



Imagerie de speckle dynamique haute cadence appliquée à la vascularisation cutanée et sous-cutanée

Simon Erdmann

► To cite this version:

Simon Erdmann. Imagerie de speckle dynamique haute cadence appliquée à la vascularisation cutanée et sous-cutanée. Physique [physics]. Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE), 2022. Français. <NNT : 2022ESAE0006>. <tel-04080982>

HAL Id: tel-04080982

<https://hal.science/tel-04080982v1>

Submitted on 25 Apr 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace

Présentée et soutenue par :

Simon ERDMANN

le mardi 15 février 2022

Titre :

Imagerie de speckle dynamique haute cadence
appliquée à la vascularisation cutanée et sous-cutanée

École doctorale et discipline ou spécialité :

ED GEET : Electromagnétisme et systèmes de haute fréquence

Unité de recherche :

Équipe d'accueil ISAE-ONERA OLIMPES

Directeur(s) de Thèse :

M. Xavier ORLIK (directeur de thèse)

Mme Élise COLIN KOENIGUER (co-directrice de thèse)

Jury :

M. François GOUDAIL Professeur Institut d'Optique Graduate School, Palaiseau - Président

Mme Élise COLIN KOENIGUER Ingénieure de recherche ONERA - Co-directrice de thèse

M. Olivier HAEBERLÉ Professeur IRIMAS, Université de Haute-Alsace - Rapporteur

M. Xavier ORLIK Chercheur ONERA Toulouse - Directeur de thèse

M. Angelo PIERANGELO Ingénieur LPICM / École Polytechnique Palaiseau - Examineur

Mme Anne SENTENAC Directrice de Recherche Institut Fresnel Marseille - Rapporteur

Mme Flora WEISSGERBER Ingénieure de recherche ONERA Palaiseau - Examinatrice

Remerciements

Je commence par remercier chaleureusement les membres de mon jury de thèse : Anne Sentenac et Olivier Haeberlé pour avoir accepté d’être rapporteur·e·s de mon manuscrit, François Goudail pour avoir accepté d’être président du jury, et Angelo Pierangelo pour avoir accepté d’en faire partie. Après trois années semées d’embûches, leurs éloges de la qualité de mon travail furent précieux et importants pour moi.

Je remercie ensuite mes encadrant·e·s, à commencer par mes co-directeur·trice·s de thèse, Xavier Orlik et Élise Colin-Koeniguer. Je leur suis reconnaissant de m’avoir donné l’opportunité de faire (et de terminer) cette thèse à l’ONERA. Je remercie bien sûr aussi Flora Weissgerber, qui, malgré son statut d’encadrante “clandestine” pendant la plus grande partie de ma thèse, a toujours manifesté un vif intérêt pour mes travaux et s’est beaucoup impliquée dans mon encadrement. Plus généralement, je les remercie toutes les trois pour toutes les choses que j’ai apprises grâce à elleux, et pour m’avoir, bon an, mal an, supporté jusqu’au bout.

Je remercie par ailleurs toutes celles que j’ai pu côtoyer au sein de mes deux départements d’accueil, le DOTA à Toulouse et le DTIS à Palaiseau, pour leur bienveillance et leur sympathie. Je remercie les secrétaires respectives de ces deux départements, Marine François et Florence Marie, pour leur gentillesse, leur efficacité et leur professionnalisme. Pour les mêmes raisons, je remercie Maryse Herbillon, de l’ISAE, et Marie Estruga, de l’école doctorale GEETS. Je remercie particulièrement Mme Herbillon de m’avoir donné accès à la salle des thèses de l’ISAE pour ma soutenance, permettant à celle-ci de se dérouler en visioconférence dans d’excellentes conditions.

Je remercie évidemment ma famille proche, c’est-à-dire mes parents et mon frère, pour leur présence joyeusement inébranlable dans les plus jolis moments comme dans les plus difficiles. Enfin, je remercie celles et ceux de mes autres proches qui ont suivi de près mes tribulations de jeune chercheur et m’ont régulièrement manifesté leur soutien affectueux, en particulier ma grand-mère, Nathalie Richez, ma marraine, Sarah Salomonowicz, et Jean-François Gallaud.

A mes parents et à Auguste.

*There's more to the picture
Than meets the eye.*

Neil Young & Crazy Horse, "My My, Hey Hey (Out of the Blue)"
et "Hey Hey, My My (Into the Black)", *Rust Never Sleeps* (1979)

Table des matières

Introduction générale	1
1 Introduction et contexte	3
1.1 Fondations physiques du speckle	3
1.1.1 Des équations de Maxwell à l'équation d'onde	3
1.1.2 Notion d'intensité lumineuse	5
1.1.3 Théorie scalaire de la diffraction et imagerie optique	5
1.1.4 Cohérence et interférences	7
1.1.5 Polarisation	8
1.2 Caractérisations du speckle statique	9
1.2.1 Statistiques du premier ordre	10
1.2.2 Système d'imagerie et statistiques du second ordre	13
1.3 Speckle dynamique	17
1.3.1 Caractérisations élémentaires	17
1.3.2 Intensité et cohérence spatiale	18
1.3.3 Modélisation	21
1.3.4 Techniques de mesure indirecte du temps de corrélation	24
1.4 Objectifs de la thèse	30
2 Imagerie de speckle dynamique pour la détection de la vascularisation cutanée et sous-cutanée	33
Introduction	33
2.1 Matériels et méthodes	34
2.1.1 Protocole d'acquisition des données	34
2.1.2 Prétraitements	36
2.1.3 Méthodes de mesure de l'activité	37
2.2 Contraste, r_1 et zero-crossings	38
2.2.1 Comparaison entre les trois méthodes en configuration de base	38
2.2.2 Influence du protocole et des paramètres d'acquisition	41
2.3 Mesures de l'activité utilisant plusieurs termes de l'autocorrélation	45
2.3.1 Régression linéaire sur l'autocorrélation	45
2.3.2 Classification des pixels selon la stricte décroissance de l'autocorrélation sur ses premiers termes	47
2.4 Accès aux battements cardiaques	48
2.4.1 Mise en évidence de non-stationnarités liées à la pulsation cardiaque	48
2.4.2 Étude de pixels particuliers	49
2.4.3 Propagation du signal cardiaque	52
Conclusion et perspectives	53
3 Modélisation et simulation d'un système d'imagerie de speckle dynamique	55
Introduction	55
3.1 Modèle	56
3.1.1 Laser	57

3.1.2	Milieu diffusant	57
3.1.3	Optique du système d'imagerie	60
3.1.4	Capteur	62
3.2	Analyse théorique	62
3.2.1	Distance laser-capteur et phase géométrique	63
3.2.2	Autocorrélation de l'amplitude : cas général	65
3.2.3	Application à quelques cas concrets	69
3.3	Implémentation	74
3.3.1	Procédure générale, des positions des diffuseurs à l'intensité lumineuse	75
3.3.2	Fonction d'étalement du point	79
3.3.3	Impact de la discrétisation et de la linéarisation de la PSF sur les résultats	83
3.4	Résultats de simulation	88
3.4.1	Choix des paramètres	88
3.4.2	Mouvements constants transverses, sans phase géométrique	89
3.4.3	Mouvement brownien transverse sans phase géométrique	91
3.4.4	Mouvements purement longitudinaux	91
3.4.5	Mouvements en trois dimensions	93
3.4.6	Relation de Siegert	94
	Conclusion et perspectives	96
4	Étude des effets statistiques du rééchantillonnage de signaux aléatoires	99
	Introduction	99
4.1	Quelques résultats généraux sur le rééchantillonnage	100
4.1.1	Sous-échantillonnage	100
4.1.2	Sur-échantillonnage et interpolation	104
4.2	Rééchantillonnage et signaux aléatoires	109
4.2.1	Signaux aléatoires infinis et convolution	109
4.2.2	Sous-échantillonnage	109
4.2.3	Sur-échantillonnage	116
4.3	Statistiques en intensité : lois Gamma	120
4.3.1	Sous-échantillonnage	121
4.3.2	Sur-échantillonnage	124
4.4	Statistiques en complexes	126
4.4.1	Propriétés des variables aléatoires complexes	126
4.4.2	Sous-échantillonnage	126
4.4.3	Sur-échantillonnage	127
	Conclusion	128
	Conclusion, perspectives	131
	Annexes	135
A	Étude de la distribution d'un signal de bruit blanc exponentiel sous-échantillonné par <i>spectral cropping</i>	135
A.1	Quelques décompositions en éléments simples	135
A.1.1	Premier cas : n pôles doubles, pas de pôle simple	135
A.1.2	Deuxième cas : n pôles doubles, un pôle simple	138
A.1.3	Troisième cas : n pôles doubles, deux pôles simples	139
A.1.4	Résumé des notations employées	141
A.2	Densité de probabilité du signal sous-échantillonné	141
A.3	Convergence de la distribution sous-échantillonnée	145
A.3.1	Existence de φ_L	146
A.3.2	Convergence de $\varphi_{\frac{N}{L},N}$ vers φ_L	147

B	Calcul du taux de vortex moyen d'une image complexe <i>i.i.d.</i>	153
B.1	Probabilité que 0 soit à l'intérieur de l'enveloppe convexe de quatre complexes aléatoires	153
B.2	Probabilité que l'interpolation bilinéaire génère un vortex	155
	Bibliographie	157

Introduction générale

Lorsqu'on éclaire en lumière cohérente un milieu capable de déphaser de façon aléatoire l'onde incidente, puis qu'on examine l'onde rétrodiffusée dans le plan image d'un système d'imagerie, on observe un signal constitué d'une multitude de grains : le *speckle*. Un signal de speckle est ainsi un signal essentiellement aléatoire, dont les propriétés d'intérêt résident dans ses statistiques (moyenne, variance, coefficient de variation, autocorrélation, etc.). Le speckle a été largement étudié [1], de telle sorte que de nombreux modèles et classifications ont été proposés. Ceux-ci font dépendre les statistiques du speckle de propriétés du milieu imagé ou du système optique, aboutissant à une large gamme de comportements, et faisant du speckle un objet d'étude à part entière.

Celui-ci prend encore une nouvelle dimension si de plus le milieu imagé change au cours du temps, par exemple parce qu'il est constitué de diffuseurs en mouvement : il en va alors de même pour le speckle, qui devient *dynamique*. De même que les statistiques spatiales du speckle dépendaient des propriétés du milieu, les statistiques temporelles du speckle dynamique dépendent de son mouvement.

Dès lors, l'art du speckle dynamique consiste à construire des modèles liant propriétés du mouvement et fluctuations du speckle, puis à les inverser pour remonter des secondes aux premières. Un exemple d'objet d'étude pour lequel les méthodes de speckle dynamique se révèlent particulièrement efficaces est les suspensions de particules dans un liquide [2, 3, 4, 5]. On dispose alors de propriétés idéales pour la modélisation : parfaite homogénéité des échantillons étudiés, modèle de mouvement éprouvé (en l'occurrence, le mouvement brownien), densité des diffuseurs contrôlée.

Un terrain beaucoup moins facile d'accès, mais aux enjeux considérables, est celui de la biologie. Il s'y joue en effet une large gamme de micro-mouvements en tous genres qu'il serait très utile de pouvoir détecter, mesurer ou cartographier. Les flux directionnels, comme ceux du sang ou de la lymphe, ont ainsi été particulièrement étudiés [6, 7, 8, 9]. En particulier, le speckle dynamique a été utilisé pour imager la vascularisation de nombreux organes : rétine [6, 10], cerveau de modèles animaux [11, 12, 13, 14], ou tout simplement la peau humaine [15, 16]. D'autres applications ont été imaginées, comme la mesure du taux de plaquettes dans le sang [17] ou des propriétés mécaniques des tissus [18].

Par ailleurs, le speckle dynamique vit un moment charnière : si les méthodes qui s'appuient sur lui se développent depuis près de quarante ans, elles ont bénéficié ces dernières années d'un bond en avant technologique. En effet, le développement des méthodes historiques s'est fait à l'aide de caméras dont le temps d'exposition était très supérieur au temps caractéristique de variation des milieux imagés. Les signaux temporels ne pouvaient donc pas être échantillonnés dans le respect du critère de Nyquist-Shannon. Il était ainsi impossible d'obtenir une discrétisation correcte de la fonction d'autocorrélation temporelle du signal, qui constituait pourtant la clef de voûte de la plupart des modèles. Il fallait donc s'appuyer sur des méthodes indirectes, comme le contraste [6, 7, 19, 20], qui permet d'obtenir une estimation du rapport entre temps d'exposition et temps caractéristique de décorrélation. Même si des raffinements ultérieurs, comme l'utilisation de plusieurs temps d'exposition [21, 13] ont permis d'affiner les modèles, le speckle dynamique a acquis une réputation de méthode qualitative efficace et peu coûteuse, mais incapable de rivaliser en précision avec des méthodes comme le Doppler [22, 23].

Or, depuis quelques années, se diffusent de plus en plus largement des caméras haute cadence, capables d'acquérir des images à plusieurs dizaines de kilohertz. En permettant d'échantillonner correctement l'autocorrélation temporelle du signal, elles ouvrent des possibilités nombreuses, du raffinement considérable des modèles [24] au Doppler de plein champ [16]. À moyen terme, le spe-

ckle dynamique a donc des atouts pour allier le meilleur des deux mondes, entre aisance à produire des images complètes d'une région d'intérêt et précision des traitements temporels.

C'est dans ce contexte, sur lequel on reviendra en détail dans le Chapitre 1, que se positionnent les travaux présentés ici. Une caméra haute cadence a ainsi été utilisée pour imager la vascularisation de la peau. Il faut bien avoir en tête que la haute cadence représente un véritable changement de paradigme : les paramètres traditionnels de mesure de l'activité, comme le contraste, ne sont plus pertinents, il faut donc en trouver de nouveaux. Par ailleurs, des hypothèses jusqu'ici incontestables sur les signaux manipulés, comme la stationnarité, sont remises en question. Le but du Chapitre 2, où sont présentés les résultats expérimentaux, est donc d'explorer les apports et limites de la haute cadence.

Pour exploiter pleinement les possibilités de celle-ci, il est cependant nécessaire d'aller plus loin : les modèles liant type de mouvement et statistiques du speckle, historiquement très simples, doivent être affinés. Le but du Chapitre 3 est de contribuer à cet effort de modélisation, qui y est par ailleurs appuyé par la création d'un simulateur complet d'un système d'imagerie de speckle dynamique.

Enfin, pour n'oublier aucun maillon de la chaîne de traitement, le Chapitre 4 est consacré à ce qui est souvent un angle mort des méthodes de traitement du speckle : les opérations de traitement du signal, comme le filtrage ou l'interpolation. Celles-ci sont en effet bâties selon un paradigme — celui d'un signal déterministe pollué par un bruit aléatoire — qui ne convient pas du tout au speckle. Le but de ce chapitre est donc d'étudier l'effet sur les statistiques de signaux aléatoires d'opérations qui n'ont pas été pensées pour ces signaux.

Chapitre 1

Introduction et contexte

1.1 Fondations physiques du speckle

Le but de cette section est présenter brièvement les principaux phénomènes physiques en jeu lors de la formation de speckle.

On commencera ainsi par revenir brièvement sur la théorie ondulatoire de la lumière et sur la notion d'intensité lumineuse. Ces points seront ensuite développés à l'aide de quelques éléments de théorie scalaire de la diffraction, ainsi que de la notion de cohérence. Enfin, on sortira brièvement de la théorie scalaire pour évoquer la polarisation de la lumière.

1.1.1 Des équations de Maxwell à l'équation d'onde

Pour l'ensemble des travaux dont il est rendu compte ici, notre socle physique sera la description de la lumière comme une onde électromagnétique.

Commençons cependant par quelques rappels historiques. La première théorie ondulatoire complète de la lumière est due à Huygens, qui la proposa en 1678. Il fallut toutefois attendre que les expériences de Fresnel et Young viennent la confirmer au début du XIX^{ème} siècle pour qu'elle s'impose. C'est ensuite Maxwell, quelques décennies plus tard, qui la décrivit comme un champ électromagnétique, composé d'un champ électrique \vec{E} et d'un champ magnétique \vec{B} en interaction.

La physique classique connaissait alors son apogée. De fait, elle décrivait extrêmement bien presque tous les phénomènes connus alors — tellement bien que Michelson déclara en 1894 que, s'il restait quelque chose à faire en physique, cela se résumait à calculer jusqu'à la sixième décimale des valeurs déjà connues. On connaît la suite : les rares limites de l'édifice classique, comme la catastrophe ultraviolette, allaient causer sa perte, menant à la physique quantique et à la dualité onde-corpuscule de la lumière — puis, suite aux travaux de Louis de Broglie, de toute la matière.

Pour notre part, nous n'aurons cependant pas besoin de sortir de la physique classique et de sa représentation de la lumière, qui s'appuie sur les **équations de Maxwell**. On se place donc dans un milieu de permittivité diélectrique ϵ et de perméabilité magnétique μ , en l'absence de charge et de courant. Les équations de Maxwell s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

Supposons de plus que ϵ et μ sont constants dans le temps et dans l'espace. Quelques calculs élémentaires permettent alors de montrer que \vec{E} et \vec{B} suivent l'équation d'onde :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} &= 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

En posant $c_M = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$, c_M apparaît comme la vitesse de propagation de la lumière au sein du milieu. On définit alors l'indice de réfraction n de ce dernier comme $n = c/c_M$, où $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$ est la vitesse de propagation de la lumière dans le vide.

On remarque que l'équation d'onde s'applique de façon identique et indépendante aux trois composantes de \vec{E} et à celle de \vec{B} . Cela n'est vrai que si μ et ϵ sont constants, ou varient lentement par rapport à la longueur d'onde. Si ce n'est pas le cas, un couplage entre \vec{E} et \vec{B} , ou entre composantes d'un même champ, intervient. Il en est notamment ainsi au voisinage des interfaces entre milieux, où μ et ϵ sont discontinus.

Si toutefois on ne souhaite étudier le champ électromagnétique que dans des conditions où les six équations d'onde scalaires sont découplées, on peut se placer dans le cadre de la **théorie scalaire de la lumière**. Dans ce cas, on peut négliger le caractère vectoriel du champ électromagnétique et restreindre son étude à celle d'une quantité scalaire U qui suit l'équation d'onde :

$$\nabla^2 U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U = 0$$

Forme des solutions de l'équation d'onde

Pour résoudre l'équation d'onde, on peut commencer par lui appliquer la transformation de Fourier selon les variables spatiales :

$$\Delta \hat{U} + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{U} = 0$$

On introduit alors le **nombre d'onde** $k = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{2\pi}{\lambda}$, où λ est la longueur d'onde. L'équation précédente devient :

$$(\Delta + k^2) \hat{U} = 0$$

Cette équation est l'**équation de Helmholtz**. Pour constituer un problème bien posé, elle doit s'accompagner de conditions aux limites appropriées. Une fois l'espace des solutions identifié, une solution U de l'équation d'onde peut s'écrire comme une transformation de Fourier inverse :

$$U(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{U}(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega t} d\omega \right)$$

où \hat{U} est solution de l'équation de Helmholtz. Une onde de la forme de la partie réelle de l'intégrande apparaît ainsi comme une solution élémentaire de l'équation d'onde dans \mathbb{R} . Le spectre temporel d'une telle onde, dite **monochromatique**, est proportionnel à une impulsion de Dirac en un ω quelconque. L'onde elle-même est de la forme :

$$U(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{x}) \cos(\omega t + \varphi(\mathbf{x}))$$

où :

- A est l'**amplitude** de l'onde ;
- ω est la **pulsation** de l'onde ;
- φ est la **phase** de l'onde.

Toutefois, il est souvent avantageux d'un point de vue calculatoire de retarder au maximum le passage à la partie réelle pour travailler en complexes. Cela ne pose aucun problème tant que les opérations réalisées sont linéaires (combinaison linéaire, intégration, dérivation, etc.). Ainsi, on travaillera sur des ondes de la forme :

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) e^{i\omega t}$$

où $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ est appelée l'**amplitude complexe** de l'onde. $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ a pour module l'amplitude de l'onde réelle, et pour argument sa phase.

1.1.2 Notion d'intensité lumineuse

En pratique, aux longueurs d'onde utilisées en optique, on n'a jamais directement accès au champ d'amplitude complexe, car il est impossible d'échantillonner le signal suffisamment vite pour déterminer sa phase. En effet, lorsque la longueur d'onde est de quelques centaines de nanomètres, la fréquence est de l'ordre de quelques 10^{14} Hz. Un échantillonnage temporel conforme au théorème de Shannon exigerait donc un pas de quelques femtosecondes tout au plus. Les détecteurs actuels, comme les capteurs CCD ou CMOS qu'on va utiliser, ne le permettent pas. Ils sont en fait sensibles à l'énergie radiative reçue par un pixel, d'aire non nulle, pendant un intervalle de temps non nul, qu'on appelle le temps d'exposition. Cette énergie est proportionnelle à l'**intensité lumineuse** de l'onde, notée I et définie sur un pixel par :

$$I = \iint_{\mathcal{P}} \int_t^{t+T} |\mathbf{A}|^2 dx dy dt$$

où \mathcal{P} représente l'aire d'un pixel et T est le temps d'intégration. En pratique, selon le contexte, on pourra être amené à parler d'intensité pour désigner simplement le module carré de l'amplitude complexe moyenné sur une durée quelconque :

$$I = \langle |\mathbf{A}|^2 \rangle$$

En particulier, si \mathbf{A} est une onde monochromatique, on a alors $I = A^2$. Pour la suite, on considérera que la grandeur mesurée par le capteur est l'intensité lumineuse de l'onde.

1.1.3 Théorie scalaire de la diffraction et imagerie optique

La théorie scalaire de la diffraction a pour objet premier d'étudier l'effet sur une onde d'une ouverture, c'est-à-dire d'un plan dont seule une partie de mesure finie laisse passer l'onde. Elle a plusieurs formulations non strictement équivalentes, qui se distinguent par des conditions au bord légèrement différentes pour le champ \mathbf{A} , mais fournissent des résultats identiques aux petits angles. Suivant Goodman [25], on adopte ici la formulation de Sommerfeld.

Principe de Huygens-Fresnel

Un résultat fondamental de la théorie scalaire de la diffraction est le principe de Huygens-Fresnel. Celui-ci exprime le champ reçu en un point R situé en aval d'un plan \mathcal{P} percé d'une ouverture Σ :

$$\mathbf{A}(R) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{\Sigma} \mathbf{A}(P) \frac{\exp(ikRP)}{RP} \cos \theta ds$$

où P parcourt la surface Σ , et θ est l'angle entre \overrightarrow{PR} et la normale à Σ .

Le principe de Huygens-Fresnel exprime le fait qu'en aval de Σ , tout se passe comme si le champ \mathbf{A} était émis par des diffuseurs ponctuels recouvrant Σ et produisant des ondes sphériques, de même amplitude complexe que les ondes reçues et en phase avec elles. En particulier, le champ sur Σ détermine entièrement le champ en aval.

Diffraction de Fresnel et de Fraunhofer

Supposons qu'on place une ouverture sur le trajet d'une onde monochromatique et intéressons-nous à un plan parallèle à celle-ci, en aval de l'ouverture. On note z la distance orthogonale entre le plan et l'ouverture.

Le champ dans ce plan est déterminé entièrement par le champ dans l'ouverture, et son expression est donnée par le principe de Huygens-Fresnel. Si z est grand devant les dimensions de l'ouverture, son expression peut être simplifiée à l'aide de développements limités sur la distance RP . On est alors dans le domaine de la **diffraction de Fresnel** :

$$\mathbf{A}(x, y) = \frac{e^{ikz}}{j\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \iint_{\Sigma} \left\{ \mathbf{A}(\xi, \eta) e^{i\frac{k}{2z}(\xi^2+\eta^2)} \right\} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\eta)} d\xi d\eta$$

On voit donc apparaître ce qui ressemble à la transformée de Fourier de $\mathbf{A}(\xi, \eta)$, à un facteur multiplicatif et une modulation de phase près.

Pour pouvoir négliger cette dernière, il faut, en plus des hypothèses de la diffraction de Fresnel, supposer $z \gg kL^2$, où k est le nombre d'onde et L une dimension linéaire caractéristique de l'ouverture. Dans ce cas, le calcul du champ relève de la **diffraction de Fraunhofer** :

$$\mathbf{A}(x, y) = \frac{e^{ikz}}{j\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \iint_{\Sigma} \mathbf{A}(\xi, \eta) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\eta)} d\xi d\eta$$

c'est-à-dire :

$$\mathbf{A}(x, y) \propto \mathcal{F} \{ \mathbf{A}(\xi, \eta) \} \left(\frac{2\pi x}{\lambda z}, \frac{2\pi y}{\lambda z} \right)$$

où \mathcal{F} est la transformation de Fourier dans \mathbb{R}^2 .

Ainsi, le champ dans le plan \mathcal{P} s'exprime, à un facteur de phase et une constante multiplicative près, à l'aide de la transformée de Fourier à deux dimensions du champ dans l'ouverture.

Pour mettre en place une telle configuration, on se heurte cependant au domaine de validité de la diffraction de Fraunhofer. Par exemple, avec une ouverture de 1 mm de rayon et une longueur d'onde de 600 nm, les distances ouverture-image doivent être supérieures à 10 m, ce qui est difficile à mettre en œuvre au vu des dimensions habituelles d'un laboratoire. Ce problème peut être résolu avec une lentille convergente. En effet, si l'on place une telle lentille derrière l'ouverture, la figure de diffraction de Fraunhofer se formera dans le plan focal image de la lentille. Ainsi, une lentille convergente permet de mettre en œuvre la diffraction de Fraunhofer à distance finie, avec seulement les hypothèses de la diffraction de Fresnel.

Formation d'une image à l'aide d'une lentille

Une lentille convergente offre par ailleurs une possibilité bien plus intéressante : celle de former des images. En effet, l'optique géométrique prévoit que, si l'on place un objet et un écran de part et d'autre d'une lentille convergente, une image de l'objet peut se former sur l'écran. Pour cela, les distances objet-lentille et lentille-écran, notées respectivement z_1 et z_2 , doivent suivre la loi de Descartes :

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{f}$$

où f est la distance focale de la lentille. Dans ce cas, toujours d'après l'optique géométrique, le champ obtenu sur l'écran est égal au champ incident, modulo quelques constantes multiplicatives, le retournement de l'image et un grandissement d'un facteur z_2/z_1 .

Pour l'optique de Fourier, en revanche, l'optique géométrique n'est qu'une approximation. Sous certaines conditions, notamment l'approximation paraxiale, elle prévoit que l'image réellement obtenue est l'image prévue par l'optique géométrique, convoluée spatialement avec la fonction d'étalement du point, ou **PSF** (*point spread function*), de l'optique. Celle-ci correspond à sa réponse impulsionnelle, et est étroitement liée à la figure de diffraction de Fraunhofer de l'ouverture.

Plus précisément, si P est la transmittance de l'ouverture, on a :

$$h(x, y) \propto \mathcal{F} \{ P(\xi, \eta) \} \left(\frac{2\pi x}{\lambda z}, \frac{2\pi y}{\lambda z} \right)$$

En pratique, comme P est en général une indicatrice, la PSF est une fonction apparentée au sinus cardinal. Les deux cas les plus courants sont :

- Une ouverture rectangulaire d'axes (Ox) et (Oy) , et de dimensions $l_x \times l_y$. Dans ce cas, sa transmittance est séparable en x et y . La PSF l'est alors également et est de la forme :

$$h(x, y) \propto \text{sinc}\left(\frac{l_x x}{\lambda z_2}\right) \text{sinc}\left(\frac{l_y y}{\lambda z_2}\right)$$

- Une ouverture de la forme d'un disque de rayon ρ_0 . Sa transmittance est alors à symétrie de révolution, comme la PSF :

$$h(r) \propto \frac{J_1(2\pi\rho_0 r / \lambda z_2)}{2\pi\rho_0 r / \lambda z_2}$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et J_1 est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 1.

Pour les travaux présentés ici, on supposera qu'on est dans une telle configuration : le système optique est supposé linéaire et invariant par translation et est donc entièrement caractérisé par sa réponse impulsionnelle. Celle-ci dépend essentiellement de la forme de l'ouverture, avec notamment un règle simple : plus l'ouverture est petite, plus la réponse impulsionnelle est étalée spatialement.

1.1.4 Cohérence et interférences

L'équation d'onde est linéaire : la superposition de deux champs électriques mène à leur sommation algébrique. Considérons, en particulier, deux ondes monochromatiques de même amplitude A_0 et de déphasage φ . Leur somme est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 \\ &= A_0(e^{i\omega t} + e^{i(\omega t + \varphi)}) \\ &= A_0 e^{i(\omega t + \varphi/2)} (e^{-i\varphi/2} + e^{i\varphi/2}) \\ &= 2A_0 e^{i(\omega t + \varphi/2)} \cos(\varphi/2) \end{aligned}$$

L'intensité de \mathbf{A} est donc donnée par :

$$\begin{aligned} I &= \langle |2A_0 e^{i(\omega t + \varphi/2)} \cos(\varphi/2)|^2 \rangle \\ &= 4A_0^2 \cos^2(\varphi/2) \end{aligned}$$

où $\langle \rangle$ représente le moyennage temporel. Ainsi, selon la valeur de φ , l'intensité résultante peut aller de 0 à 4 fois l'intensité de chacune des deux ondes. En particulier, si les ondes sont en phase, l'intensité est maximale : on parle d'interférences constructives. Si elles sont en opposition de phase, elle est nulle : on a affaire à des interférences destructives.

Supposons à présent que les pulsations des deux ondes ne sont plus identiques, mais différent de $\delta\omega$, avec toujours un déphasage de φ à $t = 0$. Des calculs similaires aux précédents montrent que :

$$I = 4A_0^2 \left\langle \cos^2 \left(\frac{\delta\omega}{2} t + \varphi/2 \right) \right\rangle$$

Si le moyennage se fait sur plus d'une période du cosinus carré (soit $2\pi/\delta\omega$), la moyenne temporelle vaut 1/2. Dans ce cas, l'intensité moyenne vaut $I = 2A_0^2$: l'intensité résultante est la somme des deux intensités. On dit que les deux ondes sont incohérentes.

Mais si le temps sur lequel est effectué le moyennage est faible devant la période de fluctuation du \cos^2 , c'est $\varphi/2$ qui domine dans son argument. On en revient alors à la situation précédente. $2\pi/\delta\omega$ constitue ainsi le **temps de cohérence** de l'onde résultante : à une échelle de temps inférieure à ce dernier, l'onde peut être considérée comme cohérente. Dans le cas d'une onde polychromatique

quelconque, le temps de cohérence est donnée par l'inverse de la largeur spectrale. On parle aussi de **longueur de cohérence** si on considère le spectre en fonction de la longueur d'onde.

De manière générale, la cohérence d'une onde renvoie à sa *corrélation* à elle-même. Celle-ci peut être étudiée, comme on l'a fait, en un même point à des temps différents, et on parle alors de cohérence temporelle. Si on s'intéresse à la corrélation entre deux points de l'onde à un même instant, on parle de cohérence spatiale. Dans tous les cas, il est important d'avoir en tête que la notion de cohérence n'a de sens que relativement à une échelle de temps donnée, en général sous-jacente à un détecteur. Une onde est toujours corrélée à elle-même si on se donne un écart de temps suffisamment petit.

D'un point de vue pratique, si l'on souhaite obtenir des interférences, la source doit avoir une largeur spectrale aussi faible que possible, afin que l'onde puisse être considérée comme monochromatique. Ainsi, la grande longueur de cohérence des lasers a fait leur popularité. Ils sont aujourd'hui les principaux fournisseurs d'ondes cohérentes dans les domaines proches du visible.

Cohérence et imagerie

Dans la Section 1.1.3, on a supposé que l'éclairement se faisait en lumière cohérente. Dans ce cas, l'optique agit sur le signal d'amplitude complexe, et on n'a pas de raison de faire intervenir l'intensité dans les calculs avant le détecteur.

En revanche, si l'éclairement se fait en lumière incohérente, l'optique agit directement sur l'intensité. Plus précisément, une optique de PSF cohérente h_c utilisée pour imager un objet éclairé en lumière incohérente sera toujours linéaire invariante, mais avec une PSF donnée, à une constante près, par [25, Section 6.3] :

$$h_i = |h_c|^2$$

C'est par exemple le cas pour une photographie en lumière naturelle.

1.1.5 Polarisation

Jusqu'ici, on s'est placé dans le cadre de la théorie scalaire de la lumière. Pour cette section, revenons à sa description vectorielle à l'aide du champ \vec{E} .

Les équations de Maxwell permettent de montrer que l'onde électromagnétique est transverse, c'est-à-dire que les vecteurs \vec{E} et \vec{B} sont orthogonaux à leur direction commune de propagation (et, par ailleurs, orthogonaux l'un à l'autre). Pour une onde plane monochromatique, les deux composantes de \vec{E} sont de même fréquence. Selon leur déphasage et leurs amplitudes, le vecteur \vec{E} se comporte différemment au cours du temps, ce que décrit son **état de polarisation**. Ainsi :

- Si les deux composantes sont en phase, la direction de \vec{E} est constante au cours du temps : la polarisation est linéaire ;
- Si les deux composantes sont en quadrature de phase, et si par ailleurs leurs amplitudes sont égales, \vec{E} décrit un cercle au cours du temps : la polarisation est circulaire ;
- Enfin, les deux cas précédents ne sont que des cas particuliers de la situation générale, où la polarisation est elliptique.

Un état de polarisation peut être décrit à l'aide d'un **vecteur de Jones**. Celui-ci, noté \vec{V} , est tel que :

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t + \phi)} \vec{V}$$

avec $V_x \in \mathbb{R}$ et $\|\vec{V}\| = 1$. Une transformation linéaire sur l'état de polarisation peut alors être décrite à l'aide d'une **matrice de Jones**, qui est une matrice complexe unitaire de dimension 2×2 .

Si à présent \vec{E} n'est plus supposée monochromatique, ses deux composantes n'ont plus de raison d'avoir une relation de phase constante. Dès lors, tout ou partie de sa direction de polarisation peut

apparaître à un détecteur ponctuel comme aléatoire au cours du temps d'exposition. Dans ce cas, la notion de polarisation de l'onde n'a pas de sens : on parle de dépolarisation temporelle. De même, si le détecteur ne peut pas être considéré comme ponctuel, la direction de polarisation peut lui apparaître comme aléatoire à l'échelle de sa surface : on parle alors de dépolarisation spatiale. Dans les deux cas, l'onde est dite **partiellement polarisée**. La fraction de la puissance de l'onde qui est polarisée est appelée **degré de polarisation** (DOP). On peut noter qu'il existe un lien étroit entre les notions de degré de polarisation et de cohérence : la dépolarisation temporelle intervient lorsque les deux composantes du signal vectoriel ne sont plus cohérentes entre elles. La dépolarisation spatiale est quant à elle assimilable à une perte de cohérence spatiale.

Plusieurs phénomènes influent sur la polarisation d'une onde (dépolariation, réflexion, biréfringence, dichroïsme). Ces phénomènes sont exploités par des outils optiques, comme les lames à retard ou les polariseurs, pour donner à une onde incidente une polarisation précise. Par ailleurs, l'état de polarisation d'une onde après avoir traversé un milieu renseigne, à l'inverse, sur les phénomènes qu'elle a subis et donc sur les propriétés du milieu. L'ensemble des techniques d'étude des propriétés d'un milieu à partir de données de polarisation constitue la polarimétrie.

1.2 Caractérisations du speckle statique

Le speckle est un phénomène qui met en jeu tous les concepts précédemment évoqués.

Supposons qu'on éclaire en lumière cohérente un milieu capable de déphaser l'onde incidente de façon aléatoire. Par exemple, ce milieu peut être une interface de réflexion présentant des rugosités grandes devant la longueur d'onde, ou bien un volume au sein duquel la diffusion peut entraîner une large gamme de différences de marches, là encore grande devant la longueur d'onde. En sortie du milieu, la phase de l'onde rétrodiffusée ou transmise apparaîtra alors comme aléatoire, et décorrélée d'un point à l'autre.

Si on place en face de la sortie du milieu un écran, éventuellement précédé d'un système d'imagerie, chaque point de l'écran recevra des contributions de tous les points de la sortie du milieu. Ces contributions, cohérentes et de phases aléatoires, créeront des interférences elles-mêmes aléatoires. L'image obtenue prendra l'apparence de grains, dont la taille est de l'ordre de la limite de résolution du système d'imagerie. C'est le type de motif ainsi obtenu qu'on appelle du speckle. Un exemple en est présenté Fig. 1.1.

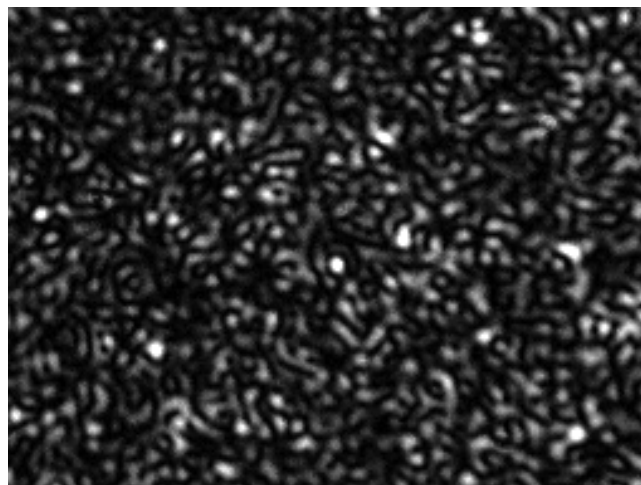


FIGURE 1.1 – Exemple de motif de speckle obtenu en éclairant à l'aide d'un laser à 532 nm un échantillon de métal sablé. Pour la captation de l'image, on a utilisé une caméra Basler acA1300 sans filtre infrarouge pour obtenir une image RGB, puis on en a extrait le canal vert. Enfin, les valeurs ont été linéarisées en post-traitement pour être proportionnelles à la puissance reçue par chaque pixel.

Dans cette section, on verra comment le speckle peut être classifié et caractérisé selon ses propriétés. Pour ce faire, on distinguera statistiques dites du premier ordre — c'est-à-dire celles qui ne

dépendent que des lois marginales des échantillons du signal — et du second ordre — c'est-à-dire celles qui dépendent des lois jointes entre échantillons.

1.2.1 Statistiques du premier ordre

Speckle pleinement développé

On dit qu'un motif de speckle est **pleinement développé** si [1] :

- En sortie du milieu imagé, la distribution de phase est uniforme sur $[0, 2\pi]$;
- En tout point du capteur ou de l'écran, les contributions cohérentes de l'onde rétrodiffusée qui interfèrent entre elles sont en nombre suffisant pour appliquer le théorème central limite.

Dans ce cas, la sommation cohérente des contributions en un point s'apparente à une marche aléatoire isotrope dans le plan complexe, donnant lieu à une amplitude complexe résultante circulaire gaussienne — c'est-à-dire que sa partie réelle et sa partie imaginaire suivent des lois normales indépendantes et identiquement distribuées. On note σ leur écart-type commun.

L'intensité de l'onde résultante est alors la somme des carrés de deux gaussiennes indépendantes et identiquement distribuées (*i.i.d.*) : elle suit donc une loi du χ^2 à deux degrés de libertés, c'est-à-dire d'une loi exponentielle. Sa densité est donnée par :

$$p_I(x) = \frac{1}{\bar{I}} \exp\left(-\frac{x}{\bar{I}}\right)$$

où $\bar{I} = 2\sigma^2$ est l'intensité moyenne. Le module de l'amplitude $|\mathbf{A}| = \sqrt{I}$ suit alors une loi de Rayleigh-Nakagami.

Un paramètre souvent essentiel dans l'étude du speckle est son contraste, ou coefficient de variation. Celui-ci est défini par :

$$C_I = \frac{\sqrt{\mathbb{V}[I]}}{\mathbb{E}[I]}$$

où \mathbb{E} et \mathbb{V} désignent respectivement la variance et l'espérance. En pratique, elles sont estimées respectivement à l'aide de la moyenne et de la variance empiriques.

D'après les propriétés de la loi exponentielle, le contraste d'un speckle pleinement développé vaut 1. Si l'on considère l'inverse du contraste comme le rapport signal à bruit (SNR) du speckle, celui-ci vaut donc également 1. Ce SNR très faible en comparaison d'autres types de signaux fait du speckle un bruit gênant dans beaucoup d'applications, comme en radar à synthèse d'ouverture.

Le speckle est au contraire dit **partiellement développé** si la distribution de phase n'est pas uniforme. Pour ces travaux, on ne s'intéressera pas au speckle partiellement développé.

Sommes de speckles incohérents

Certains signaux, cependant, sont également qualifiés de speckle alors qu'ils ne répondent ni à la définition du speckle pleinement développé, ni à celle du speckle partiellement développé. C'est le cas par exemple des points brillants en radar, pour lesquels un diffuseur unique domine la somme, qui apparaît comme un signal déterministe avec un bruit additif [26]. Dans ce cas, un bon formalisme est celui de la loi de Rice [27].

Une autre situation qui va davantage nous intéresser est celle où on somme de façon incohérente plusieurs signaux de speckle. Elle peut être due au système d'imagerie, par exemple si l'aire sur laquelle l'intensité est captée (celle du pixel dans le cas d'un capteur CCD ou CMOS) est plus grande que la limite de résolution de l'optique. Il arrive également que la sommation incohérente soit effectuée volontairement en tant que post-traitement, dans le but de réduire le bruit. En effet, en sommant N signaux de speckle indépendants de même intensité \bar{I} , l'intensité résultante suit une loi Gamma de paramètre de forme N :

$$p_I(x) = \frac{x^{N-1} e^{-\frac{x}{\bar{I}}}}{(N-1)! \bar{I}^N}$$

Son contraste vaut alors $C_I = \frac{1}{\sqrt{N}}$, et le rapport signal à bruit est désormais de \sqrt{N} . En radar à synthèse d'ouverture, la sommation incohérente de plusieurs images ou de pixels adjacents d'une même image est appelée *multi-looking*, et le paramètre N nombre de vues équivalent (*Equivalent Number of Looks* ou ENL).

Speckle surfacique et volumique

Le speckle est un phénomène d'interférences : il met donc en jeu des ondes cohérentes, donc polarisées. On va voir que cela a une influence sur les propriétés du signal de speckle.

Sortons donc à nouveau de la théorie scalaire de la lumière, et plaçons-nous dans une situation à même de générer du speckle. Le champ incident \vec{E}_i est désormais supposé vectoriel. Décomposons-le donc selon ses deux axes de polarisation :

$$\vec{E}_i = E_{ix} \vec{u}_x + E_{iy} \vec{u}_y$$

Lors du passage de l'onde par le milieu imagé, sa diffusion par celui-ci va déphaser aléatoirement chacune de ses deux composantes, comme dans le cadre scalaire. Le champ résultant s'exprime en fonction des coefficients de la matrice de Jones locale :

$$\vec{E}_r = E_{ix} \nu_{xx} \vec{u}_x + E_{iy} \nu_{yx} \vec{u}_x + E_{ix} \nu_{xy} \vec{u}_y + E_{iy} \nu_{yy} \vec{u}_y \quad (1.1)$$

où les propriétés des ν_{ij} dépendent de celles du milieu, comme on le verra ensuite. Les deux composantes de l'onde diffusée \vec{E}_r sont donc données par :

$$\begin{cases} E_{rx} &= E_{ix} \nu_{xx} + E_{iy} \nu_{yx} \\ E_{ry} &= E_{ix} \nu_{xy} + E_{iy} \nu_{yy} \end{cases} \quad (1.2)$$

Deux ondes de polarisations orthogonales ne peuvent pas interférer. L'optique du système d'imagerie agit donc indépendamment sur E_{rx} et E_{ry} , pour donner le champ suivant dans le plan image :

$$\begin{cases} E_{fx} &= \iint h(\mathbf{x} - \mathbf{u}) E_{rx}(\mathbf{u}) du_x du_y \\ E_{fy} &= \iint h(\mathbf{x} - \mathbf{u}) E_{ry}(\mathbf{u}) du_x du_y \end{cases} \quad (1.3)$$

Finalement, la quantité mesurée par un capteur CCD ou CMOS sera la somme des intensités associées à E_{fx} et E_{fy} — toujours en raison de leur incapacité à interférer :

$$I = \langle |E_{fx}|^2 \rangle + \langle |E_{fy}|^2 \rangle \quad (1.4)$$

Le nombre de termes en jeu à chaque étape est sensiblement supérieur au cas scalaire : on peut donc se demander quelles sont cette fois les statistiques de I . Celles-ci dépendent de celles des ν_{kl} , qui elles-mêmes dépendent des propriétés du milieu. On peut en effet distinguer deux comportements principaux :

- Soit la diffusion par le milieu est *surfacique*, c'est-à-dire que l'onde y pénètre peu avant d'être rétrodiffusée. Dans ce cas, le caractère aléatoire du déphasage vient plutôt de rugosités en surface du milieu. On a alors surtout de la diffusion simple : la plupart des photons rencontrent un seul diffuseur entre le laser et le capteur ;
- Soit la diffusion par le milieu est *volumique*, c'est-à-dire que l'onde incidente y pénètre profondément et rencontre un assez grand nombre de diffuseurs avant d'en ressortir. La diffusion est donc multiple.

À chacun de ces deux types de diffusion est associé un comportement en polarisation [28]. Si la diffusion est surfacique, l'effet sur l'onde est localement proche de celui d'une surface de réflexion : la polarisation change peu, et la matrice de Jones est proche d'une matrice scalaire complexe — mais elle est aléatoire dans l'espace. Si la diffusion est volumique, en revanche, ses quatre coefficients apparaissent complètement aléatoires et décorrélés. Intuitivement, cela s'explique par le fait que chaque rencontre de l'onde avec un diffuseur modifie un peu sa polarisation. Dès lors, celle-ci apparaît d'autant plus aléatoire que les rencontres avec des diffuseurs sont nombreuses et aléatoires.

Plus précisément, supposons d'abord que la diffusion par notre milieu est surfacique. Dans ce cas :

- L'onde diffusée vérifie $E_{rx} \simeq E_{ix}e^{i\varphi}$ et $E_{ry} \simeq E_{iy}e^{i\varphi}$, où φ est le déphasage induit par la diffusion surfacique. Si le milieu est à même de générer du speckle, φ est spatialement aléatoire, de loi uniforme sur $]-\pi, \pi]$.
- L'optique a ensuite pour effet de générer deux champs de speckle pleinement développés : E_{fx} et E_{fy} , comme donné par (1.3).
- Enfin, que E_{rx} et E_{ry} soient cohérents entre eux ou non, c'est-à-dire que l'onde incidente soit polarisée ou non, ils sont de même longueur d'onde moyenne. Dès lors, les deux termes de (1.4) donnent lieu au même motif de speckle. La somme réalisée par le capteur se fait donc entre deux variables aléatoires fortement corrélées, suivant toutes les deux une loi exponentielle. Par conséquent, I suit également une loi exponentielle.

Si la diffusion est surfacique, on se ramène donc au cas du speckle pleinement développé, malgré le caractère vectoriel de l'onde.

Supposons à présent que la diffusion est volumique. Il faut alors distinguer deux cas :

- Soit l'onde incidente est polarisée. Dès lors :
 - Les sommes donnant E_{rx} et E_{ry} dans (1.2) sont des sommations cohérentes d'ondes cohérentes. E_{rx} et E_{ry} sont donc eux-mêmes les amplitudes complexes de deux ondes cohérentes. Mais, du fait de la décorrélation spatiale entre les v_{kl} , ils sont incohérents entre eux.
 - La convolution avec la PSF de l'optique dans (1.3) a pour effet de générer deux champs de speckle pleinement développés, E_{fx} et E_{fy} , qui sont aussi incohérents entre eux.
 - Finalement, (1.4) est donc la sommation en intensité de deux ondes incohérentes. On obtient donc un speckle avec un nombre de vues équivalent $N = 2$.
- Soit l'onde incidente n'est pas polarisée. Dans ce cas :
 - Chacune des sommes de (1.2) est la somme de deux ondes incohérentes.
 - Dès lors, chacun des deux termes de (1.3) est la somme de deux speckles incohérents, donc est un speckle de nombre de vues équivalents 2.
 - Enfin, les deux termes de (1.4) sont sommés en intensité. Comme il s'agit de deux speckles indépendants de nombre de vues équivalent 2, on obtient finalement une intensité de nombre de vues équivalent $N = 4$.

Tous ces résultats sont vérifiés expérimentalement dans [29]. Concernant les deux cas où l'onde est polarisée, une illustration expérimentale personnelle est présentée Fig. 1.2.

Dans le cadre du speckle dynamique *polarisé* [30, Section 5.4], la polarisation est utilisée pour sélectionner la fraction de l'onde qui a, statistiquement, été plus soumise à la diffusion volumique. Pour cela, l'onde incidente est polarisée linéairement, et un polariseur linéaire orthogonal à la direction de propagation incidente est placé après la sortie du milieu diffusant. Ainsi, la fraction de l'onde ayant subi une diffusion surfacique ne sera pas transmise, car elle est globalement polarisée comme l'onde incidente. La fraction ayant subi de la diffusion volumique, en revanche, est polarisée aléatoirement : en moyenne, la moitié de l'intensité sera donc transmise par le polariseur. Sélectionner la polarisation orthogonale permet également d'éviter la réflexion spéculaire.

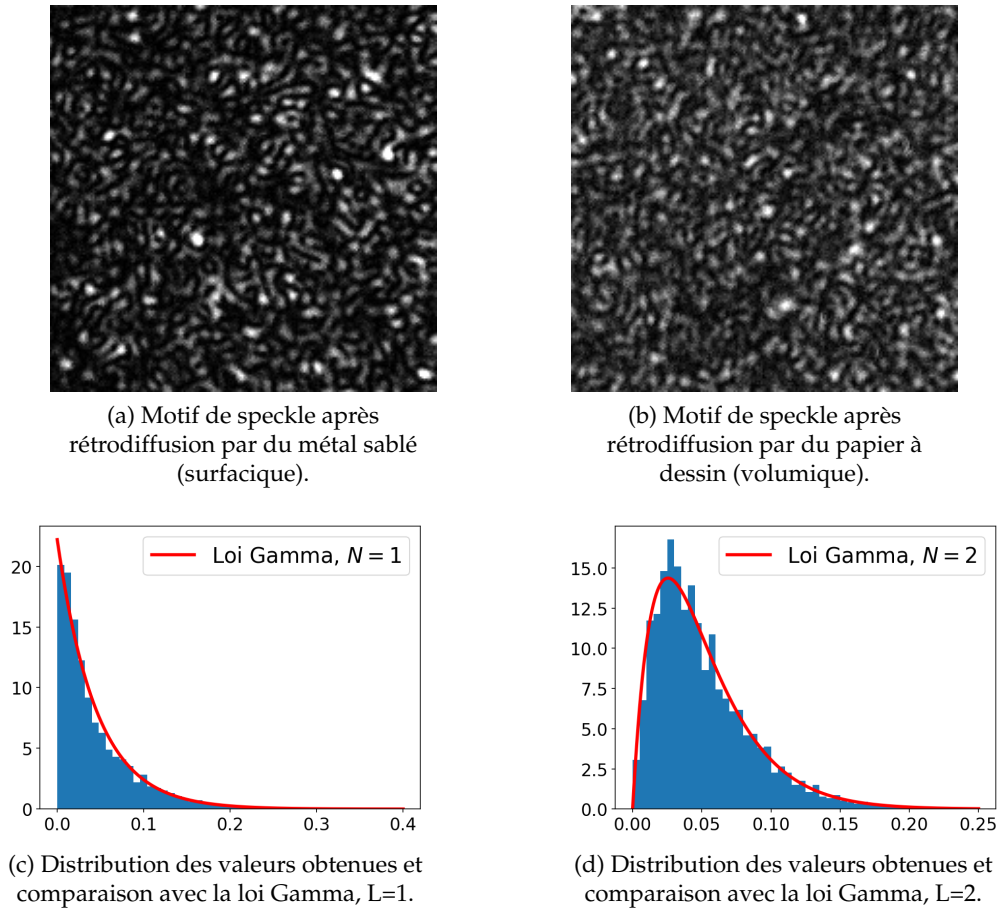


FIGURE 1.2 – Illustration expérimentale des propriétés statistiques du speckle volumique et surfacique. L’illumination est réalisée à l’aide d’un laser à 810 nm dont le faisceau est polarisé linéairement. La captation est effectuée à l’aide d’une caméra Basler acA1300 avec un temps d’exposition de 10 ms. Pour les histogrammes, les unités sont arbitraires car la caméra a été linéarisée manuellement.

1.2.2 Système d’imagerie et statistiques du second ordre

On s’est jusqu’ici intéressé aux statistiques d’un point unique de l’image. Pour pouvoir discuter des statistiques spatiales du second ordre, c’est-à-dire dépendant des lois jointes, il faut s’intéresser de plus près à la manière dont la sommation des contributions cohérentes se fait au niveau de l’image. Celle-ci dépend du système d’imagerie utilisé. On en distingue deux types principaux : l’espace libre — dans ce cas, on parle de speckle *objectif* — ou une optique d’imagerie traditionnelle, dotée d’une lentille — on parle alors de speckle *subjectif*.

Pour l’ensemble de ces travaux, le speckle considéré sera subjectif. Plus précisément, on se place dans la configuration décrite en Section 1.1.3. Le système d’imagerie est alors constitué d’un diaphragme et d’une lentille, et son effet est connu : il va convoluer l’image prévue par l’optique géométrique avec sa PSF, notée h . Ainsi, si $A_r(\mathbf{x})$ désigne le champ de speckle en sortie du milieu, on a, à un changement d’échelle près :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_r * h$$

Pour ces travaux, on considérera que cette convolution résume et caractérise entièrement l’effet de l’optique sur le champ rétrodiffusé.

Autocorrélation spatiale

Dans le cas général, l'autocorrélation R_X du processus $t \mapsto X(t)$ est définie par :

$$R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X^*(t_1)X(t_2)]$$

Si X est **stationnaire au sens large**, R_X ne dépend que de $t_2 - t_1$. Un signal physique peut être modélisé par un processus stationnaire au sens large dès lors que ses propriétés statistiques peuvent être considérées comme invariantes par translation selon la variable considérée (ici t). Pour un signal de speckle statique, cette variable est la variable d'espace à deux dimensions : il peut donc être considéré comme stationnaire cas si la zone observée est homogène — c'est-à-dire si ses propriétés sont invariantes par translation dans le plan transverse.

Sous l'hypothèse ergodique [31], R_X peut alors être estimé à l'aide d'une réalisation de X :

$$\tilde{R}_X(\tau) = \overline{x^*(t)x(t+\tau)}$$

où $\bar{\cdot}$ représente le moyennage sur t .

Dans la plupart des situations expérimentales rencontrées en pratique, l'amplitude et l'intensité du signal de speckle peuvent être considérées comme stationnaires ergodiques. On peut donc s'appuyer sur une estimation de leur autocorrélation spatiale pour en déduire des propriétés statistiques du speckle. Sauf mention contraire, on supposera systématiquement les signaux de speckle étudiés dans ces travaux stationnaires ergodiques.

Intéressons-nous à présent à l'autocorrélation de A . Comme on a $A = A_r * h$, elle est égale à la convolution des autocorrélations de A_r et de h , selon un résultat élémentaire sur les systèmes linéaires. Or A_r est supposée être complètement décorréliée d'un point à l'autre : son autocorrélation est donc une impulsion de Dirac. Ainsi, l'autocorrélation de A est, à une constante près, l'autocorrélation de la PSF de l'optique.

Pour établir celle-ci, on va s'appuyer sur le théorème de Wiener-Khintchine.

Théorème 1.2.1 (Wiener-Khintchine)

Soit s une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} de carré intégrable. Soit S sa transformée de Fourier.

Soit R l'autocorrélation de s , définie par :

$$R(\tau) = \int_{\mathbb{R}} s^*(t)s(t+\tau) dt$$

La transformée de Fourier de l'autocorrélation de s est alors donnée par la densité spectrale de puissance de s :

$$\mathcal{F}\{R\} = |S|^2$$

Ce théorème découle de calculs d'intégration élémentaires. Il se décline aisément dans d'autres espaces de départ (signaux discrets, finis ou non) et pour des dimensions supérieures. Pour les processus stochastiques, la densité spectrale de puissance d'un processus est directement définie comme la transformée de Fourier de son autocorrélation.

Revenons à h . On a déjà mentionné que les cas physiques qui nous intéressent sont ceux où la transmittance de l'ouverture, donc la fonction de transfert optique, est proportionnelle à une indicatrice. Dans un tel cas, le passage au module carré ne fait que la multiplier par une constante. Dès lors, l'autocorrélation de la PSF est en fait proportionnelle à la PSF elle-même. Ainsi, à un facteur multiplicatif près, **l'autocorrélation spatiale de A est la PSF du système optique**.

Notion de taille du grain de speckle

On a vu qu'un motif de speckle prend l'apparence d'une multitude de grains. La taille de ces grains est déterminée par l'optique : plus l'ouverture est de taille réduite, plus la PSF associée est étalée spatialement, et plus les grains sont gros. Il est alors tentant de vouloir définir formellement la

taille des grains à partir des paramètres du système optique. En effet, une telle notion renseignerait sur plusieurs aspects du système d'imagerie :

- Sur la surface d'un grain, l'onde peut être considérée comme cohérente à elle-même, ou corrélée avec elle-même. La taille du grain est donc la longueur de cohérence transverse du speckle. Ainsi, cette notion est étroitement liée à celle de cohérence spatiale.
- Elle peut aussi s'interpréter comme la résolution du système : à une échelle plus petite que la taille du grain, le système d'imagerie ne permet plus de distinguer deux points.

Avec un système à une lentille tel que décrit dans la Section 1.1.3, on peut définir la surface du grain de speckle comme l'aire équivalente de la PSF du système optique, ou comme celle de son autocorrélation spatiale. Bien sûr, une telle notion n'a pas de définition universelle. Dans les cas les plus courants, on peut toutefois prendre comme largeur équivalente celle du lobe principal de la PSF :

- Si l'ouverture est rectangulaire, de dimensions $l_x \times l_y$, on a $h(x, y) \propto \text{sinc}\left(\frac{l_x x}{\lambda z_2}\right) \text{sinc}\left(\frac{l_y y}{\lambda z_2}\right)$. Dans ce cas, le plus petit rectangle vérifiant $h(x, y) = 0$, c'est-à-dire le lobe principal, est de dimensions $\frac{2\lambda z_2}{l_x} \times \frac{2\lambda z_2}{l_y}$. Son aire vaut donc $\mathcal{A} = 4\lambda^2 z_2^2 / l_x l_y$.
- Si l'ouverture est un disque de rayon ρ_0 , $h(r) \propto \frac{J_1(2\pi\rho_0 r / \lambda z_2)}{2\pi\rho_0 r / \lambda z_2}$. Le lobe principal est alors un disque de rayon $1.22 \frac{\lambda z_2}{2\rho_0}$, donc d'aire $\mathcal{A} = 1.4884 \lambda^2 z_2^2 / 4\rho_0^2$.

À noter que toutes ces valeurs sont données au niveau du capteur : si on veut connaître la taille du grain à l'échelle de l'objet, il faut multiplier par l'inverse du grandissement $M = z_2 / z_1$.

Dans tous les cas, on note que l'aire du grain est inversement proportionnelle à celle de l'ouverture. Il s'agit d'un point critique : pour que l'aire du grain soit plus grande que le pixel, c'est-à-dire pour que le signal soit bien échantillonné au sens du théorème de Shannon, l'ouverture doit être suffisamment petite. Mais une ouverture de petite taille transmet aussi moins de lumière : la puissance reçue par le capteur peut être insuffisante. Il y a donc un compromis à trouver selon le matériel expérimental disponible et le besoin ou non d'un signal bien échantillonné.

Notion de vortex

Une dernière notion importante concernant le speckle est celle de **vortex**, ou **singularité de phase**.

Formellement, un vortex est un point où les interférences à l'origine du champ de speckle sont destructives : il s'agit donc d'un zéro du signal complexe. Ses dénominations viennent du comportement particulier de la phase du champ complexe à son voisinage : en un vortex, elle n'est pas définie ; par ailleurs, si on suit sa variation sur un lacet qui en fait le tour, elle fait un ou plusieurs tours du cercle trigonométrique. En effet, l'image d'un tel lacet par le signal complexe est elle-même un lacet dans le plan complexe, qui fait une ou plusieurs fois le tour de 0. C'est pourquoi on définit la **charge**, ou l'indice, d'un vortex comme :

$$n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} \quad (1.5)$$

où γ est un lacet faisant le tour du vortex. À noter que si γ entoure plusieurs vortex, leurs charges s'additionnent. Dans cette formule, l'intégrande est la dérivée du logarithme complexe, dont la fonction argument est la partie imaginaire : l'intégrale mesure donc la variation de celle-ci le long de γ . n est ainsi le nombre (algébrique) de fois que la phase fait le tour du cercle trigonométrique. Cette formule peut également servir à repérer les vortex, puisqu'un point est un vortex si et seulement si sa charge est non nulle.

En pratique cependant, on n'a pas accès au champ continu de speckle, mais seulement à un échantillonnage de celui-ci. Lorsqu'on dispose d'une grille de valeurs complexes, on repère un vortex en mesurant la variation de l'argument lorsqu'on parcourt dans le sens direct le carré de côté 1 reliant

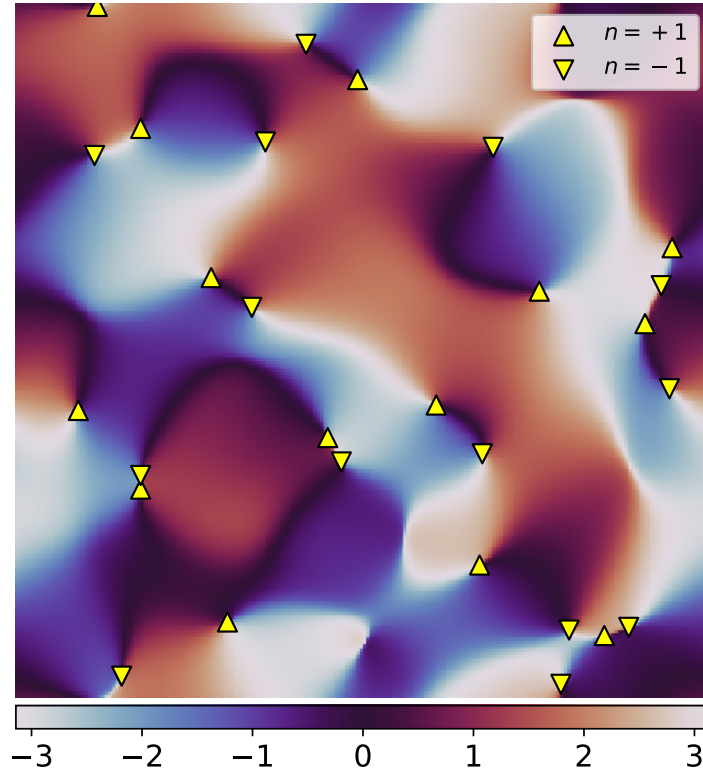


FIGURE 1.3 – Vortex d'un signal de speckle simulé, surimprimés sur son image de phase

quatre pixels d'une maille. Plus mathématiquement, notons z_i la valeur du i -ème pixel de la maille, et $\Delta\varphi_{i,j}$ l'unique représentant de $\arg(z_j - z_i)$ compris entre $-\pi$ exclus et π inclus. L'indice d'un point situé entre les quatre pixels est défini par :

$$n = \frac{1}{2\pi} [\Delta\varphi_{1,2} + \Delta\varphi_{2,3} + \Delta\varphi_{3,4} + \Delta\varphi_{4,1}]$$

Un exemple d'utilisation de cette formule est présenté Fig. 1.3. Celle-ci représente l'image de la phase d'un speckle pleinement développé simulé, sur laquelle on a surimprimé des marqueurs indiquant les vortex.

Si la formule précédente suffit par exemple à repérer les vortex en radar à synthèse d'ouverture, où on a accès directement au champ complexe, un autre problème se pose en optique : on n'a accès qu'à l'intensité du signal, c'est-à-dire au module carré du champ complexe. La reconstitution d'un signal complexe à partir d'un signal d'intensité est l'objet du *problème de la phase*, et plus généralement de l'optique singulière (*singular optics*). Pour être bien posé, le problème de la phase nécessite des contraintes sur le signal. Il a largement été étudié du point de vue théorique et algorithmique [32, 33, 34, 35, 36]. Pour la reconstruction de la phase, une idée récurrente est de s'appuyer sur la transformée de Hilbert, dont le but premier est de reconstruire un signal complexe à partir de sa partie réelle [37, 38, 36].

La détection des vortex d'une image de speckle a par ailleurs des applications concrètes. Les vortex peuvent ainsi être utilisés pour la compression d'information, car un champ de speckle est théoriquement caractérisé uniquement par les positions de ses vortex [39]. En anticipant un peu la section suivante, on peut aussi mentionner des applications en métrologie [40] ou plus généralement en speckle dynamique : le mouvement des vortex au cours du temps fournit des informations sur les fluctuations du speckle lui-même [41].

1.3 Speckle dynamique

On parle de speckle *dynamique* dès lors que le motif de speckle change au cours du temps et qu'on enregistre son évolution en captant des images à intervalles réguliers. Une pile temporelle de speckle dynamique est donc la réalisation d'un processus stochastique discret de dimension 3 (deux dimensions d'espace et une de temps).

Pour qu'un signal de speckle soit dynamique, il faut que le milieu imagé lui-même change au cours du temps. Souvent, cela signifie qu'il peut être considéré comme étant constitué de diffuseurs élémentaires en mouvement. La gamme des milieux capable de générer du speckle dynamique est assez hétéroclite. On peut citer, par exemple, les suspensions dans un liquide, notamment de colloïdes ou de sphères microscopiques [2], les flux directionnels, avec beaucoup d'applications en biologie médicale (sang, lymph) [6], ou encore des phénomènes non stationnaires, comme le séchage de peinture [42].

Dès lors, le but des méthodes s'appuyant sur le speckle dynamique est de remonter aux propriétés du mouvement à partir de celles du speckle. Ces propriétés incluent notamment le type de mouvement (brownien, balistique, mixte, etc.) et des paramètres quantitatifs (coefficient de diffusion d'un mouvement brownien, vitesse d'un mouvement balistique, etc.).

Au cours de cette section, on reviendra d'abord sur les caractérisations spécifiques induites par le caractère dynamique du speckle. On verra ensuite comment les fluctuations du speckle, et en particulier sa fonction d'autocorrélation temporelle, peuvent être modélisés en fonction du type de mouvement ayant cours au sein du milieu imagé. Enfin, on présentera les méthodes expérimentales classiques permettant de caractériser et de mesurer l'activité d'un milieu à partir d'un signal de speckle dynamique.

1.3.1 Caractérisations élémentaires

Fonction d'autocorrélation temporelle

Pour beaucoup d'applications, il est raisonnable de supposer que les propriétés statistiques du signal de speckle dynamique sont invariantes par translation dans le temps, au moins à l'échelle de la durée de l'expérience. Autrement dit, le processus par lequel on modélise le signal temporel d'un pixel est stationnaire au sens large. En le supposant également ergodique, on peut donc s'appuyer sur l'autocorrélation temporelle de \mathbf{A} , définie par :

$$R_{\mathbf{A}}(\tau) = \mathbb{E}[\mathbf{A}^*(t)\mathbf{A}(t + \tau)]$$

et $R_{\mathbf{A}}$ ne dépend alors pas de t . Cette fonction est en général normalisée pour obtenir le coefficient d'autocorrélation, qui vaut 1 en 0 :

$$r_{\mathbf{A}}(\tau) = \frac{\mathbb{E}[\mathbf{A}^*(t)\mathbf{A}(t + \tau)] - |\mathbb{E}[\mathbf{A}(t)]|^2}{\mathbb{E}[|\mathbf{A}(t)|^2] - |\mathbb{E}[\mathbf{A}(t)]|^2}$$

On le notera ici $r_{\mathbf{A}}$, mais il est fréquemment noté g_1 dans la littérature, par opposition à g_2 qui est l'autocorrélation normalisée de l'intensité et qui sera définie dans la Section 1.3.2.

