



HAL
open science

Modélisation stochastique d'utilisation et de dimensionnement des ressources partagées

Toky Basilide Ravaliminoarimalalason

► **To cite this version:**

Toky Basilide Ravaliminoarimalalason. Modélisation stochastique d'utilisation et de dimensionnement des ressources partagées. Réseaux et télécommunications [cs.NI]. Université d'Antananarivo, 2023. tel-04097972

HAL Id: tel-04097972

<https://hal.science/tel-04097972v1>

Submitted on 15 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright



UNIVERSITE D'ANTANANARIVO
ECOLE DOCTORALE



en

SCIENCES ET TECHNIQUES DE L'INGENIERIE ET DE L'INNOVATION

Equipe d'Accueil Doctorale

SCIENCES COGNITIVES ET APPLICATIONS

Pour l'obtention du DIPLOME de :

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES
DE L'UNIVERSITE D'ANTANANARIVO

***Spécialité* : SCIENCES COGNITIVES ET APPLICATIONS**

Sur le thème :

MODELISATION STOCHASTIQUE D'UTILISATION
ET DE DIMENSIONNEMENT
DES RESSOURCES PARTAGEES

Volume 1 : SYNTHESE DES TRAVAUX

***Par* : Monsieur RAVALIMINOARIMALALASON Toky Basilide**
Docteur de l'Université d'Antananarivo

Soutenu le 16 Février 2023 devant la Commission de jury composée de :

Président de jury : Monsieur ANDRIANARISON Edouard Ravalison, Professeur

Rapporteur externe : Monsieur RATIARISON Adolphe Andriamanga, Professeur Emérite

Rapporteur interne : Monsieur RAVONIMANANTSOA Ndaohialy Manda-Vy, Professeur

Examineurs : Madame RAKOTONDRAJAO Fanja Rondro, Professeur

Monsieur RAKOTOMALALA Mamy Alain, Professeur

Monsieur ANDRIANARIZAKA Marc Tiana, Docteur HDR

Garant Scientifique : Monsieur RANDIMBINDRAINIBE Falimanana, Professeur Titulaire

TENY FISAORANA

Voalohany indrindra dia fisaorana no atolotro an'Andriamanitra noho ny fahatsarany nanome ahy hery sy fahombiazana nahafahako nanatontosa ireo dingana rehetra tamin'ny fikarohana izay nataoko hatramin'ny fahavitan'izao asa izao.

Isaorako manokana etoana ireto olona manaraka ireto noho ny fandraisany anjara, mivantana na ankolaka, tamin'ny famitana izao asa izao :

- Andriamatoa **RAVELOMANANA Mamy Raoul, Profesora Laharana Ambony**, Filohan'ny Oniversiten'Antananarivo,
- Andriamatoa **RAKOTOSAONA Rijalalaina, Profesora**, Talen'ny Sekoly Ambony Politeknikan'Antananarivo,
- Andriamatoa **ANDRIANARISON Edouard Ravalison, Profesora**, Talen'ny Sekoly ED-STII, sady Filoha mitarika ireo Mpitsara izao fikarohana izao,
- Andriamatoa **RANDIMBINDRAINIBE Falimanana, Profesora Laharana Ambony**, Mpiantoka izao asa fikarohana izao,
- Andriamatoa **RATIARISON Adolphe, Profesora Zokiolona**, Mpampakateny amin'izao fikarohana izao,
- Andriamatoa **RAVONIMANANTSOA Ndaohialy Manda-Vy, Profesora**, Mpampakateny amin'izao fikarohana izao,
- Andriamatoa sy Ramatoa isany mpitsara izao asa fikarohana izao :
 - o **RAKOTOMALALA Mamy Alain, Profesora**,
 - o **RAKOTONDRAJAO Fanja Rondro, Profesora**,
 - o **ANDRIANARIZAKA Marc Tiana, Dokotera HDR**,
- Ireo mpikambana tao amin'ny komisiona siantifika manokana eto amin'ny Sekoly izay nandinika akaiky sy nanaiky izao asa izao,
- Ireo mpiasa mpampianatra mpikaroka sy mpandraharaha eto amin'ny Sekoly,
- Ireo fianakaviako, indrindra ny vadiko Ando, ireo zanako Amboara, Antsaly, Andriaina, ary ireo Ray aman-dreniko,

Ireo rehetra izay nandray anjara, na mivantana na ankolaka, tamin'ny fikarohana rehetra izay nataoko hatramin'ny fahavitan'izao asa izao. Misaotra tompoko !

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier le Bon Dieu de m'avoir donné la force et le courage pendant toutes les étapes de recherches que j'ai effectuées jusqu'à l'élaboration de cet ouvrage.

Les travaux présentés dans cette thèse sont effectués au sein du Laboratoire de Recherche en Sciences Cognitives et Applications (LR-SCA) de l'Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation (ED-STII) à l'Université d'Antananarivo.

Je tiens à remercier strictement aux personnes suivantes pour leurs attributions à la réalisation de mes recherches et à la présentation de la présente thèse :

- Monsieur **RAVELOMANANA Mamy Raoul, Professeur Titulaire**, Président de l'Université d'Antananarivo,
- Monsieur **RAKOTOSAONA Rijalalaina, Professeur**, Directeur de l'Ecole Supérieure Polytechnique d'Antananarivo,
- Monsieur **ANDRIANARISON Edouard Ravalison, Professeur**, Directeur de l'Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation, et Président de jury de cette HDR,
- Monsieur **RANDIMBINDRAINIBE Falimanana, Professeur Titulaire**, Garant Scientifique de cette HDR,
- Monsieur **RATIARISON Adolphe, Professeur Emérite**, Rapporteur externe de cette HDR,
- Monsieur **RAVONIMANANTSOA Ndaohialy Manda-Vy, Professeur**, Rapporteur interne de cette HDR
- Monsieur **RAKOTOMALALA Mamy Alain, Professeur**, Examineur de cette HDR,
- Madame **RAKOTONDRAJAO Fanja Rondro, Professeur**, Examineur de cette HDR,
- Monsieur **ANDRIANARIZAKA Marc Tiana, Docteur HDR**, Examineur de cette HDR,
- Tous les membres de la Commission Scientifique de l'Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation pour la validation de ce travail,
- Tous les personnels enseignants et administratifs de l'Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation,
- Toute ma famille, ma femme Ando et mes enfants Amboara, Antsaly, Andriaina, mes parents,

- Toutes personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à mes recherches et à l'élaboration de cet ouvrage.

Merci à tous !

TABLE DES MATIERES

TENY FISAORANA	i
REMERCIEMENTS.....	ii
TABLE DES MATIERES.....	iv
LISTE DES ABREVIATIONS	vii
NOTATIONS	ix
LISTE DES FIGURES.....	xv
LISTES DES TABLEAUX	xvi
INTRODUCTION GENERALE	1
PARTIE 1. ANIMATION DES EQUIPES DE RECHERCHE ET DIRECTION DE RECHERCHE	3
INTRODUCTION.....	5
CHAPITRE 1. RESPONSABILITES ACADEMIQUES.....	7
1.1 Introduction.....	7
1.2 Parcours scientifique	7
1.2.1 De l'ingéniorat au DEA.....	7
1.2.2 Le doctorat.....	7
1.2.3 Le postdoc	8
1.2.4 Copie du diplôme de doctorat.....	9
1.2.5 Attestation d'inscription en HDR.....	10
1.2.6 Lettre d'acceptation du Responsable Hiérarchique.....	11
1.3 Responsabilités pédagogiques	12
1.4 Expérience postdoctorale et projet de recherches	14
1.5 Conclusion	17
CHAPITRE 2. TRAVAUX D'ENCADREMENTS.....	19
2.1 Introduction.....	19
2.2 Encadrements de mémoires de Master	19
2.3 Co-encadrements de thèses de doctorat.....	21
2.4 Conclusion	21
CONCLUSION	22

PARTIE 2. SYNTHÈSE DES TRAVAUX ACADÉMIQUES.....	23
INTRODUCTION ET POSITION DE LA PROBLÉMATIQUE DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE ORIGINALE DE HAUT NIVEAU.....	25
CHAPITRE 3. MODELISATION D'UTILISATION ET DE DIMENSIONNEMENT DES RESSOURCES DISCRETES ET FRACTIONNAIRES PARTAGEES.....	29
3.1 Introduction	29
3.2 Etat de l'art et contexte	29
3.3 Du processus de naissance et de mort.....	31
3.4 Distribution d'état du partage de ressources discrètes	33
3.4.1 <i>File d'attente de capacité infinie et serveurs de capacité infinie.....</i>	33
3.4.2 <i>File d'attente de capacité infinie et serveurs de capacité finie.....</i>	35
3.4.3 <i>Etude de cas par des simulations.....</i>	40
3.4.4 <i>Modèle de partage de ressources à des utilisateurs flous.....</i>	44
3.5 Distribution d'état du partage de ressources fractionnaires.....	49
3.5.1 <i>Ressources infinies, utilisation à valeurs réelles positives.....</i>	49
3.5.2 <i>Ressources finies, utilisation à valeurs réelles positives.....</i>	51
3.6 Conclusion.....	59
CHAPITRE 4. MODELISATION D'UTILISATION ET DE DIMENSIONNEMENT DES RESSOURCES PARTAGEES D'UN SYSTEME MULTISERVICE.....	61
4.1 Introduction	61
4.2 Etat de l'art et contexte	61
4.3 Description du modèle.....	63
4.4 Expressions analytiques	64
4.4.1 <i>Partage de ressources infinies.....</i>	64
4.4.2 <i>Partage de ressources finies.....</i>	68
4.4.3 <i>Que se passe-t-il en cas de mono-service et ressource unitaire pour chaque utilisateur ?</i>	69
4.4.4 <i>Généralisation pour des quantités de ressources aléatoires demandées par les utilisateurs..</i>	71
4.5 Etude de cas par des simulations.....	73
4.6 Conclusion.....	76

CHAPITRE 5. MODELISATION P-ADIQUE ET ULTRAMETRIQUE D'UTILISATION DES RESSOURCES PARTAGEES D'UN SYSTEME DE RESSOURCES HIERARCHISEES.....	77
5.1 Introduction.....	77
5.2 Etat de l'art et contexte	77
5.3 Les nombres p-adiques	79
5.3.1 <i>Valeur absolue p-adique</i>	<i>79</i>
5.3.2 <i>Distance p-adique</i>	<i>80</i>
5.3.3 <i>Ensemble des nombres p-adiques.....</i>	<i>81</i>
5.4 Modèle ultramétrique de ressources hiérarchisées.....	82
5.4.1 <i>Système de ressources hiérarchiques</i>	<i>82</i>
5.4.2 <i>Modèle ultramétrique.....</i>	<i>83</i>
5.4.3 <i>Utilisation de ressources</i>	<i>84</i>
5.5 Application	87
5.5.1 <i>Définition du système.....</i>	<i>87</i>
5.5.2 <i>Etat d'utilisation de ressources du système</i>	<i>88</i>
5.5.3 <i>Analyses des distances entre les états d'utilisation des ressources</i>	<i>89</i>
5.5.4 <i>La loi probabilité des quantités de ressources utilisées.....</i>	<i>92</i>
5.6 Conclusion	92
CONCLUSION ET PERSPECTIVES.....	95
ANNEXES	97
BIBLIOGRAPHIE.....	119
RESUME	129
ABSTRACT	130

LISTE DES ABREVIATIONS

AMR	Adaptative Multi-Rate
BCH	Busy-Calls-Held
BSS	Base Station Subsystem
cFIFO	Continuous First In First Out
CPICH	Common Pilot CHannel
DEA	Diplôme d'Etude Approfondie
DL	Downlink
ESPA	Ecole Supérieure Polytechnique d'Antananarivo
ED	Enseignement Dirigé
EP	Enseignement Pratique
ET	Enseignement Théorique
eSREE	Salon de Recherche au service de l'Economie et de l'Emploi (virtuel)
FIFO	First In First Out
FM	Fuzzy Markovian
GR	Génie des Radiocommunications
GRT	Génie des Réseaux de Télécommunication
GSM	Global System for Mobile communications
HSDPA	High Speed Downlink Packet Access
IJARIE	International Journal of Advance Research and Innovative Ideas in Education
IJERT	International Journal of Engineering Research and Technology
IJETR	International Journal of Engineering and Technical Research
IRC	Ingénierie des Radiocommunications
IRS	Ingénierie des Réseaux et Systèmes
ISSN	International Standard Serial Number
IST	Institut Supérieur de Technologie
LTE	Long Term Evolution
MATLAB	Matrix Laboratory

OICNS	Outils Informatiques et Calcul Numériques Scientifiques
PS	Processor Sharing
SD-FIFO	State Dependent First In First Out
SQL	Structured Query Language
STI	Système de Traitement des Informations
TCO	Télécommunication
TM	Télécommunication et Multimédia
VBA	Visual Basic for Applications
WCDMA	Wideband Code Division Multiple Access

NOTATIONS

1. Minuscules latines

a_k	Nombre réel positif quelconque
a^j	Nombre quelconque de l'anneau \mathbb{Z}_p
$a^{j_0 \dots j_{v-1}}$	Nombre quelconque de l'anneau \mathbb{Z}_p
d_p	Distance p -adique
e_i	Etat quelconque d'un système quelconque
$f(t)$	Fonction quelconque de variable réelle t
$f^{*n}(t)$	n produits de convolution successifs de la fonction $f(t)$ par elle-même
$f_k(x)$	Fonction densité de probabilité au point x d'une variable aléatoire égale à la quantité de ressources occupées par k clients
$f_X(x)$	Fonction densité de probabilité au point x d'une variable aléatoire X
$g(t)$	Fonction quelconque de variable réelle t
h	Pas positif lors de la découpe en morceaux d'un intervalle pour le calcul de l'intégrale de Riemann
i	Indice d'un service
k	Nombre de clients, indice d'un client
k_i	Nombre de clients utilisant le service i parmi les k clients servis par le système Nombre entier quelconque
\vec{k}_i	Vecteur dont les composantes sont k_i
m	Moyenne de la loi binomiale des nombres de ressources demandées Nombre entier quelconque
n	Nombre de clients, indice d'un client Nombre entier quelconque
o	Fonction petit o
p	Paramètre d'une loi binomiale quelconque Nombre premier quelconque
p_i	Taux des clients utilisant le service i Probabilité seuil d'utilisation de la ressource T_i

p_{ij}	Probabilité de transition d'un état i vers un état j
p_t	Probabilité qu'un client arrivant dans l'intervalle $(0,t)$ soit encore servi à l'instant t
$p(x y;t)$	Probabilité de transition de l'état y vers l'état x à l'instant t
$p(x y)$	Probabilité de transition de l'état y vers l'état x
q	Nombre réel quelconque inférieur à 1, souvent $q = 1 - p$
$q(x,t)$	Probabilité que le système se trouve à l'état x à l'instant t
$q(B_v, t)$	Probabilité que l'état du système se trouve à l'instant t appartient à une boule B_v
r	Besoin en termes de nombre de ressources Nombre rationnel quelconque
r_k	Nombre de ressources utilisées par le k -ème client Nombre de ressources de type T_k utilisées Nombre rationnel quelconque
s	Variable réelle positive quelconque
t	Variable réelle quelconque, variable temps
v_p	Valuation p -adique
x	Nombre réel quelconque Nombre p -adique quelconque
x_{ij}	Quantité de ressources utilisée par le j -ème utilisateur du service i
x_j	j -ème coordonnées de x
y	Nombre réel quelconque
y_j	j -ème coordonnées de y

2. Majuscules latines

A	Générateur stochastique infinitésimal d'une chaîne de Markov en temps continu
(A_t)	Processus des arrivées des clients à la file d'attente
$A_t = m$	Mesure de comptage du processus d'arrivée des clients dans l'intervalle $(0,t)$
B	Probabilité de blocage du système, probabilité d'encombrement su système

$B_{1/p}(a^j)$	Boule de centre a^j et de rayon $1/p$
$\mathcal{B}(n, p)$	Loi binomiale de paramètre n et p
C	Nombre maximal de ressources d'un système, capacité de ce système
C_α	Constante de normalisation
D	Quantité de ressources à déployer dans un système
D^α	Opérateur de Vladimirov
$\mathcal{E}(\mu)$	Loi exponentielle de paramètre μ
$F_k(x)$	Fonction de répartition au point x d'une variable aléatoire égale à la quantité de ressources occupées par k clients
$F_X(x)$	Fonction de répartition au point x d'une variable aléatoire X
$F_X^C(x)$	Fonction de répartition inverse au point x d'une variable aléatoire X
$G(r)$	Fonction de répartition de la quantité de ressources demandée par un client quelconque
$G_i(r)$	Fonction de répartition de la quantité de ressources demandée par un client utilisant le service i
Id	Matrice identité
\mathcal{L}_i	Loi de probabilité de quantité de ressources demandée par les clients
M	Nombre maximal de ressources qu'un client peut demander
N	Variable aléatoire égale au nombre de clients dans un système
N_S	Nombre de services qu'un système peut fournir
\mathbb{N}	Ensemble des nombres entiers naturels
\mathbb{N}^*	Ensemble des nombres entiers naturels non nuls
$N(t)$	Nombre de clients en train d'être servis à l'instant t
P	Probabilité, fonction probabilité
\mathcal{P}	Probabilité floue
P_a	Probabilité d'arrivée d'un client dans un intervalle de temps petit
P_d	Probabilité de départ d'un client dans un intervalle de temps petit
$P_k(r)$	Probabilité que k clients utilisent r ressources

P_s	Probabilité que le système soit de capacité s en termes de nombre de clients
\mathbb{Q}	Ensemble des nombres rationnels
\mathbb{Q}_p	Ensemble des nombres p -adiques
R	Variable aléatoire égale au nombre total de ressources que les clients ont besoin, égale au nombre de ressources occupées dans le cas d'une capacité infinie des serveurs
	Rayon d'une boule quelconque dans \mathbb{Q}_p
R_i	Nombre de ressources utilisées par un client de service i
\vec{R}_i	Vecteur dont les composantes sont R_i
R_j	Utilisation quelconque de ressources en fixant j l'utilisation de la ressource T_0
R_{ji}	Utilisation quelconque de ressources en fixant j l'utilisation de la ressource T_0 et i celle de T_1
R_k	Variable aléatoire égale au nombre total de ressources demandées par k clients
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
\mathbb{R}_+	Ensemble des nombres réels positifs
S	Variable aléatoire égale à la durée du service demandé par un client quelconque
S_i	Distribution de la durée du service i
T	Inter-arrivée des clients
T_i	Type de ressource
T_n	Instant de la n -ème arrivée de client
\mathbb{Z}	Ensemble des nombres entiers relatifs
\mathbb{Z}_p	Boule de centre 0 et de rayon 1 dans \mathbb{Q}_p

3. Minuscules grecques

α	Paramètre de la loi de Poisson d'une variable aléatoire quelconque Caractérisation de la transition d'état d'un système de ressources Nombre réel appartenant à $[0,1]$ variable d'une α -coupe
β	Paramètre de la loi de Poisson d'une variable aléatoire quelconque

$\gamma(k, x)$	Fonction gamma incomplète d'Euler
ε	Nombre réel positif infiniment petit
λ	Taux d'arrivée des clients
$\bar{\lambda}$	Taux moyen d'arrivée des clients
λ	Taux d'arrivée flou des clients
λ_i	Taux d'arrivée des clients utilisant le service i
λ_k	Taux d'arrivée des clients
λ_{max}	Valeur maximale que peut prendre le taux d'arrivée λ des clients
λ_{min}	Valeur minimale que peut prendre le taux d'arrivée λ des clients
μ	Inverse de la durée moyenne de service demandé par les clients
	Mesure quelconque sur l'espace \mathbb{Q}_p
$\bar{\mu}$	Moyenne de l'inverse de la durée moyenne de service demandé par les clients
μ	Inverse de la durée moyenne floue de service demandé par les clients
μ_{max}	Valeur maximale que peut prendre μ
μ_{min}	Valeur minimale que peut prendre μ
μ_k	Inverse de la durée moyenne de service demandé par les clients
ν	Valuation p -adique d'un nombre p -adique quelconque
π	Vecteur distribution stationnaire d'un système
π_k	k -ème composante de la distribution stationnaire d'un système, probabilité qu'un système se trouve à l'état k
$\pi_{k,s}$	k -ème composante de la distribution stationnaire d'un système dont s est le nombre maximal de clients qu'il peut servir
ρ	Facteur de charge d'un système
ρ	Facteur de charge flou d'un système
ρ_{max}	Valeur maximale que peut prendre le facteur de charge ρ
ρ_{min}	Valeur minimale que peut prendre le facteur de charge ρ
$\rho(x, y)$	Distance métrique entre deux nombres rationnels x et y

4. Majuscules grecques

$\Gamma(k, \mu)$ Loi gamma de paramètre k et μ

Γ_p Fonction quelconque utilisée dans la définition de l'opérateur de Vladimirov

5. Notations spéciales

$\binom{n}{p}$ Nombre de combinaisons p parmi n

$\binom{k}{k_1, \dots, k_n}$ Coefficient multinomial

$f * g$ Produit de convolution d'une fonction f et d'une fonction g

$\prod_{i=1}^{*n} f_i(x)$ Produit de convolution des fonctions $f_1(x)$ à $f_n(x)$ pour une famille de fonctions $\{f_i(x)\}_{i=1, \dots, n}$

\cdot Nombre flou

$|\cdot|$ Norme métrique standard, valeur absolue

$|\cdot|_p$ Valeur absolue p -adique

$(\cdot)_p$ Nombre p -adique

♣ Début d'une démonstration

♦ Fin d'une démonstration

LISTE DES FIGURES

Figure 3.01. Description du modèle	32
Figure 3.02. Partage de ressources infinies.....	41
Figure 3.03. Partage de ressources finies.....	42
Figure 3.04. Lois de probabilités de ressources utilisées (ressources infinies).....	42
Figure 3.05. Loi de probabilités de ressources utilisées (ressources finies)	43
Figure 3.06. Fonction d'appartenance de $P(R = 6)$	47
Figure 3.07. Fonctions d'appartenance de $P(R = r)$ pour différentes valeurs de r	47
Figure 3.08. Support des probabilités floues $P(R = r)$	48
Figure 3.09. Fonction de répartition du nombre de ressources occupées	56
Figure 3.10. Fonctions de répartition d'utilisation pour une capacité fixe et charge variable	57
Figure 3.11. Fonction de répartition d'utilisation en variant la capacité C	59
Figure 4.01. Description du modèle	64
Figure 4.02a. Fonction de répartition de la quantité de ressources occupées pour une capacité infinie	74
Figure 4.02b. Fonction de répartition de la quantité de ressources occupées pour une capacité infinie – Figure agrandie.....	75
Figure 5.01. Distance entre les états du système sous forme 3D	90
Figure 5.02. Distance entre les états du système sous forme de coloriage de plan.....	91
Figure A.01. Modèle SIMULINK d'utilisation de ressources discrètes ou fractionnaires.....	101
Figure A.02. Modèle SIMULINK d'utilisation de ressources d'un système multiservice	102

LISTES DES TABLEAUX

Tableau 1.01. Enseignements effectués au sein de l'ED-STII	12
Tableau 1.02. Enseignements effectués au sein de la mention Télécommunication de l'ESPA....	13
Tableau 1.03. Cours conçus pour la mention Télécommunication du CNTEMAD	13
Tableau 2.01: Liste des encadrements de mémoires de Master	20
Tableau 2.02: Liste des co-encadrements de thèses de Doctorat	21
Tableau 3.01: Récapitulation des résultats sur les utilisations de ressources et leurs dimensionnements.....	58
Tableau 5.01: Les états du système du modèle ultramétrique.....	89
Tableau A.01. Facteurs de charge d'un système, et ses probabilités de blocage en fonction du nombre de ressources	99

INTRODUCTION GENERALE

Il y a sept ans, ma première publication paraissait. Voilà six ans que j'ai soutenu ma thèse de Doctorat en 2016 à l'Université d'Antananarivo. Dans ce manuscrit, nous allons voir ensemble comment ma thématique scientifique a régulièrement évolué depuis, et je justifierai tout au long de ce mémoire la cohérence de cette évolution scientifique. Mes activités de recherches ont débuté en 2012 dans le cadre du Diplôme d'Etude Approfondie en Télécommunications, sous la direction du Professeur RANDIMBINDRAINIBE Falimanana. J'ai continué en thèse au Laboratoire de Recherche en Sciences Cognitives et Applications sous sa même direction, et cela continue jusqu'à cette HDR pour un postdoc.

Dans ce document, je présente principalement les résultats obtenus après ma soutenance de thèse à Antananarivo en 2016 jusqu'à ce jour. Pendant ce temps, j'ai effectué des recherches sur les dimensionnements en communications mobiles, et cela en collaboration avec le Département de l'Ingénierie Radio du Groupe TELMA, en tant que Responsable de la Radio planning et Innovation.

En 2017, j'ai rejoint l'Equipe d'Accueil Doctorale en Sciences Cognitives et Applications de l'Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation. J'ai poursuivi mes recherches sur la modélisation des utilisations des ressources partagées d'un système et leurs dimensionnements tout en les modélisant en systèmes d'attente.

Durant cette période, je suis conféré de responsabilités pédagogiques au sein de l'Ecole Supérieure Polytechnique d'Antananarivo, plus précisément dans la Mention Télécommunication et dans l'Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation. Je suis responsable de plusieurs éléments constitutifs en enseignements théoriques et enseignements dirigés, et je cite particulièrement la théorie des files d'attente et le télétrafic qui font l'objet d'étude des utilisations de ressources dans le monde des télécommunications. Parallèlement, je suis aussi concepteur de cours de la Mention Télécommunication du Centre National de Téléenseignement de Madagascar. J'ai encadré dix-sept mémoires de Master et co-encadré trois doctorants qui ont travaillé sur des spécialités autour des Sciences Cognitives et leurs applications. J'ai pu utiliser les résultats de ces recherches, que ce soit avec ces doctorants ou étudiants en Master, ou avec d'autres chercheurs du LR-SCA, dans les modélisations de ressources hiérarchisées que je vais présenter dans cet ouvrage.

Les travaux que je présente dans le cadre de mon habilitation à diriger des recherches sont le fruit de travaux que j'ai réalisés en entreprise, en laboratoire, avec des étudiants, des doctorants, ainsi qu'avec des collègues chercheurs. De toute façon, la recherche est avant tout un travail d'équipe qui nécessite énormément de communication.

Ce document est composé de deux parties. Dans la première partie, je décris en deux chapitres mes activités scientifiques et pédagogiques. Dans la deuxième partie, je détaille en trois chapitres mes activités de recherches. Je termine ce document par une conclusion et des perspectives de recherche sous forme de sujet de thèse.

PARTIE 1

ANIMATION DES EQUIPES DE RECHERCHE ET DIRECTION DE RECHERCHE

INTRODUCTION

Agité d'apporter ma contribution à l'Ecole Supérieure Polytechnique d'Antananarivo et à l'Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation, des diverses activités d'Enseignant-Chercheur, même en tant que vacataire, ont été soutenues.

Dans cette première partie, je décris brièvement en premier volet mon parcours de recherche depuis ma soutenance de thèse.

Mes activités pédagogiques sont présentées en deuxième volet de cette partie.

Dans le troisième volet, je montre mon expérience postdoctorale au cours de laquelle j'ai sorti des publications scientifiques, des ouvrages, etc... Mes participations à des conférences et journées de recherches sont aussi exprimées dans ce troisième volet.

En quatrième volet sont décrits mes travaux d'encadrements. La liste des doctorants que j'ai co-encadrés et celle des étudiants en Master que j'ai encadrés sont exposées dans ce volet.

CHAPITRE 1.

RESPONSABILITES ACADEMIQUES

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va présenter mon parcours scientifique depuis l'obtention de mon diplôme d'Ingénieur. Les expériences postdoctorales durant lesquelles j'ai effectué mes recherches sont exposées à la fin de ce chapitre. En tant qu'Enseignant-Chercheur vacataire, je vais aussi énumérer mes responsabilités académiques au sein de l'Ecole Supérieure Polytechnique d'Antananarivo et au sein du Centre National de Téléenseignement de Madagascar.

1.2 Parcours scientifique

1.2.1 De l'ingénierat au DEA

J'ai décroché mon diplôme d'Ingénieur de l'Ecole Supérieure Polytechnique d'Antananarivo en 2011 : Ingénieur des Télécommunications, option Service des Télécommunications, de l'Informatique et du Multimédia. C'est depuis que j'ai soucié des services fournis en télécommunications.

Mon Diplôme d'Etude Approfondie (DEA) en télécommunication consiste à l'étude du réseau de Whittle et son application pour partager les ressources d'une file d'attente à processeur partagé ou PS. J'ai commencé à étudier l'amélioration des qualités de service par l'optimisation des ressources effectuant en les partageant en fonction des besoins des utilisateurs. J'ai obtenu mon DEA après la soutenance de mémoire devant les membres de jury en 2012.

1.2.2 Le doctorat

Je me suis inscrit en thèse de Doctorat en 2014 au sein de l'Equipe d'Accueil Doctorale Sciences Cognitives et Applications de ED-STII. L'optimisation de l'efficacité de l'utilisation des ressources est encore l'objectif de ma thèse intitulée « Application de la théorie des jeux au partage des ressources d'un réseau de file d'attente ». Cette thèse porte sur une autre façon de partager les ressources d'un réseau de files d'attente à travers ses clients. La contribution apportée consiste à l'utilisation de la théorie des jeux de marchandage et des jeux stochastiques répétés afin de trouver un consensus optimal pour le partage des ressources en fonction des aspirations des clients. J'ai présenté deux modèles : un modèle plutôt statique basé sur la solution égalitarisme d'un problème

de marchandage, et un autre plutôt dynamique appelé modèles de joueurs myopes qui ne projettent pas les gains futurs du jeu stochastique répété. Les résultats ont permis de proposer diverses applications dans des systèmes possédant des ressources partagées.

J'ai soutenu ma thèse en 2016, et ceci a abouti à l'obtention de mon diplôme de Doctorat de l'Université d'Antananarivo.

1.2.3 Le postdoc

En 2017, j'ai rejoint l'Equipe d'Accueil Doctorale Sciences Cognitives et Applications en tant que membre de l'Equipe d'Accueil. Parallèlement, j'ai occupé le poste d'Enseignant-Chercheur vacataire au sein de la Mention Télécommunication de l'Ecole Supérieure Polytechnique d'Antananarivo, un poste que j'ai occupé depuis 2012. Des cours en ET et en ED m'ont été confiés la responsabilité tant au sein de cette Mention qu'au sein de l'Ecole Doctorale.

Depuis 2017, j'ai travaillé sur les dimensionnements des ressources en communications mobiles afin d'assurer une meilleure qualité de service aux utilisateurs. C'est fait en collaboration avec le Département de l'Ingénierie Radio du Groupe TELMA. L'objectif de ces travaux était de développer des méthodologies et des algorithmes de dimensionnements plus efficaces, plus optimales et plus réalistes des ressources utilisées par les réseaux mobiles 2G-3G-4G. Des recherches sur les modélisations et des prédictions d'utilisation de ressources partagées ont été abordés au sein du Laboratoire LR-SCA. Nous avons étudié plusieurs cas de figures dans le but de déterminer les quantités de ressources nécessaires à déployer. Les principaux résultats sont présentés dans la deuxième partie de cet ouvrage.

Sur le même thématique, et en tant que membre de l'EAD-SCA, j'ai co-encadré trois thèses de Doctorat. La première consiste à l'optimisation pour la résolution des NP-difficiles par des méthodes classico-heuristiques. La deuxième modélise l'apprentissage asynchrone dans une formation ouverte et à distance dont nous avons encore continué la recherche jusqu'à maintenant après la soutenance de la thèse. La troisième s'agit de l'application des nombres p -adiques à la cryptographie. J'ai continué, avec le Professeur RANDIMBINDRAINIBE Falimanana, les recherches sur les nombres p -adiques menés dans cette thèse en étudiant les structures algébriques des ensembles ultramétriques. J'ai pu utiliser les résultats de ces recherches pour modéliser un système de ressources partagées hiérarchisées que je vais présenter dans le dernier chapitre de cet ouvrage.

1.2.4 Copie du diplôme de doctorat



REPOBLIKAN'I MADAGASIKARA
Antananarivo - Tananarivana - Fianarantsoana



Université d'Antananarivo

DIPLÔME DE DOCTORAT

Le Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique, et par délégation le Président de l'Université d'Antananarivo,
 Vu l'assemblée des recteurs en vue de la création des Universités et de leur fonctionnement, et le fonctionnement des Universités et des Établissements d'Enseignement Supérieur,
 Vu le décret n° 2012-031 du 18 septembre 2012 modifiant certaines dispositions du décret 2008-179 du 13 février 2008 portant réforme de système de l'Enseignement Supérieur et de Recherche en vue de la mise en place du système « Lomisa, Misa, Doctorat » (LMD);
 Vu l'arrêté n° 04 149/2010 - M/S/Sup/RS du 24 mars 2010 relatif aux grades, titres et diplômes nationaux dans le système LMD;
 Vu l'arrêté n° 04 150/2010 - M/S/Sup/RS du 24 mars 2010 fixant la liste des domaines de formation offerts dans l'enseignement supérieur;
 Vu les pièces justificatives produites par l'intéressé en vue de son inscription au Doctorat;
 Vu les Procès-Verbaux du jury attestant que l'intéressé(e) a satisfait au contrôle des connaissances et des aptitudes prévues par les textes réglementaires;

Délivre le diplôme de **DOCTORAT**, à :

Nom : **RAVALIMINOARIMALALASON Toky Basifide**

Né(e) le : **15 septembre 1989 à Mamontona (Madagascar)**

Domaine : **SCIENCES DE L'INGENIEUR** Thématique : **SCIENCES ET TECHNIQUES DE L'INGENIERIE ET DE L'INNOVATION**
EAD : **SCIENCES COGNITIVES ET APPLICATIONS** Spécialité : **SCIENCES COGNITIVES**

Et lui confère le grade de **DOCTEUR**
 Au titre de l'année universitaire 2016

Titre de thèse: Application de la théorie des jeux au partage des ressources d'un réseau de files d'attente

Mention : **Honorable, avec félicitations du jury pour sa jouissance avec les droits et prérogatives qui y sont attachés**

Le Directeur de l'école doctorale,




ANDRIANAKY JARISON YVEN
Professeur Titulaire

Numéro de dossier : **589154 / 000 068**

Le Président,




Le Président
EMILY RANAVOMANANA
Professeur Titulaire

Antananarivo, le 21 juin 2017

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

1.2.5 Attestation d'inscription en HDR



Année universitaire : 2022

ATTESTATION D'INSCRIPTION en Habilitation à Diriger des Recherches (HDR)

Décret n°2020-1195 modifiant et complétant certaines dispositions du Décret n°2000-694 du 13 septembre 2000 portant création et régime de l'Habilitation à Diriger des Recherches.

Arrêté n°28 424/2020-MESupRes fixant les modalités d'application du Décret n°2020-1195 modifiant et complétant certaines dispositions du Décret n°2000-694 du 13 septembre 2000 portant création et régime de l'Habilitation à Diriger des Recherches.

Je, soussigné, RANDRIAMITANTSOA Paul Auguste, Directeur de l'Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation, atteste que :

Nom et Prénoms : RAVALIMINOARIMALALASON Toky Basilide
Né(e) le 15 Septembre 1989 à Namontana, Antananarivo IV
Est inscrit en HDR au sein de :
L'Ecole Doctorale : Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation
Numéro d'inscription : 001/2022/UA/ED-STII/SCA/HDR
Equipe d'Accueil Doctorale : Sciences Cognitives et Applications
Domaine : Sciences de l'Ingénieur

Thématiques de recherches : Sciences Cognitives
Spécialité : Sciences Cognitives
Intitulé de l'ensemble de travaux : Modélisation stochastique d'utilisation et de dimensionnement des ressources partagées

En foi de quoi, la présente attestation lui est délivrée pour servir et valoir ce que de droit.

Antananarivo, le 12 AVR 2022



1.2.6 Lettre d'acceptation du Responsable Hiérarchique



Antananarivo, le 31 Janvier 2022

Pour l'Université d'Antananarivo,

Pour l'Ecole Doctorale en Sciences et Techniques
de l'Ingénierie et de l'Innovation,

Objet : Lettre d'acceptation pour effectuer les travaux de
recherche en Habilitation à Diriger des Recherches (HDR)

Je, soussigné Joël Andrinirina RANDRIANASOLO, Directeur Général Adjoint
Technique du Groupe TELMA, autorise :

Docteur RAVALIMINOARIMALALASON Toky Basilide,
Responsable Radio Planning et Innovation du Groupe Telma,

à effectuer des travaux de recherche en Habilitation à Diriger des Recherches
(HDR) au sein de l'Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et
de l'Innovation de l'Université d'Antananarivo.

