ne faisons que formaliser cette intuition de sorte à généraliser le résultat aux jeux de tuiles qui admettent un nombre dénombrable de pavages.

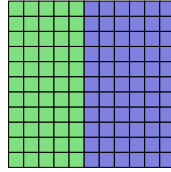


FIGURE 8.4 – Exemple d'un pavage pour l'idée principale de non robustesse.

*Démonstration.* Soit  $\tau$  un jeu de tuiles qui n'admet qu'un nombre dénombrable de pavages et  $c$  un pavage par  $\tau$  avec exactement une direction de périodicité que l'on

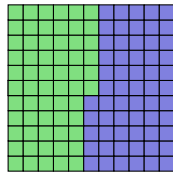


FIGURE 8.5 – Exemple d'une configuration qui n'est pas correctible localement.

peut représenter en tant que  ${}^\omega \mathbf{ABC}^\omega$  avec  $\mathbf{A} \neq \mathbf{C}$  et  $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| = |\mathbf{C}| = p$  lorsque projeté perpendiculairement à sa direction de périodicité (d'après le Théorème 4.11 et le Lemme 4.13).

Nous allons modifier  $c$  en décalant un demi plan complet de  $2p$  pour obtenir une configuration comme représentée sur la Figure 8.6.

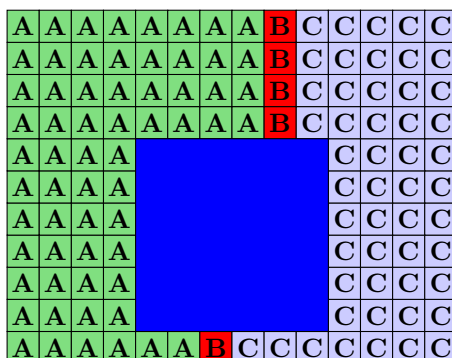
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | A | A | A | A | A | B | C | C | C |
| A | A | A | A | A | A | B | C | C | C |
| A | A | A | A | A | A | B | C | C | C |
| A | A | A | A | B | C | C | C | C | C |
| A | A | A | A | B | C | C | C | C | C |
| A | A | A | A | B | C | C | C | C | C |

FIGURE 8.6 – Une petite modification de  $c$ .

Comme cette configuration ne respecte pas les conditions de pavage qu'en un nombre fini de points, supposons que l'on puisse la corriger en ne modifiant qu'un nombre fini de tuiles ; nous obtiendrions un pavage tel celui représenté sur la Figure 8.7 où il y a une ligne semi infinie de motifs  $\mathbf{B}$  dans une direction et une ligne semi infinie de  $\mathbf{B}$  mais décalée de  $2p$  dans l'autre direction, séparées par un motif qui a corrigé l'erreur introduite.

Nous avons obtenu une transformation de  $c$  que nous pouvons répéter sur chaque ligne verticale suffisamment grande de  $\mathbf{AABCC}$ . De telles lignes apparaissent une infinité de fois dans  $c$ , ainsi, comme nous sommes certains que cette transformation donne un pavage différent à chaque fois (puisque'elle remplace un motif  $\mathbf{A}$  par un motif  $\mathbf{C}$  que nous avons supposés différents) nous obtenons  $2^{\aleph_0}$  pavages différents pour  $\tau$  que nous avons supposé n'admettre qu'un nombre dénombrable de pavages.  $\square$

Le Théorème 8.8 démontre que les jeux de tuiles admettant un nombre dénombrable de pavages ne sont pas localement robustes alors que le Théorème 8.6 démontre que les jeux de tuiles qui n'admettent que des pavages périodiques sont robustes aux erreurs. Par conséquent, comme nous avons montré que ces classes de jeux de tuiles étaient récursivement inséparables (Théorème 4.22) nous en déduisons le théorème suivant :

FIGURE 8.7 – Version corrigée d’une petite modification de  $c$ .

