



**UNIVERSITE D'ANTANANARIVO
ECOLE DOCTORALE**



en

SCIENCES ET TECHNIQUES DE L'INGENIERIE ET DE L'INNOVATION

Equipe d'Accueil Doctorale

SCIENCES COGNITIVES ET APPLICATIONS

Pour l'obtention du DIPLOME de :

**HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES
DE L'UNIVERSITE D'ANTANANARIVO**

***Spécialité* : SCIENCES COGNITIVES ET APPLICATIONS**

Sur le thème :

**MODELISATION STOCHASTIQUE D'UTILISATION
ET DE DIMENSIONNEMENT
DES RESSOURCES PARTAGEES**

Volume 2 : PUBLICATIONS ET COMMUNICATIONS

***Par* : Monsieur RAVALIMINOARIMALALASON Toky Basilide
Docteur de l'Université d'Antananarivo**

Soutenu le 16 Février 2023 devant la Commission de jury composée de :

Président de jury : Monsieur ANDRIANARISON Edouard Ravalison, Professeur

Rapporteur externe : Monsieur RATIARISON Adolphe Andriamanga, Professeur Emérite

Rapporteur interne : Monsieur RAVONIMANANTSOA Ndaohialy Manda-Vy, Professeur

Examineurs : Madame RAKOTONDRAJAO Fanja Rondro, Professeur

Monsieur RAKOTOMALALA Mamy Alain, Professeur

Monsieur ANDRIANARIZAKA Marc Tiana, Docteur HDR

Garant Scientifique : Monsieur RANDIMBINDRAINIBE Falimanana, Professeur Titulaire

TENY FISAORANA

Voalohany indrindra dia fisaorana no atolotro an'Andriamanitra noho ny fahatsarany nanome ahy hery sy fahombiazana nahafahako nanatontosa ireo dingana rehetra tamin'ny fikarohana izay nataoko hatramin'ny fahavitan'izao asa izao.

Isaorako manokana etoana ireto olona manaraka ireto noho ny fandraisany anjara, mivantana na ankolaka, tamin'ny famitana izao asa izao :

- Andriamatoa **RAVELOMANANA Mamy Raoul, Profesora Laharana Ambony**, Filohan'ny Oniversiten'Antananarivo,
- Andriamatoa **RAKOTOSAONA Rijalalaina, Profesora**, Talen'ny Sekoly Ambony Politeknikan'Antananarivo,
- Andriamatoa **ANDRIANARISON Edouard Ravalison, Profesora**, Talen'ny Sekoly ED-STII, sady Filoha mitarika ireo Mpitsara izao fikarohana izao,
- Andriamatoa **RANDIMBINDRAINIBE Falimanana, Profesora Laharana Ambony**, Mpiantoka izao asa fikarohana izao,
- Andriamatoa **RATIARISON Adolphe, Profesora Zokiolona**, Mpampakateny amin'izao fikarohana izao,
- Andriamatoa **RAVONIMANANTSOA Ndaohialy Manda-Vy, Profesora**, Mpampakateny amin'izao fikarohana izao,
- Andriamatoa sy Ramatoa isany mpitsara izao asa fikarohana izao :
 - o **RAKOTOMALALA Mamy Alain, Profesora**,
 - o **RAKOTONDRAJAO Fanja Rondro, Profesora**,
 - o **ANDRIANARIZAKA Marc Tiana, Dokotera HDR**,
- Ireo mpikambana tao amin'ny komisiona siantifika manokana eto amin'ny Sekoly izay nandinika akaiky sy nanaiky izao asa izao,
- Ireo mpiasa mpampianatra mpikaroka sy mpandraharaha eto amin'ny Sekoly,
- Ireo fianakaviako, indrindra ny vadiko Ando, ireo zanako Amboara, Antsaly, Andriaina, ary ireo Ray aman-dreniko,

Ireo rehetra izay nandray anjara, na mivantana na ankolaka, tamin'ny fikarohana rehetra izay nataoko hatramin'ny fahavitan'izao asa izao. Misaotra tompoko !

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier le Bon Dieu de m'avoir donné la force et le courage pendant toutes les étapes de recherches que j'ai effectuées jusqu'à l'élaboration de cet ouvrage.

Les travaux présentés dans cette thèse sont effectués au sein du Laboratoire de Recherche en Sciences Cognitives et Applications (LR-SCA) de l'Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation (ED-STII) à l'Université d'Antananarivo.

Je tiens à remercier strictement aux personnes suivantes pour leurs attributions à la réalisation de mes recherches et à la présentation de la présente thèse :

- Monsieur **RAVELOMANANA Mamy Raoul, Professeur Titulaire**, Président de l'Université d'Antananarivo,
- Monsieur **RAKOTOSAONA Rijalalaina, Professeur**, Directeur de l'Ecole Supérieure Polytechnique d'Antananarivo,
- Monsieur **ANDRIANARISON Edouard Ravalison, Professeur**, Directeur de l'Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation, et Président de jury de cette HDR,
- Monsieur **RANDIMBINDRAINIBE Falimanana, Professeur Titulaire**, Garant Scientifique de cette HDR,
- Monsieur **RATIARISON Adolphe, Professeur Emérite**, Rapporteur externe de cette HDR,
- Monsieur **RAVONIMANANTSOA Ndaohialy Manda-Vy, Professeur**, Rapporteur interne de cette HDR
- Monsieur **RAKOTOMALALA Mamy Alain, Professeur**, Examineur de cette HDR,
- Madame **RAKOTONDRAJAO Fanja Rondro, Professeur**, Examineur de cette HDR,
- Monsieur **ANDRIANARIZAKA Marc Tiana, Docteur HDR**, Examineur de cette HDR,
- Tous les membres de la Commission Scientifique de l'Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation pour la validation de ce travail,
- Tous les personnels enseignants et administratifs de l'Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation,
- Toute ma famille, ma femme Ando et mes enfants Amboara, Antsaly, Andriaina, mes parents,

- Toutes personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à mes recherches et à l'élaboration de cet ouvrage.

Merci à tous !

TABLE DES MATIERES

TENY FISAORANA.....	i
REMERCIEMENTS.....	ii
TABLE DES MATIERES.....	iv
INTRODUCTION ET PRESENTATION DES TRAVAUX DE RECHERCHE SCIENTIFIQUE DE HAUT NIVEAU.....	1
1. Publications dans des revues de notoriété internationale.....	5
<i>1.1. Distribution of Occupied Resources on A Discrete Resources Sharing in A Queueing System.....</i>	<i>5</i>
<i>1.2. Distribution of occupied resources by fuzzy customers in a shared-resource system.....</i>	<i>11</i>
<i>1.3. Occupied resources in a system with resource sharing between service-based customers.....</i>	<i>18</i>
<i>1.4. Ultrametric hierarchical resource utilization model using p-adic numbers.....</i>	<i>25</i>
<i>1.5. Analytical resolution of the Cauchy problem of a diffusion equation with a fractional time derivative.....</i>	<i>36</i>
<i>1.6. Coefficients Triangulaires et Algèbre des Polynômes Dissociables et Multipliables.....</i>	<i>43</i>
<i>1.7. Construction des bases orthonormées de l'espace des fonctions continues sur un groupe compact ultramétrique.....</i>	<i>65</i>
<i>1.8. Algèbre des suites triangulaires convolutives et multipliables. Leurs formalisations polynomiales.....</i>	<i>84</i>
<i>1.9. P-adic numbers applied on an elliptic curve cryptography.....</i>	<i>105</i>
<i>1.10. Nash bargaining on a processor sharing queue.....</i>	<i>122</i>
<i>1.11. Asynchronous Learning Model in an ODL.....</i>	<i>129</i>
<i>1.12. Models for measuring latent variables in asynchronous learning.....</i>	<i>135</i>
2. Publications dans des revues de notoriété nationale.....	140
<i>2.1. Myopic model of resource sharing in a queuing network.....</i>	<i>140</i>
<i>2.2. Utilisation d'un modèle d'apprentissage asynchrone dans une formation en ligne..</i>	<i>147</i>

2.3. <i>Analyse de l'apprentissage d'un module d'initiation dans une formation ouverte et à distance</i>	153
2.4. <i>Modèles de mesure de variables latentes dans un apprentissage asynchrone</i>	167
3. Editions d'ouvrages scientifiques.....	176
3.1. <i>Queues applied to Telecoms</i>	176
3.2. <i>La théorie des files d'attente</i>	177
4. Participation aux journées et salons de recherche à comité de lecture.....	178
4.1. <i>Communication orale aux journées de recherche des IST – Oct. 2021 : Occupation des ressources partagées dans un système multi-service</i>	178
4.2. <i>Communication poster au Salon de Recherche de l'Université d'Antananarivo – Sept. 2021 : Le dimensionnement des ressources partagées dans un système multi-service</i>	180
4.3. <i>Communication orale aux journées de recherche des IST – Juil. 2019 : Myopic model of resource sharing in a queuing network</i>	182
CONCLUSION.....	184
FICHE DE RENSEIGNEMENTS.....	185

INTRODUCTION ET PRESENTATION DES TRAVAUX DE RECHERCHE SCIENTIFIQUE ORIGINALE DE HAUT NIVEAU

Les travaux que je présente dans le présent ouvrage est dans le cadre de mon habilitation à diriger des recherches. Ils sont les fruits des travaux que j'ai réalisé depuis six ans après ma soutenance de Doctorat à l'Université d'Antananarivo, au sein de l'Equipe d'Accueil Doctorale Sciences Cognitives et Applications (SCA).

Je vais présenter dans les paragraphes et les pages qui suivent les publications scientifiques dans les revues de notoriété internationale, et celles dans des revues de notoriété nationale. Ensuite, je vais énumérer les éditions d'ouvrages scientifiques et mes participations dans des journées et de salons de recherche à comité de lecture et avec actes.

1. Publications dans des revues de notoriété internationale

La liste suivante présente les publications scientifiques dans des revues internationales :

- 1.1. T.B. Ravaliminoarimalalason, F. Randimbendrainibe, « *Distribution of Occupied Resources on A Discrete Resources Sharing in A Queueing System* », International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT), ISSN 2278-0181, pp 638-643, Vol. 10 Issue 1, 2021.
- 1.2. T.B. Ravaliminoarimalalason, F. Randimbendrainibe, « *Distribution of occupied resources by fuzzy customers in a shared-resource system* », International Journal of Advance Research and Innovative Ideas in Education (IJARIIE), ISSN 2395-4396, pp 634-640, Vol. 8 Issue 6, 2022.
- 1.3. T.B. Ravaliminoarimalalason, F. Randimbendrainibe, « *Occupied resources in a system with resource sharing between service-based customers* », International Journal of Engineering Research and Technology (IJERT), ISSN 2278-0181, pp 158-164, Vol. 10 Issue 10, 2022.
- 1.4. T.B. Ravaliminoarimalalason, F. Randimbendrainibe, « *Ultrametric hierarchical resource utilization model using p-adic numbers* », International Journal of Advance Research and Innovative Ideas in Education (IJARIIE), ISSN 2395-4396, pp 566-576, Vol. 8 Issue 4, 2022.

- 1.5. G. Rasolomampiany, T.B. Ravaliminoarimalalason, F. Rasoanoavy, F. Randimbindrainibe, « *Analytical resolution of the Cauchy problem of a diffusion equation with a fractional time derivative* », International Journal of Advance Research and Innovative Ideas in Education (IJARIIE), ISSN 2395-4396, pp 473-479, Vol. 4 Issue 6, 2018.
- 1.6. F. Randimbindrainibe, T.B. Ravaliminoarimalalason, « *Coefficients Triangulaires et Algèbre des Polynômes Dissociables et Multipliables* », International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT), ISSN 2509-0119, pp 675-696, Vol. 29 Issue 1, 2021.
- 1.7. F. Randimbindrainibe, T.B. Ravaliminoarimalalason, « *Construction des bases orthonormées de l'espace des fonctions continues sur un groupe compact ultramétrique* », International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT), ISSN 2509-0119, pp 603-621, Vol. 30 Issue 1, 2021.
- 1.8. F. Randimbindrainibe, T.B. Ravaliminoarimalalason, « *Algèbre des suites triangulaires convolutives et multipliables. Leurs formalisations polynomiales* », International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT), ISSN 2509-0119, pp 430-480, Vol. 30 Issue 1, 2021.
- 1.9. R.E. Maherindrainibelahasa, T.B. Ravaliminoarimalalason, F. Randimbindrainibe, « *P-adic numbers applied on an elliptic curve cryptography*», International Journal of Advance Research and Innovative Ideas in Education (IJARIIE), ISSN 2395-4396, pp 213-229, Vol. 5 Issue 2, 2019.
- 1.10. T.B. Ravaliminoarimalalason, M. Rakotomalala, F. Randimbindrainibe, « *Nash bargaining on a processor sharing queue* », International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT), ISSN 2509-0119, pp 558-564, Vol. 29 Issue 1, 2021.
- 1.11. M. Rakotomalala, T.B. Ravaliminoarimalalason, F. Randimbindrainibe, « *Asynchronous Learning Model in an ODL* », International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT), ISSN 2278-0181, pp 174-179, Vol. 7 Issue 08, 2018.
- 1.12. M. Rakotomalala, T.B. Ravaliminoarimalalason, F. Randimbindrainibe, « *Models for measuring latent variables in asynchronous learning* », International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT), ISSN 2278-0181, pp 146-150, Vol. 7 Issue 04, 2018.

2. Publications dans des revues de notoriété nationale

La liste suivante présente les publications scientifiques dans des revues nationales dont je suis l'auteur principal en qualité de premier ou second auteur. Elles sont soit des actes issus des conférences auxquelles j'ai participé, ou des publications lors des co-encadrements de thèses.

- 2.1. T.B. Ravaliminoarimalalason, M. Rakotomalala, « *Myopic model of resource sharing in a queuing network* », Actes des journées de recherche des trois IST de Madagascar, La revue des ISTs de Madagascar, ISSN 2710-4648, Article 16, pp 100-106, Madarevues, Octobre 2019.
- 2.2. M. Rakotomalala, T.B. Ravaliminoarimalalason, « *Utilisation d'un modèle d'apprentissage asynchrone dans une formation en ligne* », Actes des journées de recherche des trois IST de Madagascar, La revue des ISTs de Madagascar, ISSN 2710-4648, Article 19, pp 121-126, Madarevues. Octobre 2019.
- 2.3. M. Rakotomalala, T.B. Ravaliminoarimalalason, F. Randimbindrainibe, « *Analyse de l'apprentissage d'un module d'initiation dans une formation ouverte et à distance* », Mada-ETI, ISSN 220-0673, Vol.1, pp. 18 - 31, Madarevues, Mai 2018.
- 2.4. M. Rakotomalala, T.B. Ravaliminoarimalalason, F. Randimbindrainibe, « *Modèles de mesure de variables latentes dans un apprentissage asynchrone* », Mada-ETI, ISSN 220-0673, Vol. 1, pp 32-40, Madarevues, Mai 2018.

3. Editions d'ouvrages scientifiques

La liste suivante présente les ouvrages scientifiques dont je suis l'auteur principal en qualité de premier ou second auteur.

- 3.1. T.B. Ravaliminoarimalalason, F. Randimbindrainibe, « *Queues applied to Telecoms* », ISBN 978-1-394-19197-0 (e-book), ISBN 978-1-78630-904-4 (print), Edition WILEY, Décembre 2022.
- 3.2. T.B. Ravaliminoarimalalason, M. Rakotomalala, F. Randimbindrainibe, « *La théorie des files d'attente.* », ISBN 978-620-3-41305-2, Edition EUE, Mars 2021.

4. Participation à des journées et salons de recherches à comité de lecture

La liste suivante présente les journées et salons de recherches auxquels j'ai participé pour présenter les recherches sur les partages de ressources et leurs applications dans divers domaines.

- 4.1. Participation aux journées de recherche des trois IST de Madagascar, en collaboration avec l'Université de La Réunion et de l'Université des Mascareignes de l'Ile Maurice. Communication orale : « *Occupation des ressources partagées dans un système multi-service* ». 6^e édition. Octobre 2021.
- 4.2. Participation au Salon de Recherche au service de l'économie et de l'emploi – Salon Virtuel organisé par l'Université d'Antananarivo. Communication poster : « *Le dimensionnement des ressources partagées dans un système multi-service* ». eSREE 2021, 6^e édition, 22-23-24 Septembre 2021.
https://esree2021.univ-antananarivo.mg/spip.php/?page=exposant&id_rubrique=235#
- 4.3. Participation aux journées de recherche des journées de recherché des trois IST de Madagascar, en collaboration avec l'Université de La Réunion et de l'Université des Mascareignes de l'Ile Maurice. Communication orale : « *Myopic model of resource sharing in a queuing network* » et « *Utilisation d'un modèle d'apprentissage asynchrone dans une formation en ligne* ». 4^e édition. Octobre 2019.

Distribution of Occupied Resources on A Discrete Resources Sharing in A Queueing System

Toky Basilide Ravaliminoarimalalason

Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie
et de l'Innovation,
University of Antananarivo,
Antananarivo, Madagascar

Falimanana Randimbaindrainibe

Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie
et de l'Innovation,
University of Antananarivo
Antananarivo, Madagascar

Abstract—In this paper, we study discrete resources sharing in a queueing system. We build analytical model of the distribution of occupied resources that can help for resources dimensioning. Both infinite and finite amount of discrete server resources are highlighted and validated with special cases of individual resource requirement following Poisson and Binomial distribution. It is found that there is a peak of usage near the average number of resources requested by customers, and other small peaks with low probability at multiples of this mean. The charging factor ρ of the queue impacts mostly on the resources occupation distribution.

Keywords—Distribution; probability; queue; resource; sharing

I. INTRODUCTION

An event flow called customers sequentially arrives in a system to claim a service [1]. The time between the arrival of these customers, called inter-arrival, and the length of service requested by customers are random variables. This queueing system is made up of a queueing area, of finite or infinite capacity, and servers handling the services requested by customers. With that comes a discipline dictating how or who in the queueing area customers are going to be served first.

Basic theories of queueing systems have focused on numbers (finite or not) of servers. Each customer will be served by a server, until all servers are busy. Once busy, customers in the queueing system will wait until one server is free.

However, in many real systems, some customers need more than one server, or more than one resource in a server. Some servers can take care of multiple customers at the same time, allocating some of their resources to customers, and some to other ones, depending on their needs. Researches have advanced on resource-based systems since Green's work on queues in which customers request multiple servers [2]. Others even wanted to generalize the notion of Erlang such as Romm [3] or Tikhonenko [4]. Studies and analyzes of queueing systems capacity have been advanced [6][7][8], on queues with multiple servers or multiple resources [9][10] but we will be interested in analytical models of a queueing system that can share its discrete resources with users requesting service from it. More precisely, we will explore the probability distributions followed by the occupied resources in such queues in order to be able to perform a resource dimensioning.

II. FROM BIRTH AND DEATH PROCESS

Given a queueing system a priori having k customers. It can handle between 0 and n customers. In this system, customers arrivals form a Poisson process of intensity λ_k , the service

duration they request are random and are following an exponential distribution with average $1/\mu_k$.

We denote by N the state of this system, N describes the number of customers present on it. Let $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ and $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ be positive numbers.

Proposition 1

During an infinitely small time interval ε , knowing that there are k customers in the queue :

- The probability that a customer arrives in the queue is $\lambda_k \varepsilon + o(\varepsilon)$,
- The probability that a customer leaves the queue is $\mu_k \varepsilon + o(\varepsilon)$,
- All other eventualities have a probability $o(\varepsilon)$.

Proof:

The probability that a customer will arrive during an infinitely small time interval ε , which we denote by P_a , is equal to the probability that the inter-arrival T of the customers is less than ε . The arrival of customers form a Poisson process of intensity λ_k , so the inter-arrival T is random variable following an exponential distribution with parameter λ_k $P_a = P(T \leq \varepsilon) = 1 - e^{-\lambda_k \varepsilon}$. For ε infinitely small, we can write the expansion limited to order 1 of this probability in the neighborhood of ε by $P_a = 1 - (1 - \lambda_k \varepsilon) + o(\varepsilon) = \lambda_k \varepsilon + o(\varepsilon)$.

In a similar way, with a random variable of service duration following an exponential distribution with average $1/\mu_k$, we have the probability P_d of customer departure $P_d = 1 - e^{-\mu_k \varepsilon} = \mu_k \varepsilon + o(\varepsilon)$. ■

Proposition 2

The stationary distribution $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_n)$ of this system is equal to :

$$\pi_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \pi_0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

Where

$$\frac{1}{\pi_0} = 1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \dots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \quad (2)$$

Proof:

As a discrete-time Markov chain, with time step ε , we can show the following transition probability p_{ij} :

- $p_{00} = 1 - \lambda_0 \varepsilon + o(\varepsilon)$
- $p_{i,i-1} = \mu_i \varepsilon + o(\varepsilon)$ for $i = 1, \dots, n$
- $p_{ii} = 1 - (\lambda_i + \mu_i) \varepsilon + o(\varepsilon)$ for $i = 1, \dots, n - 1$
- $p_{nn} = 1 - \mu_n \varepsilon + o(\varepsilon)$

$$- p_{i,i+1} = \lambda_i \varepsilon + o(\varepsilon) \text{ for } i = 0, \dots, n-1$$

$$- \dots$$

From these transition probabilities, the transition matrix corresponding to this Markov chain in discrete time is given by following equation:

$$P(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 - \lambda_0 \varepsilon & \lambda_0 \varepsilon & 0 & \dots \\ \mu_1 \varepsilon & 1 - (\lambda_1 + \mu_1) \varepsilon & \lambda_1 \varepsilon & \dots \\ 0 & \mu_2 \varepsilon & 1 - (\lambda_2 + \mu_2) \varepsilon & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix} + o(\varepsilon) \quad (3)$$

This matrix can be written in the form $P(\varepsilon) = Id + A\varepsilon + o(\varepsilon)$ where A is the infinitesimal stochastic generator of the continuous-time Markov chain obtained as ε approaches 0.

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix} \quad (4)$$

The stationary distribution of the state of the system is obtained from the equation of state relation of a continuous-time Markov chain $\pi \cdot A = 0$. So,

$$- \lambda_0 \pi_0 = \mu_1 \pi_1,$$

$$- \lambda_0 \pi_0 - (\lambda_1 + \mu_1) \pi_1 + \mu_2 \pi_2 = 0, \lambda_1 \pi_1 = \mu_2 \pi_2$$

$$- \dots$$

$$- \lambda_{i-2} \pi_{i-2} - (\lambda_{i-1} + \mu_{i-1}) \pi_{i-1} + \mu_i \pi_i = 0, \lambda_{i-1} \pi_{i-1} = \mu_i \pi_i, \text{ for } i = 2, \dots, n-1$$

$$- \dots$$

$$- \lambda_{n-1} \pi_{n-1} = \mu_n \pi_n$$

From these equations, we can get $\pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \pi_0, \pi_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} \pi_1 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} \pi_0, \pi_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} \pi_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \pi_0, \dots$, and then $\pi_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \pi_0$ for $k = 1, 2, \dots, n$. And knowing that (π_0, \dots, π_n) is a probability distribution, $\pi_0 + \pi_1 + \dots + \pi_n = 1$, so π_0 is given by $\frac{1}{\pi_0} = 1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \dots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$. ■

We note that $\pi_k = P(N = k)$, the probability to find k customers in the queueing system.

III. STATE DISTRIBUTION IN RESOURCE SHARING

Now, we consider that the queueing system has discrete resources in its servers. In total, C resources are available on it, $C \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. It means that the quantity of system resources can be finite or infinite in our study, relative to the case.

Each customer needs an amount r of resources, a discrete random variable. If the amount r of resources requested by the customer is available, the server can allocate them while serving it. If they are not available, then the requesting customer remains in the queueing area until the requested resources are released for use.

A. Infinite capacity queueing system with infinite server resources

The system queueing is M/M/ ∞ .

1) General case

Proposition 3

The stationary distribution of this queueing system is:

$$\pi_k = \frac{1}{k!} \rho^k e^{-\rho} \text{ where } \rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad (5)$$

ρ is called charging factor.

Proof:

In this case, $n \rightarrow \infty, \lambda_k = \lambda$ for all $k = 0, 1, 2, \dots$ and $\mu_k = k\mu$ for all $k = 1, 2, \dots$

$$\pi_k = \frac{\frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}}{1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \dots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}} = \frac{\frac{\lambda \dots \lambda}{\mu \cdot 2\mu \dots k\mu}}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda \lambda}{\mu \cdot 2\mu} + \dots + \frac{\lambda \lambda \dots \lambda}{\mu \cdot 2\mu \dots k\mu} + \dots}$$

$$= \frac{\frac{\lambda^k}{\mu^k k!}}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2 \cdot 2!} + \dots + \frac{\lambda^n}{\mu^n n!} + \dots} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k! e^{\frac{\lambda}{\mu}}} = \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \quad \blacksquare$$

Since the server has infinite capacity, then all customers in the system are served simultaneously. Customers arriving to the queueing area are immediately served after entering the system. If the system has k customers served, they are using at the same time r_k amount of resources. Let denote $P(R = r)$ the probability distribution of R , the random variable describing the total amount of occupied resources, and $P_k(r)$ the probability that the k customers use r resources.

$$P(R = r) = \sum_{k=1}^{+\infty} (P(N = k) \cdot P_k(r))$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k!} \rho^k e^{-\rho} \cdot P_k(r)\right) \quad (6)$$

2) Individual resource usage following Poisson distribution

We consider that resource usage by individual customer follows Poisson distribution with parameter $\alpha : \mathcal{P}(\alpha)$.

Proposition 4

Resource usage by k customers is a random variable also following the Poisson distribution with parameter $k\alpha : P_k \sim \mathcal{P}(k\alpha)$.

Proof:

The sum of independent Poisson random variable $\mathcal{P}(\alpha)$ and $\mathcal{P}(\beta)$ is a random variable following Poisson distribution with parameter $\alpha + \beta : \mathcal{P}(\alpha + \beta)$. In other hand, the total amount of occupied resources is additive (sum of resources amount of used by each customers). ■

Proposition 5

The number of occupied resources in the server has the following probability distribution:

$$P(R = r) = \frac{\alpha^r}{r!} e^{-\alpha} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^r}{k!} (\rho e^{-\alpha})^k \quad (7)$$

Proof:

From (6), and knowing that $P_k(r) = \frac{1}{r!} (k\alpha)^r e^{-k\alpha}$, we get

$$P(R = r) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \rho^k e^{-\rho} \frac{1}{r!} (k\alpha)^r e^{-k\alpha} = \frac{\alpha^r}{r!} e^{-\rho} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^r}{k!} (\rho e^{-\alpha})^k \quad \blacksquare$$

B. Infinite capacity queueing system with finite server resources

1) General case

We still have infinite capacity of queueing system, $n \rightarrow \infty$. But the server has finite resources, so the number of customers that can be served simultaneously is limited. Let s be the maximum number of customers served by the server. We note that s is variable according the amount of resources required by the customers. The stationary distribution of the queueing

system having capacity s in terms of number of customers is denoted by $\pi_{k,s}$.

Proposition 8

The stationary distribution $\pi_{k,s}$ is given by :

$$\pi_{k,s} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{k!} \rho^k}{\sum_{i=0}^s \frac{1}{i!} \rho^i + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{s!s^i} \rho^{s+i}} & \text{for } k \leq s \\ \frac{\frac{1}{s!s^{k-s}} \rho^k}{\left(\sum_{i=0}^s \frac{1}{i!} \rho^i + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{s!s^i} \rho^{s+i} \right)} & \text{for } k > s \end{cases} \quad (8)$$

Proof:

We get this stationary distribution from the following parameters : $\lambda_k = \lambda$ ($0 \leq k$), $\mu_k = k\mu$ ($0 < k < s$) and $\mu_k = s\mu$ ($s \leq k$), because the number of customers that can exit the system is limited by s .

So, for $k \leq s$:

$$\pi_{k,s} = \frac{\frac{\lambda}{\mu} \frac{\lambda}{\mu} \dots \frac{\lambda}{\mu}}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{\lambda}{\mu} + \dots + \frac{\lambda}{\mu} \frac{\lambda}{\mu} \dots \frac{\lambda}{\mu} \frac{\lambda}{\mu} \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \dots + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{s!s^i} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+i}} = \frac{\frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{\sum_{i=0}^s \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{s!s^i} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+i}}$$

And for $k > s$:

$$\pi_{k,s} = \frac{\frac{\lambda}{\mu} \frac{\lambda}{\mu} \dots \frac{\lambda}{\mu} \frac{\lambda}{\mu} \frac{\lambda}{\mu}}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{\lambda}{\mu} + \dots + \frac{\lambda}{\mu} \frac{\lambda}{\mu} \dots \frac{\lambda}{\mu} \frac{\lambda}{\mu} \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\frac{1}{s!s^{k-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \dots + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{s!s^i} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+i}} = \frac{\frac{1}{s!s^{k-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{\sum_{i=0}^s \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{s!s^i} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+i}} \quad \blacksquare$$

We denote C ($C \in \mathbb{N}^*$), the number of resources that the server can allocate. The capacity s customers varies from 1 (if the customer require all C resources at the same time) to C (each customers consume a single resource). Let P_s be the probability that this capacity in terms of customers is s during an observation of the system.

Proposition 6

The probability distribution P_s is given by :

$$P_s = \sum_{r=0}^C P(R_s = r) \cdot P(R_1 > C - r) \quad (9)$$

Proof:

The capacity s of the system is achieved in case of r resources are used by these s customers, and the $s + 1$ -th following customer requests an amount of $R > C - r$ resources. $P(R_k = r) = P_k(r)$ denotes the probability that k customers are using r resources of the server. \blacksquare

Proposition 7

The probability that any resource is used is:

$$P(R = 0) = \frac{\sum_{r=1}^C P(R_s=r) \cdot P(R_1 > C-r)}{\sum_{i=0}^s \frac{1}{i!} \rho^i + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{s!s^i} \rho^{s+i}} \quad (10)$$

Proof:

This event is obtained when no customer is found in the queueing system, that is, with a probability $\pi_{0,s}$, for all possible values of s .

$$P(R = 0) = \sum_{s=1}^C \pi_{0,s} \cdot P_s = \frac{\sum_{r=1}^C P(R_s=r) \cdot P(R_1 > C-r)}{\sum_{i=0}^s \frac{1}{i!} \rho^i + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{s!s^i} \rho^{s+i}} \quad \blacksquare$$

Proposition 8

The probability distribution of the number of occupied resources is equal to:

$$P(R = r) = \sum_{s=1}^C \left(\sum_{k=1}^s \pi_{k,s} \cdot P(R_k = r) + \sum_{k=s+1}^{+\infty} \pi_{k,s} \cdot P(R_s = r) \right) \cdot P_s \quad \text{for } 0 < r \leq C \quad (11)$$

Proof:

If the capacity in terms of customer is $s = 1$, then the usage of resources amount r is limited to this only one customer. We have the probability : $\pi_{1,s} \cdot P(R_1 = r) + \pi_{2,s} \cdot P(R_1 = r) + \pi_{3,s} \cdot P(R_1 = r) + \dots = \pi_{1,s} \cdot P(R_1 = r) + \sum_{k=2}^{+\infty} \pi_{k,s} \cdot P(R_1 = r)$.

If the capacity in terms of customer is $s = 2$, then the usage of resources amount r is limited to these 2 customers. We have the probability : $\pi_{1,s} \cdot P(R_1 = r) + \pi_{2,s} \cdot P(R_2 = r) + \pi_{3,s} \cdot P(R_2 = r) + \dots = \sum_{k=1}^2 \pi_{k,s} \cdot P(R_k = r) + \sum_{k=3}^{+\infty} \pi_{k,s} \cdot P(R_2 = r)$.

For any s , the utilization of resources amount r is limited to s customers : $\pi_{1,s} \cdot P(R_1 = r) + \pi_{2,s} \cdot P(R_2 = r) + \dots + \pi_{s,s} \cdot P(R_s = r) + \pi_{s+1,s} \cdot P(R_s = r) + \pi_{s+2,s} \cdot P(R_s = r) + \dots = \sum_{k=1}^s \pi_{k,s} \cdot P(R_k = r) + \sum_{k=s+1}^{+\infty} \pi_{k,s} \cdot P(R_s = r)$.

Thus, the probability of usage of r amount of resources is obtained for all possible values of s : $P(R = r) = \sum_{s=1}^C \left(\sum_{k=1}^s \pi_{k,s} \cdot P(R_k = r) + \sum_{k=s+1}^{+\infty} \pi_{k,s} \cdot P(R_s = r) \right) \cdot P_s \quad \blacksquare$

Blocking without loss applies in the following cases:

- If the remaining amount of server resources is less than the next customer requirement, it cannot enter the server area and must wait there until the resources become available,
- If the total number of server resources (finite) is less than the customer's requirement, the system will hang forever.

Proposition 9

The blocking probability is given by:

$$B = \sum_{r=0}^C \sum_{s=1}^C P_s \cdot \pi_{s,s} \cdot P(R_s = r) \cdot P(R_1 \geq C - r) \quad (12)$$

Proof:

The system is blocked for any capacity s in terms of customers whose server already occupies s customers consuming r amount of resources, and another customer requests an amount of resources greater than $C - r$. \blacksquare

2) Individual resource usage following Binomial distribution

Let's take the example of binomial case to not fall in an eternal blockage of the system (we can limit the maximal number or required resources). A customer can request now a random quantity of resources amount at most M according to his needs, and following a binomial distribution with mean m .

Proposition 10

The number of required resources by one customer follows a binomial distribution with parameters $n = M$ and $p = m/M$: $\mathcal{B}(n, p)$.

Proof:

The maximal number of resources that a customer can request is M , so the n parameter of the binomial distribution is $n = M$. His mean is $np = m$, so $p = m/M$. It is a binomial distribution $\mathcal{B}(n, p) = \mathcal{B}(n = M, p = m/M)$. \blacksquare

Proposition 11

The amount of resources requested by k customers follows also a binomial distribution with parameters kM and m/M .

Proof:

Due to the additivity of the amount of resources, and that the sum of k independents binomial distributions $\mathcal{B}(n, p)$ is still a binomial distribution $\mathcal{B}(kn, p)$. ■

Using (9), (10), (11) and (12), we have:

The probability of usage of r resources by k customers:

$$P(R_k = r) = \binom{kM}{r} p^r q^{kM-r} \text{ where } q = 1 - p \quad (13)$$

The probability that the system has a capacity of s customers :

$$P_s = \sum_{r=1}^C P(R_s = r) \cdot P(R_1 > C - r) \\ = \sum_{r=1}^C \left(\binom{sM}{r} p^r q^{sM-r} \cdot \sum_{i=C-r+1}^C \binom{M}{i} p^i q^{M-i} \right) \quad (14)$$

The probability that r amount of resources are occupied in the system :

$$P(R = r) = \sum_{s=1}^C \left(\sum_{k=1}^s \pi_{k,s} \cdot P(R_k = r) + \sum_{k=s+1}^{+\infty} \pi_{k,s} \cdot P(R_s = r) \right) \cdot P_s \\ = \sum_{s=1}^C \left(\frac{1}{\sum_{i=0}^s \frac{1}{i!} \rho^i + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{s! s^i} \rho^{s+i}} \left(\sum_{k=1}^s \frac{1}{k!} \rho^k \cdot \binom{kM}{r} p^r q^{kM-r} + \sum_{k=s+1}^{+\infty} \frac{1}{s! k^{s-k}} \rho^k \cdot \binom{sM}{r} p^r q^{sM-r} \right) \right) \cdot P_s \quad (15)$$

IV. RESULTS AND DISCUSSIONS

A. Validation of the analytical model

To validate our theoretical results, simulations were carried out under Matlab-Simulink model of resource sharing.

The first step was to share discrete resources from a queue to server of infinite resources. Customers arrive with an arrival rate $\lambda = 1/1.2 \text{ s}^{-1}$, request service with a random duration following exponential distribution of average $1/\mu = 0.8 \text{ s}$, and require a random number of resources amount following a Poisson distribution with average $\alpha = 5$ resources.

Fig. 1. shows comparison of the simulation result (histogram in blue) and the analytical expression of (7) (red curve). The histogram in blue indicates the normalized representation of observed number of resources occupied by customers. The observation is at each 0.1s for a duration of 5,000s. We note that the result of simulation follows the analytical expression of the probability distribution. Other simulations have been carried out for different values of λ , μ and ρ and we found the same facts. This validates our expression in (7).

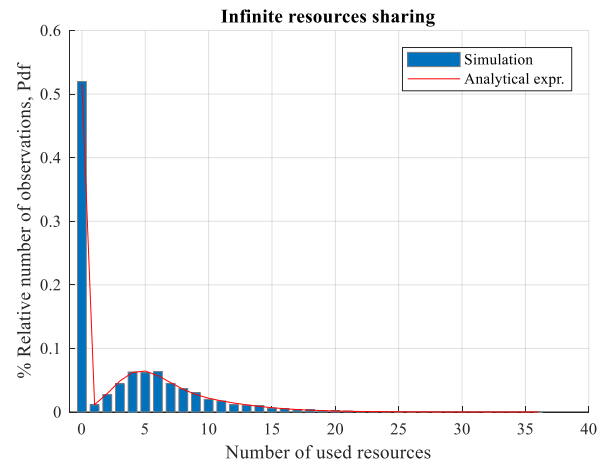


Fig. 1. Occupied resources in an infinite resources sharing

For the sharing of finite resources, Fig. 2. represents the result of simulation for customers arriving with an arrival rate $\lambda = 1/1.2 \text{ s}^{-1}$, requesting service with a random duration following exponential distribution of average $1/\mu = 0.8 \text{ s}$. The resources requested by these customers are random following binomial distribution of maximum value $M = 6$ resources, and of mean $m = 3$ resources. The capacity of the server is $C = 10$ resources.

Fig 2. shows the comparison of the results of the simulation and the analytical expression in (15).

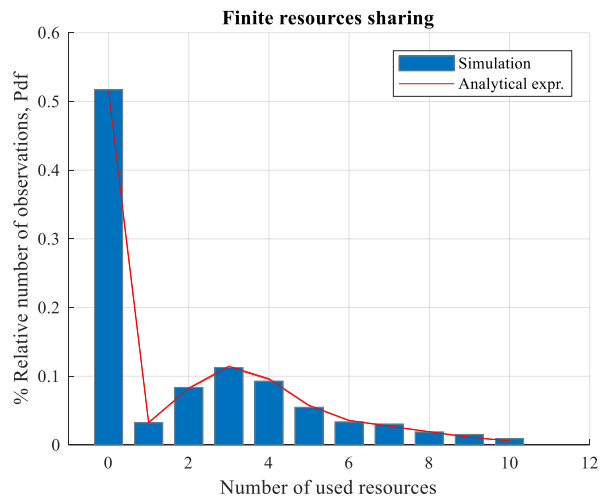


Fig. 2. Occupied resources in a finite resources sharing

We reach the same conclusion from the validation of our analytical model of finite resource sharing after multiple simulations with different values of λ , μ , M and m .

B. Abacus of occupied resources

From the analytical expressions that we have just validated, we can draw up the following charts based on the queuing system parameters values, whether finite resources or not.

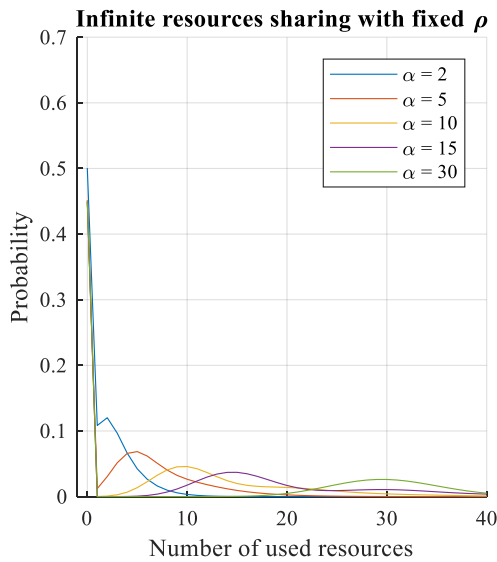


Fig. 3. Distribution of occupied resources for fixed ρ in an infinite resources sharing

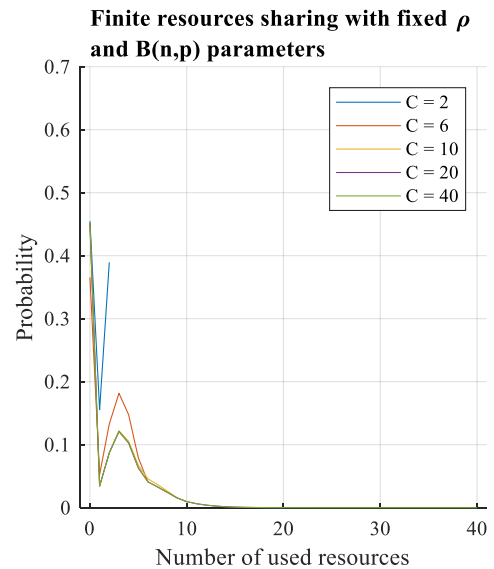


Fig. 5. Distribution of occupied resources for fixed ρ in a finite resources sharing

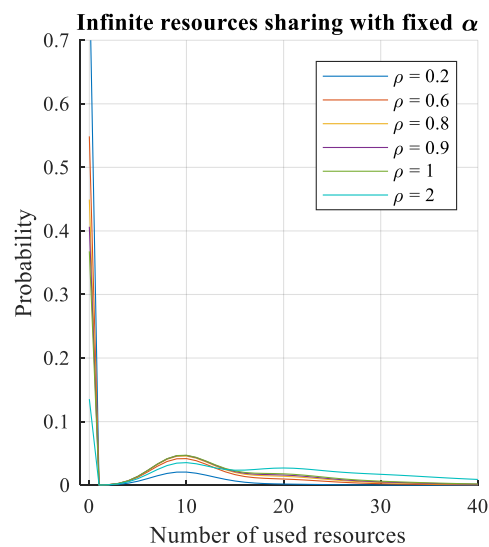


Fig. 4. Distribution of occupied resources for fixed α in an infinite resources sharing

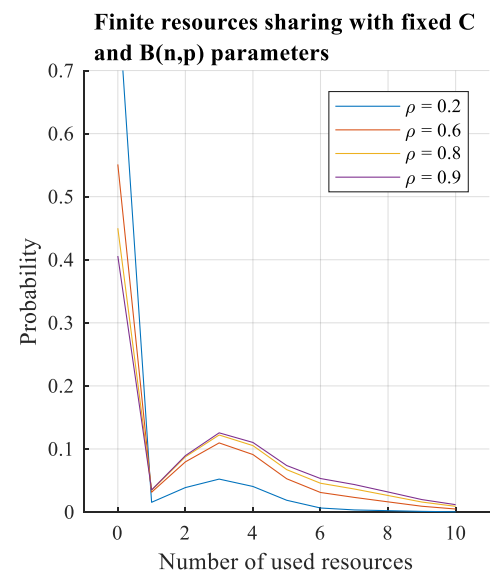


Fig. 6. Distribution of occupied resources for fixed C in a finite resources sharing

There is a peak near the average number of resources requested by customers, and then the curves spread to the left and to the right. It indicates that the number of busy resources is concentrated around the average requested by the customers. Other small peaks with low probability at multiples of this mean are also observed, explaining the fact that several customers are served at the same time by the server.

The probability of finding the server empty (in terms of the number of customers) decreases as ρ increases. The increase of ρ assumes that many customers are standing in the queueing area, either due to high service duration compared to inter-arrival, or to arrivals that are too frequent compared to service times. For infinite resources, ρ can exceed 1, and the number of occupied resources also tends towards a high quantity amount as shown by the cyan curve ($\rho = 2$) in Fig. 4.

The higher the capacity, the more the system tends towards the previous infinite resource scenarios as we can see in Fig. 5. The probability of finding the system free (0 customer, 0 utilization) decreases as the number of resources is reduced (Fig. 5) or as the charging factor ρ increases (Fig. 6.). The notion of resource dimensioning begins to intervene from this step. We do not want to deploy resources that are not going to be used, or that will be under-used.

V. CONCLUSION

This paper focuses upon the study of occupied resources in queueing system whereby the customer's arrival is Poisson process, they request service of duration exponential, and it requires a random amount of server resources. The server system has discrete resources and can share them to customers that request services to him. We proposed analytical model of the amount of the occupied resources by their probability distribution. We examined two cases of resources sharing: one with infinite amount of resources, and one with finite amount.

Special cases are also discussed regarding the individual resource usage following Poisson distribution and Binomial distribution. We validated our model using simulations on Matlab-Simulink.

The abacus presented in this paper can be used for resources dimensioning in case of Poisson or Binomial individual usage of discrete resource, but we can build more another abacus based on the formula that we validated.

In these proposed models, the server resources are discrete. In the future, we plan to build an analytical model of continuous resources sharing that we can also find in major cases of communication systems.

REFERENCES

- [1] E. Daru, "Méthodes de résolution pour quelques problèmes de files d'attente comportant des serveurs d'efficacités différentes," in *Revue de la Recherche Opérationnelle*, vol. 2, n°8, 3^e trimestre 1958.
- [2] L. Green, "A queueing system in which customers require a random number of servers", in *Operations Research*, vol. 28, n°6, pp. 1335-1346, Nov-Dec 1980.
- [3] E. L. Romm, V.V. Skitovitch, "On certain generalization of problem of Erlang", in *Automation and Remote Control*, vol. 32, n°5, pp. 1000-1003, 1971.
- [4] O.M. Tikhonenko, "Generalized Erlang problem for service systems with finite total capacity", in *Problems of Information Transmission*, vol. 41, n°3, pp. 243-253, 2005.
- [5] O.M. Tikhonenko, "Destricted Capacity Queueing Systems: Determination of their Characteristics", in *Automation and Remote Control*, vol. 58, n°6, pp. 969-973, 1997.
- [6] O.M. Tikhonenko, K.G. Klimovich, "Analysis of queueing systems for random-length arrivals with limited cumulative volume", in *Problems of Information Transmission*, vol. 37, n°1, pp. 77-79, 2001.
- [7] O.M. Tikhonenko, "Determination of Loss Characteristics in Queueing Systems with Demands of Random Space Requirement", A. Dudin, A. Nazarov, R. Yakupov. (eds) *Information Technologies and Mathematical Modelling – Queueing Theory and Applications*, in *Communications in Computer and Information Science*, vol. 564, pp. 209-215, 2015.
- [8] V. Naumov, K. Samouylov, "Analysis of multi-resource loss system with state dependent arrival and service rates", in *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, vol. 31, n°4, pp. 413-419, 2017.
- [9] G.Y. Fletcher, H.G. Perros, W.J. Stewart, "A queueing system where customers require a random number of servers simultaneously", in *Computer Science Department, Center for Communications and Signal Processing North Carolina State University, Raleigh, NC 27695-8206, U.S.A.*, 2011.
- [10] V.A. Naumov, K.E. Samuilov, A.K. Samuilov, "On the total amount of resources occupied by serviced customers", in *Automation and Remote Control*, vol. 77, n°8, pp. 1419-1427, 2016.

Distribution of occupied resources by fuzzy customers in a shared-resource system

Toky Basilide Ravaliminoarimalalason¹,
Liantsoa Joharimirina Randiamamonjy², Falimanana Randimbindrainibe³

^{1,2,3}EAD Cognitive Sciences and Applications, Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation, University of Antananarivo, Madagascar

ABSTRACT

In a queue with shared-resources across customers whose arrival and service parameters are fuzzy, the resource utilization distribution can also be determined as fuzzy numbers. The α -cuts of these probabilities are expressed in this paper to establish the membership functions of these fuzzy probabilities. Then, they are used for dimensioning the necessary and sufficient amount of resources required for the system so that the blocking probability does not exceed a certain threshold ε .

Keyword: - fuzzy, queueing system, sharing, resources, utilization

1. INTRODUCTION

The queuing theory has many applications today if we only mention traffic systems, communication systems, production systems, etc. For these application variants, the theory is based on the arrival process of customers and the service duration model they require. Although there is always a tendency to use stochastic models specifying the probability distributions of these two quantities, the parameters of the arrival and service distributions are still difficult to determine.

Fuzzy queuing theories have emerged by Li and Lee [1] to study queuing in a fuzzy environment. He posed fuzzy parameters of arrivals and services using Zadeh's extension principle [2]. Multiple angles of theories regarding fuzzy queues followed after: analyzes of fuzzy queues [3], retrial fuzzy queues [4], fuzzy queues with policy [5], multi-server queues [6], queues with priority [7], with other customers behaviors [8], using various types of fuzzy numbers: triangular or trapezoidal [9], ...

For our case, we will use fuzzy number theories to model the utilizations of shared resources of queue servers. It is an extension of the model [10] that we established with a non-fuzzy queue.

2. MODEL WITH CRISP CUSTOMERS

We have established a model giving the distribution of the amount of resources used by the customers in an M/M/1 queue with a single server having discrete shared resources [10].

Given a discrete resource queue of infinite capacity. Each customer it serves will use a random amount r of resources. Since the capacity of the queue server is infinite, all customers who come to the queue are served immediately. All customers are then served simultaneously. If the system serves k customers, a priori, the probability that these k customers use an amount of resources r is denoted $P_k(r)$.

For a Poisson arrival, and an exponential service time of the customers at the queue, the probability that r ($r \geq 1$) system resources are used is given by:

$$P(R = r) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(N = k) \cdot P_k(r) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho} \cdot P_k(r) \quad (1)$$

where $P(N = k)$ denotes the probability of finding k customers served in the queue, and $\rho = \lambda/\mu$ the load factor of the queue.

The probability that the server is free ($r = 0$) is given by the probability that any customer is served in the queue.

This expression can be used to determine the amount of resources sufficient for a system so that the blocking rate (or the blocking probability) does not exceed a given threshold ϵ .

3. FUZZY SETS AND FUZZY NUMBERS

Let be Ω an infinite and uncountable set. We develop in the following few theories of sets and fuzzy numbers [11].

3.1. Fuzzy set

A fuzzy set \tilde{E} on Ω is defined by its membership function $\mu_{\tilde{E}}: \Omega \rightarrow [0,1]$.

It can be characterized by:

- Its kernel which represents the elements of Ω for which the membership degree is equal to 1: $ker(\tilde{E}) = \{x \in \Omega \mid \mu_{\tilde{E}}(x) = 1\}$,
- Its support which represents the subsets of Ω for which the membership degree is non-zero: $supp(\tilde{E}) = \{x \in \Omega \mid \mu_{\tilde{E}}(x) \neq 0\}$,
- Its height which represents the maximum degree of membership in $\tilde{E} : h(\tilde{E}) = \max_{x \in \Omega}(\mu_{\tilde{E}}(x))$,
- Its α -cut which represents the subsets of Ω for which the membership degree is greater than or equal to α ($\alpha \in [0,1]$): $\tilde{E}[\alpha] = \{x \in \Omega \mid \mu_{\tilde{E}}(x) \geq \alpha\}$.

3.2. Fuzzy number

A fuzzy number \tilde{N} is a fuzzy set satisfying the following properties:

- Its kernel is equal to a singleton: $|ker(\tilde{N})| = 1$,
- Its height is equal to 1: $h(\tilde{N}) = 1$,
- There is no disjoint α -cut: $\forall \alpha \in [0,1], \forall (u, v) \in \tilde{N}[\alpha], \forall \beta \in [0,1], \beta u + (1 - \beta)v \in \tilde{N}[\alpha]$,
- Its membership function $\mu_{\tilde{N}}$ is continuous.

A triangular fuzzy number \tilde{A} is a fuzzy number whose membership function is a triangular function defined by:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} & \text{if } a_1 < x < a_2 \\ \frac{a_3 - x}{a_3 - a_2} & \text{if } a_2 < x < a_3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

We will note it in the form $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ where a_1 is the lower limit of its support, a_2 its kernel, and a_3 the upper limit of its support.

Its α -cut is defined by the interval:

$$\tilde{A}[\alpha] = [a_1 + (a_2 - a_1)\alpha, a_3 - (a_3 - a_2)\alpha] \quad (3)$$

3.3. Operations on fuzzy numbers

\otimes denotes an operation (addition, or subtraction, or multiplication, or division) of two fuzzy numbers.

Consider two fuzzy numbers \tilde{A} and \tilde{B} whose α -cuts are respectively denoted by $\tilde{A}[\alpha]$ and $\tilde{B}[\alpha]$.

We can define a fuzzy number \tilde{C} result of the operation $\tilde{A} \otimes \tilde{B}$ such that the α -cut of \tilde{C} is equal to the operation between the α -cuts of \tilde{A} and \tilde{B} , i.e. $\tilde{A}[\alpha] \otimes \tilde{B}[\alpha] = \tilde{C}[\alpha]$. The operation on the fuzzy numbers is therefore reduced to the operation on the intervals of the α -cuts.

Given two closed intervals $[g_1, d_1]$ and $[g_2, d_2]$, the operations on these intervals are defined by:

- Sum: $[g_1, d_1] + [g_2, d_2] = [g_1 + g_2, d_1 + d_2]$

- Subtraction: $[g_1, d_1] - [g_2, d_2] = [g_1 - g_2, d_1 - d_2]$
- Multiplication: $[g_1, d_1] \times [g_2, d_2] = [m_{min}, m_{max}]$
 Such that $m_{min} = \min\{g_1g_2, g_1d_2, d_1g_2, d_1d_2\}$ and $m_{max} = \max\{g_1g_2, g_1d_2, d_1g_2, d_1d_2\}$
 If g_1 and g_2 are positive, we can simplify it like $[g_1, d_1] \times [g_2, d_2] = [g_1g_2, d_1d_2]$
- Division: $[g_1, d_1]/[g_2, d_2] = [g_1, d_1] \times [\frac{1}{d_2}, \frac{1}{g_2}]$
- Multiplication with a scalar: $k.[g_1, d_1] = [k.g_1, k.d_1], k > 0.$

4. MODEL WITH FUZZY CUSTOMERS

Suppose now that the arrival of customers forms a Poisson process but that the arrival rate λ is not known for sure. This arrival rate varies from λ_{min} to λ_{max} and takes an average value $\bar{\lambda}$ for a fairly long observation period T . It can be modeled as a triangular fuzzy number $\tilde{\lambda} = (\lambda_{min}, \bar{\lambda}, \lambda_{max})$. Its α -cut is equal to $\tilde{\lambda}[\alpha] = [\lambda_{min} + (\bar{\lambda} - \lambda_{min})\alpha, \lambda_{max} - (\lambda_{max} - \bar{\lambda})\alpha]$.

Similarly, for the characterization of the duration of service, it is assumed that we do not know it perfectly; only it is exponential and its mean varies from μ_{min} to μ_{max} with an average value $\bar{\mu}$. This inverse of the average duration of service can also be modeled as a triangular fuzzy number $\tilde{\mu} = (\mu_{min}, \bar{\mu}, \mu_{max})$. Its α -cut is equal to $\tilde{\mu}[\alpha] = [\mu_{min} + (\bar{\mu} - \mu_{min})\alpha, \mu_{max} - (\mu_{max} - \bar{\mu})\alpha]$.

We therefore have a queue FM/FM/1 of a single server whose characteristics of arrivals and service durations are Markovian with fuzzy parameters. The server has an infinite number of resources that it shares with its customers according to their requirements.

Then, the queue load factor is equal to $\tilde{\rho} = \tilde{\lambda}/\tilde{\mu}$. Its α -cut is defined by:

$$\tilde{\rho}[\alpha] = \left[\frac{\lambda_{min} + (\bar{\lambda} - \lambda_{min})\alpha}{\mu_{max} - (\mu_{max} - \bar{\mu})\alpha}, \frac{\lambda_{max} - (\lambda_{max} - \bar{\lambda})\alpha}{\mu_{min} + (\bar{\mu} - \mu_{min})\alpha} \right] \tag{4}$$

In the following, we will denote it by $\tilde{\rho}[\alpha] = [\rho_{min}, \rho_{max}]$.

A priori, if the system serves k customers, the probability that these k customers use an amount r of resources is denoted $P_k(r)$ where k and r denote non-fuzzy numbers. $P_k(r)$ has a representation as a non-fuzzy number. The probability of finding k served customers in the FM/FM/1 queue is equal to the fuzzy number:

$$\tilde{P}(N = k) = \left(\frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho} \right) \tag{5}$$

Its α -cut is equal to $(\tilde{P}(N = k))[\alpha] = \left[\frac{\rho_{min}^k}{k!} e^{-\rho_{max}}, \frac{\rho_{max}^k}{k!} e^{-\rho_{min}} \right]$.

In fact:

$$\begin{aligned} \rho^k[\alpha] &= [\rho_{min}^k, \rho_{max}^k], \left(\frac{\rho^k}{k!} \right) [\alpha] = \left[\frac{\rho_{min}^k}{k!}, \frac{\rho_{max}^k}{k!} \right], \\ \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k!} \right) [\alpha] &= \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\rho_{min}^k}{k!}, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\rho_{max}^k}{k!} \right] = [e^{\rho_{min}}, e^{\rho_{max}}] \\ e^{-\rho}[\alpha] &= \left(\frac{1}{e^\rho} \right) [\alpha] = \left[\frac{1}{e^{\rho_{max}}}, \frac{1}{e^{\rho_{min}}} \right] = [e^{-\rho_{max}}, e^{-\rho_{min}}] \end{aligned}$$

Then $\left(\frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho} \right) [\alpha] = \left[\frac{\rho_{min}^k}{k!} e^{-\rho_{max}}, \frac{\rho_{max}^k}{k!} e^{-\rho_{min}} \right]$.

The probability that r server resources are used is therefore given by the fuzzy number:

$$\tilde{P}(R = r) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho} . P_k(r) \tag{6}$$

Its α -cut is equal to $(\tilde{P}(R = r))[\alpha] = \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho_{min}^k}{k!} e^{-\rho_{max}} . P_k(r), \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho_{max}^k}{k!} e^{-\rho_{min}} . P_k(r) \right]$.

Its minimum is:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda_{min} + (\bar{\lambda} - \lambda_{min})\alpha}{\mu_{max} - (\mu_{max} - \bar{\mu})\alpha} \right)^k e^{-\frac{\lambda_{max} - (\lambda_{max} - \bar{\lambda})\alpha}{\mu_{min} + (\bar{\mu} - \mu_{min})\alpha}} \cdot P_k(r) \tag{7}$$

And its maximum is:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda_{max} - (\lambda_{max} - \bar{\lambda})\alpha}{\mu_{min} + (\bar{\mu} - \mu_{min})\alpha} \right)^k e^{-\frac{\lambda_{min} + (\bar{\lambda} - \lambda_{min})\alpha}{\mu_{max} - (\mu_{max} - \bar{\mu})\alpha}} \cdot P_k(r) \tag{8}$$

We can also draw the graph of the membership function as a function of P and r in this case, but it is difficult to output the analytical expression of this membership function. We can still use this graph to determine the sufficient amount r of resources to be made available in the server for a threshold probability of utilization equal to ε .

5. NUMERICAL APPLICATION

We will take the example of an infinite capacity queue server sharing its resources with customers. Those customers arrive according to a Poisson process whose rate seems uncertain, with minimum value $\lambda_{min} = 1/1.3 \text{ s}^{-1}$, maximum value $\lambda_{max} = 1/1.0 \text{ s}^{-1}$, and mean value $\bar{\lambda} = 1/1.2 \text{ s}^{-1}$. These customers request a service of random duration following an exponential distribution with uncertain average also, of minimum value $\mu_{min} = 1/0.9 \text{ s}^{-1}$, of maximum value $\mu_{max} = 1/0.7 \text{ s}^{-1}$, and of mean value $\bar{\mu} = 1/0.8 \text{ s}^{-1}$.

Each service requires a random amount of resources following a Poisson distribution with an average of $a = 5$ resources per customer. Resources used by different customers are independent.

We will assimilate the rate of the process of arrivals to a triangular fuzzy number $\tilde{\lambda} = (\lambda_{min}, \bar{\lambda}, \lambda_{max}) = (1/1.3, 1/1.2, 1/1.0)$, and the same for the average duration of service $\tilde{\mu} = (\mu_{min}, \bar{\mu}, \mu_{max}) = (1/0.9, 1/0.8, 1/0.7)$.

Let $\alpha \in [0,1]$. The load factor of the FM/FM/1 queue is equal to the fuzzy number $\tilde{\rho} = \tilde{\lambda}/\tilde{\mu}$ whose α -cut is equal to:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}[\alpha] &= \left[\frac{\lambda_{min} + (\bar{\lambda} - \lambda_{min})\alpha}{\mu_{max} - (\mu_{max} - \bar{\mu})\alpha}, \frac{\lambda_{max} - (\lambda_{max} - \bar{\lambda})\alpha}{\mu_{min} + (\bar{\mu} - \mu_{min})\alpha} \right] \\ &= \left[\frac{\frac{1}{1.3} + \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.3}\right)\alpha}{\frac{1}{0.7} - \left(\frac{1}{0.7} - \frac{1}{0.8}\right)\alpha}, \frac{\frac{1}{1.0} - \left(\frac{1}{1.0} - \frac{1}{1.2}\right)\alpha}{\frac{1}{0.9} + \left(\frac{1}{0.8} - \frac{1}{0.9}\right)\alpha} \right] = \left[\frac{0.769 + 0.064\alpha}{1.429 - 0.179\alpha}, \frac{1 - 0.167\alpha}{1.111 + 0.139\alpha} \right] \end{aligned} \tag{9}$$

The amount of resources used by a single customer follows the Poisson distribution with parameter $a = 5$ resources, then the amount of resources used by k customers follows the Poisson distribution with parameter $ka = 5k$ resources according to the independence of the amount of resources used by different customers. Thus, given k customers, the probability that r resources are used by k customers is equal to:

$$P_k(r) = \frac{1}{r!} (5k)^r e^{-5k} \tag{10}$$

The probability that r resources are used in the queue server is a fuzzy number whose α -cut is equal to:

$$\begin{aligned} (\tilde{P}(R = r))[\alpha] &= \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho_{min}^k}{k!} e^{-\rho_{max}} \cdot P_k(r), \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho_{max}^k}{k!} e^{-\rho_{min}} \cdot P_k(r) \right] \\ &= \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{0.769 + 0.064\alpha}{1.429 - 0.179\alpha} \right)^k e^{-\left(\frac{1 - 0.167\alpha}{1.111 + 0.139\alpha}\right)}, \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1 - 0.167\alpha}{1.111 + 0.139\alpha} \right)^k e^{-\left(\frac{0.769 + 0.064\alpha}{1.429 - 0.179\alpha}\right)} \cdot P_k(r) \right] \end{aligned} \tag{11}$$

The bounds of the α -cut are:

$$\begin{aligned}
 (\tilde{P}(R = r)) [\alpha]_{min} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{0.769 + 0.064\alpha}{1.429 - 0.179\alpha} \right)^k e^{-\left(\frac{1-0.167\alpha}{1.111+0.139\alpha}\right)} \cdot \frac{1}{r!} (5k)^r e^{-5k} \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k! r!} \left(\frac{0.769 + 0.064\alpha}{1.429 - 0.179\alpha} e^{-5} \right)^k e^{-\left(\frac{1-0.167\alpha}{1.111+0.139\alpha}\right)} \cdot (5k)^r
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

And:

$$\begin{aligned}
 (\tilde{P}(R = r)) [\alpha]_{max} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1 - 0.167\alpha}{1.111 + 0.139\alpha} \right)^k e^{-\left(\frac{0.769+0.064\alpha}{1.429-0.179\alpha}\right)} \cdot \frac{1}{r!} (5k)^r e^{-5k} \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k! r!} \left(\frac{1 - 0.167\alpha}{1.111 + 0.139\alpha} e^{-5} \right)^k e^{-\left(\frac{0.769+0.064\alpha}{1.429-0.179\alpha}\right)} \cdot (5k)^r
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

From this α -cut, we can draw up the membership function of the probability of using r resources of the server.

Let us take the case of the membership function of the probability that $r = 6$ server resources are busy. Table -1 below shows the bounds of the α -cut of $\tilde{P}(R = 6)$ for different α ranging from 0 to 1.

Table -1: Bounds of the α -cut of $\tilde{P}(R = 6)$ for different α ranging

α	$\tilde{P}[\alpha]_{min}$	$\tilde{P}[\alpha]_{max}$
0.0	0.0358	0.0921
0.1	0.0376	0.0880
0.2	0.0394	0.0840
0.3	0.0414	0.0802
0.4	0.0434	0.0766
0.5	0.0455	0.0731
0.6	0.0477	0.0697
0.7	0.0500	0.0664
0.8	0.0523	0.0633
0.9	0.0548	0.0603
1.0	0.0574	0.0574

From these different bounds of the α -cut, we can draw in chart -1 the graph of the membership function of the fuzzy number $\tilde{P}(R = 6)$. We found that it is not really a triangular fuzzy number.

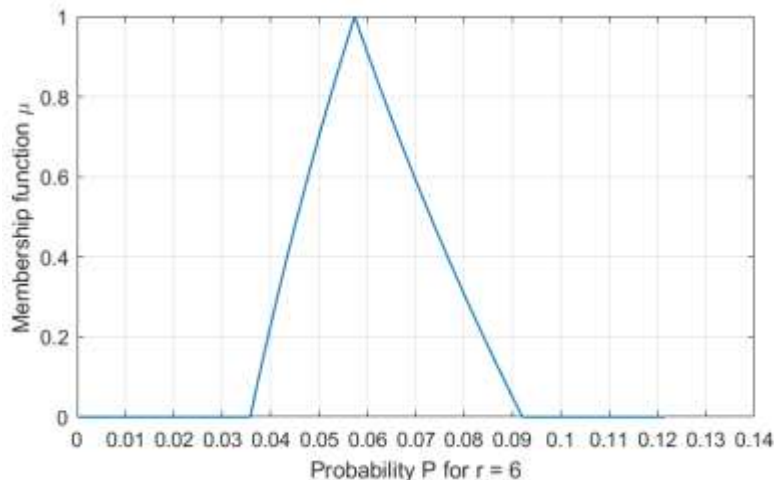


Chart -1: Membership function of $\tilde{P}(R = 6)$

The probability $\tilde{P}(R = 6)$ is a fuzzy number, whose support is equal to $[0.0358, 0.0921]$ and kernel is equal to $\{0.0574\}$.

The membership functions of the fuzzy probability of utilization of r server resources can be drawn up in the same way for different values of r . Chart -2 represents the graphs of these membership functions.

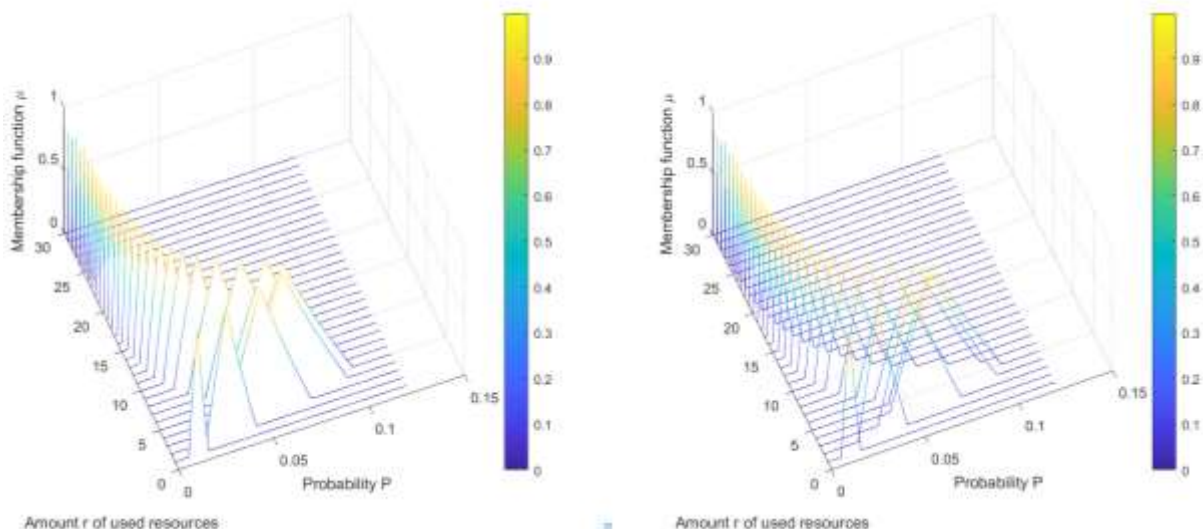


Chart -2: Membership functions of $\tilde{P}(R = r)$ for different values of r

In the chart on the left, the back curves (upper r) are hidden by the front curves (lower r) to facilitate their view. While in the chart on the right, we left them as they are.

We note the upper limit of the support of the fuzzy number \tilde{P} is maximum for $r = 5$ which is equal to the average number of resources occupied by one user. The membership function curve spreads to the right (higher probability) from $r = 1$ up to $r = 5$ resources, then to the left (lower probability) from $r = 6$ resources. Although the arrival and service properties of users are fuzzy, we still note that the probability of using $r = 5$ system resources is the highest. We also found it with the analog crisp system [10].

We can also analyze this fact from the following chart -3 which represents the supports of the fuzzy numbers $\tilde{P}(R = r)$ for different values of r .

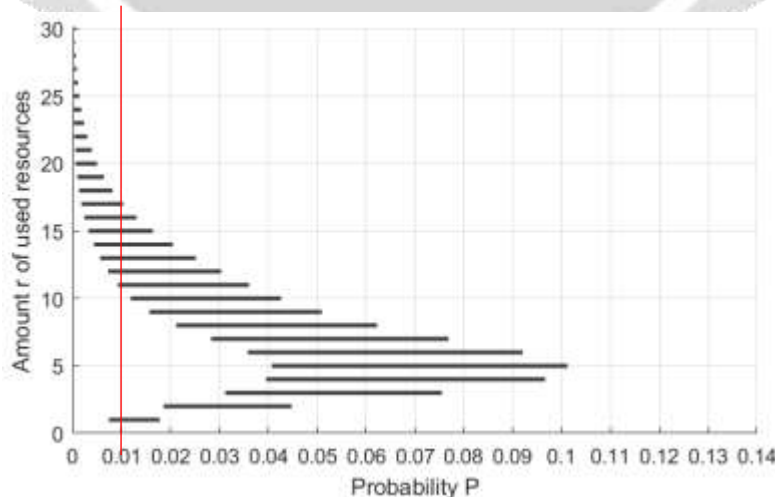


Chart -3: Support of the fuzzy probabilities $\tilde{P}(R = r)$

From this chart -3, it is possible to determine a sufficient amount of resources for the system instead of deploying an infinity which are very expensive as this support tends toward zero when the amount of resources grows up.

We now assume that the server has a finite amount C of resources. If we admit that the probability of simultaneous use of all these C resources must not exceed a threshold $\varepsilon = 0.01$, an arriving customer will find a free server resource, otherwise it must wait (blocked). In other words, the blocking probability of the system must not exceed a threshold $\varepsilon = 0.01$. Reading on chart -3, with the red limit of the probability $\varepsilon = 0.01$, we must endow the system with an amount $C \geq 18$ resources. The minimum sufficient amount is therefore 18 resources.

6. CONCLUSIONS

Fuzzy users have been called customers whose arrival and service characteristics are fuzzy parameters, i.e. comparable to fuzzy numbers. Although this information is not certain, we can estimate the amount of necessary and sufficient resources for a system from the fuzzy modeling of the distribution of occupied resources.

7. REFERENCES

- [1] R.J. Lie, E.S. Lee, « Analysis of Fuzzy Queues », Computers and Mathematics with Applications, Vol. 17, Issue 7, pp. 1143-1147, 1989.
- [2] L.A. Zadeh, « The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning », Part 3, Inform. Sci., Vol. 9, pp. 43-64, 1975.
- [3] D.S. Negi, E.S. Lee, « Analysis and simulation of fuzzy queues », Fuzzy Sets and Systems, Vol. 46, pp. 321-330, 1992.
- [4] W. Rita, L. Robert, « Application of fuzzy set theory to retrial queues », International Journal of Algorithms, Computing and Mathematics, Vol. 2, Issue 4, pp. 9-18, 2009.
- [5] W. Ritha, S.B. Menon, « Fuzzy n policy queues with infinite capacity », Journal of Physical Sciences, Vol. 15, pp. 73-82, 2011.
- [6] S. Shanmugasundaram, B.B. Venkatesh, « Fuzzy multi-server queueing model through DSW algorithm », International Journal of Latest Trends in Engineering and Technology, Vol. 5, Issue 3, pp. 452-457, 2015.
- [7] B. Kalpana, N. Anusheela, « Analysis of a single server non-preemptive fuzzy priority queue using L-R method », ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences, Vol 13, Issue 13, pp. 9306-9310, 2018.
- [8] J.P. Mukeba, « Application of L-R method to single server fuzzy retrial queue with patient customers », Journal of Pure and Applied Mathematics: Advances and Applications, Vol. 16, Issue 1, pp 43-59, 2016.
- [9] S. Thamotharan, « A study on multi-server fuzzy queueing model in triangular and trapezoidal fuzzy numbers using α -cuts », International Journal of Science and Research, Vol. 5, Issue 1, pp. 226-230, 2016
- [10] T.B. Ravaliminoarimalalason, F. Randimbendrainibe, « Distribution of Occupied Resources on A Discrete Resources Sharing in A Queueing System », International Journal of Engineering Research and Technology, Vol. 10, Issue 1, 2021.
- [11] G. J. Klir, B. Yuan, « Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and applications », Prentice Hall: Upper Saddle River, NJ, 1995.

Occupied Resources in A System With Resource Sharing Between Service-based Customers

Toky Basilide Ravaliminoarimalalason

Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie
et de l'Innovation,
University of Antananarivo,
Antananarivo, Madagascar

Falimanana Randimbindrainibe

Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie
et de l'Innovation,
University of Antananarivo
Antananarivo, Madagascar

Abstract— This paper presents analytical and generalized expressions of the amounts of occupied resources in a system providing several services to its customers. This system can be assimilated to a multi-service queue. We considered that the required amount of resources for each service are deterministic, then random variables amount of resources is studied in second part. Analysis carried out on the resource occupations have made possible the dimensioning of the total amount of necessary resources that must be deployed on the queue server. They are to serve the customers up to a certain quality of service in terms of the probability of congestion. Reported to a single-service case, we found from the analytical expressions established in this work the probability of congestion in the Fry-Molina traffic model. The obtained results are compared to digital simulations of case studies similar to a real system.

Keywords— *Queueing; Dimensioning; Multi-service; Resource occupation; Resource sharing*

I. INTRODUCTION

The dimensioning of the amount of resources necessary for a system guaranteeing a certain quality of service began in the era of Erlang [1]. He established a famous Erlang B formula to determine the number required channels for a telephone network [1][2]. This formula only considers a single service (voice service) provided by a system (telephone network) to users who request it. Its formula is derived from the study of a finite capacity M/M/n/n queue. The results of his studies have been developed and extended by many researchers like Palm [3], Vaulot & Chaveau [4], Joys [5], Iversen [6] and many others.

Then Iversen [7] studied the case of a multi-service system by evaluating the congestion rate of such a system with access control. Elastic traffic cases have been developed on multi-service queueing systems by Hanczewski et al. [8][9]. In [8], they proposed a multi-service queue model with SD-FIFO (State Dependent FIFO) discipline. This system allocates its resources to each class of service in a balanced fairness way. They further proposed a generalization of multi-service queues used in elastic traffic [10].

Other studies on a fairness resource sharing have been put forward by Bonald et al. [11] where all the resources are available to all service classes and to all the users who present themselves in front of the server. An extension of Haddad and Mazumdar [12] assesses a certain congestion in such a system.

Hanczewski et al. [13] have proposed another type of discipline called cFIFO (continuous FIFO) for the multi-service queue. They approximated the convolutional model of

a cFIFO multi-service queueing system while allowing variable rate based on the amounts of unused resources in the server.

In all these literatures, whether it is in the sharing of resources available to all the customers present in the system, or either with variable rate, or elastic traffic, the problem arises on the total amount of resources that the multi-service server queue has for its customers. This article proposes a generalization of a multi-service queue, with fixed or random amount of resources required for each service class, in order to determine the capacity required in the server to provide a certain quality of service. Our study is based on the analytical determinations of resource occupations in such a generalized system. It is also an extension of the work done in [14] and [15].

II. MODEL DESCRIPTION

Let be a system sharing its resources through customers requesting services. Each customer can request a service i requiring a fixed resource R_i from the system for a random average duration μ_i . The arrival rate of customers requesting service i from the system is described by a Poisson process of intensity λ_i .

By denoting by N the total number of services that this system can provide to his customers, assuming that the arrivals of customers of each service are independent, we can say that the arrival to this system forms a Poisson process whose intensity λ is expressed by $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_N = \sum_{i=1}^N \lambda_i$. The rate p_i of customers requesting service i is equal to $p_i = \lambda_i / \lambda$ for each i . These two expressions derive from the superposition property of independent Poisson processes [16].

Let S_i be the distribution of the service i duration requested by a customer. It is a strictly positive real random variable with mean μ_i . The duration of service requested by any customer will be denoted by S . From the total probability formula, we can express that the cumulative distribution function $F_S(s)$ of S is equal to $F_S(s) = \sum_{i=1}^N p_i F_{S_i}(s)$, where $F_{S_i}(s)$ is the cumulative distribution function of S_i . We will denote by $F_S^c(s)$ its complementary cumulative distribution function.

The system is then equivalent to a queue, with a single server with a total of R resources. Customers arrive at this queue according to a Poisson process of intensity λ . The

service duration of any customer is a random variable S with an average μ . These customers will use an amount R_i of resources from the queue server depending on the type i of service requested. If customers are being served by the system, using resources r , the sum of all the amounts of resources used by these customers, another arriving customer wanting to use an amount of resources less than or equal to $R - r$ will be served immediately. If the amount of resources requested by the arriving customer is greater than $R - r$, then it will be queued waiting for a served customer to complete and release resources.

If the initial amount R of resources available in the server is infinite, there is a M/GI/ ∞ queue (in terms of customers). Customers who arrive will be immediately served.

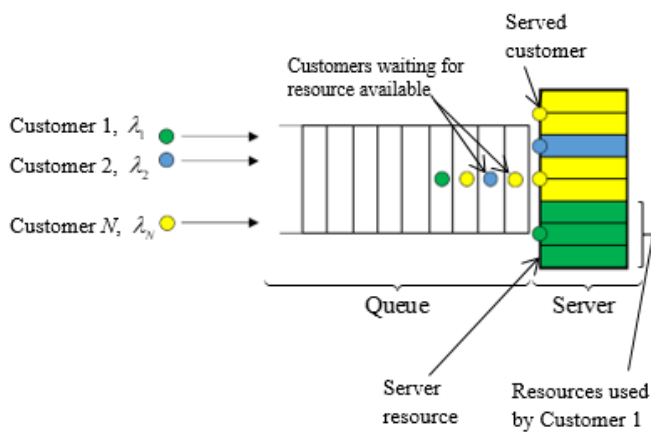


Fig. 1. System description.

III. ANALYTICAL EXPRESSIONS

A. Sharing of infinite resources

We will express the total amount of resources used by the customers described in paragraph 2. Note by π_n the probability that the system serve n customers.

Theorem

π_n follows a Poisson distribution with parameter $\lambda \int_0^{+\infty} F_S^c(s) ds$, i.e. :

$$\pi_n = \frac{\lambda^n}{n!} \cdot \left(\int_0^{+\infty} F_S^c(s) ds \right)^n \cdot \exp\left(-\lambda \int_0^{+\infty} F_S^c(s) ds\right) \quad (1)$$

Proof

Let $N(t)$ be the number of customers being served at instant t , assuming that $N(0) = 0$, and $\pi_n(t) = P(N(t) = n)$ the probability that the system serves n customers at instant t .

On the one hand, we denote by $(A_i)_{i \geq 0}$ the process of customer arrivals to the queue, and $(T_n)_{n \geq 0}$ their arrival times, i.e. the instants of the process. Conditionally on the counting measure $A_t = m$ of the process, the random variables T_1, \dots, T_m are arranged in ascending order, and uniformly over the interval $(0, t)$. On the other hand, the probability that a customer will have a service duration greater than s is $P(S \geq s) = 1 - F_S(s) = F_S^c(s)$. Then, the probability that a

customer arriving uniformly between the interval $(0, t)$ and still being served at time t is equal to $p_t = \frac{1}{t} \int_0^t F_S^c(s) ds$.

Conditionally on $A_t = m$, the number $N(t)$ of customers still served at time t is therefore equal to n with a probability:

$$\binom{m}{n} p_t^n (1 - p_t)^{m-n}$$

This is due to the fact that n customers are still being served (probability p_t) at instant t , and therefore $m - n$ customers have finished their services before instant t (probability $1 - p_t$).

Then, by applying the formula of the total probabilities for all the possible values of m , we obtain:

$$\begin{aligned} \pi_n(t) &= P(N(t) = n) = \sum_{m=n}^{+\infty} P(A_t = m) \cdot P(N(t) = n | A_t = m) \\ &= \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^m}{m!} \cdot e^{-\lambda t} \cdot \binom{m}{n} \cdot p_t^n (1 - p_t)^{m-n} \\ &= \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^m}{m!} \cdot e^{-\lambda t} \cdot \frac{m!}{n!(m-n)!} \cdot p_t^n (1 - p_t)^{m-n} \\ &= \frac{p_t^n}{n!} e^{-\lambda t} \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^m}{(m-n)!} \cdot (1 - p_t)^{m-n} = \frac{p_t^n \cdot (\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^{m-n}}{(m-n)!} \cdot (1 - p_t)^{m-n} \\ &= \frac{(\lambda t p_t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot (1 - p_t)^k = \frac{(\lambda t p_t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t - \lambda t p_t)^k}{k!} \\ &= \frac{(\lambda t p_t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{\lambda t - \lambda t p_t} = \frac{(\lambda t p_t)^n}{n!} e^{-\lambda t p_t} \end{aligned}$$

$$= \frac{\left(\lambda \int_0^t F_S^c(s) ds \right)^n}{n!} \cdot \exp\left(-\lambda \int_0^t F_S^c(s) ds\right)$$

Equilibrium is obtained when t tends towards infinity, i.e.:

$$\begin{aligned} \pi_n &= \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_n(t) \\ &= \frac{\left(\lambda \int_0^{+\infty} F_S^c(s) ds \right)^n}{n!} \cdot \exp\left(-\lambda \int_0^{+\infty} F_S^c(s) ds\right) \end{aligned}$$

□

By replacing by the expressions of λ and F_S within our system providing N services to its customers, we therefore have:

$$\begin{aligned} \pi_n &= \frac{\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \right)^n}{n!} \cdot \left(\int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^N F_{S_i}^c(s) ds \right)^n \\ &\quad \cdot \exp\left(-\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \right) \cdot \int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^N F_{S_i}^c(s) ds\right) \end{aligned} \quad (2)$$

Conditionally on the number k of customers that the server is serving, we will note r_k the amount of resources used by these customers. Let $P(R \leq r)$ be the cumulative distribution

function of the probability that a total amount r of resources of this system is used by the customers it serves. Thus, we have:

$$P(R \leq r) = \sum_{k=0}^{+\infty} \pi_k \cdot P(r_k \leq r) \quad (3)$$

where $P(r_k \leq r)$ denotes the cumulative distribution function of the probability that the amount r of resources occupied by the k customers is r_k .