Beaucoup de méthodes font de la fonction d'autocorrélation temporelle la pierre angulaire de leur socle théorique. Alternativement, il est également possible de s'appuyer sur la densité spectrale de puissance du signal. D'après le théorème de Wiener-Khintchine, il s'agit de la transformée de Fourier de l'autocorrélation. Dès lors, l'une comme l'autre portent théoriquement la même information, rendant les deux approches virtuellement équivalentes.

Notion de temps de corrélation

On peut s'appuyer sur la fonction d'autocorrélation dans le but de formaliser l'idée intuitive de "vitesse de changement" d'un motif de speckle dynamique : si le speckle change "vite", l'autocorrélation décroît "vite".

Pour rendre cette notion directement comparable d'un pixel à l'autre, il est naturel d'introduire ce qu'on appelle le temps de corrélation du signal de speckle dynamique. Celui-ci peut être défini comme le temps caractéristique qu'il lui faut pour se décorrélérer de lui-même. Grossièrement, c'est donc la largeur de la fonction d'autocorrélation, ou, de façon équivalente, l'inverse de la largeur spectrale du signal temporel en un point. Mais il n'existe pas de définition universelle plus précise : dans la littérature, il est en général défini en fonction du modèle pris pour l'autocorrélation, dont il est un paramètre naturel. Les auteurs renoncent alors à en donner une définition mathématique universelle. Par ailleurs, on verra plus loin que les techniques historiques comme le contraste (étudié en Section 1.3.4) ne permettent généralement pas de vérifier la validité d'un modèle. Celui-ci n'est qu'une hypothèse, nécessairement simplificatrice, du problème, et le temps de corrélation est donc défini de façon d'autant plus approximative.

On peut toutefois noter que dans [43, p. 162], l'auteur propose une définition indépendante de toute hypothèse sur la forme de r_A :

$$\tau_c = \int_{\mathbb{R}} |r_A(\tau)|^2 d\tau$$

C'est le temps de corrélation dit de Mandel [44]. Il est par exemple employé dans [45] pour définir le temps de corrélation indépendamment du modèle, mais il est loin d'être universel.

En fait, l'inexistence d'une définition rigoureuse d'un paramètre aussi couramment employé que le temps de corrélation illustre bien le positionnement et les limites des techniques de speckle dynamique. En effet, si celles-ci sont faciles à mettre en œuvre, au niveau matériel comme algorithmique, il est difficile de les rendre vraiment quantitatives [23]. Il a été tenté à plusieurs reprises de relier τ_c à un paramètre physique : typiquement, par analyse dimensionnelle, il est tentant de voir $1/\tau_c$ comme le rapport entre la vitesse en un point et une distance caractéristique du système. Se pose alors la question du choix de la distance à utiliser pour cet office. Plusieurs possibilités ont été suggérées [46], qui diffèrent de plusieurs ordres de grandeur (longueur d'onde, largeur de la PSF, etc.), sans qu'aucune ne s'impose universellement. Par ailleurs, pour certaines applications du speckle dynamique, comme les mouvements browniens, la notion de vitesse n'a pas grand sens [5].

On peut donc considérer que τ_c n'est défini qu'à une constante multiplicative près. Dès lors, la comparaison n'est possible que toutes choses égales par ailleurs, c'est-à-dire sur un même échantillon. C'est ainsi que le speckle dynamique s'est imposé comme une technique destinée essentiellement à l'imagerie, permettant de cartographier qualitativement les différences de dynamiques au sein d'un milieu, mais pas de les comparer d'un échantillon à l'autre. À l'inverse, d'autres techniques comme le Doppler [47, 22] permettent d'obtenir des valeurs de vitesse précises en un point, mais obtenir une image de plein champ est alors laborieux.

1.3.2 Intensité et cohérence spatiale

Comme on l'a déjà mentionné, le signal enregistré par un capteur de type CCD ou CMOS est une fonction croissante de l'intensité lumineuse du signal reçu. On n'a donc pas directement accès à l'amplitude complexe du signal, et, par conséquent, pas non plus accès à son autocorrélation. Or c'est sur celle-ci qu'on a raisonné jusque-là. Avant de poursuivre, il convient donc d'identifier comment on peut la retrouver indirectement.

On va pour cela passer par l'autocorrélation de l'intensité. Plus précisément, on définit I_t l'intensité instantanée du pixel \mathcal{P} considéré, c'est-à-dire :

$$I_t = \iint_{\mathcal{P}} |\mathbf{A}|^2 dS$$

L'intensité instantanée est donc telle que $\int_0^T I_t(t) dt = I$. On va s'intéresser à son autocorrélation normalisée, définie par :

$$\begin{aligned} s_{I_t}(\tau) &= \frac{\mathbb{E}[I_t(t)I_t(t+\tau)]}{\mathbb{E}[I_t(t)]^2} \\ &= \frac{R_{I_t}(\tau)}{\mathbb{E}[I(t)]^2} \end{aligned}$$

où R_{I_t} est l'autocorrélation simple de l'intensité. Cette normalisation est fréquemment utilisée sous le nom de g_2 dans la littérature [6, 5, 21]. On préfère ici la nommer s_{I_t} pour marquer une différence de notation entre les coefficients d'autocorrélation (notés r) et les autocorrélations normalisées (notées s). Ainsi définie, elle prend en 0 une valeur comprise entre 1 et 2, 2 correspondant à du speckle pleinement développé. Si le speckle se décorrèle complètement de lui-même au bout d'un temps suffisamment long, elle converge vers 1 à l'infini.

On va voir que sous certaines hypothèses sur le signal, il est possible de lier autocorrélations de l'amplitude complexe et de l'intensité. C'est l'objet de la relation dite de Siegert, du nom de l'auteur de l'article qui l'a introduite [48].

Relation de Siegert spatiale

Théorème 1.3.1 (Relation de Siegert spatiale)

Soit \mathbf{A} l'amplitude complexe d'un signal de speckle pleinement développé et stationnaire. \mathbf{A} est donc circulaire gaussienne. On suppose que l'autocorrélation spatio-temporelle de \mathbf{A} est séparable, c'est-à-dire qu'il existe deux fonctions f et g telles que :

$$R_{\mathbf{A}}(\Delta\mathbf{x}, \tau) = f(\Delta\mathbf{x})g(\tau)$$

On suppose par ailleurs que \mathbf{A} est acquis à l'aide d'un capteur qui mesure $I = |\mathbf{A}|^2$, sur des pixels carrés et pendant un temps d'exposition T .

Alors il existe $\beta \in [0, 1]$ tel que :

$$s_{I_t}(\tau) = 1 + \beta |r_{\mathbf{A}}(\tau)|^2$$

Démonstration. Repartons de la définition de R_{I_t} . On a :

$$\begin{aligned} R_{I_t}(\tau) &= \mathbb{E}[I_t(0)I_t(\tau)] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_{\mathcal{P}} |\mathbf{A}(x, y, 0)|^2 dx dy \int_{\mathcal{P}} |\mathbf{A}(x, y, \tau)|^2 dx dy\right] \\ &= \int_{\mathcal{P}} \int_{\mathcal{P}} \mathbb{E}\left[|\mathbf{A}(x_1, y_1, 0)|^2 |\mathbf{A}(x_2, y_2, \tau)|^2\right] dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \end{aligned}$$

Comme \mathbf{A} est un processus gaussien circulaire, on peut s'appuyer sur les propriétés de la loi normale :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[|\mathbf{A}(x_1, y_1, 0)|^2 |\mathbf{A}(x_2, y_2, \tau)|^2\right] &= \mathbb{E}\left[|\mathbf{A}(x_1, y_1, 0)|^2\right] \mathbb{E}\left[|\mathbf{A}(x_2, y_2, \tau)|^2\right] \\ &\quad + |\mathbb{E}[\mathbf{A}^*(x_1, y_1, 0)\mathbf{A}(x_2, y_2, \tau)]|^2 \\ &= \mathbb{E}[I_{p,t}]^2 + |R_{\mathbf{A}}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, \tau)|^2 \end{aligned}$$

Reprenons donc le calcul de R_{I_t} :

$$\begin{aligned} R_{I_t}(\tau) &= \int_{\mathcal{P}} \int_{\mathcal{P}} \mathbb{E}[I_{p,t}(0, 0, 0)]^2 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 + \int_{\mathcal{P}} \int_{\mathcal{P}} |R_{\mathbf{A}}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, \tau)|^2 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \\ &= \mathbb{E}[I_t(0)]^2 + \left[\int_{\mathcal{P}} \int_{\mathcal{P}} \left|\frac{R_{\mathbf{A}}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, \tau)}{R_{\mathbf{A}}(0, 0, \tau)}\right|^2 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2\right] |R_{\mathbf{A}}(\tau)|^2 \end{aligned}$$

Divisant par $\mathbb{E}[I_t(0)]^2$, on obtient finalement :

$$s_{I_t}(\tau) = 1 + \beta(\tau) |r_A(\tau)|^2$$

où β est donné par :

$$\beta(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{l_p^4} \int_{\mathcal{P}} \int_{\mathcal{P}} \left| \frac{R_A(x_2 - x_1, y_2 - y_1, \tau)}{R_A(0, 0, \tau)} \right|^2 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 & \text{si } R_A(\tau) \neq 0; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.6)$$

Remarquons à présent que le rapport d'autocorrélations dans l'intégrale peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{R_A(x_2 - x_1, y_2 - y_1, \tau)}{R_A(0, 0, \tau)} &= \frac{f(x_2 - x_1, y_2 - y_1)g(\tau)}{f(0, 0)g(\tau)} \\ &= \frac{f(x_2 - x_1, y_2 - y_1)}{f(0, 0)} \end{aligned} \quad \square$$

Ainsi, β ne dépend pas de τ .

Exemple d'évolution de β en fonction de la taille du grain

Pour illustrer comment β décroît lorsque la taille du grain diminue par rapport à celle du pixel, on va prendre un exemple concret.

On se place donc dans la situation d'une ouverture circulaire. La PSF associée est alors centrosymétrique et de la forme :

$$h(r) = 2 \frac{J_1(\alpha r)}{\alpha r}$$

La première annulation de h a lieu pour $\alpha r \simeq 1.22\pi$. On reparamètre donc h sous la forme :

$$h_l(r) = 2 \frac{J_1(1.22\pi r/l)}{1.22\pi r/l}$$

Ainsi, h s'annule pour $r = l$, et le paramètre $l > 0$ peut être vu comme le rayon du grain de speckle.

On suppose par ailleurs le pixel carré de côté 1. En réinjectant tous ces paramètres dans (1.6), on obtient l'expression suivante pour β :

$$\beta(l) = \iiint\limits_{[0,1]^4} \left| h_l \left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right) \right|^2 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \quad (1.7)$$

Le graphe de β , en échelle linéaire et logarithmique, est reproduit Fig. 1.4. Ses valeurs ont été calculées par intégration numérique à l'aide de (1.7).

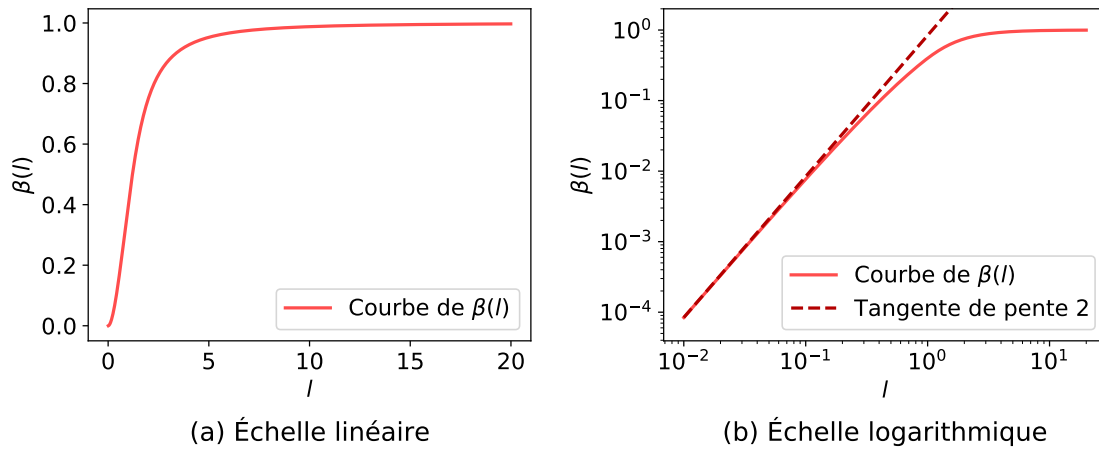
Au vu de ces graphes, peut noter les propriétés suivantes :

- Lorsque $l \rightarrow +\infty$, β tend vers 1. Il s'agit du cas où la taille du pixel devient négligeable devant la taille du grain. Dans ce cas, l'intensité mesurée est exactement le module carré de l'amplitude complexe et on a :

$$s_{I_t}(\tau) = 1 + |r_A(\tau)|^2$$

- À l'inverse, lorsque $l \rightarrow 0$, β devient proportionnel à l^2 , et donc au rapport entre aire du grain de speckle et aire du pixel. L'asymptote correspondante est affichée sur le graphe logarithmique de la Fig. 1.4. Mathématiquement, β est en fait le coefficient de variation de l'intensité instantanée : lorsque le grain devient petit devant le pixel, tout se passe comme si ce dernier intégrait autant de contributions incohérentes qu'il y a de grains.

β mesure en fait la perte de cohérence spatiale due à l'intégration sur un pixel. Mais on va voir qu'on peut le généraliser à d'autres pertes de cohérence.

FIGURE 1.4 – Graphe de β , en échelle linéaire et logarithmique.

Généralisation

En pratique, le modèle sous-tendu par les hypothèses de la relation de Siegert spatiale est abusif. En effet, il implique que seule la perte de cohérence spatiale, due à l'intégration sur les pixels, diminue la cohérence globale du signal. Or d'autres sources de pertes de cohérence interviennent, comme la dépolarisation, ou même la perte de cohérence temporelle si on manipule les autocorrélations discrétisées. Ces phénomènes ne remettent pas en cause la relation de Siegert — il serait d'ailleurs formellement possible de les intégrer à la démonstration ci-dessus — mais diminuent encore la valeur de β . Ce dernier mesure en fait, plus généralement que la perte de cohérence spatiale, toutes les pertes de cohérences autres que temporelle (si on manipule les autocorrélations continues). Pour cette raison, on le considère en général comme un paramètre supplémentaire du modèle, qu'on ajuste au mieux mais qu'on n'essaie pas de prédire théoriquement.

Il est aussi possible de généraliser la relation de Siegert à des moments d'ordre supérieur [49]. C'est notamment utile pour tester l'hypothèse que le signal d'amplitude est circulaire gaussien.

1.3.3 Modélisation

On a vu que le principal paramètre d'intérêt en speckle dynamique était le temps de corrélation, et qu'on le définissait en général à partir du modèle pris pour l'autocorrélation. On a vu aussi que le fait de n'avoir accès qu'à l'intensité n'était pas forcément rédhibitoire pour l'accès à l'autocorrélation de l'amplitude complexe. Pour pouvoir effectivement calculer un temps de corrélation à partir d'un signal de speckle, on va à présent s'intéresser aux modèles possibles pour l'autocorrélation, ainsi qu'aux hypothèses physiques qu'ils sous-tendent.

Choix du modèle d'autocorrélation

Historiquement, les premiers modèles de profils d'autocorrélation à avoir été proposés sont le modèle **gaussien** et le modèle **exponentiel décroissant** (ou lorentzien, en raison de la forme de sa transformée de Fourier) [6]. L'un comme l'autre impliquent que la diffusion est simple, c'est-à-dire que chaque photon capté a rencontré un diffuseur mobile exactement une fois, et parfaitement homodyne, c'est-à-dire que tous les diffuseurs sont mobiles et bougent de la même façon. Ils diffèrent par l'hypothèse faite sur le mouvement des diffuseurs :

- Le modèle lorentzien fait l'hypothèse d'une fonction d'autocorrélation de la forme :

$$\rho(\tau) = e^{-\tau/\tau_c}$$

Cela correspond au cas où tous les diffuseurs sont en mouvement brownien¹, avec le même coefficient de diffusion D . On a alors [5] :

$$\tau_c = \frac{1}{Dq^2}$$

où $q = \frac{4\pi n}{\lambda} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est la norme du vecteur de diffusion (*scattering vector*), θ étant l'angle de rétrodiffusion.

- Dans le modèle gaussien, la fonction d'autocorrélation est supposée être de la forme :

$$\rho(\tau) = e^{-\alpha\tau^2/\tau_c^2}$$

où le facteur α fait l'objet de choix divers de la part des auteurs selon la manière dont ils souhaitent normaliser τ_c , par exemple pour qu'il coïncide avec le temps de corrélation de Mandel [45]. Dans le modèle gaussien, chaque diffuseur a une vitesse constante (c'est pourquoi on parle parfois de "modèle balistique"), mais la distribution des vitesses à l'échelle de la population est supposée gaussienne.

Par la suite, d'autres profils ont été introduits. Dans [46] sont proposés deux modèles qui s'avèrent être intermédiaires entre les profils gaussien et lorentzien :

- Le profil de Voigt correspond au cas où la densité spectrale de puissance du signal, vue comme une variable aléatoire, est une combinaison linéaire d'une variable gaussienne (profil gaussien) et d'une variable suivant une loi de Cauchy (profil exponentiel décroissant). Cela revient à dire que les fonctions d'autocorrélation correspondantes (resp. de profils gaussien et exponentiel décroissant) sont convoluées entre elles. Plus physiquement, cela revient à dire que le mouvement des diffuseurs est la somme vectorielle des deux types de mouvements.
- Le profil de corps rigide (*rigid body*) suppose que, au moins aux échelles de temps d'intérêt, l'objet imagé se comporte comme un ensemble de diffuseurs solidaires les uns des autres se déplaçant dans le plan transverse. Dans ce cas, l'autocorrélation obtenue correspond à la PSF de l'optique.

Quoi qu'il en soit, ces choix de modèles sont souvent largement spéculatifs, les appareils de mesure n'atteignant pas des fréquences d'acquisition suffisantes pour échantillonner correctement l'autocorrélation temporelle du signal.

Configurations homodyne et hétérodyne

Dans la littérature, deux types de configurations expérimentales sont couramment distingués : la configuration *homodyne* et la configuration *hétérodyne*.

- La configuration homodyne correspond au cas où on a une population homogène de diffuseurs en mouvement, et où on capte uniquement la lumière rétrodiffusée par ceux-ci. C'est l'hypothèse implicite qu'on a faite jusqu'ici.
- En configuration hétérodyne, en revanche, on fait interférer l'onde rétrodiffusée par le milieu avec une onde de référence qui n'a pas rencontré de diffuseurs mobiles [50, section 4.3]. On utilise souvent pour cet office une fraction de l'onde incidente qu'on ne fait pas passer par le milieu imagé. Cela peut par exemple se faire avec un interféromètre de Michelson [22].

En pratique cependant, il est rare qu'une configuration hétérodyne soit volontairement mise en place à l'aide d'un interféromètre. En revanche, dès lors que le milieu diffusant contient une population de récepteurs statiques à même de rétrodiffuser directement la lumière incidente, on obtient

¹Plus exactement, c'est la différence de marche d'un diffuseur en fonction de l'écart de temps qui est un mouvement brownien au sens mathématique du terme.

une onde de référence : c'est ce qu'on appelle de l'*heterodyne mixing* [21]. Différencier une situation réellement homodyne d'une situation d'*heterodyne mixing* n'est d'ailleurs pas toujours évident [22]. Plus généralement, si on admet qu'on a une proportion ρ de diffuseurs statiques et qu'on construit un modèle sur cette hypothèse, on a un paramètre inconnu supplémentaire, qu'il n'est pas possible de retrouver en plus de τ_c sur la base, par exemple, d'une seule estimation du contraste (voir Section 1.3.4). À cette aune, supposer qu'on a affaire à une configuration homodyne est pratique, même lorsque c'est abusif.

Configuration hétérodyne et translation

Comme mentionné précédemment, le signal enregistré par un capteur de type CCD ou CMOS est une fonction croissante de l'intensité lumineuse du signal reçu, c'est-à-dire du module carré de son amplitude complexe. Autrement dit, on perd l'information de phase. Et, comme le formalise la relation de Siegert, on perd aussi l'information de phase sur l'autocorrélation du signal.

Supposons à présent qu'il existe un mouvement général de translation parmi les diffuseurs en mouvement, éventuellement superposé à un mouvement plus chaotique (par exemple dans un vaisseau sanguin). Il se traduit alors, par effet Doppler, par un *décalage du spectre* (*Doppler shift*). Dans le domaine temporel, cela correspond à une multiplication de l'autocorrélation de l'amplitude complexe par une rampe de phase... qui est perdue dans l'autocorrélation de l'intensité. Le spectre, lui, est recentré autour de 0 : le décalage disparaît. Autrement dit, **une configuration homodyne ne permet pas de retrouver directement un mouvement d'ensemble**.

À l'inverse, en configuration hétérodyne, l'onde de référence apparaît sur le spectre comme un pic autour de 0, par rapport auquel le décalage du reste de spectre, dû aux diffuseurs mobiles, est bien maintenu. On peut rapprocher conceptuellement la configuration hétérodyne de l'holographie : dans les deux cas, on exploite les effets d'interférences pour réinjecter une partie de l'information de phase dans le signal d'intensité. Mathématiquement, cela se traduit par le fait que l'autocorrélation de l'intensité n'est plus fonction du module carré de l'autocorrélation de l'amplitude complexe, mais de sa partie réelle [50].

Il demeure que la configuration homodyne permet d'accéder à l'étalement spectral du signal (ou, dans le domaine temporel, à son temps de corrélation), c'est-à-dire *in fine* à la distribution des vitesses autour de la vitesse moyenne. Dans le cas d'un pur mouvement brownien par exemple [2], il n'y a pas de mouvement d'ensemble et on peut exprimer le coefficient de diffusion en fonction du temps de corrélation : se placer en configuration homodyne est alors tout à fait suffisant et pertinent. Plus généralement, le fait que les méthodes de speckle dynamique basées sur un modèle homodyne fonctionnent, au moins qualitativement [6, 22] montre bien qu'il est quand même possible de s'appuyer sur l'étalement spectral pour retrouver un flux.

Diffusion simple et diffusion multiple

Les considérations effectuées précédemment supposaient qu'un photon de l'onde incidente était rétrodiffusé par un unique diffuseur (mouvant ou statique) avant de parvenir au capteur. En pratique, cela n'a aucune raison d'être le cas, dès lors que la densité de diffuseurs est suffisamment grande.

Expérimentalement, les questions de diffusion multiple ont surtout été explorées dans des configurations simples, correspondant à des modèles faciles à étudier analytiquement. Ainsi, une solution colloïdale de microsphères de polystyrène [2, 5] permet d'obtenir un régime diffusif, bien connu. L'étude de tels systèmes en diffusion multiple est désignée par le terme de *Diffusing Wave Spectroscopy* [3, 4, 5].

Celle-ci, introduite par Pine [3, 4], s'appuie sur le modèle diffusif de la lumière. Ce modèle est construit sur l'hypothèse qu'à une échelle supérieure au libre parcours moyen entre diffuseurs, la densité d'énergie lumineuse U suit l'équation de diffusion [4] :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = D_l \nabla^2 U$$

À l'aide de ce modèle, et sous des hypothèses assez lourdes (notamment l'invariance des propriétés physiques de l'échantillon dans le plan transverse), il est possible de calculer la forme générale des autocorrélations dans différentes configurations. Le Tableau 1.1 suivant résume les résultats de [3, 4, 5]. Les deux configurations expérimentales mentionnées sont définies comme suit :

- Une configuration en rétrodiffusion correspond au cas où le laser et le capteur sont du même côté de l'échantillon. On se place alors dans le cas limite où l'épaisseur de celui-ci tend vers l'infini ;
- Une configuration en transmission correspond au cas où le laser et le capteur sont chacun d'un côté de l'échantillon, face à face.

Par ailleurs, on rappelle que :

- Le régime balistique correspond au cas où les diffuseurs se déplacent à vitesse constante, mais où la distribution des vitesses à l'échelle de la population suit une loi normale ;
- Le régime diffusif correspond au cas où tous les diffuseurs suivent le même mouvement brownien.

	Régime balistique	Régime diffusif
Rétrodiffusion	$\exp(-\tau/\tau_c)$	$\exp(-\sqrt{\tau/\tau_c})$
Transmission	$\frac{\sqrt{6\tau/\tau_c}}{\sinh(\sqrt{6\tau/\tau_c})}$	$\frac{\sqrt{6\tau/\tau_c}}{\sinh(\sqrt{6\tau/\tau_c})}$

TABLE 1.1 – Autocorrélation de l'amplitude complexe ($r_A(\tau)$) dans différentes configurations expérimentales

Enfin, les temps de corrélation sont donnés par les formules suivantes [5] :

- En régime balistique, on a $\tau_c = \frac{\lambda}{4\pi\delta v}$, où δv est l'écart-type de la distribution des vitesses des diffuseurs ;
- En régime diffusif, $\tau_c = \frac{1}{6Dq^2\gamma^2}$, où D est le coefficient de diffusion, q le vecteur de diffusion et γ un paramètre supplémentaire à ajuster, en général situé dans l'intervalle [1.5, 2.5].

1.3.4 Techniques de mesure indirecte du temps de corrélation

Les temps de corrélation typiques des expériences de speckle dynamique sont de l'ordre de la μs à la ms. Pendant longtemps, les caméras disponibles n'ont pas permis de capter des images avec un pas d'échantillonnage temporel plus petit — ne serait-ce que parce que cela supposait de pouvoir réduire le temps d'exposition à un temps au moins aussi court. Autrement dit, le signal temporel de speckle ne pouvait pas être échantillonné correctement au sens du théorème de Shannon. Cette époque est révolue, ou s'apprête à l'être : dans beaucoup d'articles récents, les auteurs échantillonnent directement l'autocorrélation de leur signal [14, 51, 24]. Cela a des avantages considérables, comme le fait de pouvoir valider son modèle à partir de la forme constatée de l'autocorrélation, ou de pouvoir y ajouter des paramètres, pour prendre en compte une situation hétérodyne par exemple.

Cependant, les méthodes de mesure indirecte du temps de corrélation ont été les seules disponibles pendant plusieurs décennies. Par ailleurs, la différence de prix entre les caméras rapides, capables d'échantillonner correctement le signal, et les caméras lentes, limitées aux mesures indirectes, pousse à ne pas complètement écarter ces dernières². Pour toutes ces raisons, il paraît donc important de revenir sur les méthodes historiques.

²Compter quelques centaines d'euros pour une caméra lente, et quelques dizaines de milliers pour une caméra rapide.

Contraste

Si le temps d'exposition T est plus long que le temps de corrélation τ_c , il est impossible d'échantillonner correctement l'autocorrélation du signal, et donc d'y avoir accès directement. En revanche, on a affaire à un phénomène de décohérence temporelle, d'autant plus important que le rapport T/τ_c est grand.

Ce phénomène peut être exploité pour en tirer de l'information sur le signal. En effet, plus T est grand devant τ_c , plus cela signifie que le speckle varie beaucoup pendant l'intégration, et donc plus l'intégration revient à sommer un grand nombre de signaux statistiquement indépendants. Ainsi, on se retrouve dans une situation analogue à celle de la loi des grands nombres : quand le temps d'exposition s'allonge, l'intensité moyenne sur celui-ci converge vers une constante. Autrement dit, le contraste du speckle diminue.

Pour établir une formule précise, on aura d'abord besoin du lemme suivant :

Lemme 1.3.1

Soit f une fonction paire intégrable sur $[0, a]$, $a > 0$. On a :

$$\int_0^a \int_0^a f(y-x) \, dy \, dx = 2a \int_0^a \left[1 - \frac{x}{a}\right] f(x) \, dx \quad (1.8)$$

Démonstration. Par parité de f et symétrie des rôles joués par x et y , il est clair que :

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^a f(y-x) \, dy \, dx &= 2 \int_0^a \int_0^x f(y-x) \, dy \, dx \\ &= 2 \int_0^a \int_0^x f(t) \, dt \, dx \end{aligned}$$

On calcule alors l'intégrale extérieure par intégration par parties, en intégrant $x \mapsto 1$ et en dérivant $x \mapsto \int_0^x f(t) \, dt$:

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^a f(y-x) \, dy \, dx &= 2 \left[x \int_0^x f(t) \, dt \right]_0^a - 2 \int_0^a x f(x) \, dx \\ &= 2a \int_0^a f(t) \, dt - 2 \int_0^a x f(x) \, dx \end{aligned}$$

Et finalement, on a bien :

$$\int_0^a \int_0^a f(y-x) \, dy \, dx = 2a \int_0^a \left[1 - \frac{x}{a}\right] f(x) \, dx$$

c'est-à-dire le résultat recherché. □

On peut alors énoncer le théorème :

Théorème 1.3.2

Le contraste de l'intensité du speckle est donné par :

$$C_I = \sqrt{\frac{2\beta}{T} \int_0^T \left[1 - \frac{\tau}{T}\right] |r_A(\tau)|^2 \, d\tau} \quad (1.9)$$

Démonstration. Examinons le deuxième moment de I .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I(t)^2] &= \mathbb{E}\left[\int_0^T I_t(t) \, dt \int_0^T I_t(t) \, dt\right] \\ &= \int_0^T \int_0^T \mathbb{E}[I_t(t) I_t(s)] \, dt \, ds \\ &= \int_0^T \int_0^T R_{I_t}(t-s) \, dt \, ds \end{aligned}$$

Comme R_{I_t} est paire, on peut lui appliquer le lemme 1.3.1 :

$$\mathbb{E}[I^2] = 2T \int_0^T \left[1 - \frac{\tau}{T}\right] R_{I_t}(\tau) d\tau$$

Et le carré du contraste de l'intensité est alors donné par :

$$\begin{aligned} C_I^2 &= \frac{\sigma_I^2}{\mu_I^2} \\ &= \frac{\mathbb{E}[I^2]}{\mathbb{E}[I]^2} - 1 \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T \left[1 - \frac{\tau}{T}\right] s_{I_t}(\tau) d\tau - 1 \end{aligned}$$

où $s_{I_t} = \frac{R_{I_t}}{\mathbb{E}[I_t(t)]^2}$ est l'autocorrélation normalisée de I_t .

On utilise alors la relation de Siegert (théorème 1.3.1) :

$$s_{I_t}(\tau) = 1 + \beta |r_A(\tau)|^2$$

On obtient finalement le résultat recherché :

$$C_I^2 = \frac{2\beta}{T} \int_0^T \left[1 - \frac{\tau}{T}\right] |r_A(\tau)|^2 d\tau$$

□

Ainsi, cette formule permet, à partir d'une hypothèse sur la forme de r_A , d'exprimer C_I^2 en fonction de τ_c . En inversant la formule, puis en réinjectant une estimation du contraste (qui peut être spatiale ou temporelle), on peut remonter à une estimation de τ_c .

Parmi les articles fondateurs exploitant le contraste, on peut noter [6, 7]. Dans [6], le contraste est même remplacé par un filtre passe-haut optique, faute d'un capteur numérique et de moyens informatiques suffisants pour le calcul du contraste. L'enjeu était alors clairement d'obtenir une image qualitative faisant apparaître la vascularisation, et pas de mesurer précisément des flux. D'ailleurs, les auteurs ne cherchent même pas à inverser (1.9) pour obtenir une estimation de τ_c .

Par la suite, les auteurs ont cependant cherché à visualiser τ_c ou son inverse, qui ont plus de signification physique [19]. C'est en fait souvent possible même sans qu'il soit nécessaire de faire une hypothèse sur la forme du profil d'autocorrélation et d'inverser (1.9). En effet, lorsque le temps d'exposition T est grand devant le temps caractéristique de décorrélation τ_c , la formule (1.9) devient la formule dite de Goodman [43] :

$$\frac{T}{\tau_c} \sim \frac{1}{C_I^2}$$

où C_I est le contraste. Cette formule exprime le fait que, au cours du temps d'exposition T , le speckle se décorrèle entièrement de lui-même T/τ_c fois. Ainsi, l'intégrer revient à sommer de façon incohérente T/τ_c tirages indépendants de speckle, c'est-à-dire à faire ce que les radaristes appellent du *multi-looking*. Pour estimer T/τ_c , il faut donc calculer le nombre de vues équivalent du speckle, qui est donné par $1/C_I^2$ indépendamment de sa loi.

Plusieurs auteurs ont montré que, dans les conditions d'expérimentation courantes, le rapport T/τ_c était assez grand pour que la formule soit valable [10, 45], dans le sens où elle produit des approximations de τ_c suffisamment précises pour obtenir des cartes d'activité de bonne qualité.

Un mot sur la première formule fausse de Goodman

Sous l'impulsion de [6] (dont les auteurs ont repris une formule de [52]), la formule suivante a longtemps circulé en lieu et place de (1.9) :

$$C_I^2 \propto \frac{1}{T} \int_0^T |r_A(\tau)|^2 d\tau$$

Cette formule est fautive, elle découle d'une erreur de calcul. Elle a pourtant été considérée comme valable de nombreuses années. Certains auteurs ont pu la voir comme une méthode alternative de valeur équivalente à (1.9) [10]. Il a fallu attendre le milieu des années 2000, avec notamment [5], pour que la formule corrigée soit établie (ou en tout cas qu'elle obtienne suffisamment d'audience) et largement acceptée.

Ceci étant dit, il faut relativiser la portée scientifique de cette erreur, même si elle a mis plusieurs années à être corrigée une bonne fois pour toutes. D'abord, les méthodes basées sur le contraste de speckle reposent de toute façon sur un grand nombre d'approximations tout au long de la chaîne menant des images brutes à la carte de mouvement (hypothèse de stationnarité des phénomènes, choix du modèle d'autocorrélation, etc.) : une substitution de formules n'en est qu'une de plus. Ensuite, dès lors que r_A décroît rapidement, l'essentiel de sa masse est située près de 0, où les intégrandes des deux formules sont égales à 1. En particulier, la formule de Goodman (2) est valable avec les deux formules, et fournit le même résultat à un facteur 2 près.

Zero-crossings

Une autre méthode parfois utilisée pour la mesure du mouvement est celle des *zero-crossings* [53, 54, 55]. Elle consiste à centrer le signal, puis à compter le nombre de fois que le signal centré change de signe (autrement dit, qu'il "franchit zéro"). Intuitivement, un signal avec un grand nombre de passages par zéro fluctue beaucoup autour de sa moyenne, et donc sera associé à plus de mouvement. On va voir que cette intuition se formalise mathématiquement.

Cas continu

Supposons d'abord qu'on a affaire à un processus continu X . Dans ce cas, la formule la plus générale est due à [56]. Elle est valable si X est stationnaire, ergodique, et si ses trajectoires sont suffisamment lisses, en particulier pour que la dérivée X' de X soit bien définie [57]. On a alors :

$$\mathbb{E}[N_0] = \int_{-\infty}^{+\infty} |x'| p(0, x') dx'$$

où $p(x, x')$ est la densité de probabilité jointe de $(X(t), X'(t))$.

Si on suppose de plus que X est gaussien, d'autocorrélation r suffisamment lisse, on a [56, 58, 53, 57] :

$$\mathbb{E}[N_0] = \frac{1}{\pi} \sqrt{-r''(0)}$$

Si r n'est pas deux fois dérivable en 0, $\mathbb{E}[N_0] = +\infty$ [58].

À noter que, par le théorème de Wiener-Khintchine, on a aussi :

$$r''(0) = \frac{R''(0)}{R(0)} = -\frac{\int_{\mathbb{R}} \omega^2 S(\omega) d\omega}{\int_{\mathbb{R}} S(\omega) d\omega}$$

où S est la densité spectrale de puissance de X . $\mathbb{E}[N_0]$ peut donc être vu comme l'étalement spectral du processus : en voyant sa densité spectrale de puissance $p(\omega) = \frac{S(\omega)}{\int_{\mathbb{R}} S(\omega) d\omega}$ comme une densité de probabilité, $\mathbb{E}[N_0]$ est proportionnel à son écart-type.

Cas discret infini

Dans la pratique, on n'a pas accès à des signaux continus, mais à leur échantillonnage. On va donc montrer un théorème adapté aux signaux discrets, qu'on peut trouver dans [57, 59].

Théorème 1.3.3

Soit X un signal de \mathbb{Z} dans \mathbb{R} . On suppose que X est de moyenne nulle, gaussien et stationnaire au sens large.

Soit N un entier supérieur ou égal à 2. Soit N_0 la variable aléatoire comptant le nombre de changements de signe de X sur $\llbracket 1, N \rrbracket$, c'est-à-dire :

$$N_0 = \#\{n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket \mid \text{sgn}(X_n) \neq \text{sgn}(X_{n+1})\}$$

Alors l'espérance de N_0 est donnée par :

$$\frac{\mathbb{E}[N_0]}{N-1} = \frac{\arccos(r[1])}{\pi}$$

Démonstration. Remarquons d'abord que N_0 peut se réécrire :

$$N_0 = \sum_{n=1}^{N-1} \mathbb{1}_{E_n}$$

où E_n est l'événement " $\text{sgn}(X_n) \neq \text{sgn}(X_{n+1})$ ".

Par stationnarité de X , tous les E_n ont la même probabilité, et, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_0] &= (N-1)\mathbb{E}[\mathbb{1}_{E_n}] \\ &= (N-1)\mathbb{P}(E_n) \end{aligned}$$

où $n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$ est quelconque. Dès lors, montrer le théorème revient à montrer :

$$\mathbb{P}(E_n) = \frac{\arccos(r[1])}{\pi}$$

Simplifions les notations, et reposons le problème comme suit :

- On dispose d'un vecteur gaussien de taille 2, noté $(X \ Y)^T$, de moyenne nulle et de matrice de variance-covariance :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

où $\rho \in [0, 1[$. ρ , X et Y correspondent respectivement à $r[1]$, X_n et X_{n+1} .

- On veut connaître la probabilité de l'évènement :

$$\begin{aligned} E &= (X > 0 \cap Y < 0) \cup (X < 0 \cap Y > 0) \\ &= E^+ \cup E^- \end{aligned}$$

c'est-à-dire la probabilité que $(X \ Y)^T$ se trouve dans le quadrant supérieur gauche ou le quadrant inférieur droit du plan.

D'abord, il est clair que E^+ et E^- sont disjoints et, par symétrie centrale de la distribution de (X, Y) , de même probabilité. On a donc $\mathbb{P}(E) = 2\mathbb{P}(E^+)$ et on va se concentrer sur le calcul de $\mathbb{P}(E^+)$.

En l'état, le problème est compliqué par la corrélation entre X et Y . On va donc les décorréler, c'est-à-dire construire deux variables aléatoires décorrélées qui sont des combinaisons linéaires de X et Y . Plus géométriquement, si on note $p(x, y)$ la densité de probabilité jointe de X et Y , elle est difficile à intégrer car ses lignes de niveau sont elliptiques : on va donc changer de variables pour obtenir une symétrie circulaire.

Dans le cas général, ce problème se traite en diagonalisant Σ^{-1} . En l'occurrence, on peut remarquer directement que les deux variables $X + Y$ et $X - Y$ sont de moyenne nulle et décorrélées. Elles sont par contre de variances respectives $2(1 + \rho)$ et $2(1 - \rho)$. Il suffit alors de poser :

$$\begin{cases} U &= \frac{X+Y}{\sqrt{2(1+\rho)}} \\ V &= \frac{X-Y}{\sqrt{2(1-\rho)}} \end{cases}$$

pour obtenir un vecteur $(U \ V)^T$ définissant un nouveau repère orthogonal qui satisfait à nos conditions.

La transformation inverse est donnée par :

$$\begin{cases} X &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{1+\rho} \cdot U + \sqrt{1-\rho} \cdot V) \\ Y &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{1+\rho} \cdot U - \sqrt{1-\rho} \cdot V) \end{cases}$$

Et on a donc les égalités entre événements suivantes :

$$\begin{aligned} \{X > 0\} &= \left\{ \sqrt{1+\rho} \cdot U + \sqrt{1-\rho} \cdot V > 0 \right\} \\ &= \left\{ V > -\frac{\sqrt{1+\rho}}{\sqrt{1-\rho}} U \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{Y < 0\} &= \left\{ \sqrt{1+\rho} \cdot U - \sqrt{1-\rho} \cdot V < 0 \right\} \\ &= \left\{ V > \frac{\sqrt{1+\rho}}{\sqrt{1-\rho}} U \right\} \end{aligned}$$

Si on se place dans le plan d'axes U et V , E^+ est réalisé pour les points tels que V se trouve au-dessus des deux droites d'équations $v = -\frac{\sqrt{1+\rho}}{\sqrt{1-\rho}} u$ et $v = \frac{\sqrt{1+\rho}}{\sqrt{1-\rho}} u$. Or U et V sont gaussiens, décorrélés et de même variance. Par conséquent, dans le plan d'axes U et V , la distribution jointe de U et V est à symétrie circulaire. La probabilité de E^+ est donc donnée par le rapport entre l'angle séparant ces deux droites et 2π .

Cet angle, noté θ , est donné par :

$$\theta = \left[\arctan \left(-\frac{\sqrt{1+\rho}}{\sqrt{1-\rho}} \right) + \pi \right] - \arctan \left(\frac{\sqrt{1+\rho}}{\sqrt{1-\rho}} \right)$$

Cette expression se simplifie grandement à l'aide de propriétés élémentaires des fonctions trigonométriques inverses :

$$\begin{aligned} \theta &= \pi - 2 \arctan \left(\frac{\sqrt{1+\rho}}{\sqrt{1-\rho}} \right) \\ &= \arctan \left(\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} \right) \\ &= \arccos(\rho) \end{aligned}$$

On a donc finalement $\mathbb{P}(E^+) = \frac{\arccos(\rho)}{2\pi}$, et donc :

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\arccos(\rho)}{\pi}$$

□

Et on a ainsi prouvé le théorème.

Lorsqu'on dispose d'un signal discret fini, ce théorème peut s'appliquer au signal centré. Par ailleurs, on peut à nouveau voir N_0 comme une sorte d'étalement spectral à travers $r[1]$. En effet, dans le cas d'un signal infini, on a :

$$\begin{aligned}
1 - r[1] &= \frac{R[0] - R[1]}{R[0]} \\
&= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} (1 - e^{i\omega}) S(\omega) d\omega}{\int_{-\pi}^{\pi} S(\omega) d\omega} \\
&= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} -2ie^{i\frac{\omega}{2}} \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) S(\omega) d\omega}{\int_{-\pi}^{\pi} S(\omega) d\omega} \\
&= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} 2\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) S(\omega) d\omega}{\int_{-\pi}^{\pi} S(\omega) d\omega}
\end{aligned}$$

où S est la densité spectrale de puissance issue de la transformée de Fourier en temps discret. Le passage de la deuxième à la troisième ligne vient de la parité de l'intégrale. Sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a $\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$; à une constante près, la dernière expression peut donc également s'interpréter (grossièrement) comme une variance.

Si le signal est fini, la formule peut aussi s'adapter, cette fois en considérant la densité spectrale de puissance issue de la transformée de Fourier discrète :

$$\begin{aligned}
1 - r[1] &= \frac{\sum_{k=0}^{N-1} (1 - e^{i\frac{2k\pi}{N}}) S[k]}{\sum_{k=0}^{N-1} S[k]} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{N-1} 2\sin^2\left(\frac{k\pi}{N}\right) S[k]}{\sum_{k=0}^{N-1} S[k]}
\end{aligned}$$

1.4 Objectifs de la thèse

Au cours de ce chapitre, on a présenté les bases physiques, techniques et historiques de l'imagerie de speckle dynamique. On peut à présent passer à la mise en pratique des notions évoquées à des signaux réels et simulés.

Comme précisé dans l'introduction générale, on dispose pour ces travaux d'une caméra haute cadence. Celle-ci doit nous permettre d'échantillonner le signal à une fréquence suffisamment élevée pour pouvoir ensuite échantillonner correctement son autocorrélation. En particulier, au contraire des configurations expérimentales historiques, notre temps d'exposition sera plus faible que le temps de corrélation du signal. Exploiter le contraste, par exemple, risque en conséquence d'être difficile. Notre premier objectif, qui fera l'objet du Chapitre 2, sera donc de trouver de nouveaux moyens de cartographier l'activité. On se limitera à de l'imagerie qualitative : on ne cherchera pas à obtenir des paramètres reflétant fidèlement une quantité physique. Plus généralement, on explorera le changement de paradigme que représente la haute cadence, de manière à identifier des hypothèses classiques qu'il pourrait ébranler — notamment l'hypothèse de stationnarité temporelle du signal.

Dans le Chapitre 3, on se penchera sur la modélisation du système optique complet, du laser à l'optique en passant par le milieu imagé. Notre constat fondateur est que les modèles proposés dans la littérature sont souvent simplistes, d'autant qu'ils ont peu changé depuis les débuts du speckle dynamique. Cela s'est longtemps justifié par l'impossibilité technologique de les valider et de les affiner, mais à présent cette impossibilité est levée. Partant de ce constat, on repartira d'hypothèses étayées et on cherchera à mettre en place une modélisation la plus complète possible. Par ailleurs, en vue d'étudier des situations pour lesquelles les calculs analytiques seraient impossibles, on détaillera l'implémentation d'un simulateur complet de notre modèle. Outre les résultats qu'on espère

obtenir, notre objectif sera aussi de poser les bases de la construction incrémentale d'un modèle et d'un simulateur aussi complets et réalistes que possible.

Enfin, notre dernier objectif, qu'on traitera dans le Chapitre 4, sera plus théorique, tout en ayant des justifications techniques très concrètes. Au cours du traitement d'un signal de speckle, on est souvent amené à effectuer de nombreuses opérations classiques, comme le filtrage, le recalage, etc. Or ces opérations sont souvent pensées pour des signaux très éloignés du speckle : typiquement, des signaux dont seule la partie déterministe est d'intérêt, tandis que le bruit est considéré comme aléatoire. Au contraire, on ne trouve pas dans la littérature de travaux concernant la manière dont ces opérations se comportent vis-à-vis de signaux essentiellement aléatoires comme le speckle. C'est ainsi que, dans ce dernier chapitre, on s'intéressera à l'effet sur les statistiques des signaux d'une classe particulière, mais en fait très large, d'opérations : celles impliquées dans le rééchantillonnage. Ainsi, on étudiera l'effet de filtres et de méthodes d'interpolation sur les distributions des signaux filtrés.

Chapitre 2

Imagerie de speckle dynamique pour la détection de la vascularisation cutanée et sous-cutanée

Introduction

On a pu voir dans le chapitre précédent que les méthodes historiques de speckle dynamique sont largement indirectes. Si leurs justifications théoriques reposent systématiquement sur l'autocorrélation temporelle, il a longtemps été impossible d'accéder directement à celle-ci, du moins en plein champ.

La donne a changé depuis quelques années avec la diffusion de caméras rapides, dont la période d'acquisition est inférieure au temps de corrélation du speckle. Cela a mené à la popularisation d'un nouveau type de méthode, consistant à ajuster l'autocorrélation empirique à un modèle donné [18, 14, 24]. En comparaison de méthodes comme le contraste, cela a de multiples avantages. La multiplicité des points de données pour l'inversion du modèle permet de raffiner celui-ci en lui rajoutant des paramètres. Elle garantit également plus de robustesse pour le calcul de ces derniers et permet de valider la qualité du modèle choisi, en s'appuyant sur la qualité de l'ajustement.

Les travaux présentés dans ce chapitre s'inscrivent dans cette tendance de fond. Avec l'aide d'une caméra haute cadence (jusqu'à quelques dizaines de kHz), nous avons cherché à imager directement la peau d'un sujet humain. Cependant, à rebours de la plupart des travaux analogues, nous avons choisi de ne pas nous appuyer sur un modèle particulier pour l'autocorrélation. En effet, notre objectif était d'imager qualitativement la vascularisation cutanée de différentes parties du corps, présentant des comportements dynamiques *a priori* variés. Cette variété nous a poussés à rester agnostiques quant à la forme de l'autocorrélation. Par ailleurs, le dispositif expérimental utilisé, qui n'interdit pas totalement les mouvements involontaires de l'échantillon, n'aurait pas permis de valider une forme particulière de façon fiable.

L'objectif de ce chapitre est donc de comparer des paramètres d'imagerie assez simples (termes particuliers de la fonction d'autocorrélation, contraste, nombre de *zero-crossings*), avec pour critère principal la qualité visuelle des images obtenues et leur résolution apparente. Si l'obtention de paramètres d'imagerie mieux étayés physiquement est un enjeu essentiel à moyen terme, il existe aussi une gamme assez large d'applications pour lesquels une imagerie qualitative de bonne qualité serait, ou est déjà, un outil très utile. Par exemple, suivre le développement de la vascularisation est un enjeu essentiel en cancérologie — une croissance anormale pouvant être le signe d'une tumeur. De même, le suivi post-opératoire de greffe de peau implique notamment de s'assurer que la zone greffée retrouve une vascularisation normale.

Outre la qualité des images, un enjeu technique important est celui de la minimisation de la durée totale d'une acquisition. Il en va d'abord du confort des patients potentiels, voire de la faisabilité pratique de la méthode, puisque l'échantillon imagé doit rester aussi immobile que possible pendant l'acquisition. Par ailleurs, nous souhaitons également ouvrir la voie à la possibilité d'imager en temps

réel l'évolution de la microvascularisation.

Dans ce chapitre, on commencera par détailler notre dispositif expérimental et nos méthodes de base d'exploitation des données. Puis on comparera quelques paramètres d'imagerie simples — contraste, zero-crossings, premier terme de l'autocorrélation — du point de vue de la qualité image et de la vitesse d'acquisition. On étudiera ensuite des paramètres un peu plus complexes, s'appuyant sur plusieurs termes de la fonction d'autocorrélation, pas tant pour déterminer leur potentiel pour l'imagerie que pour interpréter leur capacité à fournir, ou non, une bonne mesure du mouvement. Enfin, on sortira du cadre du mouvement stationnaire et de l'imagerie directe de la vascularisation pour constater qu'aux cadences utilisées, les battements cardiaques ont une influence significative sur les données.

2.1 Matériels et méthodes

2.1.1 Protocole d'acquisition des données

Les piles d'images présentées dans ce chapitre ont toutes été acquises selon un protocole analogue. Elles ont été captées à partir de différentes parties du corps du même sujet, un homme blanc de 50 ans.

Pour chaque acquisition, la zone de peau à imager a été éclairée à l'aide d'un laser dans le proche infrarouge (785 nm) placé à quelques dizaines de centimètres. À l'aide d'une lentille divergente, le faisceau a été rendu suffisamment divergent pour éclairer toute la zone d'intérêt, tout en conservant une intensité lumineuse suffisante pour éviter le bruit de quantification ou de grenaille.

La région d'intérêt a ensuite été filmée à l'aide d'une caméra Phantom VEO 710L, également placée à quelques dizaines de cm. La fréquence d'acquisition a été fixée, selon les échantillons, à une valeur allant de 2000 à 30000 Hz, et l'échantillonnage spatial de 128×128 à 256×256 . Du fait du fonctionnement de la caméra, le nombre total d'images captées en une acquisition était limité par sa mémoire interne (18 Go), ce qui correspond à quelques milliers d'images, selon leur échantillonnage, et quelques secondes.

Au total, on présente ainsi cinq acquisitions. Trois d'entre elles correspondent à la surface antérieure du poignet gauche, avec des fréquences d'acquisition respectives de 3000, 2000 et 10000 Hz. Ces acquisitions seront désignées respectivement sous les noms de WRIST_1, WRIST_2, WRIST_3. La quatrième acquisition a été réalisée en imageant la face antérieure de l'extrémité de l'index et du majeur de la main gauche. Sa fréquence d'acquisition est de 30000 Hz, et on la désignera sous le nom de FINGERS. Enfin, la dernière acquisition, qu'on appelle EAR, consiste en une pile d'images de l'oreille droite, acquise à 2000 Hz. Les paramètres d'acquisition sont réunis dans le Tableau 2.1. Par ailleurs, pour chaque pile, un exemple d'image est reproduit Fig. 2.1 tandis que la moyenne temporelle est présentée Fig. 2.2.

Nom	Taille de l'image (pixels)	Fréquence d'acquisition (Hz)	Temps d'exposition (μ s)	Nombre d'images
WRIST_1	320×240	3000	250	4981
WRIST_2	256×256	2000	490	5858
WRIST_3	128×128	10,000	32.9	21482
FINGERS	128×128	30,000	32.9	21482
EAR	256×256	2000	490	5858

TABLE 2.1 – Paramètres d'acquisition principaux pour les cinq acquisitions étudiées dans ce chapitre.

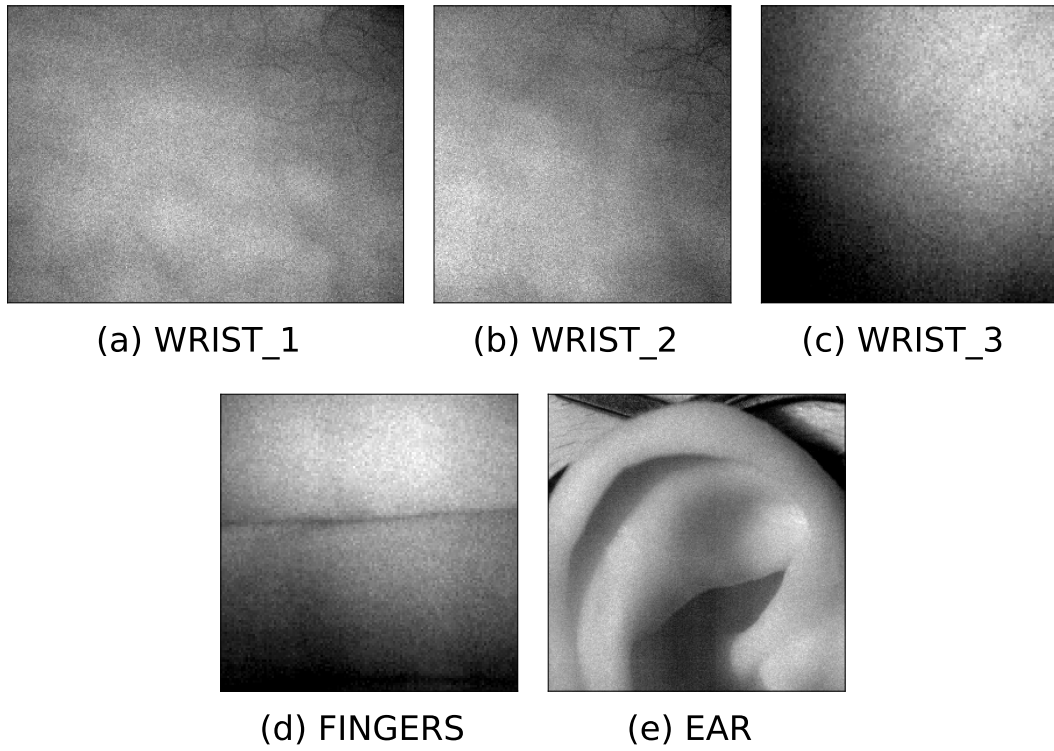


FIGURE 2.1 – Exemple d'image brute pour chacune des acquisitions

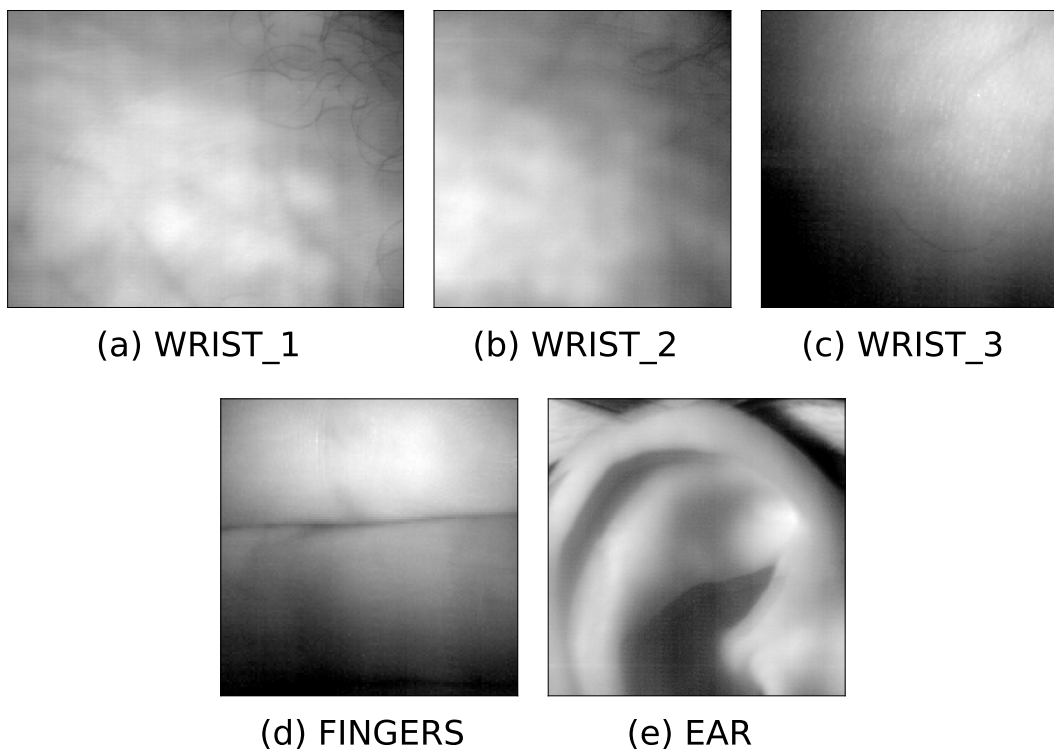


FIGURE 2.2 – Moyenne temporelle des images brutes pour chacune des acquisitions

2.1.2 Prétraitements

Recalage

Le dispositif expérimental ne permettait pas au sujet de rester parfaitement immobile pendant les quelques secondes que durait une acquisition. Par conséquent, il existait un décalage spatial entre les images d'une même pile. Ce décalage s'est révélé suffisamment faible pour ne pas poser problème pour FINGERS ni pour WRIST_3, mais justifiait l'utilisation d'un algorithme de recalage pour les autres acquisitions.

Concernant ledit algorithme, le choix a été fait de s'appuyer sur l'existant : en l'occurrence, la bibliothèque libre OpenCV offrait une solution tout à fait satisfaisante. OpenCV inclut en effet une implémentation d'un algorithme s'appuyant sur une descente de gradient appliquée à une fonction de similarité entre images. Il est proche de celui dit de Lucas-Kanade [60].

Globalement, les algorithmes de recalage se divisent en deux catégories : ceux basés sur une recherche exhaustive du meilleur décalage (par exemple en maximisant la *cross-correlation* ou la *phase correlation* [61, 62, 63]), et ceux qui s'appuient sur une descente de gradient. Les seconds ont l'avantage de fournir, par construction, une valeur de décalage sous-pixelique, mais ont les défauts habituels des descentes de gradient : non-localité et sensibilité aux minima locaux. Ce dernier problème est résolu, dans notre cas, à l'aide d'une possibilité également offerte par OpenCV : celle d'exécuter l'algorithme de façon pyramidale, c'est-à-dire à plusieurs échelles différentes. Plus précisément, on commence par l'exécuter sur une version fortement sous-échantillonnée de l'image, puis on augmente progressivement la résolution en prenant, à chaque fois, l'estimation précédente du décalage comme valeur d'initialisation de l'algorithme.

Filtrage spatial passe-haut

Les images brutes de l'oreille de l'acquisition EAR présentent suffisamment d'aspérités pour donner des points de repère solides à un algorithme de recalage. Ce n'est pas vraiment le cas sur les images de poignets, qui présentent pour seuls repères d'une image à l'autre quelques poils, visibles en haut à droite des Figures 2.1 et 2.2. Par ailleurs, le faisceau laser, lui, est bien visible et ne bouge pas avec le poignet. L'algorithme de recalage est donc confronté à une superposition de deux structures qui bougent différemment et ne donne pas les résultats escomptés.

Ce problème est résolu à l'aide d'une approche fréquentielle de la situation : le faisceau laser varie assez lentement à l'échelle de l'image, contrairement aux poils qui sont des structures fines. Dès lors, en appliquant aux images un filtre gaussien passe-haut de taille 4×4 avant de les recalculer, l'algorithme trouve bien le décalage recherché. Ce filtrage n'est bien sûr utilisé que pour le calcul des décalages et n'est pas conservé pour le reste des traitements.

Filtrage temporel passe-haut

Les traitements qu'on va appliquer à nos piles d'images sont, dans l'ensemble, valables sous l'hypothèse que les signaux sont stationnaires. Or ce n'est jamais exactement le cas en pratique. Par ailleurs, la stationnarité est encore hypothéquée par le recalage : à cause du mouvement, une même zone peut se retrouver illuminée différemment au cours de l'acquisition. Cette situation génère des artefacts visibles sur les images d'activité finales.

Pour les faire disparaître, on a forcé la stationnarité des signaux en leur appliquant un filtre gaussien passe-haut temporel. L'écart-type du noyau de convolution est pris à chaque fois de manière à correspondre à un temps de 32 ms (par exemple, à 2000 Hz, 64 images).

2.1.3 Méthodes de mesure de l'activité

Premier terme de la fonction d'autocorrélation

Avec la diffusion des caméras haute fréquence, de plus en plus de travaux autour du speckle dynamique impliquent d'échantillonner directement l'autocorrélation [14, 51, 24], pour ensuite en déduire des paramètres du mouvement. Ces travaux s'appuient la plupart du temps sur un modèle pour la fonction d'autocorrélation, qui est ajusté à son estimation empirique. Or ces modèles sont parfois conçus sans que les auteurs cherchent à les étayer physiquement, comme les modèles à simple ou double exponentielle [14, 51]. Dans d'autres cas, les modèles, riches et complexes, suivent d'assez près la physique du système mais sont plus compliqués à implémenter et plus lourds d'un point de vue computationnel. Ils s'avèrent par ailleurs limités de fait à la situation physique pour laquelle ils ont été construits.

Pour toutes ces raisons, on a choisi une méthode plus simple, qui consiste à utiliser directement le premier terme r_1 de la fonction d'autocorrélation. On rappelle que son n -ième terme est défini par :

$$r_n = \frac{\mathbb{E}[I(t + n\Delta t)I(t)] - \mathbb{E}[I(t)]^2}{\mathbb{V}[I(t)]}$$

où :

- Δt est le pas d'échantillonnage de l'acquisition ;
- t est quelconque et n'a pas d'influence sur le résultat, par stationnarité de l'intensité.

r_1 correspond au cas $n = 1$. Plus précisément, on s'appuyera pour l'imagerie sur le paramètre $1 - r_1$. En effet, comme $r_0 = 1$, $(1 - r_1)/T$ apparaît comme une discrétisation de la dérivée en 0 de l'autocorrélation : $1 - r_1$ peut donc être vu comme T/τ_c , où τ_c est le temps de décorrélation à court-terme. En conséquence, on le considère comme une mesure de l'activité au sein du pixel considéré.

Contraste

Le contraste, ou coefficient de variation, a été le paramètre privilégié pour l'estimation des fluctuations du speckle pendant des décennies. Il est efficace à condition que le temps d'exposition de la caméra soit significativement plus grand que le temps de corrélation du speckle dynamique.

Or cela ne correspond pas à notre configuration. Comme le temps d'exposition est très court, on peut s'attendre à ce qu'il ne soit pas beaucoup plus grand que le temps de corrélation. En plus de calculer le contraste sur les piles d'images à pleine fréquence, on l'a calculé après simulation d'un temps d'exposition plus long. Pour allonger le temps d'exposition, on a supposé que la réponse de la caméra était linéaire, ou au moins localement affine, en intensité reçue. Dès lors, un temps d'exposition N fois plus grand que le temps d'exposition réel a pu être simulé en sommant des blocs de N images consécutives.

Par ailleurs, le contraste a à chaque fois été calculé temporellement, afin de maximiser la résolution spatiale. Cela correspond à la technique généralement désignée dans la littérature sous le nom de LASCA (*LASer Speckle Contrast Analysis*). À l'inverse, le LSI (*LASer Speckle Imaging*) ou LSCI (*LASer Speckle Contrast Imaging*) sont censées être basées sur une estimation spatiale du contraste. Ces dénominations ne sont toutefois pas toujours respectées, et certains auteurs utilisent indifféremment l'un des trois sigles.

Zero-crossings

La méthode dite des *zero-crossings* consiste à mesurer les fluctuations d'un signal en comptant le nombre de fois que ledit signal, une fois centré, change de signe. Cette méthode est développée dans la Section 1.3.4, où on a montré que le nombre moyen de *zero-crossings* pouvait être exprimé en

fonction de la fonction d'autocorrélation. Dans le cas discret, qui celui qui nous intéresse, il est lié à son premier terme r_1 :

$$\frac{\mathbb{E}[N_0]}{N-1} = \frac{\arccos r_1}{\pi} \quad (2.1)$$

Autrement dit, si on dispose d'un estimateur \tilde{N}_0 de N_0 (par exemple le nombre empirique de changements de signe), un estimateur de r_1 , alternatif à son calcul direct, est donné par :

$$\tilde{r}_1' = \cos \left(\frac{\pi \tilde{N}_0}{N-1} \right) \quad (2.2)$$

On s'appuiera sur cet estimateur alternatif pour comparer l'information fournie par N_0 et par r_1 .

2.2 Contraste, r_1 et zero-crossings

2.2.1 Comparaison entre les trois méthodes en configuration de base

r_1 et contraste

Le but de cette section est de comparer les images obtenues avec r_1 et avec le contraste. Cependant, comme on l'a dit précédemment, il est possible que le temps d'exposition des images soit inférieur au temps de corrélation du speckle, et donc que le contraste donne des résultats faibles. En plus du contraste sur les images brutes, on a donc aussi calculé le contraste sur la pile préalablement moyennée de façon à simuler un temps d'exposition de 1 ms.

Les images de contraste et d'autocorrélation obtenues sont reproduites sur la Fig. 2.3. On peut en tirer plusieurs constats :

- Les images de $1 - r_1$ présentent des structures linéaires qu'on identifie comme des vaisseaux de différentes tailles, sauf pour WRIST_3, qui est examiné plus en détail plus loin.
- En comparaison, les images de $1/C^2$ à 1 ms présentent grossièrement les mêmes structures, mais avec une résolution bien moins fine et moins de détails.
- Enfin, sur les images de $1/C^2$ à pleine fréquence, ces structures sont soit à peine visibles (pour WRIST_2 et EAR), soit complètement invisibles (pour WRIST_1, WRIST_3, FINGERS).

Concernant les différences entre $1 - r_1$ et $1/C^2$, on note, outre l'écart de qualité dans la cartographie de la vascularisation, des éléments plus surprenants. En effet, on s'attendait à ce que C soit globalement une fonction croissante de r_1 — et donc à ce que $1/C^2$ soit une fonction croissante de $1 - r_1$. Or ce principe n'est pas toujours respecté.

Intéressons-nous en particulier à l'acquisition EAR, dont les résultats sont reproduits Fig. 2.4a et 2.4b. Sur les zones numérotées, les comportements de $1 - r_1$ et de $1/C^2$ apparaissent contradictoires : l'un est élevé et l'autre est faible. Ces zones, numérotées comme sur les Figures 2.4a et 2.4b, sont :

1. La conque : $1 - r_1$ élevé, $1/C^2$ faible ;
2. La scapha : $1 - r_1$ élevé, $1/C^2$ faible ;
3. La zone de convergence apparente des vaisseaux : $1 - r_1$ élevé, $1/C^2$ faible ;
4. La fosse triangulaire : $1 - r_1$ faible autour du vaisseau, $1/C^2$ élevé.