Je tiens aussi à préciser que ces recherches seront effectuées à son titre et à son
frais personnel sans financement du Groupe TELMA.

En foi de quoi, cette autorisation lui est délivrée pour servir et valoir ce que de
droit au sein de l'Université d'Antananarivo.

Le Directeur Général Adjoint Technique
Groupe TELMA

Joël Andrinirina RANDRIANASOLO
Directeur Général Adjoint Technique
TELECOM MALAGASY SA

1.3 Responsabilités pédagogiques

Mes responsabilités pédagogiques présentent 3 volets, correspondant à des établissements différents. Le premier volet correspond à l'activité que j'ai effectuée au sein de l'Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation depuis que j'ai obtenu mon diplôme de Doctorat en 2017. Le deuxième volet porte sur mon activité d'enseignement au sein de la Mention Télécommunication de l'Ecole Supérieure Polytechnique d'Antananarivo depuis mon obtention du diplôme de DEA en 2012. Dans ces deux volets, je suis responsable de plusieurs Eléments Constitutifs (EC) à différents niveaux. Il s'agit d'enseignements théoriques (ET), d'enseignements dirigés (ED) et d'enseignements pratiques (EP). Le dernier volet porte sur les cours que j'ai conçus pour la Mention Télécommunication du Centre National de Télé-Enseignement de Madagascar depuis 2017.

Le tableau 1.01 représente la liste des enseignements effectués au sein de l'Ecole Doctorale Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation. Parmi ces EC, il y a ceux qui consistent à l'initiation des jeunes chercheurs (les doctorants) à la rédaction des articles scientifiques.

Niveaux	Eléments constitutifs (EC)
D1 SCA	Initiation à MATLAB (1 crédit)
D2 SCA	OICNS 2 (2 crédits)
D1 SCA	Indexation des publications scientifiques (1 crédit)
D2 SCA	Bibliométrie, Classification des revues et des institutions, Prix Nobel (1 crédit)

Tableau 1.01. *Enseignements effectués au sein de l'ED-STII*

Le tableau 1.02 représente la liste des enseignements effectués au sein de la mention Télécommunication de l'ESPA. Outre les enseignements fondamentaux de mathématiques, il y a des enseignements plus ponctuels directement liés à mes travaux de recherche et leurs applications dans le domaine des télécommunications.

Niveaux	Eléments constitutifs (EC)	Parcours
M2 TCO	QoS et Ingénierie des réseaux (2 crédits)	IRS, IRC, TM, STI
M2 TCO	Outils de planification de réseaux (2 crédits)	IRS, IRC, TM, STI
M2 TCO	Mesures et contrôles de spectres radioélectriques (2 crédits)	IRC
M2 TCO	Télétrafic (2 crédits)	IRC, IRS, TM, STI

M2 TCO	Réseaux satellitaires (2 crédits)	STI
M2 TCO	Simulations des systèmes de télécommunications en RS (2 crédits)	IRS
M1 TCO	Théorie des files d'attente (2 crédits)	IRS, IRC, TM, STI
M1 TCO	Mathématiques appliquées aux communications (2 crédits)	STI
M1 TCO	Réseaux des télécommunications (2 crédits)	STI
M1 TCO	Photographie computationnelle et méthode par patch (2 crédits)	TM
M1 TCO	Paradigmes et technologies avancées des architectures des réseaux (2 crédits)	IRS
M1 TCO	Simulations des systèmes de télécommunications en STI (2 crédits)	STI
M1 TCO	Compatibilité électromagnétique (2 crédits)	STI
L3 TCO	Probabilité 2 (2 crédits)	STI
L2 TCO	Théorie de l'information et codage (2 crédits)	IRS
L2 TCO	Probabilité 1 (1 crédit)	STI
L2 TCO	Techniques de mesure en RC (1 crédit)	IRC

Tableau 1.02. Enseignements effectués au sein de la mention Télécommunication de l'ESPA

Le tableau 1.03 représente la liste des cours conçus pour la mention Télécommunication du CNTEMAD. Parmi eux, il y a également des cours directement liés à mes travaux de recherche et leurs applications dans le domaine des télécommunications.

Niveaux	Eléments constitutifs (EC)	Parcours
M2	Télétrafic	GR, GRT
M2	Théorie des files d'attente	GR, GRT
M2	Outils de planification de réseaux	GRT
M2	Ingénierie des réseaux mobiles	GR
M2	Interconnexion des réseaux hauts débits	GRT
L3	Communication analogique	GR, GRT
L3	Théorie de l'information	GR, GRT
L2	Emission et Réception	GR, GRT
L2	Probabilité et Statistique	GR, GRT

Tableau 1.03. Cours conçus pour la mention Télécommunication du CNTEMAD

1.4 Expérience postdoctorale et projet de recherches

Soucieux de la qualité de service allouée aux utilisateurs, mon projet de recherche a pour objectif de répondre à la question : Comment peut-on déterminer la quantité optimale de ressources nécessaires à un système qui dispose de ressources partageables non uniformément à travers ses utilisateurs pour assurer une certaine qualité de service ? Ceci consiste non seulement les télécommunications, mais d'une manière universelle, tout système doté de ressources de tout type que ce soient qu'on partage aux utilisateurs à titre de service. Le terme « optimal » dans cette question se réfère à la quantité minimale de ressources qu'on peut déployer tout en pensant aux coûts engendrés par la mise à disposition.

Les publications d'articles et d'ouvrages citées dans les paragraphes suivants sont les fruits des recherches menées dans la réalisation de ce projet. Certaines d'entre-elles sont aussi ceux des travaux d'encadrement menés avec les doctorants que j'ai co-encadrés et qui ont des relations directes ou indirectes avec le projet de recherche. Ces relations sont mises en évidences et expliquées dans la deuxième partie de cet ouvrage.

Certains résultats ont été déjà présentés dans des salons et journées de recherches.

1.4.1.1 Publications dans des revues de notoriété internationale

La liste suivante présente les publications scientifiques dans des revues internationales dont je fais partie des auteurs principaux.

1. T.B. Ravaliminoarimalalason, F. Randimbindrainibe, « *Distribution of occupied resources by fuzzy customers in a shared-resource system* », International Journal of Advance Research and Innovative Ideas in Education (IJARIIE), ISSN 2395-4396, pp 634-640, Vol. 8 Issue 6, 2022.
2. T.B. Ravaliminoarimalalason, F. Randimbindrainibe, « *Occupied resources in a system with resource sharing between service-based customers* », International Journal of Engineering Research and Technology (IJERT), ISSN 2278-0181, pp 158-164, Vol. 10 Issue 10, 2022.
3. T.B. Ravaliminoarimalalason, F. Randimbindrainibe, « *Ultrametric hierarchical resource utilization model using p -adic numbers* », International Journal of Advance Research and Innovative Ideas in Education (IJARIIE), ISSN 2395-4396, pp 566-576, Vol. 8 Issue 4, 2022.

4. T.B. Ravaliminoarimalalason, M. Rakotomalala, F. Randimbindrainibe, « *Nash bargaining on a processor sharing queue* », International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT), ISSN 2509-0119, pp 558-564, Vol. 29 Issue 1, 2021.
5. T.B. Ravaliminoarimalalason, F. Randimbindrainibe, « *Distribution of Occupied Resources on A Discrete Resources Sharing in A Queueing System* », International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT), ISSN 2278-0181, pp 638-643, Vol. 10 Issue 1, 2021.
6. F. Randimbindrainibe, T.B. Ravaliminoarimalalason, « *Coefficients Triangulaires et Algèbre des Polynômes Dissociables et Multipliables* », International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT), ISSN 2509-0119, pp 675-696, Vol. 29 Issue 1, 2021.
7. F. Randimbindrainibe, T.B. Ravaliminoarimalalason, « *Construction des bases orthonormées de l'espace des fonctions continues sur un groupe compact ultramétrique* », International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT), ISSN 2509-0119, pp 603-621, Vol. 30 Issue 1, 2021.
8. F. Randimbindrainibe, T.B. Ravaliminoarimalalason, « *Algèbre des suites triangulaires convolutives et multipliables. Leurs formalisations polynomiales* », International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT), ISSN 2509-0119, pp 430-480, Vol. 30 Issue 1, 2021.
9. R.E. Maherindrainibelaaha, T.B. Ravaliminoarimalalason, F. Randimbindrainibe, « *P-adic numbers applied on an elliptic curve cryptography* », International Journal of Advance Research and Innovative Ideas in Education (IJARIIE), ISSN 2395-4396, pp 213-229, Vol. 5 Issue 2, 2019.
10. G. Rasolomampiany, T.B. Ravaliminoarimalalason, F. Rasoanoavy, F. Randimbindrainibe, « *Analytical resolution of the Cauchy problem of a diffusion equation with a fractional time derivative* », International Journal of Advance Research and Innovative Ideas in Education (IJARIIE), ISSN 2395-4396, pp 473-479, Vol. 4 Issue 6, 2018.
11. M. Rakotomalala, T.B. Ravaliminoarimalalason, F. Randimbindrainibe, « *Asynchronous Learning Model in an ODL* », International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT), ISSN 2278-0181, pp 174-179, Vol. 7 Issue 08, 2018.
12. M. Rakotomalala, T.B. Ravaliminoarimalalason, F. Randimbindrainibe, « *Models for measuring latent variables in asynchronous learning* », International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT), ISSN 2278-0181, pp 146-150, Vol. 7 Issue 04, 2018.

1.4.1.2 Editions d'ouvrages

La liste suivante présente les ouvrages scientifiques dont je suis l'auteur principal en qualité de premier ou second auteur.

1. T.B. Ravaliminoarimalalason, F. Randimbindrainibe, « *Queues applied to Telecoms.* », ISBN 978-1-394-19197-0 (e-book), ISBN 978-1-78630-904-4 (print), Edition WILEY, 272 pp, Décembre 2022.
2. T.B. Ravaliminoarimalalason, M. Rakotomalala, F. Randimbindrainibe, « *La théorie des files d'attente.* », ISBN 978-620-3-41305-2, Edition EUE, 96 pp, Mars 2021.

1.4.1.3 Publications dans des revues de notoriété nationale

La liste suivante présente les publications scientifiques dans des revues nationales dont je suis l'auteur principal en qualité de premier ou second auteur. Elles sont soit des actes issus des conférences auxquelles j'ai participé, ou des publications lors des co-encadrements de thèses.

1. T.B. Ravaliminoarimalalason, M. Rakotomalala, « *Myopic model of resource sharing in a queuing network* », Actes des journées de recherche des trois IST de Madagascar, La revue des ISTs de Madagascar, ISSN 2710-4648, Article 16, pp 100-106, Madarevues, Octobre 2019.
2. M. Rakotomalala, T.B. Ravaliminoarimalalason, « *Utilisation d'un modèle d'apprentissage asynchrone dans une formation en ligne* », Actes des journées de recherche des trois IST de Madagascar, La revue des ISTs de Madagascar, ISSN 2710-4648, Article 19, pp 121-126, Madarevues. Octobre 2019.
3. M. Rakotomalala, T.B. Ravaliminoarimalalason, F. Randimbindrainibe, « *Analyse de l'apprentissage d'un module d'initiation dans une formation ouverte et à distance* », Mada-ETI, ISSN 220-0673, Vol.1, pp. 18 - 31, Madarevues, Mai 2018.
4. M. Rakotomalala, T.B. Ravaliminoarimalalason, F. Randimbindrainibe, « *Modèles de mesure de variables latentes dans un apprentissage asynchrone* », Mada-ETI, ISSN 220-0673, Vol. 1, pp 32-40, Madarevues, Mai 2018.

1.4.1.4 Participation à des journées et salons de recherches

La liste suivante présente les journées et salons de recherches auxquels j'ai participé pour présenter les recherches sur les partages de ressources et leurs applications dans divers domaines.

1. Participation aux journées de recherche des trois IST de Madagascar, En collaboration avec l'Université de La Réunion et de l'Université des Mascareignes de l'Ile Maurice. Communication orale : « *Occupation des ressources partagées dans un système multi-service* ». 6^è édition. Octobre 2021.
2. Participation au Salon de Recherche au service de l'économie et de l'emploi – Salon Virtuel organisé par l'Université d'Antananarivo. Communication poster : « *Le dimensionnement des ressources partagées dans un système multi-service* ». eSREE 2021, 6^è édition, 22-23-24 Septembre 2021.
https://esree2021.univ-antananarivo.mg/spip.php/?page=exposant&id_rubrique=235#
3. Participation aux journées de recherche des journées de recherché des trois IST de Madagascar, En collaboration avec l'Université de La Réunion et de l'Université des Mascareignes de l'Ile Maurice. Communication orale : « *Myopic model of resource sharing in a queuing network* » et « *Utilisation d'un modèle d'apprentissage asynchrone dans une formation en ligne* ». 4^è édition. Octobre 2019.

1.5 Conclusion

En tant qu'Enseignant-Chercheur vacataire au sein de l'Ecole Supérieure Polytechnique d'Antananarivo, j'ai pu assurer toutes mes responsabilités académiques depuis 2012. Elles ont été présentées dans ce chapitre avec mon parcours scientifique et mes expériences postdoctorales. Dans le chapitre suivant, on va voir les travaux d'encadrement que j'ai effectués pendant ce temps.

CHAPITRE 2. TRAVAUX D'ENCADREMENTS

2.1 Introduction

La capacité à encadrer des jeunes chercheurs est attestée par l'existence d'une activité d'encadrements de mémoires de Master et/ou DEA et d'un co-encadrement de thèse de Doctorat, voire du travail d'une équipe de recherche, de la capacité à rendre compte, de manière claire et concise, de toutes les étapes d'une démarche scientifique : construction d'une problématique, maniement des principaux concepts, mise en œuvre d'une démarche méthodologique, analyse des résultats. J'ai fait preuve de cette capacité par les encadrements listés dans les paragraphes suivants.

2.2 Encadrements de mémoires de Master

J'ai dirigé des mémoires de Master au sein de la Mention Télécommunication de l'Ecole Supérieure Polytechnique d'Antananarivo. La liste du tableau 2.01 ci-dessous énumère ces encadrements.

N°	Noms et Prénoms	Titre	Date de soutenance
1	RANDRIANAINA Lova Sarah	<i>Alcatel-Lucent SD-WAN dans un réseau MPLS</i>	12 Septembre 2022
2	FARAVOAHANGY Maminirina	<i>Calibration du modèle de propagation standard (SPM). Cas d'utilisation : 4G</i>	22 Mars 2022
3	RAMAMONJISOA Sandrine Ida Sariaka	<i>Dimensionnement et Smart Capex d'un réseau LTE</i>	22 Mars 2022
4	RAKOTOSON Ny Aina Tsiory	<i>Etude et simulation de la partie RAN du réseau 5G</i>	22 Mars 2022
5	RINASOA Anja	<i>Cas d'utilisation de la technologie blockchain dans le domaine de vote en tant qu'application web</i>	30 Octobre 2020
6	RAJAONARIVONY Henintsoa Maminiaina	<i>Etude de performances d'un réseau 5G pour la partie Downlink</i>	06 Août 2019

N°	Noms et Prénoms	Titre	Date de soutenance
7	RAJAONAH HARISON Gaëlle Brendel	<i>Programmation par approche machine learning. Cas : Reconnaissance de chiffres manuscrits</i>	06 Août 2019
8	ANDRIANJANAHARY Ny Aina Agapé Nazzari Abel	<i>La virtualisation et la migration vers le réseau de nouvelle génération (5G)</i>	06 Août 2019
9	RANDRIANANTSASON Mioratiana Tafitasoa	<i>Dimensionnement des ressources 3G basé sur les statistiques</i>	22 Mai 2019
10	ANDRIANTSIRESY Mitsinjo Lovaniaina	<i>Planification des PCI et RSI des cellules dans le réseau LTE</i>	22 Mai 2019
11	RAKOTOARIMALALA Fenitra Nokoloïna Ruddy Harris	<i>Optimisation du réseau 4G par agrégation de porteuses</i>	22 Mai 2019
12	RAHABOARIMANANA Hary Tolotra	<i>Allocation de ressource en réseau mobile par gestion de puissance utilisant l'équilibre de Nash</i>	02 Octobre 2018
13	RAHANTARISEHENO Ambinintsoa	<i>Dimensionnement d'un réseau LTE</i>	27 Mars 2018
14	NY ONISON EMANOELLY Cederah Isumael	<i>Cryptographie appliquée à la télévision à péage</i>	27 Mars 2018
15	NOMENJANAHARY Julio	<i>Optimisation de la couverture et de la qualité du réseau 2G/4G – Cas du réseau Telma avec les matrices d'interférences et les canaux CPICH</i>	08 Septembre 2017
16	TAFENO Harimanana Elisa	<i>Localisation par empreinte radio. Application sur les réseaux mobiles 2G-3G</i>	04 Avril 2017
17	RAKOTOSON Fanantenana Tantely	<i>Modélisation et exploitation du routage optique</i>	20 Avril 2016

Tableau 2.01: Liste des encadrements de mémoires de Master

2.3 Co-encadrements de thèses de doctorat

J'ai aussi effectué des co-encadrements de thèse au sein de Laboratoire de Recherche en Sciences Cognitives et Applications - Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation. Parmi les co-encadrements de thèses effectués, trois (03) ont été soutenus et présentés dans le tableau 2.02.

N°	Noms et Prénoms	Titre	Date de soutenance
1	MAHERINDRAINIBELA HASA RATSIMAMITAKA Edouard	<i>Nombres p-adiques appliqués à la cryptographie</i>	28 Mai 2019
2	RAKOTOMALALA Mirisoa	<i>Modélisation de l'apprentissage asynchrone dans une formation ouverte et à distance</i>	19 Septembre 2018
3	ANDRIAMIADANOMEN JANAHARY Harivelo Camille	<i>Optimisation pour la résolution des NP-difficiles par les méthodes classico-heuristiques</i>	01 Décembre 2017

Tableau 2.02: Liste des co-encadrements de thèses de Doctorat

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, j'ai présenté les travaux d'encadrement de mémoires de Master que j'ai effectués au sein de l'Ecole Supérieure Polytechnique d'Antananarivo et de co-encadrement de thèses de Doctorat au sein de l'Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation. Il s'agit de 17 mémoires de Master et de 3 thèses de Doctorat. Ces directions de mémoires et de thèses ont développé mes capacités et m'ont permis d'acquérir une large expérience dans la transmission de connaissance et surtout dans l'animation de recherche.

CONCLUSION

Mes activités et cursus académiques en tant qu'Enseignant et Chercheur depuis ces 10 ans au sein de l'Ecole Supérieure Polytechnique d'Antananarivo sont présentées dans cette partie. J'ai démontré la continuité thématique de mes recherches et de mes enseignements au sein de la Mention Télécommunication. Mes implications au niveau de cette mention et au niveau de l'Equipe d'Accueil Doctorale Sciences Cognitives et Applications ont été mises en évidence.

Des participations à des conceptions de cours, des responsabilités pédagogiques et des travaux d'encadrements de mémoires et de thèses durant ces années m'ont permis d'aller à présenter au maximum mes travaux : en laboratoire, en entreprise, dans les salons et journées de recherches nationaux, et même dans des revues et ouvrages internationaux. Ces participations m'ont permis d'entretenir mes contacts au sein de la communauté scientifique. Toutes ces activités me permettent aussi d'assurer un transfert de technologies et m'ont beaucoup aidé pour continuer mes recherches. Elles ont aussi développé mes capacités et m'ont permis d'acquérir une large expérience dans la transmission de connaissance et surtout dans l'animation de recherche.

Les résultats de mes activités de recherche scientifiques sont synthétisés dans la partie suivante.

PARTIE 2

SYNTHESE DES TRAVAUX ACADEMIQUES

INTRODUCTION ET POSITION DE LA PROBLEMATIQUE DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE ORIGINALE DE HAUT NIVEAU

Le dimensionnement des nombres de ressources nécessaires au fonctionnement d'un système définit la qualité de service allouée aux utilisateurs. Il a été établi une fameuse formule d'Erlang B pour déterminer le nombre de canaux nécessaires à un réseau téléphonique. Cette formule ne considère qu'un seul service fourni par un système aux utilisateurs qui en demandent. Actuellement, on rencontre des multiples facettes de services que peuvent fournir les systèmes complexes, si on ne parle que des réseaux de communication par exemple : Son domaine d'application est plus vaste si on ne cite que les systèmes de communications modernes partageant des bandes passantes, des puissances, des spectres.

Déployer un maximum de ressources peut résoudre la problématique mais, en termes de coût, ceci va gonfler l'investissement avec un retour sur investissement non bien défini du fait que certaines ressources ne sont pas utilisées. C'est un propre gaspillage. Toutefois, déployer des ressources insuffisantes risque de faire perdre certains utilisateurs suite à des encombrements. Ceci impacte la qualité de service perçue par les utilisateurs qui ont désiré obtenir une certaine qualité en échange de ses deniers. Mais à part cela, ceci a aussi un effet majeur sur les chiffres d'affaires puisque certains utilisateurs ne peuvent pas utiliser des services.

Problématique :

Il est alors décisif de bien déterminer la quantité de ressources à déployer dans un système pour éviter ce gaspillage et pour avoir un équilibre en termes d'investissement et de chiffre d'affaires. Des méthodes empiriques ont été utilisés au fil des temps mais ils connaissent bien des limites qu'on va essayer de résoudre dans notre recherche, surtout en termes de ressources partageables d'une façon non uniforme à travers les utilisateurs.

Comment peut-on déterminer la quantité optimale de ressources nécessaires à un système qui dispose de ressources partageables non uniformément à travers ses utilisateurs pour assurer une certaine qualité de service ?

Hypothèses de notre recherche :

La quantité de ressources utilisée croît en fonction de l'utilisation des services fournis par le système. Dans un « système stable », il doit y avoir un nombre maximal fini d'utilisateurs simultanés ; sinon, une longue file infinie s'y présente suite à un manque de ressources déployées. De ce fait, une quantité maximale de ressources nécessaires à ce système peut être déterminée à partir des utilisations de ressources par ces utilisateurs et sans dégrader la qualité de service fournie par le système.

Les ressources qu'on peut considérer peuvent être discrètes ou non discrètes (fractionnaires). Les services fournis par le système peuvent être mono-service (un seul service pour tous les utilisateurs) ou multi-service (des services au choix selon les besoins des utilisateurs). Les paramètres d'arrivée et de service des utilisateurs peuvent être flous. Des ressources qu'on peut classer par ordre d'importance peuvent être aussi observées dans un système complexe.

Objectifs de notre recherche :

Pour répondre à la problématique, on a imposé les objectifs suivants :

- 1. Proposer des modèles de partage de ressources d'un système partageant ses ressources à ses utilisateurs.*
- 2. Proposer un modèle de partage de ressources applicable à un système mono-service ou multi-service.*
- 3. Proposer des méthodologies de dimensionnement des quantités de ressources nécessaires à des systèmes à partir des modèles ainsi établis.*
- 4. Proposer un modèle d'utilisation de ressources applicable à un système complexe de ressources hiérarchisées.*

Les chapitres de cet ouvrage représentent les synthèses des fruits de notre recherche par rapport à ces objectifs imposés. Le troisième chapitre va traiter les modélisations stochastiques des partages de ressources discrètes en premier, et ensuite celles des ressources non discrètes ou fractionnaires. On va voir dans le quatrième chapitre le cas multi-service dont les besoins des clients ne sont pas uniformes pour chaque service. Un dernier chapitre sera consacré à un nouveau modèle d'utilisation de ressources basé sur les nombres p -adiques et les espaces ultramétriques. Les résultats obtenus

sont validés à partir de simulations faites avec MATLAB-Simulink. Des applications numériques sont aussi présentées dans cet ouvrage.

Les résultats de ce travail permettent de construire de nouvelles politiques de dimensionnement des quantités de ressources nécessaires dans des exemples plus concrets dans le domaine de la télécommunication, de l'informatique, de la logistique, de la gestion, et plus particulièrement des apprentissages asynchrones... où des systèmes fournissant des services disposent des ressources à partager à travers leurs utilisateurs.

CHAPITRE 3.

MODELISATION D'UTILISATION ET DE DIMENSIONNEMENT DES RESSOURCES DISCRETES ET FRACTIONNAIRES PARTAGEES

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons proposer nos modèles d'occupation de ressources dans un système qui partage ses ressources à ses utilisateurs. La demande et l'allocation peuvent se faire avec des quantités entières dans la première partie, puis avec des nombres réels strictement positifs de ressources dans la deuxième partie de chapitre. Les modèles nous serviront ensuite pour déterminer la quantité optimale de ressources nécessaires qu'on va doter au système à un certain seuil de probabilité de blocage près.

Les travaux présentés dans ce chapitre sont des extensions des modèles d'utilisation de ressources abordés dans les manuscrits « *Queues applied to Telecoms* » (Vol. 2, p. 176), « *La théorie des files d'attente* » (Vol. 2, p. 177), et ceux que nous avons publiés dans « *Nash bargaining on a processor sharing queue* » (Vol. 2, p. 122), « *Myopic model of resource sharing in a queuing network* » (Vol. 2, p. 140). Les résultats de recherche ayant fait l'objet des publications intitulées « *Distribution of occupied resources by fuzzy customers in a shared-resource system* » (Vol. 2, p. 11), et « *Distribution of occupied resources on a discrete resources sharing in a queueing system* » (Vol. 2, p. 5) sont aussi synthétisés dans ce chapitre.

3.2 Etat de l'art et contexte

Un flux d'événements appelé « clients » arrive séquentiellement dans un système pour réclamer un service [3.01]. Le temps séparant l'arrivée de ces clients, appelé inter-arrivée, ainsi que la durée de service demandée par les clients sont des variables aléatoires. Ce système appelé « système d'attente » est composé d'une espace d'attente, de capacité finie ou infinie, et de serveurs traitant les services demandés par les clients. Il est accompagné d'une discipline dictant comment ou qui des clients de l'espace d'attente vont être servis en premiers. Les théories classiques des systèmes d'attente se sont focalisées sur des nombres entiers (finis ou non) de serveurs. Chaque client va être servi par un serveur, jusqu'à ce que tous les serveurs soient occupés. Une fois tous ces serveurs occupés, les clients dans le système d'attente vont attendre qu'un serveur soit libre afin que le client suivant réclame son tour.

Dans beaucoup de systèmes réels, certains clients ont besoin plus d'un serveur (ou plus d'une ressource). Certains serveurs peuvent s'occuper de plusieurs clients en même temps, en allouant une part de leurs ressources à des clients, et d'autre part à d'autres clients, en fonction de leurs besoins. Certaines recherches se sont avancées sur les systèmes à multiple serveur depuis les travaux de Green sur les files d'attente où les clients demandent de multiples serveurs [3.02]. On peut modéliser un tel système à un système de file d'attente doté d'un seul serveur mais composé de plusieurs ressources, ou même des multiples serveurs ayant chacun ses propres ressources. Romm et Skitovich [3.03] ont commencé par la généralisation du théorème d'Erlang en étudiant une allocation de ressources aléatoires à chaque arrivée dans la file d'attente. Ils se sont focalisés sur une distribution stationnaire de file d'attente opérant dans un temps discret. Si la file d'attente a plus d'un serveur, ou si le serveur a plus d'une ressource, ils peuvent être départagés à travers les utilisateurs. On appelle processeur partagé ou "processor-sharing" ce principe que Yashov [3.04] a revu et a proposé des techniques pour une analyse plus approfondie. Tikhonenko a aussi voulu généraliser la notion d'Erlang [3.05][3.06]. Dans [3.07], il a étudié les files d'attente à processeur partagé avec ressources limitées et distribution exponentielle des durées d'utilisation. Sopin et al. [3.08] ont évalué les probabilités caractéristiques des systèmes d'attente à besoin aléatoire des clients, et Lisovskaya et al. [3.09] ont analysé des capacités en nombre d'utilisateurs dans le cas des files d'attente multi-serveur. Lisovskaya et al. [3.10] ont proposé une extension dans le cas des arrivées non poissonniennes et des services de durées non exponentielles. Il a considéré des services parallèles pour deux utilisateurs avec un processus de renouvellement des arrivées. Vikhrova [3.11] a combiné les études des systèmes d'attente à besoin aléatoire des clients et à ressources limitées. Des études et analyses sur la capacité des systèmes d'attente ont été avancées [3.12]–[3.14] avec des files d'attente à multiples serveurs ou multiples ressources [3.15][3.16] mais nous allons nous intéresser à des modèles analytiques de système d'attente pouvant partager ses ressources à des utilisateurs demandant de service auprès de lui. Plus précisément, nous allons creuser les lois de probabilités gérant l'utilisation des ressources de telles files d'attente dans le but de pouvoir effectuer un dimensionnement de ressources [3.17]. Ces ressources peuvent être discrètes ou fractionnaires. L'objectif principal est de déterminer un modèle analytique permettant de prédire le comportement du système et de dimensionner ses quantités de ressources à mettre à disposition des utilisateurs.

Nous appelons ressources fractionnaires celles qu'on peut allouer en quantité fractionnaire aux utilisateurs, au contraire des ressources discrètes qui s'allouent en quantité entière. On peut les

rencontrer dans plusieurs systèmes si on ne cite que les systèmes de communications modernes [3.18] comme le partage de bandes passantes [3.19] [3.20], de spectres [3.21], de puissances [3.22] par exemple, et même dans le plus récent standard de communication mobile [3.23]. On peut aussi les rencontrer dans le cas des sciences de l'éducation. On peut y rencontrer des ressources utilisées en apprentissage asynchrone par exemple comme nous avons développé dans [3.24]–[3.29]. Nous avons abordé des recherches dans ce domaine avec M. Rakotomalala et même jusqu'à déterminer les impacts sur les résultats des apprenants.

Nous avons établi des modèles analytiques de distribution des quantités de ressources occupées dans un partage de ressources dans « *Distribution of Occupied Resources on A Discrete Resources Sharing in A Queueing System* » [3.30]. Une extension au cas des utilisateurs flous, dont les paramètres d'arrivée et de services sont flous, ont aussi été proposés dans « *Distribution of occupied resources by fuzzy customers in a shared-resource system* » [3.31]. Des principes de dimensionnement ont été élaboré avec chaque modèle.

3.3 Du processus de naissance et de mort

Etant donné un système d'attente, qu'on va appeler « une file d'attente », ayant a priori k clients. Il peut comporter entre 0 et n clients. Dans ce système, les arrivées des clients forment un processus de Poisson d'intensité λ_k ($k = 0, \dots, n-1$), les durées de service qu'ils demandent sont aléatoires suivant une loi exponentielle de moyenne $1/\mu_k$ ($k = 1, \dots, n$). On va noter par N l'état de ce système décrit par le nombre de clients présents dans ce système.

On se donne des nombres positifs $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ et $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$. Nous avons montré dans [3.30] que, pendant un intervalle de temps infiniment petit ε , sachant qu'il y a k clients présents dans la file :

- La probabilité qu'un client arrive dans la file est $\lambda_k \varepsilon + o(\varepsilon)$
- La probabilité qu'un client sorte de la file est $\mu_k \varepsilon + o(\varepsilon)$
- Les autres éventualités ont une probabilité $o(\varepsilon)$

On note que $\pi_k = P(N = k)$, c'est-à-dire la probabilité de trouver k clients dans le système d'attente [3.17] [3.32]. La distribution stationnaire $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_n)$ de ce système est égale à :

$$\pi_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \pi_0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.01)$$

Où :

$$\frac{1}{\pi_0} = 1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \dots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \quad (3.02)$$

Alors :

$$\pi_k = \frac{\frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}}{1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \dots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}} \quad (3.03)$$

Etant donné une file d'attente M/M/1 ayant C ressources à allouer à ses clients, $C > 0$. Chaque client demande à être servi par une quantité aléatoire r de ressources. Le serveur de la file d'attente peut lui allouer cette quantité de ressources si elles sont disponibles, sinon le client doit attendre jusqu'à ce qu'elles se libèrent. Le serveur peut dans ce cas servir plusieurs clients simultanément en fonction de la disponibilité des ressources qu'il dispose. La notion classique de file d'attente M/M/1 ne pouvant recevoir qu'un seul client à la fois ne se pose plus. Il s'agit d'un partage des ressources disponibles au niveau du serveur de la file d'attente à travers les clients qui s'y présentent en fonction de leurs besoins.

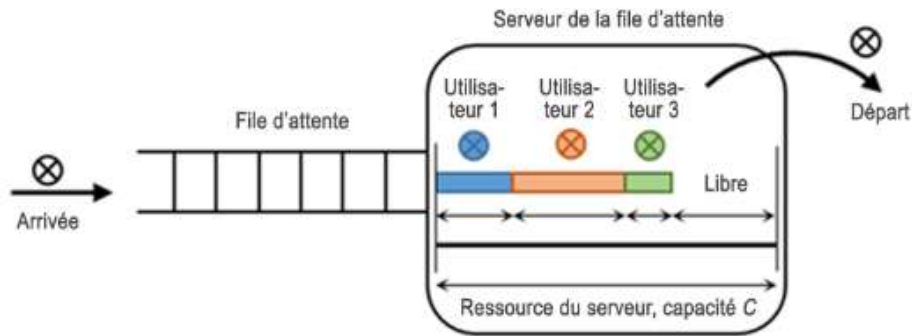


Figure 3.01. Description du modèle

Soit R la quantité de ressources utilisées. Dans toute la suite, on va noter par $P(R = r)$ la loi de probabilité de R , et $P(R_k = r)$ la probabilité que les k clients utilisent r ressources.

3.4 Distribution d'état du partage de ressources discrètes

Maintenant, on va considérer que ce système d'attente dispose de ressources supposées discrètes dans ses serveurs. Au total, il dispose de C ressources, $C \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, c'est-à-dire que la quantité de ressources du système peut prendre une valeur infinie dans notre étude.

Chaque client a besoin d'une ressource r , une variable aléatoire discrète. Si la ressource r demandée par le client est disponible, le serveur peut l'allouer directement tout en servant le client demandeur. Si la ressource demandée n'est pas disponible, alors le client demandeur reste dans la file d'attente attendant que les ressources demandées soient libérées pour qu'il puisse utiliser.

3.4.1 File d'attente de capacité infinie et serveurs de capacité infinie

Pour la file d'attente de capacité infinie en termes de nombre de clients ($n \rightarrow +\infty$), on a une file d'attente M/M/ ∞ .

3.4.1.1 Cas général

Théorème 3.01. (Ravaliminoarimalalason)

Pour un serveur de capacité infinie, la loi de probabilité $P(R = r)$ de l'utilisation de ressources est égale à :

$$\begin{aligned} P(R = r) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(N = k) \cdot P_k(r) \\ &= e^{-\rho} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k!} P(R_k = r), \quad r \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{3.04}$$

Où $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ le facteur de charge de la file d'attente, λ l'intensité du processus d'arrivée des clients,

$\frac{1}{\mu}$ la durée moyenne de service demandé par les clients.

Démonstration :

♣ En utilisant (3.03) pour $n \rightarrow +\infty$, $\lambda_k = \lambda$ pour tout $k = 0, 1, 2, \dots$ et $\mu_k = k\mu$ pour tout $k = 1, 2, \dots$, la distribution stationnaire [3.12] du système d'attente est donnée par :

$$\pi_k = \frac{\frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}}{1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \dots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} + \dots} = \frac{\frac{\lambda \lambda \dots \lambda}{\mu \cdot 2\mu \dots k\mu}}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda \lambda}{\mu \cdot 2\mu} + \dots + \frac{\lambda \lambda \dots \lambda}{\mu \cdot 2\mu \dots n\mu} + \dots}$$

$$\pi_k = \frac{\frac{\lambda^k}{\mu^k \cdot k!}}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2 \cdot 2!} + \dots + \frac{\lambda^n}{\mu^n \cdot n!} + \dots} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k! e^{\frac{\lambda}{\mu}}} = \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

La probabilité de trouver k utilisateurs dans le système est donc :

$$P(N = k) = \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

Puisque le serveur est de capacité infinie, alors tous les clients qui se trouvent dans le système sont servis. Les clients qui entrent dans le système d'attente sont tout de suite servis immédiatement après leurs entrées dans le système. Si le système compte k clients, ils sont en même temps servis par les serveurs, utilisant r_k ressources.

$$P(R = r) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(N = k) \cdot P_k(r)$$

$$= e^{-\rho} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k!} P(R_k = r), \quad r \in \mathbb{N} \quad \blacklozenge$$

3.4.1.2 Cas d'utilisation de ressources suivant une loi de Poisson :

On va appliquer le théorème 3.01 sur un cas particulier d'une utilisation de ressources par un client suivant une loi de Poisson de paramètre α .