Now we are assuming that the system serves k customers. The cumulative distribution function of the probability that the total amount of occupied resources is r is $P(r_k \leq r)$.

A customer requesting a service i ($i=1, \dots, N$) uses a resource R_i . There are N -tuples of coefficients (k_1, \dots, k_N) verifying $\sum_{i=1}^N k_i \cdot R_i \leq r$ such that $k_1 + \dots + k_N = k$. k_i indicates the number of customers using the service i among k the customers served by the system.

$$P(r_k \leq r) = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_N \\ k_1 R_1 + \dots + k_N R_N \leq r}} \binom{k}{k_1, \dots, k_N} \cdot p_1^{k_1} \dots p_N^{k_N} \quad (4)$$

where p_i denotes the probability that a randomly chosen customer, from among k served customers, uses the service i , i.e. $p_i = \lambda_i / \lambda$.

$$\text{and } \binom{k}{k_1, \dots, k_N} = \frac{k!}{k_1! k_2! \dots k_N!}$$

The expression of the cumulative distribution function of the occupied resources in the system is therefore given by:

$$P(R \leq r) = \sum_{k=0}^{+\infty} \pi_k \cdot \left(\sum_{\substack{k_1, \dots, k_N \\ k_1 R_1 + \dots + k_N R_N \leq r}} \binom{k}{k_1, \dots, k_N} \cdot p_1^{k_1} \dots p_N^{k_N} \right) \quad (5)$$

where:

$$\pi_n = \frac{\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \right)^n}{n!} \cdot \left(\int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^N F_{S_i}^c(s) ds \right)^n \cdot \exp \left(- \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \right) \cdot \int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^N F_{S_i}^c(s) ds \right)$$

In the following, we will simplify the writing of the equation (5) by:

$$P(R \leq r) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\substack{\bar{k}_i \\ \bar{k}_i \bar{R}_i \leq r}} \left(\pi_k \cdot \left(\frac{k}{\bar{k}_i} \right) \cdot \prod_i p_i^{k_i} \right)$$

By adopting the notations $\bar{k}_i = k_1, \dots, k_N$, $\bar{R}_i = R_1, \dots, R_N$ and $\bar{k}_i \bar{R}_i = k_1 R_1 + \dots + k_N R_N$.

B. Sharing of finite resources

For the case of finite resources, it is obvious to think of a M/GI/C queue where C denotes a certain finite capacity of the system. But the analytical resolution of this queue is still an open problem, and the solutions proposed so far are only approximations [17][18][19]. In addition, in our case, we have a variable capacity depending on the customers served by the system and their requirements in terms of amount of resources, so this will further worsen the complexity of our problem.

In our research, we focus on dimensioning the amount of required resources to satisfy customers in their uses of the services provided by the system.

Being given that the system has a capacity C in terms of total amount of available resources it can allocate to customers. If the requirement of the next customer is greater than the amount of available resources in the system, we can say that there is a blocking phenomenon. Two scenarios can arise: either the customer in question is rejected, or it is put on hold. In both these cases, the capacity in terms of amount of resources is insufficient.

On the one hand, if we are going to deploy a lot of resources. Some of them may not be used. It is therefore a waste of resources. In some cases, the availability of resources is chargeable and it will therefore be a loss in terms of investment. On the other hand, the deployment of few resources can lose some customers as we described in the previous blocking phenomenon. It is therefore necessary to determine the right total amount of resources to put in place. For this, a certain tolerance threshold must be adopted such that the probability of rejection or of placing customers on hold is less than this tolerance.

Let's assume that we have deployed an infinite amount of resources. For this, the probability of using an amount of at most r resources is given by equation (5) recalled below:

$$P(R \leq r) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\substack{\bar{k}_i \\ \bar{k}_i \bar{R}_i \leq r}} \left(\pi_k \cdot \left(\frac{k}{\bar{k}_i} \right) \cdot \prod_i p_i^{k_i} \right)$$

In other words, the probability of using an amount of resources greater than C is given by:

$$B = P(R > C) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\substack{\bar{k}_i \\ \bar{k}_i \bar{R}_i > C}} \left(\pi_k \cdot \left(\frac{k}{\bar{k}_i} \right) \cdot \prod_i p_i^{k_i} \right)$$

We can say that this is the probability of blocking the system of capacity C because since from this amount of resources C , it can no longer serve more customers. It will be called probability of congestion.

For dimensioning with a tolerance ε , the objective is therefore to determine a capacity C such that:

$$B = P(R > C) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\substack{\bar{k}_i \\ \bar{k}_i \bar{R}_i > C}} \left(\pi_k \cdot \left(\frac{k}{\bar{k}_i} \right) \cdot \prod_i p_i^{k_i} \right) \leq \varepsilon \quad (6)$$

C. What happens in case of single service system and unit resource for each customer?

In this part, we will see the case of a system offering a single service in which each served customer uses only a single amount of resource. For the case of exponential service duration with mean $1/\mu$, we will see that from equations (5) and (6), we end up with the BCH (Busy-Calls Held) traffic model of Fry-Molina [20][21][22].

The number of services provided by the system is then $N = 1$. The customer arrival rate follows a Poisson process of intensity $\lambda_1 = \lambda$. Since the service duration is exponential, the cumulative distribution function of the random variable S of service duration is given by $F_S(s) = 1 - \exp(-\mu s)$. The rate of customers requesting service 1 is therefore $p_1 = 1$.

The cumulative distribution function of the total amount of occupied resources, from equation (5), is given by:

$$P(R \leq r) = \sum_{k=0}^{+\infty} \pi_k \cdot \left(\sum_{\substack{k_1, \dots, k_N \\ k_1 R_1 + \dots + k_N R_N \leq r}} \binom{k}{k_1, \dots, k_N} \cdot p_1^{k_1} \dots p_N^{k_N} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \pi_k \cdot \left(\sum_{\substack{k_1 \\ k_1 \leq r}} \binom{k}{k_1} \cdot p_1^{k_1} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \pi_k \cdot 1_{k \leq r}(k) = \sum_{k=0}^r \pi_k$$

where:

$$\pi_k = \frac{\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \right)^k}{k!} \cdot \left(\int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^N F_{S_i}^c(s) ds \right)^k$$

$$\cdot \exp \left(- \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \right) \cdot \int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^N F_{S_i}^c(s) ds \right)$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left(\int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^N F_{S_i}^c(s) ds \right)^k$$

$$\cdot \exp \left(- \lambda \cdot \int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^N F_{S_i}^c(s) ds \right)$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left(\int_0^{+\infty} \exp(-\mu s) ds \right)^k \cdot \exp \left(- \lambda \cdot \int_0^{+\infty} \exp(-\mu s) ds \right)$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left(\frac{1}{\mu} \right)^k \cdot \exp \left(- \frac{\lambda}{\mu} \right)$$

$$= \frac{\rho^k}{k!} \exp(-\rho)$$

By denoting $\lambda / \mu = \rho$.

Then,

$$P(R \leq r) = \sum_{k=0}^r \pi_k = \sum_{k=0}^r \frac{\rho^k}{k!} \exp(-\rho) = \exp(-\rho) \sum_{k=0}^r \frac{\rho^k}{k!}$$

Thus, equation (6) becomes:

$$P(R > C) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\substack{k_i \\ \bar{k}_i R_i > C}} \left(\pi_k \cdot \binom{k}{k_i} \cdot \prod_i p_i^{k_i} \right) \leq \varepsilon$$

$$= \exp(-\rho) \sum_{k=C}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k!} \leq \varepsilon$$

By replacing $\exp(-\rho)$ with $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k!}$, we find the congestion rate $\sum_{k=C}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k!} / \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k!}$ posed by Fry-Molina in their traffic model..

We note that this model, which is an alternative to the Erlang B formula [1] [2], is used in certain dimensioning of telephony in North America. It is observed that this model reflects much more the reality of observed traffics compared to the Erlang model [23] [24].

D. Generalization for random amounts of resources requested by customers

This time, we consider that the amounts of resources requested by service i customers are no longer deterministic as in the previous paragraphs. Let's assume that the service i customers request a random amount of resource following a probability distribution L_i with mean μ_i . We will denote by $G_i(r)$ the cumulative distribution function of the amount of resources requested by a customer using service i .

We still assume an infinite amount of resources available from the system server. According to the methodology that we adopt in paragraph 3.1, to determine the cumulative distribution function $P(R \leq r)$ of the resources occupation of the system, it is necessary to determine a cdf $P(R_k \leq r)$ conditional on k customers served by the system.

We decompose this number k of served customers into the number k_i of customers per service such as $k = k_1 + \dots + k_N$.

We can have $\binom{k}{k_1, \dots, k_N} = \frac{k!}{k_1! \dots k_N!}$ possible combinations of

these customers. For each customer, the probability that he uses an amount of resource less than or equal to x is equal to $G_i(x)$ if he requested service i (or with a probability of p_i in other words).

The probability that all customers then use a total amount of resources less than or equal to x for a given vector (k_1, \dots, k_N) is expressed by:

$$\binom{k}{k_1, \dots, k_N} \sum_{x_1 + \dots + x_{Nk_N} = x} \underbrace{\left(p_1 G_1(x_{11}) \dots p_1 G_1(x_{1k_1}) \right)}_{k_1 \text{ users of service 1}} \dots \underbrace{\left(p_N G_N(x_{N1}) \dots p_N G_N(x_{Nk_N}) \right)}_{k_N \text{ users of service N}} \tag{7}$$

where x_{ij} denotes the amount of resources used by j -th customer of service i .

Equation (7) can be rewritten as a discrete convolution product:

$$\begin{aligned} & \binom{k}{k_1, \dots, k_N} \sum_{x_{11} + \dots + x_{Nk_N} = x} \underbrace{\left(p_1 G_1(x_{11}) \dots p_1 G_1(x_{1k_1}) \right)}_{k_1 \text{ users of service 1}} \\ & \dots \underbrace{\left(p_N G_N(x_{N1}) \dots p_N G_N(x_{Nk_N}) \right)}_{k_N \text{ users of service N}} \\ & = \binom{k}{k_1, \dots, k_N} \underbrace{\left(p_1 G_1(x) \dots p_1 G_1(x) \right)}_{k_1 \text{ consecutive convolution products}}^* \\ & \dots \underbrace{\left(p_N G_N(x) \dots p_N G_N(x) \right)}_{k_N \text{ consecutive convolution products}}^* \\ & = \binom{k}{k_1, \dots, k_N} p_1^{k_1} \dots p_N^{k_N} \cdot G_1^{*k_1}(x) \dots G_N^{*k_N}(x) \end{aligned}$$

where $f(t) * g(t) = \sum_{t_1+t_2=t} f(t_1)g(t_2) = \sum_{s=0}^{+\infty} f(s)g(t-s)$ for two functions $f(t)$ and $g(t)$ with positive variable t , and $f^{*n}(t) = f(t) * \dots * f(t)$ the n successive convolution products of the function $f(t)$ by itself.

Thus, with all the possible values of the vector (k_1, \dots, k_N) and all the values of $x \leq r$, we obtain the cdf $P(R_k \leq r)$ conditionally to k customers served by the system:

$$\begin{aligned} P(R_k \leq r) &= \sum_{k_1 + \dots + k_N = k} \sum_{x \leq r} \binom{k}{k_1, \dots, k_N} p_1^{k_1} \dots p_N^{k_N} \cdot G_1^{*k_1}(x) \dots G_N^{*k_N}(x) \quad (8) \\ &= \sum_{k_1 + \dots + k_N = k} \sum_{x \leq r} \binom{k}{k_1, \dots, k_N} \prod_{i=1}^N p_i^{k_i} \cdot \prod_{i=1}^N G_i^{*k_i}(x) \end{aligned}$$

where $\prod_{i=1}^{*N} f_i(x) = f_1(x) * \dots * f_N(x)$ for a family of functions $\{f_i(x)\}_{i=1, \dots, N}$.

And the cdf of the amount of occupied resources is given by:

$$\begin{aligned} P(R \leq r) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\pi_k \cdot \sum_{k_1 + \dots + k_N = k} \sum_{x \leq r} \binom{k}{k_1, \dots, k_N} \prod_{i=1}^N p_i^{k_i} \cdot \prod_{i=1}^N G_i^{*k_i}(x) \right) \quad (9) \end{aligned}$$

For the case of a finite capacity of resources C , we can deduct from equation (9) the probability of the system being blocked:

$$B = P(R > C)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\pi_k \cdot \sum_{k_1 + \dots + k_N = k} \sum_{x > C} \binom{k}{k_1, \dots, k_N} \prod_{i=1}^N p_i^{k_i} \cdot \prod_{i=1}^N G_i^{*k_i}(x) \right)$$

It is recalled that this probability must be less than a tolerance ε for the determination of the sufficient capacity of the system.

Remark:

When the amount of resources requested by customers, regardless of the service used, is an independent and identically distributed random variable with a cdf $G(r)$, equation (9) can be written as:

$$\begin{aligned} P(R \leq r) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\pi_k \cdot \sum_{k_1 + \dots + k_N = k} \sum_{x \leq r} \binom{k}{k_1, \dots, k_N} G^{*k}(x) \cdot \prod_{i=1}^N p_i^{k_i} \right) \end{aligned}$$

IV. RESULTS AND DISCUSSIONS

Let's take a case study of resources sharing between customers arriving at a system of a capacity C which will be determined. The system can provide one of the $N = 4$ services to each customer. The arrivals of these customers to this system form Poisson processes of respective intensity $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 2.5$, and $\lambda_4 = 5$ arrivals per unit of time for the service $i = 1, 2, 3$, and 4. By the principle of superposition of the Poisson processes, these arrivals form a single process with intensity $\lambda = \sum_{i=1}^4 \lambda_i = 12.5$.

The amounts of resources required for these services are respectively $R_1 = 4$, $R_2 = 3$, $R_3 = 2$, et $R_4 = 1$ resources.

The service durations are assumed to be random following an exponential distribution with respective means $1/\mu_1 = 1/3$, $1/\mu_2 = 1/4$, $1/\mu_3 = 1/5$, and $1/\mu_4 = 1/6$ units of time for the services $i = 1$ to 4.

From equation (5), the cumulative distribution function of the occupied resources in the infinite capacity system is equal to:

$$P(R \leq r) = \sum_{k=0}^{+\infty} \pi_k \cdot \left(\sum_{k_1, \dots, k_4} \binom{k}{k_1, \dots, k_4} p_1^{k_1} \dots p_4^{k_4} \right)_{k_1 R_1 + \dots + k_4 R_4 \leq r}$$

Such that $p_i = \lambda_i / \lambda$ denotes the probability that the customer arriving at the system will use the service i .

And:

$$\begin{aligned} \pi_k &= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left(\int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^4 e^{-\mu_i s} ds \right)^k \cdot \exp \left(-\lambda \cdot \int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^4 e^{-\mu_i s} ds \right) \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left(\sum_{i=1}^4 \frac{1}{\mu_i} \right)^k \cdot \exp \left(-\lambda \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{1}{\mu_i} \right) \end{aligned}$$

Curves in Figures 2a and 2b represent this cumulative distribution function:

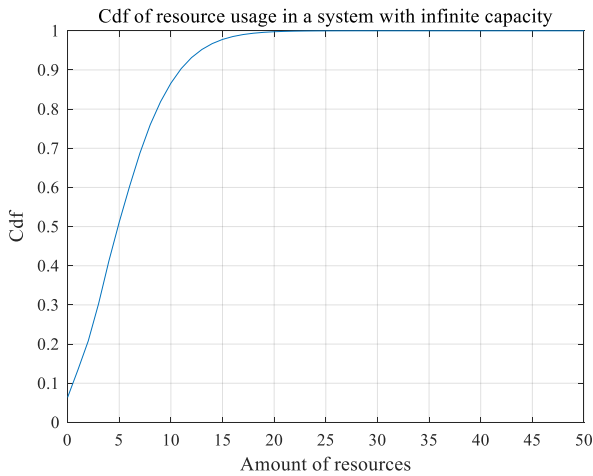


Fig. 2a. Cdf of the amount of occupied resources for an infinite capacity

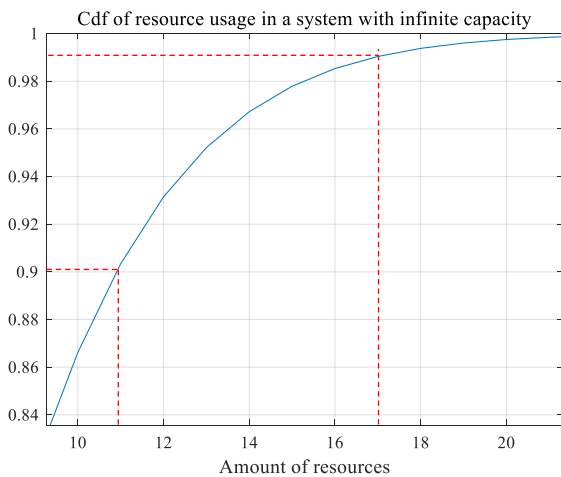


Fig. 2b. Cdf of the amount of occupied resources for an infinite capacity (zoomed in)

It is obvious from Figure 2a that the deployment of more than 20 resources does not influence the system. We deduce that the probability that the amount of occupied resources is greater than or equal to 20 is very small (close to zero). It is therefore not necessary to provide more than 20 resources to the system since not all of them will be used.

From these curves and equation (6), we can conclude a probability of congestion of 10% when the system has 11 resources, and this probability becomes 1% with 17 resources.

We used MATLAB - Simulink to simulate these two values of total amount of resources to verify these congestion probabilities.

Model presented in Figure 3 has been used. The customers (users) are generated from the “User of service *i*” blocks following a respective rate λ_i described above.

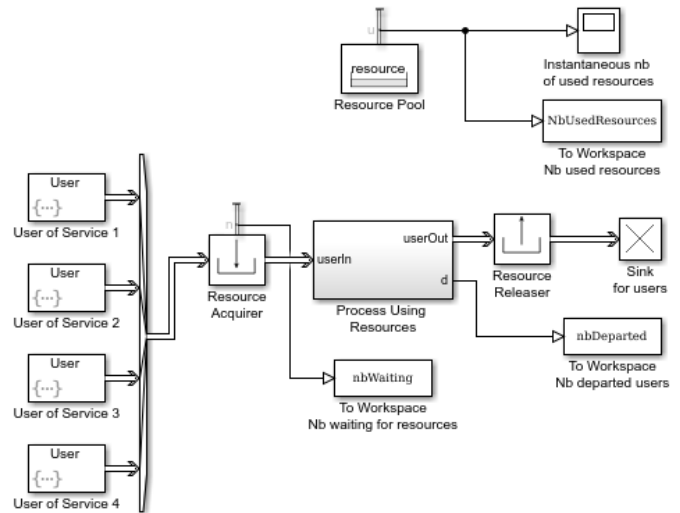


Figure 3. Resource sharing model for a system having four service-classes for its users

The probability of congestion is calculated from the percentage of time during which the amount of occupied resources equals to the capacity of the system. We then use the parameter NbUsedResources in the below algorithm to determine this percentage.

```
count = 0;
capacity = 11;
t = 0:0.01:2000;
nbUsedResourcesResampled =
resample(NbUsedResources,t,'zoh');
usedResRsmpl = nbUsedResourcesResampled.Data;
[timeResRsmpl,y]=size(usedResRsmpl);
for i = 1:timeResRsmpl
    if usedResRsmpl(i,1)>= capacity
        count = count + 1;
    end
end
pCongestion = count/timeResRsmpl;
disp('Capacity = 11');
fprintf('The percentage of time the capacity
is reached : %0.3g \n', pCongestion);
```

We found the following percentages for a capacity of 11 resources, and for a capacity of 17 resources at 5000 simulation time units.

```
>>
Capacity = 11
The percentage of time the capacity is
reached : 0.1073

>>
Capacity = 17
The percentage of time the capacity is
reached : 0.0166
```

These are the probabilities that any user, arriving at a random moment, will find all the resources occupied.

We then found the theoretical results of our model explained by the curves of Figures 2a and 2b which are respectively 10% and 1% for capacities 11 and 17. These results validate the model thus established.

As a concrete example, the model can be used for the dimensioning of codes (resources) of a third generation mobile communication network (3G network) which share these codes through its customers [25] [26]. This type of network provides multiple services, such as:

- AMR voice service: 2 codes needed
- VP service: 8 codes needed
- PS R99 DL service: 8 codes needed
- HSDPA service: 16 codes needed

These results remain valid for the case of non-discrete resources. In this case, the amount of resources initially available in the system is a strictly positive real number. The amounts of resources necessary for each service i can also be strictly positive real numbers (not necessarily a non-zero natural number). The random variable designating the total amount of resources occupied by the customers is then a positive real random variable. And the expressions of equations (5) and (6) are already carried with the cumulative distribution functions which characterize the real random variables.

V. CONCLUSION

A multi-service system shares its resources through its customers according to each customer's requirements for each service requested. They arrive on this system according to Poisson processes characteristic of each service-class. The system is assimilated with a multi-service $M/GI/C$ queue in terms of the number of customers. Two cases of capacities in terms of amount of resources were considered: the infinite case which allowed us to evaluate the distribution of occupancy of the queue resources, and the finite case from which we derived a probability of congestion from the infinite case. The analytical expressions established have made it possible for us to dimension the system by determining the amount of resources necessary for the server with an admissible probability of congestion. From the theoretical result and the case study presented, we found that it is quite possible to determine this necessary amount since from a certain value of the capacity, the characteristic of the system in terms of the number of occupied resources does not show much variation. We have shown that the result of the Fry-Molina model is found from our model and from our result in the single-service case.

REFERENCES

- [1] Brockmeyer, E.; Halstrom, H.; Jensen, A.; Erlang, A.K. "The life and works of A.K. Erlang". Copenhagen Telephone Co, 1948
- [2] Erlang, A.K. "Løsning af nogle Problemer fra Sandsynlighedsregningen af Betydning for de automatiske Telefoncentraler" (Solution of some Problems in the Theory of Probabilities of Significance in Automatic Telephone Exchanges). Elektroteknikeren. 1917, vol 13, pp 5-13.
- [3] Palm, C. "Table of the Erlang Loss Formula". Telefonaktiebolaget LM Ericsson, Stockholm, 1947.
- [4] Joys, L.A. "Comments on the Engset and Erlang Formulae for Telephone Traffic Losses". Thesis. Report TF No. 25./71, Research Establishment, The Norwegian Telecommunications Administration. 1971.
- [5] Iversen, V.B. "The A-formula". Teleteknik, English ed. 1980, vol 23 n°2, pp 64-79.
- [6] Vaultot, E.; Chaveau, J. "Extension de la formule d'Erlang au Cas où le Trafic est Fonction du Nombre d'Abonnés Occupés" (Extension of the Erlang formula to the case where the traffic depends on the number of busy subscribers). Annales de Télécommunications. 1949, vol 4 n°8, pp 319-324.
- [7] Iversen, V.B. "The exact evaluation of multi-service loss system with access control". Teleteknik, English ed. 1987, vol 31 n°2, pp 56-61.
- [8] Hanczewski, S.; Stasiak, M.; Weissenberg, J. "A queueing model of a multi-service system with state-dependent distribution of resources for each class of calls". IEICE Trans. Commun. 2004, vol E97-B n°8, pp 1592-1605.
- [9] Hanczewski, S.; Stasiak, M.; Weissenberg, J. "The queueing model of a multiservice system with dynamic resource sharing for each class of calls". Computer Networks, CN 2013, Communications in Computer and Information Science. 2013, vol 370, pp 436-445
- [10] Hanczewski, S.; Kmiecik, D.; Stasiak, M.; Weissenberg, J. "Multi-service queueing system with elastic traffic". Proc. IEICE Gen. Conf. 2016, BS-3-18
- [11] Bonald, T.; Proutière, A.; Virtamo, J. "A queueing analysis of max-min fairness, proportional fairness and balanced fairness". Queueing Systems. 2006, vol 53 n°1, pp 65-84
- [12] Haddad, J.-P.; Mazumdar, R.R. "Congestion in large balanced multirate networks". Queueing Systems. 2013, vol 74 n°2, pp 333-368
- [13] Hanczewski, S.; Kaliszan, A.; Stasiak, M. "Convolution Model of a Queueing System with the cFIFO Service Discipline". Hindawi Publishing Corporation, Mobile Information Systems. 2016, vol 2016, Article ID 2185714, pp 1-15
- [14] Ravaliminoarimalalason, T. B.; Randimbindrainibe, F. "Distribution of Occupied Resources on A Discrete Resources Sharing in A Queueing System". International Journal of Engineering Research and Technology. 2021, vol 10 n°1, pp 638-643
- [15] Ravaliminoarimalalason, T. B.; Randimbindrainibe, F.; Rakotomalala M., "Distribution of occupied resources on a fractional resource sharing in a queueing system". Int. J. of Operational Research. 2021. DOI 10.1504/IJOR.2021.10039107
- [16] Crane, H.; McCullagh, P. "Poisson superposition processes". Journal of Applied Probability. 2015, vol 52 n°4, pp 1013-1027
- [17] Hokstad, Per. "Approximations for the M/G/m Queue". Operations Research. 1978, vol 26 n°3, pp 510-523
- [18] Tijms, H. C.; Van Hoorn, M. H.; Federgruen, A. "Approximations for the Steady-State Probabilities in the M/G/c Queue". Advances in Applied Probability. 1981, vol 13 n°1, pp 186-206
- [19] Ma, B. N. W.; Mark, J. W. "Approximation of the Mean Queue Length of an M/G/c Queueing System". Operations Research. 1995, vol 43 n°1, pp 158-165.
- [20] Molina, E.C. "The Theory of Probability Applied to Telephone Trunking Problems". The Bell System Technical Journal. 1922, vol 1 n°2, pp 69-81
- [21] Fry, T.C. "Probability and its Engineering Uses". New York, 1928
- [22] Molina, E.C. "Application of the Theory of Probability to Telephone Trunking Problems". The Bell System Technical Journal. 1927, vol 6 n°3, pp 461-494
- [23] Iversen, V.B. "Teletraffic engineering handbook", ITU-D SG 2/16 & ITC, 2001
- [24] Iversen, V.B. "Teletraffic engineering and network planning", DTU Library, 2015
- [25] Kasapović, S.; Sarajlić, N. "OVSF code assignment in UMTS networks". 20th International Crimean Conference Microwave & Telecommunication Technology. 2010, pp 429-432
- [26] Bernhard, H.W.; Seidenberg, P.; Althoff, M.P. "UMTS : The Fundamentals". John Wiley & Sons, 2003

Ultrametric hierarchical resource utilization model using p -adic numbers

T.B. Ravaliminoarimalalason¹, F. Randimbindrainibe²

¹ EAD Cognitive Science and Application, Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation, University of Antananarivo, Madagascar

² EAD Cognitive Science and Application, Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation, University of Antananarivo, Madagascar

ABSTRACT

We present a new model of resource utilization which we call the ultrametric model. It is based on a modeling of hierarchical resource utilization by p -adic numbers. This model can be used on a system with several resources which can be classified in order of importance. The state of such a system is a p -adic number. We define an elementary resource utilization as this state of the system, and a representation of the uses in the form of balls in the set of p -adic numbers has been advanced. From these models, and using state transitions at each change in resource utilization whether it is the arrival of a new customer, or a departure, we can demonstrate that the probability of resource utilization is governed by a Cauchy problem: a fractional differential equation, and more particularly, with the Vladimirov operator.

Keyword: - hierarchical, p -adic, resource, utilization, ultrametric

1. INTRODUCTION

Theories on p -adic dynamical systems have been intensely advanced [1]. Flow dynamics, like algebraic geometry, have been proposed by Herman and Yoccoz [2] in the small divisor problem in non-Archimedean fields. It seems to be the first publication talking about dynamics in a non-Archimedean domain. Future developments were observed according to Silverman [3]. Several fields of applications of p -adic numbers in various fields have been explored by Khrennikov et al.: differential analysis [4], quantum mechanics [5], biology [6]–[8], cognitive sciences [9][10], imagery [11], system dynamics [12], psychology and finance [13], sociology and medicine [14] and many other fields [15], ...

For our case, we will propose an analysis of a dynamical system in a non-Archimedean domain. A system of hierarchical resources whose state changes over time according to the utilization of these resources. We have shown that the occupations of these resources are governed by the ultrametric diffusion equation whose resolution uses a Cauchy problem with Vladimirov's fractional derivative operator.

2. ULTRAMETRIC MODEL OF HIERARCHICAL MODEL

2.1 p -adic valuation

Let p be a prime number. For any rational number $r = p^k \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, where m and n are coprime with p , we denote $v_p(r) = k$ or else for $r \neq 0$, and by convention $v_p(0) = +\infty$. We define the p -adic absolute value in \mathbb{Q} as the map from \mathbb{Q} to $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, denoted $|\cdot|_p$ by :

$$|r|_p = p^{-v_p(r)} \quad (1)$$

The map v_p from \mathbb{Q} to \mathbb{Z} is called p -adic valuation.

Note some properties of this p -adic absolute value in Proposition 1.

Proposition 1.

- For any rational number r_1 and $r_2 : |r_1 \cdot r_2|_p = |r_1|_p \cdot |r_2|_p$
- For any rational number r_1 and $r_2 : |r_1 + r_2|_p \leq \max \{ |r_1|_p, |r_2|_p \}$

Proof:

The rational numbers r_1 and r_2 can be written respectively like $r_1 = p^{k_1} \frac{m_1}{n_1}$ and $r_2 = p^{k_2} \frac{m_2}{n_2}$ where m_1, m_2, n_1 and n_2 are coprime with p . So we have $|r_1|_p = p^{-k_1}$ and $|r_2|_p = p^{-k_2}$. As for the product $r_1 \cdot r_2$ we have $r_1 \cdot r_2 = p^{k_1+k_2} \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}$. Knowing that $m_1 m_2$ and $n_1 n_2$ are coprime with p , we can say that the p -adic absolute value of the product $r_1 \cdot r_2$ is equal to $|r_1 \cdot r_2|_p = p^{-k_1-k_2} = |r_1|_p \cdot |r_2|_p$.

For the sum, we have:

$$r_1 + r_2 = p^{k_1} \frac{m_1}{n_1} + p^{k_2} \frac{m_2}{n_2} = \frac{p^{k_1} m_1 n_2 + p^{k_2} m_2 n_1}{n_1 n_2} = \begin{cases} p^{k_1} \cdot \frac{m_1 n_2 + p^{k_2-k_1} m_2 n_1}{n_1 n_2} & \text{si } k_1 \leq k_2 \\ p^{k_2} \cdot \frac{p^{k_1-k_2} m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2} & \text{si } k_1 > k_2 \end{cases}$$

$$= p^{\min(k_1, k_2)} \cdot \frac{u}{v}$$

where we can prove that v and p are also coprime.

For the case of u , if it is prime with p , we have $|r_1 + r_2|_p = p^{-\min(k_1, k_2)}$, therefore :

$$|r_1 + r_2|_p = p^{-\min(k_1, k_2)} = \max(p^{-k_1}, p^{-k_2}) = \max(|r_1|_p, |r_2|_p).$$

If it is not prime with p , we can find a nonzero natural integer k such that $u = p^k u'$ and u' are prime with p . The p -adic absolute value of the sum is therefore :

$$|r_1 + r_2|_p = p^{-(k + \min(k_1, k_2))} = \max(p^{-k-k_1}, p^{-k-k_2}) < \max(p^{-k_1}, p^{-k_2}) = \max(|r_1|_p, |r_2|_p).$$

So, $|r_1 + r_2|_p \leq \max \{ |r_1|_p, |r_2|_p \}$.

■

Like $v_p(0) = +\infty$, $|r|_p = 0$ if and only if $r = 0$. And these three properties show that $|\cdot|_p$ defines a norm on the set of rational numbers \mathbb{Q} . The second property is called the strong triangle inequality.

A norm verifying the strong inequality is called a non-Archimedean norm or an ultrametric norm. A norm satisfying the usual triangle inequality is called the Archimedean norm.

2.2 Hierarchical resource system

We will consider a system composed of $m+1$ of T_i ($i=0, \dots, m$) types of resources. In the following, we can say resource of type T_i or simply resource T_i . Each resource T_i is assumed to be discrete with a maximum quantity equal to $p-1$, i.e. the number of resources T_i used only takes values integers between 0 and $p-1$. If we denote by r_i the quantity of resources T_i used, we have $r_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ for all $i \in \{0, \dots, m\}$. In a real system, it may be that

the maximum quantity $p-1$ of resources does not necessarily give a prime number p . We can use the first prime number that follows this maximum quantity.

This system is assimilated to a system of hierarchical resources. Resource T_0 is the most important, resource T_i is more important than resource T_{i+1} , and so on. This hierarchy is observed in most real cases. For example, the central processor resource is considered more important, and so on.

We call state of the system the quantities of resources used defined by the vector $r = (r_0, \dots, r_m)$. We recall that $r_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ and for a purely mathematical reason, we will fix $p > 1$ and prime number. We can extend the state r of the system to a vector $r = (r_{-n}, \dots, r_{-1}, r_0, r_1, \dots, r_m)$ for types T_i of resources indexed by negative and positive integers $i = -n, \dots, 0, \dots, m$. It is also necessary not to fix the numbers of coordinates n and m used to make possible the future addition of type of resources.

Such a vector space can be represented by a rational number of the form:

$$r = r_{-n}p^{-n} + \dots + r_{-1}p^{-1} + r_0 + r_1p + \dots + r_m p^m, \quad r_j \in \{0, 1, \dots, p-1\} \quad (2)$$

To use an ultrametric model, we will construct a complete metric space. The approach is to consider a vector of infinite coordinates of the form:

$$r = \dots + r_{-n}p^{-n} + \dots + r_{-1}p^{-1} + r_0 + r_1p + \dots + r_m p^m + \dots, \quad r_j \in \{0, 1, \dots, p-1\} \quad (3)$$

such that there exist integers n and m such that $r_j = 0$ for all $j > n$ and $r_j = 0$ for all $j > m$. The space of these infinities of coordinates will be denoted Q_p in which we will define a metric as follows. Given two states $x = (x_j)$ and $y = (y_j)$, the distance between the two states x and y noted $d_p(x, y) = |x - y|_p$ is equal to:

$$d_p(x, y) = |x - y|_p = p^{-\nu} \quad (4)$$

such that ν is the natural integer defined by: $x_j = y_j$ for all $j < \nu$ and $x_\nu \neq y_\nu$.

Proposition 3.

The distance d_p between the two states x and y defined in equation (4) is ultrametric.

Proof:

For any three states r_1, r_2 and r_3 , this distance d_p verifies the following properties:

- $d_p(r_1, r_2) = 0$ if and only if $r_1 = r_2$
- $d_p(r_1, r_2) = d_p(r_2, r_1)$
- $d_p(r_1, r_3) \leq \max\{d_p(r_1, r_2), d_p(r_2, r_3)\}$

The first two properties follow from the definition of the p -adic distance from the p -adic absolute value.

For the third property, called strong triangle inequality, we use the second property of Proposition 1:

$$\begin{aligned} d_p(r_1, r_3) &= |r_1 - r_3|_p = |(r_1 - r_2) + (r_2 - r_3)|_p \leq \max\{|r_1 - r_2|_p, |r_2 - r_3|_p\} \\ &\leq \max\{d_p(r_1, r_2), d_p(r_2, r_3)\} \end{aligned}$$

■

2.3. Ultrametric resource model

Starting from the representation of the state by a rational number, we are interested in its representation in the completeness Q_p of the set of rational numbers equipped with the ultrametric distance d_p .

Each ball can be identified as a ball of radius $R = p^\nu$, $\nu \in \mathbf{Z}$. The ball $B_1(0)$ with center 0 and radius 1 will be denoted Z_p . In this ultrametric space, any ball can be represented as a disjoint union of small balls. For example:

$Z_p = B_1(0) = \bigcup_{j=0}^{p-1} B_{1/p}(a^j) = \bigcup_{j_0 \dots j_{\nu-1}=0}^{p-1} B_{1/p^\nu}(a^{j_0 \dots j_{\nu-1}})$ where $a^j, a^{j_0 \dots j_{\nu-1}} \in Z_p$ such that $x_0 = j$ for a^j and $x_0 = j_0, \dots, x_{\nu-1} = j_{\nu-1}$ for $a^{j_0 \dots j_{\nu-1}}$. It is the famous property that, in an ultrametric space, any point of a ball can be considered as its center.

2.4 Resource utilization

2.4.1 Mathematical formulation

In our model, a p -adic ball represents a set of resource usage states of a system by fixing the usage of some resource.

For example:

- The resource utilization $R_j = B_{1/p}(a^j)$, which is the ball with center a^j and radius $1/p$, $R_j = B_{1/p}(a^j) = \{x \in Z_p : x_0 = j\}$, is equal to the uses of all the resources while fixing j the utilization of the resource T_0 .
- Resource usage $R_{ji} = B_{1/p}(a^{ji})$, which is the ball with center a^{ji} and radius $1/p$, $R_{ji} = B_{1/p}(a^{ji}) = \{x \in Z_p : x_0 = j, x_1 = i\}$, is equal to the usages of all resources while setting j the usage of resource T_0 and i the usage of resource T_1 .

A resource utilization, which is a state of the system, is a point in space Q_p . It is a ball of radius zero. The partition of a ball into disjoint balls of smaller radii corresponds to a partition of a resource use into disjoint sub-uses at a deeper level in the resource hierarchy.

An elementary use is a point of Q_p . But for more practical cases, balls of finite radius are used.

The examples below define balls of finite radius:

- The utilization of resource T_0 is greater than 90%.
- The utilization of resource T_0 is greater than 90% and that of resource T_1 is greater than 60%.
- Thresholds are useful for dimensioning the quantities of resources necessary for a system, and for decisions on the expansion of such resources: Probability of using resource T_0 is greater than p_0 , that of T_1 is greater than p_1 , and so on.

2.4.2 Probability of resource utilization governed by a diffusion equation

Now, let $q(x,t)$ be the probability that the system is in state x at any time t , and $q(B_\nu, t)$ the probability that the state of the system at time t belongs to a ball $B_\nu = B_{p^\nu}(0)$ with center 0 and radius p^ν , $\nu \in \mathbf{Z}$. This probability can be represented by an integral as a function of a measure μ defined on the space Q_p :

$$q(B_\nu, t) = \int_{B_\nu} q(x, t) \mu(dx) \tag{5}$$

Proposition 4.

The probability of using resources $q(x,t)$ can be expressed by:

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} = \int_{Q_p} [p(x|y;t)q(y,t) - p(y|x;t)q(x,t)]\mu(dy) \tag{6}$$

Proof:

To better understand the proof, let us first take the case of any state e_i belonging to a set of real numbers. The probability of being in this state e_i at time $t + \varepsilon$, denoted $q(e_i, t + \varepsilon)$, is equal to:

$$q(e_i, t + \varepsilon) = q(e_i, t) + \sum_{j \neq i} (p(e_i | e_j, t)q(e_j, t) - p(e_j | e_i, t)q(e_i, t))\varepsilon$$

The quantity $q(e_i, t)$ indicates the probability that the system was already in state e_i at time t . Another possibility added to this is that the system was in state e_j at time t and becomes in state e_i at time $t + \varepsilon$. The probability $p(e_i | e_j, t)$ defines this transition from state e_j to state e_i . This is why we have the term $p(e_i | e_j, t)q(e_j, t)$ with the duration ε for all the values $j \neq i$. A last possibility that we must subtract from the existence of the state e_i at the instant t is that the system has become at another state at time $t + \varepsilon$. This is why we have the term $p(e_j | e_i, t)q(e_i, t)$ with the duration ε for all values $j \neq i$.

And we have the differential notation for ε tending to 0:

$$\frac{q(e_i, t + \varepsilon) - q(e_i, t)}{\varepsilon} = \sum_{j \neq i} (p(e_i | e_j; t)q(e_j, t) - p(e_j | e_i; t)q(e_i, t))$$

$$\frac{dq(e_i, t)}{dt} = \sum_{j \neq i} (p(e_i | e_j; t)q(e_j, t) - p(e_j | e_i; t)q(e_i, t))$$

Now, in the space Q_p , we can proceed to the same step of the demonstration. We have by analogy:

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} = \int_{Q_p} [p(x|y;t)q(y,t) - p(y|x;t)q(x,t)]\mu(dy)$$

■

In the case where the transitions are homogeneous in time, that is to say that $p(e_i | e_j; t)$ are independent of time, $p(e_i | e_j; t) = p(e_i | e_j)$, we have:

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} = \int_{Q_p} [p(x|y)q(y,t) - p(y|x)q(x,t)]\mu(dy) \tag{7}$$

In the case where the transition is symmetric, i.e. $p(x|y) = p(y|x)$, we have:

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} = \int_{Q_p} p(x|y)[q(y,t) - q(x,t)]\mu(dy) \tag{8}$$

when the distance between them increases, and vice versa. We can then set $p(x|y)$ as defined in equation (9) for any number:

$$p(x|y) = \frac{C_\alpha}{|x - y|^{1+\alpha}} \tag{9}$$

where C_α is a normalizing constant. The choice of α depends on the characterization of the transition according to user behaviors: arrival processes, and service demand laws.

Proposition 5.

The probability of using resources $q(x,t)$ is governed by the differential equation (10):

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} = D^\alpha q(x,t), \quad \text{with } q(x,0) = q_0(x) \tag{10}$$

where D^α is the Vladimirov operator for a function of complex-valued p -adic variable:

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)} \int_{\mathbb{Q}_p} \frac{f(x) - f(y)}{|x - y|_p^{1+\alpha}} \mu(dy) \tag{11}$$

And $\Gamma_p(-\alpha) = \frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-1-\alpha}}$

Proof:

Starting from equation (8) and using the transition probability that we posed in (9), we obtain:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q(x,t)}{\partial t} &= \int_{\mathbb{Q}_p} \frac{C_\alpha}{|x - y|_p^{1+\alpha}} [q(y,t) - q(x,t)] \mu(dy) \\ &= C_\alpha \int_{\mathbb{Q}_p} \frac{q(y,t) - q(x,t)}{|x - y|_p^{1+\alpha}} \mu(dy) \end{aligned}$$

The integral on the right side of this equality is called Vladimirov's fractional derivative operator D^α . As well as the evolution of the probability of using resources is described by:

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} = D^\alpha q(x,t)$$

■

This equation (10) which defines the resource utilization is called the p -adic diffusion equation. The resolution of such an equation uses a Cauchy problem like the one we solved in [16], or as other authors have developed in [17][18].

3. APPLICATIONS

We will take an example of the application of this new model.

3.1 System definition

Consider a system composed of 3 types of resources: T1, T2, T3. T1 has 3 resources, T2 and T3 has 2 resources each. The resource T1 is the most important of the considered system, then T2 and finally T3.

The resources utilization on this system can be represented by the set \mathbb{Q}_5 , set of 5-adic numbers (p -adic whose $p = 5$), since 5 is the most prime number greater than the maximum quantity of its resources.

3.2 System Resource Usage Status

The state of the system is represented by a 5-adic number.

Example:

- The utilization of 1 T1 resource, 1 T2 resource, and 1 T3 resource is represented by $r = 1 + 1p + 1p^2 = 1 + 1 \times 5 + 1 \times 5^2 = 31$. Here, 31 represents a 5-adic number and we will denote it $(31)_5$.
- The utilization of 2 T1 resources, 1 T2 resource, and 0 T3 resource is represented by $r = 2 + 1p + 0p^2 = 2 + 1 \times 5 + 0 \times 5^2 = (7)_5$.
- And so on.

Table-1 represents the possible states of this system.

Table-1: Ultrametric model system states

T1	T2	T3	<i>r</i> (expression of Hensel)	State of the system
0	0	0	$0+0p+0p^2$	$(0)_5$
0	0	1	$0+0p+1p^2$	$(25)_5$
0	0	2	$0+0p+2p^2$	$(50)_5$
0	1	0	$0+1p+0p^2$	$(5)_5$
0	1	1	$0+1p+1p^2$	$(30)_5$
0	1	2	$0+1p+2p^2$	$(55)_5$
0	2	0	$0+2p+0p^2$	$(10)_5$
0	2	1	$0+2p+1p^2$	$(35)_5$
0	2	2	$0+2p+2p^2$	$(60)_5$
1	0	0	$1+0p+0p^2$	$(1)_5$
1	0	1	$1+0p+1p^2$	$(26)_5$
1	0	2	$1+0p+2p^2$	$(51)_5$
1	1	0	$1+1p+0p^2$	$(6)_5$
1	1	1	$1+1p+1p^2$	$(31)_5$
1	1	2	$1+1p+2p^2$	$(56)_5$
1	2	0	$1+2p+0p^2$	$(11)_5$
1	2	1	$1+2p+1p^2$	$(36)_5$
1	2	2	$1+2p+2p^2$	$(61)_5$
2	0	0	$2+0p+0p^2$	$(2)_5$
2	0	1	$2+0p+1p^2$	$(27)_5$
2	0	2	$2+0p+2p^2$	$(52)_5$
2	1	0	$2+1p+0p^2$	$(7)_5$
2	1	1	$2+1p+1p^2$	$(32)_5$
2	1	2	$2+1p+2p^2$	$(57)_5$
2	2	0	$2+2p+0p^2$	$(12)_5$
2	2	1	$2+2p+1p^2$	$(37)_5$
2	2	2	$2+2p+2p^2$	$(62)_5$
3	0	0	$3+0p+0p^2$	$(3)_5$
3	0	1	$3+0p+1p^2$	$(28)_5$
3	0	2	$3+0p+2p^2$	$(53)_5$
3	1	0	$3+1p+0p^2$	$(8)_5$
3	1	1	$3+1p+1p^2$	$(33)_5$

T1	T2	T3	r (expression of Hensel)	State of the system
3	1	2	$3+1p+2p^2$	$(58)_5$
3	2	0	$3+2p+0p^2$	$(13)_5$
3	2	1	$3+2p+1p^2$	$(38)_5$
3	2	2	$3+2p+2p^2$	$(63)_5$

The system therefore has 36 different states.

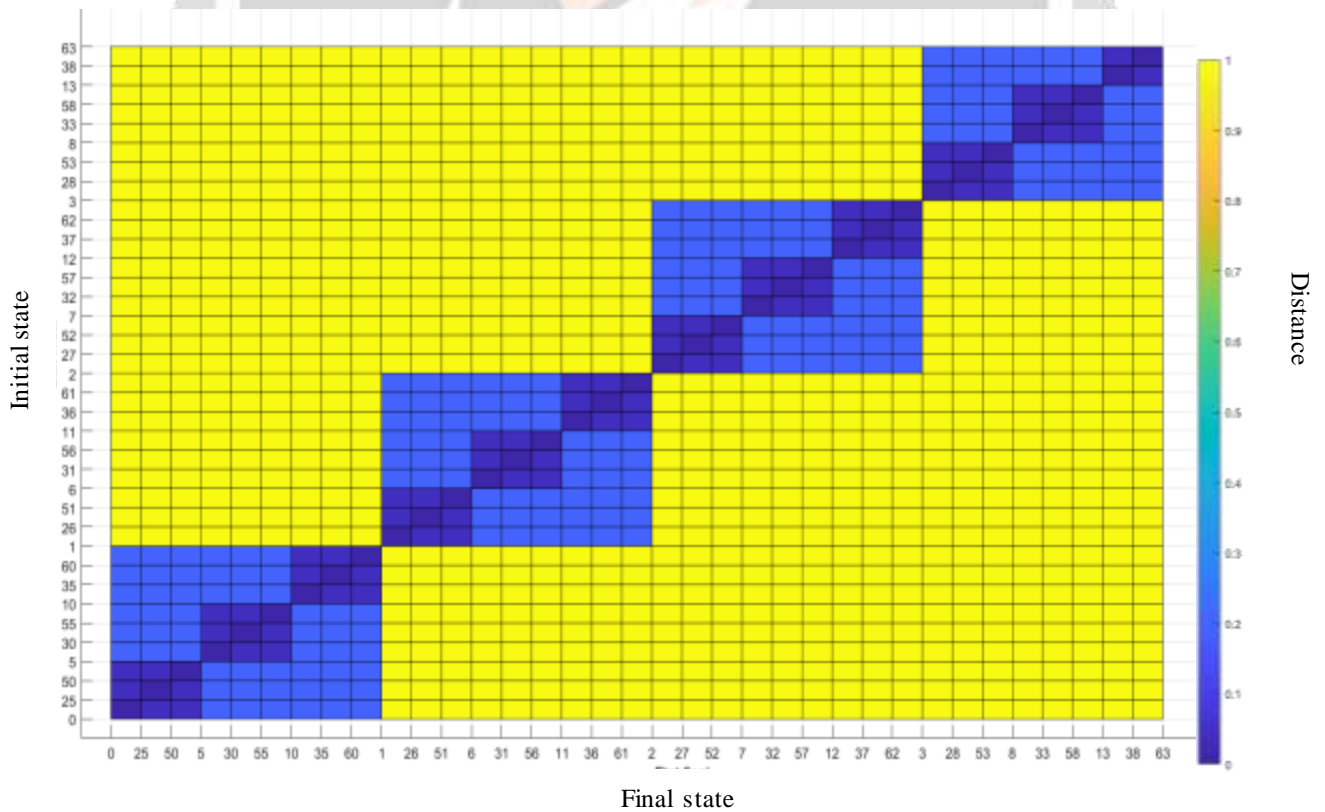
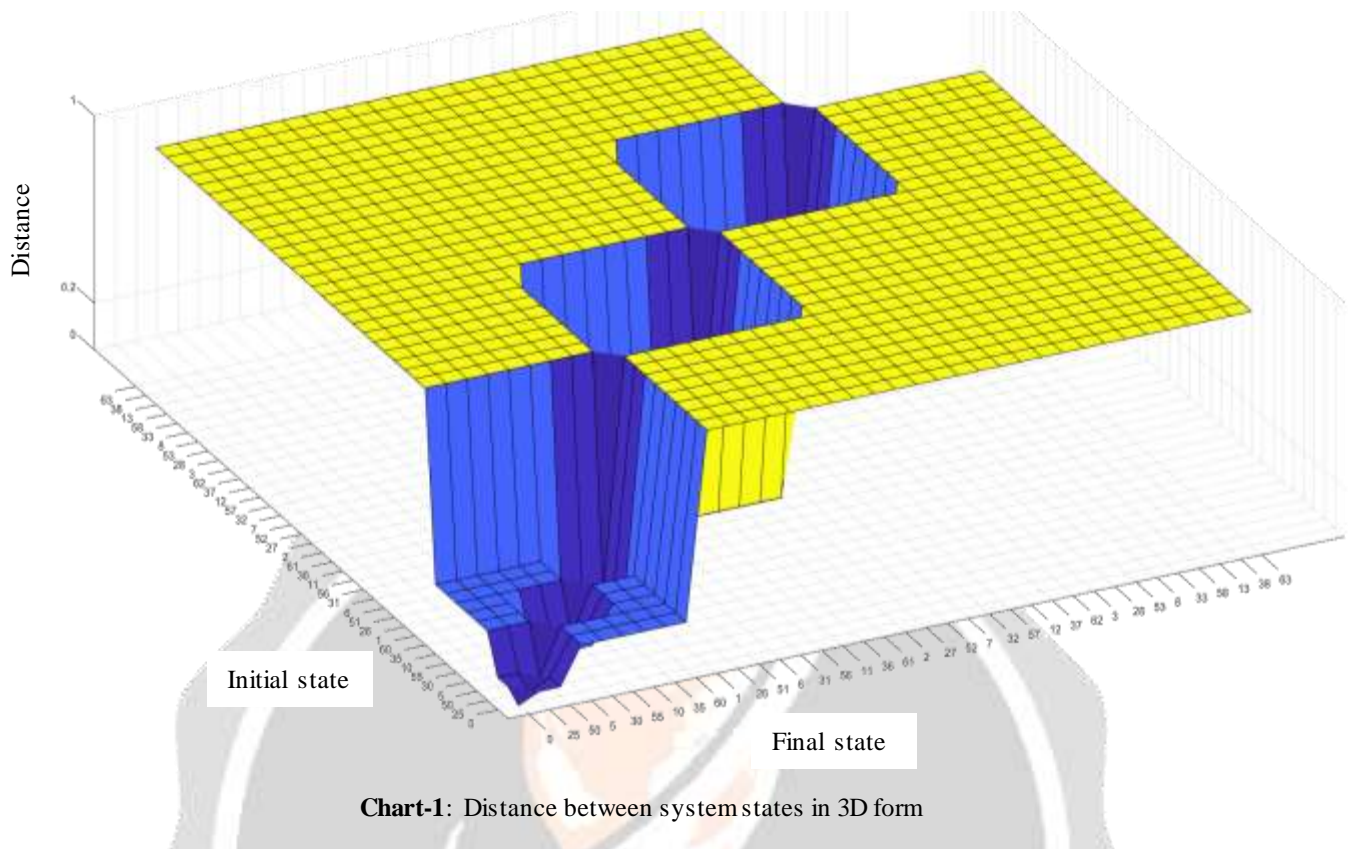
3.3 Analyzes of distances between resource utilization states

To calculate the distance between these states, we will take some examples:

- State 1: 2 T1 resources, 1 T2 resource and 0 T3 resource (equivalent to $r_1 = (7)_5$)
 State 2: 1 T1 resource, 0 T2 resource and 0 T3 resource (equivalent to $r_2 = (1)_5$)
 The distance between these two states is equal to $d = |r_1 - r_2|_5 = |7 - 1|_5 = |6|_5 = |2^1 3^1 5^0|_5 = 5^{-0} = 1$
- State 1: 3 T1 resources, 2 T2 resources and 0 T3 resources (equivalent to $r_1 = (13)_5$)
 State 2: 3 T1 resources, 1 T2 resource and 0 T3 resources (equivalent to $r_2 = (8)_5$)
 The distance between these two states is equal to $d = |r_1 - r_2|_5 = |13 - 8|_5 = |5|_5 = |5^1|_5 = 5^{-1} = 0,2$
- ...

The calculations allow us to obtain that these distances can only take one of the following 4 values: $5^{-\infty}$, 5^0 , 5^{-1} , 5^{-2} , that is 0, 1, 0.2 and 0.04.

Chart-1 and Chart-2 represent the distances between two states of the system. They are called initial state and final state.



It can be seen that the more the change affects the number of lower priority resources (T3 in this example), the distance between the two states is small. This is explained by the blue shift in Chart-1 and Chart-2. And the more the change is on the number of higher priority resources (T1 in this example), the distance between the two states is great. This is explained by the yellow color in Chart-1 and Chart-2.

Example: We will start from state $(7)_5$ which is equal to $T1 = 2, T2 = 1$ and $T3 = 0$ resources used.

- For a final state equal to $(32)_5$: $T1 = 2, T2 = 1$ and $T3 = 1$ resources used. The change concerns the resources of T3. The distance between these states is 0.04 (blue in Chart-1 and Chart-2).
- For a final state equal to $(57)_5$: $T1 = 2, T2 = 1$ and $T3 = 2$ resources used. The change concerns the resources of T3. The distance between these states is still 0.04 (blue in Chart-1 and Chart-2).
- For a final state equal to $(12)_5$: $T1 = 2, T2 = 2$ and $T3 = 0$ resources used. The change concerns the resources of T2 which have a higher priority than those of T3. The distance between these states is 0.2.
- For a final state equal to $(6)_5$: $T1 = 1, T2 = 1$ and $T3 = 0$ resources used. The change concerns the resources of T1 which have a higher priority than those of T2 and T3. The distance between these states is 1 (yellow in Chart-1 and Chart-2).

Hence the importance of using our model in the case of hierarchical resources.

3.4 The probability law of the quantities of resources used

From these distances, we find that 35 pairs of states have a distance of 0, then 918 pairs of states with a distance of 1, then 204 pairs of a distance of 0.2 and 68 pairs of a distance of 0.04.

If we take the state transition probability equal to $p(x, y) = \frac{C}{|x - y|_5}$, we have the normalization constant

$$1 = 918 \times \frac{C}{1} + 204 \times \frac{C}{0,2} + 68 \times \frac{C}{0,04}. \text{ We will find } C = \frac{1}{3638}.$$

The probability of transition from a state x to a state y is therefore equal to $p(x, y) = \frac{1}{3638|x - y|_5}$ where

$|x - y|_5$ designates the ultrametric distance between these two states which are 0 if $x = y$, 1 if $x - y$ is not a multiple of 5, 0.2 if $x - y$ is a multiple of 5, and 0.04 if $x - y$ is a multiple of 25.

According to equation (10), the probability of using resources is governed by the equation

$$\frac{\partial q(x, t)}{\partial t} = D^0 q(x, t), \text{ with } q(x, 0) = q_0(x).$$

$$\text{Where } D^0 q(x, t) = \left(1 - \frac{1}{5}\right) \int_{Q_B} \frac{q(x, t) - q(y, t)}{|x - y|_5} \mu(dy).$$

The advantage highlighted in this model is the combined study of the uses of the 3 types of resources. The separate study can lead to errors by not considering other resources.

4. CONCLUSION

p -adic numbers can be used to model hierarchical resource utilization. The importance of this type of modeling has been highlighted. We proved that the probability of resource utilization is governed by a Cauchy problem: a fractional differential equation, and particularly, with the Vladimirov operator. There are still many aspects to study: the existence of a stationary solution, in order to determine the asymptotic behavior of our model.

5. REFERENCES

- [1]. A. Khrennikov, M. Nilsson, «*p*-Adic Deterministic and Random Dynamical Systems,» Dordrecht: Kluwer, 2004.
- [2]. M. R. Herman et J. C. Yoccoz, «Generalization of some theorem of small divisors to non-archimedean fields,» Geometric Dynamics, Lecture Notes Math. vol. 1007, New York – Berlin – Heidelberg, Springer-Verlag, 1983, p. 408–447.
- [3]. J. Silverman, «The Arithmetic of Dynamical Systems,» Graduate Texts in Mathematics, Vol. 241, Springer-Verlag, New York, 2007.
- [4]. K. Anatoly, «Fractional differentiation in *p*-adic analysis,» Volume 1 basic Theory, Berlin - Boston, De Gruyter, 2019, pp. 461-472.
- [5]. A. Khrennikov, «*p*-Adic quantum mechanics with *p*-adic valued functions,» Journal of Mathematical Physics, vol. 32, p. 932–937, 1991.
- [6]. A. Khrennikov, «Non-Archimedean Analysis: Quantum Paradoxes, Dynamical Systems and Biological Models,» Dordrecht: Kluwer, 1997.
- [7]. A. Khrennikov, «Human subconscious as the *p*-adic dynamical system,» Journal of Theoretical Biology, vol. 193, p. 179–196, 1998.
- [8]. A. Khrennikov, S. V. Kozyrev, «Genetic code on the dyadic plane,» Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, vol. 381, p. 265–272, 2007.
- [9]. S. Albeverio, A. Khrennikov, P. Kloeden, «Memory retrieval as a *p*-adic dynamical system,» Biosystems, vol. 49, p. 105–115, 1999.
- [10]. A. Khrennikov, «*p*-Adic discrete dynamical systems and collective behaviour of information states in cognitive models,» Discrete Dynamics in Nature and Society, vol. 5, p. 59–69, 2000.
- [11]. J. Benois-Pineau, A. Khrennikov, N. V. Kotovich, «Segmentation of images in *p*-adic and Euclidean metrics,» Doklady Mathematics, vol. 64, n°3, p. 450–455, 2001.
- [12]. V. Anashin et A. Khrennikov, «Applied Algebraic Dynamics,» Gruyter Expositions in Mathematics, Berlin, Walter De Gruyter Inc, 2009.
- [13]. A. Khrennikov, «Ubiquitous Quantum Structure: From Psychology to Finances,» Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 2010.
- [14]. A. Khrennikov, «Ultrametric diffusion equation on energy landscape to model disease spread in hierarchic socially clustered population,» Physica A, vol. 583, pp. 1-14, 2021.
- [15]. A. Khrennikov, «Information Dynamics in Cognitive, Psychological, Social, and Anomalous Phenomena,» Dordrecht: Kluwer, 2004.
- [16]. G. Rasolomampiany, T. B. Ravaliminoarimalalason, F. Rasoanoavy, F. Randimbindrainibe, «Analytical resolution of the Cauchy problem of a diffusion equation with a fractional time derivative,» International Journal of Advance Research and Innovative Ideas in Education, vol. 4, n°6, pp. 473-479, 2018.
- [17]. S. Albeverio, A. Khrennikov, V. M. Shelkovich, «Theory of *p*-Adic Distributions: Linear and Nonlinear Models,» Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [18]. S. Albeverio, A. Khrennikov, V. M. Shelkovich, «The Cauchy problems for revolutionary pseudo-differential equations over *p*-adic field and the wavelet theory,» Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 375, p. 82–98, 2011.

ANALYTICAL RESOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM OF A DIFFUSION EQUATION WITH A FRACTIONAL TIME DERIVATIVE.

Rasolomampiany G.¹ – Ravaliminoarimalalason T.B.² – Rasoanoavy F.³ – Randimbendrainibe F.⁴

Laboratoire de recherche Sciences Cognitives et Applications (LR - SCA)
Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation (ED - STII)
Ecole Supérieure Polytechnique Antananarivo (ESPA) - Université d'Antananarivo
BP 1500, Ankatso – Antananarivo 101 - Madagascar

Abstract.

In this paper, we will present a method of analytical resolution of a fractional time derivative diffusion equation with an initial condition. Spectral theory of the operators, Hilbert space, some properties of Mittag-Leffler function, Fourier transformation of the generalized functions are main tools for this resolution.

Key words : Fractional derivative, Generalized functions, Mittag-Leffler function.

1 INTRODUCTION

The concept of the fractional derivative is a subject almost old than classical calculation that we know today. However this theory can be considered as new subject too, since a little more than thirty years. Recently, there has been considerable development in the resolution of fractional differential equations (see examples in [1], [2], [3])

The equation to solve is :

$${}_{RL}D_{0^+}^\alpha (u(t, x) - u(0, x)) - \Delta_x(t, x) = f(t, x)$$

Where :

- $0 < \alpha < 1$
- u is the unknown, $(t, x) \in [0, T[\times \Omega$, $\Omega = \prod_{p=1}^N [0, L_p] \subset \mathbb{R}^N$
- $u(0, x) = u_0(x)$ for any x element of Ω
- $u(t, x) = 0$ in $]0, T[\times X \partial \Omega$
- f is a given function
- ${}_{RL}D_{0^+}^\alpha (u(t, x) - u(0, x)) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_{0^+}^t (t-\tau)^{-\alpha} u(t, x) - u(x, 0) d\tau$ (Riemann-Liouville derivative of $u(t, x) - u(0, x)$ si $0 < \alpha < 1$)
- For $t \in [0, T]$, $u(t, x) \in L^2(\Omega)$ and $f(t, x)$

Its resolution requires a spectral decomposition of the Laplacian operator $(-\Delta_x)$ where

$\Omega = \prod_{p=1}^N [0, L_p] \subset \mathbb{R}^N$, eigenvalues are given in their explicit forms.

The eigenvectors obtained from this decomposition form a Hilbert base of $L^2(\Omega)$.

Relationships between the coordinates of u and f in this base form linear fractional differential equations including Fourier transform, fractional derivation of a distribution, some properties of products of convolutions of generalized functions are main means to find the solution and the function of Mittag-Leffler simplifies the presentation of the solution of this differential equation.

This paper will be presented as follows:

Part will be devoted to reminders about the different tools needed for the resolution

Another part for the spectral decomposition of the Laplacian operator $(-\Delta_x)$ where

$$\Omega = \prod_{p=1}^N [0, L_p] \subset \mathbb{R}^N \text{ with Dirichlet conditions.}$$

A last part, before the conclusion, is the resolution of the equation.

2 PRELIMINARY KNOWLEDGE

In this part, we will introduce definitions, properties and notations necessary for this note

- The fractional differential operator of Riemann-Liouville:
 ${}_{RL}D_{0^+}^\alpha$ as ${}_{RL}D_{0^+}^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} u(\tau) d\tau$ si $0 < \alpha < 1$ See [1],[2],[3],[4]

u is a continuous and differentiable numeric function in $]0, T[$

- The differential operator of Caputo :
 ${}_cD_{0^+}^\alpha$ as ${}_cD_{0^+}^\alpha = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{d}{d\tau} u(\tau) d\tau = {}_{RL}D_{0^+}^\alpha (u(t) - u(0^+))$
- If u is causal then ${}_{RL}D_{0^+}^\alpha = {}_cD_{0^+}^\alpha = {}_{-\infty}D_{0^+}^\alpha = D^\alpha$ voir [1], [2] (1)
- Fourier transformation of $D^\alpha u$ is $\mathfrak{F}[D^\alpha u](\omega) = (i\omega)^\alpha \mathfrak{F}[u]$ See [1], [2] (2)
- In the sense of temperate distributions, we define $\mathfrak{F}[D^\alpha U] = (i\omega)^\alpha \mathfrak{F}[U]$ See [2]
- For a causal function u , $D^\alpha u(t) = 0$ if, and only if, $u(t) = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha)} ct^{\alpha-1}$ (3)
 $0 < \alpha < 1$ and $t \geq 0$, $c \in \mathbb{R}$ See [2]
- $Y_\lambda(t) = \frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} Y(t)$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0, -1, -2, \dots\}$; $Y_1 = Y$; $Y_0 = \delta_0$ [2]
- If $0 < \alpha < 1$ and T a compact support distribution, then $D^\alpha T = DY_{1-\alpha} * T$ [2] (4)

- For $\alpha, \beta > 0$, Mittag-Leffler function is defined as

$$E_{\alpha, \beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)}, \quad z \in \mathbb{C} \tag{5}$$

- Let H be a separable Hilbert space and (e_n) a countable family orthonormed of H . The following assertions are equivalent :

- (e_n) is a Hilbertian base
- For any $x \in H$, $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle e_n$ (6)

- For any $x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, e_n \rangle|^2$ (7)

- $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\}$ (8)

- Let Ω be an open bounded class C^1 of \mathbb{R}^d . Then there exists an increasing sequence $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ of real positives that goes to infinity and a Hilbertian base $(u_k)_{k \geq 1}$ of $L^2(\Omega)$ such $u_k \in H_0^1(\Omega)$ and $-\Delta u_k = \lambda_k u_k$ [18] [19]

3 – SPECTRAL DECOMPOSITION OF THE LAPLACIAN OPERATOR $-\Delta_x$ OF INITIAL PROBLEM

- Consider the case of $-\Delta_x$ for $\Omega =]0,1[$ and with Dirichlet conditions $u_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x)$ $k \in \mathbb{N}^*$ the eigenfunctions of $-\Delta_x$ and $\lambda_k = k^2 \pi^2$ the eigenvalues corresponding to u_k See [12],[18]

- For $\Omega = \prod_{p=1}^N]0, L_p[\subset \mathbb{R}^N$. Let introduce $u_{p,k}$ function in $]0, L_p[$ with values in \mathbb{R} , defined by $u_{p,k}(x_p) = u_k\left(\frac{x_p}{L_p}\right)$ and for any $k = (k_1, k_2, \dots, k_N) \in \mathbb{N}^N$ and for any

$x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, we set $v_k(x) = \prod_{p=1}^N u_{p,k_p}(x_p)$ (9)

$$-\Delta_x v_k(x) = -\Delta_x \left[\prod_{p=1}^N u_{p,k_p}(x_p) \right] = -\left(\sum_{p=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} \right) \prod_{p=1}^N u_{p,k_p}(x_p)$$

$$= \sum_{p=1}^N \left(\frac{k_p \pi}{L_p} \right)^2 \left(\prod_{p=1}^N u_{p,k_p}(x_p) \right) = \left[\sum_{p=1}^N \left(\frac{k_p \pi}{L_p} \right)^2 \right] v_k(x)$$

Thus $\lambda_k = \sum_{p=1}^N \left(\frac{k_p \pi}{L_p} \right)^2$, $k = (k_1, k_2, \dots, k_p)$ is the eigenvalue corresponding to v_k (10)

- Show that $(v_k)_{k \in \mathbb{N}^N}$ is a Hilbertian base of $L^2(\Omega)$
 Just show that :
 If $\langle v_k, w \rangle = 0$ for any $k \in \mathbb{N}^N$ then $w = 0$ and we can conclude that (v_k) is a Hilbertian base because $L^2(\Omega)$ is a separable Hilbertian base according to (8)

Let's proceed by recurrence on the dimension N

This result is true for N=1 See [12],[13]

Suppose the result is established for Ω of dimension N-1 and we introduce the function

$\omega \in L^2]0, L_N[$ defined by $\omega(x_N) = \int_{\Omega} (w(x)) \prod_{p=1}^{N-1} u_{p,k_p}(x_p) dx$

where $\Omega = \prod_{p=1}^{N-1}]0, L_p[$ and $x = (x_1, \dots, x_{N-1})$

By hypothesis $\langle v_k, w \rangle = 0$ for any $k \in \mathbb{N}^N$ so $\int_0^{L_N} \omega(x_N) u_{N,k}(x_N) dx_N = 0, k \in \mathbb{N}^*$

As $(u_{N,k})_{k \in \mathbb{N}}$ is a base of $L^2([0, L_N])$, we conclude that $\omega(x_N) = 0$ a.e.

Thus $w_{x_N}(x) = w(x, x_N) \in L^2(\Omega)$ such as $\int_{\Omega} w_{x_N}(x) \prod_{p=1}^{N-1} u_{k_p}(x_p) dx = 0$

By recurrence hypothesis $w_{x_N} = 0$ (what to show)

Then $L^2(\Omega) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}^N} E_k$, E_k is the generated space $(v_k)_{k \in \mathbb{N}^N}$, E_k vector space generated by (v_k) See [13]

4 - RESOLUTION OF THE INITIAL EQUATION

$${}_{RL}D_{0^+}^\alpha [u(t, x) - u(0, x)] - \Delta_x(t, x) = f(t, x) \quad (t, x) \in]0, T[\times \Omega \tag{11}$$

For one $t \in]0, T[$, $u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^N} \langle u(t, x), v_k(x) \rangle v_k(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^N} c_k(t) v_k(x)$ according to (6)

$$u(0, x) = u_0 = \sum_{k \in \mathbb{N}^N} c_k(0) v_k(x) \quad f(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{N}^N} \beta_k(t) v_k(x)$$

et $-\Delta_x u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^N} c_k(t) \lambda_k v_k(x)$ then

$${}_{RL}D_{0^+}^\alpha [\sum_{k \in \mathbb{N}^N} c_k(t) v_k(x) - c_k(0) v_k(x)] + \sum_{k \in \mathbb{N}^N} c_k(t) \lambda_k v_k(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^N} \beta_k(t) v_k(x)$$

Thus ${}_{RL}D_{0^+}^\alpha [c_k(t) - c_k(0)] + \lambda_k c_k(t) = \beta_k(t) \quad 0 < t < T$

a- **Resolution** of ${}_{RL}D_{0^+}^\alpha (c(t) - c(0)) + \lambda_k c(t) = \beta(t) \quad t \in]0, T[$ or

$${}_{RL}D_{0^+}^\alpha (c(t)) + \lambda_k c(t) = \beta(t) + D^\alpha c(0) \tag{12}$$

Step 1 :

Transformation of the equation in the sense of generalized functions

Let U be a generalized function such as $U(t) = c(t)$ if $t \in]0, T[$, $U = 0$ if $t < 0$ and $t > T$

We can write $U(t) = c(t)[Y(t) - Y(t-T)]$. We note $Y_T(t) = Y(t-T)$

$$D^\alpha U + \lambda_k U = \frac{d}{dt} (Y_{1-\alpha} * U) + \lambda_k U = Y_{1-\alpha} * \frac{d}{dt} [c(t)(Y(t) - Y_T(t))] + \lambda_k c(t)(Y(t) - Y_T(t)) \tag{13}$$

$$= Y_{1-\alpha} * \frac{dc(t)}{dt} [Y(t) - Y_T(t)] + Y_{1-\alpha} * c(t)(\delta_0 - \delta_T) + \lambda_k c(t)(Y(t) - Y_T(t))$$

=

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{-\alpha} \frac{dc(\xi)}{d\xi} ((Y - Y_T)(\xi)) d\xi + Y_{1-\alpha} * c(0^+) \delta_0(t) - Y_{1-\alpha} * c(T) \delta_T(t) + \lambda_k c(t)(Y(t) - Y_T(t))$$

If $0 < t < T$

$$D^\alpha U + \lambda_k U = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{-\alpha} \frac{dc(\xi)}{d\xi} d\xi + \lambda_k c(t) \tag{14}$$

$$= {}_cD_{0^+}^\alpha u(t) + {}_cD_{0^+}^\alpha c_k(t) + \lambda_k c(t)$$

$$\begin{aligned}
 & {}_{RL}D_{0^+}^\alpha [c_k(t) - c_k(0^+)] + \lambda_k c_k(t) = {}_{RL}D_{0^+}^\alpha [c_k(t) - c_k(0)] + {}_{RL}D_{0^+}^\alpha [c_k(0) - c_k(0^+)] + \lambda_k c_k(t) \\
 & = \beta_k(t) + {}_{RL}D_{0^+}^\alpha [c_k(0) - c_k(0^+)]
 \end{aligned}$$

Then $D^\alpha U + \lambda_k U = \beta_k(t) + {}_{RL}D_{0^+}^\alpha [c_k(0) - c_k(0^+)]$ (15)

Step 2

Resolution of $D^\alpha V + \lambda_k V = \delta$ (16)

For any temperate distribution (Compact support generalized functions are temperates), we have :

$$\mathfrak{F}(D^\alpha V + \lambda_k V) = (i\omega)^\alpha \mathfrak{F}(V) + \lambda_k \mathfrak{F}(V)$$

$$\text{Thus } \mathfrak{F}(V) = \frac{1}{(i\omega)^\alpha + \lambda_k}$$

Search of the inverse by the Fourier transform of $\frac{1}{(i\omega)^\alpha + \lambda_k}$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(i\omega)^\alpha + \lambda_k} &= \frac{1}{\lambda_k} \left[\frac{1}{\frac{(i\omega)^\alpha}{\lambda_k} + 1} \right] = \frac{1}{\lambda_k} \frac{1}{\frac{1}{\lambda_k (i\omega)^{-\alpha}} + 1} = \frac{1}{\lambda_k} \frac{\lambda_k (i\omega)^{-\alpha}}{1 + \lambda_k (i\omega)^{-\alpha}} = \frac{(i\omega)^{-\alpha}}{1 + \lambda_k (i\omega)^{-\alpha}} \\
 &= (i\omega)^{-\alpha} \frac{1}{1 - (-\lambda_k)(i\omega)^{-\alpha}} = (i\omega)^{-\alpha} \sum_{p=0}^{\infty} (-\lambda_k)^p [(i\omega)^{-\alpha}]^p, \quad |\lambda_k \omega^{-\alpha}| < 1 \\
 &= \sum_{p=0}^{\infty} (-\lambda_k)^p (i\omega)^{\alpha p - \alpha} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_k)^p}{(i\omega)^{\alpha p + \alpha}} \frac{\Gamma(\alpha p + \alpha)}{\Gamma(\alpha p + \alpha)} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_k)^p}{\Gamma(\alpha p + \alpha)} \int_0^\infty \frac{u^{\alpha p + \alpha - 1} e^{-u}}{(i\omega)^{\alpha p + \alpha}} du \\
 &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_k)^p}{\Gamma(\alpha p + \alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{u}{i\omega}\right)^{\alpha p + \alpha - 1} e^{-u} \frac{du}{i\omega} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_k)^p}{\Gamma(\alpha p + \alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha p + \alpha - 1} e^{-i\omega t} dt \quad \left(t = \frac{u}{i\omega}\right) \\
 &= \int_0^\infty \left[\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_k)^p}{\Gamma(\alpha p + \alpha)} t^{\alpha p + \alpha - 1} \right] e^{-i\omega t} dt = \int_0^\infty [t^{\alpha - 1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_k)^p}{\Gamma(\alpha p + \alpha)} t^{\alpha p}] e^{-i\omega t} dt \\
 &= \mathfrak{F}[t^{\alpha - 1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda t^\alpha) Y(t)](\omega)
 \end{aligned}$$

Then $V(t) = t^{\alpha - 1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_k t^\alpha) Y(t)$ (17)

Hence the basic solution of

$$D^\alpha U + U = [\beta(t) + Y_{1-\alpha} * c(0^+) \delta_0(t) - {}_{RL}D_{0^+}^\alpha c(0^+) + {}_{RL}D_{0^+}^\alpha c(0)](Y(t) - Y_T(t))$$

$$\text{is } U_0(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k t^\alpha) [Y(t) - Y_T(t)] \tag{18}$$

Uniqueness of the basic solution:

Suppose there is a solution U_1 , then $W = U_1 - U_0$ satisfies the equation $D^\alpha W + \lambda_k W = 0$ thus $\mathfrak{F}(D^\alpha W + \lambda_k W) = [(i\omega)^\alpha + \lambda_k] \mathfrak{F}(W) = 0$ so $[(-i\omega)^\alpha + \lambda_k][i\omega] \mathfrak{F}(W) = 0$

$$\text{or } [\omega^{2\alpha} + \lambda_k^2] \mathfrak{F}(W) = 0$$

$$\lambda_k > 0 \text{ then } \mathfrak{F}(W) = 0 \text{ thus } W = 0$$

Step 3 : Solution of the equation

a. The solution of the generalized function equation is

$$U = U_0 * [Y_{1-\alpha} * \frac{dc(t)}{dt} [Y(t) - Y_T(t)] + Y_{1-\alpha} * c(t)(\delta_0 - \delta_T) + \lambda_k c(t)(Y(t) - Y_T(t))]$$

$$U = U_0 * [\beta(t) - {}_{RL}D_{0^+}^\alpha c_k(0^+) + {}_{RL}D_{0^+}^\alpha c_k(0)] \text{ when } 0 < t < T$$

$$\text{Thus } c_k(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k t^\alpha) * [\beta_k(t) - {}_{RL}D_{0^+}^\alpha c_k(0^+) + {}_{RL}D_{0^+}^\alpha c_k(0)] \tag{19}$$

$$c_k(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k t^\alpha) * [{}_{RL}D_{0^+}^\alpha c_k(0) - {}_{RL}D_{0^+}^\alpha c_k(0^+)] + \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k (t-\xi)^\alpha) \beta_k(\xi) d\xi$$

$$0 < t < T$$

b. Solution of the initial equation

The solution of the equation is $u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^N} \langle u(t, x), v_k(x) \rangle v_k(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^N} c_k(t) v_k(t)$ where $0 < t < T$,

So just replace $c_k(t)$ with its expression.

5 CONCLUSION

In this paper, a method for solving a fractional differential equation from generalized functions has been provided. We have obtained a solution that reveals some characteristic points, but our obstacle is the fractional derivation requires that the generalized function must be compact support because of the convolution products.

REFERENCE

[1] Kamel Haouam. Existence et non existence de solutions des equations differentielles fractionnaires. Université de Constantine Septembre 2007

[2] Robert Janin Derivées et integrals non entières.

[3] Francois Dubois-Ana-Cristina-Galucio et Nelly Pant. Introduction à la derivation fractionnaire. Theories et applications. 16 mars 2009

[4] Kai Diethlem. The analysis of fractional differential équations. Springer 2004

[5] H.J.Hanbold, A.M. Mathai, R.K Sarena Mittag-Leffler Functions and their applications . Hidawi Publishing Corporation. Journal of Applied Mathematics February 2011

- [6] Juan. J. Nieto. Maximun principles for fractional differential equations derived from Mittag-Leffler equations. Departamento de anàlisis matemàtica. Facultad de Maématicas. Universidad de Siantago de Compestela Spain. June 2010
- [7] S.G Smanko. A.A.Kilbas OI Marichev . Fractional integrals and derivatives. Theory and applications . Gordon and Breach. Yverdon 1993
- [8] F Golse.Distributions, analyse de Fourier, Equations aux dérivées partielles.Octobre 2012
- [9] G.Abramovici. Théorie des distributions.Université Paris-Sud. Janvier 2015
- [10] Laurent Schwartz .Théorie des distributions
- [11]V.S Vladmirov . Generalized functions in mathematical physics.
Mir Publishers Moscow 1979
- [12]Stephane Maingot et David Manceau Théorie spectrale
- [13] Base Hilbertienne . Université d'Orléans
- [14]Q.Yang ; F Liu ; I.Turner : Numericals methods for fractionnal partial differential equations with Riesz space fractionnal derivatives. School of Mathematical Sciences ; University of Technology Ausralia. May 2009
- [15] Salçuk , S.Bayn : Definition of the Riesz derivative and its application to the space fractionnal quantum mechanics . Middle East technical University. Institute of applied mathematics. Ankara Turkey. Dec 2016
- [16] Binjie Li ; Hao Luo ; Xiaoping Xie : Analysis of time-stepping scheme for time fractionnal diffusion problem with nonsmooth data. School of Mathematics,Sichuan University,Chendu, China
- [17] Série de Fourier ; Espace de Sobolev et EDP. Préparation à l'agrégation externe Université de Grenoble 2010/2011
- [18] Problèmes aux valeurs propres
- [19] Mathieu Lewin. Eléments de Théorie spectrale : Le Laplacien sur un ouvert borné. HAL id : cel-01490197 06/03/18
- [20] Anatoly KILBAS- Hari M . Srivatastava-Juan J.Trujilio : theory and applications of fractional differential equations. Editor Juan van Mill. Faculteit der Exacte Wetenshappen Amstredam, The Netherlands
- [21] G.P. Lopushanskaya, A.O. Lopushansky, E.V. Pasichnik Problème de Cauchy pour les équations à dérivée fractionnaire par rapport au temps dans l'espace des distributions

Coefficients Triangulaires et Algèbre des Polynômes Dissociables et Multipliables

Falimanana RANDIMBINDRAINIBE¹, Toky Basilide RAVALIMINOARIMALALASON²

Ecole doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation
Ecole Supérieure Polytechnique d'Antananarivo - Université d'Antananarivo - Madagascar



Résumé – Le but de cet article est de construire une suite de polynômes spéciaux appelés polynômes triangulaires dissociables et polynômes triangulaires multipliables et d'étudier leurs propriétés et leurs spécificités. Pour cela on va utiliser le coefficient binomial de Newton (coefficient binomial usuel) noté $\binom{n}{m}$, $0 \leq m \leq n$, avec $m, n \in \mathbb{N}$, le coefficient binomial de Gauss $\binom{n}{m}_\theta$ avec $m, n \in \mathbb{N}$, de paramètre θ et construire des coefficients spéciaux notés $A_k^{n,m}$, appelés coefficients triangulaires, que l'on ne va pas confondre avec le coefficient trinomial. On utilisera les relations d'orthogonalité pour obtenir des propriétés des coefficients triangulaires et des critères de triangularité dissociable et multipliable.