**Théorème 8.9.** *Les jeux de tuiles robustes et ceux qui ne sont pas localement robustes sont récursivement inséparables.*

## 8.4 Conclusions et problèmes ouverts

Nous avons montré comment il est possible de réparer des erreurs de pavages (tel que défini dans la Section 8.2) sur des jeux de tuile très simples (les périodiques). Ce procédé de correction utilise le fait que l’on peut entourer les erreurs par des zones correctes dont l’on est certain qu’elles apparaissent dans un pavage complet du plan; bien que ce soit vrai pour les jeux de tuiles périodiques nous remarquons qu’il existe d’autres classes de jeux de tuiles pour lesquels c’est tout aussi vrai, il serait intéressant d’obtenir une caractérisation de ces jeux de tuiles (même si nous n’imposons pas de contrainte sur les  $\alpha_n$  et  $\beta_n$ ).

Nous avons aussi montré que les jeux de tuiles n’admettant qu’un nombre dénombrable de pavages ne sont pas localement robustes; être localement robuste est une condition nécessaire (mais pas suffisante) pour être capable d’appliquer notre procédé de correction itératif. Alors que ce procédé permet de corriger les erreurs dans les jeux de tuiles périodiques et même certains apériodiques [DRS08, DRS09] nous pensons qu’il existe des jeux de tuiles qui sont localement robustes pour lesquels ce procédé ne marcherait pas.

Cependant, la récursive d’inséparabilité des jeux de tuiles que nous sommes capables de réparer et ceux qui ne sont pas localement robustes montre qu’il n’y a pas de caractérisation simple de la robustesse aux erreurs des jeux de tuiles.

# Bibliographie

- [AL74] Stål AANDERAA et Harry R. LEWIS : Linear sampling and the  $\forall\exists\forall$  case of the decision problem. *Journal of Symbolic Logic*, 39(3):519–548, 1974.
- [Ale99] Michel ALESSANDRI : *Thèmes de géométrie : groupes en situation géométrique*. Dunod, 1999.
- [BDJ08] Alexis BALLIER, Bruno DURAND et Emmanuel JEANDEL : Structural aspects of tilings. *25th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS)*, 2008.
- [Ber64] Robert BERGER : *The undecidability of the domino problem*. Ph.D. thesis, Harvard University, juillet 1964.
- [Ber66] Robert BERGER : The undecidability of the domino problem. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 66, 1966.
- [BGG97] Egon BÖRGER, Erich GRÄDEL et Yuri GUREVICH : *The Classical Decision Problem*. Perspectives in Mathematical Logic. Springer, 1997.
- [BJ08] Alexis BALLIER et Emmanuel JEANDEL : Tilings and model theory. *First Symposium on Cellular Automata Journées Automates Cellulaires.*, 2008.
- [Cap07] Silvio CAPOBIANCO : *Structure and Invertibility in Cellular Automata*. Thèse de doctorat, University of Rome "La Sapienza", 2007.
- [CD04] Julien CERVELLE et Bruno DURAND : Tilings : recursivity and regularity. *Theoretical computer science*, 310(1-3):469–477, 2004.
- [Chu36] Alonzo CHURCH : A note on the Entscheidungsproblem. *Journal of Symbolic Logic*, 1:40–41, 1936.
- [CK97] Karel CULIK II et Jarkko KARI : On Aperiodic Sets of Wang Tiles. In Christian FREKSA, Matthias JANTZEN et Rüdiger VALK, éditeurs : *Foundations of Computer Science : Potential - Theory - Cognition*, volume 1337 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 153–162. Springer, 1997.
- [CSMS99] Tullio G. CECCHERINI-SILBERSTEIN, Antonio MACHI et Fabio SCARBOTTI : Amenable groups and cellular automata. *Annales de l'institut Fourier*, 49(2):673–685, 1999.
- [Cul96] Karel CULIK : An aperiodic set of 13 Wang tiles. *Discrete Mathematics*, 160:245–251, 1996.
- [DLS01] Bruno DURAND, Leonid A. LEVIN et Alexander SHEN : Complex Tilings. In *STOC*, pages 732–739, 2001.