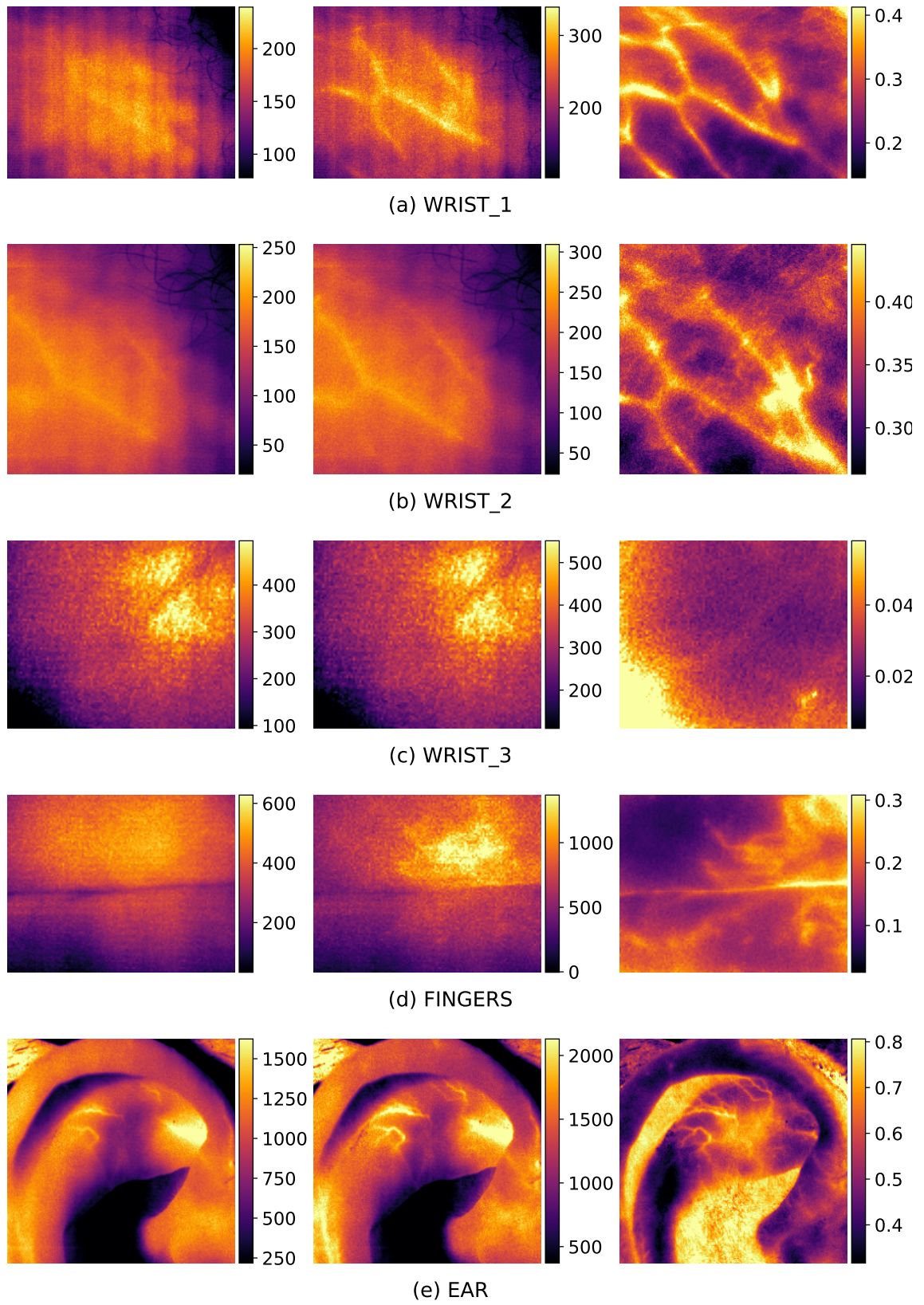


FIGURE 2.3 – Images de différents paramètres pour chaque acquisition. Les trois colonnes correspondent respectivement à $1/C^2$ à pleine fréquence, $1/C^2$ @ 1ms et $1 - r_1$.

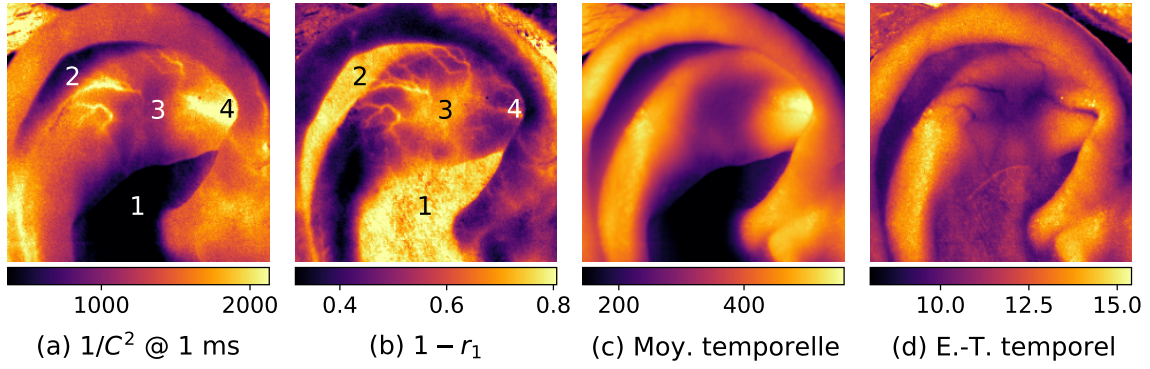


FIGURE 2.4 – Plusieurs paramètres extraits de l’acquisition EAR. Les zones d’intérêt, où $1/C^2$ et $1 - r_1$ n’évoluent pas dans le même sens comme attendu, sont annotées sur les sous-figures (a) et (b).

Une première explication à ces différences peut être trouvée dans l’équation donnant C en fonction de r , qu’on rappelle :

$$C^2 = \frac{2\beta}{T} \int_0^T \left[1 - \frac{\tau}{T}\right] r(\tau) d\tau$$

Cette équation a déjà été présentée dans la Section 1.3.4 (équation (1.9)). Elle exprime avant tout le fait que le contraste décroît lorsque la cohérence temporelle du signal décroît — c’est l’objet du terme intégral fonction de r . Mais elle dit aussi que C décroît lorsque d’autres pertes de cohérence ont lieu, celles-ci étant contenues dans le β de la relation de Siegert. Or la cohérence spatiale, par exemple, n’a pas de raison d’être uniforme sur toute l’image, surtout avec un objet aussi complexe géométriquement qu’une oreille. On peut donc imaginer que la perte de cohérence est plutôt plus faible dans certaines des régions 1, 2 et 3 (où $1/C^2$ est faible, donc C est élevé) et plus élevée dans la région 4.

On peut aussi envisager deux autres explications. Pour celles-ci, on va s’appuyer sur les images de la moyenne et de l’écart-type du signal, reproduites respectivement Fig 2.4c et 2.4d. L’image de contraste est donc le rapport entre ces deux images. On peut noter que nos régions d’intérêt ont soit des moyennes particulièrement élevées (régions 1, 2, 3), soit particulièrement faibles (région 4). On peut donc en dire autant de l’intensité lumineuse reçue.

Partant de là, une première hypothèse est que le rapport signal à bruit est une fonction croissante de la réponse de la caméra, c’est-à-dire que les zones les plus sombres sont aussi les plus bruitées. Cela pourrait expliquer le comportement des zones 1, 2 et 3 : on peut imaginer que du bruit blanc a été ajouté au signal, ce qui a augmenté son écart-type donc son contraste, tout en réduisant son autocorrélation, le bruit blanc étant décorrélé de lui-même.

Par ailleurs, on peut proposer une seconde explication pour la région 4. Jusqu’ici, on a implicitement fait l’hypothèse de la linéarité de la caméra, c’est-à-dire que sa réponse en un pixel est proportionnelle à l’intensité lumineuse reçue. C’est cette hypothèse qui justifie l’expression du contraste et son application à la réponse de la caméra. Or on sait que les caméras CCD ou CMOS ne sont pas, en général, linéaires : elles le sont aux faibles valeurs d’intensité, mais saturent aux valeurs élevées, ce qui se traduit par une asymptote horizontale [64]. Par conséquent, la dérivée de la fonction de réponse de la caméra tend, quant à elle, à diminuer avec l’intensité, ce qui pourrait réduire artificiellement le contraste aux valeurs élevées. Il serait possible de vérifier cette hypothèse en linéarisant la caméra.

r_1 et zero-crossings

Comme détaillé précédemment, le nombre moyen de *zero-crossings* s’exprime directement en fonction de r_1 à l’aide de (2.1). On ne s’attend donc pas à ce que le nombre empirique de passages par zéro nous fournisse de l’information nouvelle, mais plutôt à valider expérimentalement la formule.

On définit donc un nouvel estimateur de r_1 basé sur les zero-crossings :

$$r_1^{(zc)} = \cos\left(\frac{\pi \tilde{N}_0}{N-1}\right)$$

comme donné par (2.2), avec \tilde{N}_0 le nombre empirique de passages par zéro. L'estimateur direct de r_1 , donné par la formule empirique du coefficient de corrélation, est quant à lui noté $r_1^{(direct)}$.

Ces deux estimateurs ont été calculés pour chaque pixel de WRIST_1. La Fig. 2.5a montre ainsi le nuage de points des couples $(r_1^{(direct)}, r_1^{(zc)})$, ainsi que la régression linéaire associée, avec l'ordonnée à l'origine forcée à 0. On constate visuellement la forte corrélation entre les deux estimateurs. La régression linéaire entre les deux jeux de données tend à confirmer ce résultat : avec la méthode des moindres carrés, l'ordonnée à l'origine étant fixée à 0, on obtient un coefficient de détermination de 0.948 et une pente de 1.003. Comme on souhaite essentiellement faire de l'imagerie qualitative, les deux estimateurs peuvent être considérés comme équivalents au regard de la précision numérique recherchée. Visuellement, l'équivalence de l'information portée par r_1 et N_0 est illustrée par les Fig. 2.5b and 2.5c, qui imagent leurs estimateurs directs respectifs. Ces deux figures présentent des caractéristiques très proches.

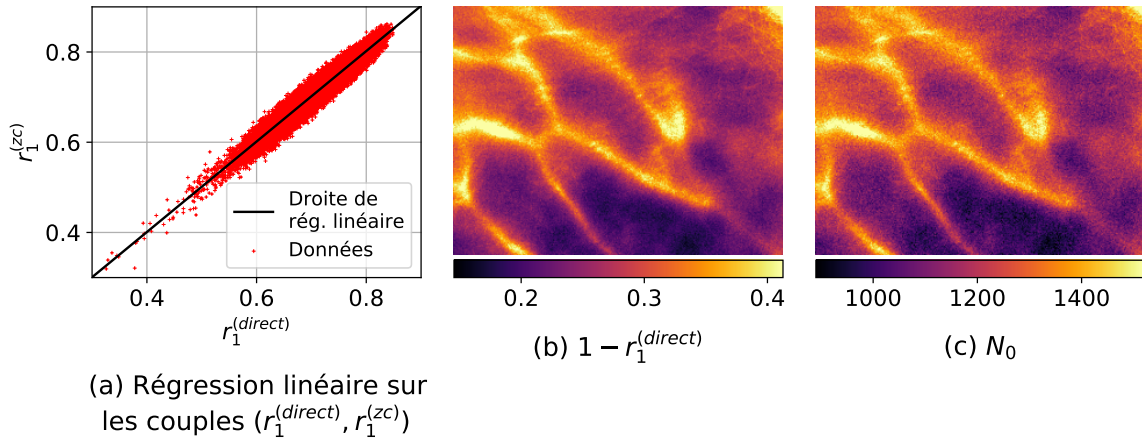


FIGURE 2.5 – Comparaison entre les estimateurs directs de r_1 et N_0 pour WRIST_1.

2.2.2 Influence du protocole et des paramètres d'acquisition

Fréquence d'acquisition et temps d'exposition

On a vu précédemment que WRIST_3 est la seule de nos acquisitions pour laquelle l'image de $1 - r_1$ ne présente pas de structures clairement apparentes. On peut écarter l'hypothèse que c'est la zone imagée qui pose problème, puisque celle-ci, le poignet, fait également l'objet de WRIST_1 et WRIST_2. Mais, pour ceux-ci, la fréquence d'acquisition est nettement plus faible (respectivement 3000 et 2000 Hz, contre 10000 Hz pour WRIST_3). Dès lors, il est tentant de se ramener à une situation plus proche de ces deux acquisitions, c'est-à-dire de simuler une fréquence d'acquisition plus faible.

C'est donc ce qu'on a fait, en moyennant temporellement la pile par blocs d'images consécutives. Pour étudier plus généralement l'effet de la fréquence d'acquisition et du temps d'exposition sur les images de $1 - r_1$ obtenues, on a reproduit l'opération sur nos autres piles d'images. Tous les résultats sont rassemblés sur la Fig. 2.6.

On constate que, à une fréquence inférieure ou égale à 2000 Hz, l'image de $1 - r_1$ de WRIST_3 laisse clairement apparaître des structures vasculaires. Il est intéressant de constater que, pour les autres acquisitions, pour lesquelles $1 - r_1$ donnait de bons résultats à la fréquence de base, diminuer celle-ci dégrade rapidement la qualité des images. Par ailleurs, même pour WRIST_3, celle-ci diminue sensiblement en-dessous de 2000 Hz.

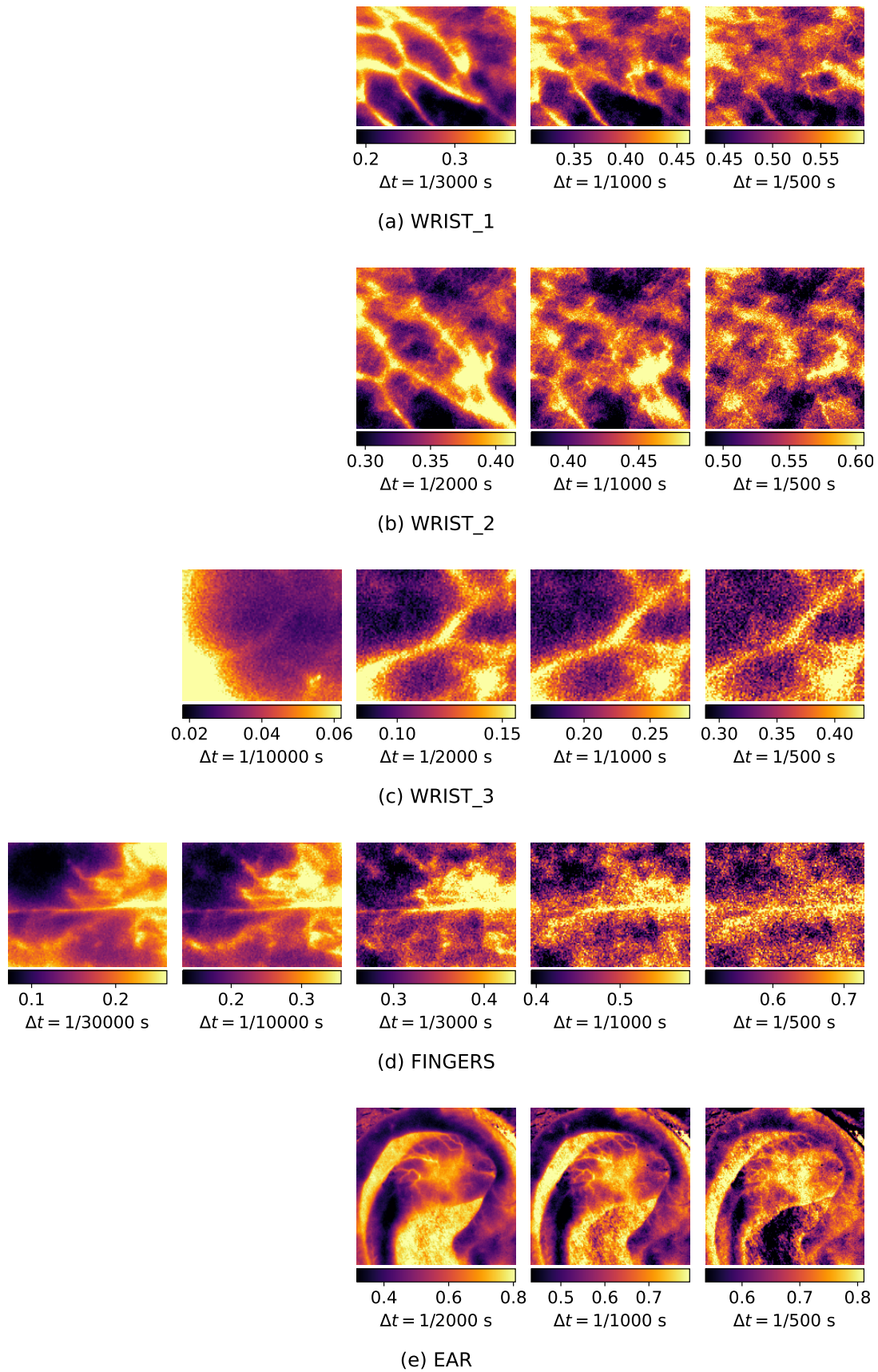


FIGURE 2.6 – $1 - r_1$ à diverses fréquences d'acquisition. Chaque colonne correspond à un Δt , à l'exception de la troisième : pour les trois piles à 2000 Hz (WRIST_2, WRIST_3 et EAR), on a $\Delta t = 1/2000$ s sur cette colonne; pour les deux autres, on a $\Delta t = 1/3000$ s.

On en vient donc à conclure qu'**il existe une fréquence d'acquisition optimale pour le calcul de r_1 , qui n'est pas la même selon la partie du corps étudiée**. Elle semble en particulier beaucoup plus élevée pour les doigts que pour les poignets.

Temps d'acquisition total

Jusqu'ici, on a à chaque fois utilisé la totalité des images d'une pile pour les estimations de contraste ou d'autocorrélation. Comme un de nos objectifs est de générer une image finale aussi vite que possible, on a cherché à déterminer à quel point on peut réduire le temps d'acquisition, donc le nombre d'images utilisées, tout en conservant une image d'activité lisible — c'est-à-dire dont il est aisé de distinguer à l'œil les zones actives et inactives.

Pour ce faire, on a extrait de chaque pile brute un sous-ensemble d'images consécutives, correspondant à des intervalles de temps de 500, 50 et 5 ms. Les sous-piles obtenues ont ensuite été recalées et filtrées comme décrit précédemment. Pour WRIST_3, on a aussi simulé une fréquence d'acquisition de 2000 Hz. Puis $1 - r_1$ a été calculé. Les résultats obtenus sont reproduits Fig. 2.7.

On constate que, pour toutes les acquisitions, un temps d'environ 50 ms est nécessaire pour obtenir une image de qualité raisonnable — peut-être un peu moins pour WRIST_1, et un peu plus pour les autres. Ce résultat est encourageant à la fois dans la perspective de rendre le processus d'acquisition quasi-instantané, et dans celle d'afficher l'évolution en temps réel des structures observées : on peut espérer une fréquence de rafraîchissement de 10 Hz environ.

Pré-traitements

On a détaillé dans la Section 2.1.2 les pré-traitements appliqués à nos piles de speckle avant que les paramètres d'activité en soient extraits.

Lesdits pré-traitements ne sont pas vraiment standards en speckle dynamique. La nécessité du recalage est en général évitée en s'assurant de l'immobilité de l'échantillon par fixation mécanique, et un filtrage temporel tel que celui qu'on applique n'est, à ma connaissance, jamais réalisé. On va donc ici s'attacher à en démontrer l'intérêt. On se concentre pour cela sur deux acquisitions : WRIST_2 et EAR. Pour celles-ci, $1 - r_1$ a été calculé avec et sans recalage, et avec et sans filtrage. Les résultats sont présentés Fig. 2.8.

On peut faire les observations suivantes :

- Pour WRIST_2, sans recalage ni filtrage, on voit apparaître les poils qui nous servent par ailleurs au recalage. Le recalage les fait disparaître, au prix de l'apparition d'artefacts verticaux. Ceux-ci, à leur tour, disparaissent après filtrage. Enfin, à filtrage égal, le recalage tend à améliorer la résolution apparente de l'image finale.
- Pour EAR, le filtrage est indispensable pour voir apparaître des structures vasculaires. Par ailleurs, lorsque les images sont filtrées, le recalage permet encore une fois d'améliorer significativement la résolution de l'image finale.

Il est à noter que ces acquisitions ont été choisies précisément parce que l'effet des pré-traitements y est particulièrement spectaculaire. Néanmoins, si leur apport est parfois négligeable, on n'a à l'inverse noté aucun cas où ils dégradent la qualité des images d'activité. On peut donc raisonnablement préconiser d'effectuer systématiquement ces pré-traitements : dans certaines situations, comme ici pour EAR, aucune information d'activité n'apparaît sans filtrage.

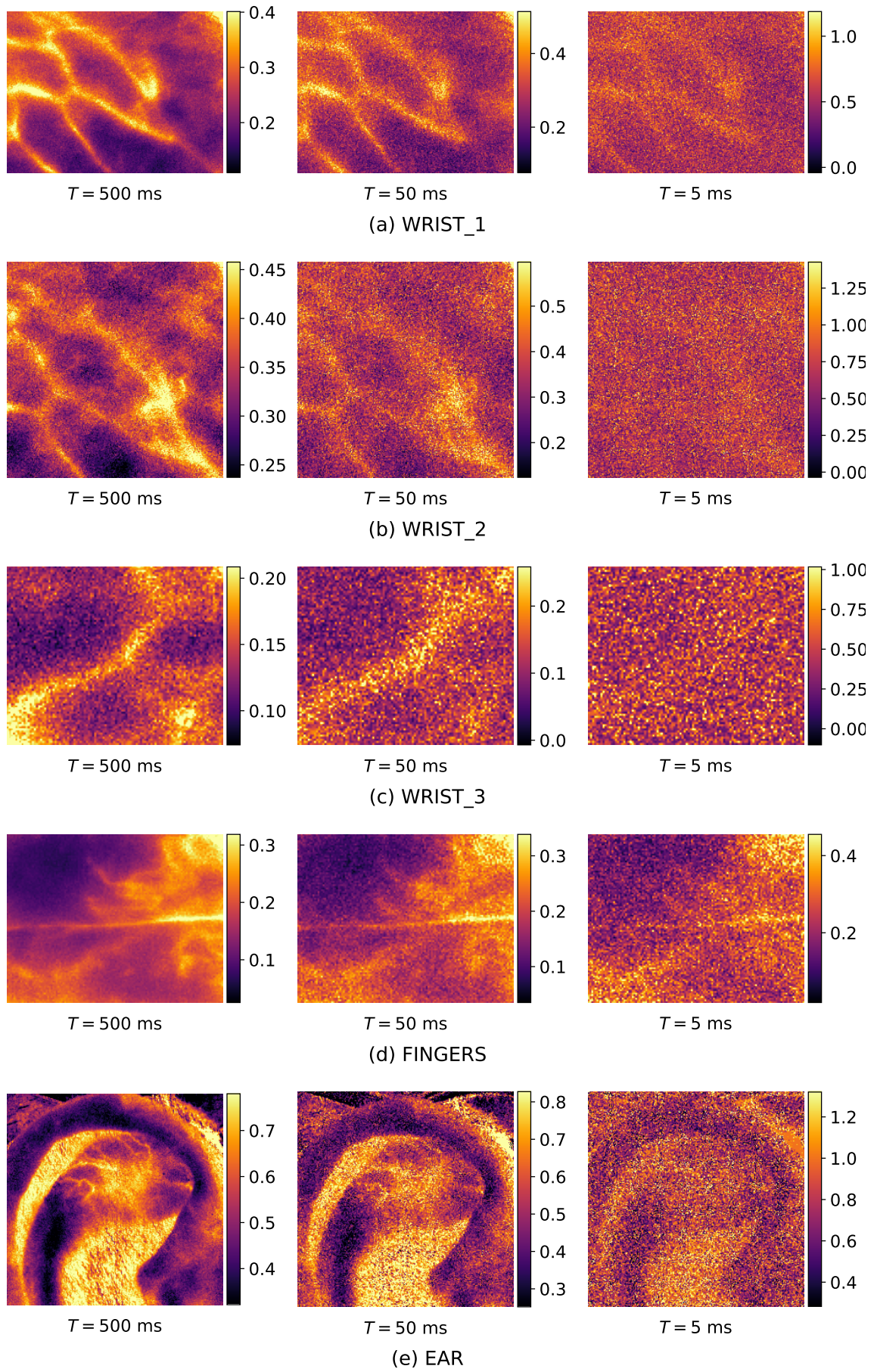


FIGURE 2.7 – 1 – r_1 sur des sous-piles. Les colonnes correspondent à des intervalles de temps respectifs de 500, 50 et 5 ms.

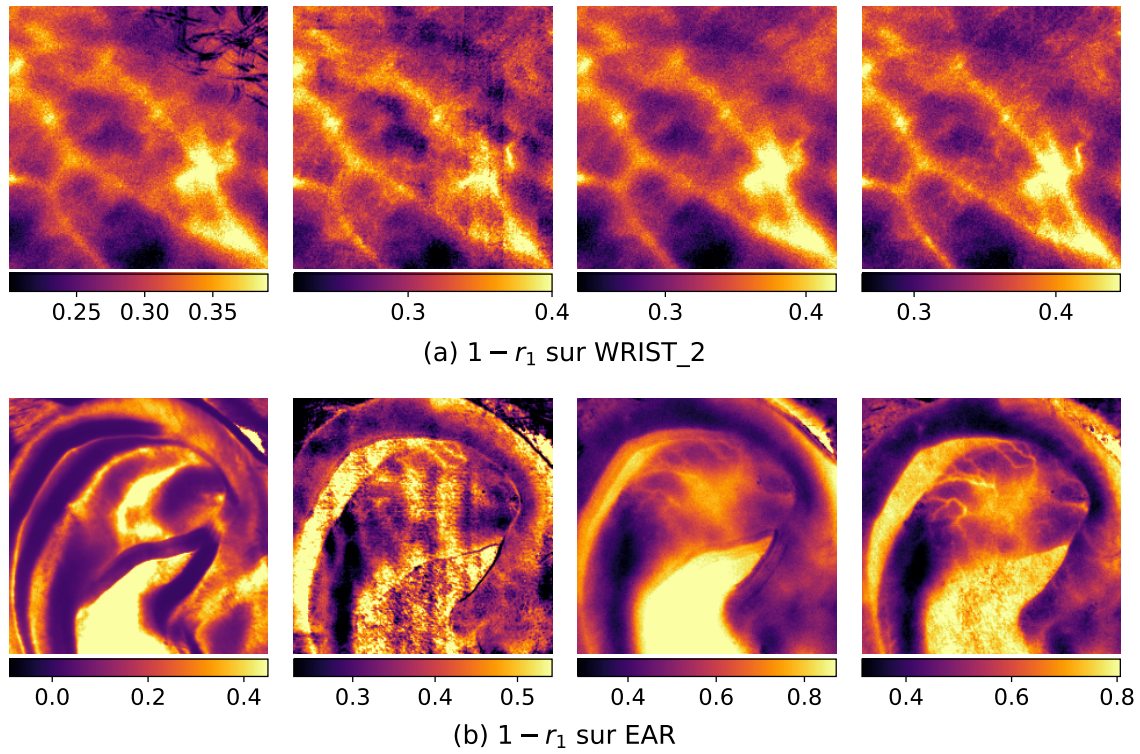


FIGURE 2.8 – $1 - r_1$ pour deux acquisitions après différentes procédures de pré-traitement. De gauche à droite : aucun pré-traitement ; recalage sans filtrage passe-haut ; filtrage sans recalage ; recalage et filtrage.

2.3 Mesures de l'activité utilisant plusieurs termes de l'autocorrélation

Jusqu'ici, on a étudié les mesures d'activités basées sur une statistique du premier ordre (le contraste) ou sur la corrélation entre images consécutives. Comme on a accès à un échantillonnage fin de l'autocorrélation, on va maintenant chercher à exploiter ses termes suivants.

Le mode d'exploitation le plus courant de plusieurs termes de l'autocorrélation est l'ajustement à un modèle, avec l'objectif d'en extraire des paramètres avec un sens physique. Ici, notre but reste de produire des images qualitatives : les paramètres qu'on va extraire le sont toujours dans la perspective de dégager de grandes tendances sur l'image, de distinguer pixels actifs et inactifs, de la façon la plus lisible possible. On ne cherchera donc pas à modéliser la physique du système examiné.

2.3.1 Régression linéaire sur l'autocorrélation

Les premiers paramètres qu'on a cherché à exploiter sont ceux de la régression linéaire sur le graphe des premiers termes de l'autocorrélation. L'idée était d'extraire une tendance sur quelques termes de la variation de l'autocorrélation, plutôt que sur un seul pas de temps.

On a donc effectué une régression linéaire sur $1 - r$, avec l'ordonnée à l'origine fixée à 0 et sur les six premiers termes (de 0 à 5), pour chaque pixel de chaque pile. Les images des paramètres obtenus (pente a et coefficient de détermination R^2) sont reproduites Fig. 2.9.

Les conclusions diffèrent significativement selon les acquisitions. Notons que :

- Pour WRIST_1, WRIST_2 et EAR, R^2 fournit une meilleure cartographie de l'activité que a . C'est un résultat intéressant, qui signifie que les pixels actifs pour ces piles ne sont pas tant ceux dont la décorrélation moyenne est la plus forte que ceux dont l'autocorrélation est la plus fluctuante — puisqu'elle est éloignée d'une droite.

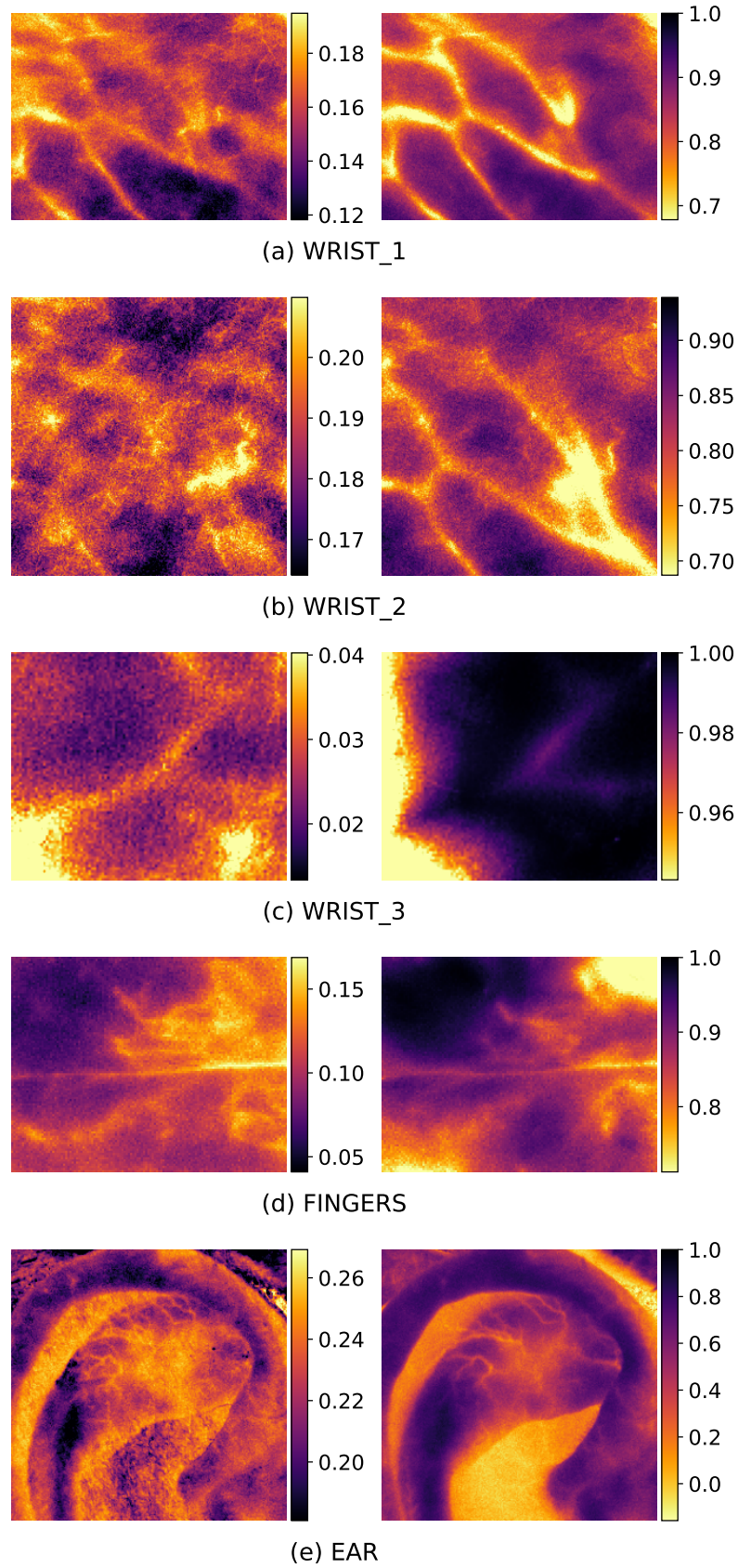


FIGURE 2.9 – Résultat de la régression linéaire sur les 6 premiers termes de r . La première colonne correspond à la pente a , la seconde au coefficient de détermination R^2 .

- Pour WRIST_3, les résultats de cette méthode ne sont pas très probants, même si a donne de meilleurs résultats que n'en donnait $1 - r_1$ à pleine fréquence.
- Enfin, pour FINGERS, a donne de meilleurs résultats visuels que R^2 . À noter que comme sa fréquence d'acquisition est très élevée (30000 Hz), il est possible qu'il faille travailler sur un intervalle de temps plus long, c'est-à-dire sur plus de termes, pour obtenir un meilleur résultat.

2.3.2 Classification des pixels selon la stricte décroissance de l'autocorrélation sur ses premiers termes

Dans la continuité de l'idée que "les pixels actifs sont ceux dont l'autocorrélation fluctue le plus", on a imaginé le protocole suivant pour détecter les pixels actifs :

- On extrait un sous-ensemble d'images consécutives de la pile, par exemple 100. Cela permet d'avoir une variance de l'autocorrélation relativement élevée et de favoriser les fluctuations ;
- On calcule l'autocorrélation temporelle sur ce sous-ensemble ;
- On sépare les pixels en deux classes selon que l'autocorrélation est ou non strictement décroissante sur ses premiers termes.

Les résultats obtenus en extrayant des sous-ensembles de 100 images, puis en classifiant selon la décroissance sur les 6 premiers termes de l'autocorrélation, sont reproduits Fig. 2.10.

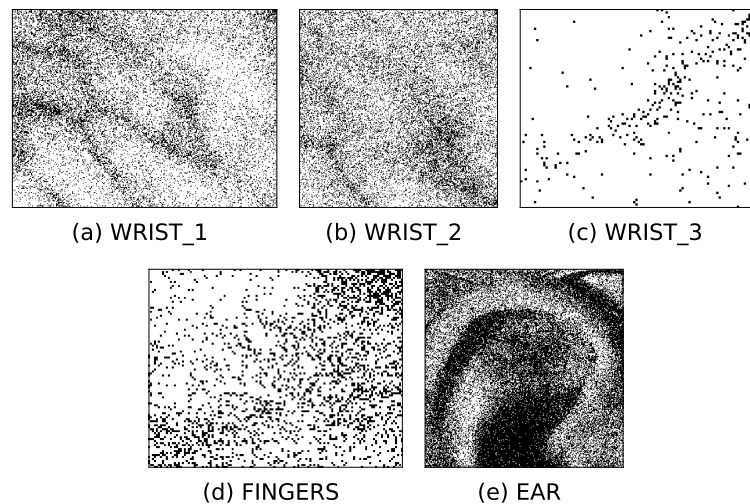


FIGURE 2.10 – Classification des pixels selon la décroissance de r sur ses 6 premiers termes. r lui-même est calculée sur 100 images consécutives. Les pixels blancs correspondent à un r strictement décroissant.

Cette méthode ne permet certes pas d'obtenir une vraie classification binaire faisant apparaître l'ensemble des structures visibles sur l'image de $1 - r_1$. Ils reflètent cependant la tendance qu'on avait identifiée : les pixels actifs sont aussi les plus enclins à avoir une autocorrélation non strictement décroissante. On retrouve cette tendance plus ou moins grossièrement pour toutes nos acquisitions.

Il faut par ailleurs bien avoir en tête que ce résultat ne signifie pas que les pixels actifs ont une plus grande tendance à la recorrélation. Ainsi, si on calcule l'autocorrélation non plus sur 100 images, mais sur les piles complètes, on obtient la classification selon la décroissance donnée Fig. 2.11. À part pour EAR, tous les pixels de toutes les acquisitions sont blancs : l'autocorrélation est partout strictement décroissante. Concernant EAR, l'essentiel des pixels qui restent sont situés dans des zones très sombres de l'image d'origine (conque et scapha notamment). Pour le reste, les pixels décroissants sont beaucoup moins nombreux qu'avec r calculé sur 100 images. On peut donc faire l'hypothèse qu'il s'agit soit de bruit, soit encore de fluctuations qui disparaîtraient si on avait suffisamment d'images.

Ainsi, si la décroissance de r sur 100 images fait apparaître un début de classification, c'est parce qu'avec un nombre d'images si faible, la variance des termes de r est trop élevée. C'est l'effet sur cette variance sur la monotonie de r qu'on voit apparaître sur la Fig. 2.10, et non pas une vraie remontée de la corrélation.

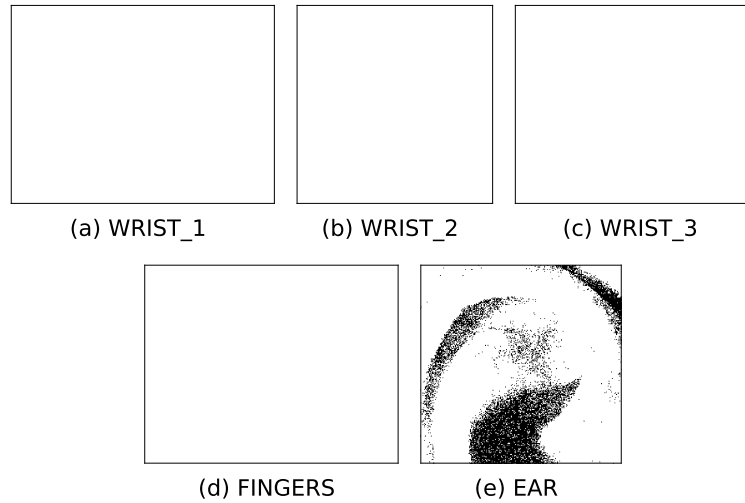


FIGURE 2.11 – Classification des pixels selon la décroissance de r sur ses 6 premiers termes. r lui-même est calculée sur les piles complètes. Les pixels blancs correspondent à un r strictement décroissant. (À noter qu'il est normal que les quatre premières images soient toutes blanches, ce n'est ni un bogue, ni une erreur.)

2.4 Accès aux battements cardiaques

On s'est précédemment intéressé à l'activité des piles d'images acquises. Cette notion s'appuyait sur des paramètres, comme le contraste ou l'autocorrélation, qui eux-même n'ont de sens qu'en supposant les signaux temporels stationnaires.

Or une source évidente de non-stationnarité, et même de périodicité, de la vascularisation du corps humain est la pulsation cardiaque. On rappelle que les vaisseaux sanguins se divisent en deux catégories : les artères et artérioles, qui transportent le sang pulsé du cœur aux organes, et les veines et veinules, qui lui font faire le trajet inverse, cette fois avec un sang en écoulement plus régulier. Selon les vaisseaux observés, on s'attend donc à un comportement différent.

Pour toute cette section, on va se concentrer sur l'acquisition WRIST_2, en raison de sa longueur (2.93 s). Si des phénomènes liés à la pulsation cardiaque se produisent, on peut donc s'attendre à les voir arriver environ 3 fois.

2.4.1 Mise en évidence de non-stationnarités liées à la pulsation cardiaque

Pour identifier des phénomènes liés aux battements cardiaques, on va fondamentalement chercher à identifier des non-stationnarités du signal temporel. On peut notamment s'attendre à ce que nos mesures d'activités, une fois fenêtrées temporellement, varient au cours du temps.

Après un prétraitement conforme à la description de la Section 2.1.2, on divise donc la pile en blocs de 100 images consécutives, soit 0.05 s. On obtient ainsi 58 blocs. Pour chacun des blocs indépendamment, on calcule ensuite le paramètre $1 - r_1$.

Il n'est pas possible de reproduire ici ces 58 images, mais en les observant, on constate bien que certaines ne présentent pas les mêmes structures que les autres. Un échantillon d'images est reproduit Fig. 2.12.

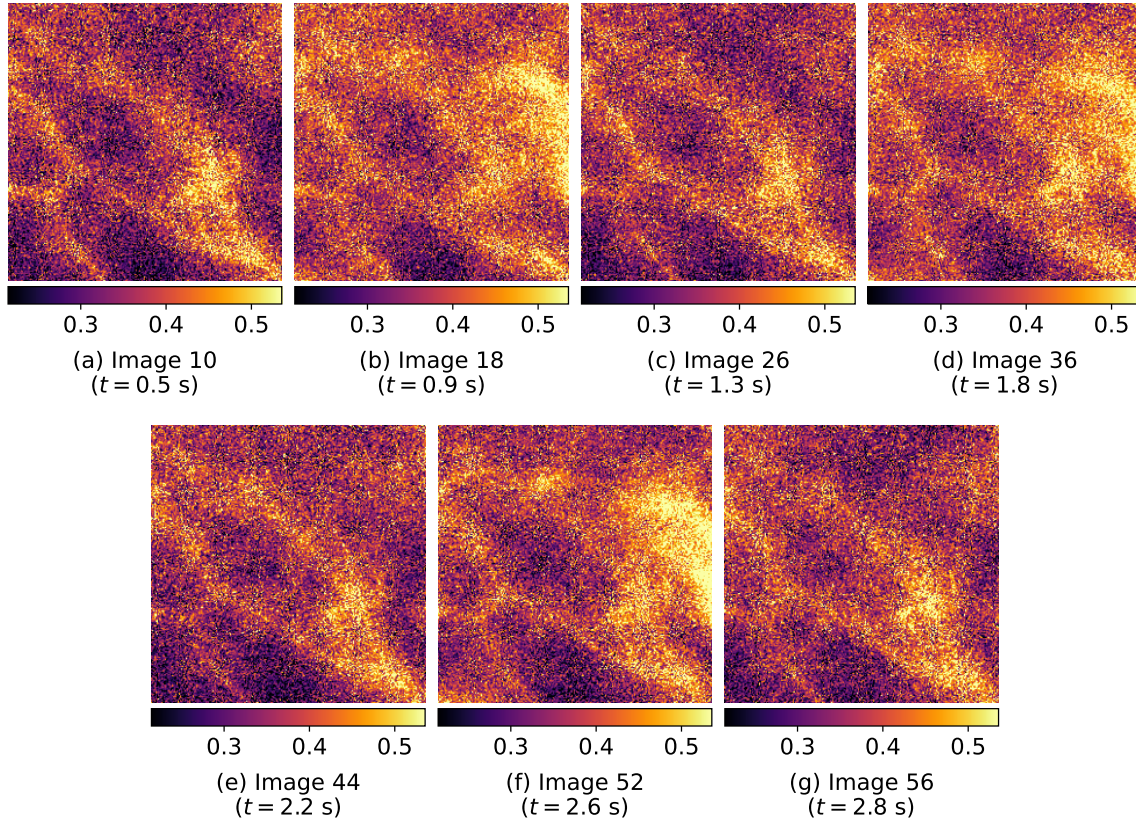


FIGURE 2.12 – Quelques images du $1 - r_1$ fenêtré sur WRIST_2. On remarque une grosse zone illuminée sur la droite des images 18, 36, 52.

On constate l'apparition d'une grosse structure sur la droite de certaines images. Celles-ci ont été spécifiquement sélectionnées parce qu'elles la faisaient apparaître, tandis que les images intermédiaires sont choisies pour montrer qu'on revient entre ces images à un résultat proche de l'autocorrélation sur la pile complète. La proximité des écarts entre ces trois images (0.9 et 0.8 s) ainsi que leurs valeurs, proches d'une seconde, nous amènent à faire l'hypothèse d'un phénomène lié à la pulsation cardiaque.

2.4.2 Étude de pixels particuliers

Pour étudier plus avant comment se comporte le signal aux pixels dits "cardiaques", on va en sélectionner quelques-uns. La Fig. 2.13 est une reproduction de l'image 18 de la Fig. 2.12 sur laquelle on a surimprimé des points d'intérêt annotés. Parmi ceux-ci, on a sélectionné des pixels appartenant aux zones qui s'illuminent aux images correspondant aux pulsations cardiaques et des pixels témoins.

Pour étudier l'évolution de r_1 en fonction du temps, on ne va pas, cette fois-ci, calculer r_1 sur des blocs indépendants. Le défaut de cette méthode est en effet qu'elle fournit un échantillonnage de r_1 très faible : seulement 58 valeurs au total. Pour augmenter cet échantillonnage, on va adapter la formule de r_1 en remplaçant tous les moyennages, qu'on effectuait par blocs, par des filtres gaussiens, qu'on pourra appliquer en tout point. Ainsi, on obtiendra une valeur par échantillon du signal, et on pourra, de même, obtenir une valeur de r_1 par échantillon.

Le r_1 gaussien ainsi obtenu est donné par :

$$r_1(t) = \frac{\mathcal{G}\{s \cdot s \circ \tau\} - \mathcal{G}\{s\}^2}{\mathcal{G}\{s^2\} - \mathcal{G}\{s\}^2}$$

où :

- s est le signal temporel brut;

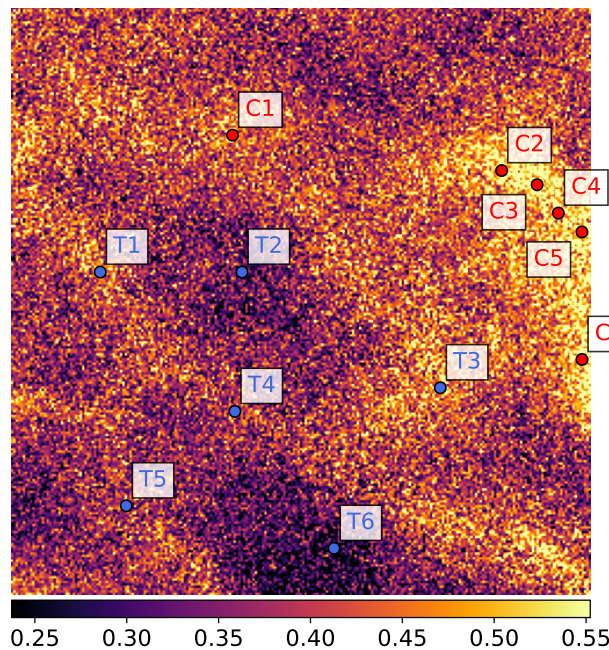


FIGURE 2.13 – Pixels d'intérêt sélectionnés sur la pile. Les points rouges correspondent aux pixels cardiaques, les points bleus aux pixels témoins.

- \mathcal{G} est un filtre gaussien temporel d'écart-type donné ;
- τ est l'opération de translation d'un Δt , où Δt est l'écart temporel entre deux images consécutives.

Enfin, comme l'autocorrélation glissante est fortement bruitée, on la filtre à l'aide d'un noyau gaussien de taille 4×4 . On peut ainsi extraire les courbes d'autocorrélations pour nos pixels d'intérêt. Celles-ci sont reproduites Fig. 2.14 et 2.15.

On constate, pour les pixels cardiaques, trois pics correspondant à la pulsation cardiaque. Les évolutions des pixels témoins ne présentent en revanche aucun motif particulier. À noter que, parmi les pixels témoins, certains correspondent à des zones d'activité (T2 et T6) et les autres non. Aucune structure ne permet de distinguer les premiers des seconds, mais on peut noter qu'ils se distinguent par la plage de valeurs de leurs autocorrélations glissantes (plus basse pour T2 et T6).

Au-delà de cette analyse purement visuelle, ces courbes pourraient nous permettre de déterminer la position temporelle des pics, et donc l'instant du signal cardiaque. Par ailleurs, on peut aussi construire un filtre adapté à l'aide desdits pics qui permettra de mieux détecter les pixels cardiaques dans l'image. Pour cela, on procède comme suit :

- On note la position des trois pics pour un pixel donné, par exemple le C5.
- On construit notre noyau comme la somme de trois noyaux gaussiens centrés sur les trois pics, avec un écart-type (choisi empiriquement) de 70 images.
- On centre et on réduit temporellement le filtre. On fait de même avec le signal, puis on calcule la corrélation entre les deux.

Les résultats obtenus sont reproduits Fig. 2.16. La Fig. 2.16b fournit ainsi une mise en évidence des pixels cardiaques plus générale qu'en prenant une seule image du $1 - r_1$ fenêtré.

On a ainsi mis en place une méthode de repérage des pixels sensibles à la pulsation cardiaques, en exploitant de l'information de toute la pile. On note que cette information était, assez naturellement, complètement absente de nos mesures d'activité : y accéder suppose de renoncer à l'hypothèse de stationnarité temporelle du signal.

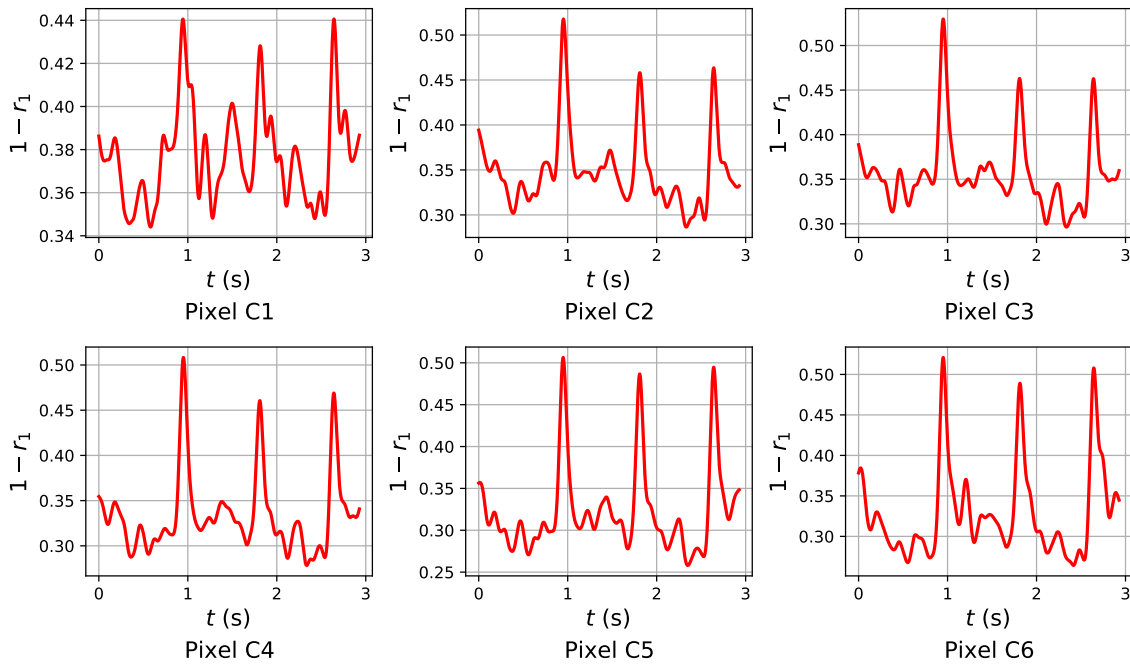


FIGURE 2.14 – $1 - r_1$ sur le signal fenêtré avec un noyau gaussien ($\sigma = 64$ images) pour les pixels cardiaques.

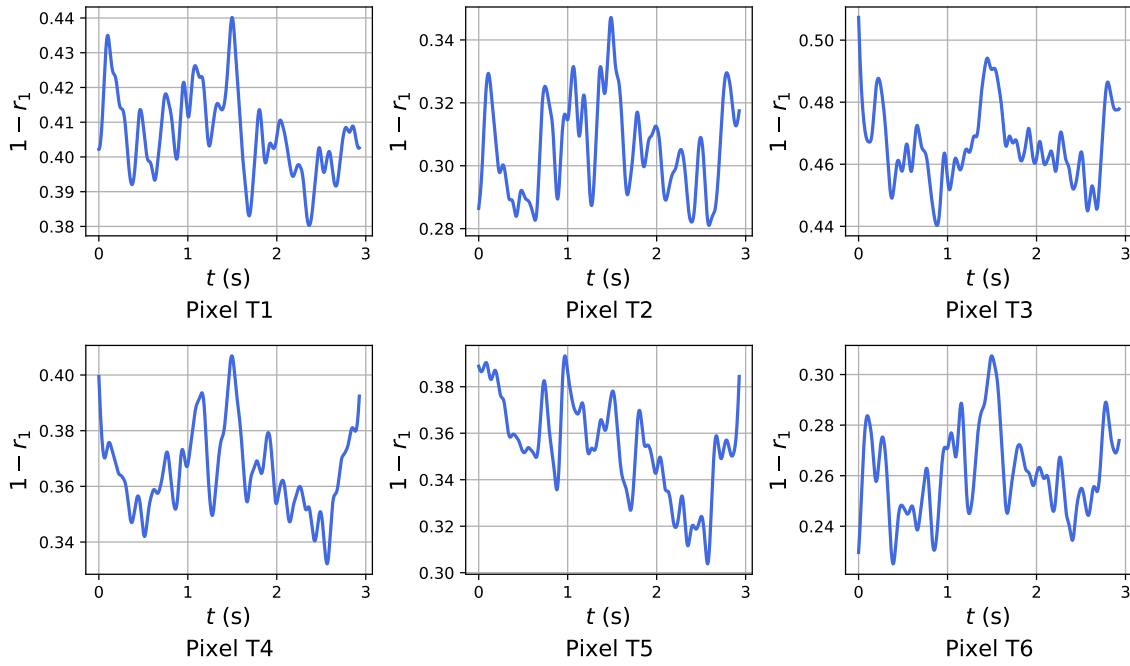


FIGURE 2.15 – $1 - r_1$ sur le signal fenêtré avec un noyau gaussien ($\sigma = 64$ images) pour les pixels témoins.

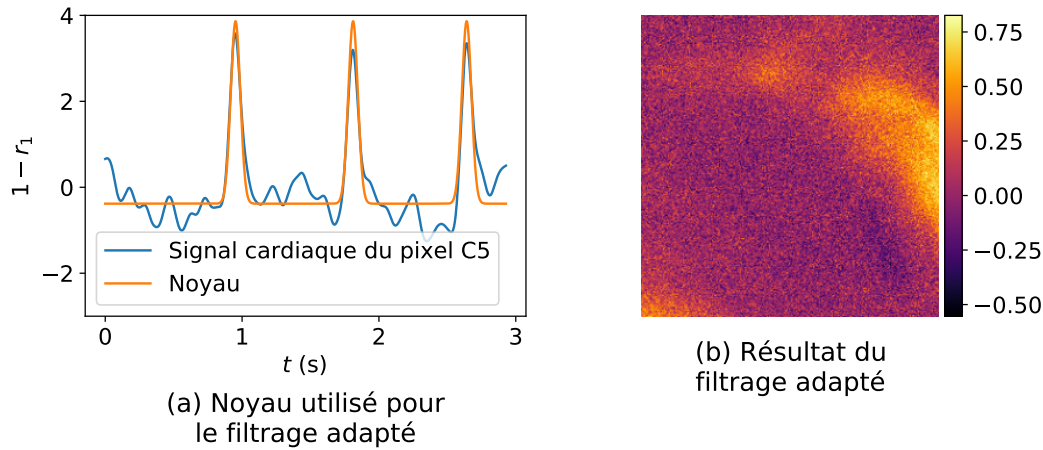


FIGURE 2.16 – Filtrage adapté à l’aide d’un noyau reproduisant les trois pics. À gauche, le noyau utilisé ; à droite, le coefficient de corrélation entre ce noyau et le r_1 glissant.

2.4.3 Propagation du signal cardiaque

On sait que les pixels “cardiaques” se caractérisent par la présence de trois pics négatifs sur leur courbe de r_1 . Visuellement, ces pics semblent être à peu près au même endroit pour tous les pixels cardiaques.

La question est de savoir s’il existe un décalage informatif entre ces pics d’un pixel à l’autre, et en particulier si ce décalage peut traduire une propagation du signal cardiaque. Pour le savoir, on a déterminé pour tous les pixels la position de chacun des trois pics. Celle-ci est définie, pour un pixel et un pic donné, comme l’instant où $1 - r_1$ est maximale dans l’intervalle associé au pic considéré. L’intervalle associé au pic 1 est $[0, 1.5 \text{ s}]$, l’intervalle associé au pic 2 est $[1.5 \text{ s}, 2.25 \text{ s}]$ et l’intervalle associé au pic 3 est $[2.25 \text{ s}, +\infty[$.

La Fig. 2.17 donne la position des trois pics pour l’ensemble de l’image. Celle-ci est codée par la teinte (hue) du pixel. La luminance correspond quant à elle aux valeurs de la Fig. 2.16b, c’est-à-dire qu’un pixel sombre est un pixel non cardiaque, donc pour lequel la notion de pic cardiaque n’a pas de sens. Enfin, la saturation est fixée à 100% pour tous les pixels.

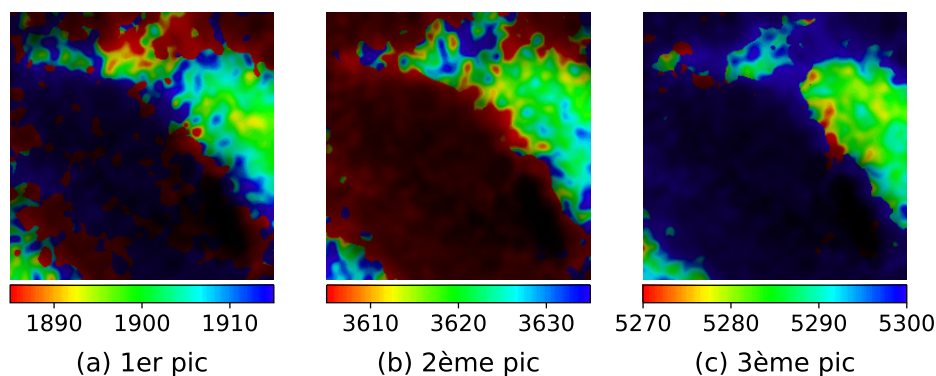


FIGURE 2.17 – Positions des trois pics de pulsation cardiaque pour l’ensemble des pixels

On constate qu’aucun motif particulier de variation spatiale de position des pics ne semble se dégager de ces trois images. Il ne semble donc pas vraiment possible de faire apparaître une propagation du signal cardiaque, soit parce qu’elle n’existe pas (le signal cardiaque apparaîtrait et disparaîtrait partout en même temps), soit parce que les conditions d’acquisition ne permettent pas de la dégager du bruit.

Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, plusieurs paramètres caractérisant l'activité des piles de speckle ont été étudiés. Leurs comportements respectifs mènent à plusieurs conclusions.

Le point le plus évident est la redondance entre l'information donnée par le nombre de *zero-crossings* et par le premier terme de l'autocorrélation. Ce résultat était attendu, puisque les deux paramètres sont directement reliés par (2.1). Toujours est-il que la vérification expérimentale de cette équivalence est, à notre connaissance, absente de la littérature. Elle permet d'appuyer l'idée fondamentale que, dès lors que le régime du mouvement est stationnaire, tous les paramètres d'intérêt se ramènent à l'autocorrélation. Dans le cas précis de r_1 et N_0 , il apparaît donc plus naturel de s'appuyer directement sur l'estimateur canonique de r_1 ; toutefois, on peut imaginer des situations où, pour des raisons computationnelles par exemple, N_0 reste intéressant.

La comparaison entre $1 - r_1$ et $1/C^2$ s'est également révélée instructive. Schématiquement, on peut y voir la confrontation entre deux paramètres standards, supposés équivalents à l'inverse du même "temps de corrélation" générique. Ils se différencient par les fondations de cette équivalence, et par les toiles de fond technologiques qui justifient leur exploitation. À cette aune, il n'est pas étonnant, et même rassurant, que $1 - r_1$ fournisse des images de qualité significativement supérieure à $1/C^2$. Si l'on ajoute à cela la réduction considérable du temps total d'acquisition permise, par construction, par $1 - r_1$, on peut en conclure qu'il s'agit d'un excellent point de départ pour l'imagerie de speckle dynamique lorsqu'on dispose d'une caméra haute cadence. Il demeure cependant quelques zones d'ombre quant aux divergences de comportement observées entre les deux paramètres. Des études plus approfondies pourraient permettre de mieux les expliquer, en affinant au passage notre connaissance de la dynamique des milieux en jeu.

Les résultats obtenus avec les autres paramètres proposés — paramètres de la régression linéaire sur r , ou indicateurs de sa décroissance — sont intéressants en cela qu'ils renseignent sur des différences qualitatives de comportement entre pixels, selon que le point imagé présente de l'activité ou non. En particulier, les signaux des pixels actifs se caractérisent par une plus grande fluctuation de l'autocorrélation.

Enfin, la dernière section de ce chapitre a permis d'interroger frontalement une hypothèse-clé des expériences de speckle dynamique : celle de la stationnarité. On arrive en effet à des fréquences où les battements cardiaques ne sont plus du tout lissés par le temps d'exposition. Il est difficile de dire s'ils ont influencé significativement nos résultats d'activité, dans la mesure où les zones identifiées comme cardiaques sont aussi des zones inactives au sens de r_1 . Dans tous les cas, il conviendra, à l'avenir, d'avoir en tête que la fenêtre d'acquisition choisie peut, selon sa position au cours d'un cycle cardiaque, influencer les résultats. Plus positivement, on peut imaginer exploiter l'apparition de structures liées aux battements cardiaques en construisant des systèmes d'imagerie qui enregistrent le pouls au même titre que des images de speckle dynamique.

Partant de tous ces résultats, de nombreuses directions de recherche sont possibles. Un bon point de départ serait sans doute d'apporter quelques améliorations techniques au dispositif expérimental pour que les mouvements involontaires du sujet pendant l'acquisition ne soient plus un problème, le recalage ne permettant qu'une correction partielle. Dès lors, on pourra s'attendre à une meilleure robustesse des autocorrélations mesurées empiriquement. Il sera alors possible de chercher à les ajuster à des modèles correspondant à des formes précises, et donc de se rapprocher de mesures quantitatives du mouvement.

Dans cette même optique, il serait intéressant de réaliser des expérimentations sur fantômes, c'est-à-dire sur des écoulements plus simples destinés à simuler grossièrement les systèmes biologiques qui nous intéressent. Ces derniers sont en effet très difficiles à étudier : outre les non-stationnarités, on a probablement des phénomènes de multidiffusions complexes qui rendent difficile une modélisation précise. Un fantôme pourrait permettre de contrôler tous ces paramètres et donc de mieux comprendre l'influence des uns et des autres.

Dans le prochain chapitre, on va justement s'attacher à modéliser le système étudié afin de mieux comprendre comment ses caractéristiques influent sur les statistiques du signal de speckle.

Chapitre 3

Modélisation et simulation d'un système d'imagerie de speckle dynamique

Introduction

Dans le chapitre précédent, on a pu voir qu'il existait de nombreuses manières de cartographier qualitativement l'activité de diffuseurs mobiles à partir d'images de speckle dynamique. Mais, comme on l'a déjà mentionné, notre objectif de long terme est d'obtenir des images quantitatives, c'est-à-dire que les valeurs d'activité visualisées puissent être directement reliées à un paramètre physique, comme la vitesse ou le coefficient de diffusion des diffuseurs.

Pour ce faire, l'enjeu est d'affiner le lien entre propriétés du mouvement des diffuseurs (type de mouvement et paramètres) et statistiques sur le speckle. On sait qu'un tel lien peut être fait dans un certain nombre de situations simples et homogènes (pur mouvement brownien, translation uniforme, etc.), et c'est d'ailleurs sur ces cas d'école qu'on s'appuie pour justifier les résultats qualitatifs. Pour aller plus loin, une modélisation plus complexe est nécessaire, y compris de situations où le calcul analytique n'est pas possible. Dans de tels cas, des méthodes de Monte-Carlo, et donc la simulation du système, sont nécessaires.

La simulation de speckle dynamique n'est pas une idée nouvelle. Elle a par exemple été appliquée à l'étude du mouvement des vortex (c'est-à-dire des zéros) du speckle, comme dans [41], où il est suggéré que les mouvements des vortex pourraient renseigner sur le mouvement des diffuseurs sous-jacents. Dans un autre registre, les auteurs de [42] proposent un modèle numérique adapté à des phénomènes transitoires, comme le séchage de peinture. Mentionnons également les nombreux travaux qui ont pour application privilégiée la mesure de flux sanguins, comme [65] ou [66]. Dans ces deux articles, les auteurs s'appuient sur la simulation pour valider le lien entre autocorrélation et densité spectrale de puissance temporelles, en vue de démontrer l'équivalence théorique entre speckle dynamique et Doppler.

En vue de la simulation, plusieurs méthodes ont par ailleurs été imaginées pour générer un motif de speckle qui se décorrèle de lui-même au cours du temps. L'une des plus simples consiste à ajouter un terme de bruit blanc au signal à chaque pas de temps [42, 65]. Dans ce cas, la décorrélation est d'autant plus rapide que la variance du bruit blanc est grande devant celle du signal. Certains auteurs ont cependant proposé des techniques plus poussées, par exemple basées sur des copules [67, 41]. Une copule est la fonction de répartition d'un vecteur aléatoire dont les composantes suivent chacune une loi uniforme. Dans les deux articles cités, les auteurs s'appuient sur une copule classique, la copule gaussienne, pour générer de la corrélation entre deux variables aléatoires uniformes. C'est à partir de cette brique de base qu'ils peuvent ensuite construire un signal corrélé.

Cependant, rares sont les travaux qui simulent vraiment le comportement du système d'un bout à l'autre, en repartant du comportement des diffuseurs eux-mêmes. En effet, les auteurs sus-cités simulent directement un signal respectant les hypothèses du speckle pleinement développé, puis lui appliquent un traitement temporel afin de lui donner l'autocorrélation souhaitée. Des contre-exemples existent néanmoins : ainsi, dans [68], les auteurs construisent une grille de diffuseurs dont

la phase varie selon leur loi de mouvement. Toutefois, là encore, le mouvement des diffuseurs n'est pas simulé directement : les diffuseurs restent au même endroit au sein de la grille, seule leur phase change.

Ici, notre objectif est de mettre en place un modèle et son implémentation en vue de permettre une étude aussi systématique que possible du rapport entre mouvement des diffuseurs et statistiques du speckle. On se limitera au cas d'une population homogène de diffuseurs simples (par lesquels la lumière est rétrodiffusée au plus une fois) dont la position est un processus de Markov (donc dont la vitesse instantanée est un bruit blanc). Cependant, ces travaux ont aussi pour but de poser les fondations théoriques et algorithmiques de modèles beaucoup plus riches.

3.1 Modèle

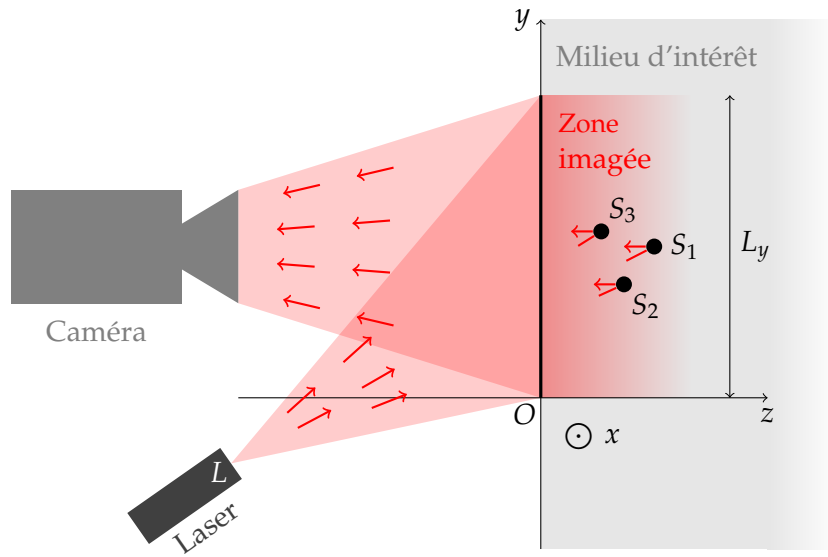


FIGURE 3.1 – Vue schématique de profil du système modélisé

Pour commencer, on se place dans un repère orthonormé indirect¹ ($Oxyz$). On considère un système composé des éléments suivants :

- Un milieu constitué de diffuseurs ponctuels en mouvement, occupant le demi-espace $z > 0$;
- Un laser éclairant le milieu en lumière cohérente depuis le demi-espace $z < 0$;
- Un système d'imagerie, capturant des images du milieu également depuis le demi-espace $z < 0$.

Le plan $z = 0$ est le plan objet du système d'imagerie. L'emprise des images captées correspond au rectangle $[0, L_x] \times [0, L_y]$ de ce plan. L'axe optique, parallèle à l'axe (Oz), perce ainsi le plan objet au point $M(L_x/2, L_y/2)$, milieu de la zone imagée.