Mots-clés – Coefficients binomiaux, coefficients triangulaires, relation d'orthogonalité, triangulaire dissociable, triangulaire multipliable, coefficients triangulaires non dégénérés, système unitaire.

I. LES COEFFICIENTS BINOMIAUX

Soit \mathcal{K} un corps commutatif arbitraire.

a. Coefficient binomial de Newton

On appelle coefficient binomial de Newton le coefficient noté $\binom{n}{m}$, $0 \leq m \leq n$, avec $m, n \in \mathbb{N}$, défini par la relation de récurrence [1] [2] [3] [4].

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}, m \geq 1 \quad (1)$$

Dans le cas, où $\text{char } \mathcal{K} = 0$, on a

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad 0 \leq m \leq n, \quad (2)$$

Dans le cas, où $\text{char } \mathcal{K} = p$, nombre premier, on définit les coefficients binomiaux par la relation de récurrence (1), de plus on pose $\binom{n}{m} = 0$ pour $n < m$, $n < 0$ ou $m < 0$. La représentation (2) a lieu seulement pour $0 \leq m \leq n < p = \text{char } \mathcal{K}$. Dans la suite on considèrera uniquement un corps $\mathbb{Q} \subset \mathcal{K}$, donc de caractéristique 0.

Ces coefficients sont étroitement liés aux polynômes de Newton (d'où leurs noms) [5] [6].

$$(x)_0 = 1, \quad (x)_n = x(x-1) \dots (x-n+1) \quad (3)$$

et aux polynômes d'interpolation de Newton [7] [8] [9] [10].

$$\binom{x}{0} = 1, \quad \binom{x}{n} = \frac{(x)_n}{n!} \tag{4}$$

Notons les relations d'orthogonalité suivantes [1] [11] :

$$\begin{cases} (x)_n = \sum_{m=0}^n s_1(n, m) \cdot x^m \\ x^n = \sum_{m=0}^n s_2(n, m) \cdot (x)_m \end{cases} \tag{5}$$

où $s_1(n, m)$ et $s_2(n, m)$ sont respectivement les nombres de Stirling de première et de seconde espèce. [1][2][6][8][12][13].

Lemme I. 1.

Pour tous $0 \leq m \leq n$, on a, $\binom{n}{m} = \binom{X}{m} \Big|_{X=n}$

Preuve :

En effet

$$\begin{aligned} (X)_m &= X(X-1) \dots (X-m+1) = (X-m+m)(X-1) \dots (X-m+1) \\ &= (X-1) \dots (X-m+1)(X-m) + m(X-1) \dots (X-m+1) \\ &= (X-1)_m + m(X-1)_{m-1} \end{aligned}$$

d'où en divisant l'égalité par $m!$, on obtient

$$\binom{x}{m} = \binom{x-1}{m} + \binom{x-1}{m-1}$$

En remplaçant X par n on a (1). ■

Soit maintenant $((x-1)^n)_{n \geq 0}$ une suite des binômes de Newton, on a

$$(xy-1)^k = \sum_{n,m \leq k \leq n+m} \binom{n,m}{k} (x-1)^n (y-1)^m, \tag{6}$$

Où :

$$\binom{n,m}{k} = \binom{k}{n} \binom{n}{k-m} = \frac{k!}{(k-n)! (k-m)! (n+m-k)!}$$

que l'on démontre facilement par récurrence sur k en utilisant (1) [5][6][7].

Le coefficient $\binom{n,m}{k}$ est appelé *coefficient triangulaire de Newton*, coefficient qu'il ne faut pas confondre avec le coefficient trinomial :

$$\binom{k}{n,m,p} = \frac{k!}{n! m! p!}, \text{ où } n+m+p=k.$$

On dit que la suite de binômes de Newton $((X-1)^n)_{n \geq 0}$ est triangulaire multiplicative dissociable par rapport aux coefficients $\binom{n,m}{k}, (n, m \leq k \leq n+m)$.

b. Coefficient binomial de Gauss

D’une manière analogue on appelle coefficient binomial de Gauss de paramètre θ appartenant au groupe multiplicatif $\mathcal{K}^* = \mathcal{K} \setminus \{0\}$, avec θ un élément d’ordre w ($w = 1$, i.e. $\theta = 1$ et $w = \infty$ ne sont pas exclus), les coefficients notés $\binom{n}{m}_\theta$ définis par la relation de récurrence [4][8][14].

$$\binom{n}{0}_\theta = \binom{n}{n}_\theta = 1, \quad \binom{n}{m}_\theta = \theta^m \binom{n-1}{m}_\theta + \binom{n-1}{m-1}_\theta, m \geq 1, \tag{7}$$

Si $n < m$ ou bien au moins un des nombres n ou m plus petit que 0, on pose $\binom{n}{m}_\theta = 0$. Lorsque $\theta = 1$, la relation de récurrence nous ramène au coefficient binomial de Newton.

Ces coefficients sont étroitement liés aux polynômes de Gauss (d’où leur nom) [8].

$$P_n^{(\theta)}(X) = (X - 1)(X - \theta)(X - \theta^2) \dots (X - \theta^{n-1}) \tag{8}$$

et aux polynômes d’interpolation de Gauss

$$Q_n^{(\theta)}(X) = \frac{P_n^{(\theta)}(X)}{P_n^{(\theta)}(\theta^n)} \quad (0 \leq n < w) \tag{9}$$

Notons pour la suite que si $ord \tau = w < \infty$, $P_w^{(\tau)}(X) = (X^w - 1)$ et $P_n^{(\tau)}(X) = (X^w - 1)^{[n/w]} \cdot P_{r_w(n)}^{(\tau)}(X)$, où $n = [n/w]w + r_w(n)$ ($0 \leq r_w(n) < w$). $[r]$ désigne la partie entière d’un nombre rationnel $r \in \mathbb{Q}$.

On va donner la forme explicite des coefficients binomiaux de Gauss [4][14].

Proposition I. 1.

Si $m < w$, alors pour tout n :

$$\binom{n}{m}_\theta = Q_m^{(\theta)}(\theta^n) \tag{10}$$

Preuve :

Démontrons d’abord la relation de récurrence

$$Q_m^{(\theta)}(\theta X) = \theta^m Q_m^{(\theta)}(X) + Q_{m-1}^{(\theta)}(X). \tag{11}$$

En effet par définition

$$\begin{aligned} Q_m^{(\theta)}(\theta X) &= \frac{P_m^{(\theta)}(\theta X)}{P_m^{(\theta)}(\theta^m)} = \frac{(\theta X - 1)(\theta X - \theta) \dots (\theta X - \theta^{m-1})}{P_m^{(\theta)}(\theta^m)} = \frac{[(\theta X - \theta^m) + (\theta^m - 1)](\theta X - \theta) \dots (\theta X - \theta^{m-1})}{P_m^{(\theta)}(\theta^m)} \\ &= \frac{(\theta X - \theta) \dots (\theta X - \theta^{m-1})(\theta X - \theta^m)}{P_m^{(\theta)}(\theta^m)} + \frac{(\theta^m - 1)\theta^{m-1}(X - 1)(X - \theta) \dots (X - \theta^{m-2})}{P_m^{(\theta)}(\theta^m)} \\ &= \theta^m \frac{(X - 1) \dots (X - \theta^{n-1})}{P_m^{(\theta)}(\theta^m)} + \frac{(X - 1) \dots (X - \theta^{n-2})}{P_{m-1}^{(\theta)}(\theta^{m-1})} \end{aligned}$$

d’où (11).

Ensuite par récurrence sur $m \geq 0$, on démontre la relation (7), d’où le résultat. ■

Supposons maintenant que θ est d’ordre ∞ , alors selon (10) [4] [12] [14]

$$\binom{n}{m}_\theta = \begin{cases} \frac{(\theta^n - 1)(\theta^n - \theta)(\theta^n - \theta^2) \dots (\theta^n - \theta^{m-1})}{(\theta^m - 1)(\theta^m - \theta)(\theta^m - \theta^2) \dots (\theta^m - \theta^{m-1})} & \text{si } 0 < m \leq n \\ 0 & \text{si } m > n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{(1 - \theta^n)(1 - \theta^{n-1})(1 - \theta^{n-2}) \dots (1 - \theta^{n-m+1})}{(1 - \theta)(1 - \theta^2)(1 - \theta^3) \dots (1 - \theta^m)} & \text{si } 0 < m \leq n \\ 0 & \text{si } m > n \end{cases} \tag{12}$$

$$\binom{n}{0}_\theta = 1$$

On pose alors [4] [14] :

$$[m]_\theta = \sum_{0 \leq i < m} \theta^i = 1 + \theta + \theta^2 + \dots + \theta^{m-1} = \begin{cases} \frac{1 - \theta^m}{1 - \theta} & \text{pour } \theta \neq 1 \\ m & \text{pour } \theta = 1 \end{cases} \tag{13}$$

d'où

$$\binom{n}{m}_\theta = \frac{[n]_\theta [n-1]_\theta \dots [n-m+1]_\theta}{[1]_\theta [2]_\theta \dots [m]_\theta} \tag{14}$$

En termes de θ -factorielles $n!_\theta = [1]_\theta [2]_\theta \dots [n]_\theta$ la formule (14) peut être écrite sous la forme

$$\binom{n}{m}_\theta = \frac{n!_\theta}{m!_\theta \cdot (n-m)!_\theta} \quad (m \leq n) \tag{15}$$

formule analogue à (2), d'où la symétrie $\binom{n}{m}_\theta = \binom{n}{n-m}_\theta$ pour $m \leq n$.

Notons aussi que contrairement au coefficient binomial de Newton, le coefficient binomial de Gauss a une limite lorsque n tend vers ∞ pour $|\theta| < 1$.

$$\binom{\infty}{m}_\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{m}_\theta = \frac{1}{m!_\theta (1 - \theta)^m} = \frac{1}{(1 - \theta)(1 - \theta^2)(1 - \theta^3) \dots (1 - \theta^m)}$$

Avec les résultats ci-dessus on montre

$$\binom{n}{m}_\theta = \frac{1 - \theta^n}{1 - \theta^m} \binom{n-1}{m-1}_\theta = \frac{[n]_\theta}{[m]_\theta} \binom{n-1}{m-1}_\theta$$

Avec la formule $\binom{n}{m}_\theta = ((1 - \theta^n) / (1 - \theta^{n-m})) \binom{n-1}{m}_\theta$ on obtient de nouveau les relations de récurrence [4][14] :

$$\binom{n}{m}_\theta = \theta^m \binom{n-1}{m}_\theta + \binom{n-1}{m-1}_\theta \quad \text{et} \quad \binom{n}{m}_\theta = \binom{n-1}{m}_\theta + \theta^{n-m} \binom{n-1}{m-1}_\theta$$

Ce sont les θ -analogues de la relation de Pascal [14].

La proposition suivante et ses conséquences sont des propriétés spécifiques dans le cas, où $1 < w < \infty$

Proposition 1.2.

Si $m + n \leq w$ et $0 < n < w$, alors

$$\binom{w-n}{m}_\theta = (-1)^m \theta^{-mn - \binom{m}{2}} \binom{m+n-1}{m}_\theta \tag{16}$$

Preuve :

On transforme l'expression

$$\begin{aligned} \prod_{k=w-n-m+1}^{w-n} (\theta^k - 1) &= (-1)^m \prod_{k=w-n-m+1}^{w-n} (\theta^w - \theta^k) = (-1)^m \theta^{\frac{2w-2n-m+1}{2}m} \prod_{i=w-n-m+1}^{w-n} (\theta^{w-i} - 1) \\ &= (-1)^m \theta^{-mn} \binom{m}{2} \prod_{j=n}^{m+n-1} (\theta^j - 1). \end{aligned}$$

On divise ensuite l'égalité par $\prod_{j=1}^m (\theta^j - 1)$ et on obtient le résultat. ■

Corollaire I.1.

Pour $0 \leq m < w$, on a : $\binom{w-1}{m}_\theta = (-1)^m \theta^{-\binom{m+1}{2}}$.

Corollaire I.2.

Si $1 \leq m \leq w-1$, alors $\binom{w}{m}_\theta = 0$.

Preuve :

En effet :

$$\binom{w}{m}_\theta = \theta^m \binom{w-1}{m}_\theta + \binom{w-1}{m-1}_\theta = (-1)^m \theta^{m-\binom{m+1}{2}} + (-1)^{m-1} \theta^{-\binom{m}{2}} = 0 \quad \blacksquare$$

Dans la suite on va énumérer quelques propriétés des coefficients de Gauss qu'on aura besoin :

Théorème I.1.

Si $n = aw + r, m = bw + s$ ($0 \leq r, s < w$), alors

$$\binom{n}{m}_\theta = \binom{a}{b} \binom{r}{s}_\theta = \binom{a}{b} Q_s^{(\theta)}(\theta^r) \tag{17}$$

Preuve :

La démonstration se fait par récurrence sur n . Pour cela on va considérer quatre cas possibles :

a) $0 \leq r < w-1, 0 < s \leq w-1$. On a

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{m}_\theta &= \theta^m \binom{n}{m}_\theta + \binom{n}{m-1}_\theta = \theta^s \binom{a}{b} \binom{r}{s}_\theta + \binom{a}{b} \binom{r}{s-1}_\theta \\ &= \binom{a}{b} [\theta^s \binom{r}{s}_\theta + \binom{r}{s-1}_\theta] = \binom{a}{b} \binom{r+1}{s}_\theta \end{aligned}$$

b) $r = w-1, 0 < s \leq w-1$. On a en utilisant la démonstration précédente et le corollaire 2 de la proposition 2 ci-dessus :

$$\binom{n+1}{m}_\theta = \binom{a}{b} \binom{w}{s}_\theta = 0 = \binom{a+1}{b} \binom{0}{s}_\theta.$$

c) $0 \leq r < w-1, s = 0$. On a

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{m}_\theta &= \theta^m \binom{n}{m}_\theta + \binom{n}{m-1}_\theta = \binom{a}{b} \binom{r}{0}_\theta + \binom{a}{b-1} \binom{r}{w-1}_\theta \\ &= \binom{a}{b} + 0 = \binom{a}{b} \binom{r+1}{0}_\theta \end{aligned}$$

d) $r = w-1, s = 0$. Comme ci-dessus on a

$$\binom{n+1}{m}_\theta = \binom{a}{b} \binom{w}{0}_\theta + \binom{a}{b-1} \binom{w-1}{w-1}_\theta$$

$$= \binom{a}{b} + \binom{a}{b-1} = \binom{a+1}{b} = \binom{a+1}{b} \binom{0}{0}_\theta. \quad \blacksquare$$

Corollaire I.3.

On a les relations symétriques

$$\binom{n}{m}_\theta = \binom{n}{n-m}_\theta \tag{18}$$

Preuve :

En effet si $n < m$ les deux expressions sont nulles. Soit alors $n \geq m$, donc $a \geq b$. Supposons d'abord $r \geq s$, alors $n - m = (a - b)w + (r - s)$, avec $0 \leq r - s < w$. D'où

$$\binom{n}{m}_\theta = \binom{a}{b} \binom{r}{s}_\theta = \binom{a}{a-b} \binom{r}{r-s}_\theta = \binom{n}{n-m}_\theta.$$

Soit maintenant $r < s$, alors $0 \leq r < r + w - s < w$ et $n - m = (a + b - 1)w + (w + r - s)$, par suite

$$\binom{n}{m}_\theta = \binom{a}{b} \binom{r}{s}_\theta = 0 = \binom{a}{a-b-1} \binom{r}{r+w-s}_\theta = \binom{n}{n-m}_\theta. \quad \blacksquare$$

Proposition I.3.

Pour tous $m \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k}_\theta \binom{k}{m}_\theta = \binom{n}{m}_\theta \binom{n-m}{n-k}_\theta \tag{19}$$

Preuve :

Soit $n = aw + r, m = bw + s, k = cw + t$ ($0 \leq r, s, t < w$).

Supposons d'abord, $r < t$, alors $\binom{n}{k}_\theta = 0$ et si de plus $r < s$, alors $\binom{n}{m}_\theta = 0$. Si au contraire $r \geq s$, alors $\binom{n-m}{n-k}_\theta = \binom{a-b}{a-c-1} \binom{r-s}{w+r-t}_\theta = 0$, car $0 \leq r - s < w + r - t$. On peut donc supposer, que $t \leq r$, et si de plus $r < s$, alors $\binom{k}{m}_\theta = \binom{n}{m}_\theta = 0$, si au contraire $t < s < r$, alors $\binom{k}{m}_\theta = 0, \binom{n-m}{n-k}_\theta = \binom{a-b}{a-c} \binom{r-s}{r-t}_\theta = 0$, car $0 \leq r - s < r - t$. Ainsi dans tous les cas considérés ci-dessus les deux parties de l'égalité sont nulles. Enfin on peut supposer que $s \leq t \leq r$. L'égalité (19) s'obtient en faisant le produit des relations $\binom{a}{c} \binom{c}{b} = \binom{a}{b} \binom{a-b}{a-c}$ et $\binom{r}{t}_\theta \binom{t}{s}_\theta = \binom{r}{s}_\theta \binom{r-s}{r-t}_\theta$, ce qu'il fallait démontrer. \blacksquare

Dans la suite on a besoin des relations d'orthogonalité [16] suivante valable pour tout w :

$$P_n^{(\theta)}(X) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \theta^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_\theta X^k \tag{20}$$

et l'inverse :

$$X^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_\theta P_n^{(\theta)}(X) \tag{21}$$

que l'on démontre par récurrence en utilisant la formule de récurrence (7), voir aussi [14]. En posant $X = 1$ dans (20) on obtient l'égalité :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \theta^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_\theta = \delta_{n,0}$$

où δ_{kn} désigne le symbole de Kronecker.

En utilisant la formule (19) on obtient la relation d'orthogonalité :

$$\sum_{m=k}^n (-1)^{m-k} \theta^{\binom{m-k}{2}} \binom{n}{m}_\theta \binom{m}{k}_\theta = \delta_{n,k}.$$

Dans l'espace vectoriel des polynômes $\mathcal{K}[X]$ considérons l'opérateur [10] [11] :

$$(\Delta_\theta P)(X) = \frac{P(\theta X) - P(X)}{X}$$

A coefficient près il a été introduit dans les travaux de Jackson F.H. Il est appelé la dérivée Eulerienne et joue un rôle très important en q -combinatoire [14]. Son utilisation est exclusivement dans le cas $w < \infty$. On a aussi besoin de l'opérateur $(T_\alpha P)(X) = P(\alpha X)$. On peut montrer par récurrence sur n , que pour tout w

$$(\Delta_\theta^n P)(X) = \theta^{-\binom{n}{2}} X^{-n} (P_n^{(\theta)}(T_\theta)P)(X) \tag{22}$$

$$(T_\theta^n P)(X) = \sum_{k=0}^n \theta^{\binom{n}{2}} \binom{n}{k}_\theta X^k (\Delta_\theta^k P)(X);$$

$$\theta^{\binom{k}{2}} \Delta_\theta^k P_n^{(\theta)} = P_n^{(\theta)}(\theta^k) \binom{n}{k}_\theta P_{n-k}^{(\theta)}. \tag{23}$$

Supposons que $w < \infty$, alors l'opérateur Δ_θ est nilpotent. En effet $P_w^{(\theta)}(T_\theta) = T_\theta^w - 1 = 0$. Il en résulte de (22) que $\Delta_\theta^w = 0$. D'où la formule de Jackson [15] [16] (écrite dans une autre notation). Pour tout polynôme P de degré inférieur à $w = \text{ord}(\theta)$

$$P(X) = \sum_{k=0}^{w-1} \theta^{\binom{k}{2}} \Delta_\theta^k P(1) Q_k^{(\theta)}(X) \tag{24}$$

valable uniquement pour les polynômes de degré inférieur à w .

Théorème I. 2.

Si $\text{deg } P < w$, alors pour $\alpha \in \mathcal{K}$

$$P(\alpha X) = \sum_{k=0}^{w-1} \theta^{\binom{k}{2}} \alpha^k \Delta_\theta^k P(\alpha) Q_k^{(\theta)}(X) \tag{25}$$

Preuve :

On peut vérifier que $\Delta_\theta^k T_\alpha = \alpha^k T_\alpha \Delta_\theta^k$, d'où $(\Delta_\theta^k T_\alpha P)(1) = \alpha^k (\Delta_\theta^k P)(1)$. En appliquant la formule (24) au polynôme $T_\alpha P$ on obtient le résultat. ■

Corollaire I. 4.

Pour tout $n < w$ et pour $\alpha \in \mathcal{K}$

$$P_n^{(\theta)}(\alpha X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_\theta \alpha^k P_{n-k}^{(\theta)}(\alpha) P_k^{(\theta)}(X) \tag{26}$$

Il en résulte :

Proposition I. 5.

Pour $n < w$

$$P_n^{(\theta)}(XY) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_\theta X^k P_{n-k}^{(\theta)}(X) P_k^{(\theta)}(Y). \Leftrightarrow Q_n^{(\theta)}(XY) = \sum_{k=0}^n \theta^{-(n-k)k} X^k Q_{n-k}^{(\theta)}(X) Q_k^{(\theta)}(Y). \tag{27}$$

En posant ici $X = \theta^u$ et $Y = \theta^v$ on obtient une généralisation θ –analogue du théorème d’addition de Vandermonde [1] [2] :

$$\binom{u+v}{n}_\theta = \sum_{k=0}^n \theta^{k(u-n+k)} \binom{u}{n-k}_\theta \binom{v}{k}_\theta = \sum_{m=0}^n \theta^{(n-m)(u-m)} \binom{u}{m}_\theta \binom{v}{n-m}_\theta \tag{28}$$

II. LES COEFFICIENTS TRIANGULAIRES DE GAUSS

On introduit les coefficients.

$$\binom{n, m}{k}_\theta = \binom{m}{k-n}_\theta P_{n+m-k}^{(\theta)}(\theta^n) = \binom{m}{n+m-k}_\theta P_{n+m-k}^{(\theta)}(\theta^n),$$

appelés les coefficients triangulaires de Gauss de première espèce. Il est évident que $\binom{n, m}{k}_\theta = 0$ si une des conditions suivantes est réalisée $n > k$, $m > k$, $n + m - k < 0$, $n + m - k \geq w$. Si au contraire $0 \leq n + m - k < w$, alors

$$\binom{n, m}{k}_\theta = \frac{P_{n+m-k}^{(\theta)}(\theta^n) \cdot P_{n+m-k}^{(\theta)}(\theta^m)}{P_{n+m-k}^{(\theta)}(\theta^{n+m-k})},$$

d’où la symétrie

$$\binom{n, m}{k}_\theta = \binom{m, n}{k}_\theta.$$

Proposition II. 1.

La relation de récurrence suivante est réalisée

$$\binom{n, m}{k-1}_\theta + (\theta^k - \theta^m) \binom{n, m}{k}_\theta = \binom{n, m+1}{k}_\theta.$$

Preuve :

En effet on a par définition :

$$\begin{aligned} \binom{n, m}{k-1}_\theta + (\theta^k - \theta^m) \binom{n, m}{k}_\theta &= \binom{m}{k-1-n}_\theta P_{n+m-k+1}^{(\theta)}(\theta^n) + \\ &\quad + (\theta^n - \theta^{n+m-k}) P_{n+m-k}^{(\theta)}(\theta^n) \theta^{k-n} \binom{m}{k-n}_\theta \\ &= \left[\binom{m}{k-n-1}_\theta + \theta^{k-n} \binom{m}{k-n}_\theta \right] P_{n+m-k+1}^{(\theta)}(\theta^n) \\ &= \binom{m+1}{k-n}_\theta P_{n+m+1-k}^{(\theta)}(\theta^n) = \binom{n, m+1}{k}_\theta. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Notons qu’en prenant cette relation de récurrence, avec la condition initiale $\binom{n, 0}{n}_\theta = 1$ comme définition le coefficient triangulaire de Gauss est bien défini pour tout θ d’ordre arbitraire.

Théorème II. 1.

On a l’égalité :

$$P_n^{(\theta)} \cdot P_m^{(\theta)} = \sum_{n, m \leq k \leq n+m} \binom{n, m}{k}_\theta P_k^{(\theta)} \tag{29}$$

Preuve :

On démontre par récurrence sur m :

$$\begin{aligned}
 P_n^{(\theta)}(X).P_{m+1}^{(\theta)}(X) &= P_n^{(\theta)}(X).P_m^{(\theta)}(X)(X - \theta^m) = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n, m}{k}_\theta P_k^{(\theta)}(X)[(X - \theta^k) + (\theta^k - \theta^m)] \\
 &= \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n, m}{k}_\theta P_k^{(\theta)}(X)(X - \theta^k) + \sum_{k=0}^{n+m} (\theta^k - \theta^m) \binom{n, m}{k}_\theta P_k^{(\theta)}(X) \\
 &= \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n, m}{k}_\theta P_{k+1}^{(\theta)}(X) + \sum_{k=0}^{n+m} (\theta^k - \theta^m) \binom{n, m}{k}_\theta P_k^{(\theta)}(X) \\
 &= \sum_{k=0}^{n+m+1} \left[\binom{n, m}{k-1}_\theta + (\theta^k - \theta^m) \binom{n, m}{k}_\theta \right] P_k^{(\theta)}(X) = \sum_{k=0}^{n+m+1} \binom{n, m+1}{k}_\theta P_k^{(\theta)}(X). \blacksquare
 \end{aligned}$$

En posant dans (29) $X = \theta^l$ ($0 \leq l < w$) on obtient une égalité duale de (28) :

$$\binom{l}{n}_\theta \binom{l}{m}_\theta = \sum_{k=0}^l \theta^{(k-n)(k-m)} \binom{k}{n}_\theta \binom{n}{k-m}_\theta \binom{l}{k}_\theta.$$

Ainsi pour $w = ord \theta = +\infty$ on peut écrire quel que soit $l \geq 0$:

$$Q_n^{(\theta)}(\theta^l).Q_m^{(\theta)}(\theta^l) = \sum_{n, m \leq k \leq n+m} \left[\begin{matrix} n, m \\ k \end{matrix} \right]_\theta Q_k^{(\theta)}(\theta^l),$$

Avec :

$$\left[\begin{matrix} n, m \\ k \end{matrix} \right]_\theta = \theta^{(k-n)(k-m)} \binom{k}{n}_\theta \binom{n}{k-m}_\theta,$$

d'où l'on obtient si $ord \theta = +\infty$

$$Q_n^{(\theta)}(X).Q_m^{(\theta)}(X) = \sum_{n, m \leq k \leq n+m} \left[\begin{matrix} n, m \\ k \end{matrix} \right]_\theta Q_k^{(\theta)}(X), \tag{30}$$

Il résulte de (29) et de (30) que si $ord \theta = +\infty$

$$\left[\begin{matrix} n, m \\ k \end{matrix} \right]_\theta = \binom{n, m}{k}_\theta \frac{P_n^{(\theta)}(\theta^n).P_m^{(\theta)}(\theta^m)}{P_k^{(\theta)}(\theta^k)}. \tag{31}$$

Les coefficients $\left[\begin{matrix} n, m \\ k \end{matrix} \right]_\theta$ sont appelés *les coefficients triangulaires de Gauss de seconde espèce*, nuls si $k < n, k < m, k > n + m$.

Proposition II. 2.

On a l'égalité :

$$X^m P_n^{(\theta)}(X) = \sum_{k=n}^{n+m} \theta^{n(n+m-k)} \binom{m}{k-n}_\theta P_k^{(\theta)}(X)$$

que l'on démontre par récurrence sur n .

En passant dans cette dernière égalité aux polynômes $Q_n^{(\theta)}(X)$ on obtient

$$X^m Q_n^{(\theta)}(X) = \theta^{nm} \sum_{k=n}^{n+m} \binom{m}{k-n}_\theta P_{k-n}^{(\theta)}(\theta^k) Q_k^{(\theta)}(X) = \theta^{nm} \sum_{k=n}^{n+m} \binom{k, n}{n+m}_\theta Q_k^{(\theta)}(X)$$

d'où :

$$X^m Q_{n-m}^{(\theta)}(X) = \theta^{(n-m)m} \sum_{k=n}^{n+m} \binom{k, m}{n}_{\theta} Q_k^{(\theta)}(X). \tag{32}$$

Il résulte de (27) et de (32) la formule :

$$Q_k^{(\theta)}(XY) = \sum_{n, m \leq k \leq n+m} \binom{n, m}{k}_{\theta} Q_n^{(\theta)}(X) Q_m^{(\theta)}(X)$$

par suite si $\text{ord } \theta = \infty$:

$$P_k^{(\theta)}(XY) = \sum_{n, m \leq k \leq n+m} \left[\begin{matrix} n, m \\ k \end{matrix} \right]_{\theta} P_n^{(\theta)}(X) P_m^{(\theta)}(X). \tag{33}$$

On dit que la suite des polynômes $P_n^{(\theta)}(X)$ est multiplicative triangulaire dissociable par rapport aux coefficients $\left[\begin{matrix} n, m \\ k \end{matrix} \right]_{\theta}$. Il faut noter que si $w < \infty$, (33) est valable pour tout $n, m < w$ et $n + m < w$.

Proposition II. 3.

Si $n = i.w + s, m = j.w + t, l = l.w + r, 0 \leq r, s, t < w$, on a pour tous $n, m \leq k \leq n + m$:

$$\left[\begin{matrix} n, m \\ k \end{matrix} \right]_{\tau} = \binom{i, j}{l}_{\tau} \left[\begin{matrix} s, t \\ r \end{matrix} \right]_{\tau}$$

Preuve :

En effet par définition :

$$\begin{aligned} \left[\begin{matrix} n, m \\ k \end{matrix} \right]_{\tau} &= \tau^{(k-n)(k-m)} \binom{k}{n}_{\tau} \binom{n}{k-m}_{\tau} = \tau^{[(l-i)w+r-s][(l-j)w+r-t]} \binom{lw+r}{iw+s}_{\tau} \binom{(l-j)w+r-t}{(l-j)w+r-t}_{\tau} \\ &= \tau^{(r-s)(r-t)} \binom{l}{i}_{\tau} \binom{r}{s}_{\tau} \binom{i}{l-j}_{\tau} \binom{s}{r-t}_{\tau} = \binom{i, j}{l}_{\tau} \left[\begin{matrix} s, t \\ r \end{matrix} \right]_{\tau}. \blacksquare \end{aligned}$$

Corollaire II. 1.

Dans le cas, où $\text{ord } \tau = w < \infty$ pour tous $n, m \leq k \leq n + m$

$$P_k^{(\tau)}(XY) = \sum_{\substack{n, m \leq k \\ n+m \geq k}} \left[\begin{matrix} n, m \\ k \end{matrix} \right]_{\tau} P_n^{(\tau)}(X) P_m^{(\tau)}(X).$$

c'est-à-dire la formule (33) est valable quel que soit $\text{ord } \tau$.

Preuve :

Soit $k = lw + r$, alors

$$\begin{aligned} P_k^{(\tau)}(XY) &= (X^w Y^w - 1)^l P_r^{(\tau)}(XY) = \sum_{\substack{i, j \leq l \\ i+j \geq l}} \binom{i, j}{l} (X^w - 1)^i (Y^w - 1)^j \cdot \sum_{s+t \geq r}^{s, t \leq r} \left[\begin{matrix} s, t \\ r \end{matrix} \right]_{\tau} P_s^{(\tau)}(X) P_t^{(\tau)}(X) \\ &= \sum_{\substack{iw+s, jw+t \leq lw+r \\ iw+s+jw+t \geq lw+r}} \binom{i, j}{l} \left[\begin{matrix} s, t \\ r \end{matrix} \right]_{\tau} (X^w - 1)^i P_s^{(\tau)}(X) (Y^w - 1)^j P_t^{(\tau)}(X) = \sum_{\substack{n, m \leq k \\ n+m \geq k}} \left[\begin{matrix} n, m \\ k \end{matrix} \right]_{\tau} P_n^{(\tau)}(X) P_m^{(\tau)}(X). \end{aligned}$$

L'avant dernière égalité s'explique comme suit : Tout facteur additif de la partie à gauche se trouve dans la partie à droite. En même temps de l'inégalité $iw + s \leq lw + r$, il découle $i \leq l$ mais pas obligatoirement $s \leq r$. Cependant en vertu de la présence de $\left[\begin{matrix} s, t \\ r \end{matrix} \right]_{\tau}$ il reste uniquement les facteurs additifs avec $s \leq r$. Ainsi la partie à droite ne contient pas de facteurs en plus ■.

III. RELATION D'ORTHOAGONALITE

A. Construction de l'orthogonalité

La construction se base sur les matrices triangulaires supérieures $S = (s_{mn})$ ($m > n \Rightarrow s_{mn} = 0$) à éléments dans le corps commutatif \mathcal{K} . Pour toute suite (ou pour tout vecteur ligne) $x = (x_m)_{m \geq 0}$ d'éléments d'un certain espace vectoriel sur \mathcal{K} est défini le produit $x \times S = (\sum_{m=0}^n x_m \cdot s_{mn})_{n \geq 0}$. La suite $y = x \times S$ des éléments $y_n = \sum_{m=0}^n x_m \cdot s_{mn}$ est appelée la transformée triangulaire supérieure de la suite $x = (x_m)_{m \geq 0}$. Notons que dans le cas où la matrice S est inversible la matrice inverse notée $T = S^{-1} = (t_{mn})$ est aussi une matrice triangulaire supérieure. Les conditions d'inversibilité $S \times T = T \times S = I$ (I est la matrice unité) de la matrice triangulaire supérieure s'écrivent sous la forme :

$$\sum_{n=m}^k s_{mn} \cdot t_{nk} = \delta_{m,k} ; \sum_{n=m}^k t_{mn} \cdot s_{nk} = \delta_{m,k} \tag{34}$$

où $\delta_{m,k}$ est le symbole de Kronecker et elles sont appelées *les relations d'orthogonalité* [1][2]. Les matrices S et T sont l'inverse l'une de l'autre, si et seulement si $x \times S = y \Leftrightarrow y \times T = x$. Autrement dit

$$y_n = \sum_{m=0}^n x_m \cdot s_{mn} \Leftrightarrow x_n = \sum_{m=0}^n y_m \cdot t_{mn} \tag{35}$$

On va aussi appeler les relations (35) « *relations d'orthogonalité* » entre les suites $x = (x_m)_{m \geq 0}$ et $y = (y_m)_{m \geq 0}$. On dit aussi que ces formules sont les *formules de réciprocity* (pour les coefficients s_{mn} et t_{mn} [5]. Dans le cas, où $x = (x_m)_{m \geq 0}$ et $y = (y_m)_{m \geq 0}$ sont des bases d'un même espace vectoriel, les matrices S et T sont les matrices de passage entre ces deux bases. Notons enfin que si x, y, z sont des bases d'un même espace vectoriel, tels que $y = x \times S_1$, $z = y \times S_2$ et $z = x \times S_3$, alors $S_3 = S_1 \times S_2$.

Comme exemple typique de la construction décrite ci-dessus on considère les relations d'orthogonalité entre les suites de polynômes standards dans le sens $\deg P_n(X) = \deg Q_n(X) = n$ ($n \geq 0$), qui forment des bases de l'espace vectoriel des polynômes $\mathcal{K}[X]$,

$$P_n(X) = \sum_{m=0}^n s_{mn} \cdot Q_m(X) \Leftrightarrow Q_n(X) = \sum_{m=0}^n t_{mn} \cdot P_m(X) \tag{36}$$

relations d'orthogonalité qui définissent des matrices triangulaires supérieures réciproques $S = (s_{mn})$ et $S^{-1} = T = (t_{mn})$.

a. Relations d'orthogonalité utilisant les coefficients binomiaux

Dans la suite, on considère quelques relations d'orthogonalité utilisant les coefficients binomiaux entre des polynômes standards spéciaux et les coefficients qui leurs sont affectés.

Les relations d'orthogonalité entre les deux bases canoniques $((X-1)^n)_{n \geq 0}$ et $(X^n)_{n \geq 0}$

$$(X-1)^n = \sum_{m=0}^n (-1)^{n-m} \binom{n}{m} X^m \Leftrightarrow X^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (X-1)^m$$

définissent les matrices supérieures triangulaires réciproques :

$$C_0 = \left((-1)^{n-m} \binom{n}{m} \right)_{m,n \geq 0} \text{ et } (C_0)^{-1} = D_0 = \left(\binom{n}{m} \right)_{m,n \geq 0} \tag{37}$$

Les relations d'orthogonalité entre la suite des polynômes d'interpolation de Newton $\left(\binom{X}{n} \right)_{n \geq 0}$ et la base canonique $(X^n)_{n \geq 0}$

$$\binom{X}{n} = \sum_{m=0}^n \frac{s_1(n,m)}{n!} X^m \Leftrightarrow X^n = \sum_{m=0}^n s_2(n,m) \cdot m! \binom{X}{m}$$

définissent les matrices supérieures triangulaires réciproques :

$$S_0 = \left(\frac{s_1(n,m)}{n!} \right)_{m,n \geq 0} \text{ et } (S_0)^{-1} = T_0 = (s_2(n,m)m!)_{0,m,n \geq 0} \tag{38}$$

Où $s_1(n,m)$ et $s_2(n,m)$ sont respectivement les nombres de Stirling de première et de seconde espèce [1] [2] [10] [17].

Les relations d'orthogonalité (20) et (21) entre la suite des polynômes de Gauss $(P_n^{(\theta)}(X))_{n \geq 0}$ et de la base canonique $(X^n)_{n \geq 0}$

$$P_n^{(\theta)}(X) = \sum_{m=0}^n (-1)^{n-m} \theta^{\binom{n-m}{2}} \binom{n}{m}_\theta X^m \Leftrightarrow X^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m}_\theta P_m^{(\theta)}(X)$$

définissent les matrices supérieures triangulaires réciproques :

$$C_1^{(\theta)} = \left((-1)^{n-m} \theta^{\binom{n-m}{2}} \binom{n}{m}_\theta \right)_{m,n \geq 0} \text{ et } (C_1^{(\theta)})^{-1} = D_1^{(\theta)} = \left(\binom{n}{m}_\theta \right)_{m,n \geq 0} \tag{39}$$

Les relations d'orthogonalité entre la suite des polynômes d'interpolation de Gauss $(Q_n^{(\theta)}(X))_{n \geq 0}$ et de la base canonique $(X^n)_{n \geq 0}$, obtenues à partir des formules (20) et (21)

$$Q_n^{(\theta)}(X) = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^{n-m} \theta^{\binom{n-m}{2}} \binom{n}{m}_\theta}{P_n^{(\theta)}(\theta^n)} X^m \Leftrightarrow X^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m}_\theta P_m^{(\theta)}(\theta^m) Q_m^{(\theta)}(X)$$

définissent les matrices triangulaires supérieures réciproques :

$$S_1^{(\theta)} = \left(\frac{(-1)^{n-m} \theta^{\binom{n-m}{2}} \binom{n}{m}_\theta}{P_n^{(\theta)}(\theta^n)} \right)_{m,n \geq 0} \text{ et } (S_1^{(\theta)})^{-1} = T_1^{(\theta)} = \left(\binom{n}{m}_\theta P_m^{(\theta)}(\theta^m) \right)_{m,n \geq 0} \tag{40}$$

Les relations d'orthogonalité entre la suite des polynômes de Gauss $(P_n^{(\theta)}(X))_{n \geq 0}$ et de la base canonique $((X-1)^n)_{n \geq 0}$ sont

$$(X-1)^n = \sum_{m=0}^n c^{(\theta)}(m,n) P_m^{(\theta)}(X) \Leftrightarrow P_n^{(\theta)}(X) = \sum_{m=0}^n d^{(\theta)}(m,n) (X-1)^m.$$

Donnons les formes explicites des coefficients $d^{(\theta)}(m,n)$ et $c^{(\theta)}(m,n)$. Notons d'abord que $c^{(\theta)}(n,n) = d^{(\theta)}(n,n) = 1$. D'après la formule de Taylor :

$$d^{(\theta)}(m,n) = \left(\frac{D^m P_n^{(\theta)}}{m!} \right) (1) = \sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} \theta^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_\theta \binom{k}{m} \tag{41}$$

que l'on peut écrire sous la forme matricielle $D_2^{(\theta)} = D_0 \times C_1^{(\theta)}$, par suite, en passant à la matrice inverse on obtient $C_2^{(\theta)} = D_1^{(\theta)} \times C_0$, d'où :

$$c^{(\theta)}(m,n) = \sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{m}_\theta. \tag{42}$$

Ainsi sont définies les matrices triangulaires supérieures réciproques :

$$C_2^{(\theta)} = \left((-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{m}_\theta \right)_{m,n \geq 0} \text{ et } (C_2^{(\theta)})^{-1} = D_2^{(\theta)} = \left((-1)^{n-k} \theta^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_\theta \binom{k}{m} \right)_{m,n \geq 0} \tag{43}$$

Notons que dans le cas, où $ord \theta = \infty$ on peut encore écrire :

$$c^{(\theta)}(m,n) = \sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^{m-i} \theta^{\binom{m-i}{2}} \binom{m}{i}_\theta \theta^{ik}}{P_n^{(\theta)}(\theta^m)} = \frac{\sum_{i=0}^n (-1)^{m-i} \theta^{\binom{m-i}{2}} \binom{m}{i}_\theta (\theta^i - 1)^n}{P_n^{(\theta)}(\theta^n)}$$

Les relations d'orthogonalité entre la suite des polynômes d'interpolation de Gauss $(Q_n^{(\theta)}(X))_{n \geq 0}$ (avec $ord \theta = \infty$) et de la base canonique $((X-1)^n)_{n \geq 0}$:

$$Q_n^{(\theta)}(X) = \sum_{m=0}^n \frac{d^{(\theta)}(m, n)}{P_n^{(\theta)}(\theta^n)} (X-1)^m \Leftrightarrow (X-1)^n = \sum_{m=0}^n c^{(\theta)}(m, n) P_m^{(\theta)}(\theta^m) Q_m^{(\theta)}(X),$$

où les coefficients $d^{(\theta)}(m, n)$ et $c^{(\theta)}(m, n)$ sont donnés respectivement par les formules (41) et (42) définissent les matrices triangulaires réciproques :

$$S_2^{(\theta)} = \left(\frac{d^{(\theta)}(m, n)}{P_n^{(\theta)}(\theta^n)} \right)_{m, n \geq 0} \quad \text{et} \quad (S_2^{(\theta)})^{-1} = T_2^{(\theta)} = \left(c^{(\theta)}(m, n) P_m^{(\theta)}(\theta^m) \right)_{m, n \geq 0} \quad (44)$$

Remarquons que pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{d^{(\theta)}(1, n)}{P_n^{(\theta)}(\theta^n)} = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (1 - \theta^i)}{\prod_{i=0}^{n-1} (\theta^n - \theta^i)} = \frac{(-1)^n \theta^{-\binom{n}{2}}}{1 - \theta^n}.$$

les relations d'orthogonalité entre les suites des polynômes de Gauss $(P_n^{(\theta)}(X))_{n \geq 0}$ et $(P_n^{(\tau)}(X))_{n \geq 0}$ de paramètres différents θ et τ

$$P_n^{(\theta)}(X) = \sum_{m=0}^n c^{(\tau, \theta)}(m, n) P_m^{(\tau)}(X) \Leftrightarrow P_n^{(\tau)}(X) = \sum_{m=0}^n c^{(\theta, \tau)}(m, n) P_m^{(\theta)}(X)$$

définissent les matrices triangulaires réciproques

$$C^{(\tau, \theta)} = \left(c^{(\tau, \theta)}(m, n) \right)_{m, n \geq 0} \quad \text{et} \quad (C^{(\tau, \theta)})^{-1} = C^{(\theta, \tau)} = \left(c^{(\theta, \tau)}(m, n) \right)_{m, n \geq 0}, \quad (45)$$

où, d'après la formule (39) on a $D_1^{(\tau)} \times C_1^{(\theta)} = C^{(\tau, \theta)}$, par suite

$$c^{(\tau, \theta)}(m, n) = \sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} \theta^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_\theta \binom{k}{m}_\tau \quad (46)$$

Les relations d'orthogonalité entre la suite des polynômes d'interpolation de Gauss $(Q_n^{(\theta)}(X))_{n \geq 0}$ ($ord \theta = \infty$) de paramètre θ et la suite des polynômes de Gauss $(P_n^{(\tau)}(X))_{n \geq 0}$ de paramètre τ :

$$Q_n^{(\theta)}(X) = \sum_{m=0}^n \frac{c^{(\tau, \theta)}(m, n)}{P_n^{(\theta)}(\theta^n)} P_m^{(\tau)}(X) \Leftrightarrow P_n^{(\tau)}(X) = \sum_{m=0}^n c^{(\theta, \tau)}(m, n) P_m^{(\theta)}(\theta^m) Q_m^{(\theta)}(X),$$

où les coefficients $c^{(\tau, \theta)}(m, n)$ et $c^{(\theta, \tau)}(m, n)$ sont donnés par la formule (46), définissent les matrices triangulaires réciproques :

$$S^{(\tau, \theta)} = \left(\frac{c^{(\tau, \theta)}(m, n)}{P_n^{(\theta)}(\theta^n)} \right)_{m, n \geq 0} \quad \text{et} \quad (S^{(\tau, \theta)})^{-1} = T^{(\tau, \theta)} = \left(c^{(\theta, \tau)}(m, n) P_m^{(\theta)}(\theta^m) \right)_{m, n \geq 0} \quad (47)$$

IV. SUITE DE POLYNOMES TRIANGULAIRES DISSOCIABLES

Le système d'éléments $(A_k^{n, m})_{k, m, n \geq 0}$ d'un corps commutatif \mathcal{K} est dit triangulaire si $A_k^{n, m} = 0$ pour $k > n + m$ ou $k < \max(n, m)$. Dans ce cas les éléments $A_k^{n, m}$ sont appelés coefficients triangulaires. Tout système de coefficients $(A_k^{n, m})_{k, m, n \geq 0}$, tel que $(n + m \geq k \geq \max(n, m))$, peut être prolongé par des éléments nuls pour obtenir un système triangulaire.

Soit $(P_n(X))_{n \geq 0}$ une suite de polynômes standards (i.e. $\deg P_n = n$), "*" une opération sur les arguments ($X * Y \in \mathcal{K}[X, Y]$). On dit que la suite $(P_n(X))_{n \geq 0}$ est triangulaire dissociable par rapport à l'opération "*" et le système de coefficients triangulaires $(A_k^{n, m})_{k, m, n \geq 0}$ si elle vérifie la décomposition suivante :

$$P_k(X * Y) = \sum_{\substack{n, m \leq k \\ n+m \geq k}} A_k^{n, m} P_n(X) P_m(Y) \quad (48)$$

En vertu de l'indépendance linéaire du système $\{P_n(X)P_m(Y)\}_{m,n \geq 0}$, les coefficients $A_k^{n,m}$ sont définis d'une manière uniforme. Lorsque l'opération « * » est l'addition « + » on dit que le système est dissociable additif et lorsque l'opération « * » est la multiplication « × » on dit que le système est dissociable multiplicatif. On dit qu'une suite $(P_n(X))_{n \geq 0}$ est triangulaire dissociable si et seulement si, elle est triangulaire dissociable par rapport à un certain système de coefficients triangulaires. Lorsque l'opération * est commutative (resp. associative), on a respectivement

$$A_k^{n,m} = A_k^{m,n} \text{ et } \sum_{i=\max(n,m)}^k A_i^{n,m} A_i^{i,\ell} = \sum_{j=\max(m,\ell)}^k A_k^{n,j} A_j^{m,\ell} \quad (k, \ell, m, n \geq 0) \tag{49}$$

Il résulte de la définition (48) que pour $n = 0$, $P_0(X) = (A_0^{0,0})^{-1}$.

Un élément $\varepsilon \in \mathcal{K}$ est unité par rapport à l'opération « * » si $X * \varepsilon = X$. Il est évident que dans le cas multiplicatif $\varepsilon = 1$ et dans le cas additif $\varepsilon = 0$.

Lemme IV. 1.

Ou bien $A_k^{k,0} = A_0^{0,0}$ ou bien $P_k(\varepsilon) = 0 \quad (k \geq 1)$.

Preuve :

Il résulte de la définition (48) la relation $\sum_{m=k-n}^k A_k^{n,m} P_n(\varepsilon) P_m(\varepsilon) = P_k(\varepsilon) \quad (n = 0, 1, \dots, k)$, d'où $A_k^{k,0} P_0(\varepsilon) P_k(\varepsilon) = P_k(\varepsilon) \quad (k \geq 1)$. ■

En théorie combinatoire, la suite de polynômes $(P_n(X))_{n \geq 0}$ est dite binomiale, si :

$$P_0(X) = 1 \text{ et } P_k(X + Y) = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} P_n(X) P_{k-n}(Y) \quad (k \geq 0).$$

Ainsi une suite binomiale est triangulaire additive dissociable par rapport au système des coefficients triangulaires $A_k^{n,m} = \binom{k}{n} \delta_{k,n+m}$ et $P_k(0) = 0 \quad (k \geq 1)$. Comme exemples de suites binomiales on peut citer $(X^n)_{n \geq 0}$, $((X)_n)_{n \geq 0}$, avec $(X)_n = X(X - 1) \dots (X - n + 1) \quad (n \geq 0)$

La notion de suite triangulaire dissociable peut être considérée comme la généralisation de la suite binomiale de polynômes dans trois directions : a) extension du domaine de sommation, b) forme arbitraire des coefficients, c) opération arbitraire.

Deux systèmes triangulaires $A = (A_k^{n,m})$ et $B = (B_k^{n,m})$ sont dits associés, s'il existe une suite de scalaires non nuls $(\lambda_n)_{n \geq 0}$, tels que $A_k^{n,m} = \frac{\lambda_n \lambda_m}{\lambda_k} B_k^{n,m} \quad (k, m, n \geq 0)$.

Deux suites de polynômes $(P_n(X))_{n \geq 0}$ et $(Q_n(X))_{n \geq 0}$ sont dites associées, s'il existe une suite de scalaires non nuls $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ tels que $Q_n(X) = \lambda_n \cdot P_n(X) \quad (n \geq 0)$.

Lemme IV. 2.

Si deux suites triangulaires dissociables $(P_n(X))_{n \geq 0}$ et $(Q_n(X))_{n \geq 0}$ respectivement par rapport aux systèmes triangulaires A et B sont associées, alors les systèmes correspondants A et B sont aussi associés avec la même suite de coefficients $(\lambda_n)_{n \geq 0}$.

Lemme IV. 3.

Si $(Q_n(X))_{n \geq 0}$ est une suite de polynômes associée, avec la suite de coefficients $(\lambda_n)_{n \geq 0}$, à une suite de polynômes $(P_n(X))_{n \geq 0}$, $(P_n(X) = \lambda_n \cdot Q_n(X))$ triangulaire dissociable par rapport au système A , alors $(Q_n(X))_{n \geq 0}$ est triangulaire dissociable par rapport à un système B associé à A , avec la suite de coefficients $(\lambda_n^{-1})_{n \geq 0}$.

Donnons quelques exemples de suites triangulaires multiplicatives dissociables.

1) La suite de polynômes $(X^n)_{n \geq 0}$ est triangulaire multiplicative dissociable par rapport au système triangulaire $A_k^{n,m} = \delta_{k,n} \cdot \delta_{k,m}$.

2) La suite de polynômes $((X - 1)^n)_{n \geq 0}$ est triangulaire multiplicative dissociable par rapport au système triangulaire $A_k^{n,m} = \binom{n}{k} = \binom{k}{n} \binom{n}{k-m}$, d'après la formule (6).

3) La suite de polynômes $(P_n^{(\theta)}(X))_{n \geq 0}$ est triangulaire multiplicative dissociable par rapport au système triangulaire $A_k^{n,m} = \left[\begin{matrix} n, m \\ k \end{matrix} \right]_{\theta} = \theta^{(k-n)(k-m)} \binom{k}{n}_{\theta} \binom{n}{k-m}_{\theta}$, d'après la formule (35) et le corollaire de la proposition 8.

4) La suite de polynômes $(Q_n^{(\theta)}(X))_{n \geq 0}$ (*ord* $\theta = \infty$) est triangulaire multiplicative dissociable par rapport au système triangulaire

$$A_k^{n,m} = \binom{n}{k}_{\theta} = \left(P_{n+m-k}^{(\theta)}(\theta^n) \cdot P_{n+m-k}^{(\theta)}(\theta^m) \right) / \left(P_{n+m-k}^{(\theta)}(\theta^{n+m-k}) \right)$$

Soient maintenant $(P_n(X))_{n \geq 0}$ et $(Q_n(X))_{n \geq 0}$ deux suites standards de polynômes liées par les relations d'orthogonalité (36) qui définissent des matrices triangulaires supérieures réciproques $S = (s_{mn})$ et $S^{-1} = T = (t_{mn})$. Rappelons ces relations d'orthogonalité

$$P_n(X) = \sum_{m=0}^n s_{mn} \cdot Q_m(X) \Leftrightarrow Q_n(X) = \sum_{m=0}^n t_{mn} \cdot P_m(X)$$

Lemme IV. 4.

Si $(P_n(X))_{n \geq 0}$ est une suite triangulaire dissociable par rapport à l'opération « * » et le système triangulaire $A = (A_k^{n,m})$, alors $(Q_n(X))_{n \geq 0}$ est triangulaire dissociable par rapport à l'opération « * » et le système $B = (B_k^{n,m})$ si, et seulement si, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\sum_{\substack{u,v \leq k \\ u+v \geq k}} t_{iu} t_{jv} B_k^{u,v} = \sum_{h=\max(i,j)}^{\min(i+j,k)} A_h^{i,j} t_{hk} \quad (i, j, k \geq 0) \tag{50}$$

Preuve :

En effet la suite $(Q_n(X))_{n \geq 0}$ est triangulaire dissociable par rapport à «*» et $B = (B_k^{n,m})$ si, et seulement si,

$$\begin{aligned} Q_k(X * Y) &= \sum_{\substack{u,v \leq k \\ u+v \geq k}} B_k^{u,v} Q_u(X) Q_v(Y) \Leftrightarrow \sum_{h=0}^k t_{hk} P_h(X * Y) = \sum_{\substack{u,v \leq k \\ u+v \geq k}} B_k^{u,v} \sum_{i=0}^u t_{iu} P_i(X) \sum_{j=0}^v t_{jv} P_j(Y) \\ &\Leftrightarrow \sum_{h=0}^k t_{hk} \sum_{\substack{i,j \leq h \\ i+j \geq h}} A_h^{i,j} P_i(X) P_j(Y) = \sum_{i,j=0}^k \left(\sum_{\substack{u,v \leq k \\ u+v \geq k}} t_{iu} t_{jv} B_k^{u,v} \right) P_i(X) P_j(Y) \\ &\Leftrightarrow \sum_{i,j=0}^k \left(\sum_{h=\max(i,j)}^{\min(i+j,k)} A_h^{i,j} t_{hk} \right) P_i(X) P_j(Y) = \sum_{i,j=0}^k \left(\sum_{\substack{u,v \leq k \\ u+v \geq k}} t_{iu} t_{jv} B_k^{u,v} \right) P_i(X) P_j(Y). \blacksquare \end{aligned}$$

Lemme IV. 5.

La relation (50) est équivalente à la relation duale :

$$\sum_{\substack{i,j \leq \ell \\ i+j \geq \ell}} s_{ni} s_{mj} A_{\ell}^{i,j} = \sum_{k=\max(n,m)}^{\min(n+m, \ell)} B_k^{n,m} s_{k\ell} \quad (\ell, m, n \geq 0) \tag{51}$$

Notons que la relation (51) est équivalente à :

$$\sum_{k=\max(n,m)}^{\ell} t_{k\ell} \sum_{\substack{i,j \leq k \\ i+j \geq k}} A_k^{i,j} s_{ni} s_{mj} = \begin{cases} B_{\ell}^{n,m} & \text{si } n+m \geq \ell \geq \max(n,m) \\ 0 & \text{si } \ell \geq n+m \text{ ou } \ell < \max(n,m) \end{cases}$$

Donnons quelques exemples de relations de la forme (51) obtenus en se basant sur les *lemmes* IV. 4 et IV. 5.

1) Pour les suites triangulaires additives dissociables $\left(\binom{X}{n}\right)_{n \geq 0}$ par rapport à $A = (\delta_{k,n+m})$ et $(X^n)_{n \geq 0}$ par rapport à $B = \left(\binom{k}{n} \delta_{k,n+m}\right)$ on obtient la formule connue des nombres de Stirling [Riordan]

$$\sum_{i+j=\ell} \frac{s_1(i,n) s_1(j,m)}{i! j!} = \binom{n+m}{n} \frac{s_1(\ell, n+m)}{\ell!}$$

2) Pour les suites triangulaires multiplicatives dissociables $(Q_n^{(\theta)}(X))_{n \geq 0}$ par rapport à $A = \left(\binom{n,m}{k}\right)_{\theta}$ et $(X^n)_{n \geq 0}$ par rapport à $B = (\delta_{kn} \delta_{km})$, d'après les relations d'orthogonalité (40) on obtient

$$\sum_{\substack{i,j \leq \ell \\ i+j \geq \ell}} \binom{i,j}{\ell}_{\theta} \frac{\left((-1)^{i-n} \theta^{\binom{i-n}{2}} \binom{i}{n}_{\theta}\right) \left((-1)^{j-m} \theta^{\binom{j-m}{2}} \binom{j}{m}_{\theta}\right)}{P_i^{(\theta)}(\theta^i) P_j^{(\theta)}(\theta^j)} = \sum_{k=\max(n,m)}^{\min(n+m,\ell)} \delta_{kn} \delta_{km} \frac{(-1)^{\ell-k} \theta^{\binom{\ell-k}{2}} \binom{\ell}{k}_{\theta}}{P_{\ell}^{(\theta)}(\theta^{\ell})}$$

3) Pour les suites triangulaires multiplicatives dissociables $(Q_n^{(\theta)}(X))_{n \geq 0}$ par rapport à $A = \left(\binom{n,m}{k}\right)_{\theta}$ et $((X-1)^n)_{n \geq 0}$ par rapport à $B = \left(\binom{n,m}{k}\right)$, d'après les relations d'orthogonalité (44), on obtient

$$\sum_{\substack{i,j \leq \ell \\ i+j \geq \ell}} \binom{i,j}{\ell}_{\theta} \frac{d^{(\theta)}(n,i) d^{(\theta)}(m,j)}{P_i^{(\theta)}(\theta^i) P_j^{(\theta)}(\theta^j)} = \sum_{k=\max(n,m)}^{\min(n+m,\ell)} \binom{n,m}{k} \frac{d^{(\theta)}(k,\ell)}{P_{\ell}^{(\theta)}(\theta^{\ell})}$$

où $d^{(\theta)}(m,n) = \sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} \theta^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_{\theta} \binom{k}{m}$ (formule (41)).

4) Pour les suites triangulaires multiplicatives dissociables $(Q_n^{(\theta)}(X))_{n \geq 0}$ par rapport à $A = \left(\binom{n,m}{k}\right)_{\theta}$ et $(P_n^{(\tau)}(X))_{n \geq 0}$ par rapport à $B = \left[\begin{smallmatrix} n, m \\ k \end{smallmatrix}\right]_{\tau}$, d'après les relations d'orthogonalité (47) on obtient

$$\sum_{\substack{i,j \leq \ell \\ i+j \geq \ell}} \binom{i,j}{\ell}_{\theta} \frac{c^{(\tau,\theta)}(n,i) c^{(\tau,\theta)}(m,j)}{P_i^{(\theta)}(\theta^i) P_j^{(\theta)}(\theta^j)} = \sum_{k=\max(n,m)}^{\min(n+m,\ell)} \left[\begin{smallmatrix} n, m \\ k \end{smallmatrix}\right]_{\tau} \frac{c^{(\tau,\theta)}(k,\ell)}{P_{\ell}^{(\theta)}(\theta^{\ell})}$$

où $c^{(\tau,\theta)}(m,n) = \sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} \theta^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_{\theta} \binom{k}{m}_{\tau}$ (formule (46)).

En se référant aux résultats précédents on peut obtenir les critères de la triangularité dissociable de la suite de polynômes standards $(P_n(X))_{n \geq 0}$ vérifiant les relations d'orthogonalité

$$P_n(X) = \sum_{m=0}^n s_{mn} X^m \Leftrightarrow X^n = \sum_{m=0}^n t_{mn} P_m(X)$$

Ici $S = (s_{mn})_{m,n \geq 0}$ et $T = (t_{mn})_{m,n \geq 0}$ sont des matrices triangulaires supérieures inverses l'une de l'autre.

Lemme IV. 6.

La suite $(P_n(X))_{n \geq 0}$ est triangulaire multiplicative dissociable par rapport au système des coefficients triangulaires $A = (A_k^{n,m})$ si et seulement si

$$t_{n\ell}t_{m\ell} = \sum_{k=\max(n,m)}^{\min(n+m,\ell)} A_k^{n,m} t_{k\ell} \quad (\ell, m, n \geq 0) \tag{52}$$

Preuve :

Il suffit d'appliquer la formule (50), sachant que la suite de polynômes $(X^n)_{n \geq 0}$ est triangulaire multiplicative dissociable par rapport au système $(\delta_{k,n} \cdot \delta_{k,m})$. ■

Notons que l'égalité (52) est équivalente à :

$$\sum_{k=0}^{\ell} s_{k\ell} t_{nk} t_{mk} = \begin{cases} A_{\ell}^{n,m} & \text{si } n + m \geq \ell \geq \max(n, m) \\ 0 & \text{si } \ell \geq n + m \text{ ou } \ell < \max(n, m) \end{cases} \tag{53}$$

D'où la suite $(P_n(X))_{n \geq 0}$ est triangulaire multiplicative dissociable si et seulement si $\sum_{k=\max(n,m)}^{\ell} s_{k\ell} t_{nk} t_{m\ell} = 0$ lorsque $\ell \geq n + m$ ou $\ell < \max(n, m)$. Dans ce cas :

$$A_{\ell}^{n,m} = \sum_{k=\max(n,m)}^{\ell} s_{k\ell} t_{nk} t_{mk} \quad (n + m \geq \ell \geq \max(n, m)) \tag{54}$$

Par exemple considérons la suite de polynômes de Gauss $(P_n^{(\theta)}(X))_{n \geq 0}$ pour laquelle $S = ((-1)^{n-m} \theta^{\binom{n-m}{2}} \binom{n}{m}_{\theta})_{m,n \geq 0}$ et $T = (\binom{n}{m}_{\theta})_{m,n \geq 0}$ formule (39). On a, d'après la formule (30), l'identité $\binom{\ell}{n}_{\theta} \binom{\ell}{m}_{\theta} = \sum_{k=\max(n,m)}^{\ell} \begin{bmatrix} n, m \\ k \end{bmatrix}_{\theta} \binom{\ell}{k}_{\theta}$, autrement dit la condition du lemme 4.6 est bien vérifiée. Il résulte alors de la formule (54)

$$A_{\ell}^{n,m} = \sum_{k=\max(n,m)}^{\ell} (-1)^{\ell-k} \theta^{\binom{\ell-k}{2}} \binom{\ell}{k}_{\theta} \binom{k}{n}_{\theta} \binom{k}{m}_{\theta} = \begin{bmatrix} n, m \\ \ell \end{bmatrix}_{\theta}$$

Les critères de triangularité additive peuvent être aussi obtenus d'une manière analogue.

La suite $(P_n(X))_{n \geq 0}$ est triangulaire additive dissociable par rapport à $A = (A_k^{n,m})$ si et seulement si,

$$\sum_{0 \leq i \leq \ell} \binom{\ell}{i} t_{ni} t_{m(\ell-i)} = \sum_{k=\max(n,m)}^{\min(n+m,\ell)} A_k^{n,m} t_{k\ell} \tag{55}$$

V. SUITE TRIANGULAIRE MULTIPLIABLE

A. Définition

Soit A une algèbre unitaire associative et commutative. Une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de A est dite « triangulaire multipliable » par rapport au système triangulaire $A = (A_k^{n,m})$, si elle est linéairement indépendante et vérifie le développement suivant :

$$a_n a_m = \sum_{k=\max(n,m)}^{n+m} A_k^{n,m} a_k \tag{56}$$

Notons que les coefficients $A_k^{n,m}$ sont définis d'une manière uniforme. Pour $m = 1$ on obtient la relation de récurrence $A_{n+1}^{n,1} a_{n+1} = a_n (a_1 - A_n^{n,1})$ ($n \geq 0$). Il résulte de l'associativité, de la commutativité de l'algèbre A et de triangularité des coefficients A.

$$\sum_{j=\max(m,\ell,k-n)}^{\min(k,m+\ell)} A_k^{n,j} A_j^{m,\ell} = \sum_{i=\max(n,m,k-\ell)}^{\min(k,n+m)} A_i^{n,m} A_i^{i,\ell} \tag{57}$$

$$A_k^{n,m} = A_k^{m,n} \tag{58}$$

$$A_k^{n,0} = A_n^{n,0} \delta_{kn} \tag{59}$$

Par suite

$$A_{m+1}^{m,1} A_k^{n,m+1} = A_k^{k-1,1} A_{k-1}^{n,m} + (A_k^{k,1} - A_m^{m,1}) A_k^{n,m} \tag{60}$$

Pour cela il suffit de poser $\ell = 1$ dans (57).

Corollaire V. 1.

Si l'algèbre unitaire A est sans diviseurs de zéros, alors

$$a_0 = A_0^{0,0} = 1 = A_n^{0,n}, \quad A_k^{n,0} = \delta_{kn} \quad (n \geq 0) \tag{61}$$

a. Suites associées

En généralisant les suites de polynômes associées, on dit que deux suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ d'une algèbre A sont associées s'il existe une suite de scalaires $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ telle que $\lambda_n \neq 0$ ($n \geq 0$) et $a_n = \lambda_n b_n$ ($n \geq 0$). On démontre que si deux suites $a = (a_n)_{n \geq 0}$ et $b = (b_n)_{n \geq 0}$ sont triangulaires multipliables respectivement par rapport à $A = (A_k^{n,m})$ et à $B = (B_k^{n,m})$, alors les systèmes A et B sont aussi associés avec la même suite de scalaires. De même tout système triangulaire $B = (B_k^{n,m})$ associé à un système triangulaire $A = (A_k^{n,m})$, qui satisfait les conditions (57) – (61), vérifie également ces conditions.

Comme exemples de suite triangulaire multipliable on peut citer les suites de polynômes standards par rapport à des coefficients triangulaires connus. Par exemple :

$$\begin{aligned} \mathbf{1)} \quad & a_n = X^n, A_k^{n,m} = \delta_{k(n+m)}, \quad \mathbf{2)} \quad a_n = X^n/n!, A_k^{n,m} = \binom{k}{n} \delta_{k(n+m)}, \quad \mathbf{3)} \quad a_n = \binom{X}{n}, A_k^{n,m} = \binom{n,m}{k}, \quad \mathbf{4)} \quad a_n = \\ & P_n^{(\theta)}(X), A_k^{n,m} = \binom{n,m}{k}_\theta, a_n = Q_n^{(\theta)}(X), A_k^{n,m} = \left[\begin{matrix} n, m \\ k \end{matrix} \right]_\theta \quad (ord \theta = \infty). \end{aligned}$$

b. Suite de polynômes triangulaires multipliables et Orthogonalités

Considérons maintenant deux suites linéairement indépendantes d'éléments de l'algèbre A $a = (a_n)_{n \geq 0}$ et $b = (b_n)_{n \geq 0}$ vérifiant la relation d'orthogonalité $a_n = \sum_{m=0}^n s_{mn} b_m \Leftrightarrow b_n = \sum_{m=0}^n t_{mn} a_m$, où $S = (s_{mn})_{m,n \geq 0}$ et $T = (t_{mn})_{m,n \geq 0}$ sont des matrices triangulaires supérieures inverses l'une de l'autre. Alors si $a = (a_n)_{n \geq 0}$ et $b = (b_n)_{n \geq 0}$ sont respectivement triangulaires multipliables par rapport à $A = (A_k^{n,m})$ et à $B = (B_k^{n,m})$ on a

$$\sum_{\substack{i,j \leq \ell \\ i+j \geq \ell}} t_{in} t_{jm} A_\ell^{i,j} = \sum_{k=\max(\ell,m,n)}^{n+m} B_k^{n,m} t_{\ell k} \Leftrightarrow \sum_{\substack{i,j \leq \ell \\ i+j \geq \ell}} s_{in} s_{jm} B_\ell^{i,j} = \sum_{k=\max(\ell,m,n)}^{n+m} A_k^{n,m} s_{\ell k} \tag{62}$$

Ainsi, d'après la relation d'orthogonalité

$$P_n(X) = \sum_{m=0}^n s_{mn} X^m \Leftrightarrow X^n = \sum_{m=0}^n t_{mn} P_m(X)$$

la suite de polynômes $(P_n(X))_{n \geq 0}$ est triangulaire multipliable par rapport $A = (A_k^{n,m})$ si et seulement si,

$$\sum_{0 \leq i \leq \ell} t_{in} t_{(\ell-i)m} = \sum_{k=\max(\ell,m,n)}^{n+m} A_k^{n,m} t_{\ell k} \quad (\ell, m, n \geq 0). \tag{63}$$

c. Méthode générale pour obtenir des systèmes triangulaires

On va donner une méthode générale pour obtenir des systèmes triangulaires. On dit qu'un système triangulaire $A = (A_k^{n,m})$ satisfaisant aux conditions (57) – (61) est unitaire, si $A_{n+1}^{n,1} = 1$ ($n \geq 0$). Ainsi pour un système triangulaire unitaire les formules (60), (61) prennent les formes

$$A_k^{n,m+1} = A_{k-1}^{n,m} + (A_k^{k,1} - A_m^{m,1}) A_k^{n,m}, \quad A_k^{n,0} = \delta_{kn} \quad (k, n \geq 0) \tag{64}$$

. Soit maintenant donnée une suite de scalaires $(\lambda_n)_{n \geq 0}$. En s'inspirant de la formule (63) ci-dessus et des conditions (57) – (61), on définit les coefficients $\omega_k^{n,m}$ ($k, m, n \geq 0$) par les relations de récurrence

$$\omega_k^{n,0} = \omega_k^{0,n} = \delta_{kn}, \quad \omega_k^{n,m+1} = \omega_{k-1}^{n,m} + (\lambda_k - \lambda_m)\omega_k^{n,m} \quad (k, m, n \geq 0) \tag{65}$$

Il en résulte $\omega_{n+1}^{n,1} = 1$, $\omega_n^{n,1} = \lambda_n - \lambda_0$, $\omega_0^{0,0} = 1$.

Lemme V. 1.

Les coefficients $\omega_k^{n,m}$ sont triangulaires, i.e.

$$n + m < k \text{ ou } k < \max(n, m) \Rightarrow \omega_k^{n,m} = 0.$$

Preuve :

On démontre par récurrence sur m pour tous les n, k . Pour $m = 0$ la formule (64) signifie que $n < k$ ou $k < n \Rightarrow \omega_k^{n,0} = 0$. Supposons le lemme vrai jusqu'à un certain m et démontrons le pour $m + 1$. Supposons d'abord que $n + m + 1 < k$. Par hypothèse de récurrence, on a $n + m < k \Rightarrow \omega_{k-1}^{n,m} = 0$ et $n + m < k \Rightarrow \omega_k^{n,m} = 0$, par suite, d'après (64) $\omega_k^{n,m+1} = 0$. Supposons maintenant que $k < \max(n, m + 1)$. Considérons deux cas. Dans le cas, où $m < n$ on a $\max(n, m + 1) = n$, ainsi $k < n$. Par hypothèse de récurrence si $k - 1 < n = \max(n, m)$, $\omega_{k-1}^{n,m} = 0$, si $k < n = \max(n, m)$, $\omega_k^{n,m} = 0$ et, par suite, d'après (64) $\omega_k^{n,m+1} = 0$. Dans le cas où $m \geq n$ on a $\max(n, m + 1) = m + 1$, alors $k < m + 1$. Considérons les deux sous cas possibles : Pour $k = m$, par hypothèse de récurrence $m - 1 < m = \max(n, m) \Rightarrow \omega_{m-1}^{n,m} = 0$, d'où d'après (64) $\omega_m^{n,m+1} = 0 + (\lambda_m - \lambda_m)\omega_m^{n,m} = 0$. Pour $k < m$ par hypothèse de récurrence $k - 1 < m = \max(n, m) \Rightarrow \omega_{k-1}^{n,m} = 0$, de même $k < n = \max(n, m) \Rightarrow \omega_k^{n,m} = 0$. Ainsi d'après (64) $\omega_k^{n,m+1} = 0$. ■

Notons de plus que le système $\omega = (\omega_k^{n,m})$ satisfait les conditions (58) – (60).

On va généraliser la construction précédente. Etant donné deux suites de scalaires $\lambda = (\lambda_n)_{n \geq 0}$ et $\mu = (\mu_n)_{n \geq 0}$, telles que $\mu_n \neq 0$ ($n \geq 0$). On définit les coefficients $\Pi_k^{n,m}$ ($k, m, n \geq 0$) par les relations de récurrence

$$\Pi_k^{0,n} = \Pi_k^{n,0} = \mu_0 \delta_{kn}, \quad \mu_m \Pi_k^{n,m+1} = \mu_k \Pi_{k-1}^{n,m} + (\lambda_k - \lambda_m) \Pi_k^{n,m} \tag{66}$$

Posons

$$\rho_0 = \mu_0, \rho_1 = 1, \dots, \rho_n = \frac{1}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{n-1}} \quad (n \geq 2)$$

$$\varphi_k^{n,m} = \frac{\rho_k}{\rho_n \rho_m} \Pi_k^{n,m} \Leftrightarrow \Pi_k^{n,m} = \frac{\rho_n \rho_m}{\rho_k} \varphi_k^{n,m} \tag{67}$$

Les coefficients $\varphi_k^{n,m}$ satisfont aux conditions (65), à savoir

$$\varphi_k^{n,0} = \varphi_k^{0,n} = \delta_{kn}, \quad \varphi_k^{n,m+1} = \varphi_{k-1}^{n,m} + (\lambda_k - \lambda_m)\varphi_k^{n,m} \quad (k, m, n \geq 0)$$

et ainsi coïncident avec $\omega_k^{n,m}$, par suite le système $\Pi = (\Pi_k^{n,m})$ est triangulaire associé à $\omega = (\omega_k^{n,m})$.

d. Construction de suite de polynômes triangulaires multipliables

On va construire une suite de polynômes triangulaires multipliables. Une suite de polynômes est dite unitaire, si elle est une suite de polynômes standards et les coefficients dominants de tous les polynômes sont égaux à l'unité 1. IL est facile de voir que si une suite de polynômes unitaires est triangulaire multipliable par rapport à $A = (A_k^{n,m})$, alors le système A est unitaire. Soit

$$\omega_0^{(\lambda)}(X) = 1, \quad \omega_n^{(\lambda)}(X) = (X - \lambda_0)(X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_{n-1}) \quad (n \geq 1) \tag{68}$$

une suite unitaire de polynômes. Notons la relation de récurrence

$$\omega_{n+1}^{(\lambda)}(X) = \omega_n^{(\lambda)}(X)(\omega_1^{(\lambda)}(X) + \lambda_0 - \lambda_n). \tag{69}$$

On démontre que la suite $(\omega_n^{(\lambda)}(X))_{n \geq 0}$ est triangulaire multipliable par rapport au système unitaire $\omega = (\omega_k^{n,m})$ défini par la formule (64).

On introduit ensuite la suite de polynômes $Q_n^{(\lambda,\mu)}(X) = \rho_n \omega_n^{(\lambda)}(X)$ ($n \geq 0$). La suite $(Q_n^{(\lambda,\mu)}(X))_{n \geq 0}$ est triangulaire multipliable par rapport à $\Pi = (\Pi_k^{n,m})$.

Donnons quelques exemples de polynômes $\omega_n^{(\lambda)}(X)$ et $Q_n^{(\lambda,\mu)}(X)$. **1**) Pour $\lambda_n = 0, n \geq 0$, on a $\omega_k^{n,m} = \delta_{k(n+m)}$ et $\omega_n^{(\lambda)}(X) = X^n$. **2**) Pour $\lambda_n = 0, \mu_n = n + 1, n \geq 0$, on a $\rho_n = 1/n!$, $Q_n^{(\lambda,\mu)}(X) = X^n/n!$. **3**) Pour $\lambda_n = \theta^n$ ($\theta \neq 0, 1$) on a $\omega_n^{(\lambda)}(X) = P_n^{(\theta)}(X)$. **4**) Pour $\lambda_n = n$ ($n \geq 0$) on a $\omega_n^{(\lambda)}(X) = (X)_n$. **5**) Pour $\lambda_n = n, \mu_n = n + 1, n \geq 0$ on a $Q_n^{(\lambda,\mu)}(X) = \binom{X}{n}$. **6**) Pour $\lambda_n = (\theta^n - 1)/(\theta - 1)$ $n \geq 0, ord \theta = \infty$, on a $\omega_n^{(\lambda)}(X) = (P_n^{(\theta)}[(\theta - 1)X + 1])/((\theta - 1)^n)$. **7**) Pour $\lambda_n = (\theta^n - 1)/(\theta - 1), \mu_n = \theta^n (\theta^{n+1} - 1)/(\theta - 1)$ $n \geq 0, ord \theta = \infty$ on a $Q_n^{(\lambda,\mu)}(X) = Q_n^{(\theta)}(X)$.

e. Notion générale de système unitaire triangulaire

Dans la suite on passe à la notion générale de système unitaire triangulaire. Un système triangulaire $A = (A_k^{n,m})$ satisfaisant aux relations (57) – (60) est dit non dégénéré si $A_{n+1}^{n,1} \neq 0, (n \geq 0)$ et dégénéré dans le cas contraire. Tout système associé à un système non dégénéré est aussi non dégénéré. Pour le système A , la relation (60) peut être considérée comme les relations de récurrence (66) avec les coefficients $\mu_n = A_{n+1}^{n,1}, \lambda_n = A_n^{n,1}$ ($n \geq 0$), tandis que la relation (61) comme les conditions initiales dans (66) avec $\mu_0 = A_1^{0,1}$. Ainsi le système A est défini d’une manière uniforme. Autrement dit $A_k^{n,m} = \Pi_k^{n,m}$, où $\Pi_k^{n,m}$ est défini par les relations (66) avec les scalaires $\mu_n = \Pi_{n+1}^{n,1}$ et $\lambda_n = \Pi_n^{n,1}$ indiqués ci-dessus. Il s’en suit qu’un système non dégénéré est associé à un système unitaire.

Comme exemples de système non dégénéré on peut citer **1**) $A = (\delta_{k(n+m)})$, **2**) $A = (\binom{n,m}{k}_\theta), \theta \in \mathcal{K}^* \setminus \{1\}$, **3**) $A = (\binom{k}{n} \delta_{k(n+m)})$, **4**) $A = \binom{n,m}{k}$, **5**) $A = (\binom{n,m}{k}_\theta)$, avec ($ord \theta = \infty$) et comme exmples de système dégénéré on peut citer **1**) $A = (\binom{n,m}{k}_\tau)$, avec ($ord \tau = w < +\infty$), **2**) $A = (\delta_{kn} \cdot \delta_{km})$.

La notion suivante permet de donner une caractéristique d’une suite triangulaire multipliable de polynômes. Une suite triangulaire multipliable par rapport à un système non dégénéré est appelée suite non dégénérée. Une suite associée à une suite non dégénérée est aussi non dégénérée.

Lemme V. 2.

Dans une algèbre A sans diviseurs de zéro toute suite triangulaire multipliable est non dégénérée.

Preuve :

En effet supposons que la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ triangulaire multipliable par rapport à $A = (A_k^{n,m})$ soit dégénérée, i.e. il existe $n \geq 0$, pour lequel $A_{n+1}^{n,1} = 0$. Alors, d’après la formule (56) pour $m = 1$ on a $A_{n+1}^{n,1} a_{n+1} = a_n (a_1 - A_n^{n,1})$ ($n \geq 0$), d’où $a_n (a_1 - A_n^{n,1})$ ($n \geq 0$). Puisque $a_n \neq 0$, alors $a_1 = A_n^{n,1} \cdot 1, n \geq 0$. En tenant compte de (61) on obtient une contradiction avec l’indépendance linéaire. ■

Corollaire V. 2.

Toute suite triangulaire multipliable de polynômes à coefficients dans un corps commutatif est non dégénérée.

Remarque :

Notons que si $(P_n(X))_{n \geq 0}$ est une suite triangulaire multipliable de polynômes par rapport au système non dégénéré A et si $a \in A$, la suite $(P_n(a))_{n \geq 0}$ est une suite triangulaire multipliable par rapport à A .

On donne maintenant la forme générale d’une suite triangulaire multipliable.

Lemme V. 3.

