



**HAL**  
open science

# Techniques de simulation multi-résolutions en méthode SPH pour applications industrielles

Joffrey Chanéac

► **To cite this version:**

Joffrey Chanéac. Techniques de simulation multi-résolutions en méthode SPH pour applications industrielles. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Ecole Centrale de Lyon, 2023. Français. NNT : 2023ECDL0013 . tel-04055872v1

**HAL Id: tel-04055872**

**<https://hal.science/tel-04055872v1>**

Submitted on 3 Apr 2023 (v1), last revised 18 Apr 2023 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ÉCOLE  
CENTRALE LYON

N° d'ordre NNT : 2023ECDL0013

THÈSE de DOCTORAT de L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON  
membre de l'Université de Lyon

École Doctorale N° 162  
Mécanique, Énergétique, Génie Civil et Acoustique

Spécialité de doctorat : Mécanique des fluides

Soutenue publiquement le 21/03/2023, par :

Joffrey CHANÉAC

---

# Techniques de simulation multi-résolutions en méthode SPH, pour applications industrielles

---

Devant le jury composé de :

KHELLADI, Sofiane	Professeur des universités	ENSAM, LIFSE	Président
FIVEL, Marc	Professeur des universités	Grenoble INP, SIMaP	Rapporteur
LE TOUZÉ, David	Professeur des universités	ECN, LHEEA	Rapporteur
BLANCHET, Marie-Christophette	Maître de conférence	ECL, ICJ	Examinateur
AUBERT, Stéphane	Professeur des universités	ECL, LMFA	Directeur de thèse
DUQUESNE, Pierre	Maître de conférence	ECL, LMFA	Co-encadrant
MARONGIU, Jean-Christophe	Docteur	Andritz Hydro	Co-encadrant



## REMERCIEMENTS

Même les bonnes choses ont une fin. Ce document est l’aboutissement de mes travaux de recherche en tant que doctorant. Il atteste que je viens de franchir une étape importante de ma vie scientifique mais également personnelle. Il va de soi que mon développement n’aurait pu se faire sans l’appui des nombreuses personnes m’ayant côtoyé. C’est tout l’objet de cette section, il est temps pour moi de remercier les personnes qui ont su m’accompagner durant ces quelques années.

En premier lieu, je tiens à remercier l’ensemble des membres du jury, et notamment les deux rapporteurs de cette thèse Marc FIVEL et David LE TOUZÉ qui ont acceptés d’examiner ce document. Je remercie Sofiane KHELLADI d’avoir accepté de présider mon jury de thèse.

Remercier l’École Centrale de Lyon de m’avoir ouvert ses portes à l’été 2016, d’abord en temps qu’élève-ingénieur, puis de nouveau à l’hiver 2020 en temps que doctorant me tient ensuite à cœur. Je remercie ainsi les membres du LMFA, trop nombreux pour tous les citer, qui ont su m’apporter ce dont j’avais besoin. Un grand merci à mon directeur de thèse Stéphane AUBERT de m’avoir accordé l’attention nécessaire et d’avoir su guider mes travaux. Sa patience, sa disponibilité et surtout ses conseils ont contribué à alimenter ma réflexion. Il a été d’un grand soutien dans l’élaboration de ce mémoire. Je remercie aussi mon co-directeur de thèse Pierre DUQUESNE qui a toujours su trouver les mots et m’aider à garder des objectifs de développement clairs. Je le remercie de m’avoir encadré, orienté, aidé et conseillé. Ses conseils de rédaction ont été très précieux. Je remercie également Laurent POUILLOUX avec qui j’ai apprécié les échanges. Enfin, comment ne pas citer Marie-Christophette BLANCHET et Laurent BLANC que je remercie pour leur accompagnement en temps que comité de suivi individuel et qui ont su m’aiguiller dans mes décisions.

Comme un écho à mes travaux de fin d’études d’ingénieur, je souhaite à présent remercier l’ensemble des équipes d’ANDRITZ Hydro pour leur accueil et la chance qui m’a été donnée. En particulier, j’adresse mes remerciements à mon co-directeur de thèse Jean-Christophe MARONGIU pour sa supervision, son attention et pour ses conseils tout au long de la thèse. Il a partagé ses connaissances et expériences dans ce milieu, tout en m’accordant sa confiance et une large indépendance dans l’exécution de mes travaux.

Incontournablement, je clos le tour des remerciements en mentionnant le CIRT (Consortium Industrie-Recherche en Turbomachines) que je remercie pour son soutien et notamment son directeur Jérôme BOUDET.

Somme toute comme un retour aux sources, je termine en Ardèche pour remercier ma famille. Mes parents, d’une part, qui m’ont permis de grandir dans un environnement propice à l’éveil intellectuel et à l’ouverture sur le monde. Mes grand-parents, d’autre part, m’ayant prodigué de précieux conseils dans la vie. Je termine mes remerciements par ceux dirigés vers celle avec qui je partage ma vie. Je remercie ainsi ma fiancée de me soutenir dans mes décisions et mon travail, quel que soit mes niveaux de stress et de sommeil.



Selon les dernières projections du Groupe d'experts Inter-gouvernemental sur l'Évolution du Climat (GIEC), les émissions globales de gaz à effet de serre doivent encore diminuer de moitié à l'horizon 2030 afin de respecter l'Accord de Paris. Pour y parvenir, le GIEC recommande en particulier d'accroître la production mondiale d'hydroélectricité. Cependant, le développement des machines hydrauliques est aujourd'hui freiné par des limitations techniques. Il est notamment nécessaire de mieux caractériser la physique de l'écoulement mis en jeu afin d'optimiser ces technologies. En complément aux études en laboratoire, la simulation numérique des écoulements est un outil indispensable à intégrer au processus de conception.

La méthode sans maillage SPH-ALE présente un formalisme qui est particulièrement bien adapté pour simuler de tels écoulements. La communauté juge toutefois que cette méthode n'est actuellement pas exploitable à son plein potentiel à cause de ses coûts, notamment dus à l'utilisation contrainte de pas de discrétisation uniformes en espace et en temps. Ainsi, pour garantir la capture précise d'un phénomène borné spatio-temporellement, le coût d'une simulation augmente fortement puisqu'il s'avère nécessaire de discrétiser finement l'entièreté de l'écoulement. L'enjeu de ces travaux est de rendre cette méthode plus précise et compétitive.

Une nouvelle méthode appelée HAPR-SPH-ALE-DTS a été développée. Elle présente un formalisme à multi-résolutions spatiale et temporelle. D'une part, le formalisme de la méthode SPH-ALE a été révisé selon la technique du « *Dual-Time Stepping* » (DTS) afin d'en assurer la stabilité temporelle inconditionnelle. Les simulations peuvent ainsi être conduites avec de plus grands pas en temps. De plus, en bénéficiant de la seconde échelle temporelle introduite, une stratégie visant à corriger le mouvement des particules a été développée afin d'améliorer la consistance du schéma numérique sans modifier les propriétés physiques de l'écoulement. D'autre part, ces travaux ont également aboutit au développement d'une nouvelle technique de raffinement zonal adaptée au formalisme SPH : l'HAPR (« *Hybridized Adaptative Particle Refinement* »). Celle-ci consiste en un couplage SPH-SPH de deux résolutions, grossière et fine, interagissant indirectement par recouvrement au moyen de particules non-matérielles. L'HAPR permet ainsi de discrétiser plus finement les régions d'intérêt de l'écoulement, sans pour autant recourir à une résolution uniformément fine.

La pertinence des techniques multi-résolutions proposées est jugée robuste sur un ensemble de cas tests académiques complémentaires. Le premier est un cas eulérien d'écoulement quasi-1D dans un tube à choc. Pour aller plus loin, l'analyse est étendue à la simulation lagrangienne 2D d'un canal oscillant. L'étude spécifique aux techniques multi-résolutions en temps est ensuite complétée par la simulation des tourbillons de Taylor-Green. Enfin, la simulation d'un jet plan impactant une plaque plane en incidence normale clôt cette étude en combinant les deux approches, DTS et HAPR.

**Mots-clés** : SPH-ALE ; couplage ; intégration implicite ; techniques multi-résolutions ; APR ; HAPR ; DTS ; turbines hydrauliques.

The latest Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC) report finds that unless there are immediate, rapid and large-scale reductions in greenhouse gas emissions, limiting warming to close to  $1.5^{\circ}\text{C}$  will be beyond reach. These environmental issues lead to an increasing investment in renewable energy sources. In particular, hydropower enjoys continuing popularity. However, further improvements are needed for overtaking some current technical limitations. Hence, it is of paramount importance that flows are properly taken into account in the design phase. Numerical simulation, together with model tests, is an appropriate way to do so.

The meshless SPH-ALE method presents a formalism that is particularly well suited in simulating such flows. However, the community considers that this method is currently not exploitable to its full potential because of its costs, notably due to the constrained use of uniform discretization steps in space and time. Thus, in order to guarantee the accurate capture of a spatio-temporally bounded phenomenon, the cost of a simulation increases greatly since it is necessary to finely discretise the entire flow. The challenge of this work is to make this method more accurate and competitive.

A new method called HAPR-SPH-ALE-DTS that has a spatial and temporal multi-resolution formalism is proposed. On the one hand, the formalism of the SPH-ALE method has been revised according to the DTS technique in order to ensure its unconditional temporal stability. The simulations can thus be conducted with larger time steps. Furthermore, by taking advantage of the second time scale introduced, a particle shifting strategy was developed to improve the consistency of the numerical scheme without changing the physical properties of the flow. On the other hand, this work also led to the development of a new local refinement technique adapted to the SPH formalism : HAPR (Hybridized Adaptative Particle Refinement). This consists of an SPH-SPH coupling of overlapping coarse and fine resolutions, interacting indirectly through non-material particles. HAPR thus allows a finer discretisation of the interest regions in the flow, without resorting to a uniformly fine resolution of the fluid domain.

The relevance of the proposed multi-resolution techniques is judged robust on a set of complementary academic test cases. The first one is an Eulerian case of quasi-1D flow in a shock tube. To go further, the analysis is extended to the 2D Lagrangian simulation of an oscillating channel. The specific study of multi-resolution time techniques is then completed by the simulation of Taylor-Green vortices. Finally, the simulation of a plane jet impacting a flat plate at normal incidence closes this study by combining both approaches, DTS and HAPR.

**Keywords :** SPH-ALE ; adaptivity ; implicit method ; multi-résolution scheme ; APR ; HAPR ; DTS ; hydraulic turbines.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Remerciements</b>	<b>iii</b>
<b>Résumé</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Table des figures</b>	<b>iv</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xiv</b>
<b>Notations et acronymes</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Méthodes de simulation sans maillage</b>	<b>7</b>
<b>2 Méthode particulière SPH-ALE</b>	<b>8</b>
2.1 Équations physiques . . . . .	9
2.2 Discrétisation spatiale particulière . . . . .	10
2.3 Conditions aux limites . . . . .	13
2.3.1 Condition de paroi solide . . . . .	13
2.3.2 Condition de périodicité . . . . .	13
2.3.3 Condition de surface libre . . . . .	13
2.3.4 Condition d'entrée . . . . .	13
2.3.5 Condition de sortie . . . . .	14
2.4 Discrétisation temporelle . . . . .	15
2.5 Corrections numériques usuelles de la méthode SPH-ALE . . . . .	17
2.5.1 Correction du mouvement des particules . . . . .	18
2.5.2 Correction du gradient de la fonction noyau . . . . .	19
<b>3 Cas tests numériques</b>	<b>21</b>
3.1 Écoulement quasi-1D dans un tube à choc . . . . .	22
3.2 Écoulement 2D dans un canal oscillant . . . . .	24

3.3	Tourbillons de Taylor-Green . . . . .	30
3.3.1	Résultats en description eulérienne . . . . .	32
3.3.2	Résultats en description lagrangienne . . . . .	33
3.4	Impact 2D d'un jet plan sur une plaque plane . . . . .	37
3.5	Synthèse . . . . .	45
<b>II Techniques de simulation multi-résolutions pour la méthode SPH-ALE</b>		<b>47</b>
<b>4</b>	<b>Raffinement Particulaire Adaptatif (APR)</b>	<b>48</b>
4.1	État de la littérature . . . . .	49
4.1.1	Raffinement . . . . .	49
4.1.2	Dé-raffinement . . . . .	51
4.2	Technique de l'« <i>Adaptive Particle Refinement</i> » . . . . .	54
4.2.1	Principes de l'APR . . . . .	54
4.2.2	Implémentation dans le solveur ASPHODEL© . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Raffinement Particulaire Adaptatif Hybride (HAPR)</b>	<b>59</b>
5.1	Technique de l'« <i>Hybridized Adaptive Particle Refinement</i> » . . . . .	60
5.1.1	Sous-zone Halo Garde . . . . .	61
5.1.2	Sous-zone Hybride . . . . .	61
5.1.3	Sous-zone de Création . . . . .	62
5.1.4	Sous-zone de Suppression . . . . .	65
5.2	Validations numériques . . . . .	66
5.2.1	Écoulement quasi-1D dans un tube à choc . . . . .	66
5.2.2	Écoulement 2D dans un canal oscillant . . . . .	70
5.2.3	Impact 2D d'un jet plan sur une plaque plane . . . . .	75
5.3	Synthèse . . . . .	85
<b>6</b>	<b>Technique du Dual-Time Stepping (DTS)</b>	<b>87</b>
6.1	État de la littérature . . . . .	89
6.1.1	Technique DTS . . . . .	89
6.1.2	Littérature SPH-DTS . . . . .	93
6.2	Méthode SPH-ALE-DTS . . . . .	95
6.2.1	Formulation intégrée consistante à l'ordre 1 . . . . .	95
6.2.2	Formulation intégrée consistante à l'ordre 2 . . . . .	97
6.2.3	Pseudo-code SPH-ALE-DTS . . . . .	99
6.2.4	Corrections numériques de la méthode SPH-ALE-DTS . . . . .	100
6.3	Validations numériques . . . . .	104
6.3.1	Écoulement quasi-1D dans un tube à choc . . . . .	104
6.3.2	Écoulement 2D dans un canal oscillant . . . . .	109
6.3.3	Tourbillons de Taylor-Green . . . . .	118
6.3.4	Impact d'un jet plan sur une plaque plane . . . . .	128
6.4	Synthèse . . . . .	134

<b>7</b>	<b>Méthode SPH-ALE à multi-résolutions spatiale et temporelle</b>	<b>135</b>
7.1	Méthode HAPR-SPH-ALE-DTS . . . . .	136
7.2	Impact d'un jet plan sur une plaque plane . . . . .	137
7.2.1	Cas de l'interface de raccord haute . . . . .	137
7.2.2	Cas de l'interface de raccord basse . . . . .	142
7.3	Synthèse . . . . .	149
<b>8</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>150</b>
8.1	Conclusions . . . . .	151
8.2	Perspectives . . . . .	153
<b>III</b>	<b>Annexes</b>	<b>154</b>
<b>A</b>	<b>Approximation SPH-ALE des équations physiques</b>	<b>155</b>
A.1	Discrétisation SPH adaptée au formalisme ALE . . . . .	156
A.2	Traitement des flux numériques . . . . .	157
A.2.1	Problème de Riemann monodimensionnel . . . . .	158
A.2.2	Résolution des problèmes de Riemann . . . . .	158
A.2.3	Stratégie MUSCL et limiteur minmod . . . . .	159
<b>B</b>	<b>Méthodes de Runge-Kutta</b>	<b>161</b>
<b>C</b>	<b>Méthode des moindres carrés mobiles (MLS)</b>	<b>163</b>
C.1	Approximation MLS adaptée au formalisme SPH . . . . .	163
C.2	Définition du problème aux moindres carrés . . . . .	164
<b>D</b>	<b>Processus de raffinement non-destructif</b>	<b>166</b>
D.1	Identification des filles pré-existantes . . . . .	166
D.2	Positionnement des filles additionnelles . . . . .	168
D.2.1	Sous-problème $\mathbf{P}_0$ . . . . .	169
D.2.2	Sous-problème $\mathbf{P}_1$ . . . . .	169
D.2.3	Sous-problème $\mathbf{P}_{2,1}$ . . . . .	173
D.2.4	Sous-problème $\mathbf{P}_{2,2}$ . . . . .	176
D.2.5	Sous-problème $\mathbf{P}_3$ . . . . .	180
D.2.6	Sous-problème $\mathbf{P}_4$ . . . . .	184
D.2.7	Problème général d'optimisation $\mathbf{P}$ . . . . .	187
D.3	Initialisation des filles additionnelles . . . . .	188
D.4	Validations . . . . .	188
<b>E</b>	<b>Validations complémentaires de la SPH-ALE-DTS</b>	<b>191</b>
E.1	Tourbillons de Taylor-Green . . . . .	191
E.2	Impact d'un jet plan sur une plaque plane . . . . .	196
<b>IV</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>201</b>

## TABLE DES FIGURES

1.1	Schémas de turbines hydrauliques, adaptés de [66]. . . . .	2
1.2	Vue d'ensemble de la simulation du fonctionnement d'une turbine Pelton (Fig. 1.2a) et Francis (Fig. 1.2b), réalisée par le solveur ASPHODEL <sup>®</sup> . L'écoulement est coloré par la vitesse du fluide. Une amplitude de vitesse élevée est représentée en rouge, alors qu'une faible amplitude de vitesse l'est en bleu. Illustrations issues des travaux de [56]. . . . .	4
1.3	Illustration du concept de pertinence d'une méthode numérique. . . . .	5
2.1	Schématisation en 1D du voisinage d'une particule. . . . .	11
2.2	Schématisation en 1D du voisinage étendu d'une particule. . . . .	12
2.3	Schématisation en 1D de la propagation temporelle d'une onde acoustique correspondant à un nombre de Mach de 1 (ligne discontinue de tirets rouges) et d'une onde convective correspondant à un nombre de Mach de 0,1 (ligne discontinue de pointillés et de tirets bleus) émises depuis la position de la particule $i$ . . . . .	16
3.1	Cas test numérique du tube à choc : schématisation de la géométrie du problème.	22
3.2	Cas test numérique du tube à choc : profils instantanés à $t_{\text{adim}} = 1, 5$ . Comparaison de la solution analytique (ligne continue noire), de la solution SPH standard uniforme N avec schéma RK3 (carrés bleus) et RK1 (triangles rouges). . . . .	24
3.3	Cas test numérique du canal oscillant : schématisation de la géométrie du problème.	24
3.4	Cas test numérique du canal oscillant : évolution de la pression statique selon la position $x_{\text{adim}}$ de la sonde, au cours de la première période d'oscillation des pistons. Les parois mobiles sont représentées en noir. . . . .	25
3.5	Cas test numérique du canal oscillant : profils instantanés à $t_{\text{adim}} = 0, 025$ . . . . .	26
3.6	Cas test numérique du canal oscillant : profils instantanés à $t_{\text{adim}} = 0, 125$ . . . . .	26
3.7	Cas test numérique du canal oscillant : profils instantanés à $t_{\text{adim}} = 0, 25$ . . . . .	27
3.8	Cas test numérique du canal oscillant : profils instantanés à $t_{\text{adim}} = 0, 5$ . . . . .	27
3.9	Cas test numérique du canal oscillant : profils instantanés à $t_{\text{adim}} = 20$ . . . . .	28
3.10	Cas test numérique du canal oscillant : profils de la force normale aux parois au cours d'une période d'oscillation. . . . .	28
3.11	Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green : schématisation de la géométrie du problème. . . . .	30

3.12 Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description eulérienne : évolution de l'énergie cinétique totale adimensionnée, au cours du temps adimensionné. Chaque unité de temps adimensionné est échantillonnée par cinquante valeurs moyennes (ligne épaisse). L'enveloppe estompée représente l'intervalle de confiance autour de la valeur moyenne encadrée à plus ou moins l'écart-type près. 32

3.13 Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description eulérienne : visualisation des erreurs induites par le schéma numérique RK3 sur la composante  $v_x$  du vecteur vitesse, à l'instant  $t_{\text{adim}} = 2$ . . . . . 33

3.14 Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description lagrangienne : évolution de l'énergie cinétique totale adimensionnée, au cours du temps adimensionné. Chaque unité de temps adimensionné est échantillonnée par cinquante valeurs moyennes (ligne épaisse). L'enveloppe estompée représente l'intervalle de confiance autour de la valeur moyenne encadrée à plus ou moins l'écart-type près. 34

3.15 Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description lagrangienne : évolution de la qualité du pavage de l'espace mesurée par la norme de l'erreur « *closed-box* », au cours du temps adimensionné. . . . . 34

3.16 Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description lagrangienne : visualisation de l'erreur d'approximation locale dans le domaine de calcul. Noter la différence d'échelle. . . . . 35

3.17 Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description lagrangienne : visualisation des erreurs induites par le schéma numérique sur la composante  $v_x$  du vecteur vitesse, à l'instant  $t_{\text{adim}} = 2$ . . . . . 35

3.18 Cas test numérique du jet plan : schématisation de la géométrie du problème. . . 37

3.19 Cas test numérique du jet plan : calcul de la surface recouverte par le fluide en régime permanent. . . . . 38

3.20 Cas test numérique du jet plan : conservation de la surface totale adimensionnée, au cours du temps adimensionné. Chaque unité temporelle est échantillonnée par 5 valeurs moyennes (trait épais). L'enveloppe estompée représente l'intervalle de confiance encadrant la moyenne à plus ou moins l'écart-type près. . . . . 39

3.21 Cas test numérique du jet plan : visualisation du champ de pression moyen en régime permanent et de la distribution particulière à  $t_{\text{adim}} = 6, 5$ . . . . . 40

3.22 Cas test numérique du jet plan : profil du coefficient de pression moyen au niveau de la plaque. L'intervalle de confiance encadrant la moyenne temporelle à plus ou moins l'écart-type près est représenté. . . . . 42

3.23 Cas test numérique du jet plan : profils sur l'axe du jet. L'intervalle de confiance encadrant la moyenne temporelle à plus ou moins l'écart-type près est représenté. 43

4.1 Modèle de raffinement 2D proposé par Y. Reyes López *et al.* [69] : une mère (en bleu) est raffinée en  $M = 4$  filles (en rouge) selon un schéma au motif carré à orientation fixe. . . . . 50

4.2 Modèle de dé-raffinement 2D par coalescence de particules proposé par R. Vaccardio *et al.* [80] : la génération d'une mère (en bleu) résulte d'agglomérations successives de paires de particules de tailles similaires. Deux filles (en rouge) sont agglomérées en une adolescente (en orange), puis deux adolescentes sont elles-mêmes agglomérées en une mère. . . . . 52

4.3	Modèle de dé-raffinement 2D par recouvrement de particules proposé par K. Shibata <i>et al.</i> [73] : le dé-raffinement résulte d'une reconstruction des mères et d'une élimination des filles. La reconstruction d'une mère est arbitrée par recouvrement de cellule d'afflux par les filles dans Transition 0-1 à la frontière du Niveau 1 (Afflux 1-0). . . . .	52
4.4	Modèle de dé-raffinement 2D par activation-passivation de particules proposé par D.A. Barcarolo <i>et al.</i> [5] : la définition d'un paramètre $\chi$ qualifie l'évolution temporelle du statut d'une particule. Ce paramètre distingue les particules actives ( $\chi = 1$ ), des passives ( $\chi = 0$ ). . . . .	53
4.5	Principes de l'« <i>Adaptive Particle Refinement</i> » illustrés en 2D pour deux niveaux de discrétisation : couplage de domaines SPH discrétisés grossièrement (Niveau 0 $\cup$ Transition 0-1 $\cup$ Transition 1-0) et finement (Niveau 1), interagissant indirectement au moyen de particules gardes non-matérielles. . . . .	54
4.6	Principes de l'« <i>Adaptive Particle Refinement</i> » illustrés en 1D pour trois niveaux de discrétisation : illustration des partenaires d'interpolation pour les particules gardes. . . . .	56
4.7	Principes de l'« <i>Adaptive Particle Refinement</i> » illustrés en 1D pour deux niveaux de discrétisation : schématisation des contraintes géométriques sur Transition 0-1. . . . .	58
5.1	Principes de la technique « <i>Hybridized Adaptive Particle Refinement</i> » (HAPR) illustrés en 2D pour deux niveaux de discrétisation : couplage SPH-SPH d'une résolution grossière (Niveau 0 $\cup$ Transition 0-1) et fine (Niveau 1). . . . .	60
5.2	Principes de la technique « <i>Hybridized Adaptive Particle Refinement</i> » (HAPR) illustrés en 1D pour deux niveaux de discrétisation : fonction de couplage $\Lambda_2 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, [0, 1])$ . . . . .	62
5.3	Principes de la technique « <i>Hybridized Adaptive Particle Refinement</i> » (HAPR) illustrés en 2D pour deux niveaux de discrétisation : schématisation des contraintes géométriques pour dimensionner la sous-zone de Création. . . . .	63
5.4	Principes de la technique « <i>Hybridized Adaptive Particle Refinement</i> » (HAPR) illustrés en 2D pour deux niveaux de discrétisation : processus de raffinement destructif. . . . .	64
5.5	Principes de la technique « <i>Hybridized Adaptive Particle Refinement</i> » (HAPR) illustrés en 2D pour deux niveaux de discrétisation : élimination des filles gardes. . . . .	65
5.6	Cas test numérique du tube à choc : schématisation de la géométrie du problème avec une zone raffinée (Niveau 1, en rouge) recouvrant toute la partie droite du tube. . . . .	66
5.7	Cas test numérique du tube à choc : profils instantanés à $t_{\text{adim}} = 1,5$ . Comparaison de la solution analytique (ligne continue noire), de la solution SPH entièrement raffinée 4N (cercles rouges), de la solution SPH standard uniforme N (carrés bleus) et de la solution raffinée localement APR (plus verts). Les zones de transition et raffinée sont délimitées par des lignes discontinues de pointillés noire et rouge, respectivement. . . . .	68
5.8	Cas test numérique du tube à choc : profils instantanés à $t_{\text{adim}} = 1,5$ . Comparaison de la solution analytique (ligne continue noire), de la solution raffinée localement APR (plus verts) et HAPR (croix magenta). . . . .	68



5.9 Cas test numérique du tube à choc : profils d’erreur relative de la masse totale des particules SPH par rapport à la masse totale théorique de fluide. La solution entièrement raffinée 4N (cercles rouges), la solution raffinée localement APR (plus verts) et la solution raffinée localement HAPR (croix magenta), sont représentées. . . . . 69

5.10 Cas test numérique du canal oscillant : schématisation de la géométrie du problème avec une zone raffinée (Niveau 1, en rouge) immergée selon l’axe  $x$  dans le canal. . . . . 70

5.11 Cas test numérique du canal oscillant : évolution du nombre de filles SPH dans le Niveau 1. Comparaison de la solution raffinée localement APR (ligne de pointillés verts) à la solution raffinée localement HAPR (ligne de tirets magenta). Chaque oscillation de piston est échantillonnée par cinq valeurs moyennes (ligne épaisse). L’enveloppe estompée représente l’intervalle de confiance autour de la valeur moyenne encadrée à plus ou moins l’écart-type près. . . . . 72

5.12 Cas test numérique du canal oscillant : profils d’erreur relative de la masse totale des particules SPH par rapport à la masse totale théorique de fluide. La solution entièrement raffinée 4N (ligne continue rouge) et la solution raffinée localement HAPR (ligne de tirets magenta) sont représentées. Chaque oscillation de piston est échantillonnée par cinq valeurs moyennes (ligne épaisse). L’enveloppe estompée représente l’intervalle de confiance autour de la valeur moyenne encadrée à plus ou moins l’écart-type près. . . . . 73

5.13 Cas test numérique du canal oscillant : profils de la force normale aux parois au cours d’une période d’oscillation . . . . . 74

5.14 Cas test numérique du jet plan : schématisation de la géométrie du problème avec une zone raffinée (Niveau 1, en rouge) recouvrant entièrement la partie inférieure du domaine de calcul, dont la plaque. . . . . 75

5.15 Cas test numérique du jet plan : champ obtenu avec la discrétisation HAPR-C3 et l’interface de raccord haute. Visualisation du champ de pression moyen en régime permanent et de la distribution particulière au voisinage du raccord à  $t_{\text{adim}} = 6, 5$ . . . . . 78

5.16 Cas test numérique du jet plan : profil du coefficient de pression moyen au niveau de la plaque obtenu avec la discrétisation HAPR-C3 et l’interface de raccord haute. L’intervalle de confiance encadrant la moyenne temporelle à plus ou moins l’écart-type près est représenté Fig. 5.16a. . . . . 79

5.17 Cas test numérique du jet plan : profils sur l’axe du jet obtenus avec la discrétisation HAPR-C3 et l’interface de raccord haute. L’intervalle de confiance encadrant la moyenne temporelle à plus ou moins l’écart-type près est représenté. La frontière du Niveau 1 est matérialisée par une ligne verticale discontinue de tirets rouges. . . . . 80

5.18 Cas test numérique du jet plan : champ obtenu avec la discrétisation HAPR-C3 et l’interface de raccord basse. Visualisation du champ de pression moyen en régime permanent et de la distribution particulière au voisinage du raccord à  $t_{\text{adim}} = 6, 5$ . . . . . 82

5.19 Cas test numérique du jet plan : profil du coefficient de pression moyen au niveau de la plaque obtenu avec la discrétisation HAPR-C3 et l’interface de raccord basse. L’intervalle de confiance encadrant la moyenne temporelle à plus ou moins l’écart-type près est représenté Fig. 5.19a. . . . . 82

5.20	Cas test numérique du jet plan : profils sur l'axe du jet obtenus avec la discrétisation HAPR-C3 et l'interface de raccord basse. L'intervalle de confiance encadrant la moyenne temporelle à plus ou moins l'écart-type près est représenté. La frontière du Niveau 1 est matérialisée par une ligne verticale discontinue de tirets rouges. . . . .	84
6.1	Cas test numérique du tube à choc : évolution en (pseudo-)temps de la norme infinie du résidu modifié standardisée de la simulation DTS0 ( $K_{CFL} = 0, 2$ ). . . .	105
6.2	Cas test numérique du tube à choc : évolution en (pseudo-)temps de la norme infinie du résidu modifié standardisée de la simulation DTS0 ( $K_{CFL} = 5$ ). . . .	106
6.3	Cas test numérique du tube à choc : profils instantanés à $t_{adim} = 1, 5$ . Comparaison de la solutions SPH-ALE uniforme N avec schéma RK3 (carrés bleus) aux solutions SPH-ALE-DTS uniformes N avec schéma DTS0 (plus gris) et DTS1 (croix grises). . . . .	107
6.4	Cas test numérique du tube à choc : profils instantanés à $t_{adim} = 1, 5$ . Comparaison de la solution analytique (ligne continue noire) et des solutions SPH-ALE-DTS uniforme N avec schéma DTS0 (ligne discontinue de plus) où $0, 02 \leq K_{CFL} \leq 5$ . . . . .	107
6.5	Cas test numérique du tube à choc : profils instantanés à $t_{adim} = 1, 5$ . Comparaison de la solution analytique (ligne continue noire) et des solutions SPH-ALE-DTS uniforme N avec schéma DTS1 (ligne discontinue de croix) où $0, 02 \leq K_{CFL} \leq 5$ . . . . .	108
6.6	Cas test numérique du tube à choc : profils instantanés à $t_{adim} = 1, 5$ . Comparaison de la solution analytique (ligne continue noire), de la solution SPH-ALE-DTS uniforme N avec schéma DTS0 (ligne discontinue de plus) et DTS1 (ligne discontinue de croix) où $K_{CFL} = 1$ (en rose) ou $K_{CFL} = 5$ (en rouge). . . . .	109
6.7	Cas test numérique du canal oscillant : évolution en (pseudo-)temps de la norme infinie du résidu modifié standardisée de la simulation DTS0 ( $K_{CFL} = 0, 2$ ). . . .	110
6.8	Cas test numérique du canal oscillant : évolution en (pseudo-)temps de la norme infinie du résidu modifié standardisée de la simulation DTS0 ( $K_{CFL} = 2$ ). . . .	111
6.9	Cas test numérique du canal oscillant : profils instantanés à $t_{adim} = 0, 025$ . Comparaison de la solution SPH-ALE standard RK3 (carrés bleus) et des solutions SPH-ALE-DTS avec schéma DTS0 (ligne discontinue de plus) où $0, 2 \leq K_{CFL} \leq 2$ . . . .	112
6.10	Cas test numérique du canal oscillant : profils instantanés à $t_{adim} = 0, 025$ . Comparaison de la solution SPH-ALE standard RK3 (carrés bleus) et des solutions SPH-ALE-DTS avec schéma DTS1 (ligne discontinue de croix) où $0, 2 \leq K_{CFL} \leq 2$ . . . .	112
6.11	Cas test numérique du canal oscillant : profils instantanés à $t_{adim} = 0, 125$ . Comparaison de la solution SPH-ALE standard RK3 (carrés bleus) et des solutions SPH-ALE-DTS avec schéma DTS0 (ligne discontinue de plus) où $0, 2 \leq K_{CFL} \leq 2$ . . . .	113
6.12	Cas test numérique du canal oscillant : profils instantanés à $t_{adim} = 0, 125$ . Comparaison de la solution SPH-ALE standard RK3 (carrés bleus) et des solutions SPH-ALE-DTS avec schéma DTS1 (ligne discontinue de croix) où $0, 2 \leq K_{CFL} \leq 2$ . . . .	113
6.13	Cas test numérique du canal oscillant : profils instantanés à $t_{adim} = 0, 5$ . Comparaison de la solution SPH-ALE standard RK3 (carrés bleus) et des solutions SPH-ALE-DTS avec schéma DTS0 (ligne discontinue de plus) où $0, 2 \leq K_{CFL} \leq 2$ . . . .	114
6.14	Cas test numérique du canal oscillant : profils instantanés à $t_{adim} = 0, 5$ . Comparaison de la solution SPH-ALE standard RK3 (carrés bleus) et des solutions SPH-ALE-DTS avec schéma DTS1 (ligne discontinue de croix) où $0, 2 \leq K_{CFL} \leq 2$ . . . .	114

6.15 Cas test numérique du canal oscillant : profils de la force normale aux parois au cours de la première période d’oscillation. Comparaison de la solution SPH-ALE standard RK3 et des solutions SPH-ALE-DTS avec  $0,2 \leq K_{\text{CFL}} \leq 2$ . . . . . 115

6.16 Cas test numérique du canal oscillant : profils instantanés à  $t_{\text{adim}} = 20$ . Comparaison de la solution SPH-ALE standard RK3 (carrés bleus) et des solutions SPH-ALE-DTS avec schéma DTS0 (ligne discontinue de plus) où  $0,2 \leq K_{\text{CFL}} \leq 2$ . 117

6.17 Cas test numérique du canal oscillant : profils instantanés à  $t_{\text{adim}} = 20$ . Comparaison de la solution SPH-ALE standard RK3 (carrés bleus) et des solutions SPH-ALE-DTS avec schéma DTS1 (ligne discontinue de croix) où  $0,2 \leq K_{\text{CFL}} \leq 2$ . 117

6.18 Cas test numérique du canal oscillant : profils de la force normale aux parois au cours de la dernière période d’oscillation simulée. Comparaison de la solution SPH-ALE standard RK3 et des solutions SPH-ALE-DTS avec  $0,2 \leq K_{\text{CFL}} \leq 2$ . . 118

6.19 Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description eulérienne : évolution en (pseudo-)temps de la norme infinie du résidu modifié standardisée de la simulation DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 0,2$ ). . . . . 120

6.20 Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description eulérienne : évolution en (pseudo-)temps de la norme infinie du résidu modifié standardisée de la simulation DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 2$ ). . . . . 120

6.21 Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description eulérienne : visualisation des erreurs induites par le schéma numérique DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 2$ ) sur la composante  $v_x$  du vecteur vitesse, à l’instant  $t_{\text{adim}} = 2$ . . . . . 122

6.22 Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description ALE : évolution en (pseudo-)temps de la norme infinie du résidu modifié standardisée de la simulation DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 2, N_1^* = 100$ ). . . . . 123

6.23 Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description ALE : évolution de l’énergie cinétique totale adimensionnée, au cours du temps adimensionné. Comparaison de la solution analytique obtenue avec  $Re = 1641$  (ligne continue noire) et des solutions SPH-ALE-DTS avec schéma DTS0 (ligne discontinue de pointillés et de tirets rouges) et DTS1 (ligne discontinue de tirets rouges) où  $K_{\text{CFL}} = 2$  et  $N_1^* = 100$ . Chaque unité de temps adimensionné est échantillonnée par cinquante valeurs moyennes (ligne épaisse). L’enveloppe estompée représente l’intervalle de confiance autour de la valeur moyenne encadrée à plus ou moins l’écart-type près. . . . . 124

6.24 Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description ALE : évolution de la qualité du pavage de l’espace mesurée par la norme de l’erreur « *closed-box* », au cours du temps adimensionné. Comparaison de la solution SPH-ALE standard RK3 (carrés bleus) et de la solution SPH-ALE-DTS avec schéma DTS0 (plus rouges) où  $K_{\text{CFL}} = 2$  et  $N_1^* = 100$ . . . . . 125

6.25 Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description ALE : évolution de la qualité du pavage de l’espace mesurée par la norme de l’erreur « *closed-box* », au cours du temps adimensionné. Comparaison de la solution SPH-ALE standard RK3 (carrés bleus) et de la solution SPH-ALE-DTS avec schéma DTS1 (croix rouges) où  $K_{\text{CFL}} = 2$  et  $N_1^* = 100$ . . . . . 126

6.26 Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description ALE : sensibilité de la performance au nombre d’itérations de correction  $N_1^*$ . Les autres coefficients de la paramétrisation sont fixes. Comparaison de la solution SPH-ALE-DTS avec schémas DTS0 (plus) et DTS1 (croix) où  $K_{\text{CFL}} = 2$ . . . . . 127

6.27	Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description ALE : visualisation des erreurs induites par le schéma numérique DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 2$ , $N_1^* = 100$ ) sur la composante $v_x$ du vecteur vitesse, à l'instant $t_{\text{adim}} = 2$ . . . . .	127
6.28	Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description ALE : visualisation de la correction du mouvement de la simulation DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 2$ , $N_1^* = 100$ ), à l'instant $t_{\text{adim}} = 2$ . . . . .	128
6.29	Cas test numérique du jet plan en description ALE : évolution en (pseudo-)temps de la norme infinie du résidu modifié standardisée de la simulation N-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1$ ). . . . .	130
6.30	Cas test numérique du jet plan en description ALE : champ obtenu avec N-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1$ ). Visualisation du champ de pression moyen dans l'écoulement en régime permanent et de la distribution particulière à $t_{\text{adim}} = 6,5$ . . . . .	131
6.31	Cas test numérique du jet plan en description ALE : profil du coefficient de pression moyen au niveau de la plaque. L'intervalle de confiance encadrant la moyenne temporelle à plus ou moins l'écart-type près est représenté Fig. 6.31a. . . . .	132
6.32	Cas test numérique du jet plan en description ALE : profils sur l'axe du jet. L'intervalle de confiance encadrant la moyenne temporelle à plus ou moins l'écart-type près est représenté. . . . .	132
7.1	Cas test numérique du jet plan en description ALE : évolution en (pseudo-)temps de la norme infinie du résidu modifié standardisée de la simulation HAPR-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1$ , $N_1^* = 200$ ). . . . .	138
7.2	Cas test numérique du jet plan en description ALE : champ obtenu avec HAPR-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1$ , $N_1^* = 200$ ) et l'interface de raccord haute. La position de l'interface de raccord entre Transition 0-1 et Niveau 1 (resp. Niveau 0) est représentée par une ligne discontinue de tirets rouges (resp. de pointillés rouges). Visualisation du champ de pression moyen en régime permanent et de la distribution particulière à $t_{\text{adim}} = 6,5$ . . . . .	139
7.3	Cas test numérique du jet plan en description ALE : profil du coefficient de pression moyen au niveau de la plaque obtenu avec HAPR-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1$ ) et l'interface de raccord haute. L'intervalle de confiance encadrant la moyenne temporelle à plus ou moins l'écart-type près est représenté. . . . .	140
7.4	Cas test numérique du jet plan en description ALE : profils de quantité de mouvement moyenne adimensionnée obtenus avec HAPR-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1$ , $N_1^* = 200$ ) et l'interface de raccord haute. . . . .	141
7.5	Cas test numérique du jet plan en description ALE : profils sur l'axe du jet obtenus avec HAPR-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1$ , $N_1^* = 200$ ) et l'interface de raccord haute. L'intervalle de confiance encadrant la moyenne temporelle à plus ou moins l'écart-type près est représenté. La frontière du Niveau 1 est matérialisée par une ligne verticale discontinue de tirets rouges. . . . .	142
7.6	Cas test numérique du jet plan en description ALE : profil de la norme infinie du résidu modifié standardisée de la simulation HAPR-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1$ , $\xi_{\text{Halo}} = 11, 62$ ), en fonction du temps physique adimensionné. . . . .	144

7.7 Cas test numérique du jet plan en description ALE : champ obtenu avec HAPR-DTS0 ( $K_{CFL} = 1$ ) et l'interface de raccord basse. La position de l'interface de raccord entre Transition 0-1 et Niveau 1 (resp. Niveau 0) est représentée par une ligne discontinue de tirets rouges (resp. de pointillés rouges). Visualisation du champ de pression moyen en régime permanent et de la distribution particulière à  $t_{adim} = 6, 5$ . . . . . 145

7.8 Cas test numérique du jet plan en description ALE : profil du coefficient de pression moyen au niveau de la plaque obtenu avec HAPR-DTS0 ( $K_{CFL} = 1$ ) et l'interface de raccord basse. L'intervalle de confiance encadrant la moyenne temporelle à plus ou moins l'écart-type près est représenté. . . . . 146

7.9 Cas test numérique du jet plan en description ALE : profils sur l'axe du jet obtenus avec HAPR-DTS0 ( $K_{CFL} = 1, \xi_{Halo\ Garde} = 2, 00$ ) et l'interface de raccord basse. L'intervalle de confiance encadrant la moyenne temporelle à plus ou moins l'écart-type près est représenté. La frontière du Niveau 1 est matérialisée par une ligne verticale discontinue de tirets rouges. . . . . 147

7.10 Cas test numérique du jet plan en description ALE : profils sur l'axe du jet obtenus avec HAPR-DTS0 ( $K_{CFL} = 1, \xi_{Halo\ Garde} = 11, 62$ ) et l'interface de raccord basse. L'intervalle de confiance encadrant la moyenne temporelle à plus ou moins l'écart-type près est représenté. La frontière du Niveau 1 est matérialisée par une ligne verticale discontinue de tirets rouges. . . . . 148

D.1 Convention de numérotation utilisée pour l'étape identification : illustration de configurations spatiales de filles pré-existantes par rapport à la mère associée. . . 167

D.2 Illustration du sous-problème  $\mathbf{P}_0$  dont la résolution consiste à ne positionner aucune fille additionnelle car les positions de quatre filles pré-existantes sont connues. . . . . 169

D.3 Illustration du sous-problème  $\mathbf{P}_1$  dont la résolution consiste à positionner une seule fille additionnelle en connaissant les positions de trois filles pré-existantes. . 170

D.4 Sous-problème  $\mathbf{P}_1$  : Illustration du repère de coordonnées polaires ( $C_{12}, \theta_{12}$ ) (resp. ( $C_{13}, \theta_{13}$ )) utilisé pour positionner la fille  $p_1$  relativement à la fille  $f_2$  (resp.  $f_3$ ). . . . . 171

D.5 Illustration du sous-problème  $\mathbf{P}_{2,1}$  dont la résolution consiste à positionner deux filles additionnelles diagonalement opposées en connaissant les positions de deux filles pré-existantes. . . . . 174

D.6 Sous-problème  $\mathbf{P}_{2,1}$  : Illustration du repère de coordonnées polaires ( $C_{42}, \theta_{42}$ ) (resp. ( $C_{43}, \theta_{43}$ )) utilisé pour positionner la fille  $p_4$  relativement à la fille  $f_2$  (resp.  $f_3$ ). . . . . 175

D.7 Illustration du sous-problème  $\mathbf{P}_{2,2}$  dont la résolution consiste à positionner deux filles additionnelles formant un côté du motif à reconstruire dont on a identifié deux filles pré-existantes. . . . . 176

D.8 Sous-problème  $\mathbf{P}_{2,2}$  : Illustration du repère de coordonnées polaires ( $C_{34}, \theta_{34}$ ) (resp. ( $C_{24}, \theta_{24}$ )) utilisé pour positionner la fille  $p_3$  (resp.  $f_2$ ) relativement à la fille  $f_4$ . . . . . 177

D.9 Illustration du sous-problème  $\mathbf{P}_3$  dont la résolution consiste à positionner trois filles additionnelles en ayant identifié une seule fille pré-existante. . . . . 180

D.10 Sous-problème  $\mathbf{P}_3$  : Illustration du repère de coordonnées polaires ( $C_{m4}, \theta_{m4}$ ) (resp. ( $R, \theta_{I4}$ )) utilisé pour positionner la mère  $m$  (resp. le centre  $I$ ) relativement à la fille  $f_4$ . . . . . 182



D.11 Illustration du sous-problème  $\mathbf{P}_4$  dont la résolution consiste à positionner quatre filles additionnelles en ayant identifié aucune fille pré-existante. . . . . 184

D.12 Sous-problème  $\mathbf{P}_4$  : Illustration du repère de coordonnées polaires  $(C_{4m}, \theta_{4m})$  (resp.  $(\tilde{C}_{4m}, \tilde{\theta}_{4m})$ ) utilisé pour positionner la fille additionnelle  $f_4$  (resp. la fille théorique  $\tilde{f}_4$ ) relativement à la mère  $m$ . . . . . 186

D.13 Cas test numérique du canal oscillant : évolution du nombre de filles SPH dans le Niveau 1 du canal oscillant. Comparaison de la solution raffinée localement HAPR-D (à gauche, ligne magenta de tirets) à la solution raffinée localement HAPR-ND (à droite, ligne cyan discontinue de pointillés et tirets). Chaque oscillation de piston est échantillonnée par cinq valeurs moyennes (ligne épaisse). L’enveloppe estompée représente l’intervalle de confiance autour de la valeur moyenne encadrée à plus ou moins l’écart-type près. . . . . 189

D.14 Cas test numérique du canal oscillant : profils d’erreur relative de la masse totale des particules SPH par rapport à la masse totale théorique de fluide. La solution entièrement raffinée 4N (ligne continue rouge), la solution raffinée localement HAPR-D (ligne de tirets magenta) et HAPR-ND (ligne discontinue de pointillés et de tirets cyan) sont représentées. Chaque oscillation de piston est échantillonnée par cinq valeurs moyennes (ligne épaisse). L’enveloppe estompée représente l’intervalle de confiance autour de la valeur moyenne encadrée à plus ou moins l’écart-type près. . . . . 189

E.1 Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description lagrangienne : évolution en (pseudo-)temps de la norme infinie du résidu modifié standardisée de la simulation DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 0, 2$ ). . . . . 192

E.2 Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description lagrangienne : évolution en (pseudo-)temps de la norme infinie du résidu modifié standardisée de la simulation DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 2$ ). . . . . 192

E.3 Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description lagrangienne : évolution de l’énergie cinétique totale adimensionnée, au cours du temps adimensionné. Comparaison de la solution SPH-ALE standard RK3 (ligne continue) et des solutions SPH-ALE-DTS avec schéma DTS0 (ligne discontinue) où  $0, 2 \leq K_{\text{CFL}} \leq 2$ . Chaque unité de temps adimensionné est échantillonnée par cinquante valeurs moyennes (ligne épaisse). L’enveloppe estompée représente l’intervalle de confiance autour de la valeur moyenne encadrée à plus ou moins l’écart-type près. . . . . 193

E.4 Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description lagrangienne : évolution de l’énergie cinétique totale adimensionnée, au cours du temps adimensionné. Comparaison des solutions SPH-ALE-DTS avec schéma DTS1 (ligne discontinue) où  $0, 2 \leq K_{\text{CFL}} \leq 2$ . . . . . 194

E.5 Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description lagrangienne : évolution de la qualité du pavage de l’espace mesurée par la norme de l’erreur « *closed-box* », au cours du temps adimensionné. Comparaison de la solution SPH-ALE standard RK3 (carrés bleus) et des solutions SPH-ALE-DTS avec schéma DTS0 (plus) où  $0, 2 \leq K_{\text{CFL}} \leq 2$ . . . . . 195

---

E.6	Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description lagrangienne : évolution de la qualité du pavage de l'espace mesurée par la norme de l'erreur « <i>closed-box</i> », au cours du temps adimensionné. Comparaison de la solution SPH-ALE standard RK3 (carrés bleus) et des solutions SPH-ALE-DTS avec schéma DTS1 (croix) où $0,2 \leq K_{\text{CFL}} \leq 2$ . . . . .	195
E.7	Cas test numérique du jet plan en description lagrangienne : évolution en (pseudo-)temps de la norme infinie du résidu modifié standardisée de la simulation N-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 0,2$ ). . . . .	196
E.8	Cas test numérique du jet plan en description lagrangienne : évolution en (pseudo-)temps de la norme infinie du résidu modifié standardisée de la simulation N-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1$ ). . . . .	197
E.9	Cas test numérique du jet plan en description lagrangienne : visualisation du champ de pression moyen en régime permanent et de la distribution particulière à $t_{\text{adim}} = 6,5$ . . . . .	198
E.10	Cas test numérique du jet plan en description lagrangienne : profil du coefficient de pression moyen au niveau de la plaque. L'intervalle de confiance encadrant la moyenne temporelle à plus ou moins l'écart-type près est représenté. . . . .	199
E.11	Cas test numérique du jet plan en description lagrangienne : profils sur l'axe du jet. L'intervalle de confiance encadrant la moyenne temporelle à plus ou moins l'écart-type près est représenté. . . . .	200

## LISTE DES TABLEAUX

3.1	Cas test numérique du tube à choc : états fluides initiaux. . . . .	22
3.2	Cas test numérique du canal oscillant : mesures sur la puissance élémentaire de la force normale aux parois de la simulation SPH standard N-RK3. . . . .	29
3.3	Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description eulérienne : paramètres de régression linéaire de l'évolution de l'énergie cinétique totale de la simulation SPH standard RK3. . . . .	32
3.4	Cas test numérique du jet plan : erreur relative des simulations SPH standard. . . . .	40
3.5	Cas test numérique du jet plan : DMSAE sur la pression des simulations SPH standard. . . . .	42
3.6	Synthèse des cas tests. . . . .	46
4.1	Conditions de conservation à respecter lors du raffinement selon J. Feldman <i>et al.</i> [24]. . . . .	50
5.1	Cas test numérique du tube à choc : composition de la zone de transition de l'HAPR. . . . .	67
5.2	Cas test numérique du canal oscillant : erreur relative des mesures sur la puissance élémentaire de la force normale aux parois de la solution HAPR par rapport à la référence N. . . . .	74
5.3	Cas test numérique du jet plan : composition de la zone de transition de l'HAPR. . . . .	76
5.4	Cas test numérique du jet plan : erreur relative des simulations SPH standard et HAPR avec interface de raccord haute. . . . .	77
5.5	Cas test numérique du jet plan : DMSAE sur la pression des simulations SPH standard et HAPR avec interface de raccord haute. . . . .	79
5.6	Cas test numérique du jet plan : erreur relative des simulations SPH standard et HAPR avec interface de raccord basse. . . . .	81
5.7	Cas test numérique du jet plan : DMSAE sur la pression des simulations SPH standard et HAPR avec interface de raccord basse. . . . .	83
6.1	Cas test numérique du tube à choc : paramétrisation des échelles temporelles et pseudo-temporelles des simulations SPH-ALE-DTS. . . . .	104
6.2	Cas test numérique du canal oscillant : paramétrisation des échelles temporelles et pseudo-temporelles des simulations SPH-ALE-DTS. . . . .	110



6.3	Cas test numérique du canal oscillant : erreur relative (RE) des mesures sur la puissance élémentaire de la force normale aux parois des simulations DTS0/1 par rapport à la référence RK3. Par exemple, l'erreur relative du travail est calculée selon $(\text{Travail [RK3]} - \text{Travail [DTS0/1]}) / \text{Travail [RK3]}$ . Performances calculées pour la première période simulée. . . . .	115
6.4	Cas test numérique du canal oscillant : erreur relative (RE) des mesures sur la puissance élémentaire de la force normale aux parois des simulations DTS0/1 par rapport à la référence RK3. Par exemple, l'erreur relative du travail est calculée selon $(\text{Travail [RK3]} - \text{Travail [DTS0/1]}) / \text{Travail [RK3]}$ . Performances calculées pour la dernière période simulée. . . . .	117
6.5	Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description eulérienne : paramétrisation des échelles temporelles et pseudo-temporelles des simulations SPH-ALE-DTS. . . . .	119
6.6	Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description eulérienne : paramètres de régression linéaire de l'évolution de l'énergie cinétique totale des simulations SPH-ALE-DTS. . . . .	121
6.7	Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description ALE : paramétrisation des échelles temporelles et pseudo-temporelles des simulations SPH-ALE-DTS. . . . .	123
6.8	Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description ALE : paramètres de régression linéaire de l'évolution de l'énergie cinétique totale des simulations SPH-ALE-DTS. . . . .	125
6.9	Cas test numérique du jet plan en description lagrangienne : paramétrisation des échelles temporelles et pseudo-temporelles des simulations SPH-ALE-DTS. . . .	129
6.10	Cas test numérique du jet plan en description ALE : paramétrisation des échelles temporelles et pseudo-temporelles de la simulation SPH-ALE-DTS. . . . .	129
6.11	Cas test numérique du jet plan en description ALE : erreur relative de la simulation SPH-ALE-DTS. . . . .	130
6.12	Cas test numérique du jet plan en description ALE : DMSAE sur la pression de la simulation SPH-ALE-DTS. . . . .	132
7.1	Cas test numérique du jet plan en description ALE : composition de la zone de transition des simulations HAPR-SPH-ALE-DTS avec interface de raccord haute. . . . .	137
7.2	Cas test numérique du jet plan en description ALE : paramétrisation des échelles temporelles et pseudo-temporelles des simulations HAPR-SPH-ALE-DTS avec interface de raccord haute. . . . .	138
7.3	Cas test numérique du jet plan en description ALE : erreur relative des simulations HAPR-SPH-ALE-DTS avec interface de raccord haute. . . . .	139
7.4	Cas test numérique du jet plan en description ALE : DMSAE sur la pression des simulations HAPR-SPH-ALE-DTS avec interface de raccord haute. . . . .	141
7.5	Cas test numérique du jet plan en description ALE : composition de la zone de transition des simulations HAPR-SPH-ALE-DTS avec interface de raccord basse. . . . .	143
7.6	Cas test numérique du jet plan en description ALE : paramétrisation des échelles temporelles et pseudo-temporelles des simulations HAPR-SPH-ALE-DTS avec interface de raccord basse. . . . .	143
7.7	Cas test numérique du jet plan en description ALE : erreur relative des simulations HAPR-SPH-ALE-DTS avec interface de raccord basse. . . . .	144

7.8	Cas test numérique du jet plan en description ALE : DMSAE sur la pression des simulations HAPR-SPH-ALE-DTS avec interface de raccord basse. . . . .	146
E.1	Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description lagrangienne : paramétrisation des échelles temporelles et pseudo-temporelles des simulations SPH-ALE-DTS. . . . .	191
E.2	Cas test numérique du jet plan en description lagrangienne : paramétrisation des échelles temporelles et pseudo-temporelles des simulations SPH-ALE-DTS. . . . .	196
E.3	Cas test numérique du jet plan en description lagrangienne : erreur relative des simulations SPH-ALE-DTS. . . . .	198
E.4	Cas test numérique du jet plan en description lagrangienne : DMSAE sur la pression des simulations SPH-ALE-DTS. . . . .	199

# NOTATIONS ET ACRONYMES

La liste suivante introduit quelques acronymes usuels et les notations utilisées dans le corps du document.

## Ensembles mathématiques

$\mathbb{N}$  Nombres entiers.

$\mathbb{R}$  Nombres réels.

$\mathbb{C}$  Nombres complexes.

$\llbracket n, m \rrbracket$  Soient  $n, m \in \mathbb{N}$ . Intervalle fermé des éléments  $q \in \mathbb{N}$  tels que  $n \leq q \leq m$ .