Le système est schématisé sur la Fig. 3.1. Cette section donne les grandes lignes de sa modélisation, élément par élément. Ainsi, on commencera par s'intéresser au laser. On développera ensuite la modélisation du milieu diffusant, puis celle de l'optique d'imagerie. Enfin, on terminera en s'intéressant au capteur.

On aura ensuite l'occasion, dans les sections suivantes, d'étudier le système modélisé à l'aide de calculs analytiques et de simulations numériques.

¹Prendre un repère indirect permet d'avoir un repère 2D (Oxy) direct pour les images caméra tout en ayant l'axe (Oz) orienté vers l'intérieur du milieu imagé.

3.1.1 Laser

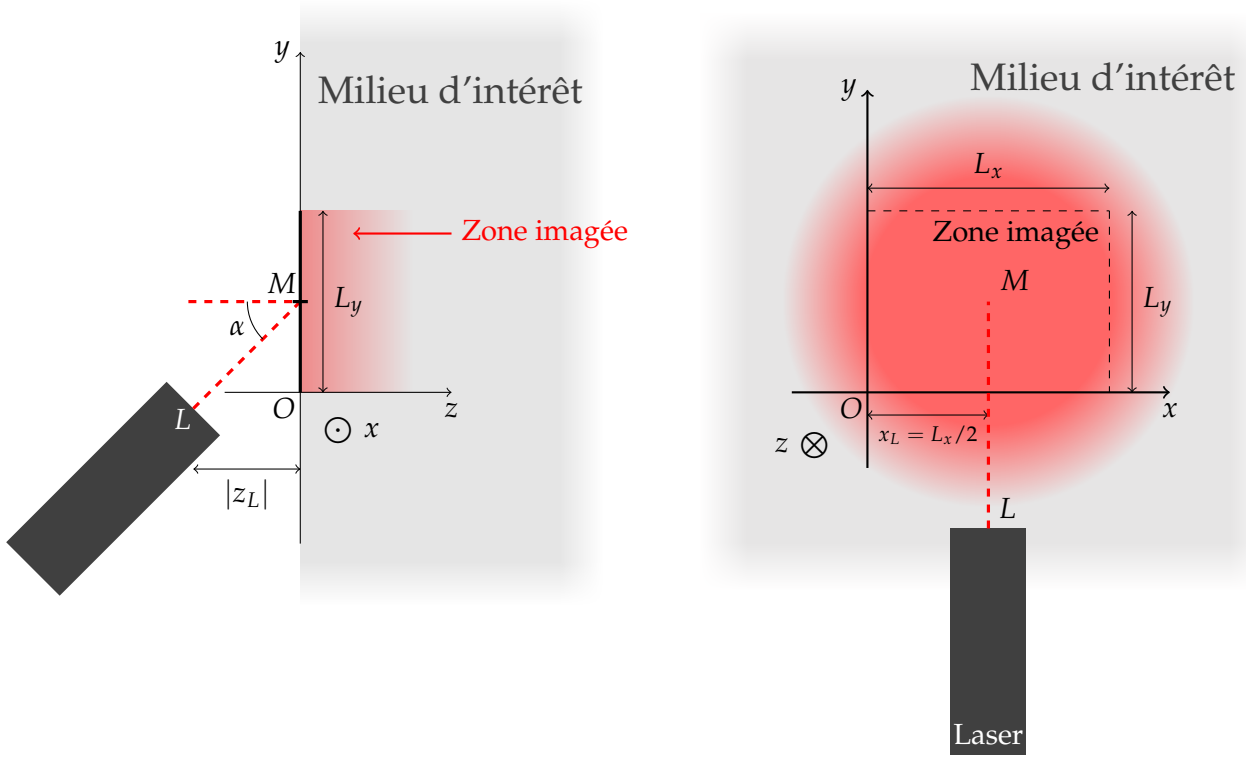


FIGURE 3.2 – Position du laser en fonction de l'angle α et de z_L .

Le laser est supposé être une source parfaitement monochromatique de longueur d'onde λ . Il se trouve en-dessous de l'axe optique, dans le plan vertical coupant la zone imagée en deux parties d'aires égales. Son abscisse est donc donnée par $x_L = L_x/2$, et son ordonnée est telle que $y_L \leq L_y/2$.

Il est par ailleurs caractérisé par deux paramètres supplémentaires, sa cote z_L et l'angle α que forme le faisceau avec l'axe optique. Concernant z_L , deux cas sont possibles :

- Soit z_L est fini. Dans ce cas, le laser est considéré comme une source ponctuelle située au point $L(x_L, y_L, z_L)$, émettant une onde sphérique dont la puissance est rayonnée de façon isotrope (on néglige l'atténuation autour du coeur du faisceau). L'angle α est alors l'angle entre la droite (LM), reliant le laser au milieu de la zone imagée, et l'axe optique. Les coordonnées du laser sont donc données par :

$$(x_L, y_L, z_L) = \left(\frac{L_x}{2}, \frac{L_y}{2} - z_L \tan(\alpha), z_L \right)$$

Par convention, on suppose que la phase de l'amplitude complexe de l'onde incidente est nulle en L .

- Soit z_L est infini. Dans ce cas, l'onde incidente est considérée comme plane, de vecteur d'onde identique en tout point. L'angle α est alors l'angle entre le vecteur d'onde et l'axe (Oz), et la phase de l'amplitude complexe est supposée nulle à l'origine du repère.

La configuration, avec $z_L < +\infty$, est résumée par la Fig. 3.2.

3.1.2 Milieu diffusant

Position et mouvement des diffuseurs

Le milieu diffusant est supposé être constitué de N_{scat} diffuseurs ponctuels. Le n -ième diffuseur est noté S_n , et sa position \mathbf{x}_n est supposée être la réalisation du processus stochastique $\mathbf{X}_n =$

(X_n, Y_n) . Les $(\mathbf{X}_n)_{1 \leq n \leq N_{\text{scat}}}$ sont supposés indépendants et identiquement distribués. \mathbf{X}_n vérifie par ailleurs les propriétés suivantes :

- $\mathbf{X}_n(t = 0)$ suit une loi uniforme sur le volume $[-M_x, M_x] \times [-M_y, M_y] \times [-M_z, 0]$, où M_x, M_y et M_z sont des réels positifs respectivement grands devant L_x, L_y et λ . En particulier, la loi de (X_n, Y_n) conditionnellement à $(X_n \in [0, L_x]) \cap (Y_n \in [0, L_y])$ est uniforme sur $[0, L_x] \times [0, L_y]$: la distribution des diffuseurs sur la zone imagée est uniforme.
- \mathbf{X}_n suit l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{d\mathbf{X}_n}{dt} = \mathbf{V}_n \quad (3.1)$$

où \mathbf{V}_n est la vitesse vectorielle instantanée de S_n . Elle est telle que **le processus $t \mapsto \mathbf{V}_n(t)$ est un bruit blanc**, c'est-à-dire un processus stationnaire dont la valeur à $t = t_0$ quelconque ne dépend pas des valeurs prises pour $t < t_0$. \mathbf{X}_n et \mathbf{V}_n sont donc des processus de Markov.

Inversement, \mathbf{X}_n peut s'exprimer à l'aide d'une intégrale d'Itô sur \mathbf{V}_n :

$$\mathbf{X}_n(t_0 + \tau) = \mathbf{X}_n(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \mathbf{V}_n(t) dt \quad (3.2)$$

Comme \mathbf{V}_n ne dépend pas de t , $\mathbf{X}_n(t_0 + \tau) - \mathbf{X}_n(t_0)$ **ne dépend pas de t_0** . Dans le cas particulier où $\mathbf{V}_n(t)$ suit une loi normale centrée réduite, $\mathbf{X}_n(t_0 + \tau) - \mathbf{X}_n(t_0)$ suit une loi normale centrée de variance τ . \mathbf{X}_n est alors un mouvement brownien.

En simulation, on fera suivre à \mathbf{x} une marche aléatoire, ce qui revient à appliquer un schéma d'Euler explicite à (3.1).

Rétrodiffusion par les diffuseurs

Notre hypothèse de départ est que chaque diffuseur se comporte comme une source secondaire ponctuelle. Sous sa forme la plus simple, cette hypothèse implique qu'un diffuseur émet une onde sphérique en phase avec l'onde reçue. On appelle ainsi **phase laser** et on note $\varphi_{L,n}$ la phase de l'onde incidente à un diffuseur.

On s'affranchit cependant légèrement de cette hypothèse en s'autorisant à associer à chaque diffuseur S_n une **phase propre** $\varphi_{s,n}$, constante au cours du temps, dont il déphase l'onde incidente. Par ailleurs, on attribue à chaque diffuseur une amplitude A_n , qui est l'amplitude de l'onde qu'il rétrodiffuse. Finalement, juste après sa rétrodiffusion par le diffuseur S_n , l'onde a pour amplitude complexe :

$$\mathbf{A}_{r,n} = A_n e^{i(\varphi_{L,n} + \varphi_{s,n})}$$

Les (A_n) et les $(\varphi_{s,n})$ seront supposés indépendants et identiquement distribués à l'échelle de la population des diffuseurs.

On suppose par ailleurs être en régime de **diffusion simple** : on néglige la possibilité que l'onde puisse être rétrodiffusée successivement par plusieurs diffuseurs. Le champ rétrodiffusé, en aval du milieu diffusant, est donc la somme des contributions de tous les diffuseurs :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_n A_n e^{i(\varphi_{L,n} + \varphi_{s,n})} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \|\mathbf{r} - \mathbf{x}_n\|} \quad (3.3)$$

On va à présent faire la double approximation supplémentaire suivante sur l'amplitude de profondeur des diffuseurs :

- On suppose qu'elle est petite devant la distance milieu-caméra : l'approximation paraxiale est donc valable, et on peut négliger la parallaxe ;
- On suppose par ailleurs qu'elle est inférieure à la profondeur de champ du système d'imagerie.

Dès lors, si \mathbf{r} est suffisamment loin en aval du milieu, la distance $\|\mathbf{r} - \mathbf{x}_n\|$ dans (3.3) peut être approximée au premier ordre par :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{r} - \mathbf{x}_n\| &\simeq |z_r - z_n| \\ &= z_n - z_r\end{aligned}$$

On peut donc reprendre (3.3) :

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}) &\simeq \sum_n A_n e^{i(\varphi_{L,n} + \varphi_{s,n})} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(z_n - z_r)} \\ &= \sum_n A_n e^{i(\varphi_{L,n} + \varphi_{s,n})} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}z_n} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}z_r}\end{aligned}$$

Le terme $e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}z_r}$ est le même pour tous les diffuseurs et de module 1. Or notre système optique est linéaire, et la grandeur qui nous intéresse ultimement est l'intensité, sur laquelle ce terme n'a pas d'influence. On va donc l'éliminer et considérer que :

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \sum_n A_n e^{i(\varphi_{L,n} + \varphi_{s,n})} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}z_n} \\ &= \sum_n A_n e^{i(\varphi_{L,n} + \frac{2\pi}{\lambda}z_n + \varphi_{s,n})}\end{aligned}$$

On définit alors la **phase géométrique** du diffuseur S_n comme :

$$\begin{aligned}\varphi_{g,n} &= \varphi_{L,n} + \frac{2\pi}{\lambda}z_n \\ &= \frac{2\pi}{\lambda}(d_{L,n} + z_n)\end{aligned}\tag{3.4}$$

où $d_{L,n}$ est la distance parcourue par l'onde entre un front d'onde de référence, où la phase est supposée nulle, et le diffuseur. On appelle $d_{L,n}$ la **distance laser** du diffuseur S_n . Le calcul des expressions de $d_{L,n}$ et de $\varphi_{g,n}$ en fonction de la configuration expérimentale sera développé Section 3.2.1.

Enfin, on appellera tout simplement **phase** du diffuseur la grandeur :

$$\varphi_n = \varphi_{g,n} + \varphi_{s,n}$$

On a donc finalement :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_n A_n e^{i\varphi_n}$$

où \mathbf{A}_n est l'**amplitude complexe équivalente** du diffuseur n :

$$\mathbf{A}_n = A_n e^{i\varphi_n}\tag{3.5}$$

En effet, tout se passe comme si nos diffuseurs étaient autant de sources ponctuelles situées sur le plan d'équation $z = 0$, d'amplitudes complexes (\mathbf{A}_n). On appelle **champ amont** le champ d'amplitude complexe équivalent sur le plan $z = 0$. Le champ amont est donc défini par² :

$$\tilde{\mathbf{A}}(x, y, t) = \sum_n \mathbf{A}_n(t) \delta(x - x_n(t), y - y_n(t))\tag{3.6}$$

²Notons que cette formule implique que les quantités physiques $\tilde{\mathbf{A}}$ et \mathbf{A}_n n'ont pas la même dimension, puisque l'impulsion de Dirac a la dimension de l'inverse d'une distance. \mathbf{A}_n a en fait la dimension d'un champ multiplié par une surface : il ne s'agit pas physiquement du champ en \mathbf{x}_n , mais du champ intégré sur la surface du n -ième diffuseur. Cette situation est une conséquence de l'hypothèse que les diffuseurs sont ponctuels.

Corrélations temporelles des amplitudes complexes

Maintenant qu'on a établi une expression de l'amplitude complexe rétrodiffusée, on va s'intéresser à sa corrélation temporelle.

On rappelle que :

- $(A_n)_{1 \leq n \leq N_{scat}}$ et $(\varphi_{s,n})_{1 \leq n \leq N_{scat}}$ sont deux familles de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées;
- Pour tout n , A_n et $\varphi_{s,n}$ sont indépendants et constants au cours du temps;
- Pour tout n , $\varphi_{g,n}$ est déterminé à chaque instant à l'aide de (3.4), et il est la seule source de fluctuation de \mathbf{A}_n .

Soient m et n les indices de deux diffuseurs. La corrélation entre les amplitudes complexes des diffuseurs S_m et S_n , prises respectivement aux instants t et $t + \tau$, est donnée par :

$$\mathbb{E}[\mathbf{A}_n(t + \tau) \mathbf{A}_m^*(t)] = \mathbb{E}[A_n A_m] \mathbb{E}\left[e^{i(\varphi_{s,n} - \varphi_{s,m})}\right] \mathbb{E}\left[e^{i(\varphi_{g,n}(t + \tau) - \varphi_{g,m}(t))}\right]$$

Sous l'hypothèse que l'amplitude de la distribution des longueurs des chemins optiques est significativement plus grande que la longueur d'onde, on peut considérer que pour tout t et tout n , la mesure principale de $\varphi_{g,n}(t)$ suit une loi uniforme sur $]-\pi, \pi]$. Dès lors, $\mathbb{E}\left[e^{i\varphi_{g,n}(t)}\right] = 0$. Si de plus $m \neq n$, comme $\varphi_{g,n}(t + \tau)$ et $\varphi_{g,m}(t)$ sont indépendants, on a $\mathbb{E}\left[e^{i(\varphi_{g,n}(t + \tau) - \varphi_{g,m}(t))}\right] = 0$. Dès lors :

$$\mathbb{E}[\mathbf{A}_n(t + \tau) \mathbf{A}_m^*(t)] = \delta_{m,n} \langle A^2 \rangle \mathbb{E}\left[e^{i(\varphi_{g,n}(t + \tau) - \varphi_{g,n}(t))}\right]$$

où $\langle A^2 \rangle$ est la moyenne commune des A_i^2 .

Pour simplifier les calculs, on va alors faire l'hypothèse que φ_g est linéaire en \mathbf{x} . $\varphi_{g,n}(t + \tau) - \varphi_{g,n}(t)$ ne dépend alors que de $\mathbf{x}_n(t + \tau) - \mathbf{x}_n(t)$, qui lui-même ne dépend que de τ d'après les hypothèses faites en Section 3.1.2. Ainsi :

$$\mathbb{E}[\mathbf{A}_n(t + \tau) \mathbf{A}_m^*(t)] = \delta_{m,n} \langle A^2 \rangle \mathbb{E}\left[e^{i(\Delta\varphi_{g,n}(\tau))}\right] \quad (3.7)$$

où $\Delta\varphi_{g,n}(\tau) = \varphi_{g,n}(t + \tau) - \varphi_{g,n}(t)$, indépendamment de τ .

Deux choses sont à noter dans cette formule :

- Les rétrodiffusions complexes de deux diffuseurs différents sont complètement décorrélées. Cela découle de l'hypothèse de l'indépendance de leurs mouvements, et donc de leurs positions. Cette hypothèse est contestable : on peut imaginer des situations où des diffuseurs se déplacent ensemble et présentent des caractéristiques proches, de telle sorte que leurs rétrodiffusions restent similaires.
- L'autocorrélation de \mathbf{A}_n au cours du temps reste constante en module : autrement dit, \mathbf{A}_n ne se décorrèle pas de lui-même. Il s'agit d'une conséquence de la constance au cours du temps de A_n et $\varphi_{s,n}$. Cette dernière hypothèse est tout aussi discutable que la précédente : A_n et $\varphi_{s,n}$ sont justifiés par la géométrie volumique et les propriétés de rétrodiffusion que le diffuseur S_n expose à l'onde incidente. Or ces propriétés n'ont pas de raison de rester constantes au cours du temps. Une hématie, par exemple, étant donnée sa forme, n'a certainement pas toujours la même géométrie projetée sur le front d'onde.

3.1.3 Optique du système d'imagerie

On a à présent une idée assez précise du comportement de l'amplitude complexe rétrodiffusée par le milieu imagé. Il s'agit maintenant d'établir l'effet qu'a sur elle l'optique du système d'imagerie.

Cas général

Pour le système d'imagerie, on se place dans le cadre de la diffraction de Fraunhofer. On suppose donc le système optique linéaire et invariant par translation. Par conséquent, il est entièrement caractérisé par sa fonction d'étalement du point (PSF) h . Pour une ouverture de transmittance U , la théorie de Fraunhofer prévoit une PSF donnée par :

$$h(x, y) \propto \mathcal{F}\{U\}\left(\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z}\right)$$

où \mathcal{F} désigne la transformation de Fourier en deux dimensions. Autrement dit, la fonction de transfert du système est, à une dilatation près, la transmittance de l'ouverture. Quitte à effectuer un changement linéaire de système de coordonnées entre le milieu diffusant et l'image, on peut supposer cette dilatation égale à 1. Dans la même logique, on suppose que le grandissement du système est aussi égal à 1. On normalisera par ailleurs h de telle sorte que :

$$\int_{\mathbb{R}^2} h(x, y) \, dx \, dy = 1$$

On définit aussi l'aire du grain de speckle comme :

$$\mathcal{A}_S = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{h(x, y)}{h(0, 0)} \, dx \, dy$$

En conséquence, on a :

$$h(0, 0) = \frac{1}{\mathcal{A}_S} \quad (3.8)$$

L'optique est ainsi entièrement caractérisée par sa PSF h , ou, de manière équivalente, par sa fonction de transfert H . Pour la simulation et l'application à des cas précis, on définira donc l'optique directement à partir de cette dernière, qu'on considérera égale à la transmittance de l'ouverture.

On sera aussi très souvent amené à manipuler l'autocorrélation de la PSF, définie par :

$$R_h(u_x, u_y) = \iint_{\mathbb{R}^2} h(x, y) h(x + u_x, y + u_y) \, dx \, dy \quad (3.9)$$

Tout ceci étant dit, le champ en un point (x, y) de l'image (champ "aval") s'exprime simplement à l'aide d'une convolution :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(x, y, t) &= \{\tilde{\mathbf{A}}(\cdot, \cdot, t) * h\}(x, y) \\ &= \sum_n \mathbf{A}_n(t) h(x_n(t) - x, y_n(t) - y) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Cas standard d'une fonction de transfert de la forme d'une indicatrice

Dans la grande majorité des situations expérimentales réelles, la transmittance de l'ouverture est, en tout point, soit 1 (la lumière passe) soit 0 (la lumière ne passe pas). Elle prend donc la forme d'une indicatrice sur le plan. Par conséquent, la fonction de transfert est elle-même une indicatrice :

$$H = \mathbb{1}_{\mathcal{O}}$$

où \mathcal{O} désigne la partie de \mathbb{R}^2 occupée par l'ouverture.

En particulier :

- Si l'ouverture est rectangulaire, H est de la forme $H = \mathbb{1}_{[-a_x, a_x] \times [-a_y, a_y]}$. La PSF vaut alors :

$$h(x, y) = \text{sinc}\left(\frac{x}{l_{s,x}}\right) \text{sinc}\left(\frac{y}{l_{s,y}}\right)$$

où $l_{s,x} = \frac{\pi}{a_x}$ et $l_{s,y} = \frac{\pi}{a_y}$ sont les dimensions du grain de speckle. On peut alors définir l'aire du grain comme $\mathcal{A}_S = l_{s,x} l_{s,y}$.

- Si l'ouverture est circulaire, H est de la forme $H = \mathbb{1}_{\mathcal{D}_a}$, où \mathcal{D}_a est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon a . La PSF est alors donnée par :

$$h(r) = \frac{aJ_1(ar)}{2\pi r}$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, puisque la PSF, comme l'ouverture, est alors à symétrie circulaire. L'aire du grain peut alors être définie par $\mathcal{A}_S = \frac{4\pi}{a^2}$.

3.1.4 Capteur

On sait maintenant à quoi ressemble notre champ d'amplitude complexe après rétrodiffusion par le milieu imagé et passage par l'optique. Il reste à déterminer son effet sur le dernier maillon de la chaîne : le capteur.

Celui-ci est supposé se trouver dans le plan image par l'optique du plan $z = 0$. Comme mentionné précédemment, la zone imagée correspond au rectangle $[0, L_x] \times [0, L_y]$. La surface du capteur est quant à elle occupée par une matrice de $N_x \times N_y$ pixels carrés de côté $l_p = L_x/N_x = L_y/N_y$. La captation d'une image se fait en intégrant l'intensité lumineuse sur chaque pixel pendant un temps d'exposition T .

En général, l'intensité lumineuse est une grandeur proportionnelle à la puissance radiative reçue. Ici, on définit simplement l'intensité ponctuelle instantanée en un point (x, y) et un temps t comme :

$$I_{p,t}(x, y, t) = |\mathbf{A}(x, y, t)|^2$$

Et l'intensité du pixel $[p_x, p_y]$ de l'image n_t est alors donnée par :

$$I[p_x, p_y, n_t] = \int_{p_x}^{p_x+l_p} \int_{p_y}^{p_y+l_p} \int_{n_t}^{n_t+T} I_{p,t}(x, y, t) dt dy dx$$

On sera aussi amené à examiner l'intensité instantanée intégrée sur un pixel :

$$I_t(p_x, p_y, t) = \int_{p_x}^{p_x+l_p} \int_{p_y}^{p_y+l_p} I_{p,t}(x, y, t) dy dx$$

3.2 Analyse théorique

Notre système d'imagerie modélisé, on va pouvoir s'intéresser aux propriétés du signal de speckle dynamique qui serait obtenu avec un tel système. On va en particulier étudier l'évolution temporelle de ce signal.

On a vu que la phase géométrique des diffuseurs est la seule source de fluctuations du champ d'amplitude complexe. On se penchera donc en premier lieu sur son expression en fonction de la position du diffuseur étudié.

Par la suite, sous l'hypothèse d'une loi de mouvement pour les diffuseurs, il sera possible de déduire des statistiques sur le motif de speckle dynamique. En pratique, on s'intéressera exclusivement aux autocorrélations temporelles obtenues. Comme exposé et illustré dans les chapitres précédents, c'est en effet sur elles que s'appuient toutes les méthodes de speckle dynamique, directement ou indirectement.

On s'intéressera ainsi d'abord à l'autocorrélation simple de \mathbf{A} , définie par :

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{A}}(\Delta x, \Delta y, \tau) &= \mathbb{E}[\mathbf{A}^*(x, y, t) \mathbf{A}(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \tau)] \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{A}^*(0, 0, 0) \mathbf{A}(\Delta x, \Delta y, \tau)] \end{aligned}$$

Par la suite, on en déduira son coefficient d'autocorrélation :

$$r_A(\Delta x, \Delta y, \tau) = \frac{\mathbb{E}[\mathbf{A}^*(0, 0, 0)\mathbf{A}(\Delta x, \Delta y, \tau)]}{\mathbb{E}[|\mathbf{A}(0, 0, 0)|^2]}$$

On établira d'abord une expression aussi générale que possible pour ces deux quantités, puis on étudiera analytiquement quelques cas concrets.

3.2.1 Distance laser-capteur et phase géométrique

On a défini en (3.4) la **phase laser** $\varphi_{g,n}$ et la **distance laser** $d_{L,n}$ d'un diffuseur quelconque. On va à présent préciser leur expression en fonction de \mathbf{x}_n .

Comme $\varphi_{g,n}$ ne dépend de n qu'à travers \mathbf{x}_n , on simplifiera les notations en notant respectivement $\varphi_g(\mathbf{x})$ et $d_L(\mathbf{x})$ la phase laser et la distance laser d'un diffuseur qui serait situé en \mathbf{x} .

On va d'abord déterminer $d_L(\mathbf{x})$ selon que le laser est à distance finie ou infinie du milieu, c'est-à-dire que l'onde incidente est plane ou sphérique. On synthétisera ensuite les résultats en exprimant $\varphi_g(\mathbf{x})$.

Distance laser quand $|z_L| < +\infty$

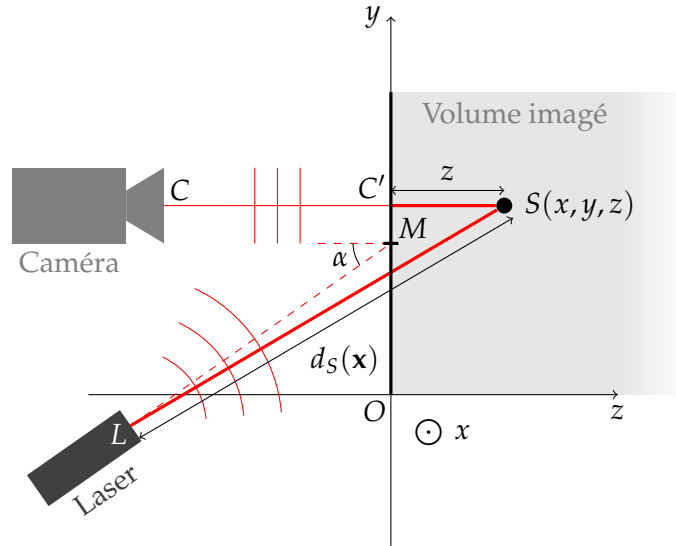


FIGURE 3.3 – Vue schématique de profil dans le cas où $|z_L| < +\infty$.

Supposons d'abord que le laser est à distance finie du plan $z = 0$. Comme détaillé dans la Section 3.1.1, il est alors considéré comme une source ponctuelle située au point L , émettant une onde sphérique. Sa position est donnée par :

$$(x_L, y_L, z_L) = \left(\frac{L_x}{2}, \frac{L_y}{2} - z_L \tan(\alpha), z_L \right)$$

Conventionnellement, on suppose la phase nulle en L à $t = 0$. La distance d_L est donc comptée à partir de L . Elle est donnée par :

$$d_L(\mathbf{x}) = \sqrt{(x - x_L)^2 + (y - y_L)^2 + (z - z_L)^2}$$

Distance laser quand $|z_L| = +\infty$

Supposons à présent que le laser est situé à l'infini, ce qui correspond à l'hypothèse d'une onde incidente plane. L'angle d'incidence α est alors le même sur toute la zone imagée. La configuration est résumée par la Figure 3.4.

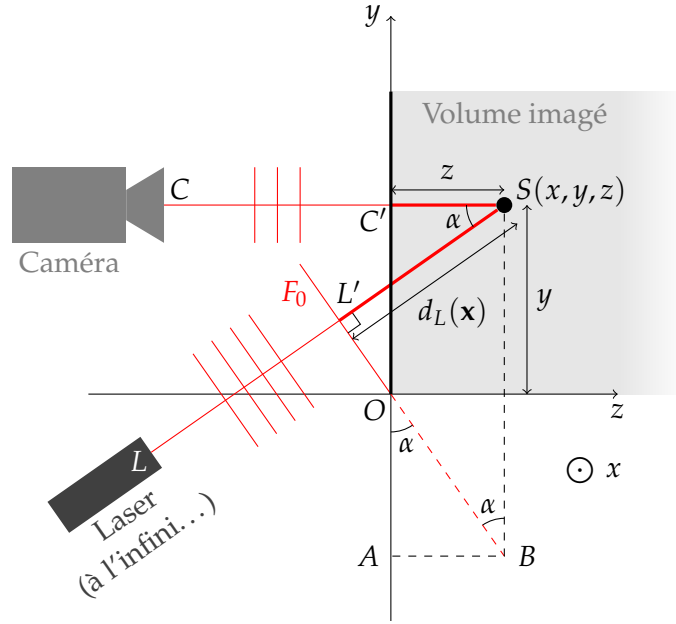


FIGURE 3.4 – Vue schématique de profil dans le cas où $|z_L| = +\infty$.

On suppose la phase de l'onde nulle à $t = 0$ en $(0, 0, 0)$. On compte donc la distance $d_L(\mathbf{x})$ à partir du front d'onde F_0 passant par O . On la calcule à l'aide d'un peu de trigonométrie élémentaire, en s'appuyant sur les points définis dans la Fig. 3.4 :

$$\begin{aligned}
 d_L(\mathbf{x}) &= L'S \\
 &= \sin(\alpha)BS \\
 &= \sin(\alpha) [AO + OC'] \\
 &= \sin(\alpha) [\cotan(\alpha)AB + y] \\
 &= \sin(\alpha) [\cotan(\alpha)z + y] \\
 &= \cos(\alpha)z + \sin(\alpha)y
 \end{aligned}$$

Phase géométrique

D'après (3.4), $\varphi_g(\mathbf{x})$ est donné par :

$$\varphi_g(\mathbf{x}) = \frac{2\pi}{\lambda} (d_L(\mathbf{x}) + z)$$

où z est la cote du point \mathbf{x} . On peut à présent réinjecter dans cette équation les expressions de $d_L(\mathbf{x})$ dans les deux cas (onde plane et onde sphérique) :

- Si l'onde est sphérique, on a :

$$\varphi_g(\mathbf{x}) = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\sqrt{(x - x_L)^2 + (y - y_L)^2 + (z - z_L)^2} + z \right]$$

- Si l'onde est plane, $\varphi_g(\mathbf{x})$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \varphi_g(\mathbf{x}) &= \frac{2\pi}{\lambda} [\cos(\alpha)z + \sin(\alpha)y + z] \\
 &= \frac{2\pi}{\lambda} [\sin(\alpha)y + [1 + \cos(\alpha)]z]
 \end{aligned}$$

Si l'onde est sphérique, φ_g n'est pas du tout linéaire en \mathbf{x} . L'hypothèse faite pour obtenir (3.7) n'est donc pas remplie. En revanche, dans le cas d'une onde incidente plane, φ_g est bien linéaire et on peut exprimer le déphasage géométrique $\Delta\varphi_g$ dû à un déplacement \mathbf{u} directement en fonction de celui-ci :

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_g(\mathbf{u}) &= \varphi_g(\mathbf{x} + \mathbf{u}) - \varphi_g(\mathbf{x}) \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} [\sin(\alpha)u_y + [1 + \cos(\alpha)]u_z]\end{aligned}$$

On montrera en simulation (Section 3.4.5) que lorsque z_L est suffisamment grand devant L_x et L_y , la sphéricité de l'onde n'a plus d'effet significatif et qu'on peut donc considérer l'onde comme plane. La linéarité de φ_g ainsi obtenue sera d'une grande aide pour les calculs.

3.2.2 Autocorrélation de l'amplitude : cas général

On a à présent une expression pour le champ au niveau du capteur, en fonction de la PSF et des amplitudes complexes des diffuseurs. On a aussi exprimé ces dernières en fonction des positions des diffuseurs. On peut donc maintenant déterminer une expression générale pour l'autocorrélation de l'amplitude complexe au niveau du capteur.

Calcul de l'autocorrélation

On se donne un décalage spatial $\Delta\mathbf{x} = (\Delta x, \Delta y) \in \mathbb{R}^2$ et un écart de temps $\tau \in \mathbb{R}$.

Calculons $R_A(\Delta x, \Delta y, \tau)$:

$$\begin{aligned}R_A(\Delta x, \Delta y, \tau) &= \mathbb{E}[\mathbf{A}^*(0, 0, 0)\mathbf{A}(\Delta x, \Delta y, \tau)] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_n \mathbf{A}_n^* h(x_n(0), y_n(0)) \sum_m \mathbf{A}_m h(\Delta x - x_m(\tau), \Delta y - y_m(\tau))\right] \\ &= \sum_n \sum_m \mathbb{E}[\mathbf{A}_n^* \mathbf{A}_m h(x_n(0), y_n(0)) h(\Delta x - x_m(\tau), \Delta y - y_m(\tau))]\end{aligned}$$

Pour n , Δx , Δy et t quelconques, les variables aléatoires \mathbf{A}_n et $h(\Delta x - x_n(t), \Delta y - y_n(t))$ ne sont pas indépendantes, car elles dépendent toutes les deux du vecteur aléatoire $\mathbf{x}_n(t)$, position du diffuseur à l'instant t . On rappelle en effet que par (3.5), \mathbf{A}_n dépend de $\varphi_{g,n}(t)$, lui-même fonction de $\mathbf{x}_n(t)$. En conséquence, pour tout (m, n) , $\mathbf{A}_n^* \mathbf{A}_m$ et $h(x_n(0), y_n(0)) h(\Delta x - x_m(\tau), \Delta y - y_m(\tau))$ ne sont pas indépendants. En revanche, si $\varphi_g(\mathbf{x})$ **varie significativement sur une distance petite devant l'amplitude de variation de \mathbf{x}** , on peut les supposer décorrélés, c'est-à-dire que l'espérance de leur produit est le produit de leurs espérances. C'est le cas si cette distance est petite devant l'amplitude de profondeur des diffuseurs, ou devant $\sin(\alpha)L_y$. Sous cette hypothèse, qu'on ajoute à celle de la linéarité de $\Delta\varphi_g$:

$$\begin{aligned}R_A(\Delta x, \Delta y, \tau) &= \sum_n \sum_m \mathbb{E}[\mathbf{A}_n^* \mathbf{A}_m] \mathbb{E}[h(x_n(0), y_n(0)) h(\Delta x - x_m(\tau), \Delta y - y_m(\tau))] \\ &= \sum_n \sum_m \delta_{m,n} \langle A^2 \rangle \mathbb{E}\left[e^{i(\Delta\varphi_{g,n}(\tau))}\right] \mathbb{E}[h(x_n(0), y_n(0)) h(\Delta x - x_m(\tau), \Delta y - y_m(\tau))] \\ &= \langle A^2 \rangle \sum_n \mathbb{E}\left[e^{i(\Delta\varphi_{g,n}(\tau))}\right] \mathbb{E}[h(x_n(0), y_n(0)) h(\Delta x - x_n(\tau), \Delta y - y_n(\tau))]\end{aligned}$$

où la deuxième ligne découle de (3.7).

Tous les \mathbf{x}_n sont de même loi. Soit donc $\mathbf{X} = (X, Y, Z)$ un processus stationnaire suivant la même loi que chacun des \mathbf{x}_n . On peut alors écrire :

$$R_A(\Delta x, \Delta y, \tau) = n \langle A^2 \rangle \mathbb{E}\left[e^{i(\Delta\varphi_g(\tau))}\right] \cdot \mathbb{E}[h(X(0), Y(0)) \cdot h(\Delta x - X(\tau), \Delta y - Y(\tau))]$$

Pour rendre plus commode la suite des calculs, décomposons $X(\tau)$ sous la forme :

$$\mathbf{X}(\tau) = \mathbf{X}(0) + \mathbf{U}(\tau) \quad (3.11)$$

où $\mathbf{U}(\tau) = \mathbf{X}(\tau) - \mathbf{X}(0)$ est l'accroissement de \mathbf{X} au cours du temps τ . Comme vu en Section 3.1.2, le mouvement des diffuseurs est caractérisé par la loi de $\mathbf{X}(t + \tau) - \mathbf{X}(t)$, qui est la même pour tout t , donc par la loi de \mathbf{U} . On suppose donc que \mathbf{U} suit une loi de densité p_τ définie sur \mathbb{R}^3 , et on écrit $\Delta\varphi_g(\tau) = \Delta\varphi_g(\mathbf{U}(\tau))$, puisque $\Delta\varphi_g$ ne dépend de τ qu'à travers \mathbf{U} .

Réinjectons (3.11) dans R_A :

$$\begin{aligned} R_A(\Delta x, \Delta y, \tau) &= n\langle A^2 \rangle \mathbb{E} \left[e^{i\Delta\varphi_g(\mathbf{U}(\tau))} \right] \mathbb{E} \left[h(X(0), Y(0)) \cdot h(\Delta x - X(0) - U_x(\tau), \Delta y - Y(0) - U_y(\tau)) \right] \\ &= n\langle A^2 \rangle \mathbb{E} \left[e^{i\Delta\varphi_g(\mathbf{U}(\tau))} \cdot h(X(0), Y(0)) \cdot h(\Delta x - X(0) - U_x(\tau), \Delta y - Y(0) - U_y(\tau)) \right] \end{aligned}$$

On applique alors la formule de l'espérance totale :

$$\begin{aligned} R_A(\Delta x, \Delta y, \tau) &= n\langle A^2 \rangle \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[e^{i\Delta\varphi_g(\mathbf{U}(\tau))} h(X(0), Y(0)) h(\Delta x - X(0) - U_x(\tau), \Delta y - Y(0) - U_y(\tau)) \mid \mathbf{U}(\tau) \right] \right] \\ &= n\langle A^2 \rangle \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\Delta\varphi_g(\mathbf{u})} \mathbb{E} [h(X(0), Y(0)) h(\Delta x - X(0) - u_x, \Delta y - Y(0) - u_y)] p_\tau(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \end{aligned}$$

Pour exprimer explicitement le terme d'espérance dans l'intégrale, on s'appuie sur l'hypothèse qu'à tout instant, $(X(t), Y(t))$ suit une loi uniforme sur un domaine \mathcal{D} grand par rapport aux autres longueurs caractéristiques du système. En particulier, on suppose que les valeurs de h et de p_τ sont négligeables hors de \mathcal{D} .

On peut donc faire l'approximation :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [h(X(0), Y(0)) h(\Delta x - X(0) - u_x, \Delta y - Y(0) - u_y)] &= \frac{1}{\mathcal{A}(\mathcal{D})} \iint_{\mathcal{D}} h(x, y) h(\Delta x - x - u_x, \Delta y - y - u_y) dx dy \\ &\simeq \frac{1}{\mathcal{A}(\mathcal{D})} \iint_{\mathbb{R}^2} h(x, y) h(\Delta x - u_x - x, \Delta y - u_y - y) dx dy \end{aligned}$$

où $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ est l'aire du domaine \mathcal{D} .

Dès lors :

$$R_A(\Delta x, \Delta y, \tau) = \frac{n}{\mathcal{A}(\mathcal{D})} \langle A^2 \rangle \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\Delta\varphi_g(\mathbf{u})} \left\{ \iint_{\mathbb{R}^2} h(x, y) h(\Delta x - u_x - x, \Delta y - u_y - y) dx dy \right\} p_\tau(\mathbf{u}) du_x du_y du_z$$

On pose alors $\rho = \frac{n}{\mathcal{A}(\mathcal{D})}$ la densité de diffuseurs par unité de surface. Par ailleurs, l'intégrale entre accolades correspond à l'autocorrélation de h , donnée par (3.9), évaluée en $(\Delta x - u_x, \Delta y - u_y)$. On a donc finalement :

$$R_A(\Delta x, \Delta y, \tau) = \rho \langle A^2 \rangle \int_{\mathbb{R}^3} R_h(u_x - \Delta x, u_y - \Delta y) e^{i\Delta\varphi_g(\mathbf{u})} p_\tau(\mathbf{u}) du_x du_y du_z$$

ou encore :

$$R_A(\Delta x, \Delta y, \tau) = \rho \langle A^2 \rangle \int_{\mathbb{R}} \left\{ R_h \star e^{i\Delta\varphi_g(\cdot, \cdot, u_z)} p_\tau(\cdot, \cdot, u_z) \right\} (\Delta x, \Delta y) du_z \quad (3.12)$$

où \star est la corrélation sur le plan (Oxy) , donc sur \mathbb{R}^2 .

En intervertissant la corrélation et l'intégrale, on obtient :

$$R_A(\Delta x, \Delta y, \tau) = \rho \langle A^2 \rangle \left\{ R_h \star \int_{\mathbb{R}} e^{i\Delta\varphi_g(\cdot, \cdot, u_z)} p_\tau(\cdot, \cdot, u_z) du_z \right\} (\Delta x, \Delta y)$$

$$\boxed{R_A(\Delta x, \Delta y, \tau) = \{R_h \star R_{\mathbf{A}}(\cdot, \cdot, \tau)\} (\Delta x, \Delta y)} \quad (3.13)$$

où $R_{\tilde{A}}(\Delta x, \Delta y, \tau) = \rho \langle A^2 \rangle \int_{\mathbb{R}} e^{i\Delta\varphi_g(\Delta x, \Delta x, u_z)} p_{\tau}(\Delta x, \Delta x, u_z) du_z$ est l'autocorrélation "amont", au niveau du milieu diffusant. On met ainsi en évidence le caractère linéaire du système optique. Analysons les deux termes de cette formule :

- $R_{\tilde{A}}$ correspond au déphasage géométrique moyen dû au mouvement des diffuseurs. Son expression ici traduit l'hypothèse de diffusion simple : elle ne dépend que du déplacement d'un unique diffuseur.

Un système dont tous les diffuseurs seraient immobiles aurait un $R_{\tilde{A}}$ constant, et donc une densité spectrale de puissance égale à une impulsion de Dirac. Le mouvement du système fait que $R_{\tilde{A}}$ décroît au cours du temps, et donc, par dualité, que la densité spectrale de puissance s'élargit autour de 0. Plus généralement, plus \tilde{A} se décorrèle vite d'elle-même, plus l'étalement spectral est important. On peut interpréter cet élargissement spectral comme dû à l'effet Doppler induit par les mouvements des particules : c'est ainsi qu'on parle fréquemment de *Doppler broadening* [22].

Mathématiquement, $R_{\tilde{A}}$ fait apparaître la fonction caractéristique de la distribution de déplacement et peut donc en pratique se calculer assez facilement avec des lois simples.

- Le terme R_h est dû à l'optique. Il est à l'origine d'un étalement spatial de l'autocorrélation dans le plan transverse. Ce phénomène découle de l'hypothèse que l'amplitude complexe d'un diffuseur reste indéfiniment corrélée à elle-même par conservation de sa phase propre.

Cela a d'abord un effet sur l'image $R_{\tilde{A}}(\cdot, \cdot, \tau)$ pour τ donné. En effet, si le système d'imagerie était idéal, c'est-à-dire si sa PSF était une impulsion de Dirac, R_h serait lui-même une impulsion de Dirac. Dans ce cas, l'autocorrélation en un point serait exactement celle d'un éventuel diffuseur en ce point. Au contraire, un système d'imagerie réel a sur l'autocorrélation l'effet d'un filtre passe-bas spatial : l'autocorrélation est moyennée spatialement. On perd certes en résolution, mais si le milieu est homogène, on diminue le bruit sur l'autocorrélation empirique.

Par ailleurs, le terme R_h a aussi un impact direct sur l'autocorrélation temporelle. Supposons en effet qu'on observe au cours du temps un point (x, y) où se trouve un diffuseur à l'instant t . Si le diffuseur n'est plus en ce point à l'instant $t + dt$, l'onde ne sera pas pour autant complètement décorrélée d'elle-même, car du fait de l'étendue non nulle de la PSF, le diffuseur continuera à contribuer à l'onde en (x, y) .

À ma connaissance, les formules données dans la littérature font systématiquement apparaître uniquement le terme $R_{\tilde{A}}$, sans le convoluer avec R_h . Ce n'est pas étonnant : même sous l'hypothèse discutable de conservation parfaite de la phase propre, on verra en Section 3.4.5 que R_h a très peu d'influence sur la corrélation avec des paramètres de simulation réalistes. En effet, avec de tels paramètres, λ , qui correspond approximativement à la distance que doit parcourir un diffuseur pour faire varier φ_g significativement, est en général bien plus petit que la largeur de la PSF. Lorsqu'un diffuseur se déplace, la décorrélation due au déphasage se produit donc en premier. La décorrélation due à la PSF n'intervient que lorsque le déphasage a déjà induit une décorrélation complète — c'est-à-dire qu'elle n'a quasiment aucun effet. L'effet de $R_{\tilde{A}}$ est donc largement dominant par rapport à celui de R_h .

Coefficient d'autocorrélation

Pour que les valeurs d'autocorrélations aient un sens et pour qu'on puisse les comparer d'un jeu de paramètres à un autre, il est plus commode qu'elles soient adimensionnelles. Pour cela, une forme de normalisation est nécessaire. La plus répandue est celle qui consiste à prendre le **coefficient d'autocorrélation** de \mathbf{A} , défini par :

$$r_{\mathbf{A}}(\Delta x, \Delta y, \tau) = \frac{R_{\mathbf{A}}(\Delta x, \Delta y, \tau)}{R_{\mathbf{A}}(0, 0, 0)}$$

$r_{\mathbf{A}}$ vaut alors 1 en $(\Delta x, \Delta y, \tau) = (0, 0, 0)$.

Pour obtenir r_A , il nous faut calculer $R_A(0,0,0)$. Pour cela, on commence par déduire de (3.2) que :

$$p_0(\mathbf{u}) = \delta(\mathbf{u})$$

c'est-à-dire que $\mathbf{U}(0)$ est constant égal à 0. Dès lors :

$$R_{\tilde{A}}(\Delta x, \Delta y, 0) = \rho \langle A^2 \rangle \delta(\Delta x, \Delta y)$$

Ainsi, par (3.13) :

$$\begin{aligned} R_A(0,0,0) &= \rho \langle A^2 \rangle R_h(0,0) \\ &= \rho \langle A^2 \rangle \int_{\mathbb{R}^2} h^2(x, y) \, dx \, dy \end{aligned}$$

Si par exemple l'ouverture (donc la fonction de transfert) est une indicatrice, l'expression intégrale de $R_h(0,0)$ se calcule aisément à l'aide de l'égalité de Parseval :

$$\begin{aligned} R_h(0,0) &= \int_{\mathbb{R}^2} h^2(x, y) \, dx \, dy \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} H^2(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} H(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta \\ &= h(0,0) \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$= \frac{1}{\mathcal{A}_S} \quad (3.16)$$

où \mathcal{A}_S est l'aire du grain de speckle. Le passage de (3.14) à (3.15) vient du fait que $H(\xi, \eta) \in \{0, 1\}$ pour tous ξ et η . (3.16) découle ensuite de 3.8.

On a donc $R_A(0,0,0) = \frac{\rho \langle A^2 \rangle}{\mathcal{A}_S}$, et donc :

$$r_A(\Delta x, \Delta y, \tau) = \frac{\mathcal{A}_S}{\rho \langle A^2 \rangle} R_A(\Delta x, \Delta y, \tau)$$

Finalement :

$$r_A(\Delta x, \Delta y, \tau) = \mathcal{A}_S \int_{\mathbb{R}} \left\{ R_h \star e^{i\Delta\varphi_g(\cdot, \cdot, u_z)} p_\tau(\cdot, \cdot, u_z) \right\} (\Delta x, \Delta y) \, du_z \quad (3.17)$$

Par la suite, on utilisera plutôt r_A que R_A , pour les raisons évoquées en début de section.

Expression alternative de l'autocorrélation

Il est possible d'obtenir une expression alternative de l'autocorrélation, parfois plus facile à interpréter, à l'aide du théorème de Plancherel.

Rappelons d'abord le théorème de Plancherel.

Théorème 3.2.1 (Plancherel)

Soient f et g sont deux fonctions de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^k, \mathbb{C})$. Alors :

$$\int_{\mathbb{R}^k} (\mathcal{F}\{f\})(\xi) (\mathcal{F}\{g\})^*(\xi) \, d\xi = (2\pi)^k \int_{\mathbb{R}^k} f(\mathbf{x}) g^*(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

où \mathcal{F} est la transformation de Fourier de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^k, \mathbb{C})$ dans lui-même.

Par ailleurs, on va avoir besoin d'une expression explicite de $\Delta\varphi_g(\mathbf{u})$. Comme on a fait l'hypothèse qu'il était linéaire en \mathbf{u} , on suppose qu'il s'écrit :

$$\Delta\varphi_g(\mathbf{u}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}$$

où \mathbf{a} est un vecteur dont la dimension est celle de l'inverse d'une distance.

Développons à présent (3.17) :

$$r_A(\Delta\mathbf{x}, \tau) = \mathcal{A}_S \iiint_{\mathbb{R}^3} R_h(u_x - \Delta x, u_y - \Delta y) e^{i\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}} p_\tau(\mathbf{u}) du_x du_y du_z$$

On va appliquer le théorème de Plancherel dans \mathbb{R}^3 aux fonctions $\mathbf{u} \mapsto R_h(u_x - \Delta x, u_y - \Delta y)$ et $\mathbf{u} \mapsto e^{i\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}} p_\tau(\mathbf{u})$.

- La transformée de Fourier de R_h est $|H|^2$, par le théorème de Wiener-Khintchine, donc celle de $\mathbf{u} \mapsto R_h(\mathbf{u} - \Delta\mathbf{x})$ est $\xi \mapsto e^{-i[\Delta x \xi_x + \Delta y \xi_y]} |H|^2(\xi_x, \xi_y) \delta(\xi_z)$.
- La transformée de Fourier de p_τ est $\xi \mapsto \phi_\tau(-\xi)$, où $\phi_\tau : \xi \mapsto \mathbb{E}[e^{i\xi \cdot \mathbf{U}}]$ est la fonction caractéristique de \mathbf{U} . Celle de $\mathbf{u} \mapsto e^{i\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}} p_\tau(\mathbf{u})$ est donc $\xi \mapsto \phi_\tau(\mathbf{a} - \xi)$.

Dès lors :

$$r_A(\Delta x, \Delta y, \tau) = \frac{\mathcal{A}_S}{(2\pi)^3} \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{i[\Delta x \xi_x + \Delta y \xi_y]} |H|^2(\xi_x, \xi_y) \delta(\xi_z) \phi_\tau(\mathbf{a} - \xi) d\xi_x d\xi_y d\xi_z$$

$$\boxed{r_A(\Delta x, \Delta y, \tau) = \frac{\mathcal{A}_S}{(2\pi)^3} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i[\Delta x \xi_x + \Delta y \xi_y]} |H|^2(\xi_x, \xi_y) \phi_\tau(a_x - \xi_x, a_y - \xi_y, a_z) d\xi_x d\xi_y} \quad (3.18)$$

Dans le cas où on s'intéresse à l'évolution d'un pixel donné au cours du temps, on a $\Delta x = \Delta y = 0$. On a alors :

$$r_A(\Delta x, \Delta y, \tau) = \frac{\mathcal{A}_S}{(2\pi)^3} \iint_{\mathbb{R}^2} |H|^2(\xi_x, \xi_y) \phi_\tau(a_x - \xi_x, a_y - \xi_y, a_z) d\xi_x d\xi_y$$

Cette expression, et plus généralement (3.18), se révéleront utiles en pratique, car on supposera systématiquement que H , et donc $|H|^2$, est une indicatrice. Ainsi, le domaine de l'intégrale sera réduit à une surface finie, ce qui facilitera son calcul numérique.

3.2.3 Application à quelques cas concrets

On va à présent appliquer nos formules à des cas précis de fonction de transfert et de loi de mouvement.

Concernant la fonction de transfert, on fera systématiquement l'hypothèse qu'il s'agit de l'indicatrice d'un rectangle centré en 0. Cela revient à supposer que la transmittance de l'ouverture est elle-même rectangulaire. Cette hypothèse est certes assez peu réaliste : dans la pratique, on rencontre presque uniquement des *pinholes* circulaires. Cependant, elle facilite considérablement les calculs analytiques, car la fonction de transfert et la PSF sont alors séparables en coordonnées cartésiennes. Par ailleurs, on verra en simulation que ses conséquences sont assez faibles, car le terme en R_h dans (3.17) a en pratique peu d'influence sur l'autocorrélation.

Ainsi, la fonction de transfert prend la forme :

$$H = \mathbb{1}_{\left[-\frac{\pi}{l_{s,x}}, \frac{\pi}{l_{s,x}}\right] \times \left[-\frac{\pi}{l_{s,y}}, \frac{\pi}{l_{s,y}}\right]}$$

où $l_{s,x}$ et $l_{s,y}$ sont les deux dimensions du grain de speckle.

la PSF vaut alors :

$$h(x, y) = \frac{1}{l_{s,x}l_{s,y}} \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{l_{s,x}}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{y}{l_{s,y}}\right)$$

Notons, en vue des calculs d'autocorrélation, que l'autocorrélation d'un sinus cardinal est aussi un sinus cardinal. Ce résultat se montre sans difficulté à l'aide du théorème de Wiener-Khintchine. Dans un tel cas, on a donc $R_h = h$.

Pour toute cette section, on se placera dans l'hypothèse d'une onde incidente plane, de manière à pouvoir utiliser les résultats de la Section 3.2.2.

Mouvement constant dans une direction

On commence par traiter le cas le plus simple possible, où tous les diffuseurs se déplacent à la même vitesse vectorielle, parallèlement au plan d'équation $z = 0$, et où l'angle d'incidence α est nul. On note $\vec{v} = (v_x, v_y, 0)$ leur vecteur vitesse commun. Comme $\alpha = 0$, la phase géométrique φ_g ne dépend que de z : elle reste donc constante au cours du temps pour chaque diffuseur. Au cours d'un temps τ , la densité de probabilité du déplacement du diffuseur n est donnée par :

$$p_\tau(u_x, u_y, u_z) = \delta(v_x\tau - u_x, v_y\tau - u_y, u_z)$$

Donc, reprenant (3.17) :

$$r_A(\Delta x, \Delta y, \tau) = \mathcal{A}_S \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{l_{s,x}l_{s,y}} \operatorname{sinc}\left(\frac{u_x - \Delta x}{l_{s,x}}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{u_y - \Delta y}{l_{s,y}}\right) e^{i\Delta\varphi_g(u_z)} \delta(v_x\tau - u_x, v_y\tau - u_y, u_z) du_x du_y du_z$$

Comme $\Delta\varphi(0) = 0$ (si un diffuseur ne se déplace pas, sa phase géométrique ne change pas), on a :

$$\begin{aligned} r_A(\Delta x, \Delta y, \tau) &= \mathcal{A}_S \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{l_{s,x}l_{s,y}} \operatorname{sinc}\left(\frac{u_x - \Delta x}{l_{s,x}}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{u_y - \Delta y}{l_{s,y}}\right) \delta(v_x\tau - u_x, v_y\tau - u_y) du_x du_y \\ &= \frac{\mathcal{A}_S}{l_{s,x}l_{s,y}} \operatorname{sinc}\left(\frac{v_x\tau - \Delta x}{l_{s,x}}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{v_y\tau - \Delta y}{l_{s,y}}\right) \end{aligned}$$

Or $\mathcal{A}_S = l_{s,x}l_{s,y}$, donc :

$$\boxed{r_A(\Delta x, \Delta y, \tau) = \operatorname{sinc}\left(\frac{v_x\tau - \Delta x}{l_{s,x}}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{v_y\tau - \Delta y}{l_{s,y}}\right)} \quad (3.19)$$

Au vu de ce résultat, on peut faire les remarques suivantes :

- Le sinus cardinal a une enveloppe en $\frac{1}{x}$, ce qui signifie qu'asymptotiquement, r_A évolue comme $\frac{1}{\tau^2}$ aux oscillations près.
- Multiplier \vec{v} par k revient à opérer une contraction de facteur k sur r_A : la décorrélation se fait k fois plus vite. Ainsi, si on devait introduire un temps caractéristique de décorrélation, celui-ci serait inversement proportionnel à $\|\vec{v}\|$.
- Multiplier $l_{s,x}$ et $l_{s,y}$ par k (donc multiplier l'aire du grain $\mathcal{A}_S = l_{s,x}l_{s,y}$ par k^2) revient à effectuer une dilatation de facteur k sur r_A : la décorrélation se fait k fois moins vite. Ainsi, le temps de corrélation est proportionnel à l'aire du grain et dépend donc de l'optique.

On peut enfin noter que, si notre vitesse vectorielle constante avait eu une composante non nulle selon z , cela n'aurait rien changé au résultat.

Mouvement brownien

On suppose à présent que les trois composantes de la position du diffuseur suivent trois mouvements browniens indépendants. Son déplacement au cours d'un temps τ suit donc une loi normale multidimensionnelle :

$$\mathbf{x}_n(t + \tau) - \mathbf{x}_n(t) \sim \mathcal{N} \left(0, \tau \operatorname{diag}(\sigma_x^2, \sigma_y^2, \sigma_z^2) \right)$$

où σ_i est la variation quadratique par unité de temps de la composante $i \in \{x, y, z\}$ du déplacement. Il constitue le paramètre d'intérêt ici, puisque la vitesse vectorielle moyenne d'un diffuseur au cours d'un temps τ est nulle.

La densité de probabilité de déplacement p_τ de notre diffuseur brownien est donc donnée par :

$$\begin{aligned} p_\tau(u_x, u_y, u_z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x\sqrt{\tau}} e^{-\frac{u_x^2}{2\sigma_x^2\tau}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sqrt{\tau}} e^{-\frac{u_y^2}{2\sigma_y^2\tau}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z\sqrt{\tau}} e^{-\frac{u_z^2}{2\sigma_z^2\tau}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma_x\sigma_y\sigma_z\tau^{3/2}} e^{-\left[\frac{u_x^2}{2\sigma_x^2\tau} + \frac{u_y^2}{2\sigma_y^2\tau} + \frac{u_z^2}{2\sigma_z^2\tau}\right]} \end{aligned}$$

On a par ailleurs :

$$\Delta d(u_x, u_y, u_z) = \sin(\alpha)u_y + (1 + \cos(\alpha))u_z$$

Reprenons donc (3.17) :

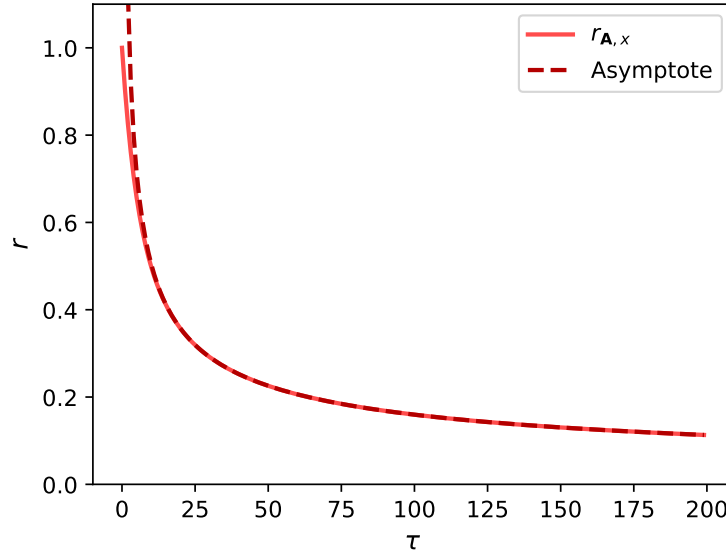
$$\begin{aligned} r_A(\Delta x, \Delta y, \tau) &= \mathcal{A}_S \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{l_{s,x}l_{s,y}} \operatorname{sinc}\left(\frac{u_x - \Delta x}{l_{s,x}}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{u_y - \Delta y}{l_{s,y}}\right) e^{i\frac{2\pi}{\lambda}[\sin(\alpha)u_y + (1+\cos(\alpha))u_z]} \\ &\quad \cdot \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma_x\sigma_y\sigma_z\tau^{3/2}} e^{-\left[\frac{u_x^2}{2\sigma_x^2\tau} + \frac{u_y^2}{2\sigma_y^2\tau} + \frac{u_z^2}{2\sigma_z^2\tau}\right]} du_x du_y du_z \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma_x\sigma_y\sigma_z\tau^{3/2}} \iiint_{\mathbb{R}^3} \operatorname{sinc}\left(\frac{u_x - \Delta x}{l_{s,x}}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{u_y - \Delta y}{l_{s,y}}\right) e^{i\frac{2\pi}{\lambda}[\sin(\alpha)u_y + (1+\cos(\alpha))u_z]} \\ &\quad \cdot e^{-\left[\frac{u_x^2}{2\sigma_x^2\tau} + \frac{u_y^2}{2\sigma_y^2\tau} + \frac{u_z^2}{2\sigma_z^2\tau}\right]} du_x du_y du_z \end{aligned}$$

Utilisons à présent (3.18). La fonction caractéristique d'une loi normale de moyenne nulle et d'écart-type σ est $t \mapsto e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$. On a donc :

$$\begin{aligned} r_A(\Delta x, \Delta y, \tau) &= \frac{\mathcal{A}_S}{(2\pi)^3} \iint_{\mathbb{R}^2} \cos(\Delta x \xi_x + \Delta y \xi_y) \mathbb{1}_{\left[-\frac{\pi}{l_{s,x}}, \frac{\pi}{l_{s,x}}\right] \times \left[-\frac{\pi}{l_{s,y}}, \frac{\pi}{l_{s,y}}\right]} \\ &\quad \cdot e^{-\frac{\sigma_x^2 \tau}{2} \xi_x^2 - \frac{\sigma_y^2 \tau}{2} \xi_y^2 - \frac{2\pi}{\lambda} \sin(\alpha) \xi_y} e^{-\frac{\sigma_z^2 \tau}{2} \left[\frac{2\pi}{\lambda} \sin(\alpha) - \xi_y\right]^2 - \frac{\sigma_z^2 \tau}{2} \frac{4\pi^2}{\lambda^2} [1 + \cos(\alpha)]^2} d\xi_x d\xi_y \\ &= \frac{\mathcal{A}_S}{(2\pi)^3} e^{-\frac{2\pi^2 [1 + \cos(\alpha)]^2 \sigma_z^2 \tau}{\lambda^2}} \int_{-\frac{\pi}{l_{s,x}}}^{\frac{\pi}{l_{s,x}}} e^{i\Delta x \xi_x - \frac{\sigma_x^2 \tau}{2} \xi_x^2} d\xi_x \int_{-\frac{\pi}{l_{s,y}}}^{\frac{\pi}{l_{s,y}}} e^{i\Delta y \xi_y - \frac{\sigma_y^2 \tau}{2} \left[\frac{2\pi}{\lambda} \sin(\alpha) - \xi_y\right]^2} d\xi_y \\ &= r_{A,z}(\tau) r_{A,x}(\Delta x, \tau) r_{A,y}(\Delta y, \tau) \end{aligned}$$

où on a mis en évidence la séparabilité de l'autocorrélation par rapport aux trois variables d'espace :

$$\begin{cases} r_{A,z}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2\pi^2 [1 + \cos(\alpha)]^2 \sigma_z^2 \tau}{\lambda^2}} \\ r_{A,x}(\Delta x, \tau) &= \frac{l_{s,x}}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{l_{s,x}}}^{\frac{\pi}{l_{s,x}}} e^{i\Delta x \xi_x - \frac{\sigma_x^2 \tau}{2} \xi_x^2} d\xi_x \\ r_{A,y}(\Delta y, \tau) &= \frac{l_{s,y}}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{l_{s,y}}}^{\frac{\pi}{l_{s,y}}} e^{i\Delta y \xi_y - \frac{\sigma_y^2 \tau}{2} \left[\frac{2\pi}{\lambda} \sin(\alpha) - \xi_y\right]^2} d\xi_y \end{cases}$$

FIGURE 3.5 – Courbe de $r_{A,x}$ et son asymptote, avec $l_{s,x}/\sigma_x = 1/4$

On peut ainsi étudier séparément chacun des trois termes :

- $r_{A,z}$ adopte une forme particulièrement simple, puisqu'il s'agit d'une exponentielle décroissante. Son temps caractéristique de décroissance est $\frac{\lambda^2}{2\pi^2[1+\cos(\alpha)]^2\sigma_z^2}$.
- Pour $r_{A,x}$, on y voit plus clair si on effectue dans l'intégrale le changement de variable $\nu_x = \sigma_x \sqrt{\tau} \xi_x$. On a alors :

$$r_{A,x}(\Delta x, \tau) = \frac{l_{s,x}}{2\pi\sigma_x\sqrt{\tau}} \int_{-\frac{\pi\sigma_x\sqrt{\tau}}{l_{s,x}}}^{\frac{\pi\sigma_x\sqrt{\tau}}{l_{s,x}}} e^{i\frac{\Delta x\nu_x}{\sigma_x\sqrt{\tau}} - \frac{\nu_x^2}{2}} d\nu$$

En particulier, si $\Delta x = 0$:

$$r_{A,x}(\Delta x, \tau) = \frac{l_{s,x}}{2\pi\sigma_x\sqrt{\tau}} \int_{-\frac{\pi\sigma_x\sqrt{\tau}}{l_{s,x}}}^{\frac{\pi\sigma_x\sqrt{\tau}}{l_{s,x}}} e^{-\frac{\nu_x^2}{2}} d\nu_x$$

On peut alors remarquer que quand $\tau \rightarrow +\infty$, l'intégrale converge (il s'agit de l'intégrale de Gauss). Sous ce comportement asymptotique, $r_{A,x}$ évolue proportionnellement à $\frac{l_{s,x}}{\sigma_x\sqrt{\tau}}$. La courbe obtenue par intégration numérique avec $\sigma_x = l_{s,x}/4$ est reproduite Fig. 3.5, avec son asymptote d'équation $r = \frac{l_{s,x}}{\sqrt{2\pi\sigma_x\sqrt{\tau}}}$.

- Pour $r_{A,y}$, on effectue le changement de variable $\nu_y = \sigma_y \sqrt{\tau} \left[\frac{2\pi}{\lambda} \sin(\alpha) - \xi_y \right]$. On a alors :

$$r_{A,y}(\Delta y, \tau) = \frac{l_{s,y}}{2\pi\sigma_y\sqrt{\tau}} \int_{\sigma_y\sqrt{\tau}\left[\frac{2\pi}{\lambda}\sin(\alpha) - \frac{\pi}{l_{s,y}}\right]}^{\sigma_y\sqrt{\tau}\left[\frac{2\pi}{\lambda}\sin(\alpha) + \frac{\pi}{l_{s,y}}\right]} e^{i\Delta y\left[\frac{2\pi}{\lambda} - \frac{\nu_y}{\sigma_y\sqrt{\tau}}\right] - \frac{\nu_y^2}{2}} d\nu_y$$

Et si $\Delta y = 0$:

$$r_{A,y}(\Delta y, \tau) = \frac{l_{s,y}}{2\pi\sigma_y\sqrt{\tau}} \int_{\sigma_y\sqrt{\tau}\left[\frac{2\pi}{\lambda}\sin(\alpha) - \frac{\pi}{l_{s,y}}\right]}^{\sigma_y\sqrt{\tau}\left[\frac{2\pi}{\lambda}\sin(\alpha) + \frac{\pi}{l_{s,y}}\right]} e^{-\frac{\nu_y^2}{2}} d\nu_y$$

Il faut alors distinguer deux cas :

- Soit $\frac{2\pi}{\lambda} \sin(\alpha) - \frac{\pi}{l_{s,y}} < 0$, c'est-à-dire $l_{s,y} \sin(\alpha) < \frac{\lambda}{2}$. Dans ce cas, les deux bornes de l'intégrale tendent respectivement vers $-\infty$ et $+\infty$ lorsque $\tau \rightarrow +\infty$. $r_{A,y}$ prend alors la même forme que $r_{A,x}$, avec une asymptote en $1/\sqrt{\tau}$.