Tout élément d’une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ triangulaire multipliable par rapport à $A = (A_k^{n,m})$ est de la forme :

$$a_n = \frac{a_1(a_1 - A_1^{1,1}) \dots (a_1 - A_{n-1}^{n-1,1})}{A_2^{1,1} \dots A_n^{n-1,1}} \quad (n \geq 1) \tag{70}$$

Preuve :

La démonstration se fait par récurrence sur n . ■

Pour un système triangulaire non dégénéré $A = (A_k^{n,m})$, on introduit, en se basant sur la formule (70), une suite de polynômes

$$P_0^{(A)}(X) = A_0^{0,0} = 1, \quad P_n^{(A)}(X) = \frac{X(X - A_1^{1,1}) \dots (X - A_{n-1}^{n-1,1})}{A_2^{1,1} \dots A_n^{n-1,1}} \quad (n \geq 1) \tag{71}$$

Notons que $P_n^{(A)}(X) = Q_n^{(\lambda, \mu)}(X)$, avec $\lambda_n = A_n^{n,1}$ et $\mu_n = A_{n+1}^{n,1}$.

Lemme V. 4.

La suite de polynômes $(P_n^{(A)}(X))_{n \geq 0}$ est triangulaire multipliable par rapport à $A = (A_k^{n,m})$.

Proposition V. 2.

Toute suite $(a_n)_{n \geq 0}$ non dégénérée, triangulaire multipliable par rapport à un système triangulaire $A = (A_k^{n,m})$ est de la forme :

$$a_n = P_n^{(A)}(a_1) \tag{72}$$

Corollaire V. 3.

Toute suite de polynômes $(P_n(X))_{n \geq 0}$ triangulaire multipliable par rapport au système $A = (A_k^{n,m})$ peut être représentée sous la forme $P_n(X) = P_n^{(A)}(P_1(X))$ ou bien de la forme $P_n(X) = P_n^{(A)}(cX + d), c \neq 0$.

VI. CONCLUSION

On a présenté dans cet article les définitions et les constructions des polynômes dissociables et multipliables à partir des coefficients triangulaires. Nous remarquons que les polynômes orthogonaux satisfont les relations :

$$P_n(X) = \sum_{k=|n-m|}^{n+m} A_k^{n,m} P_k(X)$$

plus générales et ne sont pas triangulaires multipliables.

REFERENCES

[1] J. Riordan, Introduction to Combinatorial Analysis, Dover Publications, 2002.
 [2] J. Riordan, Combinatorial Identities, John Wiley & Sons Inc, 1968.
 [3] KA. Rybnikov., Vvedenie v kombinatornyj analiz (Introduction to combinatorial analysis), MGU, 1985 (russian).
 [4] Y. Li, D. Kim, L. Ma, “Gaussian binomial coefficients modulo cyclotomic polynomials”, Journal of number theory, vol. 168, pp. 154-166, 2016.
 [5] G.E. Andrews, “On the foundations of combinatoriel theory. Eulerian differiantial operators”, Stud. Appl. Math., vol. 50 n°4, pp. 345-375, 1971.

- [6] M. Aigner, "Combinatorial theory", Springer Verlag, 1979.
- [7] G.C. Rota, "On The Foundations of Combinatorial Theory". Theory of Möbius functions, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, vol 2, pp.340-368, 1964.
- [8] J. Goldman, G.C. Rota, "On the foundation of combinatorial theory IV. Finite vector space and eulerian generating function", Stud Apply. Math, vol. 49, pp 239-251, 1970.
- [9] G. Polya, How to Solve It. A New Aspect of Mathematical Method, Princeton University Press, 2004.
- [10] K. Iwasawa, Lectures on p-adic L functions, Princeton University Press, 1972.
- [11] H.H. Crapo, G. Carlo Rota, On The Foundations of Combinatorial Theory Combinatorial Geometries, The MIT Press, 1970.
- [12] E.W. Weisstein, Stirling Number of the First Kind, Math world (unpublished)
- [13] K.A. Rybnikov, Kombinatornij analiz. Zadachi i uprazhnenija (Combinatorial analysis. Problems and exercises), Nauka, 1962 (russian).
- [14] R. Corcino, On p,q-binomial coefficients, Research Gate, 2008.
- [15] F.H. Jackson, "q-form of Taylor's theorem", Messenger Math., vol. 39, pp. 62-64, 1909.
- [16] F.H. Jackson, "q-Difference equation", American Journal Math, vol. 32, pp. 305-314, 1910.
- [17] F.H. Jackson, "q-difference equations", American Journal Mathematics, vol. 32, pp.305-314.
- [18] L. Comtet, "Advanced combinatorics", The art of finite and infinite expansions, 1974.
- [19] I.E. Ovtcharenko, "Skaljarnye proizvedenija v prostranstve mnogochlenov i polozitelnost" (Scalar products in the space of polynomials and positivity), Journal Académy of sciences Ukraine série N°A, pp. 17-20, 1990 (russian).

Construction Des Bases Orthonormées De L'espace Des Fonctions Continues Sur Un Groupe Compact Ultramétrique

Falimanana RANDIMBINDRAINIBE¹, Toky Basilide RAVALIMINOARIMALALASON²

Ecole doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation

Ecole Supérieure Polytechnique d'Antananarivo - Université d'Antananarivo - Madagascar



Résumé – Dans cet article on construit une base orthonormée de l'espace des fonctions continues sur un groupe compact ultramétrique G concret à valeurs dans un corps commutatif \mathbb{K} ultramétrique ($\mathbb{Q}_p \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{C}_p$), que l'on notera $C(G; \mathbb{K})$. Cette base orthonormée possède la « propriété triangulaire », ce qui donne une généralisation du théorème de Mahler: La suite des polynômes $\left\{ \binom{Z}{n} \right\}_{n \geq 0}$ est une base orthonormée de l'espace des fonctions continues sur le groupe compact des entiers p -adiques \mathbb{Z}_p à valeurs dans le corps \mathbb{K} , noté $C(\mathbb{Z}_p; \mathbb{K})$, où \mathbb{K} est une extension de \mathbb{Q}_p complet par rapport à la valeur absolue prolongeant la valeur absolue p -adique $|\cdot|_p$, avec $p \neq 2$. Pour cela on introduit la notion de « suite des coefficients triangulaires ». Ensuite on étudie la base orthonormée de $C(G; \mathbb{K})$, ayant « propriété triangulaire ». Enfin on construit deux exemples concrets de bases orthonormées ayant la propriété précédente pour chacun des espaces $C(\mathbb{Z}_p; \mathbb{K})$ et $C(G(\alpha); \mathbb{K})$.

Mots-clés – p -adique, valuation, ultramétrique, non archimédien, suite des coefficients triangulaires, suite de fonctions triangulaires dissociables, compact, complet, non dégénéré, ouvert et fermé.

I. INTRODUCTION

A. Notations

Comme notations dans cet article on désigne par $\mathbb{Q} \subset \mathcal{K}$ un corps commutatif quelconque de caractéristique 0 contenant le corps des rationnels \mathbb{Q} , par $\mathbb{K} \supset \mathbb{Q}_p$ une extension de \mathbb{Q}_p complet par rapport à la valeur absolue $|\cdot|$ prolongeant la valeur absolue p -adique $|\cdot|_p$, où p est un nombre premier ($p \neq 2$). Les ensembles \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , $\mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, où $p\mathbb{Z}$ est l'ensemble des multiples de p , \mathbb{R} désignent respectivement l'ensemble des entiers naturels ou nul, l'ensemble des nombres entiers, l'ensemble des nombres rationnels, le corps résiduel des nombres congrus modulo p , le corps des nombres réels. De plus si \mathbb{K} est un corps complet non archimédien, l'ensemble $A = \{z \in \mathbb{K}; |z| \leq 1\}$ est appelé l'anneau de normalisation, $\mathfrak{S} = \{z \in \mathbb{K}; |z| < 1\}$ est un idéal maximal de A et est appelé l'idéal de normalisation, $\overline{\mathbb{K}} = A/\mathfrak{S}$ est le corps résiduel de \mathbb{K} . On désigne par $[x]$ la partie entière du nombre réel x .

B. Le corps \mathbb{Q}_p et l'anneau \mathbb{Z}_p .

a. Valeur absolue p-adique

Soit p un nombre premier. Pour tout nombre rationnel $r = p^k \cdot m/n \in \mathbb{Q}$, où m et n sont premiers avec p , on note $v_p(r) = k$ ou bien $ord_p(r) = k$ pour $r \neq 0$, et par convention $v_p(0) = +\infty$. On définit « la valeur absolue p – adique » dans \mathbb{Q} comme l'application de \mathbb{Q} vers $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, notée $|\cdot|_p$, [1]–[5], [17], par

$$|r|_p = p^{-v_p(r)}$$

L'application v_p de \mathbb{Q} dans \mathbb{Z} est appelée *valuation*.

Notons quelques propriétés de cette « valeur absolue p – adique » :

- Pour tout nombre rationnel r_1 et r_2 , $|r_1 \cdot r_2|_p = |r_1|_p \cdot |r_2|_p$;
- Pour tout nombre rationnel r_1 et r_2 , $|r_1 + r_2|_p \leq \max\{|r_1|_p, |r_2|_p\}$;
- Si $|r_1|_p < |r_2|_p$, alors $|r_1 + r_2|_p = |r_2|_p$.

Comme $v_p(0) = +\infty$, ces trois propriétés montrent que $|\cdot|_p$ définit une *norme* sur l'ensemble des nombres rationnels \mathbb{Q} . La deuxième propriété est appelée l'inégalité *triangulaire forte*. Une norme vérifiant l'inégalité forte est dite *norme non archimédienne* ou *norme ultramétrique*. Une norme vérifiant l'inégalité triangulaire habituelle est appelée *norme archimédienne*.

Deux normes $\|\cdot\|^1$ et $\|\cdot\|^2$ définies sur \mathbb{Q} sont dites équivalentes, si pour tout $r \in \mathbb{Q}$ on a $\|r\|^1 = (\|r\|^2)^c$, où $c > 0$. Toutes les normes sur \mathbb{Q} sont décrites par le *théorème d'Ostrowsky*. [4]–[7]

Théorème d'Ostrowsky.- [1, 2] Soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{Q} non triviale (i.e. il existe au moins un élément $x \in \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, tel que $\|x\| \neq 1$). Si $\|\cdot\|$ est archimédienne il existe $\tau \in]0, 1]$ tel que $\|x\| = |x|^\tau$. Dans le cas contraire il existe un nombre premier p et un nombre $\tau > 0$ tel que $\|x\| = (|x|_p)^\tau$.

b. Distance p-adique

L'ensemble \mathbb{Q} muni de la distance associée à la norme p – adique $|\cdot|_p$ est un espace métrique. Soit d_p la distance ainsi définie, elle est appelée *distance p – adique*, i.e.

$$d_p(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|_p$$

Cette distance vérifie les propriétés suivantes :

- $d_p(r_1, r_2) = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2$
- $d_p(r_1, r_2) = d_p(r_2, r_1)$
- $d_p(r_1, r_3) \leq \max(d_p(r_1, r_2), d_p(r_2, r_3))$

c. Ensemble des nombres p-adiques

L'espace métrique (\mathbb{Q}, d_p) n'est pas complet [4,5,7]. La complétion de \mathbb{Q} par rapport à cette métrique est appelée l'ensemble des *nombres p – adiques* et sera noté \mathbb{Q}_p (première fois considéré par Hensel en 1907). [1][5][17]

Notons les deux lemmes suivants.

Lemme 1.- Toute opération interne (addition et multiplication) sur \mathbb{Q} se prolonge d'une manière continue sur \mathbb{Q}_p [4][5][7][17].

Lemme 2.- Tout élément $x \in \mathbb{Q}_p$ s'écrit d'une manière unique sous la forme

$$x = \sum_{k=-n}^{+\infty} a_k \cdot p^k, \quad n \in \mathbb{N}, 0 \leq a_k \leq p - 1$$

appelée développement de Hensel de l'élément $x \in \mathbb{Q}_p$ [1][4][5][17]

d. Anneau des nombres p-adiques

Donnons la définition de l'anneau des nombres entiers p-adiques \mathbb{Z}_p (à ne pas confondre avec l'anneau des congruences modulo p , que l'on désigne par $F_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$..

Remarquons d'abord que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ non divisible par p , $|n|_p = 1$ et si n est divisible par p , $|n|_p < 1$. Ainsi quel que soit $n \in \mathbb{Z}$, $|n|_p \leq 1$. On désigne par \mathbb{Z}_p la fermeture de l'anneau des nombres entiers \mathbb{Z} dans le corps des nombres p-adiques \mathbb{Q}_p , \mathbb{Z}_p est donc égal au disque $D(0, 1] = \{z \in \mathbb{Q}_p ; |z|_p \leq 1\}$ de centre 0 et de rayon 1. On démontre que \mathbb{Z}_p est compact, [5,6,7, 8, 17]. Le développement de Hensel de chaque élément de \mathbb{Z}_p s'écrit donc sous la forme $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \cdot p^i$, avec $0 \leq a_i \leq p - 1$ [4, 5]. De plus si une suite d'éléments de \mathbb{Z}_p , $\{x_n\}_{n \geq 1}$ converge, avec $x_n = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i^{(n)} p^i$, les coefficients se stabilisent, i.e. à partir d'un certain rang i les coefficients $a_i^{(n)}$ sont constants. A noter que pour tout $x \in \mathbb{Z}_p$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{p^n}$ existe, cette fonction est appelée « la fonction sign p-adique » notée $sign_p(x)$ prenant p valeurs différentes à savoir 0 et $p - 1$ racines de l'unité [6, 7].

Le corps \mathbb{Q}_p n'est autre que le corps des fractions de l'anneau \mathbb{Z}_p [1][9][17].

Considérons quelques sous ensembles particuliers de l'anneau \mathbb{Z}_p

- L'anneau \mathbb{Z}_p a un unique idéal maximal $p\mathbb{Z}_p$ et le corps résiduel $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ est le corps des p éléments $F_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Dans \mathbb{Q}_p les autres disques de centre 0 sont :

$$p^m \mathbb{Z}_p = \{z \in \mathbb{Q}_p ; z = a_m p^m + a_{m+1} p^{m+1} + \dots\}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad [4][5]$$

- L'ensemble des éléments inversibles de l'anneau \mathbb{Z}_p est $\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p = \{z \in \mathbb{Z}_p ; |z|_p = 1\}$

- Il y a $p - 1$ nombres dans \mathbb{Z}_p^* qui jouent un rôle très important, les $p - 1$ racines de l'unité. Pour chaque $a_0 \in \{1, 2, \dots, p - 1\}$ il existe une unique racine de l'unité telle que le premier coefficient de développement est égal à a_0 . La représentation de cette racine est appelée « représentation de Teichmüller ». [5][7][10]

- Les disques $t + p^s \mathbb{Z}_p = \{t + p^s z ; z \in \mathbb{Z}_p\}$, avec $0 \leq t < p^s$, $s \geq 0$.

On désigne par $\overline{\mathbb{Q}_p}$ la clôture algébrique du corps \mathbb{Q}_p [1,4,5] de degré d'extension $[\overline{\mathbb{Q}_p} : \mathbb{Q}_p] = +\infty$ on peut prolonger la norme p-adique dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$. La complétion de $\overline{\mathbb{Q}_p}$ est notée \mathbb{C}_p [7][10][11].

e. Espace de Banach ultramétrique

L'espace des fonctions continues sur le groupe compact des entiers p-adiques \mathbb{Z}_p noté $C(\mathbb{Z}_p ; \mathbb{K})$, est un espace de Banach ultramétrique. Un système de fonctions $\{e_n(z)\}_{n \geq 0}$ de $C(\mathbb{Z}_p ; \mathbb{K})$ est dit base orthonormée si et seulement si pour toute fonction $f \in C(\mathbb{Z}_p ; \mathbb{K})$ on a

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n \cdot e_n(z), \text{ avec } \|f(z)\| = \sup_{n \geq 0} |f_n| \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n| = 0 \quad [1,2]$$

C. L'espace des fonctions continues sur \mathbb{Z}_p

Considérons l'espace $C(\mathbb{Z}_p ; \mathbb{K})$ muni de la norme $\|\cdot\|_{sup}$, c'est un espace de Banach ultramétrique. [6, 12]. Une suite de fonctions $(e_n(z))_{n \geq 0}$ de l'espace $C(\mathbb{Z}_p ; \mathbb{K})$ forme une base orthonormée [1, 4, 6, 7] de l'espace de banach $C(\mathbb{Z}_p ; \mathbb{K})$ si pour tout $f \in C(\mathbb{Z}_p ; \mathbb{K})$ on a le développement $f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n \cdot e_n(z)$, $f_n \in \mathbb{K}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n| = 0$ et $\|f(z)\| = \sup\{|f_n| ; n \geq 0\}$.

Soit $\binom{z}{n}$ le polynôme d'interpolation de Newton

$$\binom{z}{n} = \frac{z(z-1)(z-2)\dots(z-n+1)}{n!} \tag{1}$$

que l'on peut considérer comme une fonction de l'espace $C(\mathbb{Z}_p; \mathbb{K})$.

D'après le *théorème de Mahler* [6, 7] le système $\left\{\binom{z}{n}\right\}_{n \geq 0}$ forme une base orthonormée de l'espace $C(\mathbb{Z}_p; \mathbb{K})$. Les coefficients de développement de toute fonction $f \in C(\mathbb{Z}_p; \mathbb{K})$ dans cette base

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n \cdot \binom{z}{n} \tag{2}$$

sont définis par

$$f_n = (\Delta^n f)(0) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k) \tag{3}$$

où Δ est l'opérateur de différence dans $C(\mathbb{Z}_p; \mathbb{K})$, $\Delta f(z) = f(z+1) - f(z)$, autrement dit

$$\Delta = \tau_1 - id, \quad \text{où } \tau_h f(z) = f(z+h) - f(z), \quad id f(z) = f(z)$$

Par exemple soit $X_{t,s}$ la fonction caractéristique du disque $t + p^s \mathbb{Z}_p$, $0 \leq t < p^s$, alors

$$X_{t,s}(z) = \frac{1}{p^s} \sum_{n \geq 0} \left[\sum_{j=0}^{p^s-1} \zeta_s^{-tj} (\zeta_s^j - 1)^n \right] \binom{z}{n} \tag{4}$$

où ζ_s est une racine primitive d'ordre p^s dans \mathbb{K} .

II. FONCTIONS CONTINUES SUR UN GROUPE COMPACT ULTRAMÉTRIQUE

A. Système de coefficients triangulaire

Un système $A = (A_k^{m,n})$ ($m, n, k \geq 0$) d'éléments de \mathcal{K} est dit triangulaire, si $A_k^{m,n} = 0$ lorsque $n + m < k$ ou bien $k < \max(m, n)$. Tout système de scalaires $A = (A_k^{m,n})$ défini pour $m + n \geq k \geq \max(m, n)$ peut être prolongé en un système triangulaire par des éléments nuls.

B. Systèmes triangulaires et coefficients spéciaux

a. Définitions

On appelle coefficient binomial de Newton toute suite d'éléments d'un corps \mathcal{K} de caractéristique quelconque vérifiant la relation de récurrence [1][13]

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad (1 \leq k \leq n), \tag{5}$$

et les conditions aux bornes

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \tag{5'}$$

Notons que lorsque $\text{char } K = 0$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. De plus on pose $\binom{n}{k} = 0$ pour $n < k$ ou $n < 0$ ou $k < 0$. Pour cette nouvelle définition la formule de Newton

$$(X+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot X^k \tag{6}$$

reste valable, ce qui entraîne pour tout $a, b \in \mathbb{N}$ [13]

$$\binom{a+b}{k} = \sum_{i+j=k} \binom{a}{i} \binom{b}{j} \tag{7}$$

De même pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p$,

$$\binom{\alpha+\beta}{n} = \sum_{i+j=n} \binom{\alpha}{i} \binom{\beta}{j}$$

et l'on a :

$$(1+X)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} X^n$$

Les développements

$$(X-1)^n = \sum_{m=0}^n (-1)^{n-m} \binom{n}{m} X^m \quad (n \geq 0) \tag{8}$$

$$X^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (X-1)^m \quad (n \geq 0) \tag{9}$$

définissent deux matrices triangulaires supérieures non dégénérées inverses l'une de l'autre

$$C_0 = \left((-1)^{n-m} \binom{n}{m} \right)_{m,n \geq 0} \quad \text{et} \quad D_0 = \left(\binom{n}{m} \right)_{m,n \geq 0} \tag{10}$$

i.e. C_0 et D_0 sont inversibles et $(C_0)^{-1} = D_0$.

b. Coefficients de Gauss généralisés

Pour $\theta \in \mathcal{K}^* = \mathcal{K} \setminus \{0\}$, considérons les polynômes de Gauss [13]

$$P_n^{(\theta)}(X) = (X-1)(X-\theta) \dots (X-\theta^{n-1}), \quad (n \geq 1) \quad \text{et} \quad P_0^{(\theta)}(X) = 1 \tag{11}$$

Ces polynômes sont étroitement liés avec les coefficients généralisés de Gauss, définis dans [1, 9] par la relation de récurrence

$$\binom{n}{m}_\theta = \theta^m \binom{n-1}{m}_\theta + \binom{n-1}{m-1}_\theta, \quad m \geq 1 \tag{12}$$

et les conditions aux bornes

$$\binom{n}{0}_\theta = \binom{n}{n}_\theta = 1 \tag{12'}$$

Soit maintenant $\alpha \in \mathcal{K}$ un élément du corps \mathcal{K} d'ordre $w < +\infty$, on définit le *coefficient de Gauss généralisé* par la relation de récurrence (12) et les conditions initiales (12'), en posant $\binom{n}{m}_\alpha = 0$ si $n < m, n < 0$ ou $m < 0$. Si $n = aw + r, m = bw + s, 0 \leq r < w, 0 \leq s < w$, $\binom{n}{m}_\alpha = \binom{a}{b} \binom{r}{s}_\alpha$. Notons que $\lim_{\theta \rightarrow 1} \binom{n}{m}_\theta = \binom{n}{m}$.

Dans le cas, où $\text{ord } \alpha = +\infty$, parallèlement avec les polynômes (12) on considère les polynômes d'interpolation de Gauss

$$Q_n^{(\theta)}(X) = \frac{P_n^{(\theta)}(X)}{P_n^{(\theta)}(\theta^n)} \quad (n \geq 0) \tag{13}$$

Dans [article 1, formule (10)] on a démontré la relation

$$\binom{n}{m}_\theta = Q_m^{(\theta)}(\theta^n) \tag{14}$$

et les développements

$$P_n^{(\theta)}(X) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \theta^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_\theta X^k \tag{15}$$

$$X^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_\theta . P_k^{(\theta)}(X), \tag{16}$$

par suite,

$$Q_n^{(\alpha)}(X) = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^{n-m} \alpha^{\binom{n-m}{2}} \binom{n}{m}_\alpha}{P_n^{(\alpha)}(\alpha^n)} X^m \quad (n \geq 0) \tag{17}$$

$$X^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m}_\alpha . P_m^{(\alpha)}(\alpha^m) . Q_m^{(\alpha)}(X) \quad (n \geq 0) \tag{18}$$

Les relations (15) et (16) définissent deux matrices triangulaires supérieures non dégénérées inverses l'une de l'autre

$$C_1^{(\theta)} = \left((-1)^{n-m} \theta^{\binom{n-m}{2}} \binom{n}{m}_\theta \right)_{m,n \geq 0} \quad \text{et} \quad D_1^{(\theta)} = \left(\binom{n}{m}_\theta \right)_{m,n \geq 0}, \tag{19}$$

De même (17) et (18) définissent les deux matrices triangulaires supérieures non dégénérées inverses l'une de l'autre

$$S_1^{(\alpha)} = \left(\frac{(-1)^{n-m} \alpha^{\binom{n-m}{2}} \binom{n}{m}_\alpha}{P_n^{(\alpha)}(\alpha^n)} \right)_{m,n \geq 0} \quad \text{et} \quad T_1^{(\alpha)} = \left(\binom{n}{m}_\alpha . P_m^{(\alpha)}(\alpha^m) \right)_{m,n \geq 0} \tag{20}$$

Les développements

$$(X-1)^n = \sum_{m=0}^n c^{(\theta)}(m,n) . P_m^{(\theta)}(X) \quad (n \geq 0) \tag{21}$$

$$P_n^{(\theta)}(X) = \sum_{m=0}^n d^{(\theta)}(m,n) . (X-1)^m \quad (n \geq 0) \tag{22}$$

définissent deux matrices triangulaires supérieures non dégénérées inverses l'une de l'autre

$$C_2^{(\theta)} = \left(c^{(\theta)}(m,n) \right)_{m,n \geq 0} \quad \text{et} \quad D_2^{(\theta)} = \left(d^{(\theta)}(m,n) \right)_{m,n \geq 0}. \tag{23}$$

Il est évident que $c^{(\theta)}(n,n) = d^{(\theta)}(n,n) = 1$.

c. Forme concrète de ces coefficients

Donnons la forme concrète de ces coefficients. De la relation (22) on trouve

$$d^{(\theta)}(m, n) = \left(\frac{D^m}{m!} P_n^{(\theta)} \right) (1) = \sum_{\substack{J \subset \{0, 1, \dots, n-1\} \\ \text{card } J = m}} \prod_{i \in J} (1 - \theta^i) \tag{24}$$

De l'autre côté en appliquant la même dérivation à la formule (15) on trouve

$$d^{(\theta)}(m, n) = \sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} \theta^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k} \binom{k}{m}_\theta, \tag{25}$$

qui, sous la forme matricielle, s'écrit $D_2^{(\theta)} = D_0 \times C_1^{(\theta)}$. En passant à la matrice inverse on obtient $C_2^{(\theta)} = D_1^{(\theta)} \times C_0$, d'où

$$c^{(\theta)}(m, n) = \sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{m}_\theta \tag{26}$$

Donnons une autre forme de l'expression (26), lorsque $\text{ord } \alpha = +\infty$, en utilisant les relations (16), (17) et (8)

$$\begin{aligned} c^{(\alpha)}(m, n) &= \sum_{k=m}^n (-1)^k \binom{n}{k} \cdot \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^{m-i} \alpha^{\binom{m-i}{2}} \binom{m}{i}_\alpha}{P_m^{(\alpha)}(\alpha^m)} \cdot \alpha^{ik} = \\ &= \frac{1}{P_m^{(\alpha)}(\alpha^m)} \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \alpha^{\binom{m-i}{2}} \binom{m}{i}_\alpha (\alpha^i - 1)^n \end{aligned} \tag{27}$$

Si $\beta \in K$, $|\beta - 1| = q < 1$ (dans ce cas $|\beta| = 1$ et $\text{ord } \beta = +\infty$), alors $|\beta^i - 1| \leq |\beta - 1| < 1$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c^{(\beta)}(m, n) = 0 \tag{28}$$

Démontrons de même que dans ce cas $|d^{(\beta)}(m, n)| \leq q^{n-m}$ ($0 \leq m \leq n$), ce qui signifie

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d^{(\beta)}(m, n) = 0 \tag{29}$$

♣ D'après (24) on a $|d^{(\beta)}(m, n)| \leq \max \left\{ \prod_{i \in J} |1 - \beta^i|, J \subset \{0, 1, \dots, n-1\}, \text{card } J = m \right\}$, or $\prod_{i \in J} |1 - \beta^i| \leq |1 - \beta|^{m-m} \leq q^{n-m}$, d'où le résultat. ♦

Dans le cas où $\text{ord } \alpha = +\infty$ les développements

$$Q_n^{(\alpha)}(X) = \sum_{m=0}^n \frac{d^{(\alpha)}(m, n)}{P_n^{(\alpha)}(\alpha^n)} (X - 1)^m \quad (n \geq 0) \tag{30}$$

$$(X - 1)^n = \sum_{m=0}^n c^{(\alpha)}(m, n) P_m^{(\alpha)}(\alpha^m) Q_m^{(\alpha)}(X) \quad (n \geq 0) \tag{31}$$

définissent deux matrices triangulaires supérieures non dégénérées inverses l'une de l'autre.

$$S_2^{(\alpha)} = \left(\frac{d^{(\alpha)}(m, n)}{P_n^{(\alpha)}(\alpha^n)} \right)_{m, n \geq 0} \quad \text{et} \quad T_2^{(\alpha)} = \left(c^{(\alpha)}(m, n) \cdot P_m^{(\alpha)}(\alpha^m) \right)_{m, n \geq 0} \quad (32)$$

Soient $\theta, \tau \in k^*$, considérons le développement

$$P_n^{(\theta)}(X) = \sum_{m=0}^n c^{(\tau, \theta)}(m, n) \cdot P_m^{(\tau)}(X) \quad (33)$$

définissant les deux matrices triangulaires supérieures non dégénérées inverses l'une de l'autre

$$C^{(\tau, \theta)} = \left(c^{(\tau, \theta)}(m, n) \right)_{m, n \geq 0} \quad \text{et} \quad C^{(\theta, \tau)} = \left(c^{(\theta, \tau)}(m, n) \right)_{m, n \geq 0}. \quad (34)$$

Il est évident que $c^{(\tau, \theta)}(n, n) = c^{(\theta, \tau)}(n, n) = 1$.

On obtient la relation matricielle suivante à partir de (15), (16), (19) et (34) : $D_1^{(\tau)} \times C_1^{(\theta)} = C^{(\tau, \theta)}$, d'où la forme concrète des coefficients $c^{(\tau, \theta)}(m, n)$ est

$$c^{(\tau, \theta)}(m, n) = \sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} \theta^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_\theta \binom{k}{m}_\tau, \quad (35)$$

en particulier

$$c^{(\tau, \theta)}(1, n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \theta^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_\theta \frac{\tau^k - 1}{\tau - 1} = \frac{P_n^{(\theta)}(\tau) - P_n^{(\theta)}(1)}{\tau - 1} = \frac{P_n^{(\theta)}(\tau)}{\tau - 1} \quad (n \geq 1) \quad (36)$$

Dans [9][13] on a démontré que, si $\text{ord } \zeta = w$,

$$P_n^{(\zeta)}(X) = (X^w - 1)^{\left[\frac{n}{w} \right]} \cdot P_{r_w(n)}^{(\zeta)}(X), \quad (37)$$

$$\binom{n}{m}_\zeta = \binom{\left[\frac{n}{w} \right]}{\left[\frac{m}{w} \right]} \cdot \binom{r_w(n)}{r_w(m)}_\zeta, \quad (38)$$

où $\left[\frac{n}{w} \right]$ est la partie entière de $\frac{n}{w}$ et $n = \left[\frac{n}{w} \right] \cdot w + r_w(n)$, ($0 \leq r_w(n) < w$), il résulte de (24) que $d^{(\zeta)}(m, n) = 0$ si $n \geq (m+1) \cdot w$.

Considérons maintenant les deux paramètres $\alpha, \zeta \in \mathbb{K}$, tels que $|\alpha| = |\zeta| = 1$, $|\alpha - \zeta| < 1$, $\text{ord } \alpha = +\infty$ et $\text{ord } \zeta = w$. Il est évident que $|c^{(\alpha, \zeta)}(m, n)| \leq 1$, $|c^{(\zeta, \alpha)}(m, n)| \leq 1$. Démontrons les deux lemmes suivants :

Lemme 1. — $\lim_{n \rightarrow +\infty} c^{(\alpha, \zeta)}(m, n) = 0$.

Preuve :

Transformons l'expression (35), pour $n = k \cdot w + \ell$ ($0 \leq \ell < w$) en tenant compte des formules (14), (15) et (37)

$$\begin{aligned}
 c^{(\alpha, \zeta)}(m, n) &= \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \zeta^{\binom{n-j}{2}} \binom{n}{j}_\zeta \frac{P_m^{(\alpha)}(\alpha^j)}{P_m^{(\alpha)}(\alpha^m)} \\
 &= \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^{m-i} \alpha^{\binom{m-i}{2}} \binom{m}{i}_\alpha P_n^{(\zeta)}(\alpha^i)}{P_m^{(\alpha)}(\alpha^m)} \\
 &= \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^{m-i} \alpha^{\binom{m-i}{2}} \binom{m}{i}_\alpha (\alpha^{wi} - 1)^k \cdot P_i^{(\zeta)}(\alpha^i)}{P_m^{(\alpha)}(\alpha^m)}.
 \end{aligned}$$

Il suffit de démontrer, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha^{wi} - 1)^k = 0$. Or ceci résulte de l'inégalité $|\alpha^{wi} - 1| \leq |\alpha^w - 1| \leq |\alpha - \zeta| < 1$. ■

Lemme 2. — $\lim_{n \rightarrow +\infty} c^{(\zeta, \alpha)}(m, n) = 0$

Preuve :

Pour l'expression (35) on peut obtenir une représentation indépendante de n à l'aide des coefficients h_j ,

$$c^{(\zeta, \alpha)}(m, n) = \sum_{\substack{0 \leq i+w+s < m \\ 0 \leq s < w}} h_{i+w+s} \left(\frac{D^i}{i!} P_n^{(\alpha)} \right) (\zeta^s) \text{ [article 1] . Ainsi pour démontrer le lemme 2 il suffit de démontrer pour } n \rightarrow +\infty,$$

$$\left(\frac{D^i}{i!} P_n^{(\alpha)} \right) (\zeta^s) = \sum_{\substack{J \subset \{0, 1, \dots, n-1\} \\ \text{card } J = i}} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq J}}^{n-1} (\zeta^s - \alpha^j) \rightarrow 0, \text{ or ceci est analogue à la démonstration de (29) en tenant compte des inégalités}$$

$$|\zeta^s - \alpha^j| \leq \max \{ |\zeta^s - \alpha^s|, |\alpha^s - \alpha^j| \} \leq \max \{ |\zeta - \alpha|, |\alpha^w - 1| \} < 1 \text{ pour } j \equiv s \pmod{w}. \blacksquare$$

d. Relations matricielles

Pour ord $\tau = +\infty$ les deux développements

$$Q_n^{(\tau)}(X) = \sum_{m=0}^n \frac{c^{(\theta, \tau)}(m, n)}{P_n^{(\tau)}(\tau^n)} P_m^{(\theta)}(X) \tag{39}$$

$$P_n^{(\theta)}(X) = \sum_{m=0}^n c^{(\tau, \theta)}(m, n) \cdot P_m^{(\tau)}(\tau^m) \cdot Q_m^{(\tau)}(X) \tag{40}$$

définissent deux matrices triangulaires supérieures non dégénérées inverses l'une de l'autre.

$$S^{(\theta, \tau)} = \left(\frac{c^{(\theta, \tau)}(m, n)}{P_n^{(\tau)}(\tau^n)} \right)_{m, n \geq 0} \text{ et } T^{(\theta, \tau)} = \left(c^{(\tau, \theta)}(m, n) \cdot P_m^{(\tau)}(\tau^m) \right)_{m, n \geq 0}, \tag{41}$$

d'où l'on obtient les relations matricielles

$$C_2^{(\theta)} \times S_2^{(\tau)} = S^{(\theta, \tau)} \text{ et } C^{(\tau, \theta)} \times S^{(\theta, \alpha)} = S^{(\tau, \alpha)} \tag{42}$$

e. Exemples

Donnons quelques exemples concrets de systèmes triangulaires ($k, m, n \geq 0$).

$$A_k^{n,m} = \delta_{k(n+m)}, A_k^{n,m} = \delta_{k,n} \cdot \delta_{k,m}, A_k^{n,m} = \binom{k}{n} \cdot \delta_{k,(n+m)} \text{ où } \delta_{i,j} \text{ est le symbole de Kronecker,}$$

$$A_k^{n,m} = \binom{n,m}{k} = \binom{k}{n} \cdot \binom{n}{k-m}, A_k^{n,m} = \binom{n,m}{k}_\theta = \binom{m}{k-n}_\theta \cdot P_{n+m-k}^{(\theta)}(\theta^n),$$

$$A_k^{n,m} = \left[\binom{n,m}{k} \right]_\theta = \theta^{(k-n)(k-m)} \binom{k}{n}_\theta \binom{n}{k-m}_\theta.$$

C. Suites triangulaires dissociables de fonctions continues sur un groupe compact

a. Suite triangulaire dissociable

Soit $(G, *)$ un groupe commutatif, compact dans la topologie définie par une distance ultramétrique. Une suite linéairement indépendante $\nabla = (u_n(z))_{n \geq 0}$ de fonctions continues, appartenant à $C(G; \mathbb{K})$ est dite « suite triangulaire dissociable » par rapport au système de coefficients triangulaires $A = (A_k^{m,n})$, si

$$u_k(z_1 * z_2) = \sum_{\substack{n,m \leq k \\ n+m \geq k}} A_k^{n,m} u_n(z_1) \cdot u_m(z_2) \quad (z_1, z_2 \in G, k \geq 0) \tag{43}$$

Notons que la famille de fonctions $(u_n(z_1) \cdot u_m(z_2))_{m,n \geq 0}$ est linéairement indépendante dans $C(G \times G; \mathbb{K})$.

Si « * = + », la suite est dite « suite additive triangulaire dissociable », et si « * = x » la suite est dite « suite multiplicative triangulaire dissociable ».

Lemme 3 – Soient données deux suites de fonctions continues $\Delta = (e_n(z))_{n \geq 0}$ et $\nabla = (u_n(z))_{n \geq 0}$ telles que

$$u_n(z) = \sum_{m=0}^n t_{m,n} \cdot e_m(z) \quad (n \geq 0), \tag{44}$$

où $T = (t_{m,n})_{m,n \geq 0}$ est triangulaire supérieure et Δ triangulaire dissociable par rapport à $A = (A_k^{m,n})$. Dans ce cas ∇ est triangulaire dissociable par rapport à $B = (B_k^{m,n})$, si et seulement si,

$$\sum_{k=\max(m,n)}^{\min(n+m,\ell)} A_k^{n,m} t_{k\ell} = \sum_{\substack{i,j \leq \ell \\ i+j \geq \ell}} t_{ni} t_{mj} \cdot B_\ell^{i,j} \tag{45}$$

Preuve :

Par définition on a

$$\begin{aligned} u_\ell(z_1 * z_2) &= \sum_{k=0}^\ell t_{k\ell} \cdot e_k(z_1 * z_2) = \sum_{k=0}^\ell t_{k\ell} \left(\sum_{\substack{n,m \leq k \\ n+m \geq k}} A_k^{n,m} e_n(z_1) \cdot e_m(z_2) \right) \\ &= \sum_{n,m=0}^\ell \left(\sum_{k=\max(n,m)}^{\min(\ell,n+m)} A_k^{n,m} t_{k\ell} \right) e_n(z_1) \cdot e_m(z_2). \end{aligned} \tag{46}$$

De l'autre côté

$$\sum_{\substack{i,j \leq \ell \\ i+j \geq \ell}} B_\ell^{i,j} u_i(z_1) \cdot u_j(z_2) = \sum_{\substack{i,j \leq \ell \\ i+j \geq \ell}} B_\ell^{i,j} \left(\sum_{n=0}^i t_{ni} e_n(z_1) \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^j t_{mj} e_m(z_2) \right)$$

$$= \sum_{n,m=0}^{\ell} \left(\sum_{\substack{i,j \leq \ell \\ i+j \geq \ell}} t_{ni} \cdot t_{mj} \cdot B_{\ell}^{i,j} \right) \cdot e_n(z_1) \cdot e_m(z_2) \tag{47}$$

En comparant (46) et (47), et en remarquant que $(e_n(z_1) \cdot e_m(z_2))_{n,m \geq 0}$ est linéairement indépendante, on obtient le résultat (45). ■

Si la matrice T est non dégénérée, d'inverse $S = (s_{m,n})_{m,n \geq 0}$, la relation (45) est équivalente à la relation duale

$$\sum_{k=\max(m,n)}^{\min(n+m,\ell)} B_k^{n,m} s_{k\ell} = \sum_{\substack{i,j \leq \ell \\ i+j \geq \ell}} s_{ni} s_{mj} A_{\ell}^{i,j} \tag{48}$$

b. Fonctions continues sur \mathbb{Z}_p

Etudions les fonctions continues sur le groupe additif \mathbb{Z}_p . Le groupe additif \mathbb{Z}_p est compact, une base orthonormée standard dans $C(\mathbb{Z}_p; \mathbb{K})$, d'après le théorème de Mahler, est la suite des polynômes binomiaux $\Delta_0 = \left(\binom{z}{n} \right)_{n \geq 0}$ [4,6,7]. Dans ce cas pour

toute fonction $f \in C(\mathbb{Z}_p; \mathbb{K})$ les coefficients de f dans le développement $f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n \cdot \binom{z}{n}$ sont donnés par :

$$f_n = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(i) \quad (n \geq 0) \tag{49}$$

La relation connue $\binom{z_1 + z_2}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{z_1}{i} \cdot \binom{z_2}{n-i}$ [8] signifie que Δ_0 est une suite additive triangulaire dissociable par rapport au système triangulaire $A = (\delta_{k,n+m})_{n,m,k \geq 0}$.

Donnons d'autres exemples de suites additives triangulaires dissociables dans $C(\mathbb{Z}_p; \mathbb{K})$.

- La formule de binôme de Newton montre que la suite $\nabla_0 = (z^n)_{n \geq 0}$ est une suite additive triangulaire décomposable par rapport au système triangulaire $A = \left(\binom{k}{n} \cdot \delta_{k,(n+m)} \right)_{n,m,k \geq 0}$.

- Soit $\beta \in \mathbb{K}$ un scalaire fixé vérifiant $|\beta - 1| < 1$ et $\text{ord } \beta = +\infty$. On définit une fonction puissance β^z sur Z_p par le développement

$$\beta^z = \sum_{n \geq 0} (\beta - 1)^n \binom{z}{n} \tag{50}$$

Notons que $\beta^{z_1+z_2} = \beta^{z_1} \beta^{z_2}$. La suite $\nabla_{\beta} = (\beta^{nz})_{n \geq 0}$ est une suite additive triangulaire décomposable par rapport à au système triangulaire $A = (\delta_{k,n} \cdot \delta_{k,m})_{n,m,k \geq 0}$

- Soit $\nabla_{\beta,1} = ((\beta^z - 1)^n)_{n \geq 0}$, un calcul facile montre que

$$(\beta^{z_1+z_2} - 1)^n = \sum_{\substack{i,j \leq n \\ i+j \geq n}} \binom{i,j}{n} \cdot (\beta^{z_1} - 1)^i \cdot (\beta^{z_2} - 1)^j \tag{51}$$

ce qui signifie que $\nabla_{\beta,1}$ est une suite additive triangulaire décomposable par rapport à $A = \left(\binom{n,m}{k} \right)_{n,m,k \geq 0}$.

- Introduisons une suite de fonctions $\Delta_\beta = \left(\binom{z}{n}_\beta \right)_{n \geq 0}$ continues sur \mathbb{Z}_p en la définissant par le développement

$$\binom{z}{n}_\beta = \sum_{m \geq n} c^{(\beta)}(n,m) \cdot \binom{z}{m}, \tag{52}$$

à l'aide de la matrice non dégénérée triangulaire inférieure ${}^t(C_2^{(\beta)})$ transposée de la matrice (23) $C_2^{(\beta)}$, d'où d'après la formule d'inversion, on trouve le développement

$$\binom{z}{n} = \sum_{m \geq n} d^{(\beta)}(n,m) \cdot \binom{z}{m}_\beta, \tag{53}$$

à l'aide de la matrice non dégénérée triangulaire inférieure ${}^t(D_2^{(\beta)})$ transposée de la matrice (23) $D_2^{(\beta)}$. D'après la définition (52) et (26)

$$\binom{z}{n}_\beta \Big|_{z=k} = \sum_{m=n}^k c^{(\beta)}(n,m) \binom{k}{m} = \binom{k}{n}_\beta. \tag{54}$$

Ceci signifie que la fonction $\binom{z}{n}_\beta$ interpole le coefficient de Gauss $\binom{k}{n}_\beta$ comme la fonction $\binom{z}{n}$ interpole le coefficient binomial $\binom{k}{n}$.

Démontrons un analogue du théorème de Mahler pour la suite $\Delta_\beta = \left(\binom{z}{n}_\beta \right)_{n \geq 0}$.

Analogie du théorème de Mahler - La suite $\Delta_\beta = \left(\binom{z}{n}_\beta \right)_{n \geq 0}$ forme une base orthonormée de l'espace $C(\mathbb{Z}_p; \mathbb{K})$ et telle que les coefficients du développement

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n^{(\beta)} \cdot \binom{z}{n}_\beta \tag{55}$$

sont donnés par :

$$f_n^{(\beta)} = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \beta^{\binom{n-i}{2}} \binom{n}{i}_\beta f(i) \tag{56}$$

Preuve :

Soit $f \in C(\mathbb{Z}_p; \mathbb{K})$ de (52) et du développement de f dans $\Delta_0 = \left(\binom{z}{n} \right)_{n \geq 0}$ il résulte (54) et

$$f_n^{(\beta)} = \sum_{i=0}^n d^{(\beta)}(i, n) \cdot f_i \quad (n \geq 0). \tag{57}$$

Premièrement d'après (29) $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(\beta)} = 0$, ensuite puisque $|d^{(\beta)}(m, n)| \leq 1$, alors

$$\sup \{ |f_n^{(\beta)}|; n \geq 0 \} = \sup \left\{ \left| \sum_{i=0}^n d^{(\beta)}(i, n) f_i \right|, n \geq 0 \right\} = \sup \{ |f_n|; n \geq 0 \} = \|f\|_{\text{sup}}$$

Ainsi $\Delta_\beta = \left(\binom{z}{n}_\beta \right)_{n \geq 0}$ est une base orthonormée de $C(\mathbb{Z}_p; \mathbb{K})$.

Etablissons la formule (55). D'après la formule (3) et (25)

$$\begin{aligned} f_n^{(\beta)} &= \sum_{i=0}^n d^{(\beta)}(i, n) \cdot f_i = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=i}^n (-1)^{n-k} \beta^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_\beta \binom{k}{i} \right) \left(\sum_{m=0}^i (-1)^{i-m} \binom{i}{m} \right) \cdot f(m) \\ &= \sum_{m=0}^n \left(\sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} \beta^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_\beta \right) \cdot \left(\sum_{i=m}^k (-1)^{i-m} \binom{k}{i} \cdot \binom{i}{m} \right) \cdot f(m) \\ &= \sum_{m=0}^n \left(\sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} \beta^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_\beta \cdot \delta_{k,m} \right) \cdot f(m) = \sum_{m=0}^n (-1)^{n-m} \beta^{\binom{n-m}{2}} \binom{n}{m}_\beta \cdot f(m). \blacksquare \end{aligned}$$

Donnons quelques exemples de développement de fonction continue sur \mathbb{Z}_p dans cette base Δ_β .

- Pour la fonction puissance β^{nz} on a le développement

$$\beta^{nz} = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m}_\beta P_m^{(\beta)}(\beta^m) \cdot \binom{z}{m}_\beta, \tag{58}$$

exprimé à l'aide de la matrice triangulaire supérieure non dégénérée $T_1^{(\beta)}$

- Pour la fonction $(\beta^z - 1)^n$ on a le développement

$$(\beta^z - 1)^n = \sum_{m=0}^n c^{(\beta)}(m, n) \cdot P_m^{(\beta)}(\beta^m) \cdot \binom{z}{m}_\beta \tag{59}$$

exprimé à l'aide de la matrice triangulaire supérieure non dégénérée $T_2^{(\beta)}$.

- Pour la fonction indicatrice du disque $t + p^s Z_p$ ($0 \leq t < p^s$), $X_{t,s}$, on a

$$X_{t,s}(z) = \frac{1}{p^s} \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{p^s-1} \zeta_s^{-tj} \cdot P_n^{(\beta)}(\zeta_s^j) \right) \cdot \binom{z}{n}_\beta, \tag{60}$$

où ζ_{p^s} est la racine primitive d'ordre p^s de l'unité dans le corps \mathbb{K} .

En appliquant les matrices inverses on obtient les développements suivants dual respectif de (58) et (59)

$$\binom{z}{n}_\beta = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^{n-m} \cdot \beta^{\binom{n-m}{2}} \binom{n}{m}_\beta}{P_n^{(\beta)}(\beta^n)} \cdot \beta^{mz}, \text{ exprimé à l'aide de la matrice } S_1^{(\beta)}$$

$$\binom{z}{n}_\beta = \sum_{m=0}^n \frac{d^{(\beta)}(m, n)}{P_n^{(\beta)}(\beta^n)} \cdot (\beta^z - 1)^m, \text{ exprimé à l'aide de la matrice } S_2^{(\beta)}$$

Notons que $\binom{z}{n}_\beta = Q_n^{(\beta)}(\beta^z)$ et que $\binom{z_1 + z_2}{n}_\beta = \sum_{i+j \geq n} \binom{i, j}{n}_\beta \cdot \binom{z_1}{i}_\beta \cdot \binom{z_2}{j}_\beta$, c'est-à-dire Δ_β est une suite additive triangulaire décomposable par rapport au système triangulaire $A = \left(\binom{i, j}{n}_\beta \right)_{n, i, j \geq 0}$.

c. Fonctions continues sur le groupe multiplicatif $G(\alpha)$.

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha|=1$, $ord \alpha = +\infty$, $ord \bar{\alpha} = w < +\infty$ p ne divise pas w), (ici $\bar{\alpha}$ désigne la classe de α dans le corps résiduel $\overline{\mathbb{K}}$) autrement dit w est le plus petit entier naturel, tel que $|\alpha^w - 1| < 1$. On désigne par $G(\alpha)$ la fermeture du semi groupe $\{\alpha^n; n \geq 0\}$ dans l'espace ultramétrique \mathbb{K} . $G(\alpha)$ est aussi un espace ultramétrique. On a démontré dans [4][7][12][15], que $G(\alpha)$ est un groupe compact. Une base orthonormée standard de l'espace $\mathcal{C}(G(\alpha); \mathbb{K})$ est la suite de fonctions continues $\Pi_\alpha = (Q_n^{(\alpha)})_{n \geq 0}$ [8][13]. Les coefficients du développement $f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n^{(\alpha)} \cdot Q_n^{(\alpha)}(z)$ sont donnés par la formule :

$$f_n^{(\alpha)} = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \alpha^{\binom{n-i}{2}} \binom{n}{i}_\alpha f(\alpha^i). \tag{61}$$

C'est un analogue du théorème de Mahler. De plus dans [9] on a démontré que

$$Q_k^{(\alpha)}(z_1, z_2) = \sum_{\substack{n, m \leq k \\ n+m \geq k}} \binom{n, m}{k}_\alpha Q_n^{(\alpha)}(z_1) \cdot Q_m^{(\alpha)}(z_2), \tag{62}$$

c'est-à-dire Π_α est une suite multiplicative triangulaire dissociable par rapport à $A = \left(\binom{n, m}{k}_\alpha \right)_{n, m, k \geq 0}$.

Donnons quelques exemples de développement dans cette base et montrons que ces suites sont des suites multiplicatives triangulaires dissociables.

- D'après la formule (18) on a le développement de $\nabla_0 = (z^n)_{n \geq 0}$ dans la base Π_α , à l'aide de la matrice $T_1^{(\alpha)}$. La formule $(z_1 z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n$ signifie que ∇_0 est une suite de fonctions multiplicative triangulaire décomposable par rapport à $A = (\delta_{n,i} \cdot \delta_{m,j})$.

- La formule (31) donne le développement de $\nabla_1 = ((z-1)^n)_{n \geq 0}$ dans la base Π_α , à l'aide de la matrice $T_2^{(\alpha)}$. ∇_1 est une suite multiplicative triangulaire décomposable par rapport à $A = \left(\binom{n, m}{k} \right)_{n, m, k \geq 0}$.

- La formule (40) donne le développement de $\nabla_\theta = (P_n^{(\theta)}(z))_{n \geq 0}$ dans la base Π_α , à l'aide de la matrice $T^{(\theta, \alpha)}$. Démontrons que ∇_θ est une suite multiplicative triangulaire décomposable par rapport à $A = \left(\begin{matrix} n, m \\ k \end{matrix} \right)_{n, m, k \geq 0}$, c'est-à-dire :

$$P_k^{(\theta)}(z_1 z_2) = \sum_{\substack{n, m \leq k \\ n+m \geq k}} \begin{bmatrix} n, m \\ k \end{bmatrix}_\theta P_n^{(\theta)}(z_1) \cdot P_m^{(\theta)}(z_2) \quad (k \geq 0) \tag{63}$$

Preuve :

Si $\text{ord } \theta = +\infty$, on l'a démontrée dans [13]. Supposons que $\text{ord } \theta = w < +\infty$. Pour $k < w$, $n, m < w$ cette relation a été démontré dans [13]. Pour démontrer cette formule dans le cas général on a besoin du lemme suivant :

Lemme 4 – Si $n = i.w + s$, $m = j.w + t$, $k = \ell.w + r$, ($0 \leq r, s, t < w$), alors

$$\begin{bmatrix} n, m \\ k \end{bmatrix}_\theta = \begin{pmatrix} i, j \\ \ell \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s, t \\ r \end{bmatrix}_\theta \tag{64}$$

Preuve du Lemme 4 : D'après le lemme3 [13] et la définition de $\begin{bmatrix} n, m \\ k \end{bmatrix}_\theta$ on a :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n, m \\ k \end{bmatrix}_\theta &= \theta^{(k-n)(k-m)} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix}_\theta \begin{pmatrix} n \\ k-m \end{pmatrix}_\theta \\ &= \theta^{[(\ell-i).w+r-s][(\ell-j).w+r-t]} \begin{pmatrix} \ell w + r \\ i w + s \end{pmatrix}_\theta \begin{pmatrix} n \\ (\ell-j)w + r - t \end{pmatrix}_\theta \\ &= \theta^{[r-s][r-t]} \begin{pmatrix} \ell \\ i \end{pmatrix}_\theta \cdot \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}_\theta \cdot \begin{pmatrix} i \\ \ell-j \end{pmatrix}_\theta \cdot \begin{pmatrix} s \\ r-t \end{pmatrix}_\theta = \begin{pmatrix} i, j \\ \ell \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s, t \\ r \end{bmatrix}_\theta \end{aligned}$$

Démontrons maintenant (63) dans le cas général.

Soit $k = \ell.w + r$, alors d'après la relation $P_k^{(\theta)}(X) = P_{\ell w+r}^{(\theta)}(X) = (X^w - 1)^\ell P_r^{(\theta)}(X)$ et (64) on a :

$$\begin{aligned} P_k^{(\theta)}(X.Y) &= P_{\ell w+r}^{(\theta)}(X.Y) = (X^w Y^w - 1)^\ell P_r^{(\theta)}(X.Y) \\ &= \sum_{\substack{i, j \leq \ell \\ i+j \geq \ell}} \begin{pmatrix} i, j \\ \ell \end{pmatrix} (X^w - 1)^i (Y^w - 1)^j \cdot \sum_{\substack{s, t \leq r \\ s+t \geq r}} \begin{bmatrix} s, t \\ r \end{bmatrix}_\theta P_s^{(\theta)}(X) \cdot P_t^{(\theta)}(Y) \\ &= \sum_{\substack{iw+s, jw+t \leq \ell w+r \\ iw+s+jw+t \geq \ell w+r}} \begin{pmatrix} i, j \\ \ell \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s, t \\ r \end{bmatrix}_\theta \cdot (X^w - 1)^i P_s^{(\theta)}(X) \cdot (Y^w - 1)^j \cdot P_t^{(\theta)}(Y) \\ &= \sum_{\substack{n, m \leq k \\ n+m \geq k}} \begin{bmatrix} n, m \\ k \end{bmatrix}_\theta P_n^{(\theta)}(X) \cdot P_m^{(\theta)}(Y) \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

- La fonction logarithme sur $G(\alpha)$ est définie par le développement

$$\log_\alpha(z) = \sum_{n \geq 1} a^{(\alpha)}(1, n) \cdot Q_n^{(\alpha)}(z) = \sum_{n \geq 1} \prod_{i=1}^{n-1} (\alpha^i - 1) \cdot Q_n^{(\alpha)}(z). \tag{65}$$

Ce développement montre que la fonction \log_α est une fonction continue sur $G(\alpha)$, grâce à (29). On montre que pour tout $m \geq 0$, $\log_\alpha(\alpha^m) = m$ et que $\log_\alpha(z_1 z_2) = \log_\alpha(z_1) + \log_\alpha(z_2)$. Pour $\gamma \in G(\alpha)$, avec $\log_\alpha \gamma \neq 0$, on pose $\log_\gamma(z) = \frac{\log_\alpha(z)}{\log_\alpha(\gamma)}$. Dans [9] on montre, si $p^h \equiv 1 \pmod{w}$, que pour le groupe $G(\alpha)$ il existe un unique élément $\zeta \in G(\alpha)$, tel que $\zeta = \lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha^{p^{hk}}$ et $|\zeta - \alpha| < 1$, $\text{ord } \zeta = w$. Le groupe $G(\alpha)$ se décompose comme le produit direct $G(\alpha) = G(\beta) \otimes G(\zeta)$, où $\beta = \alpha \cdot \zeta^{-1}$, $|\beta - 1| < 1$, $\text{ord } \beta = +\infty$. Pour cela $G(\zeta)$ est le groupe cyclique engendré par ζ . Soit $\omega : G(\alpha) \rightarrow G(\zeta)$ la projection canonique sur le premier facteur du produit cartésien. Posons $\langle z \rangle = z \cdot (\omega(z))^{-1}$. Une telle fonction est continue. On a alors $\zeta = \omega(\alpha)$, $\beta = \langle \alpha \rangle$ et notons que $\log_\alpha \zeta = 0$, $\log_\alpha \beta = -1$.

Considérons les classes d'équivalence du groupe par rapport au sous-groupe $G(\langle \alpha \rangle)$:

$$G_k(\alpha) = \alpha^k \cdot G(\langle \alpha \rangle) = \zeta^k G(\langle \alpha \rangle) \quad (k = 0, 1, \dots, w-1) \tag{66}$$

Le groupe quotient $G(\alpha) / G(\langle \alpha \rangle)$ est isomorphe au groupe quotient $\mathbb{Z}_{(w)}$. Comme les classes (66) sont des ensembles ouverts fermés (clopen), leurs fonctions caractéristiques $X_k = X_{G_k(\alpha)}$ sont continues. On introduit un analogue d'une fonction logarithme de base ζ sur $G(\alpha)$ en posant :

$$\log_\zeta : G(\alpha) \rightarrow \{0, 1, \dots, w-1\}, \quad \log_\zeta(z) = \sum_{k=0}^{w-1} k \cdot X_k(z) \tag{67}$$

La fonction \log_ζ est continue comme somme de fonctions continues et notons que $\log_\zeta z = k \Leftrightarrow z \in G_k(\alpha)$. Il résulte de cette définition que :

$$\log_\zeta(\alpha^n) = r_w(n) \tag{68}$$

$$\log_\zeta(\zeta^n) = r_w(n), \tag{69}$$

$$\text{où } n = \left[\frac{n}{w} \right] \cdot w + r_w(n), \quad (0 \leq r_w(n) < w) \tag{70}$$

Lemme 5 – On a la relation :

$$\log_\zeta(z_1 z_2) = \begin{cases} \log_\zeta(z_1) + \log_\zeta(z_2) & \text{si } (\log_\zeta(z_1) + \log_\zeta(z_2) < w) \\ \log_\zeta(z_1) + \log_\zeta(z_2) - w & \text{si } (\log_\zeta(z_1) + \log_\zeta(z_2) \geq w) \end{cases} \tag{71}$$

Preuve :

Supposons que $z_1 z_2 \in G_k(\alpha)$ ($0 \leq k < w$), ce qui est équivalent à :

$$(\exists i, j \in \{0, 1, \dots, w-1\}), (i + j \equiv k \pmod{w}), z_1 \in G_i(\alpha), z_2 \in G_j(\alpha).$$

Si $i + j = k$, alors $\log_{\zeta}(z_1 z_2) = k = i + j = \log_{\zeta}(z_1) + \log_{\zeta}(z_2)$.

Si $i + j = k + w$, alors $\log_{\zeta}(z_1 z_2) = k = i + j - w = \log_{\zeta}(z_1) + \log_{\zeta}(z_2) - w$ ■

- Considérons maintenant la suite de fonctions $\Delta_{\alpha, \zeta} = (L_n^{(\alpha, \zeta)}(z))_{n \geq 0}$, définies par les égalités

$$L_n^{(\alpha, \zeta)}(z) = \begin{pmatrix} \frac{\log_{\alpha} z - \log_{\zeta} z}{w} \\ \left[\frac{n}{w} \right] \end{pmatrix} \cdot Q_{r_w(n)}^{(\zeta)}(\omega(z)) \tag{72}$$

où $n = \left[\frac{n}{w} \right] \cdot w + r_w(n)$, ($0 \leq r_w(n) < w$), c 'est une fonction continue, comme polynôme de fonctions continues.

Lemme 6
$$L_n^{(\alpha, \zeta)}(\alpha^m) = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{\zeta} \tag{73}$$

Preuve :

Soit $n = a \cdot w + b$, ($0 \leq b < w$), i.e. $a = \left[\frac{n}{w} \right]$, $b = r_w(n)$. D'après les définitions (67) et (72), et d'après le lemme 3 [8][14]

$$\begin{aligned} L_n^{(\alpha, \zeta)}(\alpha^m) &= L_{aw+b}^{(\alpha, \zeta)}(\alpha^m) = \begin{pmatrix} \frac{\log_{\alpha} \alpha^m - \log_{\zeta} \alpha^m}{w} \\ a \end{pmatrix} \cdot Q_b^{(\zeta)}(\omega(\alpha^m)) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{m - r_w(m)}{w} \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_w(m) \\ b \end{pmatrix}_{\zeta} = \begin{pmatrix} m \\ aw + b \end{pmatrix}_{\zeta} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{\zeta} \cdot \blacksquare \end{aligned}$$

Ceci signifie que la fonction $L_n^{(\alpha, \zeta)}$ interpole le coefficient de Gauss $\begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix}_{\zeta}$ comme la fonction $\begin{pmatrix} z \\ n \end{pmatrix}$ interpole le coefficient binomial $\begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix}$.

Corollaire - On a le développement :

$$L_n^{(\alpha, \zeta)}(z) = \sum_{m \geq n} c^{(\zeta, \alpha)}(n, m) \cdot Q_m^{(\alpha)}(z) \tag{74}$$

exprimé à l'aide de la matrice non dégénérée triangulaire inférieure ${}^t(C^{(\zeta, \alpha)})$ transposée de la matrice $C^{(\zeta, \alpha)}$.

Preuve :

En effet d'après la formule (61) les coefficients de développement sont

$$f_m^{(\alpha)} = \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \alpha^{\binom{m-i}{2}} \begin{pmatrix} m \\ i \end{pmatrix}_{\alpha} L_n^{(\alpha, \zeta)}(\alpha^i) = \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \alpha^{\binom{m-i}{2}} \begin{pmatrix} m \\ i \end{pmatrix}_{\alpha} \cdot \begin{pmatrix} i \\ n \end{pmatrix}_{\zeta} = c^{(\zeta, \alpha)}(n, m) \cdot \blacksquare$$

En appliquant la formule d'inversion on obtient le développement dual :

$$Q_n^{(\alpha)}(z) = \sum_{m \geq n} c^{(\alpha, \zeta)}(n, m) L_m^{(\alpha, \zeta)}(z) \tag{75}$$

exprimé à l'aide de la matrice $(C^{(\alpha, \zeta)})'$ transposée de la matrice $C^{(\alpha, \zeta)}$.

Démontrons un analogue du théorème de Mahler pour la suite de fonctions

$$\Delta_{\alpha, \zeta} = (L_n^{(\alpha, \zeta)}(z))_{n \geq 0}.$$

Analogie du théorème de Mahler.- La suite $\Delta_{\alpha, \zeta}$ forme une base orthonormée de l'espace $C(G(\alpha); \mathbb{K})$ et telle que les coefficients du développement

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n^{(\alpha, \zeta)} L_n^{(\alpha, \zeta)}(z)$$

sont donnés par la formule

$$f_n^{(\alpha, \zeta)} = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \zeta^{\binom{n-i}{2}} \binom{n}{i}_{\zeta} f(\alpha^i) \tag{76}$$

Preuve :

La démonstration est analogue à la démonstration du même théorème pour la suite $\Delta_{\beta} = \left(\binom{z}{n}_{\beta} \right)_{n \geq 0}$ dans l'espace $C(\mathbb{Z}_p; \mathbb{K})$. ■

D. Base orthonormée logarithmique

Définition.

$$\Delta_{\alpha, \zeta} = (L_n^{(\alpha, \zeta)}(z))_{n \geq 0} \text{ est appelée base orthonormée logarithmique.}$$

Donnons deux exemples de développement dans cette base (très importants pour les applications dans le calcul des moments).

$$z^k = \sum_{n \geq 0} P_n^{(\zeta)}(\alpha^k) L_n^{(\alpha, \zeta)}(z) \tag{77}$$

et

$$\log_{\alpha}(z) = \sum_{n \geq 1} d^{(\zeta)}(1, n) L_n^{(\alpha, \zeta)}(z) \tag{78}$$

La proposition suivante démontre que la suite $\Delta_{\alpha, \zeta}$ est multiplicative triangulaire dissociable par rapport au système triangulaire

$$A = \left(\binom{i, j}{n}_{\zeta} \right)_{i, j, n \geq 0}.$$

Proposition. – Les éléments de la suite de $\Delta_{\alpha, \zeta}$ vérifient l'égalité suivante

$$L_n^{(\alpha, \zeta)}(z_1 z_2) = \sum_{\substack{i, j \leq n \\ i+j \geq n}} \binom{i, j}{n}_{\zeta} L_i^{(\alpha, \zeta)}(z_1) L_j^{(\alpha, \zeta)}(z_2) \tag{79}$$

Preuve :

Il suffit de vérifier cette formule sur le sous ensemble $\{(\alpha^m, \alpha^n), m, n \in \mathbb{N}\}$ qui est dense dans $G(\alpha) \times G(\alpha)$, i.e. démontrer l'égalité
$$\binom{m+k}{n}_\zeta = \sum_{\substack{i+j \leq n \\ i+j \geq n}} \binom{i,j}{n}_\zeta \binom{m}{i}_\zeta \binom{k}{j}_\zeta$$
. Or ceci se démontre par récurrence sur k en utilisant la relation de récurrence
$$\binom{i,j}{n-1}_\zeta + (\zeta^n - \zeta^j) \binom{i,j}{n}_\zeta = \binom{i,j+1}{n}_\zeta$$
. [13] ■

RÉFÉRENCES

- [1] Y. Amice, Les nombres p-adiques, Presses Universitaires de France, 192p, 1975.
- [2] Y. Amice, "Duals.-Proceedings of the conference on p-adic analysis", Nijmegen , pp. 1-15, 1975.
- [3] Z.I. Borevitch, I.P. Charafévitch, Teoria tchisel (théorie des nombres), Nauka, 294p, 1972. (en russe)
- [4] A.M. Robert, A course in p-adic analysis, Éd. Springer, 457p, 2000.
- [5] W.A. Coppel, "Number theory. An introduction to mathematics : Part A", Springer, pp.305-340, 2006.
- [6] A.D. Gvichiani, S.M. Agaïan, A.V. Trousov, Elementy nearchemedova analiza (éléments d'analyse non archimédienne), Éd. Université de Moscou, pp.65, 1979. (en russe)
- [7] A.C.M. Roij, Non archimedean functional analysis, New York. Marcel Dekker, 404p, 1978.
- [8] J. Riordan, Introduction to combinatorial analysis, Dover publications, 252p, 2002.
- [9] Y. Amice, "Interpolation p-adique", Bull. Soc. Math. France, t.92, pp.117-180, 1964.
- [10] N. Koblitz, "p-adic analysis, a short course on recent work", London Math soc. Lect. Note 163p, 1980.
- [11] N. Koblitz, p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions, Springer, 1996.
- [12] A.F. Monna, Analyse non archimédienne, Berlin, Springer, 119p, 1970.
- [13] F. Randimbindrainibe, T.B. Ravaliminoarimalalason, "Coefficients triangulaires et algèbre des polynômes dissociables et multipliables", IJPSAT, Vol.29, N°2, 2021.
- [14] K. Iwasawa, Lectures on p-adic L-Functions, Princeton University. Press, 144p, 1972.
- [15] R. Hewitt, E. Hewitt, K. Ross, Abstract Harmonic Analysis. Volume 1-2, Springer, 2002.
- [16] A. Deitmar, S. Echterhoff, Principles of Harmonic Analysis, Springer, 2014.
- [17] A.Y. Khrennikov, V. M. Shelkovich, Analyse p-adique moderne et physique-Mathématique. Théorie et applications, Edition Fizmatlit, 2012. (en russe)

Algèbre Des Suites Triangulaires Convolutives Et Multipliables. Leurs Formalisations Polynomiales

Falimanana RANDIMBINDRAINIBE¹, Toky Basilide RAVALIMINOARIMALALASON²

Ecole doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation

Ecole Supérieure Polytechnique d'Antananarivo - Université d'Antananarivo - Madagascar



Résumé – Dans cet article on introduit la notion de suite « triangulaire convolutive » et on continue à étudier la suite « triangulaire multipliable » d'éléments d'un corps commutatif $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{K}$ ou du corps $\mathbb{Q}_p \subseteq \mathbb{K}$ extension du corps des nombres p –adiques. A partir des suites de « polynômes triangulaires multipliables » on construit l'algèbre des séries formelles « triangulaires multipliables », ce qui permet de construire la représentation formelle ou la formalisation des suites. Ces algèbres peuvent être utilisées en analyse non archimédienne et en théorie des probabilités.

Mots-clés – Coefficients triangulaires, relation d'orthogonalité, triangulaire multipliable, triangulaire convolutive, coefficients triangulaires non dégénérés, système unitaire, suite convolutive, formalisation polynomiale.

Notations

On désigne par $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{K}$ un corps commutatif arbitraire extension du corps des nombres rationnels de caractéristique nul et un corps $\mathbb{Q}_p \subseteq \mathbb{K}$ extension du corps des nombres p –adiques \mathbb{Q}_p complet par rapport à la valeur absolue prolongeant la valeur absolue p –adique, ensuite par $\mathcal{K}[[P_n(X)]]$ l'algèbre des séries formelles des polynômes à coefficients dans le corps \mathcal{K} . On désigne par $A_k^{n,m}$ le coefficient triangulaire quelconque [1], par δ_{kn} le symbole de Kronecker, par $\binom{n}{m}$ le coefficient binomial de Newton, par $\binom{n}{m}_\theta$ le coefficient binomial de Gauss [1], par $\mathcal{K}^\infty = \{\xi = (\xi_n)_{n \geq 0}; \xi_n \in \mathcal{K}\}$ l'espace vectoriel des suites d'éléments de \mathcal{K} .

Notons que dans tout l'article le mot norme veut dire norme non archimédienne. Pour bien comprendre l'analyse non archimédienne on demande aux lecteurs de se référer aux ouvrages [2] – [9].

I. ALGÈBRE DES SUITES TRIANGULAIRES CONVOLUTIVES

On va adopter les notations suivantes qu'on a utilisé dans [1] :

– Le coefficient binomial de Newton $\binom{n}{m}$, défini par la relation de récurrence

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}, m \geq 1.$$

– Le coefficient binomial de Gauss $\binom{n}{m}_\theta$ défini par la relation de récurrence

$$\binom{n}{0}_\theta = \binom{n}{n}_\theta = 1, \quad \binom{n}{m}_\theta = \theta^m \binom{n-1}{m}_\theta + \binom{n-1}{m-1}_\theta, m \geq 1, \theta \in \mathcal{K}^*.$$

– Un élément $A_k^{n,m}$ du corps commutatif \mathcal{K} est dit coefficient triangulaire si $A_k^{n,m} = 0$ pour $k > n + m$ ou $k < \max(n, m)$. Par exemple, le coefficient triangulaire de Newton $\binom{n, m}{k} = \binom{k}{n} \binom{n}{k-m}$, les coefficients triangulaires de Gauss $\binom{n, m}{k}_\theta = \binom{m}{k-n}_\theta P_{n+m-k}^{(\theta)}(\theta^n)$ et

$$\left[\begin{matrix} n, m \\ k \end{matrix} \right]_\theta = \theta^{(k-n)(k-m)} \binom{k}{n}_\theta \binom{n}{k-m}_\theta, \text{ où } P_n^{(\theta)}(X) \text{ est le polynôme de Gauss}$$

$$P_n^{(\theta)}(X) = (X - 1)(X - \theta)(X - \theta^2) \dots (X - \theta^{n-1}).$$

Soit $A = (A_k^{n,m})$ un système de coefficients triangulaires éléments de \mathcal{K} [article 1]. Dans l'espace \mathcal{K}^∞ on définit le produit de convolution des suites $\xi = (\xi_n)_{n \geq 0}$ et $\eta = (\eta_n)_{n \geq 0}$ par :

$$\underbrace{\xi * \eta}_A = \left(\sum_{n+m \geq k}^{n, m \leq k} A_k^{n,m} \xi_n \eta_m \right)_{k \geq 0} \tag{1}$$

L'espace \mathcal{K}^∞ muni de la convolution (1) est une algèbre appelée algèbre des suites triangulaires convolutives et notée (\mathcal{K}^∞, A) . Dans la suite on suppose que les conditions suivantes soient vérifiées [article 1]

$$\sum_{j=\max(m, \ell, k-n)}^{\min(k, m+\ell)} A_k^{n,j} \cdot A_j^{m, \ell} = \sum_{i=\max(n, m, k-\ell)}^{\min(k, m+m)} A_i^{n,m} \cdot A_k^{i, \ell}, \tag{2}$$

$$A_k^{n,m} = A_k^{m,n}. \tag{3}$$

des conditions qui assurent l'associativité et la commutativité de la convolution (1). La suite $\omega_0 = (\delta_{n0})_{n \geq 0}$ est l'élément unité si, et seulement si $A_n^{n,0} = A_n^{0,n} = 1$ ($n \geq 0$). Considérons alors la suite $(\omega_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de l'espace \mathcal{K}^∞ , définis par :

$$\omega_n = (\delta_{kn})_{k \geq 0} \quad (n \geq 0). \tag{4}$$

Lemme 1.

La suite $(\omega_n)_{n \geq 0}$ est triangulaire multipliable par rapport au système A [1], i.e

$$\underbrace{\omega_n * \omega_m}_A = \sum_{l=\max(n,m)}^{n+m} A_l^{n,m} \omega_l.$$

Preuve :

En effet d'après la définition on a

$$\underbrace{\omega_n * \omega_m}_A = \left(\sum_{i+j \geq k}^{i, j \leq k} A_k^{i,j} \delta_{in} \delta_{jm} \right)_{k \geq 0} = \left(\sum_{l \geq n, m}^{n+m} A_l^{n,m} \delta_{kl} \right)_{l \geq 0} = \sum_{l=\max(n,m)}^{n+m} A_l^{n,m} \omega_l. \quad \blacksquare$$

Les sous algèbres de l'algèbre (\mathcal{K}^∞, A) seront notés (\mathcal{L}, A) et appelées aussi algèbres des suites triangulaires convolutives.

En s'appuyant sur les exemples des coefficients triangulaires vus dans [1] on obtient les exemples d'algèbre des suites triangulaires convolutives suivantes **1)** $(\mathcal{K}^\infty, \delta_{k(n+m)})$, **2)** $(\mathcal{K}^\infty, \binom{n, m}{k}_\theta)$ $\theta \in \mathcal{K}^* = \mathcal{K} \setminus \{0\}$, **3)** $(\mathcal{K}^\infty, \binom{k}{n} \delta_{k(n+m)})$, **4)** $(\mathcal{K}^\infty, \left[\begin{matrix} n, m \\ k \end{matrix} \right]_\theta)$.

5) $(\mathcal{K}^\infty, \delta_{kn}, \delta_{km})$, 6) $(\mathcal{K}^\infty, \left[\begin{smallmatrix} n, m \\ k \end{smallmatrix} \right]_\theta)$ $\theta \in \mathcal{K}^* = \mathcal{K} \setminus \{0\}$, où $\binom{k}{n}$ est le coefficient binomial de Newton, $\binom{n, m}{k}$ le coefficient triangulaire de Newton, $\binom{n, m}{k}_\theta$ le coefficient triangulaire de Gauss de première espèce et $\left[\begin{smallmatrix} n, m \\ k \end{smallmatrix} \right]_\theta$ le coefficient triangulaire de Gauss de deuxième espèce. [1]

Une algèbre de suites triangulaires convolutives est dite non dégénérée, si le système $A = (A_{k,n}^{n,m})$ est non dégénéré, i.e. $A_{n+1}^{n,1} \neq 0$ pour tout $n \geq 0$ et dégénérée dans le cas contraire [article 1]. Parmi les exemples ci-dessus les algèbres 1), 2), 3), 4) sont des algèbres non dégénérées, l’algèbre 5) est dégénérée, l’algèbre 6) est non dégénérée si et seulement si $ord \theta = +\infty$. Notons que toute sous algèbre d’une algèbre non dégénérée est aussi non dégénérée.

Toute matrice triangulaire supérieure infinie $S = (s_{mn})_{m,n \geq 0}$, ($s_{mn} = 0, m > n$) engendre un opérateur linéaire dans \mathcal{K}^∞ , qui se présente comme un opérateur de multiplication \mathfrak{R}_S à droite par la matrice S , i.e.:

$$\mathfrak{R}_S : \mathcal{K}^\infty \rightarrow \mathcal{K}^\infty, \mathfrak{R}_S(\xi) = \xi \times S = \left(\sum_{m=0}^n \xi_m \cdot s_{mn} \right)_{n \geq 0} \tag{5}$$

Notons que lorsque la matrice S est inversible, la matrice inverse $T = S^{-1}$ est aussi triangulaire supérieure infinie. Les applications \mathfrak{R}_S et $\mathfrak{R}_T = (\mathfrak{R}_S)^{-1}$ sont des isomorphismes d’espaces vectoriels.

Faisons maintenant une étude de l’application (5) dans le cas des algèbres des suites triangulaires convolutives. On considère cette application comme application entre algèbres $\mathfrak{R}_S : (\mathcal{K}^\infty, B) \rightarrow (\mathcal{K}^\infty, A), \mathfrak{R}_S(\xi) = \xi \times S$.

Lemme 2.

Pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{K}^\infty$ on a :

$$\mathfrak{R}_S \left(\underbrace{\xi * \eta}_B \right) = \left(\sum_{n,m=0}^\ell \left(\sum_{k=\max(n,m)}^{\min(n+m,\ell)} B_k^{n,m} s_{k\ell} \right) \xi_n \eta_m \right)_{\ell \geq 0} \tag{6}$$

Preuve :

Par définitions (1) et (5)

$$\begin{aligned} \left(\underbrace{\xi * \eta}_B \right) \times S &= \left(\sum_{n+m \geq k}^{n,m \leq k} B_k^{n,m} \xi_n \eta_m \right)_{k \geq 0} \times S = \left(\sum_{k=0}^\ell \left(\sum_{n+m \geq k}^{n,m \leq k} B_k^{n,m} \xi_n \eta_m \right) s_{k\ell} \right)_{\ell \geq 0} \\ &= \left(\sum_{n,m=0}^\ell \left(\sum_{k=\max(n,m)}^{\min(n+m,\ell)} B_k^{n,m} s_{k\ell} \right) \xi_n \eta_m \right)_{\ell \geq 0} . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lemme 3.

Pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{K}^\infty$ on a :

$$\underbrace{\mathfrak{R}_S(\xi) * \mathfrak{R}_S(\eta)}_A = \left(\sum_{n,m=0}^\ell \left(\sum_{i+j \geq \ell}^{i,j \leq \ell} A_\ell^{i,j} s_{ni} s_{mj} \right) \xi_n \eta_m \right)_{\ell \geq 0} \tag{7}$$

Preuve :

Par définitions (1) et (5)

$$\begin{aligned} \underbrace{(\xi \times S) * (\eta \times S)}_A &= \left(\sum_{i+j \geq \ell}^{i,j \leq \ell} A_\ell^{i,j} \left(\sum_{n=0}^i \xi_n s_{ni} \right) \left(\sum_{m=0}^j \eta_m s_{mj} \right) \right)_{\ell \geq 0} \\ &= \left(\sum_{n,m=0}^{\ell} \left(\sum_{i+j \geq \ell}^{i,j \leq \ell} A_\ell^{i,j} s_{ni} s_{mj} \right) \xi_n \eta_m \right)_{\ell \geq 0} . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Un rôle important jouera la relation

$$\sum_{k=\max(n,m)}^{\min(n+m,\ell)} B_k^{n,m} s_{k\ell} = \sum_{i+j \geq \ell}^{i,j \leq \ell} A_\ell^{i,j} s_{ni} s_{mj} \tag{8}$$

qui est équivalente à

$$\mathfrak{R}_S \left(\underbrace{\xi * \eta}_B \right) = \underbrace{\mathfrak{R}_S(\xi) * \mathfrak{R}_S(\eta)}_A, \forall \xi, \eta \in \mathcal{K}^\infty$$

i.e. l'application \mathfrak{R}_S est *multiplicative*.

En effet, la suffisance résulte des *lemmes 2 et 3*. Pour démontrer la nécessité il suffit de poser $\xi = \omega_n$ et $\eta = \omega_m$ (4).

Dans le cas, où $S = I$ est la matrice unité la relation (8) se transforme en l'égalité $B_k^{n,m} = A_k^{n,m}$, tandis que $\mathfrak{R}_S = \mathfrak{R}_I$ est l'application identique.