Théorème 3.02.

L'utilisation de ressources par k utilisateurs est une variable aléatoire suivant aussi la loi de Poisson de paramètre $k\alpha$.

Démonstration :

♣ Ceci vient du fait que la somme de deux variables aléatoires suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs α et β est une variable aléatoire suivant encore la loi de Poisson de paramètre $\alpha + \beta$.

◆

Théorème 3.03.

La loi de probabilité de l'utilisation des ressources est donnée par :

$$P(R = r) = \frac{\alpha^r}{r!} e^{-\rho} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^r}{k!} (\rho e^{-\alpha})^k \quad \text{où } \rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad (3.05)$$

Démonstration :

♣ On va partir de la relation $P(R = r) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(N = k) \cdot P_k(r)$ connaissant $P(N = k) = \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$ et

$$P_k(r) = \frac{1}{r!} (k\alpha)^r e^{-k\alpha}.$$

Alors :

$$P(R = r) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \cdot \frac{1}{r!} (k\alpha)^r e^{-k\alpha}$$

$$P(R = r) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \rho^k e^{-\rho} \cdot \frac{1}{r!} (k\alpha)^r e^{-k\alpha} = \frac{\alpha^r}{r!} e^{-\rho} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^r}{k!} (\rho e^{-\alpha})^k \quad \text{en notant } \frac{\lambda}{\mu} = \rho$$

◆

3.4.2 File d'attente de capacité infinie et serveurs de capacité finie

3.4.2.1 Cas général

Maintenant, on va poser une file d'attente de capacité finie. La distribution stationnaire du système d'attente est notée π_k .

Théorème 3.04. (Ravaliminoarimalalason)

On va noter s le nombre maximal de clients servis par les serveurs. La distribution stationnaire $\pi_{k,s}$ du nombre de clients dans la file d'attente est donnée par l'équation (3.06).

$$\pi_{k,s} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{k!} \rho^k}{\sum_{i=0}^s \frac{1}{i!} \rho^i + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{s! s^i} \rho^{s+i}} & \text{pour } k \leq s \\ \frac{\frac{1}{s! s^{k-s}} \rho^k}{\sum_{i=0}^s \frac{1}{i!} \rho^i + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{s! s^i} \rho^{s+i}} & \text{pour } k > s \end{cases} \quad (3.06)$$

Démonstration :

♣ La distribution stationnaire peut être obtenue à partir des paramètres suivants.

$$\begin{cases} \lambda_k = \lambda & (0 \leq k) \\ \mu_k = k\mu & (0 < k \leq s) \\ \mu_k = s\mu & (s \leq k) \end{cases}$$

Alors, pour $k \leq s$:

$$\begin{aligned} \pi_{k,s} &= \frac{\frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\lambda}{2\mu} \cdots \frac{\lambda}{k\mu}}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\lambda}{2\mu} + \cdots + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\lambda}{2\mu} \cdots \frac{\lambda}{s\mu} + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\lambda}{2\mu} \cdots \frac{\lambda}{s\mu} \frac{\lambda}{s\mu} + \cdots} \\ &= \frac{\frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \cdots + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{s!s^i} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+i}} = \frac{\frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{s!s^i} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+i}} \end{aligned}$$

Et pour $k > s$:

$$\begin{aligned} \pi_{k,s} &= \frac{\frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\lambda}{2\mu} \cdots \frac{\lambda}{s\mu} \frac{\lambda}{s\mu}}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\lambda}{2\mu} + \cdots + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\lambda}{2\mu} \cdots \frac{\lambda}{s\mu} + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\lambda}{2\mu} \cdots \frac{\lambda}{s\mu} \frac{\lambda}{s\mu} + \cdots} \\ &= \frac{\frac{1}{s!s^{k-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \cdots + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{s!s^i} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+i}} = \frac{\frac{1}{s!s^{k-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{s!s^i} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+i}} \end{aligned}$$

En notant $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, on obtient :

$$\pi_{k,s} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{k!} \rho^k}{\sum_{i=0}^s \frac{1}{i!} \rho^i + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{s!s^i} \rho^{s+i}} & \text{pour } k \leq s \\ \frac{\frac{1}{s!s^{k-s}} \rho^k}{\sum_{i=0}^s \frac{1}{i!} \rho^i + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{s!s^i} \rho^{s+i}} & \text{pour } k > s \end{cases}$$

◆

On va noter C ($C \in \mathbb{N}^*$) la quantité initiale de ressources disponibles dans le serveur. La capacité s clients du serveur varie de 1 à C en fonction des ressources consommées par les clients servis à un moment donné. $s = 1$ si le client utilise toutes les ressources C , et $s = C$ si les clients consomment chacune une seule ressource. Alors, s est aussi une variable aléatoire, et on notera P_s la probabilité que cette capacité soit s lors d'une observation du système.

Théorème 3.05. (Ravaliminoarimalalason)

La loi de probabilité P_s est égale à :

$$P_s = \sum_{r=1}^C P(R_s = r).P(R_1 > C - r) \quad (3.07)$$

Où R_k désigne le nombre de ressources occupées par k clients.

Démonstration :

♣ La capacité s (en termes de nombre de clients) du système est définie par l'utilisation de ressources r par ces s clients, et que le $s+1$ -ème client suivant demande une ressource $R > C - r$.
 $P(R_k = r) = P_k(r)$ désigne la probabilité que k clients utilisent r ressources du serveur. ♦

Théorème 3.06. (Ravaliminoarimalalason)

La probabilité qu'aucune ressource du serveur n'est utilisée est exprimée par l'équation (3.08).

$$P(R = 0) = \frac{\sum_{r=1}^C P(R_s = r).P(R_1 > C - r)}{\sum_{i=0}^s \frac{1}{i!} \rho^i + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{s!s^i} \rho^{s+i}} \quad (3.08)$$

Démonstration :

♣ Cet événement est obtenu lorsqu'on ne trouve aucun client dans le système d'attente, c'est-à-dire avec une probabilité $\pi_{0,s}$ pour toutes les valeurs possibles de s .

$$P(R = 0) = \sum_{s=1}^C \pi_{0,s}.P_s = \frac{\sum_{r=1}^C P(R_s = r).P(R_1 > C - r)}{\sum_{i=0}^s \frac{1}{i!} \rho^i + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{s!s^i} \rho^{s+i}}$$

♦

Théorème 3.07. (Ravaliminoarimalalason)

La loi de probabilité de l'utilisation des ressources est égale à :

$$\begin{aligned}
 P(R = r) &= \sum_{s=1}^C \left(\sum_{k=1}^s \pi_{k,s} \cdot P(R_k = r) + \sum_{k=s+1}^{+\infty} \pi_{k,s} \cdot P(R_s = r) \right) \cdot P_s \quad \text{pour } r = 0, \dots, C \\
 &= \sum_{s=1}^C \left(\frac{\left(\sum_{k=1}^s \frac{\rho^k}{k!} P(R_k = r) + \sum_{k=s+1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{s! s^{k-s}} P(R_s = r) \right) \cdot P_s}{\sum_{k=1}^s \frac{\rho^k}{k!} + \sum_{k=s+1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{s! s^{k-s}}} \right) \quad (3.09)
 \end{aligned}$$

Démonstration :

♣ Si la capacité en clients du serveur est $s = 1$, l'utilisation de ressources r au niveau du serveur est limitée à ce seul client. Alors on note la probabilité :

$$\pi_{1,s} \cdot P(R_1 = r) + \pi_{2,s} \cdot P(R_1 = r) + \pi_{3,s} \cdot P(R_1 = r) + \dots = \pi_{1,s} \cdot P(R_1 = r) + \sum_{k=2}^{+\infty} \pi_{k,s} \cdot P(R_1 = r)$$

Si la capacité en clients du serveur est $s = 2$, l'utilisation de ressources r au niveau du serveur est limitée au plus à ces deux clients. Alors on a la probabilité :

$$\pi_{1,s} \cdot P(R_1 = r) + \pi_{2,s} \cdot P(R_2 = r) + \pi_{3,s} \cdot P(R_2 = r) + \dots = \sum_{k=1}^2 \pi_{k,s} \cdot P(R_k = r) + \sum_{k=3}^{+\infty} \pi_{k,s} \cdot P(R_2 = r)$$

Pour s quelconque, l'utilisation des r ressources du serveur est limitée à s clients :

$$\begin{aligned}
 &\pi_{1,s} \cdot P(R_1 = r) + \pi_{2,s} \cdot P(R_2 = r) + \dots + \pi_{s,s} \cdot P(R_s = r) + \pi_{s+1,s} \cdot P(R_s = r) + \pi_{s+2,s} \cdot P(R_s = r) + \dots \\
 &= \sum_{k=1}^s \pi_{k,s} \cdot P(R_k = r) + \sum_{k=s+1}^{+\infty} \pi_{k,s} \cdot P(R_s = r)
 \end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité de l'utilisation des r ressources est obtenue pour toutes les valeurs possibles de s par :

$$P(R = r) = \sum_{s=1}^C \left(\sum_{k=1}^s \pi_{k,s} \cdot P(R_k = r) + \sum_{k=s+1}^{+\infty} \pi_{k,s} \cdot P(R_s = r) \right) \cdot P_s$$

◆

Un blocage sans perte s'applique dans les cas suivants :

- Si la quantité restante des ressources des serveurs est inférieure au besoin du client suivant, il ne peut pas entrer dans l'espace serveur et doit rester dans l'espace d'attente attendant jusqu'à ce que des ressources se libèrent.
- Si la totalité des ressources des serveurs (finie) est inférieure au besoin du client, le système va se bloquer éternellement.

La probabilité de blocage du système est donnée par :

$$B = \sum_{r=0}^C \sum_{s=1}^C P_s \cdot \pi_{s,s} \cdot P(R_s = r) \cdot P(R_1 \geq C - r) \quad (3.10)$$

Démonstration :

♣ Le système est bloqué pour toute capacité en clients s dont le serveur occupe déjà s clients consommant r ressources, et qu'un autre client demande une quantité de ressources supérieure à $C - r$.

◆

3.4.2.2 Cas particulier binomial

On va appliquer le théorème 3.07 sur un cas binomial. Pour ne pas se trouver dans le cas du blocage éternel du système : Un client peut demander une quantité aléatoire de ressources au plus M selon ses besoins, suivant une loi binomiale moyenne m .

Le nombre de ressources demandées par une personne suit une loi binomiale de paramètre $n = M$ et

$$p = \frac{m}{M}.$$

Théorème 3.08.

Les ressources demandées par k clients de la file d'attente suivent une loi binomiale de paramètre kM et m/M .

Démonstration :

♣ La somme de k lois binomiales indépendantes et identiquement distribuées $\mathcal{B}(n, p)$ est encore une loi binomiale $\mathcal{B}(kn, p)$. Ici, les ressources demandées par les k clients forment une somme de

k lois binomiales indépendantes et identiquement distribuées $\mathcal{B}(n = M, p = m/M)$, alors cette somme suit la loi $\mathcal{B}(kn = kM, p = m/M)$.

◆

$$\text{Ainsi } P(R_k = r) = \binom{kM}{r} p^r q^{kM-r} \text{ où } q = 1 - p.$$

La probabilité que le système ait une capacité s en termes de nombre de clients est :

$$P_s = \sum_{r=1}^C P(R_s = r) \cdot P(R_1 > C - r) \quad (3.11)$$

$$P_s = \sum_{r=1}^C \left(\binom{sM}{r} p^r q^{sM-r} \cdot \sum_{i=C-r+1}^C \binom{M}{i} p^i q^{M-i} \right) \quad (3.12)$$

La probabilité de l'utilisation des r ressources est égale à :

$$\begin{aligned} P(R = r) &= \sum_{s=1}^C \left(\sum_{k=1}^s \pi_{k,s} \cdot P(R_k = r) + \sum_{k=s+1}^{+\infty} \pi_{k,s} \cdot P(R_s = r) \right) \cdot P_s \\ &= \sum_{s=1}^C \left(\frac{\sum_{k=1}^s \frac{1}{k!} \rho^k \cdot \binom{kM}{r} p^r q^{kM-r} + \sum_{k=s+1}^{+\infty} \frac{1}{s! s^{k-s}} \rho^k \cdot \binom{sM}{r} p^r q^{sM-r}}{\sum_{i=0}^s \frac{1}{i!} \rho^i + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{s! s^i} \rho^{s+i}} \right) \cdot P_s \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.4.3 Etude de cas par des simulations

3.4.3.1 Comparaison à des résultats de simulations

Pour confirmer les résultats théoriques, on a effectué des simulations sous Matlab-Simulink d'un partage de ressources.

En premier lieu, on a procédé au partage de ressources discrètes d'une file d'attente à serveur de ressources infinies. Les clients arrivent selon un taux d'arrivée $\lambda = 1/1,2$ par unité de temps, demandent un service d'une durée aléatoire suivant une loi exponentielle de moyenne $1/\mu = 0,8$ unité de temps, et requièrent un nombre de ressources aléatoire suivant une loi de Poisson de moyenne $\alpha = 5$.

La Figure 3.02 représente une comparaison du résultat de simulation (histogramme en bleu) et de l'expression analytique de la formule (3.05) (courbe rouge). L'histogramme en bleu indique une représentation sous forme normalisée du nombre observé de ressources occupées par les clients.

L'observation se fait chaque 0,1 unité de temps pendant une durée de 5.000 unités de temps. On note que le résultat de la simulation suit bien l'expression analytique de la loi de probabilité. D'autres simulations ont été effectuées pour différentes valeurs de λ , μ et ρ et on retrouve le même fait. Ceci valide notre expression de la formule (3.05).

On trouve une forte probabilité de la non utilisation de ressources (Ressource utilisée = 0, Probabilité = 0,52). Ce fait nous motive à identifier la quantité optimale de ressources nécessaires au système en fonction des besoins des utilisateurs. L'utilisation tourne autour de la valeur moyenne du nombre de ressources utilisées ($\alpha = 5$) dans notre exemple, où on observe le pic de la probabilité d'utilisation.

La probabilité tend vers zéro plus le nombre de ressources utilisées en objet augmente, ce qui veut dire que ce n'est pas la peine de disposer plusieurs ressources vues que la probabilité de l'utilisation de toutes ces ressources est petite. Dans la figure 3.02, on trouve que la probabilité d'utilisation de 20 ressources est presque nulle, par conséquent, on peut ne pas doter plus de 20 ressources au système étudié.

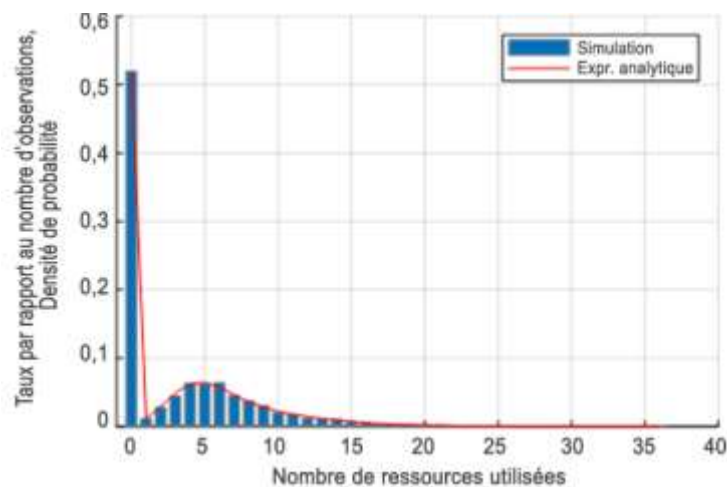


Figure 3.02. Partage de ressources infinies

Pour la partie partage de ressources finies aux clients : La Figure 3.03 représente le résultat de la simulation pour des clients arrivant selon un taux d'arrivée de $\lambda = 1/1,2$ par unité de temps, demandant un service d'une durée aléatoire suivant une loi exponentielle de moyenne $1/\mu = 0,8$ unité de temps. Les ressources demandées par ces clients sont aléatoires suivant une loi

Binomiale de valeur maximale $M = 6$, et de moyenne $m = 3$. La capacité maximale en termes de ressources du serveur du système d'attente est de $C = 10$.

La Figure 3.03 représente la comparaison du résultat de la simulation et de l'expression analytique de la formule (3.13).

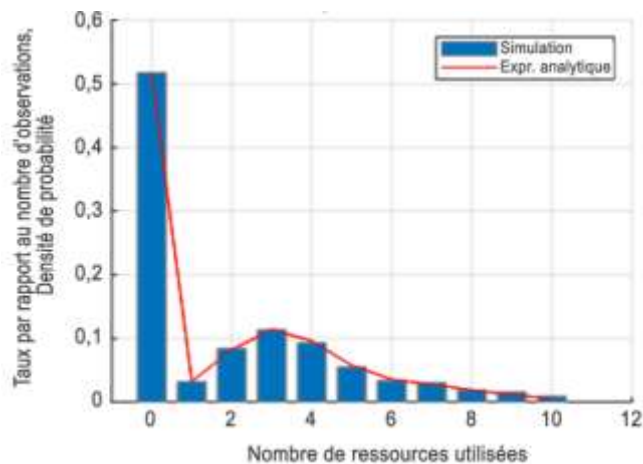


Figure 3.03. Partage de ressources finies

On constate la même interprétation quant à l'utilisation des ressources et sa variation autour de la valeur moyenne. On tire la même conclusion par rapport à la validation de notre expression analytique après des multiples simulations sur différentes valeurs de λ , μ , M et m .

3.4.3.2 Abaques d'utilisation de ressources

A partir des expressions analytiques qu'on vient de valider, on peut dresser les abaques suivants en fonction des valeurs des paramètres du système d'attente, que ce soit à ressources finies ou pas.

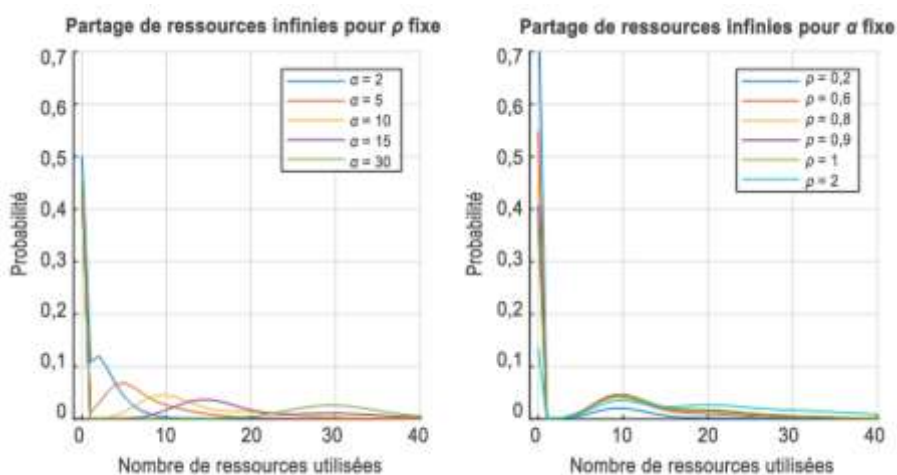


Figure 3.04. Lois de probabilités de ressources utilisées (ressources infinies)

Sur les figures 3.04, on note un pic au voisinage de la valeur moyenne du nombre de ressources demandées par les clients, et puis les courbes s'étalent vers la gauche et vers la droite. Ceci indique que le nombre de ressources occupées se concentre autour de la moyenne demandée par les clients. Des autres petits pics avec de faibles probabilités aux multiples de cette moyenne sont aussi observés, expliquant le fait que plusieurs clients sont servis en même temps par le serveur.

La probabilité de trouver le serveur vide (en termes de nombre de clients) diminue lorsque ρ augmente (Figure 3.05, à droite). L'augmentation de ρ suppose de nombreux clients stagnant dans le système d'attente, soit suite à des temps de service élevé par rapport aux inter-arrivées, ou soit à des arrivées trop fréquentes par rapport aux durées de service. Pour des ressources infinies, ρ peut dépasser 1, et le nombre de ressources utilisées tend aussi vers une quantité élevée comme le montre la courbe en bleu ciel ($\rho = 2$).

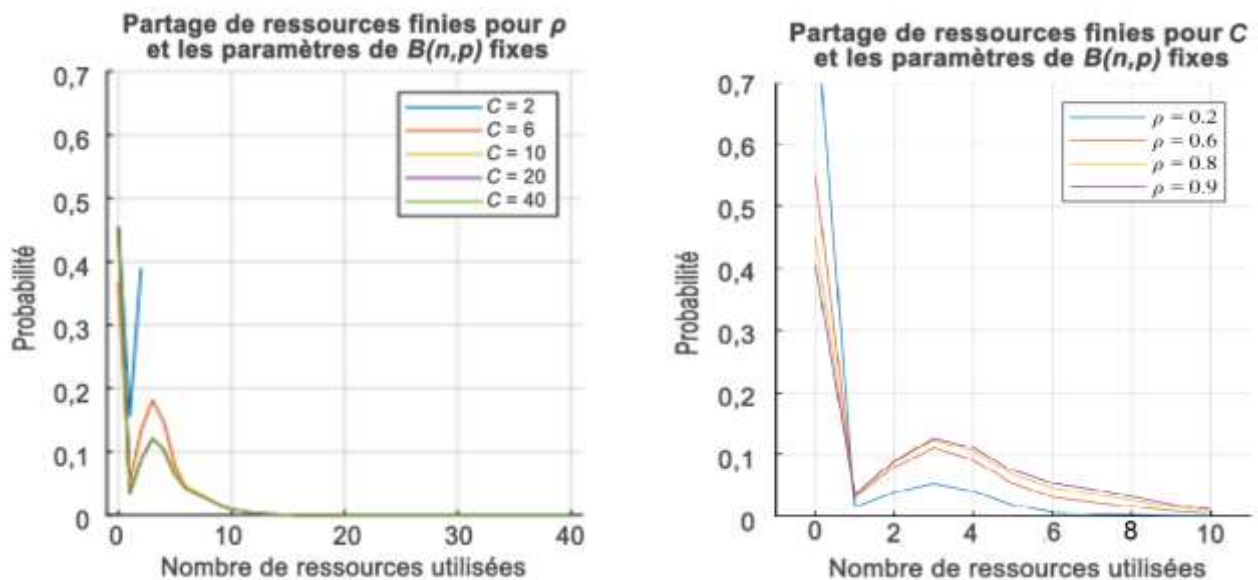


Figure 3.05. Loi de probabilités de ressources utilisées (ressources finies)

Sur la figure 3.05 (à gauche), plus la capacité est élevée, plus on tend vers les scénarios de ressources infinies précédentes. La probabilité de trouver le système libre (0 client) diminue lorsqu'on diminue le nombre de ressources ou lorsque le facteur de charge augmente. Et la notion de dimensionnement de ressources commence à intervenir à partir de cette étape. On ne veut pas déployer des ressources qui ne vont pas être utilisées, ou qui sont sous-utilisés.

3.4.4 Modèle de partage de ressources à des utilisateurs flous

3.4.4.1 Modèle utilisant des utilisateurs flous

Supposons maintenant l'arrivée des clients forment un processus de Poisson mais que le taux d'arrivée λ n'est pas connu certainement. Ce taux d'arrivée varie de λ_{min} à λ_{max} et prend une valeur moyenne $\bar{\lambda}$ pendant une période d'observation T assez longue. On peut le modéliser par un nombre

flou triangulaire $\lambda = (\lambda_{min}, \bar{\lambda}, \lambda_{max})$ [3.33]. Son α -coupe est égal à $\lambda[\alpha] = [\lambda_{min} + (\bar{\lambda} - \lambda_{min})\alpha, \lambda_{max} - (\lambda_{max} - \bar{\lambda})\alpha]$. De même pour la caractérisation de la durée de service, on suppose qu'on ne

le connaît pas parfaitement ; seulement elle est exponentielle et sa moyenne varie de μ_{min} à μ_{max} avec une valeur moyenne $\bar{\mu}$. Cet inverse de la durée moyenne de service peut aussi être modélisée

par un nombre flou triangulaire $\mu = (\mu_{min}, \bar{\mu}, \mu_{max})$. Son α -coupe est égal à $\mu[\alpha] = [\mu_{min} + (\bar{\mu} - \mu_{min})\alpha, \mu_{max} - (\mu_{max} - \bar{\mu})\alpha]$.

On a donc une file d'attente FM/FM/1 (FM : Fuzzy Markovian) [3.34] d'un seul serveur dont les caractéristiques des arrivées et des durées de services sont markoviennes à paramètres flous. Le serveur dispose d'une infinité de ressources qu'il partage à ses clients en fonction de leurs besoins.

Le facteur de charge de la file est égal à $\rho = \lambda / \mu$. Son α -coupe est défini par :

$$\rho[\alpha] = \left[\frac{\lambda_{min} + (\bar{\lambda} - \lambda_{min})\alpha}{\mu_{max} - (\mu_{max} - \bar{\mu})\alpha}, \frac{\lambda_{max} - (\lambda_{max} - \bar{\lambda})\alpha}{\mu_{min} + (\bar{\mu} - \mu_{min})\alpha} \right] \quad (3.14)$$

Dans toute la suite, on va le noter par $\rho[\alpha] = [\rho_{min}, \rho_{max}]$.

A priori, si le système sert k clients, la probabilité que ces k clients utilisent une quantité de ressources r est notée $P_k(r)$ où k et r désignent des nombres certains (non flous). $P_k(r)$ a une représentation sous forme de nombre certain.

La probabilité de trouver k clients servi dans la file FM/FM/1 est égale au nombre flou

$P(N = k) = \left(\frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho} \right)$. Son α -coupe est égal à :

$$(P(N = k))[\alpha] = \left[\frac{\rho_{min}^k}{k!} e^{-\rho_{max}}, \frac{\rho_{max}^k}{k!} e^{-\rho_{min}} \right] \quad (3.15)$$

En effet :

$$\rho^k [\alpha] = [\rho_{min}^k, \rho_{max}^k], \frac{\rho^k}{k!} [\alpha] = \left[\frac{\rho_{min}^k}{k!}, \frac{\rho_{max}^k}{k!} \right], \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k!} \right) [\alpha] = \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\rho_{min}^k}{k!}, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\rho_{max}^k}{k!} \right] = [e^{\rho_{min}}, e^{\rho_{max}}]$$

$$e^{-\rho} [\alpha] = \left(\frac{1}{e^{\rho}} \right) [\alpha] = \left[\frac{1}{e^{\rho_{max}}}, \frac{1}{e^{\rho_{min}}} \right] = [e^{-\rho_{max}}, e^{-\rho_{min}}]$$

$$\text{Ainsi } \left(\frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho} \right) [\alpha] = \left[\frac{\rho_{min}^k}{k!} e^{-\rho_{max}}, \frac{\rho_{max}^k}{k!} e^{-\rho_{min}} \right].$$

La probabilité que r ressources du serveur est utilisée est donc donnée par le nombre

$$\text{flou } P(R = r) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho} . P_k(r) .$$

$$\text{Son } \alpha\text{-coupe est égal } (P(R = r))[\alpha] = \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho_{min}^k}{k!} e^{-\rho_{max}} . P_k(r), \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho_{max}^k}{k!} e^{-\rho_{min}} . P_k(r) \right].$$

Sa valeur minimale est égale à :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda_{min} + (\bar{\lambda} - \lambda_{min})\alpha}{\mu_{max} - (\mu_{max} - \bar{\mu})\alpha} \right)^k e^{-\left(\frac{\lambda_{max} - (\lambda_{max} - \bar{\lambda})\alpha}{\mu_{min} + (\bar{\mu} - \mu_{min})\alpha} \right)} . P_k(r) \quad (3.16)$$

Et sa valeur maximale est égale à :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda_{max} - (\lambda_{max} - \bar{\lambda})\alpha}{\mu_{min} + (\bar{\mu} - \mu_{min})\alpha} \right)^k e^{-\left(\frac{\lambda_{min} + (\bar{\lambda} - \lambda_{min})\alpha}{\mu_{max} - (\mu_{max} - \bar{\mu})\alpha} \right)} . P_k(r) \quad (3.17)$$

On peut aussi dresser le graphe de la fonction d'appartenance en fonction de P et de r dans ce cas, mais il est difficile d'explicitier l'expression analytique de cette fonction d'appartenance. On peut quand même exploiter ce graphe pour déterminer la quantité suffisante r de ressources à mettre à disposition dans le serveur pour un seuil de probabilité d'utilisation égale à ε .

3.4.4.2 Application numérique

On va prendre l'exemple d'un serveur de file d'attente de capacité infinie partageant ses ressources aux clients. Ces derniers arrivent selon un processus de Poisson dont le taux semble incertain, de valeur minimal $\lambda_{min} = 1/1,3 \text{ s}^{-1}$, de valeur maximal $\lambda_{max} = 1/1,0 \text{ s}^{-1}$, et de valeur moyenne $\bar{\lambda} = 1/1,2 \text{ s}^{-1}$. Ces clients demandent un service de durée aléatoire suivant une loi exponentielle de moyenne incertaine aussi, de valeur minimal $\mu_{min} = 1/0,9 \text{ s}^{-1}$, de valeur maximal $\mu_{max} = 1/0,7 \text{ s}^{-1}$, et de valeur

moyenne $\bar{\mu} = 1/0,8 \text{ s}^{-1}$. Chaque service nécessite une quantité aléatoire de ressources suivant une loi de Poisson de moyenne de $a = 5$ ressources par client. Les ressources utilisées par des clients différents sont indépendantes. On va assimiler le taux du processus des arrivées à un nombre flou triangulaire $\lambda = (\lambda_{\min}, \bar{\lambda}, \lambda_{\max}) = (1/1,3, 1/1,2, 1/1,0)$, et de même pour la durée moyenne de service $\mu = (\mu_{\min}, \bar{\mu}, \mu_{\max}) = (1/0,9, 1/0,8, 1/0,7)$.

Soit $\alpha \in [0,1]$. Le facteur de charge de la file d'attente FM/FM/1 est égal au nombre flou $\rho = \lambda / \mu$ dont l' α -coupe est égal à :

$$\rho[\alpha] = \left[\frac{0,769 + 0,064\alpha}{1,429 - 0,179\alpha}, \frac{1,000 - 0,167\alpha}{1,111 + 0,139\alpha} \right]$$

La quantité des ressources utilisées par 1 seul client suit la loi de Poisson de paramètre $a = 5$ ressources, alors celle des ressources utilisées par k clients suit la loi de Poisson de paramètre $ka = 5k$ ressources suite à l'indépendance de la quantité de ressources utilisées par des clients différents. Ainsi, étant donné k clients, la probabilité que r ressources soient utilisées par k clients est égale

$$\text{à } P_k(r) = \frac{1}{r!} (5k)^r e^{-5k}.$$

a. Distribution de probabilité

La probabilité que r ressources soient utilisée dans le serveur de la file d'attente est un nombre flou dont les bornes de l' α -coupe sont :

$$\begin{aligned} (P(R=r))[\alpha]_{\min} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{0,769 + 0,064\alpha}{1,429 - 0,179\alpha} \right)^k e^{-\left(\frac{1,000 - 0,167\alpha}{1,111 + 0,139\alpha}\right)} \cdot \frac{1}{r!} (5k)^r e^{-5k} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k! r!} \left(\frac{0,769 + 0,064\alpha}{1,429 - 0,179\alpha} e^{-5} \right)^k e^{-\left(\frac{1,000 - 0,167\alpha}{1,111 + 0,139\alpha}\right)} \cdot (5k)^r \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} (P(R=r))[\alpha]_{\max} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1,000 - 0,167\alpha}{1,111 + 0,139\alpha} \right)^k e^{-\left(\frac{0,769 + 0,064\alpha}{1,429 - 0,179\alpha}\right)} \cdot \frac{1}{r!} (5k)^r e^{-5k} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k! r!} \left(\frac{1,000 - 0,167\alpha}{1,111 + 0,139\alpha} e^{-5} \right)^k e^{-\left(\frac{0,769 + 0,064\alpha}{1,429 - 0,179\alpha}\right)} \cdot (5k)^r \end{aligned}$$

A partir de ces différentes bornes de l' α -coupe, on peut dresser le graphe de la fonction d'appartenance du nombre flou $P(R=6)$:

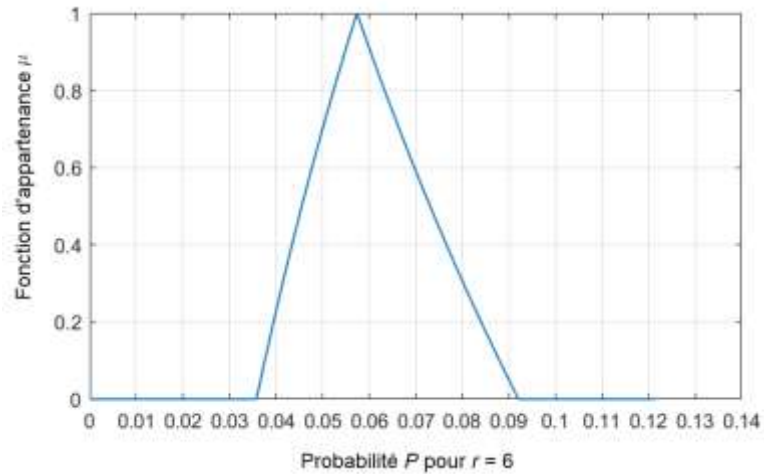


Figure 3.06. *Fonction d'appartenance de $P(R = 6)$*

La probabilité $P(R = 6)$ est un nombre flou, dont le support est égal à $[0,0358, 0,0921]$ et le noyau est égal à $\{0,0574\}$.

On peut dresser de la même façon les fonctions d'appartenances de la probabilité floue d'utilisation de ressources r du serveur de la file d'attente pour différentes valeurs de r . La figure 3.07 représente les graphes de ces fonctions d'appartenance.

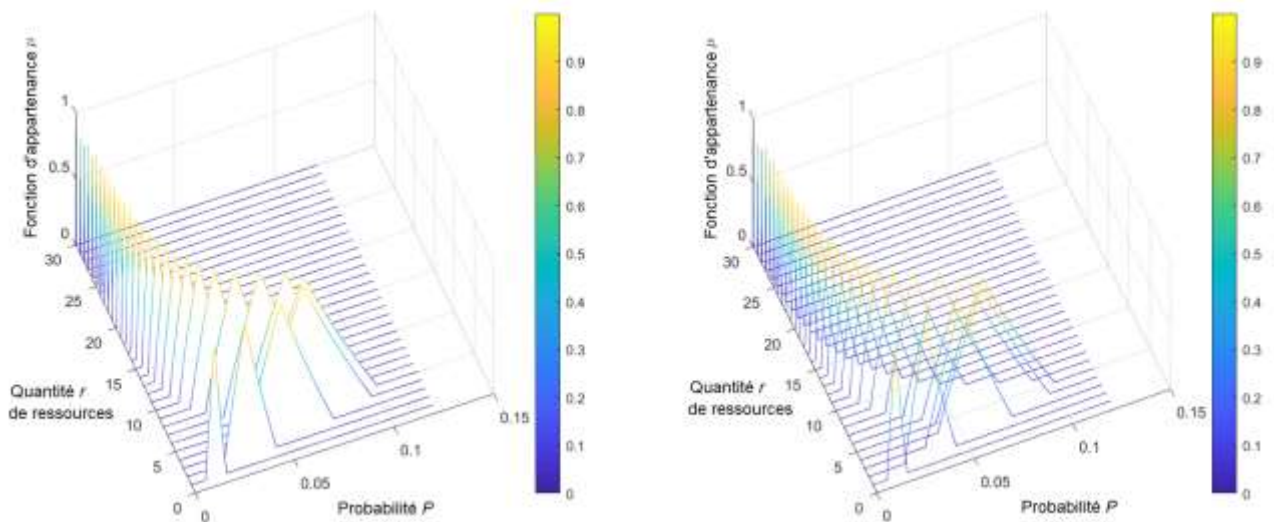


Figure 3.07. *Fonctions d'appartenance de $P(R = r)$ pour différentes valeurs de r*

Dans la figure 3.07 de gauche, les courbes de derrière (r supérieur) sont masquées par les courbes de devant (r inférieur) pour faciliter leurs vues. Tandis que dans la figure de droite, on les a laissés telles qu'elles.

On constate la borne maximale du support du nombre flou P est maximale pour $r = 5$ qui est égale à la moyenne de nombre de ressources occupées par utilisateur. La courbe de la fonction d'appartenance s'étale vers la droite (probabilité plus élevée) de $r = 1$ jusqu'à $r = 5$ ressources, puis vers la gauche (probabilité plus basse) à partir de $r = 6$ ressources. Bien que les propriétés d'arrivée et de service des utilisateurs sont floues, on note quand même que la probabilité d'utilisation de $r = 5$ ressources du système est la plus élevée.

b. Dimensionnement

On peut aussi analyser ce fait à partir de la figure 3.08 suivante qui représente les supports des nombres flous $P(R = r)$ pour différentes valeurs de r .