- Soit $l_{s,y} \sin(\alpha) > \frac{\lambda}{2}$. Dans ce cas, les deux bornes de l'intégrale tendent vers $+\infty$. Du fait de la vitesse de convergence de l'intégrande, l'approximation rectangulaire de l'intégrale devient valable pour τ assez grand. La largeur de l'intervalle vaut alors $\frac{2\pi\sigma_y\sqrt{\tau}}{l_{s,y}}$, et l'intégrande peut être approximée par $e^{2\pi^2 \sin^2(\alpha)\sigma_y^2\tau/\lambda}$. On a alors :

$$\begin{aligned} r_{A,y}(0, \tau) &\simeq \frac{l_{s,y}}{2\pi\sigma_y\sqrt{\tau}} \cdot \frac{2\pi\sigma_y\sqrt{\tau}}{l_{s,y}} \cdot e^{-2\pi^2 \sin^2(\alpha)\sigma_y^2\tau/\lambda} \\ &= e^{-2\pi^2 \sin^2(\alpha)\sigma_y^2\tau/\lambda} \end{aligned}$$

Ainsi, on retrouve la même exponentielle décroissante que pour $r_{A,z}$.

La Fig. 3.6 montre le passage de l'un à l'autre de ces deux régimes.

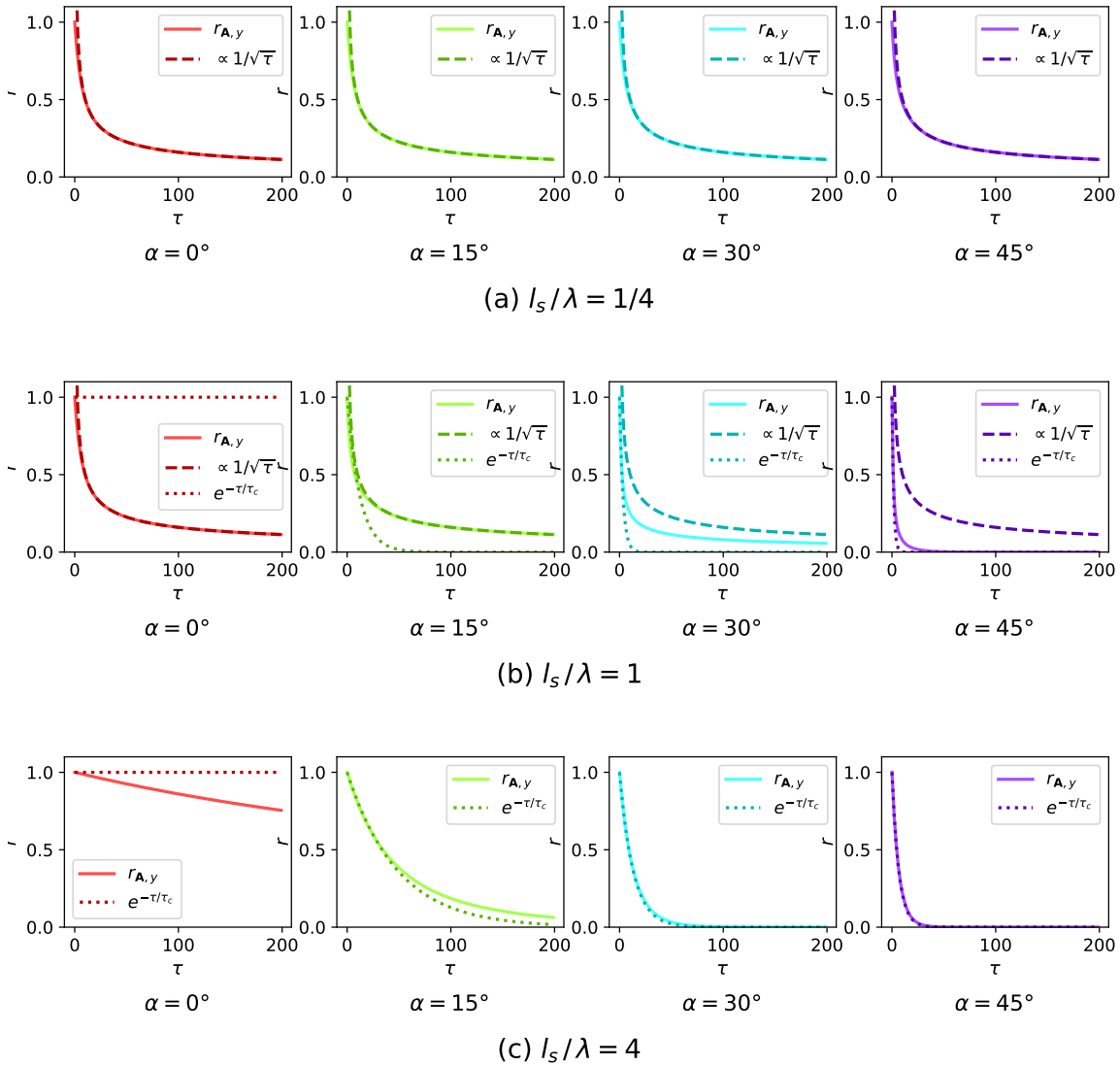


FIGURE 3.6 – Courbe de $r_{A,y}$ en fonction de α , d'un régime limite à l'autre. La première ligne correspond à un cas où $l_{s,y}$ est plus petit que λ : le régime en $1/\sqrt{\tau}$, dû à la contribution de R_h , est dominant. Au contraire, sur la dernière ligne, λ est plus petit que $l_{s,y}$: dès que α est suffisant, le régime exponentiel décroissant, dû à $R_{\bar{A}}$, prend le dessus. La deuxième ligne montre des situations intermédiaires.

Ajout d'un mouvement constant à une loi de déplacement

Jusqu'ici, on a étudié le cas d'un ensemble de particules en mouvement brownien (pas de déplacement d'ensemble), ou, à l'inverse, en déplacement stationnaire parfaitement homogène. En pratique, dans un vaisseau sanguin par exemple, on a un déplacement d'ensemble, mais celui-ci ne constitue qu'une moyenne autour de laquelle les vitesses des particules sont soumises à des fluctuations. Une loi de mouvement plus proche de la situation réelle pourrait donc être obtenue en sommant un déplacement constant déterministe et des fluctuations de moyenne nulle. C'est ce que font les électriciens en distinguant courant de *dérive* et de *diffusion* (voir par exemple [69]). Typiquement, les fluctuations sont alors modélisées par une gaussienne multivariée de moyenne nulle et de matrice de variance-covariance $\Sigma = \text{diag}(\sigma_x^2\tau, \sigma_y^2\tau, \sigma_z^2\tau)$, ce qui correspond là encore à un mouvement brownien.

Ici, on va donc étudier plus généralement le cas où on ajoute à une loi de probabilité de déplacement (quelconque, pas forcément brownienne) de densité p_τ , modélisant les fluctuations, une composante déterministe $\vec{v}\tau$. Le déplacement total obtenu a alors pour densité $q_\tau = p_\tau * \delta_{\vec{v}\tau}$, c'est-à-dire p_τ translatée de $\vec{v}\tau$.

La fonction caractéristique ψ_τ associée à q_τ est alors donnée par :

$$\psi_\tau(\xi) = \phi_\tau(\xi) e^{i\tau\vec{v}\cdot\xi}$$

où ϕ_τ est la fonction caractéristique associée à p_τ .

On peut alors reprendre (3.18) :

$$\begin{aligned} r_{A,q}(\Delta x, \Delta y, \tau) &= \frac{\mathcal{A}_S}{(2\pi)^3} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i(\Delta x \xi_x + \Delta y \xi_y)} |H|^2(\xi_x, \xi_y) \psi_\tau \left(\frac{2\pi}{\lambda} a_x - \xi_x, \frac{2\pi}{\lambda} a_y - \xi_y, \frac{2\pi}{\lambda} a_z \right) d\xi_x d\xi_y \\ &= \frac{\mathcal{A}_S}{(2\pi)^3} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i(\Delta x \xi_x + \Delta y \xi_y)} |H|^2(\xi_x, \xi_y) \cdot \phi_\tau \left(\frac{2\pi}{\lambda} a_x - \xi_x, \frac{2\pi}{\lambda} a_y - \xi_y, \frac{2\pi}{\lambda} a_z \right) \\ &\quad \cdot e^{i\tau \left[v_x \left(\frac{2\pi}{\lambda} a_x - \xi_x \right) + v_y \left(\frac{2\pi}{\lambda} a_y - \xi_y \right) + v_z \frac{2\pi}{\lambda} a_z \right]} d\xi_x d\xi_y \\ &= \frac{\mathcal{A}_S}{(2\pi)^3} e^{i\tau \frac{2\pi}{\lambda} \vec{v} \cdot \mathbf{a}} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i[(\Delta x - \tau v_x) \xi_x + (\Delta y - \tau v_y) \xi_y]} \phi_\tau \left(\frac{2\pi}{\lambda} a_x - \xi_x, \frac{2\pi}{\lambda} a_y - \xi_y, \frac{2\pi}{\lambda} a_z \right) \\ &\quad \cdot d\xi_x d\xi_y \\ &= e^{i\tau \frac{2\pi}{\lambda} \vec{v} \cdot \mathbf{a}} r_{A,p}(\Delta x - \tau v_x, \Delta y - \tau v_y, \tau) \end{aligned}$$

Pour obtenir $r_{A,q}$, il suffit donc de multiplier $r_{A,p}$ par une **rampe de phase**. Dans la perspective de la relation de Siegert (Sec. 1.3.2), c'est un point important : en ne disposant que de l'intensité du signal, on n'a accès qu'au module de l'autocorrélation de son amplitude. Par conséquent, la rampe de phase disparaît et on ne peut pas retrouver le déplacement d'ensemble, seulement les fluctuations autour de celui-ci.

3.3 Implémentation

La section précédente nous a permis d'établir un certain nombre de résultats accessibles par des calculs analytiques relativement simples. Pour aller plus loin, il nous faut nous affranchir des contraintes du calcul exact en implémentant numériquement notre modèle. On pourra ainsi obtenir de nouveaux résultats à l'aide de méthodes de Monte-Carlo.

Appliquer exactement le modèle décrit dans la Section 3.1 impliquerait de suivre les étapes suivantes :

1. On commence par tirer aléatoirement les positions de N_{scat} diffuseurs, répartis uniformément sur le domaine $[0, L_x] \times [0, L_y]$, et on calcule les phases géométriques $(\varphi_{g,n})$ correspondantes. On tire ensuite les modules (A_n) de leurs rétrodiffusions et leurs phases propres $(\varphi_{s,n})$ (tous deux indépendants et identiquement distribués).

2. On calcule l'amplitude complexe associée à chaque diffuseur par la formule :

$$\mathbf{A}_n = A_n e^{i(\varphi_{s,n} + \varphi_{g,n})}$$

où $\varphi_{g,n}$ est la phase géométrique, dépendant de la position du diffuseur et des caractéristiques du laser (longueur d'onde, position).

3. On calcule l'amplitude aval, au niveau du capteur de la caméra, par la formule :

$$\mathbf{A}(x, y) = \sum_n \mathbf{A}_n h(x_n - x, y_n - y) \quad (3.20)$$

où h est la PSF de l'optique.

4. On calcule l'intensité, qui est la grandeur mesurée par la caméra, pour chaque pixel $[p_x, p_y] \in \llbracket 0, N_x - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, N_y - 1 \rrbracket$:

$$I(p_x, p_y) = \int_{p_x}^{p_x + l_p} \int_{p_y}^{p_y + l_p} |\mathbf{A}(x, y)|^2 dx dy \quad (3.21)$$

où l_p est le côté d'un pixel.

5. On fait bouger les diffuseurs selon le modèle choisi.

6. On recommence à partir de l'étape 2.

Malheureusement, sous cette forme, l'implémentation du modèle pose un réel problème de complexité calculatoire. En effet, en simulation, le nombre de diffuseurs sera en général de l'ordre de $N_{scat} = 10^5$ à 10^6 . Le calcul de \mathbf{A} , à l'aide de (3.20), en un seul point et pour un seul pas de temps, nécessite de calculer N_{scat} valeurs de \mathbf{A}_n et de h , puis de sommer N_{scat} termes, soit une complexité de l'ordre de N_{scat} . Une telle opération doit être répétée autant de fois qu'on veut calculer de valeurs de \mathbf{A} dans l'image. Or, pour obtenir I avec une précision raisonnable, il faut calculer plusieurs valeurs de \mathbf{A} par pixel — disons une dizaine. On se retrouve donc avec $10 \times N_x \times N_y \times N_{scat}$ opérations élémentaires à effectuer pour un seul pas de temps. À raison de quelques 10^4 pixels, ce nombre peut être estimé à au moins 10^{10} . Il n'est pas possible d'effectuer autant d'opérations en un temps raisonnable sur un PC standard.

Plus généralement, le passage d'un modèle construit comme continu à une implémentation nécessairement discrète ne se fera pas sans heurts. Le but de cette section est donc de reprendre, étape par étape, la procédure de simulation décrite précédemment, pour détailler son implémentation et les compromis éventuels que celle-ci nécessite.

On commencera par décrire globalement comment on compte implémenter notre modèle en l'adaptant aux contraintes du calcul numérique. On s'intéressera ensuite plus précisément à la manière dont s'exprime la fonction d'étalement du point suite à cette adaptation. Enfin, on consacrerà une dernière section à étudier l'effet sur les valeurs d'amplitude et d'intensité de certains choix d'implémentation.

3.3.1 Procédure générale, des positions des diffuseurs à l'intensité lumineuse

Tirages initiaux des paramètres

Un modèle de simulation est caractérisé en premier lieu par les paramètres de dimensionnement suivants :

- Les paramètres du laser : longueur d'onde et position ;
- Le nombre total N_{scat} de diffuseurs simulés ;
- La forme et la taille de l'ouverture, qui déterminent la forme et la taille d'un grain de speckle ;

- Les dimensions $N_x \times N_y$, en pixels, de l'image finale ;
- La taille l_p du côté d'un pixel, qui détermine les dimensions $L_x \times L_y = N_x l_p \times N_y l_p$ de la zone imagée en unités de longueur.

Une fois ces paramètres définis, une simulation débute par le tirage aléatoire des paramètres initiaux de nos N_{scat} diffuseurs. Ces paramètres sont :

- Leurs positions : on les tire selon une loi uniforme sur $[0, L_x] \times [0, L_y]$;
- Les modules A_n de leurs amplitudes : le simulateur offre plusieurs possibilités de lois, dont la loi constante ;
- Leurs phases propres $\varphi_{s,n}$: soit on les fixe à 0, soit on les tire selon une loi uniforme sur $]-\pi, \pi]$.

Pour chacune de ces trois quantités, les tirages sont *i.i.d* sur l'ensemble des diffuseurs.

On peut alors calculer l'image d'amplitude correspondant à la distribution initiale des diffuseurs.

Calcul de l'image d'amplitude

À l'aide de la position de chaque diffuseur et des paramètres du laser, on peut calculer sa phase géométrique $\varphi_{g,n}$ en appliquant l'une des formules données en Section 3.2.1. On peut ensuite déterminer l'amplitude de l'onde qu'il rétrodiffuse :

$$\mathbf{A}_n = A_n e^{i(\varphi_{s,n} + \varphi_{g,n})}$$

Cependant, comme on l'a dit, pour le calcul de l'amplitude aval, il n'est pas envisageable d'appliquer pour chaque point d'intérêt la formule (3.20) directement. Il nous faut trouver une méthode approximative.

Une possibilité efficace sur le plan computationnel consiste à discrétiser le rectangle $[0, L_x] \times [0, L_y]$ imagé par la caméra. Bien sûr, en vue du calcul de l'intensité, le pas d'échantillonnage doit alors être plus petit que le pixel. On peut donc diviser chacun de nos $N_x \times N_y$ pixels en $k \times k$ cellules, k pouvant s'interpréter comme le facteur de sur-échantillonnage par rapport à l'image finale. La discrétisation ainsi obtenue est illustrée par la Fig. 3.7.

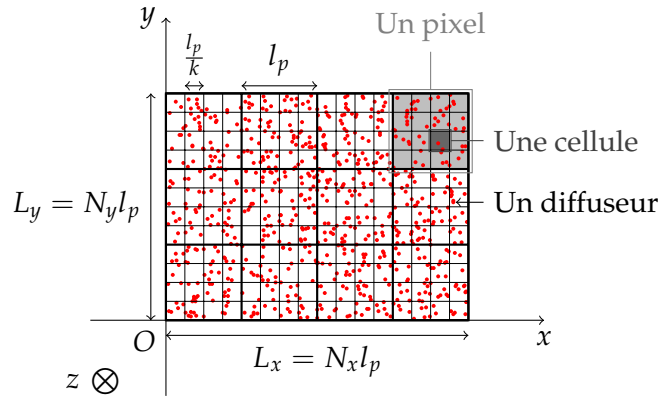


FIGURE 3.7 – Vue schématique et paramétrage du milieu diffusant pour la simulation. Ici, on a pris $N_x = 4$, $N_y = 3$, et $k = 4$.

On échantillonne alors l'amplitude amont $\tilde{\mathbf{A}}$ en sommant ses valeurs sur chaque cellule de taille $l_p/k \times l_p/k$:

$$\tilde{\mathbf{A}}[n_x, n_y] = \sum_{n \in \mathcal{C}[n_x, n_y]} \mathbf{A}_n$$

où $\mathcal{C}[n_x, n_y]$ est l'ensemble des indices des diffuseurs situés dans la cellule $[n_x, n_y]$, c'est-à-dire dont les positions vérifient :

$$(x_n, y_n) \in \mathcal{C}[n_x, n_y] \iff \begin{cases} \frac{n_x l_p}{k} \leq x_n < \frac{n_x l_p}{k} + \frac{l_p}{k} \\ \frac{n_y l_p}{k} \leq y_n < \frac{n_y l_p}{k} + \frac{l_p}{k} \end{cases}$$

L'amplitude aval peut ensuite s'obtenir par une convolution discrète :

$$\mathbf{A}[n_x, n_y] = \sum_{m_x} \sum_{m_y} \tilde{\mathbf{A}}[m_x, m_y] h[n_x - m_x, n_y - m_y] \quad (3.22)$$

Cette convolution discrète peut se calculer de façon efficace à l'aide de la transformation de Fourier rapide (FFT). On a ainsi une méthode bien plus rapide que la méthode naïve directe.

Bien sûr, le revers de la médaille est alors qu'on perd en précision. Pour le cas où ce serait problématique, on peut remarquer que cette méthode est en fait un cas particulier d'une famille plus large de méthodes d'approximation. En effet, on peut voir les choses de la façon suivante : en sommant l'amplitude sur la cellule $[n_x, n_y]$, on calcule en fait l'amplitude amont $\tilde{\mathbf{A}}$ aux points $\left(\frac{l_p}{k}n_x, \frac{l_p}{k}n_y\right)$ en effectuant l'approximation $\mathbf{x}_n \simeq \mathbf{x}_n^0 = \frac{d}{k} \left(\left\lfloor \frac{k}{d} \mathbf{x}_n \right\rfloor + \frac{1}{2} \right)$ pour h . Notre échantillonnage revient alors à réunir les diffuseurs ayant un même \mathbf{x}_n^0 avant la convolution avec h :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \sum_n \mathbf{A}_n(\mathbf{x}_n) h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \\ &\simeq \sum_n \mathbf{A}_n(\mathbf{x}_n) h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n^0) \end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'on fait **une approximation à l'ordre 0** de h . Dès lors, si on a besoin d'une plus grande précision, on peut affiner cette approximation. Par exemple, une approximation à l'ordre 1 donne :

$$h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \simeq h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n^0) + (\mathbf{x}_n^0 - \mathbf{x}_n)^T \nabla h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n^0)$$

Et on a alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \sum_n \mathbf{A}_n(\mathbf{x}_n) h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \\ &\simeq \sum_n \mathbf{A}_n(\mathbf{x}_n) \left[h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n^0) + (\mathbf{x}_n^0 - \mathbf{x}_n)^T \nabla h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n^0) \right] \\ &= \sum_n \mathbf{A}_n(\mathbf{x}_n) h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n^0) + \sum_n \mathbf{A}_n(\mathbf{x}_n) (x_n^0 - x_n) h_x(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n^0) + \sum_n \mathbf{A}_n(\mathbf{x}_n) (y_n^0 - y_n) h_y(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n^0) \\ &= \sum_n \mathbf{A}_n(\mathbf{x}_n) \cdot h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n^0) + \sum_n \mathbf{A}_n(\mathbf{x}_n) \cdot x_n^0 h_x(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n^0) - \sum_n \mathbf{A}_n(\mathbf{x}_n) x_n \cdot h_x(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n^0) \\ &\quad + \sum_n \mathbf{A}_n(\mathbf{x}_n) \cdot y_n^0 h_y(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n^0) - \sum_n \mathbf{A}_n(\mathbf{x}_n) y_n \cdot h_y(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n^0) \end{aligned} \quad (3.23)$$

où h_x et h_y sont les dérivées partielles de h , respectivement par rapport à x et y .

La dernière sommation met en évidence la manière dont on peut adapter la procédure à l'ordre 0 décrite précédemment pour passer à l'ordre 1. En effet, on peut procéder comme suit :

- On échantillonne, par sommation sur chaque cellule, les termes à gauche du \cdot dans chacune des sommes. En plus de \mathbf{A}_n , déjà échantillonné à l'ordre 0, on échantillonne donc $\mathbf{A}_n(\mathbf{x}_n)x_n$ et $\mathbf{A}_n(\mathbf{x}_n)y_n$;
- On échantillonne les termes à droite du \cdot , soit $h_x(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n^0)$, $h_y(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n^0)$, $x_n^0 h_x(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n^0)$ et $y_n^0 h_y(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n^0)$, en plus de $h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n^0)$;
- On calcule \mathbf{A} .

Cette méthode implique donc bien sûr des calculs supplémentaires par rapport à l'ordre 0, mais sans générer de changement d'ordre de grandeur du temps de calcul. Dans la Section 3.3.3, on évaluera les précisions respectives des approximations à l'ordre 1 et à l'ordre 0 par rapport à la méthode naïve.

Intensité

L'intérêt d'avoir échantillonné l'amplitude complexe sur une cellule plus petite que le pixel est de pouvoir ensuite approximer l'intégration spatiale de l'intensité par une sommation discrète :

$$I[p_x, p_y] = \frac{l_p^2}{k^2} \sum_{n_x=kp_x}^{(k+1)p_x-1} \sum_{n_y=kp_y}^{(k+1)p_y-1} |\mathbf{A}[n_x, n_y]|^2 \quad (3.24)$$

Le facteur $\frac{l_p^2}{k^2}$ correspond à l'unité de surface, il permet d'avoir une valeur homogène par rapport à une vraie intégration.

Une méthode plus précise exigerait de calculer davantage de valeurs de \mathbf{A} ou certaines valeurs de sa différentielle. Par exemple, en connaissant ses valeurs dans les coins et au milieu des bords des cellules, on pourrait utiliser la méthode de Simpson. Pour ces travaux, on s'en tiendra cependant à la sommation simple.

La précision de notre méthode sera évaluée dans la Section 3.3.3, au même titre que la méthode de calcul de \mathbf{A} .

Mouvement des diffuseurs

Jusqu'ici, on a établi une procédure claire pour générer une image d'amplitude, puis d'intensité, à partir de la distribution spatiale des diffuseurs et des paramètres du modèle. Comme on souhaite simuler du speckle *dynamique*, il reste à savoir comment on fait évoluer notre système au cours du temps.

On rappelle qu'on a pris pour hypothèse dans la Section 3.1 que la seule source de fluctuation de l'onde rétrodiffusée était le mouvement des diffuseurs. Pour ce dernier, on a par ailleurs proposé les deux propriétés suivantes :

- À tout instant, les diffuseurs sur la zone imagée s'y répartissent uniformément, de façon indépendante ;
- La position \mathbf{x}_n d'un diffuseur évolue suit une équation différentielle stochastique de la forme :

$$\frac{d\mathbf{X}_n}{dt} = \mathbf{V}_n \quad (3.1, \text{rappel})$$

où \mathbf{V}_n est un bruit blanc.

On va ici voir comment ces propriétés sont adaptées pour notre implémentation.

Distribution spatiale des diffuseurs

On a dit plus haut qu'on tirait les positions initiales des diffuseurs selon une loi uniforme sur $[0, L_x] \times [0, L_y]$. Cependant, cela ne suffit pas à garantir que cette distribution sera conservée au cours de la simulation. En effet, selon la loi de mouvement choisie, l'uniformité de la distribution peut être perdue au cours du temps — par exemple en cas de mouvement d'ensemble des diffuseurs. Par ailleurs, à partir du moment où on les fait bouger de façon indépendante, certains d'entre eux sortiront de la zone imagée.

Dans notre modèle, on a justifié la propriété de conservation de la distribution uniforme par l'hypothèse physique que les diffuseurs se répartissent sur un domaine beaucoup plus grand que la zone imagée — c'est-à-dire qu'on n'image qu'une petite partie du milieu, et donc qu'on peut négliger les effets de bord. Le mouvement ne change donc rien à la distribution sur la zone imagée. Néanmoins,

simuler effectivement un grand nombre de diffuseurs en-dehors de la zone imagée semble être une solution surdimensionnée. On peut imaginer principalement deux autres solutions plus abordables :

- Une première idée est de générer un nouveau diffuseur à chaque fois qu'un diffuseur sort de la zone imagée. Pour rendre compte du fait qu'un tel diffuseur n'apparaît pas spontanément, mais vient de l'extérieur, on peut le faire apparaître près du bord de l'image. Le bord choisi et la position exacte peuvent dépendre des paramètres du mouvement : par exemple, si les diffuseurs ont un mouvement d'ensemble vers la droite, on fera préférentiellement apparaître de nouveaux diffuseurs sur le bord gauche.
- Une seconde idée, plus simple à implémenter mais plus radicale physiquement, serait de supposer que la zone imagée est périodique : un diffuseur qui sort de la zone à un endroit réapparaît à l'opposé.

Pour la simulation, on utilisera principalement la deuxième solution. En effet, nos lois de mouvement seront souvent telles que la distance totale parcourue au cours d'une simulation sera petite devant les dimensions de la zone imagée. L'influence des sauts de diffuseurs d'un bord à l'autre sera donc marginale.

Loi de mouvement

Concernant la loi de mouvement, on implémentera (3.1) en la discrétisant de façon naïve, c'est-à-dire sous la forme :

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n + d\mathbf{X}$$

où $d\mathbf{X}$ est tiré indépendamment pour deux diffuseurs ou deux pas de temps distincts. Autrement dit, la position d'un diffuseur suivra une marche aléatoire. La loi de mouvement sera caractérisée par la distribution choisie pour $d\mathbf{X}$.

Ainsi, à chaque pas de temps, une fois les images d'amplitude et d'intensité calculées, on tire les sauts effectués par chacun des diffuseurs. On applique ensuite la procédure choisie pour maintenir le nombre et la distribution des diffuseurs au sein de la zone imagée. On peut alors passer au pas de temps suivant, et recommencer.

3.3.2 Fonction d'étalement du point

Au cours de la section précédente, on a fréquemment fait intervenir la fonction d'étalement du point h du système optique, mais sans jamais l'expliciter. L'objet de cette section est donc d'abord d'établir son expression. Afin d'appliquer les formules de la Section 3.3.1, il nous faudra ensuite l'échantillonner et calculer son gradient en tout point.

En premier lieu, rappelons que notre milieu est supposé homogène et qu'une fois les données simulées générées, on ne s'intéressera qu'à des statistiques temporelles. Dans les faits, la PSF aura donc pour principal effet tangible de moyenniser localement l'amplitude amont pour donner l'amplitude aval. D'un point de vue pratique, cela signifie qu'elle ne nécessite pas d'être physiquement très réaliste.

Forme de l'ouverture

Comme en Section 3.2.3, on fait d'abord l'hypothèse que **l'ouverture est rectangulaire**. La fonction de transfert associée à une telle ouverture est l'indicatrice d'un rectangle :

$$H = \mathbb{1}_{\left[-\frac{\pi}{l_{s,x}}, \frac{\pi}{l_{s,x}}\right] \times \left[-\frac{\pi}{l_{s,y}}, \frac{\pi}{l_{s,y}}\right]}$$

Et la PSF correspondante est un produit de sinus cardinaux :

$$h(x, y) = \frac{1}{l_{s,x}l_{s,y}} \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{l_{s,x}}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{y}{l_{s,y}}\right)$$

où $l_{s,x}$ et $l_{s,y}$ sont les dimensions du grain de speckle selon les deux axes. Ainsi, h et H sont séparables en coordonnées cartésiennes.

Périodisation

On pourrait tout à fait utiliser l'expression de la PSF proposée précédemment. Cependant, cette expression a pour défaut de provoquer des effets de bord non négligeables. En effet, on a dit dans la section précédente qu'on ne simulerait pas de diffuseurs en-dehors de la zone imagée, où la rétrodiffusion sera donc identiquement nulle. Du point de vue de la PSF, cela revient à la tronquer au bord de l'image, donc différemment selon les diffuseurs. Or le sinus cardinal converge lentement vers 0, donc le tronquer est lourd de conséquences.

On propose donc une alternative à la troncature de la PSF : sa périodisation, comme on a proposé de périodiser la zone imagée elle-même. Cela n'a aucun sens physique, mais règle le problème des effets de bord, et permet d'avoir une PSF qui se comporte très bien vis-à-vis de la transformée de Fourier discrète (puisque celle-ci repose elle-même sur l'hypothèse de signaux périodiques).

On va donc à présent établir précisément l'expression de la PSF discrétisée et périodisée.

Calcul de la PSF périodisée

Déterminons donc l'expression exacte de notre fonction d'étalement du point, ainsi que de sa transformée de Fourier discrète.

Dans toute cette section, on adopte les conventions de notation suivantes :

- Un opérateur 1D est doté d'un exposant ⁽¹⁾, et un opérateur 2D d'un exposant ⁽²⁾ ;
- Un opérateur continu est doté d'un indice _c, et un opérateur discret d'un indice _d.

Domaine spatial

Commençons par effectuer les calculs en 1D, les résultats 2D pouvant ensuite être obtenus facilement par séparabilité.

Repartons du sinus cardinal standard, de pseudo-période l_s :

$$h_c^{(1)}[x] = \frac{1}{l_s} \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{l_s}\right)$$

l_s peut être considéré comme la taille du grain de speckle. h_c est le noyau de convolution dans le cas physique, où la convolution se fait sur un domaine continu et infini.

Discrétisons-le avec un pas $\frac{l_p}{k}$:

$$h_d^{(1)}[n] = \frac{1}{l_s} \operatorname{sinc}\left(\frac{nl_p}{l_s k}\right)$$

On le périodise ensuite avec une période Nk par rapport à n :

$$\begin{aligned} h_{d,p}^{(1)}[n] &= \frac{1}{l_s} \lim_{q \rightarrow +\infty} \sum_{p=-q}^q \operatorname{sinc}\left(\frac{l_p}{l_s k}(n - pNk)\right) \\ &= \frac{1}{l_s} \lim_{q \rightarrow +\infty} \sum_{p=-q}^q \operatorname{sinc}\left(\frac{nl_p}{l_s k} - p \frac{Nl_p}{l_s}\right) \end{aligned}$$

Pour exprimer la limite, on peut s'appuyer sur la Proposition 1 de [70]. Celle-ci énonce que, pour T entier et x réel quelconque :

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \sum_{p=-q}^q \operatorname{sinc}(x - pT) = \operatorname{sinc}_T(x) \quad (3.25)$$

où sinc_T est la fonction **sinus cardinal discret** de pseudo-période T , définie différemment selon la parité de T . Ainsi :

- Si T est pair :

$$\text{sincd}_T(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{T \tan(\frac{\pi x}{T})} & \text{si } \tan\left(\frac{\pi x}{T}\right) \neq 0; \\ 1 & \text{si } \tan\left(\frac{\pi x}{T}\right) = 0. \end{cases}$$

- Si T est impair :

$$\text{sincd}_T(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{T \sin(\frac{\pi x}{T})} & \text{si } \sin\left(\frac{\pi x}{T}\right) \neq 0; \\ 1 & \text{si } \sin\left(\frac{\pi x}{T}\right) = 0. \end{cases}$$

Pour la suite, on pose donc :

$$\varphi_T(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi x}{T}\right) & \text{si } T \text{ est impair} \\ \tan\left(\frac{\pi x}{T}\right) & \text{si } T \text{ est pair} \end{cases}$$

et on a ainsi $\text{sincd}_T(x) = \frac{\sin(\pi x)}{T \varphi_T(x)}$. Réinjectons à présent (3.25) dans l'expression de $h_{d,p}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} h_{d,p}^{(1)}[n] &= \frac{1}{l_s} \text{sincd}_{\frac{Nl_p}{l_s}}\left(\frac{nl_p}{l_s k}\right) \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\pi nl_p}{l_s k}\right)}{Nl_p \varphi_{\frac{Nl_p}{l_s}}\left(\frac{\pi n}{Nk}\right)} \end{aligned}$$

En vue de faciliter le calcul de la fonction de transfert dans le paragraphe suivant, on définit la fonction discrète $\text{sincd}_{P,Q}$, paramétrisée par les deux entiers P et Q avec $P < Q$, comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \text{sincd}_{P,Q}[n] = \frac{\sin\left(\frac{P}{Q}\pi n\right)}{Q \varphi_Q\left(\frac{\pi n}{Q}\right)}$$

Ainsi, $\text{sincd}_{P,Q}$ est périodique de période Q et pseudo-périodique de période Q/P . On peut ainsi réexprimer $h_{d,p}^{(1)}$:

$$h_{d,p}^{(1)}[n] = \frac{k}{l_p} \text{sincd}_{Nl_p/l_s, Nk}[n]$$

On peut à présent passer en 2D :

$$\begin{aligned} h_{d,p}^{(2)}[n_x, n_y] &= \frac{\sin\left(\frac{\pi n_x l_p}{l_{s,x} k}\right)}{N_x l_p \varphi_{\frac{N_x l_p}{l_s}}\left(\frac{\pi n_x}{N_x k}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi n_y l_p}{l_{s,y} k}\right)}{N_y l_p \varphi_{\frac{N_y l_p}{l_s}}\left(\frac{\pi n_y}{N_y k}\right)} \\ &= \frac{k^2}{l_p^2} \text{sincd}_{N_x l_p/l_{s,x}, N_x k}[n_x] \text{sincd}_{N_y l_p/l_{s,y}, N_y k}[n_y] \end{aligned}$$

Afin de différentier la PSF, on aura aussi besoin de sa version périodisée mais pas discrétisée. Celle-ci s'exprime comme :

$$\begin{aligned} h_p^{(2)}(x, y) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{l_{s,x}}\right)}{N_x l_p \varphi_{\frac{N_x l_p}{l_s}}\left(\frac{\pi x}{N_x l_p}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi y}{l_{s,y}}\right)}{N_y l_p \varphi_{\frac{N_y l_p}{l_s}}\left(\frac{\pi y}{N_y l_p}\right)} \\ &= \frac{1}{l_{s,x} l_{s,y}} \text{sincd}_{N_x l_p/l_{s,x}}(x/l_{s,x}) \text{sincd}_{N_y l_p/l_{s,y}}(y/l_{s,y}) \end{aligned}$$

Domaine de Fourier

En continu, la fonction de transfert du passe-bas idéal est une fonction porte. C'est aussi le cas en discret, mais un peu de minutie technique s'impose.

On s'appuie cette fois sur l'équation (19) de [70]. D'après celle-ci, la TFD à Q de $\text{sincd}_{P,Q}$ est donnée par S_P , définie pour $m \in \llbracket 0, Q-1 \rrbracket$ par :

$$S_P[m] = \begin{cases} 1 & \text{si } m \in [-\frac{P}{2} + 1, \frac{P}{2} - 1] \\ \frac{1}{2} & \text{si } |m| = \frac{P}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec $Q = Nk$ et $P = \frac{Nl_p}{l_s}$, on en déduit que la TFD de $h_{d,p}^{(1)}$, et donc la fonction de transfert du système, est donnée par :

$$H_{d,p}^{(1)} = \text{TFD} \{h_{d,p}^{(1)}\} = \frac{k}{l_p} S_{\frac{Nl_p}{l_s}}$$

On constate ainsi que, pour une taille de grain de speckle l_s , la largeur de la fonction porte modélisant l'ouverture est $\Delta k = \frac{Nl_p}{l_s}$.

En 2D, on peut là encore procéder par séparabilité :

$$H_{d,p}^{(2)}[m_x, m_y] = \frac{k^2}{l_p^2} S_{\frac{Nl_p}{l_{s,x}}}[m_x] S_{\frac{Nl_p}{l_{s,y}}}[m_y]$$

Cette fonction de transfert nous permettra de calculer aisément nos convolutions.

Autocorrélation

On a dit précédemment que l'autocorrélation d'un sinus cardinal était encore un sinus cardinal. Ce résultat, qui est une conséquence du théorème de Wiener-Khintchine, facilite considérablement le calcul de l'autocorrélation lorsque la PSF est un sinus cardinal.

Néanmoins, avec un sinus cardinal discret, cette propriété n'est plus vraie dès lors que $\frac{Nl_p}{l_s}$ est pair. En effet, la fonction de transfert du système n'est alors plus à valeur dans $\{0, 1\}$, mais dans $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$. H^2 est donc définie par :

$$H^2[m] = \begin{cases} 1 & \text{si } m \in \llbracket -\frac{Nl_p}{2l_s} + 1, \frac{Nl_p}{2l_s} - 1 \rrbracket \\ \frac{1}{4} & \text{si } |m| = \frac{Nl_p}{2l_s} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c'est-à-dire $H_{d,p}^{(1)2} = \frac{k}{l_p} S_{\frac{Nl_p}{l_s}} - \frac{1}{4} (\delta_{Nl_p/2l_s} + \delta_{-Nl_p/2l_s})$. Par rapport au cas où l'autocorrélation resterait égale à la PSF, on a donc gagné le terme entre parenthèses. Des calculs élémentaires montrent que sa TFD inverse est donnée par :

$$g^{(1)}[n] = \frac{2}{N} \cos\left(\frac{l_p}{l_s k} \pi n\right)$$

Ainsi, à une dimension, l'autocorrélation s'écrit :

$$r^{(1)}[n] = h^{(1)}[n] - \frac{1}{2N} \cos\left(\frac{l_p}{l_s k} \pi n\right) \quad (3.26)$$

On aura besoin de ce résultat en simulation.

Différentiation de la PSF

Comme on l'a vu, pour le calcul de nos convolutions à l'ordre 1, on a besoin non seulement de la PSF mais aussi de ses dérivées partielles.

On va donc ici les calculer.

Domaine spatial

Commençons par différencier directement la PSF périodisée. On rappelle son expression en 1D :

$$h_p^{(1)}(x) = \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{l_s}\right)}{Nl_p \varphi\left(\frac{\pi x}{Nl_p}\right)}$$

La dérivation donne :

$$h_p^{(1)'}(x) = \frac{\frac{\pi}{l_s} \cos\left(\frac{\pi x}{l_s}\right) \varphi\left(\frac{\pi x}{Nl_p}\right) - \frac{\pi}{Nl_p} \sin\left(\frac{\pi x}{l_s}\right) \varphi'\left(\frac{\pi x}{Nl_p}\right)}{Nl_p \varphi^2\left(\frac{\pi x}{Nl_p}\right)}$$

Et en 2D, on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial h_p^{(2)}}{\partial x}(x, y) &= h_{p,x}^{(1)'}(x) h_{p,y}^{(1)}(y) \\ \frac{\partial h_p^{(2)}}{\partial y}(x, y) &= h_{p,x}^{(1)}(x) h_{p,y}^{(1)'}(y) \end{cases}$$

Domaine de Fourier

Par la formule d'inversion de la TFD, on a :

$$h_{d,p}^{(1)}[n] = \sum_m e^{i \frac{2\pi mn}{Nk}} H_{d,p}^{(1)}[m]$$

Donc :

$$h_p^{(1)}(x) = \sum_m e^{i \frac{2\pi mx}{Nl_p}} H_{d,p}^{(1)}[m]$$

On peut alors différencier :

$$\begin{aligned} h_p^{(1)'}(x) &= \sum_m i \frac{2\pi m}{Nl_p} e^{i \frac{2\pi mx}{Nl_p}} H_{d,p}^{(1)}[m] \\ &= \sum_m e^{i \frac{2\pi mn}{Nk}} H_{d,p}^{(1)'}[m] \end{aligned}$$

où $H_{d,p}^{(1)'}[m] = i \frac{2\pi m}{Nl_p} H_{d,p}^{(1)}[m]$.

$H_{d,p}^{(1)'}$ est donc la "TFD" de $h_p^{(1)'}$, même si cela n'a pas grand-sens (il s'agit d'une fonction continue).

Son intérêt est qu'elle permet de faciliter la convolution discrète avec $h_p^{(1)'}$, en multipliant $H_{d,p}^{(1)}$ par une rampe de phase et en appliquant la TFD inverse.

3.3.3 Impact de la discrétisation et de la linéarisation de la PSF sur les résultats

En Section 3.3.1, on a évoqué plusieurs méthodes pour le calcul de l'image d'amplitude. On a notamment proposé deux alternatives au calcul naïf : l'approximation à l'ordre 0 ou à l'ordre 1 de h . Par ailleurs, on a proposé de calculer I en approximant l'intégration sur un pixel par une simple somme discrète.

L'objectif de cette section est d'évaluer l'impact de ces approximations, afin d'en déduire un bon compromis entre complexité calculatoire et précision des résultats.

Méthode

On cherche à évaluer plusieurs méthodes approximatives de calcul de l'amplitude aval et de l'intensité. Pour ce faire, on va mesurer dans plusieurs configurations de combien elles s'écartent des résultats de la méthode exacte. Les méthodes évaluées sont détaillées ci-après, ainsi que le protocole utilisé pour garantir la fiabilité de nos estimations statistiques.

On commencera par évaluer chacune des méthodes testées dans une configuration de référence, qu'on définira au paragraphe correspondant. On fera ensuite varier chacun des paramètres d'intérêt un par un.

Méthodes de calcul de l'amplitude complexe

Pour l'amplitude, on a à notre disposition les méthodes suivantes :

- Le calcul exact, qui consiste à calculer \mathbf{A} à l'aide de sa formule exacte, donnée par l'équation 3.10;
- L'approximation de h à l'ordre 0, qui consiste à approximer h par une fonction constante par morceaux de taille $\frac{l_p}{k} \times \frac{l_p}{k}$. Le calcul de \mathbf{A} peut ainsi être effectué à l'aide d'une convolution discrète, donnée par l'équation (3.22);
- L'approximation de h à l'ordre 1, qui consiste à approximer h par une fonction affine par morceaux de taille $\frac{l_p}{k} \times \frac{l_p}{k}$. Trois convolutions discrètes, comme explicité par l'équation (3.23), permettent ensuite de calculer \mathbf{A} .

Une fois l'amplitude obtenue, on obtient naturellement l'intensité ponctuelle à l'aide de la formule $I_{p,t} = |\mathbf{A}|^2$.

Méthodes de calcul de l'intensité

Pour l'intensité, les méthodes à notre disposition découlent des précédentes :

- Le calcul exact, qui consiste à intégrer numériquement l'intensité ponctuelle elle-même obtenue par calcul exact;
- La sommation discrète avec pas $\frac{l_p}{k} \times \frac{l_p}{k}$ de valeurs exactes de l'intensité ponctuelle (méthode appelée ci-après "calcul ponctuel");
- La sommation discrète de l'intensité ponctuelle obtenue à partir d'une approximation de h à l'ordre 0;
- La sommation discrète de l'intensité ponctuelle obtenue à partir d'une approximation de h à l'ordre 1.

Protocole

Pour chaque configuration paramétrique, on génère 30 images de speckle indépendantes. Pour chaque image, on tire 10 pixels au hasard pour lesquels l'amplitude (sur toutes les cellules de chaque pixel) et l'intensité (sur chaque pixel) sont calculées avec les méthodes décrites précédemment.

On calcule ensuite les racines des écarts quadratique moyen (REQM) entre les valeurs d'amplitude et de d'intensité obtenues d'une part avec les méthodes exactes et d'autre part avec chacune des autres méthodes. On détermine par ailleurs pour chaque valeur d'EQM un intervalle de confiance, obtenu par rééchantillonnage *bootstrap*. Plus précisément, à partir de l'échantillon des valeurs de \mathbf{A} et I obtenues avec une méthode approchée donnée (de taille $300k^2$ pour \mathbf{A} et 300 pour I), on effectue 1000 fois le tirage avec remise d'un nouvel échantillon, de même taille que l'échantillon de base. On calcule ensuite \mathbf{A} et I sur ces nouveaux échantillons, puis les REQM avec les méthodes exactes. On obtient ainsi 1000 nouvelles valeurs de REQM, dont les quantiles à 2.5% et à 97.5% nous donnent une estimation des bornes de l'intervalle de confiance à 95% pour la valeur d'EQM obtenue avec l'échantillon de base.

Il est à noter que les valeurs sont normalisées de manière à ce que la moyenne quadratique de l'amplitude et la moyenne de l'intensité valent 1. Dès lors, les valeurs de REQM données dans la section suivante peuvent être interprétées comme des erreurs relatives.

Résultats

Configuration de référence

On commence par se donner une configuration de référence, définie comme suit :

Paramètre	Valeur
N	32
l_p	1.0
l_s	2.0
ρ_c	4

$N = N_x = N_y$ correspond au nombre de colonnes et de lignes de l'image finale, et $l_s = l_{s,x} = l_{s,y}$ à la taille du grain de speckle.

On va d'abord évaluer nos méthodes dans cette configuration avec différentes valeurs de k . On fera ensuite varier un par un ses paramètres, afin de mesurer leur influence sur les résultats.

Les résultats dans la configuration de référence sont compilés dans les Tables 3.1 et 3.2. Sont indiquées les valeurs des REQM ainsi que leurs intervalles de confiance. Les valeurs sont tronquées après la troisième décimale, une erreur inférieure à 0.1% étant considérée comme négligeable.

On constate globalement que la linéarisation permet de gagner systématiquement de l'ordre d'un facteur 10 sur la REQM par rapport à une approximation à l'ordre 0. Pour l'intensité, la comparaison avec le calcul ponctuel montre par ailleurs que l'essentiel de l'erreur résiduelle provient de la discrétisation de l'intégrale, et non de la linéarisation de la PSF.

	$k = 2$	$k = 4$	$k = 6$
Ordre 0	0.169 ([0.163, 0.174])	0.086 ([0.085, 0.087])	0.060 ([0.060, 0.061])
Ordre 1	0.025 ([0.024, 0.025])	0.006 ([0.006, 0.006])	0.003 ([0.003, 0.003])

TABLE 3.1 – REQM entre valeurs approximatives et valeur exacte de \mathbf{A} pour plusieurs k (Configuration de base)

	$k = 2$	$k = 4$	$k = 6$
Ponctuel	0.038 ([0.033, 0.043])	0.008 ([0.007, 0.009])	0.003 ([0.003, 0.004])
Ordre 0	0.208 ([0.187, 0.230])	0.108 ([0.095, 0.121])	0.078 ([0.070, 0.087])
Ordre 1	0.051 ([0.045, 0.057])	0.011 ([0.010, 0.012])	0.005 ([0.004, 0.005])

TABLE 3.2 – REQM entre valeurs approximatives et valeur exacte de I pour plusieurs k (Configuration de base)

Effet de la taille du grain

On augmente à présent la taille du grain de speckle à $l_s = 4l_p$. Le reste de la configuration est inchangé, comme détaillé dans le tableau suivant :

Paramètre	Valeur
N	32
l_p	1.0
l_s	4.0
ρ_c	4

On obtient les résultats résumés Tables 3.3 et 3.4. On constate que la hiérarchie entre les méthodes est inchangée, mais qu'on gagne partout un facteur 2 sur la REQM. Ce résultat est assez logique. Les erreurs que l'on mesure sont fondamentalement des erreurs d'échantillonnage. Or, à échantillonnage égal, on approxime d'autant mieux une fonction que sa largeur spectrale, ici inversement proportionnelle à la taille des grains, est réduite.

	$k = 2$	$k = 4$	$k = 6$
Ordre 0	0.085 ([0.082, 0.088])	0.044 ([0.043, 0.045])	0.029 ([0.029, 0.029])
Ordre 1	0.006 ([0.006, 0.006])	0.001 ([0.001, 0.002])	0.001 ([0.001, 0.001])

TABLE 3.3 – REQM entre valeurs approximatives et valeur exacte de \mathbf{A} pour plusieurs k , après augmentation de la taille du grain ($l_s = 4l_p$)

	$k = 2$	$k = 4$	$k = 6$
Ponctuel	0.011 ([0.010, 0.012])	0.002 ([0.002, 0.003])	0.001 ([0.001, 0.001])
Ordre 0	0.127 ([0.112, 0.143])	0.061 ([0.054, 0.068])	0.042 ([0.037, 0.046])
Ordre 1	0.015 ([0.014, 0.017])	0.003 ([0.003, 0.004])	0.001 ([0.001, 0.002])

TABLE 3.4 – REQM entre valeurs approximatives et valeur exacte de I pour plusieurs k , après augmentation de la taille du grain ($l_s = 4l_p$)

Effet de la densité de diffuseurs

On fait maintenant passer la densité ρ_c de diffuseurs par cellule de 4 à 2. Le reste de la configuration est rappelé dans le tableau suivant :

Paramètre	Valeur
N	32
l_p	1.0
l_s	2.0
ρ_c	2

Les résultats sont compilés Table 3.5 et Table 3.6. Ils sont très proches de ceux obtenus en configuration de référence, ce qui tend à montrer que ρ_c n'a pas d'influence sur la qualité des approximations.

Effet de la taille de l'image

On s'intéresse enfin à l'effet du nombre total de pixels de l'image. Celui-ci a été fixé à 32×32 dans la configuration initiale pour des raisons de temps de calcul, mais afin de montrer que ce choix n'a pas d'influence majeure sur nos conclusions, on l'augmente à 128×128 . Les valeurs des autres paramètres sont celles de la configuration de référence :

	$k = 2$	$k = 4$	$k = 6$
Ordre 0	0.178 ([0.173, 0.183])	0.091 ([0.090, 0.092])	0.058 ([0.057, 0.058])
Ordre 1	0.024 ([0.024, 0.025])	0.006 ([0.006, 0.006])	0.003 ([0.003, 0.003])

TABLE 3.5 – REQM entre valeurs approximatives et valeur exacte de \mathbf{A} pour plusieurs k , après diminution de la densité de diffuseurs ($\rho_c = 2$)

	$k = 2$	$k = 4$	$k = 6$
Ponctuel	0.036 ([0.032, 0.039])	0.008 ([0.007, 0.009])	0.003 ([0.003, 0.004])
Ordre 0	0.216 ([0.193, 0.240])	0.117 ([0.103, 0.129])	0.073 ([0.065, 0.081])
Ordre 1	0.052 ([0.045, 0.059])	0.011 ([0.010, 0.012])	0.005 ([0.004, 0.005])

TABLE 3.6 – REQM entre valeurs approximatives et valeur exacte de I pour plusieurs k , après diminution de la densité de diffuseurs ($\rho_c = 2$)

Paramètre	Valeur
N	128
l_p	1.0
l_s	2.0
ρ_c	4

Là encore, les résultats (Tables 3.7 et 3.8) sont sensiblement équivalents à ceux de la configuration de base. Ils n'affectent donc pas nos conclusions.

Conclusions

De ces tests, on peut tirer les conclusions suivantes :

- L'approximation de h à l'ordre 0 ne permet pas de garantir des résultats corrects, puisqu'elle génère des erreurs de l'ordre de plusieurs points de pourcentage en moyenne ;
- L'approximation à l'ordre 1 permet en revanche d'atteindre des niveaux de précision satisfaisants, de l'ordre de 1% avec $k = 4$ et des paramètres standards ;
- La seule réserve pourrait venir du cas où on voudrait encore réduire la taille du grain par rapport au pixel (et donc violer les hypothèses du théorème de Shannon). Comme la REQM est fonction décroissante de celle-ci, il faudrait alors probablement affiner l'échantillonnage.

Tous les résultats de simulation donnés dans la suite du chapitre auront été obtenus avec une approximation de h à l'ordre 1 et un calcul de I par sommation discrète.

	$k = 2$	$k = 4$	$k = 6$
Ordre 0	0.178 ([0.173, 0.184])	0.093 ([0.092, 0.095])	0.061 ([0.061, 0.062])
Ordre 1	0.024 ([0.023, 0.025])	0.006 ([0.006, 0.006])	0.003 ([0.003, 0.003])

TABLE 3.7 – REQM entre valeurs approximatives et valeur exacte de \mathbf{A} pour plusieurs k , après augmentation de la taille de l'image ($N_x = N_y = 128$)

	$k = 2$	$k = 4$	$k = 6$
Ponctuel	0.031 ([0.028, 0.034])	0.008 ([0.007, 0.009])	0.003 ([0.003, 0.004])
Ordre 0	0.228 ([0.199, 0.259])	0.116 ([0.104, 0.128])	0.073 ([0.063, 0.082])
Ordre 1	0.044 ([0.039, 0.049])	0.011 ([0.009, 0.012])	0.005 ([0.004, 0.006])

TABLE 3.8 – REQM entre valeurs approximatives et valeur exacte de I pour plusieurs k , après augmentation de la taille de l'image ($N_x = N_y = 128$)

3.4 Résultats de simulation

Dans les sections précédentes, on a pu définir précisément notre modèle, puis les détails de son implémentation. On va maintenant s'intéresser aux résultats de simulation dans quelques cas relativement simples.

On commencera par des cas déjà étudiés analytiquement : ceux concernant un mouvement transverse, puis longitudinal, puis à trois dimensions. Pour tous ces cas, on supposera plane l'onde émise par le laser. On étudiera ensuite l'influence éventuelle du passage à une onde incidente sphérique. Enfin, on vérifiera la relation de Siegert à l'aide de l'autocorrélation de l'intensité.

3.4.1 Choix des paramètres

Dans toute cette section, le but sera bien sûr de faire varier les paramètres de simulation pour étudier leur influence. On maintiendra cependant certains d'entre eux constants, car on a jugé leur impact sur les simulations trop faible pour s'y intéresser.

Ainsi :

- La taille des images finales sera systématiquement de $N_x \times N_y = 128 \times 128$;
- Sauf mention contraire, le paramètre k donnant le nombre de cellules de discrétisation sur un pixel sera maintenu à 4, soit 4×4 cellules par pixel;
- Le nombre moyen ρ_c de diffuseurs par cellule sera maintenu à 2;
- Sauf mention contraire, on fera toujours tourner la simulation sur $N_t = 100$ pas de temps;
- Le module A_n de l'amplitude rétrodiffusé par chaque diffuseur sera tiré au début de chaque simulation de manière à suivre une loi normale repliée, c'est-à-dire $A_n = |X|$, où X suit une loi normale de paramètres σ et μ . σ sera fixé à $1/4$, et μ sera choisi de telle sorte que $\langle A_n^2 \rangle = 1$, ce qui facilitera la normalisation du champ en vue du calcul du coefficient de corrélation. Comme μ sera proche de 1, l'écart-type de A_n sera quasiment σ ;

- Enfin, la phase propre $\varphi_{s,n}$ des diffuseurs sera fixée à 0, ce qui revient à travailler sans ce paramètre. Les paramètres de simulation pris par ailleurs, notamment la distribution de profondeur par rapport à la longueur d'onde, seront tels que la phase géométrique suffit à décorrélérer complètement les contributions des diffuseurs.

Les autres paramètres, sujets à variation, seront systématiquement précisés dans chaque section.

3.4.2 Mouvements constants transverses, sans phase géométrique

Dans toute cette section, les mouvements des diffuseurs seront uniquement transverses, c'est-à-dire orthogonaux à l'axe optique. Par ailleurs, on supposera que laser est à l'infini, avec $\alpha = 0$. L'onde incidente sera donc plane, et la phase géométrique de chaque diffuseur, qui ne dépend que de sa profondeur, sera constante au cours du temps.

Mouvement circulaire constant

On commence par se placer dans la situation la plus simple possible :

- Les diffuseurs se déplacent à vitesse constante v selon l'axe Ox ;
- Les diffuseurs qui sortent à droite du domaine réapparaissent à gauche (le domaine est périodique).

L'intérêt de cette situation est de se placer dans des conditions où l'équation (3.12) est valable sans approximation dans le cadre de la transformée de Fourier discrète, où les signaux sont périodiques, et où la PSF est un sinus cardinal discret. Par ailleurs, dans ce cas précis, p_τ est très facile à déterminer :

$$p_\tau(u, \Delta y) = \delta(u - v\tau)$$

On s'attend donc à obtenir, d'après 3.19 :

$$r_A(\tau) = r_{PSF,x} \left(\frac{v\tau}{l_s} \right)$$

où $r_{PSF,x}$ est l'autocorrélation de la PSF selon l'axe x .

Pour la simulation, on se donne les paramètres suivants :

Paramètre	Valeur
L_z	3 mm
λ	500 nm
$v \, dt$	10.0 μm
l_p	10.0 μm
l_s	80.0 μm

où on rappelle que :

- L_z est l'amplitude de profondeur des diffuseurs ;
- λ est la longueur d'onde de l'onde incidente ;
- dt est le pas de temps ;
- l_p est la taille du pixel.

L_z et λ ne sont pas supposés avoir d'influence sur la forme de l'autocorrélation, mais il est important d'avoir $L_z > 2\pi\lambda$ pour que les contributions des diffuseurs soient décorréliées.

Par ailleurs, comme précisé par le paramètre $v dt = 1l_p$, le saut effectué à chaque pas de temps par chaque diffuseur est égal à un pixel. On fera tourner la simulation sur $N_t = 128$ pas de temps, de manière à ce qu'une simulation complète corresponde à exactement une période : à l'issue des 128 pas de temps, les diffuseurs seront revenus à leur position initiale.

Enfin, avec ces paramètres, l'autocorrélation $r_{PSF,x}$ selon l'axe x est donnée par (3.26), c'est-à-dire le sinus cardinal discret corrigé par un cosinus.

Avec tous ces paramètres, on effectue 100 tirages indépendants, pour chacun desquels l'expérience est recommencée à zéro avec les paramètres ci-dessus. On calcule ensuite l'autocorrélation temporelle, qu'on moyenne sur l'ensemble des pixels de l'ensemble des tirages.

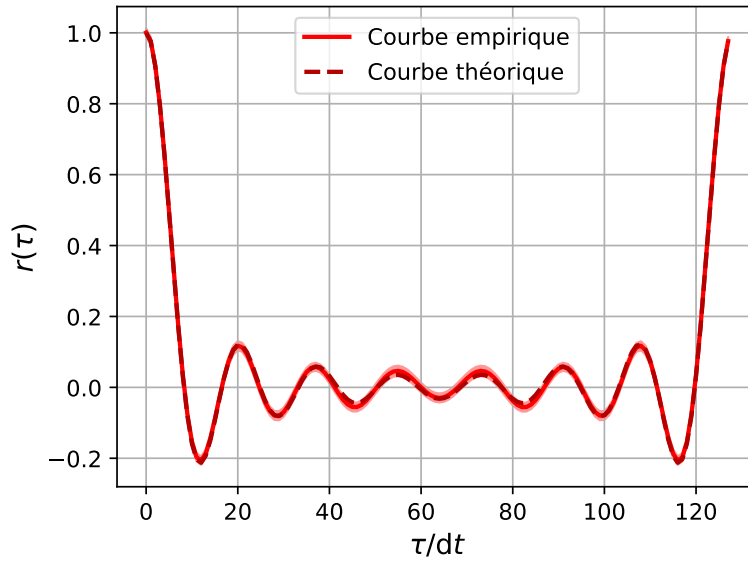


FIGURE 3.8 – Courbe obtenue après mouvement circulaire constant

On obtient la courbe reproduite Fig. 3.8. La courbe théorique de l'autocorrélation est également affichée. La zone rosée autour de la courbe empirique correspond à plus ou moins deux écarts-types, divisés par la racine du nombre de tirages, autour de celle-ci. Sous l'hypothèse que les fluctuations de l'autocorrélation suivent une loi normale, il s'agit donc des intervalles de confiance à 95%.

La correspondance entre les courbes semble confirmer, à ce stade, la validité du modèle.

Mouvement constant non circulaire

Pour cette seule section, on s'affranchit de l'hypothèse de périodicité du domaine imagé. Cela a deux conséquences :

- La PSF n'est plus un sinus cardinal discret, mais un sinus cardinal standard, qui est de fait tronqué par la convolution ;
- Lorsqu'un diffuseur sort du domaine, on en fait réapparaître un autre aléatoirement. Comme tous les diffuseurs sont supposés se déplacer vers la droite, on le fait apparaître près du bord gauche.

On se donne par ailleurs les mêmes paramètres de simulation que précédemment. Le résultat d'autocorrélation est reproduit Fig. 3.9. On obtient ainsi un résultat analogue au cas précédent, mais cette fois sans périodicité. Par ailleurs, on constate un léger écart entre courbe théorique et empirique, notamment pour les gros écarts de temps. Il s'agit certainement d'une conséquence des effets de bord, puisque le sinus cardinal est tronqué lors du calcul de l'amplitude aval.

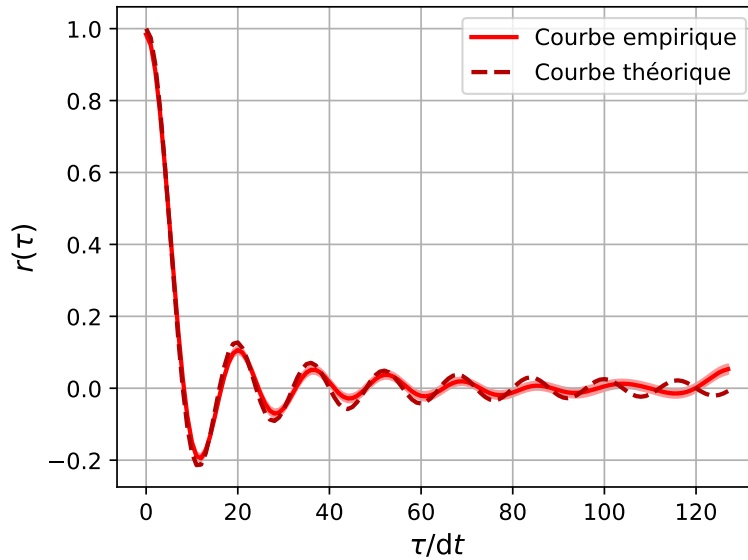


FIGURE 3.9 – Courbe obtenue après mouvement déterministe non circulaire

3.4.3 Mouvement brownien transverse sans phase géométrique

À présent, on suppose que les diffuseurs suivent une marche aléatoire dans le plan transverse. Ainsi, le déplacement entre deux images est indépendant du mouvement précédent. Plus précisément, on suppose le déplacement circulaire gaussien, c'est-à-dire que les deux composantes en x et y du déplacement suivent des lois normales centrées, indépendantes et de même variance. On pourrait également supposer, pour un résultat identique, que l'angle d'un déplacement suit une loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$ et sa longueur une loi de Rayleigh.

On suppose toujours l'onde incidente plane, avec $\alpha = 0$. Ainsi, la phase géométrique de chaque diffuseur reste là encore constante au cours du temps.

Pour toute cette section, on prend les paramètres de simulation suivants :

Paramètre	Valeur
L_z	3 mm
λ	500 nm
$\sigma_x = \sigma_y$	10.0 μm
l_p	10.0 μm
l_s	20.0, 40.0 ou 80.0 μm

σ_x et σ_y correspondent aux écarts-types de chacune des deux composantes d'un déplacement au cours d'un pas de temps.

Les résultats d'autocorrélation sont reproduits Fig. 3.10.

On constate une bonne correspondance avec le modèle théorique. Le léger écart observé pour $l_s = 8$ est vraisemblablement dû à des effets de bord : la taille du grain n'est alors plus complètement négligeable par rapport à celle de l'image, qui reste constante.

3.4.4 Mouvements purement longitudinaux

À présent, on ne considère plus que des mouvements parallèles à l'axe optique. On suppose toujours l'onde incidente plane, mais cette fois avec un angle d'incidence variable, de 0 à 45°.

Concernant les paramètres de simulation, on les prend comme suit :

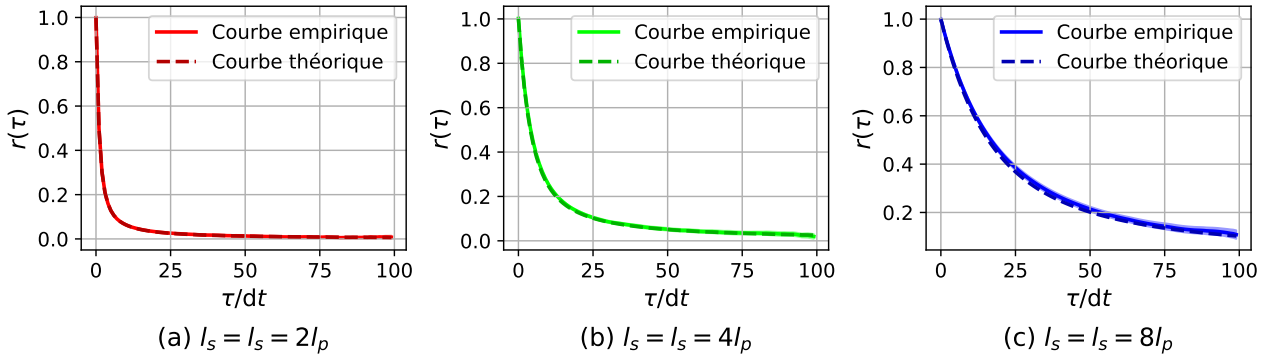


FIGURE 3.10 – Autocorrélations obtenues après mouvement brownien transverse

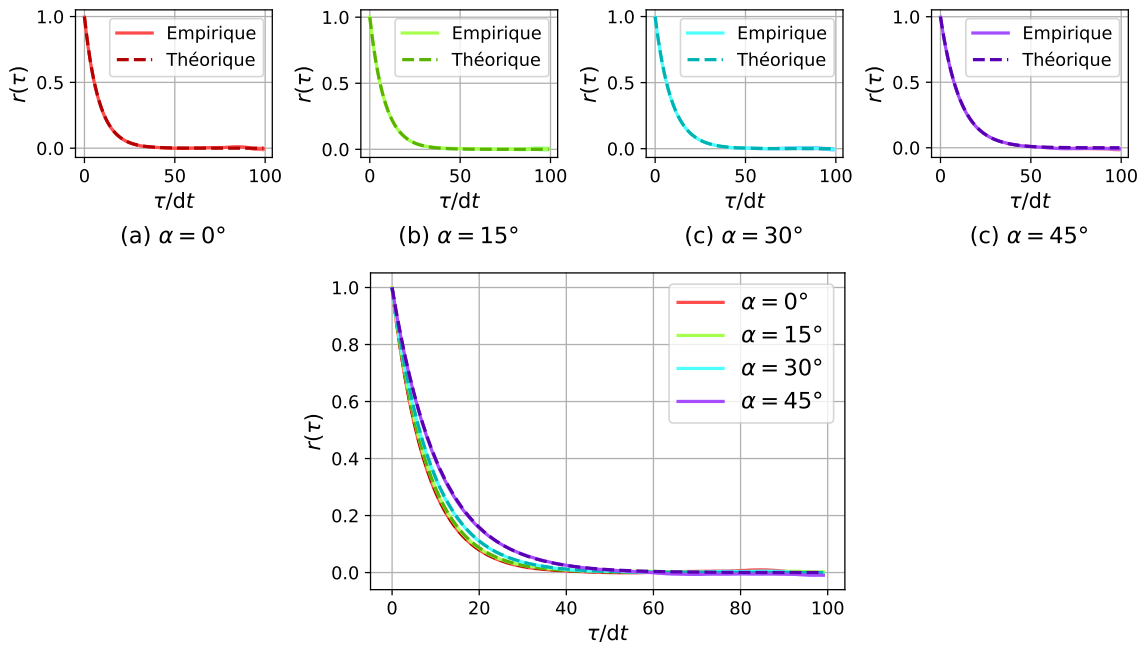
Paramètre	Valeur
L_z	3 mm
λ	500 nm
σ_z	20 nm
l_p	10 μm
l_s	40 μm

Ainsi, on a des paramètres assez proches de conditions expérimentales standards.

L'autocorrélation théorique est donnée par :

$$r_A(\tau) = e^{-\frac{2\pi^2(1+\cos(\alpha))^2\sigma_z^2}{\lambda^2}\tau}$$

La décorrélation est donc sensiblement ralentie lorsque α augmente. Cet effet est illustré par la Fig. 3.11.