Supposons que la matrice triangulaire supérieure $S = (s_{mn})_{m,n \geq 0}$, ($s_{mn} = 0, m > n$) soit inversible et soit $T = (t_{mn})_{m,n \geq 0}$, ($t_{mn} = 0, m > n$) la matrice inverse, qui est aussi triangulaire supérieure. Dans ce cas \mathfrak{R}_S est une application bijective et l'on a $(\mathfrak{R}_S)^{-1} = \mathfrak{R}_T$. Considérons alors l'application $\mathfrak{R}_T = (\mathfrak{R}_S)^{-1}: (\mathcal{K}^\infty, A) \rightarrow (\mathcal{K}^\infty, B)$. La relation (8) est équivalente à la relation duale

$$\sum_{k=\max(n,m)}^{\min(n+m,\ell)} A_k^{n,m} t_{k\ell} = \sum_{i+j \geq \ell}^{i,j \leq \ell} B_\ell^{i,j} t_{ni} t_{mj} \tag{9}$$

qui, à son tour est équivalente à ce que \mathfrak{R}_T est multiplicative. Ainsi \mathfrak{R}_T et \mathfrak{R}_S sont des isomorphismes d'algèbres. Donnons quelques exemples d'isomorphismes de la forme \mathfrak{R}_S et \mathfrak{R}_T . [1]

$$1) - \mathfrak{R}_{S_0}: \left(\mathcal{K}^\infty, \left(\binom{k}{n} \delta_{k(n+m)} \right) \right) \rightarrow \left(\mathcal{K}^\infty, (\delta_{k(n+m)}) \right), \text{ avec (36) [1]}$$

$$S_0 = \left(\frac{s_1(n,m)}{n!} \right)_{m,n \geq 0} \text{ et } (S_0)^{-1} = T_0 = (s_2(n,m)m!)_{0,m,n \geq 0}$$

$$2) - \mathfrak{R}_{S_2^{(\theta)}}: \left(\mathcal{K}^\infty, \left(\binom{n,m}{k} \right) \right) \rightarrow \left(\mathcal{K}^\infty, \left(\binom{n,m}{k} \right)_\theta \right), \text{ avec (42) [1]}$$

$$S_2^{(\theta)} = \left(\frac{d^{(\theta)}(m,n)}{P_n^{(\theta)}(\theta^n)} \right)_{m,n \geq 0} \text{ et } (S_2^{(\theta)})^{-1} = T_2^{(\theta)} = \left(c^{(\theta)}(m,n) P_m^{(\theta)}(\theta^m) \right)_{m,n \geq 0}, \text{ ord } \theta = \infty$$

$$c^{(\theta)}(m,n) = \sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{m}_\theta ; \quad d^{(\theta)}(m,n) = \sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} \theta^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_\theta \binom{k}{m}.$$

$$3) - \mathfrak{R}_{S^{(\tau,\theta)}}: \left(\mathcal{K}^\infty, \left(\begin{bmatrix} n, m \\ k \end{bmatrix}_\theta \right) \right) \rightarrow \left(\mathcal{K}^\infty, \left(\begin{bmatrix} n, m \\ k \end{bmatrix}_\tau \right) \right), \text{ avec (44), (45) [1], } ord \theta = \infty$$

$$S^{(\tau,\theta)} = \left(\frac{c^{(\tau,\theta)}(m, n)}{P_n^{(\theta)}(\theta^n)} \right)_{m, n \geq 0} \text{ et } (S^{(\tau,\theta)})^{-1} = T^{(\tau,\theta)} = \left(c^{(\theta,\tau)}(m, n) P_m^{(\theta)}(\theta^m) \right)_{m, n \geq 0}$$

$$c^{(\theta,\tau)}(m, n) = \sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} \tau \binom{n-k}{2} \binom{n}{k}_\tau \binom{k}{m}_\theta$$

$$4) - \mathfrak{R}_{S_1^{(\theta)}}: \left(\mathcal{K}^\infty, (\delta_{kn} \delta_{km}) \right) \rightarrow \left(\mathcal{K}^\infty, \left(\begin{bmatrix} n, m \\ k \end{bmatrix}_\theta \right) \right), \text{ avec (38) [1] } ord \theta = \infty$$

$$S_1^{(\theta)} = \left(\frac{(-1)^{n-m} \theta \binom{n-m}{2} \binom{n}{m}_\theta}{P_n^{(\theta)}(\theta^n)} \right)_{m, n \geq 0} \text{ et } (S_1^{(\theta)})^{-1} = T_1^{(\theta)} = \left(\binom{n}{m}_\theta P_m^{(\theta)}(\theta^m) \right)_{m, n \geq 0}.$$

II. ALGÈBRE NORMÉE DES SUITES TRIANGULAIRES CONVOLUTIVES

A. Construction d'espaces normés

Dans cette section considérons le corps commutatif $\mathbb{K} \supseteq \mathbb{Q}_p$ extension du corps des nombres p -adiques \mathbb{Q}_p complet par rapport à la valeur absolue prolongeant la valeur absolue p -adique. Supposons que dans l'espace \mathbb{K}^∞ soit définie la fonctionnelle [5] – [7] :

$$N : \mathbb{K}^\infty \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \tag{10}$$

satisfaisant aux conditions suivantes pour $\lambda \in \mathbb{K}, \xi, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{K}^\infty$

$$N(\lambda \cdot \xi) \leq |\lambda| \cdot N(\xi) ; N(\xi_1 + \xi_2) \leq \max(N(\xi_1), N(\xi_2)) ; N(\xi) = 0 \implies \xi = 0 \in \mathbb{K}^\infty . \tag{11}$$

Considérons maintenant dans l'espace \mathbb{K}^∞ le sous espace

$$V = \{ \xi \in \mathbb{K}^\infty ; N(\xi) < +\infty \} \tag{12}$$

La restriction de la fonctionnelle (10) au sous espace V est une norme non archimédienne. Muni de cette norme l'espace V est un espace normé non archimédien. Dans la suite pour tout $\xi \in V$, on notera $N(\xi) = \|\xi\|$ et $V = \mathbb{K}_{\|\cdot\|}^\infty$. Appliquons la construction ci-dessus à deux fonctionnelles concrètes.

a) Pour $\|\xi\|_{sup} = \sup\{\xi_n ; n \geq 0\}$ on obtient l'espace de Banach des suites bornées noté $\mathbb{K}_{\|\cdot\|_{sup}}^\infty = \mathfrak{m}$.

b) Pour une matrice inversible triangulaire supérieure S on définit la fonctionnelle $N_S : \mathbb{K}^\infty \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ définie par $N_S(\xi) = \sup\{|\sum_{m=0}^n \xi_m \cdot s_{mn}| ; n \geq 0\}$, N_S vérifie les trois conditions (11) ci-dessus. La norme correspondante à cette fonctionnelle pour tout $\xi \in V$ sera notée $N_S(\xi) = \|\xi\|_S$ et l'espace V par $\mathbb{K}_{\|\cdot\|_S}^\infty = \mathfrak{m}_S$, i.e. $\mathfrak{m}_S = \{ \xi \in \mathbb{K}^\infty ; \|\xi\|_S < +\infty \}$.

Notons que dans un espace normé non archimédien pour qu'une série $\sum_{n \geq 0} a_n$ soit convergente il faut et il suffit que $\|a_n\|$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini et l'on a selon [4]

$$\left\| \sum_{n \geq 0} a_n \right\| = \sup\{\|a_n\| ; n \geq 0\}.$$

La restriction des opérateurs \mathfrak{R}_S et $\mathfrak{R}_T = (\mathfrak{R}_S)^{-1}$ aux espaces \mathfrak{m} et \mathfrak{m}_S sera notée $r_S : \mathfrak{m}_S \rightarrow \mathfrak{m}, r_S(\xi) = \xi \times S = \mathfrak{R}_S(\xi)$ et $r_T : \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}_S, r_T(\eta) = \eta \times T = \mathfrak{R}_T(\eta)$. Notons que $r_T = (r_S)^{-1}$. Comme $\|r_S(\xi)\|_{sup} = \|\xi \times S\|_{sup} = \|\xi\|_S < +\infty$, les

opérateurs r_S et $r_T = (r_S)^{-1}$ sont des isomorphismes isométriques. Par conséquent l'espace $(m_S, \|\cdot\|_S)$ est un espace de Banach non archimédien.

Soit données les matrices inversibles triangulaires supérieures S_1, S_2, C , telles que $C \times S_1 = S_2$. On forme les espaces de Banach $(m_{S_i}, \|\cdot\|_{S_i})$ ($i = 1, 2$) et on considère l'opérateur R_C du type (5), multiplication à droite par C . Considérons les restrictions suivantes de ce type d'opérateur

$$r_C : m_{S_2} \rightarrow m_{S_1}, r_C(\xi) = \xi \times C \tag{13}$$

$$r_D : m_{S_1} \rightarrow m_{S_2}, r_D(\eta) = \eta \times D \tag{14}$$

où C et $D = C^{-1}$ sont des matrices triangulaires supérieures inverse l'une de l'autre.

Les opérateurs r_C et $r_D = r_C^{-1}$ sont des isomorphismes isométriques d'espaces normés.

Preuve :

En effet on a par définition

$$\|r_C(\xi)\|_{S_1} = \|\xi \times C\|_{S_1} = \|\xi \times C \times S_1\|_{sup} = \|\xi \times S_2\|_{sup} = \|\xi\|_{S_2} < +\infty. \blacksquare$$

B. Construction d'algèbre normée des suites triangulaires convolutives

Considérons l'espace normé $\mathbb{K}_{\|\cdot\|}^\infty$ et soit $\Gamma = \binom{n, m}{k}$ un système de coefficients triangulaires définissant dans \mathbb{K}^∞ la convolution (1), $\underbrace{\xi * \eta}_\Gamma$ vérifiant la condition

$$\left\| \underbrace{\xi * \eta}_\Gamma \right\| \leq \|\xi\| \cdot \|\eta\|, (\xi, \eta \in \mathbb{K}^\infty) \tag{15}$$

L'espace normé $(\mathbb{K}_{\|\cdot\|}^\infty, \|\cdot\|)$ muni de la convolution (1) et vérifiant (15) forme une algèbre normée, notée $(\mathbb{K}_{\|\cdot\|}^\infty, \|\cdot\|, \Gamma)$. Appliquée aux deux espaces normés m et m_S , cette construction nous amène à deux types d'algèbres de Banach des suites triangulaires convolutives.

a) Algèbre de Banach $(m, \|\cdot\|_{sup}, A = (A_k^{n,m}))$.

Soit donné l'espace de Banach m muni de la norme $\|\cdot\|_{sup}$ et soit $A = (A_k^{n,m})$ un système de coefficients triangulaires satisfaisant à la condition

$$|A_k^{n,m}| \leq 1 \tag{16}$$

La condition (15) est satisfaite pour l'espace $(m, \|\cdot\|_{sup})$

Preuve :

En effet on a par définition de la convolution pour $\xi, \eta \in m$

$$\left\| \underbrace{\xi * \eta}_A \right\|_{sup} = \sup \left\{ \left| \sum_{n+m \leq k} A_k^{n,m} \xi_n \eta_m \right|, k \geq 0 \right\} \leq \|\xi\|_{sup} \cdot \|\eta\|_{sup}. \blacksquare$$

Par conséquent $(m, \|\cdot\|_{sup}, A)$ est une algèbre de Banach.

Notons que la condition (16) pour $(m, \|\cdot\|_{sup})$ résulte de la condition (15).

Preuve :

En effet on a pour les suites $\omega_n = (\delta_{kn})_{k \geq 0}$ ($n \geq 0$) (4)

$$\begin{aligned} \sup\{|A_{k}^{n,m}|; 0 \leq n, m \leq k \leq n+m\} &= \left\| \sum_{k \geq n,m}^{n+m} A_{k}^{n,m} \cdot \omega_k \right\|_{sup} \\ &= \left\| \underbrace{\omega_n * \omega_m}_A \right\|_{sup} \leq \|\omega_n\|_{sup} \cdot \|\omega_m\|_{sup} = 1. \blacksquare \end{aligned}$$

Comme exemples on peut considérer les algèbres

1) $(m, \|\cdot\|_{sup}, \delta_{k,(n+m)})$ et 2) $(m, \|\cdot\|_{sup}, \binom{n, m}{k}_{\theta})$, avec $|\theta| = 1$, où $\binom{n, m}{k}_{\theta}$ est le coefficient triangulaire de Gauss de première espèce [1].

b) Algèbre de Banach $(m_S, \|\cdot\|_S, B = (B_k^{n,m}))$.

Soit donné l'espace de Banach $(m_S, \|\cdot\|_S)$, où S est une matrice triangulaire supérieure inversible et soit $B = (B_k^{n,m})$ un système de coefficients triangulaires, tel qu'il existe un autre système de coefficients triangulaires $A = (A_k^{n,m})$ satisfaisant (16). De plus on suppose que $A = (A_k^{n,m}), B = (B_k^{n,m})$ et S vérifient la relation (8),

$$\sum_{k=m}^{\min(n+m,\ell)} B_k^{n,m} S_{k\ell} = \sum_{i+j \geq \ell}^{i,j \leq \ell} A_{\ell}^{i,j} S_{ni} S_{mj}$$

qui est équivalente à (9),

$$\sum_{k=\max(n,m)}^{\min(n+m,\ell)} A_k^{n,m} t_{k\ell} = \sum_{i+j \geq \ell}^{i,j \leq \ell} B_{\ell}^{i,j} t_{ni} t_{mj}$$

, avec $T = (t_{nm}) = S^{-1}$.

La condition (15) est satisfaite pour l'espace $(m_S, \|\cdot\|_S)$

Preuve :

En effet on a

$$\left\| \underbrace{\xi * \eta}_B \right\|_S = \left\| \left(\underbrace{\xi * \eta}_B \right) \times S \right\|_{sup} = \left\| \underbrace{(\xi \times S) * (\eta \times S)}_A \right\|_{sup} \leq \|\xi \times S\|_{sup} \cdot \|\eta \times S\|_{sup} = \|\xi\|_S \cdot \|\eta\|_S. \blacksquare$$

L'algèbre $(m_S, \|\cdot\|_S, B = (B_k^{n,m}))$ est donc une algèbre de Banach.

Donnons quelques exemples

1) $(m_{S_0}, \|\cdot\|_{S_0}, \binom{k}{n} \delta_{k,(n+m)})$, avec (36) [1]

$$S_0 = \left(\frac{s_1(n,m)}{n!} \right)_{m,n \geq 0} \text{ et } (S_0)^{-1} = T_0 = (s_2(n,m)m!)_{m,n \geq 0}$$

Dans les exemples suivants on suppose que $|\tau| = 1$, ord $\tau = +\infty$, $A = \binom{n, m}{k}_{\tau}$.

2) $(m_{S_2^{(\tau)}}, \|\cdot\|_{S_2^{(\tau)}}, \binom{n, m}{k})$, avec (42) [1]

où

$$S_2^{(\tau)} = \left(\frac{d^{(\tau)}(m, n)}{P_n^{(\tau)}(\tau^n)} \right)_{m, n \geq 0} \quad \text{et} \quad (S_2^{(\tau)})^{-1} = T_2^{(\tau)} = \left(c^{(\tau)}(m, n) P_m^{(\tau)}(\tau^m) \right)_{m, n \geq 0},$$

$$c^{(\tau)}(m, n) = \sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{m}_\tau; \quad d^{(\tau)}(m, n) = \sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} \tau^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_\tau \binom{k}{m}.$$

3) $\left(m_{S^{(\theta, \tau)}}, \|\cdot\|_{S^{(\theta, \tau)}}, \left(\begin{bmatrix} n & m \\ k \end{bmatrix}_\theta \right) \right)$, avec (44), (45) [1].

où $|\theta| = 1$

$$S^{(\theta, \tau)} = \left(\frac{c^{(\theta, \tau)}(m, n)}{P_n^{(\tau)}(\tau^n)} \right)_{m, n \geq 0} \quad \text{et} \quad T^{(\theta, \tau)} = (S^{(\theta, \tau)})^{-1} = \left(c^{(\tau, \theta)}(m, n) \cdot P_m^{(\tau)}(\tau^m) \right)_{m, n \geq 0},$$

$$c^{(\tau, \theta)}(m, n) = \sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} \theta^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_\theta \binom{k}{m}_\tau.$$

4) $\left(m_{S_1^{(\tau)}}, \|\cdot\|_{S_1^{(\tau)}}, (\delta_{k, n} \cdot \delta_{k, m}) \right)$, avec (38) [1]

où

$$S_1^{(\tau)} = \left(\frac{(-1)^{n-m} \tau^{\binom{n-m}{2}} \binom{n}{m}_\tau}{P_n^{(\tau)}(\tau^n)} \right)_{m, n \geq 0} \quad \text{et} \quad T_1^{(\tau)} = (S_1^{(\tau)})^{-1} = \left(\binom{n}{m}_\tau P_m^{(\tau)}(\tau^m) \right)_{m, n \geq 0}.$$

c) Algèbres isométriques isomorphes.

Etudions maintenant les relations entre les algèbres $(m, \|\cdot\|_{sup}, A = (A_k^{n, m}))$ et $(m_S, \|\cdot\|_S, B = (B_k^{n, m}))$, respectant les conditions (8) et (16) posées ci-dessus. Pour cela on considère les applications

$$r_S : (m_S, \|\cdot\|_S, B = (B_k^{n, m})) \rightarrow (m, \|\cdot\|_{sup}, A = (A_k^{n, m})), \quad r_S(\xi) = \xi \times S; \quad (17)$$

et

$$r_T : (m, \|\cdot\|_{sup}, A = (A_k^{n, m})) \rightarrow (m_S, \|\cdot\|_S, B = (B_k^{n, m})), \quad r_T(\eta) = \eta \times T. \quad (18)$$

Notons que $T = S^{-1}$ et que r_S et $r_T = (r_S)^{-1}$ sont des isomorphismes isométriques d'algèbres.

Donnons quelques exemples

- 1) $r_{S_0} : \left(m_{S_0}, \|\cdot\|_{S_0}, \left(\binom{k}{n} \delta_{k, (n+m)} \right) \right) \rightarrow (m, \|\cdot\|_{sup}, (\delta_{k, (n+m)}))$
- 2) $r_{S_2^{(\tau)}} : \left(m_{S_2^{(\tau)}}, \|\cdot\|_{S_2^{(\tau)}}, \left(\begin{bmatrix} n & m \\ k \end{bmatrix} \right) \right) \rightarrow (m, \|\cdot\|_{sup}, \left(\begin{bmatrix} n & m \\ k \end{bmatrix}_\tau \right))$
- 3) $r_{S^{(\theta, \tau)}} : \left(m_{S^{(\theta, \tau)}}, \|\cdot\|_{S^{(\theta, \tau)}}, \left(\begin{bmatrix} n & m \\ k \end{bmatrix}_\theta \right) \right) \rightarrow (m, \|\cdot\|_{sup}, \left(\begin{bmatrix} n & m \\ k \end{bmatrix}_\tau \right))$

$$4) \quad r_{S_1^{(\tau)}} : \left(m_{S_1^{(\tau)}}, \|\cdot\|_{S_1^{(\tau)}}, (\delta_{k,n}, \delta_{k,m}) \right) \rightarrow \left(m, \|\cdot\|_{sup}, \left(\binom{n, m}{k} \right)_\tau \right).$$

III. ALGEBRE DES SERIES FORMELLES DE POLYNOMES

A. Généralités sur la formalisation.

On appelle *série formelle des polynômes* à coefficients dans le corps commutatif \mathcal{K} toute expression de la forme

$$\sum_{n \geq 0} \xi_n P_n(X) = \xi_0 P_0(X) + \dots + \xi_n P_n(X) + \dots \quad \{ (\xi_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{K}^\infty \} \tag{19}$$

Les éléments $\xi_n, n \geq 0$ sont appelés les coefficients de la série, $P_n(x)$ sont des polynômes standards de degré n et deux séries sont dites égales lorsque leurs coefficients correspondants sont égaux. On désigne par $\mathcal{K}[[P_n(X)]]$ l'ensemble de ces séries formelles de polynômes à coefficients dans \mathcal{K} , i.e.

$$\mathcal{K}[[P_n(X)]] = \left\{ \sum_{n \geq 0} \xi_n P_n(X) ; (\xi_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{K}^\infty \right\} \tag{20}$$

Muni des opérations linéaires usuelles définies par

$$\forall \xi = (\xi_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{K}^\infty, \forall \eta = (\eta_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{K}^\infty, \forall \lambda \in \mathcal{K} ;$$

$$\sum_{n \geq 0} \xi_n P_n(X) + \sum_{n \geq 0} \eta_n P_n(X) = \sum_{n \geq 0} (\xi_n + \eta_n) P_n(X) ; \lambda \cdot \sum_{n \geq 0} \xi_n P_n(X) = \sum_{n \geq 0} (\lambda \cdot \xi_n) P_n(X) \tag{21}$$

$\mathcal{K}[[P_n(X)]]$ a une structure d'espace vectoriel sur \mathcal{K} , il est appelé P -formalisation de l'espace \mathcal{K}^∞ .

On appelle *application diagonale* l'application

$$i^P : \mathcal{K}^\infty \rightarrow \mathcal{K}[[P_n(X)]], \quad i^P [(\xi_n)_{n \geq 0}] = \sum_{n \geq 0} \xi_n P_n(X) \tag{22}$$

L'application i^P est appelée *l'application de la P-formalisation diagonale*. Si \mathcal{L} est un sous espace vectoriel de \mathcal{K}^∞ , muni des opérations induites $\mathcal{L}[[P_n(X)]] = \{ \sum_{n \geq 0} \xi_n P_n(X) ; (\xi_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{L} \}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{K}[[P_n(X)]]$. La restriction à \mathcal{L} de l'application diagonale i^P , notée $i^P_{\mathcal{L}}$, est un isomorphisme de l'espace vectoriel \mathcal{L} sur $\mathcal{L}[[P_n(X)]]$. L'espace $\mathcal{L}[[P_n(X)]]$ est appelé P -formalisation de \mathcal{L} et $i^P_{\mathcal{L}}$ l'application P -formalisation diagonale. On dit que la P -formalisation de \mathcal{L} est la restriction de la P -formalisation de \mathcal{K}^∞ .

Etant donné un ensemble quelconque M et une application $f : M \rightarrow \mathcal{K}^\infty, M \ni x \mapsto f(x) = (f_n(x))_{n \geq 0}$, on appelle P -formalisation de l'application f l'application

$$f^P : M \rightarrow \mathcal{K}[[P_n(X)]], \quad f^P(x) = \sum_{n \geq 0} f_n(x) P_n(X) \tag{23}$$

Notons que $f^P = i^P \circ f$. Si M est un espace vectoriel et si f est un morphisme d'espaces vectoriels, alors f^P est un morphisme d'espaces vectoriels. En particulier si $M = \mathcal{K}^\infty$ et $f = id_{\mathcal{K}^\infty}$ l'application identique, la définition (21) se réduit à l'application de la P -formalisation diagonale i^P .

Toute matrice triangulaire supérieure infinie $S = (s_{mn})_{m, n \geq 0}, (s_{mn} = 0, m > n)$ engendre un opérateur linéaire dans \mathcal{K}^∞ , qui se présente comme un opérateur de multiplication \mathfrak{R}_S à droite par la matrice S , i.e.:

$$\mathfrak{R}_S : \mathcal{K}^\infty \rightarrow \mathcal{K}^\infty, \mathfrak{R}_S(\xi) = \xi \times S = \left(\sum_{m=0}^n \xi_m \cdot s_{mn} \right)_{n \geq 0} \tag{24}$$

Notons que lorsque la matrice S est inversible, la matrice inverse $T = S^{-1}$ est aussi triangulaire supérieure. Les applications \mathfrak{R}_S et $\mathfrak{R}_T = (\mathfrak{R}_S)^{-1}$ sont des isomorphismes d'espaces vectoriels.

Etant données deux suites de polynômes $P = (P_n(X))_{n \geq 0}$, $Q = (Q_n(X))_{n \geq 0}$. On va décrire la relation entre les P – et Q – formalisations d'espaces. Une matrice triangulaire supérieure $S = (s_{mn})_{m,n \geq 0}$, engendre une application triangulaire supérieure des séries

$$\mathfrak{R}_S^{P,Q} : \mathcal{K}[[Q_n(X)]] \rightarrow \mathcal{K}[[P_n(X)]], \quad \mathfrak{R}_S^{P,Q} \left(\sum_{m \geq 0} \xi_m \cdot Q_m(X) \right) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{m=0}^n s_{mn} \cdot \xi_m \right) P_n(X) \quad (25)$$

$\mathfrak{R}_S^{P,Q}$ est appelée (P, Q) – formalisation de l'application \mathfrak{R}_S . Notons que $i^P \circ \mathfrak{R}_S = \mathfrak{R}_S^{P,Q} \circ i^Q$ et que si φ et ψ sont deux applications de M dans \mathcal{K}^∞ , il résulte de la relation $\mathfrak{R}_S \circ \varphi = \psi$ la relation $\mathfrak{R}_S^{P,Q} \circ \varphi^Q = \psi^P$

Pour les suites de polynômes P, Q, R et les applications \mathfrak{R}_{S_1} et \mathfrak{R}_{S_2} on a $\mathfrak{R}_{S_1}^{P,R} \circ \mathfrak{R}_{S_2}^{R,Q} = \mathfrak{R}_{S_1 \times S_2}^{P,Q}$. Dans le cas, où la matrice S est inversible, avec $T = S^{-1}$ les applications $\mathfrak{R}_S^{P,Q}$ et $\mathfrak{R}_T^{Q,P} = (\mathfrak{R}_S^{P,Q})^{-1}$ sont des isomorphismes d'espaces vectoriels.

B. Espaces normés des séries formelles de polynômes.

Considérons le corps commutatif $\mathbb{K} \supseteq \mathbb{Q}_p$ et une suite de polynômes $\mathbb{P}(X) = (P_n(X))_{n \geq 0}$. A partir de la fonctionnelle définie par (10) et (11), que l'on notera $\|\cdot\|$, on définit la fonctionnelle $\|\cdot\|^{\mathbb{P}} : \mathbb{K}[[P_n(X)]] \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ par $\|\sum_n \xi_n P_n(X)\|^{\mathbb{P}} = \|(\xi_n)_{n \geq 0}\|$. Cette fonctionnelle possède toutes les propriétés (10) et (11). La fonctionnelle $\|\cdot\|^{\mathbb{P}}$ est appelée \mathbb{P} – formalisation de la fonctionnelle $\|\cdot\|$. La \mathbb{P} – formalisation du sous espace $\mathbb{K}_{\|\cdot\|}^\infty$ est donc

$$\mathbb{K}_{\|\cdot\|}^\infty[[P_n(X)]] = \left\{ \sum_n \xi_n P_n(X) ; (\xi_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{K}^\infty \text{ et } \|(\xi_n)_{n \geq 0}\| < +\infty \right\}. \quad (26)$$

L'espace $\mathbb{K}_{\|\cdot\|}^\infty[[P_n(X)]]$ muni de la norme $\|\sum_n \xi_n P_n(X)\|^{\mathbb{P}} = \|(\xi_n)_{n \geq 0}\|$ est un espace normé non archimédien et l'application diagonale $i_{\mathbb{K}_{\|\cdot\|}^\infty}^{\mathbb{P}} : \mathbb{K}_{\|\cdot\|}^\infty \rightarrow \mathbb{K}_{\|\cdot\|}^\infty[[P_n(X)]]$ est un isomorphisme isométrique d'espaces normés. La construction ci-dessus appliquée aux espaces m et m_S nous amène à deux types espaces de Banach des séries formelles $m[[P_n(X)]]$ et $m_S[[Q_n(X)]]$, que l'on notera respectivement $\mathbb{K}\langle P_n(X) \rangle$ et $\mathbb{K}_S\langle Q_n(X) \rangle$. On définit deux modifications de l'application (25), $\mathfrak{R}_S^{P,Q}$. Soit données les matrices triangulaires supérieures inversibles S_1, S_2, C , telles que $C \times S_1 = S_2$, $D = C^{-1}$,

$$r_C^{P,Q} : \mathbb{K}_{S_2}\langle Q_n(X) \rangle \rightarrow \mathbb{K}_{S_1}\langle P_n(X) \rangle \quad \text{et} \quad r_D^{Q,P} : \mathbb{K}_{S_1}\langle P_n(X) \rangle \rightarrow \mathbb{K}_{S_2}\langle Q_n(X) \rangle$$

$$r_C^{P,Q} \left(\sum_{m \geq 0} \xi_m Q_m(X) \right) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{m=0}^n c_{mn} \cdot \xi_m \right) P_n(X) \quad \text{et} \quad r_D^{Q,P} \left(\sum_{m \geq 0} \eta_m P_m(X) \right) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{m=0}^n d_{mn} \cdot \eta_m \right) Q_n(X).$$

Notons que $i_{m_{S_1}}^P \circ r_C = r_C^{P,Q} \circ i_{m_{S_2}}^Q$ et $i_{m_{S_2}}^Q \circ r_D = r_D^{Q,P} \circ i_{m_{S_1}}^P$. Les applications $r_C^{P,Q}$ et $r_D^{Q,P} = (r_C^{P,Q})^{-1}$ sont des isomorphismes isométriques d'espaces.

C. Formalisation polynomiale.

Soit $A = (A_k^{n,m})$ un système de coefficients triangulaires satisfaisant aux formules (2), (3), $A_n^{0,n} = A_n^{n,0} = 1$, de plus on suppose que le système A est non dégénéré, i.e. $A_{n+1}^{n,1} \neq 0$. Soit $Q = (Q_n^A)_{n \geq 0}$ une suite de polynômes triangulaires multipliables par rapport à A . D'après le corollaire du lemme V. 2 de [1], le lemme V. 3 de [1]

$$Q_0^{(A)}(X) = A_0^{0,0} = 1, \quad Q_n^{(A)}(X) = \frac{X(X - A_1^{1,1}) \dots (X - A_{n-1}^{n-1,1})}{A_2^{1,1} \dots A_n^{n-1,1}} \quad (n \geq 1).$$

On sait aussi, d'après la formule (70) [1]

$$Q_n^{(A)}(X - \lambda_0) = \frac{(X - \lambda_0)(X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_{n-1})}{v_1 \cdots v_{n-1}} \tag{27}$$

où $v_0 = A_{1,1}^{0,1} = 1, v_n = A_{n+1,1}^{n,1}, \lambda_n = \lambda_0 + A_n^{n,1} (n \geq 0)$.

Dans la suite on pose $Q_n^{(A)}(X - \lambda_0) = P_n^{(A)}(X)$, on considère l'espace $\mathcal{K}[[P_n^{(A)}(X)]]$ et on définit la multiplication par

$$\left(\sum_{n \geq 0} \xi_n P_n^{(A)}(X) \right) \times \left(\sum_{m \geq 0} \eta_m P_m^{(A)}(X) \right) = \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{n+m \geq k}^{n,m \leq k} A_k^{n,m} \xi_n \eta_m \right) P_k^{(A)}(X) \tag{28}$$

Muni de cette opération, l'espace $\mathcal{K}[[P_n^{(A)}(X)]]$ est une algèbre, que l'on notera aussi $\mathcal{K}[[P_n^{(A)}(X); A]]$. L'algèbre $\mathcal{K}[[P_n^{(A)}(X); A]]$ est une P -formalisation de l'algèbre des suites triangulaires convolutives (\mathcal{K}^∞, A) . Un tel type de formalisation est appelé *formalisation polynômiale*. Toute sous algèbre (\mathcal{L}, A) de (\mathcal{K}^∞, A) admet comme formalisation polynômiale la sous algèbre notée $\mathcal{L}[[P_n^{(A)}(X)]]$ de $\mathcal{K}[[P_n^{(A)}(X)]]$ dont les coefficients sont les éléments de toute suite appartenant à $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}^\infty$. Pour toute série

$$\mathbb{P}(X) = \sum_{n \geq 0} \xi_n P_n^{(A)}(X) \in \mathcal{K}[[P_n^{(A)}(X)]] \tag{29}$$

est défini le scalaire qui engendre un système triangulaire de Cramer d'équations

$$\mathbb{P}(\lambda_m) = \sum_{n=0}^m \xi_n P_n^{(A)}(\lambda_m). \tag{30}$$

L'application $\mathbb{P}(X) \rightarrow (\mathbb{P}(\lambda_m))_{m \geq 0}$ est un isomorphisme de $\mathcal{K}[[P_n^{(A)}(X)]]$ sur $(\mathcal{K}^\infty, (\delta_{kn}, \delta_{km}))$.

On a la condition d'égalité suivante

$$\mathbb{P}_1(X) = \mathbb{P}_2(X) \Leftrightarrow \mathbb{P}_1(\lambda_m) = \mathbb{P}_2(\lambda_m) \quad (\forall m \geq 0)$$

Ainsi la série $\mathbb{P}(X)$ est inversible dans $\mathcal{K}[[P_n^{(A)}(X)]]$ si et seulement si $\mathbb{P}(\lambda_m) \neq 0, (m \geq 0)$.

Par exemple on a, pour $\lambda \neq \lambda_m (m \geq 0)$

$$\frac{1}{\lambda - X} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{A_{n+1,1}^{n,1} \cdot P_{n+1}^{(A)}(\lambda)} P_n^{(A)}(X). \tag{31}$$

égalité obtenue directement par multiplication à gauche et à droite par $\lambda - X$, puis en posant ensuite $\lambda - X = (\lambda - \lambda_n) + (\lambda_n - X)$.

Considérons quelques exemples d'algèbres de séries formelles triangulaires multipliables de polynômes standards

1) A l'aide du système non dégénéré $(\delta_{k(n+m)})$ est construite l'algèbre $\mathcal{K}[[X^n; (\delta_{k(n+m)})]]$ qui coïncide avec l'algèbre classique des séries formelles entières. Elle est une formalisation polynômiale de l'algèbre $(\mathcal{K}^\infty, (\delta_{k(n+m)}))$. Par exemple dans $\mathcal{K}[[X^n; (\delta_{k(n+m)})]]$ on a

$$\xi \neq 1, \quad \frac{1}{1 - \xi(1 + X)} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\xi(\xi^{-1} - 1)^{n+1}} X^n. \tag{32}$$

On y définit « le logarithme formel » par

$$\log(1 + X) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} X^n, \tag{33}$$

et la fonction puissance formelle par

$$(1 + X)^T = \sum_{n \geq 0} \binom{T}{n} X^n \tag{34}$$

2) A l'aide du système non dégénéré $\left(\binom{n, m}{k}\right)_\theta$ est construite l'algèbre $\mathcal{K}[[P_n^{(\theta)}(X)]]$ qui est une formalisation de l'algèbre $\left(\mathcal{K}^\infty, \left(\binom{n, m}{k}\right)_\theta\right)$. Pour tout élément $F_1(X)$ et $F_2(X)$ appartenant à $\mathcal{K}[[P_n^{(\theta)}(X)]]$ on a l'équivalence $F_1(X) = F_2(X) \Leftrightarrow F_1(\theta^m) = F_2(\theta^m) (\forall m \geq 0)$. Moyennant (31) pour $\xi^{-1} \neq \theta^m (m \geq 0)$ on a

$$\frac{1}{1 - \xi X} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\xi \cdot P_{n+1}^{(\theta)}(\xi^{-1})} P_n^{(\theta)}(X) \tag{35}$$

3) Dans le cas particulier, où $ord \tau = +\infty$, l'algèbre $\mathcal{K}[[P_n^{(\tau)}(X)]]$, qui est une formalisation de l'algèbre $\left(\mathcal{K}^\infty, \left(\binom{n, m}{k}\right)_\tau\right)$, possède des possibilités supplémentaires. Dans cette algèbre est défini « le logarithme de base τ formel » par (voir (39)[1])

$$\log_\tau(X) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{dQ_n^{(\tau)}(X)}{dX}\right) (1) P_n^{(\tau)}(X) = \sum_{n \geq 1} \frac{d^{(\tau)}(n, 1)}{P_n^{(\tau)}(\tau^n)} P_n^{(\tau)}(X) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \tau^{-\binom{n}{2}}}{1 - \tau^n} P_n^{(\tau)}(X) \tag{36}$$

On peut encore écrire

$$\log_\tau(X) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{dP_n^{(\tau)}(X)}{dX}\right) (1) Q_n^{(\tau)}(X),$$

d'où

$$\log_\tau(\tau^m) = \sum_{n=0}^m Q_n^{(\tau)}(\tau^m) \left(\frac{dP_n^{(\tau)}(X)}{dX}\right) (1) = \frac{d}{dX} \left[\sum_{n=0}^m \binom{m}{n}_\tau P_n^{(\tau)}(X) \right] (1) = \frac{d}{dX} (X^m)(1) = m.$$

De plus de la relation $\log_\tau(\tau^{m+k}) = m + k = \log_\tau(\tau^m) + \log_\tau(\tau^k)$ il résulte

$$\log_\tau(XY) = \log_\tau(X) + \log_\tau(Y).$$

On définit également dans cette algèbre un analogue de la fonction puissance entière

$$\Phi^{(\tau)}(X, a) = \sum_{n \geq 0} Q_n^{(\tau)}(a) P_n^{(\tau)}(X) \quad (a \in \mathcal{K}) \tag{37}$$

c'est à dire

$$\Phi^{(\tau)}(X, a_1 a_2) = \Phi^{(\tau)}(X, a_1) \cdot \Phi^{(\tau)}(X, a_2). \tag{37'}$$

Preuve :

Puisque la suite $(Q_n^{(\tau)}(X))_{n \geq 0}$ est multiplicative triangulaire dissociable par rapport au système $\left(\binom{n, m}{k}\right)_\tau$ (voir exemple (4) lemme 4.3 (article1)), d'après la définition de la multiplication dans $\mathcal{K}[[P_n^{(\tau)}(X)]]$ on a

$$\begin{aligned} \Phi^{(\tau)}(X, a_1 a_2) &= \sum_{k \geq 0} Q_k^{(\tau)}(a_1 a_2) P_k^{(\tau)}(X) = \sum_{k \geq 0} \left[\sum_{\substack{m, n \leq k \\ m+n \leq k}} \binom{n, m}{k}_\tau Q_n^{(\tau)}(a_1) Q_m^{(\tau)}(a_2) \right] P_k^{(\tau)}(X) \\ &= \left(\sum_{n \geq 0} Q_n^{(\tau)}(a_1) P_n^{(\tau)}(X) \right) \times \left(\sum_{m \geq 0} Q_m^{(\tau)}(a_2) P_m^{(\tau)}(X) \right) = \Phi^{(\tau)}(X, a_1) \cdot \Phi^{(\tau)}(X, a_2). \blacksquare \end{aligned}$$

4) A l'aide du système non dégénéré $\left(\binom{k}{n} \delta_{k(n+m)}\right)$, on construit l'algèbre polynômes triangulaires multipliables $\mathcal{K}[[X^n/n!]]$, formalisation polynômiale de l'algèbre $\left(\mathcal{K}^\infty, \left(\binom{k}{n} \delta_{k(n+m)}\right)\right)$.

Dans $\mathcal{K}[[X^n/n!]]$ on définit la fonction exponentielle formelle

$$\exp(X) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \tag{38}$$

On y définit respectivement aussi les polynômes $D_n^{(\xi)}(T)$ et les coefficients $D_n^{(\xi)}$ par les séries formelles

$$\frac{\exp(TX)}{1 - \xi \cdot \exp(X)} = \sum_{n \geq 0} D_n^{(\xi)}(T) \frac{X^n}{n!} ; \frac{1}{1 - \xi \cdot \exp(X)} = \sum_{n \geq 0} D_n^{(\xi)} \frac{X^n}{n!} \tag{39}$$

Les nombres $D_n^{(\xi)}$ font partie de la famille des nombres d'Euler $H_n(u)$ [10], des nombres $C_n(\varepsilon)$ [11]. Les polynômes $D_n^{(\xi)}(T)$ peuvent être représentés par

$$D_n^{(\xi)}(T) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k^{(\xi)} T^k \tag{40}$$

Notons quelques propriétés de ces polynômes et de ces nombres spéciaux obtenues à l'aide des fonctions génératrices (39) :

$$m^n \sum_{k=0}^{m-1} \xi^k D_n^{(\xi^m)} \left(T + \frac{k}{m}\right) = D_n^{(\xi)}(mT) , \quad \sum_{k=0}^{m-1} \xi^k k^n = D_n^{(\xi)} - \xi^m D_n^{(\xi)}(m) \tag{41}$$

$$D_n^{(\xi)} = \sum_{k=0}^n s_2(n, k) \cdot k! \frac{\xi^k}{(1 - \xi)^k} \tag{42}$$

où $s_2(n, k)$ est le nombre de Stirling de second ordre.

On peut encore citer d'autres exemples [8]

$$\sum_{n \geq k} s_1(n, k) \frac{X^n}{n!} = \frac{1}{k!} \log^k(1 + X) , \quad \sum_{n \geq 0} \omega(n) \frac{X^n}{n!} = \exp(e^X - 1) , \quad \sum_{n \geq 0} \langle a \rangle_n \frac{X^n}{n!} = \frac{1}{(1 - X)^a} \tag{43}$$

où $s_1(n, k)$ est le nombre de Stirling de premier ordre, $\omega(n)$ le nombre de Bell et les coefficients $\langle a \rangle_n = a(a + 1)(a + 2) \dots (a + n - 1)$

5) A l'aide du système non dégénéré $\left(\binom{n, m}{k}\right)$, où $\binom{n, m}{k} = \binom{k}{n} \binom{n}{k - m}$ [1] est le coefficient triangulaire de Newton, on construit une suite de polynômes $\left(\binom{X}{n}\right)_{n \geq 0}$ multipliable par rapport à ce système. L'algèbre $\mathcal{K} \left[\left[\binom{X}{n}\right]\right]$ est une formalisation polynômiale de $\left(\mathcal{K}^\infty, \left(\binom{n, m}{k}\right)\right)$. Dans cette algèbre, on définit la fonction exponentielle formelle de base $a \in \mathcal{K}^*$

$$a^X = \sum_{n \geq 0} (a - 1)^n \binom{X}{n} \tag{44}$$

Pour $\xi^{-1} \neq a^n$ ($n \geq 0$) on a le développement

$$\frac{1}{1 - \xi a^X} = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{m=0}^n \frac{(-1)^{n-m} \binom{n}{m}}{1 - \xi a^m} \right) \binom{X}{n} \tag{45}$$

que l'on vérifie directement par multiplication à gauche et à droite par $1 - \xi a^X$ ou bien en donnant à X la valeur arbitraire $k \geq 0$.

6) A l'aide du système non dégénéré $\left(\left[\begin{smallmatrix} n & m \\ k & \end{smallmatrix} \right]_{\tau} \right)$, où $\left[\begin{smallmatrix} n & m \\ k & \end{smallmatrix} \right]_{\tau} = \tau^{(k-n)(k-m)} \binom{k}{n}_{\tau} \binom{n}{k-m}_{\tau}$ est le coefficient triangulaire de Gauss de second espèce (article 1), non dégénéré si $ord \tau = +\infty$, on construit la suite de polynômes (d'interpolation de Gauss) $(Q_n^{(\tau)}(X))_{n \geq 0}$ triangulaire multipliable par rapport à ce système. L'algèbre $\mathcal{K}[[Q_n^{(\tau)}(X)]]$ est une formalisation polynomiale de $\left(\mathcal{K}^{\infty}, \left(\left[\begin{smallmatrix} n & m \\ k & \end{smallmatrix} \right]_{\tau} \right) \right)$. On y introduit un analogue de la fonction puissance

$$\Phi^{(\tau)}(X, a) = \sum_{n \geq 0} P_n^{(\tau)}(a) Q_n^{(\tau)}(X) \quad (a \in \mathcal{K}) \tag{46}$$

c'est à dire

$$\Phi^{(\tau)}(X, a_1 a_2) = \Phi^{(\tau)}(X, a_1) \cdot \Phi^{(\tau)}(X, a_2). \tag{47'}$$

Preuve :

La démonstration est analogue à celle de (37'), sachant que $(P_n^{(\tau)}(X))_{n \geq 0}$ est multiplicative dissociable par rapport à $\left(\left[\begin{smallmatrix} n & m \\ k & \end{smallmatrix} \right]_{\tau} \right)$ et $(Q_n^{(\tau)}(X))_{n \geq 0}$ triangulaire multipliable par rapport à ce système. ■

Pour $\xi^{-1} \neq a^n$ ($n \geq 0$) on a le développement

$$\frac{1}{1 - \xi \Phi^{(\tau)}(X, a)} = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{m=0}^n \frac{(-1)^{n-m} \tau^{-\binom{n-m}{2}} \binom{n}{m}_{\tau}}{1 - \xi a^m} \right) Q_n^{(\tau)}(X) \tag{48}$$

que l'on vérifie directement par multiplication à gauche et à droite par $1 - \xi \Phi^{(\tau)}(X, a)$ ou en donnant la valeur arbitraire τ^k à X .

Notons que les algèbres $\left(\mathcal{K}^{\infty}, \left(\left[\begin{smallmatrix} n & m \\ k & \end{smallmatrix} \right]_{\alpha} \right) \right)$, avec $ord \alpha = w < +\infty$ et $(\mathcal{K}^{\infty}, (\delta_{kn}, \delta_{km}))$ ne sont pas des algèbres non dégénérées et ne peuvent pas posséder des formalisations polynomiales.

D. Formalisation polynomiale des algèbres normées.

Soit l'algèbre normée des suites triangulaires multipliables $(\mathbb{K}_{\|\cdot\|}^{\infty}, \|\cdot\|, \Gamma)$. Lorsqu'il existe une suite de polynômes $\mathbb{P}^{(\Gamma)}(X) = (P_n^{(\Gamma)}(X))_{n \geq 0}$, triangulairement multipliable par rapport à $\Gamma = (\gamma_{k,n}^{n,m})$, on peut former selon §3.2 l'algèbre $(\mathbb{K}_{\|\cdot\|}^{\infty}[[P_n^{(\Gamma)}(X)]] , \|\cdot\|, \mathbb{P}, \Gamma)$ qui n'est autre que la formalisation polynomiale de $(\mathbb{K}_{\|\cdot\|}^{\infty}, \|\cdot\|, \Gamma)$.

Notons que pour tout système triangulaire non dégénéré $\Gamma = (\gamma_{k,n}^{n,m})$, l'algèbre $(\mathbb{K}_{\|\cdot\|}^{\infty}, \|\cdot\|, \Gamma)$ admet une formalisation polynomiale, par suite l'algèbre $(\mathcal{m}, \|\cdot\|_{sup}, \Gamma)$ admet une formalisation polynomiale. Cette formalisation sera notée $\mathbb{K}(P_n^{(\Gamma)}(X)) = (\mathcal{m}[[P_n^{(\Gamma)}(X)]] , \|\cdot\|_{sup}, \Gamma)$. Par exemple $\mathbb{K}(X^n)$ est une formalisation polynomiale de $(\mathcal{m}, \|\cdot\|_{sup}, (\delta_{k(n+m)}))$. L'algèbre $\mathbb{K}(P_n^{(\theta)}(X))$, avec $ord \theta = +\infty$, est une formalisation polynomiale de $\left(\mathcal{m}, \|\cdot\|_{sup}, \left(\left[\begin{smallmatrix} n & m \\ k & \end{smallmatrix} \right]_{\theta} \right) \right)$.

De même pour tout système non dégénéré $\Gamma = (\gamma_{k,m}^n)$ l'algèbre $(m_S, \|\cdot\|_S, \Gamma)$ admet la formalisation polynomiale $\mathbb{K}_S \langle P_n^{(\Gamma)}(X) \rangle = (m_S \llbracket P_n^{(\Gamma)}(X) \rrbracket, \|\cdot\|_S^p, \Gamma)$. Par exemple l'algèbre de Banach $\mathbb{K}_{S_0} \langle X^n/n! \rangle$ est une formalisation de l'algèbre $(m_{S_0}, \|\cdot\|_{S_0}, \left(\binom{k}{n} \delta_{k(n+m)} \right))$, l'algèbre $\mathbb{K}_{S_2^{(\theta)}} \langle \binom{X}{n} \rangle$, avec $|\theta| = 1$ et $ord \theta = +\infty$, des séries formelles de Newton, est une formalisation polynomiale de $(m_{S_2^{(\theta)}}, \|\cdot\|_{S_2^{(\theta)}}, \left(\binom{n,m}{k} \right))$, l'algèbre de Banach des séries formelles des polynômes d'interpolation de Gauss $\mathbb{K}_{S(\tau,\alpha)} \langle Q_n^{(\tau)}(X) \rangle$, avec $|\tau| = |\alpha| = 1, ord \alpha = ord \tau = +\infty$, est une formalisation polynomiale de $(m_{S(\tau,\alpha)}, \|\cdot\|_{S(\tau,\alpha)}, \left(\begin{bmatrix} n,m \\ k \end{bmatrix}_\tau \right))$.

E. Forme générale d'un morphisme triangulaire supérieur d'algèbres des séries formelles de polynômes triangulaires multipliables.

1. Famille sommable.

Dans l'espace $\mathcal{K} \llbracket P_n(X) \rrbracket$ des séries formelles des polynômes l'ordre d'une série est défini par

$$v \left(\sum_{n \geq 0} \xi_n P_n(X) \right) = \min \{ n ; \xi_n \neq 0 \} \tag{49}$$

On dit que la famille des séries formelles $\{ P^{(i)}(X) = \sum_{n \geq 0} \xi_n^{(i)} P_n(X) ; i \in \mathfrak{S} \}$ est sommable si l'ensemble $\{ P^{(i)}(X) ; v(P^{(i)}(X) \leq n) \}$ est fini, i.e. l'ensemble $\{ i \in \mathfrak{S} ; \xi_n^{(i)} \neq 0 \}$ est un ensemble fini. La somme d'une famille sommable de séries formelles est définie par

$$\sum_{i \in \mathfrak{S}} P^{(i)}(X) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i \in \mathfrak{S}} \xi_n^{(i)} \right) P_n(X). \tag{50}$$

Par exemple la famille $\{ \xi_n P_n(X) \}_{n \geq 0}$ est sommable et sa somme coïncide avec celle de la série $\sum_{n \geq 0} \xi_n P_n(X)$. La famille des séries $\{ R_S^{P,Q}(Q_m(X)) = \sum_{n \geq m} s_{mn} P_n(X) \}_{m \geq 0}$ est aussi sommable. Sa somme (avec les coefficients $\eta_m (m \geq 0)$) est

$$\sum_{m \geq 0} \eta_m R_S^{P,Q}(Q_m(X)) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{m=0}^n s_{mn} \eta_m \right) P_n(X) \tag{51}$$

2. Opérateur de substitution.

Dans la suite on établira une représentation de la transformation triangulaire supérieure des séries, qui est un homomorphisme d'algèbres des séries formelles des polynômes, par un opérateur de substitution. Soient $(A_n(X))_{n \geq 0}$ et $(B_n(X))_{n \geq 0}$ deux suites de polynômes standards (i.e. $\deg A_n = \deg B_n = n$) triangulaires multipliables respectivement par rapport à $(\Pi_k^{n,m})$ et $(\Gamma_k^{n,m})$ tels que $\Pi_n^{0,n} = \Gamma_n^{0,n} = 1 (n \geq 0)$ et soit $S = (s_{mn})_{m,n \geq 0}$ une matrice triangulaire supérieure infinie vérifiant les conditions

$$s_{0n} = \delta_{0n} \text{ et } \sum_{k=\max(n,m)}^{\min(n+m,\ell)} \Gamma_k^{n,m} s_{k\ell} = \sum_{i+j \geq \ell} \Pi_\ell^{i,j} s_{ni} s_{mj} \tag{52}$$

On peut ainsi former les algèbres de séries triangulaires multipliables de polynômes $\mathcal{K} \llbracket A_n(X) \rrbracket$ et $\mathcal{K} \llbracket B_n(X) \rrbracket$, en posant de plus $A_0(X) = B_0(X) = 1$ et $A_1(X) = B_1(X) = X + 1$, que l'on peut admettre vu que $\Pi_n^{0,n} = \Gamma_n^{0,n} = 1 (n \geq 0)$. On considère ensuite l'application

$$R_S^{A,B} : \mathcal{K} \llbracket B_n(X) \rrbracket \rightarrow \mathcal{K} \llbracket A_n(X) \rrbracket ; R_S^{A,B} \left(\sum_{m \geq 0} \eta_m B_m(X) \right) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{m=0}^n s_{mn} \eta_m \right) A_n(X). \tag{53}$$

L'application (53) est un homomorphisme d'algèbres. Notre but est de représenter $R_S^{A,B}$ sous la forme d'un opérateur de substitution.

En utilisant la matrice S on introduit une série formelle $L_S^{A,B}(X)$ définie par

$$L_S^{A,B}(X) = -B_1(0).A_0(X) + \sum_{n \geq 1} s_{1n} A_n(X) \tag{54}$$

ot on considère l'application de l'ensemble $\{B_m(X); m \geq 0\}$ dans $\mathcal{K}[[A_n(X)]]$, qui, à $B_m(X)$, fait correspondre $B_m(L_S^{A,B}(X))$. On a

$$B_m(L_S^{A,B}(X)) = \sum_{n \geq m} s_{mn} A_n(X) \tag{55}$$

Preuve :

On démontre (54) par récurrence sur m

Pour $m = 1$

$$B_1(L_S^{A,B}(X)) = L_S^{A,B}(X) + B_1(0).A_0(X) = \sum_{n \geq 1} s_{1n} A_n(X).$$

Avant de continuer, rappelons la relation de récurrence pour les suites triangulaires multipliables [1].

$$\Gamma_{n+1}^{n,1} B_{n+1}(X) = B_n(X)(B_1(X) - \Gamma_n^{n,1}).$$

Supposons maintenant que (54) soit vraie jusqu'à l'ordre m , démontrons la pour $m + 1$. En appliquant la relation de récurrence ci-dessus et la formule (51) on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma_{m+1}^{m,1} B_{m+1}(L_S^{A,B}(X)) &= B_m(L_S^{A,B}(X))(B_1(L_S^{A,B}(X)) - \Gamma_m^{m,1} A_0(X)) \\ &= \sum_{k \geq m} s_{mk} A_k(X) \left[\sum_{\ell \geq 1} s_{1\ell} A_\ell(X) - \Gamma_m^{m,1} A_0(X) \right] \\ &= \sum_{n \geq m} \left(\sum_{\substack{k, \ell \leq n \\ k+\ell \geq n}} \Pi_n^{k, \ell} s_{mk} s_{1\ell} \right) A_n(X) - \sum_{k \geq m} \Gamma_m^{m,1} s_{mk} A_k(X) \\ &= \sum_{n \geq m} \left(\sum_{i=m}^{m+1} \Gamma_i^{m,1} s_{in} \right) A_n(X) - \sum_{n \geq m} \Gamma_m^{m,1} s_{mn} A_n(X) \\ &= \Gamma_{m+1}^{m,1} \left(\sum_{n \geq m} s_{(m+1)n} A_n(X) \right). \end{aligned}$$

En simplifiant par $\Gamma_{m+1}^{m,1} \neq 0$ on obtient le résultat. ■

En posant $B_0(L_S^{A,B}(X)) = A_0(X) = \sum_{n \geq 0} s_{0n} A_n(X)$ on trouve que la formule (54) est valable pour tout $m \geq 0$. Etant donné que la famille (54) est sommable, on peut prolonger l'application précédente à une série arbitraire $B(X) = \sum_{m \geq 0} \eta_m B_m(X)$, en posant

$$B(L_S^{A,B}(X)) = \sum_{m \geq 0} \eta_m B_m(L_S^{A,B}(X)) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{m=0}^n s_{mn} \eta_m \right) A_n(X). \tag{56}$$

On a défini ainsi l'opérateur de substitution de $\mathcal{K}[[B_n(X)]]$ dans $\mathcal{K}[[A_n(X)]]$. En comparant (53) et (56) on trouve que

$$R_S^{A,B}(B(X)) = B(L_S^{A,B}(X)) \tag{57}$$

Supposons maintenant que S soit inversible et soit $T = (t_{mn})_{m,n \geq 0} = S^{-1}$ la matrice inverse et soit $R_T^{B,A} : \mathcal{K}[[A_n(X)]] \rightarrow \mathcal{K}[[B_n(X)]]$ la transformation triangulaire supérieure avec la matrice $T = (t_{mn})_{m,n \geq 0}$, on trouve en répétant textuellement le même raisonnement

$$R_T^{B,A}(A(X)) = A\left(L_T^{B,A}(X)\right), \text{ où } L_T^{B,A}(X) = -A_1(0) \cdot B_0(X) + \sum_{n \geq 1} t_{1n} B_n(X). \quad (58)$$

Les opérateurs de substitution (57) et (58) sont des *isomorphismes réciproques l'un de l'autre*.

Il n'est pas non plus difficile de vérifier que $L_S^{A,B}\left(L_T^{B,A}(X)\right) = L_T^{B,A}\left(L_S^{A,B}(X)\right) = X$.

3. Cas des espaces normés.

On transmet maintenant les résultats obtenus précédents dans les algèbres normées. Pour cela comme corps de base on considère le corps commutatif $\mathbb{K} \supseteq \mathbb{Q}_p$. En supposant que tous les coefficients triangulaires $A_k^{n,m}$ vérifient $|A_k^{n,m}| \leq 1$, les matrices triangulaires supérieures S sont inversibles et vérifient (51), que les coefficients sont des éléments de $\mathbb{K}_{\|\cdot\|_{sup}}^\infty = \mathfrak{m}$ et de $\mathbb{K}_{\|\cdot\|_S}^\infty = \mathfrak{m}_S$ et pour cela il suffit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{mn} = 0$. Ces hypothèses sont équivalentes à l'existence des algèbres de Banach $\mathbb{K}\langle A_n(X) \rangle$ et $\mathbb{K}_S\langle B_n(X) \rangle$. On obtient ainsi une modification de l'application (53) que l'on notera $r_S^{A,B} : \mathbb{K}_S\langle B_n(X) \rangle \rightarrow \mathbb{K}\langle A_n(X) \rangle$ avec $r_S^{A,B}(B(X)) = R_S^{A,B}(B(X))$. Notons que $S^{-1} = T$, que $r_T^{B,A} = (r_S^{A,B})^{-1}$ et que $r_S^{A,B}$ est un isomorphisme isométrique d'algèbres normés. Par exemple on a

$$r_{S_0}^{A,B} : \mathbb{K}_{S_0}\langle X^n/n! \rangle \rightarrow \mathbb{K}\langle X^n \rangle, \quad r_{S_2^{(\tau)}}^{A,B} : \mathbb{K}_{S_2^{(\tau)}}\langle \binom{X}{n} \rangle \rightarrow \mathbb{K}\langle P_n^{(\tau)}(X) \rangle$$

$$r_{S^{(\tau,\alpha)}}^{A,B} : \mathbb{K}_{S^{(\tau,\alpha)}}\langle Q_n^{(\tau)}(X) \rangle \rightarrow \mathbb{K}\langle P_n^{(\alpha)}(X) \rangle.$$

On obtient aussi une modification des opérateurs de substitution $r_S^{A,B}(B(X)) = B\left(L_S^{A,B}(X)\right)$ sachant que $L_S^{A,B}(X) \in \mathbb{K}\langle A_n(X) \rangle$.

Donnons quelques exemples :

a) Considérons l'application $r_{S_0}^{A,B} : \mathbb{K}_{S_0}\langle X^n/n! \rangle \rightarrow \mathbb{K}\langle X^n \rangle$, avec les matrices triangulaires supérieures inversibles

$$S_0 = \left(\frac{s_1(n,m)}{n!} \right)_{m,n \geq 0} \quad \text{et} \quad (S_0)^{-1} = T_0 = (s_2(n,m)m!)_{m,n \geq 0}$$

La formule (51) est vérifiée, dans[1], exemple1 de la formule (49)

$$\binom{n+m}{n} \frac{s_1(\ell, n+m)}{\ell!} = \sum_{i+j=\ell} \frac{s_1(i,n)}{i!} \frac{s_1(j,m)}{j!}.$$

De plus dans $\mathbb{K} \supset \mathbb{Q}_p$ (Amice)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_1(n,m)}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_2(n,m)m! = 0.$$

On a

$$L_{S_0}^{A,B}(X) = \sum_{n \geq 1} \frac{s_1(n,1)}{n!} X^n = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} X^n = \log(1+X),$$

$$L_{T_0}^{B,A}(X) = \sum_{n \geq 1} s_2(n,1) \frac{X^n}{n!} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} X^n = \exp X - 1 = e^X - 1.$$

D'où

$$r_{S_0}^{A,B}(B(X)) = B(\log(1 + X)). \tag{59}$$

Notons que

$$\exp(\beta \cdot \log(1 + X)) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{m=0}^n \frac{s_1(n, m)}{n!} \beta^m \right) X^n = \sum_{n \geq 0} \binom{\beta}{n} X^n = (1 + X)^\beta. \tag{60}$$

b) Considérons l'application $r_{S_2^{(\tau)}}^{A,B} : \mathbb{K}_{S_2^{(\tau)}} \langle \langle X \rangle \rangle \rightarrow \mathbb{K} \langle P_n^{(\tau)}(X) \rangle$, avec les matrices triangulaires supérieures inversibles

$$S_2^{(\tau)} = \left(\frac{d^{(\tau)}(m, n)}{P_n^{(\tau)}(\tau^n)} \right)_{m, n \geq 0} \quad \text{et} \quad (S_2^{(\tau)})^{-1} = T_2^{(\tau)} = \left(c^{(\tau)}(m, n) P_m^{(\tau)}(\tau^m) \right)_{m, n \geq 0},$$

où

$$c^{(\tau)}(m, n) = \sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{m}_\tau; \quad d^{(\tau)}(m, n) = \sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} \tau^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_\tau \binom{k}{m}$$

et $|\tau - 1| = q < 1$ (dans ce cas $|\tau| = 1$, ord $\tau = +\infty$).

Démontrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} c^{(\tau)}(m, n) = 0$ et que $|d^{(\tau)}(m, n)| \leq q^{n-m}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} d^{(\tau)}(m, n) = 0$. (*)

Preuve :

On a

$$\begin{aligned} c^{(\tau)}(m, n) &= \sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{m}_\tau = \sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^{m-i} \tau^{\binom{m-i}{2}} \binom{m}{i}_\tau \tau^{ik}}{P_m^{(\tau)}(\tau^m)} \\ &= \frac{1}{P_m^{(\tau)}(\tau^m)} \sum_{i=0}^m \left(\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \tau^{ik} \right) \left((-1)^{m-i} \tau^{\binom{m-i}{2}} \binom{m}{i}_\tau \right) \\ &= \frac{1}{P_m^{(\tau)}(\tau^m)} \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \tau^{\binom{m-i}{2}} \binom{m}{i}_\tau (\tau^i - 1)^n. \end{aligned}$$

Or $|\tau^i - 1| \leq |\tau - 1| < 1$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} c^{(\tau)}(m, n) = 0$.

De l'autre côté on a

$$d^{(\tau)}(m, n) = \left(\frac{d^m}{m!} P_n^{(\tau)}(X) \right) (1) = \sum_{\substack{J \subset \{0, \dots, n-1\} \\ \text{card } J = m}} \prod_{i \notin J}^{n-1} (1 - \tau^i),$$

d'où

$$|d^{(\tau)}(m, n)| \leq \max \left\{ \prod_{\substack{i=0 \\ i \notin J}}^{n-1} |1 - \tau^i|, J \subset \{0, \dots, n-1\}, \text{card } J = m \right\}.$$

Or

$$\prod_{\substack{i=0 \\ i \notin J}}^{n-1} |1 - \tau^i| \leq |1 - \tau|^{n-m} \leq q^{n-m}. \quad \blacksquare$$

De l'autre côté dans [1] *exemple2 de la formule* (49) on a

$$\sum_{k=\max(n,m)}^{\min(n+m,\ell)} \binom{n,m}{k} \frac{d^{(\tau)}(k,\ell)}{P_\ell^{(\tau)}(\tau^\ell)} = \sum_{i+j \geq \ell} \binom{i,j}{\ell} \frac{d^{(\tau)}(n,i)d^{(\tau)}(m,j)}{P_i^{(\tau)}(\tau^i) \cdot P_j^{(\tau)}(\tau^j)}$$

D'où toutes les conditions sont donc vérifiées et l'on a

$$L_{S_2^{(\tau)}}^{A,B}(X) = \sum_{n \geq 1} \frac{d^{(\tau)}(1,n)}{P_n^{(\tau)}(\tau^n)} P_n^{(\tau)}(X) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \tau^{-\binom{n}{2}}}{1 - \tau^n} P_n^{(\tau)}(X) = \log_\tau(X),$$

$$L_{T_2^{(\tau)}}^{B,A}(X) = 1 + \sum_{n \geq 1} c^{(\tau)}(1,n) P_1^{(\tau)}(\tau) \binom{X}{n} = \sum_{n \geq 0} (\tau - 1)^n \binom{X}{n} = \tau^X.$$

D'où

$$r_{S_2^{(\tau)}}^{A,B}(B(X)) = B(\log_\tau(X)). \tag{61}$$

Notons que

$$\beta^{\log_\tau(X)} = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{m=0}^n \frac{d^{(\tau)}(m,n)}{P_n^{(\tau)}(\tau^n)} (\beta - 1)^m \right) P_n^{(\tau)}(X) = \Phi^{(\tau)}(X, \beta) \tag{62}$$

c) Considérons l'application $r_{S^{(\tau,\alpha)}}^{A,B} : \mathbb{K}_{S^{(\tau,\alpha)}}\langle Q_n^{(\tau)}(X) \rangle \rightarrow \mathbb{K}\langle P_n^{(\alpha)}(X) \rangle$, avec les matrices triangulaires supérieures inversibles

$$S^{(\tau,\alpha)} = \left(\frac{c^{(\tau,\alpha)}(m,n)}{P_n^{(\alpha)}(\alpha^n)} \right)_{m,n \geq 0} \quad \text{et} \quad T^{(\tau,\alpha)} = (S^{(\tau,\alpha)})^{-1} = \left(c^{(\alpha,\tau)}(m,n) \cdot P_m^{(\alpha)}(\alpha^m) \right)_{m,n \geq 0}, \tag{63}$$

où $|\alpha| = |\tau| = 1$, $|\tau - \alpha| < 1$, $ord \alpha = +\infty$, $ord \tau = +\infty$, dont la forme explicite générale est

$$c^{(\theta,\beta)}(m,n) = \sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} \beta^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_\beta \binom{k}{m}_\theta. \tag{64}$$

Il est évident que $c^{(\theta,\beta)}(n,n) = 1$ et que $|c^{(\theta,\beta)}(m,n)| \leq 1$.

On démontre dans le cas général que $\lim_{n \rightarrow +\infty} c^{(\theta,\beta)}(m,n) = 0$. Pour cela on suppose $ord \theta = w < +\infty$, $ord \beta = +\infty$, $|\theta - \beta| < 1$, $|\theta| = |\beta| = 1$.

Preuve :

Pour l'expression (64) une représentation indépendante de n des coefficients h_j peut être obtenue

$$c^{(\theta,\beta)}(m,n) = \sum_{\substack{0 \leq jw+s < m \\ 0 \leq s < w}} h_{jw+s} \left(\frac{d^j}{j!} P_n^{(\beta)}(X) \right) (\theta^s).$$

Ainsi pour démontrer $\lim_{n \rightarrow +\infty} c^{(\theta,\beta)}(m,n) = 0$ il suffit de démontrer que pour $n \rightarrow +\infty$

$$\left(\frac{d^j}{j!} P_n^{(\beta)}(X) \right) (\theta^s) = \sum_{\substack{L \subset \{0, \dots, n-1\} \\ card L = j}} \prod_{\substack{i=0 \\ i \notin L}}^{n-1} (\theta^s - \beta^i) \rightarrow 0.$$

Or ceci se fait d'une manière analogue à la démonstration de (*) sachant que

$$|\theta^s - \beta^i| \leq \max\{|\theta^s - \beta^s|, |\beta^s - \beta^i|\} \leq \{|\theta - \beta|, |\beta^w - 1|\} < 1 \text{ pour } i \equiv s \pmod{w}. \blacksquare$$

De plus on a dans [1] (exemple 4 de la formule (49))

$$\sum_{k=\max(n,m)}^{\min(n+m,\ell)} \begin{bmatrix} n, m \\ k \end{bmatrix}_\tau \frac{c^{(\tau,\alpha)}(k, \ell)}{P_\ell^{(\alpha)}(\alpha^\ell)} = \sum_{\substack{i,j \leq \ell \\ i+j \geq \ell}} \begin{bmatrix} i, j \\ \ell \end{bmatrix}_\alpha \frac{c^{(\tau,\alpha)}(n, i)}{P_i^{(\alpha)}(\alpha^i)} \frac{c^{(\tau,\alpha)}(m, j)}{P_j^{(\alpha)}(\alpha^j)},$$

et

$$c^{(\theta,\beta)}(1, n) = \sum_{k=n}^n (-1)^{n-k} \beta^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_\beta \frac{\theta^k - 1}{\theta - 1} = \frac{P_n^{(\beta)}(\theta) - P_n^{(\beta)}(1)}{\theta - 1} = \frac{P_n^{(\beta)}(\theta)}{\theta - 1} \quad (n \geq 1).$$

Ainsi toutes les conditions sont vérifiées et l'on a, d'après (37)

$$L_{S^{(\tau,\alpha)}}^{A,B}(X) = \sum_{n \geq 1} \frac{c^{(\tau,\alpha)}(1, n)}{P_n^{(\alpha)}(\alpha^n)} P_n^{(\alpha)}(X) = \sum_{n \geq 1} \frac{Q_n^{(\alpha)}(\tau)}{\tau - 1} P_n^{(\alpha)}(X) = \frac{\Phi^{(\alpha)}(X, \tau) - 1}{\tau - 1};$$

$$L_{T^{(\tau,\alpha)}}^{A,B}(X) = \sum_{n \geq 1} c^{(\alpha,\tau)}(1, n) P_1^{(\alpha)}(\alpha) Q_n^{(\tau)}(X) = \sum_{n \geq 0} P_n^{(\tau)}(\alpha) Q_n^{(\tau)}(X) = \Phi^{(\tau)}(X, \alpha)$$

D'où

$$r_{S^{(\tau,\alpha)}}^{A,b}(B(X)) = B\left(\frac{\Phi^{(\alpha)}(X, \tau) - 1}{\tau - 1}\right). \tag{65}$$

En particulier

$$\begin{aligned} \Phi^{(\tau)}\left(\frac{\Phi^{(\alpha)}(X, \tau) - 1}{\tau - 1}, \lambda\right) &= \sum_{n \geq 0} \left[\sum_{m=0}^n P_m^{(\tau)}(\lambda) \frac{c^{(\tau,\alpha)}(m, n)}{P_n^{(\alpha)}(\alpha^n)} \right] P_n^{(\alpha)}(X) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{P_n^{(\alpha)}(\lambda)}{P_n^{(\alpha)}(\alpha^n)} P_n^{(\alpha)}(X) = \sum_{n \geq 0} P_n^{(\alpha)}(\lambda) Q_n^{(\alpha)}(X) = \Phi^{(\alpha)}(X, \lambda). \end{aligned}$$

RÉFÉRENCES

- [1] F. Randimbindrainibe, T.B. Ravaliminoarimalalason, "Coefficients triangulaires et algèbre des polynômes dissociables et multipliables", International Journal of Progressive Science And Technology, Vol. 29 n°1, pp.675-696, Oct. 2021.
- [2] A.M. Robert, A course.in.p-adic.Analysis, Springer, 2000.
- [3] A. Baker, An Introduction to p-adic Numbers and p-adic Analysis, 2011.
- [4] Y. Amice, "Interpolation p-adique", Bull. Soc. Math. France, Vol. 92, pp.117-180, 1964
- [5] N. Koblitz, "p-adic analysis, a short course on recent work", London Math soc. Lect. Note, 163p., 1980.
- [6] N. Koblitz, p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions, Springer, 1996
- [7] A.F. Monna, Analyse non archimédienne, Berlin, Springer, 119p., 1970

- [8] L. Comtet, Analyse combinatoire tome1 et 2, 1970
- [9] P. Colmez, Eléments d'analyse et d'algèbre (et de la théorie des nombres), 678p., 2010
- [10] L. Carlitz, "Eulerian numbers and polynomials", Math Mag., Vol. 32 n°5, pp.247-260, 1959
- [11] V.N. Osipov, "Fonction zêta p-adique et les nombres de Bernuolli", seminaire scientifique T93, Nauka, pp.192-203, 1980.

P-adic numbers applied on an elliptic curve cryptography

Maherindrainibela¹
Ratsimamitaka Edouard
Ph D Student
University of Antananarivo in STII
Madagasikara

Ravaliminoarimalalason²
Toky Basilide
Doctor
University of Antananarivo in ESPA
Madagasikara

Randimbindrainibe³
Falimanana
Professor
University of Antananarivo in ESPA
Madagasikara

Abstract

This paper use the group of K -rational points of elliptic curve over p -adic numbers field in cryptography. Since this group is an abelian group and can be made cyclic, « addition » on this group have also important geometrical interpretation

We introduce some notations in section 1 and review some properties of a p -adic numbers.

In section 2, we review group structure of elliptic curves over the field \mathbb{Z}_p of p -adic numbers. In section 3 we show one possibility to apply the group of \mathbb{Z}_p -rational points on an elliptic curve in cryptography. In section 4, we give an example of cryptosystem based on the key exchange of Diffie-Hellman. The section 5 is reserved for the conclusion.

Key words : p -adic integers- p -adic numbers- p -adic valuation- p -adic absolute values- elliptic curve- rational point of elliptic curve- trace of elliptic curve- reductuin modulo p - cryptosystem- public key.

Notation :

\mathbb{Z}_p : Set of p -adic integers , \mathbb{Q}_p : Set of p -adic numbers

$v_p(x)$: p -adic valuation,

$|x|_p$: p -adic absolute value,

$E(\mathbb{Q}_p)$: Set of an elliptic curve \mathbb{Q}_p -rationnels points.

$\#E(\mathbb{Q}_p)$: $E(\mathbb{Q}_p)$ cardinal

Introduction :

Victor Miller and Neal Koblitz were, independently, the first to propose elliptic curve in cryptography. Since some cryptograph worked on this because of its security, it can use short key size to gain the same level of security for example.

Elliptic curve cryptography was applied in a public key cryptosystem like RSA, based on the difficulty to factor a big number into product of prime numbers or the key exchange of Diffie-Hellman based on the difficulty to resolve the logarithm discret problem.

In this paper we propose a cryptosystem upon elliptic curve over the p -adic numbers, where p is a prime number (pratically large).

We have considered an elliptic curve of prime order to focus on the feasibility of such cryptosystem so that apply this in a public key cryptosystem. we will explain, for example, how we can find the group of p-adic points on an elliptic curve.

1. p-adic numbers

A p-adic numbers can be presented of the formal power serie :

$$a_{-n}p^{-n} + \dots + a_0 + a_1p + \dots + a_m p^m + \dots \quad a_i \in \{0,1,\dots,p-1\} \tag{1}$$

\mathbb{Q}_p is the set of a p-adic numbers.

\mathbb{Z}_p is the set of p-adic integers (i.e., all powers of p are non-negative.)

1.1.P-adic numbers propeties :

Definition 1: p-adic valuation of a rational number :

Let p be a prime, and $a \in \mathbb{Q}^*$ a rational number. Write $a = p^\rho \cdot \frac{x}{y}$ with $x, y, \rho \in \mathbb{Z}$ and p divides neither x nor y . The p-adic valuation of a , denoted by $v_p(a)$, is defined as $v_p(a) = \rho$, with $v_p(0) = \infty$.

Definition 2: p-adic absolute value

Let p be a prime and $a \in \mathbb{Q}^*$. The p-adic absolute value of a , denoted by $|\cdot|_p$, is defined as

$$|\cdot|_p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}_+ :$$

$$|a|_p = \begin{cases} p^{-v_p(a)} & a \neq 0 \\ 0 & a = 0 \end{cases}$$

Remark :

A p-adic number is called p-adic integer if $v_p(a) \geq 0$.

$$\mathbb{Z}_p = \{a_0 + a_1p + \dots, a_i \in \{0, \dots, p-1\}\}$$

$$p^n \mathbb{Z}_p = \{a_0p^n + a_1p^{n+1} + \dots, a_i \in \{0, \dots, p-1\}\}$$

$$v_p(x) \geq n, \text{ for all } x \in p^n \mathbb{Z}_p.$$

1.2. Characteristic of the p-adics

the **characteristic** of a field \mathbb{k} , denoted $char(\mathbb{k})$ is the order of the smallest prime subfield of \mathbb{k} , or 0 if \mathbb{k} has no smallest prime subfield (for example, \mathbb{C} or \mathbb{R}).

The field of p -adics \mathbb{Q}_p has characteristic 0, not p . This is due to the fact that \mathbb{Q} , which has characteristic 0, is a subfield of \mathbb{Q}_p .

Property 1:

Since, for all prime p , $\text{char}(\mathbb{F}_p) = p$.

2. Elliptic curve over \mathbb{Q}_p :

2.1. Introduction :

The rational point of an elliptic curve, which is an algebraic variety, i.e set of solutions points of an equation of the type : $y^2 = x^3 + ax + b$, with x, y belong to a finite field.

Solutions of these equations form, together with the « infinite point » O an abelian group. O is the neutral element of the group.

The operation of this group have a geometrical interpretation, so we can compute additional points on the curve.

Si le groupe est d'ordre premier, il est cyclique, c'est-à-dire qu'il existe un point qui engendre le groupe par additions successives.

If the group has a prime order, it is cyclic group, then it has a generator point. Thus, we can compute all of the points of the curve.

Since all theory lie on an abelian group can be applied on an elliptic curve. So, key exchange of Diffie-Hellman can be computed on the group of rational point on an elliptic curve.

Since $\text{char}(\mathbb{Q}_p) = 0$, we can define an elliptic curve on \mathbb{Q}_p .

Definition 1: Elliptic curve :

An elliptic curve is a curve defined over a field K by an equation of the form :

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6, a_i \in k \quad (1)$$

Definition 2: field, the K -rational points

For K a field, the K -rational points on a Weierstrass equation E over K are the pairs $(x, y) \in K \times K$ that satisfy E , together with O , the point at infinity

The set of K -rational points and is denoted $E(K)$, and describes an elliptic curve.

$$E(k) = \left\{ (x, y) \in k^2 \mid \begin{array}{l} y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 \\ a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 \end{array} \right\} \cup O$$

If $\text{char}(K) > 3$, the equation can be reduced of the form :

$$y^2 = x^3 + Ax + B$$

Since,

$$E(k) = \left\{ (x, y) \in k^2 \mid y^2 = x^3 + Ax + B \right\} \cup O$$

Définition 3: Courbe non-singulière :

The simplified equation will suffice for our purposes. E is non-singular if the discriminant, $\Delta = -16(4a^3 + 27b^2)$, is not zero.

Définition 4: Trace of an elliptic curve E

Let E be an elliptic curve over a finite field F_p . The **trace** t is defined by:

$$\#E(F_p) = p + 1 - t \tag{2}$$

where $E(F_p)$ is the number of elements in $E(F_p)$

2.2. Counting rational point on elliptic curve:

Generlity :

Let E/F_q a curve over a finit field F_q . Find approximat value or exact value of the solutions number of the equation :

$$E : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + x^2 + a_4x + a_6 \quad (x, y) \in F_q \tag{3}$$

For x there is at most two y , then $\#E(F_q)$ verify :

$$\#E(F_q) \leq 2q + 1 \text{ (whith the } O)$$

Let $x \in F_q$, $f(x) = x^3 + Ax + B$ is a square in the probability 0,5, thus the approximation of $\#E(F_q)$ is :

$$\#E(F_q) \approx \frac{1}{2} \times 2p + 1 \text{ points.} \tag{4}$$

Theorem 1 : (Hasse) :

Let E/F_q an elliptic curve over F_q :

$$|\#E(F_q) - q - 1| \leq 2\sqrt{q} \tag{5}$$

$$\Leftrightarrow q + 1 - 2\sqrt{q} \leq \#E(F_q) \leq q + 1 + 2\sqrt{q}$$

Proposition 1 : Legendre formula:

Let :

$$\chi : F_p \rightarrow \{-1, 0, 1\}$$

$$x \rightarrow \left(\frac{x}{p}\right) \tag{6}$$

Then :

$$\chi(0) = 0 \text{ et } \chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \text{ is square } \neq 0 \text{ in } F_p \\ -1 & \text{not} \end{cases} \tag{7}$$

Proposition 2:

$$\#E(F_q) = p + 1 + \sum_{x \in F_p} \chi(x^3 + Ax + B) \tag{8}$$

Proof :

♣

Let $x \in F_p$:

- There are two points x -coordinate in $E(F_p)$ if $\chi(x^3 + Ax + B) = 1$,
- no point x -coordinate if $\chi(x^3 + Ax + B) = -1$
- exactly one point x -coordinate if $\chi(x^3 + Ax + B) = 0$

♦

Remark :

Legendre formula is valid for « little » prime number, approximately 10^6 or 10^7 .

Lemme 1:

Let $P \in E(F_q)$, Such that $\text{ord } P = d$. Assume :

$$d > 4\sqrt{p} \tag{9}$$

Let m such that $mP = O$ and $m \in F_p$, Thus $\#E(F_p) = m$.

More m is the one multiple of d in F_p .

2.3. Groupe des points rationnels d'une courbe elliptique :

Addition of points on elliptic curve is defined by :

Let $P, Q \in E(k)$, then $R = P + Q$ is:

- If $P = O$, then $R = Q$; if $Q = O$, then $R = P$,
- if $x_P = x_Q$, and $y_P = -y_Q$, then $R = O$,
- Let,

$$\lambda = \begin{cases} \frac{3x_P^2 + A}{2y_P}, & \text{if } P = Q \\ \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}, & \text{if not} \end{cases} \tag{10}$$

$$R = (\lambda^2 - x_P - x_Q, \lambda(-\lambda^2 + 2x_P + x_Q) - y_P)$$

Property 1:

$(E(F_p), +)$ is an abelian group.

Example :

Cryptography on elliptic cyrves.

$$E : y^2 = x^3 + x + 6 \text{ on } F_{11} \tag{11}$$

Square :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x^2	0	1	4	9	5	4	3	7	9	4	1

Rational points :

x	0	1	2	3
$x^3 + x + 6$	6	8	5	3
$x^3 + x + 6$ QR	non	non	oui	Oui
y	-	-	4 ; 7	5 ; 6

4	5	6	7	8	9	10
8	4	8	4	9	7	4
non	oui	non	oui	oui	non	oui
-	2 ; 9	-	2 ; 9	3 ; 8	-	2 ; 9

$$E(F_{11}) = \left\{ (2;4), (2;7), (3;5), (3;6), (5;2), (5;9), (7;2), (7;9), (8;3), (8;8), (10;2), (10;9), O \right\}$$

$$\#E(\mathbb{F}_{11}) = \text{ord}_{11}E(\mathbb{F}_{11}) = 13. \quad (12)$$

$\#E(\mathbb{F}_{11}) = \text{ord}_{11}E(\mathbb{F}_{11}) = 13$ is prime, this group is cyclic, every point $\neq O$ (point at infinity) is a generator .

Take $P(2,7)$.

2.4. Elliptic Curves over the p-adics :

2.4.1. Généralités :

Since \mathbb{Q}_p is a field of characteristic 0, we can define an elliptic curve on \mathbb{Q}_p .

All of the theories on elliptic curve down in the precedent chapter are applicable there.