$[a, b]$  Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . Intervalle fermé des éléments  $x \in \mathbb{R}$  tels que  $a \leq x \leq b$ .

$\mathcal{C}^k(I, J)$  Ensemble des fonctions de  $I \subset \mathbb{R}^n$  vers  $J \subset \mathbb{R}^m$  qui sont  $k$  fois dérivables, où  $n \in \mathbb{N}$  et  $m \in \mathbb{N}$ .

$\mathcal{M}_{n,m}(K)$  Matrices à coefficients dans  $K$  possédant  $n \in \mathbb{N}$  lignes et  $m \in \mathbb{N}$  colonnes.

## Opérateurs

Moyenne arithmétique  $\bar{\bullet}$  :

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . La *moyenne arithmétique* de  $\mathbf{x}$  est définie comme :

$$\bar{\mathbf{x}} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \in \mathbb{R} .$$

Écart-type  $\sigma(\bullet)$  :

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . L'*écart-type* de  $\mathbf{x}$  est défini comme :

$$\sigma(\mathbf{x}) := \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{\mathbf{x}})^2} \in \mathbb{R} .$$

Norme euclidienne  $\|\bullet\|$  :

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . La *norme euclidienne* de  $\mathbf{x}$  est définie comme :

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x}\mathbf{x}^\top} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \in \mathbb{R} .$$

Norme infinie  $\|\bullet\|_\infty$  :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\overline{\mathbf{M}} = (M_{ij})_{(i \in [1, n], j \in [1, m])} \in \mathcal{M}_{n, m}(\mathbb{R})$ . La *norme infinie* de  $\overline{\mathbf{M}}$  est définie comme :

$$\|\overline{\mathbf{M}}\|_\infty := \max_{(i \in [1, n], j \in [1, m])} |M_{ij}| \in \mathbb{R} .$$

Norme intégrale  $p$   $\|\bullet\|_p$  :

Soit  $f \in \mathcal{C}^0(I, J)$  une fonction continue où  $I, J \subset \mathbb{R}$ . La *norme intégrale  $p$*   $p \in \mathbb{N}^*$  de  $f$  est définie comme :

$$\|f\|_p := \left( \int_I |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \in \mathbb{R} .$$

Opérateur backward  $D_t$  :

Soit  $q \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et  $f \in \mathcal{C}^q(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ . L'opérateur différentiel *backward d'ordre  $q + 1$*  appliqué à  $f$  est défini comme :

$$D_t^q [f] := \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=1}^{q+1} \frac{1}{k} \nabla_{\Delta t}^k [f] \text{ avec } \nabla_{\Delta t}^k [f](\bullet) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} f(\bullet - i\Delta t).$$

Produit dyadique  $\otimes$  :

Soit  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$  et  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ . Le *produit dyadique* de  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  est défini comme :

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} := \mathbf{a}^\top \mathbf{b} \in \mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{R}) .$$

---

## Symboles Divers

---

$\mathcal{A}$	Aire ( $\in \mathbb{R}$ ).	$\text{m}^2$
$R_{\text{rég.}}$	Coefficient de corrélation d'une régression linéaire ( $\in \mathbb{R}$ ).	$\emptyset$
$\varkappa$	Paramètre scalaire quelconque ( $\in \mathbb{R}$ ).	$\emptyset$
H	Hauteur ( $\in \mathbb{R}$ ).	m
L	Longueur ( $\in \mathbb{R}$ ).	m
$(\Xi_k)_{k \leq q+2}$	Poids de quadrature de l'opérateur $D_t^q$ ( $\in \mathbb{R}$ ).	$\emptyset$
$(\mathbf{a}_{n, m})_{(n, m) \in [1, q] \times [1, q-1]}$	Poids de quadrature de la méthode de Runge-Kutta à $q$ -étages ( $\in \mathbb{R}$ ).	$\emptyset$
$(c_n)_{n \in [1, q]}$	Décomposition en sous-pas de la méthode de Runge-Kutta d'ordre à $q$ -étages ( $\in \mathbb{R}$ ).	$\emptyset$
$(b_n)_{n \in [1, q]}$	Poids d'intégration de la méthode de Runge-Kutta à $q$ -étages ( $\in \mathbb{R}$ ).	$\emptyset$
U	Vitesse ( $\in \mathbb{R}$ ).	m/s
$T_{\text{carac}}$	Durée de vol d'une particule localisée sur la surface libre ( $\in \mathbb{R}$ ).	s
$T_{\text{end}}$	Durée d'une simulation numérique ( $\in \mathbb{R}$ ).	s

$d$	Nombre de dimension en espace ( $\in \mathbb{N}$ ).	$\emptyset$
$\mathbf{I}_d$	Matrice identité de taille $d \times d$ ( $\in \mathcal{M}_{d,d}(\mathbb{R})$ ).	
$\mathbf{x}$	Vecteur position ( $\in \mathbb{R}^d$ ).	m
$x$	Coordonnée spatiale ( $\in \mathbb{R}$ ).	m
$y$	Coordonnée spatiale ( $\in \mathbb{R}$ ).	m
$z$	Coordonnée spatiale ( $\in \mathbb{R}$ ).	m
$\Delta x$	Pas de discrétisation spatial ( $\in \mathbb{R}$ ).	m
$T$	Intervalle temporel ( $\subset \mathbb{R}_+$ ).	s
$t$	Temps ( $\in \mathbb{R}$ ).	s
$\Delta t$	Pas de discrétisation temporel ( $\in \mathbb{R}$ ).	s
$K_{\text{CFL}}$	Coefficient CFL limitant le dimensionnement des pas en temps ( $\in \mathbb{R}$ ).	$\emptyset$
$t^*$	Variable pseudo-temporelle ( $\in \mathbb{R}$ ).	s
$\Delta t^*$	Pas de discrétisation pseudo-temporel ( $\in \mathbb{R}$ ).	s
$K_{\text{CFL}}^*$	Coefficient CFL limitant le dimensionnement des pas en pseudo-temps ( $\in \mathbb{R}$ ).	$\emptyset$
$N^*$	Nombre maximal d'itérations en pseudo-temps ( $\in \mathbb{N}$ ).	$\emptyset$

---

## Grandeurs Physiques

---

$\rho$	Masse volumique ( $\in \mathbb{R}$ ).	kg/m <sup>3</sup>
$\rho_0$	Masse volumique de référence ( $\in \mathbb{R}$ ).	kg/m <sup>3</sup>
$\mathbf{F}$	Tenseur des flux convectifs ( $\in \mathcal{M}_{d+1,d}(\mathbb{R})$ ).	
$\mathbf{S}$	Vecteur des forces extérieures ( $\in \mathbb{R}^d$ ).	N
$E_c$	Énergie cinétique ( $\in \mathbb{R}$ ).	J
$Ma$	Nombre de Mach ( $\in \mathbb{R}$ ).	$\emptyset$
$m$	Masse d'une particule ( $\in \mathbb{R}$ ).	kg/m <sup>3-d</sup>
$\mathcal{M}$	Masse totale des particules discrétisant l'écoulement ( $\in \mathbb{R}$ ).	kg/m <sup>3-d</sup>
$p$	Pression statique ( $\in \mathbb{R}$ ).	Pa
$p_0$	Pression de référence ( $\in \mathbb{R}$ ).	Pa
$p_{\text{unif}}$	Terme de pression uniforme ( $\in \mathbb{R}$ ).	Pa
$Re$	Nombre de Reynolds ( $\in \mathbb{R}$ ).	$\emptyset$
$c$	Vitesse du son ( $\in \mathbb{R}$ ).	m/s
$c_0$	Vitesse du son numérique ( $\in \mathbb{R}$ ).	m/s
$\mathbf{Q}$	Vecteur des termes sources ( $\in \mathbb{R}^{d+1}$ ).	

$\gamma$	Paramètre constant de l'équation d'état de Tait ( $\in \mathbb{R}$ ).	$\emptyset$
$\Phi$	Vecteur des variables conservatives ( $\in \mathbb{R}^{d+1}$ ).	
$\Phi^{nc}$	Vecteur des variables non-conservatives ( $\in \mathbb{R}^{d+1}$ ).	
$\mathbf{v}$	Vecteur vitesse ( $\in \mathbb{R}^d$ ).	m/s
$\nu$	Viscosité cinématique du fluide ( $\in \mathbb{R}$ ).	Pa.s

---

## Notations SPH-ALE

---

$\mathbf{G}$	Tenseur ALE des flux convectifs ( $\in \mathcal{M}_{d+1,d}(\mathbb{R})$ ).	
$\mathbf{v}_0$	Vecteur vitesse particulaire ALE ( $\in \mathbb{R}^d$ ).	m/s
$\mathbf{b}$	Vecteur d'erreur « <i>closed-box</i> » ( $\in \mathbb{R}^d$ ).	$\emptyset$
$\Omega$	Domaine de calcul ( $\subset \mathbb{R}^d$ ).	
$\partial\Omega$	Frontière du domaine de calcul ( $\subset \mathbb{R}^{d-1}$ ).	
$\Omega_i$	Volume de contrôle associé à la particule $i$ ( $\subset \mathbb{R}^d$ ).	$\emptyset$
$M$	Nombre maximal de filles à créer lors du raffinement d'une mère ( $\in \mathbb{R}$ ).	$\emptyset$
$M_{pe}$	Nombre de filles pré-existantes associée à une mère se raffinant ( $\in \mathbb{R}$ ).	$\emptyset$
$P_s^*$	Paramètre empirique utilisé dans la correction en pseudo-temps du mouvement des particules ( $\in \mathbb{R}$ ).	$\emptyset$
$\Lambda$	Paramètre d'hybridation MLS-SPH ( $\in [0, 1]$ ).	$\emptyset$
$W$	Fonction noyau SPH ( $\in \mathbb{R}$ ).	$1/m^d$
$D$	Support de la fonction noyau SPH ( $\subset \mathbb{R}^d$ ).	
$\lambda$	Paramètre de distribution de la masse (resp. du volume) de la mère aux filles lors du raffinement ( $\in \mathbb{R}$ ).	$\emptyset$
$h^{MLS}$	Longueur de lissage MLS ( $\in \mathbb{R}$ ).	m
$R_h^{MLS}$	Rayon de lissage MLS ( $\in \mathbb{R}$ ).	m
$P$	Ensemble de particules ( $\subset \mathbb{N}$ ).	$\emptyset$
$P_s$	Paramètre empirique utilisé dans la correction du mouvement des particules ( $\in \mathbb{R}$ ).	$\emptyset$
$\zeta$	Paramètre de relaxation ( $\in \mathbb{R}$ ).	$\emptyset$
$\alpha$	Ratio des longueurs de lissage entre une fille et sa mère ( $\in \mathbb{R}$ ).	$\emptyset$
$h$	Longueur de lissage SPH ( $\in \mathbb{R}$ ).	m
$R_h$	Rayon de lissage SPH ( $\in \mathbb{R}$ ).	m
$\varepsilon$	Paramètre de séparation ( $\in \mathbb{R}$ ).	$\emptyset$
$\xi$	Paramètre caractérisant l'épaisseur d'une sous-zone HAPR ( $\in \mathbb{R}$ ).	$\emptyset$
$\omega$	Volume d'une particule, poids d'intégration ( $\in \mathbb{R}$ ).	$m^d$

---

$\Psi$	Vecteur des variables conservatives et particulières ALE ( $\in \mathbb{R}^{2(d+1)}$ ).	
$\mathcal{H}(\Psi)$	Résidu des variables conservatives et particulières ALE ( $\in \mathbb{R}^{2(d+1)}$ ).	
$\Psi^*$	Vecteur des variables conservatives et particulières ALE modifié en pseudo-temps ( $\in \mathbb{R}^{2(d+1)}$ ).	
$\mathcal{H}^*(\Psi^*)$	Résidu modifié en pseudo-temps ( $\in \mathbb{R}^{2(d+1)}$ ).	
$\mathcal{S}$	Terme source fixe en pseudo-temps ( $\in \mathbb{R}^{2(d+1)}$ ).	
$\mathbf{n}_{ij}$	Vecteur unitaire orienté de la particule $i$ vers $j$ ( $\in \mathbb{R}^d$ ).	$\emptyset$
$x^{(\mathbf{n}_{ij})}$	Abscisse curviligne le long de la droite dont le vecteur directeur est $\mathbf{n}_{ij}$ et dont l'origine est prise en $(\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j)/2$ ( $\in \mathbb{R}$ ).	m

---

## Acronymes usuels

---

ALE	: Arbitrary Lagrange Eulerian
APR	: Adaptive Particle Refinement
CFD	: Computational Fluid Dynamics
CFL	: Courant-Friedrichs-Lewy
DMSAE	: Dimensionless Mean Squared Absolute Error
DTS	: Dual-Time Stepping
EDO	: Équation Différentielle Ordinaire
EDP	: Équation Différentielle Partielle
FV	: Finite Volume
FVM	: Finite Volume Method
GIEC	: Groupe d'experts Inter-gouvernemental sur l'Évolution du Climat
HAPR	: Hybridized Adaptive Particle Refinement
IPCC	: Intergovernmental Panel on Climate Change
MLS	: Moving Least Squares
MUSCL	: Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws
PVRS	: Primitive Variable Riemann Solver
RE	: Relative Error
RKq	: Schéma de Runge-Kutta à q-étages
SPH	: Smoothed Particles Hydrodynamics
SPHERIC	: SPH Research and Engineering International Community
TVD	: Total Variation Diminishing





# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION

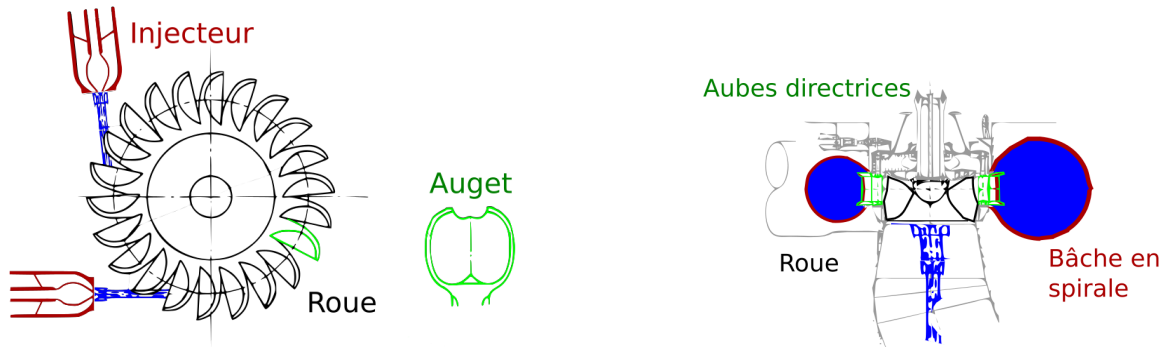
« *Les ordinateurs permettent à un mauvais modèle d'être précisément faux.* »

– **W. Gray, Pr**

Établi en 1988 sous l'égide du programme des nations unies pour l'environnement, le Groupe d'experts Inter-gouvernemental sur l'Évolution du Climat (GIEC) est un organisme spécialisé sur l'étude des sciences liées à l'évolution du climat. Depuis, le GIEC fournit régulièrement aux décideurs politiques des évaluations sur l'état des connaissances scientifiques ayant trait au dérèglement climatique. Ces évaluations prennent la forme de rapports de synthèse détaillant les impacts potentiels, les options d'adaptation et des solutions bas-carbone pour réduire les émissions de gaz à effet de serre. Datant d'avril 2022, le dernier rapport insiste notamment sur la nécessité de développer l'hydroélectricité [35]. Cette source primaire d'électricité renouvelable est jugée fiable, valorisée parmi les moins coûteuses du marché et reconnue technologiquement mature. Les sites de productions peuvent être implantés dans diverses topologies géographiques. Le rendement maximal des centrales hydroélectriques est supérieur à 85%. L'hydroélectricité peut être utilisée également pour équilibrer l'approvisionnement global en électricité en offrant flexibilité et stockage [72]. Actuellement, cette technologie est utilisée par plus de 150 pays ce qui en fait la source d'électricité verte la plus répandue dans le monde [79]. Cependant, le futur potentiel d'atténuation de l'hydroélectricité dépend notamment de la minimisation des impacts environnementaux lors des étapes de planification et de la modernisation de son parc vieillissant afin d'en augmenter la capacité de production. Ce potentiel est réparti sur plusieurs millions d'emplacements dont le développement est aujourd'hui freiné par des limitations techniques, économiques ou politiques.

Avec plus de 180 ans d'expérience, ANDRITZ Hydro se positionne comme un acteur majeur du domaine de l'énergie hydraulique en étant l'un des principaux fournisseurs mondiaux d'équipements et de services électromécaniques pour les centrales hydroélectriques. Parallèlement à cette activité, le groupe s'est constitué un département d'ingénieurs chargé de missions de recherche consacrées au développement des machines hydrauliques avec comme objectifs prioritaires l'augmentation de leur efficacité et la diminution des coûts. Son activité de recherche est essentiellement concentrée sur la turbine à action Pelton (Fig. 1.1a) et celle à réaction Francis

(Fig. 1.1b). Grâce aux simulations numériques notamment, ces travaux ont permis d'équiper de nouvelles centrales hydroélectriques et de moderniser des équipements vieillissants.



(a) Schéma d'une turbine Pelton à deux injecteurs.

(b) Schéma d'une turbine Francis.

FIGURE 1.1 – Schémas de turbines hydrauliques, adaptés de [66].

Le schéma décrivant une turbine Pelton est présenté Fig. 1.1a. Inventée en 1879, une telle turbine nécessite un site d'exploitation présentant de hautes chutes d'eau (de 200 à 2000 mètres). Le fluide accumule de l'énergie potentielle de pesanteur que la turbine utilise sous la forme d'énergie cinétique, i.e. des jets d'eau. Les injecteurs contrôlent les jets qui sont dirigés vers les augets de la roue pour la mettre en rotation. L'énergie cinétique des jets est convertie en énergie mécanique, puis en électricité. Les plus puissantes turbines de ce type peuvent générer une puissance électrique de 400 MW.

Le schéma décrivant une turbine Francis est présenté Fig. 1.1b. Datant de 1868, une telle turbine est adaptée à des sites présentant des chutes d'eau plus modestes (de 20 à 350 mètres). L'écoulement pénètre radialement dans la turbine. La bêche en spirale permet la conversion partielle de la pression statique du fluide en énergie cinétique et assure une distribution de débit équitable autour de la roue centrale. L'énergie cinétique est alors convertie en énergie mécanique, puis en électricité. L'écoulement ressort axialement de la turbine et recouvre une partie de son énergie cinétique. Les plus puissantes turbines de ce type peuvent générer une puissance électrique de 800 MW.

Une des finalités visées est l'optimisation des géométries de la roue ou des structures environnantes afin d'exploiter au mieux ces technologies. Pour mener une étude réaliste, il est nécessaire de bien caractériser la physique de l'écoulement mis en jeu. Les écoulements qui vont être abordés dans cette étude sont donc principalement des écoulements faiblement compressibles ayant une surface libre et/ou présentant une dynamique élevée. Cependant, certaines mesures expérimentales s'avèrent délicates de par les formes complexes des structures solides interagissant avec l'écoulement. En complément aux études en laboratoire, la CFD (« *Computational Fluid Dynamics* ») s'impose ainsi comme un outil indispensable à intégrer au processus de conception.

Ces dernières décennies, la simulation des écoulements est devenue omniprésente avec l'accroissement des moyens de calcul. Les méthodes numériques permettent ainsi d'approcher les solutions des équations aux dérivées partielles, plutôt que de les résoudre analytiquement. Le développement de schémas numériques de plus en plus sophistiqués et spécifiques à des problèmes physiques est actuellement un axe de recherche prolifique de la littérature. Une des méthodes des plus employées quant à la simulation des écoulements est celle des volumes finis (« *Finite Volume* », FV) qui consiste à intégrer sur des volumes de contrôles les équations sous forme conservative. Toutefois, cette approche repose sur la notion de maillage, c'est-à-dire un ensemble de points de calcul discrétisant la portion d'espace à simuler et possédant une connectivité connue. Or, la gestion du maillage est bien souvent une source de difficultés importantes

en mécanique des fluides. Il s'agit par exemple d'un véritable frein pour des simulations portant sur la phase de démarrage de la turbine Francis, car l'introduction de mailles entre les aubes directrices de la turbine lors de leur ouverture présente un coût de calcul prohibitif. Par ailleurs, la définition du maillage est directement corrélée à la qualité de la solution numérique. Ainsi, une interface dont la discrétisation n'est pas suffisamment fine est souvent mal représentée. Or, une telle interface peut être mobile et subir de grandes déformations au cours du temps. Par conséquent, il devient nécessaire de mailler finement une portion conséquente du domaine de calcul pour en assurer une représentation fidèle. Le coût de simulation augmente alors fortement, par l'augmentation des coûts de calcul et de génération du maillage [48]. La simulation d'un écoulement avec une surface libre complexe demeure encore aujourd'hui un défi résistant aux méthodes numériques à maillage. Cette difficulté du suivi d'une interface mobile est cependant présente dans les simulations visées par cette étude. En particulier, le cas de la turbine Pelton nécessite la simulation de la rotation des composants de la roue, la création et le suivi de la surface libre des jets.

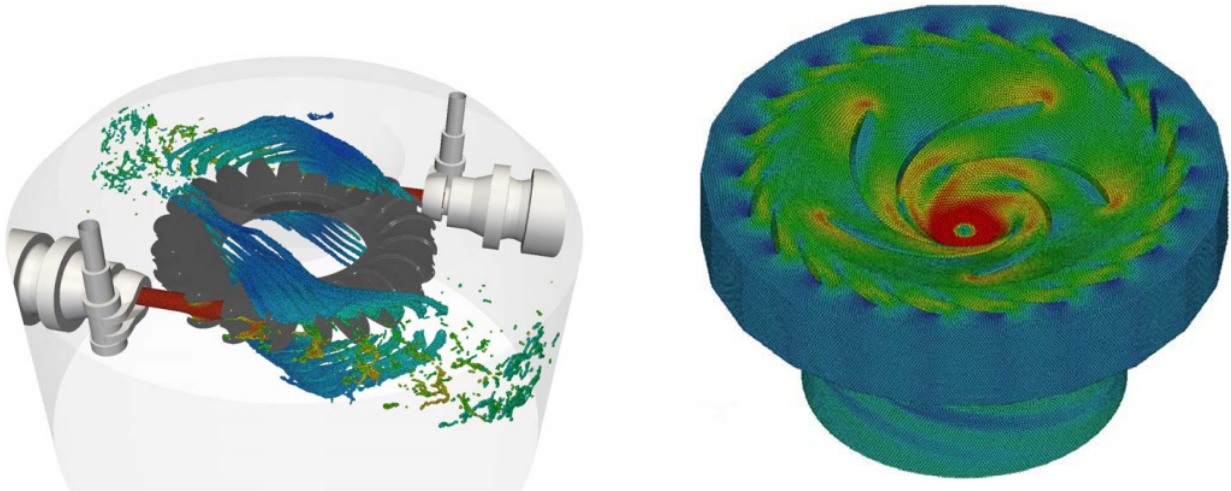
Par opposition, une méthode numérique est dite sans maillage dès lors que les points de calcul sont manipulés sans sauvegarder une connectivité les liants à chaque instant. Cette absence de connectivité permet un meilleur suivi des interfaces et rend la méthode plus attractive pour simuler de grandes déformations, la propagation de fissures et prédire l'évolution d'une surface libre. De surcroît, le recours à une description lagrangienne de l'écoulement améliore la capacité du schéma numérique à capturer la surface libre puisque la distribution spatiale des points de calcul s'adapte dynamiquement à l'écoulement. Une méthode numérique sans maillage et lagrangienne constitue ainsi une stratégie efficace pour approcher une surface libre, même lorsque celle-ci subit de grandes déformations dans le temps.

La méthode « *Smoothed Particle Hydrodynamics* » (SPH) satisfait ces pré-requis et est considérée dans ces travaux. La première mention dans la littérature est issue de la publication de L.B. Lucy [46] datant de 1977 dont les travaux visaient à simuler la fission d'étoile en rotation en astro-physique, sans la nommer ainsi cependant. Quelques mois plus tôt en 1976, L.B. Lucy donna une conférence à l'institut d'astronomie de Cambridge durant laquelle R.A. Gingold et J.J. Monaghan découvrirent ces travaux. Indépendamment et parallèlement, les recherches sur des problèmes tels que les instabilités des étoiles binaires, ou la fragmentation de nuages interstellaires conduits par R.A. Gingold et J.J. Monaghan avaient également abouti au développement de cette même méthode qu'ils nommèrent SPH [25]. Au cours des années 1980-90, J.J. Monaghan étendit la méthode à l'hydrodynamique [50] et puis plus particulièrement aux écoulements présentant une surface libre [53].

La version historique de la méthode SPH développée principalement par J.J. Monaghan est souvent référencée comme WCSPH (« *Weakly-Compressible SPH* »). De nombreux travaux ont conduit par la suite à des améliorations successives et à différentes versions de la méthode SPH. En particulier, J.J. Monaghan [55] complète cette stratégie en introduisant un terme de viscosité numérique dans l'équation de quantité du mouvement pour stabiliser le schéma numérique [31]. Par la suite, J.J. Monaghan [51] propose une nouvelle version appelée X-SPH (« *extended SPH* ») où les points de calcul se déplacent selon une vitesse lissée en espace afin d'améliorer la qualité des simulations des écoulements à surface libre. Par ailleurs dans la littérature, la SPH est utilisée dans le cadre de la simulation d'écoulements incompressibles. Pour cette version alternative nommée ISPH (« *Incompressible SPH* »), le calcul de la pression résulte de la résolution d'une équation de Poisson complémentaire visant à assurer un champ de vitesse à divergence nulle [48]. La version de la méthode SPH considérée par la suite de ce manuscrit est fondée sur l'approche présentée par J.P. Vila [83] en 1999, développée au cours de ses travaux visant l'amélioration de la précision et la stabilité du schéma standard WCSPH. Cette stratégie

est généralement référencée comme la SPH-ALE par ailleurs dans la littérature, car cette méthode numérique privilégie un formalisme dit ALE (« *Arbitrary Lagrange Euler* ») où les points de calcul se déplacent selon une vitesse arbitrairement définie [32]. Depuis, ces travaux ont été repris par plusieurs autres auteurs [5, 42, 48] qui proposèrent quelques adaptations. Le principe de la méthode SPH-ALE telle qu'utilisée au cours de ces travaux de recherche est détaillée dans le corps du manuscrit.

Au cours de ces dernières années, le travail des équipes du département R&D d'ANDRITZ Hydro a notamment consisté au développement d'un solveur SPH-ALE capable de simuler efficacement les écoulements mis en jeu notamment lors du fonctionnement des turbines Pelton (Fig. 1.2a) et Francis (Fig. 1.2b).



(a) Visualisation de la complexité de la surface libre de l'écoulement mis en jeu lors du fonctionnement d'une turbine Pelton à deux injecteurs.

(b) Simulation d'une turbine Francis en phase de démarrage.

FIGURE 1.2 – Vue d'ensemble de la simulation du fonctionnement d'une turbine Pelton (Fig. 1.2a) et Francis (Fig. 1.2b), réalisée par le solveur ASPHODEL<sup>©</sup>. L'écoulement est coloré par la vitesse du fluide. Une amplitude de vitesse élevée est représentée en rouge, alors qu'une faible amplitude de vitesse l'est en bleu. Illustrations issues des travaux de [56].

La version actuelle de ce solveur interne à l'entreprise résulte d'une collaboration historique entre les équipes d'ANDRITZ Hydro (Suisse) et celles du LMFA de l'École Centrale de Lyon (France) [48, 56, 66]. Ce solveur, appelé ASPHODEL<sup>©</sup>, est l'outil de recherche utilisé dans ce document.

La méthode SPH est actuellement reconnue par la communauté scientifique comme une approche prometteuse, recevant de nombreuses contributions au cours de ces dernières années et dont certaines sont jugées d'importance significative. Toutefois, la communauté admet également que cette méthode n'est pas parfaitement mature et que tout son potentiel n'a pas encore été exploité. L'organisation scientifique internationale SPHERIC (« *SPH Research and Engineering International Community* »), dont les membres sont des chercheurs et ingénieurs érudits, a identifié les principaux axes de recherche à conduire. La formulation de ces grands défis guide les développements de la méthode pour répondre aux attentes actuellement identifiées. L'ensemble de ces recommandations récemment révisées est synthétisé dans [81]. En particulier, l'étude des techniques multi-résolutions figure parmi ces grands défis car l'emploi de la SPH est encore principalement conditionné à l'utilisation de pas de discrétisation uniformes en espace et en temps. Or, la simulation de l'écoulement d'une turbine Pelton en fonctionnement présente une dynamique rapide qui ne peut être correctement capturée qu'au prix d'une discrétisation

fine en espace et en temps au voisinage de la roue. Par conséquent, le coût de cette simulation augmente alors fortement puisqu'il s'avère nécessaire de discrétiser finement l'entière de l'écoulement.

L'enjeu des travaux présentés dans ce manuscrit est de rendre la méthode SPH-ALE plus précise et compétitive pour des simulations complexes telles que le fonctionnement des turbines Pelton et Francis de par le développement de techniques multi-résolutions en espace et/ou en temps pertinentes. La notion de *pertinence* utilisée par la suite renvoie à l'idée de résultat. L'analyse de la pertinence d'une technique multi-résolutions consiste à juger la capacité de la méthode numérique résultante à remplir les fonctionnalités attendues. Les différentes conclusions possibles à l'issue d'une telle étude sont illustrées Fig. 1.3.

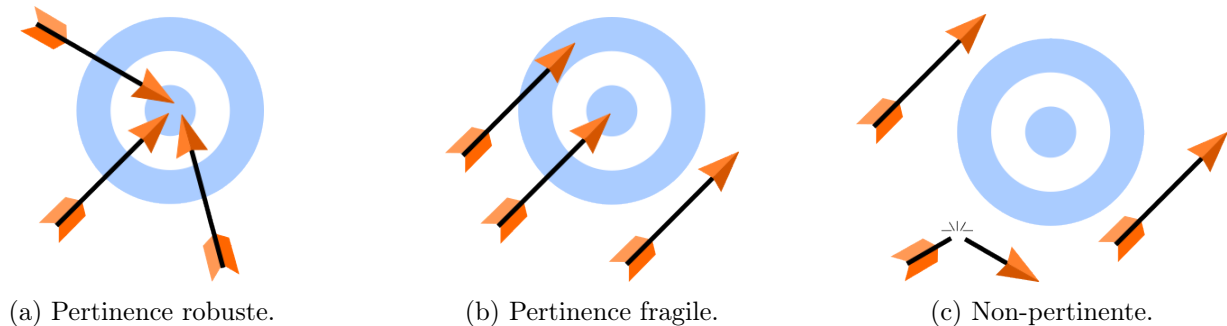


FIGURE 1.3 – Illustration du concept de pertinence d'une méthode numérique.

Ainsi, une stratégie peut être jugée de *pertinence robuste* lorsque la solution approchée numériquement demeure pertinente dans des situations variées, *fragile* pour une plage réduite d'utilisation, voire *non-pertinente*. Afin de décider laquelle de ces étiquettes attribuer, la pertinence de l'approche considérée sera jugée en terme de *performance*, de *robustesse* et de *complexité computationnelle*. La performance, emprunté au concept anglais, réfère au comportement de la solution numérique obtenue dans une situation donnée. La robustesse traduit la capacité d'une performance jugée satisfaisante à ne pas être perturbée par une petite modification dans les données ou les paramètres du modèle choisi pour l'estimation. En particulier, la notion de robustesse est à ne pas confondre avec les propriétés mathématiques de stabilité ou de consistance d'un schéma numérique. Enfin, la complexité computationnelle désigne la mesure des coûts de calcul d'une méthode numérique. Toute amélioration en terme de robustesse, de performance ou de complexité computationnelle constitue ainsi un progrès. L'analyse de la pertinence des techniques multi-résolutions présentée par la suite repose principalement sur l'étude de la performance et de la robustesse. La complexité computationnelle est seulement mentionnée avec parcimonie.

Le corps du mémoire est structuré selon deux parties distinctes. La première partie est à visée plutôt bibliographique. Celle-ci est constituée de deux chapitres. Le premier chapitre expose en détail la méthode numérique SPH-ALE considérée. Le second chapitre introduit l'ensemble des cas tests utilisés transversalement. Les éventuelles solutions analytiques, ainsi que les solutions obtenues avec le schéma SPH-ALE exposé ci-avant y sont également présentés. La seconde partie est composée essentiellement des contributions de l'auteur. Celle-ci est organisée en trois chapitres. Les deux premiers chapitres sont complémentaires. L'objet du premier est de résumer l'état de la littérature des techniques de raffinement zonal en méthode SPH, et d'exposer plus particulièrement le principe de la technique de l'« *Adaptive Particle Refinement* » (APR) proposée par L. Chiron *et al.* [17]. L'APR s'est toutefois avérée de pertinence jugée insatisfaisante à simuler les écoulements manipulés par les cas tests choisis. Les travaux de recherche menés au cours de la thèse ont conduit au développement d'une nouvelle méthode



de raffinement zonal dont les spécificités sont présentées dans un second chapitre. L'analyse de la pertinence validant l'intérêt d'utiliser cette nouvelle approche y est également exposée. Les résultats numériques obtenus ont été le sujet de présentations orales et de publications dans les actes de congrès internationaux [14, 15]. Né du besoin d'améliorer notablement la consistance du schéma numérique, le dernier chapitre est consacré aux techniques multi-résolutions temporelles. Bien qu'omniprésents dans la communauté des méthodes numériques à maillage, de tels travaux sont encore peu nombreux dans la communauté SPH à ce jour. Les développements ont conduit à la formulation d'un problème équivalent faisant intervenir une seconde échelle temporelle, selon un formalisme DTS (« *Dual-Time Stepping* »). Des résultats de pertinence robuste sont obtenus avec la SPH-ALE-DTS pour l'ensemble des cas tests introduits précédemment. Ces cas d'application permettent notamment d'exposer la compatibilité aux conditions de bord et la fiabilité de ce nouveau formalisme quant à la stabilisation numérique de la méthode.

# PARTIE I

## MÉTHODES DE SIMULATION SANS MAILLAGE

# CHAPITRE 2

## MÉTHODE PARTICULAIRE SPH-ALE

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Équations physiques</b>	<b>9</b>
<b>2.2</b>	<b>Discrétisation spatiale particulaire</b>	<b>10</b>
<b>2.3</b>	<b>Conditions aux limites</b>	<b>13</b>
2.3.1	Condition de paroi solide	13
2.3.2	Condition de périodicité	13
2.3.3	Condition de surface libre	13
2.3.4	Condition d'entrée	13
2.3.5	Condition de sortie	14
<b>2.4</b>	<b>Discrétisation temporelle</b>	<b>15</b>
<b>2.5</b>	<b>Corrections numériques usuelles de la méthode SPH-ALE</b>	<b>17</b>
2.5.1	Correction du mouvement des particules	18
2.5.2	Correction du gradient de la fonction noyau	19

---

Dans ce chapitre, la méthode numérique employée dans ces travaux de thèse est introduite afin d'exposer les spécificités du solveur ASPHODEL<sup>©</sup> utilisé. Dans le but de construire une méthode efficace, il est tout d'abord important de définir un cadre scientifique adapté à la nature des écoulements à simuler. Cette première étape aboutie à la mise en équations d'une description macroscopique. La solution de ce système d'équations continues en espace et en temps est alors approchée par une solution discrète en espace. Pour cela, un système discret en espace équivalent au système continu est formulé selon l'approche particulaire SPH-ALE. Les fondements mathématiques de la méthode SPH-ALE sont alors exposés, ainsi que le traitement des conditions aux limites appliquées aux frontières du domaine de calcul. Enfin, il convient de procéder à une discrétisation temporelle pour formuler un problème discret en espace et en temps. La méthode numérique résultante est dite ALE, sans maillage et est capable de reproduire les écoulements ciblés, notamment à surface libre. Enfin, la dernière section de ce chapitre est consacrée à des corrections numériques de cette méthode qui ont un intérêt pratique dans la suite du manuscrit.



## 2.1 Équations physiques

Dans le but de construire une méthode numérique, il est nécessaire de mettre en équations une description macroscopique des écoulements. Considérons alors un intervalle de temps  $T \subset \mathbb{R}_+$  et un domaine de calcul  $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^d$  qui dépend de l'instant  $t \in T$ , où  $d = 1, 2, 3$  indique le nombre de dimensions en espace. La suite de cette étude est restreinte à des fluides parfaits, c'est-à-dire des fluides non visqueux et où les effets de la conduction thermique sont négligeables. Les écoulements sont supposés faiblement compressibles. On suppose de plus que les champs étudiés sont suffisamment réguliers. Une modélisation mathématique de tels écoulements est formée par le système d'équations issues des lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Ces équations sont généralement regroupées sous la forme conservative et compacte suivante :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}(\mathbf{F}(\Phi))(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t), \quad \forall t \in T, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega(t), \quad (2.1)$$

où  $\Phi$  représente le vecteur des variables conservatives,  $\mathbf{F}(\Phi) = (\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_{d+1})^\top$  désigne la matrice des flux convectifs,  $\operatorname{div}(\mathbf{F}(\Phi)) = (\nabla \cdot \mathbf{F}_1, \dots, \nabla \cdot \mathbf{F}_{d+1})$  est la notation de sa divergence et  $\mathbf{Q}$  est le vecteur des termes sources. Pour expliciter ces termes, les vecteurs et matrices sont définis comme suit :

$$\Phi = (\rho, \rho \mathbf{v}), \quad \mathbf{F}(\Phi) = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{v} \\ \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p \mathbf{I}_d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = (0, \mathbf{S}), \quad (2.2)$$

avec  $\rho$  la masse volumique,  $\mathbf{v}$  le vecteur vitesse,  $p$  la pression statique,  $\mathbf{I}_d$  la matrice identité de taille  $d \times d$  et  $\mathbf{S}$  le vecteur des forces externes.

La fermeture du système donné Éq. (2.1) nécessite une relation supplémentaire permettant de calculer la pression statique. L'équation d'état de Tait [76] est classiquement utilisée dans la communauté SPH pour simuler le comportement d'un fluide faiblement compressible :

$$p = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] + p_0, \quad (2.3)$$

où  $c_0$  représente la vitesse du son dans le fluide,  $\gamma$  est un paramètre constant égal à 7,  $\rho_0$  et  $p_0$  désignent respectivement la masse volumique et la pression de référence. L'équation de Tait est en particulier capable de reproduire assez fidèlement le comportement réel de l'eau pour une vitesse de propagation du son réelle dans l'eau. Toutefois, la vitesse du son utilisée numériquement est généralement inférieure à la valeur réelle afin de limiter les coûts de simulation. Il est usuel de choisir une vitesse du son  $c_0$  constante de l'ordre de dix fois la vitesse maximale de l'écoulement. Le nombre de Mach  $Ma$  résultant, qui exprime le rapport de la vitesse locale du fluide à la vitesse du son  $c_0$ , est ainsi limité à  $Ma \leq 0,1$ . Cette approximation induit une erreur de simulation dont l'ordre de grandeur est jugé acceptable dans la plupart des cas d'étude réels.

Le système fermé composé des relations données Éq. (2.1) et Éq. (2.3) fournit ainsi une description mathématique de l'écoulement d'un fluide supposé parfait et faiblement compressible. Il s'agit d'un système continu en espace et en temps d'équations différentielles partielles (EDP) non-linéaires.

## 2.2 Discrétisation spatiale particulière

Dans l'état actuel de la connaissance scientifique, la résolution analytique du système continu formé par les équations (2.1)-(2.3) est généralement impossible sans plus d'hypothèses simplificatrices. Cependant, il est possible d'approcher la solution analytique par une solution discrète obtenue numériquement. Il n'est plus question de déterminer une solution analytique, mais plutôt d'obtenir une approximation des champs de vitesse, masse volumique et pression en un nombre fini de points de l'espace et d'instant. Pour cela, il convient de formuler un système discret en espace d'équations différentielles ordinaires (EDO) non-linéaires à partir du système continu (2.1)-(2.3).

Soient l'instant  $t \in T$  et le domaine de calcul  $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^d$ . Introduisons  $P(t)$  un ensemble de points de calcul distincts, sans connectivités entre eux, mobiles et réalisant une discrétisation de l'écoulement étudié. Dans la suite de ce manuscrit, un élément de l'ensemble  $P(t)$  est appelé particule par abus de langage. Chaque particule  $i \in P(t)$  est définie comme un volume de contrôle  $\Omega_i(t)$  de mesure  $|\Omega_i(t)| = \omega_i(t)$ , centré sur la position  $\mathbf{x}_i(t)$  et se déplaçant selon le champ de transport  $\mathbf{v}_{0,i}(t)$ . Initialement, toutes les particules  $i \in P(t)$  sont de même mesure  $\omega_i(0) = (\Delta x)^d$  où  $\Delta x$  est un scalaire représentant l'écart inter-particulaire initial. De plus, toute particule  $i$  discrétise le comportement du fluide en  $\mathbf{x}_i(t)$  et possède ainsi une vitesse  $\mathbf{v}_i(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_i, t)$ , une masse volumique  $\rho_i(t) = \rho(\mathbf{x}_i, t)$  et une pression statique  $p_i(t) = p(\mathbf{x}_i, t)$ . Le vecteur des variables conservatives se réécrit alors comme  $\Phi_i(t) = \Phi(\mathbf{x}_i, t)$  et le vecteur des forces externes est discrétisé selon  $\mathbf{Q}_i(t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}_i, t)$ . Le formalisme ici utilisé est dit « *Arbitrary Lagrange Euler* » (ALE) car le champ de transport  $\mathbf{v}_0$  n'est pas nécessairement identique à la vitesse du fluide  $\mathbf{v}$ . En conséquence, la matrice des flux convectifs  $\mathbf{F}(\Phi)$  de l'équation (2.1) doit être ré-exprimée en formalisme ALE et devient alors  $\mathbf{G}(\Phi, \mathbf{v}_0) = \mathbf{F}(\Phi) - \Phi \otimes \mathbf{v}_0$ . Cette dernière se discrétise comme  $\mathbf{G}_i(t) = \mathbf{G}(\Phi, \mathbf{v}_0)(\mathbf{x}_i, t)$ .

Dans la continuité des travaux de J.P. Vila [83], la formulation faible correspondante au système continu (2.1)-(2.3) exprimé en formalisme ALE est énoncée. L'intégrale en espace sur le domaine  $\Omega(t)$  est ensuite approchée par la somme discrète des domaines élémentaires  $\Omega_i(t)$  pour chaque particule  $i \in P(t)$ . Une approximation SPH de l'opérateur de divergence est alors utilisée, faisant intervenir une fonction de pondération  $W$ . Cette fonction  $W$  est appelée fonction noyau et doit notamment être positive, régulière, d'intégrale unitaire et à support  $D$  compact [54, 83]. La mesure de son support est appelée longueur de lissage et notée  $h$  [57]. Ces étapes de calcul sont détaillées dans l'annexe A.1. Le système équivalent, discret en espace omettant les termes de bord, est présenté Éq. (2.4) à l'instant  $t \in T$  et pour la particule d'intérêt  $i \in P(t)$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}_{0,i} , \\ \frac{d\omega_i}{dt} = 2\omega_i \sum_{j \in D_i} \omega_j (\mathbf{v}_{0,ij} - \mathbf{v}_{0,i}) \cdot \nabla_i W_{ij} , \\ \frac{d}{dt}(\omega_i \Phi_i) = \omega_i \mathbf{Q}_i - 2\omega_i \sum_{j \in D_i} \omega_j (\nabla_i W_{ij}) \mathbf{G}_{ij}^T , \\ p_i = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left[ \left( \frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] + p_0 . \end{array} \right. , \quad (2.4)$$

avec le support  $D_i$  de la fonction noyau centré sur la particule  $i$ , le champ de transport  $\mathbf{v}_{0,ij} = (\mathbf{v}_{0,i} + \mathbf{v}_{0,j})/2$ , le gradient évalué en  $\mathbf{x}_i$  de la fonction noyau  $\nabla_i W_{ij} = \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i^k} W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_{ij}) \right)_{k \leq d}$  où  $\mathbf{x}_i^k$  est la  $k$ -ième composante du vecteur  $\mathbf{x}_i$ , la longueur de lissage  $h_{ij} = (h_i + h_j)/2$  où  $h_i$  est la mesure du support  $D_i$  et enfin la matrice des flux exprimée en formalisme ALE  $\mathbf{G}_{ij} =$

$(\mathbf{G}_i + \mathbf{G}_j)/2$ . Le système présenté Éq. (2.4) est ainsi formé de deux premières équations qui sont liées au formalisme ALE décrivant l'évolution de la position et du volume de la particule  $i$ , des équations de conservation et de l'équation d'état. Pour les simulations réalisées par la suite, une fonction noyau de type Wendland  $\mathcal{C}^4$  est choisie car elle offre de bons compromis entre précision et stabilité [20]. Cette fonction est définie Éq. (2.5)-(2.6) pour  $t \in T$  et  $\mathbf{x} \in \Omega(t)$ .

$$W(\mathbf{x}, h(\mathbf{x}, t)) = \frac{C_d}{h(\mathbf{x}, t)^d} \theta_{Wend.} \left( \frac{\|\mathbf{x}\|}{2h(\mathbf{x}, t)} \right), \quad (2.5)$$

$$\theta_{Wend.}(q) = (1 - q)_+^5 (8q^2 + 5q + 1), \text{ en notant } r_+^n = \begin{cases} r^n & \text{si } r > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.6)$$

La constante  $C_d$  prend alors les valeurs  $C_2 = 3/(4\pi)$  et  $C_3 = 165/(256\pi)$  pour des problèmes en deux ( $d=2$ ) et trois ( $d=3$ ) dimensions respectivement [84]. Une schématisation en 1D du voisinage d'une particule est présentée Fig. 2.1.

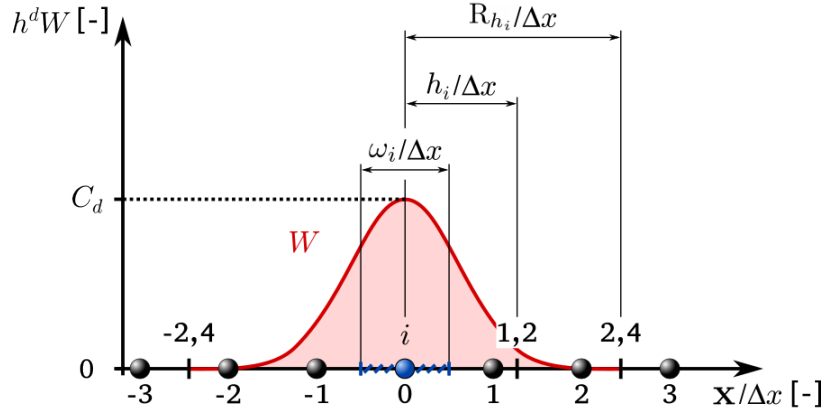


FIGURE 2.1 – Schématisation en 1D du voisinage d'une particule.

On appelle rayon de lissage  $R_h$  le paramètre dont la valeur est le double de la longueur de lissage  $h$ , i.e.  $R_h(\mathbf{x}, t) = 2h(\mathbf{x}, t)$ . De plus, le ratio des longueurs de lissage entre particules adjacentes doit être compris entre 0,97 et 1,03 (soit  $\pm 3\%$ ) afin de limiter les réflexions artificielles d'ondes acoustiques [21, 60]. Ainsi, la longueur de lissage  $h$  est traditionnellement choisie constante en espace et en temps telle qu'un ratio  $h/\Delta x = 1,2$  soit maintenu. Cette valeur assure en 2D la contribution d'une vingtaine de particules voisines à la quadrature réalisée, ce qui est en pratique suffisant pour stabiliser les résultats tout en conservant des coûts de calcul acceptables.

Le flux moyen  $\mathbf{G}_{ij}(t)$  est ensuite approché par  $\mathbf{G}_{ij}^E(t) = \mathbf{G}(\Phi^E, \mathbf{v}_0^E)((\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j)/2, t)$  qui est calculé par l'évaluation de la solution  $\Phi_{ij}^E(t) = \Phi^E((\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j)/2, t)$  d'un problème de Riemann mono-dimensionnel entre les particules  $i$  et  $j$  dont l'interface se déplace à la vitesse  $\mathbf{v}_0^E((\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j)/2, t) = \mathbf{v}_{0,ij}(t)$  [83]. Pour obtenir une évaluation simple et robuste de la solution  $\Phi^E$ , le solveur « *Primitive Variable Riemann Solver* » (PVRS) [82] avec stratégie « *Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Laws* » (MUSCL) [82] et limiteur minmod [74] sont utilisés. De manière analogue, le calcul des échanges de flux au sein des termes de bord (non présentés) nécessite quant à lui l'évaluation des solutions de problèmes de Riemann partiels [48]. Une telle approximation des flux assure au schéma d'être conservatif [67]. Ces traitements des flux numériques sont détaillés dans l'annexe A.2.

Pour la suite, il est utile de noter que pour une particule donnée, le support de la fonction noyau de ses voisins doit être complet également afin de garantir la consistance du schéma

numérique manipulant les gradients de la reconstruction MUSCL. Une schématisation en 1D de ce voisinage étendu est présentée Fig. 2.2 pour une particule  $i$  donnée.

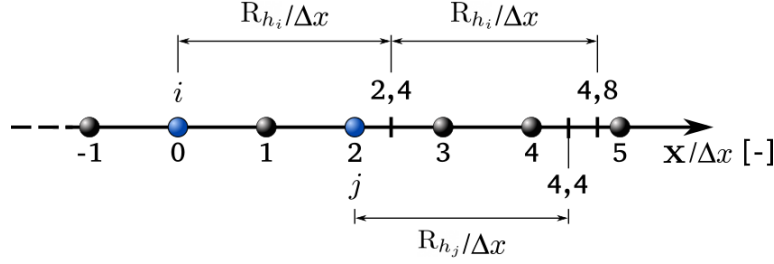


FIGURE 2.2 – Schématisation en 1D du voisinage étendu d'une particule.

Cette particule présente deux voisines à sa droite selon Fig. 2.1. Notons  $j$  celle dont elle est la plus éloignée. Procéder à la reconstruction des gradients par stratégie MUSCL nécessite d'évaluer les interactions entre la particule  $j$  et ses voisines. Ainsi, la particule  $i$  présente un voisinage étendu à quatre voisines sur sa droite. Sa molécule de calcul comporte donc neuf particules pour une discrétisation uniforme en 1D.

Le système résultant, omettant les termes de bord, est présenté Éq. (2.7) à l'instant  $t \in T$  et pour la particule d'intérêt  $i \in P(t)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}_{0,i} , \\ \frac{d\omega_i}{dt} = 2\omega_i \sum_{j \in D_i} \omega_j (\mathbf{v}_{0,ij} - \mathbf{v}_{0,i}) \cdot \nabla_i W_{ij} , \\ \frac{d}{dt}(\omega_i \Phi_i) = \omega_i \mathbf{Q}_i - 2\omega_i \sum_{j \in D_i} \omega_j (\nabla_i W_{ij}) (\mathbf{G}_{ij}^E)^\top , \\ p_{i\bullet}^E = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left[ \left( \frac{\rho_{i\bullet}^E}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] + p_0 . \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Dans un soucis d'alléger les notations, il est commode d'écrire le système précédant sous une forme plus compacte, comme suit.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Psi_i}{dt} + \mathcal{H}[\mathbf{v}_{0,i} ; \nabla_i W_{i\bullet}] (\Psi_i) = 0 , \\ p_{i\bullet}^E = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left[ \left( \frac{\rho_{i\bullet}^E}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] + p_0 . \end{array} \right. \quad (2.8)$$

avec le vecteur des variables  $\Psi_i = (\mathbf{x}_i, \omega_i, \omega_i \Phi_i)^\top$  et  $\mathcal{H}$  le résidu.

La notation  $\mathcal{H}[\mathbf{v}_{0,i} ; \nabla_i W_{i\bullet}] (\Psi_i)$  utilisée Éq. (2.8) exprime explicitement la dépendance du résidu vis-à-vis du champ de transport et du gradient de la fonction noyau  $W_{i\bullet}$  évalués à la particule  $i$ . Cette notation est simplifiée en  $\mathcal{H}(\Psi_i)$  dans la suite du manuscrit.

Finalement, le système formulé Éq. (2.8) est un système discret en espace d'EDO non-linéaires, dont la solution est une approximation de la solution analytique mais inconnue du système continu (2.1)-(2.3).

## 2.3 Conditions aux limites

Le domaine de calcul étant borné, toute particule se situant suffisamment proche d'une frontière présente une fonction noyau dont le support est tronqué. Ce déficit de voisins peut rendre le schéma numérique non-consistant et entraîner des erreurs numériques considérables. Il est donc nécessaire de gérer ces termes de bord en contraignant les valeurs de la solution du système d'équations (2.8) sur une frontière. Les diverses conditions aux limites utilisées pour cela sont brièvement introduites dans cette section.

### 2.3.1 Condition de paroi solide

Dans le cadre du système d'équations (2.8), toute paroi solide est traitée par une condition limite dite de paroi glissante. Une telle modélisation traduit la continuité des vitesses normales à l'interface entre le fluide et la paroi. Autrement dit, la vitesse du fluide présente uniquement une composante tangente à la paroi si cette dernière est fixe. Cette condition est imposée de par la définition de problèmes de Riemann partiels [48]. La paroi solide est discrétisée par un ensemble d'éléments surfaciques dont les contributions  $j$  sont incluses dans le terme de voisinage  $\sum_{j \in D_i} \omega_j (\nabla_i W_{ij}) (\mathbf{G}_{ij}^E)^\top$  d'une particule  $i$ . L'élément de surface  $j$  est interprété comme l'interface du problème de Riemann par le solveur. Le flux de paroi  $\mathbf{G}_{ij}^E$  résulte de la résolution d'un problème de Riemann mono-dimensionnel le long de la normale à la paroi.

### 2.3.2 Condition de périodicité

La condition limite de périodicité spatiale permet d'éviter la troncature du support d'une particule située à proximité d'une frontière du domaine de calcul. De plus, les particules sortant du domaine de calcul par l'une de ces frontières peuvent ensuite être réinjectées à l'intérieur du domaine par ailleurs [48]. Une telle condition consiste à créer une connectivité spatiale fictive en dupliquant les particules qui doivent l'être (les virtuelles), préalablement à l'évaluation du voisinage des particules fluides (les réelles). Les champs des virtuelles sont pris identiques à ceux des réelles dont elles sont issues. Le domaine de calcul est ainsi fictivement étendu d'une épaisseur  $2R_h$  égale à deux fois le rayon de lissage selon la normale à la frontière périodique définie [57]. Comme illustré Fig. 2.2, cette épaisseur garantit la complétude du support des fonctions noyaux et une reconstruction MUSCL adéquate des gradients.

### 2.3.3 Condition de surface libre

La discrétisation du domaine est limitée au fluide en méthode SPH. Effectuer une telle simulation présuppose que l'ensemble des particules  $P$  discrétise convenablement l'écoulement étudié. L'absence de particules dans une zone du domaine induit donc une absence de fluide et introduit une surface libre délimitée par l'enveloppe de la distribution de particules. Afin de simuler une surface libre, la pression de référence  $p_0$  est imposée comme nulle dans l'équation d'état donnée Éq. (2.3) pour simuler une pression ambiante nulle. La vitesse du fluide est alors dictée par la cinématique des particules le discrétisant.

### 2.3.4 Condition d'entrée

En raison du choix fait sur la vitesse du son numérique  $c_0$  utilisée dans la relation (2.3), les écoulements considérés se limitent au régime subsonique ( $Ma < 0, 1$ ). Il est alors nécessaire

d'imposer des conditions d'entrée subsonique au niveau des zones d'injection de fluide [57]. Dans la suite de ces travaux, imposer une condition d'entrée consiste à fixer la vitesse  $\mathbf{v}$  intervenant dans le vecteur  $\Phi$  du système (2.7). Afin d'éliminer d'éventuelles réflexions d'ondes au niveau de ces zones d'injection, les conditions de non-réflexion à l'infini dites « *Navier-Stokes Characteristics Boundary Conditions* » [58, 62] sont appliquées. Le principe est d'introduire un paramètre de relaxation  $\zeta$  permettant d'évacuer les perturbations non désirées. La valeur ad hoc de ce paramètre  $\zeta$  dépend de la géométrie du cas test et est ajustée numériquement.