FIGURE 3.11 – Autocorrélations obtenues avec un mouvement brownien longitudinal et une onde plane pour différentes valeurs de α

3.4.5 Mouvements en trois dimensions

À présent, on suppose que les composantes transverse et longitudinale du mouvement des diffuseurs sont toutes deux non nulles. Plus précisément, on se place dans le cas d'un mouvement gaussien sphérique, c'est-à-dire que les trois composantes du mouvement (en x , y et z) suivent des lois normales indépendantes, centrées et de même variance.

Onde plane

On commence par supposer, comme précédemment, l'onde incidente plane. On fera varier l'angle d'incidence α de 0 à 45°. Les autres paramètres sont donnés par :

Paramètre	Valeur
L_z	3 mm
λ	500 nm
$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$	20 nm
l_p	10 μm
l_s	40 μm

L'autocorrélation obtenue est reproduite Fig. 3.12. Les courbes théoriques de la figure ne prennent en compte que les termes dus à la différence de marche au cours du temps, en exponentielle décroissante. Pour autant, la correspondance entre courbes théoriques et empiriques est très bonne. Ainsi, on constate qu'avec des paramètres réalistes, la partie transverse de l'autocorrélation n'a qu'une influence négligeable.

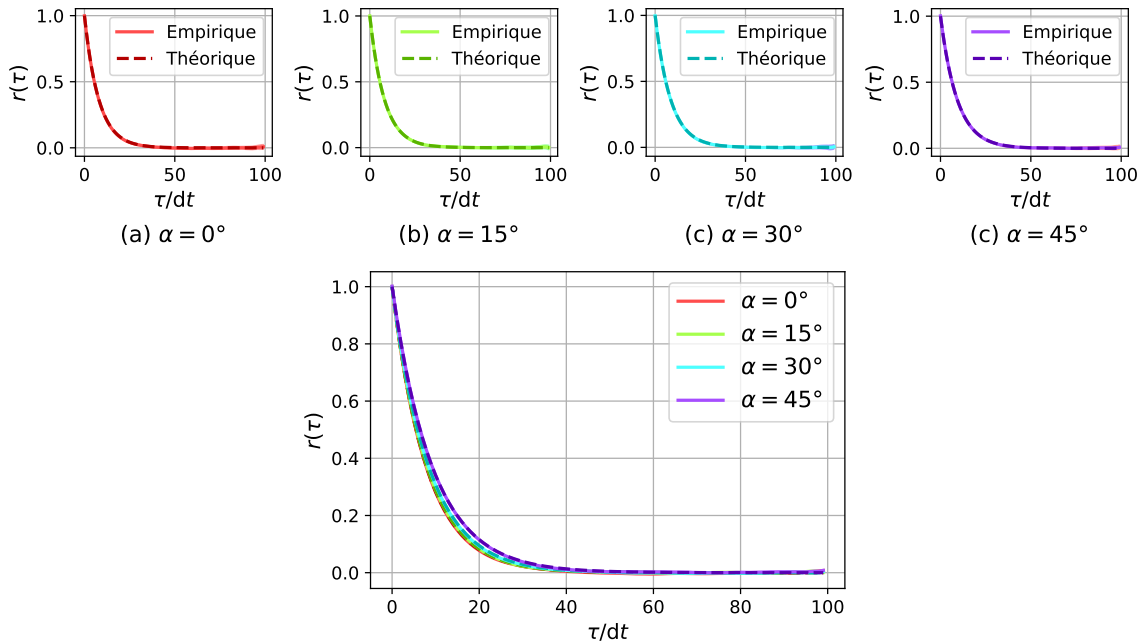


FIGURE 3.12 – Autocorrélations obtenues avec un mouvement brownien 3D et une onde plane pour différentes valeurs de α

Onde sphérique

On suppose à présent l'onde sphérique, donc z_L fini. On n'a pas de formule explicite pour l'autocorrélation, tout au plus peut-on dire que la phase géométrique d'un diffuseur situé en x vaut :

$$\varphi_g(\mathbf{x}) = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\sqrt{(x - x_L)^2 + (y - y_L)^2 + (z - z_L)^2} + z \right]$$

Bien sûr, la sphéricité n'a d'effet que si z_L n'est pas trop grand devant les autres dimensions du système. Pour étudier cette situation, on se donne les mêmes paramètres que précédemment, avec $z_L = 10$ cm, ce qui constitue une valeur vraisemblable expérimentalement. On obtient alors les autocorrélations reproduites Fig. 3.13. Les courbes théoriques correspondent au cas d'une onde plane, et le terme transverse de l'autocorrélation est toujours négligé.

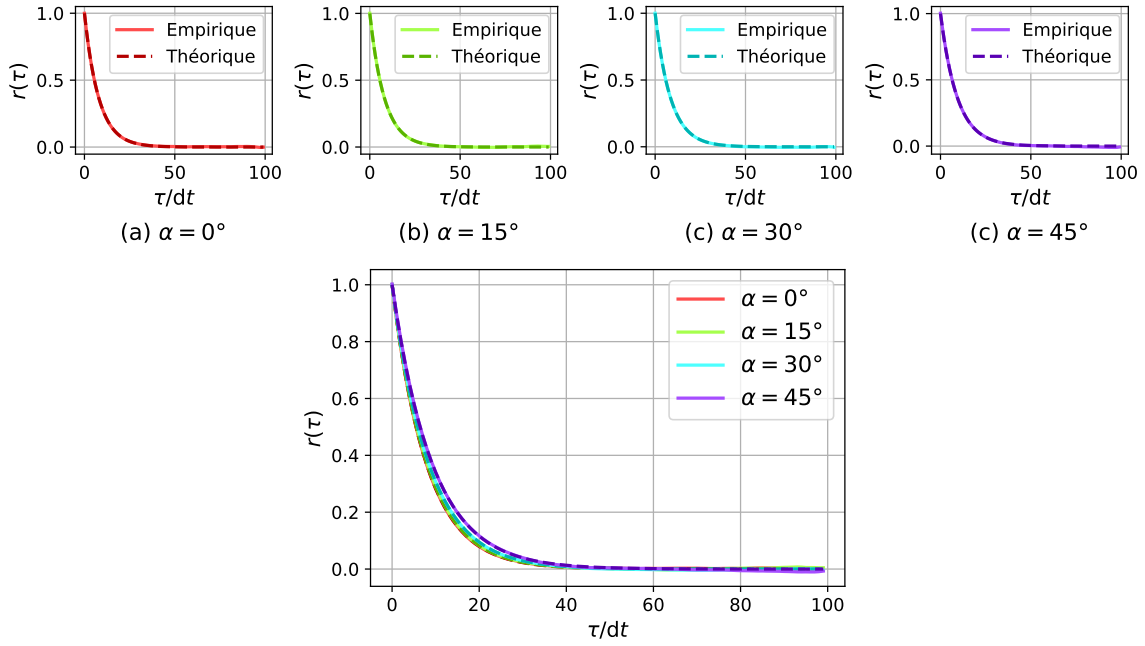


FIGURE 3.13 – Autocorrélations obtenues avec une onde sphérique pour différentes valeurs de α

On constate que la sphéricité n'a aucun effet apparent. C'est encourageant dans une perspective expérimentale, vu combien la planéité de l'onde facilite les calculs et donc les prédictions et les inversions de modèle.

Plaçons-nous à présent dans un cas moins favorable, où la cote du laser ($|z_L| = 3$ cm) est égale à l'amplitude de profondeur des diffuseurs L_z . On obtient alors les autocorrélations de la Fig. 3.14.

Cette fois, on constate que la courbe pour $\alpha = 45^\circ$ se détache sensiblement de la courbe théorique. Le décalage reste néanmoins faible. L'hypothèse de l'onde plane peut donc être reprise sans grand risque dans une large gamme de situations expérimentales.

3.4.6 Relation de Siegert

Jusqu'ici, on a examiné uniquement les autocorrélations des amplitudes complexes. Or, lors de nos simulations, on calcule aussi l'intensité sur chaque pixel. On va donc ici examiner son autocorrélation normalisée s_I , et vérifier qu'elle vérifie bien la relation de Siegert.

On reprend les simulations avec un mouvement brownien 3D (Section 3.4.5) avec les paramètres :

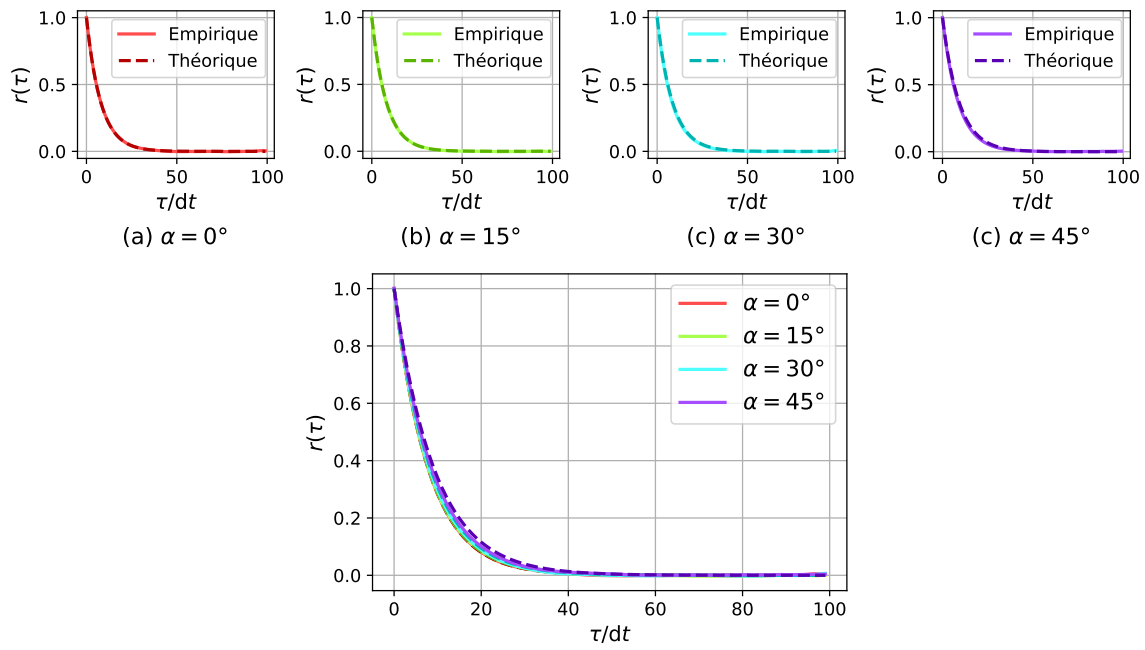


FIGURE 3.14 – Autocorrélations obtenues avec une onde sphérique pour différentes valeurs de α . On a par ailleurs $z_L = l_z = 3$ cm.

Paramètre	Valeur
k	4 à 8
L_z	3 mm
z_L	10 cm
α	30°
λ	500 nm
$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$	20 nm
l_p	$10 \mu\text{m}$
l_s	5 à $80 \mu\text{m}$

Les autocorrélations de I obtenues sont reproduites sur la Fig. 3.15

Sur cette figure, les courbes théoriques sont celles prévues par la relation de Siegert, avec β calculé à l'aide de sa formule analytique donnée par (1.6). Elles sont parfaitement suivies par les courbes empiriques. L'effet de la relation de Siegert est clair : l'autocorrélation d'autant plus écrasée que le grain est petit.

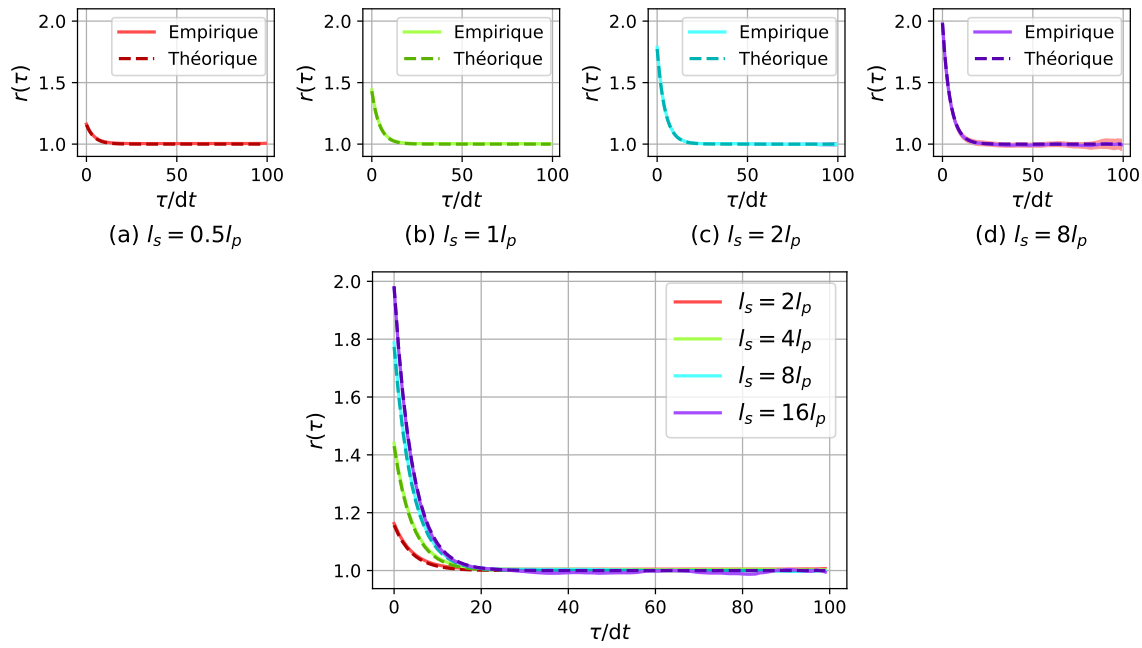


FIGURE 3.15 – Autocorrélations de l'intensité avec un mouvement brownien 3D, une onde sphérique et différentes tailles de grain.

Conclusion et perspectives

Ce chapitre a permis une première exploration assez exhaustive de ce qu'il est possible de faire en simulation de speckle dynamique avec les hypothèses (fortes) prises au départ :

- La population de diffuseurs est homogène, c'est-à-dire que tous les diffuseurs suivent la même loi de mouvement;
- Le mouvement des diffuseurs est décrit par un processus de Markov sur la position, c'est-à-dire que la vitesse à un instant t est indépendante des vitesses précédentes;
- La diffusion est simple, c'est-à-dire que la lumière est rétrodiffusée au plus une fois au sein du milieu imagé.

Avec ces hypothèses, on a pu mettre en évidence la différence fondamentale entre les contributions du mouvement transverse et longitudinal des diffuseurs, qui ne décroissent pas du tout de la même façon — respectivement en $1/\sqrt{\tau}$ et en exponentielle décroissante. Néanmoins, on a aussi pu constater à quel point la contribution longitudinale est dominante en pratique, avec des paramètres proches d'une situation expérimentale réaliste. Cela explique pourquoi seul ce terme apparaît dans la littérature.

On a aussi pu évaluer l'écart entre le modèle d'une onde incidente plane et les résultats empiriques obtenus avec une onde sphérique. Cet écart s'avère très faible avec des paramètres réalistes, ce qui laisse penser que la sphéricité de l'onde est largement négligeable.

Enfin, on a pu valider en simulation la relation de Siegert, ce qui nous a fourni par la même occasion une nouvelle illustration des possibilités du simulateur.

Les possibilités d'amélioration du modèle résident, assez naturellement, dans la relaxation des hypothèses prises pour sa mise en place. Pour obtenir des modèles de mouvement plus subtils, il serait possible de s'appuyer sur des équations différentielles stochastiques du second ordre, de type "équation de Langevin" [71]. En incluant par exemple dans l'équation de Langevin le potentiel d'un oscillateur harmonique, on peut représenter des diffuseurs vibrant autour d'une position d'équilibre. On peut aussi imaginer traduire sous forme stochastique des équations de la mécanique des fluides. Un enjeu soulevé par mes travaux est en effet de mieux comprendre comment l'imagerie de speckle

dynamique parvient à faire ressortir l'activité liée à des flux, alors qu'on a montré que les mouvements directionnels, qui se traduisent dans l'autocorrélation du champ complexe par une rampe de phase, ne peuvent pas être directement extraits d'un signal d'intensité.

Une deuxième étape serait de permettre à plusieurs populations de diffuseurs différentes de cohabiter. Cela permettrait déjà de se placer dans une configuration hétérodyne où, par le biais du décalage Doppler, la vitesse est facilement extraite du signal d'intensité.

Enfin, pour donner plus d'intérêt à cette seconde étape, il serait intéressant (et beaucoup plus réaliste) de s'affranchir de l'hypothèse de la monodiffusion. Cela pose un défi technique et computationnel considérable, car on peut imaginer de nombreuses manières de simuler une situation de multi-diffusion. On peut par exemple conserver le modèle des diffuseurs ponctuels et supposer qu'un photon suit une marche aléatoire d'un diffuseur à l'autre [72]. On peut aussi y renoncer et passer à un modèle de milieu continu au sein duquel on implémente les équations de la théorie du transfert radiatif [73, 74]. La première solution promet d'être computationnellement lourde, tandis que la seconde représente un complet changement de paradigme, sans compter que la théorie du transfert radiatif est peu adaptée aux phénomènes d'interférences.

Chapitre 4

Étude des effets statistiques du rééchantillonnage de signaux aléatoires

Introduction

Beaucoup de signaux manipulés en sciences de l'ingénieur sont considérés sous l'angle de ce qu'on pourrait appeler le "paradigme signal-bruit". En effet, un signal est en général vu comme la combinaison (souvent la somme) d'une information pertinente, qui nous intéresse, et d'un bruit, dont on cherche à se débarrasser. Une partie significative du traitement du signal consiste précisément à éliminer le second tout en conservant au maximum la première.

Ce paradigme s'illustre aussi dans la façon que peut avoir le traitement du signal de considérer l'aléatoire. En général, l'information d'intérêt est vue comme déterministe, au moins implicitement, tandis que le bruit est la réalisation d'un processus stochastique, dont il convient de cerner au mieux les propriétés pour mieux l'éliminer.

À plus d'un titre, ce schéma sied assez mal au speckle. Pour s'en apercevoir, il suffit de constater que, selon les applications et les chercheurs, il sera ou non considéré comme un bruit. Cela résume son paradoxe : comme un bruit, il est essentiellement aléatoire, et ne se modélise bien que comme la réalisation d'un processus stochastique ; pour autant, pour beaucoup d'applications (en particulier celles qui nous intéressent), c'est justement de ce caractère aléatoire, à travers les propriétés du processus sous-jacents, qu'on peut espérer extraire de l'information.

On peut ainsi rarement espérer tirer quoi que ce soit d'un unique tirage de speckle en un point isolé : l'information est généralement portée par des statistiques sur le signal. Ces statistiques peuvent être du premier ordre, c'est-à-dire être fonctions des distributions marginales (variance, coefficient de variation...) ou du second ordre, c'est-à-dire dépendre des lois jointes entre plusieurs points (auto-corrélations par exemple). L'estimation de ces paramètres suppose des propriétés, comme la stationnarité ou l'ergodicité, qui, dans d'autres domaines, caractériseraient justement un signal ne portant aucune information. Au contraire, en speckle dynamique par exemple, des variations spatiales d'intensité moyenne, donc un fond déterministe du signal, peuvent être une gêne en brisant son homogénéité. On se retrouve donc dans une position diamétralement opposée au paradigme signal-bruit : on s'intéresse à la partie aléatoire du signal, et on veut se débarrasser de sa partie déterministe.

Ainsi, l'extraction d'information d'un signal de speckle se fait de façon fondamentalement différente de celle d'un signal déterministe. Pour autant, beaucoup d'opérations de traitement du signal sont couramment appliquées au speckle (filtrage, recalage, etc.) en faisant peu de cas de ses caractéristiques spécifiques. C'est ce constat qui a motivé ce chapitre, dont l'objet est d'étudier l'effet de certaines de ces opérations sous un angle *statistique*. On cherchera ainsi principalement à analyser l'effet des opérations sus-citées sur les *distributions* des signaux considérés en fonction des caractéristiques des opérations et des distributions de départ.

On va en particulier s'intéresser à une classe particulière d'opérations, celles impliquées dans le **rééchantillonnage**. Par rééchantillonnage, on entend le fait de simuler, à partir d'un signal réel, le signal qu'on aurait obtenu si les échantillons avaient été prélevés différemment. De nombreuses opé-

rations relèvent du rééchantillonnage, ou pourraient en faire partie, sans nécessairement être identifiées comme telles. Par exemple :

- On peut vouloir réduire le nombre d'échantillons du signal, c'est-à-dire procéder à un **sous-échantillonnage** de celui-ci. La version la plus naïve de cette opération s'appelle la **décimation** : elle consiste à simplement prélever des points du signal à intervalles réguliers. Mais on prend alors le risque d'obtenir un signal mal échantillonné au sens du théorème de Shannon, c'est-à-dire de générer de l'*aliasing*. On fait donc en général précéder la décimation d'une étape de **filtrage passe-bas**. Ici, ce sont d'ailleurs surtout les effets des filtres sur les signaux qui vont nous intéresser.
- On peut, au contraire, vouloir augmenter le nombre d'échantillons : on parle alors de **sur-échantillonnage**. En général, cette opération revient, au moins implicitement, à **interpoler** le signal, c'est-à-dire à reconstruire un signal continu à partir de notre signal discret, puis à prélever les points qui nous intéressent. Dans ce chapitre, c'est de ce point de vue qu'on s'intéressera au sur-échantillonnage : on se concentrera sur l'étude de méthodes d'interpolation.
- Enfin, il arrive aussi qu'on souhaite rééchantillonner le signal sans changer sa taille. C'est le cas par exemple lorsqu'on souhaite recaler une image avec un décalage non entier. De même que précédemment, cela se fait en général en passant par une interpolation du signal, et on se limitera à ce point de vue pour notre étude.

De manière générale, les opérations étudiées dans ce chapitre auront toutes en commun d'être linéaires et invariantes par translation, et toute opération de ce type pourra entrer dans son champ d'étude. Le rééchantillonnage n'est pas un motif de restriction, mais plutôt un prétexte à l'analyse.

Par ailleurs, même si les applications qu'on a en tête concernent des images, on ne s'intéressera dans ce chapitre qu'à des signaux à une dimension. Les résultats obtenus pourront malgré tout se généraliser aux dimensions supérieures par séparabilité.

On commencera par s'intéresser aux méthodes de rééchantillonnage sans introduire de signaux aléatoires, afin de présenter quelques résultats généraux. On verra ensuite comment ces résultats s'adaptent au cas de signaux aléatoires, en se concentrant sur le cas du bruit blanc, c'est-à-dire des signaux stationnaires dont les composantes sont décorrélées. Enfin, comme notre objet d'intérêt final est toujours le speckle, on se penchera sur les signaux suivant des lois Gamma, puis des lois normales complexes circulaires.

4.1 Quelques résultats généraux sur le rééchantillonnage

L'objectif de cette partie est d'énoncer quelques formules et propriétés du rééchantillonnage qui sont valables indépendamment du caractère aléatoire des signaux considérés.

On commencera par s'intéresser au sous-échantillonnage, et en particulier à deux méthodes aux propriétés opposées : le moyennage et le *spectral cropping*. On se penchera ensuite sur les méthodes de sur-échantillonnage, plus précisément sur l'interpolation linéaire et sur le *zero-padding*.

4.1.1 Sous-échantillonnage

Préambule : un mot sur l'importance des filtres passe-bas

Comme mentionné en introduction, une manière naïve de sous-échantillonner un signal d'un facteur L consiste à en prélever un point sur L . Cette opération s'appelle la *décimation*.

Effectuée seule, elle a pour conséquence immédiate de provoquer de l'*aliasing* : on replie le spectre sur lui-même aux hautes fréquences. Pour éviter cela, on veille généralement à faire précéder la décimation d'un filtrage passe-bas.

Selon le processus exact de sous-échantillonnage, les deux étapes (filtrage passe-bas et décimation) peuvent être ou non clairement distinctes. Par exemple, le *spectral cropping*, étudié plus loin, se fait généralement en calculant d'abord la transformée de Fourier discrète (TFD) du signal, puis en l'inversant sur le nombre d'échantillons souhaités : le signal filtré n'est jamais manipulé directement. À l'inverse, les méthodes impliquant des filtrages plus classiques (gaussien par exemple) le font apparaître. Dans tous les cas, il est important de bien identifier le passe-bas associé à une technique de sous-échantillonnage, car c'est lui, avec ses propriétés, qui caractérise la méthode.

Sous-échantillonnage par moyennage

Le sous-échantillonnage par moyennage est une méthode couramment utilisée en raison de sa simplicité.

Considérons un signal discret s de taille N . On suppose qu'on veut le sous-échantillonner par moyennage pour obtenir un signal de taille M , M étant un diviseur de N . On note $L = N/M$ le facteur de sous-échantillonnage associé, et \hat{s} le signal obtenu après sous-échantillonnage de s d'un facteur L .

Pour tout $m \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket$, $\hat{s}[m]$ est défini comme la moyenne des valeurs de s sur l'intervalle $\llbracket nL, (n+1)L \rrbracket$, c'est-à-dire :

$$\hat{s}[m] = \frac{1}{L} \sum_{n=mL}^{(m+1)L-1} s[n]$$

On a insisté en section précédente sur l'importance d'identifier le passe-bas associé à une méthode de sous-échantillonnage. Ici, on peut remarquer qu'on peut reformuler le sous-échantillonnage comme suit :

- On filtre s à l'aide d'un **moyenneur glissant** de largeur L ;
- On prélève un point sur L pour obtenir \hat{s} .

Le filtre passe-bas associé à cette méthode de sous-échantillonnage est donc le moyenneur glissant, dont la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h_M[n] = \frac{1}{L} \mathbb{1}_{\llbracket -\lceil \frac{L-1}{2} \rceil, \lfloor \frac{L-1}{2} \rfloor \rrbracket}$$

où $\mathbb{1}_E$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble E . À noter que, si L est impair, h est symétrique avec $\frac{L-1}{2}$ valeurs non nulles de chaque côté de 0. En revanche, si L est pair, h est nécessairement asymétrique. Tel qu'il est défini ici, on a $\frac{L}{2}$ valeurs non nulles à gauche de 0 et $\frac{L}{2} - 1$ à droite, mais c'est un choix arbitraire.

Comportement spectral

Pour mieux cerner le comportement spectral du moyenneur glissant, il est intéressant de déterminer la fonction de transfert associée à ce filtre. Celle-ci est donnée par la transformée de Fourier discrète de h . Pour la calculer, il est nécessaire de faire une disjonction de cas selon la parité de L :

- Si L est impair, on a $\lceil \frac{L-1}{2} \rceil = \lfloor \frac{L-1}{2} \rfloor = \frac{L-1}{2}$. h est alors, au facteur $1/L$ près, la fonction porte de largeur L .

Or, d'après un résultat énoncé en Section 3.3.2 dans un tout autre contexte, la TFD inverse de la fonction porte de largeur L est la fonction $\text{sincd}_{M,N}$, donnée par :

- Si M est pair :

$$\text{sincd}_{M,N}[n] = \begin{cases} \frac{\sin(\frac{M}{N}\pi n)}{N \tan(\frac{\pi n}{N})} & \text{si } \tan(\frac{\pi n}{N}) \neq 0; \\ 1 & \text{si } \tan(\frac{\pi n}{N}) = 0. \end{cases}$$

– Si M est impair :

$$\text{sincd}_{M,N}[n] = \begin{cases} \frac{\sin(\frac{M}{N}\pi n)}{N \sin(\frac{\pi n}{N})} & \text{si } \sin(\frac{\pi n}{N}) \neq 0; \\ 1 & \text{si } \sin(\frac{\pi n}{N}) = 0. \end{cases}$$

Dès lors, la TFD inverse de h est donnée par $\frac{1}{L} \text{sincd}_{L,N}$, et sa TFD s'obtient en rajoutant à cette expression un facteur N :

$$\begin{aligned} H[k] &= \frac{N}{L} \text{sincd}_{L,N}[k] \\ &= \frac{\sin\left(\frac{L\pi k}{N}\right)}{L \sin\left(\frac{\pi k}{N}\right)} \end{aligned}$$

- Si L est pair, on a $\lceil \frac{L-1}{2} \rceil = \frac{L}{2}$ et $\lfloor \frac{L-1}{2} \rfloor = \frac{L}{2} - 1$. h ne correspond pas exactement à une fonction porte, on va donc calculer H :

$$\begin{aligned} H[k] &= \sum_{n=-\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor}^{\lceil \frac{N-1}{2} \rceil} h[n] e^{i \frac{2kn\pi}{N}} \\ &= \frac{1}{L} \sum_{n=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}-1} e^{i \frac{2kn\pi}{N}} \\ &= \frac{1}{L} \frac{e^{-i \frac{2k\pi}{N} \cdot \frac{L}{2}} - e^{i \frac{2k\pi}{N} \cdot \frac{L}{2}}}{1 - e^{i \frac{2k\pi}{N}}} \\ &= \frac{1}{L} \frac{-2i \sin\left(\frac{k\pi L}{N}\right)}{e^{i \frac{k\pi}{N}} (e^{i \frac{-k\pi}{N}} - e^{i \frac{k\pi}{N}})} \\ &= \frac{1}{L} \frac{-2i \sin\left(\frac{k\pi L}{N}\right)}{-2i e^{i \frac{k\pi}{N}} \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right)} \\ &= \frac{1}{L} \frac{\sin\left(\frac{k\pi L}{N}\right)}{e^{i \frac{k\pi}{N}} \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right)} \end{aligned}$$

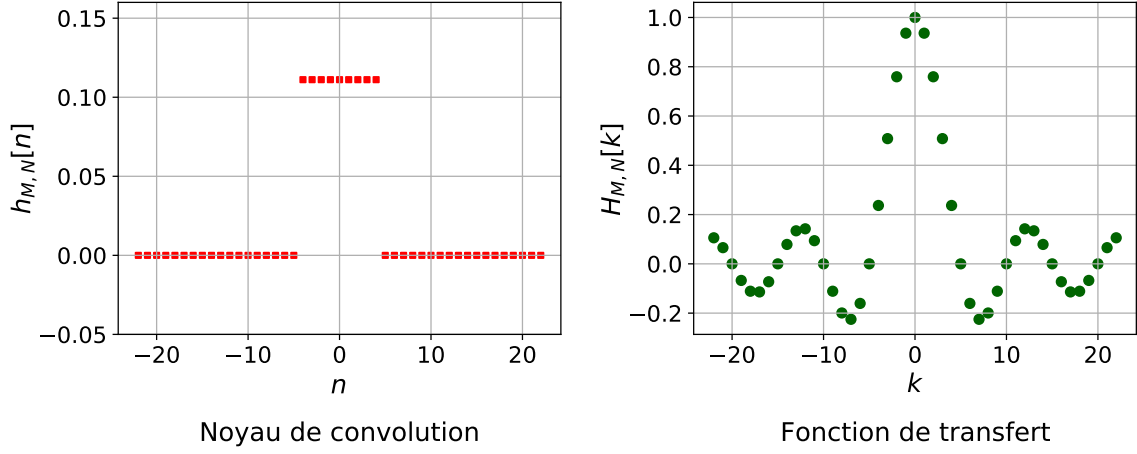
On obtient donc un résultat qui ressemble à un sinus cardinal discret, mais qui en diffère par une rampe de phase.

Dans le cas impair, le noyau de convolution et la fonction de transfert du moyennage glissant sont reproduits Fig. 4.1.

Le sous-échantillonnage par moyennage a l'avantage d'être très local : la valeur en m du signal sous-échantillonné ne dépend que des L valeurs les plus proches du signal initial. Mais cela se paie par un fort étalement dans le domaine spectral : le sinus cardinal discret décroît très lentement sur une demi-période — sa vitesse de décroissance est de l'ordre de $1/n$. De ce point de vue, le moyennage glissant est un "mauvais" passe-bas.

Sous-échantillonnage par *spectral cropping*

Une autre méthode de sous-échantillonnage importante sur le plan théorique est le *spectral cropping*.

FIGURE 4.1 – Moyenneur glissant, pour $N = 45$ et $L = 9$.

Avec les mêmes notations qu'en section précédente, l'application de la méthode dite du *spectral cropping* se fait en effectuant les opérations suivantes :

1. Calculer la TFD S de s ;
2. Ne garder de S que $S[0]$, les $\lfloor \frac{M-1}{2} \rfloor$ valeurs à sa gauche et les $\lceil \frac{M-1}{2} \rceil$ valeurs à sa droite, pour obtenir \hat{S} ;
3. Appliquer la TFD inverse, prendre la partie réelle et enfin multiplier par M/N pour obtenir le signal sous-échantillonné \hat{s} .

Là encore, il est utile de séparer clairement les opérations de filtrage et de décimation. Avec les étapes ci-dessus, elles sont réalisées simultanément, lorsqu'on n'inverse la TFD que sur M termes. Pour mettre en évidence le filtre utilisé, on peut reformuler comme suit le déroulement d'un sous-échantillonnage à partir de l'étape 2 :

1. Multiplier S par l'indicatrice de l'intervalle discret $\llbracket \lfloor \frac{M-1}{2} \rfloor, \lceil \frac{M-1}{2} \rceil \rrbracket$.
2. Inverser la TFD (normalement, sur N termes) et prendre la partie réelle ;
3. Prélever M points à intervalles réguliers.

En pratique, il est équivalent (et plus commode) de remplacer l'indicatrice de $\llbracket \lfloor \frac{M-1}{2} \rfloor, \lceil \frac{M-1}{2} \rceil \rrbracket$ par la fonction porte de taille M :

$$H[k] = \Pi(k/M)$$

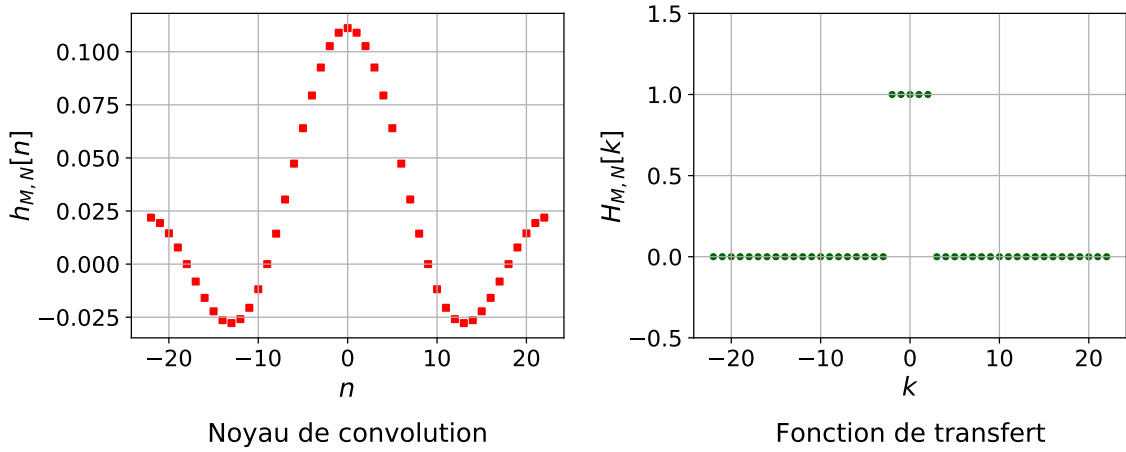
où Π est la fonction porte, définie sur \mathbb{R} par :

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{1}{2}; \\ \frac{1}{2} & \text{si } |x| = \frac{1}{2}; \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

On obtient ainsi directement un signal réel au moment de l'inversion de la TFD. H constitue la fonction de transfert du filtre, qui est donc le **filtre passe-bas idéal**.

Expression du *spectral cropping* dans le domaine spatial

Le filtrage passe-bas idéal et le *spectral cropping* se décrivent très simplement dans le domaine spectral. Comme cela n'aide pas forcément à appréhender leurs effets concrets sur le signal, on va chercher ici à exprimer les valeurs de \hat{s} en fonction de celles de s , en restant dans le domaine spatial.

FIGURE 4.2 – Filtre passe-bas idéal, pour $N = 45$ et $L = 9$.

On s'appuie pour cela sur le résultat qu'on a rappelé pour déterminer le comportement spectral du moyennneur glissant : la TFD inverse de H est la fonction $\text{sincd}_{M,N}$, qui constitue donc la réponse impulsionnelle du filtre passe-bas idéal. Son graphe, ainsi que celui de H , sont reproduits Fig. 4.2.

Le signal filtré s'écrit donc :

$$\tilde{s}[m] = \sum_{n=0}^{N-1} s[n] \text{sincd}_{M,N}[m - n]$$

Et le signal sous-échantillonné s'exprime en prenant un point sur L :

$$\begin{aligned} \hat{s}[m] &= \tilde{s}[Lm] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} s[n] \text{sincd}_{M,N}[Lm - n] \end{aligned}$$

Le sous-échantillonnage par *spectral cropping* a donc des propriétés inverses à celles du moyennage : il est très local dans le domaine spectral (d'où le nom du filtre "passe-bas idéal"), mais très étalé dans le domaine spatial. Par ailleurs, sa périodicité est un problème : même si on utilise fréquemment la transformée de Fourier discrète sur des signaux finis, ceux-ci ne peuvent généralement pas être considérés comme périodiques. Ainsi, si le *spectral cropping* est une technique importante sur le plan théorique, il est peu utilisé en pratique.

4.1.2 Sur-échantillonnage et interpolation

On va à présent s'intéresser aux méthodes d'interpolation. On rappelle que l'interpolation d'un signal discret s consiste à construire un signal continu \check{s} , vérifiant pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\check{s}(n) = s[n]$$

Il s'agit donc de l'opération inverse de l'échantillonnage. Bien sûr, il existe une infinité de moyens d'interpoler un signal s . La meilleure méthode dans une situation donnée dépend des propriétés souhaitées :

- On peut vouloir que l'interpolée ait une certaine *régularité*, c'est-à-dire qu'elle soit continue, dérivable, \mathcal{C}^k , etc. ;
- On peut également souhaiter que la méthode d'interpolation soit *locale*, c'est-à-dire que l'interpolée de s en x ne dépende pas de termes de s trop loin de x ;

- Enfin, on peut viser un certain *ordre d'interpolation* [75]. Celui-ci fournit une mesure de qualité de l'interpolation, dans le sens suivant : supposons qu'on échantillonne un signal continu s avec un pas Δ pour obtenir s_Δ . Si ensuite on réinterpole s_Δ pour obtenir \tilde{s} , on s'attend à ce que \tilde{s} soit proche de s , et ce d'autant plus que Δ est petit. Dès lors, l'ordre d'interpolation mesure la vitesse de convergence de \tilde{s} vers s lorsqu'on fait tendre Δ vers 0 : plus il est grand, plus cette vitesse est élevée.

Bien sûr, on ne peut pas avoir toutes les propriétés souhaitables en même temps. Par exemple, on peut montrer qu'un ordre d'interpolation élevé implique nécessairement un support élevé, c'est-à-dire une forte non-localité [75]. Le choix est donc une affaire de compromis.

Convolution mixte

La plupart des méthodes d'interpolation couramment utilisées sont linéaires — c'est-à-dire qu'en tout point x , $\check{s}(x)$ est une combinaison linéaire des valeurs de s — et invariantes par translation — c'est-à-dire que si on translate s d'un entier Δn , son interpolée sera la translatée de Δn de \check{s} . Lorsque ces deux propriétés sont vérifiées, l'interpolation s'exprime à l'aide d'une convolution. En l'occurrence, la convolution est dite **mixte** : on convolue un signal discret, s , et un noyau continu, v , pour obtenir un signal continu, \check{s} . Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\check{s}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s[n]v(x-n)$$

v , qui est le noyau de convolution mixte associé à la méthode d'interpolation employée, la caractérise entièrement.

Caractérisation spectrale des méthodes d'interpolation

Comme en filtrage linéaire, le noyau de convolution a un pendant spectral : la fonction de transfert. Ici, pour bien comprendre ce à quoi il correspond, il faut se rappeler que :

- Un signal continu infini a une transformée de Fourier continue infinie ;
- Un signal discret infini a une transformée de Fourier continue périodique, la transformée de Fourier en temps discret (TFTD).

Transformer un signal discret en signal continu, comme le fait l'interpolation, revient donc à "dé-périodiser" sa transformée de Fourier. Cela se fait en la multipliant par une fonction de transfert Y , qui est aussi la transformée de Fourier de v .

Ainsi, si s est notre signal discret, sa TFTD est définie par :

$$\forall \omega \in]-\pi, \pi], \quad S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s[n]e^{-i\omega n}$$

Et, si \check{s} est le signal interpolé, sa transformée de Fourier est obtenue en multipliant par Y la sommation périodique de S :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \check{S}(\omega) = Y(\omega) \cdot \sum_{N=-\infty}^{+\infty} S(\omega - 2\pi N)$$

Y caractérise la méthode d'interpolation au même titre que v .

Ici, on va se concentrer sur deux méthodes d'interpolation : l'interpolation linéaire, très couramment utilisée, et l'interpolation de Shannon, importante sur le plan théorique.

Interpolation linéaire

Soit s un signal discret. Soit \check{s} son interpolée linéaire. \check{s} est construite en reliant les valeurs de s par des fonctions affines par morceaux. Autrement dit, pour $x \in \mathbb{R}$, si $\lfloor x \rfloor$ est sa partie entière et $\{x\}$ sa partie décimale :

$$\check{s}(x) = (1 - \{x\}) s[\lfloor x \rfloor] + \{x\} s[\lfloor x \rfloor + 1]$$

Son noyau de convolution mixte est alors la **fonction triangle**, définie par :

$$\begin{aligned} v(x) &= \Lambda(x) \\ &= \max(1 - |x|, 0) \\ &= \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| < 1; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Fonction de transfert

La fonction de transfert de l'interpolation linéaire est la transformée de Fourier de v . Celle-ci est aisée à retrouver si on utilise le fait que v est donnée par :

$$\begin{aligned} v(x) &= \Lambda(x) \\ &= \{\Pi * \Pi\}(x) \end{aligned}$$

où Π est la fonction porte, et $*$ est la convolution. Or la transformée de Fourier de la fonction porte est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\Pi\}(\omega) &= \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \\ &= \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \end{aligned}$$

Par le théorème de convolution, la transformée de Fourier de v est donc donnée par :

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \\ &= \frac{\sin^2(\omega/2)}{\omega^2/4} \end{aligned}$$

Le noyau de convolution mixte et la fonction de transfert associés à l'interpolation linéaire sont reproduits Fig. 4.3.

Comme sinc^2 tend assez lentement vers 0, cela signifie que l'interpolation linéaire génère du contenu haute fréquence issu de périodes de S loin de 0. Ce contenu haute fréquence est parasite : il ne correspond pas à de l'information représentable dans s . Ainsi, la simplicité et la localité de l'interpolation linéaire se paient par de mauvaises propriétés spectrales.

Sur-échantillonnage par *Zero-padding*

On va à présent s'intéresser à une méthode de sur-échantillonnage importante sur le plan théorique, le *zero-padding*¹. Cette méthode s'applique fréquemment à des signaux discrets de taille finie

¹Ce terme est parfois traduit en français par est "bourrage de zéros" ou "complétion de zéros". Néanmoins, le terme anglais reste le plus universel. Pour ces travaux, c'est donc celui-ci qu'on emploiera.

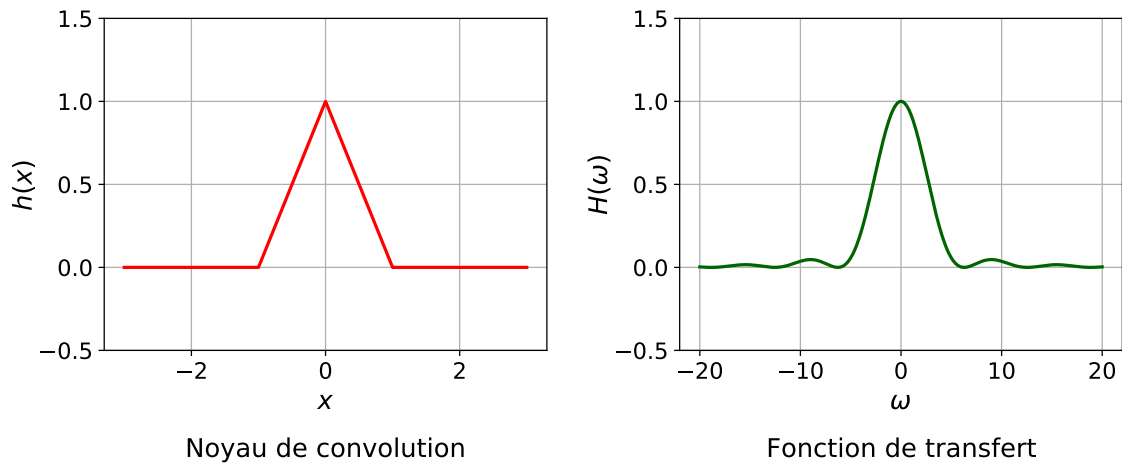


FIGURE 4.3 – Filtre associé à l'interpolation linéaire.

sans que soit mis en évidence son noyau d'interpolation mixte. On va reprendre sa formulation traditionnelle, puis on déterminera le noyau et la fonction de transfert associées.

Traditionnellement, le sur-échantillonnage par *zero-padding* d'un signal s de taille N pour le faire passer à la taille $M > N$ est appliqué en effectuant les opérations suivantes :

- On calcule la TFD S de s ;
- On ajoute des zéros à S au-delà des hautes fréquences pour obtenir \check{S} . On veille alors à les ajouter de façon symétrique, de façon à ce que \check{S} soit toujours la TFD d'un signal réel ;
- On applique la TFD inverse pour obtenir le signal sur-échantillonné \check{s} . Comme le signal d'origine était un signal discret périodique (formellement parlant, en raison de la définition de la transformée de Fourier discrète), le signal interpolé est continu périodique. Son spectre s'obtient donc à l'aide de sa série de Fourier discrète (SFD). Celle-ci est un signal discret non périodique.

Le sur-échantillonnage par *zero-padding* consiste à faire l'hypothèse que s est bien échantillonné au sens du théorème de Shannon. Cela revient à dire que le signal continu sous-jacent n'a pas de contenu spectral au-delà des fréquences représentées dans la TFD de s . Il est alors logique de définir comme nulle la SFD du signal sur-échantillonné pour les fréquences non représentables dans la TFD de s .

Expression pour un signal infini

Supposons à présent que s est un signal discret infini, de TFTD S . On suppose s de carré sommable, de manière à ce que la TFTD soit bien définie. Dans ce cas, les étapes du *zero-padding* s'adaptent comme suit :

1. On calcule la TFTD S de s ;
2. On ajoute des zéros à S au-delà des hautes fréquences pour obtenir \check{S} . On veille alors à les ajouter de façon symétrique, de façon à ce que \check{S} soit toujours la TFD d'un signal réel ;
3. On prolonge S sur l'intervalle $]-M\pi, M\pi]$, de telle sorte que $S(\omega) = 0$ si $\omega \notin]-\pi, \pi]$.
4. On contracte la TFTD prolongée d'un facteur M , pour la restreindre à nouveau à $]-\pi, \pi]$ et obtenir \check{S} .
5. On inverse la TFTD pour obtenir le signal sur-échantillonné \check{s} . Celui-ci est désormais un signal continu non périodique, dont le spectre est la transformée de Fourier, qui est continue et non périodique.

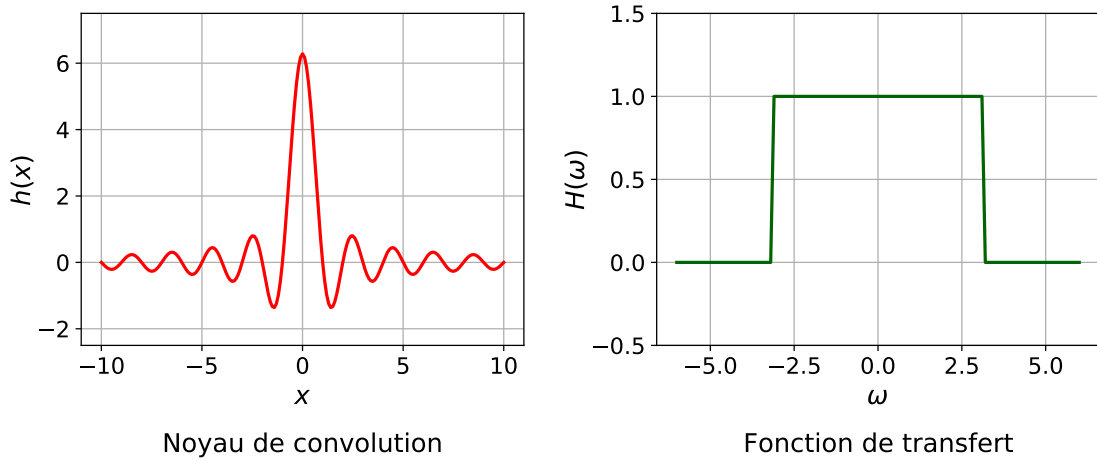


FIGURE 4.4 – Filtre associé à l'interpolation de Shannon

Si on souhaitait juste interpoler s , il aurait fallu prolonger S à tout \mathbb{R} à l'étape 3, et inverser la TFD pour obtenir le signal continu \check{s} . Cela met en évidence la fonction de transfert associée au *zero-padding* : il s'agit de la **fonction porte de largeur 2π** . Ainsi :

$$\begin{aligned}
 Y(\omega) &= \Pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \\
 &= \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| < \pi; \\ \frac{1}{2} & \text{si } |\omega| = \pi; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Et le noyau de convolution mixte associé est, à un facteur près, le sinus cardinal :

$$\begin{aligned}
 v(x) &= 2\pi \operatorname{sinc}(x) \\
 &= \frac{2 \sin(\pi x)}{x}
 \end{aligned}$$

Le noyau de convolution mixte et la fonction de transfert sont reproduits Fig. 4.4.

L'interpolation associée au sur-échantillonnage par *zero-padding* est appelée l'interpolation de Shannon. Il s'agit de la méthode d'interpolation appropriée dans le cas idéal où le signal discret est bien échantillonné au sens du théorème de Shannon. En effet, dans ce cas, le spectre donnée par sa TTFD est exactement le spectre du signal continu sous-jacent : on n'a pas de repliement spectral. Le contenu spectral du signal continu est alors identiquement nul au-delà de π , et c'est ce que reconstitue la fonction porte.

Le problème est qu'il est rare que les signaux réels soient bien échantillonnés. Par ailleurs, l'interpolation de Shannon est une méthode extrêmement lourde, car fortement non-locale : le noyau v décroît très lentement. Si on tronque v pour réduire son support, ou si le signal n'est en réalité pas bien échantillonné, cela générera des artefacts : par exemple, un unique pic dans le signal (générant du contenu haute fréquence qui le rend mal échantillonné) aura une influence à grande distance, sous la forme d'un profil ressemblant à un sinus cardinal centré sur le pic. En deux dimensions, ce type d'artefact est appelé *ringing*, en raison de son apparence d'anneaux autour du pic.

Par ailleurs, lorsqu'on manipule des signaux de taille finie (ce qui est toujours le cas en pratique), un autre problème se pose : celui de la périodicité. En effet, le formalisme de la transformée de Fourier discrète suppose que les signaux finis de taille N sont en réalité infinis, périodiques de période N . Le noyau de convolution mixte est alors lui aussi périodique : le sinus cardinal est remplacé par le désormais bien connu sinus cardinal discret. Cela signifie qu'un point à une extrémité du signal peut avoir une influence sur l'interpolée à l'autre extrémité, ce qui est rarement une propriété souhaitable.

Ainsi, si le *zero-padding* et l'interpolation de Shannon sont importantes sur le plan théorique, la lourdeur de leur calcul et des hypothèses nécessaires à leur bon comportement font qu'elles sont rarement utilisées en pratique.

4.2 Rééchantillonnage et signaux aléatoires

La section précédente a été l'occasion de présenter et de caractériser les méthodes de filtrage et d'interpolation qui nous intéressent.

On va à présent commencer à établir des résultats concernant les effets de ces méthodes sur des signaux *aléatoires*, indépendamment des lois suivies par les composantes de ces signaux.

Pour la suite, on considère donc un signal aléatoire s de taille N , dont toutes les composantes sont de moyenne et de variance finie et *i.i.d.*

4.2.1 Signaux aléatoires infinis et convolution

Comme on l'a vu en Partie 4.1, les opérations de rééchantillonnage étudiées ici sont linéaires et invariantes par translation. Elles s'expriment donc à l'aide de convolutions.

Écrire ces convolutions sur des signaux aléatoires ne pose bien sûr aucun problème lorsque les signaux sont de taille finie (il s'agit juste de combinaisons linéaires). En revanche, les convolutions de signaux infinis ne pourront pas s'appuyer sur les mêmes hypothèses que précédemment : si nos signaux sont aléatoires *i.i.d.*, ils ne sont en général plus de carré sommable (*i.e.* la variable aléatoire $\sum_{\mathbb{Z}} |s[n]|^2$ est la plupart du temps infinie avec probabilité 1).

On peut en revanche s'appuyer sur le théorème suivant :

Théorème 4.2.1

Soit s un processus discret (d'espace de départ \mathbb{Z}) stationnaire au sens large et de variance finie.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ un noyau de carré sommable, c'est-à-dire tel que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n^2 < +\infty$.

Alors : Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, la série $\sum a_n s[m - n]$ converge presque sûrement vers une limite qu'on note $\sum_{\mathbb{Z}} a_n s[m - n]$.

Ce théorème découle du théorème 3 de la Section VII.8 de [76]. Pour la suite de cette section, on supposera toujours nos signaux et nos noyaux de convolutions conformes aux hypothèses de ce théorème. Ainsi, on pourra les convoluer entre eux librement.

4.2.2 Sous-échantillonnage

Sous-échantillonnage par moyennage

On rappelle que le sous-échantillonnage par moyennage consiste à réduire l'échantillonnage d'un facteur $L \in \mathbb{N}^*$ en moyennant le signal d'origine sur des paquets de taille L . Le signal sous-échantillonné a donc une taille de $M = \frac{N}{L}$.

Des calculs élémentaires permettent de montrer que le sous-échantillonnage par moyennage a les effets suivants sur un signal *i.i.d.* :

- L'espérance est conservée ;
- La variance diminue comme $\frac{1}{L}$, et l'écart-type diminue donc comme $\frac{1}{\sqrt{L}}$.

On retrouve la propriété qui fait l'intérêt des filtres passe-bas pour le débruitage : si la variance du signal provient d'un bruit additif, le filtrage peut la réduire et donc améliorer le rapport signal à bruit.

Sous-échantillonnage par *spectral cropping*

On rappelle que le sous-échantillonnage par *spectral cropping* de facteur $L = N/M$ peut s'appliquer en exécutant les opérations suivantes :

- On filtre le signal s à l'aide du sinus cardinal discret $\text{sincd}_{M,N}$, pour obtenir \tilde{s} ;
- On prélève les échantillons souhaités, soit un sur L , pour obtenir \hat{s} .

Pour l'étude des propriétés de cette méthode, on s'intéressera directement au signal filtré \tilde{s} . Cela ne cause pas de perte de généralité : tout échantillon de \hat{s} est en particulier un échantillon de \tilde{s} .

On rappelle par ailleurs que la fonction de transfert du filtre, qui est aussi la TFD du sinus cardinal discret, est la fonction porte de largeur M .

Espérance

L'espérance étant linéaire, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\tilde{s}[0]) &= \sum_{n=0}^{N-1} \text{sincd}_{M,N}[n] \mathbb{E}(s[n]) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \text{sincd}_{M,N}[n] \mu \\ &= \mu \Pi(0) \\ &= \mu\end{aligned}$$

On a donc **conservation de l'espérance**.

Variance

La variance s'obtient elle aussi par linéarité :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}[\tilde{s}[0]] &= \sum_{n=0}^{N-1} \text{sincd}_{M,N}[n]^2 \mathbb{V}[s[n]] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \text{sincd}_{M,N}[n]^2 \sigma^2 \\ &= \sigma^2 \sum_{n=0}^{N-1} \text{sincd}_{M,N}[n]^2\end{aligned}$$

On peut alors utiliser la version discrète de l'égalité de Parseval. Pour un signal x quelconque, de TFD X , on a :

$$\sum_0^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} |X[n]|^2$$

Dans le cas du sinus cardinal discret, on obtient donc :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \text{sincd}_{M,N}[n]^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_{M,N}^2$$

Or :

- Si M est impair, $\sum_{n=0}^{N-1} H_{M,N}^2 = \sum_{n=0}^{N-1} H_{M,N} = M$;
- Si M est pair, H vaut $1/2$ en $\pm M/2$. On a donc $\sum_{n=0}^{N-1} H_{M,N}^2 = M - 1 + (1/2)^2 = M - \frac{1}{2}$

Donc on a soit $\sum_{n=0}^{N-1} \text{sincd}_{M,N}[n]^2 = \frac{M}{N}$, si M est impair, soit $\sum_{n=0}^{N-1} \text{sincd}_{M,N}[n]^2 = \frac{M-1/2}{N}$, si M est pair. Pour la suite, on écrira $\sum_{n=0}^{N-1} \text{sincd}_{M,N}[n]^2 = \frac{M}{N} + \epsilon$, où $\epsilon \leq 1/N$.

Ainsi :

$$\mathbb{V}[\tilde{s}[0]] = \sigma^2(1/L - \epsilon)$$

La variance est donc, à ϵ près, divisée par le facteur de sous-échantillonnage L . De même, le coefficient de variation est, à ϵ près, divisé par \sqrt{L} . Ces propriétés sont donc analogues à celles du moyennage.

Comportement asymptotique des lois marginales : une généralisation du théorème central limite

On a vu que nos deux filtres passe-bas d'intérêt avaient le même effet sur les deux premiers moments du signal. On va voir qu'on peut généraliser très largement ce résultat.

On va pour cela démontrer le théorème suivant, qui peut se résumer comme suit : lorsqu'on fait tendre la fréquence de coupure d'un filtre passe-bas vers 0, les composantes d'un signal filtré à l'aide de ce passe-bas convergent en loi vers des gaussiennes.

Théorème 4.2.2

Soit $(x[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ un bruit blanc, c'est-à-dire que les variables aléatoires réelles (VAR) $x[n]$ sont i.i.d. On suppose leur variance commune σ^2 finie, et on note μ leur espérance commune, également finie.

Soit $(a_{n,k})_{k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*}$ une famille de noyaux de convolution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $s_n \in [0, +\infty]$ par :

$$s_n^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{n,k}^2$$

s_n^2 peut donc être vu comme la "variance" du noyau de convolution $(a_{n,k})_k$.

On fait les hypothèses suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{K \rightarrow +\infty} \sum_{k=-K}^K a_{n,k} = 1$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$;
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{k \in \mathbb{Z}} |a_{n,k}| = o(s_n)$ quand $n \rightarrow \infty$.

On définit alors $(z[n])_{n \in \mathbb{N}^*}$ comme la suite de VAR de terme général :

$$z[n] = \frac{\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{n,k} x[k] - \mu}{\sigma s_n}$$

$(z[n])_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien définie, puisqu'on a la convergence presque sûre de $\sum_k a_{n,k} x[k]$.

Alors :

$$z[n] \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

Interprétation des hypothèses

On peut faire des trois hypothèses du Théorème 4.2.2 l'interprétation suivante :

- La première hypothèse permet de maintenir la moyenne de la convoluée égale à celle des composantes du signal initial;
- La seconde hypothèse peut s'interpréter comme la convergence vers 0 de la fréquence de coupure de la suite des filtres. En effet, du fait de l'égalité de Parseval, s_n^2 peut aussi s'exprimer en fonction de la TFTD de $(a_{n,k})_k$, c'est-à-dire de la fonction de transfert du n -ième filtre :

$$s_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |A_n|^2(\omega) d\omega$$

On peut ainsi le voir comme la largeur spectrale du filtre associé à $(a_{n,k})_k$, ou encore définir à partir de s_n la fréquence de coupure du filtre ;

- La troisième hypothèse peut se voir comme une hypothèse d'étalement : on force la somme des $a_{n,k}$ à valoir 1, tout en interdisant aux $a_{n,k}$ individuellement d'être trop grands. Il faut donc que la masse soit bien répartie, ce qui est là encore une bonne propriété intuitive d'un passe-bas : si la masse est étalée spatialement, elle est concentrée fréquemment autour de 0.

Démonstration du théorème

Soient $(x[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ un signal infini et $(a_{n,k})_{k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*}$ une famille de noyaux de convolution vérifiant les hypothèses du théorème.

On va montrer que $(z[n])_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$ en utilisant une démonstration proche de la démonstration classique du théorème central limite.

On considère donc la VAR :

$$y[k] = \frac{x[k] - \mu}{\sigma}$$

où $k \in \mathbb{Z}$ est quelconque.

Cette VAR est centrée réduite. On peut donc développer, pour t au voisinage de 0, sa fonction caractéristique $\phi_{y[k]}$:

$$\phi_{y[k]}(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad (4.1)$$

Or $z[n]$ s'exprime comme :

$$\begin{aligned} z[n] &= \frac{\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{n,k} x[k] - \mu}{\sigma s_n} \\ &= \frac{\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{n,k} x[k] - \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{n,k} \mu}{\sigma s_n} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{a_{n,k}}{s_n} \frac{x[k] - \mu}{\sigma} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{a_{n,k}}{s_n} y[k] \end{aligned}$$

Dès lors, les propriétés algébriques des fonctions caractéristiques nous donnent :

$$\phi_{z[n]}(t) = \lim_{K \rightarrow +\infty} \prod_{k=-K}^K \phi_{y[k]} \left(\frac{a_{n,k}}{s_n} t \right) \quad (4.2)$$

Soit \ln une détermination du logarithme complexe continue autour de 1. On a :

$$\ln \phi_{z[n]}(t) = \lim_{K \rightarrow +\infty} \sum_{k=-K}^K \ln \phi_{y[k]} \left(\frac{a_{n,k}}{s_n} t \right)$$

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Par la troisième hypothèse du théorème, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n,k}}{s_n} = 0$. On peut donc développer $\ln \phi_{y[k]} \left(\frac{a_{n,k}}{s_n} t \right)$ lorsque $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \ln \phi_{y[k]} \left(\frac{a_{n,k}}{s_n} t \right) &= \ln \left[1 - \frac{a_{n,k}^2 t^2}{2s_n^2} + o \left(\frac{a_{n,k}^2 t^2}{s_n^2} \right) \right] \\ &= -\frac{a_{n,k}^2 t^2}{2s_n^2} + o \left(\frac{a_{n,k}^2 t^2}{s_n^2} \right) \end{aligned}$$

Sommons à présent sur k :

$$\begin{aligned}\ln \phi_{z[n]}(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{a_{n,k}^2 t^2}{2s_n^2} + o\left(\frac{a_{n,k}^2 t^2}{s_n^2}\right) \right] \\ &= \left[-\frac{t^2}{2} + o(1) \right] \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{a_{n,k}^2}{s_n^2} \\ &= -\frac{t^2}{2} + o(1) \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty\end{aligned}$$

Finalement :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{z[n]}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ est la fonction caractéristique d'une loi normale centrée réduite. On a donc convergence simple de la suite des fonctions caractéristique des $z[n]$ vers celle de $\mathcal{N}(0, 1)$. D'après le théorème de convergence de Lévy, cela implique la convergence en loi de $(z[n])$ vers $\mathcal{N}(0, 1)$, ce qui conclut la démonstration.

Application aux passe-bas courants du théorème central limite généralisé

Comme on va le voir, les hypothèses de notre théorème central limité généralisé s'appliquent très bien aux filtres qui nous intéressent.

Moyenleur glissant

Dans le cas du moyenleur, la famille de noyaux de convolution est donnée par :

$$a_{n,k} = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[1,n]}(k)$$

Dès lors :

1. D'une part :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{n,k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = 1$$

2. D'autre part :

$$\begin{aligned}s_n^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{n,k}^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{n}\end{aligned}$$

Donc $s_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$.

3. Enfin, comme $\max_{k \in \mathbb{Z}} a_{n,k} = \frac{1}{n}$ et $s_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, on a bien $\max_{k \in \mathbb{Z}} a_{n,k} = o(s_n)$.

Le moyenleur correspond en fait au cas traité par le théorème central limite classique.

Filtre passe-bas idéal

Dans le cas du passe-bas idéal, les coefficients $a_{n,k}$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} a_{n,k} &= \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{n}\right)}{\pi k} \\ &= \frac{1}{n} \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

On va s'appuyer sur le fait que la TFTD de $(a_{n,k})_k$ est donnée par la fonction porte de largeur $2\pi/n$, qu'on note A_n :

$$A_n(\omega) = \Pi\left(\frac{n\omega}{2\pi}\right)$$

1. Pour tout n , on a $A_n(0) = 1$. Ainsi :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{n,k} = 1$$

2. Calculons maintenant s_n pour $n \in \mathbb{Z}$. s_n est donnée par :

On a :

$$s_n^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi k}{n}\right)}{\pi^2 k^2}$$

On peut alors utiliser l'égalité de Parseval. Si z est un signal discret de TFTD Z , on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |z[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |Z(\omega)|^2 d\omega$$

En appliquant cette égalité à $(a_{n,k})_k$, on en déduit :

$$\begin{aligned} s_n^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |A(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Pi\left(\frac{n\omega}{2\pi}\right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbb{1}_{[-\pi/n, \pi/n]} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/n}^{\pi/n} d\omega \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

On a donc, comme pour le moyennneur, $s_n = 1/\sqrt{n}$ pour tout n .

3. Enfin, comme on a :

$$\max_{k \in \mathbb{Z}} |a_{n,k}| \leq \frac{1}{n}$$

on a bien, en particulier :

$$\max_{k \in \mathbb{Z}} |a_{n,k}| = o(s_n) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

Ainsi, pour les deux filtres passe-bas qui nous intéressent, le théorème central limite généralisé est vérifié. Autrement dit, lorsqu'on fait tendre leur largeur spectrale vers 0 — c'est-à-dire qu'ils deviennent de plus en plus efficaces — les échantillons du signal filtré tendent tous en loi vers des gaussiennes.

On a ainsi établi des résultats importants sur les effets du filtrage sur les statistiques du premier ordre (c'est-à-dire concernant les lois marginales des composantes du signal). D'abord, il s'est avéré que les deux méthodes de sous-échantillonnage étudiées (moyennage et *spectral cropping*) avaient le même effet sur les moyennes et les variances. Ensuite, notre généralisation du théorème central limite nous permet de dire qu'asymptotiquement, tous les filtres passe-bas ont des effets analogues sur les signaux.

Les différences entre les filtres sont donc sans doute plutôt à aller chercher du côté des statistiques du second ordre, qu'on va à présent étudier.

Statistiques du second ordre

On va à présent s'intéresser à l'effet du filtrage sur les statistiques du second ordre de notre signal, c'est-à-dire aux statistiques dépendant des lois jointes entre composantes, et en particulier l'autocorrélation.

Pour cette fois, on suppose notre signal s stationnaire au sens large, de moyenne nulle et de variance finie, mais pas qu'il s'agit de bruit blanc. On note R_s son autocorrélation, définie pour $\Delta n \in \mathbb{Z}$ par :

$$R_s[\Delta n] = \mathbb{E}[\mathbf{s}^*[n]\mathbf{s}[n + \Delta n]]$$

$R_s[\Delta n]$ ne dépend pas de n , par stationnarité de \mathbf{s} .

Soit par ailleurs $(a[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ un noyau de convolution de carré sommable. On note R_a son autocorrélation, définie pour $\Delta n \in \mathbb{Z}$ par :

$$R_a[\Delta n] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a^*[n]a[n + \Delta n]$$

On considère le signal filtré $\tilde{\mathbf{s}}$:

$$\tilde{\mathbf{s}}[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a[n - k]\mathbf{s}[k]$$

Calculons son autocorrélation. Soit $\Delta n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} R_{\tilde{\mathbf{s}}}[\Delta n] &= \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{s}}^*[n]\tilde{\mathbf{s}}[n + \Delta n]] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} a[n - k]\mathbf{s}^*[k] \sum_{l \in \mathbb{Z}} a^*[n + \Delta n - l]\mathbf{s}[l]\right] \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} a[n - k] a^*[n + \Delta n - l] \mathbb{E}[\mathbf{s}^*[k]\mathbf{s}[l]] \end{aligned}$$

En posant $m = l - k$:

$$\begin{aligned} R_{\tilde{\mathbf{s}}}[\Delta n] &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} a[n - (l - m)] a^*[n + \Delta n - l] \mathbb{E}[\mathbf{s}^*[0]\mathbf{s}[m]] \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} R_s[m] R_a[m - \Delta n] \end{aligned}$$

On obtient ainsi la corrélation entre les autocorrélations de \mathbf{s} et de a .