Particularly, since the field characteristic is different from 2 and 3, the simplified equation on Weierstrass is applied .

Let $\tilde{E}(\mathbb{F}_p)$ the group of points satisfying Weierstrass equation on \mathbb{F}_p , and $E(\mathbb{Q}_p)$ the group of points satisfying Weierstrass equation on \mathbb{Q}_p

2.4.2. Lifting from $\tilde{E}(\mathbb{F}_p)$ to $E(\mathbb{Q}_p)$

The first map is from $E(\mathbb{Q}_p)$ to $\tilde{E}(\mathbb{F}_p)$.

A point $P \in E(\mathbb{Q}_p)$ is called a lift of a point $\tilde{P} \in \tilde{E}(\mathbb{F}_p)$ if it reduces mod p to \tilde{P}

Définition 1: Reducing modulo p from $E(\mathbb{Q}_p)$ to $\tilde{E}(\mathbb{F}_p)$:

This reduction is a map :

$$E(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \tilde{E}(\mathbb{F}_p). \quad (13)$$

Because we are allowed to take out non-zero multiples in projective coordinates any point $P \in E(\mathbb{Q}_p)$ can be written in as (X, Y, Z) , where X, Y, Z are p-adic integers and at least one is not divisible by p.

We define a map:

$$r_p : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p / p\mathbb{Q}_p$$

$$\sum_{n \geq 0} a_n p^n \rightarrow a_0 \quad (14)$$

Then, to reduce a point mod p, we simply reduce each of its coordinates mod p:

$$\tilde{P} = (r_p(X), r_p(Y), r_p(Z)) \quad (15)$$

Definition 2 : Lifting from $\tilde{E}(\mathbb{F}_p)$ to $E(\mathbb{Q}_p)$:

Let \tilde{P} be a point satisfying

$$\tilde{E}: y^2 = x^3 + ax + b, \tag{16}$$

where $a, b \in \mathbb{F}_p$, and $p \neq 2, 3$.

In affine coordinates, we may write $\tilde{P}(\tilde{x}, \tilde{y})$ where $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{F}_p$.

We wish to find p-adic integers x and y such that $P = (x, y) \in E(\mathbb{Q}_p)$ where E is \tilde{E} viewed over the p-adics. \mathbb{Q}_p

Let :

$$f(x, y) = y^2 - x^3 - ax - b, \quad a, b \in \mathbb{Q}_p \tag{17}$$

x, y satisfy E if, and only if $f(x, y) = 0$.

let $x = \tilde{x}$, y is a p-adic integer such that : $P = (x, y) \in E(\mathbb{Q}_p)$.

Since y is a p-adic integer y :

$$y = h_0 + h_1p + h_2p^2 + O(p^3) \text{ où } h_i \in \{0, 1, \dots, p-1\} \tag{18}$$

Because we require $f(x, y) = 0$, on it must also be that $f(x, y) \equiv 0 \pmod{p^i}$ for any $i > 0$

(and indeed any modulus) tout $i > 0$: $f(x, y) \equiv 0 \pmod{p^i}$

we have that:

$$\frac{(h_0 + h_1p + h_2p^2 + O(p^3))^2}{(\tilde{x}^3 + a\tilde{x} + b)} \equiv 0 \pmod{p} \tag{19}$$

Reducing gives:

$$h_0^2 - \tilde{x}^3 - a\tilde{x} - b \equiv 0 \pmod{p},$$

Thus :

$$h_0 = \tilde{y} \tag{20}$$

Now by the same token (and replacing h_0 with \tilde{y} :

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{y} + h_1p + h_2p^2 + O(p^3) \right)^2 - \\ & \left(\tilde{x}^3 + a\tilde{x} + b \right) \equiv 0 \pmod{p^2} \end{aligned} \quad (21)$$

which reduces to:

$$\left(\tilde{y} + h_1p \right)^2 - \tilde{x}^3 - a\tilde{x} - b \equiv 0 \pmod{p^2}$$

$$\tilde{y}^2 + 2\tilde{y}h_1p - \tilde{x}^3 - a\tilde{x} - b \equiv 0 \pmod{p^2}$$

$$\left(\tilde{y} - \tilde{x}^3 - a\tilde{x} - b \right) + 2\tilde{y}h_1p \equiv 0 \pmod{p^2}$$

$$f(\tilde{x}, \tilde{y}) + 2\tilde{y}h_1p \equiv 0 \pmod{p^2}$$

$$p \left[\frac{f(\tilde{x}, \tilde{y})}{p} + 2\tilde{y}h_1 \right] \equiv 0 \pmod{p^2}$$

$$\frac{f(\tilde{x}, \tilde{y})}{p} + 2\tilde{y}h_1 \equiv 0 \pmod{p}$$

$$h_1 \equiv -\frac{f(\tilde{x}, \tilde{y})}{2p\tilde{y}} \pmod{p}. \quad (22)$$

the formula for h2:

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{y} + h_1p + h_2p^2 \right)^2 - \tilde{x}^3 - a\tilde{x} - b \equiv 0 \\ & \pmod{p^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{y} + h_1p + h_2p^2 \right)^2 - \tilde{x}^3 - a\tilde{x} - b \equiv 0 \\ & \pmod{p^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{y} + h_1p \right)^2 + 2\left(\tilde{y} + h_1p \right)h_2p^2 - \tilde{x}^3 - a\tilde{x} - b \equiv 0 \\ & \pmod{p^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f(\tilde{x}, \tilde{y} + h_1p) + 2\left(\tilde{y} + h_1p \right)h_2p^2 \equiv 0 \\ & \pmod{p^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & p^2 \left[\frac{f(\tilde{x}, \tilde{y} + h_1p)}{p^2} + 2\left(\tilde{y} + h_1p \right)h_2 \right] \dots \\ & \equiv 0 \pmod{p^3} \end{aligned}$$

$$\frac{f(\tilde{x}, \tilde{y} + h_1 p)}{p^2} + 2(\tilde{y} + h_1 p)h_2 \equiv 0 \pmod{p}$$

$$h_2 \equiv -\frac{f(\tilde{x}, \tilde{y} + h_1 p)}{2(\tilde{y} + h_1 p)p^2} \pmod{p} \tag{23}$$

2.5. The groups $E_n(\mathbb{F}_p)$

These are subgroup of $E(\mathbb{F}_p)$

Definition 1:

Let $E(\mathbb{F}_p)$ an elliptic curve. The group $E_1(\mathbb{F}_p)$ is defined by :

$$E_1(\mathbb{F}_p) = \{P \in E(\mathbb{F}_p) \mid \tilde{P} = O\} \tag{24}$$

In over words, E_1 is the set of points on E that reduce modulo p to O.

Proposition 1:

$$\frac{E(\mathbb{F}_p)}{E_1(\mathbb{F}_p)} \cong E(\mathbb{F}_p) \tag{25}$$

Démonstration :

♣

Let :

$$\begin{aligned} r: E(\mathbb{F}_p) &\rightarrow E(\mathbb{F}_p) \\ P &\rightarrow \tilde{P} \end{aligned}$$

Then :

$$\begin{aligned} Ker(r) &= \{P \in E(\mathbb{F}_p) \mid r(P) = \tilde{P} = O\} \\ &= E_1(\mathbb{F}_p) \end{aligned}$$

The result follows from the First Isomorphism Theorem. ♦

Definition 2:

The subgroup $E_n(\mathbb{F}_p)$ ($n \in \mathbb{Z}$) of $E(\mathbb{F}_p)$ is defined by :

$$E_n(\mathbb{F}_p) = \left\{ P \in E(\mathbb{F}_p) \mid v_p(x_P) \leq -2n \right\} \cup \{O\} \tag{27}$$

where x_P is the x-coordinate of P .

In particular :

$$E_1(\mathbb{Z}_p) = \left\{ P \in E(\mathbb{Z}_p) \mid v_p(x_p) \leq -2 \right\} \cup \{O\} \quad (28)$$

Remark :

1. $E_n(\mathbb{Z}_p)$ is a subgroup of $E_k(\mathbb{Z}_p)$ for all $k < n$.

Since a, b are p-adic integers : $v_p(a) \geq 0$ et $v_p(b) \geq 0$. x and y must satisfy

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

$$2v_p(y) \geq \min \left\{ 3v_p(x), v_p(a) + v_p(x), v_p(b) \right\}$$

$$v_p(x) < 0 \text{ and } v_p(a) \geq 0, v_p(b) \geq 0$$

Then :

$$2v_p(y) = 3v_p(x)$$

Since $v_p(x)$ are integer :

$$v_p(x) = -2n \text{ et } v_p(y) = -3n \text{ for all integers } n.$$

- 1.

$$\# \left(\frac{E(\mathbb{Z}_p)}{E_1(\mathbb{Z}_p)} \right) = p \quad (30)$$

Propriété 1 :Property of finit groupe(Generator of cyclic group)

If G is a finite group who's number of element is prime, then G is cyclic and any element, not neutral, of G is generator.

Démonstration :



Let p the number of elements of G and $a \in G$ such that $a \neq e$, by Lagrange theorem, the number of elements of the subgroup $\langle a \rangle$ de G generated by a divides p , thus :

$$\#\langle a \rangle = 1 \text{ or } \#\langle a \rangle = p.$$

Since $a \in \langle a \rangle$, the subgroup $\langle a \rangle$ is not reduce to $\{e\}$, then $\#\langle a \rangle = p$.

Since $\langle a \rangle \subset G$ and $\#G = p$, then $\langle a \rangle = G$, for all $a \in G$.



Example :

Let E an elliptic curve over F_{19} defined as:

$$E: y^2 = x^3 + x + 4 \text{ sur } F_{19}$$

In $K = F_{19}$, $s(5,1) \in E(F_{19})$.

Since, $5^3 + 5 + 4 = 134 \equiv 1 \pmod{19}$

Then $y^2 = 1 \pmod{19}$, thus $y = 1 \pmod{19}$ (or -1).

Lift E/F_{19} on to E/\mathbb{F}_{19} where $a = 1$ and $b = 4$ as elements of \mathbb{F}_{19} .

lift $s(5,1)$ on $S(5 + pu, 1 + pv) \pmod{19^2}$.

$S \in E(\mathbb{F}_{19}) \pmod{19^2}$, then :

$$\begin{aligned} (1 + pv)^2 &\equiv (5 + pu)^3 + (5 + pu) + 4 \pmod{19^2} \\ &\equiv 125 + 3 \cdot 5^2 \cdot pu + 5 + pu + 4 \pmod{19^2} \\ &\equiv 134 + 76pu \pmod{19^2} \\ 2pv &\equiv 133 + 76pu \pmod{19^2} \\ 2pv &\equiv 7 \cdot 19 + 4 \cdot 19pu \pmod{19^2} \\ 2v &\equiv 7 + 4pu \pmod{19} \\ 2v &\equiv 2 \cdot 13 + 4pu \pmod{19} \\ v &\equiv 13 + 2pu \pmod{19} \end{aligned}$$

S is in the form :

$$\begin{aligned} S(5 + pu, 1 + p(13 + 2pu)) \pmod{19^2} \\ S(5 + pu, 1 + 13p) \pmod{19^2} \\ S(5 + 19u, 1 + 13 \cdot 19) \pmod{19^2} \end{aligned}$$

It turns out that $S \pmod{19^3}$:

$$S = \left(\begin{matrix} 5 + O(19^3), 1 + 13 \cdot 19 + 10 \cdot 19^2 + \\ O(19^3) \end{matrix} \right)$$

point of $E(\mathbb{F}_{19})$.

Compute $[2]P$.

If $S = (x, y)$, then $[2]S = (x_2, y_2)$ with :

$$x_2 = N^3 - 2x, \tag{31}$$

$$y_2 = N(x - x_2) - y \tag{32}$$

Where

$$N = \frac{3x^2 + a}{2y} \tag{33}$$

Compute N :
The numerator is

$$N_{num} = 3(5 + O(19^3)) + 1 = 16 + O(19^3) \tag{34}$$

the denominator is:

$$\begin{aligned} N_{denom} &= 2(1 + 13 \cdot 19 + 10 \cdot 19^2 + O(19^3)) \\ &= 2 + 7 \cdot 19 + 2 \cdot 19^2 + O(19^3) \end{aligned} \tag{35)-(36}$$

$$N = \frac{N_{num}}{N_{denom}} = 8 + 10 \cdot 19 + 12 \cdot 19^2 + O(19^3)$$

Now we may compute the coordinates:

$$\begin{aligned} x_2 = N^3 - 2x &= 8 + 10 \cdot 19 + 12 \cdot 19^2 + O(19^3) \tag{37)-(38} \\ &= 8 + 8 \cdot 19 + 18 \cdot 19^2 + O(19^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= N(x - x_2) - y \\ &= 13 + 5 \cdot 19 + 9 \cdot 19^2 + O(19^3) \end{aligned}$$

$$2S = \left(\begin{aligned} &8 + 8 \cdot 19 + 18 \cdot 19^2 + O(19^3), \\ &13 + 5 \cdot 19 + 9 \cdot 19^2 + O(19^3) \end{aligned} \right) \tag{39}$$

3.Cryptography on elliptic curve:

3.1.Key exchange :

Alice wants to send a message, often called the plaintext, to Bob. In order to keep the eavesdropper Eve from reading the message, she encrypts it to obtain the ciphertext. When Bob receives the ciphertext, he decrypts it and reads the message. In order to encrypt the message :

- Alice uses an encryption key.
- Bob uses a decryption key to decrypt the ciphertext.

Clearly, the decryption key must be kept secret from Eve.

In this paper, we will use public key encryption, or asymmetric encryption.

In this case, Alice and Bob do not need to have prior contact.

Bob publishes a public encryption key $D_b = bP$, which all user uses (particularly Alice).

He also has a private decryption key that allows him to decrypt ciphertexts.

The most famous public key system is known as :

- RSA and is based on the difficulty of factoring integers into primes.
- Another wellknown system is due to ElGamal and is based on the difficulty of the discrete logarithm problem.

Alice and Bob agree on an elliptic curve E over a finite field $F_q : y^2 = x^3 + Ax + B$ such that the discrete logarithm problem is hard in $E(F_q)$. They also agree

on a point $P(x_p, y_p)$ of $E(F_p)$ such that the subgroup generated by P has large order (usually, the curve and point are chosen so that the order is a large prime).

One user chooses a secret integer u with $0 < u < q$ (his private key) computes $D_u = uP$ (his public key) and sends D_u to Bob.

1.2. Encryption and decryption :

Bob wants to send a message m to Alice. He transform the message to a ciphertext M .

Alice chooses a secret integer a , computes $D_A = ax_p$ where x_p is the x -coordinate of P , and sends D_A to Bob,

Bob chooses a secret integer b , computes $D_B = bx_p$, and sends D_B to Alice.

Alice computes $aPb = abP$.

Bob computes $bPa = baP$.

Bob compute $C = M + bD_A$

Bob send (D_B, C) to Alice ,

Alice receive (D_B, C)

Alice compute $aD_B = abx_p$ and $C - aD_B = M + bD_A - abx_p = M$,

3.3.Verification :

$$bD_A = b(ax_p) = (ba)x_p = a(bx_p) = aD_B$$

Remark :

Alice and Bob use some publicly agreed on method to extract a key from abP . For example, they could use the last 256 bits of the x -coordinate of $abP = (x, y) \in E(F_p)$ as the key. Or they could evaluate a hash function at the x -coordinate.

4.Example :

lettre	0	1	2	3	4
entier	0	1	2	3	4

5	6	7	8	9	A	B	C
5	6	7	8	9	10	11	12

...	.	,	:	;	!	?	esp
...	36	37	38	39	40	41	42

The message « BONJOUR » is encrypt by the ciphertext.

$$= 11 + 24 \cdot 47 + 23 \cdot 47^2 + 19 \cdot 47^3 + 24 \cdot 47^4 + 31 \cdot 47^5 + 27 \cdot 47^6 = 298232584907$$

27 31 24 19 23 24 11₄₇

Consider $E : y^2 = x^3 + 22x + 25$ sur F_{47} , we lift this curve onto a curve over \mathbb{F}_{47} ,

$$\tilde{E} : Y^2 = X^3 + 22X + 25.$$

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	9	16	25	36
y^2	25	1	30	24	36	25	44

7	8	9	10	11	12	13	14
2	17	34	27	3	28	8	37
5	8	12	23	0	43	17	22

15	16	17	18	19	20	21	22
37	21	7	42	32	24	18	14
17	8	1	2	17	5	19	18

23	24	25	26	27	28	29	30
12	12	14	21	7	32	42	7
8	42	32	31	45	33	1	36

31	32	33	34	35	36	37	38
21	37	8	28	3	27	6	34
42	33	28	33	7	3	27	38

39	40	41	42	43	44	45	46
17	2	36	25	16	9	4	1
42	45	6	25	14	26	20	2

Squares in F_{47} are writed fat.

From Legendre formula $< 10^6$, we have :

$$|E(F_{47})| = 47 + 1 + \sum_{x \in F_{47}} \chi(x^3 + 22x + 25),$$

Where :

$$\chi(0) = 0 \text{ et } \chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \text{ is square } \neq 0 \text{ in } F_{47} \\ -1 & \text{not} \end{cases}$$

$$\#E(F_{47}) = 47 + 1 + 28 - 17 = 59$$

$\#E(F_{47})$ is a prime number, the group $E(F_{47})$ is cyclic and every points are generator of the group.

The point $s(3, 20)$ is in $E(\mathbb{F}_{47})$ lift into point on $E(\mathbb{Z}/47^2\mathbb{Z})$. Let :

$$S(3 + pu, 20 + pv) \pmod{47^2}.$$

$$\begin{aligned} S \in E(\mathbb{Z}/47^2\mathbb{Z}) &\Leftrightarrow \\ (20 + pv)^2 &= (3 + pu)^3 + 22(3 + pu) \\ &\quad + 25 \pmod{47^2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 400 + 6pv = 118 + 49pu \pmod{47^2}$$

$$\Leftrightarrow 6pv = -282 + 49pu \pmod{47^2}$$

$$\Leftrightarrow 6pv = 1927 + 49pu \pmod{47^2}$$

$$\Leftrightarrow 6pv = 41p + 49pu \pmod{47^2}$$

$$\Leftrightarrow 6v = 41 + 49u \pmod{47}$$

$$\Leftrightarrow 6v = 41 + 2u \pmod{47}$$

$$\Leftrightarrow v = 41 \cdot 6^{-1} + 2 \cdot 6^{-1}u \pmod{47}$$

Since $\text{pgcd}(6, 47) = 1$, by Bézout theorem we have: $47 \times (-1) + 6 \times 8 = 1$

Then : $6 \times 8 \equiv 1 \pmod{47}$ and $6^{-1} = 8 \pmod{47}$

Thus $v = 41 \cdot 8 + 2 \cdot 8u \pmod{47}$

$$\Leftrightarrow v = 46 + 16u \pmod{47}$$

S is of the form $S(3 + pu, 20 + pv) \pmod{47^2}$

$$S(3 + pu, 20 + p(46 + 16u)) \pmod{47^2}$$

$$S(3 + 47u, 20 + 46 \times 47 + 16 \times 47u) \pmod{47^2}$$

$$S(3 + 47u, 2182 + 16 \times 47u) \pmod{47^2}$$

Bob send to Alice :

$$D_B = 3x_S = 3(3 + 47u)$$

and

$$\begin{aligned}
 C &= M + 3D_A \\
 &= \dots 00\ 27\ 31\ 24\ 19\ 23\ 24\ 11_{47} \\
 &\quad + 2 \times 3 \times (3 + 47u) \\
 &\dots 27\ 31\ 24\ 19\ 23\ 30\ 29_{47} \\
 &= 312.597.244.541 (u = 1)
 \end{aligned}$$

Alice compute :

$$2D_B = 2 \times 3x_s = 2 \times 3(3 + 47u)$$

$$\text{et } C - 2D_B = M = 298.232.584.907$$

She find the message by computing Elle retrouve le message par des divisions euclidiennes successives de M par 47 .

5.Conclusion :

Actually many searcher work on elliptic curve cryptographic over finit field, for now on the point multiplication, reduction of the discret logarithm problem for specialcurves of Menezes. Okamoto and Vanstone, the point counting methode of Schoof etc.....

In this article, we worked on the K -rational group on elliptic curve over p-adic field In order to create a cryptosystem. We focused the work on elliptic curves whose orders are prime in order to focus on the cryptosystem's feasibility and apply it in a Public key encryption.

Few people work on elliptic over infinite field. The reason is that the points on these curves also form infinite field.

These case exceed the power of computers and are not within reach of cryptography research.

Other cases are treated in the search for generator which depend more on the structure of $E(\square_p)$.

Bibliography

- [Ay] Yvette Amice. Les nombres p-adiques. Presses universitaires de France, 1975.
- [BG] Introduction to p-adique numbers and valuation theory, George Bachman, Academic
- [BS] Borevitsh_Shafarevitch. Théorie des nombres. Gauthier -Villars Paris 1967.
- [CPi] Pierre Colmez. Les nombres p-adiques. Notes du cours de M2.
- [Se] J.-P. Serre, Cohomologie galoisienne, Lectures Notes in Math. 5, Berlin- Heidelberg-New-york: Springer 1964.
- [KN] Neal-Koblitz-p-adic-numbers p-adic-analysis and-zeta-functions-Springer_1996
- [KN] N. KoBLITZ: *Introduction to elliptic curves and modular forms*. Graduate Texts in Math.97, Springer Verlag Berlin-Heidelberg-New-York 1984.
- [KN] N. KOBLITZ: *Elliptic curve cryptosystems*. Math.Comp.(48): 203-209, 1987.
- [KN] N. KoBLITZ : *CM curves with cryptographic properties*. Ad vance in Cryptology. Crypto. 91; Lectures Notes in Computer Sciences, Vol 537. Springer Verlag. Berlin 1992
- [Sil] Joseph H. SILVERMAN . *The arithmetic of Elliptic Curves*. Springer, 1986.

Nash Bargaining on a Processor Sharing Queue

Toky Basilide RAVALIMINOARIMALALASON¹, Mirisoa RAKOTOMALALA², Falimanana RANDIMBINDRAINIBE³

^{1,2,3}Ecole doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation
Ecole Supérieure Polytechnique d'Antananarivo - Université d'Antananarivo - Madagascar



Abstract – This paper presents an approach through the bargaining game theory on the capacity sharing in a queue with processor sharing discipline. It has a brief review of such a type of queue and the Nash bargaining solution. It demonstrates the feasibility of insensitive and balanced sharing. It also proves that sharing is not insensitive and balanced if the notion of priority is integrated in the queue.

Keywords – Game theory, Nash, Bargaining, Queue, Processor sharing

I. INTRODUCTION

The processor sharing is a limit of the Round-Robin scheduling when the time step tends towards 0. It knows a great success because it shares all available resources across customers. The term queue has become a misnomer because in reality there is no more queue training, all arriving customers are immediately served with part of the system's resources [1]. Many authors have studied this kind of queue discipline, especially its insensitive characteristic to the customer's arrival distribution or their service distribution [1][2][3][4].

What interests us in this paper is rather how to share the available resources to customers. We already focused on resource sharing even they are discrete [5] or fractional [6] but here we based the sharing on game theory, which is a very interesting field to study or even to predict the outcome of a conflict situation such as the sharing of resources in a processor sharing queue. We assimilate the resource sharing as a bargaining issue between customers in the queue.

II. PROCESSOR SHARING QUEUE

A. Description

The “Processor Sharing” (PS) service discipline is a discipline that simultaneously shares capacity of a server among all clients requesting services from that server.

A queue that adopts this discipline to schedule its clients is called a processor sharing queue or simply a PS queue. Thus, for fair sharing, at time t a customer is served at speed $C/x(t)$ if $x(t)$ customers are present in a PS queue with capacity C .

A queueing network is said to processor sharing if all of the queues in this network are PS queues. A network of PS queues can therefore be interpreted as a network of queues where each i -th PS queue has a capacity $\varphi_i(\mathbf{x})$ which may depend on the number \mathbf{x} of customers in the network.

The network state \mathbf{x} is a vector which components are the number of customers at each node of the network : $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ where x_i is the number of customers at the node i .

We call $\varphi_i(\mathbf{x})$ the capacity allocation at state \mathbf{x} . It is assumed that the services cannot be interrupted, ie it is supposed that if $x_i > 0$ then $\varphi_i(\mathbf{x}) > 0$ for all i .

Arrivals on node i is a Poisson process with intensity λ_i . Customers service durations of the queue i at node i are independent and identically distributed following exponential distribution with average $1 / \mu_i$.

B. Balance and insensitivity

Let's consider a queueing network of n queues ($n \in \mathbb{N}^*$) where each queue i has a capacity $\varphi_i(\mathbf{x})$ depending to the network state \mathbf{x} . Capacities of such network are called balanced if :

$$\varphi_i(\mathbf{x})\varphi_j(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i) = \varphi_j(\mathbf{x})\varphi_i(\mathbf{x} - \mathbf{e}_j), \quad i, j = 1, \dots, n \tag{1}$$

where \mathbf{e}_i denotes a vector whose i -th component is 1 and the others are all zero.

This equality in (1) states that the change in the allocation to queue i when a customer in queue j leaves its queue is identical to the change in the allocation to queue j when a customer in queue i also leaves its queue.

Considering a direct path from state \mathbf{x} to $\mathbf{0}$, $\langle x, x - e_{i_1}, \dots, x - e_{i_1} - \dots - e_{i_{c-1}}, 0 \rangle$, which has a length c where $c = x_1 + \dots + x_n$ is the total number of customers in a state \mathbf{x} . We define a balance function Φ expressed by [7] :

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varphi_{i_1}(\mathbf{x})\varphi_{i_2}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_{i_1}) \dots \varphi_{i_c}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_{i_1} - \mathbf{e}_{i_{c-1}})} \tag{2}$$

The balance property requires that the balance function is independent of the path from state \mathbf{x} to state $\mathbf{0}$. The capacities $\varphi_i(\mathbf{x})$, for all i , are characterized by the balance function Φ :

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \frac{\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i)}{\Phi(\mathbf{x})} \tag{3}$$

We say that the capacities are balanced by the function Φ .

The stationary distribution $\pi(\mathbf{x})$ of the number of customers in the network can be expressed from this balance function by the relation:

$$\pi(\mathbf{x}) = K\Phi(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i} \right)^{x_i} \tag{4}$$

where K is a normalization constant according to the probabilistic definition of function π .

We see that this function does not depend on the distribution of customers' arrival nor their service requests but only by their averages. In this case, we say that the network is said to be insensitive. [1][3][8][9]

III. BARGAINING GAME

A. Description of a bargaining game

People are now faced with such a set of alternatives that their preferences are in conflict. Among them, one can serve as a reference that we will call the status quo or point of disagreement, but of course, there are other preferences that can give more than the status quo. There is potentially an interest in not just starting a negotiation which should lead to a consensus on a particular

alternative. It is an alternative that gives more to that person but to the detriment of others. Two cases can arise: Either the negotiation is successful, or the opposite and in this case, the status quo is maintained. This point plays a role of threat for these people. This kind of game is called a bargaining game, which is one branch of game theory.

Nash described a solution that predicts the outcome of such bargaining.

B. A bargaining problem

A bargaining problem is defined by the couple (U, d) where $d \in U$ and U a subset of \mathbb{R}^n satisfying the following properties:

- U is convex and closed
- U is bounded: $\exists \bar{u} \in \mathbb{R}^n$ such as $u_i < \bar{u}_i$ for all $i = 1$ to n and for all u of U .
- d is dominated in the sense of Pareto : $\exists u \in U$ such as $u_i > d_i$ for all $i = 1$ to n

U is nonempty because it contains at least the point of disagreement or the status quo. The convexity of U reflects the fact that the set of alternatives is a continuum and that the players do not have a disposition for risk. U bounded guarantees a limit on players' gain, and Pareto dominance invokes that potential gain really exists.

A solution to this bargaining problem is a rule described by a function f such that any bargaining problem (U, d) associates the element $\bar{u} = f(U, d)$ of the set U . $\bar{u}_i = f_i(U, d)$ where f_i defines the utility level for each i .

The solutions to this bargaining problem must meet certain conditions. [10]

C. Nash solution

Nash's solution is based on axioms which lead to the uniqueness of the solution. This corresponds to the maximization of the function $f(u)$ on the set U :

$$f(u) = \prod_{i=1}^n (u_i - d_i)^{\omega_i} \tag{5}$$

where ω_i denotes an eventual weight for a player i of the bargaining.

This function is continuous over a compact set, so the solution exists. The uniqueness is that the set U is convex and the function f is strictly concave, which results in contour curves that are strictly convex with respect to the origin. [11]

IV. RESOURCE BARGAINING IN A PS QUEUE

A. Game formulation

Let's study the case of a single server of PS queue. Customers in this queue are divided into customer class numbered from 1 to n . This queue can be assimilated to n parallel queues, each queue i of which serves a class i of customers. At any time, each queue i serves x_i customers and the system state is the vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

The entire system then hosts $|\mathbf{x}|$ customers where $|\mathbf{x}|$ denotes the sum of all the components of the vector \mathbf{x} .

The sum of the individual capacities $\varphi_i(\mathbf{x})$ of each queue i depending on the state \mathbf{x} of the system is therefore equal to the total capacity C available for the system :

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i(\mathbf{x}) = C \tag{6}$$

For each queue i , the available resource $\varphi_i(\mathbf{x})$ is shared equally between the x_i customers. Then, the available resource for a class i customer is:

$$r_i = \frac{\varphi_i(\mathbf{x})}{x_i} \tag{7}$$

We are going to model this PS queues network to a game in which the players are the customers of the network who bargain the available resources on the entire network. Each queue i has the utility function $f(\varphi_i(\mathbf{x}))$.

B. Solution of the bargaining problem

The solution of this bargaining problem is :

$$\begin{aligned} &\arg \max_{\varphi_i} \sum_{i=1}^n x_i \cdot f(\varphi_i) \\ &\text{under constraint : } \sum_{i=1}^n \varphi_i = C \end{aligned} \tag{8}$$

The term $x_i \cdot f(\varphi_i)$ denotes that the utility on queue i is common to all x_i customers, and the overall utility is calculated across all of those customers.

This leads to a convex optimization problem, and the resolution uses Lagrange multipliers with Karush – Kuhn – Tucker (KKT) conditions. The associated function to find the Lagrange multipliers is given by:

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot f(\varphi_i) + \lambda \cdot \left(\sum_{i=1}^n \varphi_i - C \right) \tag{9}$$

The utility function f can be chosen so that the resulting solution is equal to Nash's solution with the origin as the point of disagreement. In this case, it suffices to use a logarithm function:

$$f(\varphi_i) = \omega_i \cdot \log(\varphi_i) \tag{10}$$

The choice of this function derives from the efficiency function which gives the proportion of capacity obtained by queue i compared to the total capacity of the system C : $\log(\varphi_i) / \log(C)$. The term ω_i denotes a weight of each customer class i .

The associated Lagrange function is therefore:

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \omega_i \cdot \log(\varphi_i) + \lambda \cdot \left(\sum_{i=1}^n \varphi_i - C \right) \tag{11}$$

Among the KKT conditions, for all k , we have:

$$\frac{x_k \cdot \omega_k}{\varphi_k} + \lambda = 0 \tag{12}$$

Then:

$$\begin{aligned} &\frac{x_i \cdot \omega_i}{\varphi_i} = \frac{x_j \cdot \omega_j}{\varphi_j} \quad \forall i \neq j \\ &\text{and } \sum_{i=1}^n \varphi_i = C \end{aligned} \tag{13}$$

Solving this system of equations shows that the capacity that must be allocated to queue i is:

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \frac{x_i \omega_i}{\sum_{k=1}^n x_k \omega_k} \cdot C \tag{14}$$

At first glance, this is a kind of allocation proportional to the number of customers in each queue and the weights assigned to each queue.

C. Balance and insensitivity

According to the capacity allocated to each queue in (14), we have:

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \frac{x_i \omega_i}{\sum_{k=1}^n x_k \omega_k} . C \tag{15}$$

$$\varphi_j(\mathbf{x}) = \frac{x_j \omega_j}{\sum_{k=1}^n x_k \omega_k} . C \tag{16}$$

$$\varphi_i(\mathbf{x} - \mathbf{e}_j) = \frac{x_i \omega_i}{\left(\sum_{k=1}^n x_k \omega_k\right) - \omega_j} . C \tag{17}$$

$$\varphi_j(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i) = \frac{x_j \omega_j}{\left(\sum_{k=1}^n x_k \omega_k\right) - \omega_i} . C \tag{18}$$

The balance equation (1) gives us:

$$\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^n x_k \omega_k\right) - \omega_j} = \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^n x_k \omega_k\right) - \omega_i} \tag{19}$$

This equality is true if and only if $\omega_i = \omega_j$ for all $i \neq j$.

That is, we must assign the same weight to all queues to have a balanced and insensitive system. In other words, this shows that the fact of endowing the system with the notion of priority on the basis of weights removes its characteristic of balance and insensitivity.

Of course, more resources must always be allocated to the higher priority class queue and the notion of balance defined in the second paragraph will no longer be maintained.

D. Stationary distribution

In the following, we will study a balanced and insensitive system, with a capacity of each queue equal to:

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \frac{x_i}{\sum_{k=1}^n x_k} . C = \frac{x_i}{|\mathbf{x}|} . C \tag{20}$$

We have:

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \frac{\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i)}{\Phi(\mathbf{x})} = \frac{x_i}{|\mathbf{x}|} . C \tag{21}$$

Therefore:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i) \frac{|\mathbf{x}|}{C . x_i} \tag{22}$$

$$\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i) = \Phi(\mathbf{x} - 2\mathbf{e}_i) \frac{|\mathbf{x}| - 1}{C \cdot (x_i - 1)} \tag{23}$$

$$\Phi(\mathbf{x} - x_i \mathbf{e}_i) = \Phi(\mathbf{x} - (x_i + 1)\mathbf{e}_i) \frac{|\mathbf{x}| - x_i}{C} \tag{24}$$

Thus:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x} - x_i \mathbf{e}_i) \frac{|\mathbf{x}| \dots (|\mathbf{x}| - x_i)}{C^{x_i} \cdot x_i!} \tag{25}$$

Doing the same for all i , we have:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{0}) \frac{|\mathbf{x}|!}{C^{|\mathbf{x}|} \cdot (x_1! \dots x_n!)} \tag{26}$$

And the stationary distribution follows:

$$\pi(\mathbf{x}) = K \cdot \frac{|\mathbf{x}|!}{C^{|\mathbf{x}|} \cdot (x_1! \dots x_n!)} \cdot \prod_{i=1}^n \rho_i^{x_i} \tag{27}$$

where K is a normalization constant obtained from the probabilistic definition of $\pi : \sum \pi = 1$, and $\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$ is the traffic intensity at queue i .

V. CONCLUSION

The bargaining game theory approach discussed in this work has allowed us to share the resources of a processor sharing queue. This method with Nash's solution allowed us to find out how to share these resources across classes of customers. This approach also allowed us to demonstrate that the notion of priority in the PS queue makes it lose the notion of insensitivity and balance in terms of sharing this resource.

REFERENCES

- [1] T. Ravaliminoarimalalason, Study of the Whittle network and its application to model packet switched networks (Etude du réseau de Whittle et son application pour modéliser les réseaux à commutation de paquet). DEA Cognitive sciences and applications, ESPA – University of Antananarivo, 2013.
- [2] A.T. Minh, Insensitivity in queuing networks and applications to the sharing of computer resources (Insensibilité dans les réseaux de files d'attente et applications au partage de ressources informatiques). Network and Communications Theory Research Group, Doctorate Thesis, 2007.
- [3] A. Proutière, Insensitivity and stochastic bounds in queuing networks (Insensibilité et bornes stochastiques dans les réseaux de files d'attente). France Telecom R&D – Ecole Polytechnique, Doctorate Thesis, 2003.
- [4] K. Abhay, J. Parekh, A generalized processor sharing approach to flow control in integrated services networks. The Johns Hopkins University and Massachusetts Institute of Technology, Doctorate Thesis, 1992.
- [5] T.B. Ravaliminoarimalalason, F. Randimbindrainibe, “Distribution of Occupied Resources on A Discrete Resource Sharing in A Queuing System”, International Journal of Engineering Research & Technology, ISSN 2278-0181, pp 638-643, Vol. 10 Issue 1, 2021

- [6] T.B. Ravaliminoarimalalason, M. Rakotomalala, F. Randimbindrainibe, "Distribution of occupied resources on a fractional resource sharing in a queueing system", International Journal of Operational Research, DOI 10.1504/IJOR.2021.10039107, 2021
- [7] T.B. Ravaliminoarimalalason, F. Randimbindrainibe, From queues to teletrafics (Des files d'attente aux télétrafics). Edition ISTE, 244 pp, 2021.
- [8] T.T.H. Dao, Zero-automatic queues and networks. Laboratory of Algorithmic Computing, University Paris Diderot, Doctorate Thesis, 2007.
- [9] A.R. Ward, Predicting response times in processor sharing queues. Dpt of Management Science and Engineering - Stanford University, AT&T Labs Shannon Laboratory, 2000.
- [10] P. Dehez, Conflict, bargaining, sharing, power (Conflit, marchandage, partage, pouvoir). Core-UCL, 2007.
- [11] C.O. Alexander, W. Ledermann, "The constrained Nash Bargaining solution", J. Opl Res. Soc., Vol. 45, University of Sussex, 1994.

Asynchronous Learning Model in an ODL

Mirisoa Rakotomalala,
Phd School
Sciences and Technical Engineering and Innovation,
University of Antananarivo,
Teacher and Researcher at Higher Institute of Technology of Antananarivo
Antananarivo, Madagascar

Toky Basilide Ravaliminoarimalalason,
Phd School
Sciences and Technical Engineering and Innovation,
University of Antananarivo,
Antananarivo, Madagascar

Falimanana Randimbindrainibe,
Phd School
Sciences and Technical Engineering and Innovation,
University of Antananarivo,
Antananarivo, Madagascar

Abstract— The analysis of the traces of digital activity and the content analysis of a discussion forum on an Open and Distance Learning (ODL) platform form a database to be processed on R, in order to release an asynchronous learning model, according to the approach by Linear Structural Relation (LISREL) of Structural Equation Modeling (SEM).

Keywords— Model, Asynchronous learning, involvement, collaboration, educational outcome, ODL

I. INTRODUCTION

The appropriation of methods and techniques of distance learning is not obvious to students. Also, most tutors do not help learners solve technical problems [1]. To fill all these gaps, a "Student Guide for Online Learning" (SGOL) entry module was designed and subsequently introduced in three open and distance learning courses. It aims to support learners in taking charge of the platform and provides the tools, advice and methods necessary to succeed in open and distance learning.

The idea of exploiting this instrument mainly has been advanced. Reinforcement of learning in ODL devices was envisaged, through modeling of learning engineering. It was within this framework that research was conducted and was based on the analysis of ODL. A study that coming from cognitive science, in the field of engineering science.

Modeling focuses on learners' knowledge management and data analysis on the platform. In other words, how to establish a model of Structural Equation Modeling (SEM), which can apply to any kind of open and distance learning, according to the analysis of traces of learning activities on a platform? The problem was about the distance learning system. The aim was to study the behavior of the learners in front of the discussion forum and to know if in an online teaching, the engagement in an interaction between students can be valued. Which model of asynchronous learning could be a tool for improving teaching effectiveness?

The aim of the study was to present an online learning model. To achieve this goal, firstly, the trace of asynchronous activities was analyzed, then a structure model based on SEM was developed.

II. MATERIALS

Data collection was conducted in 2016, 2017 and 2018. Three L3 ODLs of ISTs (IST: High Institute of Technology, in Madagascar) were used as research ground: Automatic System Engineering (ASE), Transit and International Trade (TIT) and Logistic Operations and Transportation (LOT). The distance learning initiation module called SGOL or "Student's Guide to Online Learning" was put into play. It contains four forums for discussion. A digital activity trace analysis grid was used with six promotions, 109 new learners, 12393 past events and 1072 messages to analyze.

III. METHODOLOGIES

A motivated learner communicates with his entourage in a training device, shares his knowledge via the platform, develops his know-how and his knowledge, and collaborates with the members of his group for a requested work. The evaluation of these three measurement variables in the learning of the initiation module made it possible to measure the latent variable "involvement" of the learner. Similarly, forum consultation, discussion consultation, learner participation by sending and updating messages, were all listed to be able to measure the learner's attitude when learning from a distance. Thus, the two models validated in [2] were used for all applications in the rest of the study, in order to leave the structure model of the research. Is there a causal relationship between the learner's involvement and his attitude in the discussion forum? Does involvement enable the development of learners' knowledge? Does the learners' attitude in the forum have a positive impact on their learning outcome? These are the different research questions that will be answered in this article.

IV. RESULTS

The overall result of the research primarily covered the innovative strategy for distance learning. The expected result was the provision of an asynchronous learning model in ODL. This model can be adapted to the Malagasy context.

A. Asynchronous learning model

The structure model made it possible to examine the link between the different latent variables. The structural equation method represents a multivariate technique that combines measurement models and structural models while simultaneously examining a series of linear relationships

between observed variables and latent variables on the one hand, and between sets of latent variables on the other hand [3].

1) Model identification

The data obtained from the analysis of digital traces of the activities and the content analysis of all existing forums were the basis of treatment on R. The two latent variables A and E were determined from these analyzes according to the two previously validated measurement models [2]. The article presents the determination of the third latent variable C, which has a direct relationship with the educational outcome of the training. Six cases are likely to happen for the model structure equation. The figure below shows the identified model:

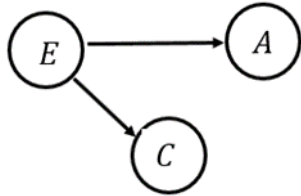


Fig. 1. Identified structure model

2) Structured model with estimated parameters

The structure model below was obtained at the outcome of the processing of the first proposal. It was noticed that the model converges after 71 iterations.

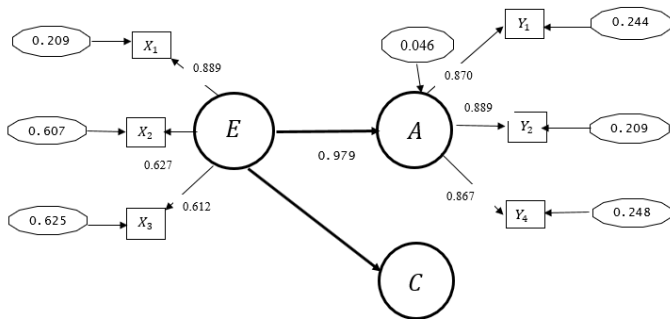


Fig. 2. Structure model of the research

According to Fig. 2, the learner's involvement has a direct impact on his attitude in the discussion forum.

B. Estimation of the result from the latent variable C

Three latent variables were considered in this structure model: A for Attitude, E for Involvement and C for the Cognition.

The latent variable C has a relationship with the educational outcome of the learning. Let "Rm" be the result from the research model, and "Rr" the educational outcome of the learning. The result was 1 when the learner was admitted and was 0 when the learner failed (not admitted).

Result from R processing:

	A	E	C			
[1,]	-28.125	-4.264	-4.264	[33,]	-9.779	-1.681 -1.681
[2,]	-19.769	-2.881	-2.881	[34,]	-25.251	-3.834 -3.834
[3,]	-13.783	-2.064	-2.064	[35,]	-25.232	-3.899 -3.899
[4,]	-4.140	-0.487	-0.487	[36,]	-15.279	-2.446 -2.446
[5,]	-3.680	-0.727	-0.727	[37,]	-17.272	-2.895 -2.895
[6,]	-17.787	-2.500	-2.500	[38,]	-16.621	-2.484 -2.484
[7,]	0.210	-0.168	-0.168	[39,]	4.458	0.801 0.801
[8,]	-18.600	-3.063	-3.063	[40,]	2.251	0.812 0.812
[9,]	4.553	0.779	0.779	[41,]	-15.630	-2.391 -2.391
[10,]	-22.740	-3.386	-3.386	[42,]	-1.948	-0.412 -0.412
[11,]	-23.937	-3.668	-3.668	[43,]	48.037	7.688 7.688
[12,]	-26.275	-3.963	-3.963	[44,]	-13.209	-2.127 -2.127
[13,]	-9.019	-1.495	-1.495	[45,]	-11.093	-1.625 -1.625
[14,]	-19.324	-3.055	-3.055	[46,]	15.830	2.422 2.422
[15,]	-22.558	-3.427	-3.427	[47,]	-26.353	-3.973 -3.973
[16,]	-12.169	-1.724	-1.724	[48,]	-13.587	-1.899 -1.899
[17,]	-27.917	-4.237	-4.237	[49,]	75.051	11.104 11.104
[18,]	16.731	2.347	2.347	[50,]	22.352	3.611 3.611
[19,]	-24.002	-3.677	-3.677	[51,]	-16.368	-2.452 -2.452
[20,]	27.890	3.068	3.068	[52,]	-13.096	-2.139 -2.139
[21,]	39.883	6.194	6.194	[53,]	-19.826	-2.920 -2.920
[22,]	-3.603	-0.775	-0.775	[54,]	2.712	0.670 0.670
[23,]	41.521	6.846	6.846	[55,]	-11.391	-1.432 -1.432
[24,]	-0.226	0.238	0.238	[56,]	46.751	7.675 7.675
[25,]	-13.416	-2.207	-2.207	[57,]	-15.504	-2.272 -2.272
[26,]	1.860	0.437	0.437	[58,]	-5.861	-1.196 -1.196
[27,]	0.633	-0.047	-0.047	[59,]	13.287	1.619 1.619
[28,]	1.824	0.235	0.235	[60,]	-10.516	-1.354 -1.354
[29,]	40.394	6.022	6.022	[61,]	0.931	-0.009 -0.009
[30,]	-9.972	-1.908	-1.908	[62,]	-20.218	-2.870 -2.870
[31,]	108.158	16.410	16.410	[63,]	9.303	1.406 1.406
[32,]	-26.054	-4.003	-4.003	[64,]	-13.807	-2.165 -2.165
				[65,]	-26.824	-4.032 -4.032
				[66,]	-24.009	-3.677 -3.677
				[67,]	8.767	0.980 0.980
				[68,]	-18.171	-2.748 -2.748
				[69,]	12.071	1.690 1.690
				[70,]	36.412	4.998 4.998
				[71,]	-27.600	-4.197 -4.197
				[72,]	-7.430	-1.362 -1.362
				[73,]	-7.699	-1.163 -1.163
				[74,]	-10.619	-1.733 -1.733
				[75,]	-16.848	-2.644 -2.644
				[76,]	-2.493	-0.610 -0.610
				[77,]	-25.021	-3.738 -3.738
				[78,]	-25.071	-3.811 -3.811
				[79,]	12.862	1.951 1.951
				[80,]	114.753	18.093 18.093
				[81,]	-18.745	-2.851 -2.851
				[82,]	28.847	4.707 4.707
				[83,]	7.096	0.177 0.177
				[84,]	-8.090	-1.021 -1.021
				[85,]	17.889	3.136 3.136
				[86,]	9.277	1.749 1.749
				[87,]	26.585	5.238 5.238
				[88,]	80.881	13.242 13.242
				[89,]	24.977	3.864 3.864
				[90,]	-11.455	-1.639 -1.639
				[91,]	-20.802	-3.242 -3.242
				[92,]	53.235	8.683 8.683
				[93,]	21.525	1.996 1.996
				[94,]	-7.963	-1.722 -1.722
				[95,]	-27.743	-4.215 -4.215
				[96,]	-28.278	-4.283 -4.283

Fig. 3. Three latent variables of the research

This set of data was exported to Excel to perform a spreadsheet analysis.

C. The threshold value from the probability distribution of C and the actual result

A threshold value C_{th} of the latent variable C was set to decide whether a learner was admitted or not. Depending on this threshold, the following table shows a comparison of the actual results with those of the model. It will be noted by TRUE if the real result of the learner is identical to the result predicted by the model (whether admitted or not), and by FALSE otherwise.

Threshold of C	-0.9	-1.0	-1.1	-1.2	-1.3	-1.4	-1.5
TRUE	72	72	73	73	73	71	71
FALSE	24	24	23	23	23	25	25
Number of admitted learners according to the model	42	42	43	45	45	47	49
Number of actually admitted learners	46	46	46	46	46	46	46

Fig. 4. Threshold of C

According to the Table in Figure 4, a maximum of likelihood can be deduced between the results of the model and the actual results for a threshold value ranging from $C_{th} = -1.1$ to -1.3 . The exact value of the threshold to be adopted can be determined from the distribution of the values of these two types of results in the following paragraph.

In the cases where $C_{th} = -1.2$ or $C_{th} = -1.3$, a similarity regarding the number of learners admitted was also observed.

D. The pedagogical result in relation to Cognition according to the model

By taking $C_{th} = -1.3$, the graph in the Figure below represents the decisions on the learners' result as a function of the "value of the latent variable C".

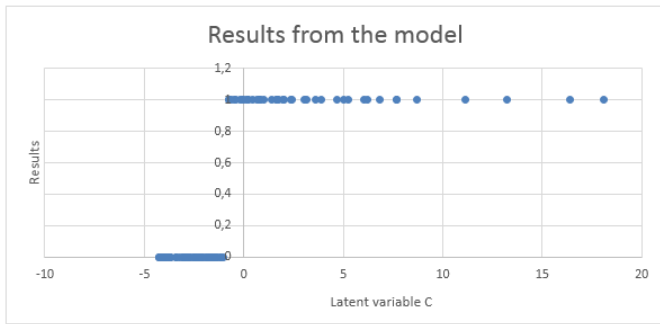


Fig. 5. Processing of the Threshold on Excel

It was found, according to the graph on Fig. 5., that starting from the value " C_{th} " threshold of the cognition, the model gave the result 1, in other words, starting from the threshold value of the cognition, the learner has passed the training.

N°	A	E	C	Rr	Rm	Comp
1	-28,125	-4,264	-4,264	0	0	TRUE
2	-19,769	-2,881	-2,881	0	0	TRUE
3	-13,783	-2,064	-2,064	1	0	FALSE
4	-4,14	-0,487	-0,487	1	1	TRUE
5	-3,68	-0,727	-0,727	1	1	TRUE
6	-17,787	-2,5	-2,5	0	0	TRUE
7	0,21	-0,168	-0,168	1	1	TRUE
8	-18,6	-3,063	-3,063	0	0	TRUE
9	4,553	0,779	0,779	1	1	TRUE
10	-22,74	-3,386	-3,386	0	0	TRUE
11	-23,937	-3,668	-3,668	1	0	FALSE
12	-26,275	-3,963	-3,963	0	0	TRUE
13	-9,019	-1,495	-1,495	0	0	FALSE
14	-19,324	-3,055	-3,055	0	0	TRUE
15	-23,558	-3,427	-3,427	1	0	FALSE
16	-12,169	-1,724	-1,724	0	0	TRUE
17	-27,917	-4,237	-4,237	0	0	TRUE
18	16,731	2,347	2,347	1	1	TRUE
19	-24,002	-3,677	-3,677	0	0	TRUE
20	27,89	3,068	3,068	0	1	FALSE
21	39,883	6,194	6,194	1	1	TRUE
22	-9,603	-0,775	-0,775	1	1	TRUE
23	41,521	6,848	6,848	1	1	TRUE
24	-0,226	0,238	0,238	1	1	TRUE
25	-13,416	-2,207	-2,207	0	0	TRUE
26	1,86	0,437	0,437	0	1	FALSE
27	0,633	-0,047	-0,047	1	1	TRUE
28	1,824	0,235	0,235	1	1	TRUE
29	40,394	6,022	6,022	1	1	TRUE
30	-9,972	-1,908	-1,908	0	0	TRUE
31	108,158	16,41	16,41	1	1	TRUE
32	-26,054	-4,003	-4,003	0	0	TRUE
33	-9,779	-1,681	-1,681	0	0	TRUE
34	-29,251	-3,834	-3,834	1	0	FALSE
35	-25,232	-3,899	-3,899	0	0	TRUE
36	-19,279	-2,446	-2,446	0	0	TRUE
37	-17,272	-2,895	-2,895	0	0	TRUE
38	-16,621	-2,484	-2,484	0	0	TRUE
39	4,458	0,801	0,801	1	1	TRUE
40	2,251	0,812	0,812	1	1	TRUE
41	-15,63	-2,391	-2,391	0	0	TRUE
42	-1,948	-0,412	-0,412	0	1	FALSE
43	48,037	7,688	7,688	1	1	TRUE
44	-13,209	-2,127	-2,127	0	0	TRUE
45	-11,093	-1,625	-1,625	1	0	FALSE
46	15,83	2,422	2,422	0	1	FALSE
47	-26,353	-3,973	-3,973	0	0	TRUE
48	-13,387	-1,899	-1,899	0	0	TRUE
49	79,051	11,104	11,104	1	1	TRUE
50	22,352	3,611	3,611	1	1	TRUE
51	-16,368	-2,452	-2,452	0	0	TRUE

Fig. 6. Data processing on Excel

With R, it is also possible to determine this threshold. According to Fig. 7. below, using locator () R-function, C_{th} was -1.338.

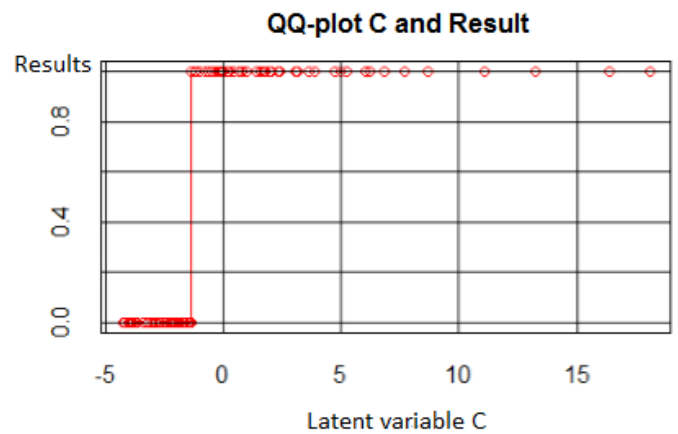


Fig. 7. Distribution of the educational result

This last value was used in the following analysis.

E. Results forecast for the current academic year

Open and distance learning ASE is recruiting its second class in the 2017/2018 academic year. Fifteen new learners followed the tutorial of the SGOL introductory module at the beginning of the training. After the digital trace analysis of activities on SGOL, 2708 events were passed. The content analysis of 260 messages on forums made it possible to measure the latent variable E, whereas the processing carried out from these events made it possible to measure A.

Learner	COLLAB	COMM	MOTIV	Consu_F	Consu_D	Envoi_M
[1]	11	4	1	44	90	42
[2]	11	3	1	48	48	36
[3]	10	4	2	37	85	41
[4]	11	3	2	62	89	43
[5]	20	6	1	123	125	72
[6]	5	3	1	21	71	29
[7]	13	6	5	66	152	60
[8]	5	4	1	12	27	20
[9]	10	8	1	71	114	53
[10]	13	5	3	88	129	56
[11]	10	4	2	31	71	38
[12]	16	3	1	53	129	60
[13]	2	1	1	10	26	9
[14]	14	4	1	19	65	39
[15]	21	6	1	39	101	64

Legend:

- COLLAB: Collaboration of the learner
- COMM: Communication
- MOTIV: Motivation
- Consu_F: Forum consultation
- Consu_D: Discussion consultation
- Envoi_M : Message sending (forum participation)

Fig. 8. Data after trace and content analysis

As a result of the application of the research model, the result 10 admitted among the 15 new learners of the second class of ASE 2018 was obtained.

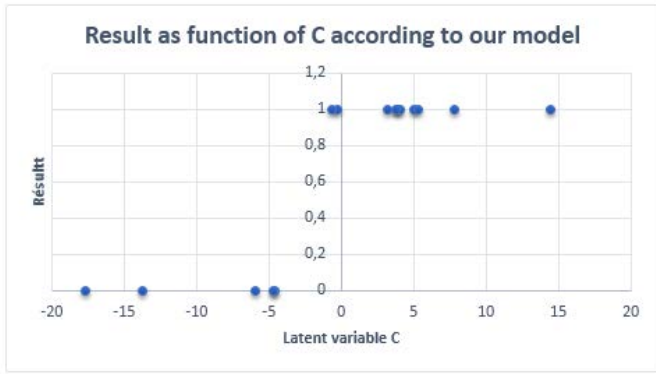


Fig. 9. Result forecast for ASE 2018

F. General prediction

Data with values varying from 0 to 20 for each variable COLLAB, COMM, MOTIV, Consu_F, Consu_D, Envoi_M was created.

	COLLAB	COMM	MOTIV	Consu_F	Consu_D	Envoi_M	A	E	C	R
2607	0	20	0	20	5	10	-13,06	-1,74	-1,74	0
2608	0	20	0	20	5	15	-10,87	-1,46	-1,46	0
2609	0	20	0	20	5	20	-8,69	-1,19	-1,19	1
2610	0	20	0	20	10	0	-16,66	-2,19	-2,19	0
2611	0	20	0	20	10	5	-14,47	-1,92	-1,92	0
2612	0	20	0	20	10	10	-12,29	-1,64	-1,64	0
2613	0	20	0	20	10	15	-10,11	-1,37	-1,37	0
2614	0	20	0	20	10	20	-7,92	-1,09	-1,09	1
2615	0	20	0	20	15	0	-15,89	-2,10	-2,10	0
2616	0	20	0	20	15	5	-13,71	-1,82	-1,82	0
2617	0	20	0	20	15	10	-11,52	-1,55	-1,55	0
2618	0	20	0	20	15	15	-9,34	-1,27	-1,27	1
2619	0	20	0	20	15	20	-7,15	-0,99	-0,99	1
2620	0	20	0	20	20	0	-15,12	-2,00	-2,00	0
2621	0	20	0	20	20	5	-12,94	-1,72	-1,72	0
2622	0	20	0	20	20	10	-10,75	-1,45	-1,45	0
2623	0	20	0	20	20	15	-8,57	-1,17	-1,17	1
2624	0	20	0	20	20	20	-6,39	-0,90	-0,90	1
2625	0	20	5	0	0	0	-18,97	-2,15	-2,15	0
2626	0	20	5	0	0	5	-16,79	-1,87	-1,87	0
2627	0	20	5	0	0	10	-14,60	-1,60	-1,60	0
2628	0	20	5	0	0	15	-12,42	-1,32	-1,32	1

Fig. 10. Extracts of data generated with the estimated values of variables A, E, C and R

The results are summarized in the graphs in the following figure.

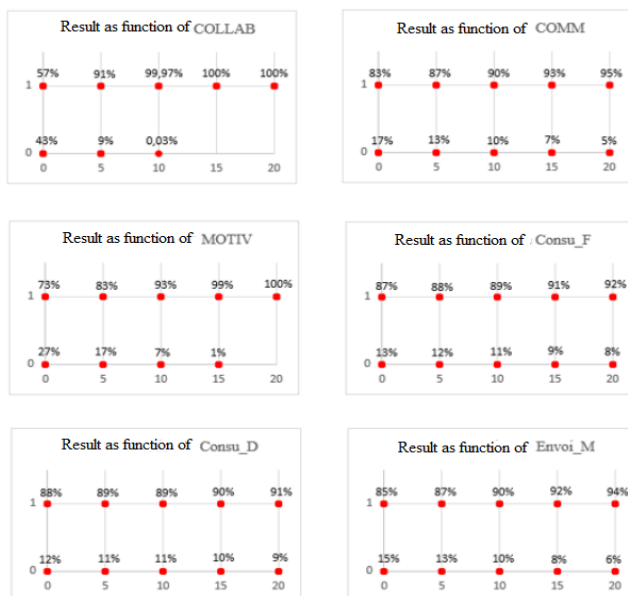


Fig. 11. Result as function of each variable

A result 1 indicates an admitted learner, while 0 indicates as always, a non-admitted learner.

In Fig. 11., the red marker on the ordinate 0 and abscissa 5 indicates that learners having brought COLLAB = 5 failed. Above, the red marker on the ordinate 1 indicates that other learners having brought the same value of COLLAB are admitted, but obviously with other values of the other variables. The proportion between admitted and failed learners is: 91% admitted - 9% failed.

From Fig. 12., it is noted that the proportions of admitted learners increase according to the values of the variables studied (example in Figure 5.19).

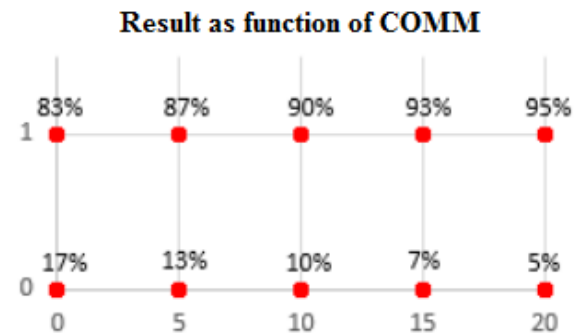


Fig. 12. Increasing rate of admission depending on the variable

It can be deduced that the more learners bring more collaboration, the more they can be admitted. A motivated learner collaborates with his peers and always communicates with them during his learning. He always reads news, participates in ongoing discussions and creates much needed debates. The dynamism of the learner in collaboration and communication, the maintenance of motivation and the active participation in a discussion forum has a positive impact on his cognition and brings him a good pedagogical result.

For the observed variables generating the latent variable A (Consu_F, Consud_D, Envoi_M), it was noted that the rates of admitted learners do not vary much, as shown in Fig. 13.

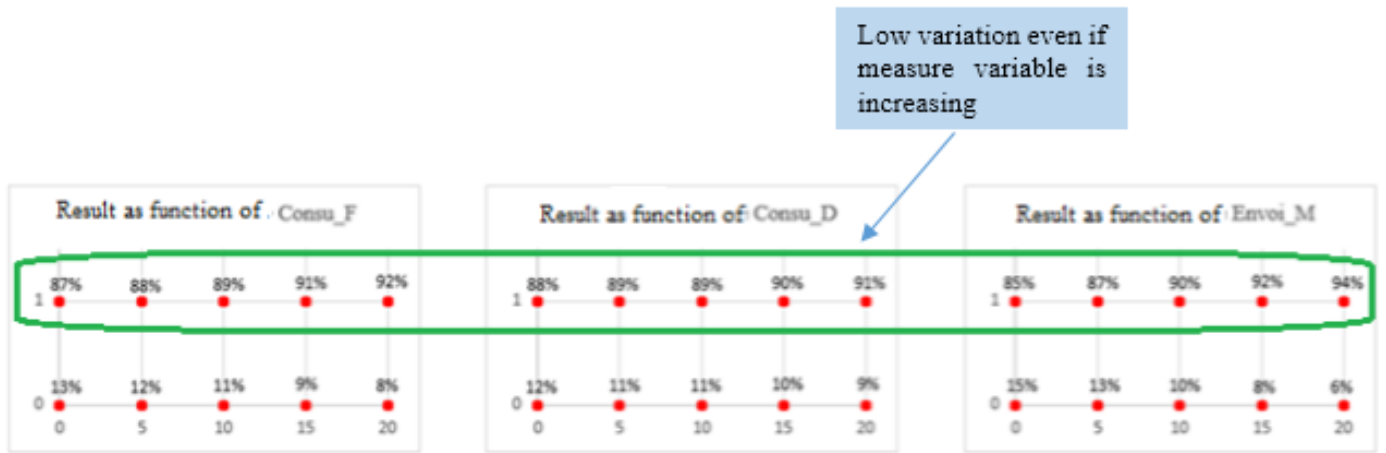


Fig. 13. Rate of admission with latent variable A

It was deduced that the three measurement variables of the latent variable A do not have a direct impact on the latent variable C, as well as on the pedagogical result of the learner. In other words, the student's behavior in front of the discussion forum does not have a direct influence on his / her acquisition of knowledge.

Participation in the ongoing discussion and any consultation of forums on the platform is not enough when learning in an

ODL. It is necessary to react, and to always contribute to the collaboration in all the group activities of the training. It is also necessary to talk to the manager or teammates about the difficulty if there is one, so that they can help solve it and take the necessary action to keep perseverance motivated.

An interesting result can also be deduced from Fig. 11. It is highlighted in the Fig. 14. below.

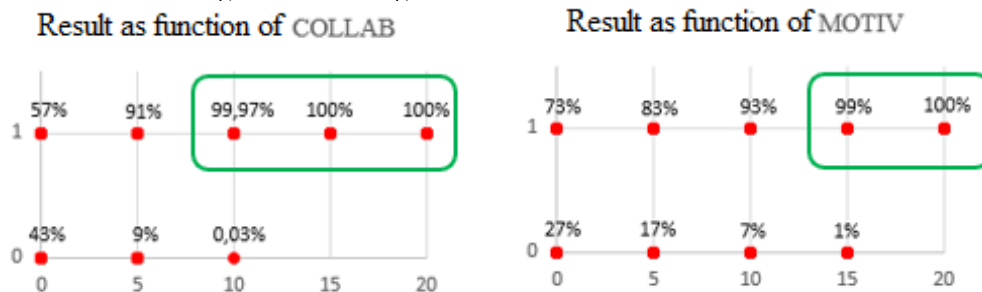


Fig. 14. Collaboration and motivation of learner

From a certain value of collaboration provided by a learner, that learner can always be admitted whatever the values of the other variables of measurement (0 failure). Collaboration is therefore a strong indicator for the latent variable E and has a significant impact on C and the educational outcome. In other words, collaboration favors a socio-constructivist vision of learning as part of the construction of knowledge [4], [5].

Afterwards, the motivation of a learner can also be mentioned. It creates a climate conducive for learning. Motivation is part of the social skills needed in e-learning. "The idea that we can build ourselves and rebuild ourselves, as we can partly build and rebuild the rest of society, permanently" [6]. A motivated learner communicates with his entourage in a training device, shares his knowledge via the platform, develops his know-how and his knowledge, and collaborates among the members of his group for the requested work.

The involvement of a learner in a group could support his asynchronous interaction and motivation in training.

It can be said that the involvement of the student must be serious to be successful in an ODL. The student should be active in collaborative work, interact with the peers, and he or she should be motivated by training and all learning activities.

V. DISCUSSIONS

Tutoring, if there is one, should then favor the collaboration of the learners to have a good result. According to Dix et al. [7], collaborative work is developed in pairs, and it would be better to present students with an organized forum than to suggest ways for them to organize it themselves.

A. Remote collaboration in a structured forum

In the context of collaborative remote discussion, learners use the forum tool to come up with a common solution [8] [9]; and they must argue to better understand their peers [10].

While the scenario has an important role to play in stimulating interaction between learners [11], it is also important to adapt the tools to the context of learning. The result of the research has approved the importance of this structuring, and the impact of collaborative work on the success of active learners.

Learners in distance education have brought nuances to collaborative working arrangements. Bruno De Lièvre and his colleague [12] have highlighted the fact that learners value and consider collaborative work to be beneficial. This nuance was found during the content analysis done in some forums, and has an impact on the behavior of the learner.

The study covered all structured forums. Learners work in the first two sequences, without any forum structure being provided to them. The relevance of their interactions in unstructured forums was also considered and their ability to build an organization that suited them was trusted. The learners' perceptions of the effectiveness of collaborative work, in SGOL sequence 3, where the forum is well organized according to the learning scenario, was found. It is clear that the structuring facilitates the use of the forum and its effectiveness for distance learning.

B. Tutorial intervention to help learners collaborate

In the same way, the tutorial intervention has an important place in the good realization of an open and remote training. In tutorial resolution # 8 of Jacques Rodet in April 2018, he spoke about collaboration, in other words helping learners to collaborate. "The remote tutor must intervene with groups of learners. It is not up to him to play the role of team leader but rather to help learners, both collectively and individually, so that learners can achieve their goals of activities and training as well as a real autonomy of operation. Its interventions are based on the collaboration of learners whose main phases are as follows: the learners' involvement to the team, the team production and the evaluation of their team's activities".

In this case, learners must get involve in the team, produce as a team, and evaluate the activities of their team.

Productivity is related to accomplishing tasks and achieving goals. Tutorial interventions help learners to collaborate. They are thus very diverse and marked by the different phases of the collaboration. Actions' learners help learners to accomplish their tasks and achieve their goals by keeping their collaboration alive.

In problem-based and project-based learning, according to Caroline Verzat and her colleagues [13], effective learning is inseparable from true collaboration among students. The tutor's role is often to facilitate collaboration, to create a space for socio-cognitive conflict between students and to be able to facilitate learning as part of a dynamic group of students.

VI. CONCLUSION

It can be concluded that the behavior of a learner in front of the discussion forum does not have a direct effect on his cognition; and then the domination of collaboration is highlighted on the acquisition of knowledge in open and distance learning. Motivation is also an important factor for perseverance in training, and in the end, communication is also necessary to

have success. The dynamism in the collaboration implies a strong interaction within the group, thus resulting in the effective production for the achievement of the common objective, and obviously improves the educational results.

REFERENCES

- [1] M. Rakotomalala, L. Zakariasy, L. A. Rafanomezantsoa, N. F. Leaby, « *Organisation du tutorat, une stratégie pour l'efficacité du dispositif de formation à distance* », Colloque international sur les TIC. 27-29 juin 2012, Antananarivo Madagascar, 2012.
- [2] M. Rakotomalala, T. B. Ravaliminoarimalalason, F. Randimbindrainibe, « *Models for Measuring Latent Variables in Asynchronous Learning* », ESRSA, International Journal of Engineering Research & Technology, Vol. 7 Issue 04, pp 146-150, April-2018.
- [3] J.F. Hair, B. Black, Babin B., R.E. Anderson, R.L. Tatham, « *Multivariate data analysis* », Pearson Prentice-Hall, 7ème ed, 928 pages, 2009.
- [4] B. Albero, « *L'autoformation dans les dispositifs de FOAD : instrumenter le développement de l'autonomie dans les apprentissages* », in Saleh I, Lepage D. et Bouyahi S. (dir.), Les TIC au coeur de l'enseignement supérieur, Laboratoire Paragraphe, Université Paris 8, novembre 2002
- [5] M. Linard, « *Conception de dispositifs et changement de paradigme en formation* », Education Permanente n° 152, 2002
- [6] J. M. Dutrénit, « *La compétence sociale, diagnostic et Développement* », L'Harmattan, Paris, 1997
- [7] A. Dix, D. Ramduny-Ellis, & J. Wilkinson., « *Trigger analysis – understanding broken tasks* ». In : D. Diaper & N. Stanton (Eds.), « *The Handbook of Task Analysis for Human-Computer Interaction* ». Mahwah : Erlbaum 2004.
- [8] P. Dillenbourg, « *What do you mean by collaborative learning?* » In : P. Dillenbourg (Ed). *Collaborative –learning : Cognitive and Computational Approaches*. pp. 1 - 19. Oxford, Elsevier, 1996.
- [9] R. Nachmias, D. Mioduser, A. Oren, & J. Ram, « *Web-supported emergent-collaboration in higher education courses* ». *Educational Technology & Society*, 3(3), pp. 94 -104, 2000.
- [10] M.J. Baker, « *Forms of cooperation in dyadic problem-solving*. *Revue d'Intelligence Artificielle* », 16, 4 - 5, pp. 587 - 620. 2002.
- [11] B. De Lièvre, C. Depover, A. Strebelle, « *Les avis individuels sont-ils pris en compte lors d'une activité collaborative à distance ?* », In : P. Tchounikine, M. Joab, L. Trouche (Eds). « *Environnements informatiques pour l'apprentissage humain* », 2005, pp. 93-104. Montpellier, France, 2005.
- [12] B. De Lièvre, G. Temperman. « *Trois modalités de structuration d'un forum collaboratif : comment les étudiants les jugent-il ?* » *Journées communication et apprentissage instrumentées en réseau 2008*, 987-2-74622138-3. <halshs-01112579>, 2008.
- [13] C. Verzat, N. O'Shea et B. Rautent, « *Réguler le leadership dans les groupes d'étudiants en APP* », *Revue internationale de pédagogie de l'enseignement supérieur* pp. 31-1 | 2015

Models for Measuring Latent Variables in Asynchronous Learning

Mirisoa Rakotomalala,
Ph d School in Sciences and Technical Engineering and
Innovation,
University of Antananarivo,
Antananarivo, Madagascar

Toky Basilide Ravaliminoarimalalason,
Ph d School in Sciences and Technical Engineering and
Innovation,
University of Antananarivo,
Antananarivo, Madagascar

Falimanana Randimbindraine,
Phd School in Sciences and Technical Engineering and Innovation,
University of Antananarivo,
Antananarivo, Madagascar

Abstract— Digital technology is currently an important part of many areas of our lives, our society and our culture. This study was conducted in the context of this digital culture, specifically regarding asynchronous learning in open and distance learning. The traces of the activities of learners on the platform were identified and used to measure the direct and indirect effects of learners' engagement and behavior, as latent variables, on their cognition. The results gave two models of measurement of these two latent variables according to the concept of structural equations of research.

Keywords— Models for measuring, commitment, behavior, learning, asynchronous ;

I. INTRODUCTION

In Open and Distance learning (ODL), the community is formed by a group of learners, gathered for a training activity, to address a concern about a task whose product will be evaluated.

This study is relevant to the analysis of these forums and attempts to propose a structural conceptual equation model, in order to examine the relationship between the learner's attitude and his commitment to his asynchronous learning.

II. ASYNCHRONOUS LEARNING IN ODL

A. Definitions

If distance learning has been around for decades, ODL is a form of education that emerged in the 1990s and overcame the constraints of place and time by relying on digital technologies. By definition, an ODL is a system:

- which is organized, finalized, and recognized as such by the actors;
- which takes the singularity of people in their individual and collective dimensions into account;
- which relies on complementary and plural learning situations in terms of time, place, human and technological pedagogical mediations, and resources.

Distance learning is defined as a mediated training [1]. It uses technological artifacts and media devices.

In this paper, these systems rely on the use of a Moodle platform. This platform has been designed to support a socio-constructivist training framework and integrates tools and

learning activities focused on synchronous and asynchronous communications. In addition, with Moodle, learners are at the center of the training.

The forum is a communication tool and an asynchronous collaboration tool in training. This tool has many advantages. It is a tool adapted to the Malagasy context given the poor quality of Internet connection in different regions of Madagascar and especially the presence of load shedding that prevents the synchronous meetings scheduled during the training. This tool is also favorable for collaborative work; it is accessible to everyone, at all time. The tutor is a resource person who helps the learners to solve technical problems or redirects them to the person in charge, answers their questions and takes the role of an animator in a collaborative work if necessary. In a forum, each learner can ask any educational question (course, activity, evaluation) or organizational question (schedule, group appointment), and everyone can answer any questions without waiting for the intervention of the tutor.

B. Asynchronous learning approach in distance learning

Learning consists of acquiring new knowledge, storing it in memory, organizing it and developing automatism. Learning is thus perceived as an individual mental activity based on information to be processed [02]. In 2003, Entwistle identified the different learning approaches among students and favored those that would improve the quality of learning [03]. Those are the in-depth learning approach, indicating the intention to understand oneself, the metacognitive approach that assumes one can step back from one's ways of studying, and the organization of studies to manage time efficiently and work hard. These approaches are related to the student's commitment to training, as well as his motivation and performance.

In the asynchronous training type, the exchange with other learners or with the tutors is carried out via modes of communication that do not require a simultaneous connection. These can be discussion forums or even the exchange of e-mails. Moreover, this mode of training is often based on self-directed learning, with courses, exercises and self-assessments involving a certain autonomy of the learner. Online training in an asynchronous environment means that all the responsibility for learning lies with the learners.

As a learner-centered method, asynchronous learning gives students full responsibility for their online learning experience.

Asynchronous learning requires that the learner be focused, determined and have good time management skills. Successful asynchronous learning requires learners' commitment, motivation and rigorous discipline.

III. METHODOLOGIES

A. Methodology used

Structural equation models have been useful in tackling many of the fundamental problems and have contributed to the evolution of theory in the social and behavioral sciences, psychology and education, and so on. [04]. These methods make it possible to simultaneously test the existence of causal relationships between several explanatory latent variables and several variables to be explained [05].

A manifest variable is a variable for which a measure can be directly collected (observed, measured, etc.). The dominant paradigm in test theory was that represented by Churchill [06], who considers that manifest variables are all supposed to represent their latent variables. In this sense, it is postulated that all the indicators agree in their way of measuring the phenomenon, and all allow the reflection of the same variable. Consequently, it is obligatory to ensure the significance of the latent variable constructed on the basis of these indicators, which must be significantly correlated.

A well-constructed latent variable is a variable whose variation must be accompanied as closely as possible by the variation of all the indicators that compose it.

The traces of learners' activities in the training platform are used to measure the direct and indirect effects of the learners' commitments and their behaviors in the discussion forum on their cognitions, which translate into their pedagogical results.

In this case, the indicators are a reflection of the latent variable which remains the cause of the indicators, and where each indicator is linked to the latent variable by a simple regression equation of the following type:

$$X_i = \lambda_i \xi_1 + \delta_i \tag{1}$$

With: ξ_1 : latent construct, X_i : indicators, λ_i : coefficient representing the effect of the construct on the indicator (loading); and δ_i : measurement error.

B. Model of structural equations

According to Bollen and Long [07] and Schumacker and Lomax [08], the specification, identification, estimation, evaluation and respecification of the model represent the most commonly accepted steps in structural equations modelling.

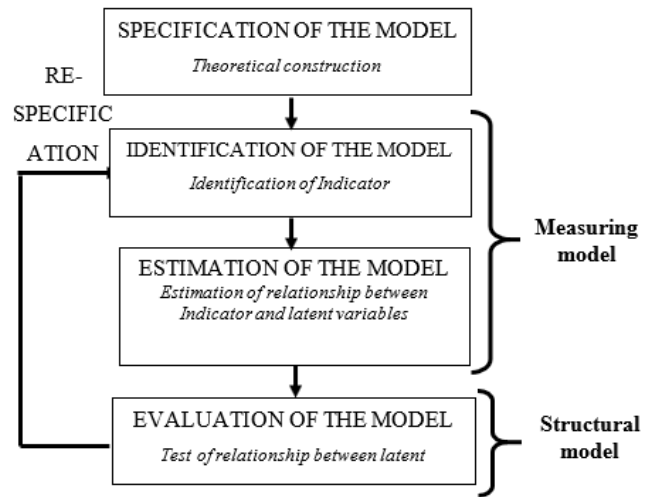


Fig. 1. Steps of structural equations modelling

The specification of the model leads to the design of a "linear relationship schema" that translates into measurement models and structure models. [10]

The identification makes it possible to assign a single solution for each parameter to be estimated. A model leads to express the variance/covariance matrix of the manifest variables Σ as a function of a set of parameters θ . This model is identified if $\Sigma(\theta) = \Sigma(\theta')$ implies $\theta = \theta'$. In practice, the identification of a model supposes the satisfaction of two conditions, namely the condition of order (necessary condition) and the condition of rank (necessary and sufficient condition).

The order condition imperatively depends on the degree of freedom ddl [10] and refers to the correspondence between the parameters to be estimated and the number of variances/covariances of the observed variables [11]. The degree of freedom is expressed in the following way [08]:

$$ddl = \left(P \frac{P + 1}{2} \right) - N \tag{2}$$

With: P is the number of measurement indicators of the model, N: the number of coefficients of the model to estimate and ddl is the degree of freedom.

Therefore, three situations are possible: sub-identification ($ddl < 0$), fair identification ($ddl = 0$) and over-identification of the model ($ddl > 0$). According to these three situations, the order condition is verified when the model is just identified or over-identified ($ddl \geq 0$).

Moreover, the rank condition makes it possible to have a single solution with respect to each of the parameters to be estimated.

The estimation consists of determining the values relative to the various parameters of the model to be tested. ML (Maximum Likelihood) and GLS (Generalized Least Squares)

estimation techniques are the most commonly used methods for estimating a model since they are included in most data processing software [08] [09]. The expression of the Maximum Likelihood method is as follows:

$$F_{ML} = \text{tr}(S \cdot \hat{\Sigma}^{-1}) - p + \ln |\hat{\Sigma}| - \ln |S| \quad (3)$$

If θ is a free parameter vector estimated by the model, we can write the relation 3.03 as follows:

$$F_{ML}(\theta) = \text{tr}(S \cdot \Sigma^{-1}(\theta)) - p + \ln |\Sigma(\theta)| - \ln |S| \quad (4)$$

With: S: the observed variance-covariance matrix, ln: the natural logarithmic function, tr(): The trace function of a matrix, Σ : the estimated variances/covariances matrix, p: the number of measured or observed variables, and |S|: Determinant of a matrix S.

For the evaluation of the model, its quality can be appreciated through the evaluation of a set of adjustment indices. There are several indices of adjustment that fall into three categories namely absolute indices, incremental indices and parsimony indices.

Absolute indices are qualified as classical indices [09]. They examine the level of correspondence between the proposed model and the observed data [08]. Incremental indices are used to evaluate the contribution of the model studied to a restrictive model, i.e. a comparison between the estimated model and the reference model with zero correlation between the observed data [10]. The parsimony indices control the overestimation of the model. They determine the necessary number of parameters to estimate to reach the specific adjustment level [08]. The goal is to achieve a better mix between maximizing the fit and minimizing the number of estimated coefficients [10].

The respecification of the model represents a phase of reflection that offers the opportunity to reconsider the design of the model and propose possible modifications, taking into account the theoretical framework of the research in question [10]. (Ex: adding or deleting parameters, setting or modifying constraints, etc.)

In terms of the presentation of the results, the latter must incorporate relevant and precise information, making it easy to find solutions to the problems likely to be encountered in the analysis.

IV. RESULTS AND DISCUSSION

The results are divided into two parts. The first part is about the analysis of asynchronous learning activities in the discussion forum in which an introductory module was mobilized. Then, a conceptual model of structural equations of the research will be proposed, and the different stages will be implemented in order to leave the two models of validated measurements from SEM. R is used for statistical processing of data.

A. Analysis of the activity

The goal is to analyze asynchronous learning in a distance education. The analysis preferentially focuses on the learners' forum. The discussion takes place on the platform in an introductory module (GEAL) at the beginning of the training. Learners interact with one another or with the tutor. Three open

and distance courses are involved. The learner needs an internet connection to access and work on the platform.

1) Indicators of the learner's behavior :

The traces of the activities of the participants in an online training can be transformed to represent a measure of behavioral engagement [12], which has considerable implications for how they are organized and simplified to fit well with theoretical constructs. In a current research initiative, the learner's attitude towards a discussion forum was modeled as a continuum of participation in the various interventions available on discussion forums.