A partir de cette figure 3.08, on peut déterminer une quantité de ressources suffisantes au système au lieu de déployer une infinité qui valent très chères.

On suppose maintenant que le serveur a une quantité finie C de ressources. Si on admet que la probabilité d'utilisation simultanée de toutes ces C ressources ne doit pas dépasser un seuil $\varepsilon = 0,01$, un client arrivant trouvera une ressource libre du serveur, sinon il doit attendre (bloqué). En d'autres termes, la probabilité de blocage du système ne doit pas dépasser un seuil $\varepsilon = 0,01$. En lisant sur la figure 3.08, avec la limite rouge de la probabilité $\varepsilon = 0,01$, on doit doter au système une quantité $C \geq 18$ ressources. La quantité minimale suffisante est donc de 18 ressources.

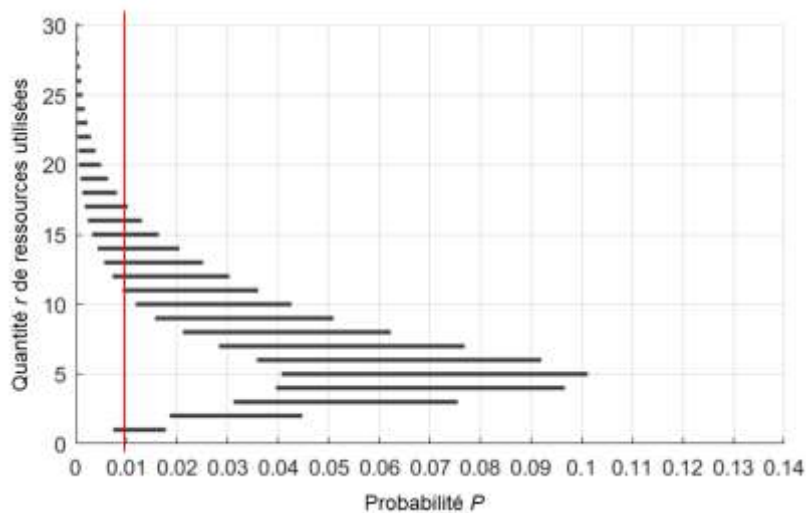


Figure 3.08. Support des probabilités floues $P(R = r)$

3.5 Distribution d'état du partage de ressources fractionnaires

3.5.1 Ressources infinies, utilisation à valeurs réelles positives

Cette fois-ci, on va se pencher dans le cas de ressources dont les besoins peuvent être des nombres réels positifs, à valeurs dans \mathbb{R} ou une partie de \mathbb{R} . Le nombre de ressources disponibles à travers les serveurs de la file d'attente n'est plus un entier naturel, mais aussi un nombre réel quelconque. On a donc recours à une variable aléatoire réelle R égale à la quantité de ressources occupées.

3.5.1.1 Cas général

Théorème 3.09. (Ravaliminoarimalalason)

On peut étendre notre théorème 3.01 dans le cas de variable aléatoire continue. La probabilité $P(R \leq r)$ est égale à :

$$P(R \leq r) = e^{-\rho} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k!} P(R_k \leq r) \quad (3.18)$$

En d'autres termes, la fonction de répartition de la quantité de ressources occupées est égale à :

$$F_R(x) = e^{-\rho} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k!} F_k(x) \quad (3.19)$$

Où $F_k(x)$ désigne la fonction de répartition de la quantité de ressources occupées par k clients.

Démonstration :

♣ La démonstration se fait par analogie de celle des ressources discrètes.

Si la file d'attente compte $N = k$ clients, ils sont tous servis simultanément. En notant r_i la quantité de ressources utilisées par le i -ème client, on peut écrire :

$$P(R \leq r) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(N = k) \cdot P(r_1 + \dots + r_k \leq r)$$

$P(N = k)$ est le k -ème élément π_k de la distribution stationnaire π du système d'attente :

$P(N = k) = \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho}$. Et $P(r_1 + \dots + r_k \leq r)$ la probabilité que la somme des ressources utilisées par

les k clients est inférieure ou égale à r , qu'on a noté $P(R_k \leq r)$.

Cette probabilité $P(R \leq r)$ est appelée la fonction de répartition de la variable de la variable aléatoire R , qu'on notera $F_R(r)$.

◆

Théorème 3.10. (Ravaliminoarimalalason)

La fonction densité de probabilité de la quantité de ressources occupées est égale à :

$$f_R(x) = e^{-\rho} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k!} f_k(x) \quad (3.20)$$

Où $f_k(x)$ désigne la fonction densité de probabilité de la quantité de ressources occupées par k clients. Il est bien de noter que la fonction densité $f_k(x)$ est obtenue par le produit de convolution de k fonctions densités de probabilité $f_1(x)$ de la quantité de ressources occupées par un seul client :

$$f_k(x) = f_1 * \dots * f_1(x).$$

Le théorème 3.10 se déduit par dérivation de la fonction de répartition de l'équation (3.19).

3.5.1.2 Cas d'utilisation exponentielle

On va appliquer nos théorèmes 3.09 et 3.10 sur le cas particulier d'utilisation unitaire suivant une loi exponentielle de paramètre μ_R c'est-à-dire qu'un utilisateur utilise une quantité de ressources $R_1 = r$ suit la loi $\mathcal{E}(\mu_R)$. L'intérêt de cette application est que toute distribution arbitraire peut être approximée en utilisant des lois exponentielles comme Asmussen a mentionné dans [3.35].

Théorème 3.11.

La fonction densité de probabilité de la quantité de ressources occupées est égale à :

$$f_R(x) = e^{-(\rho + \mu_R x)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(\rho \mu_R)^k}{k!^2} x^{k-1} \quad (3.21)$$

La fonction de répartition de la quantité de ressources occupées est égale à :

$$F_R(x) = P(R \leq x) = e^{-\rho} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k \rho^k}{k!^2} \gamma(k, \mu_R x) \quad (3.22)$$

Où $\gamma(k, x)$ désigne la fonction gamma incomplète $\gamma(k, x) = \int_0^x t^{k-1} e^{-t} dt$.

Pour démontrer ce théorème 3.11, on va utiliser le lemme 3.01 suivant.

Lemme 3.01.

La somme de k lois exponentielles indépendantes de paramètre μ_R est une loi gamma de paramètre k et μ_R qu'on va noter $\Gamma(k, \mu_R)$.

Démonstration du théorème 3.11 :

♣ En utilisant le lemme 3.01 et que la fonction densité de probabilité de la loi gamma $\Gamma(k, \mu_R)$ est

égale à $f_k(x) = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \mu_R^k e^{-\mu_R x}$, $x \geq 0$.

$$\begin{aligned} f_R(x) &= e^{-\rho} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k!} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \mu_R^k e^{-\mu_R x} = e^{-\rho} e^{-\mu_R x} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k \mu_R^k}{k!} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-(\rho + \mu_R x)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\rho \mu_R)^k}{k!} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= e^{-(\rho + \mu_R x)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k (\rho \mu_R)^k}{k!^2} x^{k-1}, \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

Et la fonction de répartition de la loi gamma $\Gamma(k, \mu_R)$ est égale à $F_k(x) = \frac{\gamma(k, \mu_R x)}{(k-1)!}$, $x \geq 0$. La

fonction $\gamma(k, x) = \int_0^x t^{k-1} e^{-t} dt$ désigne la fonction gamma incomplète.

$$F_R(x) = e^{-\rho} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k!} \frac{\gamma(k, \mu_R x)}{(k-1)!} = e^{-\rho} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k \rho^k}{k!^2} \gamma(k, \mu_R x), \quad x \geq 0$$

◆

3.5.2 Ressources finies, utilisation à valeurs réelles positives

Maintenant, on va poser une quantité finie C de ressources disponibles auprès du serveur.

3.5.2.1 Cas général

Théorème 3.12. (Ravaliminoarimalalason)

La fonction de répartition $F_R(x)$ du nombre de ressources occupées est égale à (3.23).

$$F_R(x) = P(R \leq x) = \sum_{s=1}^{+\infty} \left(\frac{\left(\sum_{k=1}^s \frac{\rho^k}{k!} F_k(x) + \sum_{k=s+1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{s! s^{k-s}} F_s(x) \right) \cdot P_s}{\sum_{k=1}^s \frac{\rho^k}{k!} + \sum_{k=s+1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{s! s^{k-s}}} \right), \quad \text{pour } 0 \leq x \leq C \quad (3.23)$$

Où P_s est la probabilité que la capacité du serveur en termes de nombre de clients est égale à s .

Démonstration :

♣ On va reprendre la notation $\pi_{k,s}$ utilisée dans (3.06) pour désigner l'élément de distribution stationnaire du système d'attente [3.36] indiquant la probabilité que le système de capacité s en termes de nombre de clients héberge k clients (que ce soient servis ou en attente).

$$\pi_{k,s} = \begin{cases} \frac{\frac{\rho^k}{k!}}{\sum_{i=0}^s \frac{\rho^i}{i!} + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\rho^{s+i}}{s!s^i}}, \text{ pour } k \leq s \\ \frac{\frac{\rho^k}{s!s^{k-s}}}{\sum_{i=0}^s \frac{\rho^i}{i!} + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\rho^{s+i}}{s!s^i}}, \text{ pour } k > s \end{cases}$$

Si la capacité en clients du serveur est $s = 1$, l'utilisation de ressources inférieures à r au niveau du serveur est limitée à ce seul client. Alors on note la probabilité :

$$\pi_{1,s} \cdot P(R_1 \leq r) + \pi_{2,s} \cdot P(R_1 \leq r) + \pi_{3,s} \cdot P(R_1 \leq r) + \dots = \pi_{1,s} \cdot P(R_1 \leq r) + \sum_{k=2}^{+\infty} \pi_{k,s} \cdot P(R_1 \leq r)$$

Si la capacité en clients du serveur est $s = 2$, l'utilisation de ressources inférieures à r au niveau du serveur est limitée au plus à ces deux clients. Alors, on a encore la probabilité :

$$\pi_{1,s} \cdot P(R_1 \leq r) + \pi_{2,s} \cdot P(R_2 \leq r) + \pi_{3,s} \cdot P(R_2 \leq r) + \dots = \sum_{k=1}^2 \pi_{k,s} \cdot P(R_k \leq r) + \sum_{k=3}^{+\infty} \pi_{k,s} \cdot P(R_2 \leq r)$$

Ainsi de suite... La probabilité d'utilisation de quantité de ressources inférieure à r est obtenue pour toutes les valeurs possibles de s (de 1 à $+\infty$, c'est-à-dire $s \in \mathbb{N}^*$) par :

$$P(R \leq r) = \sum_{s=1}^{+\infty} \left(\left(\sum_{k=1}^s \pi_{k,s} \cdot P(R_k \leq r) + \sum_{k=s+1}^{+\infty} \pi_{k,s} \cdot P(R_s \leq r) \right) \cdot P_s \right)$$

On déduit la fonction de répartition $F_R(x) = P(R \leq x) = \sum_{s=1}^{+\infty} \left(\left(\sum_{k=1}^s \pi_{k,s} \cdot F_k(x) + \sum_{k=s+1}^{+\infty} \pi_{k,s} \cdot F_s(x) \right) \cdot P_s \right)$.

◆

Il nous reste à déterminer l'expression de P_s , la probabilité que le système a une capacité s en termes de nombre de clients.

Théorème 3.13. (Ravaliminoarimalalason)

La loi de probabilité P_s de la capacité du serveur en termes de nombre de clients est exprimée par :

$$P_s = \int_0^C \int_{C-x}^{+\infty} f_s(x) f_1(t) dt dx \quad (3.24)$$

Où $f_s(x)$ désigne la fonction densité de probabilité de la quantité de ressources utilisées par s clients : $f_s(x) = f_1 * \dots * f_1(x)$, s produits de convolution consécutifs de $f_1(x)$.

Démonstration :

♣ Pour le cas de ressources discrètes de pas 1, $P_s = \sum_{r=1}^C P(R_s = r) \cdot P(R_1 > C - r)$. En effet, l'utilisation courante par s clients est r et que si un autre client veut utiliser plus de $C - r$ ressources, l'utilisation irait dépasser la capacité finie C . Le système d'attente ne peut donc pas servir plus de s clients dans ce cas, et ce, pour toutes les valeurs possibles de r de 1 à C et par pas de 1.

Maintenant, on va considérer un pas $h > 0$. $P_s = \sum_{r=h}^C P(R_s = r) \cdot P(R_1 > C - r)$, avec $r = h, 2h, 3h, \dots, nh = C$.

$$P_s = \sum_{n=1}^{C/h} P(R_s = nh) \cdot P(R_1 > C - nh)$$

De l'autre côté, pour une variable aléatoire X quelconque, la fonction densité est la dérivée de la fonction de répartition :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F_X(t+h) - F_X(t)}{h} = f_X(t)$$

Alors pour h infiniment petit, on peut écrire que $F_X(t+h) - F_X(t) = f_X(t)h + o(h)$ où $o(h)$ est une fonction petit-o de h .

On rappelle que le cas continu est obtenu lorsque le pas h de ressources utilisées tend vers 0^+ .

Pour h infiniment petit, on a donc $F_X(t+h) - F_X(t) = f_X(t)h + o(h) = P(t \leq X \leq t+h)$.

Et que $\lim_{h \rightarrow 0^+} P(t \leq X \leq t+h) = P(X = t)$.

Par conséquent, pour $h \rightarrow 0^+$, $P(X = t) = f_X(t)h$. Pour la variable aléatoire R_s , $P(R_s = t) = f_s(t)h$

L'expression de P_s peut donc être réécrite comme :

$$P_s = \sum_{nh=1}^C h.f_s(nh).P(R_1 > C - nh)$$

Et en appliquant la définition de l'intégrale de Riemann dans cette expression de P_s , on a :

$$P_s = \sum_{nh=1}^C h.f_s(nh).P(R_1 > C - nh) = \int_0^C f_s(x).P(R > C - x)dx$$

Il reste à utiliser la définition intégrale de $P(R_1 > C - x)$ à partir de la fonction densité :

$$P(R_1 > C - x) = \int_{C-x}^{+\infty} f_1(t)dt$$

Alors :

$$P_s = \int_0^C f_s(x).P(R_1 > C - x)dx = \int_0^C f_s(x). \left(\int_{C-x}^{+\infty} f_1(t)dt \right) dx = \int_0^C \int_{C-x}^{+\infty} f_s(x) f_1(t) dt dx$$

◆

3.5.2.2 Cas d'utilisation exponentielle

On va appliquer notre théorème 3.13 sur le cas particulier d'utilisation unitaire suivant une loi exponentielle de paramètre μ_R . Puisque le nombre de ressources disponibles auprès du serveur est fini et est égal à C , pour éviter que le système se bloque éternellement, on doit avoir $P(R_1 > C)$ très petit.

Théorème 3.14.

La capacité du serveur en termes de nombre de clients suit la loi de Poisson de paramètre $\mu_R C$.

Démonstration :

♣ En utilisant l'expression de P_s obtenu ci-dessous, on peut écrire comme suit.

$$\begin{aligned} P_s &= \int_0^C f_s(x).P(R_1 > C - x)dx = \int_0^C \frac{x^{s-1}}{(s-1)!} \mu_R^s . e^{-\mu_R x} e^{-\mu_R (C-x)} . dx = \int_0^C \frac{x^{s-1}}{(s-1)!} \mu_R^s e^{-\mu_R C} . dx \\ &= \lambda_R^s e^{-\mu_R C} \int_0^C \frac{x^{s-1}}{(s-1)!} dx = \mu_R^s e^{-\mu_R C} \left[\frac{x^s}{s!} \right]_0^C = \frac{\mu_R^s C^s}{s!} e^{-\lambda_R C} = \frac{(\mu_R C)^s}{s!} e^{-\mu_R C} \end{aligned}$$

On obtient la loi de probabilité d'une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\mu_R C$.

◆

Théorème 3.15.

La fonction de répartition $F_R(x)$ du nombre de ressources occupées est donnée par :

$$F_R(x) = P(R \leq x) = \sum_{s=1}^{+\infty} \left(\frac{\left(\sum_{k=1}^s \frac{k\rho^k}{k!} \gamma(k, \mu_R x) + \sum_{k=s+1}^{+\infty} \frac{s\rho^k}{s! s^{k-s}} \gamma(s, \mu_R x) \right) \cdot \frac{(\mu_R C)^s}{s!} e^{-\mu_R C}}{\sum_{k=1}^s \frac{\rho^k}{k!} + \sum_{k=s+1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{s! s^{k-s}}} \right), \quad (3.25)$$

pour $0 \leq x \leq C$

Démonstration :

♣ Il suffit de remplacer $F_k(x)$ par son expression $F_k(x) = \frac{\gamma(k, \mu_R x)}{(k-1)!}$, $x \geq 0$, et P_s par l'expression

obtenue sur l'équation (3.24).

$$F_R(x) = P(R \leq x) = \sum_{s=1}^{+\infty} \left(\frac{\left(\sum_{k=1}^s \frac{\rho^k}{k!} \frac{\gamma(k, \mu_R x)}{(k-1)!} + \sum_{k=s+1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{s! s^{k-s}} \frac{\gamma(s, \mu_R x)}{(s-1)!} \right) \cdot \frac{(\mu_R C)^s}{s!} e^{-\mu_R C}}{\sum_{k=1}^s \frac{\rho^k}{k!} + \sum_{k=s+1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{s! s^{k-s}}} \right)$$

$$= \sum_{s=1}^{+\infty} \left(\frac{\left(\sum_{k=1}^s \frac{k\rho^k}{k!} \gamma(k, \mu_R x) + \sum_{k=s+1}^{+\infty} \frac{s\rho^k}{s! s^{k-s}} \gamma(s, \mu_R x) \right) \cdot \frac{(\mu_R C)^s}{s!} e^{-\mu_R C}}{\sum_{k=1}^s \frac{\rho^k}{k!} + \sum_{k=s+1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{s! s^{k-s}}} \right), \quad \text{pour } 0 \leq x \leq C$$

◆

3.5.2.3 Etude de cas par des simulations

On va encore valider notre expression analytique de la fonction de répartition à l'aide de résultats de simulations obtenues avec MATLAB-Simulink. On va considérer une file d'attente à un seul serveur disposant de $C = 25$ ressources. L'arrivée des clients forme un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 1.2$ arrivées par unité de temps. Le service demandé par les clients suit encore une loi exponentielle de moyenne $1/\mu = 0.8$ secondes. Les clients demandent des quantités de ressources suivant une loi exponentielle de moyenne $1/\mu_R = 5$ ressources. Pour cela, la probabilité qu'un client ait besoin d'une quantité de ressources supérieure à 25 est inférieure à 10^{-2} .

a. Occupation des ressources et dimensionnement

Comme sur la figure 3.09, la courbe rouge est celle de l'expression analytique de la fonction de répartition du nombre de ressources occupées et la courbe bleue indique la fréquence cumulée croissante du nombre de ressources occupées observées sur la simulation pendant une durée de 5000 unités de temps. On note encore des superpositions des deux courbes indiquant que l'expression analytique de la fonction de répartition coïncide bien à la fréquence cumulée croissante obtenue lors de la simulation. Toutes les simulations que nous avons effectuées confirment ce résultat. Alors, on peut aussi utiliser l'expression analytique pour prédire l'issue du système, dimensionner les nombres de ressources nécessaires, ...

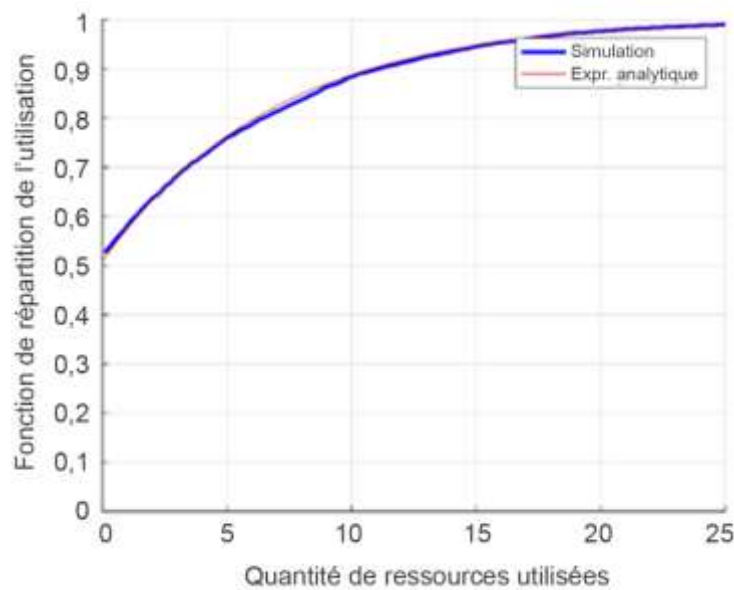


Figure 3.09. Fonction de répartition du nombre de ressources occupées

Dans la figure 3.10, en considérant une quantité quelconque de ressources, plus la valeur du facteur de charge est petite, plus la probabilité d'occupation d'une quantité de ressources est aussi petite. Le système a une forte probabilité d'être inutilisé (0 ressource occupée) pour une faible valeur de ρ , c'est-à-dire un faible taux d'arrivée de clients, ou une faible durée de service moyenne.

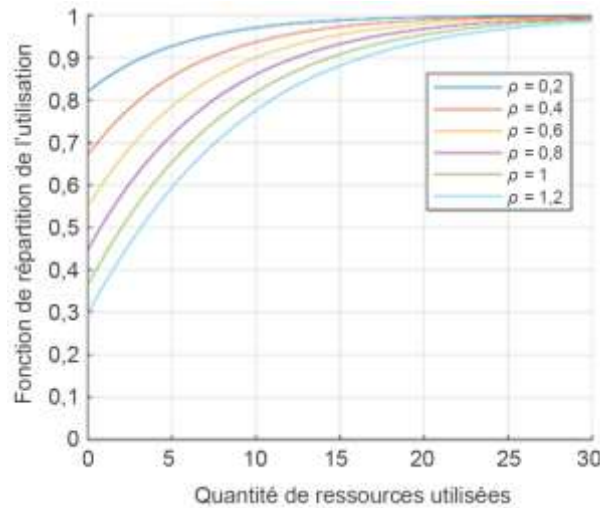


Figure 3.10. Fonctions de répartition d'utilisation pour une capacité fixe et charge variable

Pour des petites valeurs de ρ , la fonction de répartition des utilisations de ressources est proche de 1 à partir de quantité de ressources occupées inférieure. Ceci indique que $P(R \leq 17)$, $P(R \leq 25)$ et $P(R \leq 30)$ sont très similaires, et on n'a pas besoin de déployer plus de 17 ressources dans cet exemple. Il nous suffit de poser un seuil admissible ε pour lire la figure que $P(R > D) \leq \varepsilon$ où D sera la quantité de ressources qu'on va déployer.

Ce principe est aussi applicable pour le cas de grande valeur de ρ , et le résultat nous emmènera à une quantité plus élevée de la quantité de ressources nécessaires.

Maintenant, on va supposer qu'on a déployé 30 ressources. On peut lire la probabilité de blocage à $C = 30$ dans la figure 3.10.

b. Impact de la capacité du serveur par rapport au point de blocage

On va varier la capacité C des ressources du serveur, et fixer la durée moyenne d'utilisation par utilisateur en $1/\mu_R = 5$ unités de temps. On va prendre un facteur de charge $\rho = 0,8$. Les fonctions de répartition des utilisations fictives de ressources (tronquées à la quantité C de ressources) sont représentées sur la figure 3.11.

Nous trouvons qu'à partir d'une capacité $C = 15$, les fonctions de répartition sont similaires. Ils se diffèrent seulement sur la probabilité de blocage qu'on peut rencontrer au point C de la capacité.

	Ressource discrète	Ressource fractionnaire
Loi de probabilité de la quantité de ressources utilisées	<p>Si la capacité C est infinie :</p> $P(R = r) = e^{-\rho} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k!} P(R_k = r), \quad r \in \mathbb{N}$ <p>Si la capacité C est finie :</p> $P(R = r) = \sum_{s=1}^C \left(\frac{\left(\sum_{k=1}^s \frac{\rho^k}{k!} P(R_k = r) + \sum_{k=s+1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{s! s^{k-s}} P(R_s = r) \right) \cdot P_s}{\sum_{k=1}^s \frac{\rho^k}{k!} + \sum_{k=s+1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{s! s^{k-s}}} \right)$ <p style="text-align: center;">pour $r = 0, 1, \dots, C$</p> <p>Où $P_s = \sum_{r=1}^C P(R_s = r) \cdot P(R_1 > C - r)$</p>	<p>Si la capacité C est infinie :</p> $F_R(x) = P(R \leq x) = e^{-\rho} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k!} P(R_k \leq x)$ <p>Si la capacité C est finie :</p> $F_R(x) = \sum_{s=1}^{+\infty} \left(\frac{\left(\sum_{k=1}^s \frac{\rho^k}{k!} F_k(x) + \sum_{k=s+1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{s! s^{k-s}} F_s(x) \right) \cdot P_s}{\sum_{k=1}^s \frac{\rho^k}{k!} + \sum_{k=s+1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{s! s^{k-s}}} \right)$ <p style="text-align: center;">pour $0 \leq x \leq C$</p> <p>Où $P_s = \int_0^C \int_{C-x}^{+\infty} f_s(x) f_1(t) dt dx$, $f_k(x) = \frac{dP(R_k \leq x)}{dx}$</p> <p>Et $f_s(x) = f_1 * \dots * f_1(x)$, s convolutions</p>
Probabilité B de blocage du système	$B = \sum_{r=0}^C \sum_{s=1}^C P_s \cdot \pi_{s,s} \cdot P(R_s = r) \cdot P(R_1 \geq C - r)$ <p>Où $\pi_{s,s} = \frac{\frac{1}{k!} \rho^k}{\sum_{i=0}^s \frac{1}{i!} \rho^i + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{s! s^i} \rho^{s+i}}$</p>	$B = 1 - \lim_{x \rightarrow C^-} F_R(x)$ <p>Où</p> $F_R(x) = \sum_{s=1}^{+\infty} \left(\frac{\left(\sum_{k=1}^s \frac{\rho^k}{k!} F_k(x) + \sum_{k=s+1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{s! s^{k-s}} F_s(x) \right) \cdot P_s}{\sum_{k=1}^s \frac{\rho^k}{k!} + \sum_{k=s+1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{s! s^{k-s}}} \right)$
Dimensionnement : Détermination de la capacité nécessaire C pour un taux de blocage admissible ε .	<p>On cherche C tel que :</p> $B = \sum_{r=0}^C \sum_{s=1}^C P_s \cdot \pi_{s,s} \cdot P(R_s = r) \cdot P(R_1 \geq C - r) \leq \varepsilon$	<p>On cherche C tel que $B = 1 - \lim_{x \rightarrow C^-} F_R(x) \leq \varepsilon$.</p> <p>On peut utiliser la fonction de répartition pour une capacité infinie pour déterminer la valeur de C :</p> $e^{-\rho} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k!} P(R_k \leq C) \leq \varepsilon$

Tableau 3.01: Récapitulation des résultats sur les utilisations de ressources et leurs dimensionnements

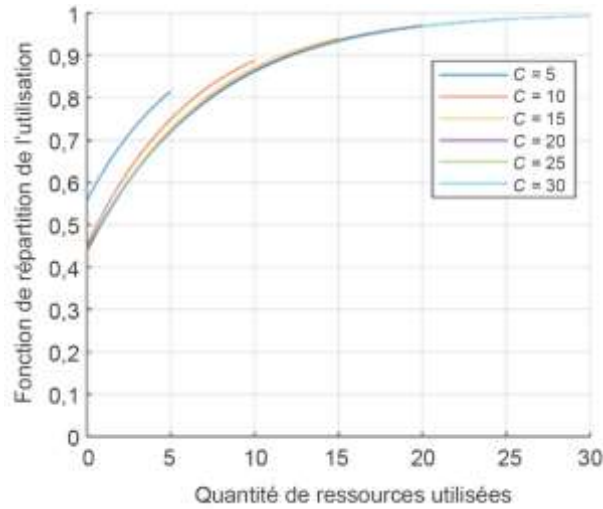


Figure 3.11. Fonction de répartition d'utilisation en variant la capacité C

Par conséquent, on peut utiliser le graphe de $C = 30$ pour effectuer le dimensionnement en suivant la règle mentionnée dans le paragraphe a précédent : Prendre un seuil admissible ε de la probabilité de congestion pour lire dans la figure que $P(R > D) \leq \varepsilon$ où D est quantité de ressources à déployer. Par exemple, nous pouvons lire sur la Figure 3.09 qu'avec $\varepsilon = 0,05$ (taux blocage admissible de 5%), nous devons avoir 17 ressources à partager entre les utilisateurs.

Ainsi, la méthode la plus simple est d'utiliser l'expression (3.19) avec une infinité de ressources qui est plus simple.

3.6 Conclusion

L'étude menée dans ce chapitre (voir Tableau 3.01 pour la récapitulation) nous permet de conclure qu'il est tout à fait possible d'effectuer le dimensionnement des ressources d'un système à partir de notre modèle. Les expressions analytiques des probabilités d'occupations des ressources qu'on a obtenues sont nécessaires à l'évaluation analytique des performances du système en fonction de la capacité en termes de nombre de ressources déployées et du facteur de charge, que ce soit du taux des arrivées, ou soit de la durée des services. Elles sont très utiles pour l'évaluation des performances en termes de ressources occupées, de besoins en ressources, de probabilité de blocage. Il est mis en évidence dans les résultats que le facteur de charge du système impacte les quantités de ressources nécessaires au système. L'adaptation de ces résultats dans le cas des utilisateurs multi-classes sera présentée dans le chapitre suivant.

CHAPITRE 4.

MODELISATION D'UTILISATION ET DE DIMENSIONNEMENT DES RESSOURCES PARTAGEES D'UN SYSTEME MULTISERVICE

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons proposer notre modèle d'occupation de ressources dans un système multi-service qui partage ses ressources à ses utilisateurs. L'utilisation de chaque type de service requiert une certaine quantité de ressources, discrètes ou fractionnaires. A la fin, nous allons démontrer qu'on peut retrouver le modèle de Fry-Molina à partir de notre modèle dans le cas mono-service avec des durées d'utilisation suivant la loi exponentielle.

Ce chapitre est une synthèse des travaux publiés dans « *Occupied resources in a system with resource sharing between service-based customers* » (Vol. 2, p. 18), « *Occupation des ressources partagées dans un système multi-service* » (Vol. 2, p. 178) et « *Le dimensionnement des ressources partagées dans un système multi-service* » (Vol. 2, p. 180).

4.2 Etat de l'art et contexte

Le dimensionnement des nombres de ressources nécessaires au fonctionnement d'un système garantissant une qualité de service impose a commencé à l'ère de Erlang [4.01]. Il a établi une fameuse formule d'Erlang B pour déterminer le nombre de canaux nécessaires à un réseau téléphonique [4.01] [4.02]. Cette formule ne considère qu'un seul service (le service voix) fourni par un système (réseau téléphonique) aux utilisateurs qui en demandent. Sa formule est déduite de l'étude d'une file d'attente de capacité finie M/M/n/n. Les résultats de ses études ont été développés et étendus par beaucoup de chercheurs comme Palm [4.03], Vaulot et Chaveau [4.04], Joys [4.05], Iversen [4.06] et beaucoup d'autres.

Puis Iversen [4.07] a étudié le cas d'un système multi-service en évaluant le taux de congestion d'un tel système doté d'un contrôle d'accès. Des cas de trafic élastique ont été développés sur des systèmes assimilables en file d'attente multi-service par Hanczewski et al. [4.08] [4.09]. Dans [4.08], il a proposé un modèle de file d'attente multi-service à discipline SD-FIFO (State Dependent FIFO). Ce système alloue ses ressources à chaque classe de service d'une façon équité équilibrée. Ils ont encore avancé une généralisation des files d'attente multi-service utilisés en trafic élastique [4.10] [4.11].

D'autres études sur le partage équité de ressources ont été avancées par Bonald et al. [4.12] où toutes les ressources sont disposées à toutes les classes de service et à tous les utilisateurs qui se présentent devant le serveur. Une extension de Haddad et Mazumdar [4.13] évalue une certaine congestion dans tel système.

Hanczewski et al. [4.14] ont proposé un autre type de discipline appelée cFIFO pour la file d'attente multi-service. Ils ont donné une approximation du modèle de convolution d'un système de file d'attente multi-service cFIFO tout en mettant possible les utilisations à débit variable en fonction des quantités de ressources initialement inutilisées dans le serveur.

Des différents cas de performances des files d'attentes proposant de multiples services ont été étudiés par de nombreux chercheurs. Sudhesh et Azhagappan [4.15] ont établi des distributions stationnaires de files d'attente à serveurs hétérogènes avec hésitations et renoncements de certains clients. Une file d'attente à seul serveur non-markovien fournissant deux types de service a été avancée par Arivudainambi et Gowsalya [4.16] et dans laquelle ils ont calculé les effets des paramètres de la file aux performances du système. Des arrivées par groupe sont aussi considérées sur des files orientées service [4.17] par Kalita et Choudhury où ils ont étudié des arrivées par groupe à un seul serveur avec une politique de vacation aléatoire et fournissant deux types de services hétérogènes, ou dans [4.18] où Pradhan et Gupta se sont focalisés sur les distributions des occupations d'une file à capacité aléatoire dépendant de la taille du groupe arrivant.

Parlant de capacité et de partage de ressources, De Muynck et al. [4.19] ont appelé une capacité de service en fonction de l'analyse des demandes en termes de service et des délais engendrés au niveau de la file par ces demandes. C'est un cas d'étude de ressources d'un système multi-service à partir de laquelle ils ont obtenu la fonction génératrice de la probabilité de délai, mais ils n'ont pas pu sortir combien de ressources sont nécessaires pour optimiser ce délai.

Dans toutes ces littératures, que ce soit dans le partage des ressources disponibles à tous les utilisateurs présents dans le système, ou soit avec de débit variable, de trafic élastique, arrivée simple ou par groupe, le problème se pose sur la quantité de ressources que le serveur de la file d'attente multi-service dispose à ses clients. Un modèle de file d'attente à ressources considérant des duplications des clients, dans lequel la durée de service et les quantités de ressources demandées dans chaque bloc sont des variables aléatoires indépendantes ont été proposé par Lisovskaya et al. [4.20]. Ils supposent que les clients arrivent selon un processus de renouvellement profitant un

criblage dynamique et des méthodes d'analyses asymptotiques. Ils ont pu dériver une approximation Gaussienne de la probabilité stationnaire des ressources occupées dans des blocs du système.

Nous proposons une généralisation de file d'attente multi-service [4.21], avec des durées de service fixe ou aléatoire pour chaque classe de service, dans le but de déterminer la quantité de ressources nécessaires au serveur afin d'assurer une certaine qualité de service. Notre étude est basée sur les déterminations analytiques des occupations de ressources dans de tel système généralisé. Il s'agit aussi d'une extension des travaux effectués dans [4.22] et [4.23]. L'objectif est de nous permettre de déterminer la quantité exacte de ressources nécessaires dans un système multi-service partageant ses ressources à ses clients.

Nous avons aussi étudié la notion de priorités des services dans [4.24]. On a pu démontrer que le système fait perdre la notion d'équilibre du partage de ressource et son insensibilité [4.25] [4.26] par rapport à loi d'arrivée des clients ou à la loi des durées de services une fois les services n'ont pas la même priorité.

4.3 Description du modèle

Soit un système quelconque partageant ses ressources à travers des clients demandant des services. Chaque client peut demander un service i nécessitant une ressource R_i du système pendant une durée aléatoire de moyenne μ_i . Le taux d'arrivée des clients demandant le service i au système est décrit par un processus de Poisson d'intensité λ_i .

En notant par N le nombre total de services que ce système peut fournir à ces clients, supposant que les arrivées des clients de chaque service sont indépendantes, on peut dire que l'arrivée des clients à ce système forme un processus de Poisson dont l'intensité λ est exprimée par $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_N = \sum_{i=1}^N \lambda_i$. Le taux p_i de clients demandant le service i est égal à $p_i = \lambda_i / \lambda$ pour chaque i . Ces deux expressions découlent de la propriété de superposition de processus de Poisson indépendants [4.27].