Or on sait qu'un noyau de convolution coupe d'autant mieux les hautes fréquences qu'il est étalé spatialement (idée formalisée par exemple par l'inégalité de Heisenberg). Son autocorrélation est alors également très étalée. La convolution transmet ensuite cette caractéristique au signal filtré. Or l'autocorrélation peut, dans certains cas, s'interpréter comme la résolution du signal : si les composantes en n et $n + \Delta n$ sont fortement corrélées, cela signifie qu'on ne peut résoudre pas deux points qui auraient dû apparaître en n et $n + \Delta n$. Cela formalise ainsi l'idée qu'un passe-bas diminue la résolution d'un signal.

Le cas extrême est obtenu si s est un bruit blanc : dans ce cas, son autocorrélation est proportionnelle à la fonction delta de Kronecker δ_0 . L'autocorrélation du signal filtré est alors simplement proportionnelle à celle de a . On a donc généré de la corrélation entre des composantes d'un signal qui en étaient dépourvues.

Le speckle fournit un exemple de ce dernier cas : le modèle classique de Goodman revient à supposer qu'immédiatement après sa sortie du milieu imagé, le champ d'amplitude se comporte comme un bruit blanc. Ensuite, c'est l'optique qui va lui donner sa corrélation, en général dérivée du sinus cardinal ou de la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 1, et donc son apparence de grains.

Quoi qu'il en soit, on peut mettre ces constats en regard de ceux effectués sur les statistiques du premier ordre. Dans une perspective de réduction de bruit par exemple, il y a un compromis à trouver entre réduction de la variance (donc action sur les statistiques du premier ordre) et perte de résolution. On peut au passage noter que cette situation se présente parce qu'on ne considère que des filtres linéaires : le problème ne se présenterait pas de la même façon avec un filtre médian par exemple.

4.2.3 Sur-échantillonnage

On va à présent s'intéresser à l'effet sur des signaux aléatoires de nos deux méthodes de sur-échantillonnage.

Sur-échantillonnage par interpolation linéaire

On note toujours s notre signal discret d'origine, et va étudier le comportement du sur-échantillonnage de s par interpolation linéaire.

Plutôt qu'une valeur du signal sur-échantillonné, on va en fait directement considérer une valeur de l'interpolée. Soit donc $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Si on pose $\lambda = x - \lfloor x \rfloor$, $X_1 = s[\lfloor x \rfloor]$ et $X_2 = s[\lceil x \rceil]$, l'interpolée en x , notée Y , est donnée par :

$$Y = (1 - \lambda)X_1 + \lambda X_2$$

Espérance

Par linéarité, l'espérance de Y est obtenu par moyennage pondéré de X_1 et X_2 , de poids respectifs $1 - \lambda$ et λ . Si X_1 et X_2 ont la même moyenne, celle-ci est donc conservée :

$$\mathbb{E}(Y) = \mu \quad (4.3)$$

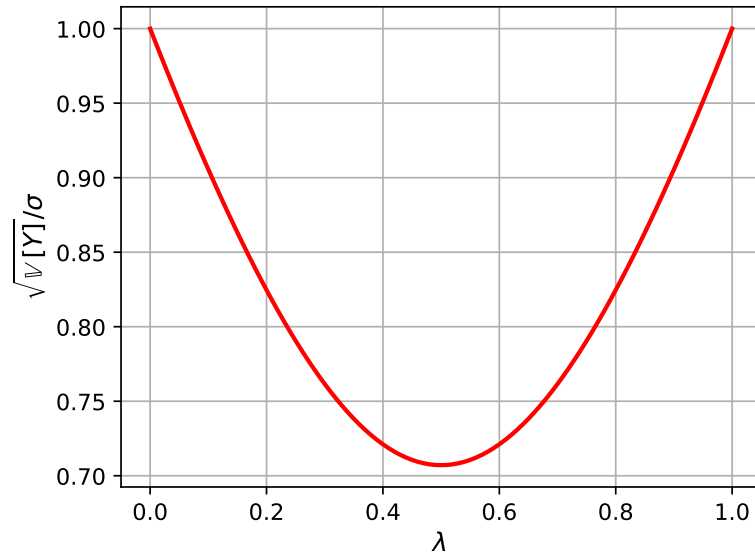
Variance

On a :

$$\mathbb{V}(Y) = (1 - \lambda)^2 \mathbb{V}(X_1) + \lambda^2 \mathbb{V}(X_2)$$

$$\mathbb{V}(Y) = \left[(1 - \lambda)^2 + \lambda^2 \right] \sigma^2 \quad (4.4)$$

Alors que la variance était supposée identique en tout point pour le signal discret d'origine, **elle n'est plus uniforme pour le signal interpolé**. Elle est maximale pour $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$ (où Y coïncide

FIGURE 4.5 – Écart-type de la distribution sur-échantillonnée linéairement en fonction de λ

avec X_1 ou X_2), et vaut alors σ^2 . Au contraire, elle est minimale pour $\lambda = \frac{1}{2}$ (où on est à mi-chemin entre X_1 et X_2), et vaut alors $\frac{\sigma^2}{2}$. Ce point peut avoir des conséquences critiques sur un signal réel, dont on ne souhaite pas forcément modifier la variance en le sur-échantillonnant.

L'évolution de l'écart type en fonction de λ est affichée Figure 4.5.

Corrélation entre composantes

Intéressons-nous à présent aux statistiques du second ordre induites par l'interpolation linéaire. En particulier, on va s'intéresser à deux valeurs Y_1 et Y_2 de l'interpolée, correspondant respectivement aux points x_1 et x_2 .

- Si $|x_2 - x_1| > 1$, les valeurs du signal discret influençant Y_1 et Y_2 sont disjointes. Comme le signal discret est un bruit blanc, la corrélation est nulle.
- S'ils sont séparés par un seul échantillon du signal d'origine, on peut les écrire :

$$Y_1 = (1 - \lambda_1)X_0 + \lambda_1 X_1$$

$$Y_2 = (1 - \lambda_2)X_1 + \lambda_2 X_2$$

Leur covariance vaut alors :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_1, Y_2) &= \lambda_1(1 - \lambda_2) \\ &= (1 - \delta_1)(1 - \delta_2) \end{aligned}$$

où δ_i est l'écart de Y_i au pixel commun.

Leur corrélation est donnée par :

$$\text{Cor}(Y_1, Y_2) = \frac{\lambda_1(1 - \lambda_2)}{\sqrt{(1 - \lambda_1)^2 + \lambda_1^2} \sqrt{(1 - \lambda_2)^2 + \lambda_2^2}}$$

- S'ils sont situés entre les deux mêmes échantillons X_1 et X_2 du signal d'origine, on a :

$$\begin{aligned} Y_1 &= (1 - \lambda_1)X_1 + \lambda_1 X_2 \\ Y_2 &= (1 - \lambda_2)X_1 + \lambda_2 X_2 \end{aligned}$$

Leur covariance vaut alors :

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) + \lambda_1 \lambda_2$$

Et leur corrélation linéaire vaut :

$$\text{Cor}(Y_1, Y_2) = \frac{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) + \lambda_1 \lambda_2}{\sqrt{(1 - \lambda_1)^2 + \lambda_1^2} \sqrt{(1 - \lambda_2)^2 + \lambda_2^2}}$$

On peut remarquer que cette corrélation ne peut pas s'exprimer seulement en fonction de $\lambda_2 - \lambda_1$: **contrairement au signal d'origine, le signal interpolé n'est donc pas stationnaire.**

Sur-échantillonnage par *zero-padding*

Comme en linéaire, on considère là encore l'interpolée de manière générale plutôt que le signal sous-échantillonné. Celle-ci est donnée par :

$$\tilde{s}(x) = \sum_{n=0}^{N-1} s[n] \cdot v(x - n)$$

où v est défini par :

$$v(x) = 2\pi \text{sinc}(x)$$

On considère donc la variable aléatoire $\tilde{s}(x)$, qui est une combinaison linéaire des valeurs du signal aléatoire discret $(s[n])_n$.

Espérance

Commençons par étudier l'effet du filtrage passe-bas idéal sur l'espérance. Pour l'échantillon du signal interpolé situé en $x \in \mathbb{R}$, celle-ci est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{s}(x)] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}[s[n]] \cdot v(x - n) \\ &= \mu \sum_{n=0}^{N-1} v(x - n) \end{aligned}$$

Or la TFTD de $(v(x - n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est $\omega \mapsto e^{-\omega x} Y(\omega)$, où Y est la transformée de Fourier de v , c'est-à-dire la fonction porte de largeur 2π .

Ainsi, $\sum_{n=0}^{N-1} v(x - n) = \Pi(0) = 1$, et $\mathbb{E}[\tilde{s}(x)] = \mu$. Comme avec l'interpolation linéaire, l'espérance est donc conservée.

Variance

Intéressons-nous à présent à la variance du signal interpolé. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}[\tilde{s}(x)] &= \mathbb{V}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s[n] \cdot v(x-n)\right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbb{V}[s[n]] \cdot v^2(x-n) \\ &= \sigma^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v^2(x-n)\end{aligned}$$

On peut alors s'appuyer sur l'égalité de Parseval :

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} v^2(x-n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |Y(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Pi^2(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Pi(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\omega \\ &= 1\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{V}[\tilde{s}(x)] = \sigma^2$: **la variance est conservée par l'interpolation de Shannon**. Ce résultat est important : il signifie que l'interpolation de Shannon maintient une forme d'homogénéité dans le signal, contrairement à l'interpolation linéaire.

Corrélation entre composantes du signal interpolé

On va à présent s'intéresser à la corrélation entre deux composantes du signal interpolé. Soient donc x_1 et x_2 deux réels. La covariance entre $\tilde{s}(x_1)$ et $\tilde{s}(x_2)$ est donnée par :

$$\text{Cov}(\tilde{s}(x_1), \tilde{s}(x_2)) = \text{Cov}\left(\sum_{n=0}^{N-1} s[n]v(x_1-n), \sum_{n=0}^{N-1} s[n]v(x_2-n)\right)$$

Par bilinéarité de la covariance et indépendance des $s[n]$, on a :

$$\text{Cov}(\tilde{s}(x_1), \tilde{s}(x_2)) = \sigma^2 \sum_{n=0}^{N-1} v(x_1-n)v(x_2-n)$$

On va calculer la somme à l'aide du théorème de Plancherel. Celui-ci énonce que si s_1 et s_2 sont deux signaux discrets de carré sommable, de TFTDs respectives S_1 et S_2 , on a :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_1[n]s_2^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_1(\omega) S_2^*(\omega) d\omega$$

L'égalité de Parseval correspond au cas particulier $s_1 = s_2$.

Appliqué aux deux signaux $(v(x_1-n))_n$ et $(v(x_2-n))_n$, le théorème de Plancherel donne :

$$\sum_{n=0}^{N-1} v(x_1 - n)v(x_2 - n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\omega x_1} Y(\omega) e^{\omega x_2} Y(\omega) d\omega \quad (4.5)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\omega(x_2 - x_1)} Y^2(\omega) d\omega \quad (4.6)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\omega(x_2 - x_1)} Y(\omega) d\omega \quad (4.7)$$

$$(4.8)$$

Or cette formule est précisément la transformée de Fourier inverse de Y , évaluée en $x_2 - x_1$, c'est-à-dire $v(x_2 - x_1)$. On a donc :

$$\text{Cov}(\tilde{s}(x_1), \tilde{s}(x_2)) = \sigma^2 v(x_2 - x_1)$$

Ainsi, la covariance entre $\tilde{s}(x_1)$ et $\tilde{s}(x_2)$ n'est fonction que de $x_2 - x_1$: contrairement à l'interpolation linéaire, **l'interpolation de Shannon ne remet pas en cause la stationnarité du signal interpolé**². C'est un résultat important, d'autant que je n'ai jamais rencontré de mise en avant de cette propriété comme signature de la "qualité" d'un interpolateur. Il convient donc d'avoir en tête qu'un interpolateur trop simple peut casser la stationnarité d'un signal, ce qui peut avoir des conséquences importantes sur les traitements ultérieurs, et qu'on peut échapper à ce problème à l'aide de l'interpolation de Shannon. Il serait intéressant de voir comment se comportent à cet égard des interpolateurs intermédiaires, comme les splines. L'interpolation de Shannon reste en effet lourde et contraignante à utiliser en pratique.

4.3 Statistiques en intensité : lois Gamma

On a pu établir dans la section précédente des résultats très généraux concernant l'effet du filtrage et de l'interpolation sur les signaux aléatoires. On va à présent resserrer notre champ d'étude et s'intéresser à une famille de lois importante pour la modélisation du speckle : les lois Gamma.

On dit que la variable aléatoire réelle X suit une loi Gamma de paramètres θ et k , et on note $X \sim \Gamma[\theta, k]$, si X a pour densité de probabilité la fonction $p_{\theta, k}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$p_{\theta, k}(x) = \frac{x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(k) \theta^k}$$

k est alors appelé *paramètre de forme* de la loi, tandis que θ est son *paramètre d'échelle*. L'espérance de X est alors donnée par $k\theta$, et son écart-type par $\sqrt{k}\theta$.

Une première propriété notable des lois Gamma est que, pour $\lambda > 0$, λX suit une loi Gamma de paramètres $[\lambda\theta, k]$. Par ailleurs, un autre résultat important est donné par le théorème suivant :

Théorème 4.3.1

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et soient X_1, \dots, X_N des VAR de loi Gamma de même paramètre d'échelle θ et de paramètres de forme respectifs k_1, \dots, k_N .

Soit Y la somme des X_i :

$$Y = \sum_{i=1}^N X_i$$

Alors : Y suit une loi Gamma de paramètre de forme $\sum_i k_i$ et de paramètre d'échelle θ .

²On n'a fait la démonstration que dans le cas où le signal est un bruit blanc, mais pour un signal stationnaire quelconque, elle n'est pas beaucoup plus compliquée. Dans ce cas, la covariance du signal interpolée s'obtient à l'aide d'une convolution mixte entre la corrélation du signal discret et le noyau d'interpolation.

Ce théorème peut par exemple se démontrer à l'aide des fonctions caractéristiques des X_i . Un cas particulier important intervient quand les X_i sont *i.i.d.*, donc de même paramètre de forme k . Dans ce cas, Y a pour paramètre de forme Nk .

On va supposer pour toute la suite que les échantillons du signal d'origine s suivent des lois Gamma *i.i.d.*, de même paramètre de forme 1 et de paramètre d'échelle θ (ici égal à l'espérance).

4.3.1 Sous-échantillonnage

Sous-échantillonnage par moyennage

Comme on l'a dit, notre signal s est désormais un vecteur aléatoire dont les composantes sont des variables aléatoires réelles *i.i.d.*, suivant la même loi $\Gamma[1, 1]$. On commence par s'intéresser au signal \hat{s} obtenu en sous-échantillonnant s par moyennage avec un facteur $L = N/M$.

Si $m \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket$, $\hat{s}[m]$ s'exprime comme une combinaison linéaire de valeurs de s :

$$\hat{s}[m] = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} s[n_i]$$

Comme les $s[n_i]$ sont *i.i.d.* et suivent des lois Gamma de paramètres $(\theta, 1)$, on peut appliquer le Théorème 4.3.1. $\sum_{i=0}^{L-1} s[n_i]$ suit alors une loi Gamma de paramètres (θ, L) , et finalement :

$$\hat{s}[m] \sim \Gamma[\theta/L, L]$$

On retrouve en particulier les résultats obtenus en Section 4.2.2, à savoir que l'espérance est conservée et que l'écart-type est divisé par \sqrt{L} . Ce résultat est bien connu des radaristes, qui appellent L le "nombre de vues équivalent".

Sous-échantillonnage par *spectral cropping*

On suppose à présent que \hat{s} est obtenu en sous-échantillonnant s par *spectral cropping*, c'est-à-dire par décimation du signal \hat{S} obtenu en filtrant s à l'aide d'un passe-bas idéal. Un échantillon de \hat{s} s'exprime alors sous la forme :

$$\hat{s}[m] = \sum_{n=0}^{N-1} s[n_i] \cdot \tau[n]$$

où τ est le noyau de convolution du passe-bas idéal de largeur $M = N/L$, M étant la largeur du signal après sous-échantillonnage et L le facteur de sous-échantillonnage. Par ailleurs, selon nos hypothèses, les $s[n_i]$ suivent tous la même loi.

Densité de la distribution sous-échantillonnée

On a vu que l'effet du sous-échantillonnage par moyennage sur la distribution des échantillons était particulièrement simple, puisqu'on reste dans la famille des lois Gamma. Ici, les choses sont plus compliquées, car on ne peut pas appliquer directement le Théorème 4.3.1. Il est néanmoins possible de calculer la densité du signal sous-échantillonné par *spectral cropping*, et cela ne pose pas de difficultés majeures. Néanmoins, les calculs, détaillés Section A.2 en annexe, sont assez fastidieux. Ici, on se contentera d'énoncer les résultats :

- Si le facteur de sous-échantillonnage L est impair, la densité de la loi sous-échantillonnée est donnée par :

$$g = \sum_{k=1}^K h_{\beta_k, x} (\lambda_k x + \mu_k) e^{-\frac{x}{\beta_k}} + h_{L, x} v e^{-Lx} \quad (4.9)$$

où :

$$\begin{aligned}
 h_{\tau,x} &= \mathbb{1}_{\tau x \geq 0} \\
 \lambda_k &= - \left[\prod_{i \neq k} \frac{1}{\left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_k}\right)^2} \right] \cdot \frac{L}{\beta_k(1 - L\beta_k)} \\
 \mu_k &= - \left[\prod_{i \neq k} \frac{1}{\left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_k}\right)^2} \cdot \frac{L}{1 - L\beta_k} \right] \cdot \left[\frac{1}{1 - L\beta_k} + 2 \sum_{i \neq k} \frac{1}{1 - \frac{\beta_k}{\beta_i}} \right] \\
 \nu &= \sum_j \left[\prod_{i \neq j} \frac{1}{\left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_j}\right)^2} \right] \cdot \frac{L}{1 - L\beta_j} \cdot \left[\frac{1}{1 - L\beta_j} + 2 \sum_{i \neq j} \frac{1}{1 - \frac{\beta_j}{\beta_i}} \right]
 \end{aligned}$$

- Si L est pair, elle est donnée par :

$$g(x) = \sum_{k=1}^K h_{\beta_k, x} (\lambda'_k x + \mu'_k) e^{-\frac{x}{\beta_k}} + h_{L,x} \nu' e^{-fx} + h_{\alpha,x} \eta e^{-\frac{x}{\alpha}} \quad (4.10)$$

où :

$$\begin{aligned}
 \lambda'_k &= \left[\prod_{i \neq k} \frac{1}{\left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_k}\right)^2} \right] \cdot \frac{L}{1 - L\beta_k} \cdot \frac{1}{\alpha - \beta_k} \\
 \mu'_k &= \prod_{i \neq k} \frac{1}{\left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_k}\right)^2} \cdot \frac{L}{1 - L\beta_k} \cdot \frac{1}{\alpha - \beta_k} \cdot \left[\frac{\beta_k}{1 - L\beta_k} + \frac{\alpha\beta_k}{\alpha - \beta_k} + 2 \sum_{i \neq k} \frac{\beta_k}{1 - \frac{\beta_k}{\beta_i}} \right] \\
 \nu' &= \sum_j \left[\prod_{i \neq j} \frac{1}{\left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_j}\right)^2} \right] \cdot \frac{L}{1 - L\beta_j} \cdot \left[\frac{1}{1 - L\beta_j} + 2 \sum_{i \neq j} \frac{1}{1 - \frac{\beta_j}{\beta_i}} \right] \cdot \frac{1}{L\alpha - 1} \\
 \eta &= - \sum_j \left[\prod_{i \neq j} \frac{1}{\left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_j}\right)^2} \right] \cdot \frac{L}{\alpha\beta_j(1 - L\beta_j)} \cdot \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{\beta_j} - \frac{1}{\alpha}\right)^2} + \left(\frac{1}{\frac{1}{\beta_j} - \frac{1}{\alpha}} - \frac{1}{L - \frac{1}{\alpha}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{\beta_j} - L} + 2 \sum_{i \neq j} \frac{1}{\frac{1}{\beta_j} - \frac{1}{\beta_i}} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Des exemples de graphes de ces densités superposés aux histogrammes sont reproduits Fig. 4.6.

Quelques graphes

Les formules brutes suffisant difficilement à donner une intuition claire, on va s'efforcer d'étudier l'évolution visuelle du graphe de la densité.

Avant toute chose, il convient de dire qu'il n'est possible d'obtenir un graphe de la densité "apparemment correct" que pour une plage restreinte de valeurs de N et L . Dès que l'un ou l'autre devient trop grand, les valeurs obtenues deviennent aberrantes, sans doute parce que certains des coefficients deviennent trop grands ou trop petits, faisant se heurter les calculs aux limites des représentations numériques. Même en quadruple précision (128 bits par flottant), les problèmes demeurent. Ceci étant dit, on arrive quand même à dire des choses en se limitant à l'ensemble des paramètres pour lesquels tout se passe bien.

Évolution de la loi avec N et L

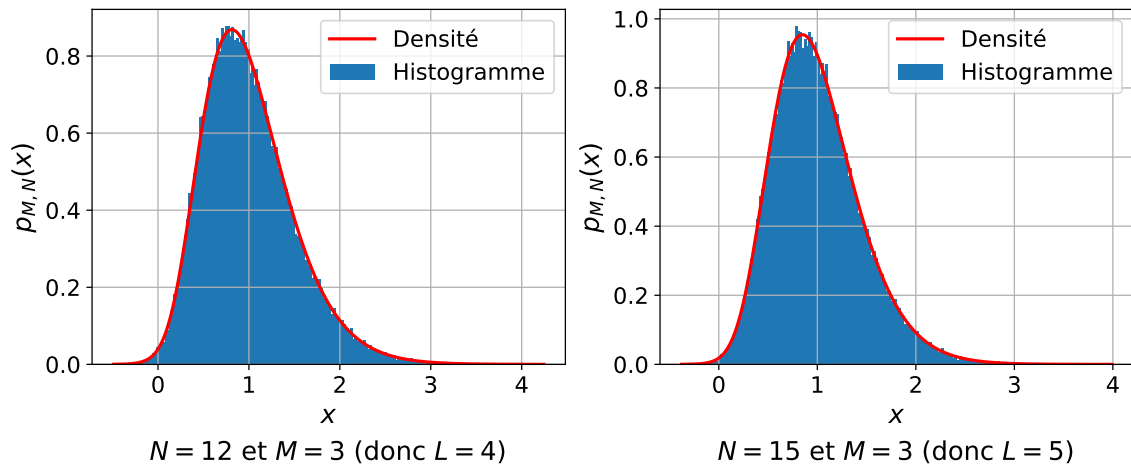


FIGURE 4.6 – Superposition de l’histogramme et de la densité pour deux valeurs différentes de L . Les histogrammes sont obtenus en tirant 30.000 signaux avec les paramètres indiqués.

Évolution lorsque N varie à L constant

La distribution varie très peu lorsqu’on fait varier N à L constant, comme on peut le constater Figure 4.7.

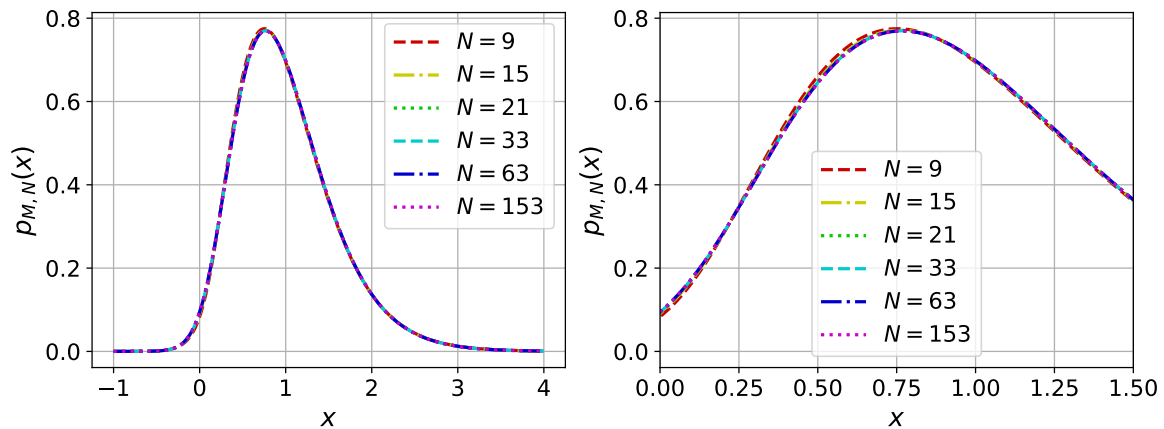


FIGURE 4.7 – Évolution du graphe de la distribution lorsque N varie à L constant

Comme démontré en A.3, on a en fait convergence en loi de la suite des distributions lorsque $N \rightarrow \infty$. Ces quelques graphes tendent à illustrer que cette convergence est très rapide.

Ce résultat est assez intuitif et rassurant : on s’attend à ce que les propriétés du signal sous-échantillonné ne dépende que du facteur de sous-échantillonnage, pas de la taille du signal.

Évolution lorsque L varie

Les choses sont plus intéressantes en faisant varier L . En effet, comme on l’a déjà vu, le coefficient de variation varie comme $\frac{1}{\sqrt{L}}$. On s’attend donc à voir les distributions s’affiner comme en loi Gamma.

Ainsi, la Figure 4.8 présente l’allure des distributions pour quelques valeurs de L , ainsi que les lois Gamma équivalentes, c’est-à-dire à chaque fois $\Gamma[1/L, L]$.

On constate que la distribution s’affine lorsque L augmente. On peut par ailleurs faire les quelques remarques suivantes :

- Contrairement à la loi Gamma, la distribution sous-échantillonnée autorise les valeurs négatives. Pour les premiers facteurs de sous-échantillonnage, la masse en-dessous de 0 est significative et la distribution se distingue de la loi Gamma équivalente par une vraie queue de distribution à gauche. La masse négative devient cependant négligeable dès $L = 6$ ou 7.

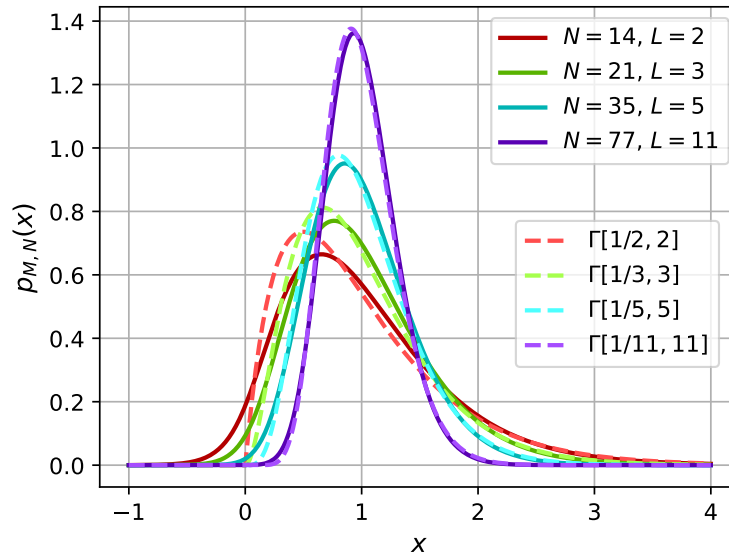


FIGURE 4.8 – Comparaison de quelques distributions sous-échantillonnées (trait plein) aux distributions Gamma de mêmes moyenne et écart-type (pointillés)

- À l'inverse, là où se trouve le gros de la distribution, la densité sous-échantillonnée tend à être décalée vers la droite par rapport à la loi Gamma équivalente. En particulier, son mode est plus élevé.
- Les queues de distributions à droite, en revanche, sont très similaires.
- Remarquons pour finir que les distributions sont beaucoup plus proches pour L grand que pour L petit. En effet, par le théorème central limite, la loi Gamma ressemble de plus en plus à une loi normale lorsque son paramètre de forme devient grand ; de même, par le théorème central limite généralisé (voir Section 4.2.2), il en va de même pour la distribution sous-échantillonnée, lorsque L devient grand.

Convergence

Lorsque $N \rightarrow \infty$ à L constant, on a **convergence en loi de la suite des distributions vers une distribution limite**, et donc disparition progressive de la dépendance en N , ce qui est assez intuitif. Ce résultat est démontré Section A.3.

Par ailleurs, lorsque $L \rightarrow \infty$, on est dans les hypothèses du théorème central limite généralisé (voir Section 4.2.2). À une transformation affine près, la distribution converge donc vers une loi normale.

4.3.2 Sur-échantillonnage

On va à présent s'intéresser au sur-échantillonnage, à travers nos deux interpolateurs habituels : l'interpolateur linéaire et l'interpolateur de Shannon.

Sur-échantillonnage par interpolation linéaire

Densité

On reprend les notations de la Section 4.2.3 : X_1 et X_2 sont deux échantillons voisins du signal, et $Y = (1 - \lambda)X_1 + \lambda X_2$ est une valeur interpolée entre X_1 et X_2 .

Les VAR $(1 - \lambda)X_1$ et λX_2 suivent des lois exponentielles de moyennes respectives $1 - \lambda$ et λ . La densité de Y est donnée par la convolution de leurs densités :

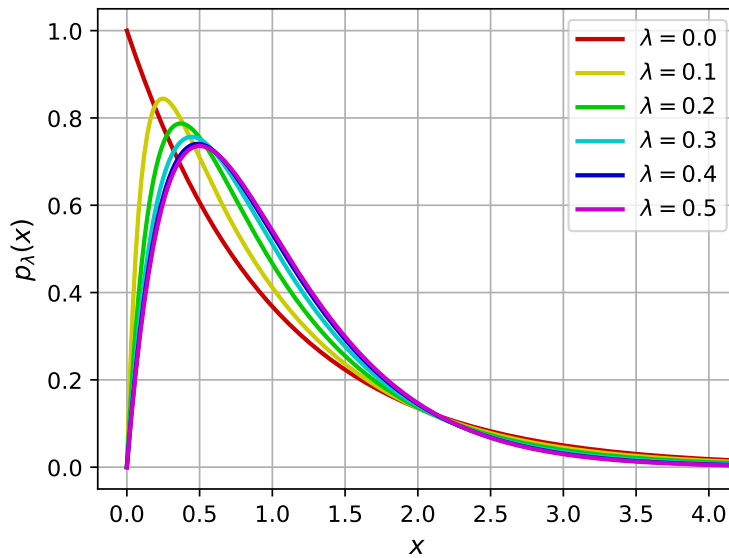


FIGURE 4.9 – Distribution d'un échantillon du signal interpolé linéairement pour différentes valeurs de λ

$$\begin{aligned}
 p(y) &= g_1 * g_2 \\
 &= \int_0^y g_1(t) g_2(y-t) dt \\
 &= \int_0^y \frac{1}{1-\lambda} e^{-\frac{t}{1-\lambda}} \cdot \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{y-t}{\lambda}} dt \\
 &= \frac{1}{\lambda(1-\lambda)} e^{-\frac{y}{\lambda}} \int_0^y e^{\frac{t}{\lambda} - \frac{t}{1-\lambda}} dt
 \end{aligned}$$

Dès lors :

- Soit $\lambda = \frac{1}{2}$: on est à mi-chemin entre les deux points, qui contribuent équitablement. On obtient alors une loi $\Gamma[1, 2]$.
- Soit $\lambda \neq \frac{1}{2}$ et on doit continuer les calculs :

$$\begin{aligned}
 p(y) &= \frac{1}{\lambda(1-\lambda)} e^{-\frac{y}{\lambda}} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{1-\lambda}} \right) \left[e^{\frac{t}{\lambda} - \frac{t}{1-\lambda}} \right]_{t=0}^{t=y} \\
 &= \frac{1}{1-2\lambda} e^{-\frac{y}{\lambda}} \left[e^{\frac{y}{\lambda} - \frac{y}{1-\lambda}} - 1 \right]
 \end{aligned}$$

$$\boxed{p(y) = \frac{1}{1-2\lambda} \left[e^{-\frac{y}{1-\lambda}} - e^{-\frac{y}{\lambda}} \right]} \quad (4.11)$$

On obtient ainsi une distribution intermédiaire entre les lois $\Gamma[1, 1]$ et $\Gamma[1, 2]$ — qui n'est cependant pas une loi Gamma de paramètre de forme compris entre 1 et 2. Des exemples obtenus avec diverses valeurs de λ sont reproduits Figure 4.9.

4.4 Statistiques en complexes

On va à présent s'intéresser à l'effet sur les statistiques du speckle des opérations de rééchantillonnage appliquées directement au signal complexe.

On rappelle que, selon les hypothèses du speckle pleinement développé de Goodman, les parties réelle et imaginaire du speckle complexe sont supposées être des VAR gaussiennes indépendantes, toutes deux de moyenne nulle et d'écart-type σ . Le module carré du complexe obtenu suit alors une loi $\Gamma[\sqrt{2}\sigma, 1]$, et son module suit une loi de Rayleigh de paramètre σ .

Avant même de commencer, et au vu des enseignements de la partie précédente, on peut déjà s'attendre à des résultats orientés de façon sensiblement différente. En effet, comme on a pu le voir, la plupart des méthodes étudiées de rééchantillonnage sont des opérations *linéaires*, et chaque composante du signal rééchantillonné est alors une *combinaison linéaire* (à coefficients réels) du signal obtenu.

Or, une combinaison linéaire de Gaussiennes est une Gaussienne, selon la formule :

$$\sum_i \alpha_i X_i \sim \mathcal{N} \left(\sum_i \alpha_i \mu_i, \sum_i \alpha_i^2 \sigma_i^2 \right)$$

En particulier, une combinaison linéaire de Gaussiennes de moyenne nulle est nulle, et si l'on applique la même opération linéaire à nos parties réelle et imaginaire, on obtiendra la même variance.

Donc, sauf opération exotique, on n'obtiendra jamais en repassant en intensité que des lois Gamma de paramètre de forme 1. En revanche, contrairement à ce qu'il se passait lorsqu'on filtrait directement les lois Gamma, les traitements risquent de modifier la moyenne de l'intensité.

4.4.1 Propriétés des variables aléatoires complexes

Jusqu'ici, on a manipulé des variables aléatoires réelles. À présent, elles sont complexes. Les notions qu'on va leur appliquer sont des prolongements naturels de leur version réelle, mais pour plus de clarté, on va quand même les redéfinir précisément. Soit donc $Z = X + iY$ une variable aléatoire complexe, X et Y étant des variables aléatoires réelles.

- Par linéarité, l'espérance de Z est donnée par :

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X] + i\mathbb{E}[Y]$$

La linéarité de l'espérance se prolonge ainsi naturellement aux complexes.

- La variance de Z est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[Z] &= \mathbb{E} \left[|Z - \mathbb{E}[Z]|^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[|Z|^2 \right] - |\mathbb{E}[Z]|^2 \end{aligned}$$

Et, si Z_1 et Z_2 sont deux variables aléatoires complexes indépendantes, on a :

$$\mathbb{V}[Z_1 + Z_2] = \mathbb{V}[Z_1] + \mathbb{V}[Z_2]$$

4.4.2 Sous-échantillonnage

On a montré précédemment que les méthodes de sous-échantillonnage étudiées avaient pour effet, dans le cas réel, de maintenir l'espérance et de diviser la variance par le facteur de sous-échantillonnage L .

Les propriétés élémentaires de l'espérance et de la variance en complexes permettent de montrer aisément que ces propriétés sont maintenues. Ainsi, les composantes du signal sous-échantillonnées ont une moyenne maintenue à 0, et une variance de $\frac{2\sigma^2}{L}$.

Comme le sous-échantillonnage correspond par ailleurs à une combinaison linéaire des composantes du signal original, le signal sous-échantillonné a toujours des composantes gaussiennes, entièrement caractérisées par leur espérance et leur variance.

L'intensité suit donc finalement une distribution $\Gamma\left[\frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{L}}, 1\right]$, soit $\Gamma\left[\frac{\theta}{\sqrt{L}}, 1\right]$ si on pose $\theta = \sqrt{2}\sigma$ l'intensité moyenne du signal d'origine. On n'a donc pas changé la loi, qui reste une exponentielle, mais le sous-échantillonnage a pour effet d'atténuer uniformément le signal d'intensité ou d'amplitude.

4.4.3 Sur-échantillonnage

Interpolation linéaire

On suppose à présent qu'on interpole notre signal complexe à l'aide de l'interpolation linéaire. Sa moyenne reste bien sûr nulle en tout point. En revanche, pour ce qui est de sa variance, quelques calculs élémentaires permettent de montrer que :

$$\mathbb{V}(Y) = \left[(1 - \lambda)^2 + \lambda^2 \right] \sigma^2 \quad (4.12)$$

Donc l'intensité obtenue a pour moyenne :

$$\mathbb{E}(I) = \sqrt{2 \left[(1 - \lambda)^2 + \lambda^2 \right]} \sigma$$

Le graphe de cette fonction de λ , à un facteur près, est celui de la Figure 4.5. On a donc un phénomène d'atténuation du signal d'autant plus marqué qu'on est loin des points du signal d'origine.

Ce phénomène un peu étrange est en fait le pendant statistique d'un phénomène géométrique assez simple. Supposons que deux échantillons voisins du signal aient la même intensité, mais des phases différentes. Si on place leurs valeurs dans le plan complexe, elles se situeront sur le même cercle centré en 0. L'image de l'interpolée entre ces deux points est le segment qui les sépare, et qui passe à l'intérieur du cercle : tous ses points sont donc d'intensité inférieure à celle des deux échantillons d'origine. Le cas extrême est obtenu lorsque les deux points sont de phase opposée : leur interpolée passe alors par 0, ce qui veut dire qu'on a une extinction complète entre deux points d'intensité non nulle.

Interpolation bilinéaire et vortex

Pour ce paragraphe, on va exceptionnellement s'intéresser aux signaux à deux dimensions. On considère donc une image de taille $N_x \times N_y$ à valeurs complexes.

On a évoqué en Section 1.2.2 la notion de *vortex*, c'est-à-dire de zéro du signal, au sein d'un champ complexe à deux dimensions, continu ou discret. En particulier, on a donné une formule permettant de déterminer si un carré de côté 1 reliant quatre pixels d'une image complexe contient un vortex. Il suffit pour cela de déterminer si son indice est non nul, l'indice étant défini par :

$$n = \frac{1}{2\pi} [\Delta\varphi_{1,2} + \Delta\varphi_{2,3} + \Delta\varphi_{3,4} + \Delta\varphi_{4,1}] \quad (4.13)$$

où $\Delta\varphi_{i,j}$ est l'unique détermination dans $]-\pi, \pi]$ de l'argument de $z_j - z_i$, z_i étant la valeur du pixel i et les pixels étant énumérés dans le sens direct.

Cette formule semble être la discrétisation naturelle de la formule continue (1.5). Elle repose cependant sur des choix qui ne sont pas anodins. On va en effet montrer qu'elle correspond à l'application de (1.5) avec un lacet bien particulier appliqué à un signal continu précis.

Notons d'abord qu'en remplaçant à chaque fois $\Delta\varphi_{i,j}$ entre $-\pi$ et π , on choisit implicitement la variation *minimale* d'argument (en valeur absolue) entre les deux points z_i et z_j . Cela revient de fait à

mesurer cette variation le long d'un arc de longueur minimale entre z_i et z_j . Or, un tel arc est unique : c'est le segment qui les relie. Implicitement, l'image de notre lacet virtuel est donc un quadrilatère, reliant les valeurs des quatre pixels dans le plan complexe.

Ainsi, le signal continu pour lequel on applique implicitement (1.5) envoie notre lacet dans l'image sur un quadrilatère dans le plan complexe. Il reste à savoir quelle forme a ce lacet dans l'image. Il n'y a pas de vérité mathématique à ce propos, mais il est naturel de considérer que le lacet de l'image a la forme d'un carré qui relie les quatre pixels. Autrement dit, il est implicite que notre lacet de départ γ parcourt des segments, et que son image Γ parcourt également des segments. Notre signal continu envoie donc des segments sur des segments. Or c'est précisément ce que fait **l'interpolée bilinéaire du signal discret**.

Ainsi, la formule (4.13) de détection des vortex dans une image complexe l'interpole implicitement à l'aide de l'interpolation bilinéaire. On pourrait tout à fait changer ce choix d'interpolation, mais il faudrait alors revoir la règle de choix du représentant de $\arg(z_j - z_i)$.

À notre connaissance, cette interprétation n'apparaît pas dans la littérature. Comme pour d'autres opérations, il paraît pourtant important d'avoir conscience de ce qu'implique pour le signal d'appliquer telle ou telle méthode de détection des vortex.

Dans un registre un peu différent, mais plus proche du reste des considérations de ce chapitre, il est possible de calculer le taux de vortex moyen d'une image complexe dont toutes les valeurs sont *i.i.d.* et de phase uniforme. Ce résultat, ainsi que sa démonstration, se trouvent en Annexe, Section B.

Sur-échantillonnage par zero-padding

Intéressons-nous à présent à l'interpolation de Shannon d'un signal complexe. On sait que l'interpolation de Shannon n'affecte ni la moyenne, ni la variance du signal.

Comme, ici, on a affaire à des Gaussiennes, c'est toute la distribution qui reste inchangée. Les parties réelle et imaginaire sont toujours des Gaussiennes de même moyenne et écart-type, et l'intensité est toujours une loi Gamma de forme 1.

Les effets "géométriques" de l'interpolation de Shannon sont beaucoup plus difficile à appréhender qu'en linéaire. Néanmoins, quelques cas simples peuvent donner une intuition. Par exemple, reprenons le cas évoqué précédemment où on a deux points de même module et de phase opposée. Si le signal n'est composé que de ces deux points, il est périodisé comme le cercle de centre 0 passant par les deux points. L'intensité de l'interpolée, en particulier, reste constante : les chemins pris par l'interpolée sont donc beaucoup moins simples qu'en linéaire, mais les effets sur l'intensité sont plus naturels.

Conclusion

Ce chapitre nous a permis de mettre en regard les effets statistiques des méthodes de sous-échantillonnage (et plus généralement les filtrage passe-bas) d'un côté, et de sur-échantillonnage (donc d'interpolation) de l'autre. Il en ressort des comportements assez analogues dans leurs grandes lignes.

Les méthodes de filtrage passe-bas, d'abord, exhibent un comportement bien connu : celui formalisé, par exemple, par l'inégalité de Heisenberg. Celle-ci énonce grossièrement qu'un filtre resserré spectralement est aussi un filtre étalé spatialement. Ici, l'étroitesse spectrale peut être une propriété recherchée, par exemple si on considère le contenu haute fréquence comme du bruit, mais elle existe au prix d'un étalement spatial qui crée de la corrélation à longue distance et diminue la résolution. Il y a donc un compromis à trouver entre statistiques du premier et du second ordre, selon qu'on s'intéresse davantage à la précision ponctuelle ou à la résolution du signal. La nécessité de ce compromis est bien sûr déjà largement connue et acceptée : il suffit pour s'en convaincre de constater à quel point le passe-bas "idéal", tout idéal qu'il soit, est peu utilisé en pratique. En effet, il génère de

la corrélation longue distance et des artefacts très disgracieux. À l'inverse, le *multi-looking* de l'imagerie radar se fait à l'aide d'un simple moyennneur, parce que la localité est ici plus importante que le comportement spectral.

Toujours sur les méthodes de filtrage, mettons aussi l'accent sur le théorème central limite sur les passe-bas. Celui-ci énonce que, une fois un signal suffisamment filtré, sa distribution initiale n'a plus d'importance : ses composantes sont devenues gaussiennes.

Concernant les méthodes d'interpolation, la dualité est un peu la même : on a une hiérarchie d'interpolateurs, selon laquelle les comportements spatial et spectral varient en sens contraires. Un "bon" interpolateur, par exemple de Shannon ou spline d'ordre élevé, générera un signal continu homogène et lisse, mais au prix d'une complexité calculatoire supérieure et d'une forte non-localité. De bons compromis sont sans doute possibles, par exemple les interpolateurs splines d'ordre raisonnable (de 3 à 7), qu'on n'a cependant pas étudiés. On peut d'ailleurs déplorer que les bons interpolateurs soient assez peu répandus et implémentés dans les logiciels. On leur préfère souvent l'interpolation linéaire, très simple mais aux performances assez mauvaises, ou bicubique Keys, moins puissante que son équivalent spline mais qui a l'avantage d'être directe (c'est-à-dire de ne pas nécessiter de filtrage préalable). Dans la perspective de manipuler des signaux de type speckle, ces méthodes sont à déconseiller.

Malgré ces résultats, ce travail gagnerait à être poursuivi. Il serait d'abord pertinent de le généraliser à d'autres types de signaux, le bruit blanc présentant un intérêt limité. Par ailleurs, on pourrait aussi tester davantage de filtres et interpolateurs, notamment les splines, peu analysés ici. Cela permettrait d'affiner les préconisations proposées ci-dessus.

Conclusion, perspectives

Ces travaux nous auront permis d'explorer sous plusieurs angles les propriétés du speckle dynamique haute cadence.

Ainsi, dans le Chapitre 2, on a cherché à exploiter les possibilités d'une caméra rapide, dont la fréquence d'acquisition peut atteindre plusieurs dizaines de kilohertz. On a ainsi pu constater le gain considérable en qualité d'image permis par la haute fréquence, notamment à l'aide du premier terme de la fonction d'autocorrélation temporelle, r_1 . Celui-ci a des atouts pour supplanter le contraste en tant que paramètre de référence pour l'estimation de l'activité — c'est-à-dire de l'inverse du temps de corrélation. Par ailleurs, en-dehors de l'imagerie de vascularisation, d'autres possibilités ont été ouvertes, comme la possibilité de retrouver les battements cardiaques. Ceux-ci pourraient toutefois hypothéquer des résultats qui dépendent de l'hypothèse de stationnarité temporelle du signal.

Pour autant, de nombreuses questions restent en suspens. Ainsi, le dispositif expérimental ne permettait pas au sujet de rester parfaitement immobile au cours du temps. Cela a sans aucun doute limité la précision des résultats qu'on pouvait espérer obtenir. Par ailleurs, on s'est limité à chercher un bon paramètre d'imagerie qualitative de la vascularisation. Si la précision le permet, étendre ces travaux conjointement avec la mise en place d'un modèle quantitatif apporterait beaucoup. Pour la mise en place du modèle, on pourrait imaginer s'appuyer sur des fantômes, comme cela a déjà beaucoup été fait dans la littérature [21, 77, 17].

La question de la modélisation, justement, a fait l'objet du Chapitre 3. En repartant d'hypothèses assez simples mais complètes, on a pu retrouver et affiner des résultats classiques de la littérature. Ainsi, on a établi rigoureusement le profil d'autocorrélation dans des cas simples, où le mouvement des diffuseurs est constant ou brownien, où la population des diffuseurs est homogène et où la rétro-diffusion est simple. Par ailleurs, le simulateur mis en place ouvre de nombreuses possibilités d'étude des cas impossibles à traiter analytiquement.

C'est d'ailleurs presque dans ses possibilités futures, plutôt que dans ce qu'il a déjà permis de réaliser, que ce simulateur est le plus intéressant. En effet, de nombreux raffinements sont possibles à tous les niveaux : on peut par exemple imaginer complexifier les modèles de mouvement à l'aide de l'équation de Langevin, pour ajouter des forces de rappel ou constantes. Il serait également très utile d'implémenter la possibilité d'une cohabitation entre plusieurs populations de diffuseurs aux propriétés différentes, ou encore des situations de diffusion multiple. Là encore, des fantômes pourraient aider à la validation expérimentale des résultats obtenus.

Enfin, le Chapitre 4 a été l'occasion de se pencher sur un sujet moins central, mais d'importance non négligeable. Il nous a permis de passer en revue les effets de filtres passe-bas et d'interpolateurs courants sur les statistiques de signaux de bruit blanc. On a ainsi pu formaliser une traduction pour les processus aléatoires de la dualité temps-fréquence : un passe-bas a des conséquences sur l'autocorrélation d'autant plus lourdes qu'il est efficace, c'est-à-dire spectralement étroit ; un bon interpolateur, qui a de bonnes propriétés spectrales et ne casse pas la stationnarité du signal, est aussi fortement non-local et génère de la corrélation.

Une suite naturelle de ces travaux serait de les étendre, autant que possible, à des signaux plus complexes. On pense par exemple à des signaux déjà corrélés, ou non stationnaires. Globalement, le but serait alors de se rapprocher autant que possible des signaux rencontrés expérimentalement, pour obtenir des résultats qui leur seraient directement applicables.

Annexes

Annexe A

Étude de la distribution d'un signal de bruit blanc exponentiel sous-échantillonné par *spectral cropping*

On va ici démontrer le résultat donné Section 4.3.1, à savoir la formule de la densité de la loi suivie par les composantes d'un signal obtenu en sous-échantillonnant par *spectral cropping* un signal de bruit blanc exponentiel.

Je n'ai pas trouvé ce calcul dans la littérature. On peut néanmoins noter que des calculs analogues, mettant en jeu des combinaisons linéaires de lois Gamma, ont par exemple été effectués dans [78, 79].

A.1 Quelques décompositions en éléments simples

On s'intéresse ici à la décomposition d'une fraction rationnelle aux caractéristiques suivantes :

- $n \geq 1$ pôles doubles
- De 0 à 2 pôles simples

Ces décompositions nous seront utiles pour les calculs de la Section A.2.

A.1.1 Premier cas : n pôles doubles, pas de pôle simple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ une famille de n réels tous différents. Soit $F(X)$ la fraction rationnelle définie par :

$$F(X) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{(X - a_i)^2}$$

D'après le théorème de décomposition en éléments simples, il existe $(b_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ et $(c_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$F(X) = \sum_i \left[b_i \frac{1}{(X - a_i)^2} + c_i \frac{1}{X - a_i} \right]$$

Et on va chercher à exprimer les b_i et les c_i en fonction des a_i .

Calcul des b_j

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On veut déterminer b_j .

Multiplions $F(X)$ par $(X - a_j)^2$:

$$\prod_{i \neq j} \frac{1}{(X - a_i)^2} = \sum_i \left[b_i \frac{(X - a_j)^2}{(X - a_i)^2} + c_i \frac{(X - a_j)^2}{X - a_i} \right]$$

En évaluant en a_j , on obtient :

$$b_j = \prod_{i \neq j} \frac{1}{(a_j - a_i)^2}$$

Calcul des c_j

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On veut déterminer c_j .

Considérons l'égalité :

$$\sum_i \frac{c_i}{X - a_i} + \sum_{i \neq j} \frac{b_i}{(X - a_i)^2} = \prod_i \frac{1}{(X - a_i)^2} - \frac{b_j}{(X - a_j)^2}$$

On sait que a_j n'est plus que pôle simple de cette fraction.

Il s'agit dès lors de "factoriser" le membre de droite de telle sorte qu'un $(X - a_j)$ "simple", pour j donné, apparaisse au dénominateur.

On considère donc la fraction rationnelle :

$$R(X) = \prod_i \frac{1}{(X - a_i)^2} - \frac{b_j}{(X - a_j)^2}$$

On aura alors :

$$c_j = [R(X)(X - a)](a)$$

On a :

$$\begin{aligned} R(X) &= \prod_i \frac{1}{(X - a_i)^2} - \frac{b_j}{(X - a_j)^2} \\ &= \frac{1}{(X - a_j)^2} \left[\prod_{i \neq j} \frac{1}{(X - a_i)^2} - \prod_{i \neq j} \frac{1}{(a_j - a_i)^2} \right] \\ &= \frac{1}{(X - a_j)^2} \left[\frac{\prod_{i \neq j} (a_j - a_i)^2 - \prod_{i \neq j} (X - a_i)^2}{\prod_{i \neq j} (X - a_i)^2 (a_j - a_i)^2} \right] \\ &= -\frac{1}{(X - a_j)^2} \left[\frac{\prod_{i \neq j} (X - a_i)^2 - \prod_{i \neq j} (a_j - a_i)^2}{\prod_{i \neq j} (X - a_i)^2 (a_j - a_i)^2} \right] \\ &= -\frac{1}{(X - a_j)^2} \left[\frac{[\prod_{i \neq j} (X - a_i) - \prod_{i \neq j} (a_j - a_i)] \cdot [\prod_{i \neq j} (X - a_i) + \prod_{i \neq j} (a_j - a_i)]}{\prod_{i \neq j} (X - a_i)^2 (a_j - a_i)^2} \right] \end{aligned}$$

On va considérer le polynôme :

$$P(X) = \prod_{i \neq j} (X - a_i) - \prod_{i \neq j} (a_j - a_i)$$

Ce polynôme a clairement a_j pour racine. On va le factoriser par $(X - a_j)$.

Pour cela, on va "simplifier visuellement" le problème en posant $a_j = a$ et $(b_i)_{1 \leq i \leq n} = (a_i)_{i \neq j}$.

Dès lors, $P(X)$ s'écrit :

$$P(X) = \prod_{i=1}^n (X - b_i) - \prod_{i=1}^n (a - b_i)$$

Développons-le pour le factoriser par $(X - a)$:

$$\begin{aligned}
 P(X) &= \prod_{i=1}^n (X - b_i) - \prod_{i=1}^n (a - b_i) \\
 &= \sum_{I \subset [1, n]} X^{n-|I|} \prod_{i \in I} (-b_i) - \sum_{I \subset [1, n]} a^{n-|I|} \prod_{i \in I} (-b_i) \\
 &= \sum_{I \subset [1, n]} \left[X^{n-|I|} - a^{n-|I|} \right] \prod_{i \in I} (-b_i) \\
 &= \sum_{I \subset [1, n]} (X - a) \sum_{k=0}^{n-|I|-1} X^{n-|I|-k-1} a^k \prod_{i \in I} (-b_i) \\
 &= (X - a) \sum_{I \subset [1, n]} \sum_{k=0}^{n-|I|-1} X^{n-|I|-k-1} a^k \prod_{i \in I} (-b_i) \\
 &= (X - a) Q(X)
 \end{aligned}$$

$P(X)$ est désormais factorisé par $X - a$. Comme on aura besoin de $Q(a)$, calculons-le dès à présent :

$$\begin{aligned}
 Q(a) &= \sum_{I \subset [1, n]} \sum_{k=0}^{n-|I|-1} a^{n-|I|-k-1} a^k \prod_{i \in I} (-b_i) \\
 &= \sum_{I \subset [1, n]} \sum_{k=0}^{n-|I|-1} a^{n-|I|-1} \prod_{i \in I} (-b_i) \\
 &= \sum_{I \subset [1, n]} (n - |I|) a^{n-|I|-1} \prod_{i \in I} (-b_i)
 \end{aligned}$$

On reconnaît $P'(a)$:

$$Q(a) = \sum_{k=1}^n \prod_{i \neq k} (a - b_i)$$

On peut d'ailleurs retrouver cette identité en développant cette dernière expression de $P'(a)$. Réécrivons à présent $Q(a) = Q(a_j)$ avec les notations d'origine :

$$Q(a_j) = \sum_{k \neq j} \prod_{i \neq k, j} (a_j - a_i)$$

Soit $T(X) = R(X)(X - a_j)$.

On a :

$$\begin{aligned}
 T(X) &= -\frac{1}{(X - a_j)} \left[\frac{\left[\prod_{i \neq j} (X - a_i) - \prod_{i \neq j} (a_j - a_i) \right] \cdot \left[\prod_{i \neq j} (X - a_i) + \prod_{i \neq j} (a_j - a_i) \right]}{\prod_{i \neq j} (X - a_i)^2 (a_j - a_i)^2} \right] \\
 &= -\left[\frac{Q(X) \cdot \left[\prod_{i \neq j} (X - a_i) + \prod_{i \neq j} (a_j - a_i) \right]}{\prod_{i \neq j} (X - a_i)^2 (a_j - a_i)^2} \right]
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
T(a_j) &= - \left[\frac{Q(a) \cdot 2 \prod_{i \neq j} (a_j - a_i)}{\prod_{i \neq j} (a_j - a_i)^4} \right] \\
&= -2 \left[\frac{\sum_{k \neq j} \prod_{i \neq k, j} (a_j - a_i)}{\prod_{i \neq j} (a_j - a_i)^3} \right] \\
&= -2 \left[\sum_{k \neq j} \frac{1}{(a_j - a_k) \prod_{i \neq j} (a_j - a_i)^2} \right] \\
&= -2 \frac{1}{\prod_{i \neq j} (a_j - a_i)^2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{(a_j - a_i)}
\end{aligned}$$

Et finalement :

$$c_j = -2 \cdot b_j \cdot \sum_{i \neq j} \frac{1}{(a_j - a_i)}$$

En résumé :

$$\begin{aligned}
b_j &= \prod_{i \neq j} \frac{1}{(a_j - a_i)^2} \\
c_j &= -2 \prod_{i \neq j} \frac{1}{(a_j - a_i)^2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{a_j - a_i}
\end{aligned}$$

Ces deux formules ont été validées numériquement à l'aide d'un script Python.

A.1.2 Deuxième cas : n pôles doubles, un pôle simple

On considère cette fois :

$$F(X) = \prod_i \frac{1}{(X - a_i)^2} \cdot \frac{1}{X - y}$$

où $y \in \mathbb{R}$, et y n'est pas égal à l'un des a_i . De même que précédemment, on cherche à décomposer F en éléments simples.

À ce stade, il est plus simple de repartir de la décomposition précédente :

$$\begin{aligned}
F(X) &= \sum_i \left[b_i \frac{1}{(X - a_i)^2} + c_i \frac{1}{X - a_i} \right] \cdot \frac{1}{X - y} \\
&= \sum_i \left[b_i \frac{1}{(X - y)(X - a_i)^2} + c_i \frac{1}{(X - y)(X - a_i)} \right] \\
&= \sum_i \left[b_i \left(b_{1,i} \frac{1}{(X - a_i)^2} + b_{2,i} \frac{1}{X - a_i} + b_{3,i} \frac{1}{X - y} \right) + c_i \left(c_{1,i} \frac{1}{X - a_i} + c_{2,i} \frac{1}{X - y} \right) \right]
\end{aligned}$$

Et cette décomposition est pour le coup très simple :

$$\begin{aligned}
b_{1,i} &= \frac{1}{a_i - y} \\
b_{2,i} &= -\frac{1}{(y - a_i)^2} \\
b_{3,i} &= \frac{1}{(y - a_i)^2} \\
c_{1,i} &= \frac{1}{a_i - y} \\
c_{2,i} &= \frac{1}{y - a_i}
\end{aligned}$$

- Les coefficients en $\frac{1}{(X-a_i)^2}$ sont donc donnés par :

$$b'_i = b_i b_{1,i}$$

- Les coefficients en $\frac{1}{X-a_i}$ sont donnés par :

$$c'_i = b_i b_{2,i} + c_i c_{1,i}$$

- Le coefficient en $\frac{1}{X-y}$ est donné par :

$$d = \sum_i [b_i b_{3,i} + c_i c_{2,i}]$$

Et on peut alors écrire :

$$F(X) = \sum_i \left[b'_i \frac{1}{(X - a_i)^2} + c'_i \frac{1}{X - a_i} \right] + d \frac{1}{X - y}$$

Pour résumer :

$$\begin{aligned}
b'_j &= \left[\prod_{i \neq j} \frac{1}{(a_j - a_i)^2} \right] \frac{1}{a_j - y} \\
c'_j &= - \left[\prod_{i \neq j} \frac{1}{(a_j - a_i)^2} \cdot \frac{1}{a_j - y} \right] \left[\frac{1}{a_j - y} + 2 \sum_{i \neq j} \frac{1}{a_j - a_i} \right] \\
d &= \sum_j \left[\prod_{i \neq j} \frac{1}{(a_j - a_i)^2} \cdot \frac{1}{a_j - y} \left(\frac{1}{a_j - y} + 2 \sum_{i \neq j} \frac{1}{a_j - a_i} \right) \right]
\end{aligned}$$

De même, ces expressions ont été vérifiées numériquement.

A.1.3 Troisième cas : n pôles doubles, deux pôles simples

Pour finir, on considère :

$$F(X) = \prod_i \frac{1}{(X - a_i)^2} \cdot \frac{1}{X - y} \cdot \frac{1}{X - z}$$

où $z \in \mathbb{R}$ n'est ni égal à l'un des a_i , ni égal à y .

On utilise, une fois encore, la décomposition précédente :

$$\begin{aligned}
 F(X) &= \left[\sum_i \left[b'_i \frac{1}{(X-a_i)^2} + c'_i \frac{1}{X-a_i} \right] + d \frac{1}{X-y} \right] \cdot \frac{1}{X-z} \\
 &= \sum_i \left[b'_i \frac{1}{(X-a_i)^2(X-z)} + c'_i \frac{1}{(X-a_i)(X-z)} \right] + d \frac{1}{(X-y)(X-z)} \\
 &= \sum_i \left[b'_i \left(b'_{1,i} \frac{1}{(X-a_i)^2} + b'_{2,i} \frac{1}{X-a_i} + b'_{3,i} \frac{1}{X-z} \right) + c'_i \left(c'_{1,i} \frac{1}{X-a_i} + c'_{2,i} \frac{1}{X-z} \right) \right] \\
 &\quad + d \left(d_1 \frac{1}{X-y} + d_2 \frac{1}{X-z} \right)
 \end{aligned}$$

Quelques calculs donnent :

$$\begin{aligned}
 b'_{1,i} &= \frac{1}{a_i - z} \\
 b'_{2,i} &= -\frac{1}{(a_i - z)^2} \\
 b'_{3,i} &= \frac{1}{(z - a_i)^2} \\
 c'_{1,i} &= \frac{1}{a_i - z} \\
 c'_{2,i} &= \frac{1}{z - a_i} \\
 d_1 &= \frac{1}{y - z} \\
 d_2 &= \frac{1}{z - y}
 \end{aligned}$$

- Coefficient en $\frac{1}{(X-a_i)^2}$:

$$b''_i = b'_i b'_{1,i}$$

- Coefficient en $\frac{1}{X-a_i}$:

$$c''_i = b'_i b'_{2,i} + c'_i c'_{1,i}$$

- Coefficient en $\frac{1}{X-y}$:

$$d' = d d_1$$

- Coefficient en $\frac{1}{X-z}$:

$$u = \sum_i [b'_i b'_{3,i} + c'_i c'_{2,i}] + d d_2$$

Et on peut alors écrire :

$$F(X) = \sum_i \left[b''_i \frac{1}{(X-a_i)^2} + c''_i \frac{1}{X-a_i} \right] + d' \frac{1}{X-y} + u \frac{1}{X-z}$$

Comme d'habitude, résumons les expressions obtenues :

$$\begin{aligned}
b_j'' &= \prod_{i \neq j} \frac{1}{(a_j - a_i)^2} \cdot \frac{1}{a_j - y} \cdot \frac{1}{a_j - z} \\
c_j'' &= - \prod_{i \neq j} \frac{1}{(a_j - a_i)^2} \cdot \frac{1}{a_j - y} \cdot \frac{1}{a_j - z} \cdot \left[\frac{1}{a_j - y} + \frac{1}{a_j - z} + 2 \sum_{i \neq j} \frac{1}{a_j - a_i} \right] \\
d' &= \sum_j \left[\prod_{i \neq j} \frac{1}{(a_j - a_i)^2} \cdot \frac{1}{a_j - y} \left(\frac{1}{a_j - y} + 2 \sum_{i \neq j} \frac{1}{a_j - a_i} \right) \right] \cdot \frac{1}{y - z} \\
u &= \sum_j \left[\prod_{i \neq j} \frac{1}{(a_j - a_i)^2} \cdot \frac{1}{a_j - y} \cdot \left[\frac{1}{(a_j - z)^2} + \left(\frac{1}{a_j - z} - \frac{1}{y - z} \right) \left(\frac{1}{a_j - y} + 2 \sum_{i \neq j} \frac{1}{a_j - a_i} \right) \right] \right]
\end{aligned}$$

Inutile de dire que ces expressions ont été validées numériquement.

A.1.4 Résumé des notations employées

$$\begin{aligned}
b_j &= \prod_{i \neq j} \frac{1}{(a_j - a_i)^2} \\
c_j &= -2 \prod_{i \neq j} \frac{1}{(a_j - a_i)^2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{a_j - a_i} \\
b_j' &= \left[\prod_{i \neq j} \frac{1}{(a_j - a_i)^2} \right] \frac{1}{a_j - y} \\
c_j' &= - \left[\prod_{i \neq j} \frac{1}{(a_j - a_i)^2} \cdot \frac{1}{a_j - y} \right] \left[\frac{1}{a_j - y} + 2 \sum_{i \neq j} \frac{1}{a_j - a_i} \right] \\
d &= \sum_j \left[\prod_{i \neq j} \frac{1}{(a_j - a_i)^2} \cdot \frac{1}{a_j - y} \left(\frac{1}{a_j - y} + 2 \sum_{i \neq j} \frac{1}{a_j - a_i} \right) \right] \\
b_j'' &= \prod_{i \neq j} \frac{1}{(a_j - a_i)^2} \cdot \frac{1}{a_j - y} \cdot \frac{1}{a_j - z} \\
c_j'' &= - \prod_{i \neq j} \frac{1}{(a_j - a_i)^2} \cdot \frac{1}{a_j - y} \cdot \frac{1}{a_j - z} \cdot \left[\frac{1}{a_j - y} + \frac{1}{a_j - z} + 2 \sum_{i \neq j} \frac{1}{a_j - a_i} \right] \\
d' &= \sum_j \left[\prod_{i \neq j} \frac{1}{(a_j - a_i)^2} \cdot \frac{1}{a_j - y} \left(\frac{1}{a_j - y} + 2 \sum_{i \neq j} \frac{1}{a_j - a_i} \right) \right] \cdot \frac{1}{y - z} \\
u &= \sum_j \left[\prod_{i \neq j} \frac{1}{(a_j - a_i)^2} \cdot \frac{1}{a_j - y} \cdot \left[\frac{1}{(a_j - z)^2} + \left(\frac{1}{a_j - z} - \frac{1}{y - z} \right) \left(\frac{1}{a_j - y} + 2 \sum_{i \neq j} \frac{1}{a_j - a_i} \right) \right] \right]
\end{aligned}$$

A.2 Densité de probabilité du signal sous-échantillonné

On considère un signal aléatoire de taille N composé de $\text{VAR } \Gamma[1, 1]$ indépendantes, et on s'intéresse à la distribution suivie par une composante de ce signal sous-échantillonné d'un facteur L .

On sait qu'une composante quelconque du signal sous-échantillonné s'exprime comme une convolution entière, donc une combinaison linéaire, du signal original :

$$\tilde{\mathbf{s}}[0] = \sum_{n=0}^{N-1} \tau[n] \cdot \mathbf{s}[n]$$

où :

$$\tau[n] = \frac{\sin \left[\frac{M}{N} \pi n \right]}{N \sin \left[\frac{\pi n}{N} \right]}$$

La densité d'une combinaison linéaire de VAR Gamma indépendantes a été étudiée dans [80] et [81]. Cependant, leurs résultats sont difficilement exploitables tels quels, d'une part parce qu'ils considèrent uniquement une combinaison linéaire à coefficients positifs (or une bonne partie de nos \tilde{t}_i sont négatifs), et d'autre part parce que leurs hypothèses initiales sont trop générales pour obtenir des expressions finales complètement explicites. L'essentiel des calculs est donc à refaire en prenant en compte les caractéristiques de nos coefficients.

Examinons donc en détail la répartition des coefficients \tilde{t}_i .

- La contribution "centrale" ($n = 0$) de la convolution est de poids $\frac{1}{L}$ (de même que les contributions multiples de n si on travaille en convolution circulaire sur un intervalle de longueur n autre que $[0, N - 1]$).
- Les autres contributions multiples de L sont de poids nul, puisque le numérateur est nul.
- Entre les contributions nulles, les autres composantes du noyau forment M lobes correspondants à des "demi-paquets", chacun de taille $L - 1$, symétriques (d'où les "demi"), mais l'un est tout seul puisque M est impair. Ces demi-paquets sont des lois pseudo-gamma de forme $k = 2$ et de moyenne $2\beta_k$ (éventuellement négative, d'où le "pseudo-"), parmi lesquels :

- $\lceil \frac{M-1}{4} \rceil$ paquets sont positifs ;
- $\lfloor \frac{M-1}{4} \rfloor$ paquets sont négatifs ;
- Le dernier demi-paquet est positif si 4 divise $M - 1$ et négatif sinon. Il est composé de $\lfloor \frac{L-1}{2} \rfloor$ VAR Gamma de forme $k = 2$ et, si $L - 1$ est impair, d'une VAR Gamma de forme $k = 1$ supplémentaire.