From a trace analysis point of view, a preliminary quantitative approach to the more specific statistical study is needed. Participation in number of interventions: consulting forums, consulting discussions, adding or updating a message to an ongoing discussion, and creating new topics are indicators taken into account. All of these indicators characterize the behavior of the learner in a discussion forum.

2) Indicators of the learner's commitment :

The engagement of the learner is measured by the regularity of their participation to the forum, their feeling towards the discussion forum, the completion of the activities from the platform in spite of the existing constraints, and the dedication to stay active in asynchronous learning [13]. In this study, the models explore the different communicational, motivational, and socio-cognitive dimensions of engagement in distance learning contexts. These three dimensions are in continuous and reciprocal interaction according to variable and contingent importance to activities. The qualitative analysis carried out on the contents of the discussion forum gave the indicators to measure, according to the three dimensions above regarding the engagement of the learner. Thus, the collection and analysis of traces of the main activities are based on the messages. These are classified according to the communication message, the motivation indicator and the interaction for collaboration. These three classes constitute the learner's engagement in a discussion forum.

B. Modeling by structural equations

The conceptual model of research presents the different causal links between theoretical constructs and shows that asynchronous learning could play a mediating role in the relationship between learner's engagement and the exploitation of the discussion forum. The causal model consists of two measurement models and structural models. It encompasses the set of independent observable variables (X_i), dependent observable variables (Y_i), an explanatory latent variable (E), two latent variables to be explained (A) and (C), and error terms (ϵ_i , δ , β and γ_i). Therefore, it is possible to distinguish two types of equations namely the equations of the measurement model and the equations of the structure model.

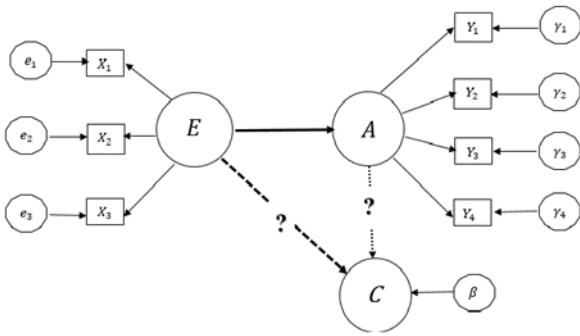


Fig. 2. The research conceptual model

C. Measurement models

Two structural equation measurement models were developed: the learner's attitude in asynchronous learning, and their commitment to distance learning.

These models will be applied to real data from an ODL of Antananarivo IST. These are asynchronous activity traces of 4804 events of 13 learners for 19 days from October 20th and November 07th, 2016.

1) The model for measuring the attitude of the learner

a) First model specification

The latent variable A measurement model: learner attitude towards the discussion forum, can be illustrated by the following equations:

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= \alpha_1 A + \gamma_1 \\
 Y_2 &= \alpha_2 A + \gamma_2 \\
 Y_3 &= \alpha_3 A + \gamma_3 \\
 Y_4 &= \alpha_4 A + \gamma_4
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

They can be written in the matrix form: $Y = \alpha A + \gamma$ and form a linear regression.

The covariance matrix between the four variables shows that there are negative covariances between the two variables "Creat_D" and "consu_D".

For Model Estimation, the maximum likelihood estimation was used. The model converges only after 7959 iterations, with a test on a sample of 13 observations.

The degree of freedom $ddl = p(p + 1) / 2 - N$, with $p = 4$ and $N = 6$, is equal to 2, which is verified by the "Degrees of freedom" indicates over-identification of the model.

It is noted that the error on the variable Creat_D is -1112.53 (negative variance) which defines a reason of respecification of the model.

The log likelihood (logl): -164.987 indicates that the model has no likelihood relative to the actual data.

b) Respecification of the model

The two variables "Send_M" and "Creat_D" express the learner's participation in the discussion forum; they will be merged (Envoi_M_2). As a result, there are only three observed variables instead of four as previously seen. The

previous steps were implemented with the same data but with this new model.

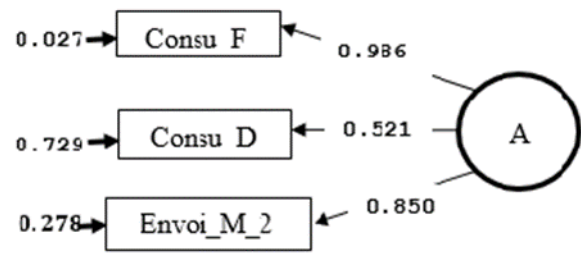


Fig. 3. Measurement model of latent variable A with estimated parameters

The degree of freedom $ddl = p(p + 1) / 2 - N$ becomes zero. The model is just identified. As far as the evaluation of the model is concerned, the minimum of the estimate function (fmin) is equal to 0, indicating that it is a good model compared to the previous model which has $fmin = 0.677$.

The log likelihood (logl) of the respecified model is -144.312 which is better than that of the initial model -164.987.

The χ^2 (chisq) of the model is equal to 0. There is no presumption against the null hypothesis. The actual data do not have much conformity with the underlying statistical model, this may be due to their distribution.

The degree of freedom of the model (df) is 0, as calculated manually. Six parameters (npar) of the model were estimated.

This respecified model can be validated with respect to the first. The chi-square does not prevent this validation, the value of p should never be used to validate a hypothesis from data since it is the opposite that is calculated.

2) The model of measurement of the latent variable E

The learner's engagement measurement model can be translated into the following equations:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \lambda_1 E + e_1 \\
 X_2 &= \lambda_2 E + e_2 \\
 X_3 &= \lambda_3 E + e_3
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

They can be written in the matrix form: $X = \lambda E + e$ which forms a linear regression.

By reviewing the different steps of the learner's engagement measurement model including model specification and model estimation, the following model was obtained:

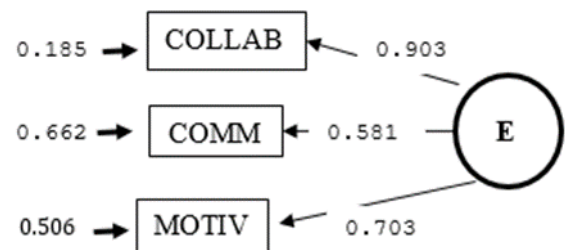


Fig. 4. Measurement model of latent variable E with estimated parameters

The degree of freedom is still zero. Thus, the model is also fair identified.

Validation of the model

```
> fitmeasures(donnees3.fit,  
fit.measures=c("fmin", "logl",  
"chisq", "df", "npar"))  
  
fmin    logl    chisq    df    npar  
0.00 -61.47    0.00    0.00    6.00
```

The minimum of the estimation function (fmin) is equal to 0. The log likelihood (logl) is -61.47. An exact likelihood for a null value of this log likelihood is noted, and this value is approached little by little.

logl = -144.312 for the attitude model.

The χ^2 (chisq) is still 0.

The estimated parameter number (npar) of the model is 6. These data give the idea of also validating the model described.

V. CONCLUSION

The interactions between students in distance education aim at deep learning and have been reinforced by a teaching method in collaborative learning. The participation in exchanges within the platform, the richness and the quality of the interactions between learners are recognized like factors that are beneficial to the engagement, the satisfaction and the success of the learners in distance learning.

Still, participation in a discussion forum, reading other learners' interventions, and peer interaction create a sense of belonging to a group. This commitment is considered a latent variable and was measured by a measurement model in a structural equation.

To conclude, two validated measurement models were obtained. The structural modeling of asynchronous learning by manipulating the two models with the real data in three open and remote trainings will allow the validation of the causal relationships between the pedagogical result, the commitment

and the attitude of the student facing the discussion forum. The knowledge development effect via the discussion forum will be strongly demonstrated. In other words, engaged, motivated and collaborating distance learners develop their knowledge and skills on an ongoing basis. The impact of forum exploitation on the acquisition of knowledge will be demonstrated empirically.

REFERENCES

- [1] D. Peraya, "La formation à distance : un dispositif de formation et de communication médiatisée. Une approche des processus de médiatisation et de médiation." TICE et développement », n°1, 2005.
- [2] M. Fayol, et D. Gaonac'h, " Le développement de la mémoire ", in A. Blaye, et P. Lemaire, (Edit.) Psychologie du développement cognitif de l'enfant. Paris-Bruxelles : De Boeck Université, 2007, pp. 125-156.
- [3] N. Entwistle, "Concepts and conceptual frameworks underpinning the ETL Project", Edinburgh, School of Education, University of Edinburgh, 2003.
- [4] K. G. Jöreskog, D. Sörbom, "Recent developments in structural equation modeling". Journal of Marketing Research, 19, pp 404-416, 1982.
- [5] Lacroux, « L'analyse des modèles de relations structurelles par la méthode PLS : une approche émergente dans la recherche quantitative en GRH », XXème congrès de l'AGRH, Toulouse, 2010.
- [6] G. A. Churchill, « A paradigm for developing better Measures of marketing constructs », Journal of Marketing Research, vol. 16, pp 64-73, Feb 1979.
- [7] K.A. Bollen, J.S. Long, « Testing structural equation models ». Newbury Park, CA: Sage, 1993.
- [8] R.E. Schumaker, R.G. Lomax, « A beginner's guide to structural equation modelling », Lawrence Erlbaum Associates, 2ème édition, London, 2004.
- [9] L. Chaput, « Modèles contemporains en gestion », Presses de l'Université du Québec, 2006.
- [10] P. Roussel, F. Durrieu, E. Campoy, A. El Akremi, « Méthodes d'équations structurelles : Recherches et applications en gestion », Edition Economica, Paris, 2002.
- [11] R.H. Hoyle, « Structural equation modelling: Concepts issues and applications », Edition Sage, London, 1995.
- [12] B. Poellhuber, N. Roy et I. Bouchoucha, « Relations entre la motivation, l'engagement cognitif et la persévérance dans un MOOC francophone (EDULIB) », Communication au colloque de l'AIPU, Mons, 2014.
- [13] K. DE WULF, G. ODEKERKEN-SCHRÖDER, "Assessing the impact of a retailer's relationship efforts on consumer's attitudes and behavior", Journal of Retailing and Consumer Services, 10, 2, pp. 95 – 108, 2003.

Abstract

Resources in a queuing network are often rare and expensive. Sharing them to customers of the network is a hard problem and impacts a lot the performances of the system. We present in this paper a new optimal and feasible method to share these resources based on the result of the game theory. We use of the theory of bargaining game and repeated stochastic game to find an optimal consensus for resources sharing based on customer aspirations. Our model, which we call "myopic model", proposes a system of myopic players who don't project future payoffs of the game, and which is a rather dynamic model depending on the evolution of customer aspirations over the time. Simulations of our hypothesis were performed by analyzing performances of our system compared to First-In First-Out queue, standard Processor Sharing model, and one using Kalai-Smorodinsky bargaining solution. The results have allowed us to appreciate ours, mostly in an instability phenomenon, and to propose a variety of applications, mainly in any system with shared resources, such as distributed systems, centralized systems as cloud computing, Search Engine Optimization algorithms, ...

Index terms : Game theory, Network, Queue, Resource, Sharing

I. Introduction

A processor sharing queue is a particular one where the word queue is a misnomer. All existing customers ahead the servers are immediately served with a part of its available resource. Each of them leaves the queue to move to another one after receiving service he has requested from server, whence concept of queuing network comes.

Contribution we provide in this paper is how to share server resources between those customers. Our method is based on the game theory, especially a model of myopic players which optimize only their current gain.

II. Model of customers and queuing network

A. Principle

On a given queue, customers arrive and others leave. Each customer needs a total of resource b_i to fulfill his requirement that he asked to server. In the following, we put that these resources are sampled and shareable in order to work in the discrete domain. At the beginning of each time interval t , each player i sends his strategy s_i^t for the bargaining of the resource C of the server. We restrict to a finite countable strategies set S_i . The server will evaluate these proposals to compute the resources c_i^t that he will assign to the players. Each resource c_i^t has a price p_i^t that the server sends with the resource to the player. Once received, each resource will be used by each player and they will calculate their gains. They also assess the remains of their respective requirement function of the consumed resources. We precise that the player requirement at the beginning of time t was assessed at the end of time $t - 1$ after using the resource c_i^{t-1} allocated at this time.

As we consider the mobility of the players, each of them will decide from his requirement whether he will stay in his current queue, or move to the next queue. Initially, when the customer i arrives in a queue, the first requirement is noted b_i^0 . Over time, depending on the allocated resources, that requirement becomes b_i^t as :

$$b_i^t = b_i^{t-1} - c_i^{t-1} \tag{1}$$

The decision of the customer is determined by (12).

$$dec(b_i^t) = \begin{cases} stay & \text{if } b_i^t > 0 \\ move & \text{if } b_i^t \leq 0 \end{cases} \tag{2}$$

This principle is illustrated on figure 1.

B. The game formulation

Let's model these actions and movements by a stochastic game. This is a stochastic game between N^t players. The number of players N^t varies over time as players arrive to or depart from the queue according to their requirements. At time t , for player i , the local state of the game is defined by the requirement b_i^t . By its finite cardinal, let's note B_i the set of possible requirements of player i . For player i , let's put s_i^t the strategy that he proposes to the server. The set of possible proposals, noted $S_i = \{s_i^t\}$, is also the set of possible strategies for that player.

Let $g_i^t : B_i \times S_1 \times \dots \times S_{N^t} \rightarrow \mathbb{R}$ be a function gain for the player, function of the local state b_i^t and the joint strategies $s^t = (s_1^t, \dots, s_{N^t}^t)$. We evaluate this gain from the allocated resources, which are themselves based on price proposals s^t done by all players.

The transition model between local states is defined by the function $T_i^t : B_i \times S_1 \times \dots \times S_{N^t} \times B_i \rightarrow [0,1]$ (3) :

$$\sum_{b_i^{t+1} \in B_i} T_i(b_i^t, s^t, b_i^{t+1}) = 1 \quad (3)$$

Since the requirements (local states) b_i^{t+1} and b_i^t are dependent, and are also function of the joint strategy s^t , we can say that this function can be well defined. We will further evaluate this transition function. From these data, it is possible to model the actions and movements of the players with a stochastic game defined by the quintuplet $(N^t, (B_i), (S_i), (g_i), (T_i))$.

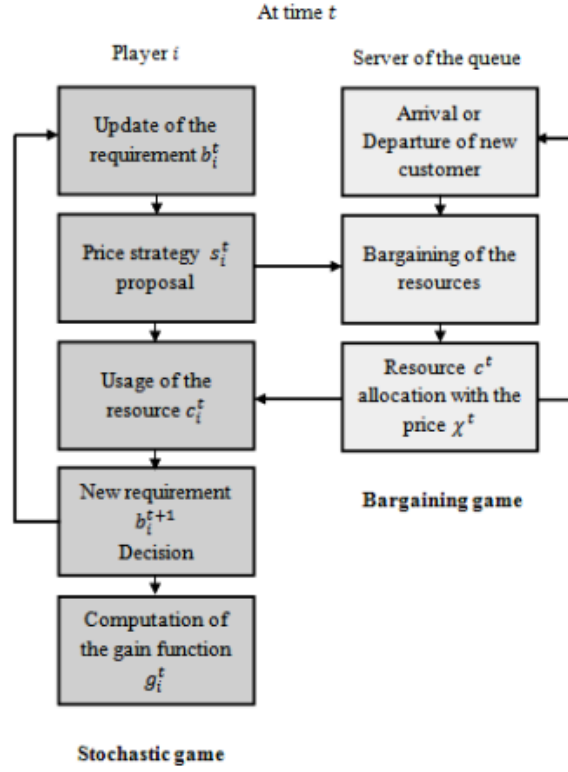


Figure 1. Games at time t

C. Bargaining of the resource of the server

Given a resource C of the server, it will be bargained through the customers of the queue, here called as players. At time t , each player must maximize his gain on the possible proposals set P_i as shown on (4).

$$g_i^t(p_i^t, \mu^t) = u_i\left(\frac{p_i^t}{\mu^t}\right) - p_i^t \quad (4)$$

On (4), the function $u_i(c_i^t)$ is the utility function of player i regarding the resource c_i^t that the server has allocated after the bargaining computation. This function must be concave as described on paragraph II. And to better assess the allocated resource, it is necessary that this utility function u_i is also function of the requirement b_i^t . We can use, for example, a logarithmic or quadratic valuation given in (5) and (6).

$$u_i(c_i^t, b_i^t) = A \frac{\log(c_i^t)}{\log(b_i^t)}, \quad u_i(c_i^t, b_i^t) = A - B \left(\frac{c_i^t}{b_i^t}\right)^2 \quad (5), (6)$$

where A and B are arbitrary positive constants. The proof of the concavity of these functions comes from the negativity of their second derivatives.

Players send to server their proposals $p^t = (p_1^t, \dots, p_{N^t}^t) \in \mathbb{R}^{N^t}$. Once received by the server, it computes the resource to allocate $c^t = (c_1^t, \dots, c_{N^t}^t)$. On (4), the price μ^t is not yet known beforehand, so the players are not able to compute the optimal proposal p_i^t . The function gain that he must maximize is defined by (7) assuming that $\sum_{j \neq i} p_j^t$ is constant.

$$g_i^t(p_i^t) = u_i\left(\frac{p_i^t}{\sum_j p_j^t} C\right) - p_i^t \quad (7)$$

By cancelling the derivative with respect to p_i^t :

$$(g_i^t)' = u_i'\left(\frac{p_i^t}{\sum_j p_j^t} C\right) \cdot \left(1 - \frac{p_i^t}{\sum_j p_j^t}\right) \cdot C - 1 = 0 \quad (8)$$

Let's note $d_i^t = \frac{p_i^t}{\sum_j p_j^t} C$. So, we have :

$$u'_i(d_i^t) \cdot \left(1 - \frac{d_i^t}{C}\right) = \frac{1}{C} \quad (9)$$

Let's call d_i^t the strategy of player i , that he sends to server at time t . This strategy will be assessed from (9) independently of the other players. So, once the joint strategy $s^t = (d_1^t, \dots, d_{N^t}^t)$ is received by the server, it computes the bargaining. As $d_i^t = \frac{p_i^t}{\mu^t}$, the price p_i^t to perform this computation can be derived (by the server) from the strategy d_i^t sent by the player i with some factor μ^t (the elementary price of resource) that he enforces.

D. Study of stochastic game of player i

1. Model of state transition

Player i plays a stochastic game defined by a quintuplet $(N^t, (B_i), (S_i), (g_i), (T_i))$. To model the dynamism of player i at time t , we defined his local state as his requirement b_i^t . The state change process is very clear after using the resource c_i^t allocated by the server. The transition from the state b_i^t to another state b_i^{t+1} means that the allocated resource at time t is equal to $b_i^{t+1} - b_i^t$:

$$b_i^{t+1} = b_i^t - c_i^t \quad (10)$$

The probability of transition from the state b_i^t to another state b_i^{t+1} can be assessed as the probability that the allocated resource at time t is $b_i^{t+1} - b_i^t = c_i^t$. The model $T_i^t : B_i \times S_1 \times \dots \times S_{N^t} \times B_i \rightarrow [0,1]$ of the state transition is expressed by (11).

$$T_i(b_i^t, s^t, b_i^{t+1}) = \begin{cases} 1 & \text{if } b_i^t - b_i^{t+1} = C \frac{d_i^t}{\sum_j d_j^t} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (11)$$

Where joint strategy of all players is $s^t = (d_1^t, \dots, d_{N^t}^t)$, and $C \frac{d_i^t}{\sum_j d_j^t}$ means the allocated resource to player i at time t . The gain owned by that player at this time is expressed by (12).

$$g_i^t(d_i^t) = u_i(d_i^t) - \mu^t d_i^t \quad (12)$$

2. Impact of game history and its future

As we are faced to a repeated game, players can use history of the game to bargain the resource of the server. Let $h^t = \{b^1, d^1, \mu^1, \dots, b^{t-1}, d^{t-1}, \mu^{t-1}, b^t\} \in H^t$ where b^t indicates the requirements at time t , d^t the proposals sent to the server at this time, μ^t the elementary price enforced by the server, and H^t the set of possible history for this game. The game history that the player i can observe is called observation of player i that we denote o_i^t . This observation is limited because the player i is not able to observe some part of the history of his requirements, his proposals, and the elementary price sent by the server due to lack of memory. So, we have $o_i^t \subset h^t$. It is also required that player can observe his current state $b_i^t : b_i^t \in o_i^t$. Let's denote O_i^t the set of possible

observations up the time t for player i . Considering these observations, the player i can adjust his way of calculating his proposal at time t . Let's call it as policy of player i at time t , denoted π_i^t .differs from a simple strategy d_i^t by using the observations up the time t .

$$\begin{aligned} \pi_i^t : O_i^t &\rightarrow A_i \\ o_i^t &\mapsto a_i = \pi_i^t(o_i^t) \end{aligned} \quad (13)$$

In (13), A_i indicates the set of possible proposals. Equation (13) mentions that policies π_i^t are function of observation of player i at time t . So, the player i has to determine a policy which can ensure a best response. The better is to find a time-independent one that we call a stationary policy π_i , so as to be usable at any time by simply basing to observations. We can get it because the current requirement b_i^t depends only on the previous one b_i^{t-1} and the allocated resource at this time that is function of the proposal d_i^{t-1} as given by (11). In that case, the policy is markovian.

Let $\pi = (\pi_i, \pi_{-i})$ be the joint stationary policy. The gain $g_i^k(b_i^k, d_i^k)$ owned by the player i at step k is discounted by a factor δ^{k-t} at time t , and the total gain owned by this player at time t with the policy π is denoted as $G_i^t(b_i^t, \pi)$. This gain is expressed by the recurrent relation (14).

$$G_i^t(b_i^t, \pi) = g_i^t(b_i^t, d_i^t) + \delta \sum_{b_i^{t+1} \in B_i} T(b_i^{t+1} | b_i^t) \cdot G_i^{t+1}(b_i^{t+1}, \pi) \quad (14)$$

The policy π_i^* which ensures the best response for player i is given by (25).

$$\pi_i^*(\pi_{-i}) = \underset{\pi_i}{\text{Argmax}} G_i^t(b_i^t, (\pi_i, \pi_{-i})) \quad (15)$$

The problem is how player i can find this optimal policy π_i^* .

Equation (15) shows that the policy of player i ensuring the best response depends on other players policies, that is a function of other players states. Player i doesn't know other players states, so he doesn't able to compute his optimal policy. However, he can optimize only his immediate gain $g_i^t(b_i^t, d_i^t)$. The expected gain is therefore discounted by a factor $\delta = 0$. In that case, the proposal strategy d_i^t coincides with the optimal policy π_i^* . Let's call myopic policy this

policy which doesn't consider or ignore the impact of the future. The optimal policy is denoted π_i^m , which is a time independent function of a single variable, and depends only on the current state of player i .

3. Performances of the model

We can use two different measures to evaluate the performance of our model: the total gain (with discount) that each player must maximize, and the sojourn time that each player must minimize. The total gain owned at time t is given by (16).

$$G_i^t(b_i^t, \pi^m) = g_i^t(b_i^t, d_i^t) \quad (16)$$

Where the proposal d_i^t and the function $\pi^m(b_i^t)$ coincide.

If player i arrives to the queue at time t_i^i , the gain owned at a time t ($t \geq t_i^i$) is discounted by a factor $\delta^{t_i^i-t}$ during the calculation of the total gain. The player i will move from this queue at time t_i^f as (17).

$$t_i^f = \min\{b_i^t \geq 0, t > t_i^i\} \quad (17)$$

The sojourn time for player i is expected by (18).

$$t_i^s = t_i^f - t_i^i \quad (18)$$

The total gain for player i is expressed by (19).

$$G_i^T = \sum_{t=t_i^i}^{t_i^f} \delta^{t_i^i-t} G_i^t(b_i^t, \pi^m) = \sum_{t=t_i^i}^{t_i^f} \delta^{t_i^i-t} g_i^t(b_i^t, \pi^m) = \sum_{t=t_i^i}^{t_i^f} \delta^{t_i^i-t} (u_i(\pi^m) - \mu^t \pi^m) \quad (19)$$

We can also use the expected total gain to penalize the player in term of time, by making him able to own more gain if he doesn't stay longer on the queue. The expected total gain is expressed by (20).

$$\overline{G_i^T} = \frac{G_i^T}{t_i^f - t_i^i} = \frac{\sum_{t=t_i^i}^{t_i^f} \delta^{t_i^i-t} (u_i(\pi^m) - \mu^t \pi^m)}{t_i^f - t_i^i} \quad (20)$$

III. Simulation evaluation and analysis

To evaluate our model, we tried to implement our model on queuing networks who convey packets simulated on OPNET Modeler software. We compared the established model to other models to know his performance.

As described in Figure 2, simulations consist of FIFO (First in First Out) queue, Classic PS (Processor Sharing) queue, Processor sharing queue using the KSBS (Kalai-Smorodinsky Bargaining Solution) and Our myopic players model.

"Source" sends same packets to "Dest MYOP", "Dest KSBS", "Dest FIFO" and "Dest PS" through the queues. The links between these entities feel no packet propagation delay or propagation error.

Simulations are based on the following parameters:

- The inter-arrival of packets T (time between successive generations of packet at "Source") has an exponential distribution parameter $\lambda = 1$ second
- The μ packet sizes generated by "Source" as an exponential distribution with parameter 1024 bits.
- The processing capacity C of the server of each queue is fixed. This capacity, expressed in bits per second (bps), is identical for all four queues of the system.

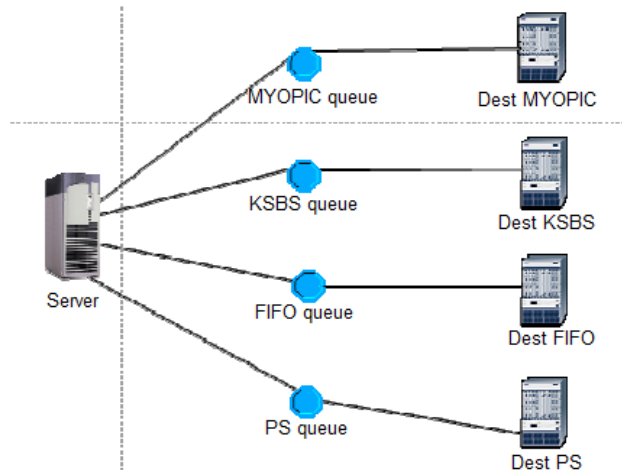


Figure 2. Simulation description

A. Stable system

Let's consider a stable system, where the capacity of server is greater than the load rate of the queue. We used $C = 1100$ bps for the simulation. During 10 minutes of simulation, we get the results below.

We find on Figure 3 similar properties of the PS queue and our MYOPIC queue. FIFO queue and the egalitarian solution have more packets queuing compared to PS and MYOPIC.

As in Figure 4, the average sojourn time is almost identical for PS queue and MYOPIC queue. There is a stable difference around 0.7 second between them, where the sojourn time for PS queue is greater than the one for MYOPIC queue.

In Figure 5, the system provides identical throughput. The number of packets per second which come out of each queue is almost the same after a long time of simulation.

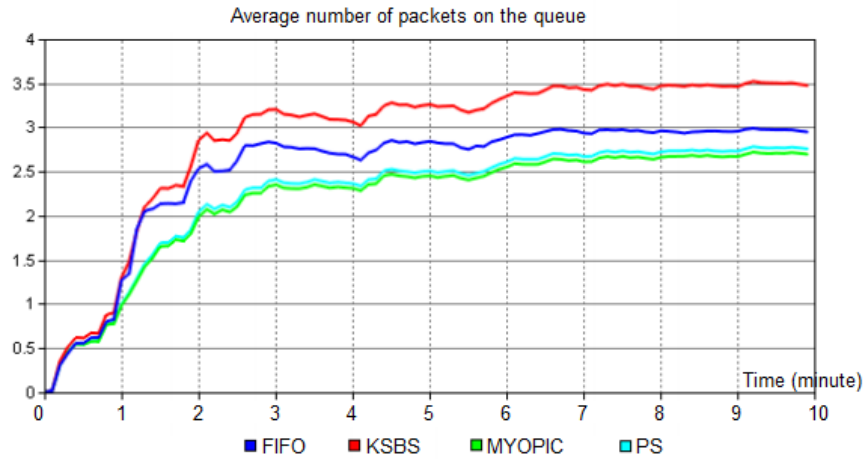


Figure 3. Evolution of the average number of packets on each queue on a stable system

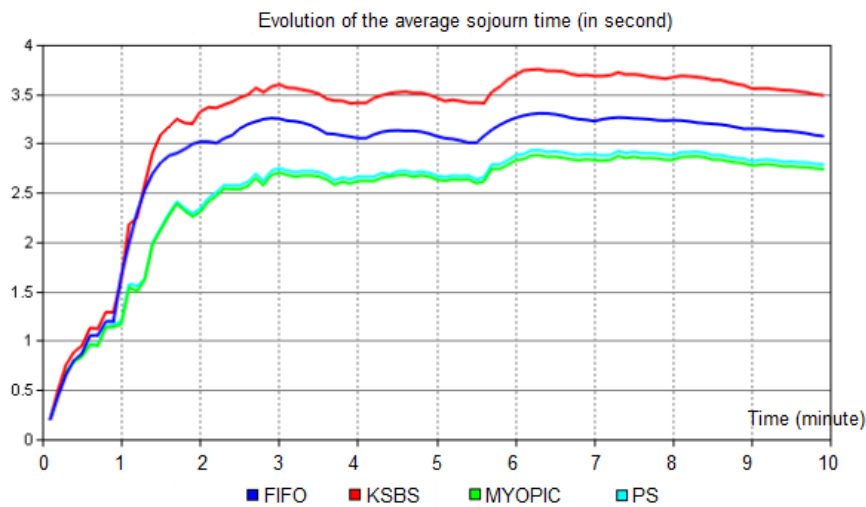


Figure 4. Evolution of the average sojourn time on each queue on a stable system

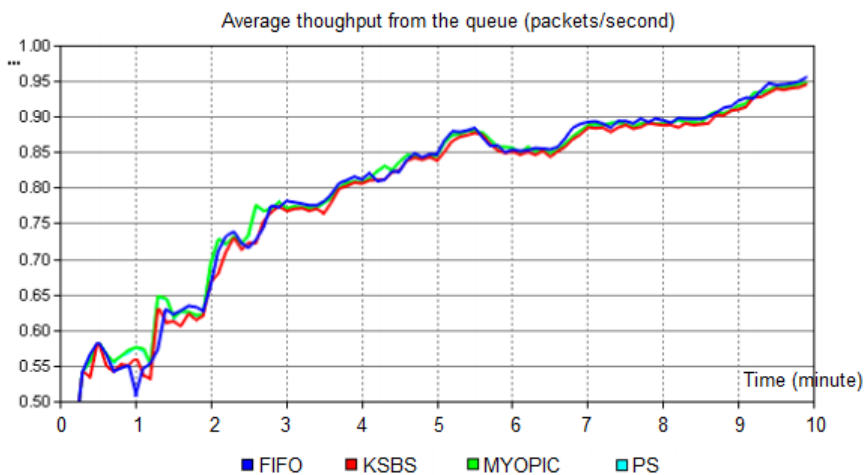


Figure 5. Evolution of the throughput from each queue on a stable system

B. Unstable system

Now, let's consider an unstable system, where the capacity of the server is lower than the load rate of the queue. For that, we used $C = 900$ bps. In Figure 6, at the 10th minute, we already find that the system is unstable; the number of packets on each queue is increasing but the lowest is shown by the MYOPIC queue. Contrary to a stable system, the difference between PS queue and MYOPIC queue performance is highlighted, the two curves diverge.

Till the 10th minute, we can read on Figure 6 that in average:

- 33.45 packets are found processed on the MYOPIC queue,
- 35.12 packets are found processed on the PS queue,
- 36.71 packets are found queuing on the FIFO queue,
- 41.64 packets are found queuing on the KSBS queue.

In term of average sojourn time, sojourn on a MYOPIC queue is lowest compared to the other scheduling method. We can interpret it as a low latency in practice.

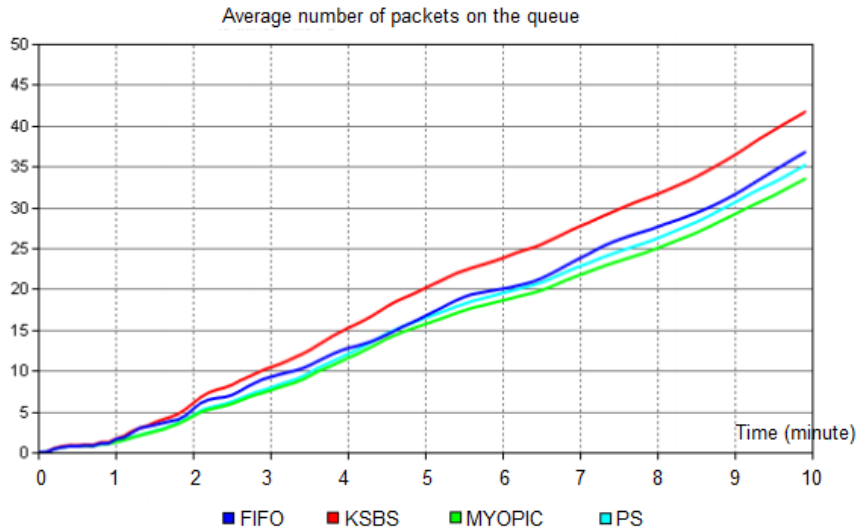


Figure 6. Evolution of the average number of packets on each queue on an unstable system

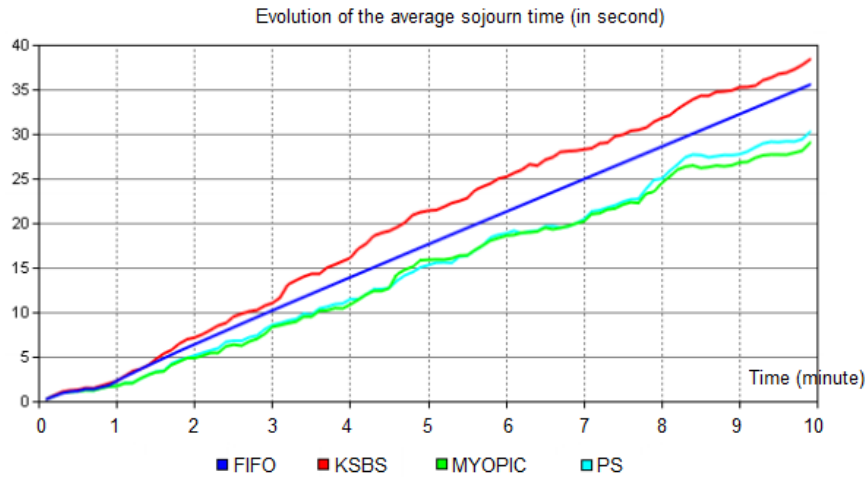


Figure 7. Evolution of the average sojourn time on each queue on an unstable system

Node name	Total
Dest FIFO	495
Dest KSBS	488
Dest MYOPIC	501
Dest PS	496
Source	507

Table 1. Number of packets at each destination at the end

Table 1 shows the number of packets received by each destination after the 10 minutes of simulation. It puts evidence the difference of the average throughput as in Figure 8.

Let's precise that the Source sends the same number of packets at the same time with a same distribution, but this big difference is due to the scheduling and processing on each queue.

We can say that our MYOPIC system can better manage the packets in case of instability compared to the classic PS queue (e.g: in case of temporary congestion).

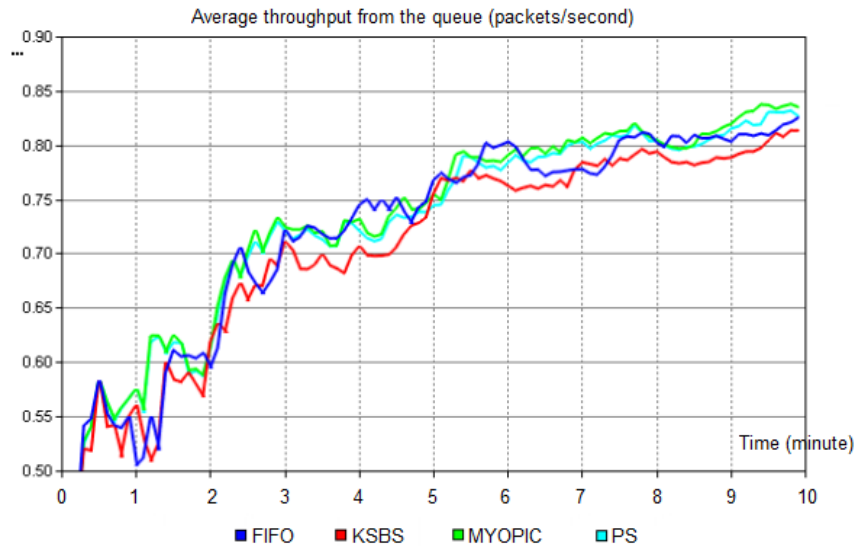


Figure 8. Evolution of the average throughput from each queue on an unstable system

IV. Conclusion

Our contribution consists of a new way to manage the resource of queue. Our methodology is based on a repeated stochastic bargaining game to share the resources of a queuing network. We introduced a new principle of a myopic player who doesn't optimize his future gain by the history of the game. The simulation shows the performance of our model which has a better scheduling during an instability period.

References

- [1] J.F. Nash, "The Bargaining Problem", *Econometrica*, vol. 18, 1950, pp. 155-162
- [2] T.B. Ravaliminoarimalalason, H.Z. Andriamanohisoa, F. Randimbindrainibe, "Modélisation de partage de ressources dans un réseau de files d'attente à processeur partagé par la théorie des jeux de marchandage. Résolution algorithmique.", *MADA-ETI*, vol. 2, 2014, pp 28-39,
- [3] R. Johari, "The price of anarchy and the design of scalable resource allocation mechanisms", *Algorithmic game theory*, Cambridge University Press, 2007, pp. 543-568
- [4] G.J. Mailath, L. Samuelson, *Repeated Games and Reputations : Long-run relationships*, Oxford University Press, 2006
- [5] J.-F. Mertens, S. Sorin, S. Zamir, "Repeated games", *Core D.P.* - Université Catholique de Louvain, 1994, pp. 20-22
- [6] D. Abreu, "Theory of Infinitely Repeated Games with Discounting", *Econometrica*, vol. 56, 1988, pp. 383-396
- [7] L.S. Shapley, "Stochastic games", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U. S. A.*, vol. 39, 1953, pp. 1095-1100
- [8] A. Neyman, S. Sorin, "Stochastic games and applications", *NATO Science Series*, Kluwer Academic Publishers, 2003
- [9] A.M. Fink, "Equilibrium in a stochastic n-person game", *Journal of Sciences of Hiroshima University*, vol.28, 1964, pp. 89-93
- [10] K.A. Chew, *Introduction to OPNET Modeler*, Center for Communication Systems Research, University of Surrey - Guildford - UK, 2002
- [11] T.B. Ravaliminoarimalalason, *Application de la théorie des jeux au partage des ressources d'un réseau de files d'attente*, Thèse de Doctorat, Université d'Antananarivo, Dec. 2016
- [12] E. Kalai, M. Smorodinsky, "Other Solutions to Nash's Bargaining Problem", *Econometrica*, vol. 43, 1975, pp. 513-518

Résumé

Cet article tient la possibilité d'application d'un modèle d'apprentissage asynchrone dans une formation en ligne. Ce modèle a été rendu disponible via l'approche par la relation linéaire d'une modélisation d'équation structurelle à variables latentes. L'analyse des traces d'interaction virtuelle et l'analyse de contenu des forums de discussion sur la plate-forme lors de la mise en œuvre de l'apprentissage du module d'entrée dans une FOAD complètent la méthodologie adoptée dans la recherche. L'acquisition de connaissance qui représente le résultat pédagogique de l'apprenant, a une relation directe avec son engagement communicationnel, motivationnel et surtout de son interaction dans le travail collaboratif. La recherche permet d'avoir une prévision du résultat des apprenants dans une formation en cours.

Mots clés : modèle, apprentissage asynchrone, module d'initiation, prévision, formation en ligne

1. Introduction

Le numérique ne cesse d'évoluer. Son usage est inévitable dans le domaine de l'éducation. En effet, les technologies de l'information et de la communication (TIC) offrent d'immenses possibilités pédagogiques pour l'appropriation du savoir. Conscients de l'enjeu des TIC pour le développement du système d'enseignement, plusieurs établissements utilisent la formation à distance comme système de développement du secteur de l'enseignement supérieur malgache.

Or, l'appropriation des méthodes et techniques de l'apprentissage à distance n'est pas évidente pour les étudiants qui ont l'habitude de travailler en présentiel. C'est une raison pour laquelle un module d'entrée intitulé « Guide de l'étudiant pour l'apprentissage en ligne » (GEAL) a été conçu et introduit dans des formations ouvertes et à distance. L'idée d'exploiter principalement cet instrument a été avancée. Le renforcement de l'apprentissage dans des dispositifs de FOAD est envisagé.

Aussi, un système d'apprentissage montre la stratégie d'apprentissage de l'institution de formation et les valeurs auxquelles elle se rattache en matière de support à l'apprentissage. Il permet d'identifier les moyens qui assurent l'apprentissage au sein d'un dispositif de formation à distance. Ainsi, définir une stratégie d'apprentissage dès le départ permet d'assurer le bon déroulement de la formation et d'avoir un résultat satisfaisant.

C'est dans ce cadre qu'une recherche a été menée et basée sur l'analyse de l'apprentissage dans ce module d'initiation. Le travail se concentre sur l'application d'un modèle d'apprentissage [01] dans une formation à distance. Autrement dit, comment exploiter le modèle linéaire d'apprentissage asynchrone dans une formation en ligne ?

L'article a pour objectif général d'appliquer le modèle conçu dans une formation en ligne. Pour l'atteindre, quelques objectifs spécifiques ont été identifiés : analyser d'abord la trace des activités numérique d'apprentissage asynchrone et le contenu des forums de discussions ; ensuite, utiliser le modèle linéaire d'apprentissage asynchrone fondé sur les équations structurelles à variables latentes.

Les méthodologies de recherche adoptées ont été basées sur l'analyse des traces numériques laissées dans les forums de discussion sur la plateforme. Un modèle d'équation structurelle (SEM) à variables latentes de l'apprentissage asynchrone a été appliqué. Dans ce cadre, plusieurs indicateurs peuvent être construits pour observer les processus sociaux, cognitifs et métacognitifs mis en œuvre. Pour ce faire, il a été question de procéder à une analyse de contenu susceptible de caractériser l'interactivité virtuelle des apprenants. Un outil de prévision de résultat pédagogique est obtenu à l'issue de la recherche.

2. L'apprentissage asynchrone dans une formation ouverte et à distance

L'enseignement à distance a largement bénéficié des apports offerts par les technologies de l'information et de la communication. Selon Daniel Peraya 0, la formation à distance est définie comme une formation médiatisée. Celle-ci fait appel à des artefacts technologiques, et à des dispositifs médiatiques. « C'est ainsi que seront mis à disposition des apprenants les ressources pédagogiques, les différents outils de communication et de collaboration, les activités d'apprentissage et les moyens de les réaliser. C'est à travers de tels dispositifs que les apprenants communiqueront et collaboreront, qu'ils se verront aidés dans leurs travaux, que les tâches qu'impose toute formation seront réalisées. »

2.1. Dispositif de formation ouverte et à distance (FOAD)

Ce dispositif s'appuie sur une plateforme Moodle dans la recherche. Il a été conçu pour favoriser un cadre de formation socioconstructiviste et intègre des outils et des activités d'apprentissage. Par ailleurs, avec Moodle, l'apprenant est au

centre de la formation. Il suit un parcours pédagogique qui favorise l'apprentissage asynchrone et synchrone. La formation à distance recouvre plusieurs modalités et est incluse dans le concept plus général de Formation Ouverte et à Distance.

2.2. Forum de discussion

Le forum de discussion éducatif est un espace ouvert à un groupe restreint d'apprenants sur une plateforme d'enseignement en ligne et où ces derniers sont appelés à communiquer entre eux, à apporter leurs contributions à un sujet, à réagir aux messages postés par les autres participants et à partager des connaissances. Le forum éducatif confère au temps une certaine souplesse [0 qui plaît aux apprenants dont le temps d'apprentissage est toujours en retard par rapport au temps didactique. Il permet à l'écrit d'être visible en permanence sur la plateforme, ce qui lui permet d'être visité à tout moment par les apprenants qui peuvent le partager et se l'approprier.

Le forum de discussion est un outil simple d'utilisation, favorisant la collaboration. « Etymologiquement, collaborer signifie travailler ensemble, ce qui implique un concept de buts partagés et une intention explicite "d'ajouter de la valeur", de créer quelque chose de nouveau ou de différent par la collaboration, par opposition à un simple échange d'informations ou à une transmission de consignes » 0.

En effet, « Est apprentissage collaboratif toute activité d'apprentissage réalisée par un groupe d'apprenants ayant un but commun, étant chacun source d'information, de motivation, d'interaction, d'entraide... et bénéficiant chacun des apports des autres, de la synergie du groupe et de l'aide d'un tuteur facilitant les apprentissages individuels et collectifs » 0.

3. Méthodologie

La méthode d'équations structurelles représente une technique multivariée qui combine les modèles de mesure et les modèles de structures tout en examinant de manière simultanée une série de relations linéaires entre les variables observées et les variables latentes d'une part, et entre l'ensemble des variables latentes d'autre part 0. Les données obtenues sur GEAL durant les trois dernières années à partir de l'analyse de traces numériques des activités des 96 apprenants des 5 promotions issues de 3 FOAD de deux IST de Madagascar ont été manipulées. L'analyse du contenu de tous les forums existants a été effectuée. 812 interventions ont été analysées. Lors de l'apprentissage, 9685 évènements se sont passés. Le scénario pédagogique est construit en trois phases : production individuelle ; collaboration en équipe où les apprenants produisent un document comme medium de débat et une révision individuelle / ou en équipe d'un document produit lors de la première phase.

3.1. Analyse des traces numériques d'interaction et analyse de contenu

Une interaction est une suite d'actions verbales ou non-verbales qui sont interdépendantes et qui s'influencent mutuellement. Une trace numérique d'interactions est une suite de discussions située d'observés, qui relève soit d'une interaction entre humains, médiatisée et médiée de diverses façons par ordinateur soit d'une suite d'actions et de réactions entre un humain et une plateforme. Cette trace est éventuellement rejouable, auquel cas, elle devient dynamique.

L'analyse qualitative d'échanges sur des forums repose sur un ensemble d'enjeux méthodologiques, variant d'une étude à l'autre 0. L'échange est l'unité de base. Les échanges s'organisent en structure selon deux types d'enchaînements : soit les échanges sont d'un même niveau de discours, soit ils sont dépendants ou organisés hiérarchiquement.

Concernant les échanges écrits sur un forum, ils induiraient un effort cognitif jugé plus rigoureux que lors d'échanges oraux et pourraient aider les processus cognitifs en suscitant, une plus grande réflexivité 0. Ces pratiques amèneraient les acteurs à injecter des significations, à clarifier leurs idées, à partager des points de vue, à rétroagir, à développer un langage commun et des solutions communes aux problèmes posés. Dans le cadre de forums d'apprentissage, son usage contribuerait à « rendre les apprenants maîtres de leurs apprentissages et à favoriser ainsi le passage du modèle transmissif des connaissances vers le modèle collaboratif des communautés d'apprenants » 0.

L'engagement de l'apprenant est analysé à partir de la motivation, de la collaboration et de la communication de l'apprenant via les forums de discussion. Un apprenant motivé, communique avec son entourage dans le dispositif de la formation, partage sa connaissance via la plateforme, développe son savoir-faire et son savoir être, et collabore entre les membres de son groupe pour les travaux demandés [10].

La motivation est primordiale dans les apprentissages. Elle est liée aux objectifs que l'apprenant se donne en suivant une formation. Elle est très liée à la perception de l'utilité des tâches d'apprentissage, à la manière dont l'apprenant peut se faire une idée concrète du transfert dans son contexte des connaissances qu'il construit. Elle peut éliminer ou réduire l'abandon. Les motivations personnelles de l'apprenant sont agissantes pour le faire persévérer et atteindre ses objectifs. Quand un encouragement survient et parvient à atteindre l'apprenant, cela lui permet de trouver de nouvelles ressources pour continuer son action. L'apprentissage et la motivation se renforcent mutuellement dans des dispositifs d'apprentissage à distance de type e-learning.

3.2. Modélisation de l'apprentissage asynchrone

Un modèle est une représentation simplifiée, où sont identifiés les différents éléments qui le constituent et dans laquelle les interactions entre ces éléments sont précisées et les résultats obtenus décrits. La modélisation par équation structurelle teste

de façon empirique une série de relations linéaires hypothétiques entre variables. Elle permet de vérifier plusieurs relations linéaires simultanément par le truchement d'un enchaînement causal. Les données récoltées sont naturellement produites par les acteurs de la plateforme. Comme l'apprentissage est le centre de la recherche, les dialogues entre pairs et entre apprenant-tuteur sont les principales interactions étudiées. Ces deux sources produisent une très grande quantité de données à partir desquelles nous allons relier les engagements motivationnel et relationnel avec l'engagement comportemental de l'apprenant.

3.2.1. Attitude (A) dans l'apprentissage asynchrone

Tous les éléments qui constituent le contenu du forum sont traités et analysés. La collecte et l'analyse des traces de l'activité principale sont effectuées sur la base des messages émis. La participation, le nombre d'interventions, la consultation des forums et des discussions ainsi que la création de nouveaux thèmes sont des indicateurs à prendre en compte. Les traces de l'activité des apprenants dans une FOAD sont transformées pour représenter une mesure de l'engagement comportemental 0.

3.2.2. Engagement (E) de l'apprenant

L'engagement est une notion complexe, multidimensionnelle et multifactorielle, qui reste difficile à définir et à opérationnaliser 0. C'est le produit d'une motivation et d'un apprentissage social, c'est dans et par les interactions avec ses pairs (communication et collaboration) et ses enseignants que l'apprenant construit son engagement. Les traces de l'activité des participants dans une formation en ligne peuvent être transformées pour représenter une mesure de l'engagement comportemental 0.

Dans cette recherche, nous nous intéressons à l'engagement dans un apprentissage en ligne et plus particulièrement sur le fait de « s'engager dans une activité d'apprentissage asynchrone en le forum de discussion ». Les apprenants travaillent seuls sur une tâche et partagent leurs connaissances, problèmes et résultats aux autres, ou travaillent en collaboration de façon asynchrone et synchrone pour produire quelque chose de commun.

3.2.3. Modèle de structure appliqué à la recherche

Le modèle causal se compose de deux modèles de mesure et d'un modèle de structure. Il englobe l'ensemble de variables observables indépendantes (X_i), de variables observables dépendantes (Y_i), d'une variable latente explicative (E), de deux variables latentes à expliquer (A) et (C) et des termes d'erreurs (e_i , δ , β et γ_i). Le résultat de l'estimation du modèle donne les différentes valeurs des paramètres. Ainsi, suite aux différents résultats de traitement, le modèle de structure ci-dessous a été obtenu où on va afficher les variances des variables latentes mesurées.

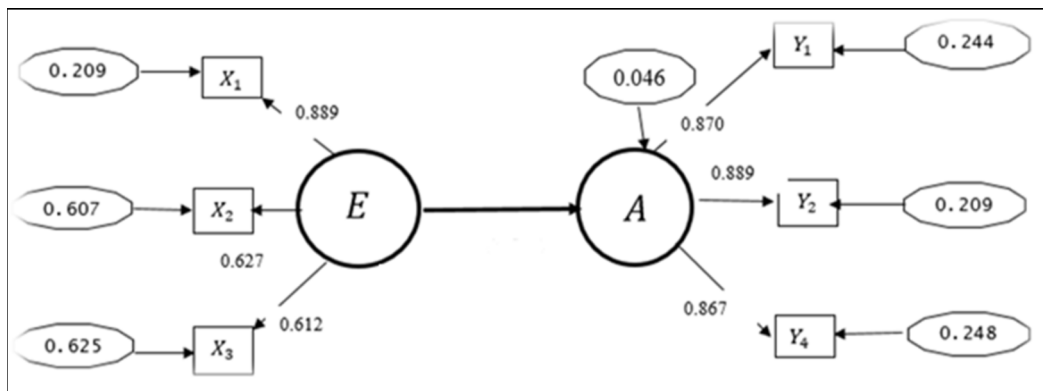


Figure 01. Modèle de structure de la recherche

4. Résultats

Les traces d'activités des apprenants dans la plateforme de la formation sont exploitées pour mesurer les effets directs et indirects des engagements des apprenants et de leurs comportements face au forum de discussion sur leurs cognitions (C) qui se traduisent par leurs résultats pédagogiques. De tout ce qui précède, l'engagement de l'apprenant a un impact direct sur son acquisition de connaissance ($C=E$). Autrement dit, l'engagement de l'apprenant dans une formation permet le développement de sa connaissance et a un impact positif sur son résultat pédagogique [01].

4.1. Estimation du résultat à partir de la variable latente E

Deux variables latentes ont été mises en jeu dans ce modèle de structure. La variable latente E a une relation avec le résultat pédagogique de la formation. A Noter que « Rm » est le résultat à partir du modèle de la recherche et « Rr » le résultat pédagogique de la formation. Le résultat Rr vaut 1 lorsque l'apprenant est admis et est égal à 0 si l'apprenant redouble ou est renvoyé (non admis). Le résultat montre les valeurs des variables latentes A et E en fonction des valeurs des variables observées Consu_F, Consu_D, Envoi_M, Collab, Comm et Motiv. Nous avons exporté ces données sur Excel afin d'effectuer une analyse sur un tableur.

4.1.1. Relation entre le résultat réel (Rr) et le résultat du modèle (Rm)

On va chercher une relation entre « Rm » le résultat à partir du modèle de la recherche (qui n'est autre que la variable latente E et « Rr » le résultat pédagogique de la formation. Le graphe des points indiquant la valeur du résultat réel de l'apprenant (0 ou 1) en fonction de la variable latente E est représenté par la figure ci-dessous.

Script :

```
# Courbe résultat en fonction de la variable latente E
```

```
> plot(xE,y,xlab="Variable latente : E",ylab="Résultat",main="Comparaison Résultat et Valeur de la variable latente E")
```

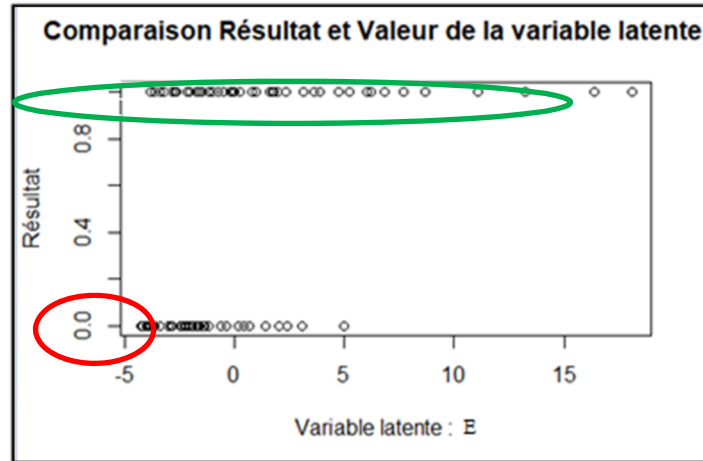


Figure 02. Comparaison du résultat par rapport à la variable latente E

On constate une concentration de points à résultat égal à 0 autour de la zone encadrée en rouge sur la Figure ci-dessus et une autre concentration de points à résultat égal à 1 autour de la zone encadrée en vert. On peut donc dire que les apprenants présentant une faible valeur de E ont un résultat 0 et ceux ayant une grande valeur de E ont un résultat 1. Mais une question se pose : quel est le seuil à partir duquel on peut décider que le résultat est 1 ou 0 ?

On pose une valeur seuil E_{seuil} de la variable latente C pour décider si un apprenant est admis ou non. On peut déduire un maximum de vraisemblance entre les résultats du modèle et les résultats réels pour une valeur seuil allant de $E_{seuil} = -1.1$ à -1.3 .

4.1.2. Valeur seuil selon les distributions du résultat réel et celles du résultat du modèle

Outre la recherche manuelle effectuée dans le paragraphe précédent pour la détermination de la valeur du seuil E_{seuil} , celle-ci peut être aussi trouvée à partir des données statistiques sur R, selon le script suivant :

Script :

```
# Distribution des résultats en fonction de la variable E
```

```
> qqplot(xC,y,col=2,type="o",xlab="Variable latente : E",ylab="Résultat",axes=TRUE,main="QQ-plot E et Résultat",tck=1)
```

Résultat :

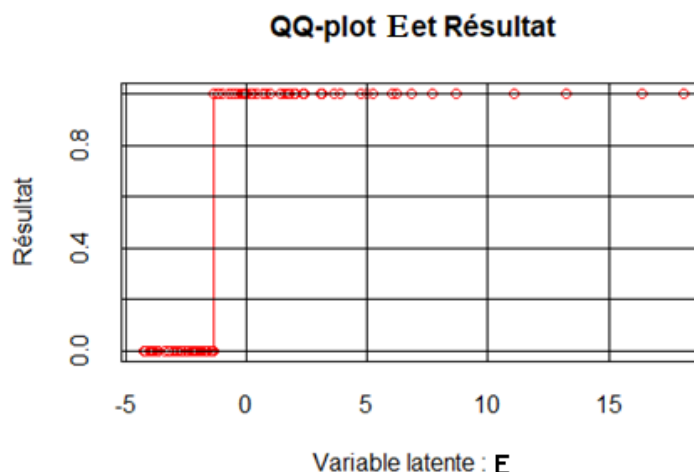


Figure 03. Distribution du résultat pédagogique

Graphiquement la détermination du seuil est démontrée à partir de cette Figure

```
> #Identification de la valeur seuil
```

```
> locator()
```

```
$x
```

```
[1] -1.338206
```

Donc, la valeur du seuil E_{seuil} est égale à **-1.338**. C'était le résultat de la recherche et pourra être appliqué à toute sorte de formation en ligne pour une prévision de résultat pédagogique.

4.2. Prévision de résultat pour l'année universitaire en cours

La formation ouverte et à distance GSA a recruté sa deuxième promotion pour l'année universitaire 2017/2018 et 15 nouveaux apprenants ont intégré le tutorat du module d'initiation GEAL au début de la formation. GEAL s'est déroulé normalement du 19 octobre au 05 novembre 2017, mais les traces ont été relevées jusqu'au 09 novembre 2017 car il y a encore des événements passés. L'analyse de contenu des forums de discussions de cette promotion permet de manipuler les 276 messages postés dans les 4 forums du module GEAL dont 260 messages ont été postés par les apprenants. Ils appartiennent à ces 43 fils de discussions et ont été groupés dans les trois affiliations considérées comme variables à étudier pour pouvoir mesurer la variable latente E « engagement ».

Selon l'analyse des traces numériques d'activités sur GEAL, 2708 événements se sont passés.

L'utilisation du modèle issu de la recherche permet de sortir la valeur de la variable latente E pour la prévision du résultat pédagogique. Le script ci-dessous doit être exécuté pour avoir Rm.

Script et résultat :

```
#3. prévision
```

```
newDonnee <- read.csv("F:/Doctorat_2016/SCA/SCA/Thèses/D3/gsa_2017_2018.csv",sep=";")
```

```
ndonnee <- newDonnee[1:6]
```

```
colnames(ndonnee) <- E("COLLAB", "COMM", "MOTIV", "Consu_F", "Consu_D", "Envoi_M")
```

```
prediction = predict(donnee.fit, newdata=ndonnee)
```

```
write.csv(file = "F:/Doctorat_2016/SCA/SCA/Thèses/D3/S5/sca/newResult2-gsa.csv",x =prediction)
```

La prévision nous donne un résultat de 10 admis parmi les 15 nouveaux apprenants. Le résultat réel est de 14 admis. Donc, il existe un taux d'erreur de 28%. Ce dernier pourra être expliqué par le bon résultat (93,33%) qui est très rare dans une formation de ce type.

5. Discussion et Conclusion

Les faits montrent que l'engagement de l'apprenant dans la collaboration et la motivation sont les causes dominantes de l'acquisition de connaissance dans une formation ouverte et à distance, suivie de la communication. Le dynamisme dans la collaboration implique une interaction forte au sein du groupe, d'où une meilleure efficacité pour l'atteinte d'un objectif commun et l'amélioration du résultat pédagogique qui s'en découle. Le tutorat devrait alors favoriser la collaboration des apprenants pour avoir un bon résultat. Selon Dix et al. [13], le travail collaboratif s'élabore par paires, et mieux vaudrait présenter aux étudiants un forum organisé que leur proposer des pistes pour qu'ils l'organisent eux-mêmes.

L'apprentissage collaboratif est une méthode pédagogique qui permet de renforcer les interactions entre les étudiants en formation à distance et qui vise un apprentissage profond. La participation aux échanges au sein de la plateforme, la richesse et la qualité des interactions entre apprenants sont reconnues comme des facteurs bénéfiques à l'engagement, à la satisfaction et à la réussite des apprenants en formation à distance (Lee, 2002 cité par 0).

Comme la collaboration est la dimension la plus importante pour l'engagement de l'apprenant dans une formation à distance. L'étudiant doit garder sa motivation, son engagement cognitif et sa persévérance dans la formation. La motivation de l'apprenant est un des traits les plus importants lorsqu'on parle d'une formation ouverte et à distance. C'est un des plusieurs critères à étudier par l'administration pour la sélection des étudiants qui veulent s'inscrire dans cette formation. Le fait de donner du temps à un apprenant pour s'exprimer sur lui-même, sur son environnement d'apprentissage, et sa motivation constituent la force motrice qui le pousse à être performant et couronné de succès dans son apprentissage à distance. La motivation constitue le levier essentiel de tout apprentissage. A ce titre, les apprenants doivent conserver leur motivation, voire la renouveler. A tout cela s'ajoute la communication qui est indispensable pour maintenir la dimension relationnelle et sociocognitive. La recherche a exploité un modèle d'apprentissage asynchrone qui relie l'engagement de l'apprenant, son attitude face au forum de discussion et son résultat pédagogique dans une FOAD [16]. L'approche par les relations structurelles linéaires à variables latentes a été adoptée à titre de méthodologie.

Référence bibliographique

- [01] M. Rakotomalala, « Modélisation de l'apprentissage asynchrone dans une formation ouverte et à distance », Thèse de doctorat, Laboratoire Sciences Cognitives et Application, Université Antananarivo – Madagascar, septembre 2018
- [02] D. Peraya, « La formation à distance : un dispositif de formation et de communication médiatisée. Une approche des processus de médiatisation et de médiation ». *TICE et développement*, n°1, 2005.
- [03] F. Mangenot, "Analyse sémio-pragmatique des forums pédagogiques sur Internet". In J.-M. Salaün & C. Vandendorpe (Eds.) *Les défis de la publication sur le Web : hyper lectures, cyber textes et méta-éditions* (pp. 103-123). Villeurbanne : Presses de l'ENSSIB, 2004.
- [04] A. R. Kaye, "Learning together apart". In A.R. Kaye (Ed.). *Collaborative Learning through computer conferencing. The Najaden Papers. NATO ASI Series F. vol. 90. Berlin: Springer-Verlag, pp. 1-24, 1992.*
- [05] M. Walckiers, & T. De Praetere, "L'apprentissage collaboratif en ligne, huit avantages qui en font un must". *Distances et savoirs*, 2(1), pp. 53-75, 2004.
- [06] J.F. Hair, B. Black, Babin B., R.E. Anderson, R.L. Tatham, « Multivariate data analysis », *Pearson Prentice-Hall*, 7ème ed, 928 pages, 2009.
- [07] L. Rourke, T. Anderson, R. Garrison, W. Archer, « Methodological issues in the content Analysis of Computer Conference Transcripts ». In *International Journal of Artificial intelligence in Education*, 2001.
- [08] F. Henri, K. Lundgren-Cayrol, « Apprentissage collaboratif à distance. Pour comprendre et concevoir les environnements d'apprentissage virtuels ». *Sainte-Foy, Québec : Presses Universitaires du Québec*, 2001.
- [09] M. Riel, « Cross-classroom collaboration in global learning circles ». Dans S. Star (éd.) *The cultures of Computing*, Oxford: Blackwell, 1995.
- [10] M. Rakotomalala, T. B. Ravaliminoarimalalason, F. Randimbindrainibe, « Models for Measuring Latent Variables in Asynchronous Learning », *ESRSA, International Journal of Engineering Research & Technology*, Vol. 7 Issue 04, pp 146-150, April-2018.
- [11] B. Poellhuber, N. Roy et I. Bouchoucha, « Relations entre la motivation, l'engagement cognitif et la persévérance dans un MOOC francophone (EDULIB) », *Communication au colloque de l'AIPU, Mons*, 2014.
- [12] G. Molinari, B. Poellhuber, J. Heutte, E. Lavoué, D. S. Widmer et P. A. Caron, « L'engagement et la persistance dans les dispositifs de formation en ligne : regards croisés », *Distances et médiations des savoirs*, 13 | 2016, mars 2016,
- [13] A. Dix, D. Ramduny-Ellis, & J. Wilkinson., « Trigger analysis –understanding broken tasks ». In : D. Diaper & N. Stanton (Eds.), « *The Handbook of Task Analysis for Human-Computer Interaction* ». Mahwah : Erlbaum 2004.
- [14] B. Poellhuber, M. Chomienne, et T. Karsenti, « Quels sont les parcours menant à l'abandon en formation à distance au collégial ? », *Distance et Médiation de Savoir*, 10(3), pp. 1-33, 2008.
- [15] K. De Wulf, G. Odekerken-Schröder, "Assessing the impact of a retailer's relationship efforts on consumer's attitudes and behavior", *Journal of Retailing and Consumer Services*, 10, 2, pp. 95 – 108, 2003.
- [16] M. Rakotomalala, T. B. Ravaliminoarimalalason, F. Randimbindrainibe, « Asynchronous learning model in an ODL », *ESRSA, International Journal of Engineering Research & Technology*, Vol. 7 Issue 08, pp 174-179, August-2018.

Analyse de l'apprentissage d'un module d'initiation dans une formation ouverte et à distance

Rakotomalala M.¹, Ravaliminoarimalalason T. B.², Randimbindrainibe F.³

Laboratoire de Recherche Sciences Cognitives et Application (LR-SCA)

Ecole Doctorale en Sciences et techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation (ED STII)

Ecole Supérieur Polytechnique Antananarivo (ESPA) - Université d'Antananarivo

BP 1500, Ankatso – Antananarivo 101 – Madagascar

¹mrakotom_diego@yahoo.fr, ²tokybaz@gmail.com, ³falimanana@mail.ru

Résumé

Cet article vise à analyser l'apprentissage d'un module d'initiation dans une formation ouverte et à distance. Ce module est considéré non seulement comme un appui technique et un support cognitif pour les étudiants, mais également comme accompagnateur dans l'organisation de leur apprentissage. C'est ainsi qu'une enquête auprès des apprenants, une analyse de discours et une analyse de traces numériques d'activités sur la plate-forme ont été adoptées.

Mots clés : *analyse, apprentissage, module d'initiation, formation ouverte et à distance*

Abstract

This article aims to analyze the learning of an introductory module in open and distance learning. This module is considered not only as a technical support and a cognitive support for the students, but also as an accompanist in the organization of their learning. This is how a learner survey, a speech analysis and a digital traces analysis of activities on the platform were adopted.

Keywords : *analysis, learning, introductory module, open and distance learning*

1. Introduction

La formation ouverte et à distance (FOAD) se développe actuellement dans l'enseignement supérieur. Les deux Instituts Supérieurs de Technologie (IST) de Madagascar possèdent ce type de formation en la FOAD licence en Exploitation logistique et transport (ELT) à l'IST d'Antananarivo (IST-T) et la FOAD licence en Transit et commerce international (TCI) à l'IST d'Antsiranana (IST-D). Ces deux formations utilisent la plate-forme Moodle comme support techno-pédagogique.

Certes, Moodle présente beaucoup d'avantages par rapport aux autres plateformes de formation en ligne, telles que la présence d'une panoplie complète d'outils, la disponibilité de suivi des apprenants et la possibilité de l'autonomie de l'apprenant. Cependant, il a quelques inconvénients, car à partir du moment où sa configuration a été adaptée à la formation proposée, trop de fonctionnalités peuvent rendre la prise en main délicate du point de vue des étudiants. L'idée de faciliter la prise en main de cette plate-forme a entraîné l'insertion d'un module Guide de

l'Étudiant pour l'Apprentissage en Ligne (GEAL) dans la formation.

Après une année de fonctionnement, GEAL devrait être évalué. La recherche penche sur l'analyse de traces d'apprentissage, et essaie de répondre aux questions ayant trait à l'intégration du module GEAL dans la formation à distance, de chercher à savoir comment les étudiants ont exploité ce module d'initiation dans leur formation. Elle va mettre en évidence les principaux outils adoptés par les étudiants et le temps nécessaire pour l'apprentissage de ce module.

La méthodologie mise en œuvre repose sur l'analyse de traces numériques d'activités des 38 nouveaux apprenants des deux FOAD dans le premier semestre de l'année académique 2014/2015. L'analyse de discours sur le forum de discussion a été réalisée, ainsi que l'analyse des fréquences d'intervention sur les événements des autres activités d'apprentissage. Afin de pouvoir confronter avec la trace, une enquête auprès des apprenants a été aussi effectuée, avec une dizaine de questions. Le questionnaire a pour objectif de savoir comment les étudiants ont exploité réellement GEAL.

L'article se divise en trois sections. La première concerne la formation, le module GEAL, et la méthodologie adoptée. Le cadre théorique forme la deuxième section ; et la dernière expose les résultats obtenus et la discussion. Il se termine par la conclusion et la perspective de la recherche.

2. La formation et le module d'initiation

Cette section présente les matériels et les méthodes utilisés dans la recherche.

2.1. La formation

La formation ouverte et à distance existe depuis plusieurs années aux Instituts Supérieurs de Technologie de Madagascar. Elle se fait entièrement à distance via une plate-forme Moodle. C'est une formation tutorée qui suit la théorie d'enseignement et d'apprentissage selon les approches constructiviste et socioconstructiviste. La formation s'organise autour de la résolution de situations à problèmes et s'appuie sur des démarches collaboratives entre pairs ainsi qu'une fréquence soutenue d'échanges avec le tuteur [1].

2.2. Les acteurs

Dans la formation interviennent des enseignants concepteurs, des tuteurs, des coordinateurs et des apprenants. Trente-trois tuteurs assurent le suivi et l'encadrement des travaux des étudiants tout au long de la formation. Une grande majorité d'entre eux sont aussi des concepteurs de cours.

Les coordinateurs (administratif, pédagogique et technique) garantissent le bon déroulement de la formation et établissent les liaisons entre l'administration, les tuteurs et les apprenants. Ils assurent le premier regroupement à la rentrée, durant lequel une présentation de la formation et une prise en main de la plate-forme sont effectués.

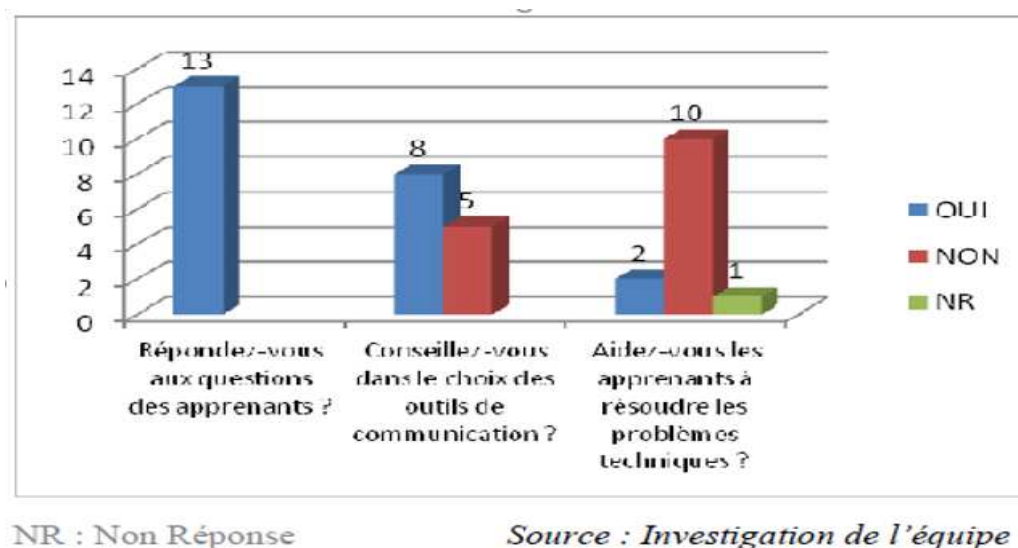


Figure 1. Fonction technique des tuteurs

Les apprenants sont au centre de la formation et réalisent les activités aussi bien individuellement que collectivement. Ils furent encadrés pendant dix jours environ sur l'apprentissage du module GEAL. Par la suite, le module reste ouvert et les apprenants peuvent l'utiliser eux-mêmes, selon leur besoin.

Le dispositif a donné les moyens de s'approprier pleinement de la modalité à distance. Les tuteurs assurent un tutorat de ce module où les interactions ont lieu, et incitent fortement les étudiants à l'utilisation des outils via la plate-forme.

2.3. Études antérieures

Quelques données significatives lors de l'étude [2] effectuée auparavant ont été prises, afin d'effectuer la comparaison au niveau de l'utilisation des outils de communication et de collaboration (figure 2), et de l'assistance technique des apprenants par les tuteurs (figure 1).

La figure 1 indique que 15% seulement des tuteurs aident les apprenants à résoudre les problèmes d'ordre technique, et la figure 2 montre le niveau d'utilisation du forum de discussion auparavant.

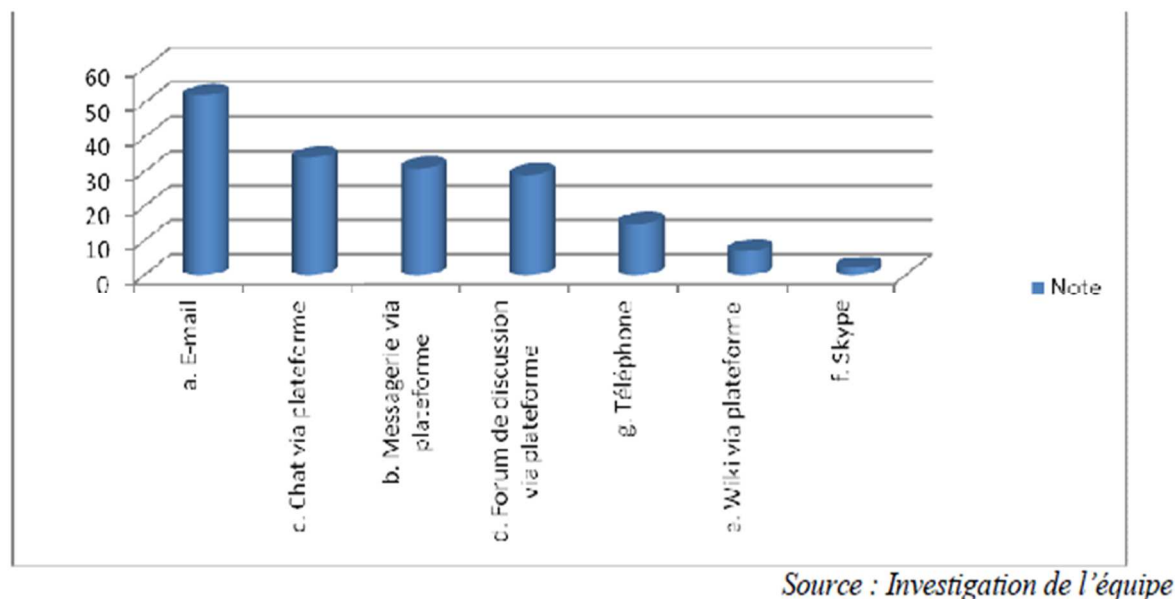


Figure 2. Utilisation des outils de communication et de collaboration

2.4. Le module d'initiation GEAL

GEAL est un module entier sous forme de guide pour initier les connaissances des étudiants en matière d'e-learning. Il est destiné aux étudiants pour les accompagner lors de leurs premiers pas en formation à distance. Il a pour objectif de fournir les outils et méthodes nécessaires à la réussite de l'apprentissage en ligne. Il est composé de trois séquences, en plus d'une séquence zéro (0) qui affiche les informations du module (figure 3).

La première s séquence s'intitule « Environnement d'apprentissage ». Elle a pour objectif de connaître l'Institution, la formation et le dispositif de

formation. Dans cette séquence, les étudiants se familiarisent avec la plate-forme Moodle.

Pour chaque année universitaire, GEAL est lancé dans le cadre du premier regroupement qui se déroula par visioconférence. Les étudiants entrent par pays sur des plages d'une heure environ. Un mail de contact est envoyé aux étudiants une semaine avant le regroupement. Il contient leur code d'accès à la plate-forme et les instructions pour le remplissage du profil. Le jour du regroupement, les apprenants commencent à entrer dans GEAL, sous l'encadrement des tuteurs.

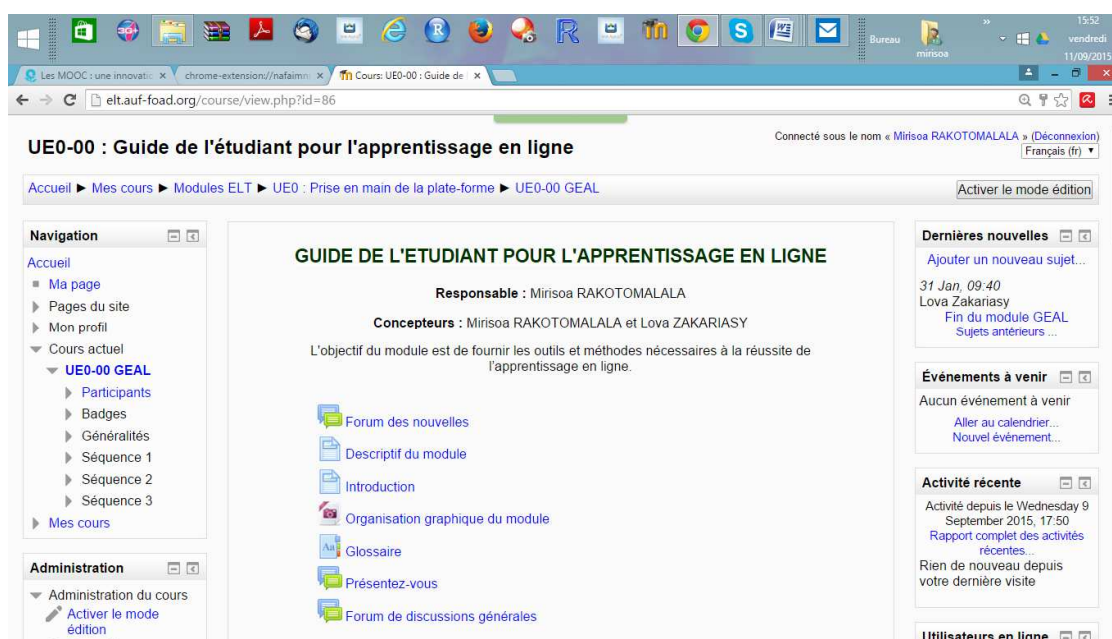


Figure 3. La séquence 0 du module GEAL

2.5. Méthodologie adoptée

Les méthodologies mises en œuvre pour la réalisation de cette recherche reposent sur une technique d'enquête par questionnaire en ligne en direction des étudiants, une analyse de discours dans des forums de discussion, et une analyse de traces numériques des activités sur la plate-forme.

Afin de vérifier la cohérence, plusieurs instruments de collecte de données ont été pris pour croiser les informations par triangulation, dont un questionnaire pour la technique d'enquête, une grille d'analyse de discours et une grille d'analyse qui tient compte des variables à étudier pour les traces numériques d'activités.

Le questionnaire fut élaboré à l'aide d'un outil en ligne Google Forms. Il a été testé par deux experts en TICE avant l'envoi aux 38 nouveaux étudiants de la formation. Il a pour objectif de savoir comment les étudiants ont exploité le module

GEAL. Les questions concernent la contribution, la participation aux différentes activités de GEAL et les outils utilisés dans la formation. L'application des acquis aux autres modules et la raison de son retour vers GEAL s'il y en a, ont été aussi demandées. L'échelle de mesure de Wang [3] fut adaptée dans une question pour mesurer la satisfaction des étudiants [4]. Une échelle de Likert à 5 points allant de « tout à fait en désaccord » à « tout à fait d'accord » fut utilisée. Une dernière question est à propos du délai désiré pour l'apprentissage du module GEAL.

Afin de caractériser l'exploitation du module, une grille d'analyse de traces des activités a été établie de façon à analyser, d'une part, les interactions entre pairs, entre étudiants et tuteurs pendant le déroulement du module ; et d'autre part, les interactions entre GEAL et le reste de la formation.

3. Cadre théorique

Puisque cette recherche se penche sur l'exploitation du module d'introduction dans une formation à distance, il semble utile de présenter brièvement ce que sont à la fois une formation à distance, un dispositif d'apprentissage et une approche pédagogique à distance. Cette section contient également la partie théorique sur le type d'étudiant de la formation à distance et l'analyse de traces d'activités.

3.1. Formation à distance

L'enseignement à distance a largement bénéficié des apports offerts par les technologies de l'information et de la communication ; « Concevoir un dispositif efficace de formation à distance utilisant les TIC, c'est concevoir un artefact complexe qui favorise l'apprentissage et permet à l'apprenant de réaliser les tâches prescrites » [5].

La formation à distance est définie comme une formation médiatisée [6]. Celle-ci fait appel à des artefacts technologiques, et à des dispositifs médiatiques. « C'est ainsi que seront mis à disposition des apprenants : les ressources pédagogiques, les différents outils de communication et de collaboration, les activités d'apprentissage et les moyens de les réaliser. » C'est à travers de tels dispositifs que les apprenants communiqueront et collaboreront, en s'entraînant dans leurs travaux.