Soit S_i la distribution de la durée du service i demandé par un client. C'est une variable aléatoire réelle strictement positive de moyenne μ_i . On va noter par S la durée de service demandé par un client quelconque. A partir de la formule des probabilités totales, on peut exprimer que S est égale en loi à $\sum_{i=1}^N p_i S_i$, c'est-à-dire que la fonction de répartition $F_S(s)$ de S est égale à

$F_S(s) = \sum_{i=1}^N p_i F_{S_i}(s)$, où $F_{S_i}(s)$ est la fonction de répartition de S_i . De même pour les fonctions de répartition inverse, on a $F_S^C(s) = \sum_{i=1}^N p_i F_{S_i}^C(s)$. Suite à l'indépendance des variables aléatoires S_i , son espérance est exprimée par $\mu = \sum_{i=1}^N p_i \mu_i$.

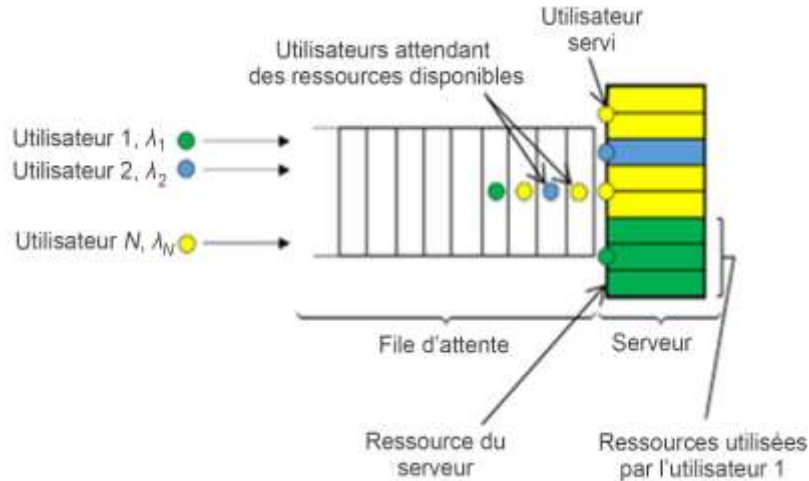


Figure 4.01. Description du modèle

Le système est alors équivalent à une file d'attente, à serveur unique doté de ressources de quantité R . Les clients arrivent à cette file d'attente selon un processus de Poisson d'intensité λ . La durée de service d'un client quelconque est une variable aléatoire S de moyenne μ . Ces clients vont utiliser une quantité de ressources R_i du serveur de la file selon le type de service i qu'il a demandé. Si des clients sont en train d'être servis par le système, utilisant une ressource r , la somme de toutes les quantités de ressources utilisées par ces clients, un autre client arrivant voulant utiliser une quantité de ressources inférieure à $R - r$ sera tout de suite servi. Si la quantité de ressources demandée par le client arrivant est supérieure à $R - r$, alors il sera mis dans la file d'attente attendant qu'un client servi termine et libère des ressources.

Dans le cas où la quantité de ressources disponible R du serveur est infinie, il s'agit d'une file d'attente $M/GI/\infty$ (en termes des clients). Les clients qui arrivent seront immédiatement servis.

4.4 Expressions analytiques

4.4.1 Partage de ressources infinies

On va exprimer la quantité de ressources utilisées par les clients décrits dans le paragraphe 4.3. Notons par π_n la probabilité que le système serve n clients.

Théorème 4.01.

π_n suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda \int_0^{+\infty} F_S^C(s) ds$, c'est-à-dire :

$$\pi_n = \frac{\lambda^n}{n!} \cdot \left(\int_0^{+\infty} F_S^C(s) ds \right)^n \cdot \exp \left(-\lambda \cdot \int_0^{+\infty} F_S^C(s) ds \right) \quad (4.01)$$

Démonstration :

♣ Soient $N(t)$ le nombre de clients en train d'être servis à cet instant, supposant que $N(0) = 0$, et $\pi_n(t) = P(N(t) = n)$ la probabilité que le système serve n clients à l'instant t .

D'un côté, on note par $(A_t)_{t \geq 0}$ le processus des arrivées des clients à la file d'attente, et $(T_n)_{n \geq 0}$ leurs instants d'arrivées, c'est-à-dire les instants d'apparition du processus. Conditionnellement à la mesure de comptage du processus $A_t = m$, les variables aléatoires T_1, \dots, T_m sont rangés dans l'ordre croissant, et uniformément, sur l'intervalle $(0, t)$. De l'autre côté, la probabilité qu'un client ait une durée de service supérieure à s est $P(S \geq s) = 1 - F_S(s) = F_S^C(s)$ où $F_S^C(s)$ désigne la fonction de répartition inverse de la variable aléatoire S . Alors, la probabilité qu'un client arrivant uniformément entre l'intervalle $(0, t)$ et qu'il soit encore être servi à l'instant t est égale à

$$p_t = \frac{1}{t} \int_0^t (1 - F_S(s)) ds = \frac{1}{t} \int_0^t F_S^C(s) ds.$$

Conditionnellement à $A_t = m$, le nombre de clients $N(t)$ encore servis à l'instant t est donc égal à n avec une probabilité :

$$\binom{m}{n} p_t^n (1 - p_t)^{m-n}$$

C'est dû au fait que n clients sont encore en train d'être servi (probabilité p_t) à l'instant t , et les $m - n$ clients ont donc fini leurs services avant l'instant t (probabilité $1 - p_t$).

Ensuite, en appliquant la formule des probabilités totales pour toutes les valeurs possibles de m , on obtient :

$$\begin{aligned}
\pi_n(t) &= P(N(t) = n) = \sum_{m=n}^{+\infty} P(A_t = m) \cdot P(N(t) = n | A_t = m) \\
&= \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^m}{m!} \cdot e^{-\lambda t} \cdot \binom{m}{n} \cdot p_t^n (1-p_t)^{m-n} \\
&= \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^m}{m!} \cdot e^{-\lambda t} \cdot \frac{m!}{n!(m-n)!} \cdot p_t^n (1-p_t)^{m-n} \\
&= \frac{p_t^n}{n!} e^{-\lambda t} \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^m}{(m-n)!} \cdot (1-p_t)^{m-n} = \frac{p_t^n \cdot (\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^{m-n}}{(m-n)!} \cdot (1-p_t)^{m-n} \\
&= \frac{(\lambda t p_t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot (1-p_t)^k = \frac{(\lambda t p_t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t - \lambda t p_t)^k}{k!} \\
&= \frac{(\lambda t p_t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{\lambda t - \lambda t p_t} = \frac{(\lambda t p_t)^n}{n!} e^{-\lambda t p_t} \\
&= \frac{\left(\lambda \int_0^t F_S^C(s) ds \right)^n}{n!} \cdot \exp\left(-\lambda \int_0^t F_S^C(s) ds \right)
\end{aligned}$$

L'équilibre s'obtient lorsque t tends vers l'infini, c'est-à-dire :

$$\pi_n = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_n(t) = \frac{\left(\lambda \int_0^{+\infty} F_S^C(s) ds \right)^n}{n!} \cdot \exp\left(-\lambda \int_0^{+\infty} F_S^C(s) ds \right)$$

◆

Théorème 4.02. (Ravaliminoarimalalason)

La fonction de répartition de la loi de probabilité de l'utilisation de ressources du système est égale à :

$$P(R \leq r) = \sum_{k=0}^{+\infty} \pi_k \cdot \left(\sum_{\substack{k_1, \dots, k_{N_s} \\ k_1 R_1 + \dots + k_{N_s} R_{N_s} \leq r}} \binom{k}{k_1, \dots, k_{N_s}} \cdot p_1^{k_1} \dots p_{N_s}^{k_{N_s}} \right) \quad (4.02)$$

- Où p_i désigne la probabilité qu'un client choisi au hasard parmi les k clients servis utilise le service i , c'est-à-dire $p_i = \lambda_i / \lambda$.

- Et $\binom{k}{k_1, \dots, k_{N_s}} = \frac{k!}{k_1! k_2! \dots k_{N_s}!}$.

$$- \text{ Et } \pi_k = \frac{1}{k!} \cdot \left(\int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^{N_s} \lambda_i F_{S_i}^C(s) ds \right)^k \cdot \exp \left(- \int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^{N_s} \lambda_i F_{S_i}^C(s) ds \right).$$

Démonstration :

♣ A partir de l'expression (4.01), on remplace les expressions de λ et de F_S par celles dans le cadre de notre système fournissant N_s services à ses clients. On a donc :

$$\begin{aligned} \pi_n &= \frac{\left(\sum_{i=1}^{N_s} \lambda_i \right)^n}{n!} \cdot \left(\int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^{N_s} p_i F_{S_i}^C(s) ds \right)^n \cdot \exp \left(- \left(\sum_{i=1}^{N_s} \lambda_i \right) \cdot \int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^{N_s} p_i F_{S_i}^C(s) ds \right) \\ &= \frac{\lambda^n}{n!} \cdot \left(\int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^{N_s} \frac{\lambda_i}{\lambda} F_{S_i}^C(s) ds \right)^n \cdot \exp \left(- \lambda \cdot \int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^{N_s} \frac{\lambda_i}{\lambda} F_{S_i}^C(s) ds \right) \\ &= \frac{1}{n!} \cdot \left(\int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^{N_s} \lambda_i F_{S_i}^C(s) ds \right)^n \cdot \exp \left(- \int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^{N_s} \lambda_i F_{S_i}^C(s) ds \right) \end{aligned} \quad (4.03)$$

Conditionnellement au nombre k clients que le serveur est en train servir, on va noter r_k la quantité de ressources utilisées par ces clients. Soit $P(R \leq r)$ la fonction de répartition de la loi de probabilité qu'une quantité r de ressources de ce système soit utilisée par les clients qu'il sert.

On a alors :

$$P(R \leq r) = \sum_{k=0}^{+\infty} \pi_k \cdot P(r_k \leq r) \quad (4.04)$$

Où $P(r_k \leq r)$ désigne la fonction de répartition de la loi de probabilité que la quantité de ressources r occupée par les k clients soit r_k .

Maintenant on va poser que le système sert k clients. La fonction de répartition de la loi de probabilité que la quantité de ressources utilisée soit r a pour expression $P(r_k \leq r)$.

Un client demandant un service i ($i = 1, \dots, N_s$) utilise une quantité de ressources R_i . Il existe des N_s -uplets de coefficients (k_1, \dots, k_{N_s}) vérifiant $\sum_{i=1}^{N_s} k_i \cdot R_i \leq r$ tel que $k_1 + \dots + k_{N_s} = k$. k_i indique le nombre de clients utilisant le service i parmi les k clients servis par le système.

$$P(r_k \leq r) = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_{N_s} \\ k_1 R_1 + \dots + k_{N_s} R_{N_s} \leq r}} \binom{k}{k_1, \dots, k_{N_s}} \cdot P_1^{k_1} \dots P_{N_s}^{k_{N_s}}$$

L'expression de la fonction de répartition de la loi de probabilité de l'utilisation de ressources du système est donc donnée par :

$$P(R \leq r) = \sum_{k=0}^{+\infty} \pi_k \cdot \left(\sum_{\substack{k_1, \dots, k_{N_s} \\ k_1 R_1 + \dots + k_{N_s} R_{N_s} \leq r}} \binom{k}{k_1, \dots, k_{N_s}} \cdot P_1^{k_1} \dots P_{N_s}^{k_{N_s}} \right) \quad (4.05)$$

Où π_k est exprimé par (4.03).

◆

Dans toute la suite, on va simplifier l'écriture de l'équation (4.02) par :

$$P(R \leq r) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\substack{k_i \\ \vec{k}_i \cdot \vec{R}_i \leq r}} \left(\pi_k \cdot \binom{k}{\vec{k}_i} \cdot \prod_i P_i^{k_i} \right) \quad (4.06)$$

en adoptant les notations $\vec{k}_i = k_1, \dots, k_{N_s}$, $\vec{R}_i = R_1, \dots, R_{N_s}$ et $\vec{k}_i \cdot \vec{R}_i = k_1 R_1 + \dots + k_{N_s} R_{N_s}$.

4.4.2 Partage de ressources finies

Pour le cas des ressources finies, il est évident de penser à une file d'attente M/GI/C où C désigne une certaine capacité finie du système. Mais la résolution analytique de cette file d'attente reste encore un problème ouvert, et les solutions proposées jusqu'à maintenant ne sont que des approximations [4.28]–[4.30]. Et en plus dans notre cas, on a une capacité variable en fonction des utilisateurs servis par le système et de leurs besoins en termes de nombre de ressources, donc ceci va encore empirer la complexité de notre problème.

Dans notre recherche, nous nous focalisons sur le dimensionnement du nombre de ressources nécessaires pour satisfaire les clients dans leurs utilisations des services fournis par le système.

Etant donné que le système a une capacité C en termes de quantités de ressources disponibles qu'il peut attribuer aux utilisateurs. Si toutes les ressources occupées avec le besoin du client suivant est supérieur à la quantité de ressources disponibles dans le système, on peut dire qu'il y a un phénomène de blocage. Deux cas de figure peuvent se présenter : soit le client en question est rejeté,

soit il est mis en attente. Dans tous ces deux cas, la capacité en termes de quantité de ressources est insuffisante.

D'un côté, si on va déployer beaucoup de ressources. Quelques-unes d'entre elles peuvent ne pas être utilisées. Il s'agit donc de gaspillage de ressources. Dans certains cas, les mises à disponibilité de ressources sont payantes et ce sera donc une perte en termes d'investissement. De l'autre côté, le déploiement de peu de ressources peuvent faire perdre certains utilisateurs comme nous le décrivons dans le phénomène de blocage précédent. Il est donc nécessaire de bien déterminer la bonne quantité de ressources à mettre en place. Pour cela, on doit adopter un certain seuil de tolérance ε tel que la probabilité de rejet ou de mise en attente des utilisateurs soit inférieure à cette tolérance.

Assimilons qu'on a déployé une quantité infinie de ressources. Pour cela, la probabilité qu'on utilise une quantité d'au plus r ressources est donnée par l'équation (4.02).

En d'autres termes, la probabilité qu'on utilise une quantité de ressources supérieure à C est donnée par :

$$P(R > C) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\substack{\bar{k}_i \\ \bar{k}_i R_i > C}} \left(\pi_k \cdot \binom{k}{\bar{k}_i} \cdot \prod_i P_i^{k_i} \right) \quad (4.07)$$

On peut dire que c'est la probabilité de blocage du système de capacité C puisqu'à partir de cette quantité de ressources C , il ne peut plus servir d'utilisateur.

Pour un dimensionnement avec une tolérance ε , l'objectif est donc de déterminer une capacité C telle que :

$$B = P(R > C) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\substack{\bar{k}_i \\ \bar{k}_i R_i > C}} \left(\pi_k \cdot \binom{k}{\bar{k}_i} \cdot \prod_i P_i^{k_i} \right) \leq \varepsilon \quad (4.08)$$

4.4.3 Que se passe-t-il en cas de mono-service et ressource unitaire pour chaque utilisateur ?

Dans cette partie, on va voir le cas d'un système offrant un service unique dont chaque utilisateur servi n'utilise qu'une seule quantité de ressource. Pour le cas de durée de service exponentielle de moyenne $1/\mu$, on va voir qu'à partir des équations (4.02) et (4.08), on aboutit au résultat du modèle de trafic BCH (Busy-Calls Held) de Fry-Molina [4.31]–[4.33].

Démonstration :

♣ Le nombre de services fournis par le système est alors $N_s = 1$. Le taux d'arrivée des utilisateurs suit un processus de Poisson d'intensité $\lambda_1 = \lambda$. Puisque la durée de service exponentielle, la fonction de répartition $F_S(s) = F_{S_1}(s)$ de la variable aléatoire S de durée de service est donnée par $F_S(s) = 1 - \exp(-\mu s)$. Le taux des utilisateurs demandant le service 1 est donc $p_1 = 1$.

La fonction de répartition de la loi de probabilité de l'utilisation de ressources du système, à partir de l'équation (4.05), est donnée par :

$$P(R \leq r) = \sum_{k=0}^{+\infty} \pi_k \cdot \left(\sum_{\substack{k_1, \dots, k_{N_s} \\ k_1 R_1 + \dots + k_{N_s} R_{N_s} \leq r}} \binom{k}{k_1, \dots, k_{N_s}} \cdot p_1^{k_1} \dots p_{N_s}^{k_{N_s}} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \pi_k \cdot \left(\sum_{k_1 \leq r} \binom{k}{k_1} \cdot p_1^{k_1} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \pi_k \cdot 1_{k \leq r}(k) = \sum_{k=0}^r \pi_k$$

Où :

$$\begin{aligned} \pi_k &= \frac{1}{k!} \cdot \left(\int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^{N_s=1} \lambda_i F_{S_i}^C(s) ds \right)^k \cdot \exp \left(- \int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^{N_s=1} \lambda_i F_{S_i}^C(s) ds \right) \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \left(\int_0^{+\infty} \lambda \exp(-\mu s) ds \right)^k \cdot \exp \left(- \int_0^{+\infty} \lambda \exp(-\mu s) ds \right) \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \cdot \exp \left(- \frac{\lambda}{\mu} \right) \\ &= \frac{\rho^k}{k!} \exp(-\rho) \end{aligned}$$

en notant $\lambda / \mu = \rho$.

Ainsi,

$$P(R \leq r) = \sum_{k=0}^r \pi_k = \sum_{k=0}^r \frac{\rho^k}{k!} \exp(-\rho) = \exp(-\rho) \sum_{k=0}^r \frac{\rho^k}{k!}.$$

L'équation (4.08) devient aussi :

$$\begin{aligned} P(R > C) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\substack{\vec{k}_i \\ \vec{k}_i R_i > C}} \left(\pi_k \cdot \binom{k}{\vec{k}_i} \cdot \prod_i p_i^{k_i} \right) \leq \varepsilon \\ &= \exp(-\rho) \sum_{k=C}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k!} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

En remplaçant $\exp(-\rho)$ par $1 / \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k!}$, on retrouve le taux de congestion $\sum_{k=C}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k!} / \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k!}$ posé par Fry-Molina dans leur modèle de trafic.

♦

On note que ce modèle, qui est une alternative de la loi d'Erlang B [4.01] [4.02], est utilisé dans certains dimensionnements de téléphonie en Amérique du Nord. Il y est convenu que ce modèle reflète beaucoup plus la réalité des trafics observés par rapport au modèle d'Erlang [4.34] [4.35].

4.4.4 Généralisation pour des quantités de ressources aléatoires demandées par les utilisateurs

Cette fois-ci, on va considérer que les quantités de ressources demandées par les utilisateurs pour l'utilisation du service i ne sont plus déterministes comme dans les paragraphes précédents. On suppose que les utilisateurs du service i demandent une quantité de ressource aléatoire suivant une loi de probabilité \mathcal{L}_i de moyenne μ_i . On va noter par $G_i(r)$ la fonction de répartition de la quantité de ressources demandée par un client utilisant le service i .

On va encore supposer une quantité infinie de ressources disponibles auprès du serveur du système. Selon la méthodologie que nous avons adopté, pour déterminer la fonction de répartition $P(R \leq r)$ de la loi de probabilité de l'utilisation de ressources du système, il faut déterminer une fonction de répartition $P(R_k \leq r)$ conditionnellement à k utilisateurs servis par le système.

Théorème 4.03. (Ravaliminoarimalalason)

La fonction de répartition de la loi de probabilité de l'utilisation de ressources du système est égale par :

$$P(R \leq r) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\pi_k \cdot \sum_{k_1 + \dots + k_{N_s} = k} \binom{k}{k_1, \dots, k_{N_s}} \prod_{i=1}^{N_s} p_i^{k_i} \cdot \prod_{i=1}^{N_s} G_i^{*k_i}(r) \right) \quad (4.09)$$

Démonstration :

♣ On va décomposer ce nombre d'utilisateurs servis k en nombre d'utilisateurs k_i par service tel

que $k = k_1 + \dots + k_{N_s}$. On peut avoir $\binom{k}{k_1, \dots, k_{N_s}} = \frac{k!}{k_1! \dots k_{N_s}!}$ combinaisons possibles de ces

utilisateurs. Pour chaque utilisateur, la probabilité qu'il utilise une quantité de ressources inférieure ou égale à x est égale $G_i(x)$ s'il a demandé le service i , ou avec une probabilité p_i en d'autres termes.

La probabilité que tous les utilisateurs utilisent alors une quantité totale de ressources inférieure ou égale à x pour un vecteur (k_1, \dots, k_{N_s}) donné est exprimée par :

$$\binom{k}{k_1, \dots, k_{N_s}} \sum_{x_{11} + \dots + x_{N_s k_{N_s}} = x} \underbrace{(p_1 G_1(x_{11}) \dots p_1 G_1(x_{1k_1}))}_{k_1 \text{ users of service 1}} \dots \underbrace{(p_{N_s} G_{N_s}(x_{N_s 1}) \dots p_{N_s} G_{N_s}(x_{N_s k_{N_s}}))}_{k_{N_s} \text{ users of service } N_s} \quad (4.10)$$

Où x_{ij} désigne la quantité de ressources utilisée par le j -ème utilisateur du service i .

L'équation (4.09) peut être réécrite sous forme de produit de convolution discrète :

$$\begin{aligned} & \binom{k}{k_1, \dots, k_N} \sum_{x_{11} + \dots + x_{N k_N} = x} \underbrace{(p_1 G_1(x_{11}) \dots p_1 G_1(x_{1k_1}))}_{k_1 \text{ users of service 1}} \dots \underbrace{(p_N G_N(x_{N1}) \dots p_N G_N(x_{Nk_N}))}_{k_N \text{ users of service } N} \\ &= \binom{k}{k_1, \dots, k_N} \underbrace{(p_1 G_1(x) * \dots * p_1 G_1(x))}_{k_1 \text{ consecutive convolution products}} * \dots * \underbrace{(p_N G_N(x) * \dots * p_N G_N(x))}_{k_N \text{ consecutive convolution products}} \\ &= \binom{k}{k_1, \dots, k_N} p_1^{k_1} \dots p_N^{k_N} \cdot G_1^{*k_1}(x) * \dots * G_N^{*k_N}(x) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Où $f(t) * g(t) = \sum_{t_1 + t_2 = t} f(t_1) g(t_2) = \sum_{s=0}^{+\infty} f(s) g(t-s)$ pour deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ à variable t

positive, et $f^{*n}(t) = f(t) * \dots * f(t)$ n produits de convolution successifs de la fonction $f(t)$ par elle-même.

Ainsi, avec toutes les valeurs possibles du vecteur (k_1, \dots, k_{N_s}) et toutes les valeurs de $x \leq r$, on obtient la fonction de répartition $P(R_k \leq r)$ conditionnellement à k utilisateurs servis par le système :

$$\begin{aligned} P(R_k \leq r) &= \sum_{k_1 + \dots + k_{N_s} = k} \binom{k}{k_1, \dots, k_{N_s}} p_1^{k_1} \dots p_{N_s}^{k_{N_s}} \cdot G_1^{*k_1}(r) * \dots * G_{N_s}^{*k_{N_s}}(r) \\ &= \sum_{k_1 + \dots + k_{N_s} = k} \binom{k}{k_1, \dots, k_{N_s}} \prod_{i=1}^{N_s} p_i^{k_i} \cdot \prod_{i=1}^{N_s} G_i^{*k_i}(r) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Où $\prod_{i=1}^{*N_s} f_i(x) = f_1(x) * \dots * f_{N_s}(x)$ pour une famille de fonctions $\{f_i(x)\}_{i=1, \dots, N_s}$.

Et la fonction de répartition de la loi de probabilité de l'utilisation de ressources du système est donnée par :

$$P(R \leq r) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\pi_k \cdot \sum_{k_1 + \dots + k_{N_s} = k} \binom{k}{k_1, \dots, k_{N_s}} \prod_{i=1}^{N_s} p_i^{k_i} \cdot \prod_{i=1}^{*N_s} G_i^{*k_i}(r) \right)$$

♦

Pour le cas d'une quantité de ressources finie C , on peut déduire de l'équation (4.09) la probabilité de blocage du système :

$$B = P(R > C) = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\pi_k \cdot \sum_{k_1 + \dots + k_{N_s} = k} \binom{k}{k_1, \dots, k_{N_s}} \prod_{i=1}^{N_s} p_i^{k_i} \cdot \prod_{i=1}^{*N_s} G_i^{*k_i}(C) \right) \quad (4.13)$$

On rappelle que cette probabilité doit être inférieure à une tolérance ε pour la détermination d'une capacité suffisante du système.

Remarque :

Lorsque la quantité de ressources demandées par les utilisateurs, quel que soit le service utilisé, est une variable aléatoire indépendante et identiquement distribuée de fonction de répartition $G(r)$, l'équation (4.12) peut s'écrire sous la forme :

$$P(R \leq r) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\pi_k \cdot \sum_{k_1 + \dots + k_{N_s} = k} \binom{k}{k_1, \dots, k_{N_s}} G^{*k}(r) \cdot \prod_{i=1}^{N_s} p_i^{k_i} \right) \quad (4.14)$$

4.5 Etude de cas par des simulations

On va voir un exemple de partage de ressources entre les utilisateurs arrivant chez un système de capacité quelconque C dont on déterminera. Le système peut fournir un des $N = 4$ services à chaque utilisateur. Les arrivées de ces utilisateurs à ce système forment des processus de Poisson d'intensité respective $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 2,5$, et $\lambda_4 = 5$ arrivées par unité de temps pour le service $i = 1, 2, 3$, et 4. Par le principe de superposition des processus de Poisson, ces arrivées forment un seul processus d'intensité $\lambda = \sum_{i=1}^4 \lambda_i = 12,5$. Les quantités de ressources nécessaires pour ces services

sont respectivement $R_1 = 4$, $R_2 = 3$, $R_3 = 2$, et $R_4 = 1$ ressource. Les durées de services sont supposées aléatoires suivant des lois exponentielles de moyennes respectives $1/\mu_1 = 1/3$, $1/\mu_2 = 1/4$, $1/\mu_3 = 1/5$, et $1/\mu_4 = 1/6$ unités de temps pour les services $i = 1$ à 4.

D'après l'équation (4.05), la fonction de répartition de la loi de probabilité de l'utilisation de ressources du système à capacité infinie est égale à :

$$P(R \leq r) = \sum_{k=0}^{+\infty} \pi_k \cdot \left(\sum_{\substack{k_1, \dots, k_4 \\ k_1 R_1 + \dots + k_4 R_4 \leq r}} \binom{k}{k_1, \dots, k_4} \cdot p_1^{k_1} \dots p_4^{k_4} \right) \quad (4.15)$$

Tel que $p_i = \lambda_i / \lambda$ désigne la probabilité que l'utilisateur arrivant au système va utiliser le service i . Et :

$$\pi_k = \frac{1}{k!} \cdot \left(\int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^4 \lambda_i e^{-\mu_i s} ds \right)^k \cdot \exp \left(-\lambda \cdot \int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^4 \lambda_i e^{-\mu_i s} ds \right) = \frac{1}{k!} \cdot \left(\sum_{i=1}^4 \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right)^k \cdot \exp \left(-\sum_{i=1}^4 \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right) \quad (4.16)$$

Les courbes des figures 4.02a et 4.02b représentent cette fonction de répartition :

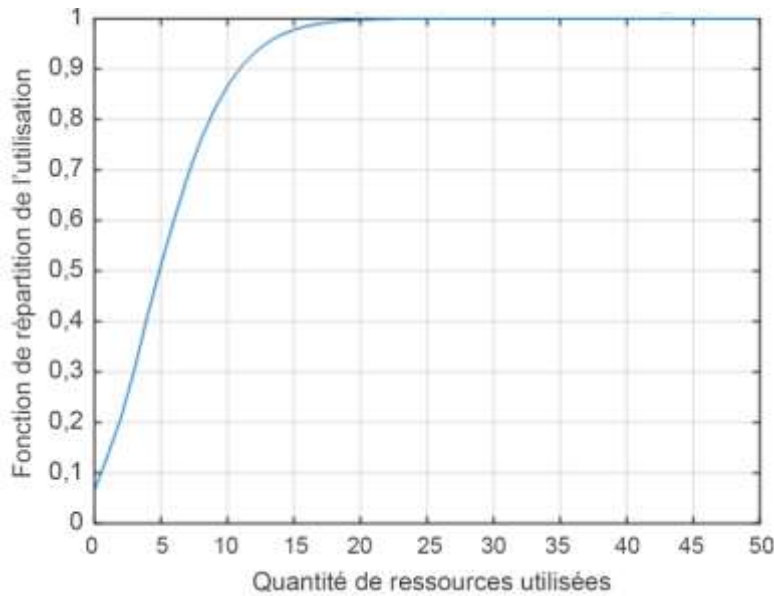


Figure 4.02a. Fonction de répartition de la quantité de ressources occupées pour une capacité infinie

Il est bien évident à partir de la Figure 4.02a que le déploiement de ressources à partir d'une quantité initiale égale à 20 n'influence pas au système. On déduit que la probabilité que la quantité de

ressources occupées soit supérieure ou égale à 20 est très infime (avoisine le zéro). Il n'est donc pas nécessaire de doter plus de 20 ressources le système puisqu'elles ne vont pas être toutes utilisées.

A partir de ces courbes et l'équation (4.06), on peut conclure une probabilité d'encombrement de 10% lorsque le système est doté de 11 ressources, et cette probabilité devient 1% avec 17 ressources.

Nous avons utilisé MATLAB – Simulink pour simuler ces deux valeurs de quantités de ressources pour vérifier ces probabilités d'encombrement (Voir Annexe B).

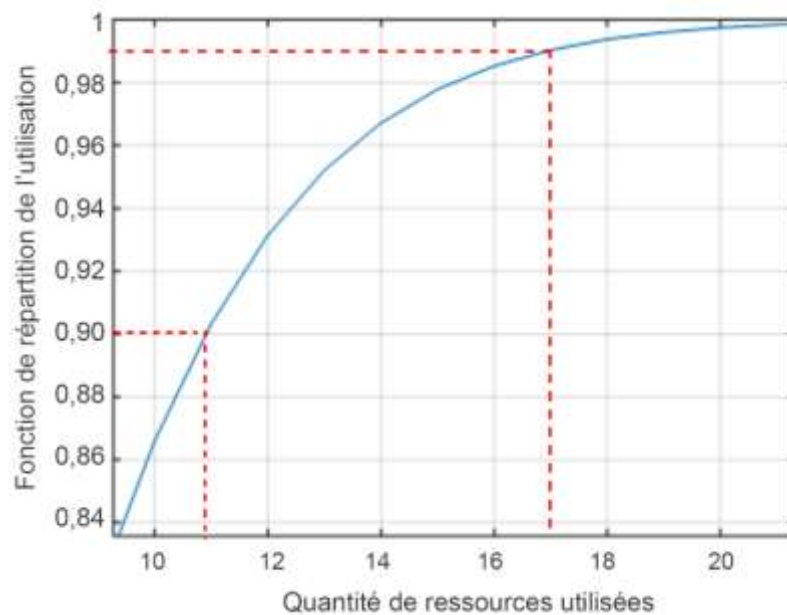


Figure 4.02b. *Fonction de répartition de la quantité de ressources occupées pour une capacité infinie – Figure agrandie*

On a aussi trouvé les résultats théoriques de notre modèle explicité par les courbes des figures 4.02a et 4.02b qui sont respectivement 10% et 1% pour les capacités 11 et 17. Ces résultats avec les autres simulations que nous avons effectuées valident le modèle ainsi établi.

A titre d'exemple concret, le modèle peut être utilisé pour le dimensionnement des codes (ressources) d'un réseau de communication mobile de la troisième génération (réseau 3G) qui partagent ces codes à travers ses utilisateurs [4.36] [4.37]. Ce type de réseau fournit de multiple de services, comme par exemple :

- Service voix AMR : nécessitant 2 codes
- Service VP : nécessitant 8 codes
- Service PS R99 DL : nécessitant 8 codes

- Service HSDPA : nécessitant 16 codes

Ces résultats restent valables pour le cas des ressources non discrètes. Dans ce cas, la quantité de ressources initialement disponible dans le système est un nombre réel strictement positif. Les quantités des ressources nécessaires à chaque service i peuvent être aussi des nombres réels strictement positifs (non nécessairement un entier naturel non nul). La variable aléatoire désignant la quantité de ressources occupées par les utilisateurs est alors une variable aléatoire réelle positive. Et les expressions des équations (4.05) et (4.06) se portent déjà avec les fonctions de répartition qui caractérisent les variables aléatoires réelles.

4.6 Conclusion

Un système multi-service partage ses ressources à travers ses utilisateurs selon les besoins de chacun pour chaque service demandé. Les utilisateurs arrivent sur ce système selon des processus de Poisson caractéristiques de chaque classe de service. Le système est assimilable à une file d'attente multi-service M/GI/C où deux cas de capacités en termes de nombre de clients ont été étudiés : le cas infini qui nous a permis d'évaluer la distribution des occupations de ressources de la file d'attente, et le cas fini à partir duquel nous avons déduit la probabilité de congestion. La principale contribution est les expressions analytiques des quantités de ressources occupées par les clients. Elles nous ont rendu possible le dimensionnement du système en déterminant la quantité de ressources nécessaires au serveur étant donnée une probabilité d'encombrement admissible puisqu'à partir d'une certaine valeur de la capacité, la quantité de ressources occupées ne présente plus beaucoup de variations. Les calculs utilisent les lois des probabilités des durées des services mais non pas seulement leurs moyennes comme avec les lois exponentielles. C'est plutôt une limitation dans les cas pratiques due au fait que les déterminations exactes de ces lois s'avèrent difficiles ; quand même des approximations par des lois normales peuvent être utilisées.

CHAPITRE 5.

MODELISATION P-ADIQUE ET ULTRAMETRIQUE D'UTILISATION DES RESSOURCES PARTAGEES D'UN SYSTEME DE RESSOURCES HIERARCHISEES

5.1 Introduction

Dans tous les modèles que nous avons présentés dans les chapitres précédents, les quantités de ressources des systèmes sont des nombres réels : ressources discrètes ou fractionnaires, que ce soit mono-service ou multi-service. Mais une fois que de tels systèmes sont plus complexes, les nombres réels ne suffisent plus à les modéliser. Nous devons donc faire recours à d'autre type de nombres appelé « nombres p -adiques » définissant un espace dit « ultramétrique ». On va présenter un nouveau modèle d'utilisation de ressources dans un système de ressources hiérarchisés, tout en étudiant les probabilités d'utilisation d'un ensemble de ressources quelconque.

Nous avons effectué des recherches sur les nombres p -adiques, les espaces ultramétriques et leurs applications. Ces travaux sont publiés dans « *Ultrametric hierarchical resource utilization model using p -adic numbers* » (Vol. 2, p. 25), « *p -adic numbers applied on an elliptic curve cryptography* » (Vol. 2, p. 105), « *Coefficients triangulaires et algèbres des polynômes dissociables et multipliables* » (Vol. 2, p. 43), « *Construction des bases orthonormées de l'espace des fonctions continues sur un groupe compact ultramétrique* » (Vol. 2, p. 65), « *Algèbre des suites triangulaires convolutives et multipliables. Leurs formalisations polynomiales* » (Vol. 2, p. 84). Avec « *Analytical resolution of the Cauchy problem of a diffusion equation with a fractional time derivative* » (Vol. 2, p. 36), ils sont synthétisés dans ce chapitre.

5.2 Etat de l'art et contexte

La notion de nombres est basique non seulement en mathématiques mais aussi en physiques et dans le domaine de la science en général. Les sciences modernes sont basées sur des analyses mathématiques sur des nombres réels et des nombres complexes. Des fois, ils se tournent vers une exploration d'un système hiérarchique plus complexe nécessitant des fois des analyses sur les nombres p -adiques et les espaces ultramétriques. Introduit pour la première fois en 1904 par Hensel [5.01], les nombres p -adiques sont ensuite largement utilisés en mathématiques : théorie des nombres, géométrie algébrique, théorie des représentation, dynamique arithmétique et algébrique, cryptographie, ...

Volovich [5.02] a avancé ses points de vue sur comment faire de la science avec les nombres. On suppose un système quelconque sur lequel on fait des mesures. Pour décrire les résultats de ces mesures, nous utilisons toujours des nombres rationnels. Pour effectuer des analyses mathématiques, nous utilisons une complétion de l'ensemble des nombres rationnels, dont nous avons l'habitude d'utiliser les nombres réels. Mais Ostrowski dans son théorème [5.03] a mentionné qu'il n'y a que deux types de complétions des rationnels, et l'autre type est l'ensemble des nombres p -adiques. Des superanalyses avec de tels nombres ont été considérées par Vladimirov et Volovich [5.04] [5.05]. Depuis l'année 2000, des réalisations excitantes ont été remarquées sur l'exploration des nombres p -adiques et des structures ultramétriques dans beaucoup de modèles physiques : en partant des géométries espace-temps à petite échelle, passant par les beaucoup d'autres systèmes complexes, et même jusqu'à l'univers en entier. Il y avait de grands progrès significatifs des modélisations non-Archimédiennes en biologies, sciences cognitives, théorie de l'information, phénomènes stochastiques [5.06]–[5.10]. L'ultramétrie semble être une propriété générique de système complexe ayant de la hiérarchie en son structure. Nous nous sommes lancés aussi dans nos recherches dans ce domaine de l'ultramétrie [5.11]–[5.13] afin de le mieux comprendre et de trouver comment peut-on l'appliquer dans le partage de ressources que nous avons abordé depuis plusieurs années.