Si L est impair, les demi-paquets sont de taille paire. En particulier, les points du dernier paquet viennent par paire, et forment donc des lois Gamma de forme 2.

On appelle $(\beta_k)_{1 \leq k \leq K}$ l'ensemble des $\tau[i] \neq 0$ pour $1 \leq i \leq \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$. L'indexation est arbitraire et K est le cardinal de cet ensemble.

On a alors :

$$\tilde{\mathbf{s}}[0] = \frac{1}{L} \Sigma_{1,1} + \sum_{k=1}^K \beta_k \Sigma_{1,2}$$

où $\Sigma_{\theta,k}$ désigne une VAR suivant une loi $\Gamma[\theta, k]$, et les $\Sigma_{\theta,k}$ sont toutes indépendantes.

Comme les β_k ne sont pas tous positifs, il nous faut, pour continuer les calculs, prolonger la loi Gamma aux cas de moyenne négative. On introduit donc la loi "Gamma prime", notée $\Gamma'[\theta, k]$, où θ est un réel non nul, de densité donnée par :

- Si $\theta > 0$, elle se confond avec la densité de la loi Gamma :

$$g_{\theta,k}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(k) \theta^k} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- Si $\theta < 0$, il faut l'opposer intelligemment :

$$g_{\theta,k}(x) = \begin{cases} -\frac{x^{k-1}e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(k)\theta^k} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Dès lors, prolongeant la notation $\Sigma_{\theta,k}$ à la loi Γ' , on peut écrire :

$$\tilde{s}[0] = \Sigma_{\frac{1}{L},1} + \sum_{k=1}^K \Sigma_{\beta_k,2}$$

On montre aisément que, quel que soit le signe de θ , la fonction génératrice des moments de $\Sigma_{\theta,k}$ est donnée par :

$$M_{\theta,k}(t) = \frac{1}{(1 - \theta t)^k}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned} M_{\tilde{s}[0]}(t) &= \frac{1}{1 - \frac{t}{L}} \cdot \left(\prod_{k=1}^K \frac{1}{(1 - \beta_k t)^2} \right) \\ &= -\frac{1}{L} \left(\frac{1}{t - L} \right) \cdot \left(\prod_{k=1}^K \frac{1}{\beta_k^2} \right) \cdot \left(\prod_{k=0}^K \frac{1}{\left(t - \frac{1}{\beta_k}\right)^2} \right) \\ &= P \cdot \left(\frac{1}{t - L} \right) \cdot \left(\prod_{k=0}^K \frac{1}{\left(t - \frac{1}{\beta_k}\right)^2} \right) \end{aligned}$$

où on note :

$$P = -L \prod_{k=1}^K \frac{1}{\beta_k^2}$$

$M_{\tilde{s}[0]}(t)$ prend donc la forme d'une fraction rationnelle telle qu'étudiée en A.1.2. Reprenons les notations correspondantes, à savoir :

- $a_k = \frac{1}{\beta_k}$
- $y = L$

On a alors :

$$\begin{aligned} M_{\tilde{s}[0]}(t) &= P \cdot \prod_{k=1}^K \frac{1}{(t - a_k)^2} \cdot \frac{1}{t - y} \\ &= P \cdot \left[\sum_{k=1}^K \left[b'_k \frac{1}{(t - a_k)^2} + c'_k \frac{1}{t - a_k} \right] + d \frac{1}{t - y} \right] \end{aligned}$$

où les coefficients sont donnés en A.1.2.

$$M_{\tilde{s}[0]}(t) = P \cdot \left[\sum_{k=1}^K \left[\frac{b'_k \beta_k^2}{(1 - \beta_k t)^2} - \frac{c'_k \beta_k}{1 - \beta_k t} \right] - \frac{1}{L} \frac{d}{1 - \frac{t}{L}} \right]$$

On voit apparaître la fonction génératrice des moments de lois Gamma, éventuellement négatives (pour les β_i négatifs). On a donc :

$$g = P \cdot \left[\sum_{k=1}^K [b'_k \beta_k^2 g_{\beta_k,2} - c'_k \beta_k g_{\beta_k,1}] - \frac{d}{L} g_{\frac{1}{L},1} \right]$$

où $g_{\beta_k,l}$ est la densité de la loi $\Gamma'[\beta_k, l]$. On rappelle que cette loi correspond à une loi $\Gamma[\beta_k, l]$ si $\beta_k > 0$ et à l'opposé d'une loi $\Gamma[-\beta_k, l]$ si $\beta_k < 0$.

Et finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g = \sum_{k=1}^K h_{\beta_k, x} (\lambda_k x + \mu_k) e^{-\frac{x}{\beta_k}} + h_{L, x} v e^{-f x}$$

où :

$$\begin{aligned} h_{\tau, x} &= \mathbb{1}_{\tau x \geq 0} \\ \lambda_k &= - \left[\prod_{i \neq k} \frac{1}{\left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_k}\right)^2} \right] \cdot \frac{L}{\beta_k(1 - L\beta_k)} \\ \mu_k &= - \left[\prod_{i \neq k} \frac{1}{\left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_k}\right)^2} \cdot \frac{L}{1 - L\beta_k} \right] \cdot \left[\frac{1}{1 - L\beta_k} + 2 \sum_{i \neq k} \frac{1}{1 - \frac{\beta_k}{\beta_i}} \right] \\ v &= \sum_j \left[\prod_{i \neq j} \frac{1}{\left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_j}\right)^2} \right] \cdot \frac{L}{1 - L\beta_j} \cdot \left[\frac{1}{1 - L\beta_j} + 2 \sum_{i \neq j} \frac{1}{1 - \frac{\beta_j}{\beta_i}} \right] \end{aligned}$$

Si L est pair, le noyau de convolution contient un coefficient isolé α .

La VAR donnant une valeur du signal sous-échantillonné est donc donnée par :

$$\tilde{s}[0] = \Sigma_{\frac{1}{L},1} + \sum_{k=1}^N \Sigma_{\beta_k,2} + \Sigma_{\alpha,1}$$

$$\begin{aligned} M_{\tilde{s}[0]}(t) &= \frac{1}{1 - \frac{t}{L}} \cdot \prod_{k=1}^K \frac{1}{(1 - \beta_k t)^2} \cdot \frac{1}{1 - \alpha t} \\ &= -L \cdot \frac{1}{t - L} \cdot \left(\prod_{k=1}^K \frac{1}{\beta_k^2} \right) \cdot \left(\prod_{k=0}^K \frac{1}{\left(t - \frac{1}{\beta_k}\right)^2} \right) \cdot \left(-\frac{1}{\alpha} \right) \cdot \frac{1}{t - \frac{1}{\alpha}} \\ &= P \cdot \frac{1}{t - L} \cdot \left(\prod_{k=0}^K \frac{1}{\left(t - \frac{1}{\beta_k}\right)^2} \right) \cdot \frac{1}{t - \frac{1}{\alpha}} \end{aligned}$$

où :

$$P = \frac{1}{\alpha} \cdot L \cdot \left(\prod_{k=1}^K \frac{1}{\beta_k^2} \right)$$

En posant, pour correspondre à A.1.3 :

- $a_k = \frac{1}{\beta_k}$

- $y = L$
- $z = \frac{1}{\alpha}$

On a :

$$\begin{aligned}
 M_{\mathfrak{s}[0]}(t) &= P \cdot \left[\sum_{k=1}^K \left[b_k'' \frac{1}{(t - a_k)^2} + c_k'' \frac{1}{t - a_k} \right] + d' \frac{1}{t - y} + u \frac{1}{t - z} \right] \\
 &= P \cdot \left[\sum_{k=1}^K \left[b_k'' \frac{1}{(t - \frac{1}{\beta_k})^2} + c_k'' \frac{1}{t - \frac{1}{\beta_k}} \right] + d' \frac{1}{t - L} + u \frac{1}{t - \frac{1}{\alpha}} \right] \\
 &= P \cdot \left[\sum_{k=1}^K \left[b_k'' \beta_k^2 \frac{1}{(1 - \beta_k t)^2} - c_k'' \beta_k \frac{1}{1 - \beta_k t} \right] - \frac{d'}{L} \frac{1}{1 - \frac{t}{L}} - u \alpha \frac{1}{1 - \alpha t} \right]
 \end{aligned}$$

La densité de probabilité est donc donnée par :

$$g = P \cdot \left[\sum_{k=1}^K \left[b_k'' \beta_k^2 g_{\beta_k,2} - c_k'' \beta_k g_{\beta_k,1} \right] - \frac{d'}{L} g_{\frac{1}{L},1} - u \alpha g_{\alpha,1} \right]$$

ce qui nous donne finalement pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \sum_{k=1}^K h_{\beta_k, x} (\lambda_k' x + \mu_k') e^{-\frac{x}{\beta_k}} + h_{L, x} v' e^{-f x} + h_{\alpha, x} \eta e^{-\frac{x}{\alpha}}$$

où :

$$\begin{aligned}
 \lambda_k' &= \left[\prod_{i \neq k} \frac{1}{(1 - \frac{\beta_i}{\beta_k})^2} \right] \cdot \frac{L}{1 - L\beta_k} \cdot \frac{1}{\alpha - \beta_k} \\
 \mu_k' &= \prod_{i \neq k} \frac{1}{(1 - \frac{\beta_i}{\beta_k})^2} \cdot \frac{L}{1 - L\beta_k} \cdot \frac{1}{\alpha - \beta_k} \cdot \left[\frac{\beta_k}{1 - L\beta_k} + \frac{\alpha\beta_k}{\alpha - \beta_k} + 2 \sum_{i \neq k} \frac{\beta_k}{1 - \frac{\beta_k}{\beta_i}} \right] \\
 v' &= \sum_j \left[\prod_{i \neq j} \frac{1}{(1 - \frac{\beta_i}{\beta_j})^2} \right] \cdot \frac{L}{1 - L\beta_j} \cdot \left[\frac{1}{1 - L\beta_j} + 2 \sum_{i \neq j} \frac{1}{1 - \frac{\beta_j}{\beta_i}} \right] \cdot \frac{1}{L\alpha - 1} \\
 \eta &= - \sum_j \left[\prod_{i \neq j} \frac{1}{(1 - \frac{\beta_i}{\beta_j})^2} \right] \cdot \frac{L}{\alpha\beta_j(1 - L\beta_j)} \cdot \left[\frac{1}{(\frac{1}{\beta_j} - \frac{1}{\alpha})^2} + \left(\frac{1}{\beta_j} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{L - \frac{1}{\alpha}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\beta_j} - L + 2 \sum_{i \neq j} \frac{1}{\beta_j - \frac{1}{\beta_i}} \right) \right]
 \end{aligned}$$

A.3 Convergence de la distribution sous-échantillonnée

On va montrer ici que, lorsque N tend vers l'infini à $L = \frac{M}{N}$ fixé, on a convergence en loi de la distribution sous-échantillonnée vers une distribution limite.

Cette distribution limite est définie par la fonction caractéristique définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{aligned}
 \varphi_L(t) &= \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{\sin(\frac{\pi n}{L})}{\pi n} i t} \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=-N}^N \frac{1}{1 - \frac{\sin(\frac{\pi n}{L})}{\pi n} i t}
 \end{aligned}$$

La précision de la deuxième ligne est importante, parce que comme on va le voir, on n'a pas convergence absolue du produit.

Cette fonction caractéristique, dont on va commencer par montrer l'existence, est celle du signal obtenu en sous-échantillonnant d'un facteur L un signal composé d'une infinité de VAR $\Gamma[1, 1]$.

A.3.1 Existence de φ_L

Commençons par montrer que la fonction caractéristique définie plus haut est bien définie. Les facteurs du produit n'étant jamais nuls, on va plutôt montrer qu'on a convergence simple du produit de la suite de fonctions à valeurs complexes définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\psi_n : t \mapsto 1 - \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{L}\right)}{\pi n} it$$

Et par symétrie et parité du sinus cardinal, il suffit en fait de montrer la convergence de ce produit pour $n \in \mathbb{N}$ (et non \mathbb{Z}) pour conclure.

On fixe donc $t \in \mathbb{R}$, et on va montrer la convergence de $(\prod \psi_n(t))_n$.

Il suffit pour cela de montrer que les deux suites $(|\prod \psi_n(t)|)_n$ et $\arg(\prod \psi_n(t))_n$.

Convergence en module

On a :

$$|\psi_n(t)| = \sqrt{1 + \frac{\sin^2\left(\frac{\pi n}{L}\right)}{\pi^2 n^2} t^2}$$

Les carrés des $|\psi_n(t)|$ s'écrivent comme $1 + |b_n|$, où $|b_n|$ est dominé par le terme général d'une série de Riemann convergente (à savoir $(\frac{1}{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$). On a donc bien convergence de $(|\prod \psi_n(t)|)_n$.

Convergence en argument

On va à présent montrer la convergence de $(\arg(\prod \psi_n(t)))_n$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \arg\left(\prod_{n=0}^N \psi_n(t)\right) &= \sum_{n=0}^N \arg(\psi_n(t)) \\ &= \sum_{n=0}^N \arg\left(1 - \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{L}\right)}{\pi n} it\right) \\ &= - \sum_{n=0}^N \arctan\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{L}\right)}{\pi n} t\right) \\ &= - \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{0 \leq n \leq \frac{N-1}{L}} \arctan\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi k}{L}\right)}{\pi n} t\right) \\ &= - \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{n=0}^{N/L} \arctan\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi k}{L}\right)}{\pi(fn+k)} t\right) \end{aligned}$$

Pour chaque k , la suite $\left(\arctan\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi k}{L}\right)}{\pi(fn+k)} t\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est alternée et respecte le critère spécial de convergence des séries alternées, à savoir la décroissance vers 0 en valeur absolue.

On a donc bien, au final, convergence de $\prod \psi_n(t)$ en argument.

On peut donc conclure à la **semi-convergence** de $\prod \psi_n(t)$. En particulier, la définition du passage à la limite dans le produit est importante.

A.3.2 Convergence de $\varphi_{\frac{N}{L},N}$ vers φ_L

On va à présent montrer la convergence (simple) de $\varphi_{\frac{N}{L},N}$ vers φ_f .

On définit $\varphi_{\frac{N}{L},N}$ comme l'évaluation de $\mathcal{M}_{\frac{N}{L},N}$ sur la droite complexe :

$$\varphi_{\frac{N}{L},N}(t) = \prod_{n=-N}^N \frac{1}{1 - \frac{\sin(\frac{\pi n}{L})}{N \sin(\frac{\pi n}{N})} it}$$

On va pour cela montrer l'équivalence des produits partiels de $\varphi_{\frac{N}{L},N}(t)$ et φ_f .

Il sera en fait plus simple et strictement équivalent de démontrer la convergence de la suite A_N de terme général :

$$A_N = \prod_{n=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \left[1 - \frac{\sin(\frac{\pi n}{L})}{N \sin(\frac{\pi n}{N})} it \right]$$

On note $a_n^N = \left[1 - \frac{\sin(\frac{\pi n}{L})}{N \sin(\frac{\pi n}{N})} it \right]$ le facteur général de A .

Le point délicat de cette démonstration, qui interdit tout passage à la limite précipité, est que les facteurs de $\varphi_{\frac{N}{L},N}(t)$ *dépendent* de N . On aura donc simultanément un phénomène de convergence du terme général de $\varphi_{\frac{N}{L},N}(t)$ vers celui de φ_f et l'envolée vers l'infini du nombre de ces termes.

Notre stratégie va donc consister à séparer le produit en deux produits distincts. En effet :

- Sur les premiers termes du produit partiel, on peut s'attendre à ce que la convergence des termes généraux vers ceux de φ_f se fasse suffisamment vite pour conclure sans souci à l'équivalence de leur produit vers le produit des limites.
- Sur les derniers termes, on peut espérer que la quantité $N \sin(\frac{\pi n}{N})$ va converger suffisamment vite vers 1 pour que, là encore, le produit converge aussi vers 1 et qu'on puisse le "négliger".

Plus précisément, pour effectuer la séparation, on va chercher un $\beta \in]0, 1[$ tel que :

$$\begin{aligned} A_N &= \prod_{n=1}^{N^\beta} \left[1 - \frac{\sin(\frac{\pi n}{L})}{N \sin(\frac{\pi n}{N})} it \right] \cdot \prod_{n=N^\beta+1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \left[1 - \frac{\sin(\frac{\pi n}{L})}{N \sin(\frac{\pi n}{N})} it \right] \\ &= B_N \cdot C_N \end{aligned}$$

où :

- D'une part, quand $N \rightarrow \infty$:

$$B_N \sim \prod_{n=1}^{N^\beta} \left[1 - \frac{\sin(\frac{\pi n}{L})}{\pi n} it \right]$$

- D'autre part :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} C_N = 1$$

Pour la suite, on note a_n^N le "terme général" de A_N (et donc aussi celui de B_N et C_N), c'est-à-dire :

$$a_n^N = 1 - \frac{\sin(\frac{\pi n}{L})}{N \sin(\frac{\pi n}{N})} it$$

Comportement asymptotique de $(C_N)_N$

On va d'abord s'intéresser à la suite $(C_N)_N$. On va étudier sa convergence séparément en module et en argument.

Convergence en module

On va montrer la convergence de $(|C_N|)_N$ vers 1. Pour cela, on va étudier celle de $(|C_N|^2)_N$, qui est strictement équivalente et allège un tout petit peu les calculs.

On a :

$$|C_N|^2 = \prod_{n=N^\beta+1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \left[1 + \frac{\sin^2\left(\frac{\pi n}{L}\right)}{N^2 \sin^2\left(\frac{\pi n}{N}\right)} t^2 \right]$$

Soit $n \in \llbracket N^\beta + 1, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor \rrbracket$.

Comme on a alors $\frac{\pi n}{N} \leq \frac{\pi}{2}$, par croissance de \sin^2 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\sin^2\left(\frac{\pi n}{N}\right) \geq \sin^2\left(\frac{\pi}{N^{1-\beta}}\right) \geq \frac{4}{N^{2-2\beta}}$$

Et donc :

$$|a_n^N|^2 \leq 1 + \frac{1}{N^{2\beta}}$$

En majorant le nombre de facteurs par N , on peut dire que :

$$|C_N|^2 \leq \left(1 + \frac{1}{N^{2\beta}}\right)^N$$

On passe au logarithme :

$$\begin{aligned} \ln |C_N|^2 &\leq N \ln \left(1 + \frac{1}{N^{2\beta}}\right) \\ &= N \left[\frac{1}{N^{2\beta}} + O\left(\frac{1}{N^{4\beta}}\right) \right] \\ &= \frac{1}{N^{2\beta-1}} + O\left(\frac{1}{N^{4\beta-1}}\right) \end{aligned}$$

On a donc convergence (absolue) vers 0 de $(\ln |C_N|^2)_N$, et donc convergence vers 1 de $(|C_N|)_N$, dès que $2\beta - 1 > 0$, c'est-à-dire dès que $\beta > \frac{1}{2}$.

On suppose donc désormais que $\beta > \frac{1}{2}$.

Convergence en argument

On considère désormais la suite $(\arg C_N)_N$. Il va s'agir de montrer que cette suite converge vers 0.

On a, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \arg C_N &= \sum_{n=N^\beta+1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \arg \left[1 - \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{L}\right)}{N \sin\left(\frac{\pi n}{N}\right)} it \right] \\ &= - \sum_{n=N^\beta+1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \arctan \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{L}\right) t}{N \sin\left(\frac{\pi n}{N}\right)} \right) \end{aligned}$$

Comme n est minoré par N^β , $\frac{\sin(\frac{\pi n}{L})t}{N \sin(\frac{\pi n}{N})}$ tend vers 0 quand $N \rightarrow \infty$ "quel que soit n " ou, plus exactement, il est dominé par une quantité qui tend vers 0 quand $N \rightarrow \infty$.

On peut donc effectuer un développement limité de $\arg a_n^N$ quand $N \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \arctan \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi n}{L} \right) t}{N \sin \left(\frac{\pi n}{N} \right)} \right) &= \frac{\sin \left(\frac{\pi n}{L} \right) t}{N \sin \left(\frac{\pi n}{N} \right)} - \frac{\sin^3 \left(\frac{\pi n}{L} \right) t}{3N^3 \sin^3 \left(\frac{\pi n}{N} \right)} + o \left(\frac{\sin^3 \left(\frac{\pi n}{L} \right) t}{3N^3 \sin^3 \left(\frac{\pi n}{N} \right)} \right) \\ &= \frac{\sin \left(\frac{\pi n}{L} \right) t}{N \sin \left(\frac{\pi n}{N} \right)} + O \left(\frac{1}{N^{3\beta}} \right) \end{aligned}$$

Pour se débarrasser du premier terme, on va considérer les $\arg a_n^N$ par paire d'indices n séparés par une période L du numérateur. En effet, on a :

$$\begin{aligned} a_n^N + a_{n+L}^N &= \frac{\sin \left(\frac{\pi n}{L} \right) t}{N \sin \left(\frac{\pi n}{N} \right)} + \frac{\sin \left(\frac{\pi(n+L)}{L} \right) t}{N \sin \left(\frac{\pi(n+L)}{N} \right)} + O \left(\frac{1}{N^{3\beta}} \right) \\ &= \frac{\sin \left(\frac{\pi n}{L} \right) t}{N} \left[\frac{1}{\sin \left(\frac{\pi n}{N} \right)} - \frac{1}{\sin \left(\frac{\pi(n+L)}{N} \right)} \right] + O \left(\frac{1}{N^{3\beta}} \right) \end{aligned}$$

On note $u_n^N = \frac{1}{\sin \left(\frac{\pi N^\beta}{N} \right)} - \frac{1}{\sin \left(\frac{\pi}{N^{1-\beta}} + \frac{\pi L}{N} \right)}$ et $b_n^N = \frac{\sin \left(\frac{\pi n}{L} \right) t}{N} u_n^N$, de telle sorte que $a_n^N + a_{n+L}^N = b_n^N + O \left(\frac{1}{N^{3\beta}} \right)$.

On va montrer la convergence de $\sum_n |a_n^N + a_{n+L}^N|$, où la sommation se fait de manière à ce que les $\{n, n+L\}$ recouvrent¹ $\llbracket N^\beta + 1, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor \rrbracket$.

Comme $O \left(\frac{1}{N^{3\beta}} \right) = o \left(\frac{1}{N} \right)$, celle-ci est équivalente à la convergence de $\sum_n |b_n^N|$, qui est ce qu'on va démontrer.

Pour cela, remarquons que les u_n^N sont tous positifs par croissance du sinus sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Par ailleurs, ils sont décroissants par rapport à n . On peut donc les dominer par $u_{N^\beta}^N$:

$$\begin{aligned} u_n^N &= |u_n^N| \\ &\leq |u_{N^\beta}^N| \\ &\leq \frac{1}{\sin \left(\frac{\pi N^\beta}{N} \right)} - \frac{1}{\sin \left(\frac{\pi}{N^{1-\beta}} + \frac{\pi L}{N} \right)} \end{aligned}$$

Et on peut alors dominer les $|b_n^N|$:

$$\begin{aligned} |b_{N^\beta}^N| &\leq \frac{\left| \sin \left(\frac{\pi N^\beta}{L} \right) t \right|}{N} \left[\frac{1}{\sin \left(\frac{\pi N^\beta}{N} \right)} - \frac{1}{\sin \left(\frac{\pi(N^\beta+L)}{N} \right)} \right] \\ &\leq \frac{|t|}{N} \left[\frac{1}{\sin \left(\frac{\pi N^\beta}{N} \right)} - \frac{1}{\sin \left(\frac{\pi}{N^{1-\beta}} + \frac{\pi L}{N} \right)} \right] \\ &\leq \frac{|t|}{N} |u_{N^\beta}^N| \end{aligned}$$

¹Si le recouvrement n'est pas parfait, le nombre de termes restant est de toute façon fini (inférieur à L) et tous tendent vers 0, donc ils ne changeront rien à nos conclusions.

Comme le nombre des b_n^N à N fixé est dominé par N , une condition suffisante de convergence de $(\arg C_N)$ vers 0 est que $\left(u_{N^\beta}^N\right)_N$ tende vers 0.

Or :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi N^\beta}{N}\right)} &= \frac{1}{\frac{\pi}{N^{1-\beta}} - \frac{\pi^3}{6(N^{1-\beta})^3} + o\left(\frac{1}{(N^{1-\beta})^3}\right)} \\ &= \frac{1}{\frac{\pi}{N^{1-\beta}}} \frac{1}{1 - \frac{\pi^2}{6(N^{1-\beta})^2} + o\left(\frac{1}{(N^{1-\beta})^2}\right)} \\ &= \frac{1}{\frac{\pi}{N^{1-\beta}}} \left[1 + \frac{\pi^2}{6(N^{1-\beta})^2} + o\left(\frac{1}{(N^{1-\beta})^2}\right) \right] \\ &= \frac{N^{1-\beta}}{\pi} + \frac{\pi}{6N^{1-\beta}} + o\left(\frac{1}{N^{1-\beta}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi N^\beta}{N} + \frac{\pi L}{N}\right)} &= \frac{1}{\frac{\pi}{N^{1-\beta}} + \frac{\pi L}{N} - \frac{1}{6} \cdot \left[\frac{\pi}{N^{1-\beta}} + \frac{\pi L}{N}\right]^3 + o\left(\frac{1}{(N^{1-\beta})^3}\right)} \\ &= \frac{1}{\frac{\pi}{N^{1-\beta}}} \frac{1}{1 + \frac{L}{N^\beta} - \frac{\pi^2}{6(N^{1-\beta})^2} + o\left(\frac{1}{(N^{1-\beta})^2}\right)} \\ &= \frac{1}{\frac{\pi}{N^{1-\beta}}} \left[1 - \left(\frac{L}{N^\beta} - \frac{\pi^2}{6(N^{1-\beta})^2}\right) + o\left(\frac{1}{(N^{1-\beta})^2}\right) \right] \\ &= \frac{N^{1-\beta}}{\pi} + \frac{L}{\pi N^{2\beta-1}} + o\left(\frac{1}{N^{1-\beta}}\right) \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} u_n^N &= \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi N^\beta}{N}\right)} - \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{N^{1-\beta}} + \frac{\pi L}{N}\right)} \\ &= \frac{L}{\pi N^{2\beta-1}} + o\left(\frac{1}{N^{1-\beta}}\right) \end{aligned}$$

Comme on a supposé $\beta > \frac{1}{2}$, on a bien convergence de $\left(u_{N^\beta}^N\right)_N$, et donc de $(\arg C_N)_N$, vers 0.

On a finalement démontré que C_N convergeait vers 1 sous l'hypothèse $\beta > \frac{1}{2}$.

Comportement asymptotique de $(B_N)_N$

Intéressons-nous à présent à $(B_N)_N$. On rappelle l'expression de son terme général :

$$B_N = \prod_{n=1}^{N^\beta} \left[1 - \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{L}\right)}{N \sin\left(\frac{\pi n}{N}\right)} it \right]$$

On pose, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$D_N = \prod_{n=1}^{N^\beta} \left[1 - \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{L}\right)}{\pi n} it \right]$$

Notre objectif est d'établir que, sous certaines conditions sur β (qui est déjà contraint, on le rappelle, par la nécessité de la convergence de $(C_N)_N$: on l'a supposé strictement supérieur à $\frac{1}{2}$), on a équivalence quand $N \rightarrow \infty$ de $(B_N)_N$ et $(D_N)_N$.

On a, pour $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \frac{B_N}{D_N} &= \prod_{n=1}^{N^\beta} \frac{1 - \frac{\sin(\frac{\pi n}{L})}{N \sin(\frac{\pi n}{N})} it}{1 - \frac{\sin(\frac{\pi n}{L})}{\pi n} it} \\ &= \prod_{n=1}^{N^\beta} \left[1 - \frac{\frac{\sin(\frac{\pi n}{L})}{\pi n} - \frac{\sin(\frac{\pi n}{L})}{N \sin(\frac{\pi n}{N})}}{1 - \frac{\sin(\frac{\pi n}{L})}{\pi n} it} it \right] \\ &= \prod_{n=1}^{N^\beta} [1 + b_n^N] \end{aligned}$$

où :

$$b_n^N = O(|\tau_f(x) - \tau_{M,N}(x)|)$$

On peut alors utiliser notre résultat de convergence uniforme. En effet, comme $n \leq N^\beta$, on a :

$$\begin{aligned} b_n^N &= O\left(\frac{(N^\beta)^2}{N^2}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{N^{2-2\beta}}\right) \end{aligned}$$

On peut donc dominer $\frac{B_N}{D_N}$ par la quantité $c_n^N = \left(1 + \frac{1}{N^{2-2\beta}}\right)^{N^\beta}$.

$$\begin{aligned} c_n^N &= \left(1 + \frac{1}{N^{2-2\beta}}\right)^{N^\beta} \\ &= \exp\left(N^\beta \ln\left(1 + \frac{1}{N^{2-2\beta}}\right)\right) \\ &= \exp\left(N^\beta \left(\frac{1}{N^{2-2\beta}} + o\left(\frac{1}{N^{2-2\beta}}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{N^{2-3\beta}} + o\left(\frac{1}{N^{2-3\beta}}\right)\right) \end{aligned}$$

Donc c_n^N converge vers 0 si $2 - 3\beta > 0$, c'est-à-dire à $\beta < \frac{2}{3}$. Sous cette condition, l'équivalence entre $(B_N)_N$ et $(D_N)_N$ est établie.

Bilan d'étape

Finalement, en prenant β compris strictement entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$ (par exemple $\beta = \frac{3}{5}$), on a bien :

- D'une part, quand $N \rightarrow \infty$:

$$B_N \sim \prod_{n=1}^{N^\beta} \left[1 - \frac{\sin(\frac{\pi n}{L})}{\pi n} it \right]$$

- D'autre part :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} C_N = 1$$

Par produit, on en déduit :

$$A_N \sim \prod_{n=1}^{N^\beta} \left[1 - \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{L}\right)}{\pi n} it \right]$$

Et finalement :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} A_N = \prod_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{L}\right)}{\pi n} it \right]$$

ce qui nous permet de déduire :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_{\frac{N}{L}, N}(t) = \varphi_L(t)$$

Ceci étant valable pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a établi la convergence simple de $\varphi_{\frac{N}{L}, N}$ vers φ_L .

Le théorème de convergence de Lévy nous permet d'en déduire la convergence en loi de la distribution du sous-échantillonnage d'un signal fini vers une distribution limite lorsque la taille du signal tend vers l'infini à facteur de sous-échantillonnage constant.

Annexe B

Calcul du taux de vortex moyen d'une image complexe *i.i.d.*

On suppose qu'on dispose d'une image complexe, dont les valeurs des pixels sont des réalisations de variables aléatoires circulaires gaussiennes *i.i.d.*

On va calculer la probabilité qu'un carré de 4 pixels adjacents, donc de la forme $\llbracket i, i+1 \rrbracket \times \llbracket j, j+1 \rrbracket$, mène à la détection d'un vortex. Cela revient à se demander si le quadrilatère du plan complexe reliant les valeurs des quatre pixels contient 0.

On va commencer par déterminer la probabilité que son enveloppe convexe contienne 0, puis on s'appuiera sur le résultat pour conclure.

B.1 Probabilité que 0 soit à l'intérieur de l'enveloppe convexe de quatre complexes aléatoires

On considère quatre variables aléatoires complexes *i.i.d.* z_1, z_2, z_3 et z_4 . Leur module suit une loi de Rayleigh de paramètre $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et leur phase une loi uniforme sur $[0, 2\pi[$. Module et phase sont indépendants. On note $z_j = r_j e^{i\phi_j}$.

On cherche la probabilité que l'enveloppe convexe de ces quatre points contienne 0. On note A cet évènement, et on note \mathcal{E} l'enveloppe convexe des z_j .

1. On va d'abord montrer que la loi en module n'a aucune importance, car la présence ou non de 0 dans l'enveloppe convexe des z_j est indépendante de leurs modules.

On va plus précisément montrer que l'enveloppe convexe de quatre points z_j (considérés ici comme des nombres et non des variables aléatoires) contient 0 si et seulement si celle des $e^{i\phi_j}$ le contient.

- Supposons que $0 \in \mathcal{E}$. Alors il existe des coefficients $(\lambda_j)_{1 \leq j \leq 4} \in (\mathbb{R}_+)^4$ non tous nuls tels que :

$$\sum_{j=1}^4 \lambda_j z_j = 0$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{j=1}^4 \lambda_j r_j e^{i\phi_j} = 0$$

En posant $\mu_j = \lambda_j r_j$, on dispose de tels coefficients pour les $e^{i\phi_j}$, qui contiennent donc 0 dans leur enveloppe convexe.

- Inversement, si on dispose de μ_j tels que $\sum_{j=1}^4 \mu_j e^{i\phi_j} = 0$, En prenant $\lambda_j = \frac{\mu_j}{r_j}$, les λ_j deviennent les coefficients pour les z_j .

On suppose donc pour toute la suite $z_j = e^{i\phi_j}$.

2. On a donc désormais affaire à quatre points du cercle unité. On va montrer que \mathcal{P} est équivalent à "les quatre points ne sont pas tous du même côté du plan complexe", c'est-à-dire qu'on ne peut pas tracer une droite passant par l'origine dont les quatre z_j sont d'un même côté.

- On va d'abord montrer la contraposée du sens direct de l'équivalence.

On suppose donc que tous les points sont du même côté d'une droite Δ passant par l'origine. Par invariance du problème par rotation, on peut supposer que cette droite est en fait l'axe vertical et que tous les z_j sont de partie réelle strictement positive.

Dans ce cas, toute combinaison linéaire des z_j à coefficients positifs non tous nuls est également de partie réelle strictement positive, et une telle combinaison linéaire ne peut valoir 0. 0 ne peut donc pas appartenir à \mathcal{E} .

- Démontrons à présent la contraposée du sens indirect de l'équivalence.

On suppose que 0 n'appartient pas à \mathcal{E} . Soit z_P la projection orthogonale de 0 sur \mathcal{E} , et soit Δ la droite incluant le côté de \mathcal{E} auquel z_P appartient. Par invariance du problème par rotation, on peut supposer que z_P est un réel strictement négatif, et que Δ est une droite verticale.

Δ étant tangente à \mathcal{E} , elle sépare le plan complexe en deux demi-plans dont l'un contient entièrement \mathcal{E} . Par définition de la projection orthogonale, $z_P/|z_P|$ donne la normale intérieure à \mathcal{E} en z_P , donc \mathcal{E} est contenu entièrement dans le demi-plan situé à gauche de Δ , défini par $\text{Re}(z) < z_P$. En particulier, tout z de \mathcal{E} vérifie donc $\text{Re}(z) < 0$. C'est donc le cas des z_j . En notant Δ' l'axe imaginaire pur, les z_j sont tous du même côté de Δ' .

3. Ces deux résultats préliminaires étant établis, il ne reste plus qu'à nous attaquer à la question qui nous intéresse, à savoir la probabilité de l'évènement A .

Les points précédents nous permettent de reformuler notre problème ainsi :

Soient $(\phi_j)_{1 \leq j \leq 4}$, i.i.d., suivant la même loi uniforme sur $[0, 2\pi[$. Quelle est la probabilité que les $e^{i\phi_j}$ soient tous d'un même côté du plan complexe ?

Et l'évènement A peut donc être redéfini comme "les $e^{i\phi_j}$ soient tous d'un même côté du plan complexe". Calculons sa probabilité.

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. On considère l'évènement B_θ :

"Parmi les ϕ_j , l'un d'entre eux est dans l'intervalle élémentaire $[\theta, \theta + d\theta[$ et les 3 autres sont dans l'intervalle précédent $[\theta - \pi, \theta[$ "

Ce dernier intervalle est bien sûr donné modulo 2π . La probabilité d'un B_θ est donnée par :

$$\begin{aligned} P(B_\theta) &= 4 \cdot \frac{d\theta}{2\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2\pi}\right)^3 \\ &= 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{d\theta}{2\pi} \end{aligned}$$

Le "4" correspond aux quatre possibilités pour le choix du ϕ_j qui sera dans $[\theta, \theta + d\theta[$, et les deux facteurs suivants aux deux sous-événements indépendants qui composent B_θ .

On a alors $A = \sqcup_\theta B_\theta$ (à un ensemble de mesure nulle près), et donc finalement :

$$\begin{aligned}
P(A) &= \int_{\theta=0}^{2\pi} P(B_\theta) \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot \frac{d\theta}{2\pi}
\end{aligned}$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad (\text{B.1})$$

B.2 Probabilité que l'interpolation bilinéaire génère un vortex

On se donne quatre pixels formant un carré du type $\llbracket i, i+1 \rrbracket \times \llbracket j, j+1 \rrbracket$. On note z_1, z_2, z_3, z_4 les valeurs de ces pixels, z_1 correspondant à un pixel quelconque et les suivants étant énumérés dans le sens direct (de la disposition des pixels, pas de leurs positions dans le plan complexe).

On note V l'évènement : "L'interpolation bilinéaire génère un vortex au milieu des quatre pixels". On va en fait calculer $P(V|A)$, puis on en déduira $P(V)$.

$$\begin{aligned}
P(V) &= P(V \cap A) \\
&= P(\cup_{0 \in \mathcal{E}} V \cap E_{\mathcal{E}}) \\
&= \sum_{0 \in \mathcal{E}} P(V|E_{\mathcal{E}})P(E_{\mathcal{E}})
\end{aligned}$$

où $E_{\mathcal{E}}$ est l'évènement " \mathcal{E} est l'enveloppe convexe de z_1, z_2, z_3, z_4 " et où l'union se fait sur l'ensemble des \mathcal{E} possibles contenant 0.

À \mathcal{E} fixé, "l'interpolation bilinéaire génère un vortex" est équivalent à "0 appartient au polygone $z_1 z_2 z_3 z_4$ ". Celui-ci ne coïncide pas nécessairement avec \mathcal{E} . En effet, trois configurations équiprobables sont possibles, correspondant respectivement aux cas où z_2, z_3 ou z_4 est le sommet opposé à z_1 dans \mathcal{E} . On note $O_j, 2 \leq j \leq 4$, l'évènement " z_j est le sommet opposé à z_1 dans \mathcal{E} ".

On a donc :

$$\begin{aligned}
P(V|E_{\mathcal{E}}) &= \sum_j P(V|E_{\mathcal{E}}, O_j)P(O_j) \\
&= 1/3 \sum_j P(V|E_{\mathcal{E}}, O_j)
\end{aligned}$$

Calculons les $P(V|E_{\mathcal{E}}, O_j)$:

- Si $O_3 \cup E_{\mathcal{E}}$ est réalisé, \mathcal{E} et $z_1 z_2 z_3 z_4$ coïncident. Autrement dit, $O_3 \cap E_{\mathcal{E}} \subset V$. On a donc : $P(V|A, O_3) = 1$.
- Les configurations correspondant à O_2 ou O_4 donnent deux polygones de surfaces disjointes, dont l'union correspond à la surface de \mathcal{E} . Autrement dit, l'un des $O_j \cap E_{\mathcal{E}}$ est inclus dans V et l'autre est d'intersection vide avec V . En probabilités, cela se traduit par $P(V|O_2, E_{\mathcal{E}}) + P(V|O_4, E_{\mathcal{E}}) = 1$ (l'un des deux termes du membre de gauche vaut 1, l'autre 0).

Ainsi, $P(V|E_{\mathcal{E}}) = 1/3 \times 2 = 2/3$.

Et finalement :

$$\begin{aligned}
P(V) &= \sum_{\mathcal{E}} P(V|E_{\mathcal{E}})P(E_{\mathcal{E}}) \\
&= \frac{2}{3} \sum_{\mathcal{E}} P(E_{\mathcal{E}}) \\
&= \frac{2}{3} P(A)
\end{aligned}$$

$$P(V) = \frac{1}{3}$$

Le taux moyen de vortex dans une image complexe circulaire gaussienne *i.i.d.* est donc d'un tiers.

Bibliographie

- [1] Joseph W. Goodman. *Speckle Phenomena in Optics : Theory and Applications*. Roberts & Company, Englewood, Colorado, 2007.
- [2] G. Maret and P. E. Wolf. Multiple light scattering from disordered media. The effect of brownian motion of scatterers. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, 65(4) :409–413, Décembre 1987.
- [3] D. J. Pine, D. A. Weitz, P. M. Chaikin, and E. Herbolzheimer. Diffusing wave spectroscopy. *Physical Review Letters*, 60(12) :1134–1137, Mars 1988.
- [4] D. J. Pine, D. A. Weitz, J. X. Zhu, and E. Herbolzheimer. Diffusing-wave spectroscopy : Dynamic light scattering in the multiple scattering limit. *Journal de Physique*, 51(18) :2101–2127, Septembre 1990.
- [5] R. Bandyopadhyay, A. S. Gittings, S. S. Suh, P. K. Dixon, and D. J. Durian. Speckle-visibility spectroscopy : A tool to study time-varying dynamics. *Review of Scientific Instruments*, 76(9) :093110, Septembre 2005.
- [6] A. F. Fercher and J. D. Briers. Flow visualization by means of single-exposure speckle photography. *Optics Communications*, 37(5) :326–330, Juin 1981.
- [7] J. D. Briers and S. Webster. Quasi real-time digital version of single-exposure speckle photography for full-field monitoring of velocity or flow fields. *Optics Communications*, 116(1) :36–42, Avril 1995.
- [8] Sergey S. Ul'yanov, V. V. Tuchin, A. A. Bednov, G. E. Brill, and E. I. Zakharova. The application of speckle interferometry for the monitoring of blood and lymph flow in microvessels. *Lasers in Medical Science*, 12(1) :31–41, Mars 1997.
- [9] J. David Briers. Laser Doppler, speckle and related techniques for blood perfusion mapping and imaging. *Physiological Measurement*, 22(4) :R35–R66, Octobre 2001.
- [10] Haiying Cheng and Timothy Q. Duong. Simplified laser-speckle-imaging analysis method and its application to retinal blood flow imaging. *Optics Letters*, 32(15) :2188–2190, Août 2007.
- [11] Cenk Ayata, Andrew K. Dunn, Yasemin Gursoy-OZdemir, Zhihong Huang, David A. Boas, and Michael A. Moskowitz. Laser speckle flowmetry for the study of cerebrovascular physiology in normal and ischemic mouse cortex. *Journal of Cerebral Blood Flow & Metabolism*, 24(7) :744–755, Juillet 2004.
- [12] Dan Zhu, Wei Lu, Yang Weng, Han Cui, and Qingming Luo. Monitoring thermal-induced changes in tumor blood flow and microvessels with laser speckle contrast imaging. *Applied Optics*, 46(10) :1911–1917, Avril 2007.
- [13] Ashwin B. Parthasarathy, S. M. Shams Kazmi, and Andrew K. Dunn. Quantitative imaging of ischemic stroke through thinned skull in mice with Multi Exposure Speckle Imaging. *Biomedical Optics Express*, 1(1) :246–259, Août 2010.

- [14] Muhammad Mohsin Qureshi, Joshua Brake, Hee-Jae Jeon, Haowen Ruan, Yan Liu, Abdul Mohaimen Safi, Tae Joong Eom, Changhuei Yang, and Euiheon Chung. In vivo study of optical speckle decorrelation time across depths in the mouse brain. *Biomedical Optics Express*, 8(11) :4855–4864, Novembre 2017.
- [15] Y. Aizu and T. Asakura. Bio-speckle phenomena and their application to the evaluation of blood flow. *Optics & Laser Technology*, 23(4) :205–219, Août 1991.
- [16] Matthijs Draijer, Erwin Hondebrink, Ton van Leeuwen, and Wiendelt Steenbergen. Twente Optical Perfusion Camera : System overview and performance for video rate laser Doppler perfusion imaging. *Optics Express*, 17(5) :3211–3225, Mars 2009.
- [17] Hee-Jae Jeon, Muhammad Mohsin Qureshi, Seung Yeob Lee, Jaya Dilip Badadhe, Heejoo Cho, and Euiheon Chung. Laser speckle decorrelation time-based platelet function testing in microfluidic system. *Scientific Reports*, 9(1) :16514, Novembre 2019.
- [18] Zeinab Hajjarian and Seemantini K. Nadkarni. Evaluating the Viscoelastic Properties of Tissue from Laser Speckle Fluctuations. *Scientific Reports*, 2(1) :316, Mars 2012.
- [19] Pavel Zakharov, Andreas Völker, Alfred Buck, Bruno Weber, and Frank Scheffold. Quantitative modeling of laser speckle imaging. *Optics Letters*, 31(23) :3465–3467, Décembre 2006.
- [20] Sean J. Kirkpatrick, Donald D. Duncan, Ruikang K. Wang, and Monica T. Hinds. Quantitative temporal speckle contrast imaging for tissue mechanics. *Journal of the Optical Society of America A*, 24(12) :3728–3734, Décembre 2007.
- [21] Ashwin B. Parthasarathy, W. James Tom, Ashwini Gopal, Xiaojing Zhang, and Andrew K. Dunn. Robust flow measurement with multi-exposure speckle imaging. *Optics Express*, 16(3) :1975–1989, Février 2008.
- [22] J. David Briers. Laser Doppler and time-varying speckle : A reconciliation. *Journal of the Optical Society of America A*, 13(2) :345, Février 1996.
- [23] David Briers, Donald D. Duncan, Evan Hirst, Sean J. Kirkpatrick, Marcus Larsson, Wiendelt Steenbergen, Tomas Stromberg, and Oliver B. Thompson. Laser speckle contrast imaging : Theoretical and practical limitations. *Journal of Biomedical Optics*, 18(6) :066018, Juin 2013.
- [24] Dmitry D. Postnov, Jianbo Tang, Sefik Evren Erdener, Kivılcım Kılıç, and David A. Boas. Dynamic light scattering imaging. *Science Advances*, 6(45) :eabc4628, Novembre 2020.
- [25] Joseph W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. Roberts & Company, Englewood, Colorado, 3rd edition, 2005.
- [26] Alessandro Ferretti, Claudio Prati, and Fabio Rocca. Permanent Scatters in SAR Interferometry. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 39(1) :8–20, 2001.
- [27] Jean-Marie Nicolas. Un nouveau formalisme pour la loi de Rice. Technical Report 2018D003, Télécom ParisTech, Mai 2018.
- [28] Jan Dupont, Xavier Orlik, A Ghabbach, Myriam Zerrad, Gabriel Soriano, and Claude Amra. Polarization analysis of speckle field below its transverse correlation width : Application to surface and bulk scattering. *Optics Express*, 22(20) :24133, 2014.
- [29] Jacques Sorrentini, Myriam Zerrad, and Claude Amra. Statistical signatures of random media and their correlation to polarization properties. *Optics letters*, 34(16) :2429–2431, Août 2009.
- [30] Jan Dupont. *Imagerie Polarimétrique de Speckle Statique Pour l'étude de Matériaux et Dynamique Pour La Détection de Micro-Vascularisation Tumorale*. PhD Thesis, ONERA, Toulouse, Février 2017.
- [31] Ludwig Boltzmann. *Vorlesungen über Gastheorie*. J.A. Barth, Leipzig, 1896-98.

- [32] E. G. Abramochkin and V. G. Volostnikov. Two-dimensional phase problem : Differential approach. *Optics Communications*, 74(3-4) :139–143, Décembre 1989.
- [33] O. V. Angelsky, C. Yu. Zenkova, M. P. Gorsky, and P. A. Ryabiy. Search for Methods of Restoring Spatial Phase Distribution of Complex Optical Fields. *The Open Optics Journal*, 8 :3–13, 2014.
- [34] James R. Fienup. Phase retrieval algorithms : A personal tour [Invited]. *Applied Optics*, 52(1) :45, Janvier 2013.
- [35] Kishore Jaganathan, Yonina C. Eldar, and Babak Hassibi. Phase Retrieval : An Overview of Recent Developments. In *Optical Compressive Imaging*. CRC Press, 2016.
- [36] M. P. Gorsky, P. A. Ryabiy, and D. I. Ivanskyi. 2D Hilbert transform for phase retrieval of speckle fields. In Khan M. Iftakharuddin, Abdul A. S. Awwal, Mireya García Vázquez, Andrés Márquez, and Mohammad A. Matin, editors, *Proc. SPIE 9970*, volume 9970, page 99701N. International Society for Optics and Photonics, Septembre 2016.
- [37] Subhash Kak. The Discrete Hilbert Transform. *Proceedings of the IEEE*, 58 :585–586, Mai 1970.
- [38] C. Yu. Zenkova, M. P. Gorsky, and P. A. Ryabiy. Phase retrieval of speckle fields based on 2D Hilbert transform. *Optical Memory and Neural Networks*, 24(4) :303–308, Octobre 2015.
- [39] O. V. Angelsky, M. P. Gorsky, S. G. Hanson, V. P. Lukin, I. I. Mokhun, P. V. Polyanskii, and P. A. Ryabiy. Optical correlation algorithm for reconstructing phase skeleton of complex optical fields for solving the phase problem. *Optics Express*, 22(5) :6186, Mars 2014.
- [40] Wei Wang, Tomoaki Yokozeki, Reika Ishijima, Atsushi Wada, Yoko Miyamoto, Mitsuo Takeda, and Steen G. Hanson. Optical vortex metrology for nanometric speckle displacement measurement. *Optics Express*, 14(1) :120, Janvier 2006.
- [41] Sean Kirkpatrick, Kosar Khaksari, Dennis Thomas, and Donald D Duncan. Optical vortex behavior in dynamic speckle fields. *Journal of Biomedical Optics*, 17 :050504, Mai 2012.
- [42] A. Federico, G. H. Kaufmann, G. E. Galizzi, H. Rabal, M. Trivi, and R. Arizaga. Simulation of dynamic speckle sequences and its application to the analysis of transient processes. *Optics Communications*, 260(2) :493–499, Avril 2006.
- [43] Joseph W. Goodman. *Statistical Optics*. John Wiley & Sons, second edition, 2000.
- [44] Leonard Mandel. Fluctuations of Photon Beams : The Distribution of the Photo-Electrons. *Proceedings of the Physical Society*, 74(3) :233–243, 1959.
- [45] Julio C. Ramirez-San-Juan, Ruben Ramos-Garcia, Ileana Guizar-Iturbide, Gabriel Martinez-Niconoff, and Bernard Choi. Impact of velocity distribution assumption on simplified laser speckle imaging equation. *Optics Express*, 16(5) :3197–3203, Mars 2008.
- [46] Donald D. Duncan, Sean J. Kirkpatrick, and James C. Gladish. What is the proper statistical model for laser speckle flowmetry? In *Complex Dynamics and Fluctuations in Biomedical Photonics V*, volume 6855, page 685502. International Society for Optics and Photonics, Février 2008.
- [47] R. Bonner and R. Nossal. Model for laser Doppler measurements of blood flow in tissue. *Applied Optics*, 20(12) :2097, Juin 1981.
- [48] A. J. F Siegert. On the fluctuations in signals returned by many independently moving scatterers. Technical Report 465, Radiation Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., 1943.
- [49] P.-A. Lemieux and D. J. Durian. Investigating non-Gaussian scattering processes by using nth-order intensity correlation functions. *Journal of the Optical Society of America A*, 16(7) :1651–1664, Juillet 1999.

- [50] Bruce J. Berne and Robert Pecora. *Dynamic Light Scattering - With Applications to Chemistry, Biology and Physics*. Dover Publications, New York, second edition, 2000.
- [51] Mark Golberg, Ran Califa, Javier Garcia, and Zeev Zalevsky. Analyzing the requirements of high-speed camera parameters for enhanced laser speckle sensing of flow dynamics. *Engineering Research Express*, 2(3) :035032, Septembre 2020.
- [52] J. W. Goodman. Some effects of target-induced scintillation on optical radar performance. *Proceedings of the IEEE*, 53(11) :1688–1700, Novembre 1965.
- [53] N. Takai, T. Iwai, and T. Asakura. Real-time velocity measurement for a diffuse object using zero-crossings of laser speckle. *Journal of the Optical Society of America*, 70(4) :450–455, Avril 1980.
- [54] Haiying Cheng, Qingming Luo, Zheng Wang, Lei Yao, Sergey S. Ulyanov, Ekateryna I. Zakharova, and Shaoqun Zeng. Application of laser speckle interferometry for monitoring the dynamics of lymph flow. In *International Workshop on Photonics and Imaging in Biology and Medicine*, volume 4536, pages 130–136. International Society for Optics and Photonics, Avril 2002.
- [55] Zhiqiang Xu, Lionel Carrion, and Roman Maciejko. A zero-crossing method applied to Doppler OCT. *Optics Express*, 16 :4394–412, Avril 2008.
- [56] S. O. Rice. Mathematical analysis of random noise. *The Bell System Technical Journal*, 24(1) :46–156, Janvier 1945.
- [57] J. T. Barnett. Zero-Crossings of Random Processes with Application to Estimation and Detection. In Farokh Marvasti, editor, *Nonuniform Sampling : Theory and Practice*, Information Technology : Transmission, Processing, and Storage, pages 393–437. Springer US, Boston, MA, 2001.
- [58] N. Donald Ylvisaker. The Expected Number of Zeros of a Stationary Gaussian Process. *Annals of Mathematical Statistics*, 36(3) :1043–1046, Juin 1965.
- [59] Benjamin Kedem. On frequency detection by zero-crossings. *Signal Processing*, 10(3) :303–306, Avril 1986.
- [60] Bruce D Lucas and Takeo Kanade. An Iterative Image Registration Technique with an Application to Stereo Vision. In *Proceedings of the 7th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, volume 2, pages 674–679, San Francisco, CA, USA, 1981. Morgan Kaufmann Publishers Inc.
- [61] Charles D. Kuglin. The phase correlation image alignment method. In *Proceedings of the International Conference Cybernetics Society*, pages 163–165, New York, NY, USA, 1975.
- [62] Azriel Rosenfeld and Avinash C. Kak. *Digital Picture Processing*, volume I & II of *Computer Science and Applied Mathematics*. Academic Press, San Diego, CA, USA, second edition edition, 1982.
- [63] Lisa Gottesfeld Brown. A survey of image registration techniques. *ACM Computing Surveys*, 24(4) :325–376, Décembre 1992.
- [64] Jair E. Garcia, Adrian G. Dyer, Andrew D. Greentree, Gale Spring, and Philip A. Wilksch. Linearisation of RGB Camera Responses for Quantitative Image Analysis of Visible and UV Photography : A Comparison of Two Techniques. *PLoS ONE*, 8(11), Novembre 2013.
- [65] Oliver B. Thompson and Michael K. Andrews. Tissue perfusion measurements : Multiple-exposure laser speckle analysis generates laser Doppler-like spectra. *Journal of Biomedical Optics*, 15(2) :027015, Mars 2010.
- [66] Ingemar Fredriksson and Marcus Larsson. On the equivalence and differences between laser Doppler flowmetry and laser speckle contrast analysis. *Journal of Biomedical Optics*, 21(12) :126018, Décembre 2016.

- [67] Donald D. Duncan and Sean J. Kirkpatrick. The copula : A tool for simulating speckle dynamics. *Journal of the Optical Society of America A*, 25(1) :231–237, 2008.
- [68] G. H. Sendra, H. J. Rabal, M. Trivi, and R. Arizaga. Numerical model for simulation of dynamic speckle reference patterns. *Optics Communications*, 282(18) :3693–3700, Septembre 2009.
- [69] W. Shockley. Diffusion and Drift of Minority Carriers in Semiconductors for Comparable Capture and Scattering Mean Free Paths. *Physical Review*, 125(5) :1570–1576, Mars 1962.
- [70] Rémy Abergel and Lionel Moisan. The Shannon Total Variation. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2017.
- [71] J. L. Garcia-Palacios. Introduction to the theory of stochastic processes and Brownian motion problems. *arXiv :cond-mat/0701242*, Janvier 2007.
- [72] Ludovic Margerin, Michel Campillo, and Bart Van Tiggelen. Monte Carlo simulation of multiple scattering of elastic waves. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 105(B4) :7873–7892, 2000.
- [73] Nancy L. Swanson, Barton D. Billard, and Theresa L. Gennaro. Limits of optical transmission measurements with application to particle sizing techniques. *Applied Optics*, 38(27) :5887–5893, Septembre 1999.
- [74] Y. Piederrière, J. Cariou, Y. Guern, B. Le Jeune, G. Le Brun, and J. Lotrian. Scattering through fluids : Speckle size measurement and Monte Carlo simulations close to and into the multiple scattering. *Optics Express*, 12(1) :176–188, Janvier 2004.
- [75] Lionel Moisan. Modeling and image processing. Manuel destiné à un cours de M2, 2012.
- [76] William Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications - Vol. II*. John Wiley & Sons, 1966.
- [77] Annemarie Nadort, Rutger G. Woolhuis, Ton G. van Leeuwen, and Dirk J. Faber. Quantitative laser speckle flowmetry of the in vivo microcirculation using sidestream dark field microscopy. *Biomedical Optics Express*, 4(11) :2347–2361, Novembre 2013.
- [78] Richard Barakat. First-order Probability Densities of Laser Speckle Patterns Observed through Finite-size Scanning Apertures. *Optica Acta*, 20(9) :729–740, Septembre 1973.
- [79] A. A. Scribot. First-order probability density functions of speckle measured with a finite aperture. *Optics Communications*, 11(3) :238–241, Juilliet 1974.
- [80] A. M. Mathai. Storage capacity of a dam with gamma type inputs. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 34(1) :591–597, Décembre 1982.
- [81] P. G. Moschopoulos. The distribution of the sum of independent gamma random variables. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 37(1) :541–544, Décembre 1985.

Résumé

Supposons qu'on image en transmission ou en rétrodiffusion un milieu éclairé en lumière cohérente. Supposons également que ce milieu est tel que la phase du champ rétrodiffusé apparaît en tout point comme aléatoire. On obtient alors un motif également aléatoire constitué de grains : du speckle.

Si, de plus, le milieu varie au cours du temps, le signal de speckle fluctue également. Imager certaines statistiques temporelles du signal peut alors permettre d'imager le mouvement : c'est l'objet de l'imagerie de speckle dynamique. Ses applications sont nombreuses : étude de suspensions colloïdales, de séchage de peinture, imagerie médicale. Elle s'appuie souvent sur l'autocorrélation temporelle du signal : la forme de cette dernière renseigne sur le type de mouvement, et son temps caractéristique de décroissance est lié à la vitesse de fluctuation du milieu.

Cependant, faute de caméras suffisamment rapides, il a longtemps été impossible d'accéder directement à l'autocorrélation temporelle des signaux rencontrés expérimentalement. L'accès aux caractéristiques du mouvement n'était donc possible que via des méthodes indirectes, comme le contraste, assez imprécises et qualitatives. Toutefois, ces dernières années, la diffusion de plus en plus large de caméras haute cadence (jusqu'à plusieurs dizaines de kHz), a changé la donne. La voie s'est ainsi ouverte à un raffinement considérable des modèles et à des gains importants en précision et en rapidité de traitement.

Une telle caméra a été utilisée dans le cadre de ces travaux de thèse. Elle a permis d'imager la vascularisation sous-cutanée sur des zones variées du corps humain. On a ainsi pu évaluer la pertinence de plusieurs paramètres pour imager qualitativement le mouvement : l'efficacité du premier terme de la fonction d'autocorrélation, par exemple, a été mise en évidence. Dans le même temps, on a aussi pu constater certaines limites du speckle dynamique que la très haute cadence ne permettait pas de lever. Ainsi, au-delà d'un certain seuil, augmenter la cadence n'apporte plus d'information, tandis que l'hypothèse de stationnarité du signal est ébranlée par les effets de la pulsation cardiaque. Ces limites ne remettent pas en question l'apport considérable de la haute cadence, mais illustrent à quel point il s'agit d'un changement de paradigme.

Pour en prendre la pleine mesure et exploiter au maximum le gain en résolution temporelle permis par les caméras rapides, il est nécessaire, en parallèle des études expérimentales, d'affiner les modèles existants. C'est dans cette optique qu'un travail de modélisation et de simulation du système d'imagerie a été mené. Notre but était de relier le plus précisément possible un type de dynamique du milieu aux statistiques du signal obtenu. Ainsi, il a été possible de redémontrer rigoureusement et de nuancer des résultats tenus pour phénoménologiques dans la littérature, tels que certains modèles d'autocorrélation temporelle. Ces résultats fondent la possibilité, à terme, de remonter à des grandeurs physiques fiables à partir d'un signal de speckle dynamique.

Enfin, comme les modèles inverses de speckle dynamique s'appuient sur des statistiques parfois complexes sur les signaux, il convient de s'assurer que celles-ci ne sont pas altérées par des traitements tiers. En particulier, beaucoup d'opérations de traitement du signal, notamment de rééchantillonnage (sur-échantillonnage, sous-échantillonnage, recalage) sont effectuées sans conscience des effets considérables qu'elles peuvent avoir sur les statistiques du signal. Un troisième axe de ces travaux a donc consisté à caractériser ces effets en fonction des méthodes utilisées. Il a par exemple été établi qu'un filtre passe-bas (préalable à un sous-échantillonnage) tend à générer d'autant plus de corrélation longue distance qu'il est resserré en fréquence — et donc qu'il permet d'éviter l'aliasing. Le même type de résultat a été établi avec les méthodes d'interpolation.

Imagerie de speckle dynamique haute cadence appliquée à la vascularisation cutanée et sous-cutanée

Supposons qu'on image en transmission ou en rétrodiffusion un milieu éclairé en lumière cohérente. Supposons également que ce milieu est tel que la phase du champ rétrodiffusé apparaît en tout point comme aléatoire. On obtient alors un motif également aléatoire constitué de grains: du speckle. Si, de plus, le milieu varie au cours du temps, le signal de speckle fluctue également. Imager certaines statistiques temporelles du signal peut alors permettre d'imager le mouvement: c'est l'objet de l'imagerie de speckle dynamique. Ses applications sont nombreuses : étude de suspensions colloïdales, de séchage de peinture, imagerie médicale. Elle s'appuie souvent sur l'autocorrélation temporelle du signal: la forme de cette dernière renseigne sur le type de mouvement, et son temps caractéristique de décroissance est lié à la vitesse de fluctuation du milieu. Cependant, faute de caméras suffisamment rapides, il a longtemps été impossible d'accéder directement à l'autocorrélation temporelle des signaux rencontrés expérimentalement. L'accès aux caractéristiques du mouvement n'était donc possible que via des méthodes indirectes, comme le contraste, assez imprécises et qualitatives. Toutefois, ces dernières années, la diffusion de plus en plus large de caméras haute cadence (jusqu'à plusieurs dizaines de kHz), a changé la donne. La voie s'est ainsi ouverte à un raffinement considérable des modèles et à des gains importants en précision et en rapidité de traitement. Une telle caméra a été utilisée dans le cadre de ces travaux de thèse. Elle a permis d'imager la vascularisation sous-cutanée sur des zones variées du corps humain. On a ainsi pu évaluer la pertinence de plusieurs paramètres pour imager qualitativement le mouvement: l'efficacité du premier terme de la fonction d'autocorrélation, par exemple, a été mise en évidence. Dans le même temps, on a aussi pu constater certaines limites du speckle dynamique que la très haute cadence ne permettait pas de lever. Ainsi, au-delà d'un certain seuil, augmenter la cadence n'apporte plus d'information, tandis que l'hypothèse de stationnarité du signal est ébranlée par les effets de la pulsation cardiaque. Ces limites ne remettent pas en question l'apport considérable de la haute cadence, mais illustrent à quel point il s'agit d'un changement de paradigme. Pour en prendre la pleine mesure et exploiter au maximum le gain en résolution temporelle permis par les caméras rapides, il est nécessaire, en parallèle des études expérimentales, d'affiner les modèles existants. C'est dans cette optique qu'un travail de modélisation et de simulation du système d'imagerie a été mené. Notre but était de relier le plus précisément possible un type de dynamique du milieu aux statistiques du signal obtenu. Ainsi, il a été possible de redémontrer rigoureusement et de nuancer des résultats tenus pour phénoménologiques dans la littérature, tels que certains modèles d'autocorrélation temporelle. Ces résultats fondent la possibilité, à terme, de remonter à des grandeurs physiques fiables à partir d'un signal de speckle dynamique. Enfin, comme les modèles inverses de speckle dynamique s'appuient sur des statistiques parfois complexes sur les signaux, il convient de s'assurer que celles-ci ne sont pas altérées par des traitements tiers. En particulier, beaucoup d'opérations de traitement du signal, notamment de rééchantillonnage (sur-échantillonnage, sous-échantillonnage, recalage) sont effectuées sans conscience des effets considérables qu'elles peuvent avoir sur les statistiques du signal. Un troisième axe de ces travaux a donc consisté à caractériser ces effets en fonction des méthodes utilisées. Il a par exemple été établi qu'un filtre passe-bas (préalable à un sous-échantillonnage) tend à générer d'autant plus de corrélation longue distance qu'il est resserré en fréquence --- et donc qu'il permet d'éviter l'aliasing. Le même type de résultat a été établi avec les méthodes d'interpolation.

Mots-clés :

SPECKLE ; LASER ; IMAGERIE

High-speed dynamic speckle imaging applied to cutaneous and subcutaneous vasculature

Let us assume we use an optical system to image a medium which is illuminated with coherent light. Let us also assume this medium is such that the backscattered phase field appears as random at any point. The resulting image will then exhibit an equally random pattern, called speckle. Furthermore, if this medium evolves with time, the speckle signal will also fluctuate. By extracting appropriate temporal parameters from the signal and imaging them, we can hopefully map the motion of the medium: this is the whole point of dynamic speckle imaging. This kind of technique was applied for instance to the study of colloidal suspensions, dry paint or a wide range of biological tissues. Speckle imaging methods often rely on the temporal autocorrelation of the signal. Indeed, its shape provides precious information about the kind of motion taking place in the medium, and its characteristic decreasing time is linked to the time scale of the motion (speed or diffusion coefficient, for instance). However, for lack of cameras with sufficient acquisition speed compared to observed motions, directly sampling the temporal autocorrelation of the experimentally-acquired signals was impossible for decades. This meant the properties of the motion could only be accessed through indirect methods, such as contrast, which were rather imprecise and qualitative. Nonetheless, in the last few years, high-speed cameras (with frequencies up to a few dozens kilohertz) have become more and more available. This opened a way for a considerable refinement of the models used, and important improvements in precision and processing time. Such a camera was used for my thesis work. It enabled us to image the subcutaneous vasculature of various areas of the human body. We could then evaluate the relevance of several qualitative imaging parameters: for example, we were able to demonstrate the effectiveness of the first term of the autocorrelation function. We could also notice the limits of the dynamic speckle imaging technique, even at high speed. For instance, beyond a certain threshold, increasing the acquisition frequency does not bring any supplementary information, whereas the hypothesis that the signal is stationary is made rather bold by the effects of the heartbeat. These issues do not question the considerable improvements enabled by high-frequency imaging, but they illustrate how much this is a paradigm shift. In order to measure the scope of this shift and to take as much advantage as possible of the gain in time resolution, the existing models also needed to be refined. With this in mind, we carried out a full modeling of our system, together with the building of a simulation program. Our purpose was to link as precisely as possible a given type of dynamics with the statistics of our signal. This enabled us, for instance, to properly demonstrate and qualify some well-known results, such as some time autocorrelation models, which were presented as obvious or phenomenological in the literature. These results may pave the way for the ability, in the longer term, to reliably infer physical parameters from a dynamic speckle signal. The last important point we focused on was the following: as inverse models used in dynamic speckle imaging sometimes rely on complex statistics on the signals, one should make sure these are not altered by incidental processing. In particular, many signal processing operations, for instance resampling (including upsampling, downsampling, registration) are performed without any awareness that they might have undesired effects on the statistics of the signal. Therefore, we tried to characterize these effects with respect to the methods used. For instance, we showed that a low-pass filter (required before subsampling) generates more long-distance correlation if it is narrow in the frequency space - that is, if it is good at preventing aliasing. We obtained a similar result with interpolation methods.

Keywords :

SPECKLE ; MEDICAL IMAGING ; SIGNAL PROCESSING



BP 80100 - Chemin de la Hunière FR-91123 PALAISEAU CEDEX - Tél. : +33 1 80 38 60 60 - Fax : +33 1 80 38 65 10

www.onera.fr