### 2.3.5 Condition de sortie

La complexité computationnelle d'une simulation SPH est directement corrélée au nombre de particules mobilisées pour discrétiser l'écoulement. Afin de limiter ces coûts CPU, il est souhaitable de restreindre le nombre de particules utilisées grâce à une condition de sortie gérant l'évacuation aux frontières du domaine. La fonction noyau de toute particule à proximité de ces zones de sortie présente un support tronqué. En supposant que ces particules aient une vitesse uniforme et une pression nulle, les erreurs numériques induites par le déficit de voisines sont faibles. Dans ce cas, les termes de bord sont négligés et les fonctions noyaux non-corrigées. Une particule devant être évacuée est simplement supprimée, laissant ainsi ses anciennes partenaires subitement orphelines d'une voisine.

## 2.4 Discrétisation temporelle

La discrétisation spatiale par méthode SPH-ALE des équations physiques permet de transformer un système d'EDP en un système d'EDO qu'il convient d'intégrer en temps. L'utilisation de schémas d'intégration implicites est actuellement restreinte dans la communauté SPH, car cette approche nécessite de créer une connectivité entre les particules ce qui va à l'encontre de la nature sans maillage de la méthode SPH. De plus, les coûts de calcul sont souvent trop importants pour qu'une telle approche soit attrayante. Ainsi, les schémas numériques usuellement employés sont explicites en temps.

Dans la suite de ce manuscrit, c'est la méthode de Runge-Kutta qui a été utilisée pour réaliser la discrétisation temporelle explicite du système donné Éq. (2.8). Bien que plus coûteux que d'autres méthodes explicites, le formalisme de Runge-Kutta permet d'atteindre des ordres de convergence supérieurs. Le détail de la méthode de Runge-Kutta explicite à  $q$ -étages est présenté en annexe B. En utilisant les notations qui y sont introduites, considérons les poids  $\{a_{2,1}, \dots, a_{q,q-1}\}$ ,  $\{b_1, \dots, b_q\}$  et la décomposition en sous-pas  $\{c_1, \dots, c_q\}$  de la méthode à  $q$  étages. La discrétisation en temps  $\{t_0 < t_1 < \dots < t_N, N \in \mathbb{N}, [t_0, t_N] \subset T\}$  du système (2.8) s'écrit pour  $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$  comme suit

$$\begin{cases} \Psi_i^{n+1} = \Psi_i^n - \Delta t_n \sum_{k=1}^q b_k \mathcal{H}^{n,k}, \\ p_{i\bullet}^{E,n+1} = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left[ \left( \frac{\rho_{i\bullet}^{E,n+1}}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] + p_0. \end{cases}, \quad (2.9)$$

avec  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$  le  $n$ -ième pas de temps,  $\Psi_i^{n+1} = \Psi_i(t_{n+1})$  le vecteur des variables évalué à l'instant  $t_{n+1}$ ,  $\Psi_i^n = \Psi_i(t_n)$  le vecteur des variables évalué à l'instant  $t_n$ ,  $p_{i\bullet}^{E,n+1} = p_{i\bullet}^E(t_{n+1})$  la pression évaluée à l'instant  $t_{n+1}$ ,  $\rho_{i\bullet}^{E,n+1} = \rho_{i\bullet}^E(t_{n+1})$  la masse volumique évaluée à l'instant  $t_{n+1}$  et  $\mathcal{H}^{n,k} = \mathcal{H}(\Psi_i(t_{n,k}))$  le résidu évalué à l'instant  $t_{n,k} = t_n + c_k \Delta t_n$  où  $\Psi_i(t_{n,k}) = \Psi_i^n - \Delta t_n \sum_{l=1}^{k-1} a_{k,l} \mathcal{H}^{n,l}$ .

La contrepartie des schémas d'intégration explicite réside dans le dimensionnement des pas de temps  $\Delta t_n$  qui est régi par une condition restrictive de type Courant-Friedrichs-Lewy (CFL). Pour le système donné Éq. (2.9), cette condition de stabilité est exprimée Éq. (2.10) pour  $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ .

$$\Delta t_n \leq K_{\text{CFL}} \min_{i \in P(t_n)} \left( \frac{h_i}{c_0} \right), \quad (2.10)$$

où  $K_{\text{CFL}}$  est un coefficient inférieur à 1 dont la valeur est en pratique déterminée par l'expérience numérique. Dans la communauté SPH, la valeur de  $K_{\text{CFL}}$  est en général limitée à 0,3 environ. Une illustration de la contrainte (2.10) est présentée Fig. 2.3. En particulier pour  $K_{\text{CFL}} = 1$ , une onde acoustique (resp. convective) correspondant à un nombre de Mach de 1 (resp. de 0,1) émise depuis la position  $\mathbf{x}_i$  parcourt en un pas de temps  $\Delta t_n$  une distance  $h_i$  (resp.  $h_i/10$ ). Ainsi, la contrainte (2.10) où  $K_{\text{CFL}} = 1$  traduit que le pas de temps  $\Delta t_n$  doit être fixé de sorte à ce que les ondes acoustiques issues d'une particule ne soient pas influencées par les ondes issues des particules situées au-delà de son support. À noter que pour  $K_{\text{CFL}} = 2$ , une onde acoustique émise par la particule  $i$  atteint le bord de son support en un pas de temps. De plus, pour  $K_{\text{CFL}} = 4$ , une telle onde parcourt l'intégralité du support en un pas de temps. Par ailleurs, on note que le choix de la vitesse du son numérique  $c_0$  effectué dans Éq. (2.3) est un paramètre de la restriction CFL donnée Éq. (2.10). Plus la valeur numérique de  $c_0$  est importante, plus le pas de temps  $\Delta t_n$  doit être faible et donc plus la méthode est coûteuse.



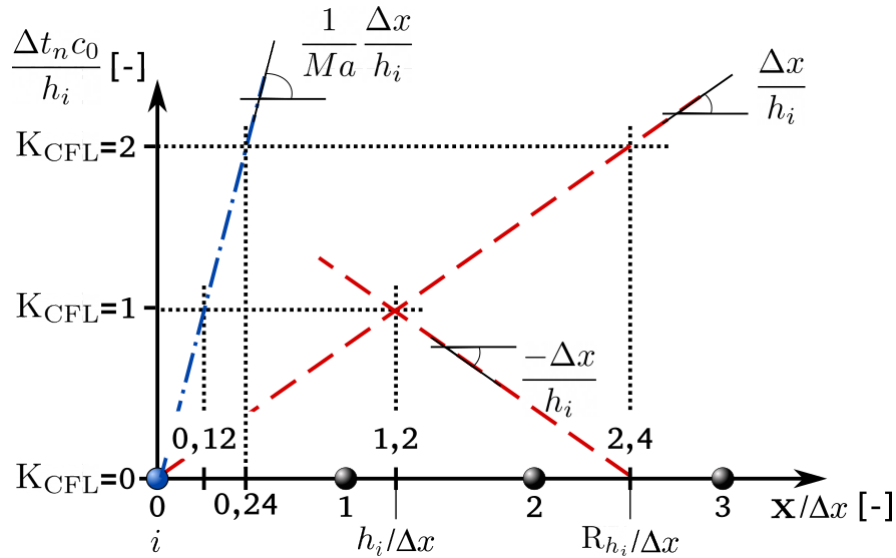


FIGURE 2.3 – Schématisation en 1D de la propagation temporelle d’une onde acoustique correspondant à un nombre de Mach de 1 (ligne discontinue de tirets rouges) et d’une onde convective correspondant à un nombre de Mach de 0,1 (ligne discontinue de pointillés et de tirets bleus) émises depuis la position de la particule  $i$ .

Les simulations numériques réalisées par la suite à partir du schéma (2.9) font seulement intervenir les méthodes de Runge-Kutta à  $q = 1$  étage (RK1) et  $q = 3$  étages (RK3). La méthode RK1, aussi connue sous le nom de méthode d’Euler, utilise les poids  $b_1 = 1$  et la décomposition en sous-pas  $c_1 = 0$ . Les pas de temps sont contraints par  $K_{CFL} = 0, 2$ . La méthode RK3 recourt quant à elle aux poids  $\{a_{2,1} = 1/2, a_{3,1} = -1, a_{3,2} = 2\}$ ,  $\{b_1 = 1/6, b_2 = 2/3, b_3 = 1/6\}$  et à la décomposition en sous-pas  $\{c_1 = 0, c_2 = 1/2, c_3 = 1\}$ . Les pas de temps sont alors contraints par  $K_{CFL} = 0, 3$ . En l’absence d’une indication spécifique, la méthode RK3 est privilégiée pour réaliser la simulation dont les résultats sont utilisés comme référence numérique.



## 2.5 Corrections numériques usuelles de la méthode SPH-ALE

La consistance d'un schéma numérique est une propriété locale qui indique la capacité du schéma à représenter une solution régulière satisfaisant localement le système d'équations aux dérivées partielles lorsque tous les pas de discrétisation tendent vers zéro. En particulier, une méthode est dite consistante d'ordre  $q$  si la reproduction d'une fonction régulière supposée continue et  $q - 1$  fois continûment dérivable est exacte. La consistance est ainsi une propriété intrinsèquement liée à la notion de précision de l'approximation fournie par le schéma numérique. La méthode SPH-ALE présente une consistance d'ordre au plus 1. En effet, l'ordre 1 est une limite mathématiquement indépassable de par les propriétés de la fonction noyau [48]. De plus, cette méthode souffre en pratique d'un manque de précision. Par exemple, la méthode ne vérifie même pas la consistance d'ordre 0 dès lors que la distribution particulaire est inhomogène [56]. Dans la littérature SPH, de multiples stratégies visent à corriger le mouvement des particules, la fonction noyau et/ou son gradient afin d'améliorer la consistance. L'objet de cette section n'est pas d'en réaliser une synthèse exhaustive, mais seulement de présenter celles qui ont un intérêt pratique dans la suite du manuscrit. Le lecteur est notamment redirigé vers [8, 10, 64, 65, 71] pour plus de détails sur les corrections usuelles présentées dans la littérature.

Dans ce qui suit, des stratégies de correction de la méthode SPH-ALE visant à garantir la consistance d'ordre 0 sont présentées. Mathématiquement, il s'agit d'assurer que l'approximation SPH du gradient d'un champ indépendant de la position  $\mathbf{x}_i$  soit nul. Autrement dit, en considérant que son support  $D_i$  n'est pas tronqué, le gradient de la fonction noyau centrée sur la particule  $i$  doit satisfaire la relation suivante à tout instant.

$$\sum_{j \in D_i} \omega_j \nabla_i W_{ij} = 0 . \quad (2.11)$$

L'équation (2.11) n'est pas toujours vérifiée numériquement, notamment lorsque la distribution particulaire n'est pas rigoureusement symétrique autour de la particule  $i$  d'intérêt [48]. Dans ce cas, l'erreur associée est dite « *closed-box* » dans les travaux de M. Neuhauser [56] et est notée  $\mathbf{b}_i$ . En omettant toujours les termes de bord, celle-ci est définie pour toute particule  $i$  selon

$$\mathbf{b}_i = \sum_{j \in D_i} \omega_j \nabla_i W_{ij} . \quad (2.12)$$

Ce terme est physiquement interprété par A. Colagrossi *et al.* [19] comme une mesure locale de l'inhomogénéité de la dispersion particulaire autour de la particule  $i$ . Concrètement, de large variations de la concentration de particules telles que la présence de zones sur-peuplée (amas) ou sous-peuplée (trou) dans la distribution globale se traduisent numériquement par des maxima locaux de l'amplitude  $\|\mathbf{b}_i\|$  de l'erreur « *closed-box* » [45]. En particulier, considérons les métriques suivantes.

$$\mathcal{N}_2(\mathbf{b}) = \sqrt{\frac{1}{\#P} \sum_{i \in P} h_i^2 \|\mathbf{b}_i\|^2} , \quad (2.13)$$

$$\mathcal{N}_\infty(\mathbf{b}) = \max_{i \in P} h_i \|\mathbf{b}_i\| , \quad (2.14)$$

où  $\#P$  désigne le cardinal de l'ensemble  $P$ . Le terme  $h_i \|\mathbf{b}_i\|$  est appelé *erreur d'approximation locale* associée à la particule  $i$  dans ce qui suit. Par conséquent, la métrique  $\mathcal{N}_2(\mathbf{b})$  (resp.

$\mathcal{N}_\infty(\mathbf{b})$ ) est la norme euclidienne (resp. norme infinie) de l'erreur d'approximation locale. Ces deux normes sont complémentaires. Utiliser la norme  $\mathcal{N}_2(\mathbf{b})$  conduit à une interprétation incluant l'ensemble des erreurs locales du domaine de calcul. Privilégier la norme  $\mathcal{N}_\infty(\mathbf{b})$  restreint l'analyse au maximum global observé dans le domaine.

Ne pas satisfaire la condition (2.11) de consistance à l'ordre 0 n'est pas sans conséquences. Afin de les illustrer, considérons la simulation 2D d'un fluide dans un domaine de calcul étendu bi-périodiquement (sans termes de bord). Initialisons alors le fluide au repos avec une vitesse nulle et une pression constante. Par conséquent, la vitesse du fluide devrait théoriquement rester nulle à tout instant. Cependant, ce n'est pas le cas numériquement car l'erreur  $\mathbf{b}_i$  induit une quantité de mouvement non nulle à la particule  $i$ . Ce comportement non-physique rend ainsi impossible toute simulation pertinente d'un fluide au repos [56]. En bref, corriger l'erreur « *closed-box* » s'avère donc obligatoire pour réaliser certaines simulations.

### 2.5.1 Correction du mouvement des particules

Une stratégie de correction de la méthode SPH-ALE qui a fait ses preuves a été proposée par [56], puis révisée récemment par [65]. Celle-ci consiste à bénéficier de la capacité intrinsèque des particules SPH à se réorganiser spatialement décrite par A. Colagrossi *et al.* [19] afin de forcer une réorganisation dynamique de la distribution particulaire sans modifier les propriétés physiques de l'écoulement, c'est-à-dire sans induire une vitesse artificielle aux particules. Pour cela, l'expression du champ de transport  $\mathbf{v}_0$  des particules SPH est modifiée de manière à réduire l'erreur « *closed-box* » globale. Par conséquent, les erreurs induites par un pavage de l'espace de faible qualité sont réduites. Une telle approche est mathématiquement admissible pour la méthode SPH-ALE car le champ de transport est une variable arbitraire héritée du formalisme ALE utilisé pour construire le schéma numérique.

Comme décrit par A. Colagrossi *et al.* [19], toute particule  $i$  localisée dans une distribution localement inhomogène présente la capacité intrinsèque de se déplacer dans la direction du vecteur  $\mathbf{b}_i$  de manière à homogénéiser la concentration des particules dans cette zone. Dans ses travaux de thèse, M. Neuhauser [56] modifie le champ de transport de toute particule  $i$  pour y faire appliquer une pression uniforme  $p_{\text{unif}} = \rho_0 c_0^2 / \gamma$  afin d'intensifier ce comportement. Pour aller plus loin que cette correction de la seule cinématique des particules, le système couplant la position, la vitesse et la pression  $p_{\text{unif}}$  est supposé hyperbolique. Autrement dit, il est supposé que les perturbations locales de la distribution induites par la correction appliquée à la particule  $i$  ont une vitesse de propagation finie. Ainsi, les points de l'espace hors du support  $D_i$  ne ressentent pas immédiatement ses effets. Ceci se traduit par l'introduction d'un terme de pression de la forme  $\rho_0 c_0 \mathbf{v}_{0,i} / 2$  dans la modification proposée du champ de transport. La pratique numérique a de plus démontré qu'un décentrement de ce terme est nécessaire pour plus de stabilité. L'une des révisions proposée par P. Rastelli [65] consiste à introduire le coefficient empirique  $P_s$  afin d'amplifier l'effet de réorganisation dû au terme  $p_{\text{unif}}$ . Par conséquent, le terme correctif additionnel au champ de transport s'écrit en omettant les termes de bord selon

$$\left( \frac{d\mathbf{v}_{0,i}}{dt} \right)_{\text{corr}} = \sum_{j \in D_i} \omega_j \left[ P_s \frac{p_{\text{unif}}}{\rho_0} + \frac{c_0}{2} (\mathbf{v}_{0,i} - \mathbf{v}_{0,j}) \cdot \mathbf{n}_{ij} \right] \nabla_i W_{ij}, \quad (2.15)$$

où  $\mathbf{n}_{ij} = (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) / \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|$  désigne le vecteur unitaire orienté de la particule  $i$  vers  $j$ . Le terme correctif historiquement proposé par M. Neuhauser [56] s'écrit avec  $P_s = 1$ . Un apport certain à utiliser une valeur du paramètre  $P_s > 1$  sur la qualité de la correction est observé par P. Rastelli [65]. Cependant, la valeur du paramètre  $P_s$  ne peut être augmentée indéfiniment sans générer des instabilités numériques. Il conclut finalement qu'utiliser  $P_s = 10$  constitue le

meilleur compromis.

Par ailleurs, un terme de lissage est ajouté à l'expression (2.15) pour régulariser le champ de transport corrigé, i.e.

$$\left(\frac{d\mathbf{v}_{0,i}}{dt}\right)_{\text{rég}} = \left(\frac{d\mathbf{v}_{0,i}}{dt}\right)_{\text{corr}} + \varkappa \sum_{j \in D_i} \omega_j \frac{c_0}{h_i} (\mathbf{v}_{0,i} - \mathbf{v}_{0,j}) W_{ij}, \quad (2.16)$$

avec  $\varkappa = 0, 1$  un paramètre numérique ad hoc. La définition du champ de transport du problème (2.9) est alors révisée pour  $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$  comme suit. Le champ de transport de la particule  $i$  est initialisé égal à la vitesse du fluide, i.e.  $\mathbf{v}_{0,i}^0 = \mathbf{v}_i^0$ . Il évolue ensuite temporellement selon

$$\mathbf{v}_{0,i}^{n+1} = \mathbf{v}_i^{n+1} - \Delta t_n \sum_{k=1}^q b_k \left(\frac{d\mathbf{v}_{0,i}}{dt}\right)_{\text{rég}}^{n,k}, \quad (2.17)$$

avec  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$  le  $n$ -ième pas de temps, les poids  $\{b_1, \dots, b_q\}$  et la décomposition en sous-pas  $\{c_1, \dots, c_q\}$  de la méthode de Runge-Kutta à  $q$  étages. Le terme correctif exprimé Éq. (2.16) est évalué à l'instant  $t_{n,k} = t_n + c_k \Delta t_n$ . L'expression (2.17) est utilisée par [56] pour définir une correction du mouvement des particules réduisant l'erreur « *closed-box* » lors d'une simulation en description ALE. Toutefois, les particules discrétisant une surface libre ainsi que celles dont au moins une voisine est considérée à la surface libre sont exemptées de ce traitement afin que cette interface conserve une cinématique purement lagrangienne. Cette précaution nécessite donc la détection de la surface libre, ce qui est réalisée selon l'algorithme proposé par S. Marrone *et al.* [49]. En bref, cet algorithme se décompose en deux étapes. D'une part, les particules dont le voisinage est incomplet sont identifiées comme éventuellement isolées. Cependant cette étape ne détecte pas seulement les particules situées à proximité d'une surface libre mais également celles situées près d'inhomogénéités de la distribution (trous). Par conséquent, la seconde étape consiste en l'évaluation du voisinage d'une particule supposée isolée. Si aucune voisine ne lui est trouvée dans un cône de révolution orienté selon un axe astucieusement choisi, alors celle-ci est considérée à la surface libre.

Dans ses travaux, M. Neuhauser [56] démontre l'apport de la correction (2.17) et sa capacité à réduire efficacement les perturbations induites par l'erreur « *closed-box* » dans une simulation. Toutefois, cette correction du mouvement des particules ne peut que réduire l'erreur « *closed-box* » mais ne l'annule pas complètement numériquement [65].

### 2.5.2 Correction du gradient de la fonction noyau

Une autre stratégie de correction de la méthode SPH-ALE a été détaillée dans [56] afin de garantir la consistance d'ordre 0. Celle-ci consiste à corriger le gradient de la fonction noyau de manière à satisfaire la condition (2.11). À nouveau, les particules situées au voisinage d'une surface libre sont exemptées de ce traitement. Pour toute autre particule  $i$ , le gradient corrigé  $\widetilde{\nabla}_i W_{ij}$  est défini selon

$$\widetilde{\nabla}_i W_{ij} = \begin{cases} \nabla_i W_{ij} - \frac{W_{ij}}{\sum_{k \in D_i \setminus \{i\}} \omega_k W_{ik}} \mathbf{b}_i & \text{si } i \neq j, \\ \nabla_i W_{ii} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.18)$$

Ainsi défini, le gradient corrigé vérifie la condition discrète (2.11). Substituer l'expression  $\widetilde{\nabla}_i W_{ij}$  à  $\nabla_i W_{ij}$  dans le système (2.7) permet à la méthode numérique d'effectuer une redistribution

de l'erreur  $\mathbf{b}_i$  d'une particule  $i$  à ses voisines. Or, la méthode résultante n'est pas conservative car le gradient corrigé défini (2.18) n'est pas symétrique, i.e.  $\widetilde{\nabla}_i W_{ij} \neq -\widetilde{\nabla}_j W_{ij}$ . Toutefois, il est souvent jugé préférable dans la littérature de garantir la consistence à l'ordre 0 plutôt que de symétriser cette correction du gradient. Dans ses travaux, M. Neuhauser [56] démontre la capacité d'une telle approche à réduire efficacement les perturbations induites par l'erreur « *closed-box* » dans une simulation. De plus, elle note que la correction (2.18) du gradient de la fonction noyau est d'autant plus efficace lorsque celle-ci est utilisée conjointement avec la correction (2.17) du mouvement des particules.

# CHAPITRE 3

## CAS TESTS NUMÉRIQUES

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Écoulement quasi-1D dans un tube à choc</b>	<b>22</b>
<b>3.2</b>	<b>Écoulement 2D dans un canal oscillant</b>	<b>24</b>
<b>3.3</b>	<b>Tourbillons de Taylor-Green</b>	<b>30</b>
3.3.1	Résultats en description eulérienne	32
3.3.2	Résultats en description lagrangienne	33
<b>3.4</b>	<b>Impact 2D d'un jet plan sur une plaque plane</b>	<b>37</b>
<b>3.5</b>	<b>Synthèse</b>	<b>45</b>

---

L'objectif principal de ces travaux de thèse est d'analyser la pertinence de techniques multi-résolutions en méthode SPH-ALE. Toute amélioration en terme de robustesse, de performance ou de complexité computationnelle constitue ainsi un progrès scientifique. Pour mener cette étude, l'ensemble des cas tests utilisés dans ce manuscrit, les solutions obtenues avec le schéma SPH-ALE uniforme ainsi que les éventuelles solutions analytiques sont présentés dans ce chapitre. Afin d'adopter une démarche de complexification progressive, les cas tests numériques sont ordonnés comme suit. Le premier est un cas eulérien d'écoulement quasi-1D dans un tube à choc. Cette description présente l'avantage de faire abstraction des difficultés liées à la configuration géométrique des particules. Ainsi, ce cas test valide l'implémentation informatique et démontre la faisabilité d'un apport dû aux techniques multi-résolutions pour la méthode SPH-ALE. Une analyse de la robustesse et de la performance des techniques multi-résolutions est par la suite menée grâce à la simulation lagrangienne 2D d'un canal oscillant horizontalement. L'étude spécifique aux techniques multi-résolutions en temps est ensuite complétée par la simulation des tourbillons de Taylor-Green. Ce cas est utilisé en description eulérienne, puis lagrangienne pour tester la pertinence de telles techniques à réaliser une simulation présentant de forts gradients. Pour aller plus loin, considérer un écoulement avec des conditions d'entrée/sortie, une surface libre et une paroi solide s'accompagne de difficultés supplémentaires. Ainsi, l'analyse de la pertinence des techniques multi-résolutions est étendue à la simulation d'un jet plan impactant une plaque plane en incidence normale.

### 3.1 Écoulement quasi-1D dans un tube à choc

Le cas test présenté ici est un standard de la communauté SPH pour la validation des simulations d'écoulements compressibles. Il s'agit de la reproduction d'un problème de Riemann qui permet, par comparaison avec la solution analytique connue, d'évaluer la capacité du schéma numérique à reproduire les ondes non-linéaires et les discontinuités qui interviennent.

Le cas étudié est schématisé Fig. 3.1 et sa paramétrisation est inspirée de [48].

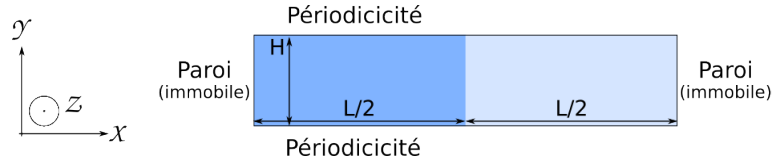


FIGURE 3.1 – Cas test numérique du tube à choc : schématisation de la géométrie du problème.

Le domaine de calcul est composé d'un domaine fluide rectangulaire invariant selon l'axe  $z$ . Il est délimité dans sa longueur par des conditions de parois solides immobiles et est étendu dans sa hauteur par périodicité. Le domaine fluide est de longueur  $L = 0,60$  m, de hauteur  $H = 0,080$  m et est formé de deux états gauche (G) et droit (D) définis Tab. 3.1 disposés de part et d'autre d'une discontinuité initialement positionnée au milieu du domaine en  $x = 0,00$  m.

<i>Variables primitives</i>	<i>Gauche</i>	<i>Droite</i>
Masse volumique : $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	1100	1000
Vitesse, composante $x$ : $v_x$ [m/s]	200	0
Vitesse, composante $y$ : $v_y$ [m/s]	0	0

TABLE 3.1 – Cas test numérique du tube à choc : états fluides initiaux.

En particulier, la masse linéique totale théorique de fluide est  $\mathcal{M}_{\text{théo}} = (\rho_G + \rho_D)HL/2$ . Le fluide considéré est caractérisé par une masse volumique de référence  $\rho_0 = 1000$  kg/m<sup>3</sup>. Les constantes de l'équation d'état de Tait sont  $c_0 = 1466$  m/s,  $\gamma = 7$  et  $p_0 = 0$  Pa. Ce cas est traité sans la force de gravité, c'est-à-dire que le vecteur  $\mathbf{S}$  des forces externes est nul.

Les simulations sont réalisées en description eulérienne, c'est-à-dire avec un champ de transport  $\mathbf{v}_0$  nul obligeant ainsi les particules SPH à demeurer immobiles et à geler leur volume. Le domaine fluide est uniformément discrétisé par un pavage cartésien régulier de particules SPH dont l'écart inter-particulaire est  $\Delta x = 5,00$  mm. Une seule couche de particules est utilisée pour discrétiser l'axe  $z$ . Ainsi, près de 2000 particules sont manipulées dans cette configuration. On y fait référence comme la simulation SPH standard N dans ce qui suit. Les résultats de pression statique et de norme du vecteur vitesse sont présentés sous la forme de profils instantanés selon l'axe  $x$ , extraits à mi-hauteur en  $y = 0,00$  m au moyen de quarante sondes fixes et équi-réparties sur la portion  $-0,10 \text{ m} \leq x \leq 0,10 \text{ m}$ . Par la suite, utilisons une mesure de temps adimensionnée  $t_{\text{adim}}$  par la durée nécessaire au choc se déplaçant vers la droite pour atteindre la position  $x = 0,05$  m. La pression statique (resp. la norme du vecteur vitesse) est elle-même adimensionnée par la pression statique initiale (resp. la vitesse initiale) de l'état fluide gauche.

Les deux états fluides entrent instantanément en contact à  $t_{\text{adim}} = 0,0$ . La solution analytique est alors formée de deux ondes de choc se déplaçant respectivement vers la droite à 1827 m/s (soit un nombre de Mach  $Ma = 1,25$ ) et vers la gauche à 1788 m/s (soit un nombre de Mach  $Ma = 0,91$ ). L'expression de la pression statique adimensionnée  $p_{\text{adim}}^{\text{théo}}$  et de la norme

du vecteur vitesse adimensionné  $\|\mathbf{v}_{\text{adim}}^{\text{théo}}\|$  de la solution analytique est donnée Éq. (3.1)-(3.2) pour  $x \in [-L/2, L/2]$  à l'instant  $t_{\text{adim}} \in \mathbb{R}_+^*$  [31, 48].

$$p_{\text{adim}}^{\text{théo}}(x, t_{\text{adim}}) = \begin{cases} 1, & \text{si } x/t_{\text{adim}} < v_{x,G} - Q_G/\rho_G, \\ 0, & \text{si } x/t_{\text{adim}} > v_{x,D} + Q_D/\rho_D, \\ p_{\star}^{\text{théo}}, & \text{sinon.} \end{cases}, \quad (3.1)$$

$$\|\mathbf{v}_{\text{adim}}^{\text{théo}}(x, t_{\text{adim}})\| = \begin{cases} 1, & \text{si } x/t_{\text{adim}} < v_{x,G} - Q_G/\rho_G, \\ 0, & \text{si } x/t_{\text{adim}} > v_{x,D} + Q_D/\rho_D, \\ \|\mathbf{v}_{\star}^{\text{théo}}\|, & \text{sinon.} \end{cases}, \quad (3.2)$$

où  $Q_G$ ,  $Q_D$ ,  $p_{\star}^{\text{théo}}$  et  $\|\mathbf{v}_{\star}^{\text{théo}}\|$  sont des constantes définies Éq. (3.3)-(3.9).

$$p_{\star}^{\text{théo}} = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma p_G} \left( \left( \frac{\rho_{\star}}{\rho_0} \right)^{\gamma} - 1 \right) + \frac{p_0}{p_G}, \quad (3.3)$$

$$\|\mathbf{v}_{\star}^{\text{théo}}\| = \frac{v_{x,\star}}{v_{x,G}}, \quad (3.4)$$

$$p_G = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left( \left( \frac{\rho_G}{\rho_0} \right)^{\gamma} - 1 \right) + p_0, \quad (3.5)$$

$$v_{x,\star} = \frac{1}{2} (v_{x,D} + v_{x,G}) - \frac{1}{2} (\rho_D - \rho_G) \frac{c_D + c_G}{\rho_D + \rho_G}, \quad (3.6)$$

$$\rho_{\star} = \frac{1}{2} (\rho_D + \rho_G) - \frac{1}{2} (v_{x,D} - v_{x,G}) \frac{\rho_D + \rho_G}{c_D + c_G}, \quad (3.7)$$

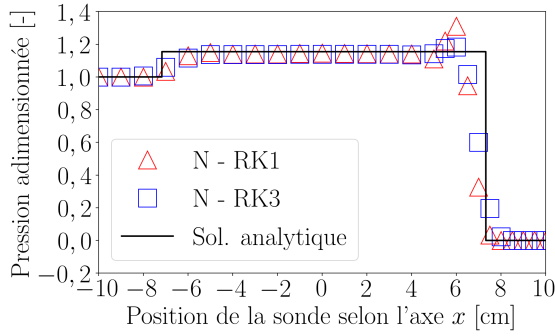
$$c_{G/D} = c_0 \left( \frac{\rho_{G/D}}{\rho_0} \right)^{(\gamma-1)/2}, \quad (3.8)$$

$$Q_{G/D} = \left( \frac{c_0^2}{\gamma \rho_0^{\gamma-1}} \frac{(\rho_{\star}^{\gamma} - \rho_{G/D}^{\gamma}) \rho_{G/D} \rho_{\star}}{\rho_{\star} - \rho_{G/D}} \right)^{1/2}. \quad (3.9)$$

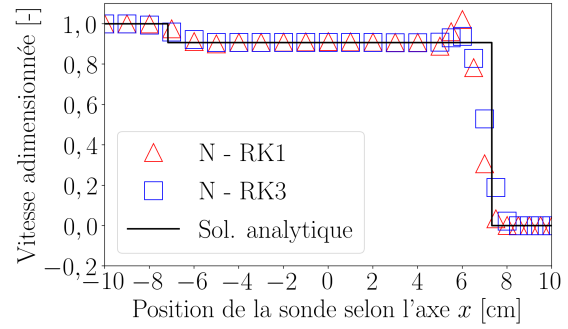
Fig. 3.2a (resp. Fig. 3.2b) présente le profil de pression statique (resp. de la norme du vecteur vitesse) à l'instant  $t_{\text{adim}} = 1, 5$  obtenu pour la discrétisation  $N$ , comparé à la solution analytique.

Ces profils, la position et la raideur des ondes de choc prédits par N-RK1 et N-RK3 sont jugés conformes à ceux de la solution analytique. L'utilisation d'un limiteur stabilise le schéma et parvient à éliminer assez efficacement les oscillations autour des discontinuités, mais au prix d'une diffusion de ces discontinuités [48]. Quel que soit l'ordre du schéma d'intégration utilisé, la discrétisation  $N$  est jugée suffisamment fine pour limiter cette diffusion. Toutefois, le dépassement observé en amont de la discontinuité à  $x = 6$  cm pour les profils N-RK1 est plus important que celui des profils N-RK3, car réaliser l'intégration du schéma numérique (2.9) par méthode RK1 est ici limite stable à  $K_{\text{CFL}} = 0, 2$ . Dans l'ensemble, l'auteur est confiant pour utiliser la solution SPH standard  $N$  avec schéma RK1 et RK3 comme références numériques dans la suite des travaux.





(a) Profil de pression statique adimensionnée.



(b) Profil de la norme du vecteur vitesse adimensionnée.

FIGURE 3.2 – Cas test numérique du tube à choc : profils instantanés à  $t_{\text{adim}} = 1,5$ . Comparaison de la solution analytique (ligne continue noire), de la solution SPH standard uniforme N avec schéma RK3 (carrés bleus) et RK1 (triangles rouges).

### 3.2 Écoulement 2D dans un canal oscillant

Afin de tester la robustesse d'une approche multi-résolution en méthode SPH-ALE, il est utile de conduire une simulation purement lagrangienne. Le champ de transport  $\mathbf{v}_0$  est alors identique à la vitesse de l'écoulement  $\mathbf{v}$  dans Éq. (2.7). Les particules se déplacent, se réorganisent et ajustent leur volume pour réaliser un pavage dynamique du domaine de calcul qui s'accompagne d'instabilités numériques et d'erreurs d'approximations. Ces difficultés liées aux configurations géométriques des particules sont exacerbées pour un régime d'écoulement à dynamique rapide. Or, l'écoulement manipulé dans ce cas test présente une dynamique faible ce qui permet de caractériser la robustesse selon une démarche de complexification progressive.

La géométrie du cas test est présentée Fig. 3.3.

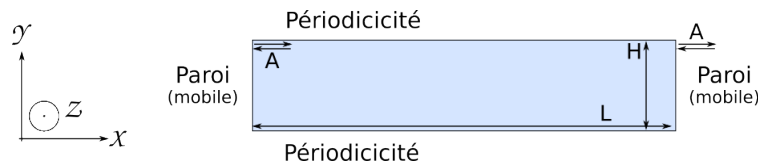


FIGURE 3.3 – Cas test numérique du canal oscillant : schématisation de la géométrie du problème.

Le domaine de calcul est composé d'un domaine fluide rectangulaire invariant selon l'axe  $z$ . Il est délimité dans sa longueur par deux pistons modélisés par des conditions de parois solides mobiles et il est étendu dans sa hauteur par périodicité. L'origine du repère est prise au milieu du domaine fluide initial en  $(L/2, H/2)$ . Le fluide considéré est caractérisé par une masse volumique de référence  $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$ . En particulier, la masse linéique totale théorique de fluide est  $\mathcal{M}_{\text{théo}} = \rho_0 H L$ . Les constantes de l'équation d'état de Tait sont  $c_0 = 4,0 \times 10^{-2} \text{ m/s}$ ,  $\gamma = 7$  et  $p_0 = 0,5 \text{ Pa}$ . Ce cas est traité sans la force de gravité, c'est-à-dire que le vecteur  $\mathbf{S}$  des forces externes est nul. Le domaine fluide est de longueur  $L = 0,60 \text{ m}$ , de hauteur  $H = 0,080 \text{ m}$  et il est animé par le mouvement horizontal des deux pistons synchrones. Un piston effectue un mouvement de va-et-vient d'amplitude  $A = 0,050 \text{ m}$  et de période  $T = 40 \text{ s}$ . Cette oscillation est à vitesse constante  $U = \pm 2,5 \times 10^{-3} \text{ m/s}$ , ce qui correspond à un nombre de Mach de 0,06. Vingt périodes sont simulées.

Le domaine fluide est initialement discrétisé uniformément par un pavage cartésien régulier



de particules SPH dont l'écart inter-particulaire est  $\Delta x = 5,00$  mm. Une seule couche de particules est utilisée pour discrétiser l'axe  $z$ . Ainsi, près de 2000 particules sont manipulées dans cette configuration. On y fait référence comme la simulation SPH standard N dans la suite du document. De plus, les résultats sont présentés sous la forme de profils dont les valeurs sont extraites de l'axe horizontal  $y = 0,375$  m discrétisée par cinquante sondes fixes équi-réparties selon l'axe  $x$  sur la longueur  $L+A$ . La position d'une sonde est adimensionnée par les dimensions du canal, i.e.  $(x_{\text{adim}}, y_{\text{adim}}) = (x/(L/2), y/(H/2))$  où  $y_{\text{adim}} = 9,375$ . Par la suite, une mesure de temps adimensionnée  $t_{\text{adim}}$  par la période d'une oscillation de piston est également utilisée.

Les deux pistons se mettent en mouvement instantanément à  $t_{\text{adim}} = 0,0$ , ce qui initie un déplacement horizontal du fluide vers la droite et induit des perturbations dans l'écoulement. L'évolution de ces perturbations au cours de la première période d'oscillation est illustrée Fig. 3.4 pour la solution SPH standard uniforme N-RK3.

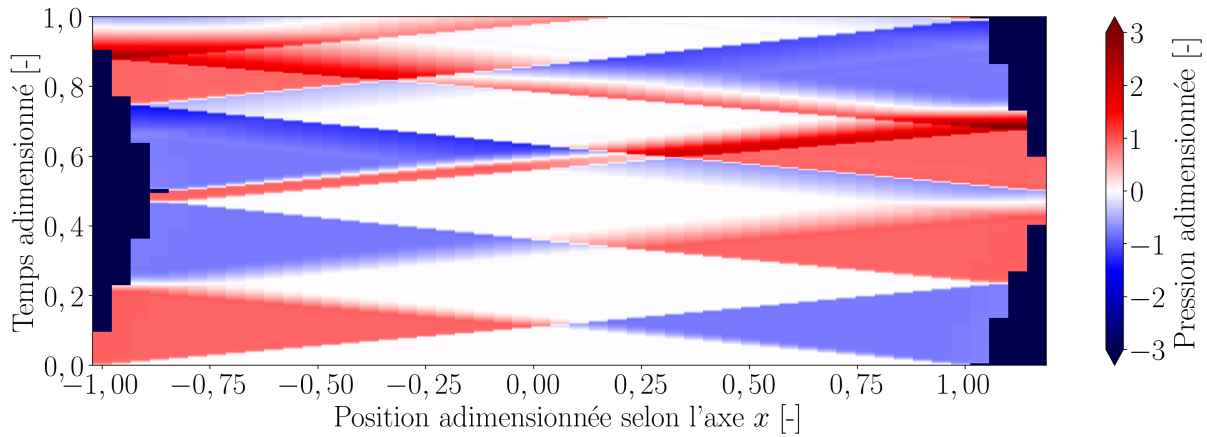


FIGURE 3.4 – Cas test numérique du canal oscillant : évolution de la pression statique selon la position  $x_{\text{adim}}$  de la sonde, au cours de la première période d'oscillation des pistons. Les parois mobiles sont représentées en noir.

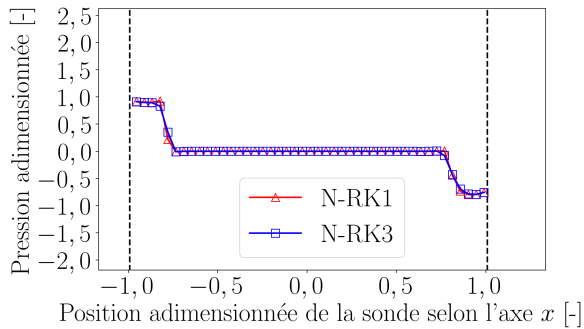
L'instant  $t_{\text{adim}}$  considéré est précisé selon l'axe des ordonnées. La période est échantillonnée régulièrement par quarante instants. La pression statique est centrée par  $p_0$  puis adimensionnée par la pression uniforme  $p_{\text{unif}} = \rho_0 c_0^2 / \gamma$ , i.e.  $p_{\text{adim}} = (p - p_0) / p_{\text{unif}}$ .

Une onde de choc (resp. de détente) est alors générée dans l'écoulement au niveau de la paroi de gauche (resp. droite) et se déplace vers la droite (resp. gauche) du domaine fluide. Ces perturbations s'amortissent peu en se déplaçant au sein de l'écoulement supposé faiblement compressible. Ainsi, celles-ci se déplacent en sens inverse, se croisent, finissent par se réfléchir sur la paroi opposée à leur origine et reproduisent ce cycle. Par exemple, les deux ondes se croisent une première fois à  $t_{\text{adim}} = 0,125$  puis de nouveau à  $t_{\text{adim}} = 0,35$ . De même, on note que l'onde de choc générée initialement au voisinage de la paroi de gauche se réfléchit une première fois sur la paroi de droite à  $t_{\text{adim}} = 0,2$ , puis sur la paroi de gauche à  $t_{\text{adim}} = 0,5$  et ainsi de suite. Par ailleurs, le changement périodique de sens du mouvement des pistons entretient le déplacement de l'écoulement et génère de nouvelles perturbations au voisinage des parois mobiles. En particulier, la première inversion se produit à  $t_{\text{adim}} = 0,5$ . On observe ainsi l'apparition d'une onde de détente (resp. de choc) supplémentaire dans l'écoulement au niveau de la paroi de gauche (resp. droite) à  $t_{\text{adim}} = 0,525$ .

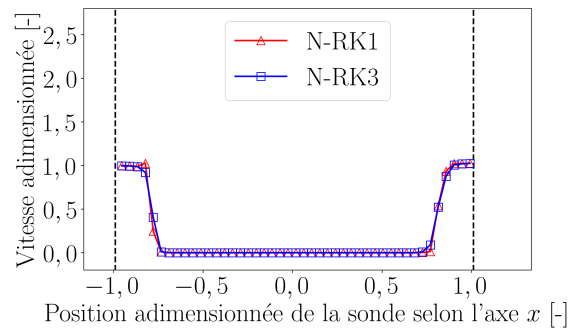
Des considérations faites ci-avant, se restreindre à une portion de période d'oscillation des pistons est jugé suffisant pour étudier finement l'évolution des perturbations de l'écoulement. Ainsi, seule la première demi-période est détaillée. Il convient alors d'observer l'initialisation

des perturbations à  $t_{\text{adim}} = 0,025$ , puis leur superposition à  $t_{\text{adim}} = 0,125$ , le résultat après réflexions à  $t_{\text{adim}} = 0,25$  et enfin l'état à  $t_{\text{adim}} = 0,5$  pour illustrer de manière exhaustive un cycle d'évolution. Les résultats sont présentés sous la forme de profils instantanés de pression statique et de norme du vecteur vitesse selon la position adimensionnée de la sonde. La pression adimensionnée  $p_{\text{adim}}$  est considérée et la norme du vecteur vitesse est elle-même adimensionnée par la vitesse  $|U|$  des pistons. Chaque paroi est représentée par une ligne verticale (pointillés noirs).

Fig. 3.5a (resp. Fig. 3.5b) présente le profil de pression statique (resp. de la norme du vecteur vitesse) à l'instant  $t_{\text{adim}} = 0,025$  obtenu pour la discrétisation N.



(a) Profil de pression statique adimensionnée.

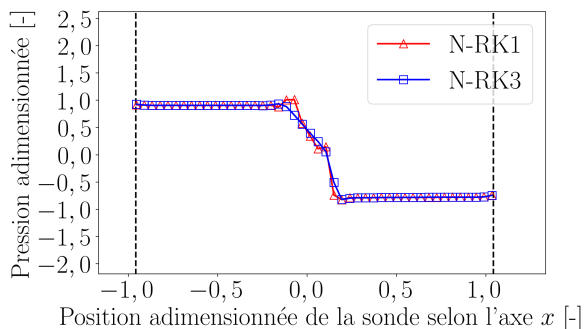


(b) Profil de la norme du vecteur vitesse adimensionnée.

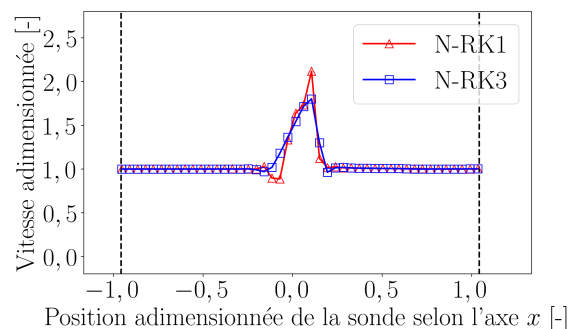
FIGURE 3.5 – Cas test numérique du canal oscillant : profils instantanés à  $t_{\text{adim}} = 0,025$ .

Les perturbations au voisinage des parois viennent d'être générées et commencent à se déplacer dans l'écoulement. L'onde de choc (resp. de détente) se déplace de gauche à droite (resp. de droite à gauche). Les profils prédits par N-RK1 et N-RK3 sont jugés similaires.

Fig. 3.6a (resp. Fig. 3.6b) présente le profil de pression statique (resp. de la norme du vecteur vitesse) à l'instant  $t_{\text{adim}} = 0,125$ .



(a) Profil de pression statique adimensionnée.

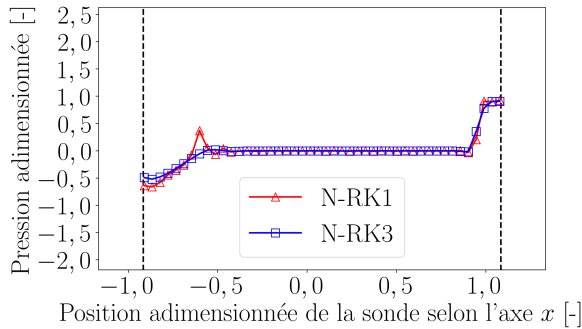


(b) Profil de la norme du vecteur vitesse adimensionnée.

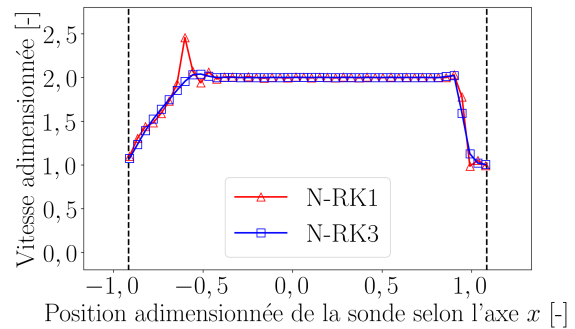
FIGURE 3.6 – Cas test numérique du canal oscillant : profils instantanés à  $t_{\text{adim}} = 0,125$ .

On observe la superposition des ondes de choc et de détente au milieu du canal au voisinage de  $x_{\text{adim}} = 0$ . Une fois qu'elles se sont croisées, les deux ondes se disjoint sans amortissement (non illustré). Elles poursuivent leur trajectoire vers la paroi opposée à leur origine. Les profils prédits par N-RK1 et N-RK3 sont jugés cohérents entre eux, bien que N-RK1 présente un dépassement par rapport à N-RK3. N-RK1 semble ainsi atténuer légèrement le caractère filtrant des phénomènes hautes fréquences du schéma numérique par rapport à N-RK3.

Fig. 3.7a (resp. Fig. 3.7b) présente le profil de pression statique (resp. de la norme du vecteur vitesse) à l'instant  $t_{\text{adim}} = 0,25$ .



(a) Profil de pression statique adimensionnée.

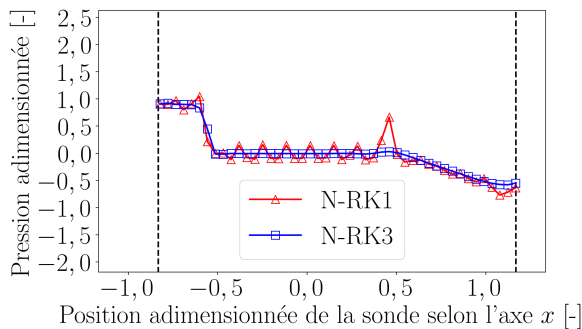


(b) Profil de la norme du vecteur vitesse adimensionnée.

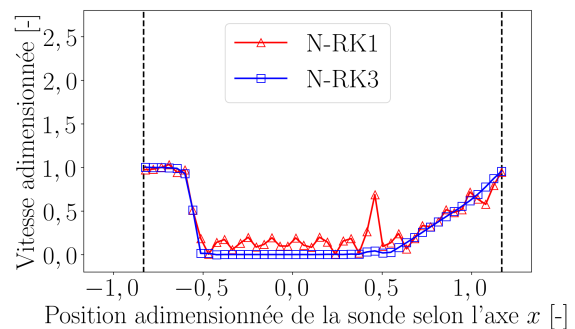
FIGURE 3.7 – Cas test numérique du canal oscillant : profils instantanés à  $t_{\text{adim}} = 0,25$ .

Les perturbations se sont réfléchies auparavant sur les parois et inversent leur sens de déplacement. L'onde de choc (resp. de détente) originale de la paroi de gauche (resp. droite) s'est réfléchi sur la paroi de droite (resp. de gauche) en une onde de choc (resp. de détente) qui se déplace de droite à gauche (resp. de gauche à droite). Les profils issus de N-RK1 présentent un net dépassement en tête de l'onde de détente en  $x_{\text{adim}} = -0,6$ . Le schéma N-RK1 ( $K_{\text{CFL}} = 0,2$ ) semble présenter des signes d'instabilité plus marqués à cet instant.

Fig. 3.8a (resp. Fig. 3.8b) présente le profil de pression statique (resp. de la norme du vecteur vitesse) à l'instant  $t_{\text{adim}} = 0,5$ .



(a) Profil de pression statique adimensionnée.

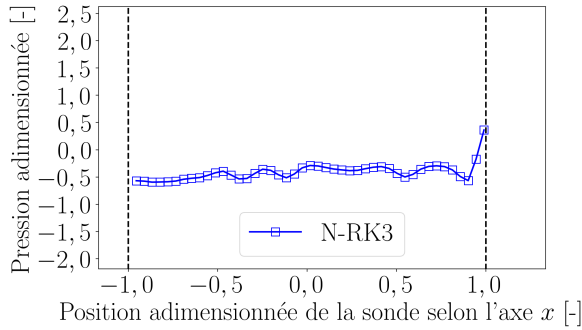


(b) Profil de la norme du vecteur vitesse adimensionnée.

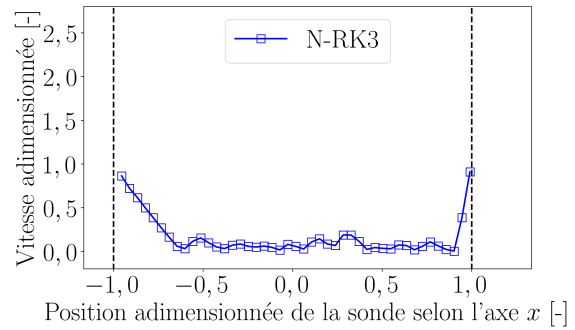
FIGURE 3.8 – Cas test numérique du canal oscillant : profils instantanés à  $t_{\text{adim}} = 0,5$ .

Les pistons viennent de terminer le premier aller et sont en position de butée à droite. L'onde de choc (resp. de détente) s'est réfléchi sur la paroi de gauche (resp. de droite) et se déplace à nouveau de gauche à droite (resp. de droite à gauche). Les pistons s'apprêtent à réaliser le retour de la première oscillation, ce qui engendrera de nouvelles perturbations à leur voisinage. Les profils prédits par N-RK1 ne sont plus jugés conformes à ceux de N-RK3. La stabilité du schéma numérique N-RK1 est insuffisante ce qui tend à amplifier les perturbations de la simulation. Ainsi, la solution N-RK1 n'est pas utilisée comme solution numérique de référence dans la suite des travaux. La discrétisation  $N$  en espace est quant à elle jugée suffisamment fine pour réaliser cette étude.

Pour aller plus loin, intéressons-nous aux perturbations présentes dans l'écoulement en fin de simulation. Fig. 3.9a (resp. Fig. 3.9b) présente le profil de pression statique (resp. de la norme du vecteur vitesse) à l'instant  $t_{\text{adim}} = 20$ .



(a) Profil de pression statique adimensionnée.

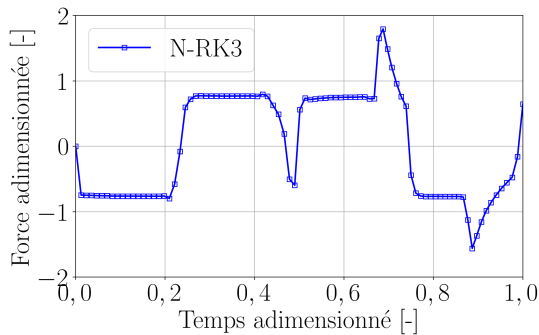


(b) Profil de la norme du vecteur vitesse adimensionnée.

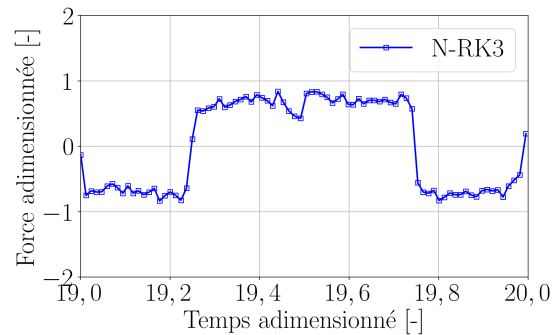
FIGURE 3.9 – Cas test numérique du canal oscillant : profils instantanés à  $t_{\text{adim}} = 20$ .

D'une part, la vitesse est quasi-nulle dans le canal pour  $-0,5 \leq x_{\text{adim}} \leq 0,75$ , hormis aux voisinages des parois solides en raison des conditions bord. D'autre part, la pression dans le canal est quasi-constante. On note une légère diminution par rapport à l'état initial  $p_{\text{adim}} = 0$ . Le schéma numérique N-RK3 s'est ainsi montré légèrement dissipatif au cours de la simulation.

L'analyse est maintenant focalisée sur la force  $F_{2D}$  appliquée par l'écoulement sur les deux pistons au cours d'une période d'oscillation. Une mesure de force adimensionnée  $F_{2D}^{\text{adim}}$  par la force initialement appliquée sur une paroi  $F_{2D}^{\text{théo}} = p_0 H$  est utilisée. Une période est échantillonnée par quatre-vingt pas réguliers. Fig. 3.10a (resp. Fig. 3.10b) présente le profil de la force normale aux parois obtenu pour la discrétisation N-RK3 au cours de la première (resp. dernière) période simulée avec  $0 \leq t_{\text{adim}} \leq 1$  (resp.  $19 \leq t_{\text{adim}} \leq 20$ ).



(a) Première période d'oscillation simulée.



(b) Dernière période d'oscillation simulée.

FIGURE 3.10 – Cas test numérique du canal oscillant : profils de la force normale aux parois au cours d'une période d'oscillation.