Des théories sur les systèmes dynamiques p -adiques ont intensément avancés [5.14]. Des dynamiques de flux, comme de la géométrie algébrique, ont été proposés par Herman et Yoccoz [5.15] dans le problème de petit diviseur dans des corps non Archimédiens. Il semble que c'est la première publication parlant de dynamique dans un domaine non archimédien. Des développements futurs ont été observés selon Silverman [5.16].

Plusieurs domaines d'applications des nombres p -adiques dans divers domaines ont été exploré par Khrennikov et al.: analyse différentielle [5.17], mécanique quantique [5.18], biologie [5.19]–[5.21], sciences cognitives [5.22][5.23], imagerie [5.24], dynamique des systèmes [5.25], psychologies et finances [5.26], sociologie et médecine [5.27] et beaucoup d'autres domaines [5.28], ...

Pour notre cas, nous allons proposer une analyse d'un système dynamique dans un domaine non-Archimédien [5.29]. Un système de ressources hiérarchisées dont l'état évolue au cours du temps en fonction des utilisations de ces ressources. Nous avons montré que les occupations de ces ressources sont régies par l'équation de diffusion ultramétrique dont la résolution fait appel à un problème de Cauchy avec l'opérateur de dérivée fractionnaire de Vladimirov.

5.3 Les nombres p -adiques

On va d'abord commencer par expliquer brièvement c'est quoi les nombres p -adiques.

Le corps \mathbb{R} des nombres réels est construit comme une complétude du corps \mathbb{Q} des nombres rationnels avec la distance métrique $\rho(x, y) = |x - y|$ où $|\cdot|$ définit la norme métrique standard correspondant à la valeur absolue de la différence. Cette fois, on va introduire une autre norme appelée norme p -adique qui est une norme ultramétrique utilisée pour la complétion du corps \mathbb{Q} .

5.3.1 Valeur absolue p -adique

Soit p un nombre premier. Pour tout nombre rationnel $r = p^k \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, où m et n sont premiers avec p , on note $v_p(r) = k$ ou bien pour $r \neq 0$, et par convention $v_p(0) = +\infty$. On définit la valeur absolue p -adique dans \mathbb{Q} comme l'application de \mathbb{Q} vers $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, notée $|\cdot|_p$ par :

$$|r|_p = p^{-v_p(r)} \quad (5.01)$$

L'application v_p de \mathbb{Q} dans \mathbb{Z} est appelée valuation p -adique.

Notons quelques propriétés de cette valeur absolue p -adique dans le théorème 5.01.

Théorème 5.01.

- Pour tout nombre rationnel r_1 et r_2 : $|r_1 \cdot r_2|_p = |r_1|_p \cdot |r_2|_p$
- Pour tout nombre rationnel r_1 et r_2 : $|r_1 + r_2|_p \leq \max\{|r_1|_p, |r_2|_p\}$

Démonstration :

♣ Les nombres rationnels r_1 et r_2 peuvent s'écrire respectivement par $r_1 = p^{k_1} \frac{m_1}{n_1}$ et $r_2 = p^{k_2} \frac{m_2}{n_2}$

où m_1, m_2, n_1 et n_2 sont premiers avec p . On a donc $|r_1|_p = p^{-k_1}$ et $|r_2|_p = p^{-k_2}$. Quant au produit

$r_1 \cdot r_2$ on a $r_1 \cdot r_2 = p^{k_1+k_2} \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}$. Sachant que $m_1 m_2$ et $n_1 n_2$ sont premiers avec p , on peut dire que la

valeur absolue p -adique du produit $r_1 \cdot r_2$ est égale à $|r_1 \cdot r_2|_p = p^{-k_1-k_2} = |r_1|_p \cdot |r_2|_p$.

Pour la somme, on a :

$$r_1+r_2 = p^{k_1} \frac{m_1}{n_1} + p^{k_2} \frac{m_2}{n_2} = \frac{p^{k_1} m_1 n_2 + p^{k_2} m_2 n_1}{n_1 n_2} = \begin{cases} p^{k_1} \cdot \frac{m_1 n_2 + p^{k_2-k_1} m_2 n_1}{n_1 n_2} & \text{si } k_1 \leq k_2 \\ p^{k_2} \cdot \frac{p^{k_1-k_2} m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2} & \text{si } k_1 > k_2 \end{cases}$$

$$= p^{\min(k_1, k_2)} \cdot \frac{u}{v}$$

Où on peut démontrer que v et p sont aussi premiers entre eux.

Pour le cas de u , s'il est premier avec p , on a $|r_1+r_2|_p = p^{-\min(k_1, k_2)}$, donc

$$|r_1+r_2|_p = p^{-\min(k_1, k_2)} = \max(p^{-k_1}, p^{-k_2}) = \max(|r_1|_p, |r_2|_p).$$

S'il n'est pas premier avec p , on peut trouver un entier naturel non nul k tel que $u = p^k u'$ et u' est premier avec p . La valeur absolue p -adique de la somme est donc

$$|r_1+r_2|_p = p^{-(k+\min(k_1, k_2))} = \max(p^{-k-k_1}, p^{-k-k_2}) < \max(p^{-k_1}, p^{-k_2}) = \max(|r_1|_p, |r_2|_p).$$

$$\text{Ainsi, } |r_1+r_2|_p \leq \max\{|r_1|_p, |r_2|_p\}.$$

◆

Comme $v_p(0) = +\infty$, $|r|_p = 0$ si et seulement si $r = 0$. Et ces trois propriétés montrent que $|\cdot|_p$ définit une norme sur l'ensemble des nombres rationnels \mathbb{Q} . La deuxième propriété est appelée l'inégalité triangulaire forte.

Une norme vérifiant l'inégalité forte est dite norme non archimédienne ou norme ultramétrique. Une norme vérifiant l'inégalité triangulaire habituelle est appelée norme archimédienne.

5.3.2 Distance p -adique

L'ensemble \mathbb{Q} muni de la distance associée à la norme p -adique $|\cdot|_p$ est un espace métrique. Soit

d_p la distance ainsi définie, elle est appelée distance p -adique :

$$d_p(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|_p \tag{5.02}$$

Pour tout nombre rationnel r_1 , r_2 et r_3 , cette distance vérifie les propriétés de la Proposition 5.02.

Théorème 5.02.

- $d_p(r_1, r_2) = 0$ si et seulement si $r_1 = r_2$

- $d_p(r_1, r_2) = d_p(r_2, r_1)$
- $d_p(r_1, r_3) \leq \max\{d_p(r_1, r_2), d_p(r_2, r_3)\}$

Démonstration :

♣ Les deux premières propriétés se découlent de la définition de la distance p -adique à partir de la valeur absolue p -adique qu'on a vue dans le théorème 5.01.

Pour la troisième propriété, appelée inégalité triangulaire forte, on utilise la deuxième propriété de la Proposition 3.01 :

$$\begin{aligned} d_p(r_1, r_3) &= |r_1 - r_3|_p = |(r_1 - r_2) + (r_2 - r_3)|_p \leq \max\{|r_1 - r_2|_p, |r_2 - r_3|_p\} \\ &\leq \max\{d_p(r_1, r_2), d_p(r_2, r_3)\} \end{aligned}$$

◆

On peut dire que deux nombres r_1 et r_2 sont plus proches p -adiquement tant qu'un nombre n vérifiant p^n divise $d_p(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|_p$ est élevé.

Il est vraiment génial de dire pour $p = 5$ que 135 est plus proche de 10 que de 35. En effet, $d_5(135, 10) = |135 - 10|_5 = |125|_5 = |5^3|_5 = 5^{-3}$ et $d_5(135, 35) = |135 - 35|_5 = |100|_5 = |5^2 \cdot 2^2|_5 = 5^{-2}$.

5.3.3 Ensemble des nombres p -adiques

L'espace métrique (\mathbb{Q}, d_p) n'est pas un espace complet. La complétion de \mathbb{Q} par rapport à cette métrique est appelée l'ensemble des nombres p -adiques et sera noté \mathbb{Q}_p .

Notons les deux lemmes suivants.

Lemme 5.01. Toute opération interne (addition et multiplication) sur \mathbb{Q} se prolonge d'une manière continue sur \mathbb{Q}_p .

Lemme 5.02. Tout élément $x \in \mathbb{Q}_p$ s'écrit d'une manière unique sous la forme :

$$x = \sum_{k=-n}^{+\infty} a_k p^k, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq a_k \leq p-1 \quad (5.03)$$

appelée développement de Hensel de l'élément $x \in \mathbb{Q}_p$.

5.4 Modèle ultramétrique de ressources hiérarchisées

5.4.1 Système de ressources hiérarchiques

On va considérer un système composé de $m+1$ de types T_i ($i=0, \dots, m$) de ressources. Dans toute la suite, on peut dire ressource de type T_i ou tout simplement ressource T_i . Chaque ressource T_i est supposé discret de quantité maximale égale à $p-1$, c'est-à-dire que le nombre de ressources T_i utilisés ne prend que des valeurs entières comprises entre 0 et $p-1$. Si on va noter par r_i la quantité de ressources T_i utilisée, on a $r_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ pour tout $i \in \{0, \dots, m\}$. Dans un système réel, il se peut que la quantité maximale $p-1$ de ressources ne donne pas forcément un nombre premier p . On peut utiliser le premier nombre premier qui suit cette quantité maximale.

Ce système est assimilé à un système de ressources hiérarchisées. La ressource T_0 est la plus importante, la ressource T_i est plus importante que celle T_{i+1} , et ainsi de suite. On observe cette hiérarchisation dans la plupart des cas réels. Par exemple, la ressource du processeur central est considérée comme plus importante, et ainsi de suite.

On appelle état du système les quantités de ressources utilisées définies par le vecteur $r = (r_0, \dots, r_m)$. On rappelle que $r_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ et pour une raison purement mathématique, on va fixer $p > 1$ et nombre premier. On peut étendre l'état r du système à un vecteur $r = (r_{-n}, \dots, r_{-1}, r_0, r_1, \dots, r_m)$ pour des types T_i de ressources indexés par des nombres entiers négatifs $i = -n, \dots, 0, \dots, m$. Il est aussi nécessaire de ne pas fixer les nombres de coordonnées n et m utilisés pour rendre possible le futur ajout de type de ressources.

Un tel espace de vecteurs peut être représenté par un nombre rationnel de la forme :

$$r = r_{-n}p^{-n} + \dots + r_{-1}p^{-1} + r_0 + r_1p + \dots + r_m p^m, \quad r_j \in \{0, 1, \dots, p-1\} \quad (5.04)$$

Pour utiliser un modèle ultramétrique, on va construire un espace métrique complet. L'approche est de considérer un vecteur d'une infinité de coordonnées de la forme :

$$r = \dots + r_{-n}p^{-n} + \dots + r_{-1}p^{-1} + r_0 + r_1p + \dots + r_m p^m + \dots, \quad r_j \in \{0, 1, \dots, p-1\} \quad (5.05)$$

tel qu'il existe des entiers n et m tel que $r_{-j} = 0$ pour tout $j > n$ et $r_j = 0$ pour tout $j > m$. L'espace de ces infinités de coordonnées sera notée \mathbb{Q}_p dans lequel on va définir une métrique comme suit. Etant donnés deux états $x = (x_j)$ et $y = (y_j)$, la distance entre les deux états x et y notée $d_p(x, y) = |x - y|_p$ est égale à :

$$d_p(x, y) = |x - y|_p = p^{-\nu} \quad (5.06)$$

tel que ν est l'entier naturel défini par : $x_j = y_j$ pour tout $j < \nu$ et $x_\nu \neq y_\nu$.

Théorème 5.03. (Ravaliminoarimalalason)

La métrique de distance d_p entre les deux états x et y de notre modèle défini dans l'équation (5.06) est ultramétrique.

Démonstration :

♣ La démonstration est identique à la preuve de l'ultramétrie de la distance p -adique définie dans le paragraphe 5.3.2.

♦

5.4.2 Modèle ultramétrique

En partant de la représentation de l'état par un nombre rationnel, on s'intéresse à sa représentation dans la complétude \mathbb{Q}_p de l'ensemble des nombres rationnels munie de la distance ultramétrique d_p .

Chaque boule peut être identifiée comme une boule de rayon $R = p^\nu$, $\nu \in \mathbb{Z}$. La boule $B_1(0)$ de centre 0 et de rayon 1 sera notée \mathbb{Z}_p . Dans cette espace ultramétrique, toute boule peut être représentée comme une union disjointe de petites boules. Par exemple :

$$\mathbb{Z}_p = B_1(0) = \bigcup_{j=0}^{p-1} B_{1/p}(a^j) = \bigcup_{j_0 \dots j_{\nu-1}=0}^{p-1} B_{1/p^\nu}(a^{j_0 \dots j_{\nu-1}}) \text{ où } a^j, a^{j_0 \dots j_{\nu-1}} \in \mathbb{Z}_p \text{ tel que } x_0 = j \text{ pour } a^j \text{ et}$$

$x_0 = j_0, \dots, x_{\nu-1} = j_{\nu-1}$ pour $a^{j_0 \dots j_{\nu-1}}$. C'est la fameuse propriété que, dans un espace ultramétrique, tout point d'une boule peut être considérée comme son centre.

5.4.3 Utilisation de ressources

5.4.3.1 Formulation mathématique

Dans notre modèle, une boule p -adique représente un ensemble de d'états d'utilisation de ressources d'un système en fixant l'utilisation de certaines ressources.

Par exemple :

- L'utilisation $R_j = B_{1/l}(a^j)$ de ressources, qui est la boule de centre a^j et de rayon $1/l$, $R_j = B_{1/l}(a^j) = \{x \in \mathbb{Z}_p : x_0 \leq j\}$, est égale aux utilisations de toutes les ressources tout en fixant j l'utilisation de la ressource T_0 .
- L'utilisation $R_{ji} = B_{1/p}(a^{ji})$ de ressources, qui est la boule de centre a^{ji} et de rayon $1/l$, $R_{ji} = B_{1/l}(a^{ji}) = \{x \in \mathbb{Z}_p : x_0 \leq j, x_1 \leq i\}$, est égale aux utilisations de toutes les ressources tout en fixant j l'utilisation de la ressource T_0 et i l'utilisation de la ressource T_1 .

Une utilisation de ressources, qui est un état du système, est un point de l'espace \mathbb{Q}_p . C'est une boule de rayon zéro. La partition d'une boule en des boules disjointes de rayons plus petites correspond en une partition d'une utilisation de ressources en des sous-utilisations disjointes dans un niveau plus approfondi dans la hiérarchie des ressources.

Une utilisation élémentaire est un point de \mathbb{Q}_p . Mais pour des cas plus pratiques, on utilise des boules de rayon fini.

Les exemples ci-dessous définissent des boules de rayon fini :

- L'utilisation de la ressource T_0 est supérieure à 90%.
- L'utilisation de la ressource T_0 est supérieure à 90% et celle de la ressource T_1 est supérieure à 60%.
- Les seuils sont utiles au dimensionnement des quantités de ressources nécessaires à un système, et aux décisions d'expansion de telles ressources : Probabilité d'une utilisation de la ressource T_0 est supérieure à p_0 , celle de T_1 est supérieure à p_1 , ainsi de suite.

5.4.3.2 Probabilité d'utilisation de ressources régie par une équation de diffusion

Maintenant, on va poser $q(x,t)$ la probabilité que le système se trouve à l'état x à l'instant t quelconque, et $q(B_\nu, t)$ la probabilité que l'état du système à l'instant t appartient à une boule $B_\nu = B_{p^\nu}(0)$ de centre 0 et de rayon p^ν , $\nu \in \mathbb{Z}$. Cette probabilité peut être représentée par une intégrale en fonction d'une mesure μ définie sur l'espace \mathbb{Q}_p :

$$q(B_\nu, t) = \int_{B_\nu} q(x,t) \mu(dx) \quad (5.07)$$

Théorème 5.04. (Ravaliminoarimalalason)

La probabilité d'utilisation de ressources $q(x,t)$ peut être exprimée par :

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} = \int_{\mathbb{Q}_p} [p(x|y;t)q(y,t) - p(y|x;t)q(x,t)] \mu(dy) \quad (5.08)$$

Démonstration :

♣ Pour mieux comprendre la démonstration, prenons d'abord le cas d'un état quelconque e_i appartenant à un ensemble de nombre réels. La probabilité de se trouver à cet état e_i à l'instant $t + \varepsilon$, notée $q(e_i, t + \varepsilon)$, est égale à :

$$q(e_i, t + \varepsilon) = q(e_i, t) + \sum_{j \neq i} (p(e_i | e_j, t)q(e_j, t) - p(e_j | e_i, t)q(e_i, t)) \varepsilon$$

La quantité $q(e_i, t)$ indique la probabilité que le système a été déjà à l'état e_i à l'instant t . Une autre éventualité s'ajoute à ceci, c'est que le système était à l'état e_j à l'instant t et devient à l'état e_i à l'instant $t + \varepsilon$. La probabilité $p(e_i | e_j, t)$ définit cette transition de l'état e_j à l'état e_i . C'est pourquoi on a le terme $p(e_i | e_j, t)q(e_j, t)$ avec la durée ε pour toutes les valeurs $j \neq i$. Une dernière éventualité qu'on doit soustraire à l'existence de l'état e_i à l'instant t c'est que le système est devenu à un autre état à l'instant $t + \varepsilon$. C'est pourquoi on a le terme $p(e_j | e_i, t)q(e_i, t)$ avec la durée ε pour toutes les valeurs $j \neq i$.

Et on a la notation différentielle pour ε tendant vers 0.

$$\frac{q(e_i, t + \varepsilon) - q(e_i, t)}{\varepsilon} = \sum_{j \neq i} \left(p(e_i | e_j; t) q(e_j, t) - p(e_j | e_i; t) q(e_i, t) \right)$$

$$\frac{dq(e_i, t)}{dt} = \sum_{j \neq i} \left(p(e_i | e_j; t) q(e_j, t) - p(e_j | e_i; t) q(e_i, t) \right)$$

Maintenant, dans l'espace \mathbb{Q}_p , on peut procéder à la même démarche de la démonstration. On a par analogie :

$$\frac{\partial q(x, t)}{\partial t} = \int_{\mathbb{Q}_p} [p(x | y; t) q(y, t) - p(y | x; t) q(x, t)] \mu(dy)$$

◆

Dans le cas où les transitions sont homogènes dans le temps, c'est-à-dire que $p(e_i | e_j; t)$ sont indépendantes du temps, $p(e_i | e_j; t) = p(e_i | e_j)$, on a :

$$\frac{\partial q(x, t)}{\partial t} = \int_{\mathbb{Q}_p} [p(x | y) q(y, t) - p(y | x) q(x, t)] \mu(dy) \quad (5.09)$$

Dans le cas où la transition est symétrique, c'est-à-dire $p(x | y) = p(y | x)$, on a :

$$\frac{\partial q(x, t)}{\partial t} = \int_{\mathbb{Q}_p} p(x | y) [q(y, t) - q(x, t)] \mu(dy) \quad (5.10)$$

Cas particulier : Il est tout à fait naturel de poser que la probabilité de transition entre les deux états décroît lorsque la distance entre eux augmente, et vice-versa. On peut alors poser $p(x | y)$ comme défini dans l'équation (5.11) pour un nombre $\alpha > 0$ quelconque :

$$p(x | y) = \frac{C_\alpha}{|x - y|_p^{1+\alpha}} \quad (5.11)$$

où C_α est une constante de normalisation. Le choix de α dépend de la caractérisation de la transition en fonction des comportements des utilisateurs : des processus d'arrivée, et des lois de demande de services.

Théorème 5.05. (Ravaliminoarimalalason)

La probabilité d'utilisation de ressources $q(x, t)$ est régie par l'équation différentielle (5.12) :

$$\frac{\partial q(x, t)}{\partial t} = D^\alpha q(x, t), \quad \text{avec une condition initiale } q(x, 0) = q_0(x) \quad (5.12)$$

où D^α est l'opérateur de Vladimirov pour une fonction de variable p -adique à valeur complexe :

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)} \int_{\mathbb{Q}_p} \frac{f(x) - f(y)}{|x - y|_p^{1+\alpha}} \mu(dy) \quad (5.13)$$

$$\text{Et } \Gamma_p(-\alpha) = \frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-1-\alpha}}.$$

Démonstration :

♣ En partant de l'équation (5.10) et en utilisant la probabilité de transition qu'on a posée en (5.11), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial q(x,t)}{\partial t} &= \int_{\mathbb{Q}_p} \frac{C_\alpha}{|x - y|_p^{1+\alpha}} [q(y,t) - q(x,t)] \mu(dy) \\ &= C_\alpha \int_{\mathbb{Q}_p} \frac{q(y,t) - q(x,t)}{|x - y|_p^{1+\alpha}} \mu(dy) \end{aligned}$$

L'intégrale dans la partie droite de cette égalité s'appelle opérateur à dérivée fractionnaire D^α de Vladimirov. Ainsi que l'évolution de la probabilité d'utilisation de ressources est décrite par :

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} = D^\alpha q(x,t)$$

◆

Cette équation (5.12) qui définit l'utilisation des ressources s'appelle équation de diffusion p -adique. La résolution d'une telle équation fait appel à un problème de Cauchy comme celle que nous avons résolue dans [5.30], ou comme d'autres auteurs ont développé dans [5.09] [5.31] [5.32].

5.5 Application

On va prendre un exemple d'application de ce nouveau modèle.

5.5.1 Définition du système

Soit un système composé de 3 types de ressources : T1, T2, T3. T1 dispose de 3 ressources, T2 et T3 dispose de 2 ressources chacun. La ressource T1 est la plus importante du système considéré, puis T2 et enfin T3.

L'utilisation de ressources de ce système peut être représentée par l'ensemble \mathbb{Q}_5 , ensemble des nombres 5-adiques (p -adiques dont $p = 5$), puisque 5 est le plus nombre premier supérieur à la quantité maximale de ses ressources.

5.5.2 Etat d'utilisation de ressources du système

L'état du système est représenté par un nombre 5-adique.

Exemple :

- L'utilisation de 1 ressource T1, 1 ressource T2, et 1 ressource T3 est représentée par : $r = 1 + 1p + 1p^2 = 1 + 1 \times 5 + 1 \times 5^2 = 31$. Ici, 31 représente un nombre 5-adique et on le notera $(31)_5$.
- L'utilisation de 2 ressources T1, 1 ressource T2, et 0 ressource T3 est représentée par : $r = 2 + 1p + 0p^2 = 2 + 1 \times 5 + 0 \times 5^2 = (7)_5$.
- Et ainsi de suite.

Le tableau 5.01 représente les états possibles de ce système.

T1	T2	T3	r (expression de Hensel)	Etat du système
0	0	0	$0 + 0p + 0p^2$	$(0)_5$
0	0	1	$0 + 0p + 1p^2$	$(25)_5$
0	0	2	$0 + 0p + 2p^2$	$(50)_5$
0	1	0	$0 + 1p + 0p^2$	$(5)_5$
0	1	1	$0 + 1p + 1p^2$	$(30)_5$
0	1	2	$0 + 1p + 2p^2$	$(55)_5$
0	2	0	$0 + 2p + 0p^2$	$(10)_5$
0	2	1	$0 + 2p + 1p^2$	$(35)_5$
0	2	2	$0 + 2p + 2p^2$	$(60)_5$
1	0	0	$1 + 0p + 0p^2$	$(1)_5$
1	0	1	$1 + 0p + 1p^2$	$(26)_5$
1	0	2	$1 + 0p + 2p^2$	$(51)_5$
1	1	0	$1 + 1p + 0p^2$	$(6)_5$
1	1	1	$1 + 1p + 1p^2$	$(31)_5$
1	1	2	$1 + 1p + 2p^2$	$(56)_5$
1	2	0	$1 + 2p + 0p^2$	$(11)_5$
1	2	1	$1 + 2p + 1p^2$	$(36)_5$
1	2	2	$1 + 2p + 2p^2$	$(61)_5$
2	0	0	$2 + 0p + 0p^2$	$(2)_5$
2	0	1	$2 + 0p + 1p^2$	$(27)_5$

T1	T2	T3	r (expression de Hensel)	Etat du système
2	0	2	$2+0p+2p^2$	$(52)_5$
2	1	0	$2+1p+0p^2$	$(7)_5$
2	1	1	$2+1p+1p^2$	$(32)_5$
2	1	2	$2+1p+2p^2$	$(57)_5$
2	2	0	$2+2p+0p^2$	$(12)_5$
2	2	1	$2+2p+1p^2$	$(37)_5$
2	2	2	$2+2p+2p^2$	$(62)_5$
3	0	0	$3+0p+0p^2$	$(3)_5$
3	0	1	$3+0p+1p^2$	$(28)_5$
3	0	2	$3+0p+2p^2$	$(53)_5$
3	1	0	$3+1p+0p^2$	$(8)_5$
3	1	1	$3+1p+1p^2$	$(33)_5$
3	1	2	$3+1p+2p^2$	$(58)_5$
3	2	0	$3+2p+0p^2$	$(13)_5$
3	2	1	$3+2p+1p^2$	$(38)_5$
3	2	2	$3+2p+2p^2$	$(63)_5$

Tableau 5.01: Les états du système du modèle ultramétrique

Le système dispose donc de 36 états différents.

5.5.3 Analyses des distances entre les états d'utilisation des ressources

Pour calculer la distance entre ces états, on va prendre quelques exemples :

- Etat 1 : 2 ressources T1, 1 ressource T2 et 0 ressource T3 (équivalent à $r_1 = (7)_5$)

Etat 2 : 1 ressources T1, 0 ressource T2 et 0 ressource T3 (équivalent à $r_2 = (1)_5$)

La distance entre ces deux états est égale à $d = |r_1 - r_2|_5 = |7 - 1|_5 = |6|_5 = |2^1 3^1 5^0|_5 = 5^{-0} = 1$

- Etat 1 : 3 ressources T1, 2 ressources T2 et 0 ressource T3 (équivalent à $r_1 = (13)_5$)

Etat 2 : 3 ressources T1, 1 ressource T2 et 0 ressource T3 (équivalent à $r_2 = (8)_5$)

La distance entre ces deux états est égale à $d = |r_1 - r_2|_5 = |13 - 8|_5 = |5|_5 = |5^1|_5 = 5^{-1} = 0,2$

- ...

Les calculs nous permettent d'obtenir que les valeurs de ces distances ne puissent prendre que 4 valeurs : $5^{-\infty}$, 5^0 , 5^{-1} , 5^{-2} , soit 0, 1, 0,2 et 0,04.

Les courbes des figures 5.01 et 5.02 représentent les distances entre deux états du système. On les a dénommés état initial et état final.

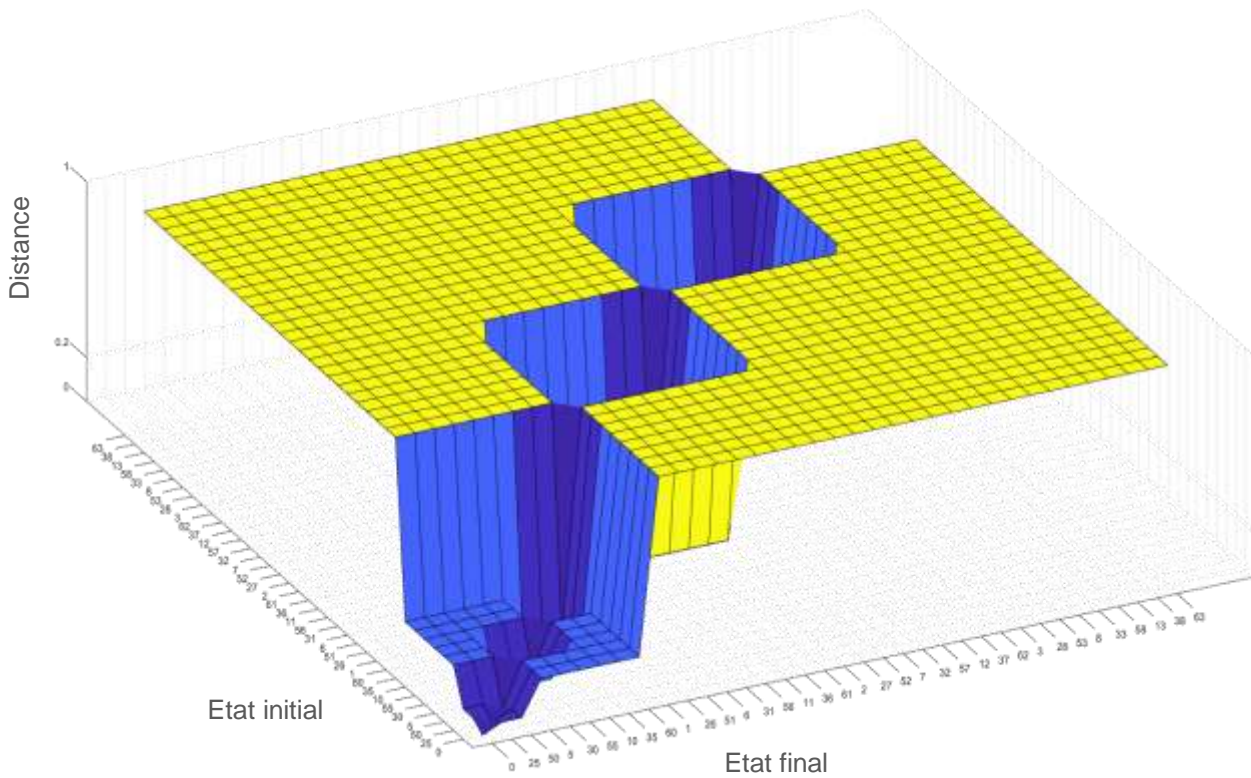


Figure 5.01. Distance entre les états du système sous forme 3D

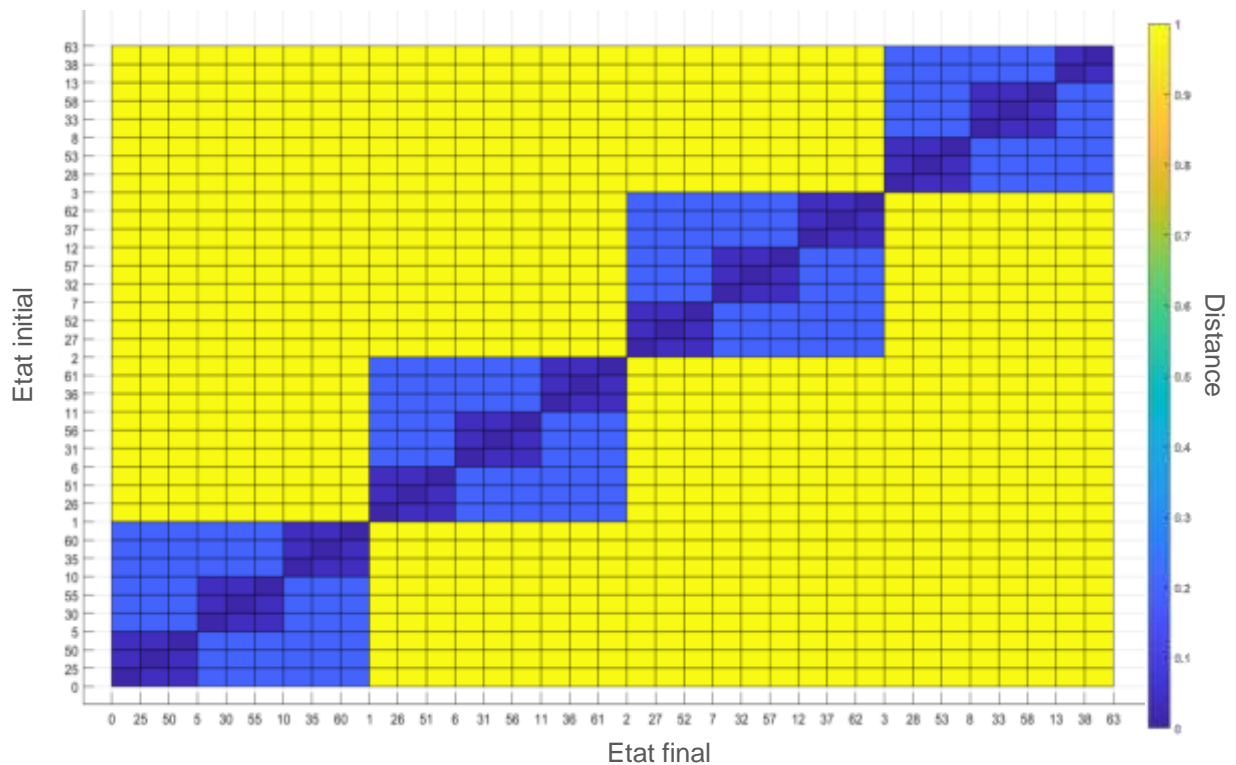


Figure 5.02. Distance entre les états du système sous forme de coloriage de plan

On constate que plus le changement se porte sur le nombre de ressources moins prioritaires (T3 dans cet exemple), la distance entre les deux états est petite. Ceci est expliqué par le virage vers le bleu dans les figures 5.01 et 5.02. Et plus le changement se porte sur le nombre de ressources plus prioritaires (T1 dans cet exemple), la distance entre les deux états est grande. Ceci est expliqué par la couleur jaune dans les figures 5.01 et 5.02.

Exemple : On va partir de l'état $(7)_5$ qui est égal à $T1 = 2$, $T2 = 1$ et $T3 = 0$ ressources utilisées.

- Pour un état final égal à $(32)_5$: $T1 = 2$, $T2 = 1$ et $T3 = 1$ ressources utilisées. Le changement se porte sur les ressources de T3. La distance entre ces états vaut 0,04 (bleu dans les figures 5.01 et 5.02).
- Pour un état final égal à $(57)_5$: $T1 = 2$, $T2 = 1$ et $T3 = 2$ ressources utilisées. Le changement se porte sur les ressources de T3. La distance entre ces états vaut encore 0,04 (bleu dans les figures 5.01 et 5.02).
- Pour un état final égal à $(12)_5$: $T1 = 2$, $T2 = 2$ et $T3 = 0$ ressources utilisées. Le changement se porte sur les ressources de T2 qui sont plus prioritaires que celles de T3. La distance entre ces états vaut 0,2.

- Pour un état final égal à $(6)_5$: $T1 = 1$, $T2 = 1$ et $T3 = 0$ ressources utilisées. Le changement se porte sur les ressources de T1 qui sont plus prioritaires que celles de T2 et de T3. La distance entre ces états vaut 1 (jaune dans les figures 5.01 et 5.02).

D'om l'importance de l'utilisation de notre modèle dans le cas des ressources hiérarchisées.

5.5.4 La loi probabilité des quantités de ressources utilisées

A partir de ces distances, on trouve que 35 couples d'états disposent une distance 0, puis 918 couples d'états de distance 1, puis 204 couples de distance 0,2 et 68 couples de distance 0,04.

Si on va prendre la probabilité de transition d'état égale à $p(x, y) = \frac{C}{|x - y|_5}$, on a comme constante

de normalisation $1 = 918 \times \frac{C}{1} + 204 \times \frac{C}{0,2} + 68 \times \frac{C}{0,04}$. On trouvera $C = \frac{1}{3638}$.

La probabilité de transition d'un état x à un état y est donc égale à $p(x, y) = \frac{1}{3638|x - y|_5}$ où $|x - y|_5$

désigne la distance ultramétrique entre ces deux états qui sont 0 si $x = y$, 1 si $x - y$ n'est pas multiple de 5, 0,2 si $x - y$ est multiple de 5, et 0,04 si $x - y$ est multiple de 25.

D'après l'équation (5.12), la probabilité d'utilisation de ressources est régie par l'équation

$$\frac{\partial q(x, t)}{\partial t} = D^0 q(x, t), \quad \text{avec une condition initiale } q(x, 0) = q_0(x).$$

$$\text{Avec } D^0 q(x, t) = \left(1 - \frac{1}{5}\right) \int_{\mathbb{Q}_5} \frac{q(x, t) - q(y, t)}{|x - y|_5} \mu(dy).$$

L'avantage mise en évidence dans ce modèle est l'étude combinée des utilisations des 3 types de ressources. L'étude séparée peut induire à des erreurs en ne considérant pas les autres ressources.