Dans cette recherche, ce dispositif s'appuie sur l'usage de la plate-forme Moodle. Il a été conçu pour favoriser un cadre de formation

socioconstructiviste et intègre des outils et des activités d'apprentissage axer sur les communications synchrones (personnes en ligne visibles, chat), sur les communications asynchrones (forum), sur l'apprentissage collaboratif (groupes, glossaire, wiki, atelier, base de données), sur la réflexion critique (sondage : vote, feedback : les attentes) et sur la personnalisation (page personnelle : profil). Il s'inspire aussi du constructivisme dans lequel l'apprentissage se construit à partir de l'interprétation et de la compréhension constamment renouvelées et élaborées à partir de représentations antérieures. Par ailleurs, avec Moodle, l'apprenant est au centre de la formation. Il suit un parcours pédagogique qui favorise l'apprentissage par l'activité. L'apprentissage est perçu comme une activité mentale réalisée individuellement à partir d'informations à traiter [7].

3.2. Modèle d'enseignement et d'apprentissage

Contrairement aux behavioristes pour lesquels l'individu est modelé par son environnement, Piaget considère que l'apprentissage est le résultat d'une interaction entre le sujet et son environnement. Pour lui, l'apprentissage est le résultat d'un processus dynamique de recherche d'équilibre entre le sujet et son environnement. Il a notamment mis en évidence l'importance de l'action sur l'environnement et de la réflexion sur cette action pour construire des connaissances sur un objet [8].

3.3. Type et profil d'étudiants

Un profil est un ensemble d'informations concernant un apprenant ou un groupe d'apprenants, saisies, collectées ou déduites à l'issue d'une ou plusieurs activités pédagogiques. Ces informations peuvent concerner les connaissances, les compétences, les conceptions, les représentations ou encore les styles ergonomiques. Les lurkers [9] sont des apprenants dans un séminaire synchrone, qui lisent les messages, ne perdent pas le fil des apprentissages mais n'interviennent pas. Leurs productions sont souvent de qualité car ils profitent des apports de leurs pairs. D'autres profils sont connus, souvent liés à des mécanismes sociaux. Le social loafing, se produit lorsqu'un étudiant travaille moins car il s'appuie sur le groupe. Le free rider effect voit quelques membres d'un groupe travailler indépendamment des autres et choisir d'avancer seuls pour économiser leur temps. La convergence précoce consiste à s'accorder sur une solution sous-optimale simplement parce qu'elle permet un consensus. La domination se produit lorsqu'un membre du groupe impose son point de vue [10]. On peut vérifier aussi les intentions des étudiants : proactifs, réactifs ou passifs dans leurs activités.

3.4. Analyses de traces numériques d'activités

Cette méthodologie a été mise en œuvre pour récupérer les traces des apprenants sur la plate-forme, les transformer en données, puis traiter ces dernières. Sur le plan théorique, on considère que le log (connexion) informatique à partir duquel on va déduire une activité, se base sur un rapport

métonymique et synecdotique [11]. En effet, il est la conséquence d'un acte, et est en relation avec une activité. Le triplet d'activités [12], par exemple, articulante traces de connexions, durées de connexions, nombre de logs informe sur la manipulation de la plate-forme.

Une analyse des traces enregistrées dans un dispositif peut se concevoir selon une approche mixte qui combine méthode qualitative s'appuyant principalement sur des analyses de contenu des messages rédigés par les apprenants, et méthode quantitative se fondant sur un codage numérique suivi d'un traitement statistique d'une série d'informations parmi lesquelles figurent les actions effectuées par ces apprenants au sein de la plate-forme [13]. Ainsi, un travail d'analyse de participation aux forums de discussion du module GEAL fut effectué, en procédant l'analyse des traces d'interactions dans les forums pédagogiques [14].

Dans un premier temps, sont indiquées clairement les traces interceptant tous les messages et affichages (intervention et consultation des apprenants). Dans un second temps, la participation est évaluée selon le nombre de messages [11]. En effet, le simple fait de poster un message ou de déposer un document sur une plate-forme constitue un acte traduisant la participation. Une analyse thématique des échanges sur des forums apporte des compléments d'informations sur les interactions mises en œuvre. Les informations reçues furent ensuite entièrement transcrites sur

une feuille de calcul Excel. Ce dernier est le logiciel utilisé pour le traitement.

4. Résultats et discussions

Les résultats sont classés en deux catégories : la première se réfère à l'enquête, la seconde à l'analyse de traces numériques des activités sur la plate-forme.

4.1. Transfert des expériences vécues à travers GEAL aux autres modules

Comme la formation est destinée aux professionnels dans le domaine concerné, presque tous les apprenants sont des travailleurs en entreprise et des responsables dans plusieurs sociétés. Ils n'ont pas de temps pour étudier dans la journée. La plate-forme est conçue et configurée pour un dispositif correspondant à un tel type d'apprenant. Avec Moodle, les apprenants doivent entrer en contact avec l'environnement du dispositif de la formation, connaître un objet, agir sur lui et le transformer [15]. Ce processus met en évidence l'importance de l'action dans le développement des connaissances.

Lors de l'apprentissage de GEAL :

- Presque tous les apprenants (95%) ont rendu leur devoir dans la première séquence.
- Dans la deuxième séquence, 61% des apprenants ont effectué le test d'auto-évaluation avec de bons résultats ; la plupart des apprenants suivent les conseils et lisent le cours ;
- 56% seulement des apprenants utilisent un agenda pour noter les dates importantes.

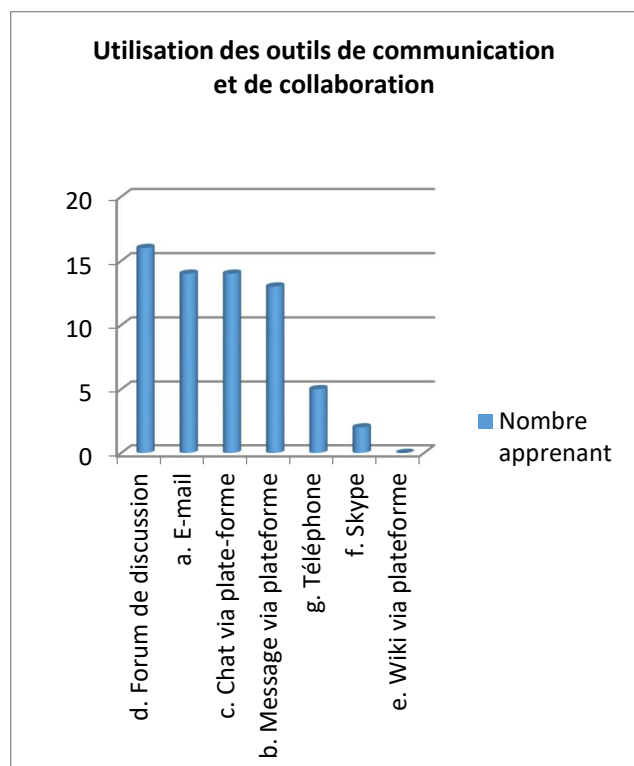
- Tous les apprenants ont participé au forum de discussion.
- C'est à travers l'activité de la séquence 3 que les apprenants ont pratiqué pour la première fois le travail collaboratif dans cette formation. Les étudiants connaissent la nécessité, les avantages et les inconvénients du travail collaboratif. L'interaction lors de ce travail de groupe vise à soutenir les processus cognitifs d'une communauté virtuelle d'apprenants [8] et crée aussi le lien social entre pairs.

Beaucoup d'apprenants retiennent l'importance de l'esprit d'équipe et l'efficacité du travail collaboratif dans leur apprentissage. Ils sont proactifs dans leurs activités. En effet, ces expériences durant l'apprentissage de GEAL sont appliquées aux autres modules de la formation. Cependant, quelques profils sont connus. Un apprenant par exemple, a dit sans hésitation : « *Je veux réussir ma formation et je n'attends pas les camarades, car la formation va vite et il faut faire le travail au jour le jour. Je n'aimerais pas être puni par la faute des autres* ». Cet apprenant fait partie du profil free rider effect [10]. Le social loafing se produit, et la domination également se présente dans un petit groupe.

4.2. Résultats selon les réponses au questionnaire

Après l'apprentissage du module GEAL, 81% des apprenants écrivent qu'ils ont maîtrisé les outils et procédures pour l'exploitation de la plate-forme Moodle. Un quart des répondants connaissent mal l'outil wiki, et un apprenant ne sait pas utiliser la messagerie via la plate-forme. Par contre, les 94%

des répondants ont affirmé que GEAL facilite l'usage des différents outils de communication via la plate-forme.



Source : investigation personnelle

Figure 4. Utilisation des outils de communication et de collaboration par les apprenants

Le forum de discussion est l'outil le plus utilisé dans les autres modules de la formation, selon la figure 4. Le chat et la messagerie électronique ont pris la seconde place car 88% des apprenants les utilisent. La troisième revient à la messagerie via plate-forme avec 81%. Presque tous les étudiant ont suivi la consigne d'utiliser les outils via la plate-forme.

La plupart des apprenants (94%) soulignent l'importance de GEAL. Par ailleurs, la navigation sur la plate-forme et la démarche pour le dépôt de devoir ont pris la première place dans la fonction d'aide du module, ensuite l'organisation

d'apprentissage, enfin l'usage des outils, et la gestion du temps.

A la question sur la durée du module, presque la moitié des répondants juge que deux semaines soient suffisantes pour assimiler le contenu de GEAL.

4.3. Résultat selon la trace des activités numériques

L'analyse de traces des activités numérique présente, d'une part, la fréquentation des trente-huit apprenants dans GEAL pendant une durée de cinq mois et demi, soit le premier semestre de la formation, et d'autre part, la participation des apprenants aux activités du module.

Lors de l'apprentissage de GEAL, les étudiants ont beaucoup contribué aux activités proposées. Presque tous les apprenants, soient 95% ont rendu le Devoir 1. Le test d'auto-évaluation a été effectué par 61% des apprenants ; et trois quarts des apprenants ont participé au chat proposé. Tous les apprenants ont participé au forum de discussion avec divers thèmes ; ce qui confirme la réponse reçue lors du questionnaire.

4.3.1 Forum de discussion, outil principal de la formation

Une première analyse de type quantitatif permet de voir que la participation au forum s'organise le plus souvent en « rafale » dans la semaine du premier regroupement. Les apprenants ont déposé en moyenne 6 messages (5,704), selon le tableau 1, avec un écart-type de 4,759 messages. Sur un total

de 38 apprenant, 37% des apprenants ont posté plus de 10 messages. Deux fils de discussions seulement furent initiés par les tuteurs ; ce qui montre un rapport essentiellement proactif au forum.

Tableau 1 : Correspondance apprentissage - messages

Classe (Messages)	1	2 à 5	6 à 9	10 à 15	16 à 20	21 à 30	31 à 33
Effectif	5	6	13	4	7	1	2
Effectif Cumulé Croissant	5	11	24	28	35	36	38
Fréquence	0,13	0,29	0,63	0,74	0,92	0,95	1
Effectif Cumulé Décroissant	38	33	27	14	10	3	2
Fréquence Cumulée Croissante	1,00	0,87	0,71	0,37	0,26	0,08	0,05

Source : Investigation personnelle

Tous les apprenants (100%) ont participé au forum de discussion avec divers thèmes. C'est à travers le forum « présentation » que les apprenants se connaissent mieux ; et à travers le forum « question / réponse », ils peuvent s'échanger. Ainsi, le forum est l'outil le plus utilisé dans l'activité de la séquence 3 relative au travail collaboratif. GEAL a participé, à la constitution pragmatique du lien social au sein de forums pédagogiques [16].

D'après la figure 2, l'e-mail est l'outil le plus utilisé par les apprenants auparavant. Viennent ensuite le chat et la messagerie via plate-forme. Le forum a pris la quatrième place. Après l'intégration du module GEAL, l'utilisation du forum de discussions prend la première place selon la figure 4. Il devient ainsi l'outil principal de la formation, suivi du mail, du chat et de la messagerie via la plate-forme.

Ce résultat peut s'expliquer en partie d'une part, par le fait qu'en tant qu'outil de communication et de

collaboration, l'asynchrone est très abordable pour les étudiants qui ont de difficultés sur la qualité non satisfaisante de leur connexion internet. L'asynchrone est également une solution pour les quelques étudiants qui se plaignent de la non-participation de leurs co-équipiers dans les rendez-vous synchrones.

L'utilisation de ces outils durant l'apprentissage du GEAL est par la suite appliquée dans toute la formation. Ceci est expliqué d'autre part, par le fait que les tuteurs du module incitent les apprenants à utiliser toujours les outils via la plate-forme. C'est la raison pour laquelle, l'utilisation d'e-mail est limitée. Contrairement à certaines formations à distance, cette recherche confirme celle de Roux et Mayen [17] selon lesquels le forum a une place déterminée, intégrée dans un scénario pédagogique explicite.

4.4. Apprentissage de GEAL en trois semaines

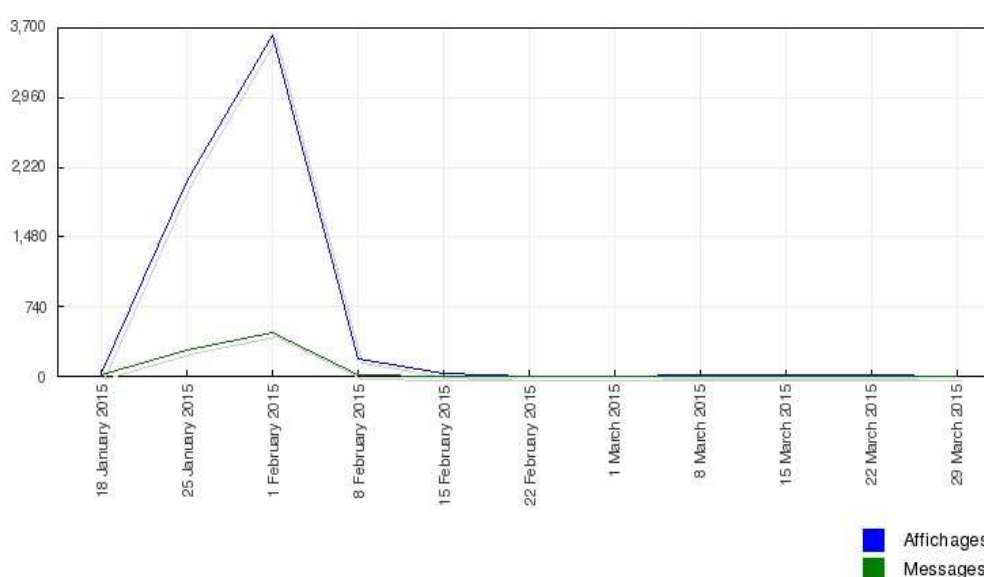
D'après la trace d'activité sur plate-forme, la durée moyenne de fréquentation dans GEAL est de 103,36 jours avec un écart-type de 45,88 jours. On observe une grande valeur de l'écart-type qui peut être interprétée comme une grande dispersion des valeurs par rapport à la moyenne. On constate que 7 apprenants seulement ont une durée de fréquentation supérieure à 100 jours. La durée moyenne de fréquentations pour les 7 étudiants est de 136,43 jours avec un écart-type de 20,13 jours, et celle pour les 31 apprenants est de 32,84 jours avec un écart-type de 22,63 jours. Pour éviter le trop grand écart entre les observations, seules les durées de fréquentations inférieures à 30 jours sont

prises en compte. Il est alors plus significatif de considérer que les apprenants ont fréquenté en moyenne le module pendant **33 jours**.

Selon les réponses au questionnaire, 47% des répondants jugent que **deux semaines** suffisent pour assimiler le contenu de GEAL.

L'allure du rapport d'activité (Figure 5) sur la plate-forme nous donne un pic d'activités

(affichages et messages) au quatorzième jour. En effet, la participation est très active durant les deux premières semaines d'apprentissage, et cela diminue petit à petit lors de la troisième semaine. Une adaptation apparaît alors au bout de **deux semaines**. L'apprentissage se continue dans la troisième semaine et il y a encore quelques étudiants qui interviennent dans la quatrième semaine.



Source : Plate-forme de la formation

Figure 5. Allure d'intervention dans GEAL

Vingt-et-un apprenant, soit 55% fréquentent le module GEAL en **moins de 30 jours**, selon la correspondance apprentissage-jour (tableau 2)

Tableau 2 : Correspondance apprentissage - jours

Classe (jour)	1-15	16-30	31-45	46-60	...	136-150	151-165
Effectif (apprenant)	7	14	3	1	...	2	2
Effectif Cumulé Croissant	7	21	24	25	...	36	38
Fréquence Cumulée Croissante	0,18	0,55	0,63	0,66	...	0,95	1

Source : Investigation personnelle

Alors, on peut en conclure que vingt et un jours soient trois semaines sont préférables pour l'apprentissage du module d'initiation GEAL.

4.5. Analyse qualitative des discours

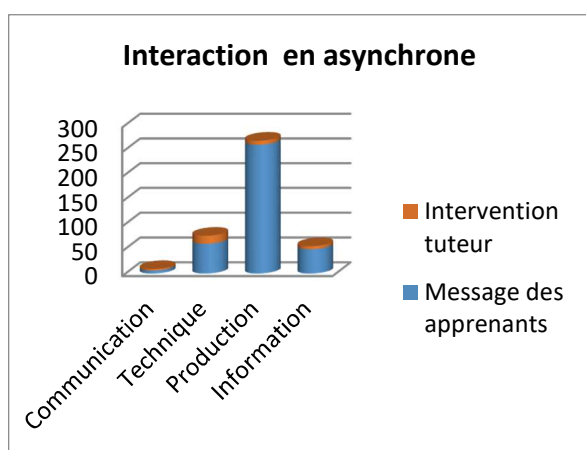
Le tableau ci-dessous montre les quatre thèmes principaux pour classer les 375 messages des apprenants et 33 messages des tuteurs sur les forums de discussion.

Tableau 3 : Analyse thématique des discussions asynchrones sur GEAL

Thème	Nombre d'intervention	
	Apprenant	Tuteur
Communication	6	3
Technique	60	16
Production	260	8
Information	49	6

Source : investigation personnelle

Les messages dans la production prennent la première place, soit 69%. Ils concernent la pratique du travail collaboratif et justifient ce que Henri et son collègue ont écrit : « L'apprentissage collaboratif est une démarche active par laquelle l'apprenant travaille à la construction de ses connaissances ... le groupe y participe comme source d'information, comme agent de motivation, comme moyen d'entraide et de soutien mutuel et comme lieu privilégié d'interaction pour la construction collective de connaissances » [17]. La représentation graphique ci-dessous met en évidence l'importance des messages de production par rapport aux autres formes de messages.



Source : investigation personnelle

Figure 6. Interaction dans les forums de discussion

L'utilisation d'un forum de discussion en contexte éducatif vise à susciter des interactions sociales, susceptibles de favoriser l'apprentissages [18].

5. Conclusion

Au terme de cet article, les participations aux activités, le délai d'apprentissage ainsi que l'usage des outils dans un module d'initiation d'une formation en ligne ont été analysées ; il convient de souligner les résultats suivants : tout d'abord, GEAL aide les étudiants sur le plan technique, notamment dans le choix et l'usage des outils de communication et de collaboration, et rend le forum de discussion comme outil primordial de la cognition.

Ensuite, tous les apprenants sont du même avis sur l'utilité, dans la formation, du module GEAL, qui donne les différents conseils à suivre pour faciliter l'apprentissage en ligne. Les étudiants n'ont plus de difficultés pour travailler sur la plate-forme. Ils sont aidés par GEAL dans l'organisation de leur apprentissage et la gestion de leur temps. Ce module est considéré comme accompagnateur et soutien dans l'organisation de leur parcours d'apprentissage. Il assure la fonction organisationnelle et la fonction métacognitive.

Aussi, cette investigation a permis de déterminer le délai préconisé de trois semaines pour l'apprentissage de GEAL.

Finalement, il serait intéressant de réfléchir sur la modélisation insistant sur l'utilisation de forum de

discussion comme outil cognitif d'une formation à distance.

6. Bibliographie

[1] A. Jaillet, « *L'École à l'ère numérique* », Paris, L'Harmattan, Chapitre 5, p. 90-121. 2004

[2] M. Rakotomalala, L. Zakariasy, « *Pratiques tutorales et attentes des apprenants dans une FOAD* » - Tutoring practices and learner's expectations in an ODL, n°11 – décembre 2015, revue Frantice, 2015.

[3] Y. S. Wang, "Assessment of learner satisfaction with asynchronous electronic learning systems", in Information and Management, vol. 41, n° 1, p. 75-86, 2003.

[4] E. Ben Romdhane, « *Étude des pratiques d'utilisation d'une plate-forme pédagogique et analyse de leurs relations avec la satisfaction des étudiants à l'égard du système* », Distances et médiations des savoirs n°2, 2013.

[5] A. Tricot, F. Plégat-Soutjs, « *Pour une approche ergonomique du concept dispositif de formation à distance utilisant les TIC* ». IUFM de Midi-Pyrénées, 2003.

[6] D. Peraya, « *La formation à distance : un dispositif de formation et de communication médiatisée. Une approche des processus de médiatisation et de médiation* ». TICE et développement, n°1, 2005.

[7] M. Fayol, et D. Gaonac'h, « *Le développement de la mémoire* ». Dans Blaye, A. et Lemaire, P. (Edit.) « *Psychologie du développement cognitif de l'enfant* » Paris-Bruxelles : De Boeck Université, p. 125-156, 2007.

[8] S. Grosjean, « *L'apprentissage collaboratif à distance : Du scénario pédagogique à la dynamique interactionnelle* ». Technologies de l'Information et de la Connaissance dans l'Enseignement Supérieur et l'Industrie, Compiègne, France. Université de Technologie de Compiègne, pp.229-236, 2004.

[9] C. Depover, et J.-J. Quintin « *Les modalités et les formes de l'enseignement à distance* », Le tutorat en formation à distance, Bruxelles, Éditions De Boeck, Coll. « Perspectives en éducation et formation », p. 29-38, 2011 b.

[10] P. Dillenbourg, « *Pour une conception intégrée du tutorat de groupe* », Le tutorat en formation à distance, Bruxelles, Éditions De Boeck, Coll. « Perspectives en éducation et formation », p. 171-194, 2011.

[11] J. Piaget, « *La Prise de conscience* », Paris, PUF, 1974a.

[12] A. Jaillet, « *Y a-t-il un effet « instrument » sur l'activité des étudiants à Distance ?* », Distance et Savoirs, Vol. 3 – n°1/2005, Paris : CNED, Lavoisier, 49 - 66 (2005).

[13] A. Strebelle et C. Depover, « *L'exploitation de la trace dans un dispositif d'apprentissage collaboratif à distance : Éléments méthodologiques et apports à l'étude du processus de modélisation* », dans F. Larose et A. Jaillet (dir.), Le numérique dans l'enseignement et la formation. Analyses, traces et usages. Paris, L'Harmattan, Collection « Sciences et société », 110-135, 2009.

[14] F. Henri, D. Peraya, et B. Charlier, « *Méthodes d'analyse des forums de discussion dans leurs usages pédagogiques* ». In G, -L. Baron et E. Bruillard, (Ed),

Forums et communautés d'enseignants et d'apprentissage, 2007.

[15] A. Jaillet, « *Traces et histoires de traces* ». Dans F. Larose et A. Jaillet (Dir.). *Traces numériques en enseignement et formation : analyses et usages*. Paris : L'Harmattan : coll. Sciences et Société, 15-36, 2009.

[16] C. Develotte, « *L'espace d'exposition discursive dans un campus numérique* ». Colloque « *Langage, objets enseignés et travail enseignant en didactique du français* », Université de Grenoble 3, 2005.

[17] F. Henri, et K. Lundgren-Cayrol, « *Apprentissage collaboratif à distance. Pour comprendre et concevoir les environnements d'apprentissage virtuels* ». Sainte-Foy, Québec : Presses Universitaires du Québec. (2001).

[18] C. Roux, et P. Mayen, « *Le forum de discussion en formation : un espace potentiel d'accès au rapport qu'entretient autrui avec les objets d'apprentissage* », Distances et médiations des savoirs N°3, 2013

Modèles de mesure de variables latentes dans un apprentissage asynchrone

Rakotomalala M.¹, Ravaliminoarimalalason T. B.², Randimbindrainibe F.³

Laboratoire de recherche Sciences Cognitives et Applications (LR - SCA)

Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation (ED - STII)

Ecole Supérieur Polytechnique Antananarivo (ESPA) - Université d'Antananarivo

BP 1500, Ankatso – Antananarivo 101 - Madagascar

¹*mrakotom_diego@yahoo.fr*, ²*tokybaz@gmail.com*, ³*falimanana@mail.ru*

Résumé

La numérique touche à beaucoup de domaines de nos vies, de notre société et de notre culture. Cet article a été mené dans le cadre de cette culture numérique, plus précisément l'apprentissage asynchrone dans une formation ouverte et à distance. Les traces des activités de l'apprenant sur la plateforme ont été relevées et exploitées pour mesurer les effets directs et indirects de l'engagement des apprenants et de son comportement considéré comme variables latentes, sur sa cognition. Le résultat nous donne deux modèles de mesure de ces deux variables latentes selon le concept des équations structurelles de la recherche.

Mots-clés : *modèle de mesure, engagement, comportement, apprentissage, asynchrone,*

Abstract

Digital technology is currently an important part of many areas of our lives, our society and our culture. This study was conducted in the context of this digital culture, specifically regarding asynchronous learning in open and distance learning. The traces of the activities of learners on the platform were identified and used to measure the direct and indirect effects of learners' engagement and behavior, as latent variables, on their cognition. The results gave two models of measurement of these two latent variables according to the concept of structural equations of research.

Keywords : *Models for measuring, commitment, behavior, learning, asynchronous*

1. Introduction

Dans une formation ouverte et à distance (FOAD), la communauté est formée par un groupe d'apprenants, rassemblés pour une activité de formation, pour répondre à une préoccupation relative à une tâche dont le produit sera évalué.

Cet article intéresse aux analyses de ces forums dans cette FOAD et tente de proposer un modèle d'équation conceptuelle structurelle, afin d'examiner la relation

entre l'attitude de l'apprenant et son engagement face à son apprentissage asynchrone.

Le cadre théorique sur l'apprentissage asynchrone dans une formation à distance a été développé dans un premier temps, suivie de la méthodologie sur la modélisation d'équation structurelle. Dans un second temps, l'analyse de traces des forums de discussions et le modèle d'équation structurelle (SEM) proprement dite ont été développés. Enfin, une discussion et une perspective concluent l'article.

2. L'apprentissage asynchrone dans une FOAD

2.1. Définitions

Si la formation à distance existe depuis des décennies, la FOAD est un mode d'enseignement apparu dans les années 1990 qui rompt avec l'unité de lieux et de temps en s'appuyant sur les technologies numériques. Par définition, une *FOAD* est un dispositif :

- Organisé, finalisé, reconnu comme tel par les acteurs ;
- Qui prend en compte la singularité des personnes dans leurs dimensions individuelle et collective ;
- Et repose sur des situations d'apprentissage complémentaires et plurielles en termes de temps, de lieux, de médiations pédagogiques humaines et technologiques, et de ressources

La *formation à distance* est définie comme une formation médiatisée [1]. Celle-ci fait appel à des artefacts technologiques, et à des dispositifs médiatiques.

Dans cet article, ces dispositifs s'appuient sur l'usage d'une plate-forme Moodle. Il a été conçu pour favoriser un cadre de formation socioconstructiviste et intègre des outils et des activités d'apprentissage orientés sur les communications synchrones et asynchrones. Par ailleurs, avec Moodle, l'apprenant est au centre de la formation.

Le forum est un outil de communication et outil de collaboration asynchrones dans la formation. Cet outil a beaucoup d'avantages. C'est un outil adapté aux contextes malgaches vu la qualité de connexion dans des différentes régions de Madagascar et surtout la présence de délestage à n'importe quel moment qui empêche de joindre des réunions synchrones programmées dans la

formation. Cet outil est aussi favorable pour le travail collaboratif ; il est accessible à tous, à tous les moments. L'enseignant tuteur est une personne ressource, il aide les apprenants à résoudre les problèmes techniques ou les oriente vers le responsable concerné, les réponds et prend le rôle d'animateur si nécessaire dans un travail collaboratif des apprenants. Dans un forum, chaque apprenant peut poser n'importe quelle question pédagogique (cours, activité, évaluation) ou question d'organisation (planning, groupe, emploi du temps, rendez-vous), etc., et tout le monde peut répondre aux préoccupations des autres sans attendre l'intervention du tuteur.

2.2. Approche d'apprentissage asynchrone dans une formation à distance

Apprendre consiste à acquérir de nouvelles connaissances, à les stocker en mémoire, à les organiser et à développer des automatismes. L'apprentissage est donc perçu comme une activité mentale réalisée individuellement à partir d'informations à traiter [02]. En 2003, Entwistle a identifié les différentes approches d'apprentissage chez les étudiants et a privilégié celles qui amélioreraient la qualité d'apprentissage [03]. Il s'agit de l'approche d'apprentissage en profondeur, indiquant l'intention de comprendre par soi-même, l'approche métacognitive supposant pouvoir prendre du recul par rapport à ses manières d'étudier, et l'organisation des études pour gérer le temps efficacement et ménager ses efforts. Ces approches sont liées à l'engagement de l'étudiant dans la formation, ainsi qu'à sa motivation et ses performances.

Dans le type de formation asynchrone, l'échange avec les autres apprenants ou avec les tuteurs s'effectue via des modes de communication ne nécessitant pas une connexion simultanée. Il peut s'agir de forums de discussion ou bien encore de l'échange d'e-mails. Par

ailleurs, ce mode de formation repose souvent sur un apprentissage dit autodirigé, avec des cours, des exercices et des auto-évaluations impliquant une certaine autonomie de l'apprenant. La formation en ligne dans un environnement asynchrone implique que toute la responsabilité de l'apprentissage incombe aux apprenants.

En tant que méthode centrée sur l'apprenant, l'apprentissage asynchrone donne aux étudiants l'entière responsabilité de leur expérience de formation en ligne. L'apprentissage asynchrone exige que l'apprenant soit concentré, déterminé et qu'il possède de bonnes compétences en gestion du temps. Réussir un apprentissage asynchrone nécessite de la part des apprenants un engagement, une motivation et une discipline rigoureuse.

3. Methodologies

3.1. Méthodologie utilisée

Les modèles d'équations structurelles ont été utiles pour attaquer de nombreux problèmes de fond et ont contribué à l'évolution de la théorie dans les sciences sociales et comportementales, dans la psychologie et l'éducation, etc. [04]. Ces méthodes permettent de tester de manière simultanée l'existence de relations causales entre plusieurs variables latentes explicatives et plusieurs variables à expliquer [05].

Une *variable manifeste* est une variable pour laquelle une mesure peut être directement recueillie (observée, mesurée, etc.). Le paradigme dominant dans la théorie des tests fut celui représenté par Churchill [06] et qui considère que les variables manifestes sont toutes supposées représenter leur variable latente. Dans ce sens, il est postulé que tous les indicateurs concordent dans leur manière de mesurer le phénomène, et permettent tous de refléter la même variable. En conséquence, on doit s'assurer de la significativité de la variable latente

construite à la base de ces indicateurs, qui doivent être significativement corrélés.

Une *variable latente* bien construite est une variable dont la variation doit s'accompagner le plus fidèlement possible par la variation de tous les indicateurs qui la composent.

Les traces d'activités des apprenants dans la plateforme de la formation sont exploitées pour mesurer les effets directs et indirects des engagements des apprenants et de leurs comportements face au forum de discussion, sur leurs cognitions qui se traduisent par leurs résultats pédagogiques.

Dans ce cas, les indicateurs constituent le reflet de la variable latente où elle demeure la cause des indicateurs, où chaque indicateur est lié à la variable latente par une équation de régression simple du type :

$$X_i = \lambda_i \xi_1 + \delta_i \quad (01)$$

Avec : ξ_1 : construit latent, X_i : indicateurs, λ_i : coefficient représentant l'effet du construit sur l'indicateur (loading) ; et δ_i : indicateur de l'erreur de mesure

3.2. Modèle d'équations structurelles

Selon Bollen et Long [07] et Schumacker et Lomax [08], la spécification, l'identification, l'estimation, l'évaluation et la respcification du modèle représentent les étapes les plus communément admises au niveau de la conception d'un modèle d'équations structurelles.

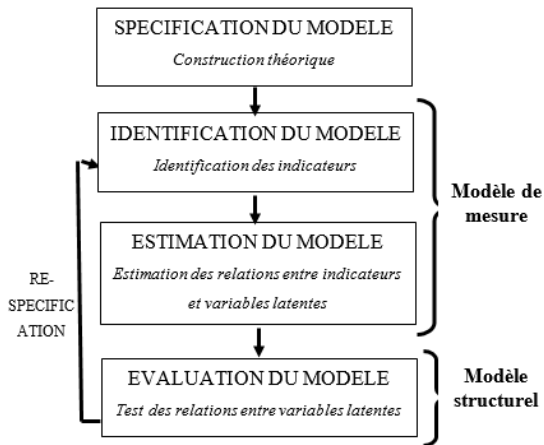


Figure 1. Les étapes de la construction du modèle des équations structurelles basée sur [09], [07] et [08]

La **spécification** du modèle conduit à la conception d'un « schéma de relations linéaires » qui se traduisent en modèles de mesure et en modèles de structure. [10]

L'**identification** permet d'attribuer une seule solution pour chacun des paramètres à estimer. Un modèle conduit à exprimer la matrice de variance/covariance des variables manifestes Σ en fonction d'un ensemble de paramètres θ . Ce modèle est identifié si $\Sigma(\theta) = \Sigma(\theta')$ implique $\theta = \theta'$. En pratique, l'identification d'un modèle suppose la satisfaction de deux conditions à savoir la condition d'ordre (condition nécessaire) et la condition de rang (condition nécessaire et suffisante).

La condition d'ordre dépend impérativement du degré de liberté ddl [10] et se rapporte à la correspondance entre les paramètres à estimer et le nombre de variances/covariances des variables observées [11]. Le degré de liberté s'exprime de la manière suivante [08] :

$$ddl = \left(P \frac{(P + 1)}{2} \right) - N \quad (02)$$

Avec : P est le nombre d'indicateurs de mesure du modèle, N : le nombre de coefficients à estimer du modèle et ddl est le degré de liberté.

Par conséquent, trois situations sont possibles à savoir la sous identification ($ddl < 0$), la juste identification

($ddl = 0$) et la sur identification du modèle ($ddl > 0$). D'après ces trois situations, la condition d'ordre est vérifiée lorsque le modèle est juste identifié ou encore sur identifié ($ddl \geq 0$).

Par ailleurs, la condition de rang permet d'avoir une seule solution vis-à-vis de chacun des paramètres à estimer.

L'**estimation** consiste à déterminer les valeurs relatives aux différents paramètres du modèle à tester. La technique d'estimation du Maximum de Vraisemblance ML (Maximum Likelihood) et des Moindres Carrées Généralisées GLS (Generalized Least Squares) sont les méthodes les plus utilisées pour l'estimation d'un modèle étant donné qu'elles figurent dans la plupart des logiciels de traitement des données [08] [09]. L'expression de la méthode de Maximum de vraisemblance se présente comme suit :

$$F_{ML} = tr(S \cdot \hat{\Sigma}^{-1}) - p + \ln |\hat{\Sigma}| - \ln |S| \quad (03)$$

Si θ soit un vecteur de paramètre libre estimé par le modèle, on peut écrire la relation (03) comme suit :

$$F_{ML}(\theta) = tr(S \cdot \Sigma^{-1}(\theta)) - p + \ln |\Sigma(\theta)| - \ln |S| \quad (04)$$

Avec : S : la matrice de variance-covariance observée, \ln : la fonction logarithmique naturelle, $tr(.)$: la fonction trace d'une matrice, Σ : la matrice de variances/covariances estimées, p : le nombre d'indicateurs de mesure ou variables observées, et $|S|$: Déterminant d'une matrice S .

Pour l'**évaluation** du module, la qualité d'un modèle peut être appréciée à travers l'évaluation d'un ensemble d'indices d'ajustements. On dénombre plusieurs indices d'ajustements qui se regroupent en trois catégories à savoir les indices absolus, les indices incrémentaux et les indices de parcimonie.

Les indices absolus sont qualifiés comme étant des indices *classiques* [09]. Ils examinent le niveau de correspondance entre le modèle proposé et les données observées [08]. Les indices incrémentaux permettent d'évaluer la contribution du modèle étudié par rapport à un modèle restrictif, c'est-à-dire une comparaison entre le modèle estimé et le modèle de référence ayant une corrélation nulle entre les données observées [10]. Les indices de parcimonie contrôlent la surestimation du modèle. Ils déterminent le nombre nécessaire de paramètres à estimer permettant d'atteindre le niveau d'ajustement spécifique [08]. L'objectif étant d'aboutir à un meilleur dosage entre la maximisation de l'ajustement et la minimisation du nombre des coefficients estimés [10].

La **respécification** du modèle représente une phase de réflexion qui offre l'opportunité de reconsidérer la conception du modèle et d'en proposer des modifications éventuelles, en tenant compte du cadre théorique de la recherche en question [10].

Au niveau de la **présentation des résultats**, ces derniers doivent incorporer des informations pertinentes et précises, permettant d'aboutir facilement à des solutions aux problèmes susceptibles d'être rencontrés dans l'analyse.

4. Résultats

Le résultat se divise en deux parties, tout d'abord l'analyse des activités d'apprentissage asynchrone en le forum de discussion dans laquelle un module d'initiation a été mobilisé. Ensuite, un modèle conceptuel d'équations structurelles de la recherche sera proposé, et les différentes étapes seront réalisées afin de sortir les deux modèles de mesures validées du SEM. R est utilisé pour le traitement statistique des données.

4.1. Analyse de l'activité

L'objectif est d'analyser l'apprentissage asynchrone dans une formation à distance. L'analyse se centre préférentiellement sur le forum des apprenants. La discussion se déroule sur la plate-forme dans un module d'initiation (GEAL) au début de la formation. Les apprenants interagissent entre eux ou avec le tuteur. Trois formations ouvertes et à distance sont concernées. L'apprenant a besoin de connexion pour pouvoir accéder à la plate-forme et y travailler.

4.1.1. Les indicateurs du comportement de l'apprenant

Les traces de l'activité des participants dans une formation en ligne peuvent être transformées pour représenter une mesure de l'engagement comportemental [12], ce qui a des incidences considérables sur la manière de les organiser et les simplifier afin qu'elles correspondent bien aux construits théoriques. Dans une initiative de recherche menée actuellement, l'attitude de l'apprenant vis-à-vis d'un forum de discussion a été modélisé comme un continuum de participation aux diverses interventions accessibles sur des forums de discussion.

Du point de vue analyse de traces, une approche quantitative préliminaire à l'étude plus spécifique en statistiques est nécessaire. La participation en nombre d'intervention : la consultation des forums, la consultation des discussions, ajout ou mise à jour d'un message à une discussion en cours, et la création de thème nouveau sont des indicateurs prise en compte. L'ensemble de ces indicateurs caractérise le comportement de l'apprenant dans un forum de discussion.

4.1.2. Les indicateurs de l'engagement de l'apprenant

L'engagement de l'apprenant est mesuré par la régularité au forum, la sensation à l'aise envers le forum de

discussion, la réalisation des activités depuis la plateforme malgré les contraintes existantes et la consacrassions plus d'effort afin de rester actif dans l'apprentissage asynchrone [13]. Dans la présente recherche, les modèles explorent les différentes dimensions communicationnelles, motivationnelles, et socio-cognitives de l'engagement en contexte de formation à distance. Ces trois dimensions sont en interaction continue et réciproque selon des importances variables et contingentes aux activités. L'analyse qualitative effectuée sur les contenus du forum de discussion nous donne les indicateurs à mesurer selon les trois dimensions ci-dessus pour l'engagement de l'apprenant. Ainsi, la collecte et l'analyse de traces de l'activité principale sont basées par les messages. Ces derniers sont classés selon le message de communication, l'indicateur de motivation et l'interaction pour la collaboration. Ces trois classes constituent l'engagement de l'apprenant dans un forum de discussion.

4.2. Modélisation par des équations structurelles

Le modèle conceptuel de la recherche présente les différents liens de causalité entre les construits théoriques et montre que l'apprentissage asynchrone pourrait jouer un rôle médiateur au niveau de la relation entre l'engagement de l'apprenant et l'exploitation du forum de discussion. Le modèle causal se compose de deux modèles de mesure et des modèles de structure. Il englobe l'ensemble de variables observables indépendantes (X_i), de variables observables dépendantes (Y_i), d'une variable latente explicative (E), de deux variables latentes à expliquer (A) et (C) et des termes d'erreurs (e_i , δ , β et γ_i). Par conséquent, il est possible de distinguer entre deux types d'équations à savoir les équations du modèle de mesure et les équations du modèle de structure.

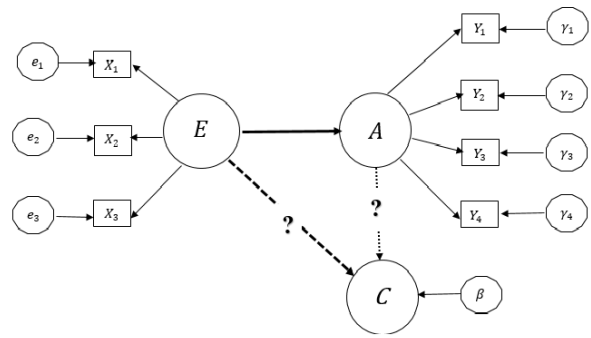


Figure 2 : Le modèle conceptuel de la recherche

Avec :

E : Engagement de l'apprenant dans un forum de discussion

A : Attitude de l'apprenant dans son apprentissage asynchrone

C : Acquisition de Connaissance

E et A sont envisagés comme des variables réflexives, dont les indicateurs sont :

$X_1 = Collab$: Interaction collaborative dans le forum de discussion,

$X_2 = Comm$: Communication avec les protagonistes de la formation (pairs, tuteur, ...), afin de partager des informations entre membres et aussi pour s'organiser.

$X_3 = Motiv$: Motivation dans l'apprentissage, qui est la force même qui les pousse à être performants et couronnés de succès dans son apprentissage à distance [13]

$Y_1 = Consu_F$: forum consulté (forum_view forum)

$Y_2 = Consu_D$: discussion consultée (forum_view discussion)

$Y_3 = Envoi_M$: Contenu posté (forum_add post)

$Y_4 = Créat_D$: discussion créée (forum_add discussion)

Dans le modèle proposé dans la figure 2, l'engagement est le produit d'une motivation et d'un apprentissage social, c'est dans et par les interactions avec ses pairs que l'apprenant construit son engagement.

Par définition, l'engagement dans l'apprentissage collaboratif est un processus mutuel. Il consiste en un effort conscient, volontaire et continu de la part de tous

les participants, de mise en commun et de coordination en vue de résoudre ensemble le problème.

4.3. Les modèles de mesure

Deux **modèles de mesure par équations structurelles** ont été élaborés : L’attitude de l’apprenant dans l’apprentissage asynchrone, et son engagement dans une formation à distance.

On va appliquer ces modèles sur des données réelles d’une FOAD de l’IST d’Antananarivo. Il s’agit de traces d’activités asynchrones de 4804 évènements de 13 apprenants à l’espace de 19 jours, du 20 octobre au 07 novembre 2016.

4.3.1. Le modèle de mesure de l’attitude de l’apprenant

a. Première spécification du modèle

Le modèle de mesure de la variable latente A : attitude de l’apprenant face au forum de discussion, peut traduire par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= \alpha_1 A + \gamma_1 \\
 Y_2 &= \alpha_2 A + \gamma_2 \\
 Y_3 &= \alpha_3 A + \gamma_3 \\
 Y_4 &= \alpha_4 A + \gamma_4
 \end{aligned}
 \tag{05}$$

Ils peuvent s’écrire sous la forme matricielle : $Y = \alpha A + \gamma$ et forme une régression linéaire.

La matrice de covariance entre les quatre variables montre qu’il y a des covariances négatives entre les deux variables « Creat_D » et « consu_D ».

Pour l’Estimation du modèle, nous avons utilisé l’estimation par le maximum de vraisemblance. Le modèle ne converge qu’après 7959 itérations, avec un test sur un échantillon de 13 observations.

Le degré de liberté $ddl = p(p + 1)/2 - N$ avec $p = 4$ et $N = 6$ est égal à 2, qui est vérifié par le « Degrees of freedom » retourné, indique la sur-identification du modèle.

On note que l’erreur sur la variable Creat_D est de -1112,53 (variance négative) qui définit une raison de respécification de notre modèle.

Le logarithme de la vraisemblance (logl) : -164,987 indique que le modèle n’a pas de vraisemblance par rapport aux données réelles.

b. Respécification du modèle

Les deux variables « Envoi_M » et « Creat_D » expriment la participation de l’apprenant au forum de discussion ; on va les fusionner (Envoi_M_2). Par conséquent, nous n’avons que trois variables observées au lieu de quatre auparavant. Nous avons repassé les étapes précédentes en traitant les mêmes données avec le nouveau modèle.

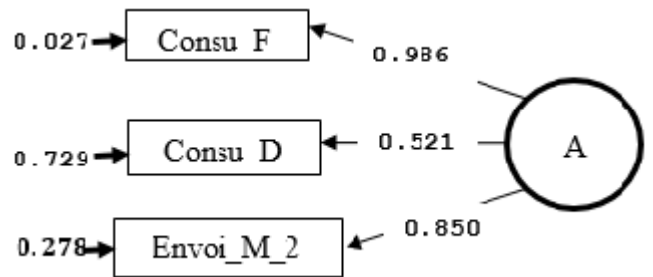


Figure 3 : *Modèle de mesure de la variable latente A avec les paramètres estimés*

Le degré de liberté $ddl = p(p + 1)/2 - N$ devient nul. Le modèle est juste identifié. En ce qui concerne l’évaluation du modèle, le minimum de la fonction estimation (fmin) est égal à 0, nous indique que c’est un bon modèle par rapport au modèle précédent qui a pour $fmin = 0,677$.

Le logarithme de la vraisemblance (logl) du modèle respécifié est -144,312 qui est meilleur que celui du modèle initial -164.987.

Le χ^2 (chisq) du modèle est égal à 0. Il n’y a aucune présomption contre l’hypothèse nulle. Les données réelles n’ont pas de grande conformité au modèle

statistique sous-jacent, ceci peut être dû à leur répartition.

Le degré de liberté du modèle (df) est 0, comme on l'a calculé manuellement. On a estimé 6 paramètres (npar) du modèle.

On peut valider ce modèle respécifié par rapport au premier. Le khi deux ne nous empêche pas cette validation, la valeur de p ne devrait jamais être utilisée pour valider une hypothèse à partir de données puisque c'est l'inverse qui est calculé.

4.3.2. Le modèle de mesure de la variable latente E

Le modèle de mesure des engagements de l'apprenant peut traduire par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} X_1 &= \lambda_1 E + e_1 \\ X_2 &= \lambda_2 E + e_2 \\ X_3 &= \lambda_3 E + e_3 \end{aligned} \quad (06)$$

Ils peuvent s'écrire sous la forme matricielle : $X = \lambda E + e$ qui forme une régression linéaire.

En repassant les différentes étapes pour le modèle de mesure de l'engagement de l'apprenant dont la spécification du modèle et l'estimation du modèle, nous avons obtenu le modèle :

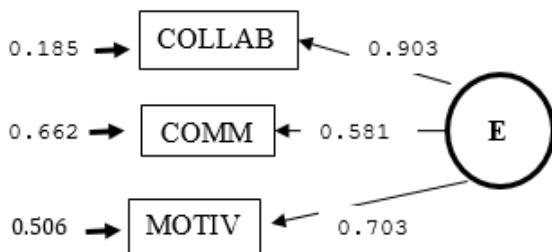


Figure 4 : *Modèle de mesure de la variable latente E avec les paramètres estimés*

Le degré de liberté du modèle est encore nul. Ceci nous donne une juste identification du modèle.

Validation du modèle

```
> fitmeasures(donnees3.fit, fit.measures=c("fmin", "logl", "chisq", "df", "npar"))
  fmin  logl  chisq    df  npar
  0.00 -61.47   0.00   0.00   6.00
```

Le minimum de la fonction estimation (fmin) est égal à 0. Le logarithme de la vraisemblance (logl) est -61,47. On note une vraisemblance exacte pour une valeur nulle de ce logarithme de vraisemblance, et là, on approche petit à petit de cette valeur. On a vu logl = -144,312 pour le modèle des attitudes. Le χ^2 (chisq) est encore à 0. Le nombre de paramètre estimé (npar) du modèle est 6. Ces données nous donnent l'idée d'encore valider le modèle ainsi décrit.

5. Conclusion

Les interactions entre les étudiants en formation à distance visent un apprentissage profond et ont été renforcé par une méthode pédagogique en l'apprentissage collaboratif. La participation aux échanges au sein de la plate-forme, la richesse et la qualité des interactions entre apprenants sont reconnus comme des facteurs bénéfiques à l'engagement, la satisfaction et la réussite des apprenants en formation à distance

Quand même, la participation dans un forum de discussion, la lecture des interventions des autres apprenants et l'interaction entre pairs entraînent une sensation d'appartenance à un groupe. Cet engagement est considéré comme une variable latente et a été mesuré par un modèle de mesure dans une équation structurelle.

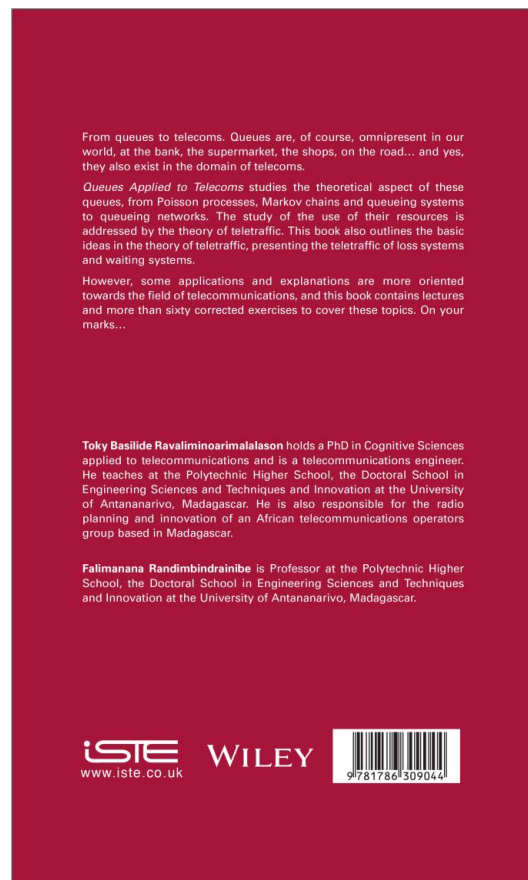
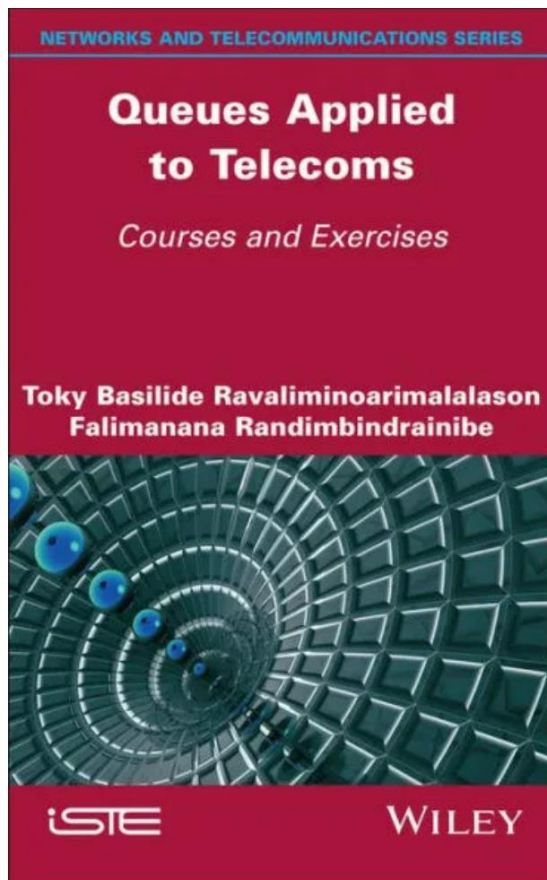
Pour conclure, nous avons obtenu les deux modèles de mesure validés. La modélisation structurelle de l'apprentissage asynchrone en manipulant les deux modèles avec les données réelles dans trois formations ouvertes et à distance nous permettrons de valider les relations de causalité du résultat pédagogique, de l'engagement et de l'attitude de l'étudiant face au forum de discussion. L'effet de développement de connaissance via le forum de discussion sera fortement démontré. En d'autres termes, les apprenants engagés,

motivés et collaborés dans une formation à distance développent leur connaissance et leur savoir-faire de manière continue. L'impact de l'exploitation de forum sur l'acquisition de connaissance sera démontré empiriquement.

6. Bibliographie

- [01] D. Peraya, « *La formation à distance : un dispositif de formation et de communication médiatisée. Une approche des processus de médiatisation et de médiation. TICE et développement* », n°1, 2005.
- [02] M. Fayol, et D. Gaonac'h, « *Le développement de la mémoire* ». Dans A. Blaye, et P. Lemaire, (Edit.) *Psychologie du développement cognitif de l'enfant*. Paris-Bruxelles : De Boeck Université, pp. 125-156, 2007.
- [03] N. Entwistle, « *Concepts and conceptual frameworks underpinning the ETL Project* », Edinburgh, School of Education, University of Edinburgh, 2003.
- [04] K. G. Jöreskog, D. Sörbom, « *Recent developments in structural equation modeling* ». *Journal of Marketing Research*, 19, pp 404-416, 1982.
- [05] Lacroux, « *L'analyse des modèles de relations structurelles par la méthode PLS : une approche émergente dans la recherche quantitative en GRH* », XXème congrès de l'AGRH, Toulouse, 2010.
- [06] G. A. Churchill, « *A paradigm for developing better Measures of marketing constructs* », *Journal of Marketing Research*, vol. 16, pp 64-73, Feb 1979.
- [07] K.A. Bollen, J.S. Long, « *Testing structural equation models* ». Newbury Park, CA: Sage, 1993.
- [08] R.E. Schumaker, R.G. Lomax, « *A beginner's guide to structural equation modelling* », Lawrence Erlbaum Associates, 2ème édition, London, 2004.
- [09] L. Chaput, « *Modèles contemporains en gestion* », Presses de l'Université du Québec, 2006.
- [10] P. Roussel, F. Durrieu, E. Campoy, A. El Akremi, « *Méthodes d'équations structurelles : Recherches et applications en gestion* », Edition Economica, Paris, 2002.
- [11] R.H. Hoyle, « *Structural equation modelling: Concepts issues and applications* », Edition Sage, London, 1995.
- [12] B. Poellhuber, N. Roy et I. Bouchoucha, « *Relations entre la motivation, l'engagement cognitif et la persévérance dans un MOOC francophone (EDULIB)* », Communication au colloque de l'AIPU, Mons, 2014.
- [13] K. DE WULF, G. ODEKERKEN-SCHRÖDER, « *Assessing the impact of a retailer's relationship efforts on consumer's attitudes and behavior* », *Journal of Retailing and Consumer Services*, 10, 2, pp. 95 – 108, 2003.

T.B. Ravaliminoarimalalason, F. Randimbindrainibe, « *Queues applied to Telecoms.* », ISBN 978-1-394-19197-0 (e-book), ISBN 978-1-78630-904-4 (print), Edition ISTE-WILEY, 272 pp, Décembre 2022



First published 2022 in Great Britain and the United States by ISTE Ltd and John Wiley & Sons, Inc.

Apart from any fair dealing for the purposes of research or private study, or criticism or review, as permitted under the Copyright, Designs and Patents Act 1988, this publication may only be reproduced, stored or transmitted, in any form or by any means, with the prior permission in writing of the publishers, or in the case of reprographic reproduction in accordance with the terms and licenses issued by the CLA. Enquiries concerning reproduction outside these terms should be sent to the publishers at the undermentioned address:

ISTE Ltd
27-37 St George's Road
London SW19 4EU
UK
www.iste.co.uk

John Wiley & Sons, Inc.
111 River Street
Hoboken, NJ 07030
USA
www.wiley.com

© ISTE Ltd 2022

The rights of Toky Basilide Ravaliminoarimalalason and Falimanana Randimbindrainibe to be identified as the authors of this work have been asserted by them in accordance with the Copyright, Designs and Patents Act 1988.

Any opinions, findings, and conclusions or recommendations expressed in this material are those of the author(s), contributor(s) or editor(s) and do not necessarily reflect the views of ISTE Group.

Library of Congress Control Number: 2022946967

British Library Cataloguing-in-Publication Data
A CIP record for this book is available from the British Library
ISBN 978-1-78630-904-4

T.B. Ravaliminoarimalalason, M. Rakotomalala, F. Randimbindrainibe, « La théorie des files d'attente. », ISBN 978-620-3-41305-2, Edition EUE, Mars 2021.

Les files d'attente sont omniprésents dans les réseaux de communication fonctionnant en mode paquet. On en trouve dans chaque ordinateur, chaque routeur, chaque point d'accès radio. Ce sont de véritables entonnoirs dont le but est de maximiser l'utilisation des ressources du réseau. C'est à leur niveau que l'on met en place les politiques de partage entre les utilisateurs par ordonnancement et le rejet sélectif des paquets. Lorsque plusieurs transferts de données se partagent un même lien, le système constitué de l'ensemble des fichiers en cours de transfert peut lui-même être vu comme une file d'attente virtuelle, distribuée des serveurs où sont stockés les fichiers en cours de transfert.

Dr. Toky Basilide RAVALIMINOARIMALALASON
Docteur de l'Université d'Antananarivo



EUE ÉDITIONS
UNIVERSITAIRES
EUROPÉENNES



Toky Basilide Ravaliminoarimalalason
Mirisoa Rakotomalala
Falimanana Randimbindrainibe

La théorie des files d'attente

Imprint

Any brand names and product names mentioned in this book are subject to trademark, brand or patent protection and are trademarks or registered trademarks of their respective holders. The use of brand names, product names, common names, trade names, product descriptions etc. even without a particular marking in this work is in no way to be construed to mean that such names may be regarded as unrestricted in respect of trademark and brand protection legislation and could thus be used by anyone.

Cover image: www.ingimage.com

Publisher:
Éditions universitaires européennes
is a trademark of
International Book Market Service Ltd., member of OmniScriptum Publishing
Group
17 Meldrum Street, Beau Bassin 71504, Mauritius
Printed at: see last page
ISBN: 978-620-3-41305-2

Zugl./ Agréé par: LA THÉORIE DES FILES D'ATTENTE

Copyright © Toky Basilide RAVALIMINOARIMALALASON, Mirisoa
RAKOTOMALALA, Falimanana RANDIMBINDRAINIBE
Copyright © 2021 International Book Market Service Ltd., member of
OmniScriptum Publishing Group

Communication orale
lors la 6^{ème} édition des Journées de recherches des ISTs de Madagascar
AMBOSITRA, 05-06-07 Octobre 2021

Intitulé : « Occupation des ressources partagées dans un système multi-service »

Lettre d'acceptation :

Journées de Recherche des ISTs: résultats des évaluations des textes intégraux



Comité Local d'Organisation JRIST2021

mar. 31 août 19:38

À Lantonirina, mitsinjo, Volazara, Notiavina, tony, Dolly, paul212063, Pierre, rangita, Hajaharivelo, moi

Chers tous,

En tout premier lieu, nous tenons à vous féliciter, du fait que, votre proposition de communication, ait été « acceptée en l'état » par le Comité Scientifique des Journées de Recherche des ISTs 6^{ème} édition.

Votre type de présentation est : « oral ».

En second lieu, veuillez lire scrupuleusement ce qui va suivre :

- **Dates des journées:** étant donné la tenue de l'AG de l'AUF du 21 au 24 septembre prochains, et à laquelle plusieurs responsables des établissements universitaires malagasy vont assister, les Journées de Recherche des ISTs 6^{ème} édition seront repoussées au mardi 05 octobre jusqu' au jeudi 08 octobre 2021, à Ambositra.

Programme de la participation :



JOURNEES DE RECHERCHE DES IST ANTANANARIVO, ANTSIRANANA ET AMBOSITRA
6^{ème} Edition 05. 06. 07 octobre 2021
« Interdisciplinarité des recherches scientifiques au service du développement durable et d'une société résiliente »

PROGRAMME

13h55-14h15	29	Occupation des ressources partagées dans un système multi-service	36	Evolution des conditions pluviométriques optimales pour le développement du criquet migrateur Malagasy
14h20-14h40	30	Les causes des défaillances des Micros, Petites et Moyennes Entreprises à Fianarantsoa I, Haute Matsiatra- Madagascar	37	Approche Bioinformatique pour la prévision d'épitopes de la glycoprotéine Héماغglutinine-Neuraminidase (HN) du virus de la Maladie de Newcastle du génotype XI à Madagascar
14h45-15h05	38	Caractéristiques nutritionnelles et fonctionnelles de la farine de patate douce à chair blanche et à peau rouge récoltée dans la Région Atsinanana	22	The method fundamental solution for water wave-structure interaction

Liste des participants :



JOURNÉES DE RECHERCHE DES IST ANTANANARIVO, ANTSIRANANA ET AMBOSITRA

6^{ème} Edition 05. 06. 07 octobre 2021

« Interdisciplinarité des recherches scientifiques au service du développement durable et d'une société résiliente »

LISTE DES COMMUNICATIONS RETENUES

SESSION Orale

Sous-thème 1 : les infrastructures, BTP et les équipements : 10

Sous-thème 2 : la branche industrielle, la maîtrise de l'énergie et l'environnement : 13

Sous-thème 3 : le secteur tertiaire, l'administration et l'entrepreneuriat : 7

Sous-thème 4 : le développement Rural, l'agro-alimentaire, l'élevage et l'agriculture : 9

Sous-thème 5 : les sciences fondamentales et transversales : mathématiques appliquées et physique, science et technologie de l'information et de la communication (STIC), science de l'éducation : 8

18	VALORISATION DU CACTUS OPUNTIA FICUS EN BIOETHANOL		F. RANDREMAHITSIMANANA
19	Etude des variateurs de courant, du type Boost, appliqués à la récupération d'énergie de freinage d'un véhicule		E. Hanitrarinira
20	LES JUMEAUX NUMÉRIQUES ET SES OPPORTUNITÉS DE MISE EN ŒUVRE À MADAGASCAR		Iony Mahefa RASANDIFERA
21	Mesure du méthane et de l'hydrogène à l'aide des capteurs MQ-4 et MQ-8 pour application dans l'électrification rurale		D. A. S. Andriatoavina
22	The method fundamental solution for water wave-structure interaction		Z. Razafizana
23	Estimation du potentiel solaire d'Ambositra		P. B. Randriamanampisoa
24	Enjeux du secteur sante à Madagascar: problèmes et essai de solution		C. Bela
25	Les obstacles sociaux à la création d'entreprise de la jeunesse Malgache		R.M. RAVALISON
26	Les investissements à outrance de 1978-1980 à Madagascar : un blocage au développement industriel		ROCHEL
27	ESSAI DE COMPARAISON DE COUT ENERGETIQUE ENTRE CENTRALE THERMIQUE ET ENERGIE HYDRAULIQUE : UNE ANALYSE MICROECONOMIQUE A PORTEE MACROECONOMIQUE	III	DEL-FREDO
28	Performance financière des communes : vers une taxonomie des collectivités rurales		J.C. ANDRIAMAMPIANDRASO A
29	Occupation des ressources partagées dans un système multi-service		T.B. Ravaliminoarimalalason
30	Les causes des défaillances des Micros, Petites et Moyennes Entreprises à Fianarantsoa I, Haute Matsiatra- Madagascar		J.F. Amanalinkoto
31	Evaluation du potentiel accessible de l'infrastructure écosystémique de Bombetoka : paysage et système des rivières (2007-2017)	IV	ANDRIAMADIA M.M
32	Caractéristiques nutritionnelle et microbiologique d'un aliment infantile « Ma-sôya »		R. Fanambinantsoa Fara

Communication poster
au Salon de Recherche au service de l'économie et de l'emploi
Salon Virtuel organisé par l'Université d'Antananarivo. eSREE 2021, 6^e édition.
22-23-24 Septembre 2021.

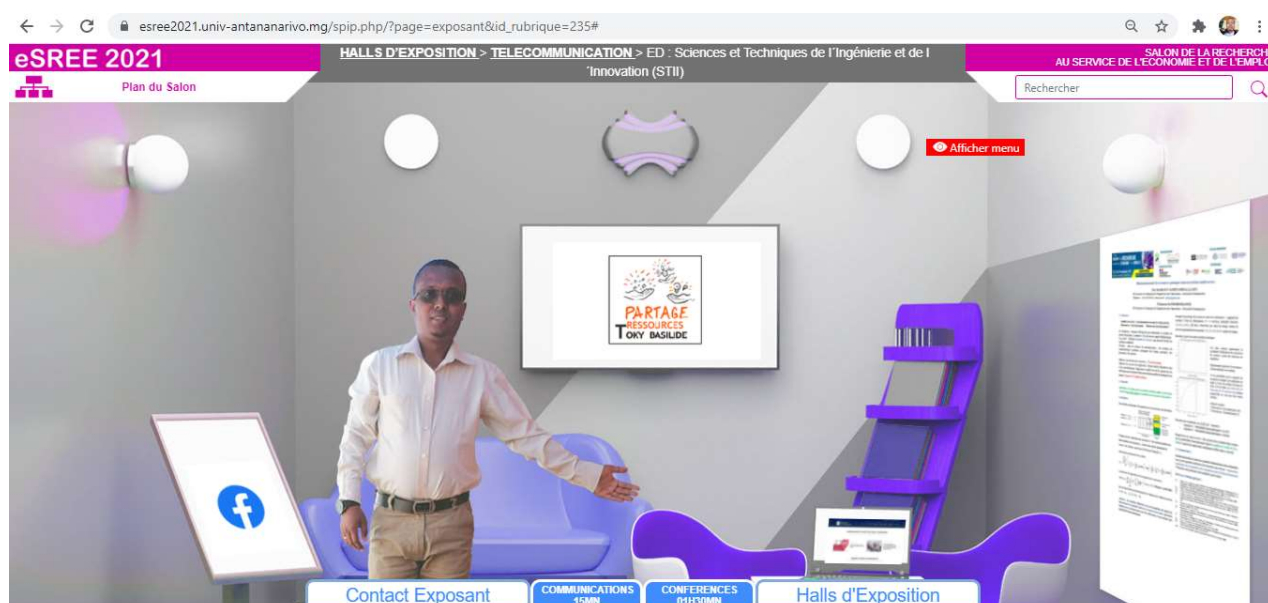
Intitulé : « Le dimensionnement des ressources partagées dans un système multi-service »

Lien : https://esree2021.univ-antananarivo.mg/spip.php/?page=exposant&id_rubrique=235#

Lettre d'acceptation :



Page d'accueil de mon stand d'exposition :



Dimensionnement des ressources partagées dans un système multi-service

Toky Basilide RAVALIMINOARIMALALASON

ED Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation – Université d'Antananarivo
 Téléphone : +261 34 00 164 33, adresse mail : tokybaz@gmail.com

Falimanana RANDIMBINDRAINBE

ED Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation – Université d'Antananarivo

1. Contextes :

Qualité de service = En fonction des ressources d'un service.
Ressources = Investissement. Retour sur investissement ?

En téléphonie : formule d'Erlang B pour déterminer le nombre de canaux nécessaires. Contrainte : Un seul service (appel téléphonique).
Cas actuel : **Multiples facettes de services** que peuvent fournir les systèmes complexes.

Exemple : dans les réseaux de communication : les systèmes de communications modernes partageant des bandes passantes, des puissances, des spectres.

Déployer un maximum de ressources : ↑ investissement.

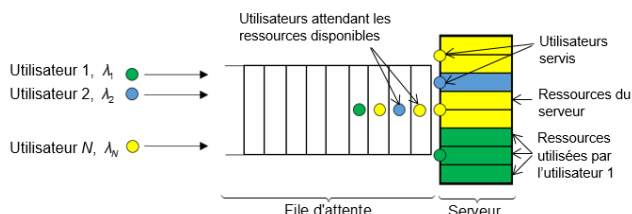
Déployer des ressources insuffisantes : Perdre certains utilisateurs suite à des encombrements. Impactant la qualité de service perçue par les utilisateurs qui ont désiré obtenir une certaine qualité en échange de ses deniers. **Risque de ↓ Chiffre d'affaire.**

2. Objectifs :

Modéliser ce système par un système d'attente multi-service dans le but de bien déterminer les quantités de ressources nécessaires.

3. Résultats :

Des modèles analytiques d'occupation de ces ressources ont été établis.



Chaque service i nécessite une ressource R_i du système pendant une durée aléatoire de moyenne μ_i . Arrivée des clients demandant le service i au système : processus de Poisson d'intensité λ_i .

Distribution stationnaire du système :

$$\pi_n = \frac{\left(\sum_{i=1}^M \lambda_i\right)^n}{n!} \cdot \left(\int_0^{+\infty} (1 - \sum_{i=1}^M F_{S_i}(s)) ds\right)^n \cdot \exp\left(-\left(\sum_{i=1}^M \lambda_i\right) \cdot \int_0^{+\infty} (1 - \sum_{i=1}^M F_{S_i}(s)) ds\right)$$

La fonction de répartition de l'occupation des ressources :

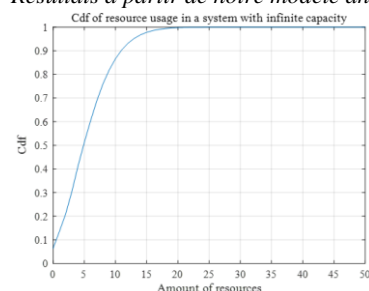
$$P(R \leq r) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\substack{k_i \\ \bar{k}_i \bar{R}_i \leq r}} \left(\pi_k \cdot \left(\frac{k}{k_i}\right) \cdot \prod_i p_i^{k_i}\right) \text{ où } p_i = \lambda_i / \lambda \text{ désigne la probabilité}$$

qu'un client choisi au hasard parmi les k clients servis utilise le service i , et $\bar{k}_i = k_1, \dots, k_M$, $\bar{R}_i = R_1, \dots, R_M$.

Analyses : Les analyses effectuées sur ces occupations ont permis de **dimensionner la quantité totale de ressources nécessaires** qu'on doit déployer sur le système pour servir les utilisateurs à une certaine QoS (probabilité d'encombrement).

Exemple de partage de ressources entre les utilisateurs : capacité du système C dont on déterminera. $N = 4$ services, intensité d'arrivée $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 2,5$, et $\lambda_4 = 5$ arrivées par unité de temps, durée de service exponentielle de moyenne $1/3$, $1/4$, $1/5$, et $1/6$ unités de temps.

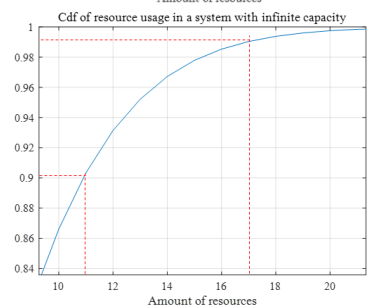
Résultats à partir de notre modèle analytique :



Ces deux courbes représentent la probabilité d'utilisation des ressources du système à partir des fonctions de répartition.

Déploiement à partir de 20 ressources : Aucune influence sur système.

→ La probabilité que la quantité de ressources occupées soit supérieure ou égale à 20 est très infime (avoisine le zéro). Il n'est donc pas nécessaire de doter plus de 20 ressources le système puisqu'elles ne vont pas être toutes utilisées.



Selon les courbes :

11 Ressources : Encombrement 10%
 17 Ressources : Encombrement 1%

Résultats des simulations sur MATLAB – Simulink :

- Capacité 11 : Probabilité d'encombrement = 0,1073
- Capacité 17 : Probabilité d'encombrement = 0,0166

Rapporté au cas mono-service : On a retrouvé les résultats bien connus sur la probabilité d'encombrement dans le **modèle de trafic de Fry-Molina** à partir des expressions analytiques établis dans ce travail.

4. Commentaires :

Modèle limité dans le cadre des quantités déterministes mais extensible aux cas des quantités aléatoires de ressources par service : **expressions analytiques des occupations plus complexes pour le dimensionnement** → Recours aux puissances des machines pour calcul.

Références bibliographiques :

- [1] Erlang, A.K. Løsning af nogle Problemer fra Sandsynlighedsregningen af Betydning for de automatiske Telefoncentraler (Solution of some Problems in the Theory of Probabilities of Significance in Automatic Telephone Exchanges). *Elektroteknikeren*. 1917, 13, 5-13.
- [2] Palm, C. Table of the Erlang Loss Formula. *Telefonaktiebolaget LM Ericsson*, Stockholm. 1947.
- [3] Iversen, V.B. The A-formula. *Teleteknik, English ed.* 1980, 23 (2), 64-79.
- [4] Vault, E.; Chaveau, J. Extension de la formule d'Erlang au Cas où le Trafic est Fonction du Nombre d'Abonnés Occupés (Extension of the Erlang formula to the case where the traffic depends on the number of busy subscribers). *Annales de Télécommunications*. 1949, 4 (8), 319-324.
- [5] Iversen, V.B. The exact evaluation of multi-service loss system with access control. *Teleteknik, English ed.* 1987, 31 (2), 56-61.
- [6] Hanczewski, S.; Stasiak, M.; Weissenberg, J. A queueing model of a multi-service system with state-dependent distribution of resources for each class of calls. *IEICE Trans. Commun.* 2004, E97-B (8), 1592-1605.
- [7] Hanczewski, S.; Kmiecik, D.; Stasiak, M.; Weissenberg, J. Multi-service queueing system with elastic traffic. *Proc. IEICE Gen. Conf.* 2016, BS-3-18
- [8] Fry, T.C. *Probability and its Engineering Uses*. New York. 1928
- [9] Molina, E.C. Application of the Theory of Probability to Telephone Trunking Problems. *The Bell System Technical Journal*. 1927, 6 (3), 461-494
- [10] Iversen, V.B. *Teletraffic engineering handbook*, ITU-D SG 2/16 & ITC. 2001

Communication orale

lors la 4^e édition des Journées de recherches des ISTs de Madagascar

ANTANANARIVO, 02-03-04 Juillet 2019

Intitulé : « Myopic model of resource sharing in a queueing network »

Lettre d'acceptation :

Journées de recherche : session orale Boîte de réception x

 **Jean Lalaina RAKOTOMALALA** <jean.lalaina@gmail.com> jeu. 13 juin 2019 15:14 ☆ ↩ ⋮
À GIRON, Luc, Lovatiana, Volana, Maharo, RANJARANIMARO, Miraniaina, Njarasoa, Sedic, Briand, Milasoa, moi, Voahir

Mesdames et Messieurs,

Suite aux travaux de sélection des propositions effectués par le Comité Scientifiques qui s'est réuni ce jeudi 13 juin, J'ai le plaisir de vous annoncer que votre proposition a été retenue (cf fichier ci-joint).
Aussi, le programme définitif vous parviendra courant de la semaine prochaine, et je vous invite d'ores et déjà à préparer le slide de votre intervention.

Au plaisir de vous retrouver aux **Journées**,
Bien cordialement.

Au nom du Comité Scientifique
Pr Jean Lalaina RAKOTOMALALA
Directeur Général de l'IST d'Antananarivo Madagascar
Tél 00261 34 11 473 03 ou 00261 33 11 473 03

Programme de la participation :



JOURNÉES DE RECHERCHE DES IST ANTANANARIVO, ANTSIRANANA ET AMBOSITRA

« Les recherches scientifiques et technologiques, renforcement de la coopération régionale de l'Océan Indien »,

Antananarivo, les 2, 3 et 4 Juillet 2019

PROGRAMME

	SECTION 1	SECTION 2
am	Présidents de séance : Pr Victor RAZAFINJATO et Pr Jean Claude GATINA qui désignent les 2 Rapporteurs	Président de séance : Pr José ANDRIAMAMPANINA qui désigne les 2 Rapporteurs
10h30-12h30	3 communications : n° 13, 6, 7	3 communications : n° 1, 4, 18
12h30	Pause-déjeuner	Pause-déjeuner
pm	Président de séance : Pr Harlin ANDRIATSIHOARANA 2 Rapporteurs :	Président de séance : Pr Christian RAKOTONIRINA qui désigne les 2 Rapporteurs
14h00-17h30	5 communications n° 9, 10, 11, 37, 16	5 communications n° 28, 31, 32, 39, 41

Mercredi 03 juillet 2019

Liste des participants :



JOURNEES DE RECHERCHE DES IST ANTANANARIVO, ANTSIRANANA ET AMBOSITRA
« Les recherches scientifiques et technologiques, renforcement de la coopération régionale de l'Océan Indien »,
 Antananarivo, les 2, 3 et 4 Juillet 2019

LISTE DES PROPOSITIONS RETENUES PAR LE COMITE SCIENTIFIQUE REUNI LE 13 JUIN 2019

SESSION ORALE

Sous-thème 1 : les infrastructures, BTP et les équipements : 3
Sous-thème 2 : la branche industrielle, la maîtrise de l'énergie et l'environnement : 10
Sous-thème 3 : le secteur tertiaire et l'entrepreneuriat : 4
Sous-thème 4 : les sciences fondamentales et transversales : mathématiques appliquées et physique, science et technologie de l'information et de la communication (STIC), science de l'éducation : 8

N°	Titre	Nature	Sous-thème	
13	Caractérisation de sols pour la construction de bauge de Madagascar	1	1	ORALE
37	Modélisation d'une poutre isostatique chargée par un convoi Méthode par la variable Position de la Première Charge du Convoi	1	1	ORALE
50	Identification par analyse multivarié des déterminants des accidents fatals et graves des deux-roues motorisés (2RMs) à Maurice	1	1	ORALE
6	Etude numérique avec la méthode SPH d'un profil d'aile muni d'un Alula. Contribution à l'amélioration du comportement de vol d'un aéronef	1	2	ORALE
7	Transcription des G-codes de pièces conçues en CAO, en programmation VAL3 du logiciel des robots Staubli TX90XL	1	2	ORALE
9	Simulation d'un gradateur nouveau modèle monophasé commandé par FPGA	1	2	ORALE
10	Onduleur triphasé nouveau modèle, économique, à faible taux d'harmoniques de sortie	1	2	ORALE
15	Avantages et réalités d'une alternative énergétique, écologique, hygiénique des briquettes combustibles à base de balle de riz. Cas du district de Morombe, région Atsimo Andrefana	1	2	ORALE
16	Génération de trajectoires et commandes d'un robot SCARA pour une application de découpes laser	1	2	ORALE
29	Analyse de performance des batteries d'accumulateurs	1	2	ORALE
32	Utilisation de l'énergie de biomasse dans le Menabe. A qui imputer les impacts environnementaux ?	1	2	ORALE
36	Analyse multicritère des ratios des volets environnemental, technique et économique d'un bâtiment faisant appel à plusieurs variantes de procédés de construction	1	2	ORALE
38	Quelles caractéristiques chimiques pour la prédiction du Pouvoir Calorifique Supérieur de résidus organiques en milieu tropical ?	1	2	ORALE
4	L'effet d'entraînement de la micro finance sur l'accès au financement et la croissance des micro entreprises : situation de Madagascar	1	3	ORALE
11	FARPlot : Outil d'analyse de données de simulation hydrodynamique SPH sur SPhysics développé sur Matlab	1	3	ORALE
42	Etude des relations entre formation et Intentions entrepreneuriales des étudiants en tourisme de l'INTH	1	3	ORALE
47	The environmental barriers to malagasy youth's Business creation	1	3	ORALE
18	Reconnaissance palmaire Par Réseaux de Neurones	1	4	ORALE
28	Estimation des trajectoires des Dahalo par une analyse cellulaire	1	4	ORALE
31	Myopic model of resource sharing in a queuing network	1	4	ORALE
39	Les déterminants de la réussite dans une formation ouverte et à distance : les apports de la sélection des apprenants	1	4	ORALE
41	Usage des artefacts mobiles dans la réalisation du projet tutoré dans une FOAD	1	4	ORALE
44	Utilisation d'un modèle d'apprentissage asynchrone dans une formation en ligne	1	4	ORALE
49	Les déterminants et les conséquences de la satisfaction des étudiants dans le cadre de l'enseignement supérieur : cas de l'IST	1	4	ORALE
52	Simulation numérique de la combustion dans une unité d'incinération de déchets ménagers	1	4	ORALE

13 juin 2019
 Le Comité Scientifique
 Pr Jean Lalaina RAKOTOMALALA

CONCLUSION

Ce document recense mes travaux de recherche effectués au sein du Laboratoire de Recherche en Sciences Cognitives et Applications (LR-SCA) de l'Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation (ED-STII) de l'Université d'Antananarivo.

J'ai présenté seize (16) publications d'articles dans des revues de notoriété internationale et nationale à comité de lecture. Ces articles détaillent soit des modélisations d'utilisation et de dimensionnement de ressources, soit des outils qu'on a utilisés pour ces modélisations comme les nombres p -adiques, les modélisations floues, et les équations de diffusion de Cauchy, soit des études de cas pratiques avec les ressources utilisées en formation à distance asynchrone.

Deux (02) ouvrages à ISBN ont été publiés et mentionnés dans ce document. Ces ouvrages détaillent les études stochastiques des utilisations des ressources en partant de leurs bases mathématiques qui sont les théories des files d'attente.

Certains de mes travaux sont présentés dans des conférences comme des journées de recherche ou des salons de recherche à comité de lecture. Mes participations dans trois (03) événements scientifiques ont été montrées dans les dernières parties de ce document.

FICHE DE RENSEIGNEMENTS

Nom : RAVALIMINOARIMALALASON

Prénoms : Toky Basilide

Adresse : Lot FVF 7B Firavahana Fenoarivo

Antananarivo 102

Madagascar

Téléphone : +261 34 00 164 33

Email : tokybaz@gmail.com



Titre :

MODELISATION STOCHASTIQUE D'UTILISATION ET DE DIMENSIONNEMENT DES RESSOURCES PARTAGEES

Nombre de pages : 185

Mots clés : Dimensionnement, File d'attente, Occupation, p -adique, Partage, Ressources, Stochastique

Garant scientifique de l'HDR : RANDIMBINDRAINIBE Falimanana

Grade : Professeur Titulaire

Téléphone : +261 34 46 059 46

Email : falimanana@mail.ru