Les pistons se déplacent de la gauche vers la droite pour  $0 \leq t_{\text{adim}} < 0,5$  (resp.  $19 \leq t_{\text{adim}} < 19,5$ ) puis de la droite vers la gauche pour  $0,5 \leq t_{\text{adim}} < 1$  (resp.  $19,5 \leq t_{\text{adim}} < 20$ ). En particulier pour  $0 \leq t_{\text{adim}} < 0,5$ , la force présente deux états, i.e.  $F_{2D}^{\text{adim}} \approx \pm 1$ . Une valeur négative (resp. positive) traduit que l'écoulement reçoit de l'énergie des pistons (resp. fournit de l'énergie aux pistons). On note de plus une chute de la force à  $t_{\text{adim}} = 0,5$  (resp.  $t_{\text{adim}} = 19,5$ ) due au changement de sens de déplacement des pistons. Le profil associé à la dernière période simulée est plus bruité en raison des nombreuses ondes accumulées.

Pour comparer les résultats obtenus par la suite à ceux de la simulation N-RK3, il est utile de disposer de métriques moyennées en espace et en temps. On définit pour cela la puissance élémentaire comme le produit scalaire de la force  $F_{2D}$  et de la vitesse constante  $U = \pm 2,5 \times 10^{-3}$  m/s des pistons. Une mesure de cette puissance adimensionnée par la puissance élémentaire analytique  $F_{2D}^{théo} |U|$  est utilisée. On définit alors le travail adimensionné comme l'intégrale sur une période de la puissance élémentaire adimensionnée, afin de quantifier l'énergie fournie par l'écoulement aux pistons sur une durée finie. De plus, la norme intégrale 1 de la puissance élémentaire adimensionnée est définie comme l'intégrale sur une période de la valeur absolue de la puissance élémentaire adimensionnée. Dans la suite du manuscrit, recourir à cette métrique permet de quantifier les erreurs cumulatives commises sur l'approximation de la force normale en paroi. Dans les deux cas, une approximation de l'intégrale est obtenue par méthode des rectangles sur l'échantillonnage temporel choisi précédemment. Les résultats obtenus pour la simulation N-RK3 sont indiqués Tab. 3.2 pour les première et dernière périodes d'oscillation simulées.

<i>Simulations</i>	<b>Première période</b>		<b>Vingtième période</b>	
	<i>Travail [-]</i>	<i>Norme 1 [-]</i>	<i>Travail [-]</i>	<i>Norme 1 [-]</i>
N-RK3	-1,25	30,2	-0,96	26,7

TABLE 3.2 – Cas test numérique du canal oscillant : mesures sur la puissance élémentaire de la force normale aux parois de la simulation SPH standard N-RK3.

Le travail sur une période est négatif, ce qui traduit que l'écoulement reçoit de l'énergie des pistons pour être mis en mouvement. Les mesures obtenues pour la première oscillation sont d'amplitude plus importante que celles de la vingtième oscillation, ce qui indique que l'écoulement a reçu plus d'énergie lors de la première période. En effet, le fluide est initialement au repos et sa mise en mouvement a demandé un sur-plus d'énergie issu des pistons.

Dans l'ensemble, l'auteur est confiant pour utiliser la solution SPH standard N-RK3 comme référence numérique dans la suite des travaux.

### 3.3 Tourbillons de Taylor-Green

La simulation des tourbillons de Taylor-Green en deux dimensions d'espace est un cas test usuel pour les méthodes numériques dans le cadre de la mécanique des fluides [56]. Ainsi, il est presque incontournable d'y recourir pour tester la pertinence d'une approche multi-résolution en méthode SPH-ALE. La géométrie du problème est illustrée Fig. 3.11.

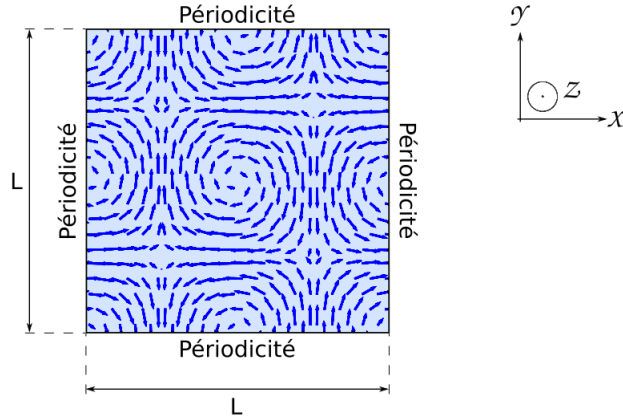


FIGURE 3.11 – Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green : schématisation de la géométrie du problème.

Il s'agit de simuler l'évolution de quatre tourbillons contra-rotatifs qui s'amortissent dans le temps au sein d'un domaine de calcul carré, bi-périodique et invariant selon l'axe  $z$ . En particulier, cet écoulement ne nécessite pas d'interactions avec d'autres conditions de bord et présente de forts gradients. Par conséquent, il s'agit d'un test de pertinence particulièrement efficace. De plus, les résultats obtenus numériquement peuvent être confrontés à une solution analytique. En effet, l'écoulement des tourbillons de Taylor-Green est une solution instationnaire des équations de Navier-Stokes formulées en incompressible. Son expression est donnée Éq. (3.10) quels que soient l'instant  $t \in T$  et le point  $\mathbf{x} = (x, y)$  du domaine de calcul  $\Omega(t) = [0, L] \times [0, L]$  considérés.

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x(x, y, t) = -U \exp\left(-\frac{8U\pi^2 t}{LRe}\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right), \\ v_y(x, y, t) = U \exp\left(-\frac{8U\pi^2 t}{LRe}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{L}\right), \\ p(x, y, t) = p_0 - \frac{\rho_0 U^2}{4} \exp\left(-\frac{16U\pi^2 t}{LRe}\right) \left[ \cos\left(\frac{4\pi x}{L}\right) + \cos\left(\frac{4\pi y}{L}\right) \right]. \end{array} \right. , \quad (3.10)$$

avec  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$  le vecteur vitesse,  $p$  la pression statique,  $p_0$  la pression de référence,  $\rho_0$  la masse volumique de référence et  $Re = UL/\nu$  le nombre de Reynolds dont l'expression fait intervenir la vitesse initiale  $U$  et la viscosité cinématique du fluide  $\nu$ .

Dans ce manuscrit, l'étude est restreinte à des écoulements de fluides supposés parfaits. De tels fluides sont de viscosité cinématique  $\nu$  nulle. Pour cette raison, Éq. (3.10) décrit alors une solution stationnaire du système des équations d'Euler formulées en incompressible. L'expres-

sion (3.10) se réduit comme suit.

$$\begin{cases} v_x(x, y, t) = -U \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right), \\ v_y(x, y, t) = U \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{L}\right), \\ p(x, y, t) = p_0 - \frac{\rho_0 U^2}{4} \left[ \cos\left(\frac{4\pi x}{L}\right) + \cos\left(\frac{4\pi y}{L}\right) \right]. \end{cases} \quad (3.11)$$

L'approximation obtenue par méthode SPH-ALE doit théoriquement correspondre à la solution stationnaire donnée Éq. (3.11). Numériquement cependant, les tourbillons s'amortissent dans le temps selon Éq. (3.10) avec un terme artificiel de viscosité qui dépend du schéma numérique employé ainsi que des pas de discrétisation en temps et en espace choisis [56]. À paramètres de discrétisation égaux, la mesure de cette viscosité au moyen d'un nombre de Reynolds d'origine numérique est une donnée utile à la classification et aux comparaisons car intrinsèque à chaque méthode. L'objet de cette étude est à la fois de quantifier ce nombre de Reynolds numérique et d'analyser les erreurs induites dans les champs physiques simulés par les approches multi-résolutions en méthode SPH-ALE étudiées.

D'une part, étudier l'évolution temporelle de l'énergie cinétique totale du fluide  $E_{c, \text{tot}}$  permet de caractériser l'amortissement dans le temps du champ de vitesse induit par la viscosité numérique intrinsèque au schéma de référence (2.9). Soit l'instant  $t \in T$ . L'énergie cinétique portée à cet instant par la particule  $i$  est définie selon  $E_{c, i} = \rho_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i / 2$ . L'intégration spatiale sur le domaine  $\Omega(t) = [0, L] \times [0, L]$  de l'énergie cinétique de toutes les particules constitue l'énergie cinétique totale du fluide  $E_{c, \text{tot}}$ . Par intégration du système d'équations (3.10), celle-ci est analytiquement exprimée comme suit.

$$E_{c, \text{tot}}(t) = E_{c, 0} \exp\left(-\frac{16U\pi^2 t}{LRe}\right), \quad (3.12)$$

où  $E_{c, 0}$  désigne sa valeur initiale. Par la suite,  $E_{c, \text{tot}}$  est adimensionnée par la valeur  $E_{c, 0}$  déterminée numériquement. De même, utilisons une mesure de temps adimensionnée  $t_{\text{adim}}$  par la durée caractéristique  $L/U$ . En particulier, si l'on approxime la périphérie d'un tourbillon par le périmètre d'un carré de côté  $L/2$ , une particule se déplaçant à la vitesse  $U$  l'aura parcourue entièrement à l'instant  $t_{\text{adim}} = 2$ .

D'autre part, par simplicité, l'analyse des erreurs induites dans les champs physiques simulés est restreinte à l'interprétation de la seule composante  $v_x$  du vecteur vitesse. En effet, en raison des similitudes entre les résultats en pression et vitesse obtenus, seuls ceux en vitesse sont illustrés dans ce qui suit. De plus, les composantes  $v_x$  et  $v_y$  du vecteur vitesse sont symétriques. Ainsi, privilégier l'étude de la composante  $v_x$  s'effectue sans en restreindre la généralité.

Les simulations sont d'abord réalisées en description eulérienne puis en description purement lagrangienne. Pour la suite, considérons la configuration composée par la longueur  $L = 1$  m, la vitesse  $U = 1$  m/s et la masse volumique de référence  $\rho_0 = 1$  kg/m<sup>3</sup>. Les constantes de l'équation d'état de Tait sont  $c_0 = 10$  m/s,  $\gamma = 7$  et  $p_0 = \rho_0 c_0^2 / \gamma$ . Ce cas est traité sans la force de gravité, c'est-à-dire que le vecteur  $\mathbf{S}$  des forces externes est nul. L'intégration temporelle est réalisée au moyen du schéma RK3. Le domaine fluide est initialement uniformément discrétisé par un pavage cartésien régulier de particules SPH dont l'écart inter-particulaire est  $\Delta x = 10,0$  mm. La longueur  $L$  est ainsi discrétisée par 100 particules et près de 10000 particules sont manipulées dans cette configuration. Chaque particule  $i$  présente initialement une erreur d'approximation locale  $h_i \|\mathbf{b}_i\| < 10^{-7}$  (cf section 2.5). On y fait référence comme la simulation SPH standard "RK3" dans la suite du document.



### 3.3.1 Résultats en description eulérienne

Considérons d’une part la simulation en description eulérienne, c’est-à-dire avec un champ de transport  $\mathbf{v}_0$  nul obligeant ainsi les particules SPH à demeurer immobiles et à geler leur volume. Débutons par la quantification de la viscosité numérique intrinsèque au schéma de référence (2.9). Fig. 3.12 présente le profil d’énergie cinétique totale adimensionnée pour  $0 \leq t_{\text{adim}} \leq 2$  obtenu pour la référence numérique RK3 (ligne continue bleue), comparé à la solution analytique (3.10) obtenue avec  $Re = 100$  (ligne continue noire).

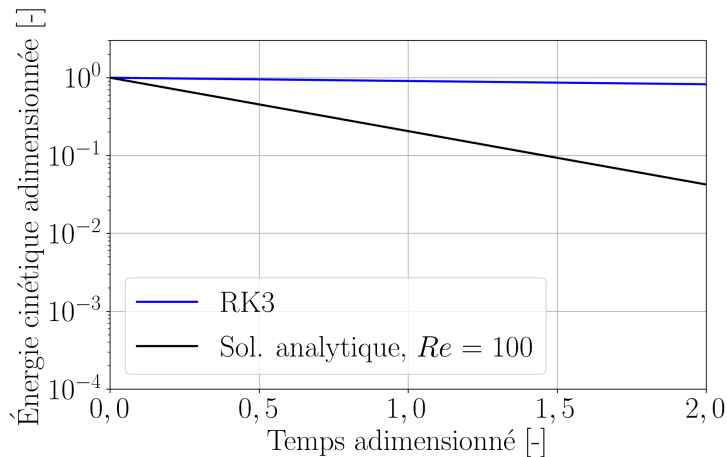


FIGURE 3.12 – Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description eulérienne : évolution de l’énergie cinétique totale adimensionnée, au cours du temps adimensionné. Chaque unité de temps adimensionné est échantillonnée par cinquante valeurs moyennes (ligne épaisse). L’enveloppe estompée représente l’intervalle de confiance autour de la valeur moyenne encadrée à plus ou moins l’écart-type près.

Ces profils sont tracés avec une échelle logarithmique en énergie. La solution analytique présente une décroissance linéaire en temps avec une telle échelle. Lorsque le nombre de Reynolds tend vers l’infini, autrement dit lorsque la viscosité du fluide tend vers zéro, cette solution converge vers l’état stationnaire décrit Éq. (3.11). La solution issue de la simulation numérique RK3 décroît légèrement en temps et présente une faible volatilité. Son nombre de Reynolds équivalent est supérieur à celui de la solution analytique illustrée. Pour le déterminer plus précisément, une approximation par un polynôme de degré 1 est faite par minimisation au sens des moindres carrés. Ce post-traitement est appliqué sur l’ensemble des pas en temps simulés pour la durée  $0 \leq t_{\text{adim}} \leq 2$ . Les paramètres de la régression linéaire sont donnés Tab. 3.3.

<i>Simulations</i>	<i>Taille de l'échantillon</i>	$1 - R_{\text{rég.}}^2$	<i>Re</i>
RK3	8026	$10^{-6}$	1641

TABLE 3.3 – Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description eulérienne : paramètres de régression linéaire de l’évolution de l’énergie cinétique totale de la simulation SPH standard RK3.

La régression présente un coefficient de corrélation  $R_{\text{rég.}}$  jugé suffisamment grand pour que son résultat soit admissible. Elle indique un nombre de Reynolds équivalent  $Re \approx 1641$ . Ce résultat est cohérent avec l’interprétation faite ci-avant. Par ailleurs, cette donnée est une valeur-étalon utile par la suite pour se référer aux performances de la simulation RK3 en description eulérienne.



Poursuivons par l'analyse des erreurs induites dans les champs physiques simulés par le schéma de référence (2.9). Pour cela, la composante  $v_x$  du vecteur vitesse adimensionnée par  $U$  est illustrée Fig. 3.13a pour chaque particule du domaine  $\Omega(t) = [0, L] \times [0, L]$  à l'instant  $t_{\text{adim}} = 2$ .

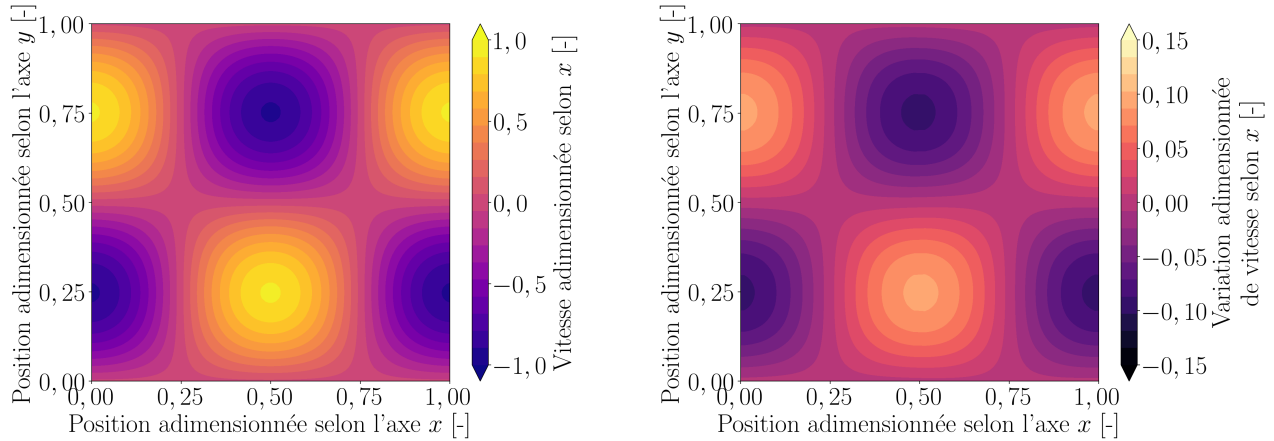
(a) Composante  $v_x$  du vecteur vitesse adimensionnée.(b) Variation  $v_{x \text{ théo}} - v_x$  adimensionnée.

FIGURE 3.13 – Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description eulérienne : visualisation des erreurs induites par le schéma numérique RK3 sur la composante  $v_x$  du vecteur vitesse, à l'instant  $t_{\text{adim}} = 2$ .

Fig. 3.13b présente la variation  $v_{x \text{ théo}} - v_x$  du vecteur vitesse par rapport à la solution stationnaire (3.11), adimensionnée par  $U$ . On constate que les tourbillons sont toujours présent, bien qu'un amortissement soit notable. La plus importante variation est constatée au niveau des maxima d'amplitude. L'amortissement résultant est limité à environ 10% de la valeur théorique dans ces zones. En bref, la simulation RK3 réalisée en description eulérienne constitue une référence numérique jugée fidèle à la solution stationnaire analytique.

### 3.3.2 Résultats en description lagrangienne

Considérons d'autre part la simulation en description pure lagrangienne qui oblige les particules SPH à effectuer un pavage dynamique du domaine de calcul. Fig. 3.14 présente le profil d'énergie cinétique totale adimensionnée pour  $0 \leq t_{\text{adim}} \leq 2$  obtenu pour la référence numérique RK3 (ligne continue bleue), comparé à la solution analytique (3.10) obtenue avec  $Re = 100$  (ligne continue noire).

L'énergie cinétique totale de la simulation numérique chute brusquement de deux ordres de grandeur en début de simulation pour  $0 \leq t_{\text{adim}} \leq 0,5$  et se stabilise ensuite. On note néanmoins que le profil est bruité pour  $0,5 < t_{\text{adim}} \leq 2$ . Une telle volatilité est souvent liée à des erreurs numériques dues au mouvement lagrangien des particules SPH. L'énergie cinétique de la simulation numérique RK3 est majorée à tout instant par la solution analytique illustrée. Son nombre de Reynolds équivalent est donc au plus de 100.

Pour aller plus loin, recherchons l'origine de l'amortissement constaté Fig. 3.14 en début de simulation. En description lagrangienne, l'apparition d'erreurs numériques est souvent liée à l'inhomogénéité de la distribution particulaire. En effet, la méthode SPH-ALE souffre en pratique d'un manque de précision dès lors que la distribution particulaire est désordonnée. Ainsi, regardons l'évolution en temps de la qualité du pavage de l'espace qui est mesurée au moyen de l'erreur d'approximation locale introduite section 2.5. Les profils des normes  $\mathcal{N}_2(\mathbf{b})$

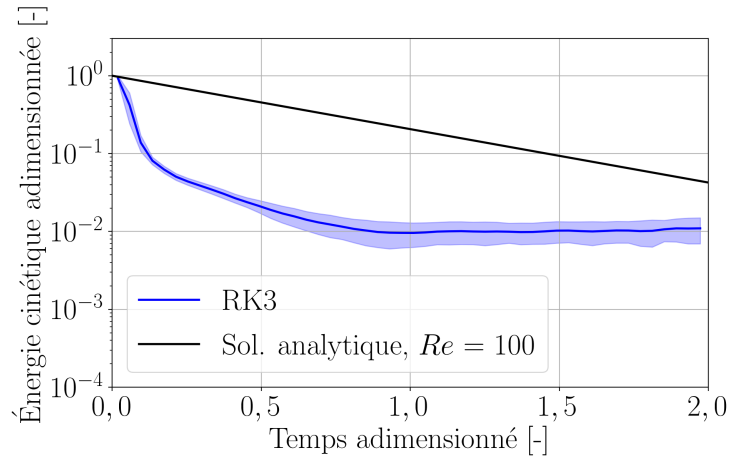
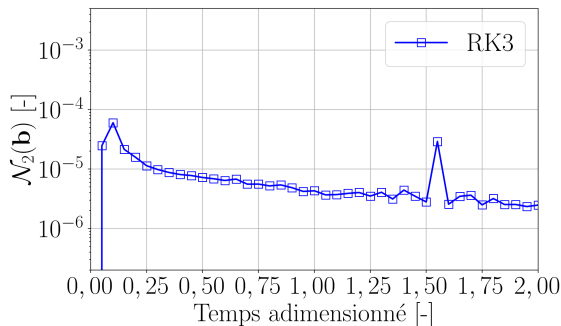
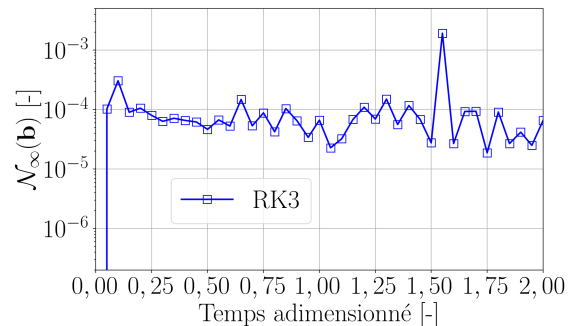


FIGURE 3.14 – Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description lagrangienne : évolution de l'énergie cinétique totale adimensionnée, au cours du temps adimensionné. Chaque unité de temps adimensionné est échantillonnée par cinquante valeurs moyennes (ligne épaisse). L'enveloppe estompée représente l'intervalle de confiance autour de la valeur moyenne encadrée à plus ou moins l'écart-type près.

et  $\mathcal{N}_\infty(\mathbf{b})$  pour  $0 \leq t_{\text{adim}} \leq 2$  sont présentés Fig. 3.15a et Fig. 3.15b, respectivement. Cette durée est échantillonnée régulièrement par quarante instants.



(a) Norme euclidienne de l'erreur d'approximation locale.



(b) Norme infinie de l'erreur d'approximation locale.

FIGURE 3.15 – Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description lagrangienne : évolution de la qualité du pavage de l'espace mesurée par la norme de l'erreur « closed-box », au cours du temps adimensionné.

La distribution particulière forme initialement un pavage cartésien régulier du domaine. La discrétisation spatiale présente alors une erreur « closed-box » globalement faible, i.e.  $\mathcal{N}_2(\mathbf{b})$  et  $\mathcal{N}_\infty(\mathbf{b}) < 10^{-7}$  à  $t_{\text{adim}} = 0$ . Les profils associés aux métriques  $\mathcal{N}_2(\mathbf{b})$  et  $\mathcal{N}_\infty(\mathbf{b})$  augmentent brusquement en début de simulation et présentent un maximum pour  $t_{\text{adim}} \approx 0,1$ . L'illustration de l'erreur d'approximation locale dans le domaine de calcul à cet instant est présentée Fig. 3.16a. Sous l'effet de la forte distorsion des directions du vecteur vitesse, le mouvement lagrangien des particules déstructure le pavage devenant inhomogène. Il en résulte un grand désordre particulière dans tout le domaine. Ce désordre dégrade la précision de l'opérateur SPH approchant la divergence des flux, ce qui s'accompagne d'erreurs numériques. La norme euclidienne de l'erreur d'approximation locale diminue alors régulièrement pour  $0,1 \leq t_{\text{adim}} \leq 1,5$  et stagne ensuite pour  $t_{\text{adim}} \geq 1,75$ . Autrement dit, le désordre global diminue à mesure que les particules se ré-

organisent. La norme infinie de l'erreur d'approximation locale est relativement constante pour  $0, 1 \leq t_{\text{adim}} \leq 2$ . On note néanmoins que le profil est volatile pour  $0, 5 \leq t_{\text{adim}} \leq 2$ . L'illustration de l'erreur d'approximation locale dans le domaine de calcul à l'instant  $t_{\text{adim}} = 2$  est présentée Fig. 3.16b.

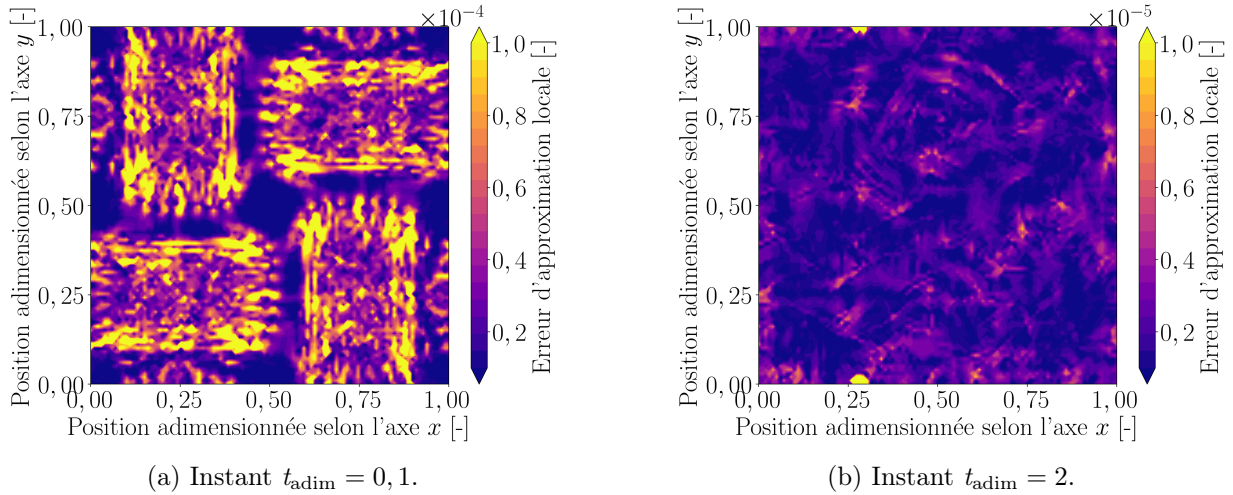


FIGURE 3.16 – Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description lagrangienne : visualisation de l'erreur d'approximation locale dans le domaine de calcul. Noter la différence d'échelle.

Ainsi, bien que le désordre global de la distribution particulaire diminue dans le temps, celle-ci présente des zones où l'erreur « *closed-box* » demeure importante tout au long de la simulation.

La composante  $v_x$  du vecteur vitesse adimensionnée par  $U$  est illustrée Fig. 3.17a pour chaque particule du domaine  $\Omega(t) = [0, L] \times [0, L]$  à l'instant  $t_{\text{adim}} = 2$ .

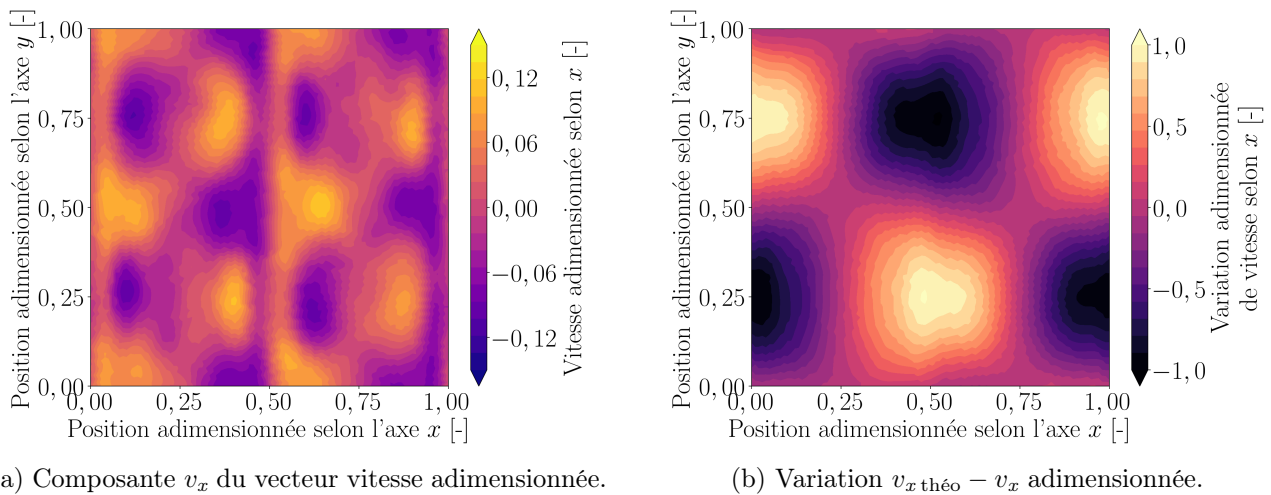


FIGURE 3.17 – Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description lagrangienne : visualisation des erreurs induites par le schéma numérique sur la composante  $v_x$  du vecteur vitesse, à l'instant  $t_{\text{adim}} = 2$ .

La solution numérique RK3 en description lagrangienne ne représente plus les quatre tourbillons contra-rotatifs initiaux. La composante  $v_x$  est très diffuse dans tout le domaine et son amplitude a été fortement amortie par rapport à l'état initial. Fig. 3.17b présente la variation  $v_{x \text{ théo}} - v_x$  du vecteur vitesse par rapport à la solution stationnaire (3.11), adimensionnée par  $U$ . La plus importante variation est constatée au niveau des maxima d'amplitude de  $v_x$ . L'amortissement

résultant est d'environ 100% de la valeur théorique dans ces zones. En bref, la simulation RK3 réalisée en description purement lagrangienne ne conduit pas à une approximation numérique fidèle à la solution stationnaire analytique. Il s'avère donc impossible de réaliser précisément une telle simulation en méthode SPH-ALE sans une correction supplémentaire du mouvement des particules, de la fonction noyau et/ou de son gradient afin d'améliorer la consistance du schéma numérique.

### 3.4 Impact 2D d'un jet plan sur une plaque plane

Supposer le fluide parfait, supposer l'écoulement faiblement compressible et négliger l'effet de la gravité n'a pas d'influence significative quant à l'analyse du fonctionnement d'une turbine Pelton [48]. L'étude d'un jet d'eau impactant une plaque plane constitue une première étape dans le but de valider l'utilisation d'une méthode numérique pour simuler l'écoulement dans une turbine Pelton. Le solveur ASPHODEL<sup>©</sup> a déjà été confronté à ce cas test, et [48, 67] ont obtenu des résultats satisfaisants sur des configurations d'écoulement réalistes. Dans cette section, on s'intéresse uniquement au cas d'un jet plan impactant une plaque plane immobile en incidence normale. Le régime permanent est supposé établi.

La géométrie du problème est schématisée Fig. 3.18 et sa paramétrisation est issue de [67].

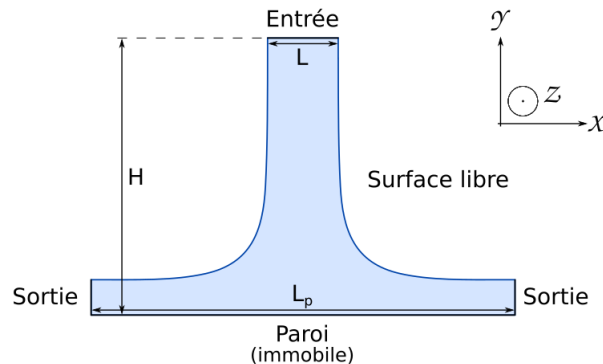


FIGURE 3.18 – Cas test numérique du jet plan : schématisation de la géométrie du problème.

Le jet utilisé est invariant selon l'axe  $z$ . L'injection de particules SPH dans le domaine de calcul est réalisée au niveau de l'entrée à une vitesse débitante  $U = 19,61$  m/s. L'entrée est de largeur  $L = 0,030$  m et est positionnée à une distance  $H = 0,10$  m de la paroi. La plaque est une paroi solide plane et immobile, de longueur  $L_p = 0,18$  m. Le paramètre de relaxation  $\zeta$  présenté section 2.3.4 prend la valeur  $\zeta = 0,25$  et est utilisé sur une distance  $H$  entre la paroi et l'entrée afin d'évacuer les perturbations non-désirées au niveau de la zone d'injection. Réciproquement, toute particule en dehors du domaine de calcul rectangulaire ( $L_p, H$ ) est éliminée. La frontière latérale est traitée comme une surface libre. Le fluide considéré est caractérisé par une masse volumique de référence  $\rho_0 = 1000$  kg/m<sup>3</sup>. La vitesse d'injection conduit à prendre une vitesse du son numérique  $c_0 = 200$  m/s. Les autres constantes de l'équation d'état de Tait sont  $\gamma = 7$  et  $p_0 = 0$  Pa. Ce cas est traité sans la force de gravité, c'est-à-dire que le vecteur  $\mathbf{S}$  des forces externes est nul.

Les simulations de référence sont réalisées en description purement lagrangienne. Une des difficultés de la simulation lagrangienne d'un jet sur plaque plane en 2D est la gestion de grandes modifications des voisinages au cours du temps, ce qui va stresser le schéma numérique. De plus, le support des fonctions noyaux  $W_{ij}$  dans Éq. (2.7) ne sont alors plus nécessairement complets au voisinage des conditions aux limites, l'évaluation faite des gradients  $\nabla_i W_{ij}$  s'avère alors imprécise ce qui peut déstabiliser la méthode et rendre le schéma numérique non-consistant. La simulation SPH standard N est composée de particules SPH de taille  $\Delta x = 1,00$  mm, afin de décrire l'entrée du jet à l'aide d'une seule couche (selon  $z$ ) de 30 particules réparties dans sa largeur (selon  $x$ ). La simulation SPH standard 4N est alors composée de particules SPH de taille  $\Delta x = 0,50$  mm, afin de décrire l'entrée du jet à l'aide de 60 particules réparties dans sa largeur. Cela représente près de 6000 particules (resp. 34000 particules) discrétisant le jet

en régime permanent pour la configuration N (resp. 4N). La plaque est discrétisée avec une longueur caractéristique de 0,025 mm, soit 7.200 points répartis sur sa surface. Pour fixer la durée de la simulation  $T_{\text{end}}$ , il faut décider d'un critère déterminant que le régime permanent est établi. Pour être efficace, un tel critère s'appuie sur un temps caractéristique et une métrique physique. Dans la suite, le régime permanent est supposé établi lorsque la métrique physique considérée atteint un plateau et présente une amplitude constante à  $\pm 1\%$  près autour de ce seuil pour une durée au moins égale à trois fois le temps caractéristique  $T_{\text{carac}}$ . Quelle que soit la métrique physique utilisée, le critère déterminant que le régime permanent est établi est relativement constant. Néanmoins, parmi les métriques physiques considérées, utiliser la surface totale couverte par l'écoulement semble être légèrement plus contraignant. Ainsi, la métrique retenue pour cette analyse est la surface totale de fluide adimensionnée par la surface totale théorique en régime permanent. Une fois le régime permanent établi, la surface couverte par le fluide est constante. Une façon d'estimer son aire  $\mathcal{A}$  est de procéder au découpage illustré Fig. 3.19, i.e.  $\mathcal{A} = 2(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)$ .

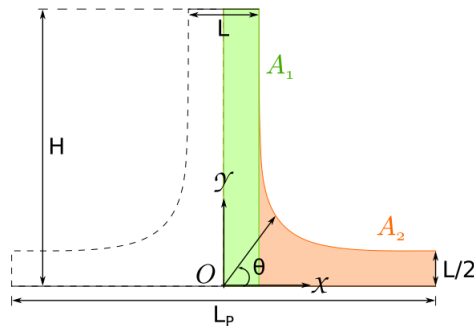


FIGURE 3.19 – Cas test numérique du jet plan : calcul de la surface recouverte par le fluide en régime permanent.

Pour aller plus loin, il est utile de connaître l'expression des lignes de courant décrivant la surface libre. Le détail de la méthode est présenté dans l'annexe A.2 de [48]. Dans ce qui suit, considérons uniquement la partie droite du jet, i.e.  $\theta \in ]0, \pi/2[$  sur l'illustration donnée Fig. 3.19. Dans le cadre d'un jet plan orthogonal à la plaque, cette surface libre est décrite comme l'ensemble des points  $(x(\theta), y(\theta))$  définis par Éq. (3.13) et Éq. (3.14).

$$x(\theta) = \frac{-L}{\pi} \left[ \ln \left( \tan \frac{\theta}{2} \right) - \frac{\pi}{2} \right], \quad (3.13)$$

$$y(\theta) = \frac{L}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} + \ln \left( \sin \frac{\pi/2 + \theta}{2} \right) - \ln \left( \sin \frac{\pi/2 - \theta}{2} \right) \right]. \quad (3.14)$$

On note ensuite  $\theta_1$  l'angle défini tel que  $y(\theta_1) = H$ . Ainsi, obtenir l'expression  $\mathcal{A}_1 = x(\theta_1)H$  est trivial. L'application numérique donne alors  $\mathcal{A}_1 = 1,50 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ . Bien qu'il soit plus retord d'exprimer analytiquement  $\mathcal{A}_2$ , une valeur approchée peut être obtenue par méthode des rectangles à gauche. Dans un script mobilisant  $N = 10^6$  points pour discrétiser la surface libre, la valeur approchée  $\mathcal{A}_2 = 1,35 \times 10^{-3} \text{ m}^2$  est obtenue avec une erreur de l'ordre de  $1/N$ . Finalement, la surface couverte par le fluide en régime établi est  $\mathcal{A} = 5,70 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ .

Puisque l'écoulement considéré est faiblement compressible, supposons de plus que le fluide présente une masse volumique uniforme et égale à sa valeur de référence  $\rho_0$ . Une approximation de la masse totale est  $\mathcal{M} = \rho_0 \mathcal{A} \approx 5,70 \text{ kg/m}$  en 2D lorsque le régime permanent est établi.



Par ailleurs, le temps caractéristique  $T_{\text{carac}}$  choisi est la durée nécessaire à une particule parcourant la surface libre théorique pour sortir du domaine de calcul. Pour estimer la distance  $L_{\text{SL}}$  alors parcourue, l'angle  $\theta_2$  est défini tel que  $x(\theta_2) = L_p/2$ . Déterminer la longueur de la surface libre  $L_{\text{SL}}$  revient à calculer la longueur d'arc de courbe entre  $(x(\theta_1), y(\theta_1))$  et  $(x(\theta_2), y(\theta_2))$  pour  $x$  et  $y$  définis respectivement Éq. (3.13) et Éq. (3.14). La longueur  $L_{\text{SL}}$  est approchée numériquement comme la somme des distances entre les points de calcul utilisés. La valeur numérique de  $L_{\text{SL}}$  peut alors être obtenue avec une incertitude de l'ordre de  $10^{-6}$  m. Par simplicité, considérons la valeur arrondie  $L_{\text{SL}} = 1,468 \times 10^{-1}$  m par la suite. De plus, une particule positionnée à la surface libre se déplace à la vitesse d'injection  $U$ . Ainsi, la durée de parcours d'une particule se trouvant à la surface libre est  $T_{\text{carac}} = L_{\text{SL}}/U \approx 7,486 \times 10^{-3}$  s. La durée de simulation  $T_{\text{end}}$  peut maintenant être exprimée en fonction du critère choisi. En pratique, le régime permanent est supposé établi pour une durée de simulation supérieure à  $5,5 T_{\text{carac}}$  (cf Fig. 3.20). Pour effectuer des opérations statistiques sur une période de temps caractéristique, la durée de simulation est alors fixée comme  $T_{\text{end}} = 6,5 T_{\text{carac}}$ .

Les résultats suivants sont présentés sous la forme de profils de surface totale évoluant au cours du temps. Utilisons une mesure de temps adimensionnée  $t_{\text{adim}}$  par le temps caractéristique  $T_{\text{carac}}$  choisi précédemment. De même, la surface totale de fluide est adimensionnée par  $\mathcal{A}$  la surface théorique couverte par le jet en régime permanent. Fig. 3.20a présente le profil obtenu pour  $0 \leq t_{\text{adim}} \leq T_{\text{end}}/T_{\text{carac}} = 6,5$  avec les discrétisations  $N$  et  $4N$ .

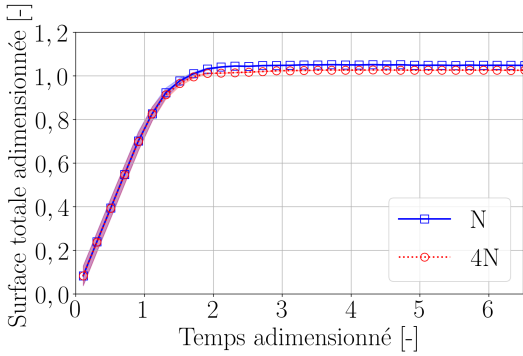
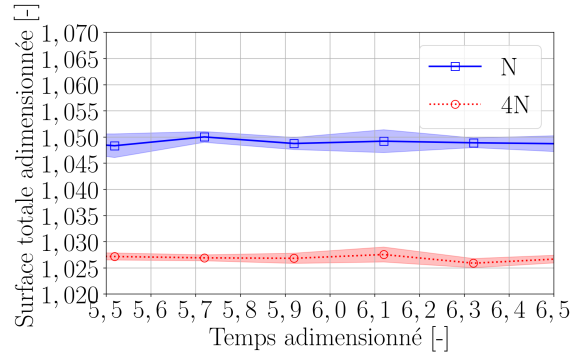

 (a) Profil global illustré pour  $0 \leq t_{\text{adim}} \leq 6,5$ .

 (b) Troncature du profil global sur  $5,5 \leq t_{\text{adim}} \leq 6,5$ .

FIGURE 3.20 – Cas test numérique du jet plan : conservation de la surface totale adimensionnée, au cours du temps adimensionné. Chaque unité temporelle est échantillonnée par 5 valeurs moyennes (trait épais). L'enveloppe estompée représente l'intervalle de confiance encadrant la moyenne à plus ou moins l'écart-type près.

Initialement à  $t_{\text{adim}} = 0$ , le domaine de calcul est vide. La surface totale de fluide augmente ensuite linéairement dans le domaine, car le fluide est injecté à vitesse constante au niveau de l'entrée et progresse jusqu'à la plaque pour  $0 < t_{\text{adim}} \leq H/(UT_{\text{carac}}) \approx 0,7$ . Par la suite, la nappe d'eau se développe au contact de la plaque pour  $0,7 < t_{\text{adim}} \leq 2,5$ . Enfin, la nappe d'eau est parfaitement développée et le profil de surface totale atteint un plateau d'amplitude constante à  $\pm 1\%$  près autour de ce seuil pour  $2,5 < t_{\text{adim}} \leq 5,5$ . D'après le critère choisi précédemment, le régime permanent est alors supposé établi pour  $t_{\text{adim}} > 5,5$ . Fig. 3.20b illustre le profil obtenu avec la discrétisation  $N$  restreint à  $5,5 \leq t_{\text{adim}} \leq 6,5$ , comparé à la discrétisation plus fine  $4N$ . En régime permanent, la surface totale de la simulation  $N$  présente une erreur relative (« *Relative Error* », RE) d'environ 5% par rapport à la valeur théorique  $\mathcal{A}$  due à un défaut dans l'évaluation des flux de masse lié à une répartition spatiale inhomogène des particules [67]. Cette erreur de 5% représente un surplus de surface couvert par 300 particules de la discrétisation  $N$  par rapport à ce que prédit la théorie. C'est environ le nombre de particules discrétisant la

surface libre des deux côtés du jet. Il apparaît par ailleurs qu'utiliser la discrétisation 4N, qui est deux fois plus fine que la simulation N, réduit le défaut de surface en régime permanent d'un facteur deux à seulement 2,7%. On constate alors que le nombre de particules en surplus a doublé et est d'environ 600, soit approximativement le nombre de particules discrétisant la surface libre des deux côtés du jet pour la simulation 4N. Réduire la taille des particules conduit à une meilleure discrétisation de la surface libre qui tend alors vers la solution analytique. Une démarche analogue peut également être employée sur la masse totale de fluide au lieu de la surface totale. Les erreurs relatives sont indiquées Tab. 3.4.

<i>Simulations</i>	<i>RE Surface</i>	<i>RE Masse</i>
N	4,9%	5,0%
4N	2,7%	2,8%

TABLE 3.4 – Cas test numérique du jet plan : erreur relative des simulations SPH standard.

La masse totale, adimensionnée par  $\mathcal{M}$ , de la simulation N présente une erreur d'environ 5% par rapport à la valeur analytique  $\mathcal{M}$ . Utiliser la discrétisation 4N plus fine réduit le défaut de masse en régime permanent à seulement 2,8%. En bref, raisonner sur la surface totale ou sur la masse totale conduit à des interprétations similaires. Par simplicité, seules les considérations sur la surface totale seront présentées dans la suite de ce document.

L'analyse est maintenant focalisée sur les champs de pression et de vitesse dans le jet. Dans ce qui suit, en raison des similitudes entre les résultats en pression et vitesse obtenus, seuls ceux en pression sont présentés le cas échéant. Fig. 3.21a (resp. Fig. 3.21b) illustre le coefficient de pression  $C_p = p/(\frac{1}{2}\rho_0 U^2)$  dans le domaine fluide de la simulation N (resp. 4N), moyenné sur une durée  $T_{\text{carac}}$  en régime permanent.

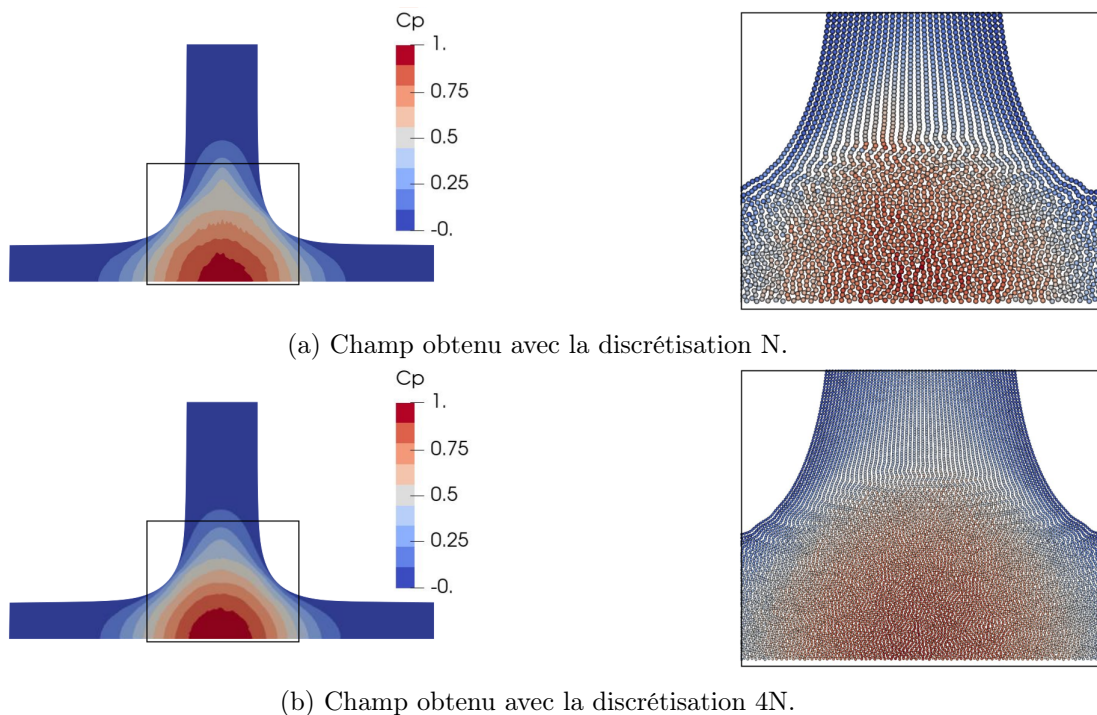


FIGURE 3.21 – Cas test numérique du jet plan : visualisation du champ de pression moyen en régime permanent et de la distribution particulière à  $t_{\text{adim}} = 6,5$ .



Les particules sont injectées au niveau de l'entrée selon une organisation cartésienne, mais en raison du mouvement lagrangien les particules tendent vers une répartition hexagonale compacte minimisant l'erreur de dispersion spatiale en sortie de domaine [57]. La transition entre ces deux organisations spatiales s'opère au centre du jet à l'approche de la paroi dans la zone où la forme de la surface libre commence à s'évaser. Il y réside un grand désordre particulaire comme illustré Fig. 3.21 pour  $t_{\text{adim}} = 6,5$ . Ce désordre dégrade la précision de l'opérateur SPH de la divergence, ce qui s'accompagne d'erreurs numériques. On note que les champs de pression et de vitesse sont alors très bruités dans cette région. En conséquence, il convient de moyenniser les résultats sur une durée caractéristique  $T_{\text{carac}}$  afin de lisser les champs obtenus et ainsi rendre les résultats interprétables et comparables. Pour cela, la durée  $T_{\text{carac}}$  est échantillonnée par 74 instants. Cependant, les particules se déplacent au cours du temps de par le mouvement lagrangien. Pour effectuer une moyenne temporelle, une grille auxiliaire de motif cartésien uniforme recouvrant le domaine de calcul est introduite. Cette grille présente un pas  $\Delta x = 0,50$  mm dans les deux directions de l'espace, dont l'ordre de grandeur est similaire à la taille des particules de la discrétisation  $4N$ . Les données des particules SPH, semblables à un nuage de points de calcul, sont extrapolées à chaque pas d'échantillonnage en temps sur la grille auxiliaire. Les données sont ensuite moyennées et un filtre spatial est appliqué pour ne conserver que les points discrétisant la surface théorique couverte par le fluide en régime permanent. Dans la partie amont de l'écoulement, au dessus de la zone de surpression, le coefficient de pression est régulier car les particules sont relativement bien ordonnées selon le schéma cartésien initial. Dans la zone où la surface libre s'évase pour former un coude, le champ de pression moyen est bruité en raison du désordre particulaire. Toutefois, l'application d'une moyenne temporelle a permis de lisser le coefficient de pression qui demeure relativement régulier. En dehors de cette zone, les particules sont ordonnées selon un arrangement hexagonal compact assurant un pavage de l'espace satisfaisant et qui conduit à des champs réguliers. En comparant les résultats présentés Fig. 3.21a et Fig. 3.21b, on observe que le coefficient de pression obtenu avec la discrétisation  $4N$  est plus lisse que celui de la discrétisation  $N$ . Diminuer la taille des particules permet une discrétisation plus fine, moins sensible au bruit numérique car la distribution de particules est moins inhomogène.

Le travail précédant permet de manipuler aisément des données moyennées temporellement et réparties spatialement sur la grille cartésienne auxiliaire introduite. De plus, grâce à un filtrage, seule une partie des points de cette grille peut être retenue pour mener une analyse. En particulier, il est possible d'extraire et d'étudier le profil d'un champ seulement le long d'un axe horizontal (ou vertical). Tout d'abord, les données en pression et vitesse de l'axe horizontal  $y/L = 0$  sont extraites. Pour éviter les redites, seule l'analyse des données de pression est présentée. Le coefficient de pression  $C_p^{y=0}$  en paroi moyenné sur une durée  $T_{\text{carac}}$  en régime permanent est utilisé. Les profils obtenus numériquement sont comparés au profil  $C_{p, \text{théo}}^{y=0}$  de la solution analytique. Pour la déterminer, il est utile d'exploiter les développements présentés dans l'annexe A.2 de [48]. Tout d'abord, il faut se positionner en paroi à  $y/L = 0$  et supposer que le régime permanent soit établi. En particulier, la vitesse complexe en paroi est réduite à sa composante réelle  $v_x$  selon l'axe  $x$ . Ainsi, l'expression liant l'affixe à la vitesse complexe est réduite à la relation donnée Éq. (3.15) pour  $x \in [-L_p/2, L_p/2]$ .

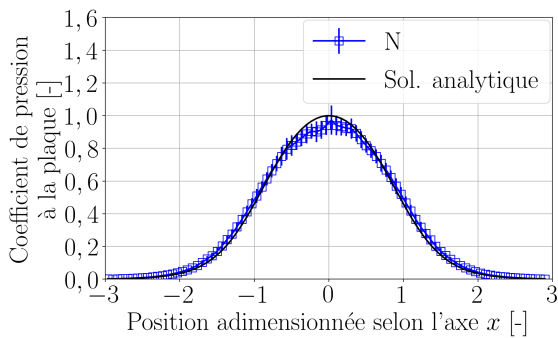
$$x = \frac{L}{\pi} \left[ \ln \left( 1 + \frac{v_x(x)}{U} \right) - \ln \left( 1 - \frac{v_x(x)}{U} \right) + 4 \arctan \frac{\frac{v_x(x)}{U}}{1 + \sqrt{1 + \left( \frac{v_x(x)}{U} \right)^2}} \right], \quad (3.15)$$

avec  $x$  la position à la paroi,  $v_x$  la première composante du vecteur vitesse du fluide,  $L$  la largeur

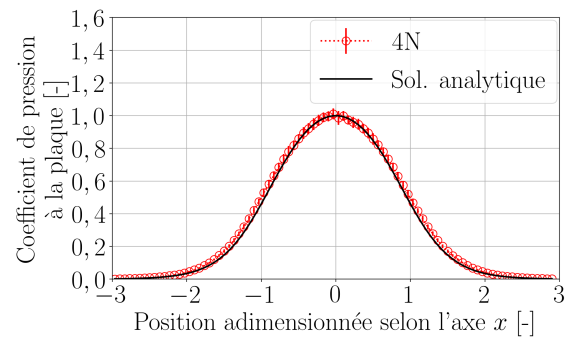
du jet et  $U$  la vitesse d'injection. Par ailleurs, il est possible d'exprimer le coefficient  $C_{p, \text{théo}}^{y=0}(x)$  en fonction de  $v_x(x)/U$ . Pour cela, on fait appel au théorème de Bernoulli appliqué à la paroi pour une pression d'entrée nulle et une vitesse d'injection  $U$ . L'expression analytique de  $C_{p, \text{théo}}^{y=0}$  est alors donnée Éq. (3.16) pour  $x \in [-L_p/2, L_p/2]$  et  $y/L = 0$  lorsque le régime permanent est établi.

$$C_{p, \text{théo}}^{y=0}(x) = 1 - \left( \frac{v_x(x)}{U} \right)^2. \quad (3.16)$$

La combinaison des relations (3.15) et (3.16) donne le profil théorique du coefficient de pression en paroi. Fig. 3.22a (resp. Fig. 3.22b) représente ainsi le coefficient de pression au niveau de la plaque le long de l'axe horizontal  $y/L = 0$  obtenu avec la discrétisation  $N$  (resp.  $4N$ ) en fonction de  $x/L$ .



(a) Profil obtenu avec la discrétisation  $N$ .



(b) Profil obtenu avec la discrétisation  $4N$ .

FIGURE 3.22 – Cas test numérique du jet plan : profil du coefficient de pression moyen au niveau de la plaque. L'intervalle de confiance encadrant la moyenne temporelle à plus ou moins l'écart-type près est représenté.

Le résultat obtenu avec les simulations  $N$  et  $4N$  est relativement similaire à celui prédit par la théorie. Cependant, le profil moyen issu de la discrétisation  $4N$  permet d'approcher plus fidèlement la solution analytique. On remarque notamment que la moyenne du coefficient de pression de la simulation  $N$  est sous-estimée par rapport à la solution analytique au cœur de la zone d'impact du jet au voisinage de  $x/L = 0$ . Les écarts-types sont représentés et illustrent l'importance du bruit dans cette zone pour la simulation  $N$ . Au contraire, la simulation  $4N$  est bien moins sensible au bruit numérique. Une métrique moyennée en espace et en temps est à utiliser pour comparer les résultats obtenus. Pour cela est calculée la moyenne des carrés des écarts du coefficient de pression  $C_p^{y=0}$  par rapport à la valeur théorique  $C_{p, \text{théo}}^{y=0}$  sur l'axe horizontal  $y/L = 0$ . Cette métrique, appelée « *Dimensionless Mean Squared Absolute Error* » (DMSAE) en anglais, peut être perçue comme une sorte de variance mathématique qui permet de quantifier les erreurs par rapport à une solution de référence. Ces erreurs de coefficient de pression en paroi  $C_p^{y=0}$  sont indiquées Tab. 3.5.

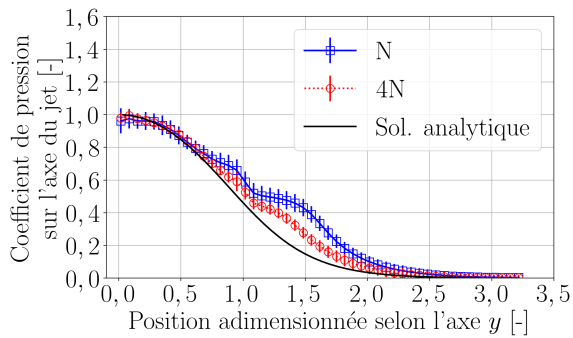
Simulations	DMSAE $C_p^{y=0}$
N	0,070%
4N	0,035%

TABLE 3.5 – Cas test numérique du jet plan : DMSAE sur la pression des simulations SPH standard.