- [DLS05] Bruno DURAND, Leonid LEVIN et Alexander SHEN : Local rules and global order, or aperiodic tilings. *Mathematical Intelligencer*, 27(1):64–68, 2005.
- [DLS08] Bruno DURAND, Leonid A. LEVIN et Alexander SHEN : Complex Tilings. *Journal of Symbolic Logic*, 73(2):593–613, 2008.
- [Dol95] Nikolai P. DOLBILIN : The countability of a tiling family and the periodicity of a tiling. *Discrete & Computational Geometry*, 13:405–414, 1995.
- [DR05] Bruno DURAND et Andrei ROMASHCHENKO : On stability of computations by cellular automata. *European Conference on Complex Systems*, 2005.
- [DRS08] Bruno DURAND, Andrei E. ROMASHCHENKO et Alexander SHEN : Fixed point and aperiodic tilings. In Masami ITO et Masafumi TOYAMA, éditeurs : *Developments in Language Theory*, volume 5257 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 276–288. Springer, 2008.
- [DRS09] Bruno DURAND, Andrei E. ROMASHCHENKO et Alexander SHEN : High complexity tilings with sparse errors. In Susanne ALBERS, Alberto MARCHETTI-SPACCAMELA, Yossi MATIAS, Sotiris E. NIKOLETSEAS et Wolfgang THOMAS, éditeurs : *ICALP (1)*, volume 5555 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 403–414. Springer, 2009.
- [Dur99] Bruno DURAND : Tilings and quasiperiodicity. *Theoretical Computer Science*, 221(1-2):61–75, 1999.
- [Ete] Eternity II. <http://fr.eternityii.com/>.
- [GH55] Walter Helbig GOTTSCHALK et Gustav Arnold HEDLUND : *Topological Dynamics*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1955.
- [GK72] Y. GUREVICH et I. KORIAKOV : A remark on Berger’s paper on the domino problem. *Siberian Journal of Mathematics*, 13:459–463, 1972. (in Russian).
- [GS86] Branko GRUENBAUM et G. C. SHEPHARD : *Tilings and Patterns*. A Series of books in the mathematical sciences. W H Freeman, 1986.
- [Gö31] Kurt GÖDEL : Über formal unentscheidbare Sätze der principia mathematica und verwandter Systeme. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38:173–198, 1931.
- [Han65] William HANF : Model-theoretic methods in the study of elementary logic. *Symposium in the Theory of Models*, pages 132–145, 1965.
- [Hed69] Gustav Arnold HEDLUND : Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical systems. *Mathematical Systems Theory*, 3(4):320–375, 1969.
- [Her31] Jacques HERBRAND : Sur le problème fondamental de la logique mathématique. *Sprawozdania z posiedzen Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III*, 24:12–56, 1931.