5.6 Conclusion

Nous avons présenté un nouveau modèle d'utilisation de ressources qu'on a appelé modèle ultramétrique. Il est basé par une modélisation d'un système de ressources hiérarchisées par des nombres p -adiques. Ce modèle s'utilise sur un système doté de plusieurs ressources dont on peut classifier par ordre d'importance. L'état d'un tel système est un nombre p -adique. On a défini une utilisation élémentaire de ressources comme état du système, et une représentation des utilisations

sous formes de boules dans l'ensemble des nombres p -adique a été avancée. L'importance de ce type de modélisation a été mise en évidence pour des ressources hiérarchisées. A partir de ces modèles, et en utilisant des transitions d'états à chaque changement d'utilisation de ressources (que ce soit arrivée d'un nouveau client, ou un départ), nous avons démontré que la probabilité d'utilisation de ressources est régie par un problème de Cauchy : une équation aux dérivées fractionnaires, et plus particulièrement, avec l'opérateur de Vladimirov. Il reste quand même beaucoup d'aspects à étudier : l'existence d'une solution stationnaire, afin de déterminer le comportement asymptotique de notre modèle.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Des modèles analytiques d'occupation de ressources ont été établis dans le cadre de cette recherche. Trois cas complémentaires ont été étudiés : le partage de ressources discrètes ou fractionnaires avec des paramètres certains ou flous des utilisateurs, le partage de ressources d'un système multi-service, et le partage de ressources hiérarchisées d'un système de ressources partagées. Ces trois cas sont présentés un à un dans chaque chapitre de cette thèse.

Dans le troisième chapitre, on a développé la modélisation de l'utilisation, de prédiction et de dimensionnement des ressources discrètes partagées. Il s'agit d'un modèle de file d'attente à plusieurs ressources dont chaque utilisateur peut utiliser une quantité nombre entier naturel de ressources. Des modèles à capacité de ressources infinies et puis finies sont considérés et validés, avec des besoins individuels de ressources suivant des lois de Poisson et des lois binomiales pour chaque utilisateur. On a prouvé l'impact de la charge ρ sur la probabilité d'occupation des ressources. On peut aussi déterminer les quantités de ressources occupées même si les paramètres d'arrivée et de service des utilisateurs sont flous. On a proposé une extension du modèle établi au cas de partage de ressources fractionnaires. Dans ce modèle, la quantité de ressources que dispose le serveur est un nombre réel strictement positif, et celle que peuvent demander les utilisateurs l'est aussi.

Le quatrième chapitre décrit un modèle de partage de ressources par un système multi-service. Cette fois, le serveur propose plusieurs services à ses utilisateurs. Chaque utilisation de service a besoin d'une quantité de ressources que nous avons posée déterministe (par service) dans notre modèle. Le modèle obtenu est une file d'attente de type $M/GI/C$ dont aucune solution analytique n'est trouvée jusqu'à maintenant. Nous avons proposé une solution à partir de la file $M/GI/\infty$ pour résoudre notre problème de dimensionnement. Rapporté au cas mono-service, on a retrouvé les résultats sur la probabilité d'encombrement dans le modèle de trafic de Fry-Molina à partir de notre modèle.

Un nouveau modèle d'utilisation de ressources a été avancé dans le cinquième chapitre. Dans un système de ressources dites hiérarchiques, les ressources peuvent être classifiées par ordre d'importance. Les états d'utilisation de ressources dans tel système peuvent être modélisés par un nombre p -adique. Ils définissent un espace ultramétrique. Des boules de rayon fini dans l'espace ainsi défini correspondent à des utilisations quelconques de ressources. Les probabilités d'utilisation des ressources dans ce modèle vérifient une équation de diffusion p -adique, une équation différentielle aux dérivées fractionnaires, dont la résolution fait appel à un problème de Cauchy.

Des méthodes de dimensionnement utilisant les fonctions de répartition des utilisations des ressources établies dans ce travail sont proposés avec une certaine qualité de service près en termes de probabilité d'encombrement. Les résultats obtenus sont comparés et validés à partir des simulations de systèmes réels. Ce travail est limité dans le cadre des quantités de ressources déterministes par service mais on peut aussi l'étendre aux cas des quantités aléatoires qu'on rencontre souvent dans les cas réels. Les expressions analytiques des occupations deviennent plus complexes pour le dimensionnement du fait qu'elle doit être fonction des caractéristiques des demandes de ressources pour chacun des services que le système peut offrir. On observe aussi ces complexités des expressions analytiques dans le modèle ultramétrique.

Ces travaux mènent à de nombreuses autres pistes de recherche. En particulier, il serait intéressant d'étudier les propositions suivantes :

- Implémentation des résultats obtenus dans cette recherche dans des outils informatiques utilisés en fonction de son domaine d'application,
- Considération des quantités aléatoires de ressources par service,
- Utilisation de la logique floue pour les caractéristiques d'arrivée des clients, ou les durées de services demandées par les utilisateurs,
- Etude du comportement asymptotique du modèle ultramétrique d'utilisation de ressource.

ANNEXES

ANNEXE A. LE MODELE D'ERLANG ET CELUI DE FRY-MOLINA POUR LE DIMENSIONNEMENT DES RESSOURCES D'UN SERVEUR MONO-SERVICE

A.1 Le modèle d'Erlang

Le modèle d'Erlang [A.01] consiste à un système de n ressources identiques travaillant en parallèle, avec un trafic de pur hasard du premier type (arrivée des clients de type poissonnienne, et durée de service de loi exponentielle). Le nombre de clients qui peuvent demander des services auprès du système est infini. Une sollicitation par un client arrivant est acceptée pour un service si une ressource du système est libre.

En fonction du nombre de ressources n , deux cas peuvent exister :

– nombre infini de ressources $n = \infty$: La distribution du nombre de ressources occupées suit la loi de Poisson ;

– nombre fini de ressources $n < \infty$: La distribution du nombre de ressources occupées suit la loi de Poisson tronquée appelée aussi distribution d'Erlang.

A.1.1 Nombre infini de ressources

Le trafic du modèle d'Erlang est de pur hasard de premier type, les sollicitations arrivent selon un processus de Poisson d'intensité fixe λ . Puisqu'on a un nombre infini de ressources, toute sollicitation arrivant sera alors acceptée. La durée d'une occupation suit une distribution exponentielle de moyenne $1/\mu$.

Le nombre R de ressources occupées simultanément pour un facteur de charge $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ suit une loi de Poisson de paramètre ρ :

$$P(R = k) = \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho} \quad (\text{A.01})$$

Le nombre moyen de ressources occupées est donné par $E(R) = \rho$.

Ce modèle avec un nombre infini de ressources n'est pas aussi intéressant en termes de dimensionnement. On va limiter le nombre de ces ressources pour voir les performances du modèle d'Erlang.

A.1.2 Nombre fini de ressources

On considère le même modèle que celui du trafic de pur hasard du premier type, mais cette fois-ci avec un nombre fini n de ressources.

Le nombre R de ressources occupées simultanément pour une charge ρ suit une loi de Poisson tronquée de paramètre ρ et n . Cette loi de Poisson tronquée est aussi appelée distribution d'Erlang.

$$P(R = k) = \frac{\frac{\rho^k}{k!}}{\sum_{i=0}^n \frac{\rho^i}{i!}} = \frac{\frac{\rho^k}{k!}}{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!}} \quad (\text{A.02})$$

On appelle cette loi « la loi de Poisson tronquée » car on a tronqué à $i = n$ la somme du dénominateur qui devra tendre vers e^ρ à l'infini.

La probabilité de blocage (ici égale à la probabilité d'encombrement) est obtenue lorsque $k = n$:

$$B = \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!}} \quad (\text{A.03})$$

Cette relation (A.02) s'appelle formule d'Erlang B ou Première formule d'Erlang.

A.1.3 Principe de dimensionnement

Le dimensionnement de ressources d'un tel système appelé système à perte se fait généralement dans le but d'avoir la probabilité de blocage la plus faible possible. Sûrement, l'idéale est d'avoir cette probabilité B nulle ; mais ceci implique une infinité de ressources comme le montre l'équation (A.01) et (A.02). On doit alors imposer raisonnablement une valeur admissible de cette probabilité pour pouvoir effectuer le dimensionnement.

Ce dimensionnement consiste à la détermination du nombre n de ressources permettant d'obtenir au plus la probabilité de perte B pour un facteur de charge ρ . Pourtant, il est très difficile de trouver explicitement la valeur de n à partir de la relation (A.03). Seuls des tableaux ou des abaques nous permettent de le déterminer.

Le tableau A.01 suivant montre les différents trafics qu'on peut offrir à un système de n ressources pour obtenir une probabilité de perte de 1%. a indique le trafic moyen offert par ressource.

n	1	2	5	10	20	50	100
$\rho (B = 1\%)$	0,010	0,153	1,361	4,461	12,03	37,90	84,06
$\rho_1 = 1,2.\rho$	0,012	0,183	1,633	5,353	14,44	45,48	100,9
B pour ρ_1	1,198	1,396	1,903	2,575	3,640	5,848	8,077

Tableau A.01. Facteurs de charge d'un système, et ses probabilités de blocage en fonction du nombre de ressources

A partir du tableau A.01, on peut déduire le nombre de ressources nécessaires, et évaluer l'impact d'une variation 20% de la charge sur la probabilité de blocage.

Le tableau A.01 n'est qu'un exemple. Une table plus complète appelée table d'Erlang B permet d'effectuer un tel dimensionnement.

A.2 Le modèle de Fry-Molina

Dans le modèle BCH de Fry-Molina [A.02]–[A.04], une sollicitation de ressources, trouvant toutes les ressources occupées, va continuer sa demande de service pendant l'intervalle de temps pendant lequel elle est supposée servie si elle a été acceptée. Si une ressource est libérée pendant ce temps, le client qui a initié la sollicitation va occuper les ressources pendant les temps restants. Ce modèle est utilisé dans la partie Nord-Américaine puisqu'il a été observé meilleur que le modèle d'Erlang dans la modélisation des trafics réels dans la zone [A.05].

Ce modèle de Fry-Molina est basé sur le processus d'arrivées poissonniennes non tronquées des arrivées, qu'on appelle aussi trafic BPP ou distribution Binomiale, distribution de Poisson et distribution de Pascal.

Si on va noter par $q(i)$ la probabilité des états relatifs $i = 0, 1, 2, \dots$ clients dans le système, la probabilité des états est obtenue après normalisation par :

$$p(i) = \frac{q(i)}{Q(\infty)}, \quad Q(\infty) = \sum_{i=0}^{\infty} q(i) \quad (\text{A.04})$$

Les probabilités d'états pour le modèle BCH de Fry-Molina sont exprimées par :

$$p_m(i) = \begin{cases} p(i), & 0 \leq i < n, \\ \sum_{k=n}^{\infty} p(k), & i = n. \end{cases} \quad (\text{A.05})$$

La probabilité d'encombrement B est obtenue lorsque $i = n$, c'est-à-dire :

$$B = p_m(n) = \sum_{k=n}^{\infty} p(k) = \frac{\sum_{k=n}^{\infty} q(k)}{\sum_{k=0}^{\infty} q(k)} \quad (\text{A.06})$$

On peut aussi démontrer que pour, un trafic de pur hasard du premier type, $q(k)$ est égale à $\frac{\rho^k}{k!}$ et

on retrouve $B = \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k!}}$ qu'on a trouvé à partir de notre modèle dans le Chapitre 4.

ANNEXE B. EXTRAITS DE CODE MATLAB ET MODELES SIMULINK

Le modèle SIMULINK de la figure A.01 suivant est utilisé pour la simulation des utilisations des ressources pour le cas discret et fractionnaire :

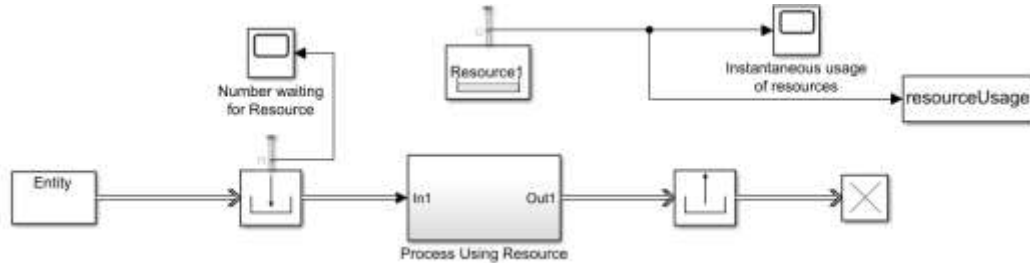


Figure A.01. Modèle SIMULINK d'utilisation de ressources discrètes ou fractionnaires

La fonction MATLAB évaluant distribution de ressources discrètes utilisées à partir de notre modèle analytique :

```
function proba = distrUsedResource(rho, alfa)
    k = [0:1:100];
    r = [0:1:50];
    resultats = zeros(1,51);
    for i = 1:1:51
        resultats(1,i) = sum(((k.^r(i))./(factorial(k))).*((rho*exp(-alfa)).^k) );
    end
    proba = (resultats.*alfa.^r)./(factorial(r)*exp(-rho));
end
```

La fonction MATLAB évaluant distribution de ressources fractionnaires utilisées à partir de notre modèle analytique :

```
function proba = distrUsedResource(rho,mu,sigma2)
    k = [0:1:100];
    r = [0:0.1:30];
    [m n]=size(r);
    resultats = zeros(1,n);
    pik = rho.^k ./ factorial(k) .* exp(-rho);
    for i = 1:1:n
        somme = 0;
        for k = 0:1:100
            somme = somme +
                pik(1,k+1).*cdf('norm',r(i),mu*k,sigma2*sqrt(k),'downer');
        end
        resultats(1,i)=somme;
    end
    proba = resultats;
end
```


Le modèle SIMULINK de la figure A.02 suivant simule les utilisations des ressources pour le cas multi-service.

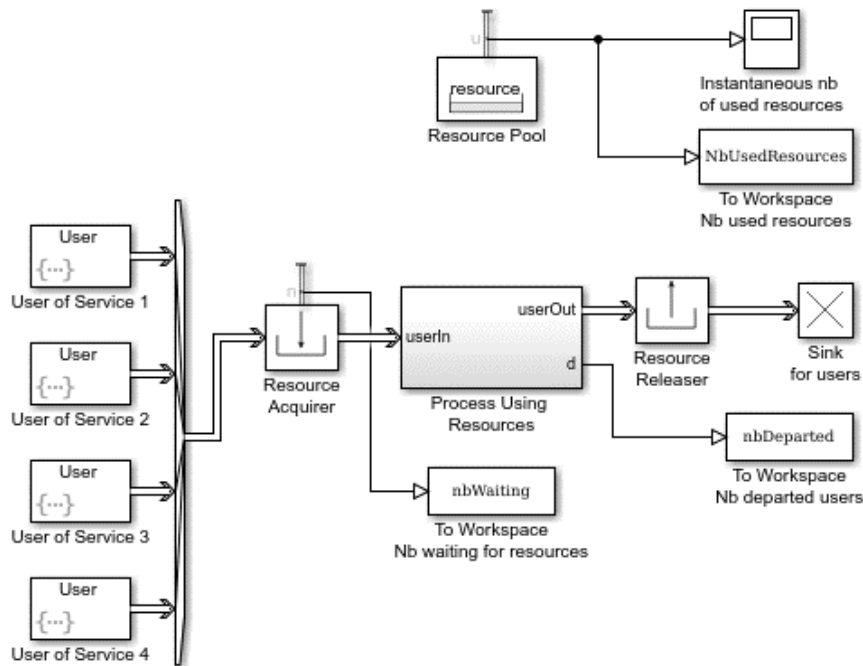


Figure A.02. Modèle SIMULINK d'utilisation de ressources d'un système multiservice

Extrait de codes MATLAB calculant le nombre de ressources utilisées :

```
nbUsedResourcesResampled = resample(NbUsedResources,t,'zoh');
usedResRsmpl = nbUsedResourcesResampled.Data;
[timeResRsmpl,y]=size(usedResRsmpl);
for i = 1:timeResRsmpl
    if usedResRsmpl(i,1)>= capacity
        count = count + 1;
    end
end
pCongestion = count/timeResRsmpl;
disp('Capacity = 11');
fprintf('The percentage of time the capacity is reached : %0.3g \n',
pCongestion);
```

Résultat de la simulation pour une capacité totale de 11 et 17 ressources :

```
>>
Capacity = 11
The percentage of time the capacity is reached : 0.1073
>>
Capacity = 17
The percentage of time the capacity is reached : 0.0166
```

ANNEXE C. GLOSSAIRE

Blocage : (ou encombrement) Etat temporaire d'un système qui ne peut plus servir de clients parce que toutes les ressources du système sont utilisées, ou que les ressources libres du système ne peuvent plus satisfaire les demandes du client.

Client : Flux d'événements arrivant séquentiellement à un système pour réclamer des services. Il dépend du contexte de la définition du système et des services.

Dimensionnement : Détermination du nombre de ressources optimales qu'on doit allouer à un système pour assurer une certaine qualité de service envers les clients qui y réclament des services.

File d'attente : (ou système d'attente) Regroupement de clients attendant de manière organisée quelque chose. Elle résulte d'une demande supérieure à la capacité d'écoulement d'une offre ou d'un service.

Une file d'attente $M/M/1$: Une file d'attente dont l'arrivée forme un processus de Poisson, les distributions des durées de services sont exponentielles et indépendantes, le serveur de la file est unique, la capacité est infinie.

Une file d'attente $M/GI/C$: Une file d'attente dont l'arrivée forme un processus de Poisson, les distributions des durées sont indépendantes et de lois quelconques, le nombre de serveurs est C , la capacité est infinie.

Nombre flou : Nombre quelconque dont on n'est pas certain de la valeur exacte. On définit un degré de certitude des valeurs attribuées à ce nombre.

Nombre p -adique : Nombre obtenu par complétude de l'ensemble des rationnels mais en utilisant une autre distance, valeur absolue moins particulière, appelée valeur absolue p -adique.

Qualité de service : Qualité intrinsèque des services proposées par un système et donc de leur aptitude à satisfaire les besoins exprimés des clients. Dans cet ouvrage, elle est mesurée par la probabilité qu'un client qui demande de service soit immédiatement servi par le serveur.

Ressources : Moyens pécuniaires dont dispose un système pour assurer sa fourniture de service auprès des clients qui en demandent. On peut parler de ressources matérielles, ressources financières et ressources temporelles.

Système mono-service : Système qui offre un seul service aux clients. Les clients qui arrivent à ce système vont demander des ressources nécessaires à l'accomplissement de ce service.

Systeme multi-service : Systeme qui peut offrir de plusieurs types de services au choix aux clients.

Dans cet ouvrage, les ressources nécessaires à la complétude de chaque service sont différentes et indépendantes.

Ultramétrique : Se dit de la propriété de la distance qui vérifie l'inégalité ultratriangulaire ou inégalité triangulaire forte. Nous avons utilisé cet adjectif pour décrire notre modèle utilisant une distance qui vérifie cette propriété ultramétrique.

ANNEXE D. DECRET N°2000-694 du 13 septembre 2000

Décret N°2000-694 du 13 Septembre 2020 portant et régime de l'Habilitation à Diriger des Recherches.

REPOBLIKAN'I MADAGASIKARA
Tanin-dràzana - Fahahana - Fandrosoana

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

DECRET N° 2000-694

portant création et régime de l'Habilitation à Diriger des Recherches

Le Premier Ministre, Chef du Gouvernement

Vu la Constitution,

Vu la loi n° 94-033 du 13 mars 1995 portant orientation générale du système d'éducation et de formation à Madagascar,

Vu l'ordonnance n° 92-030 du 17 juillet 1992 portant création des Universités,

Vu la loi n° 95-023 du 06 septembre 1995 portant statut des enseignants et chercheurs de l'enseignement supérieur,

Vu le décret n° 98- 522 du 23 juillet 1998 portant nomination du Premier Ministre, Chef du Gouvernement,

Vu le décret n° 98-530 du 31 juillet 1998 portant nomination des membres du Gouvernement,

Vu le décret n° 98-795 du 23 septembre 1998 fixant les attributions du Ministre de l'Enseignement Supérieur ainsi que l'organisation générale de son ministère.

Sur proposition du Ministre de l'Enseignement Supérieur,

En Conseil de Gouvernement :

DECRETE :

Article premier . L'Habilitation à Diriger des Recherches (H.D.R.) est un titre national qui sanctionne la reconnaissance par un jury de l'aptitude du candidat à mener une recherche scientifique originale de haut niveau, à encadrer et animer des équipes de recherche.
Le titre permet à son titulaire de postuler le grade de Professeur de l'Enseignement Supérieur.

Article 2 . L' Habilitation à Diriger des Recherches est conférée par les institutions publiques de formation et de recherche dispensant des formations de III^e cycle conformément à la réglementation en vigueur et préparant au Doctorat correspondant à la spécialité choisie par le postulant.

Article 3.- Pour être admis à postuler l'Habilitation à Diriger des Recherches, le candidat doit être titulaire d'un Doctorat ou d'un titre reconnu équivalent par l'autorité compétente en la matière.

Article 4.- L'Habilitation à Diriger des Recherches est conférée au postulant à l'issue de la présentation et soutenance d'un ensemble de travaux devant un jury constitué à cet effet.

Article 5.- En vue de la collation du titre précité, l'ensemble des travaux présentés doivent répondre aux critères ci-après :

- travaux ayant fait l'objet de publication au niveau de revues de notoriété internationale,
- travaux accompagnés d'un document de synthèse destiné à les situer dans leur contexte scientifique et mettant en exergue la cohérence dans la spécialité.

Le nombre minimal de publications exigé ainsi que le nombre de pages requis pour le document de synthèse, sont fixés par la commission de thèse de l'Etablissement auprès duquel le titre est postulé.

Article 6.- Le postulant à l'Habilitation à Diriger des Recherches doit s'inscrire au niveau de l'Etablissement concerné, l'année de la soutenance.

Trois mois au moins avant la date prévue pour la soutenance, le candidat adresse au Chef dudit Etablissement, une demande accompagnée des nombres d'exemplaires requis du texte intégral de l'ensemble des travaux et du document de synthèse.

Ce dossier est dès réception, soumis par le Chef d'Etablissement à la commission de thèse, laquelle se prononce sur l'autorisation de soutenance en établissant un rapport confidentiel versé au dossier universitaire du postulant .

Au vu du rapport favorable de la commission, l'autorisation de soutenance est accordée par le Chef d'Etablissement, qui fixe le délai de remise des exemplaires définitifs de l'ensemble des travaux aux membres du jury.

Article 7.- Le jury de soutenance est nommé par le Chef d'Etablissement, sur demande du candidat et sur proposition de la commission de thèse.

Il comprend au moins cinq membres ayant le grade de Professeur Titulaire ou Professeur. La spécialité de deux d'entre eux au moins doit se rapporter aux travaux du postulant. Les autres membres peuvent être des personnalités extérieures à l'Etablissement, mais de rang professoral ou équivalent.

Les fonctions de Président de jury sont assurées par un Professeur Titulaire ou Professeur, de nationalité malgache.

Deux des membres du jury font office de Rapporteur interne et de Rapporteur externe.

Article 8.- La date et le lieu de soutenance doivent être publiés et affichés par les soins de l'Etablissement, au moins un semaine avant la date prévue.

La soutenance est publique et doit se tenir dans les locaux de l'Université d'inscription.

Article 9.- Le titre conféré à l'impétrant porte les mentions suivantes :le sceau de l'institution auprès de laquelle l'intéressé le postule
l'indication « Docteur Habilité à Diriger des Recherches »
le titre des travaux.

Article 10.- Le rapport de soutenance établi sous la responsabilité du Président de jury est revêtu de la signature de chacun des membres .Ce rapport confidentiel est versé au dossier universitaire de l'impétrant.

Article 11.- A l'issue de la soutenance, l'ensemble des travaux présentés, comportant éventuellement les amendements et corrections apportés par le jury , fait l'objet d'un dépôt accompagné d'un résumé en trois versions, malgache, française et anglaise.
Le nombre d'exemplaires requis pour le dépôt et les organismes destinataires sont fixés par l'Etablissement.

Article 12.- En application des dispositions des articles 26 et 29 de la loi n° 95-023 du 06 septembre 1995 portant statut des Enseignants et Chercheurs de l'Enseignement Supérieur, l'évaluation des titres et travaux présentés par les postulants au grade de Professeur, est sanctionnée par la délivrance du titre « Habilitation à Diriger des Recherches » (H.D.R.), dans les conditions prévues par le présent décret.

Article 13.- A titre transitoire, les candidats inscrits en vue de l'obtention du Doctorat d'Etat, à la date de publication du présent décret, ont le choix entre :

- poursuivre la préparation de leurs travaux et les soutenir dans les conditions prévues par les textes antérieurement en vigueur, et ce dans un délai n'excédant pas cinq ans à compter de la publication du présent décret ,
- transformer leur inscription initiale en vue de la préparation de l'Habilitation à Diriger des Recherches, et ce dans les conditions prévues par le présent décret.

Article 14.- Toutes dispositions contraires au présent décret sont et demeurent abrogées.

Article 15.- Le Vice-Premier Ministre chargé du Budget et du Développement des Provinces Autonomes, le Ministre des Finances et de l'Economie, le Ministre de la Fonction Publique, du Travail et des Lois Sociales, le Ministre de l'Enseignement Supérieur, sont chargés chacun en ce qui les concerne, de l'exécution du présent décret qui sera publié au Journal Officiel de la République

Fait à Antananarivo, le 13 SEP 2000

Par le Premier Ministre,
Chef du Gouvernement,

Tantely ANDRIANARIVO

Le Vice-Premier Ministre chargé du Budget
et du développement des Provinces Autonomes

Le Ministre des Finances et de l'Economie

Pierrot RAJAONARIVELO

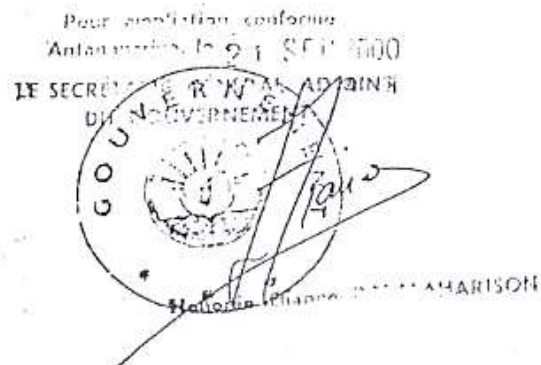
Tantely ANDRIANARIVO

Le Ministre du Travail, de la Fonction Publique
et des Lois Sociales

Le Ministre de l'Enseignement Supérieur

Alice RAZAFINAKANGA
RASOAMANJARIMALALA

Joseph SYDSON



ANNEXE E. DECRET N°2020-1195 du 23 septembre 2020

Décret N°2020-1195 du 23 septembre 2020 modifiant et complétant certaines dispositions du Décret N°2000-694 du 13 Septembre 2000 portant création et régime de l'Habilitation à Diriger des Recherches.



MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

DECRET N°2020-1195

Modifiant et complétant certaines dispositions du Décret N° 2000-694 du 13 septembre 2000 portant création et régime de l'Habilitation à Diriger des Recherches.

LE PREMIER MINISTRE CHEF DU GOUVERNEMENT,

- Vu la Constitution ;
- Vu la Loi Organique N°2004-004 du 26 juillet 2004 modifiée par la Loi N°2008-011 du 17 juillet 2008 portant orientation générale du système d'éducation, d'enseignement et de formation à Madagascar ;
- Vu la Loi N°95-023 du 06 septembre 1995 modifiée et complétée par la Loi N°2003-008 du 5 septembre 2003 portant Statuts des Enseignants et Chercheurs de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche ;
- Vu l'Ordonnance N°92-030 du 17 juillet 1992 portant création des Universités ;
- Vu le Décret N°2000-693 du 09 septembre 2000 portant organisation de la formation de troisième cycle ;
- Vu le Décret N°2000-694 du 13 septembre 2000 portant création et régime de l'Habilitation à Diriger des Recherches ;
- Vu le Décret N°2002-565 du 04 juillet 2002, modifié par les décrets N°2010-129 du 11 mars 2010, N°2012-688 du 10 juillet 2012 et N°2015-1510 du 09 novembre 2015, fixant l'organisation et le fonctionnement des Universités et des Établissements d'Enseignement Supérieur ;
- Vu le Décret N°2019-073 du 06 février 2019 fixant les attributions du Ministre de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique ainsi que l'organisation générale de son Ministère ;
- Vu le Décret N°2019-1407 du 19 juillet 2019 portant nomination du Premier Ministre, Chef du Gouvernement ;
- Vu le Décret N°2020-070 du 29 janvier 2020 modifié et complété par les Décrets N°2020-597 du 04 juin 2020 et N°2020-997 du 20 août 2020 portant nomination des membres du Gouvernement ;

Sur proposition du Ministre de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique,
En Conseil du Gouvernement,

DECRETE :

Article premier. - Les dispositions du Décret N° 2000-694 du 13 septembre 2000 portant création et régime de l'Habilitation à Diriger des Recherches sont modifiées et complétées comme suit :

Article premier (nouveau) : Dans tout le texte du décret n°2000-694 du 13 septembre 2000 portant création et régime de l'Habilitation à Diriger des Recherches le terme « Titre » ou « titre national » est remplacé par « Diplôme » ou « Diplôme National ».

Article 2 (nouveau) : L'Habilitation à Diriger des Recherches est exclusivement conférée par les Ecoles Doctorales Thématiques de Madagascar relevant des Etablissements Publics d'Enseignement Supérieur de Madagascar.

Article 3 (nouveau) : Pour être admis à postuler à l'Habilitation à Diriger des Recherches, le candidat doit être titulaire du doctorat ou d'un diplôme jugé équivalent, depuis au moins trois ans, à l'exception des doctorats d'exercice (pharmacie, médecines humaine et vétérinaire).

Le Diplôme d'HDR permet à son titulaire d'être candidat à l'accès au corps des Professeurs de l'Enseignement Supérieur ou de Directeur de Recherche Associé moyennant son appartenance au corps des Maîtres de Conférences ou des Maîtres de Recherches pendant une durée minimum de 3 ans.

Article 5 (nouveau) : En vue de la collation du diplôme précité, l'ensemble des travaux présentés doit répondre aux critères ci-après :

- Travaux ayant fait l'objet de dix (10) publications d'articles sur des supports à comité de lecture dont deux au moins de niveau international en qualité de premier ou de second auteur et 8 autres : actes de rencontres scientifiques, ouvrages avec ISSN ou ISBN, revues de notoriété internationale indexées

dans les bases de données scientifiques (papier et/ou électronique), etc. ou travaux ayant fait l'objet de publication dans des ouvrages individuels avec ISBN ou ISSN ;

- Un document de synthèse permettant de faire apparaître l'expérience du candidat dans l'animation et la direction d'une recherche (encadrement ou co-encadrement de Master de recherche ou indifférencié ou de Doctorat), le parcours et les travaux académiques de l'impétrant, destiné à les situer dans leur contexte scientifique et mettant en exergue la cohérence dans la spécialité.

Article 6 (nouveau) : Le postulant à l'Habilitation à Diriger des Recherches doit avoir effectué une inscription auprès d'une même Ecole Doctorale Thématique de Madagascar de sa spécialité, avec, s'il le souhaite, l'appui d'un Enseignant-Chercheur ou d'un Chercheur-Enseignant de rang magistral (Docteur HDR, Maître de Conférences HDR, Maître de Recherches HDR, Professeur d'Enseignement Supérieur, Professeur d'Enseignement Supérieur Honoraire, Directeur de Recherche, Directeur de Recherche Associé, Professeur Titulaire, Professeur Titulaire Honoraire, Professeur Emérite) qui bénéficiera d'une indemnité équivalente à 150 heures d'encadrement.

Les demandes peuvent être déposées à tout moment de l'année et sont examinées au cours de 3 sessions réparties dans l'année. L'autorisation accordée implique obligatoirement une présentation de l'HDR durant l'année universitaire d'inscription, à défaut, une nouvelle demande devra être formulée.

Article 7 (nouveau) : Trois (03) mois au moins avant la date prévue pour la soutenance, le candidat adresse au Directeur de l'Ecole Doctorale Thématique de Madagascar, une demande cautionnée par son Garant scientifique et accompagnée du nombre des exemplaires requis du texte intégral de l'ensemble des travaux et du document de synthèse. Cette demande est accompagnée d'un procès-verbal de la Commission de spécialistes qui est composée par les Enseignants-Chercheurs ou Chercheurs-Enseignants de rang magistral exerçant au sein ou à l'extérieur des Equipes d'Accueil Doctoral (EAD) de l'Ecole Doctorale Thématique de Madagascar concernée.

Ce dossier est soumis dès réception par le Directeur de l'Ecole Doctorale Thématique de Madagascar à la commission de spécialistes qui désigne un (01) rapporteur interne et un (01) autre externe sur proposition du Garant scientifique de l'HDR et se prononce sur la soutenabilité.

Article 8 (nouveau) :

Le jury de soutenance est nommé par le Directeur de l'Ecole Doctorale Thématique de Madagascar sur proposition du Garant scientifique d'HDR, laquelle est validée par la commission de spécialistes.

Il comprend au moins cinq membres d'Enseignant-Chercheur ou de Chercheur-Enseignant de rang magistral. La spécialité de trois d'entre eux au moins, y compris le Garant scientifique, doit se rapporter aux travaux du postulant.

Les autres membres peuvent être des personnalités extérieures à l'établissement, mais de rang magistral ou équivalent.

Les fonctions de président de jury sont assurées par un Enseignant-chercheur ou Chercheur-Enseignant de rang magistral de nationalité Malagasy.

Les deux rapporteurs stipulés dans l'article 7 sont membres d'office du jury.

La date et le lieu de la soutenance doivent être publiés par les soins de l'EDTM au moins 10 jours avant la date prévue. La soutenance est publique et doit se tenir dans les locaux de l'institution support de l'EDTM, sauf en cas de force majeure sous réserve de l'accord de l'institution support.

Article 9 (nouveau) : Le diplôme conféré à l'impétrant porte les mentions suivantes :

- Le sceau de l'Ecole Doctorale Thématique de Madagascar et celui de l'institution support de l'EDTM ;
- L'indication « Diplôme d'Habilitation à Diriger des Recherches » ;
- La spécialité ;
- Les signatures du postulant, du Directeur de l'Ecole Doctorale Thématique de Madagascar et du Chef de l'institution support (Président de l'Université).

Article 11 (nouveau) : A l'issue de la soutenance, l'ensemble des travaux présentés, comportant éventuellement des amendements et des corrections apportés par les membres du jury, fait l'objet d'un dépôt accompagné d'un résumé en trois versions française et anglaise et malgache dans la mesure du possible.

Le nombre d'exemplaires requis pour le dépôt des organismes destinataires sont fixés par l'Ecole Doctorale Thématique de Madagascar d'inscription.

Article 12 : ajouter au paragraphe ainsi rédigé :

« et des Chercheurs Enseignants,..... ».

Article 13 (nouveau) : A titre transitoire, les dossiers de demande de soutenance d'HDR déjà déposés auprès de chaque Etablissement ou Ecole Doctorale avant la promulgation du présent décret ne sont pas concernés par le délai de dépôt de demande stipulé dans l'article 7 nouveau dans le présent texte.

Article 2 : Toutes dispositions antérieures, contraires au présent décret sont et demeurent abrogées.

Article 3.- Le Ministre de l'Economie et des Finances, Le Ministre des Affaires Étrangères, Le Ministre du Travail, de l'Emploi, de la Fonction Publique et des Lois Sociales, Le Ministre de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique, sont chargés, chacun en ce qui le concerne, de l'exécution du présent décret qui sera publié au Journal Officiel de la République de Madagascar.

Antananarivo, le 23 septembre 2020

Par Le Premier Ministre, Chef du Gouvernement.

NTSAY Christian

Le Ministre de l'Economie et des Finances

Le Ministre des Affaires Etrangères

RANDRIAMANDRATO Richard

Dr. TEHINDRAZANARIVELO Djacoba Oliva

Le Ministre de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

Le Ministre Travail, de l'Emploi,
de la Fonction Publique et des Lois Sociales

Pr. ASSOUMACOU Elia Béatrice

Gisèle RANAMPY

« Pour ampliation conforme »

Antananarivo, le 30 OCT. 2020

LE SECRETAIRE GENERAL DU GOUVERNEMENT



RAZANADRINIARISON Rondro Lucette

ANNEXE F. ARRETE N° 2020-8.424/2020-MESupReS du 27 novembre 2020

Arrêté N° 2020-8.424/2020-MESupReS du 27 novembre 2020 fixant les modalités d'application du Décret n°2020-1195 du 23 Septembre 2020 modifiant et complétant certaines dispositions du Décret n°2000-694 du 13 Septembre 2000 portant création et régime de l'Habilitation à Diriger des Recherches.



MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ARRETE N° 28.424 /2020-MESupReS
Fixant les modalités d'application du Décret n°2020-1195 du 23 Septembre 2020 modifiant et complétant certaines dispositions du Décret n°2000-694 du 13 Septembre 2000 portant création et régime de l'Habilitation à Diriger des Recherches.

LE MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE,

Vu la Constitution;

Vu la Loi Organique N° 2004-004 du 26 juillet 2004 modifiée par la Loi N° 2008-011 du 17 juillet 2008 portant orientation générale du système d'éducation, d'enseignement et de formation à Madagascar;

Vu la Loi N° 95-023 du 06 septembre 1995 modifiée et complétée par la Loi N° 2003-008 du 5 septembre 2003 portant Statuts des Enseignants et Chercheurs de l'Enseignement Supérieur ;

Vu l'Ordonnance N° 92-030 du 17 juillet 1992 portant création des Universités ;

Vu le Décret N° 2000-693 du 09 septembre 2000 portant organisation de la formation de troisième cycle ;

Vu le Décret N° 2000-694 du 13 septembre 2000 portant création et régime de l'Habilitation à Diriger des Recherches ;

Vu le Décret N°2002-565 du 04 juillet 2002 modifié et complété par les Décrets n°2010-129 du 11 mars 2010, N° 2012-688 du 10 juillet 2012 et N° 2015-1510 du 09 novembre 2015 fixant l'organisation et le fonctionnement des Universités et des Établissements d'Enseignement Supérieur ;

Vu le Décret N° 2019-073 du 06 février 2019 fixant les attributions du Ministre de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique ainsi que l'organisation générale de son Ministère ;

Vu le Décret N° 2019-1407 du 19 juillet 2019 portant nomination du Premier Ministre, Chef du Gouvernement ;

Vu le Décret n°2020-070 du 29 janvier 2020 modifié et complété par les Décrets n°2020-597 du 04 juin 2020 et n°2020-997 du 20 août 2020 portant nomination des Membres du Gouvernement ;

Vu le Décret n°2020-1195 du 23 Septembre 2020 modifiant et complétant certaines dispositions du Décret n°2000-694 du 13 Septembre 2000 portant création et régime de l'Habilitation à Diriger des Recherches;

ARRETE :

Article premier : Le présent arrêté fixe les modalités d'application du Décret n°2020-1195 du 23 Septembre 2020 modifiant et complétant certaines dispositions du Décret n°2000-694 du 13 Septembre 2000 portant création et régime de l'Habilitation à Diriger des Recherches (HDR).

Article 2. En application des dispositions du décret visé à l'article premier du présent arrêté, et notamment des articles 7 et 8 du décret suscité, il appartient à chaque Ecole Doctorale Thématique de Madagascar (EDTM) relevant d'un établissement d'enseignement supérieur public d'instituer en son sein, une Commission de Spécialistes.

L'EDTM de spécialité de l'impétrant est l'EDTM où il a préparé son HDR et où il devra exercer le professorat.

Article 3 : L'Enseignant Chercheur ou le Chercheur Enseignant de rang magistral qui appuie le postulant cité dans l'article 6 du décret est considéré comme son encadreur.

Le Garant scientifique mentionné dans les articles 7 et 8 est un Enseignant Chercheur ou un Chercheur Enseignant de rang magistral ayant une expertise dans la spécialité du postulant et connaissant son parcours et ses travaux. Si le postulant opte pour l'existence d'un encadreur, ce dernier est le Garant scientifique.

L'Encadreur et le Garant scientifique ne peuvent assumer les fonctions de Rapporteur ou de Président dans le jury.

En cas d'insuffisance de spécialistes, le candidat est autorisé de faire appel à des compétences extérieures à l'Institution. Il appartient au Garant scientifique de l'HDR d'organiser la tenue de la réunion de la commission de spécialistes.

Le dossier est, dès réception, soumis par le Directeur de l'Ecole Doctorale Thématique de Madagascar à l'appréciation de la commission des spécialistes qui est composée par les Enseignants-Chercheurs ou Chercheurs-Enseignants de rang magistral exerçant au sein ou à l'extérieur des Equipes d'Accueil Doctorales (EAD) de l'Ecole Doctorale Thématique de Madagascar concernée ; ladite Commission désigne un (01) rapporteur interne et un (01) autre externe sur proposition du Garant scientifique de l'HDR et se prononce sur la soutenabilité.

Le jury de soutenance est nommé, sur proposition des membres de la commission de spécialistes par le Directeur de l'Ecole Doctorale Thématique relevant des Etablissements Publics d'Enseignement Supérieur de Madagascar sur proposition du Garant scientifique d'HDR,

Le Jury comprend au moins cinq (05) membres dont la spécialité de trois (03) d'entre eux au moins, y compris le Garant scientifique, doit se rapporter aux travaux du postulant.

Article 4 : Le document de synthèse comprend, à titre indicatif, 50 à 100 pages.

Article 5 : La Commission de Spécialistes est composée de 5 ou 7 membres de rang magistral. Toutefois, il peut être fait appel à une personne qualifiée ayant une compétence et une expérience reconnue dans le domaine, ne remplissant pas le critère de grade.

Ladite commission, présidée par le Directeur de l'EDTM, est habilitée à se prononcer sur l'éligibilité conformément aux dispositions de l'article 5 du décret n 2020-1195 du 23 Septembre 2020 par un procès-verbal.

Au cas où des ouvrages figureraient dans la liste des publications du postulant : un ouvrage scientifique individuel équivaut à trois articles, un ouvrage scientifique en co-auteur équivaut à deux articles et un chapitre d'ouvrage scientifique à auteurs multiples ou un ouvrage collectif équivaut à un article.

La Commission de Spécialistes garantit la qualité scientifique du dossier en le confiant à un rapporteur interne et à un rapporteur externe à l'EDTM.

Article 6 : Les rapports d'expertise par l'intermédiaire du Directeur de l'EDTM, doivent parvenir à la commission de spécialistes dans un délai de deux (2) mois au maximum, autrement, cette dernière proc dera à un changement de rapporteur(s). Le postulant après avoir tenu compte des recommandations des rapporteurs qui lui sont transmises, doit remettre l'exemplaire corrigé au Directeur de l'EDTM.

En cas de rapports divergents des deux rapporteurs, la commission de spécialistes fera appel à un troisième rapporteur.

Article 7 : La version à présenter doit être remise aux membres du jury au moins un (1) mois avant la date fixée pour la soutenance. L'ensemble de la procédure, de l'inscription à la soutenance, doit normalement se dérouler en quatre (4) mois au maximum.

Article 8 : Toutes dispositions antérieures contraires à celles du présent arrêté notamment celles de l'Arrêté N° 166/2004 du 05 janvier 2004 et de l'Arrêté N° 15774-2006-MENRS du 08 septembre 2006 fixant les modalités d'application du Décret n°2000-694 du 13 Septembre 2000 portant création et régime de l'Habilitation à Diriger des Recherches sont et demeurent abrogées.

Article 9 : Le présent arrêté sera enregistré, publié et communiqué partout où besoin sera.

Antananarivo, le 27 NOV 2020



par délégation
Pr. ASSOUMACOU Elia Béatrice
*Ministre de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique*

ANNEXE G : CURRICULUM VITAE

Etat civil

Nom : RAVALIMINOARIMALALASON

Prénoms : Toky Basilide

Date et lieu de naissance : 15 Septembre 1989 à Namontana

Sexe : Masculin

Adresse : Lot FVF 7 B Firavahana Fenoarivo

Antananarivo 102

Madagascar

Nationalité : Malagasy

Téléphone, Whatsapp : +261 34 00 164 33

Mail : tokybaz@gmail.com



Formations et diplômes obtenus

Formations académiques

2016 : Docteur de l'Université d'Antananarivo, Spécialité : Sciences Cognitives – Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation

2012 : Diplôme d'Etude Approfondie en Télécommunication – Ecole Supérieure Polytechnique d'Antananarivo

2011 : Diplôme d'Ingénieur en Télécommunication, Option : Service des télécommunications, de l'informatique et du multimédia – Ecole Supérieure Polytechnique d'Antananarivo

2006 – 2010 : Formation en Télécommunication au sein de l'Ecole Supérieure Polytechnique d'Antananarivo

2005 : Porteur du symbole malagasy à l'International Junior Science Olympiad - Deuxième Olympiade Internationale des Jeunes Scientifiques – Indonésie

2005 : Baccalauréat – Série C

2002 – 2005 : Etudes en enseignement secondaire - Lycée Moderne Ampefiloha

1998 – 2002 : Etudes en enseignement secondaire - Collège d'Enseignement Général Fenoarivo

1993 – 1998 : Etudes en enseignement primaire - Ecole Primaire Public Fenoarivo

Formations professionnelles

2013 – 2014 : Formation sur les réseaux mobiles 2G-3G-4G avec Ericsson et Huawei :

- GSM BSS overview
- GSM BSS Radio network dimensioning
- WCDMA BSS overview
- WCDMA BSS Radio network dimensioning
- LTE Radio network design

Autres compétences

- Compétences en Télécommunications, Réseaux mobiles et Réseaux cellulaires, Multimédias, Mathématiques supérieures
- Langues : Français, Anglais
- Informatiques :
 - o Bureautiques : Word, Excel, Publisher, Powerpoint, Photoshop, Animate, ...
 - o Programmations : C, C++, C#, Java, VBA Excel, Windev, Python, Android, ...
 - o Outil de modélisation : Matlab, Opnet
 - o Exploitation : Windows, Linux, Android
 - o Base de données : MySQL, BusinessObject, Oracle, Système d'informations
- Gestion de Projet

Parcours professionnels

2012 – 2022 : Enseignant-Chercheur vacataire au sein de la Mention Télécommunication de l'Ecole Supérieure Polytechnique d'Antananarivo, et au sein de l'Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation – Université d'Antananarivo. Encadrement de mémoires de licence, master. Co-encadrement de thèses de doctorat.

2017 – 2022 : Concepteur de cours de la Mention Télécommunications du Centre National de Télé-Enseignement de Madagascar.

2018 – 2022 : Responsable Radio planning et Innovation du Groupe Telma : Responsable du dimensionnement, de la gestion et de l'optimisation des ressources radios des technologies radio mobiles 2G-3G-4G-5G. Anticipation des besoins en termes de nouvelles technologies. Conception et réalisation d'outils de travail.

2011 – 2017 : Ingénieur Radio planning et Optimisation sénior du Groupe Telma : Optimisation des ressources radios des technologies 2G-3G-4G pour atteindre les critères de qualités de service QoS et QoE. Collecte des indicateurs de performances afin d’optimiser le réseau.

2009 – 2011 : Stage professionnel au sein du Groupe Telma en tant que Stagiaire radio.

2009 : Fondateur du Groupe des Etudiants en Télécommunication. Responsable pédagogique du Groupe des Etudiants en Télécommunication.

2009 : Stage au sein de la station émettrice de la Radio Madagasikara – Benasandratra Fenoarivo

BIBLIOGRAPHIE

- [3.01] E. Daru, «*Méthodes de résolution pour quelques problèmes de files d'attente comportant des serveurs d'efficacités différentes,*» Revue de la Recherche Opérationnelle, vol. 2, n°8, 1958.
- [3.02] L. Green, «*A queueing system in which customers require a random number of servers,*» Operations Research, vol. 28, n°6, pp. 1335-1346, Novembre 1980.
- [3.03] E. Romm, V. Skitovich, «*On certain generalization of problem of Erlang,*» Automation and Remote Control, vol. 32, n°6, pp. 1000-1003, 1971.
- [3.04] S. Yashkov, «*Processor-sharing queues: some progress in analysis,*» Queueing Systems, vol. 2, pp. 1-17, 1987.
- [3.05] O. Tikhonenko, «*Generalized Erlang problem for service systems with finite total capacity,*» Problems of Information Transmission, vol. 41, pp. 243-253, 2005.
- [3.06] O. Tikhonenko, «*Restricted Capacity Queueing Systems: Determination of their Characteristics,*» Automation and Remote Control, vol. 58, n°6, pp. 969-973, 1997.
- [3.07] O. Tikhonenko, «*Queueing system with processor sharing and limited resources,*» Automation and Remote Control, vol. 75, n°5, pp. 803-815, 2010.
- [3.08] E. Sopin, O. Vikhrova, «*Probability Characteristics Evaluation in Queueing System with Random Requirements,*» CEUR Workshop Proceedings, vol. 1995, pp. 85-92, 2017.
- [3.09] E. Lisovskaya, S. Moiseeva, M. Pagano, «*On the total customers' capacity in multi-server queues,*» International Conference on Information Technologies and Mathematical Modelling, pp. 56-67, 2017.
- [3.10] E. Lisovskaya, E. Pankratova, S. Moiseeva, M. Pagano, «*Analysis of a Resource-Based Queue with the Parallel Service and Renewal Arrivals,*» Distributed Computer and Communication Networks, Springer, Cham., pp. 335-349, 2020.
- [3.11] O. Vikhrova, «*About Probability Characteristics Evaluation in Queueing System with Limited Resources and Random Requirement,*» Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science, vol. 25, n°3, pp. 209-216, 2017.
- [3.12] O. Tikhonenko, K. Klimovich, «*Analysis of queueing systems for random-length arrivals with limited cumulative volume,*» Problems of Information Transmission, vol. 37, n°1, pp. 77-79, 2001.

- [3.13] O. Tikhonenko, «*Determination of Loss Characteristics in Queueing Systems with Demands of Random Space Requirement,*» Queueing Theory and Applications, vol. 564, pp. 209-215, 2015.
- [3.14] V. Naumov, K. Samouylov, «*Analysis of multi-resource loss system with state dependent arrival and service rates,*» Probability in the Engineering and Informational Sciences, vol. 31, n°4, pp. 413-419, 2017.
- [3.15] G. Fletcher, H. Perros, W. Stewart, «*A queueing system where customers require a random number of servers simultaneously,*» Computer Science Department, Center for Communications and Signal Processing, North Carolina State University, Raleigh, NC 27695-8206, U.S.A., 2011.
- [3.16] V. Naumov, K. Samuilov, A. Samuilov, «*On the total amount of resources occupied by serviced customers,*» Automation and Remote Control, vol. 77, n°8, pp. 1419-1427, 2016.
- [3.17] T. Ravaliminoarimalalason; F. Randimbindrainibe, «*Queues applied to Telecoms,*» (in press) Edition WILEY-ISTE, 2023.
- [3.18] V. Vishnevski, A. Dudin, «*Queueing systems with correlated arrival flows and their applications to modeling telecommunication networks,*» Automation and Remote Control, vol. 78, pp. 1361-1403, 2017.
- [3.19] L. Massoulie, J. Roberts, «*Bandwidth sharing and admission control for elastic traffic,*» Telecommunication systems, vol. 15, n°1, pp. 185-201, 2000.
- [3.20] N. Krishnan, R. Yates, N. Mandayam, J. Panchal, «*Bandwidth sharing for relaying in cellular systems,*» IEEE Transactions on Wireless Communications, vol. 11, n°1, pp. 117-129, 2011.
- [3.21] Y. Ye, D. Wu, Z. Shu, Y. Qian, «*Overview of LTE spectrum sharing technologies,*» IEEE Access, vol. 4, pp. 8105-8115, 2016.
- [3.22] J. Zhang, S. Chen, X. Guo, J. Shi, L. Hanzo, «*Boosting fronthaul capacity: Global optimization of power sharing for centralized radio access network,*» IEEE Transactions on Vehicular Technology, vol. 68, n°2, pp. 1916-1929, 2019.
- [3.23] C. Yang, J. Li, M. Guizani, A. Anpalagan, M. Elkashlan, «*Advanced spectrum sharing in 5G cognitive heterogeneous networks,*» IEEE Wireless Communications, vol. 23, n°2, pp. 94-101, 2016.

- [3.24] M. Rakotomalala, T. Ravaliminoarimalalason, «*Asynchronous Learning Model in an ODL*,» International Journal of Engineering Research & Technology, vol. 7, n°8, pp. 174-179, 2018.
- [3.25] M. Rakotomalala, T. Ravaliminoarimalalason, «*Modélisation de l'apprentissage asynchrone*,» Edition EUE, ISBN 978-620-3-41267-2, 2021.
- [3.26] M. Rakotomalala, T. Ravaliminoarimalalason, «*Models for measuring latent variables in asynchronous learning*,» International Journal of Engineering Research & Technology, vol. 7, n°4, pp. 146-150, 2018.
- [3.27] M. Rakotomalala, T. Ravaliminoarimalalason, «*Utilisation d'un modèle d'apprentissage asynchrone dans une formation en ligne*,» Actes des journées de recherche des trois IST de Madagascar, La revue des ISTs de Madagascar, Article 19, pp. 121-126, 2019.
- [3.28] M. Rakotomalala, T. Ravaliminoarimalalason, «*Analyse de l'apprentissage d'un module d'initiation dans une formation ouverte et à distance*,» Mada-ETI, vol. 1, pp. 18-31, 2018.
- [3.29] M. Rakotomalala, T. Ravaliminoarimalalason, «*Modèles de mesure de variables latentes dans un apprentissage asynchrone*,» Mada-ETI, vol. 1, pp. 32-40, 2018.
- [3.30] T. B. Ravaliminoarimalalason, F. Randimbendrainibe, «*Distribution of Occupied Resources on A Discrete Resources Sharing in A Queueing System*,» International Journal of Engineering Research and Technology, vol. 10, n°1, pp. 638-643, 2021.
- [3.31] T. Ravaliminoarimalalason, F. Randimbendrainibe, «*Distribution of occupied resources by fuzzy customers in a shared-resource system*,» International Journal of Advance Research and Innovative Ideas in Education, vol. 8, n°6, pp 634-640, 2022.
- [3.32] T. Ravaliminoarimalalason, M. Rakotomalala, F. Randimbendrainibe, «*La théorie des files d'attente*,» Edition EUE, ISBN 978-620-3-41305-2, 2021.
- [3.33] L.A. Zadeh, «*The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning*, » Part 3, Inform. Sci., vol. 9, pp. 43-64, 1975.
- [3.34] R.J. Lie, E.S. Lee, «*Analysis of Fuzzy Queues*,» Computers and Mathematics with Applications, vol. 17, n°7, pp. 1143-1147, 1989.
- [3.35] S. Asmussen, «*Applied probability and queues*,» New York: Springer-Verlag, 2003.
- [3.36] D. Gaver, P. Jacobs, G. Latouche, «*Finite birth-and-death models in randomly changing environments*,» Advanced in Applied Probabability, vol. 16, pp. 715-731, 1984.

- [4.01] E. Brockmeyer, H. Halstrom, A. Jensen, A. Erlang, «*The life and works of A.K. Erlang,*» Copenhagen Telephone Co, 1948.
- [4.02] A. Erlang, «*Løsning af nogle Problemer fra Sandsynlighedsregningen af Betydning for de automatiske Telefoncentraler (Solution of some Problems in the Theory of Probabilities of Significance in Automatic Telephone Exchanges),*» *Elektrotekniker*, vol. 13, pp. 5-13, 1917.
- [4.03] C. Palm, «*Table of the Erlang Loss Formula,*» Stockholm: Telefonaktiebolaget LM Ericsson, 1947.
- [4.04] E. Vaultot, J. Chaveau, «*Extension de la formule d'Erlang au Cas où le Trafic est Fonction du Nombre d'Abonnés Occupés,*» *Annales de Télécommunications*, vol. 4, n°8, pp. 319-324, 1949.
- [4.05] L. A. Joys, «*Comments on the Engset and Erlang Formulae for Telephone Traffic Losses,*» Thesis. Report TF No. 25/71, Research Establishment, The Norwegian Telecommunications Administration, 1971.
- [4.06] V. B. Iversen, «*The A-formula,*» *Teleteknik*, vol. 23, n°2, pp. 64-79, 1980.
- [4.07] V. B. Iversen, «*The exact evaluation of multi-service loss system with access control,*» *Teleteknik*, vol. 31, n°2, pp. 56-61, 1987.
- [4.08] S. Hanczewski, M. Stasiak, J. Weissenberg, «*A queueing model of a multi-service system with state-dependent distribution of resources for each class of calls,*» *IEICE Transactions on Communications*, Vol. E97-B, n°8, pp. 1591-1605, 2004.
- [4.09] S. Hanczewski, M. Stasiak, J. Weissenberg, «*The queueing model of a multiservice system with dynamic resource sharing for each class of calls,*» *Computer and Information Science*, vol. 370, pp. 436-445, 2013.
- [4.10] S. Hanczewski, D. Kmieciak, M. Stasiak, J. Weissenberg, «*Multi-service queueing system with elastic traffic,*» *Proceedings of IEICE General Conference*, BS-3-18, 2016.
- [4.11] S. Hanczewski, M. Stasiak, J. Weissenberg, «*Queueing model of a multi-service system with elastic and adaptive traffic,*» *Computer Networks*, vol. 147, pp. 146-161, 2018.
- [4.12] T. Bonald, A. Proutière, J. Virtamo, «*A queueing analysis of max-min fairness, proportional fairness and balanced fairness,*» *Queueing Systems*, vol. 53, pp. 65-84, 2006.

- [4.13] J. P. Haddad, R. R. Mazumdar, «*Congestion in large balanced multirate networks,*» *Queueing Systems*, vol. 74, n°2, pp. 333-368, 2013.
- [4.14] S. Hanczewski, A. Kaliszan, M. Stasiak, «*Convolution Model of a Queueing System with the cFIFO Service Discipline,*» Hindawi Publishing Corporation, *Mobile Information Systems*, Article ID 2185714, pp. 1-15, 2016.
- [4.15] R. Sudhesh, A. Azhagappan, «*Analysis of an M/M/c queue with heterogeneous servers, balking and reneging,*» *International Journal of Operational Research*, vol. 36, n°3, pp. 293-309, 2019.
- [4.16] D. Arivudainambi, M. Gowsalya, «*A single server non-Markovian retrial queue with two types of service and Bernoulli vacation,*» *International Journal of Operational Research*, vol. 33, n°1, pp. 55-81, 2018.
- [4.17] P. Kalita, G. Choudhury, «*Analysis of batch arrival single server queue with random vacation policy and two types of general heterogeneous repeated service,*» *International Journal of Operational Research*, vol. 42, n°2, pp. 131-162, 2021.
- [4.18] S. Pradhan, U. C. Gupta, «*Stationary distribution of an infinite-buffer batch-arrival and batch-service queue with random serving capacity and batch-size-dependent service,*» *Int. J. of Operational Research*, vol. 40, n°1, pp. 1-31, 2020.
- [4.19] M. DeMuynck, H. Bruneel, S. Wittevrongel, «*Delay analysis of a queue with general service demands and correlated service capacities,*» *Queueing Theory and Network Applications*, vol. 10932, pp. 64-85, 2018.
- [4.20] E. Lisovskaya, E. Pankratova, S. Moiseeva, M. Pagano, «*Analysis of a Resource-Based Queue with the Parallel Service and Renewal Arrivals,*» *Distributed Computer and Communication Networks*, Springer, Cham., pp. 335-349, 2020.
- [4.21] T. B. Ravaliminoarimalalason, F. Randimbendrainibe, «*Occupied Resources In A System With Resource Sharing Between Service-Based Customers,*» *International Journal of Engineering Research & Technology*, vol. 10, n°10, pp. 158-164, 2021.
- [4.22] T. B. Ravaliminoarimalalason, F. Randimbendrainibe, «*Distribution of Occupied Resources on A Discrete Resources Sharing in A Queueing System,*» *International Journal of Engineering Research and Technology*, vol. 10, n°1, pp. 638-643, 2021.

- [4.23] T. Ravaliminoarimalalason, M. Rakotomalala, F. Randimbindrainibe, «*Distribution of occupied resources on a fractional resource sharing in a queueing system,*» International Journal of Operational Research, DOI 10.1504/IJOR.2021.10039107, 2021.
- [4.24] T. B. Ravaliminoarimalalason, M. Rakotomalala, F. Randimbindrainibe, «*Nash bargaining on a processor sharing queue,*» International Journal of Progressive Sciences and Technologies, vol. 29, n°1, pp. 558-564, 2021.
- [4.25] A. T. Minh, «*Insensibilité dans les réseaux de files d'attente et applications au partage de ressources informatiques,*» Groupe de Recherche sur la théorie des réseaux et communications, Thèse de Doctorat, 2007.
- [4.26] A. Proutière, «*Insensibilité et bornes stochastiques dans les réseaux de files d'attente,*» France Telecom R&D – Ecole Polytechnique, Thèse de Doctorat, 2003.
- [4.27] H. Crane, P. McCullagh, «*Poisson superposition processes,*» Journal of Applied Probability, vol. 52, n°4, pp. 1013-1027, 2015.
- [4.28] P. Hokstad, «*Approximations for the M/G/m Queue,*» Operations Research, vol. 26, n°3, pp. 510-523, 1978.
- [4.29] H. C. Tijms, M. H. Van Hoorn, A. Federgruen, «*Approximations for the Steady-State Probabilities in the M/G/c Queue,*» Advances in Applied Probability, vol. 13, n°1, pp. 186-206, 1981.
- [4.30] B. N. W. Ma, J. W. Mark, «*Approximation of the Mean Queue Length of an M/G/c Queueing System,*» Operations Research, vol. 43, n°1, pp. 158-165, 1995.
- [4.31] E. C. Molina, «*The Theory of Probability Applied to Telephone Trunking Problems,*» The Bell System Technical Journal, vol. 1, n°2, pp. 69-81, 1922.
- [4.32] E. C. Molina, «*Application of the Theory of Probability to Telephone Trunking Problems,*» The Bell System Technical Journal, vol. 6, n°3, pp. 461-494, 1927.
- [4.33] T. C. Fry, «*Probability and its Engineering Uses,*» New York, 1928.
- [4.34] V. B. Iversen, «*Teletraffic engineering handbook,*» ITU–D SG 2/16 & ITC, 2001.
- [4.35] V. B. Iversen, «*Teletraffic engineering and network planning,*» DTU Library, 2015.
- [4.36] S. Kasapović; N. N. Sarajlić, «*OVSF code assignment in UMTS networks,*» 20th International Crimean Conference "Microwave & Telecommunication Technology", pp. 429-432, 2010.

- [4.37] H. W. Bernhard, Seidenberg, M. P. Althoff, «*UMTS: The Fundamentals*,» John Wiley & Sons, 2003.
- [5.01] P. Serre, «*A Course in Arithmetics*,» Springer GTM 7, 1973.
- [5.02] I. V. Volovich, «*Number theory as the ultimate physical theory*, » Geneva: Preprint No. TH 4781/87, CERN, 1987.
- [5.03] N. Koblitz, «*P-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions*,» Graduate Texts in Mathematics (2nd ed.), New York, Springer-Verlag, 1984.
- [5.04] V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, «*Superanalysis I. Differential calculus*,» Theoretical and Mathematical Physics, vol. 59, pp. 317-335, 1984.
- [5.05] V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, «*Superanalysis II. Integral calculus*,» Theoretical and Mathematical Physics, vol. 60, pp. 743-765, 1985.
- [5.06] V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, E. I. Zelenov, «*p-Adic Analysis and Mathematical Physics*,» Singapore: World Scientific, 1994.
- [5.07] A. Khrennikov, «*p-Adic Valued Distributions*,» Mathematical Physics, Dordrecht, Kluwer, 1994.
- [5.08] L. Brekke, P. G. O. Freund, «*p-Adic numbers in physics*,» Physics Reports, vol. 233, n°1, pp. 1-66, 1993.
- [5.09] A. N. Kochubei, «*Pseudo-Differential Equations and Stochastics over Non-Archimedean Fields*,» New York: Marcel Dekker, 2001.
- [5.10] S. V. Kozyrev, «*Methods and Applications of Ultrametric and p-Adic Analysis: From Wavelet Theory to Biophysics*,» Modern Problems of Mathematics, Vol. 12, Steklov Math. Inst., Moscow, 2008.
- [5.11] F. Randimbainibe, T. B. Ravaliminoarimalalason, «*Construction Des Bases Orthonormées De L'espace Des Fonctions Continues Sur Un Groupe Compact Ultramétrique*,» International Journal of Progressive Sciences and Technologies, vol. 30, n°1, pp. 603-621, 2021.
- [5.12] F. Randimbainibe, T. B. Ravaliminoarimalalason, «*Algèbre Des Suites Triangulaires Convolutives Et Multipliables. Leurs Formalisations Polynomiales*,» International Journal of Progressive Sciences and Technologies, vol. 30, n°1, pp. 460-480, 2021.

- [5.13] F. Randimbindrainibe, T. B. Ravaliminoarimalalason, «*Coefficients Triangulaires et Algèbre des Polynômes Dissociables et Multipliables,*» International Journal of Progressive Sciences and Technologies, vol. 29, n°1, pp. 675-696, 2021.
- [5.14] A. Khrennikov, M. Nilsson, «*p-Adic Deterministic and Random Dynamical Systems,*» Dordrecht: Kluwer, 2004.
- [5.15] M. R. Herman et J. C. Yoccoz, «*Generalization of some theorem of small divisors to non-archimedean fields,*» Geometric Dynamics, Lecture Notes Math. vol. 1007, New York – Berlin – Heidelberg, Springer-Verlag, 1983, p. 408–447.
- [5.16] J. Silverman, «*The Arithmetic of Dynamical Systems,*» Graduate Texts in Mathematics, Vol. 241, Springer-Verlag, New York, 2007.
- [5.17] K. Anatoly, «*Fractional differentiation in p-adic analysis,*» Volume 1 basic Theory, Berlin - Boston, De Gruyter, 2019, pp. 461-472.
- [5.18] A. Khrennikov, «*p-Adic quantum mechanics with p-adic valued functions,*» Journal of Mathematical Physics, vol. 32, p. 932–937, 1991.
- [5.19] A. Khrennikov, «*Non-Archimedean Analysis: Quantum Paradoxes, Dynamical Systems and Biological Models,*» Dordrecht: Kluwer, 1997.
- [5.20] A. Khrennikov, «*Human subconscious as the p-adic dynamical system,*» Journal of Theoretical Biology, vol. 193, p. 179–196, 1998.
- [5.21] A. Khrennikov, S. V. Kozyrev, «*Genetic code on the dyadic plane,*» Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, vol. 381, p. 265–272, 2007.
- [5.22] S. Albeverio, A. Khrennikov, P. Kloeden, «*Memory retrieval as a p-adic dynamical system,*» Biosystems, vol. 49, p. 105–115, 1999.
- [5.23] A. Khrennikov, «*p-Adic discrete dynamical systems and collective behaviour of information states in cognitive models,*» Discrete Dynamics in Nature and Society, vol. 5, p. 59–69, 2000.
- [5.24] J. Benois-Pineau, A. Khrennikov, N. V. Kotovich, «*Segmentation of images in p-adic and Euclidean metrics,*» Doklady Mathematics, vol. 64, n°3, p. 450–455, 2001.
- [5.25] V. Anashin et A. Khrennikov, «*Applied Algebraic Dynamics,*» Gruyter Expositions in Mathematics, Berlin, Walter De Gruyter Inc, 2009.

- [5.26] A. Khrennikov, «*Ubiquitous Quantum Structure: From Psychology to Finances*,» Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 2010.
- [5.27] A. Khrennikov, «*Ultrametric diffusion equation on energy landscape to model disease spread in hierarchic socially clustered population*,» *Physica A*, vol. 583, pp. 1-14, 2021.
- [5.28] A. Khrennikov, «*Information Dynamics in Cognitive, Psychological, Social, and Anomalous Phenomena*,» Dordrecht: Kluwer, 2004.
- [5.29] T.B. Ravaliminoarimalalason, F. Randimbainibe, «*Ultrametric hierarchical resource utilization model using p -adic numbers*», *International Journal of Advance Research and Innovative Ideas in Education*, vol. 8, n°4, pp 566-576, 2022.
- [5.30] G. Rasolomampandry, T. B. Ravaliminoarimalalason, F. Rasoanoavy, F. Randimbainibe, «*Analytical resolution of the Cauchy problem of a diffusion equation with a fractional time derivative*,» *International Journal of Advance Research and Innovative Ideas in Education*, vol. 4, n°6, pp. 473-479, 2018.
- [5.31] S. Albeverio, A. Khrennikov, V. M. Shelkovich, «*Theory of p -Adic Distributions: Linear and Nonlinear Models*,» Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [5.32] S. Albeverio, A. Khrennikov, V. M. Shelkovich, «*The Cauchy problems for revolutionary pseudo-differential equations over p -adic field and the wavelet theory*,» *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 375, p. 82–98, 2011.
- [A.01] A. Erlang, «*Løsning af nogle Problemer fra Sandsynlighedsregningen af Betydning for de automatiske Telefoncentraler* (Solution of some Problems in the Theory of Probabilities of Significance in Automatic Telephone Exchanges),» *Elektroteknikerens*, vol. 13, pp. 5-13, 1917.
- [A.02] E. C. Molina, «*The Theory of Probability Applied to Telephone Trunking Problems*,» *The Bell System Technical Journal*, vol. 1, n°2, pp. 69-81, 1922.
- [A.03] E. C. Molina, «*Application of the Theory of Probability to Telephone Trunking Problems*,» *The Bell System Technical Journal*, vol. 6, n°3, pp. 461-494, 1927.
- [A.04] T. C. Fry, «*Probability and its Engineering Uses*,» New York, 1928.
- [A.05] V. B. Iversen, «*Teletraffic engineering and network planning*,» DTU Library, 2015.

RESUME

Savoir le nombre de ressources à déployer dans un système est très décisif. Il impacte les investissements et les chiffres d'affaires d'une entreprise fournissant des services à ses clients. Nous l'avons considéré comme un système partageant ses ressources à travers ses utilisateurs. Ces ressources peuvent être discrètes ou continues. Ce système est modélisé en file d'attente à serveur unique et doté de plusieurs ressources. Il peut servir autant de clients tant qu'il dispose de ressources libres satisfaisant le besoin d'un nouveau client. Les arrivées des clients à ce système suivent des processus de Poisson caractéristiques à chaque classe de service. Les durées d'occupation des ressources sont aléatoires indépendantes et identiquement distribuées par service. Ces paramètres d'arrivées et de services à cette file peuvent être des nombres réels positifs connus ou flous. Nous avons évalué la distribution d'occupation des ressources de ces files d'attente, et à partir de laquelle nous avons tiré une probabilité d'encombrement pour le cas de capacité finie. A partir des résultats analytiques présentés, nous avons montré qu'il est bien possible de déterminer la quantité de ressources nécessaires au serveur étant donnée une probabilité d'encombrement admissible. En effet, à partir d'une certaine valeur de la capacité, la distribution en termes de nombre de ressources occupées dans le système ne présente pas beaucoup de variation. Un autre modèle basé sur les nombres p -adiques et leur espace ultramétrique a aussi été avancé pour le cas des ressources hiérarchisées. Nous avons démontré que les utilisations de telles ressources sont régies par une équation de diffusion dont la résolution fait appel à un problème de Cauchy. Les résultats obtenus dans cette recherche peuvent être utilisés dans beaucoup de domaines d'application comme en télécommunication, en informatique, en logistique, en gestion, etc... où on peut rencontrer des systèmes multi-services partageant leurs ressources.

Mots clés : Dimensionnement, File d'attente, Occupation, p -adique, Partage, Ressources, Stochastique

ABSTRACT

Knowing the number of resources to deploy in a system is very decisive. It impacts the investments and turnover of a company providing services to its customers. We considered it as a system sharing its resources through its users. These resources can be discrete or continuous. This system is modeled as a single-server queue with multiple resources. It can serve many customers as long as it has free resources satisfying the need of a new customer. The arrivals of customers to this system follow Poisson processes characteristic of each class of service. Resource occupation times are independent random and identically distributed by service. These parameters of arrivals and services to this queue can be known or fuzzy positive real numbers. We evaluated the resource occupancy distribution of these queues, and from which we derived a congestion probability for a case of finite capacity. From the analytical results presented, we have shown that it is indeed possible to determine the quantity of resources necessary for the server given an admissible congestion probability. Indeed, from a certain value of the capacity, the distribution in terms of the number of occupied resources in the system does not present much variation. Another model based on p -adic numbers and their ultrametric space has also been advanced for the case of hierarchical resources. We have demonstrated that its resources utilization is governed by a diffusion equation whose resolution involves a Cauchy problem. The results obtained in this research can be used in many fields of application such as telecommunications, computer science, logistics, management, etc... where we can find multi-service systems sharing their resources.

Keywords: Dimensioning, Occupancy, p -adic, Queue, Resources, Sharing, Stochastic