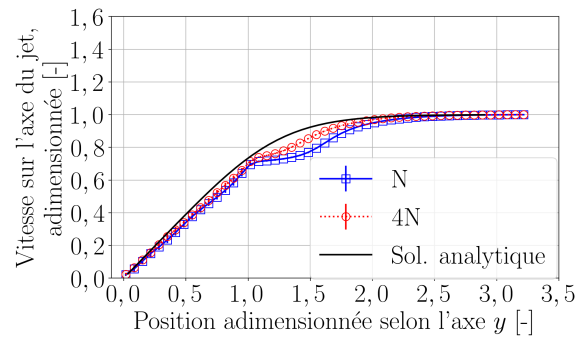
En régime permanent, la DMSAE sur la pression associée à la simulation  $N$  est d'environ 0,070%. Cette valeur est faible, ce qui indique que le coefficient de pression en paroi issu de la

simulation N constitue une approximation fidèle la solution analytique. De même, la DMSAE sur la pression calculée pour la simulation 4N est d'environ 0,035%. Cette valeur est plus faible que précédemment, ainsi le coefficient de pression en paroi issu de la simulation 4N constitue une approximation encore plus fidèle de la solution analytique. Ces interprétations sont en accord avec les observations faites des courbes présentées Fig. 3.22a et Fig. 3.22b. Utiliser la DMSAE du coefficient  $C_p^{y=0}$  semble donc cohérent pour se référer par la suite aux performances des simulations N et 4N.

Pour aller plus loin dans l'interprétation des résultats précédents obtenus au niveau de la paroi dans la zone d'impact, il est utile d'étudier le comportement physique le long de l'axe du jet. Ainsi, les données en pression et vitesse le long de l'axe vertical  $x/L = 0$  sont extraites et étudiées ci-après. À nouveau, le coefficient de pression  $C_p^{x=0}$  moyenné sur une durée  $T_{\text{carac}}$  en régime permanent est utilisé. Par symétrie de construction du cas test, l'expression analytique  $C_{p,\text{théo}}^{x=0}(y)$  de la solution est analogue à la relation donnée Éq. (3.16) dont il convient simplement de transposer la variable  $x$  en  $y$ . Fig. 3.23a représente ainsi le coefficient de pression au centre du jet le long de l'axe vertical  $x/L = 0$ , pour les simulations N et 4N que l'on compare entre elles et à la solution analytique.



(a) Profil du coefficient de pression.



(b) Profil de la norme du vecteur vitesse adimensionnée.

FIGURE 3.23 – Cas test numérique du jet plan : profils sur l'axe du jet. L'intervalle de confiance encadrant la moyenne temporelle à plus ou moins l'écart-type près est représenté.

On distingue trois zones dans ce profil. Proche de la zone d'injection ( $y/L > 2,5$ ), le gradient de pression est quasi-nul. Les profils moyens obtenus avec les simulations N et 4N sont similaires entre eux et avec celui prédit par la solution analytique. Le bruit numérique est faible dans cette zone. Pour  $1,0 < y/L < 2,5$ , le gradient de pression augmente progressivement. Les profils moyens obtenus avec les simulations N et 4N ne sont plus confondus et s'écartent significativement de la solution analytique. Le profil issu de la simulation 4N semble cependant meilleur. Le bruit numérique est important dans cette zone, mais apparaît moins important pour la discrétisation fine. Enfin dans la zone  $0,0 < y/L < 1,0$ , le gradient de pression diminue progressivement pour finalement s'annuler au niveau du point d'impact. Les profils moyens obtenus avec les simulations N et 4N sont relativement similaires entre eux et avec celui prédit par la solution analytique. En particulier, la valeur obtenue Fig. 3.23a en  $y/L = 0,0$  est bien égale à celle présentée Fig. 3.22a en  $x/L = 0,0$ . Le bruit numérique sur la pression reste important et diminuer la taille des particules semble toujours l'atténuer. D'autre part, complétons l'analyse en regardant le comportement de la vitesse sur ces mêmes trois zones. Pour cela, la norme du vecteur vitesse moyennée sur une durée  $T_{\text{carac}}$  en régime permanent et adimensionnée par la vitesse d'injection  $U$  est utilisée. L'expression analytique de la vitesse s'obtient par la relation (3.15) en transposant la variable  $x$  en  $y$ . Fig. 3.23b représente la vitesse adimensionnée au centre

du jet. Proche de la zone d'injection ( $y/L > 2,5$ ), le gradient de vitesse est quasi-nul. Les profils moyens obtenus avec les simulations N et 4N sont similaires entre eux et à celui prédit par la solution analytique. Pour  $1,0 < y/L < 2,5$ , le gradient de vitesse augmente progressivement et les profils moyens obtenus avec les simulations N et 4N s'écartent significativement de la solution analytique. À nouveau, le profil issu de la simulation 4N se rapproche de la solution analytique. Enfin dans la zone  $0,0 < y/L < 1,0$ , le gradient de vitesse est maximal et relativement constant. Les profils moyens obtenus avec les simulations N et 4N sont similaires entre eux et proches de celui prédit par la solution analytique. En particulier, la vitesse s'annule en  $y/L = 0,0$ . La sur-estimation de la surface totale de fluide (Fig. 3.20), la sur-estimation de la pression statique le long de l'axe du jet dans l'intervalle  $1,0 < y/L < 2,5$  conjointement à la sous-estimation de la norme du vecteur vitesse (Fig. 3.23), indiquent que les simulations N et 4N prédisent un écoulement qui s'évase plus haut à l'approche du point d'arrêt que la solution analytique. Sur l'axe vertical  $x/L = 0$  dans son ensemble, les écarts-types illustrent un faible bruit sur la vitesse.

Globalement, il a été observé que la simulation 4N obtient des résultats plus proches de la solution analytique. Toutefois, les résultats obtenus avec la simulation N sont jugés suffisamment cohérents avec la solution analytique pour être représentatif de la physique sous-jacente. Finalement, l'auteur est confiant d'utiliser les solutions SPH standard N et 4N comme références numériques dans la suite des travaux.

## 3.5 Synthèse

Les cas tests académiques utilisés dans ce manuscrit ont été présentés dans ce chapitre. Une synthèse est fournie Tab. 3.6. Cet ensemble est composé de cas quasi-1D et 2D, dont le domaine de calcul est délimité par diverses conditions aux limites (entrée, sortie, paroi mobile/fixe, surface libre) et où l'écoulement présente une dynamique lente (canal oscillant) ou rapide (jet plan).

Les solutions obtenues avec le schéma SPH-ALE uniforme ainsi que les éventuelles solutions analytiques ont été également présentées dans ce chapitre. Les références numériques sont simulés en description eulérienne (ou lagrangienne) afin de faire abstraction (ou non) des difficultés liées à la configuration géométrique des particules.

Tout d'abord, les références N-RK1 et N-RK3 sont jugées capable de reproduire en description eulérienne les ondes non-linéaires et les discontinuités qui interviennent dans un tube à choc. Au contraire de N-RK3, le schéma N-RK1 en description lagrangienne tend à amplifier les perturbations de l'écoulement dans le canal oscillant. Ensuite, la simulation N-RK3 des tourbillons de Taylor-Green réalisée en description eulérienne constitue une approximation jugée fidèle à la solution stationnaire analytique. Toutefois, ce schéma n'est pas suffisamment robuste pour réaliser une telle simulation en description lagrangienne sans une correction additionnelle du mouvement des particules, de la fonction noyau et/ou de son gradient afin d'améliorer sa consistance. Enfin, les solutions N-RK3 et 4N-RK3 sont jugées conformes à la solution analytique du cas du jet plan. Notons que diminuer la taille des particules assure une pertinence plus robuste car la simulation est alors moins sensible au bruit numérique.

<i>Cas test</i>	<i>Description</i>	<i>Condition limite</i>	<i>Solution</i>	<i>Métriq</i>
Tube à choc	Eulérienne	Périodicité, Paroi immobile.	N-RK1, N-RK3, Analytique.	Profil de pression statique selon l'axe $x$ , Profil de vitesse selon l'axe $x$ .
Canal oscillant	Lagrangienne	Périodicité, Paroi mobile.	N-RK1, N-RK3.	Évolution du profil de pression statique selon l'axe $x$ , Profil de pression statique selon l'axe $x$ , Profil de vitesse selon l'axe $x$ , Évolution de la force normale aux parois, Estimation du travail de la force normale aux parois, Estimation de la norme intégrale 1 de la puissance élémentaire.
Tourbillons de Taylor-Green	Eulérienne, Lagrangienne.	Périodicité	N-RK3, Analytique.	Évolution de l'énergie cinétique totale, Estimation du nombre de Reynolds équivalent, Visualisation de la composante $v_x$ du vecteur vitesse, Visualisation de la variation $v_{x\text{ théo}} - v_x$ , Évolution de $\mathcal{N}_2(\mathbf{b})$ , Évolution de $\mathcal{N}_\infty(\mathbf{b})$ , Visualisation de l'erreur d'approximation locale.
Jet plan	Lagrangienne	Entrée/Sortie, Surface libre, Paroi immobile.	N-RK3, 4N-RK3, Analytique.	Évolution de la surface totale couverte par l'écoulement, Estimation de l'erreur relative en surface totale, Visualisation du champ de pression moyen, Visualisation de la distribution particulière, Profil de pression au niveau de la plaque, Estimation de la DMSAE sur la pression, Profil de pression sur l'axe du jet, Profil de vitesse sur l'axe du jet.

TABLE 3.6 – Synthèse des cas tests.

## PARTIE II

# TECHNIQUES DE SIMULATION MULTI-RÉSOLUTIONS POUR LA MÉTHODE SPH-ALE

# CHAPITRE 4

## RAFFINEMENT PARTICULAIRE ADAPTATIF (APR)

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>État de la littérature</b>	<b>49</b>
4.1.1	Raffinement	49
4.1.2	Dé-raffinement	51
<b>4.2</b>	<b>Technique de l'« <i>Adaptive Particle Refinement</i> »</b>	<b>54</b>
4.2.1	Principes de l'APR	54
4.2.2	Implémentation dans le solveur ASPHODEL©	55

---

Les simulations réalisées avec la méthode SPH recourent le plus souvent à une discrétisation spatiale uniforme avec des tailles de particules constantes [60]. Ces choix conduisent à des simulations coûteuses où le nombre de particules manipulées est élevé et les temps de simulation sont longs. Lorsque le problème étudié le nécessite, il serait adéquat de pouvoir recourir à une discrétisation spatiale particulière variable en espace. Autrement dit, recourir à une discrétisation fine dans les zones d'intérêt mais grossière par ailleurs [29, 52, 83]. Cependant, gérer le raccordement entre les discrétisations fine et grossière est délicat. Comme détaillé section 2.2, le ratio des longueurs de lissage entre particules adjacentes doit être compris entre 0,97 et 1,03 (soit  $\pm 3\%$ ) afin de garantir la robustesse des opérateurs  $W_{ij}$  dans Éq. (2.7) [60]. Depuis quelques années, des techniques de raffinement local ont été proposées pour gérer précautionneusement le raccordement [12, 24, 69, 73, 80]. À ce jour, l'une des plus abouties est la technique de l'« *Adaptive Particle Refinement* » (APR) proposée par L. Chiron *et al.* [17].



## 4.1 État de la littérature

### 4.1.1 Raffinement

Le *processus de raffinement* permet de passer d'une discrétisation grossière à une discrétisation fine. Dans le cadre SPH, cela consiste à introduire plusieurs particules fines (dites filles) à partir d'une particule grossière (dite mère). Ce processus est alors composé d'un critère de raffinement, d'un schéma de raffinement et d'une procédure d'initialisation des grandeurs physiques des filles.

On appelle *critère de raffinement* la condition qui identifie les mères qui doivent être raffinées. Il existe plusieurs familles de critères dans la littérature, selon la physique du problème à modéliser. J. Feldman *et al.* [23, 24] proposent d'utiliser un critère géométrique où toute mère pénétrant dans une zone prédéfinie du domaine de calcul est systématiquement raffinée. Un autre type de critères, dit de consistance, vise à préserver la robustesse des opérateurs SPH. Par exemple, les mères présentant trop peu de voisines sont subdivisées afin de maintenir localement la précision [69]. On dénombre également la famille de critères se basant sur des propriétés physiques. En particulier, S. Kitsionas *et al.* [38, 39] utilisent une condition de Jeans ; M. Lastiwka *et al.* [41] privilégient les gradients de vitesse pour déclencher le raffinement. Par ailleurs, plusieurs familles de critères peuvent être utilisées simultanément pour définir un critère de raffinement plus complexe. Y. Reyes López *et al.* [69] appliquent notamment un critère combinant l'approche géométrique et physique.

On appelle *schéma de raffinement* la configuration spatiale des filles par rapport à la mère. Un schéma de raffinement est composé d'un *motif* et d'une *orientation*. Historiquement, les premières mentions dans la littérature remontent aux travaux J. Feldman *et al.* [23, 24]. Ils suggèrent de considérer les schémas de raffinement symétriques et se concentrent sur des schémas à orientation fixe, aux motifs triangulaire et hexagonal pour deux dimensions de l'espace. Le raffinement d'une mère  $m$  engendre  $M$  filles identiques dont la longueur de lissage  $\alpha h_m$  est une fraction  $\alpha \in [0, 1]$  de celle de la mère  $h_m$ . À l'issue du raffinement, les filles sont espacées entre elles d'une distance  $\varepsilon \Delta x_m$  où  $\varepsilon \in [0, 1]$  est un paramètre de séparation et  $\Delta x_m$  désigne l'espacement inter-particulaire de la mère. Ces travaux sont repris par Y. Reyes López *et al.* [68, 69] quelques années plus tard, qui privilégient les schémas au motif rectangulaire. Ils s'intéressent aux schémas à orientation adaptative et paramètre de séparation variable selon la distribution locale des particules. Ils concluent qu'une telle approche induit des effets indésirables dans certaines simulations. Ils poursuivent alors leurs travaux en se concentrant sur les schémas à orientation fixe et alignée sur les axes du repère de la simulation [69]. Une illustration est présentée Fig. 4.1 en 2D avec un paramètre de séparation  $\varepsilon$  quelconque.

Par la suite, une particule dont les propriétés sont mises à jour par Éq. (2.8) est appelée *particule SPH*. Ils notent que les filles sont équidistantes les unes des autres pour  $\varepsilon = 0,5$  si les mères forment une distribution carrée uniforme. De plus, ils procèdent à une analyse des erreurs d'approximation et des instabilités numériques liées au schéma de raffinement pour déterminer les plages admissibles des paramètres  $\varepsilon$  et  $\alpha$ . D'une part, l'analyse des erreurs est similaire à J. Feldman *et al.* [23, 24]. En se concentrant sur l'erreur introduite dans l'approximation SPH du gradient, ils définissent l'erreur locale due au raffinement d'une mère. L'erreur globale est définie alors comme son intégrale sur le domaine de calcul. D'autre part, l'analyse des instabilités consiste en une étude de stabilité de von Neumann analogue à celle de J.W. Swegle [75]. Finalement, les paramètres  $\varepsilon$  et  $\alpha$  doivent être choisis de manière à minimiser l'erreur globale sans pour autant engendrer des instabilités numériques. De leur étude, il ressort que les paramètres de raffinement doivent être choisis tels que  $0,5 \leq \varepsilon \leq 0,58$  et  $0,5 \leq \alpha \leq$

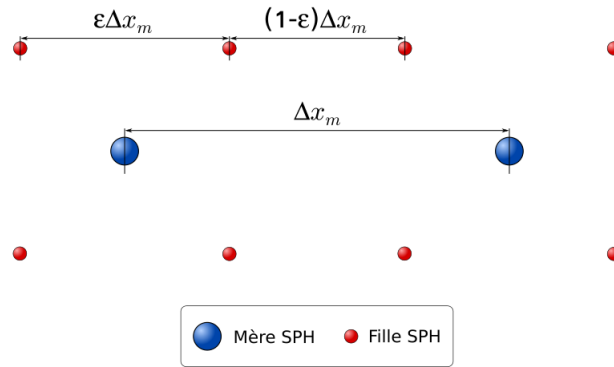


FIGURE 4.1 – Modèle de raffinement 2D proposé par Y. Reyes López *et al.* [69] : une mère (en bleu) est raffinée en  $M = 4$  filles (en rouge) selon un schéma au motif carré à orientation fixe.

0,58 lorsque les simulations SPH recourent à une fonction noyau de type « *B-spline* » [48] et manipulent un ratio des longueurs  $h/\Delta x$  valant 1,2. Bien que ce ne soit pas le type de fonction noyau utilisé dans ce manuscrit, un tel encadrement des paramètres  $\varepsilon$  et  $\alpha$  est généralisable à tout type de fonction noyau, mais pour des seuils probablement différents [69]. Ces limites sont utiles à titre de guide pour leur ordre de grandeur. L. Chiron *et al.* [16, 17] soulignent que le voisinage d’une fille est  $2\alpha$  celui de sa mère. Ainsi, recourir à  $0,5 < \alpha$  s’accompagne d’une augmentation de la proportion de particules dans un voisinage. Ils recommandent d’utiliser  $\varepsilon = 0,5$  et  $\alpha = 0,5$  pour réaliser des simulations précises limitant le sur-coût CPU par rapport aux discrétisations uniformes. On appelle *schéma de raffinement cartésien* la configuration au motif carré uniforme où ( $\varepsilon = 0,5$  et  $\alpha = 0,5$ ) dont l’orientation est fixe et alignée avec les axes du repère de la simulation.

Les propriétés des filles venant d’être créées doivent être initialisées judicieusement à partir de celles des mères. On appelle cette étape la *procédure d’initialisation des filles*. Les relations à respecter selon J. Feldman *et al.* [24] sont résumées Tab. 4.1.

Grandeur physique	Avant raffinement	Après raffinement
Masse	$m_m$	$\sum_{d=1}^M m_d$
Énergie cinétique	$\frac{1}{2} m_m \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{v}_m$	$\frac{1}{2} \sum_{d=1}^M m_d \mathbf{v}_d \cdot \mathbf{v}_d$
Quantité de mouvement	$m_m \mathbf{v}_m$	$\sum_{d=1}^M m_d \mathbf{v}_d$
Moment cinétique	$\mathbf{x}_m \wedge m_m \mathbf{v}_m$	$\sum_{d=1}^M \mathbf{x}_d \wedge m_d \mathbf{v}_d$

TABLE 4.1 – Conditions de conservation à respecter lors du raffinement selon J. Feldman *et al.* [24].

La première condition illustre la conservation de la masse. J. Feldman *et al.* [24] formulent les masses  $(m_d)_{d \leq M}$  des filles comme une fraction de celle de la mère  $m_m$ , selon la relation (4.1). La masse est conservée lors du raffinement si la distribution des masses  $(\lambda_d)_{d \leq M}$  vérifie la relation

(4.2).

$$\forall d \leq M, m_d = \lambda_d m_m. \quad (4.1)$$

$$\sum_{d=1}^M \lambda_d = 1. \quad (4.2)$$

Ils proposent d'utiliser la distribution des masses qui minimise l'erreur en masse volumique  $\mathcal{E}$  définie Éq. (4.3)-(4.4).

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega} e(\mathbf{x})^2 d\mathbf{x}, \quad (4.3)$$

$$e(\mathbf{x}) = m_m \left( \nabla_m W(\mathbf{x}, h_m) - \sum_{d=1}^M \lambda_d \nabla_d W(\mathbf{x}, h_d) \right). \quad (4.4)$$

Ils formulent ainsi un problème de minimisation sous la contrainte (4.2). Par ailleurs, Y. Reyes López *et al.* [69] recourent à une distribution uniforme de la masse d'une mère sur ses filles, selon Éq. (4.5).

$$\forall d \leq M, \lambda_d = \lambda[M] = 1/M. \quad (4.5)$$

Par simplicité, la détermination des coefficients  $(\lambda_d)_{d \leq M}$  s'affranchit alors de la résolution d'un problème de minimisation. Néanmoins, choisir une telle répartition ne permet pas nécessairement de minimiser l'erreur d'approximation  $\mathcal{E}$  commise lors de l'introduction des filles.

Les deuxième et troisième conditions Tab. 4.1 correspondent à la conservation de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement, respectivement. J. Feldman *et al.* [24] démontrent que d'affecter la vitesse de la mère aux filles est le seul processus permettant de conserver simultanément ces deux grandeurs. Cependant, la topologie du champ de vitesse est inexacte. Un processus alternatif consiste à interpoler la vitesse d'une fille depuis les mères, ce qui préserve les propriétés topologiques au détriment de la conservation. Il faut donc choisir entre préserver les propriétés topologiques et assurer la conservation de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement.

La dernière condition de Tab. 4.1 illustre la conservation du moment cinétique. Pour être respectée, il faut que la quantité de mouvement soit conservée et que le schéma de raffinement conserve le motif des mères [24]. Le schéma de raffinement cartésien présente la particularité de conserver le motif cartésien. En effet, dans la situation idéale où la discrétisation des mères forme un pavage cartésien uniforme de l'espace, la discrétisation des filles forme également un pavage cartésien uniforme de l'espace. Dans cette situation, le raffinement n'engendre alors pas d'instabilités numériques [69] et conserve le moment cinétique [16]. Il est à noter qu'il est souvent incompatible de conserver le moment cinétique et d'utiliser un schéma de raffinement à orientation et paramètre de séparation fixes lors d'une simulation lagrangienne où la disposition des mères varie en espace et en temps.

### 4.1.2 Dé-raffinement

Le *processus de dé-raffinement* est le procédé réciproque du raffinement, permettant de passer d'une discrétisation fine à une discrétisation grossière. Dans la littérature SPH, il existe deux stratégies distinctes pour réaliser ce procédé. D'une part [11, 12, 73, 80] éliminent puis reconstruisent les mères, d'autre part [5, 16, 17] conservent les mères en leur attribuant un statut qui évolue au cours du temps entre actif et passif.

Il existe principalement deux approches pour réaliser un dé-raffinement par *élimination-reconstruction*. L'approche par coalescence de particules illustrée Fig. 4.2 est proposée par R. Vacondio *et al.* [80].

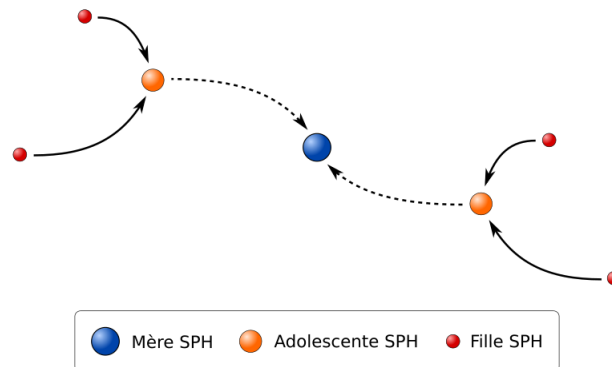


FIGURE 4.2 – Modèle de dé-raffinement 2D par coalescence de particules proposé par R. Vacondio *et al.* [80] : la génération d'une mère (en bleu) résulte d'agglomérations successives de paires de particules de tailles similaires. Deux filles (en rouge) sont agglomérées en une adolescente (en orange), puis deux adolescentes sont elles-mêmes agglomérées en une mère.

Lors de la coalescence, deux filles (en rouge) sont agglomérées pour former une *adolescente* (en orange). Par la suite, la coalescence de deux adolescentes (en orange) forme une mère (en bleu). Un des inconvénients de cette approche est son coût de calcul élevé puisque générer une mère nécessite plusieurs coalescences. De plus, la coalescence de particules aux propriétés différentes introduit des erreurs numériques [80].

L'approche par recouvrement de particules proposée par K. Shibata *et al.* [73] est illustrée Fig. 4.3.

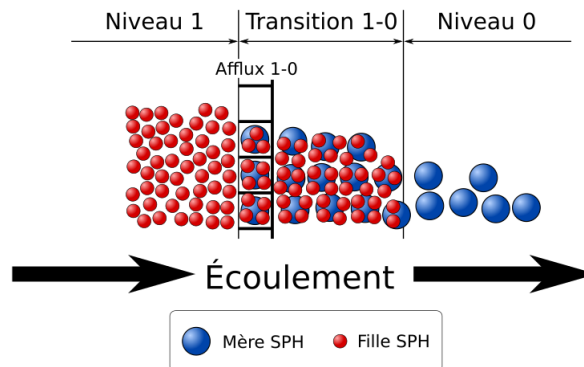


FIGURE 4.3 – Modèle de dé-raffinement 2D par recouvrement de particules proposé par K. Shibata *et al.* [73] : le dé-raffinement résulte d'une reconstruction des mères et d'une élimination des filles. La reconstruction d'une mère est arbitrée par recouvrement de cellule d'afflux par les filles dans Transition 0-1 à la frontière du Niveau 1 (Afflux 1-0).

Le domaine de calcul est décomposé en deux sous-domaines se recouvrant. Le Niveau 0 est discrétisé par les mères, alors que le Niveau 1 est composé de filles. Une élimination/reconstruction de particules est réalisée aux frontières dans Transition 1-0. En particulier, la reconstruction d'une mère est arbitrée par recouvrement d'une cellule d'afflux par les filles dans Transition 1-0 à la frontière du Niveau 1 (Afflux 1-0). Une mère en dehors de Niveau 0  $\cup$  Transition 1-0 est

éliminée. Les filles ne sont donc plus présentes dans le domaine des mères, et inversement. L'inconvénient principal de cette approche réside dans l'étude du recouvrement des cellules d'afflux. Leur définition le long d'une frontière continue quelconque est délicate. Le test de recouvrement doit être précis, mais est alors coûteux. De plus, les propriétés des particules reconstruites ne satisfont pas les conditions de conservation Tab. 4.1. Il en résulte des instabilités [24].

La stratégie de dé-raffinement par *activation-passivation* consiste au contraire à conserver les mères après le processus de raffinement. L'approche proposée par D.A. Barcarolo *et al.* [5] est illustrée Fig. 4.4.

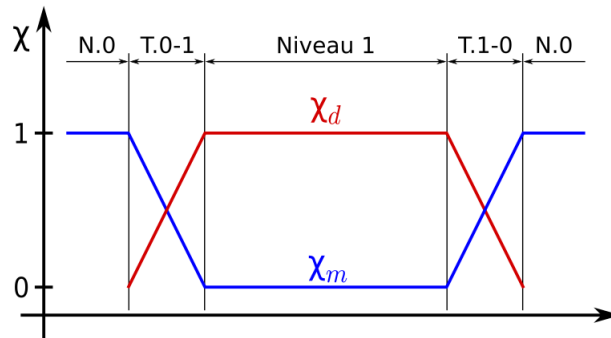


FIGURE 4.4 – Modèle de dé-raffinement 2D par activation-passivation de particules proposé par D.A. Barcarolo *et al.* [5] : la définition d'un paramètre  $\chi$  qualifie l'évolution temporelle du statut d'une particule. Ce paramètre distingue les particules actives ( $\chi = 1$ ), des passives ( $\chi = 0$ ).

On distingue alors les particules actives qui discrétisent l'écoulement, des passives qui sont non-matérielles et utilisent les champs des actives pour évoluer de façon lagrangienne. La définition d'un paramètre  $\chi$  distinguant les particules actives ( $\chi = 1$ ) des passives ( $\chi = 0$ ), qualifie l'évolution temporelle d'une particule. Le Niveau 0 est pavé par les mères ( $\chi_m = 1$ ), alors que le Niveau 1 est discrétisé par les filles ( $\chi_m = 0$  &  $\chi_d = 1$ ). Lorsqu'une mère pénètre dans Transition 0-1, elle se raffine et introduit plusieurs filles. Pour éviter une transition de statut actif/passif numériquement brutale, D.A. Barcarolo *et al.* [5] proposent une variation linéaire du paramètre  $\chi$  entre ces deux statuts. Une mère dans Transition 0-1 se déplaçant en direction du Niveau 1 devient progressivement passive. Son paramètre  $\chi_m$  décroît linéairement de 1 vers 0. Simultanément, le paramètre  $\chi_d$  des filles croît linéairement de 0 jusqu'à 1. Réciproquement, le paramètre  $\chi_m$  d'une mère dans Transition 1-0 sortant du Niveau 1 croît linéairement de 0 jusqu'à 1. De même, le paramètre  $\chi_d$  des filles décroît linéairement de 1 jusqu'à 0. Une fille en dehors de Transition 0-1  $\cup$  Niveau 1  $\cup$  Transition 1-0 est supprimée.

L'inconvénient majeur de l'approche de D.A. Barcarolo *et al.* [5] réside dans les interactions entre particules non-passives ( $\chi_m \neq 0$  et  $\chi_d \neq 0$ ). En particulier, le support d'une mère non-passive contient les filles non-passives. Les mères interagissent alors avec beaucoup de filles, ce qui entraîne un coût CPU important. De plus, bien que lissées par la variation linéaire du paramètre  $\chi$ , il résulte des instabilités lors de l'interaction entre particules de volumes différents.

## 4.2 Technique de l'« Adaptive Particle Refinement »

L. Chiron *et al.* [17] ont adapté le raffinement adaptatif de maillage (AMR, « Adaptive Mesh Refinement ») développé dans le cadre de la méthode des Volumes Finis, au formalisme particulaire de la méthode SPH (APR, « Adaptive Particle Refinement »). À ce jour, l'APR est une des techniques de raffinement zonal les plus abouties de la littérature SPH. Le principe de l'APR est présenté dans cette section. On s'intéresse également aux spécificités liées à son implémentation dans le solveur ASPHODEL<sup>©</sup>. Cette version de l'APR ainsi introduite constitue le socle des développements de la suite du manuscrit.

### 4.2.1 Principes de l'APR

L. Chiron *et al.* [17] ont transposé les principes de particules gardes, de prolongation et de restriction de l'AMR dans l'APR. Cette technique est illustrée Fig. 4.5 en 2D pour deux niveaux de discrétisation.

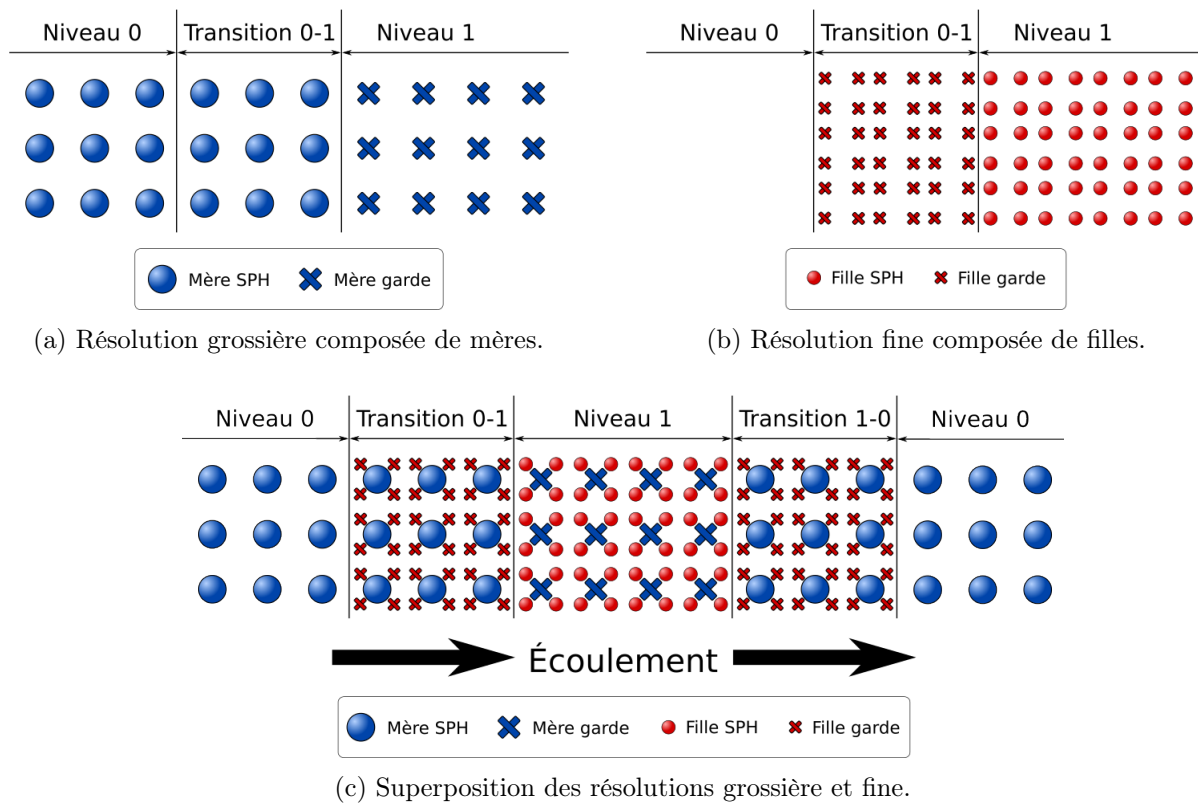


FIGURE 4.5 – Principes de l'« Adaptive Particle Refinement » illustrés en 2D pour deux niveaux de discrétisation : couplage de domaines SPH discrétisés grossièrement (Niveau 0  $\cup$  Transition 0-1  $\cup$  Transition 1-0) et finement (Niveau 1), interagissant indirectement au moyen de particules gardes non-matérielles.

L'APR consiste ainsi en un couplage entre deux domaines particulaires, l'un est composé de mères SPH (représentées par des pois bleus) et l'autre de filles SPH (représentées par des pois rouges), dont les conditions aux limites sont régies par les particules gardes (représentées par des croix). Elles sont utilisées afin de compléter le support de la fonction noyau des particules SPH (représentées par des pois) pour que celles-ci n'interagissent directement qu'avec des particules de taille similaire lors de la mise à jour de leurs dérivées spatiales. Par exemple, les mères SPH



de Niveau 0  $\cup$  Transition 0-1 interagissent avec d'autres mères SPH ainsi qu'éventuellement avec des mères gardes du Niveau 1 (représentées par des croix bleues) pour la mise à jour de leurs champs. Les propriétés des particules gardes sont interpolées depuis les particules SPH par prolongation et restriction. Le processus de prolongation (resp. restriction) consiste à interpoler par méthode de Shepard [71] les variables conservatives des filles gardes (resp. mères gardes) depuis les mères SPH et filles SPH situées à une distance au plus égale au rayon de lissage des filles SPH. Dans la suite du manuscrit, la *région APR* est définie comme le sous-domaine de calcul où sont situées les filles SPH et gardes. Elle regroupe les *zones de transition* (Transition 0-1 et 1-0) et la *zone raffinée* (Niveau 1), c'est-à-dire Transition 0-1  $\cup$  Niveau 1  $\cup$  Transition 1-0.

Le processus de raffinement de l'APR consiste à créer dans Transition 0-1 des filles gardes (représentées par des croix rouges) qui sont ensuite transportées dans Niveau 1 par le vecteur vitesse interpolé où elles deviennent des filles SPH. Les mères présentes dans Niveau 0  $\cup$  Transition 0-1 sont des particules SPH alors que celles dans Niveau 1 sont des particules gardes. Le raffinement d'une mère SPH est déclenché par un critère géométrique [24]. Une mère du Niveau 0 entrant dans Transition 0-1 initialise  $M$  filles disposées selon le schéma cartésien [69]. La vitesse d'une mère est transmise par copie à ses filles sans modification. La masse de la mère est répartie entre ses filles selon la solution du problème de minimisation de l'erreur en masse volumique  $\mathcal{E}$  définie Éq. (4.3). Les filles gardes ainsi initialisées complètent le support de la fonction noyau des filles SPH du Niveau 1. Pour garantir la consistance du schéma numérique manipulant des gradients reconstruits par stratégie MUSCL, comme illustré Fig. 2.2, le support de la fonction noyau des filles gardes situées dans le voisinage d'une fille SPH doit être complet. En conséquence, l'épaisseur d'une zone de transition est définie égale à deux fois le rayon de lissage des filles.

Réciproquement, le processus de dé-raffinement de l'APR consiste à gérer la transition du statut d'une mère de garde à SPH par passivation-activation. Le pavage du Niveau 1 est composé de filles SPH. Dans cette zone, les mères sont des particules gardes qui complètent le support de la fonction noyau des mères SPH des zones de transition (Transition 0-1 et 1-0). En particulier, aucune mère garde n'est éliminée. Pour une simulation lagrangienne, elles sont transportées par le vecteur vitesse interpolé. Pour un écoulement de la gauche vers la droite, les mères sont transportées depuis Niveau 1 jusque dans Transition 1-0 où elles deviennent des particules SPH. Les filles présentes dans Niveau 1 sont des particules SPH alors que celles dans Transition 1-0  $\cup$  Transition 0-1 sont des particules gardes. De plus, toute fille localisée en dehors de la région APR est éliminée à sa frontière avec Niveau 0.

#### 4.2.2 Implémentation dans le solveur ASPHODEL<sup>©</sup>

La version de l'APR implémentée dans ASPHODEL<sup>©</sup> présente quelques différences vis-à-vis de ce qui a été détaillé précédemment. La configuration standard d'ASPHODEL<sup>©</sup> reconstruit les variables primitives à l'aide de solveurs de Riemann [48]. Pour être cohérent, les processus de raffinement, de restriction et de prolongation de l'APR sont adaptés pour manipuler les variables primitives.

Le processus de raffinement utilisé est partiellement adapté. Sans modification, le raffinement d'une mère est déclenché par un critère géométrique [24] et procède à l'initialisation de  $M$  filles disposées selon le schéma cartésien [69]. Par contre, la vitesse et la masse volumique de la mère sont transmises par copie aux filles. Par simplicité, le volume de la mère est réparti équitablement entre ses filles [69] selon les poids définis Éq. (4.5). En effet, cette pondération s'affranchit de la résolution d'un problème de minimisation [24].

Une fois initialisées, les propriétés d'une particule garde doivent évoluer temporellement. Les variables primitives et le champ de transport  $\mathbf{v}_0$  d'une particule garde sont interpolés par prolongation ou restriction. Le champ de transport interpolé permet de mettre à jour la position d'une particule garde, selon Éq. (2.7). La loi d'évolution du volume des particules gardes est la même que pour les particules SPH, donnée Éq. (2.7). Faire évoluer le volume d'une particule garde nécessite alors d'évaluer la divergence du champ de transport. Cependant, les particules gardes de Transition 0-1 disposées près du Niveau 0 ont un support SPH tronqué. L'opérateur SPH de la divergence résultant est donc imprécis. Ainsi, pour plus de stabilité, la divergence du champ de transport d'une particule garde est aussi interpolée par prolongation ou restriction.

Les processus de prolongation et de restriction résultent d'une approximation par méthode des Moindres Carrés Mobiles (MLS) ou par correction de Shepard [67]. Les généralités de la méthode MLS sont présentées en annexe C. L'interpolation de Shepard est d'ordre 0, c'est-à-dire exacte pour la reconstitution de fonctions constantes. Cette approche s'avère donc insuffisante pour reconstruire précisément un phénomène linéaire. Pour plus de précision, une interpolation d'ordre plus élevé est souhaitable. Une approche par MLS d'ordre 1 est considérée, autrement dit exacte pour la reconstitution de fonctions linéaires. La méthode MLS permet d'atteindre un ordre supérieur, mais s'avère être imprécise si la matrice des moindres carrés est mal conditionnée. Ce peut notamment être le cas à proximité d'une surface libre. Dans ce cas, recourir à l'interpolation de Shepard est plus stable. Notons de plus que les opérations de prolongation et de restriction par approximation MLS à partir de particules de taille différente ne sont pas contraints par la limite des 3% énoncée section 2.2.

Les partenaires de prolongation et de restriction sont illustrés Fig. 4.6 en 1D pour trois niveaux de discrétisation.

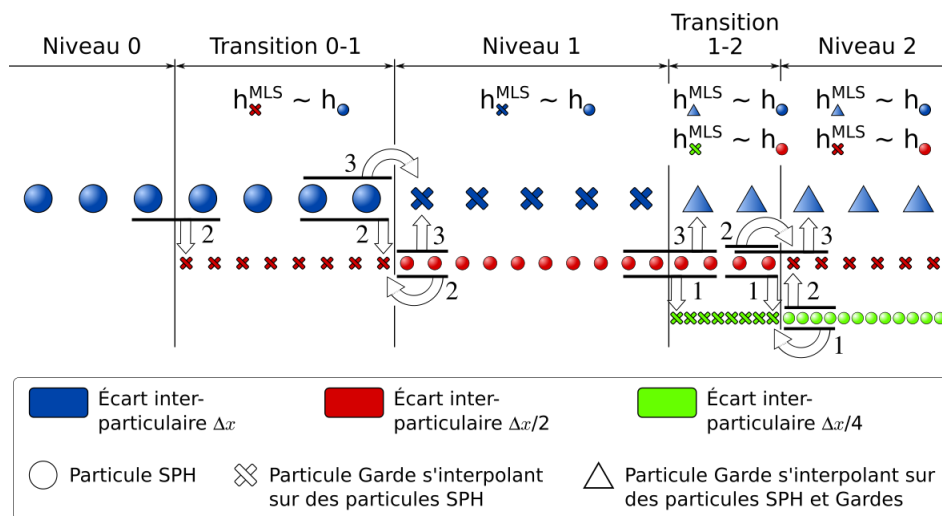


FIGURE 4.6 – Principes de l'« *Adaptive Particle Refinement* » illustrés en 1D pour trois niveaux de discrétisation : illustration des partenaires d'interpolation pour les particules gardes.

Le domaine de calcul est composé de mères qui présentent un écart inter-particulaire moyen  $\Delta x$  (coloriées en bleu), de filles dont l'écart inter-particulaire moyen est  $\Delta x/2$  issues du raffinement des mères (coloriées en rouge) et de petites-filles dont l'écart inter-particulaire moyen est  $\Delta x/4$  issues du raffinement des filles (coloriées en vert). Une particule d'un niveau de discrétisation donné peut être soit SPH (représentées par des pois), soit garde. Par exemple, les mères sont des particules SPH dans Niveau 0  $\cup$  Transition 0-1 (représentées par des pois bleus) mais sont des particules gardes dans Niveau 1  $\cup$  Transition 1-2  $\cup$  Niveau 2. Le support d'une particule



garde d'un niveau de discrétisation donné peut soit uniquement contenir des particules SPH (alors représentées par des croix), soit contenir des particules SPH et des particules gardes (alors représentées par des triangles). Les partenaires d'interpolation d'une particule garde donnée sont spécifiés par des flèches orientées dans sa direction. Ainsi, une mère garde du Niveau 1 (représentée par une croix bleue) reçoit des champs interpolés depuis les particules SPH de Transition 0-1  $\cup$  Niveau 1  $\cup$  Transition 1-2. Par contre, une mère garde de Transition 1-2  $\cup$  Niveau 2 (représentée par un triangle bleu) reçoit des champs interpolés depuis les filles gardes et SPH de Niveau 1  $\cup$  Transition 1-2  $\cup$  Niveau 2. Par conséquent, à l'instar des schémas multi-grilles de l'approche Volumes Finis, une particule garde d'un niveau  $n$  ne dépend que des particules des niveaux  $n + 1$ ,  $n$  et  $n - 1$ . Par exemple, les mères gardes de Niveau 2 n'interpolent pas leurs champs directement depuis les petites-filles SPH. Les communications sont ordonnées du niveau le plus fin vers le niveau le plus grossier afin que l'information transite successivement par chaque niveau de discrétisation. L'ordre des opérations est indiqué par un nombre ordinal. Par exemple dans Transition 1-2  $\cup$  Niveau 2, on commence par spécifier les champs des petites-filles gardes (première opération) puis ceux des filles gardes (deuxième opération) pour terminer par les mères gardes (troisième opération). Considérant une particule garde donnée, ses partenaires d'interpolation sont situés dans son voisinage à une distance au plus égale à deux fois sa longueur de lissage MLS  $h^{\text{MLS}}$ . Notons que ce facteur deux provient de la nature de la fonction noyau utilisée, i.e. Wendland. De même que pour la longueur de lissage SPH, on définit le rayon de lissage MLS  $R_h^{\text{MLS}} = 2 h^{\text{MLS}}$ . La définition de la mesure  $h^{\text{MLS}}$  est précisée en annexe C et illustrée Fig. 4.6 en fonction de la longueur de lissage  $h$ . Ainsi dans Transition 1-2, une petite-fille garde a une longueur de lissage MLS du même ordre de grandeur que la longueur de lissage des filles SPH. Par contre, les mères gardes ont une longueur de lissage MLS similaire à leur longueur de lissage. En pratique, définir ainsi la longueur de lissage MLS assure au voisinage d'une garde d'être suffisamment complet pour garantir la stabilité de l'opérateur d'interpolation.

Par ailleurs, une zone de transition doit être assez épaisse afin que les filles gardes complètent le support des fonctions noyaux et garantissent la stabilité des gradients reconstruits par schéma MUSCL des filles SPH. Une schématisation en 1D de ces contraintes géométriques est présentée Fig. 4.7.

Notons  $i$  la fille SPH qui est la plus proche de Transition 0-1. Sa molécule de calcul est représentée selon Fig. 2.2. Choisir l'épaisseur de la zone de transition au moins égale à deux fois le rayon de lissage (i.e.  $2R_h$ ) de  $i$  est une condition nécessaire pour que cette molécule soit complète. Supposons que ce soit le cas pour la suite.

Soit  $j$  la fille garde de cette molécule de calcul dont  $i$  est la plus éloignée. Les propriétés de  $j$  sont obtenues par prolongation depuis les mères SPH et filles SPH situées dans son support d'interpolation selon Fig. 4.6 (cf flèche "2"). En particulier, le rayon de lissage MLS de  $j$  est égal au double du rayon de lissage de  $i$ . Par conséquent, le voisinage de  $j$  est spatialement deux fois plus étendu que celui de  $i$ . Il s'agit ainsi d'une discontinuité numérique localisée au voisinage du Niveau 1 entre filles gardes et filles SPH. L'opérateur SPH de la divergence des filles peut s'avérer imprécis aux abords d'une telle discontinuité.

Soit  $k$  la mère SPH dont  $j$  est la plus proche. Son voisinage est illustré selon Fig. 2.1. Ainsi, le rayon de lissage MLS de  $j$  est égal au rayon de lissage de  $k$ . Ceci assure à  $j$  d'avoir un nombre de partenaires de prolongation semblable au nombre de voisines de  $k$ . Par conséquent, la précision de l'interpolation MLS des champs de  $j$  depuis les particules SPH est au moins égale à celle de l'approximation SPH des propriétés de  $k$ . D'autre part, en choisissant l'épaisseur de Transition 0-1 égale au double du rayon de lissage de  $k$ , cela assure que la molécule de calcul associée à  $j$  soit non tronquée. Pour plus de stabilité, l'épaisseur d'une zone de transition est ainsi définie.

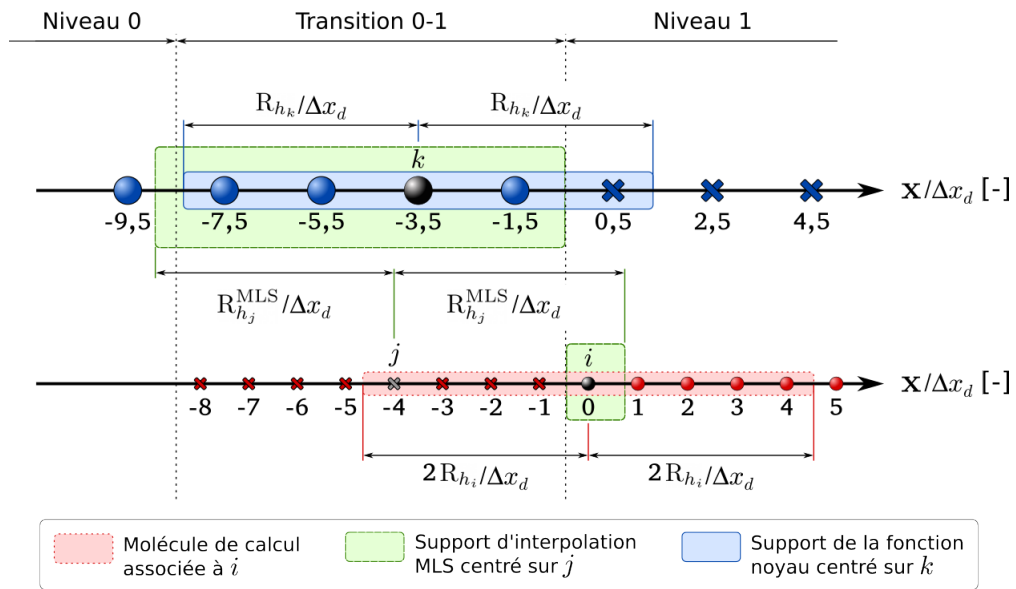


FIGURE 4.7 – Principes de l'« *Adaptive Particle Refinement* » illustrés en 1D pour deux niveaux de discrétisation : schématisation des contraintes géométriques sur Transition 0-1.

# CHAPITRE 5

## RAFFINEMENT PARTICULAIRE ADAPTATIF HYBRIDE (HAPR)

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Technique de l'« <i>Hybridized Adaptive Particle Refinement</i> »</b>	<b>60</b>
5.1.1	Sous-zone Halo Garde	61
5.1.2	Sous-zone Hybride	61
5.1.3	Sous-zone de Création	62
5.1.4	Sous-zone de Suppression	65
<b>5.2</b>	<b>Validations numériques</b>	<b>66</b>
5.2.1	Écoulement quasi-1D dans un tube à choc	66
5.2.2	Écoulement 2D dans un canal oscillant	70
5.2.3	Impact 2D d'un jet plan sur une plaque plane	75
<b>5.3</b>	<b>Synthèse</b>	<b>85</b>

---

Les travaux de recherche menés au cours de la thèse ont conduit au développement d'une nouvelle technique de raffinement zonal adaptée au formalisme SPH. Celle-ci est appelée *raffinement particulaire adaptatif hybride* (HAPR, « *Hybridized Adaptive Particle Refinement* »). L'HAPR constitue une généralisation de la version de l'APR du solveur ASPHODEL<sup>©</sup> capable d'assurer un support complet aux fonctions noyaux des particules SPH, de garantir la stabilité du schéma MUSCL des filles SPH, de préserver un pavage en espace satisfaisant dans tout le domaine de calcul et d'établir une transition spatiale continue des propriétés physiques du niveau grossier vers le niveau fin. Cette technique de raffinement particulaire est qualifiée d'hybride car un nouveau statut de particules non-matérielles est proposé, i.e. les *particules hybrides*. Les variables primitives de ces particules sont définies par combinaison d'une contribution MLS et d'une contribution SPH. Cette dualité permet aux particules hybrides d'endosser un état intermédiaire aux particules gardes et SPH. Le principe de l'HAPR est exposé en détail ci-après. Les résultats obtenus avec APR et HAPR sont ensuite illustrés, commentés et comparés pour l'ensemble des cas tests introduits chapitre 3.

## 5.1 Technique de l'« *Hybridized Adaptive Particle Refinement* »

La technique HAPR est exposée dans cette section. Son principe est illustré Fig. 5.1 en 2D avec deux niveaux de discrétisation.

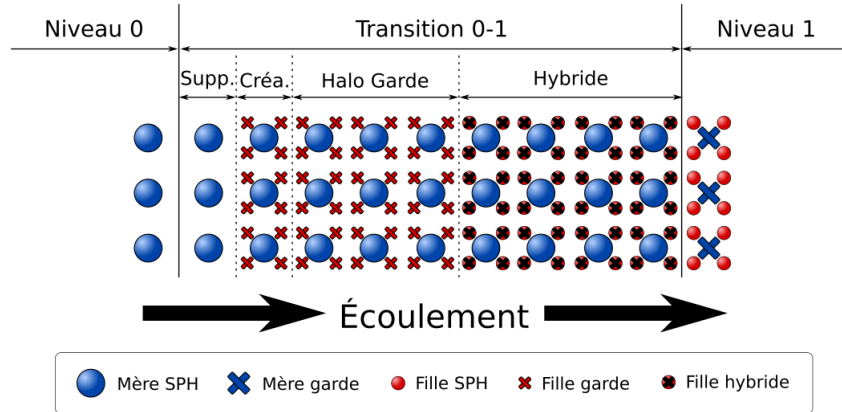


FIGURE 5.1 – Principes de la technique « *Hybridized Adaptive Particle Refinement* » (HAPR) illustrés en 2D pour deux niveaux de discrétisation : couplage SPH-SPH d'une résolution grossière (Niveau 0  $\cup$  Transition 0-1) et fine (Niveau 1).

Cette approche consiste en un couplage SPH-SPH d'une résolution grossière (Niveau 0  $\cup$  Transition 0-1) et fine (Niveau 1). Les variables primitives d'une particule garde sont interpolées depuis ses partenaires de prolongation ou de restriction. Ces processus résultent d'une approximation par méthode MLS1 ou par correction de Shepard. Une particule hybride est une particule non-matérielle dont les variables primitives résultent d'une combinaison de champs issus de l'approximation MLS1 et des interactions SPH. Cette définition est précisée section 5.1.2. Le champ de transport et la divergence du champ de transport d'une particule garde/hybride sont interpolés depuis ses partenaires de prolongation ou de restriction. La position et le volume de la particule garde/hybride évoluent temporellement ensuite selon le système d'équations (2.9).

Les définitions des Niveau 0 et 1 sont prises identiques à l'APR (cf section 4.2). Le pavage du Niveau 0 est réalisé par les mères, alors que la physique du Niveau 1 est portée par les filles. Des particules non-matérielles (gardes et hybrides) sont introduites pour éviter toute interaction directe entre filles SPH et mères SPH au cours de la mise à jour des dérivées spatiales. Pour le Niveau 0, le support des fonctions noyaux des mères SPH (représentées par des pois bleus) est complété par des mères gardes (représentées par des croix bleues) positionnées dans le Niveau 1. Réciproquement, le support des fonctions noyaux des filles SPH du Niveau 1 (représentées par des pois rouges) est complété par des filles gardes (représentées par des croix rouges) et des filles hybrides (représentées par des pois rouges barrés d'une croix noire) localisées dans Transition 0-1.

Transition 0-1 est subdivisée en quatre sous-zones, nommées sous-zones de *Suppression*, de *Création*, *Halo Garde* et *Hybride* respectivement de gauche à droite Fig. 5.1. Le rôle de chaque sous-zone est détaillé par la suite. L'épaisseur d'une sous-zone est définie comme un facteur  $\xi$  du plus grand rayon de lissage  $R_h$  d'une mère SPH. Par exemple, l'épaisseur de la sous-zone Halo Garde est  $\xi_{\text{Halo Garde}} R_h$ . Il en résulte que l'épaisseur globale de Transition 0-1 est  $(\xi_{\text{Supp.}} + \xi_{\text{Créa.}} + \xi_{\text{Halo Garde}} + \xi_{\text{Hybride}}) R_h$ .

### 5.1.1 Sous-zone Halo Garde

Le rôle de la sous-zone Halo Garde est de maintenir la consistance du schéma numérique en garantissant la robustesse des opérateurs  $W_{ij}$  et  $\nabla_i W_{ij}$  des filles dont les propriétés sont mises à jour selon Éq. (2.9), i.e. les filles SPH et les filles hybrides. En conséquence, les filles gardes de la sous-zone Halo Garde doivent assurer la complétude du support des fonctions noyaux des filles SPH, des filles hybrides et de leurs partenaires SPH. En particulier, vérifier l'équation (5.1) satisfait cette contrainte (cf Fig. 4.7).

$$\xi_{\text{Halo Garde}} \geq 1. \quad (5.1)$$

### 5.1.2 Sous-zone Hybride

Juxtaposer filles gardes et filles SPH introduit une discontinuité spatiale numérique lors du raffinement, car leurs propriétés sont régies différemment. Or, il a été mentionné section 4.2.2 que l'opérateur SPH de la divergence peut s'avérer imprécis aux abords d'une telle discontinuité. Pour plus de stabilité lors du raffinement, il convient de lisser la transition entre les statuts de fille garde et fille SPH.