- [HM10] Michael HOCHMAN et Tom MEYEROVITCH : A Characterization of the Entropies of Multidimensional Shifts of Finite Type. *Annals of Mathematics*, 171(3):2011–2038, 2010.
- [Hod93] Wilfrid HODGES : *Model Theory*. Cambridge University Press, 1993.
- [Hou08] Abderezak Ould HOUCINE : On finitely generated models of theories with at most countably many non isomorphic finitely generated models. *Arxiv preprint math.LO/0804.2908v1*, 2008.
- [INF85] T. ISHIMASA, H.-U. NISSEN et Y. FUKANO : New ordered state between crystalline and amorphous in Ni-Cr particles. *Physical Review Letters*, 55(5):511–513, Jul 1985.
- [JT09] Emmanuel JEANDEL et Guillaume THEYSSIER : Subshifts, languages and logic. In Volker DIEKERT et Dirk NOWOTKA, éditeurs : *Developments in Language Theory*, volume 5583 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 288–299. Springer, 2009.
- [Kar90] Jarkko KARI : Reversability of 2D cellular automata is undecidable. *Physica*, D 45:379–385, 1990.
- [Kar92] Jarkko KARI : The nilpotency problem of one-dimensional cellular automata. *Siam journal on computing*, 21(3):571, juin 1992.
- [Kar96] Jarkko KARI : A small aperiodic set of Wang tiles. *Discrete Mathematics*, 160:259–264, 1996.
- [Kar08] Jarkko KARI : On the Undecidability of the Tiling Problem. In Viliam GEFFERT, Juhani KARHUMÄKI, Alberto BERTONI, Bart PRENEEL, Pavol NÁVRAT et Mária BIELIKOVÁ, éditeurs : *SOFSEM*, volume 4910 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 74–82. Springer, 2008.
- [KL05] Dietrich KUSKE et Markus LOHREY : Logical aspects of Cayley-graphs : the group case. *Ann. Pure Appl. Logic*, 131(1-3):263–286, 2005.
- [KMW62] A.S. KAHR, Edward F. MOORE et Hao WANG : Entscheidungsproblem reduced to the  $\forall\exists\forall$  case. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 48(3):365–377, mars 1962.
- [KN08] Arist KOJEVNIKOV et Sergey I. NIKOLENKO : New combinatorial complete one-way functions. In Susanne ALBERS et Pascal WEIL, éditeurs : *25th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2008)*, volume 1 de *Leibniz International Proceedings in Informatics*, pages 457–466, Dagstuhl, Germany, 2008. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum fuer Informatik, Germany.
- [Knu97] Donald E. KNUTH : *Art of Computer Programming, Volume 1 : Fundamental Algorithms (3rd Edition)*. Addison-Wesley Professional, July 1997.
- [Kur66] Kazimierz KURATOWSKI : *Topology, Vol. I, 3rd edition*. NY : Academic Press, 1966.
- [Lev86] Leonid A. LEVIN : Average case complete problems. *SIAM J. Comput.*, 15(1):285–286, 1986.

- [Lin04] Douglas LIND : Multidimensional Symbolic Dynamics. *In Symbolic dynamics and its applications*, volume 11 de *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, pages 61–80, 2004.
- [LM95] Douglas A. LIND et Brian MARCUS : *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1995.
- [Lot83] M. LOTHAIRE : *Combinatorics on Words*, volume 17 de *Encyclopedia of Mathematics*. Addison-Wesley, 1983.
- [LP81] Harry R. LEWIS et Christos H. PAPADIMITRIOU : *Elements of the Theory of Computation*. Prentice Hall, 1981.
- [LS84] Dov LEVINE et Paul Joseph STEINHARDT : Quasicrystals : A new class of ordered structures. *Phys. Rev. Lett.*, 53(26):2477–2480, Dec 1984.
- [Lö15] Leopold LÖWENHEIM : Über möglichkeiten im relativkalkül. *Mathematische Annalen*, 76(4):447–470, 1915.
- [Mak74] J.A. MAKOWSKY : On some conjectures connected with complete sentences. *Fund. Math.*, 81:193–202, 1974.
- [Mar02] David MARKER : *Model Theory : an Introduction*, volume 217 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2002.
- [Mar08] Maurice MARGENSTERN : The domino problem of the hyperbolic plane is undecidable. *Theoretical computer science*, 407(1-3):29–84, 2008.
- [MH38] Marston MORSE et Gustav Arnold HEDLUND : Symbolic Dynamics. *American Journal of Mathematics*, 60(4):815–866, octobre 1938.
- [Mil09] Cédric MILLIET : Compacts dénombrables et dérivée de cantor. *HAL*, 00400704, 2009.
- [MM93] Antonio MACHI et Filippo MIGNOSI : Garden of eden configurations for cellular automata on cayley graphs of groups. *SIAM journal on discrete mathematics*, 6(1):44, février 1993.
- [Moz88] Shahar MOZES : Tilings, substitution systems and dynamical systems generated by them. *Journal d'analyse mathématique*, 53:139–186, 1988.
- [MR98] Jacques MAZOYER et Ivan RAPAPORT : Global fixed point attractors of circular cellular automata and periodic tilings of the plane : Undecidability results. *Discrete Mathematics*, 199:103–122, 1998.
- [MS83] David E. MULLER et Paul E. SCHUPP : Groups, the theory of ends, and context-free languages. *Journal of computer and system sciences*, 26(3): 295–310, 1983.
- [Oge04] Francis OGER : Algebraic and model-theoretic properties of tilings. *Theoretical computer science*, 319:103–126, 2004.
- [Oll08] Nicolas OLLINGER : Two-by-two substitution systems and the undecidability of the domino problem. *In Arnold BECKMANN, Costas DIMITRACOPOULOS et Benedikt LÖWE, éditeurs : CiE*, volume 5028 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 476–485. Springer, 2008.