La sous-zone Hybride a ainsi pour but d'assurer la continuité spatiale des propriétés physiques des filles. Un nouveau statut de particules non-matérielles, les *particules hybrides*, est introduit à cette fin. Une telle particule est ainsi nommée car ses variables primitives sont définies par combinaison d'une contribution MLS et d'une contribution SPH. Toutefois, ce traitement ne concerne pas la divergence du champ de transport qui demeure uniquement issue de l'approximation MLS. D'une part, la contribution MLS consiste à approcher les champs des partenaires de prolongation et de restriction par méthode MLS1 si la matrice des moindres carrés est bien conditionnée, sinon par correction de Shepard. Les partenaires de prolongation et de restriction sont illustrés Fig. 4.6. D'autre part, la contribution SPH consiste classiquement en l'évaluation des variables primitives par méthode SPH. En particulier, les champs d'une fille hybride sont calculés à partir des filles environnantes identifiées comme partenaires d'interactions SPH selon Éq. (2.9).

Les variables primitives des filles hybrides sont ainsi calculées à partir de champs issus à la fois de l'approximation MLS et des interactions SPH. Cette *hybridation* consiste à effectuer une moyenne pondérée par une fonction de couplage variable en espace. Mathématiquement, notons  $\Lambda_k \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d, [0, 1])$  cette fonction régulière d'ordre  $k \in \mathbb{N}$  où  $d = 1, 2, 3$  désigne le nombre de dimensions en espace. Pour  $k = 2$  la fonction de couplage est deux fois dérivable et sa dérivée seconde est continue, ce qui semble suffisant pour simuler les écoulements considérés. Ainsi, la suite du manuscrit se focalise uniquement sur la fonction de couplage  $\Lambda_2$ . La sensibilité de l'HAPR à ce choix n'a pas été analysée dans le cadre de la thèse. Une illustration de  $\Lambda_2$  est présentée Fig. 5.2 en 1D pour deux niveaux de discrétisation.

Soit  $\phi^{nc} \in \Phi^{nc}$  une variable scalaire exprimée sous forme non-conservative d'une fille positionnée en  $\mathbf{x} \in \Omega(t)$  à l'instant  $t \in T$ . Pour toute fille, l'expression du champ  $\phi^{nc}(\mathbf{x}, t)$  est formulée comme une pondération  $0 \leq \Lambda_2(\mathbf{x}) \leq 1$  d'une contribution  $\phi_{\text{MLS}}^{nc}(\mathbf{x}, t)$  issue de l'approximation MLS et d'une contribution  $\phi_{\text{SPH}}^{nc}(\mathbf{x}, t)$  résultant des interactions SPH, i.e.

$$\phi^{nc}(\mathbf{x}, t) = \Lambda_2(\mathbf{x}) \phi_{\text{MLS}}^{nc}(\mathbf{x}, t) + (1 - \Lambda_2(\mathbf{x})) \phi_{\text{SPH}}^{nc}(\mathbf{x}, t), \quad \forall t \in T, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega(t). \quad (5.2)$$

En particulier, le champ  $\phi^{nc}$  d'une fille de la sous-zone Hybride est dit *hybride* car calculé avec une pondération  $0 < \Lambda_2(\bullet) < 1$ . Une *fillette hybride* est donc une fille non-matérielle dont le champ  $\phi^{nc}$  est hybride. Par ailleurs, le champ  $\phi^{nc}$  d'une fille garde résulte uniquement de la contribution MLS puisque la pondération  $\Lambda_2(\bullet) = 1$  est utilisée. Réciproquement, le champ

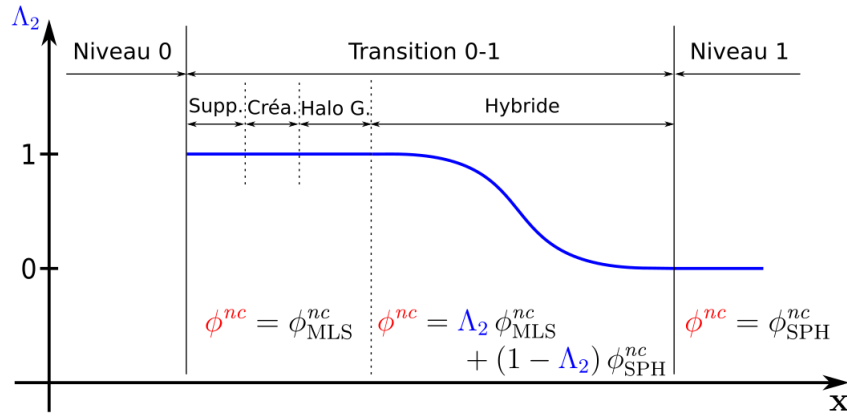


FIGURE 5.2 – Principes de la technique « *Hybridized Adaptive Particle Refinement* » (HAPR) illustrés en 1D pour deux niveaux de discrétisation : fonction de couplage  $\Lambda_2 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, [0, 1])$ .

$\phi^{nc}$  d'une fille SPH dépend uniquement de la contribution SPH car le coefficient  $\Lambda_2(\bullet) = 0$  est appliqué. Ainsi définie, la fonction de couplage  $\Lambda_2(\bullet)$  permet une jonction lisse et régulière d'ordre 2 entre les statuts de fille garde et fille SPH.

Comme décrit par A. Colagrossi *et al.* [19], les particules SPH présentent intrinsèquement la capacité à se réorganiser spatialement pour limiter l'erreur d'inhomogénéité de la distribution particulaire. Contrairement aux particules SPH, les particules gardes ne présentent pas cette caractéristique. Les particules hybrides héritent toutefois de cette faculté, car leurs variables non-conservatives sont construites avec une contribution SPH non nulle. Plus la pondération  $\Lambda_2(\bullet)$  d'une fille hybride est proche de zéro, i.e. lorsque la contribution SPH devient prépondérante sur la contribution MLS, plus sa capacité à se réorganiser localement est similaire à celle d'une fille SPH. Cette conséquence de l'hybridation MLS-SPH permet aux filles hybrides de réaliser un pavage de l'espace plus robuste aux erreurs de dispersion que celui réalisé par des filles gardes seules. Ceci stabilise la méthode, car une bonne précision de l'évaluation faite des opérateurs  $W_{ij}$  et  $\nabla_i W_{ij}$  des filles SPH est alors maintenue.

### 5.1.3 Sous-zone de Création

Le rôle de la sous-zone Halo Garde est de compléter le support de la fonction noyau des filles SPH, des filles hybrides et de leurs partenaires SPH. Maintenir un pavage spatial satisfaisant de la sous-zone Halo Garde est donc indispensable pour conserver des champs réguliers. Or, le raffinement d'une mère engendre subitement la création de filles gardes dans son voisinage. Sans précaution, celles-ci peuvent être introduites directement dans la zone Halo Garde. Dans cette situation, elles apparaissent subitement dans le support de la fonction noyau des filles SPH, des filles hybrides et de leurs partenaires SPH. Ceci s'accompagne d'instabilités numériques et d'erreurs d'approximation. En bref, procéder au raffinement d'une mère dans la sous-zone Halo Garde est déstabilisant pour la méthode.

Pour y pallier, la sous-zone de Création est définie comme une extension de la sous-zone Halo Garde dans laquelle le processus de raffinement peut être réalisé sans induire d'instabilités numériques. Ce processus est piloté par un critère géométrique [24] déclenchant le raffinement d'une mère SPH, précédemment localisée dans la sous-zone de Suppression, dès son entrée dans la sous-zone de Création (cf Fig. 5.3).

En se raffinant, la mère  $m$  engendre alors  $M$  filles (dites *additionnelles*) disposées selon le schéma cartésien dont il convient d'initialiser les propriétés. Le volume de la mère est réparti



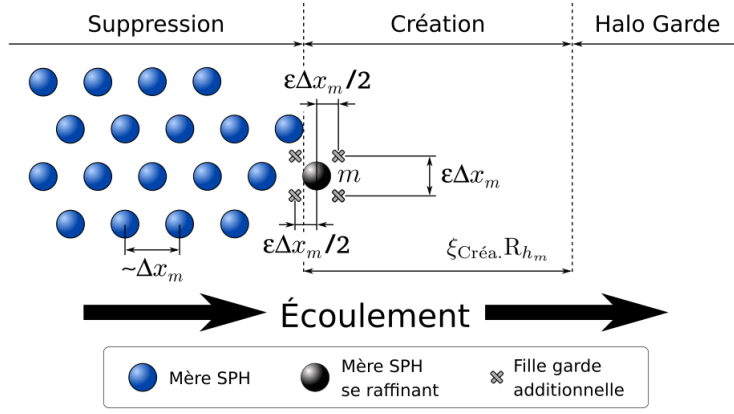


FIGURE 5.3 – Principes de la technique « *Hybridized Adaptive Particle Refinement* » (HAPR) illustrés en 2D pour deux niveaux de discrétisation : schématisation des contraintes géométriques pour dimensionner la sous-zone de Création.

équitablement entre ses filles [69]. La vitesse et la masse volumique de la mère sont transmises par copie aux filles. La sous-zone de Création doit être suffisamment épaisse afin d'éviter l'initialisation de filles directement dans la sous-zone Halo Garde. Par exemple, si l'épaisseur de la sous-zone de Création est inférieure à l'écart inter-particulaire entre une mère et ses filles alors des filles seront créées directement dans la sous-zone Halo Garde. L'épaisseur de la sous-zone de Création doit donc vérifier la contrainte suivante pour toute mère  $m$ .

$$\left( \xi_{\text{Créa.}} R_{h_m} > \frac{1}{2} \varepsilon \Delta x_m \right) \Rightarrow \left( \xi_{\text{Créa.}} > \frac{\varepsilon \Delta x_m}{4 h_m} \approx 0,1 \right), \quad (5.3)$$

où  $\varepsilon = 0,5$  est le paramètre de séparation,  $\Delta x_m$  désigne l'espacement inter-particulaire de la mère et  $h_m$  sa longueur de lissage. L'application numérique est effectuée en tenant compte d'un ratio constant  $h_m/\Delta x_m = 1,2$ . Cette contrainte est une condition nécessaire, mais pas suffisante. En pratique, satisfaire Éq. (5.4) s'est révélé suffisant.

$$\xi_{\text{Créa.}} \geq 0,35, \text{ i.e. } \xi_{\text{Créa.}} R_{h_m} \geq 0,84 \Delta x_m. \quad (5.4)$$

Le processus de raffinement défini précédemment fait abstraction de la distribution des filles gardes présentent dans le voisinage d'une mère se raffinant. En général, le voisinage d'une mère se raffinant est vide de filles gardes. Cette assertion n'est toutefois pas une tautologie. Auquel cas, le processus de raffinement conduit à une sur-crétion de filles localement, induisant une distribution de filles inhomogène dans la sous-zone de Création. Les filles gardes ne pouvant pas se réorganiser localement pour contrer cette inhomogénéité, cette configuration sera ensuite transportée dans la sous-zone Halo Garde en simulation lagrangienne, déstabilisant alors la méthode. Pour éviter ce scénario, le processus de raffinement est adapté afin de tenir compte du voisinage des mères se raffinant. Pour en déterminer la composition, il est essentiel de re-définir une connectivité entre les mères SPH et les filles gardes (dites *pré-existantes*) localisées dans Transition 0-1. En effet, les filles gardes sont libres de se déplacer indépendamment les unes des autres une fois créées. Leur configuration ne forme alors plus un motif cartésien centré sur une mère et quelques filles gardes peuvent s'être très éloignées de la mère dont elles sont issues, appelée *mère d'origine*. Pour re-définir une connectivité, toute fille garde de Transition 0-1 est *associée* à la mère SPH dont elle est la plus proche. Toutefois, cette procédure conduit à associer une fille garde isolée à une mère SPH dont elle peut être très éloignée. Cette situation

peut avoir lieu lorsque l'écoulement présente une surface libre. Pour l'éviter, une précaution est prise sur la distance entre une fille garde et la mère SPH à lui associer : celle-ci doit être au plus distante de cette mère SPH d'une distance égale à un rayon de lissage d'une mère SPH. Chaque fille garde est ainsi associée à au plus une mère SPH, mais plus de  $M$  filles gardes peuvent être associées à une même mère SPH. Néanmoins, cette situation n'intervient pas en pratique, dès lors que la distribution des mères SPH localisées dans Transition 0-1 forme un pavage de l'espace suffisamment régulier. La composition du voisinage de toute mère SPH de Transition 0-1 est ainsi connue. Dans le cas particulier d'une mère se raffinant, les filles gardes qui lui sont associées sont éliminées (cf Fig. 5.4).

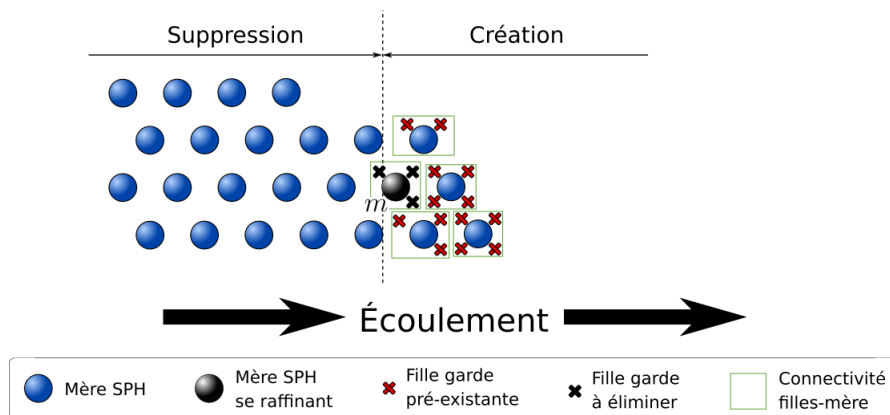


FIGURE 5.4 – Principes de la technique « *Hybridized Adaptive Particle Refinement* » (HAPR) illustrés en 2D pour deux niveaux de discrétisation : processus de raffinement destructif.

Cette stratégie est qualifiée de *destructrice*. La mère SPH  $m$  engendre ensuite  $M$  filles additionnelles selon le processus de raffinement détaillé dans le paragraphe précédent. Ainsi, le *processus de raffinement destructif* résultant permet de tenir compte du voisinage des mères se raffinant pour se prémunir d'une éventuelle sur-crétion locale de filles, mais ne préserve pas la topologie du voisinage.

Au cours de ces travaux de thèse, une stratégie avec un schéma de raffinement adaptatif préservant la topologie du voisinage d'une mère se raffinant a également été développée. Ainsi, la création de  $M$  filles n'est plus systématique. Par exemple, le raffinement d'une mère associée à  $M - 1$  filles pré-existantes engendre la création de seulement une fille additionnelle. Les propriétés des filles pré-existantes, notamment les positions, ne sont alors pas modifiées lors du raffinement. Cette approche est nommée *processus de raffinement non-destructif*. Un problème d'optimisation a été formulé pour déterminer le nombre, les positions et les propriétés des filles additionnelles à créer en 2D. Le principe du processus de raffinement non-destructif est détaillé en annexe D et les résultats obtenus avec processus de raffinement non-destructif et destructif sur le cas du canal oscillant y sont comparés. En bref, il est conclut que l'HAPR présente des résultats de qualité similaire pour l'un et l'autre. Puisque le processus destructif ne nécessite pas la résolution d'un problème d'optimisation, cette stratégie est supposée être moins coûteuse. De plus, la généralisation du processus destructif aux simulations 3D est plus simple. Finalement, l'utilisation de l'HAPR avec processus de raffinement destructif est privilégiée dans la suite des travaux présentés.



### 5.1.4 Sous-zone de Suppression

Réciproquement, la sous-zone de Suppression est un réservoir particulière qui régit l'élimination des filles gardes sans induire d'instabilités numériques. D'une part, toute fille passant de la sous-zone de Suppression au Niveau 0 est supprimée. D'autre part, la sous-zone de Suppression a pour rôle de prévenir l'élimination d'une fille venant d'être créée en dehors de la sous-zone de Création (cf Fig. 5.3), ainsi que de toute fille garde dont la mère associée est localisée dans la sous-zone de Création. À l'instar de la sous-zone de Création, cela contraint son épaisseur à satisfaire la contraire géométrique suivante, identique à Éq. (5.3) :

$$\xi_{\text{Supp.}} > \frac{\varepsilon \Delta x_m}{4h_m} \approx 0,1 . \quad (5.5)$$

À nouveau, cette contrainte est une condition nécessaire, mais pas suffisante. En pratique, satisfaire Éq. (5.6) s'est montré suffisant.

$$\xi_{\text{Supp.}} \geq 0,35 . \quad (5.6)$$

Le processus d'élimination d'une fille est illustré Fig. 5.5 en 2D avec deux niveaux de discrétisation.

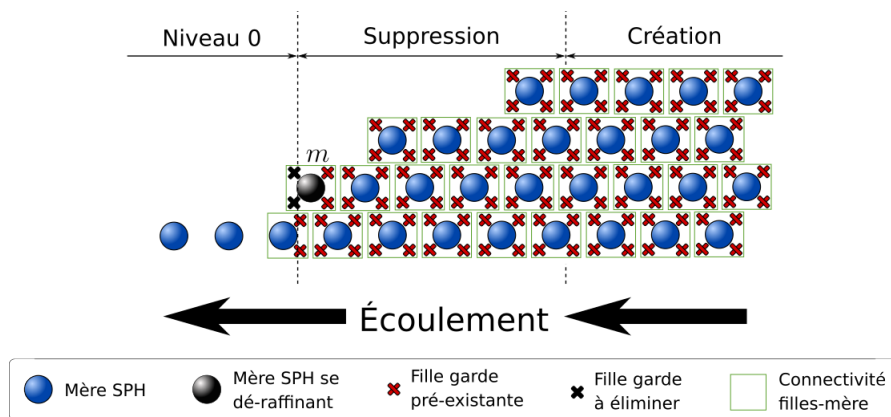


FIGURE 5.5 – Principes de la technique « *Hybridized Adaptive Particle Refinement* » (HAPR) illustrés en 2D pour deux niveaux de discrétisation : élimination des filles gardes.

En particulier, la mère  $m$  n'est plus localisée dans la sous-zone de Création. En conséquence, cette mère pourra éventuellement se raffiner ultérieurement. Par ailleurs, les filles qui lui sont associées et qui sont localisées dans Niveau 0 sont à éliminer. Or, cette élimination n'induit pas d'instabilité car le raffinement éventuel de la mère  $m$  permettra de rétablir un motif complet. Ces précautions rendent la méthode plus robuste dans certains cas, notamment d'écoulements oscillants se traduisant par un passage alterné entre les configurations illustrées Fig. 5.3 et Fig. 5.5.

## 5.2 Validations numériques

La pertinence des techniques multi-résolutions en espace pour la méthode SPH-ALE est analysée dans cette section. La pertinence renvoie à l'idée de résultat. Cette capacité à remplir les fonctionnalités attendues consiste à juger le comportement de l'APR et de l'HAPR face à une situation donnée (la performance) et à ne pas être perturbées par une modification des données (la robustesse). Les cas tests numériques sont ordonnés selon une démarche de complexification progressive. Le premier est un cas eulérien d'écoulement quasi-1D dans un tube à choc. La simulation en description lagrangienne d'un canal oscillant 2D est ensuite étudiée. Enfin, l'analyse est étendue à la simulation lagrangienne d'un jet plan impactant une plaque plane en incidence normale.

### 5.2.1 Écoulement quasi-1D dans un tube à choc

L'objectif de cette section est de montrer les capacités de l'HAPR à simuler un cas eulérien d'écoulement quasi-1D dans un tube à choc. Ce premier cas de validation sert à valider l'implémentation informatique et démontre la faisabilité d'un apport dû aux techniques multi-résolutions en espace pour la méthode SPH-ALE.

#### Paramétrisation du raffinement

La paramétrisation générale du problème est détaillée section 3.1. Par contre, la paramétrisation numérique utile aux simulations APR-SPH et HAPR-SPH est précisée ci-après. Le cas étudié est schématisé Fig. 5.6 avec une zone raffinée (Niveau 1, en rouge) recouvrant toute la partie droite du tube au-delà de  $x = 5,0$  cm.

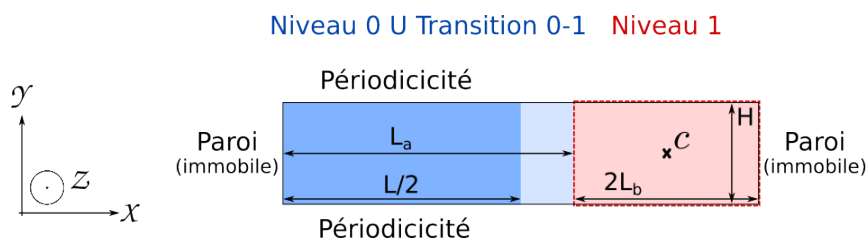


FIGURE 5.6 – Cas test numérique du tube à choc : schématisation de la géométrie du problème avec une zone raffinée (Niveau 1, en rouge) recouvrant toute la partie droite du tube.

Le domaine de calcul et le domaine fluide sont confondus. À l'intérieur du domaine rectangulaire  $\Omega = [-L/2, L/2] \times [-H/2, H/2] \subset \mathbb{R}^2$ , est disposée une région APR (resp. HAPR) rectangulaire définie comme l'union de la zone de transition (Transition 0-1, non représentée) et de la zone raffinée (Niveau 1, en rouge). La zone raffinée est également rectangulaire, centrée sur le point  $c = (c_x, c_y) \in \Omega$ , d'épaisseur  $2L_b = 0,25$  m selon l'axe  $x$  et de hauteur  $H$  selon l'axe  $y$ . Elle est disposée à une distance  $L_a = 0,35$  m de la paroi de gauche.

Les simulations sont réalisées en description eulérienne. Les filles sont donc créées une seule fois, au moment d'initialiser le cas test. En particulier, le pavage de la zone de transition est fixe. Le niveau grossier (Niveau 0  $\cup$  Transition 0-1) est uniformément discrétisé par un pavage cartésien régulier de mères SPH dont l'écart inter-particulaire est  $\Delta x_m = 5,00$  mm. De même, l'écart inter-particulaire des filles SPH discrétisant le niveau fin (Niveau 1) est  $\Delta x_d = 2,50$  mm. Ainsi, plus de 4000 particules SPH sont manipulées dans cette configuration. Dans ce qui suit,

l'appellation APR (resp. HAPR) fait référence à la simulation SPH raffinée localement par technique APR (resp. HAPR). De plus, la notation 4N fait référence à la simulation SPH standard N raffinée par technique APR avec une zone raffinée recouvrant entièrement le domaine de calcul. Dans ce cas, le domaine fluide est uniformément discrétisé par un pavage cartésien régulier de filles SPH dont l'écart inter-particulaire est  $\Delta x_d = 2,50$  mm. Dans cette configuration, près de 8000 particules SPH sont manipulées.

La composition de la zone de transition utilisée pour les simulations HAPR est donnée Tab. 5.1.

$\xi_{\text{Supp.}}$	$\xi_{\text{Créa.}}$	$\xi_{\text{Halo Garde}}$	$\xi_{\text{Hybride}}$
0,35	0,35	1,00	1,00

TABLE 5.1 – Cas test numérique du tube à choc : composition de la zone de transition de l'HAPR.

Le facteur  $\xi_{\text{Halo Garde}}$  déterminant l'épaisseur de la sous-zone Halo Garde est choisi égal à la borne inférieur de la contrainte (5.1). La sous-zone Hybride est définie d'épaisseur égale à la sous-zone Halo Garde par simplicité. Enfin, les facteurs  $\xi_{\text{Créa.}}$  et  $\xi_{\text{Supp.}}$  ont été choisis de façon à satisfaire les relations ad hoc (5.4) et (5.6), respectivement. L'épaisseur globale de la zone de transition de l'HAPR est alors  $(\xi_{\text{Supp.}} + \xi_{\text{Créa.}} + \xi_{\text{Halo Garde}} + \xi_{\text{Hybride}}) R_h = (0,35 + 0,35 + 1,00 + 1,00) \times 2 \times 1,2 \times 5,00 \approx 33,00$  mm. Afin de pouvoir comparer équitablement la pertinence de l'APR et de l'HAPR, l'épaisseur de la zone de transition de l'APR est de même égale définie à 2,70 fois le rayon de lissage  $R_h$  d'une mère SPH. En particulier, l'épaisseur ainsi définie est bien supérieure à la contrainte minimale d'une fois le rayon de lissage garantissant la complétude du support des fonctions noyaux des filles SPH et de leurs partenaires SPH.

Puisque le cas représenté Fig. 5.6 manipule une zone raffinée recouvrant toute la partie droite du tube, une seule sous-zone Hybride est introduite en amont. Il s'agit d'une portion rectangulaire du domaine  $\Omega$ , juxtaposée à la zone raffinée, d'épaisseur  $L_c = \xi_{\text{Hybride}} R_h$  selon l'axe  $x$  et de hauteur  $H$  selon l'axe  $y$ . La fonction de couplage  $\Lambda_2 \in \mathcal{C}^2(\Omega, [0, 1])$  utilisée pour l'HAPR est définie Éq. (5.7). Il est à noter que cette définition n'est pas la seule admissible.

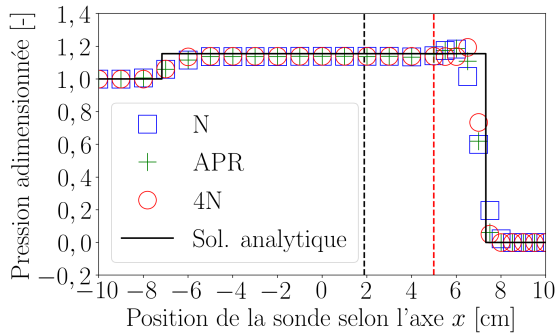
$$\Lambda_2 : \Omega \rightarrow [0, 1]$$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 0, & \text{si } |x - c_x| \leq L_b, \\ 1, & \text{si } |x - c_x| \geq L_b + L_c, \\ \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{9}{8} \cos \left( \pi \frac{|x - c_x| - L_b}{L_c} \right) + \frac{1}{8} \cos \left( 3\pi \frac{|x - c_x| - L_b}{L_c} \right) \right], & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.7)$$

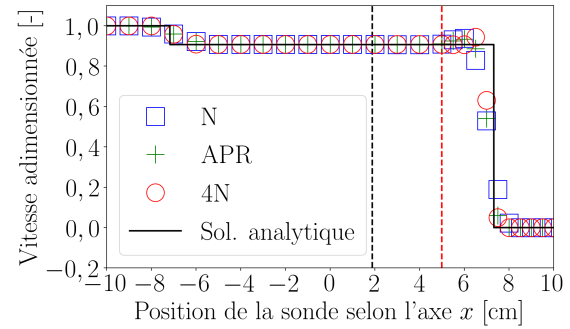
## Performance

D'une part, étudions la performance de l'APR à simuler la physique de l'écoulement dans le tube à choc. Les résultats sont présentés Fig. 5.7a (resp. Fig. 5.7b) sous la forme de profils de pression statique (resp. de la norme du vecteur vitesse) selon l'axe  $x$  autour de la discontinuité initiale, extraits à mi-hauteur en  $y = 0,00$  m, à l'instant  $t_{\text{adim}} = 1,5$  où l'onde de choc se déplaçant vers la droite a entièrement franchi la frontière de la zone raffinée.

Le profil de pression, le profil de la norme du vecteur vitesse, la position et la raideur des ondes de choc prédits par l'APR (plus verts), ainsi que par les références numériques N (carrés bleus) et 4N (cercles rouges), sont cohérents avec les résultats de la solution analytique (ligne noire continue). La discrétisation N est suffisamment fine pour reproduire fidèlement les chocs



(a) Profil de pression statique adimensionnée.

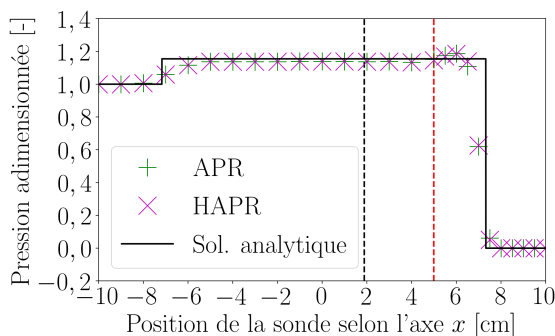


(b) Profil de la norme du vecteur vitesse adimensionnée.

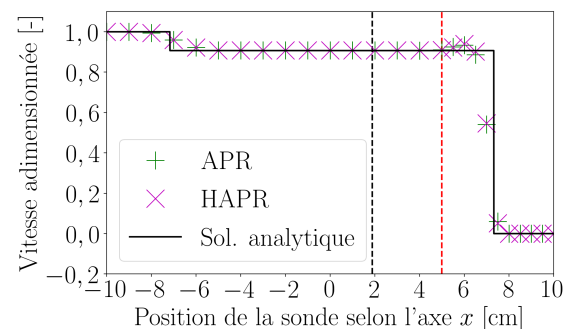
FIGURE 5.7 – Cas test numérique du tube à choc : profils instantanés à  $t_{\text{adim}} = 1,5$ . Comparaison de la solution analytique (ligne continue noire), de la solution SPH entièrement raffinée 4N (cercles rouges), de la solution SPH standard uniforme N (carrés bleus) et de la solution raffinée localement APR (plus verts). Les zones de transition et raffinée sont délimitées par des lignes discontinues de pointillés noire et rouge, respectivement.

prédits par la solution analytique, et la simulation 4N encore plus fine est d'autant plus fidèle. La performance de l'APR est intermédiaire à celles des références numériques N et 4N. Au niveau du choc de droite en  $x = 6$  cm notamment, le profil de pression obtenu avec l'APR n'est pas aussi fidèle à la solution analytique que le profil 4N. Toutefois, le profil APR s'en écarte moins que le profil N. L'APR permet ainsi un gain de performance vis-à-vis de la discrétisation uniformément grossière N, en se rapprochant de la performance de 4N, sans pour autant recourir à une discrétisation fine dans tout le domaine. Ce résultat valide l'implémentation de l'APR dans le solveur ASPHODEL<sup>©</sup>. L'auteur est confiant d'y recourir par la suite.

D'autre part, vérifions que les filles hybrides de l'HAPR constituent une condition limite aussi performante que les filles gardes de l'APR quant à la simulation du tube à choc. Fig. 5.8a (resp. Fig. 5.8b) présente le profil de pression statique (resp. de la norme du vecteur vitesse) à l'instant  $t_{\text{adim}} = 1,5$  obtenu avec l'HAPR (croix magenta), comparé à l'APR (plus verts) et à la solution analytique (ligne noire continue).



(a) Profil de pression statique adimensionnée.



(b) Profil de la norme du vecteur vitesse adimensionnée.

FIGURE 5.8 – Cas test numérique du tube à choc : profils instantanés à  $t_{\text{adim}} = 1,5$ . Comparaison de la solution analytique (ligne continue noire), de la solution raffinée localement APR (plus verts) et HAPR (croix magenta).

Le profil de pression, le profil de la norme du vecteur vitesse, la position et la raideur des ondes de choc prédits par l'HAPR sont très similaires à ceux de l'APR. Leurs résultats sont cohérents

avec ceux de la solution analytique.

Finalement, l'APR et l'HAPR sont tout aussi performantes lors de la simulation d'un cas eulérien d'écoulement quasi-1D dans un tube à choc.

### Robustesse

La masse totale de fluide présente dans un tube à choc est conservée au cours d'une expérience réelle. Numériquement, la résolution par méthode SPH doit tenir compte de cette conservation. Au contraire, ne pas présenter un tel comportement constitue une faille de robustesse. Ainsi, une approche est considérée comme d'autant plus robuste que la masse totale de fluide est conservée dans le temps. Fig. 5.9 illustre l'évolution dans le temps de la masse totale des particules SPH ( $\mathcal{M}_{\text{approx}}$ ) mobilisées dans le tube. Les résultats sont présentés sous la forme de profils d'erreur relative en masse totale par rapport à la masse totale théorique de fluide dans le tube ( $\mathcal{M}_{\text{théo}}$ ), i.e.  $(\mathcal{M}_{\text{théo}} - \mathcal{M}_{\text{approx}})/\mathcal{M}_{\text{théo}}$ .

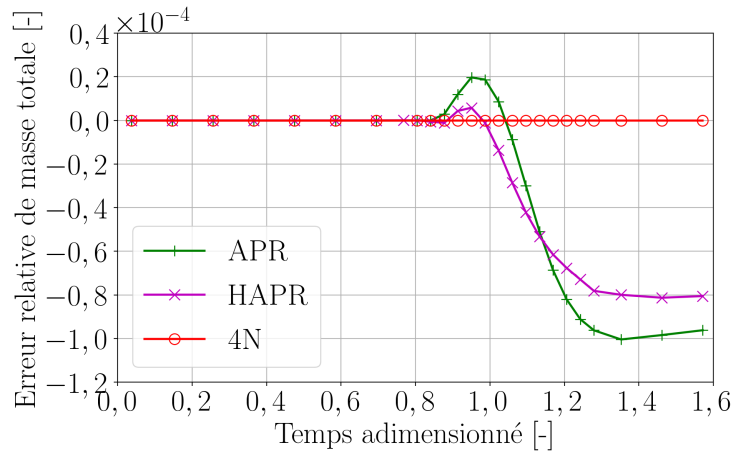


FIGURE 5.9 – Cas test numérique du tube à choc : profils d'erreur relative de la masse totale des particules SPH par rapport à la masse totale théorique de fluide. La solution entièrement raffinée 4N (cercles rouges), la solution raffinée localement APR (plus verts) et la solution raffinée localement HAPR (croix magenta), sont représentées.

Comme attendu mathématiquement, la résolution du système d'équations (2.7) par la méthode SPH standard avec discrétisation uniformément grossière  $N$  (non représentée) et discrétisation uniformément fine  $4N$  (cercles rouges) assure la conservation de la masse totale dans le temps. Cependant, la masse totale n'est pas conservée à tout instant pour les solutions avec raffinement local par APR et HAPR. Au départ ( $t_{\text{adim}} = 0, 0$ ), la discontinuité est initialisée en dehors de la région APR. Tant que la position du choc est éloignée des particules gardes, l'opérateur d'interpolation spatial utilisé pour calculer leurs champs est précis. Ainsi, la masse totale des particules SPH est conservée. Lorsque le choc franchit la frontière de la région APR ( $t_{\text{adim}} = 0, 4$ ), l'opérateur d'interpolation spatial induit une erreur dont l'amplitude est proportionnelle au pas de discrétisation en espace  $\Delta x$ . Dans un premier temps ( $0, 4 \leq t_{\text{adim}} < 0, 8$ ), les filles gardes dont les champs sont imprécis sont éloignées des filles SPH. Aucune fluctuation de la masse totale n'apparaît alors Fig. 5.9 puisque les filles gardes sont des particules non-matérielles. Ensuite ( $t_{\text{adim}} \geq 0, 8$ ), les erreurs induites sur les champs des particules gardes sont communiquées aux particules SPH par interaction SPH lors de l'évaluation de leurs dérivées spatiales. La masse totale n'est finalement plus conservée. La précision de l'opérateur d'interpolation spatial étant une fonction décroissante du paramètre de discrétisation, diminuer le pas de discrétisation

en espace des mères SPH assure une meilleure approximation de la discontinuité et réduit l'amplitude de l'erreur constatée (non présentée). Toutefois, au regard des pas en espace de la discrétisation grossière  $\Delta x_m = 5,00$  mm et fine  $\Delta x_d = 2,50$  mm, l'auteur est satisfait par l'amplitude de l'erreur monitorée. Les amplitudes des erreurs relatives observées pour l'APR (plus verts) et l'HAPR (croix magenta) sont du même ordre de grandeur.

Recourir aux filles hybrides plutôt qu'aux filles gardes réduit la fluctuation de masse totale. L'HAPR s'avère donc légèrement plus robuste que l'APR dans cette situation. Dans les deux cas, malgré la non-conservation de la masse totale, la pertinence est jugée plutôt robuste suite aux bonnes performances obtenues sur les profils de pression et de la norme du vecteur vitesse. Finalement, l'auteur est confiant en l'aptitude de l'HAPR à simuler des écoulements en description eulérienne.

### 5.2.2 Écoulement 2D dans un canal oscillant

L'analyse de la robustesse de l'APR et de l'HAPR est approfondie dans cette section grâce à la simulation lagrangienne 2D d'un canal oscillant. L'objectif est d'étudier la capacité de ces techniques multi-résolutions en espace à effectuer plusieurs cycles de création-destruction de filles gardes et d'activation-passivation de filles sans perdre en pertinence.

#### Paramétrisation du raffinement

La paramétrisation générale du canal et des pistons est détaillée section 3.2. En complément, le paramétrage utile aux simulations APR-SPH et HAPR-SPH est précisé ci-après. Le cas étudié est schématisé Fig. 5.10 avec deux niveaux de discrétisation.

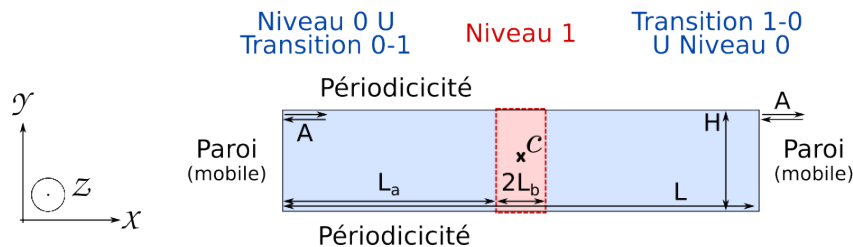


FIGURE 5.10 – Cas test numérique du canal oscillant : schématisation de la géométrie du problème avec une zone raffinée (Niveau 1, en rouge) immergée selon l'axe  $x$  dans le canal.

Le domaine de calcul et le domaine fluide ne sont pas confondus. À l'intérieur du domaine de calcul rectangulaire  $\Omega = [-L/2, L/2 + A] \times [-H/2, H/2] \subset \mathbb{R}^2$ , est disposée une région APR (resp. HAPR) rectangulaire immergée selon l'axe  $x$  dans le canal. Ainsi, il existe deux zones de transition disposées de part et d'autre de la zone raffinée (Niveau 1), i.e. Transition 0-1 disposée à gauche et Transition 1-0 disposée à droite selon l'axe  $x$ . La zone raffinée est rectangulaire, centrée sur le point  $c = (c_x, c_y) \in \Omega$ , d'épaisseur  $2L_b = 0,040$  m selon l'axe  $x$  et de hauteur  $H$  selon l'axe  $y$ . Elle est disposée à une distance  $L_a = 0,28$  m de la paroi de gauche. Les niveaux grossiers (Niveau 0  $\cup$  Transition 0-1 et Transition 1-0  $\cup$  Niveau 0) sont uniformément discrétisés initialement par un pavage cartésien régulier de mères SPH dont l'écart inter-particulaire est  $\Delta x_m = 5,00$  mm. De même, l'écart inter-particulaire initial des filles SPH discrétisant le niveau fin (Niveau 1) est  $\Delta x_d = 2,50$  mm. Ainsi, près de 2500 particules SPH sont manipulées initialement dans cette configuration. Dans ce qui suit, l'appellation APR (resp. HAPR) fait référence à la simulation SPH raffinée localement par technique APR (resp.



HAPR). De plus, la notation 4N fait référence à la simulation SPH standard N raffinée par technique APR avec une zone raffinée recouvrant entièrement le domaine de calcul. Dans ce cas, le domaine fluide est uniformément discrétisé initialement par un pavage cartésien régulier de filles SPH dont l'écart inter-particulaire est  $\Delta x_d = 2,50$  mm. Dans cette configuration, près de 8000 particules SPH sont manipulées.

La composition des zones de transition utilisée pour les simulations HAPR est la même que pour le cas du tube à choc et est donnée Tab. 5.1. L'épaisseur de la zone de transition de l'APR est définie de même égale à 2,70 fois le rayon de lissage  $R_h$  d'une mère SPH afin de pouvoir comparer équitablement la pertinence de l'APR et de l'HAPR.

Le cas représenté Fig. 5.10 manipule deux zones de transition, chacune composée d'une sous-zone Hybride juxtaposée à la zone raffinée. Une sous-zone Hybride est une portion rectangulaire du domaine  $\Omega$ , d'épaisseur  $L_c = \xi_{\text{Hybride}} R_h$  selon l'axe  $x$  et de hauteur  $H$  selon l'axe  $y$ . La fonction de couplage  $\Lambda_2 \in \mathcal{C}^2(\Omega, [0, 1])$  utilisée pour l'HAPR est la même que pour le cas du tube à choc et est définie Éq. (5.7).

Les simulations APR et HAPR ont été réalisées en description purement lagrangienne ( $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}$ ), obligeant ainsi les particules SPH à effectuer un pavage dynamique du domaine de calcul. Les particules se déplacent, se réorganisent ce qui s'accompagne d'instabilités numériques et d'erreurs d'approximation. Animées par le mouvement des pistons, les mères SPH effectuent périodiquement des va-et-vient dans la zone APR (resp. HAPR). En conséquence, des filles gardes sont régulièrement soit créées, soit détruites aux frontières des zones Transition 0-1 et Transition 1-0 avec le Niveau 0. Le pavage des zones de transition par ces filles non-matérielles est donc dynamique également, ce qui favorise l'émergence d'inhomogénéité dans la distribution des filles. Par ailleurs, l'amplitude  $A = 0,050$  m du mouvement des pistons est inférieure à l'épaisseur de la région APR (resp. HAPR), i.e.  $A < 2L_b + 2(\xi_{\text{Créa.}} + \xi_{\text{Halo Garde}} + \xi_{\text{Hybride}}) R_h$ . Des filles sont ainsi piégées dans cette région sans jamais être éliminées, ce qui tend à conserver les inhomogénéités de dispersion apparues. De plus, cette amplitude est supérieure à l'épaisseur  $2L_b = 0,040$  m du Niveau 1. Par conséquent, des filles traversent entièrement le Niveau 1. La communication des instabilités numériques du niveau fin vers le niveau grossier est ainsi favorisée. Dans l'ensemble, la répétition des cycles de création-destruction des filles gardes et d'activation-passivation des filles dans cette configuration, est propice à l'émergence d'instabilités numériques cumulatives et entretenues dans le temps. Ainsi paramétré, le cas du canal oscillant est particulièrement stressant pour les techniques multi-résolutions en espace, et s'avère donc parfaitement adapté pour étudier la robustesse de l'APR et de l'HAPR.

## Robustesse

La zone raffinée présentée Fig. 5.10 recouvre une surface de fluide constante dans le temps. Ainsi, pour toute technique multi-résolution en espace pertinente, le nombre de filles SPH manipulées dans le Niveau 1 est une quantité quasi-constante, proche du nombre de filles introduites initialement. Étudier l'évolution de cette métrique constitue un moyen efficace de comparer la robustesse de l'APR et de l'HAPR. L'évolution du nombre de filles SPH, adimensionné par le nombre de filles SPH introduites initialement dans le Niveau 1, est illustrée Fig. 5.11 pour vingt oscillations.

Il n'est pas illustré mais il a été observé que les solutions de référence N et 4N manipulent bien un nombre de particules SPH quasi-constant dans le temps dans cette zone d'intérêt.

Au contraire, la quantité de filles SPH présentent dans le Niveau 1 de la solution APR (ligne de pointillés verts) diverge rapidement et brutalement. La simulation s'arrête prématurément en moins de deux oscillations. Trop de filles gardes ont été créées car le processus de raffinement est réalisé sans tenir compte du voisinage d'une mère se raffinant. Sur la phase aller de la

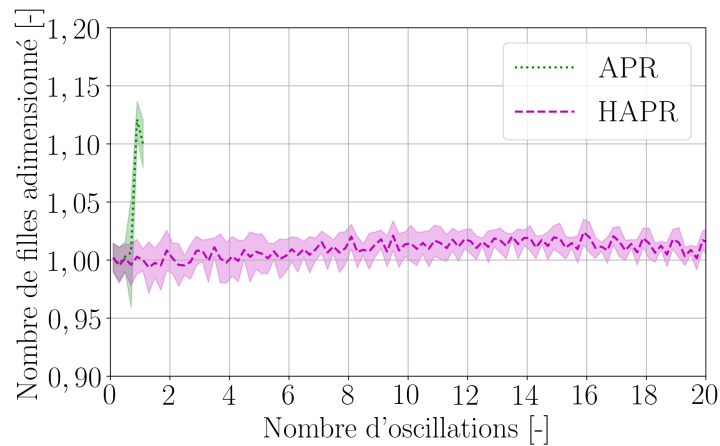


FIGURE 5.11 – Cas test numérique du canal oscillant : évolution du nombre de filles SPH dans le Niveau 1. Comparaison de la solution raffinée localement APR (ligne de pointillés verts) à la solution raffinée localement HAPR (ligne de tirets magenta). Chaque oscillation de piston est échantillonnée par cinq valeurs moyennes (ligne épaisse). L'enveloppe estompée représente l'intervalle de confiance autour de la valeur moyenne encadrée à plus ou moins l'écart-type près.

première oscillation, les particules gardes et SPH se déplacent de la gauche vers la droite sous l'impulsion des pistons. Ainsi, le voisinage d'une mère se raffinant est vide de filles gardes et le processus de raffinement s'opère convenablement. Au cours de la phase retour de cette même oscillation, le déplacement des pistons change de sens ce qui oblige les mères SPH proches de la paroi de droite à se déplacer de la droite vers la gauche, tandis que les particules gardes et SPH éloignées de cette paroi poursuivent un déplacement de gauche à droite par inertie. Dans cette situation, le voisinage d'une mère se raffinant n'est pas systématiquement vide de filles gardes et le processus de raffinement de l'APR conduit à une sur-crédation de filles localement. La distribution des filles gardes devient alors inhomogène. Cette configuration dégénérée est ensuite transportée dans le Niveau 1, déstabilisant la méthode. L'oscillation suivante entretient la dégénérescence du pavage global de la région APR qui présente alors des zones numériquement sous-peuplées (des trous) ou au contraire sur-peuplées (des amas) de particules, en total désaccord avec la physique de l'écoulement au point d'aboutir à l'arrêt soudain de la simulation par le solveur.

Par comparaison aux résultats obtenus avec l'APR, l'HAPR (ligne de tirets magenta) améliore significativement la stabilité. En effet, la simulation HAPR va à son terme et le nombre de filles SPH localisées dans le Niveau 1 présente peu d'évolution. Par simplicité, ce bon comportement est seulement illustré pour une durée de vingt oscillations Fig. 5.11 mais celui-ci perdure au-delà. Une simulation allant jusqu'à soixante oscillations a été effectuée pour le confirmer. L'introduction de filles hybrides capables de se réorganiser entre elles combinée à l'utilisation du schéma de raffinement destructif tenant compte du voisinage d'une mère se raffinant a ainsi permis une amélioration importante de la robustesse. D'une part, le schéma de raffinement destructif limite l'apparition d'inhomogénéités dans les zones de transition au cours du raffinement des mères SPH. D'autre part, les filles hybrides héritant de la capacité des particules SPH à se réorganiser spatialement amortissent les inhomogénéités résiduelles. Les filles hybrides assurent de plus la continuité spatiale des propriétés physiques des filles gardes vers le statut de filles SPH. L'émergence d'instabilités numériques dues à l'activation d'une fille non-matérielle (dégénérée ou non) s'en trouve d'autant plus contrôlée. Dans l'ensemble, le pavage de la région HAPR est moins sensible aux dégénérescences induites par le mouvement des pistons. Un pa-



vage de qualité est ainsi maintenu au cours des oscillations suivantes, et ce jusqu'à la fin de la simulation.

Cependant, la pertinence de l'HAPR sur le canal oscillant n'est pas totalement robuste. Comme illustré Fig. 5.12, les simulations de références N (non présentée) et 4N (ligne continue rouge) assurent la conservation de la masse totale dans le temps.

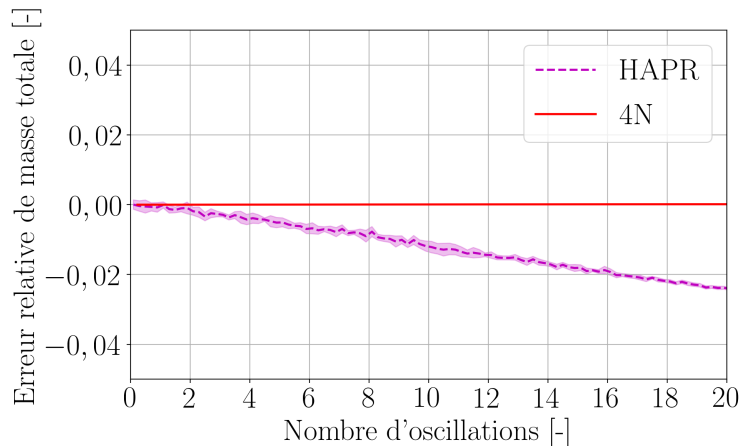
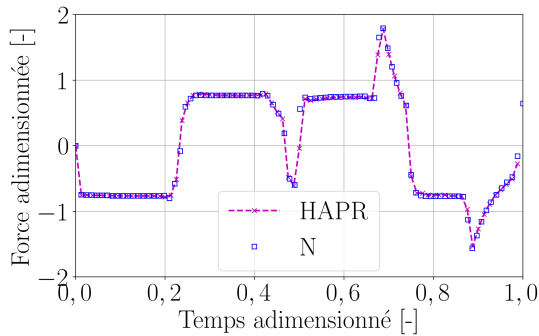


FIGURE 5.12 – Cas test numérique du canal oscillant : profils d'erreur relative de la masse totale des particules SPH par rapport à la masse totale théorique de fluide. La solution entièrement raffinée 4N (ligne continue rouge) et la solution raffinée localement HAPR (ligne de tirets magenta) sont représentées. Chaque oscillation de piston est échantillonnée par cinq valeurs moyennes (ligne épaisse). L'enveloppe estompée représente l'intervalle de confiance autour de la valeur moyenne encadrée à plus ou moins l'écart-type près.

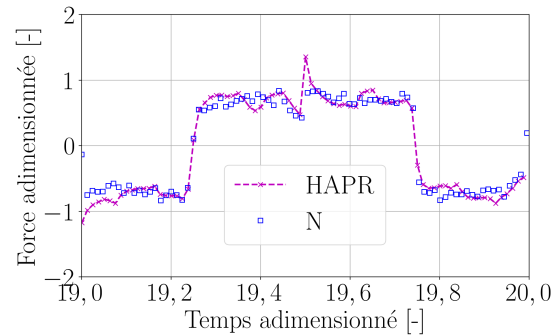
Au contraire, la masse totale des particules SPH présent dans le canal n'est pas conservée avec l'HAPR (ligne de tirets magenta) car une décroissance régulière de cette quantité est numériquement constatée. En fin de simulation, après vingt oscillations, la perte est conséquente et représente plus de 2% de la masse totale initiale. Une telle diminution de la masse totale dans le temps affaiblit graduellement la précision des opérateurs SPH.

Vraisemblablement, la divergence observée Fig. 5.12 est due à deux contributions principales. Premièrement, l'opérateur d'interpolation spatial utilisé pour calculer les champs des filles gardes introduit une erreur lors de l'approximation des discontinuités générées par les oscillations des pistons. D'après les résultats obtenus Fig. 5.9 sur le cas du tube à choc, le raffinement par HAPR d'une seule onde de choc résulte en une erreur en masse totale dont l'amplitude est de l'ordre de  $10^{-4}$ . En supposant qu'une telle erreur soit introduite deux fois par oscillation, le cumul sur vingt oscillations aboutirait à une erreur relative en masse totale dont l'amplitude serait environ 0,4%. Dans l'ensemble, une telle erreur d'approximation sur la masse volumique des filles gardes ne contribuerait qu'à hauteur de 20% à l'erreur globale observée Fig. 5.12. C'est une source d'erreur importante, mais il ne s'agit probablement pas de la contribution principale. Deuxièmement, l'évolution du volume des particules gardes peut également générer une erreur impactant la masse totale. Chaque particule garde met à jour son volume selon la même loi d'évolution que les particules SPH, donnée Éq. (2.7). Pour cela, une approximation de la divergence du champ de transport des particules SPH par méthode MLS est utilisée. À l'instar du traitement de la masse volumique, l'opérateur d'interpolation spatial utilisé est donc susceptible d'introduire une erreur sur les volumes des particules gardes. L'amplitude de cette erreur est difficile à estimer, mais un tel choix est remis en question au chapitre 7.

Fig. 5.13a (resp. Fig. 5.13b) présente le profil de la force normale aux parois  $F_{2D}^{adim}$  obtenu pour la solution HAPR au cours de la première (resp. dernière) période simulée. Ces profils sont échantillonnés régulièrement par quatre-vingt instants.



(a) Première période d'oscillation simulée.



(b) Dernière période d'oscillation simulée.

FIGURE 5.13 – Cas test numérique du canal oscillant : profils de la force normale aux parois au cours d'une période d'oscillation

Dans l'ensemble, la performance de la solution HAPR est jugée conforme à celle de la référence N. Pour comparer leurs résultats, on utilise les mesures sur la puissance élémentaire de la force normale aux parois définies section 3.2, i.e. le travail adimensionné et la norme intégrale 1 de la puissance élémentaire adimensionnée. Dans les deux cas, une approximation de l'intégrale est obtenue par méthode des rectangles sur l'échantillonnage temporel choisi précédemment. Les résultats obtenus pour la simulation N sont indiqués Tab. 3.2. Les erreurs relatives (RE) obtenues pour ces deux métriques avec la simulation HAPR sont indiquées Tab. 5.2. Par exemple, l'erreur relative du travail est calculée selon  $(\text{Travail [N]} - \text{Travail [HAPR]}) / \text{Travail [N]}$ .

<i>Simulations</i>	<b>Première période</b>		<b>Vingtième période</b>	
	<i>RE Travail</i> [-]	<i>RE Norme 1</i> [-]	<i>RE Travail</i> [-]	<i>RE Norme 1</i> [-]
HAPR	15%	1%	-129%	-6%

TABLE 5.2 – Cas test numérique du canal oscillant : erreur relative des mesures sur la puissance élémentaire de la force normale aux parois de la solution HAPR par rapport à la référence N.

La norme intégrale 1 de la puissance élémentaire adimensionnée permet de quantifier les erreurs commises sur l'approximation de la force normale en paroi de l'HAPR par rapport à N. L'erreur relative calculée pour l'HAPR est jugée faible à l'issue de la première période et acceptable pour la dernière période. Par ailleurs, le travail adimensionné permet de quantifier l'énergie fournie par l'écoulement aux pistons sur une durée finie. Par conséquent, l'HAPR prédit une énergie fournie jugée conforme à celle de la référence N pour la première période mais significativement différente pour la dernière période. Or, au cours de la simulation, la solution HAPR présente une perte régulière de masse totale. En fin de simulation, celle-ci est de l'ordre de 2% par rapport à sa valeur initiale. Ainsi, la valeur du travail prédite par l'HAPR semble de moins en moins similaire à celle attendue à mesure que la perte de masse totale s'accroît.

L'auteur est confiant en l'aptitude de l'APR et de l'HAPR à simuler des écoulements en description lagrangienne lorsque l'opérateur d'interpolation spatial utilisé pour calculer les champs des particules gardes est précis, i.e. lorsque les zones de transition peuvent être disposées loin des forts gradients physiques. La simulation lagrangienne d'un canal oscillant 2D illustre qu'il n'est pas toujours possible de l'assurer. Dans ce cas, l'HAPR s'avère bien plus robuste que l'APR.

D'une part, l'APR est jugée non-pertinente pour mener une telle simulation car le nombre de particules SPH dans la zone raffinée n'est pas maîtrisé. D'autre part, la pertinence de l'HAPR est plutôt robuste sur les premières oscillations mais fragile par la suite à cause de la non-conservation de la masse totale. Toutefois, les écoulements mis en jeux dans les applications industrielles ciblées présentent une dynamique bien plus rapide que celle du canal oscillant étudiée. Les conséquences de la non-conservation constatée, sur la qualité d'une simulation dont les temps caractéristiques sont plus courts, est à caractériser.

### 5.2.3 Impact 2D d'un jet plan sur une plaque plane

Dans cette section, la simulation HAPR-SPH d'un jet plan impactant une plaque plane en incidence normale est réalisée en description lagrangienne. L'objectif est double. D'une part, poursuivre l'analyse de la pertinence de l'HAPR sur un cas dont les résultats sont transposables au cas industriel de la simulation d'une turbine Pelton. D'autre part, étudier la sensibilité numérique de l'HAPR à la paramétrisation des sous-zones Halo Garde ( $\xi_{\text{Halo Garde}}$ ) et Hybride ( $\xi_{\text{Hybride}}$ ) dont le rôle est de maintenir la consistance du schéma numérique.

#### Paramétrisation du raffinement

La paramétrisation générale du problème est détaillée section 3.4. En complément, le paramétrage utile aux simulations HAPR-SPH est précisé ci-après. Le cas étudié est schématisé Fig. 5.14 avec une zone raffinée recouvrant entièrement la partie inférieure du domaine de calcul, dont la plaque. Ainsi, une mère SPH se raffine exactement une fois au cours de la simulation et les mères gardes et filles SPH du Niveau 1 sont éliminées sans procéder au dé-raffinement. Par conséquent, seule la procédure de raffinement intervient dans l'analyse de la pertinence de l'HAPR dans cette configuration.

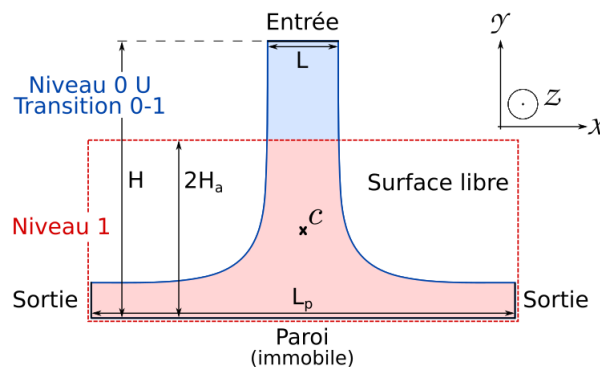


FIGURE 5.14 – Cas test numérique du jet plan : schématisation de la géométrie du problème avec une zone raffinée (Niveau 1, en rouge) recouvrant entièrement la partie inférieure du domaine de calcul, dont la plaque.

Le domaine de calcul  $\Omega$  et le domaine fluide ne sont pas confondus. À l'intérieur du domaine rectangulaire  $\Omega = [-L_p/2, L_p/2] \times [0, H] \subset \mathbb{R}^2$ , est disposée une région HAPR rectangulaire définie comme l'union de la zone de transition (Transition 0-1, non représentée) et de la zone raffinée (Niveau 1, en rouge). La zone raffinée est également rectangulaire, centrée sur le point  $c = (c_x, c_y) \in \Omega$ , d'épaisseur  $L_p$  selon l'axe  $x$  et de hauteur  $2H_a$  selon l'axe  $y$ . Deux positions de l'interface de raccord entre la zone raffinée et la zone de transition sont choisies pour étudier la sensibilité de l'HAPR au positionnement de la zone de transition dans l'écoulement, i.e. une

interface dite haute ( $2H_a/L = 1,7$ ) et interface dite basse ( $2H_a/L = 0,7$ ). Considérer l'interface haute permet de disposer Transition 0-1 dans une zone de l'écoulement présentant de faibles gradients de pression et de vitesse (cf Fig. 3.23) sur l'axe du jet. Réciproquement, utiliser l'interface basse permet de disposer Transition 0-1 dans une zone du jet où ces gradients sont forts.

Les simulations sont réalisées en description purement lagrangienne, i.e. des particules sont régulièrement créées au niveau de l'entrée et éliminées par les sorties. Le pavage du domaine fluide est donc réalisé dynamiquement. Dans ce qui suit, l'appellation HAPR fait référence à la simulation SPH raffinée localement par technique HAPR. Les mères SPH du niveau grossier (Niveau 0  $\cup$  Transition 0-1) sont créées par la condition d'entrée selon un pavage cartésien régulier dont l'écart inter-particulaire est  $\Delta x_m = 1,00$  mm. Par conséquent, l'écart inter-particulaire des filles SPH discrétisant le niveau fin (Niveau 1) est  $\Delta x_d = 0,50$  mm. Cela représente plus de 15000 particules SPH discrétisant le jet en régime permanent pour la configuration d'interface basse et près de 20000 particules SPH lorsque l'interface est haute.

Pour chacune des deux positions de l'interface de raccord, il convient de caractériser la sensibilité de l'HAPR à la paramétrisation de Transition 0-1. Dans ce but, les différentes compositions considérées sont présentées Tab. 5.3.

Composition	$\xi_{\text{Supp.}}$	$\xi_{\text{Créa.}}$	$\xi_{\text{Halo Garde}}$	$\xi_{\text{Hybride}}$
C1			1,00	1,00
C2	0,35	0,35	3,00	1,00
C3			1,00	3,00

TABLE 5.3 – Cas test numérique du jet plan : composition de la zone de transition de l'HAPR.

Les résultats sont labellisés HAPR-C1 (resp. C2, C3) lorsque la composition C1 (resp. C2, C3) de Transition 0-1 est utilisée. Dans tous les cas, les facteurs  $\xi_{\text{Créa.}}$  et  $\xi_{\text{Supp.}}$  ont été choisis de façon à satisfaire les relations ad hoc (5.4) et (5.6), respectivement. La composition C1 est similaire à celle utilisée précédemment pour la simulation du tube à choc (section 5.2.1) et du canal oscillant (section 5.2.2). Elle constitue la composition de référence pour l'HAPR. Le facteur  $\xi_{\text{Halo Garde}}$  déterminant l'épaisseur de la sous-zone Halo Garde est choisi égal à la borne inférieure de la contrainte (5.1). La sous-zone Hybride est définie d'épaisseur égale à la sous-zone Halo Garde par simplicité, i.e.  $\xi_{\text{Hybride}} = \xi_{\text{Halo Garde}}$ . Par ailleurs, la composition C2 présente une sous-zone Halo Garde trois fois plus épaisse que la composition de référence. Cette augmentation est jugée significative et il ne semble pas souhaitable d'appliquer un grossissement plus important qu'un facteur trois pour des raisons de complexité computationnelle. Cette composition permet d'étudier la sensibilité des résultats de l'HAPR à la paramétrisation de la sous-zone Halo Garde dont le rôle est d'assurer la consistance du schéma numérique. Enfin, la composition C3 présente une sous-zone Hybride trois fois plus épaisse que celle de la composition de référence. Cette extension significative permet d'étudier la sensibilité des résultats de l'HAPR à la paramétrisation de la sous-zone Hybride dont le rôle est de lisser la transition entre les statuts de fille garde et fille SPH pour plus de stabilité lors du raffinement.

Puisque le cas présenté Fig. 5.14 manipule une zone raffinée recouvrant entièrement la partie inférieure du domaine de calcul, une seule sous-zone Hybride est introduite en amont dans l'écoulement. Il s'agit d'une portion rectangulaire du domaine  $\Omega$ , juxtaposée à la zone raffinée, de largeur  $L_p$  selon l'axe  $x$  et de hauteur  $H_b = \xi_{\text{Hybride}} R_h$  selon l'axe  $y$ . La fonction de couplage  $\Lambda_2 \in \mathcal{C}^2(\Omega, [0, 1])$  utilisée est définie Éq. (5.8) quelle que soit la composition de Transition 0-1

considérée.

$$\Lambda_2 : \Omega \rightarrow [0, 1]$$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 0, & \text{si } |y - c_y| \leq H_a, \\ 1, & \text{si } |y - c_y| \geq H_a + H_b, \\ \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{9}{8} \cos \left( \pi \frac{|y - c_y| - H_a}{H_b} \right) + \frac{1}{8} \cos \left( 3\pi \frac{|y - c_y| - H_a}{H_b} \right) \right], & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.8)$$

### Performance et robustesse dans le cas de l'interface de raccord haute

Dans un premier temps, la pertinence de l'HAPR est analysée en considérant une région HAPR avec l'interface de raccord haute ( $2H_a/L = 1, 7$ ). Cette configuration permet de disposer Transition 0-1 dans une zone de l'écoulement présentant des gradients faibles sur l'axe du jet. Dans cette situation, il s'agit de vérifier si la performance de l'HAPR est similaire à celle de la simulation de référence 4N quelle que soit la composition de Transition 0-1 utilisée.

De par les similitudes observées entre les résultats des différentes simulations, seuls ceux de HAPR-C3 sont illustrés dans les figures qui suivent par soucis de clarté. Toutefois, les données recueillies sur les simulations HAPR-C1 et HAPR-C2 sont synthétisées Tab. 5.4 et Tab. 5.5. La composition HAPR-C3 est choisie car sa performance globale est jugée légèrement meilleure, comme justifié Tab. 5.7.

Comparons tout d'abord les prédictions de la surface totale recouverte en régime permanent par les particules SPH discrétisant l'écoulement, obtenues des simulations N, 4N et HAPR. La performance des différentes simulations HAPR est quantifiée et comparée Tab. 5.4 aux autres compositions HAPR et aux références numériques.

<i>Simulations</i>	<i>RE Surface</i>
N	4,9%
4N	2,7%
HAPR-C1	2,9%
HAPR-C2	3,1%
HAPR-C3	3,1%

TABLE 5.4 – Cas test numérique du jet plan : erreur relative des simulations SPH standard et HAPR avec interface de raccord haute.

En régime permanent, la surface totale d'une simulation HAPR présente une erreur relative d'environ 3% par rapport à la valeur théorique  $\mathcal{A}$ . Cet ordre de grandeur est inférieur à l'erreur de 5% obtenue avec la discrétisation uniformément grossière N et équivalent à l'erreur de 2,7% obtenue avec la discrétisation uniformément fine 4N. Disposer ainsi l'interface de raccord dans une zone de l'écoulement présentant des gradients de pression et de vitesse faibles assure à l'HAPR de reproduire fidèlement le comportement de la solution 4N sans pour autant nécessiter une discrétisation uniformément fine du domaine fluide.

L'analyse est maintenant focalisée sur les champs de pression et de vitesse. Dans ce qui suit, en raison des similitudes entre les résultats en pression et vitesse, seuls ceux en pression sont présentés le cas échéant. Fig. 5.15 illustre le coefficient de pression  $C_p = p/(\frac{1}{2}\rho_0 U^2)$  dans le

domaine fluide de la simulation HAPR-C3, moyenné sur une durée  $T_{\text{carac}}$  en régime permanent.

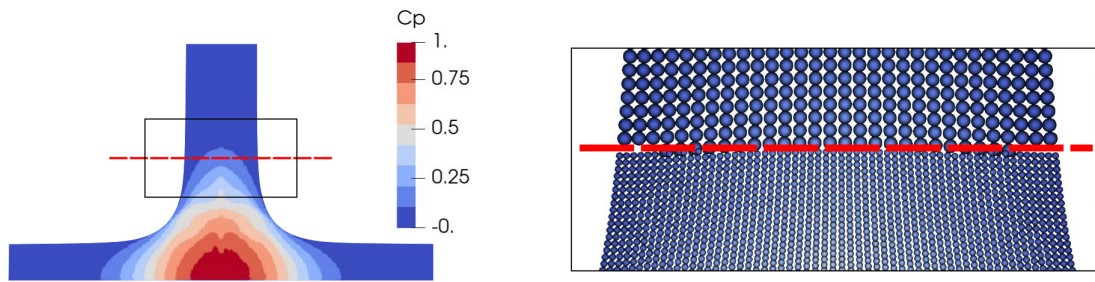
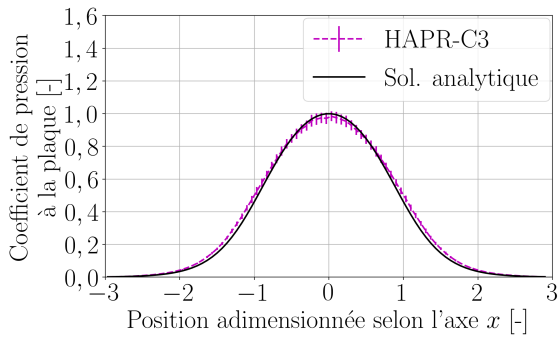


FIGURE 5.15 – Cas test numérique du jet plan : champ obtenu avec la discrétisation HAPR-C3 et l’interface de raccord haute. Visualisation du champ de pression moyen en régime permanent et de la distribution particulaire au voisinage du raccord à  $t_{\text{adim}} = 6,5$ .

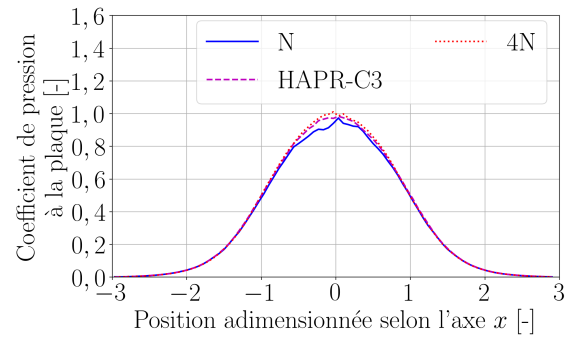
Dans la partie amont de l’écoulement, au dessus de la zone de surpression, se sont les mères SPH qui véhiculent l’information physique. Le coefficient de pression est régulier car ces particules sont relativement bien ordonnées selon une organisation cartésienne induite par l’injection. La jonction entre mères SPH et filles SPH s’opère dans une région où le coefficient de pression est faible, mais non nul. Le pavage de l’espace est jugé de qualité satisfaisante car la transition entre discrétisation grossière et fine est régulière et n’introduit pas de discontinuité. Dans la zone où la surface libre s’évase pour former un coude, se sont les filles SPH qui sont actives. Le champ de pression moyen est bruité en raison du désordre particulaire au voisinage étendu du point d’arrêt. En dehors de cette zone, les particules sont ordonnées selon un arrangement hexagonal compact assurant un pavage de l’espace satisfaisant et qui conduit à des champs réguliers. Par comparaison avec les résultats présentés Fig. 3.21, on note que le champ global obtenu avec l’HAPR-C3 est aussi régulier que celui obtenu avec la discrétisation 4N. Les bonnes performances de l’HAPR, déduites des considérations précédentes sur la surface totale, sont confirmées par cette métrique. Diminuer localement la taille des particules utilisées améliore la précision (performance) et rend la simulation moins sensible au bruit numérique car la distribution de particules présente moins de désordre (robustesse). Ainsi, la pertinence de l’HAPR est jugée meilleure que celle de la simulation de référence N et équivalente à celle de la simulation 4N.

En particulier, il est possible de se concentrer sur un axe horizontal (ou vertical) du champ global présenté Fig. 5.15 afin d’en étudier le profil. Pour commencer, les données en pression et vitesse en paroi le long de l’axe horizontal  $y/L = 0$  sont extraites. Pour éviter les redites, seule l’analyse des données de pression est présentée. Le profil du coefficient de pression moyen en paroi obtenu avec HAPR-C3 est représenté Fig. 5.16a et est comparé au profil théorique. Ce résultat est fidèle à celui de la solution analytique. Toutefois, la moyenne du coefficient de pression de la simulation HAPR-C3 est sous-estimée légèrement par rapport à la solution analytique au cœur de la zone d’impact du jet. Par ailleurs, les écarts-types illustrent un bruit relativement faible dans cette zone par rapport au profil Fig. 3.22a obtenu avec la discrétisation N. L’amplitude de ce bruit est similaire à celle obtenue Fig. 3.22b avec la discrétisation 4N. Fig. 5.16b représente le coefficient de pression moyen en paroi de la simulation HAPR-C3, que l’on compare aux profils des simulations de référence N et 4N. Le profil issu de la solution HAPR-C3 est intermédiaire aux solutions de référence. En particulier, il constitue une meilleure approximation que N de la solution analytique au cœur de la zone d’impact du jet. Cependant,





(a) Comparaison avec la solution analytique.



(b) Comparaison avec les discrétisations uniformes N et 4N.

FIGURE 5.16 – Cas test numérique du jet plan : profil du coefficient de pression moyen au niveau de la plaque obtenu avec la discrétisation HAPR-C3 et l'interface de raccord haute. L'intervalle de confiance encadrant la moyenne temporelle à plus ou moins l'écart-type près est représenté Fig. 5.16a.

par rapport à la solution 4N, HAPR-C3 est légèrement moins fidèle à la solution analytique. Afin de quantifier ces écarts, les données de l'indicateur DMSAE sur la pression sont répertoriées Tab. 5.5 qui confirme les interprétations précédentes faites à partir de Fig. 5.16b.

<i>Simulations</i>	<i>DMSAE <math>C_p^{y=0}</math></i>
N	0,070%
4N	0,035%
HAPR-C1	0,041%
HAPR-C2	0,036%
HAPR-C3	0,044%

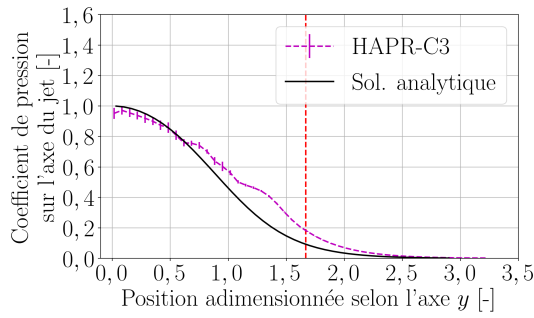
TABLE 5.5 – Cas test numérique du jet plan : DMSAE sur la pression des simulations SPH standard et HAPR avec interface de raccord haute.

En régime permanent, la DMSAE sur la pression associée à la simulation HAPR-C3 est d'environ 0,044%. Cette valeur est intermédiaire aux simulations de références N (0,070%) et 4N (0,035%). De plus, la simulation HAPR-C3 présente une DMSAE plus proche de 4N que de N. La pertinence de l'HAPR-C3 est donc jugée meilleure que celle de la simulation N car plus fidèle à la solution analytique et moins bruitée. Cette conclusion se généralise à l'ensemble des simulations HAPR, quelle que soit la composition de Transition 0-1 considérée. Les données recueillies sur les simulations HAPR-C1 et HAPR-C2 sont également fournies Tab. 5.5. Ainsi, dans cette situation, la performance de l'HAPR se montre robuste au choix de la composition de Transition 0-1.

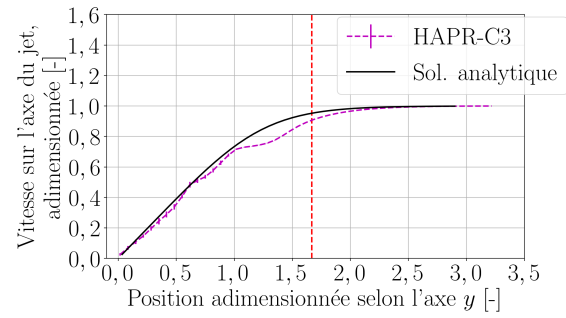
Pour aller plus loin dans l'interprétation des résultats, il est utile d'étudier le comportement physique le long de l'axe du jet. Ainsi, les données en pression et vitesse le long de l'axe vertical  $x/L = 0, 0$  sont extraites.

D'une part, le coefficient de pression  $C_p^{x=0}$  moyenné sur une durée  $T_{\text{carac}}$  en régime permanent est utilisé. Fig. 5.17a représente ce coefficient pour la simulation HAPR-C3 que l'on compare à la solution analytique.

On re-distingue dans ce profil les trois zones identifiées section 3.4 pour les références N et 4N. Proche de la zone d'injection ( $y/L > 2, 5$ ), le gradient de pression est quasi-nul. Le bruit numérique est faible dans cette zone. Le profil moyen obtenu avec la simulation HAPR-C3 est



(a) Profil du coefficient de pression.



(b) Profil de la norme du vecteur vitesse adimensionnée.

FIGURE 5.17 – Cas test numérique du jet plan : profils sur l’axe du jet obtenus avec la discrétisation HAPR-C3 et l’interface de raccord haute. L’intervalle de confiance encadrant la moyenne temporelle à plus ou moins l’écart-type près est représenté. La frontière du Niveau 1 est matérialisée par une ligne verticale discontinue de tirets rouges.

ainsi similaire à celui prédit par la solution analytique. Pour  $1,0 < y/L < 2,5$ , le gradient de pression augmente progressivement. En particulier, cette portion contient l’interface du raccord qui est positionnée en  $y/L = 1,7$ . Le profil moyen obtenu avec la simulation HAPR-C3 s’écarte de la solution analytique mais le bruit numérique demeure faible. Un tel comportement a été illustré Fig. 3.23a pour les références N et 4N. L’écart du profil HAPR-C3 à la solution analytique est équivalent à celui observé pour la référence 4N. En dépit du positionnement de l’interface de raccord dans cette zone, la performance de l’HAPR-C3 est jugée satisfaisante et concordante avec la référence 4N. Enfin dans la zone  $0,0 < y/L < 1,0$ , le gradient de pression diminue progressivement pour finalement s’annuler au niveau du point d’impact. En particulier, la valeur obtenue Fig. 5.17a en  $y/L = 0,0$  est bien égale à celle présentée Fig. 5.16a en  $x/L = 0,0$ . Le profil moyen obtenu avec la simulation HAPR-C3 est jugé cohérent avec celui prédit par la solution analytique. Le bruit numérique est ici plus important que par ailleurs dans l’écoulement. Toutefois, la volatilité observée est équivalente à celle de la référence 4N.

D’autre part, complétons l’analyse en regardant le comportement de la vitesse sur ces mêmes trois zones. Pour cela, la vitesse moyennée sur une durée  $T_{\text{carac}}$  en régime permanent et adimensionnée par la vitesse d’injection  $U$  est représentée Fig. 5.17b. Proche de la zone d’injection ( $y/L > 2,5$ ), le gradient de vitesse est quasi-nul. Le profil moyen obtenu avec la simulation HAPR-C3 est similaire à celui prédit par la solution analytique. Pour  $1,0 < y/L < 2,5$ , le gradient de vitesse augmente progressivement et le profil moyen obtenu avec la simulation HAPR-C3 s’écarte de la solution analytique. Néanmoins, cet écart est similaire et d’amplitude intermédiaire à ceux constatés Fig. 3.23b sur les références N et 4N. Enfin dans la zone  $0,0 < y/L < 1,0$ , le gradient de vitesse est maximal et relativement constant. Le profil moyen obtenu avec la simulation HAPR-C3 est similaire à celui prédit par la solution analytique. En particulier, la vitesse s’annule en  $y/L = 0,0$ . Sur l’axe vertical  $x/L = 0,0$  dans son ensemble, les écarts-types illustrent un faible bruit sur la vitesse.

Finalement, dans cette configuration où l’interface de raccord est haute, la performance globale de l’HAPR est jugée meilleure que celle de la simulation N quelle que soit la composition de Transition 0-1 utilisée. De plus, la performance de l’HAPR est jugée similaire à celle de la solution de référence 4N sans pour autant nécessiter une discrétisation uniformément fine du domaine fluide.



## Performance et robustesse dans le cas de l'interface de raccord basse

À présent, la pertinence de l'HAPR est analysée en considérant une région HAPR avec l'interface de raccord basse ( $2H_a/L = 0,7$ ). Cette configuration permet de disposer Transition 0-1 dans une zone de l'écoulement présentant des gradients forts sur l'axe du jet. Dans cette situation, il s'agit d'étudier la sensibilité numérique de l'HAPR à la composition de Transition 0-1 utilisée et de vérifier si la performance de l'HAPR peut être similaire à celle des références N et 4N.

Comme précédemment, de par les similitudes observées entre les résultats des simulations HAPR, seuls ceux de HAPR-C3 sont illustrés dans ce qui suit.

Tout d'abord, comparons les prédictions de la surface totale recouverte en régime permanent par les particules SPH discrétisant l'écoulement obtenues des simulations N, 4N et HAPR-C3. Le régime permanent est jugé établi pour  $t_{\text{adim}} > 5,5$ . La performance de HAPR-C3 est quantifiée et comparée Tab. 5.6 aux autres compositions HAPR et aux références numériques.

<i>Simulations</i>	<i>RE Surface</i>
N	4,9%
4N	2,7%
HAPR1-C1	10,36%
HAPR1-C2	11,47%
HAPR1-C3	9,91%

TABLE 5.6 – Cas test numérique du jet plan : erreur relative des simulations SPH standard et HAPR avec interface de raccord basse.

En régime permanent, quelle que soit la composition considérée, la surface totale d'une simulation HAPR présente une erreur relative d'environ 10% par rapport à la valeur théorique  $\mathcal{A}$ . Cet ordre de grandeur est nettement supérieur aux amplitudes de 2,7% et 5% d'erreurs obtenues avec la discrétisation uniformément fine 4N et uniformément grossière N, respectivement. La surface totale couverte par l'écoulement situé à proximité de la paroi est plus importante pour les simulations HAPR que pour les références numériques. Un tel écart semble provenir d'une différence des champs physiques dans cette zone. Par comparaison avec les références, le comportement de l'écoulement simulé par l'HAPR tend à limiter l'évacuation des particules au niveau des sorties ce qui justifie le gain en surface couverte constaté. L'HAPR ne constitue alors pas une approximation fidèle du comportement des solutions de références N et 4N dès lors que l'interface de raccord est disposée dans une zone de l'écoulement présentant de forts gradients de pression et de vitesse.

L'analyse est maintenant focalisée sur les champs de pression et de vitesse dans le jet. Dans ce qui suit, en raison des similitudes entre les résultats en pression et vitesse, seuls ceux en pression sont présentés le cas échéant. Fig. 5.18 illustre le coefficient de pression  $C_p = p/(\frac{1}{2}\rho_0 U^2)$  dans le domaine fluide de la simulation HAPR-C3, moyenné sur une durée  $T_{\text{carac}}$  en régime permanent.

Dans la partie amont de l'écoulement, au dessus de la zone de surpression, se sont les mères SPH qui véhiculent l'information physique. Le coefficient de pression est régulier car ces particules sont relativement bien ordonnées selon une organisation cartésienne. Le coefficient de pression augmente ensuite progressivement et la surface libre commence alors à s'évaser pour former un coude. La jonction entre mères SPH et filles SPH s'opère ainsi dans une région où le coefficient de pression est relativement fort. Le pavage de l'espace formé par les mères SPH est

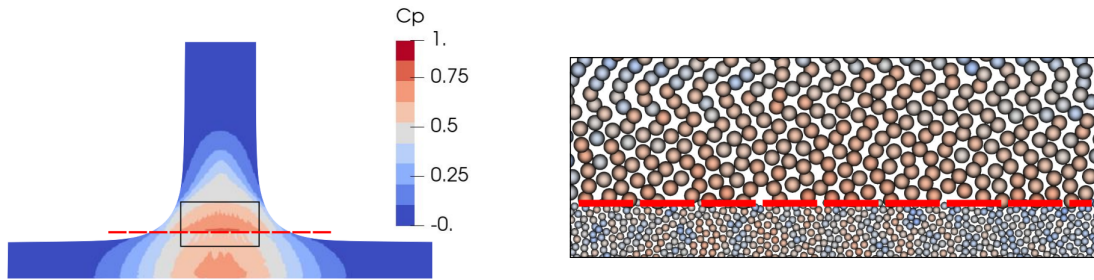
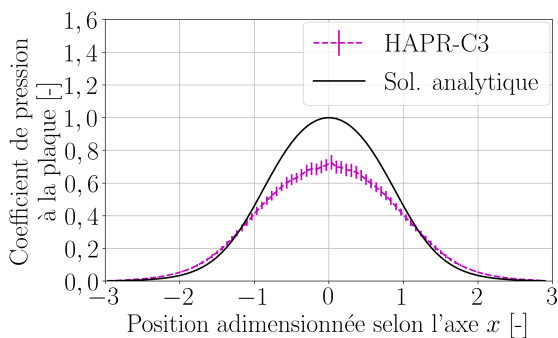


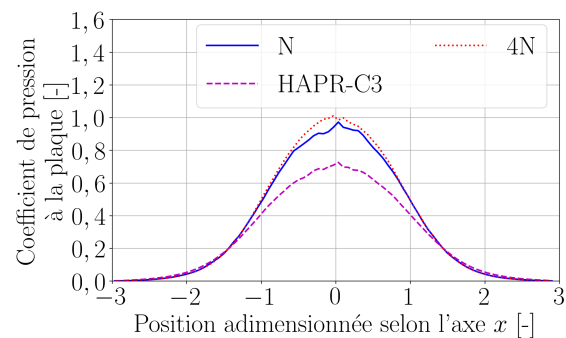
FIGURE 5.18 – Cas test numérique du jet plan : champ obtenu avec la discrétisation HAPR-C3 et l'interface de raccord basse. Visualisation du champ de pression moyen en régime permanent et de la distribution particulière au voisinage du raccord à  $t_{\text{adim}} = 6,5$ .

inhomogène au centre du jet. Il est jugé de qualité insatisfaisante pour y réaliser la transition entre discrétisation grossière et fine. De par l'importance de l'irrégularité dans cette zone, les filles hybrides ne se sont pas suffisamment réorganisées pour la corriger efficacement. Le pavage des filles SPH est alors également inhomogène, ce qui est source d'erreurs numériques et introduit une discontinuité des champs physiques. Au voisinage du point d'impact sur la paroi, ce sont les filles SPH qui sont actives. Le champ de pression moyen est bruité en raison du désordre particulaire. En dehors de cette zone, les filles sont ordonnées selon un arrangement hexagonal compact assurant un pavage de l'espace satisfaisant et qui conduit à des champs réguliers. Par comparaison avec les résultats présentés Fig. 3.21, on note que le champ global obtenu avec l'HAPR-C3 est moins régulier que ceux obtenus avec les discrétisations N et 4N. Quelle que soit la composition considérée, procéder au raffinement des mères SPH dans une zone où leur pavage est trop irrégulier détériore la précision (moins performante) et rend la simulation sensible au bruit numérique car la distribution résultante des filles SPH présente plus de désordre (moins robuste). Dans cette situation où l'interface de raccord est basse, l'HAPR est jugée non-pertinente quant à mener une telle simulation.

Les données de pression en paroi le long de l'axe horizontal  $y/L = 0$  sont étudiées. Le profil du coefficient de pression moyen en paroi obtenu avec HAPR-C3 est représenté Fig. 5.19a et est comparé au profil théorique.



(a) Comparaison avec la solution analytique.



(b) Comparaison avec les discrétisations uniformes N et 4N.

FIGURE 5.19 – Cas test numérique du jet plan : profil du coefficient de pression moyen au niveau de la plaque obtenu avec la discrétisation HAPR-C3 et l'interface de raccord basse. L'intervalle de confiance encadrant la moyenne temporelle à plus ou moins l'écart-type près est représenté Fig. 5.19a.

Il ne concorde pas avec celui de la solution analytique. En particulier, la moyenne du coefficient

de pression de la simulation HAPR-C3 est nettement sous-estimée par rapport à la solution analytique au cœur de la zone d'impact du jet. Par ailleurs, les écarts-types illustrent un bruit relativement important dans cette région.

Fig. 5.19b représente le coefficient de pression moyen en paroi de la simulation HAPR-C3, que l'on compare aux profils des simulations de référence N et 4N. Le profil issu de la solution HAPR-C3 est significativement moins pertinent que les autres. Afin de quantifier ces écarts, les données de l'indicateur DMSAE sur la pression sont répertoriées Tab. 5.7, qui confirme les interprétations précédentes faites à partir de Fig. 5.19b.

<i>Simulations</i>	<i>DMSAE <math>C_p^{y=0}</math></i>
N	0,070%
4N	0,035%
HAPR1-C1	2,10%
HAPR1-C2	3,05%
HAPR1-C3	1,66%

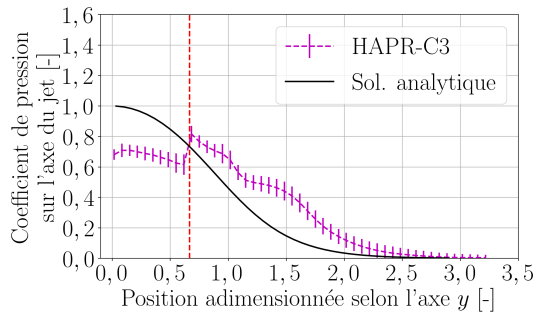
TABLE 5.7 – Cas test numérique du jet plan : DMSAE sur la pression des simulations SPH standard et HAPR avec interface de raccord basse.

En régime permanent, la DMSAE associée à la simulation HAPR-C3 est d'environ 1,66%. Cette valeur est très supérieure à celle issue des simulations de références N (0,070%) et 4N (0,035%). Cette conclusion se généralise à l'ensemble des simulations HAPR, quelle que soit la composition de Transition 0-1 considérée. Les données recueillies sur les simulations HAPR-C1 et HAPR-C2 sont également fournies Tab. 5.7. La composition HAPR-C3 est associée à une DMSAE sur la pression (1,66%) plus faible que celles des solutions HAPR-C1 (2,10%) et HAPR-C2 (3,05%). Quelle que soit la composition considérée, les résultats sont jugés non-pertinents. Toutefois, recourir à la composition HAPR-C3 est jugé légèrement plus robuste comparé à l'HAPR-C1 et à l'HAPR-C2 car ses résultats sont les plus fidèles à la solution analytique et sont moins bruités. Augmenter l'épaisseur de la sous-zone Hybride permet une meilleure réorganisation spatiale des filles hybrides ce qui rend la simulation plus robuste. Par ailleurs, la composition HAPR-C2 est jugée comme étant la moins pertinente. Par conséquent, augmenter l'épaisseur de la sous-zone Halo Garde ne semble pas être une stratégie judicieuse afin d'améliorer la pertinence de la simulation.

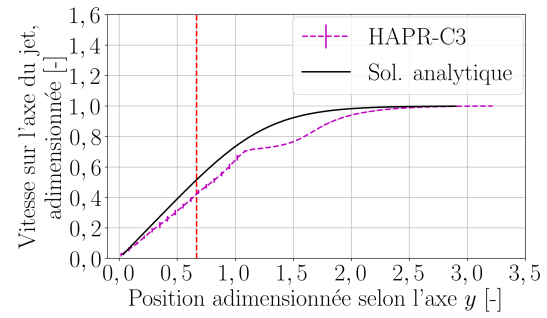
Pour aller plus loin dans l'interprétation des résultats, il est utile d'étudier le comportement physique le long de l'axe du jet. Ainsi, les données en pression et vitesse le long de l'axe vertical  $x/L = 0, 0$  sont extraites.

D'une part, le coefficient de pression  $C_p^{x=0}$  moyenné sur une durée  $T_{\text{carac}}$  en régime permanent est utilisé. Fig. 5.20a représente ce coefficient pour la simulation HAPR-C3 que l'on compare à la solution analytique.

On distingue dans ce profil les trois zones identifiées section 3.4 pour les références N et 4N. Proche de la zone d'injection ( $y/L > 2, 5$ ), le gradient de pression est quasi-nul. Le bruit numérique est faible dans cette zone. Le profil moyen obtenu avec la simulation HAPR-C3 est ainsi similaire à celui prédit par la solution analytique. Pour  $1, 0 < y/L < 2, 5$ , le gradient de pression augmente progressivement. Le profil moyen obtenu avec la simulation HAPR-C3 s'écarte de la solution analytique et le bruit numérique augmente. Un tel comportement a été illustré Fig. 3.23a pour la référence N. Jusque-là, la performance de l'HAPR-C3 est jugée satisfaisante et concordante avec la référence N. Enfin, terminons par la zone  $0, 0 < y/L < 1, 0$ . En particulier, cette portion contient l'interface du raccord qui est positionnée en  $y/L = 0, 7$ .



(a) Profil du coefficient de pression.



(b) Profil de la norme du vecteur vitesse adimensionnée.

FIGURE 5.20 – Cas test numérique du jet plan : profils sur l’axe du jet obtenus avec la discrétisation HAPR-C3 et l’interface de raccord basse. L’intervalle de confiance encadrant la moyenne temporelle à plus ou moins l’écart-type près est représenté. La frontière du Niveau 1 est matérialisée par une ligne verticale discontinue de tirets rouges.

Le profil HAPR-C3 présente une discontinuité nette au voisinage du raccord. De plus, il n’est plus concordant avec ceux des références N et 4N et s’écarte significativement de la solution analytique. Le bruit numérique est important. Sous l’effet des forces de pression importantes au milieu du jet, celui-ci s’évase pour former un coude. Le pavage de l’espace formé par les mères SPH devient alors inhomogène. La capacité des filles hybrides à se réorganiser spatialement n’est pas suffisante pour limiter de telles irrégularités. De par le positionnement de l’interface de raccord dans cette zone, le niveau discrétisé spatialement par les filles SPH est alors inhomogène également ce qui résulte en d’importantes erreurs numériques. Le schéma numérique n’est pas suffisamment stable pour amortir cette perturbation. Le profil moyen obtenu avec la simulation HAPR-C3 n’est alors plus cohérent avec celui prédit par la solution analytique.

D’autre part, complétons l’analyse en regardant le comportement de la vitesse Fig. 5.20b sur ces mêmes trois zones. Pour cela, la vitesse moyennée sur une durée  $T_{\text{carac}}$  en régime permanent et adimensionnée par la vitesse d’injection  $U$  est utilisée. Proche de la zone d’injection ( $y/L > 2,5$ ), le gradient de vitesse est quasi-nul. Le profil moyen obtenu avec la simulation HAPR-C3 est similaire à celui prédit par la solution analytique. Pour  $1,0 < y/L < 2,5$ , le gradient de vitesse augmente progressivement et le profil moyen obtenu avec la simulation HAPR-C3 s’écarte de la solution analytique. Néanmoins, cet écart est similaire et d’amplitude intermédiaire à ceux constatés Fig. 3.23b sur les références N et 4N. Enfin dans la zone  $0,0 < y/L < 1,0$ , le gradient de vitesse est maximal et relativement constant. En dépit du positionnement de l’interface de raccord dans cette zone, le profil moyen obtenu avec la simulation HAPR-C3 est jugé similaire à celui prédit par la solution analytique. En particulier, la vitesse s’annule en  $y/L = 0,0$ . Sur l’axe vertical  $x/L = 0,0$  dans son ensemble, les écarts-types illustrent un faible bruit sur la vitesse.

Finalement, dans cette configuration où l’interface de raccord est basse, la performance globale de l’HAPR est jugée insatisfaisante par rapport à celles des simulations N et 4N quelle que soit la composition de Transition 0-1 utilisée. L’HAPR est non-pertinente quant à la simulation de l’impact d’un jet plan sur une plaque plane dès lors que l’interface de raccord est disposée dans une zone où le pavage des mères SPH est insuffisamment régulier sous la contrainte de forts gradients. Il s’avère donc impossible de réaliser précisément une telle simulation en méthode HAPR-SPH sans une correction additionnelle du mouvement des particules, de la fonction noyau et/ou de son gradient afin d’améliorer la consistance du schéma numérique.

## 5.3 Synthèse

L'HAPR est une nouvelle technique de raffinement zonal adaptée au formalisme SPH-ALE. Son principe a été présenté dans ce chapitre. Cette approche consiste en un couplage SPH-SPH d'une résolution grossière et fine se recouvrant. Celles-ci interagissent indirectement au moyen de particules non-matérielles afin de garantir la robustesse des opérateurs SPH. En particulier, une région où sont localisées des filles non-matérielles est appelé zone de transition. Celle-ci est subdivisée en quatre sous-zones indépendantes, aux épaisseur et rôle distincts. La sous-zone Hybride est d'épaisseur  $\xi_{\text{Hybride}} R_h$  et a pour rôle d'assurer la continuité spatiale des propriétés physiques des filles. Pour cela, le statut de fille hybride y est introduit. Leurs variables primitives sont définies par combinaison d'une contribution MLS et d'une contribution SPH. Cette dualité permet aux filles hybrides d'endosser un état intermédiaire aux filles gardes et SPH. Celles-ci sont alors capables de préserver un pavage en espace satisfaisant et d'établir une transition spatiale continue des propriétés physiques du niveau grossier vers le niveau fin. La sous-zone Halo Garde est d'épaisseur  $\xi_{\text{Halo Garde}} R_h$  et a pour rôle d'assurer un support complet à la fonction noyau et de garantir la stabilité du schéma MUSCL des filles hybrides et des filles SPH. La sous-zone de Création est d'épaisseur  $\xi_{\text{Créa.}} R_h$  et permet de réaliser le processus de raffinement sans induire d'instabilités numériques. En particulier, le raffinement d'une mère SPH est précédé par l'élimination des filles gardes dans son voisinage. La sous-zone de Suppression est d'épaisseur  $\xi_{\text{Supp.}} R_h$  et est un réservoir particulière qui régit également l'élimination des filles gardes.

La pertinence de l'APR et de l'HAPR sont comparées sur les cas tests introduits chapitre 3. L'HAPR s'avère aussi robuste que l'APR sur le cas eulérien d'écoulement quasi-1D dans un tube à choc, malgré la non-conservation de la masse totale constatée.

L'HAPR s'avère bien plus robuste que l'APR quant à réaliser la simulation lagrangienne d'un canal oscillant 2D. D'une part, l'APR est jugée non-pertinente pour mener une telle simulation car le nombre de particules SPH dans la zone raffinée n'est pas maîtrisé. D'autre part, la pertinence de l'HAPR est plutôt robuste sur les premières oscillations mais fragile par la suite à cause de la non-conservation de la masse totale.

Enfin, la sensibilité numérique de l'HAPR à la paramétrisation des sous-zones de transition est étudiée grâce à la simulation lagrangienne d'un jet plan impactant une plaque plane en incidence normale. En bref, l'auteur recommande de privilégier l'HAPR avec la composition de référence C1 qui présente la complexité computationnelle la plus faible. Pour plus de robustesse, la sous-zone Hybride peut être éventuellement étendue (cf composition C3). Deux positions de l'interface de raccord entre la zone raffinée et la zone de transition sont considérées dans cette étude, i.e. une interface dite haute (resp. basse) où le raccord est disposé dans une région présentant de faibles (resp. forts) gradients sur l'axe du jet. Dans la configuration haute, la performance globale de l'HAPR est jugée meilleure que celle de la simulation N. De plus, la performance de l'HAPR est jugée similaire à celle de la solution de référence 4N sans pour autant nécessiter une discrétisation uniformément fine du domaine fluide. Par contre, pour la configuration basse, la performance globale de l'HAPR est jugée insatisfaisante par rapport à celles des simulations N et 4N. L'HAPR est non-pertinente quant à la simulation de l'impact d'un jet plan sur une plaque plane dès lors que l'interface de raccord est disposée dans une zone où le pavage des mères SPH est insuffisamment régulier sous la contrainte de forts gradients. Il s'avère donc impossible de réaliser précisément une telle simulation en méthode HAPR-SPH sans une correction additionnelle du mouvement des particules, de la fonction noyau et/ou de son gradient afin d'améliorer la consistance du schéma numérique.

L'auteur est ainsi confiant en l'aptitude de l'APR et de l'HAPR à simuler des écoulements en description eulérienne, ou des écoulements en description lagrangienne lorsque les zones

de transition peuvent être disposées loin des forts gradients physiques. Or, prendre une telle précaution n'est pas toujours possible selon l'écoulement à simuler. Dans ce cas, l'HAPR s'avère bien plus robuste que l'APR.



# CHAPITRE 6

## TECHNIQUE DU DUAL-TIME STEPPING (DTS)

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>État de la littérature</b>	<b>89</b>
6.1.1	Technique DTS	89
6.1.2	Littérature SPH-DTS	93
<b>6.2</b>	<b>Méthode SPH-ALE-DTS</b>	<b>95</b>
6.2.1	Formulation intégrée consistante à l'ordre 1	95
6.2.2	Formulation intégrée consistante à l'ordre 2	97
6.2.3	Pseudo-code SPH-ALE-DTS	99
6.2.4	Corrections numériques de la méthode SPH-ALE-DTS	100
<b>6.3</b>	<b>Validations numériques</b>	<b>104</b>
6.3.1	Écoulement quasi-1D dans un tube à choc	104
6.3.2	Écoulement 2D dans un canal oscillant	109
6.3.3	Tourbillons de Taylor-Green	118
6.3.4	Impact d'un jet plan sur une plaque plane	128
<b>6.4</b>	<b>Synthèse</b>	<b>134</b>

---

Les schémas numériques dont la discrétisation en espace est réalisée avec la méthode SPH recourent le plus souvent à une intégration temporelle explicite. La contrepartie des schémas d'intégration explicite réside dans le dimensionnement des pas de temps qui est régi par une condition restrictive de type Courant-Friedrichs-Lewy (CFL). Cette contrainte conduit à des simulations coûteuses où le pas en temps est faible et les temps de simulation sont longs. Afin de s'affranchir de la contrainte CFL, il serait adéquat de pouvoir recourir à une discrétisation temporelle implicite. Cependant, l'utilisation de schémas d'intégration implicite est actuellement restreinte dans la communauté des méthodes sans maillages [34, 73]. Dans le cas particulier de la méthode SPH, recourir à une intégration pleinement implicite nécessite de créer une connectivité entre toutes les particules. Les coûts de calcul sont actuellement trop importants pour qu'une telle approche soit attrayante. Depuis quelques années, des stratégies multi-résolutions temporelles et à moindre coûts ont été proposées afin d'assurer une stabilité inconditionnelle au schéma résultant. À ce jour, ces travaux sont encore peu nombreux et la

pertinence des techniques proposées est limitée. Par ailleurs dans la communauté des numériques, le développement d'approches multi-résolutions temporelles est bien référencé notamment dans la littérature de la méthode des volumes finis (FV). L'une des stratégies des plus couramment utilisées est la technique du « *Dual-Time Stepping* » (DTS) consistant à la formulation d'un problème équivalent faisant intervenir une seconde échelle temporelle. De par la similarité entre le formalisme SPH et FV, un bénéfice de l'application de la technique DTS à la méthode SPH-ALE est envisageable.

Dans ce chapitre, le principe de la technique DTS tel qu'exposé dans la littérature de la méthode des volumes finis est présenté. Une synthèse des stratégies multi-résolutions temporelles en méthode SPH est ensuite réalisée afin de mettre en évidence les différences avec la technique DTS. Par la suite, les fondamentaux de la technique DTS sont adaptés au formalisme SPH-ALE. La méthode numérique résultante est intégrée au solveur ASPHODEL<sup>©</sup>. Les résultats obtenus avec la DTS sont ensuite illustrés, commentés et comparés pour l'ensemble des cas tests introduits chapitre 3.



## 6.1 État de la littérature

Considérons un système d'EDP dont il existe une unique solution forte. La discrétisation en espace par un schéma spatial quelconque conduit alors à un système d'EDO qu'il convient d'intégrer en temps. En simulation numérique, un problème dépendant du temps peut être formulé de manière implicite ou explicite. La formulation implicite est la plus simple, est moins gourmande en ressources qu'une approche explicite et assure au schéma résultant d'être inconditionnellement stable. Toutefois, l'utilisation de l'approche implicite est délicate en pratique car nécessitant la résolution d'un système d'équations liant tous les éléments de discrétisation en espace, i.e. l'inversion de matrices de tailles importantes et souvent mal conditionnées. La technique du « *Dual-Time Stepping* » (DTS) permet de contourner cette difficulté par la manipulation d'une seconde échelle temporelle de par l'introduction d'une dérivée partielle pseudo-temporelle dans le schéma implicite en temps physique. La résolution du schéma résultant consiste à rechercher une solution permanente en pseudo-temps par une approche explicite standard. À convergence en pseudo-temps, la solution ainsi obtenue correspond alors à la solution initialement recherchée du schéma implicite. En particulier, le schéma conserve ainsi la propriété de stabilité inconditionnelle en temps physique, mais aucune inversion de matrice n'est requise pour la résolution. Cependant, la solution obtenue par technique DTS peut ne pas préserver la cohérence temporelle si la convergence des itérations pseudo-temporelles n'est pas satisfaite [33]. Par ailleurs, la méthode devient instable pour des pas de pseudo-temps dépassant ceux physiques si l'intégration pseudo-temporelle est menée avec une approche explicite [1]. Ces limites supposent un grand nombre d'itérations en pseudo-temps afin de satisfaire la convergence et peuvent rendre la méthode coûteuse. Toutefois, de nombreux travaux ont été menés afin d'améliorer la convergence rendant cette technique attractive et applicable à de nombreux domaines [6, 9, 27, 28, 33, 47, 59, 61]. Dans la littérature de la méthode des volumes finis, la technique DTS est usuellement utilisée pour résoudre le système des équations d'Euler en compressible [36] et en incompressible [6]. Ces travaux sont détaillés dans la section suivante. D'autres exemples sont notamment son application à l'électronique [26], ou à la magnéto-hydrodynamique [40].

### 6.1.1 Technique DTS

Les fondamentaux de la technique DTS issus de la littérature sont exposés ci-après. A. Jameson *et al.* [36] appliquent la technique DTS au système des équations d'Euler en compressible discrétisé en espace par la méthode des volumes finis avec schéma spatial multi-grilles et intégré temporellement par la méthode d'Euler avec une approche implicite. Dans le cas des écoulements de fluides supposés parfaits, le système des équations d'Euler en compressible se restreint à celui présenté Éq. (2.1) formé par les équations issues des lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Sans perte de généralité, supposons que la fermeture du système est effectuée par l'équation de Tait (cf Éq. (2.3)). Par simplicité, la démarche de calcul décrite par A. Jameson *et al.* [36] est ainsi appliquée au système (2.1)-(2.3) dans ce qui suit.

Soient l'instant  $t \in T$  et le domaine de calcul  $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^d$ . Sans perte de généralité, utilisons un schéma spatial à une seule grille. Introduisons alors  $\mathcal{T}(t)$  le maillage de  $\Omega(t)$ . Dans la suite de ce manuscrit, un élément de l'ensemble  $\mathcal{T}(t)$  est appelé cellule par abus de langage. En particulier, chaque cellule  $l \in \mathcal{T}(t)$  est définie comme un volume de contrôle  $\Omega_l(t)$  de mesure  $|\Omega_l(t)| = V_l(t)$ . La discrétisation en espace du système (2.1) par un schéma volume fini (FV) appliqué directement sur les volumes de contrôles de  $\mathcal{T}(t)$  permet la formulation du système

suisant appliqué à la cellule  $l$  à l'instant  $t \in T$ .

$$\frac{d}{dt}(V_l \Phi_l) + \mathcal{R}(\Phi_l) = 0, \quad (6.1)$$

avec  $V_l$  le volume de la cellule  $l$ ,  $\Phi_l$  le vecteur des variables conservatives évalué à la cellule  $l$  et  $\mathcal{R}$  le résidu évalué comme la somme des flux au travers des faces de la cellule  $l$ . Par ailleurs, A. Jameson *et al.* [36] introduit des flux de dissipation artificielle dans le résidu afin de prévenir l'apparition de modes hautes fréquences correspondant à des oscillations de type paires-impaires et de limiter les ondulations au voisinage d'une onde de choc.

Considérons l'ensemble d'instant  $\{t_0 < t_1 < \dots < t_N, N \in \mathbb{N}, [t_0, t_N] \subset T\}$ . Dans [36], la méthode dite d'Euler est utilisée pour réaliser la discrétisation temporelle implicite de l'EDO (6.1). Il s'agit de la méthode d'intégration à un étage la plus simple pour la résolution numérique des équations différentielles. Pour  $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ , la discrétisation en temps de l'Éq. (6.1) s'écrit alors comme suit.

$$D_t^\iota [V_l \Phi_l](t_{n+1}) + \mathcal{R}(\Phi_l^{n+1}) = 0, \quad (6.2)$$

avec la valeur discrète  $\Phi_l^{n+1} = \Phi_l(t_{n+1})$  du vecteur des variables conservatives de la cellule  $l$  évalué à l'instant  $t_{n+1}$ . De plus,  $D_t^\iota$  désigne l'opérateur différentiel « backward » consistant à l'ordre  $\iota + 1$ . Soit  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$  le  $n$ -ième pas de temps. En supposant que pour tout  $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$  le pas de temps soit constant, i.e.  $\Delta t_n = \Delta t$ , l'opérateur  $D_t^\iota$  est alors défini pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}^\iota(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{d+1})$  par

$$D_t^\iota [f] = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=1}^{\iota+1} \frac{1}{k} \nabla_{\Delta t}^k [f] \quad \text{avec} \quad \nabla_{\Delta t}^k [f](\bullet) = \sum_{s=0}^k (-1)^s \binom{k}{s} f(\bullet - s\Delta t), \quad (6.3)$$

où  $\binom{k}{s}$  désigne le coefficient binomial "s parmi k".

En particulier, le schéma numérique issu de la discrétisation par l'opérateur  $D_t^1$  d'un système d'équations linéaires, i.e. de la forme  $\frac{d}{dt} \Phi_l = \varkappa \Phi_l$  avec  $\varkappa \in \mathbb{R}$ , présente la particularité d'être A-stable [36]. Autrement dit, le schéma numérique est stable pour toute valeur de  $\varkappa \Delta t$  dans la partie gauche du plan complexe. Or, il est démontré par R. Jeltsch [37] qu'un schéma linéaire, multi-étages et A-stable ne peut dépasser l'ordre 2 en consistance. A. Jameson *et al.* [36] privilégie ainsi l'utilisation de l'opérateur  $D_t^1$  consistant d'ordre  $\iota + 1 = 2$  pour la suite des développements. Le problème (6.2) se réécrit alors comme

$$\frac{3}{2\Delta t} [V_l^{n+1} \Phi_l^{n+1}] - \frac{2}{\Delta t} [V_l^n \Phi_l^n] + \frac{1}{2\Delta t} [V_l^{n-1} \Phi_l^{n-1}] + \mathcal{R}(\Phi_l^{n+1}) = 0, \quad n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, \quad (6.4)$$

avec les valeurs discrètes  $V_l^k = V_l(t_k)$  du volume de la cellule  $l$  et  $\Phi_l^k = \Phi_l(t_k)$  du vecteur des variables conservatives évaluées à l'instant  $t_k$  pour  $k = n-1, n$  et  $n+1$ .

L'application de la technique DTS consiste à introduire une nouvelle variable indépendante et homogène à un temps appelée pseudo-temps  $t^*$  dans un système d'équations discrétisées en espace et intégrées implicitement en temps. Concrètement, la solution  $\Phi_l^{n+1}$  du problème (6.4) est substituée par  $\Phi_l^*$  qui dépend du pseudo-temps  $t^*$ . De par l'introduction d'une dérivée partielle pseudo-temporelle dans le membre de gauche de l'Éq. (6.4), le nouveau problème est dit dual et s'écrit comme suit.

$$\left. \frac{\partial \Phi_l^*}{\partial t^*} \right|_{(t_n, t_{n-1})} + \mathcal{R}^*(\Phi_l^*) = 0, \quad n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, \quad (6.5)$$

où  $\mathcal{R}^*$  désigne le résidu modifié. Il est défini par les relation suivantes.

$$\mathcal{R}^*(\Phi_l^*) = \frac{3}{2\Delta t} \Phi_l^* + \frac{1}{V_l^{n+1}} [\mathcal{R}(\Phi_l^*) - \mathcal{S}(\Phi_l^n, \Phi_l^{n-1})] , \quad (6.6)$$

$$\mathcal{S}(\Phi_l^n, \Phi_l^{n-1}) = \frac{2}{\Delta t} [V_l^n \Phi_l^n] - \frac{1}{2\Delta t} [V_l^{n-1} \Phi_l^{n-1}] , \quad (6.7)$$

avec  $\mathcal{S}$  le terme source fixe en pseudo-temps. La résolution du problème dual (6.5) consiste à rechercher une solution  $\Phi_l^*$  permanente en pseudo-temps, c'est-à-dire qui satisfait la relation suivante.

$$\lim_{t^* \rightarrow +\infty} \left. \frac{\partial \Phi_l^*}{\partial t^*} \right|_{(t_n, t_{n-1})} = 0 , \quad n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket . \quad (6.8)$$

Si la solution  $\Phi_l^*$  du problème dual (6.5) satisfait Éq. (6.8), alors elle converge vers l'unique solution forte  $\Phi_l^{n+1}$  du problème (6.4) si celle-ci existe [59]. La solution du problème implicite en temps physique (6.4) est ainsi déterminée, préservant alors la bonne propriété de stabilité inconditionnelle en temps physique mais aucune inversion de matrice n'est requise pour la résolution.