- [Poi82] Bruno POIZAT : Une théorie finement axiomatisable et superstable. *Groupe d'étude des théories stables*, 3(1):1–9, 1980-1982.
- [Poi85] Bruno POIZAT : *Cours de théorie des modèles*. Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, 1985.
- [Pre29] Mojżesz PRESBURGER : Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt. *Comptes Rendus, I. Congrès des mathématiciens des pays slaves*, pages 192–201, 1929.
- [Rad85] Charles RADIN : Tiling, periodicity, and crystals. *Journal of Mathematical Physics*, 26:1342–1344, 1985.
- [Rad91] Charles RADIN : Global order from local sources. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 25:335–364, 1991.
- [Rad92] Charles RADIN :  $\mathbb{Z}^n$  versus  $\mathbb{Z}$  actions for systems of finite type. *Contemporary Mathematics*, 135:339–342, 1992.
- [Rob71] R. M. ROBINSON : Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane. *Inventiones Mathematicae*, 12:177–209, 1971.
- [RSY04] John H. REIF, Sudheer SAHU et Peng YIN : Compact error-resilient computational DNA tiling assemblies. *Tenth International Meeting on DNA Based Computers (DNA10)*, 3384:293–307, 2004.
- [SBGC84] D. SHECHTMAN, I. BLECH, D. GRATIAS et J. W. CAHN : Metallic Phase with Long-Range Orientational Order and No Translational Symmetry. *Physical Review Letters*, 53(20):1951–1953, Nov 1984.
- [Sch02] Klaus SCHMIDT : Algebraic  $\mathbb{Z}^d$ -actions. *Pacific Institute for the Mathematical Sciences Distinguished Chair Lecture Notes*, November 2002.
- [Tur37] Alan TURING : On computable numbers, with an application to the 'Entscheidungsproblem'. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 42:230–265, 1937.
- [vEB97] Peter van EMBDE BOAS : The convenience of tilings. *In In Complexity, Logic, and Recursion Theory*, pages 331–363. Marcel Dekker Inc, 1997.
- [Wan60] Hao WANG : Proving Theorems by Pattern Recognition I. *Communications of the ACM*, 3(4):220–234, avril 1960.
- [Wan61] Hao WANG : Proving theorems by pattern recognition II. *Bell system technical journal*, 40:1–41, 1961.
- [Wan63] Hao WANG : Dominoes and the  $\forall\exists\forall$  case of the decision problem. *Mathematical theory of Automata*, pages 23–55, 1963.
- [WB03] Erik WINFREE et Renat BEKBOLATOV : Proofreading tile sets : Error correction for algorithmic self-assembly. In Junghuei CHEN et John H. REIF, éditeurs : *DNA*, volume 2943 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 126–144. Springer, 2003.