A. Jameson *et al.* [36] résolvent le problème dual (6.5) par une approche explicite de type Runge-Kutta à multi-étages. Pour plus de stabilité, le traitement des termes convectifs et dissipatifs du résidu modifié  $\mathcal{R}^*$  est différencié. Pour cela, le résidu est scindé selon

$$\mathcal{R}^*(\Phi_l^*) = \mathcal{Q}^*(\Phi_l^*) + \mathcal{D}^*(\Phi_l^*) , \quad (6.9)$$

avec  $\mathcal{Q}^*$  la partie convective et  $\mathcal{D}^*$  celle dissipative. Deux schémas sont présentés dans [36] comme étant particulièrement efficaces pour résoudre Éq. (6.5). Le premier est un schéma en cascade à  $q = 4$  étages, de poids  $\{b_1, \dots, b_4\}$  avec deux évaluations de la dissipation :

$$b_1 = 1/3 , \quad b_2 = 4/15 , \quad b_{31} = 5/9 , \quad b_4 = 1 , \quad (6.10)$$

$$d_1 = 1 , \quad d_2 = 1/2 , \quad d_3 = 0 , \quad d_4 = 0 . \quad (6.11)$$

Le second est un schéma en cascade à  $q = 5$  étages, de poids  $\{b_1, \dots, b_5\}$  avec trois évaluations de la dissipation :

$$b_1 = 1/4 , \quad b_2 = 1/6 , \quad b_3 = 3/8 , \quad b_4 = 1/2 , \quad b_5 = 1 , \quad (6.12)$$

$$d_1 = 1 , \quad d_2 = 0 , \quad d_3 = 0,56 , \quad d_4 = 0 , \quad d_5 = 0,44 . \quad (6.13)$$

Dans tous les cas, l'algorithme de résolution du problème dual (6.5) proposé dans [36] se décline alors sous la forme du pseudo-code Alg. 1. Considérons un indice  $n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$  et une cellule  $l$  quelconques. La procédure Alg. 1 consiste à déterminer la solution  $\Phi_l^{n+1}$  du problème implicite en temps physique (6.4) par application de la technique DTS. Supposons alors disposer de la valeur discrète  $\Phi_l^n = \Phi_l(t_n)$  du vecteur des variables conservatives évalué à l'instant  $t_n$ , d'un pas en pseudo-temps constant  $\Delta t^*$ , d'un nombre de tours de boucle en pseudo-temps  $N^*$  ainsi que des poids  $\{b_1, \dots, b_q\}$  et  $\{d_1, \dots, d_q\}$  à fournir comme paramètres d'entrée à la procédure d'Alg. 1. L'application de la technique DTS conduit ensuite à déterminer la solution du problème dual (6.5) permanente en pseudo-temps. A. Jameson *et al.* [36] précisent avoir choisi la valeur des paramètres  $\Delta t^*$  et  $N^*$  de façon ad hoc afin d'optimiser la convergence en pseudo-temps vers l'état permanent. En pratique, ils jugent qu'effectuer une dizaine d'itérations en pseudo-temps est suffisant pour leurs simulations. La résolution du problème (6.5) par approche

explicite en pseudo-temps consiste alors à construire la variable  $\Phi_l^{*(n, N^*, 0)}$ . Pour cela, trois phases peuvent être distinguées dans la procédure décrite par Alg. 1. Tout d'abord, débute la phase d'initialisation des variables numériques (L.1-3) qui consiste à attribuer une valeur initiale en pseudo-temps aux données du problèmes. Ainsi, la variable duale  $\Phi_l^{*(n, 0, 0)}$  est initialisée (L.1) égale à la valeur discrète  $\Phi_l^n$  évaluée au dernier instant connu  $t_n$ . Les termes convectif  $\mathcal{Q}_{(n, 0, 0)}^*$  et dissipatif  $\mathcal{D}_{(n, 0, 0)}^*$  formant le résidu modifié sont initialisés de même (L.2) et (L.3) respectivement.

---

**Algorithme 1** proposé par A. Jameson *et al.* [36]

---

**Entrées :**  $\Phi_l^n$ ,  $\Delta t^*$ ,  $N^*$ ,  $(b_k)_{1 \leq k \leq q}$ ,  $(d_k)_{1 \leq k \leq q}$ .

- 1:  $\Phi_l^{*(n, 0, 0)} \leftarrow \Phi_l^n$ , ▷ Initialisation
  - 2:  $\mathcal{Q}_{(n, 0, 0)}^* \leftarrow \mathcal{Q}^*(\Phi_l^{*(n, 0, 0)})$ ,
  - 3:  $\mathcal{D}_{(n, 0, 0)}^* \leftarrow \mathcal{D}^*(\Phi_l^{*(n, 0, 0)})$ .
  
  - 4: **pour**  $m$  allant de 0 à  $N^* - 1$  **faire** ▷ Itérations en pseudo-temps
  - 5:   **pour**  $k$  allant de 1 à  $q$  **faire**
  - 6:      $\Phi_l^{*(n, m, k)} \leftarrow \Phi_l^{*(n, m, k-1)} - b_k \Delta t^* \left( \mathcal{Q}_{(n, m, k-1)}^* + \mathcal{D}_{(n, m, k-1)}^* \right)$ ,
  - 7:      $\mathcal{Q}_{(n, m, k)}^* \leftarrow \mathcal{Q}^*(\Phi_l^{*(n, m, k)})$ ,
  - 8:      $\mathcal{D}_{(n, m, k)}^* \leftarrow d_k \mathcal{D}^*(\Phi_l^{*(n, m, k)}) + (1 - d_k) \mathcal{D}_{(n, m, k-1)}^*$ .
  - 9:   **fin pour**
  - 10:  $\Phi_l^{*(n, m+1, 0)} \leftarrow \Phi_l^{*(n, m, q)}$ ,
  - 11:  $\mathcal{Q}_{(n, m+1, 0)}^* \leftarrow \mathcal{Q}^*(\Phi_l^{*(n, m+1, 0)})$ ,
  - 12:  $\mathcal{D}_{(n, m+1, 0)}^* \leftarrow \mathcal{D}^*(\Phi_l^{*(n, m+1, 0)})$ .
  - 13: **fin pour**
  
  - 14:  $\Phi_l^{n+1} \leftarrow \Phi_l^{*(n, N^*, 0)}$ , ▷ Terminaison
  - 15: **retourne**  $\Phi_l^{n+1}$ .
- 

Vient ensuite la phase d'itérations (L.4-13) qui met à jour en pseudo-temps les données du problème. Numériquement, il s'agit d'une double boucle d'itérations d'indice  $m$  (resp.  $k$ ) qui est un nombre entier fluctuant de 0 (resp. 1) jusqu'à  $N^* - 1$  (resp.  $q$ ). D'une part, la sous-boucle d'indice  $k$  (L.5-9) permet d'appliquer le schéma d'intégration explicite à  $q$ -étages de poids  $\{b_1, \dots, b_q\}$  proposé dans [36]. Ainsi, la variable duale  $\Phi_l^{*(n, m, k)}$  met à jour sa valeur au sous-instant  $k$  (L.6). Le traitement des termes convectif  $\mathcal{Q}_{(n, m, k)}^*$  et dissipatif  $\mathcal{D}_{(n, m, k)}^*$  est différencié. En particulier (L.7), la mise à jour du terme convectif utilise seulement la valeur duale  $\Phi_l^{*(n, m, k)}$  déterminée à la ligne précédente. Par contre, [36] applique une pondération  $\{d_1, \dots, d_q\}$  pour la mise à jour du terme dissipatif (L.8) pour plus de stabilité. D'autre part, les données du problème sont mise à jour en pseudo-temps une fois la sous-boucle d'indice  $k$  terminée (L.10-13). La mise à jour de l'indice  $m$  effectuée (L.10) consiste à initialiser la variable duale  $\Phi_l^{*(n, m+1, 0)}$  comme égale au résultat de la sous-boucle en  $k$ . La variable  $\Phi_l^{*(n, m+1, 0)}$  est ainsi prête à l'emploi pour le tour de boucle en  $m$  suivant. La mise à jour des termes convectif (L.11) et dissipatif (L.12) est ensuite réalisée au moyen de la valeur duale  $\Phi_l^{*(n, m+1, 0)}$

déterminée (L.10). Enfin, la phase de terminaison (L.14-15) achève la procédure de résolution. À convergence en pseudo-temps, chaque composante du résidu modifié est d'amplitude faible. Par conséquent, la variable duale  $\Phi_l^{*(n, N^*, 0)}$  ainsi construite est la solution permanente en pseudo-temps du problème (6.5). La solution  $\Phi_l^{n+1}$  du problème implicite en temps physique (6.4) est alors construite (L.14) égale à  $\Phi_l^{*(n, N^*, 0)}$ . La procédure Alg. 1 retourne finalement la solution recherchée (L.15).

### 6.1.2 Littérature SPH-DTS

À la connaissance de l'auteur, bien que l'utilisation de la technique DTS soit usuelle dans la littérature de la méthode des volumes finis, aucune mention de son application aux schémas numériques dont la discrétisation en espace est réalisée par méthode SPH n'est référencée. Plus généralement, l'introduction d'une seconde échelle temporelle est une technique multi-résolution qui est actuellement peu abordée dans la littérature SPH. En particulier, seuls quelques articles [22, 63, 70] documentent un travail dont l'introduction d'une échelle en pseudo-temps induit une reformulation complète du schéma numérique discrétisé par méthode SPH. Ces documents sont résumés ci-après. Par ailleurs, aucun de ces travaux ne mentionne une application au formalisme SPH-ALE tel que présenté chapitre 2.

Historiquement, la méthode « *Artificial Compressibility Incompressible SPH* » (ACISPH) issue des travaux de F. Rouzbahani *et al.* [70] peut être considérée comme la première référence de la littérature SPH où l'introduction d'une échelle en pseudo-temps dans le schéma numérique présente des similitudes importantes avec l'application de la technique DTS telle que décrite section 6.1.1. Pour définir la méthode ACISPH, le formalisme de compressibilité artificielle tel que proposé par A.J. Chorin [18] est appliqué au système des équations d'Euler en incompressible. Ainsi, une nouvelle échelle homogène à un temps est introduite dans la formulation continue de par l'apparition d'une dérivée pseudo-temporelle du terme de pression dans la condition d'incompressibilité (se confondant avec l'équation de conservation de la masse). Une dérivée pseudo-temporelle du terme de vitesse est aussi ajoutée à l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Le schéma numérique est ensuite construit par une discrétisation en espace, en temps et en pseudo-temps de ce jeu d'équations. La discrétisation en espace est réalisée par la méthode SPH [45, 85], l'intégration temporelle implicite en temps physique est effectuée selon le schéma d'Euler d'ordre 2 et l'intégration pseudo-temporelle explicite correspond à l'approximation de Runge-Kutta à un seul étage. Contrairement à la définition de la méthode ACISPH où l'introduction de l'échelle pseudo-temporelle est réalisée sur le système d'équations continues en espace et en temps, la technique DTS s'applique sur le schéma numérique discrétisé en espace et intégré implicitement en temps. Par conséquent, les définitions du résidu modifié des deux approches diffèrent. En bref, la méthode ACISPH est bien fondée sur une approche à deux échelles temporelles mais ne relève pas de l'application de la technique DTS.

Les recherches de P. Ramachandran *et al.* [63] s'inscrivent dans la continuité ces développements sur la méthode ACISPH. Ce travail présente une nouvelle méthode appelée « *Dual-Time SPH* » (DTSPH). La formulation de la DTSPH s'appuie sur le système des équations d'Euler en compressible, dont la fermeture est assurée par l'équation d'état artificielle proposée par A.J. Chorin [18]. En s'inspirant du formalisme de compressibilité artificielle, une nouvelle échelle homogène à un temps apparaît dans la formulation continue du jeu d'équations de par l'introduction des dérivées partielles pseudo-temporelles des variables du problème. La définition d'une vitesse artificielle permet alors d'adapter les dérivées partielles pseudo-temporelles au formalisme lagrangien. Le schéma numérique est ensuite construit par une discrétisation en espace,

en temps et en pseudo-temps de ce jeu d'équations. La discrétisation en espace est réalisée par la méthode SPH [52, 83], l'intégration temporelle implicite en temps physique est effectuée selon le schéma d'Euler d'ordre 2 et l'intégration pseudo-temporelle explicite correspond à l'approximation de Runge-Kutta à un seul étage. À l'instar de l'ACISPH, la méthode DTSPH réalise l'introduction de l'échelle pseudo-temporelle sur le système d'équations continues en espace et en temps. Par conséquent, cette approche est équivalente à un schéma multi-étage implicite dont les sous-pas réalisés en pseudo-temps doivent vérifier une condition de compressibilité artificielle. Au contraire, la technique DTS s'applique sur le schéma numérique discrétisé en espace et intégré implicitement en temps. En particulier, les définitions du résidu modifié des deux approches diffèrent. Finalement, la méthode DTSPH ne correspond pas au formalisme DTS.

Plus récemment, les travaux de R. Fatehi *et al.* [22] sur les techniques multi-résolutions temporelles en SPH aboutissent à la définition d'une nouvelle méthode qu'ils nomment « *Dual-Time Stepping SPH* » (DTS-SPH). La méthode DTS-SPH est appliquée au système des équations d'Euler en compressible, dont la fermeture est assurée par l'équation d'état artificielle proposée par A.J. Chorin [18]. Ce jeu d'équations est alors discrétisé en espace par la méthode SPH [52]. Une nouvelle échelle pseudo-temporelle est ensuite introduite dans le schéma discret en espace et continue en temps de par l'introduction de dérivées pseudo-temporelle des variables du problème. En s'inspirant du formalisme de compressibilité artificielle tel que proposé par A.J. Chorin [18], un terme de vitesse artificielle est définie et calculée pour un champ de pression supposé nul. Cette vitesse artificielle apparaît alors dans le schéma numérique lors de l'intégration en temps et en pseudo-temps. L'intégration temporelle implicite est réalisée selon le schéma d'Euler d'ordre 1 et l'intégration pseudo-temporelle explicite est effectuée selon l'approche de Runge-Kutta à un étage. En supposant que la masse volumique est constante en temps physique, l'évolution en pseudo-temps de la vitesse artificielle, puis de la pression et enfin de la vitesse sont déduites. En ré-itérant ce procédé, les variables convergent en pseudo-temps vers l'instant physique suivant. En bref, la méthode DTS-SPH constitue ainsi une approche équivalente à un schéma d'approximation en temps physique de type Runge-Kutta à deux étages (aussi appelé prédicteur-correcteur) dont l'étage intermédiaire est formalisé sous conditions et en pseudo-temps seulement. Cette méthode ne présente donc pas le même formalisme que la technique DTS. Toutefois, la technique DTS peut être perçue comme une généralisation de cette approche.



## 6.2 Méthode SPH-ALE-DTS

L'application de la technique DTS au formalisme SPH-ALE utilisé dans le cadre de ces travaux de thèse est proposée dans cette section. La méthode résultante est appelée SPH-ALE-DTS dans la suite du manuscrit.

Considérons la formulation compacte (2.8) discrétisée en espace et continue en temps du système formé par les équations issues des lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et dont la fermeture est assurée par l'équation d'état de Tait. Dans la continuité de l'approche exposée par A. Jameson *et al.* [36], la méthode d'intégration d'Euler est utilisée pour réaliser une discrétisation temporelle implicite dont l'échelle est définie selon  $\{t_0 < t_1 < \dots < t_N, N \in \mathbb{N}, [t_0, t_N] \subset T\}$ . Soit  $n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$ . La formulation implicite en temps du problème (2.8) ainsi discrétisé s'écrit alors comme suit.

$$\begin{cases} D_t^\iota [\Psi_i] (t_{n+1}) + \mathcal{H} (\Psi_i^{n+1}) = 0 , \\ p_{i\bullet}^{E, n+1} = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left[ \left( \frac{\rho_{i\bullet}^{E, n+1}}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] + p_0 . \end{cases} \quad (6.14)$$

où  $D_t^\iota$  désigne l'opérateur différentiel « *backward* » consistant à l'ordre  $\iota + 1$  et  $\Psi_i^{n+1} = \Psi_i(t_{n+1})$  est la valeur discrète du vecteur des variables évalué à la particule  $i$  et à l'instant  $t_{n+1}$ . Pour rappel,  $c_0$  représente la vitesse du son dans le fluide,  $\gamma$  est un paramètre constant égal à 7,  $\rho_0$  et  $p_0$  désignent la masse volumique et la pression de référence, respectivement. Rappelons aussi que  $\rho_{ij}^E$  est le résultat de l'évaluation de la masse volumique  $\rho$  comme solution d'un problème de Riemann mono-dimensionnel entre les particules  $i$  et  $j$  dont l'interface se déplace à la vitesse  $\mathbf{v}_{0, ij}$ .

Tout schéma numérique issu de la discrétisation par l'opérateur  $D_t^1$  d'un système d'équations linéaires présente la particularité d'être A-stable [36]. Or, un tel schéma ne peut dépasser l'ordre 2 en consistance [37]. Par conséquent, il convient de se restreindre à l'utilisation de l'opérateur  $D_t^\iota$  où  $\iota \leq 1$  afin de s'éviter le sur-coût de stockage en mémoire des états antérieurs à l'instant  $t_{n-1}$  quel que soit  $n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$ . Afin d'adopter une démarche de complexification progressive, les formulations du problème intégré (6.14) consistante à l'ordre 1 puis à l'ordre 2 (correspondant à  $\iota = 0$  et 1) sont détaillées ci-après et leurs résultats comparés.

### 6.2.1 Formulation intégrée consistante à l'ordre 1

Débutons par la formulation intégrée consistante à l'ordre  $\iota + 1 = 1$ . Soit  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$  le  $n$ -ième pas de temps avec  $n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$ . Le problème (6.14) discrétisé par l'opérateur  $D_t^1$  s'écrit alors comme suit.

$$\begin{cases} \Xi_1(\Delta t_n) \Psi_i^{n+1} + \Xi_2(\Delta t_n) \Psi_i^n + \mathcal{H} (\Psi_i^{n+1}) = 0 , \\ p_{i\bullet}^{E, n+1} = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left[ \left( \frac{\rho_{i\bullet}^{E, n+1}}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] + p_0 . \end{cases} \quad (6.15)$$

$$\Xi_1(\Delta t_n) = -\Xi_2(\Delta t_n) = \frac{1}{\Delta t_n} . \quad (6.16)$$

L'application de la technique DTS consiste à introduire une nouvelle variable, indépendante et homogène à un temps appelée pseudo-temps  $t^*$ , dans le système d'équations (6.15). Pour cela, la variable  $\Psi_i^{n+1}$  est substituée par le terme  $\Psi_i^*$  fonction du pseudo-temps  $t^*$  et une dérivée



partielle pseudo-temporelle est introduite dans le membre de gauche. Le problème dual résultant s'écrit comme suit.

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi_i^*}{\partial t^*} \Big|_{t_n} + \mathcal{H}^* [\mathbf{v}_{0,i}^* ; \nabla_i W_{i\bullet}^*] (\Psi_i^*) = 0 , \\ p_{i\bullet}^{E,*} = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left[ \left( \frac{\rho_{i\bullet}^{E,*}}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] + p_0 . \end{cases} , \quad (6.17)$$

où  $\mathcal{H}^*$  désigne le résidu modifié. La notation  $\mathcal{H}^* [\mathbf{v}_{0,i}^* ; \nabla_i W_{i\bullet}^*] (\Psi_i^*)$  exprime explicitement la dépendance du résidu vis-à-vis du champ de transport et du gradient de la fonction noyau évalués à la particule  $i$ . Par simplicité, la notation  $\mathcal{H}^* (\Psi_i^*)$  est privilégiée ensuite. Il est alors défini par les relations suivantes :

$$\mathcal{H}^* (\Psi_i^*) = \Xi_1(\Delta t_n) \Psi_i^* + \mathcal{H} (\Psi_i^*) - \mathcal{S} (\Psi_i^n) , \quad (6.18)$$

$$\mathcal{S} (\Psi_i^n) = -\Xi_2(\Delta t_n) \Psi_i^n , \quad (6.19)$$

avec  $\mathcal{S}$  le terme source fixe en pseudo-temps. La résolution du problème dual (6.17) consiste à rechercher une solution  $\Psi_i^*$  permanente en pseudo-temps, c'est-à-dire qui satisfait la relation suivante.

$$\lim_{t^* \rightarrow +\infty} \frac{\partial \Psi_i^*}{\partial t^*} \Big|_{t_n} = 0 . \quad (6.20)$$

Si la solution  $\Psi_i^*$  atteint l'état permanent en pseudo-temps, alors elle converge vers l'unique solution forte  $\Psi_i^{n+1}$  du système (6.15) si celle-ci existe [59]. La solution du problème implicite en temps physique est ainsi déterminée, préservant alors la bonne propriété de stabilité inconditionnelle en temps physique du schéma numérique. Autrement dit, la stabilité du schéma numérique n'est plus conditionnée par le dimensionnement des pas en temps  $\Delta t_n$  contraint à satisfaire la condition CFL introduite section 2.4.

Considérons un indice  $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$  et une particule  $i$  quelconques. Le problème dual (6.17) est résolu par une méthode explicite de type Runge-Kutta. Par simplicité, l'approche à un seul étage (RK1) est privilégiée. Dans ce qui suit, l'indice  $m$  désigne les itérations en pseudo-temps alors que l'indice  $n$  référence celles en temps physique. La discrétisation pseudo-temporelle est définie selon  $\left\{ 0 = t_{(n,0)}^* < t_{(n,1)}^* < \dots < t_{(n,N^*)}^* , N^* \in \mathbb{N} , \left[ t_{(n,0)}^* , t_{(n,N^*)}^* \right] \subset \mathbb{R}_+ \right\}$ . Les états initiaux en pseudo-temps sont définis comme suit.

$$\Psi_i^* (n, m=0) = \Psi_i^n . \quad (6.21)$$

Soit  $\Delta t_{(n,m)}^* = t_{(n,m+1)}^* - t_{(n,m)}^*$  le  $m$ -ième pas de pseudo-temps. Le développement limité en pseudo-temps de  $\Psi_i^* (t^*)$  en  $t_{(n,m)}^*$  s'exprime comme suit.

$$\Psi_i^* (n, m+1) = \Psi_i^* (n, m) + \Delta t_{(n,m)}^* \left( \frac{\partial \Psi_i^*}{\partial t^*} \Big|_{t_n} \right)^{(n,m)} + \mathcal{O} (\Delta t_{(n,m)}^*)^2 . \quad (6.22)$$

La relation précédente permet de lier l'expression de la dérivée pseudo-temporelle exprimée au pseudo-instant  $t_{(n,m)}^*$  aux états discrets en pseudo-temps  $\Psi_i^* (n, m+1)$  et  $\Psi_i^* (n, m)$ . Cette relation tronquée au premier ordre peut être injectée dans le problème dual continu en pseudo-temps afin d'y remplacer la dérivée pseudo-temporelle par des états discrets. Pour cela, exprimons le

problème (6.17) au pseudo-instant particulier  $t^* = t_{(n,m)}^*$ , i.e.

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial \Psi_i^*}{\partial t^*} \Big|_{t_n} \right)^{(n,m)} + \mathcal{H}^* (\Psi_i^{*(n,m)}) = 0, \\ p_{i\bullet}^{E,*(n,m)} = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left[ \left( \frac{\rho_{i\bullet}^{E,*(n,m)}}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] + p_0. \end{cases} \quad (6.23)$$

Injectons la relation (6.22) dans le problème (6.23). Le schéma numérique consistant à l'ordre 1 en pseudo-temps s'écrit alors comme

$$\begin{cases} \Psi_i^{*(n,m+1)} = \Psi_i^{*(n,m)} - \Delta t_{(n,m)}^* \mathcal{H}^* (\Psi_i^{*(n,m)}) , \\ p_{i\bullet}^{E,*(n,m)} = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left[ \left( \frac{\rho_{i\bullet}^{E,*(n,m)}}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] + p_0 . \end{cases} \quad (6.24)$$

où le résidu modifié  $\mathcal{H}^*$  est défini Éq. (6.18). Pour faire spécifiquement référence à la méthode SPH-ALE-DTS résultante, celle-ci est étiquetée "SPH-ALE-DTS0" et parfois plus simplement "DTS0" dans la suite du document.

La contrepartie d'utiliser un schéma d'intégration explicite en pseudo-temps réside dans le dimensionnement des pas  $\Delta t_{(n,m)}^*$  qui est régi par une condition restrictive de type Courant-Friedrichs-Lewy (CFL). Pour le système donné Éq. (6.24), elle est exprimée Éq. (6.25) pour  $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$  et  $m \in \llbracket 0, N^*-1 \rrbracket$ .

$$\Delta t_{(n,m)}^* \leq \min \left[ K_{\text{CFL}}^* \min_{i \in P(t_n)} \left( \frac{h_i}{c_0} \right) ; \Delta t_n \right] , \quad (6.25)$$

où  $K_{\text{CFL}}^*$  est un coefficient inférieur à 1 dont la valeur est en pratique déterminée par l'expérience numérique.

## 6.2.2 Formulation intégrée consistante à l'ordre 2

La formulation intégrée par l'opérateur différentiel  $D_t^1$  consistante à l'ordre  $\iota + 1 = 2$  du problème (6.14) est présentée ci-après. On se donne l'indice  $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ . Considérons alors le  $n$ -ième pas de temps  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ . La détermination de l'état au premier instant  $t_1$  nécessite un traitement particulier, car l'utilisation de l'opérateur  $D_t^1$  requière la connaissance de deux instants antérieurs, i.e.  $n \geq 1$ . Par conséquent, la première avancée en temps de pas  $\Delta t_0$  est réalisée au moyen de la formulation consistante à l'ordre 1 présentée section 6.2.1. Dans ce qui suit, détaillons le traitement du  $n$ -ième pas de temps  $\Delta t_n$  avec  $n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$ . Le problème (6.14) discrétisé par l'opérateur  $D_t^1$  s'écrit alors comme suit.

$$\begin{cases} \Xi_1 (\Delta t_n, \Delta t_{n-1}) \Psi_i^{n+1} + \Xi_2 (\Delta t_n, \Delta t_{n-1}) \Psi_i^n + \Xi_3 (\Delta t_n, \Delta t_{n-1}) \Psi_i^{n-1} + \mathcal{H} (\Psi_i^{n+1}) = 0, \\ p_{i\bullet}^{E,n+1} = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left[ \left( \frac{\rho_{i\bullet}^{E,n+1}}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] + p_0 . \end{cases} \quad (6.26)$$

où  $\Xi_k$  avec  $k = 1, 2, 3$  désignent les poids de quadrature de l'opérateur  $D_t^1$ . Pour des pas de

temps  $\Delta t_n$  et  $\Delta t_{n-1}$  quelconques, ces coefficients sont définis selon

$$\Xi_1(\Delta t_n, \Delta t_{n-1}) = \left( \frac{1}{\Delta t_{n-1}(1 + \Delta t_{n-1}/\Delta t_n)} \right) \left( \frac{\Delta t_{n-1}}{\Delta t_n} \right) \left( 2 + \frac{\Delta t_{n-1}}{\Delta t_n} \right), \quad (6.27)$$

$$\Xi_2(\Delta t_n, \Delta t_{n-1}) = -\frac{1}{\Delta t_{n-1}} \left( 1 + \frac{\Delta t_{n-1}}{\Delta t_n} \right), \quad (6.28)$$

$$\Xi_3(\Delta t_n, \Delta t_{n-1}) = \left( \frac{1}{\Delta t_{n-1}(1 + \Delta t_{n-1}/\Delta t_n)} \right). \quad (6.29)$$

On note que la somme  $\Xi_1 + \Xi_2 + \Xi_3$  est nulle, ce qui garanti la reconstruction exacte de toute fonction constante. Dans le cas particulier où  $\Delta t_n = \Delta t_{n-1}$ , ces expressions se simplifient en

$$\Xi_1(\Delta t_n, \Delta t_n) = \frac{3}{2\Delta t_n}, \quad (6.30)$$

$$\Xi_2(\Delta t_n, \Delta t_n) = -\frac{2}{\Delta t_n}, \quad (6.31)$$

$$\Xi_3(\Delta t_n, \Delta t_n) = \frac{1}{2\Delta t_n}. \quad (6.32)$$

Il n'est toutefois pas toujours possible d'utiliser des pas de temps  $\Delta t_n$  et  $\Delta t_{n-1}$  égaux et donc de recourir à ces expressions simplifiées sans en restreindre la généralité. Par exemple, il est parfois judicieux de recourir à des pas de temps  $\Delta t_n$  et  $\Delta t_{n-1}$  quelconques afin de limiter les coûts de simulation sans perdre en robustesse. Dans ce cas, il est recommandé d'utiliser les expressions complètes des poids  $\Xi$  données Éq. (6.27), (6.28) et (6.29).

La suite de la démarche est analogue à celle présentée section 6.2.1. En particulier, le problème équivalent à celui formulé Éq. (6.17) s'écrit comme suit.

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \Psi_i^*}{\partial t^*} \right|_{(t_n, t_{n-1})} + \mathcal{H}^*[\mathbf{v}_{0,i}^*; \nabla_i W_{i\bullet}^*](\Psi_i^*) = 0, \\ p_{i\bullet}^{E,*} = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left[ \left( \frac{\rho_{i\bullet}^{E,*}}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] + p_0. \end{cases}, \quad (6.33)$$

où le résidu modifié  $\mathcal{H}^*$  est défini selon

$$\mathcal{H}^*(\Psi_i^*) = \Xi_1(\Delta t_n, \Delta t_{n-1}) \Psi_i^* + \mathcal{H}(\Psi_i^*) - \mathcal{S}(\Psi_i^n, \Psi_i^{n-1}), \quad (6.34)$$

$$\mathcal{S}(\Psi_i^n, \Psi_i^{n-1}) = -\Xi_2(\Delta t_n, \Delta t_{n-1}) \Psi_i^n - \Xi_3(\Delta t_n, \Delta t_{n-1}) \Psi_i^{n-1}, \quad (6.35)$$

avec  $\mathcal{S}$  le terme source fixe en pseudo-temps.

Finalement, le schéma numérique consistant à l'ordre 2 en pseudo-temps s'écrit comme

$$\begin{cases} \Psi_i^{*(n,m+1)} = \Psi_i^{*(n,m)} - \Delta t_{(n,m)}^* \mathcal{H}^*(\Psi_i^{*(n,m)}), \\ p_{i\bullet}^{E,*(n,m)} = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left[ \left( \frac{\rho_{i\bullet}^{E,*(n,m)}}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] + p_0. \end{cases}, \quad (6.36)$$

où  $\mathcal{H}^*$  est défini Éq. (6.34). Ainsi, ce schéma est similaire à celui formulé Éq. (6.24) mais avec une autre expression du résidu modifié. Pour faire spécifiquement référence à la méthode SPH-ALE-DTS résultante, celle-ci est étiquetée "SPH-ALE-DTS1" et parfois plus simplement "DTS1" dans la suite du document.

### 6.2.3 Pseudo-code SPH-ALE-DTS

L'application de la technique DTS au problème implicite en temps (6.14) a permis de formuler le schéma numérique (6.24) pour  $\iota = 1$  et (6.36) pour  $\iota = 2$ . Notons que ces deux schémas sont identiques à l'expression du résidu modifié près. Ainsi, l'algorithme de résolution qui leur est associé se décline sous la même forme générique du pseudo-code Alg. 2.

---

**Algorithme 2** issu de la discrétisation en pseudo-temps du problème dual SPH-ALE par méthode RK1

---

**Entrées :**  $\Psi_i^n, \Xi_1, \mathcal{S}^n, \Delta t^*, N^*, \rho_0, p_0, c_0, \gamma$ .

- 1:  $\Psi_i^{*(n,0)} \leftarrow \Psi_i^n$ , ▷ Initialisation
  - 2:  $p_{i\bullet}^{E,*(n,0)} \leftarrow \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left[ \left( \frac{\rho_{i\bullet}^{E,*(n,0)}}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] + p_0$ ,
  - 3:  $\mathcal{H}_{(n,0)}^* \leftarrow \Xi_1 \Psi_i^{*(n,0)} + \mathcal{H}(\Psi_i^{*(n,0)}) - \mathcal{S}^n$ .
  
  - 4: **pour**  $m$  allant de 0 à  $N^* - 1$  **faire** ▷ Itérations en pseudo-temps
  - 5:  $\Psi_i^{*(n,m+1)} \leftarrow \Psi_i^{*(n,m)} - \Delta t^* \mathcal{H}_{(n,m)}^*$ ,
  - 6:  $p_{i\bullet}^{E,*(n,m+1)} \leftarrow \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left[ \left( \frac{\rho_{i\bullet}^{E,*(n,m+1)}}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] + p_0$ ,
  - 7:  $\mathcal{H}_{(n,m+1)}^* \leftarrow \Xi_1 \Psi_i^{*(n,m+1)} + \mathcal{H}(\Psi_i^{*(n,m+1)}) - \mathcal{S}^n$ .
  - 8: **fin pour**
  
  - 9:  $\Psi_i^{n+1} \leftarrow \Psi_i^{*(n,N^*)}$ , ▷ Terminaison
  - 10:  $p_{i\bullet}^{E,n+1} \leftarrow \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left[ \left( \frac{p_{i\bullet}^{E,n+1}}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] + p_0$ ,
  - 11: **retourne**  $\Psi_i^{n+1}, p_{i\bullet}^{E,n+1}$ .
- 

Considérons un indice  $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$  et une particule  $i$  quelconques. La procédure Alg. 2 consiste à déterminer la solution  $\Psi_i^{n+1}$  du problème implicite en temps physique (6.14) avec  $\iota = 1$  ou 2 par application de la technique DTS. On se donne alors le poids  $\Xi_1$  et le terme source  $\mathcal{S}^n$  déterminés selon Éq. (6.16) et (6.19) (resp. Éq. (6.27) et (6.35)) pour  $\iota = 1$  (resp.  $\iota = 2$ ). Supposons de plus disposer de la valeur discrète  $\Psi_i^n = \Psi_i(t_n)$  du vecteur des variables évalué à l'instant  $t_n$  ainsi que d'un pas en pseudo-temps constant  $\Delta t^*$  et d'un nombre de tours de boucle en pseudo-temps  $N^*$  à fournir comme paramètres d'entrée à la procédure d'Alg. 2. L'application de la technique DTS conduit ensuite à déterminer la solution du problème dual permanente en pseudo-temps. En pratique, les valeurs des paramètres  $\Delta t^*$  et  $N^*$  sont choisies conjointement et de façon ad hoc afin d'optimiser la convergence en pseudo-temps vers l'état permanent. En particulier, le dimensionnement du pas en pseudo-temps  $\Delta t^*$  vérifie la contrainte (6.25) et le nombre de tours de boucle en pseudo-temps  $N^*$  est ensuite choisi de manière à ce que la norme infinie du résidu modifié  $\left\| \mathbf{H}_{(n,N^*)}^* \right\|_\infty$  standardisée par  $\left\| \mathbf{H}_{(n,0)}^* \right\|_\infty$  soit suffisamment petite.

$$\left\| \mathbf{H}_{(n,l)}^* \right\|_\infty = \max_{(i \in P(t_{(n,l)}^*), k \in \llbracket 1, 2(d+1) \rrbracket)} |H_{ik}^*(t_{(n,l)}^*)|, \quad \forall l \in \llbracket 0, N^* \rrbracket, \quad (6.37)$$

où  $H_{ik}^* \left( t_{(n,l)}^* \right)$  désigne la  $k$ -ième composante du vecteur  $\mathcal{H}^* \left( \Psi_i^* \left( n, l \right) \right)$ .

Dans la littérature de la méthode des volumes finis, il est jugé suffisant d'assurer que la norme infinie du résidu modifié standardisée soit inférieure à  $10^{-2}$  pour tout instant  $n$ . Dans la suite du manuscrit, une configuration  $(\Delta t^*, N^*)$  est jugée admissible si la norme  $\left\| \mathbf{H}_{(n,m)}^* \right\|_{\infty} / \left\| \mathbf{H}_{(n,0)}^* \right\|_{\infty}$  converge pour tout instant vers une constante inférieure à  $10^{-2}$  lorsque  $m$  tend vers  $N^*$ . Autrement dit, l'exposant numérique de la norme infinie du résidu modifié standardisée doit se stabiliser autour d'un seuil inférieur à la valeur -2.

La résolution du problème dual par approche explicite en pseudo-temps consiste alors à construire la variable  $\Psi_i^* \left( n, N^* \right)$ . Pour cela, trois phases peuvent être distinguées. Tout d'abord, débute la phase d'initialisation des variables numériques (L.1-3) qui consiste à attribuer une valeur initiale en pseudo-temps aux données. Ainsi, la variable duale  $\Psi_i^* \left( n, 0 \right)$  est initialisée (L.1) égale à la valeur discrète  $\Psi_i^n$  évaluée au dernier instant connu  $t_n$ . L'utilisation de l'équation d'état de Tait permet alors d'initialiser (L.2) le terme de pression  $p_{i\bullet}^{E,*} \left( n, 0 \right)$ . Le résidu modifié est enfin initialisé (L.3) à partir de l'état initial déterminé (L.1) et (L.2).

Vient ensuite la phase d'itérations (L.4-8) qui met à jour en pseudo-temps les données. Numériquement, il s'agit d'une boucle d'itérations d'indice  $m$  qui est un nombre entier croissant de 0 jusqu'à  $N^* - 1$ . Ainsi, l'opération réalisée (L.5) consiste à appliquer le schéma d'intégration RK1 explicite à la variable duale  $\Psi_i^* \left( n, m+1 \right)$  pour mettre à jour sa valeur au pseudo-instant  $m + 1$ . La mise à jour des termes de pression (L.6) et du résidu modifié (L.7) est ensuite réalisée. L'ensemble de ces variables est ainsi prêt à l'emploi pour le tour de boucle en  $m$  suivant. Enfin, la phase de terminaison (L.9-11) achève la procédure de résolution. Une fois la série d'itérations en pseudo-temps terminée, la variable duale  $\Psi_i^* \left( n, N^* \right)$  ainsi que le résidu modifié  $\mathcal{H}_{(n,N^*)}^*$  sont construits. À convergence en pseudo-temps, chaque composante du résidu modifié est d'amplitude faible. Par conséquent, la variable duale  $\Psi_i^* \left( n, N^* \right)$  ainsi obtenue est la solution permanente en pseudo-temps du problème dual (6.17) (resp. (6.33)) défini pour  $\iota = 1$  (resp.  $\iota = 2$ ). La solution  $\Psi_i^{n+1}$  du problème implicite en temps physique est alors construite (L.9) égale à  $\Psi_i^* \left( n, N^* \right)$ . De plus, l'application de l'équation d'état de Tait permet d'obtenir (L.10) les termes de pression  $p_{i\bullet}^{E,n+1}$ . La procédure Alg. 2 retourne finalement la solution recherchée (L.11).

#### 6.2.4 Corrections numériques de la méthode SPH-ALE-DTS

De par son formalisme SPH, la méthode SPH-ALE-DTS présente une consistance d'ordre au plus 1. De même, cette méthode peut ne pas présenter une consistance d'ordre 0 dès lors que la distribution particulière n'assure pas un pavage de l'espace suffisamment régulier. Dans ce cas, afin d'améliorer la consistance, il s'avère nécessaire de développer des stratégies visant à corriger le mouvement des particules, la fonction noyau et/ou son gradient qui sont adaptées au formalisme DTS. En particulier, il convient de bénéficier de l'échelle pseudo-temporelle afin que de telles corrections soient réalisées sans modifier les propriétés physiques de l'écoulement, c'est-à-dire sans induire des variations artificielles observables en temps physique sur les champs des particules. L'objet de cette section est de présenter une reformulation en pseudo-temps des deux stratégies correctives détaillées section 2.5.

D'une part, procédons à la reformulation de la stratégie de correction du gradient de la fonction noyau présentée section 2.5.2. L'adaptation proposée consiste à définir le gradient corrigé en pseudo-temps  $\widetilde{\nabla}_i W_{i\bullet}^*$  de manière analogue à  $\nabla_i W_{i\bullet}$  (cf Éq. (2.18)) mais évalué avec les propriétés mises à jour en pseudo-temps. Or, le résidu modifié  $\mathcal{H}^*$  des schémas numériques (6.24) pour  $\iota = 1$  et (6.36) pour  $\iota = 2$  est une fonctionnelle dont le gradient de la fonction

noyau est une variable. Ainsi, la notation  $\mathcal{H}^* \left[ \mathbf{v}_{0,i}^* ; \widetilde{\nabla_i W_{i,\bullet}^*} \right] (\Psi_i^{*(n,m)})$  est utilisée par la suite afin d'exprimer explicitement cette dépendance. Ces schémas numériques sont alors réécrits comme suit.

$$\begin{cases} \Psi_i^{*(n,m+1)} = \Psi_i^{*(n,m)} - \Delta t_{(n,m)}^* \mathcal{H}^* \left[ \mathbf{v}_{0,i}^* ; \widetilde{\nabla_i W_{i,\bullet}^*} \right] (\Psi_i^{*(n,m)}) , \\ p_{i,\bullet}^{E,*(n,m)} = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left[ \left( \frac{\rho_{i,\bullet}^{E,*(n,m)}}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] + p_0 . \end{cases} \quad (6.38)$$

D'autre part, adaptons au formalisme DTS la stratégie de correction du mouvement des particules présentée Éq. (2.17). Pour cela, le champ de transport en pseudo-temps est défini comme suit.

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{0,i}^{*(n,m+1)} = \mathbf{v}_i^{*(n,m+1)} + \delta \mathbf{v}_{0,i}^{*(n,m+1)} , \\ \delta \mathbf{v}_{0,i}^{*(n,m+1)} = \delta \mathbf{v}_{0,i}^{*(n,m)} + P_s^* \frac{p_{\text{unif}}}{\rho_0} \mathbf{b}_i^{*(n,m)} . \end{cases} \quad (6.39)$$

où  $P_s^*$  est un coefficient empirique. Le champ de transport  $\mathbf{v}_{0,i}^*$  de la particule  $i$  est construit avec une correction  $\delta \mathbf{v}_{0,i}^*$  du mouvement pur lagrangien  $\mathbf{v}_i^*$  de manière à réduire l'erreur « *closed-box* » en pseudo-temps  $\mathbf{b}_i^*$ . Une telle approche est mathématiquement admissible pour la méthode SPH-ALE-DTS car le champ de transport est une variable arbitraire héritée du formalisme ALE utilisé pour construire le schéma numérique.

Cependant, par rapport aux descriptions pure lagrangienne et eulérienne, il a été observé que la vitesse de convergence en pseudo-temps des résidus modifiés est souvent plus faible lorsque cette correction du mouvement est activée. Or, le formalisme DTS autorise en particulier à ségréguer le traitement des itérations en pseudo-temps selon deux groupes distincts. Par exemple, une telle ségrégation peut consister à employer la correction du mouvement donnée Éq. (6.39) pour seulement une partie des itérations en pseudo-temps réalisées, pour ensuite utiliser un champ de transport constant en pseudo-temps pour d'autres itérations. En pratique, procéder ainsi permet d'optimiser la convergence en pseudo-temps vers l'état permanent. Par conséquent, c'est ainsi qu'est appliquée cette correction dans la suite du manuscrit.

Notons qu'au cours des développements conduits, les corrections données Éq. (6.38) et Éq. (6.39) ont été jugées plus efficaces quant à réduire les perturbations induites par l'erreur « *closed-box* » dans une simulation lorsque celles-ci sont utilisées conjointement. Ainsi, ces deux stratégies correctives sont employées simultanément dans la suite du manuscrit. Toutefois, les particules discrétisant une surface libre (resp. une condition entrée) ainsi que celles dont au moins une voisine est considérée à la surface libre (resp. à l'entrée) sont exemptées de ce traitement afin que cette interface conserve une cinématique purement lagrangienne. La détection de telles interfaces est réalisée selon l'algorithme proposé par S. Marrone *et al.* [49]. Ainsi, pour toute autre particule  $i$ , le schéma numérique résultant peut être présenté selon l'algorithme de résolution Alg. 3. Il consiste à déterminer la solution permanente en pseudo-temps du problème dual formé des équations (6.38) et (6.39). Ses paramètres d'entrée sont ceux introduits Alg. 2, ainsi que deux nombres  $N_1^*$  et  $N_2^*$  de tours de boucle en pseudo-temps dédiés respectivement à la phase avec et sans correction du mouvement. En pratique, les valeurs des paramètres  $\Delta t^*$ ,  $N_1^*$  et  $N_2^*$  sont choisies conjointement et de façon ad hoc afin d'optimiser la convergence en pseudo-temps vers l'état permanent. Le dimensionnement du pas en pseudo-temps  $\Delta t^*$  vérifie la contrainte (6.25), puis ensuite la valeur de  $N_1^*$  est décidée empiriquement afin d'assurer une correction du mouvement qui soit jugée satisfaisante a posteriori et le nombre de tours de boucle en pseudo-temps  $N_2^*$  est choisi de manière à ce que la norme infinie du résidu modifié  $\left\| \mathbf{H}_{(n, N_1^* + N_2^*)}^* \right\|_\infty$  standardisée par  $\left\| \mathbf{H}_{(n,0)}^* \right\|_\infty$  soit suffisamment petite (cf section 6.2.3).

La résolution du problème dual par approche explicite en pseudo-temps consiste alors à construire la variable  $\Psi_i^*(n, N_1^* + N_2^*)$ . Pour cela, quatre phases peuvent être distinguées.

Tout d'abord, débute la phase d'initialisation des variables numériques (L.1-5) qui consiste à attribuer une valeur initiale en pseudo-temps aux données. En particulier, le résidu modifié est initialisé (L.5) à partir de l'état initial déterminé (L.1-4).

Vient ensuite la première phase d'itérations (L.6-12) qui met à jour en pseudo-temps les données. Les corrections du gradient de la fonction noyau et du mouvement des particules sont actives, celles-ci se déplacent alors selon un champ de transport variable en pseudo-temps. Numériquement, il s'agit d'une boucle d'itérations d'indice  $m$  qui est un nombre entier croissant de 0 jusqu'à  $N_1^* - 1$ . Ainsi, l'opération réalisée (L.7) consiste à appliquer le schéma d'intégration RK1 explicite à la variable duale  $\Psi_i^*(n, m+1)$  pour mettre à jour sa valeur au pseudo-instant  $m + 1$ . La mise à jour des termes de pression (L.8), de la correction du mouvement (L.9), du champ de transport (L.10) et du résidu modifié (L.11) est ensuite réalisée. La valeur du champ de transport obtenue à l'issue de cette phase est supposée suffisamment convergée en pseudo-temps pour être considérée constante dans la suite de la routine.

Une seconde phase d'itérations (L.13-18) est réalisée afin d'assurer la convergence en pseudo-temps des résidus modifiés. Seule la correction du gradient de la fonction noyau est active. De plus, les particules demeurent fixes en pseudo-temps car le champ de transport ne varie plus. Numériquement, il s'agit d'une boucle d'itérations d'indice  $m$  qui est un nombre entier croissant de  $N_1^*$  jusqu'à  $N_1^* + N_2^* - 1$ . Ainsi, l'opération réalisée (L.14) consiste à appliquer le schéma d'intégration RK1 explicite à la variable duale  $\Psi_i^*(n, m+1)$  pour mettre à jour sa valeur au pseudo-instant  $m + 1$ . La mise à jour des termes de pression (L.15) et du résidu modifié (L.17) est ensuite réalisée. Les résidus modifiés sont supposés suffisamment convergés en pseudo-temps à l'issue de cette phase, de manière à ce que l'état permanent soit jugé atteint.

Enfin, la phase de terminaison (L.19-21) achève la procédure de résolution. Une fois la série d'itérations en pseudo-temps terminée, la variable duale  $\Psi_i^*(n, N_1^* + N_2^*)$  ainsi que le résidu modifié  $\mathcal{H}_{(n, N_1^* + N_2^*)}^*$  sont construits. À convergence en pseudo-temps, chaque composante du résidu

modifié est d'amplitude faible. Par conséquent, la variable duale  $\Psi_i^*(n, N_1^* + N_2^*)$  ainsi obtenue est la solution permanente en pseudo-temps du problème dual (6.38)-(6.39). La solution  $\Psi_i^{n+1}$  du problème implicite en temps physique est alors construite (L.19) égale à  $\Psi_i^*(n, N_1^* + N_2^*)$ . De plus, l'application de l'équation d'état de Tait permet d'obtenir (L.20) les termes de pression  $p_{i\bullet}^{E, n+1}$ . La procédure Alg. 3 retourne finalement la solution recherchée (L.21).



---

**Algorithme 3** associé à la méthode numérique SPH-ALE-DTS avec corrections du mouvement des particules et du gradient de la fonction noyau opérées en pseudo-temps.

---

**Entrées :**  $\Psi_i^n$ ,  $\Xi_1$ ,  $\mathcal{S}^n$ ,  $\Delta t^*$ ,  $N_1^*$ ,  $N_2^*$ ,  $p_{\text{unif}}$ ,  $\rho_0$ ,  $p_0$ ,  $P_s^*$ .

- 1:  $\Psi_i^{*(n,0)} \leftarrow \Psi_i^n$ , ▷ Initialisation
  - 2:  $p_{i\bullet}^{E,*(n,0)} \leftarrow p_{\text{unif}} \left[ \left( \frac{\rho_{i\bullet}^{E,*(n,0)}}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] + p_0$ ,
  - 3:  $\delta \mathbf{v}_{0,i}^{*(n,0)} \leftarrow 0$ ,
  - 4:  $\mathbf{v}_{0,i}^{*(n,0)} \leftarrow \mathbf{v}_i^{*(n,0)} + \delta \mathbf{v}_{0,i}^{*(n,0)}$ ,
  - 5:  $\mathcal{H}_{(n,0)}^* \leftarrow \Xi_1 \Psi_i^{*(n,0)} + \mathcal{H} \left[ \mathbf{v}_{0,i}^* ; \widetilde{\nabla_i W_{i\bullet}^*} \right] (\Psi_i^{*(n,0)}) - \mathcal{S}^n$ .
  
  - 6: **pour**  $m$  allant de 0 à  $N_1^* - 1$  **faire** ▷ Itérations en pseudo-temps
  - 7:  $\Psi_i^{*(n,m+1)} \leftarrow \Psi_i^{*(n,m)} - \Delta t^* \mathcal{H}_{(n,m)}^*$ ,
  - 8:  $p_{i\bullet}^{E,*(n,m+1)} \leftarrow p_{\text{unif}} \left[ \left( \frac{\rho_{i\bullet}^{E,*(n,m+1)}}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] + p_0$ ,
  - 9:  $\delta \mathbf{v}_{0,i}^{*(n,m+1)} \leftarrow \delta \mathbf{v}_{0,i}^{*(n,m)} + P_s^* \frac{p_{\text{unif}}}{\rho_0} \mathbf{b}_i^{*(n,m)}$ ,
  - 10:  $\mathbf{v}_{0,i}^{*(n,m+1)} \leftarrow \mathbf{v}_i^{*(n,m+1)} + \delta \mathbf{v}_{0,i}^{*(n,m+1)}$ , ▷ Champ de transport variable
  - 11:  $\mathcal{H}_{(n,m+1)}^* \leftarrow \Xi_1 \Psi_i^{*(n,m+1)} + \mathcal{H} \left[ \mathbf{v}_{0,i}^* ; \widetilde{\nabla_i W_{i\bullet}^*} \right] (\Psi_i^{*(n,m+1)}) - \mathcal{S}^n$ .
  - 12: **fin pour**
  
  - 13: **pour**  $m$  allant de  $N_1^*$  à  $N_1^* + N_2^* - 1$  **faire** ▷ Itérations en pseudo-temps
  - 14:  $\Psi_i^{*(n,m+1)} \leftarrow \Psi_i^{*(n,m)} - \Delta t^* \mathcal{H}_{(n,m)}^*$ ,
  - 15:  $p_{i\bullet}^{E,*(n,m+1)} \leftarrow p_{\text{unif}} \left[ \left( \frac{\rho_{i\bullet}^{E,*(n,m+1)}}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] + p_0$ ,
  - 16:  $\mathbf{v}_{0,i}^{*(n,m+1)} \leftarrow \mathbf{v}_{0,i}^{*(n,m)}$ , ▷ Champ de transport constant
  - 17:  $\mathcal{H}_{(n,m+1)}^* \leftarrow \Xi_1 \Psi_i^{*(n,m+1)} + \mathcal{H} \left[ \mathbf{v}_{0,i}^* ; \widetilde{\nabla_i W_{i\bullet}^*} \right] (\Psi_i^{*(n,m+1)}) - \mathcal{S}^n$ .
  - 18: **fin pour**
  
  - 19:  $\Psi_i^{n+1} \leftarrow \Psi_i^{*(n,N_1^*+N_2^*)}$ , ▷ Terminaison
  - 20:  $p_{i\bullet}^{E,n+1} \leftarrow p_{\text{unif}} \left[ \left( \frac{p_{i\bullet}^{E,n+1}}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] + p_0$ ,
  - 21: **retourne**  $\Psi_i^{n+1}$ ,  $p_{i\bullet}^{E,n+1}$ .
-

## 6.3 Validations numériques

La pertinence des techniques multi-résolutions en temps pour la méthode SPH-ALE est analysée dans cette section. Dans ce qui suit, l'appellation DTS0 (resp. DTS1) fait référence au formalisme SPH-ALE-DTS consistant à l'ordre 1 (resp. ordre 2) en temps. Les cas tests numériques sont ordonnés selon une démarche de complexification progressive.

### 6.3.1 Écoulement quasi-1D dans un tube à choc

L'objectif de cette section est de montrer les capacités de la SPH-ALE-DTS à simuler un cas eulérien d'écoulement quasi-1D dans un tube à choc. Ce premier cas sert à valider l'implémentation informatique et démontre la faisabilité d'un apport dû aux techniques multi-résolutions en temps pour la méthode SPH-ALE.

#### Paramétrisation

La configuration générale du cas test est détaillée section 3.1. Des compléments de la paramétrisation numérique utiles aux simulations SPH-ALE-DTS avec Alg. 2 sont précisés ci-après. Pour réaliser une simulation SPH-ALE-DTS, il faut se munir d'une discrétisation en temps et en pseudo-temps. Les pas en temps et en pseudo-temps sont dimensionnés comme égaux à la borne inférieure de la contrainte (2.10) et (6.25), respectivement. Ainsi, paramétrer une simulation SPH-ALE-DTS consiste à définir les coefficients  $K_{\text{CFL}}$  et  $K_{\text{CFL}}^*$  ainsi qu'un nombre d'itérations pseudo-temporelles  $N^*$ . Les différentes paramétrisations utilisées par la suite pour traiter ce cas test sont répertoriées Tab. 6.1.

Paramétrisations DTS0			Paramétrisations DTS1		
$K_{\text{CFL}}$	$K_{\text{CFL}}^*$	$N^*$	$K_{\text{CFL}}$	$K_{\text{CFL}}^*$	$N^*$
0,02	0,02	20	0,02	0,01	20
0,2	0,2	50	0,2	0,1	50
1	0,2	500	1	0,2	500
3	0,2	500	3	0,2	500
5	0,2	1000	5	0,2	1000

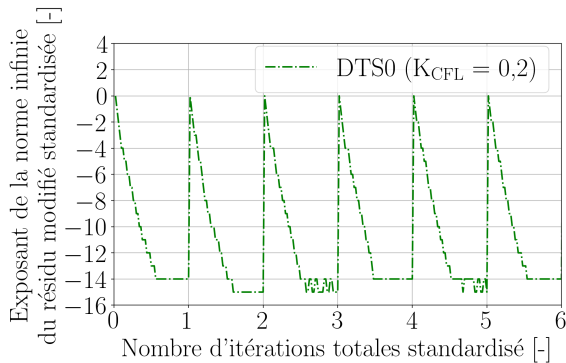
TABLE 6.1 – Cas test numérique du tube à choc : paramétrisation des échelles temporelles et pseudo-temporelles des simulations SPH-ALE-DTS.

Dans la communauté SPH, la valeur de  $K_{\text{CFL}}$  est en général limitée à 0,2 (resp. 0,3) environ pour un schéma numérique dont l'intégration temporelle a été réalisée par une approche RK1 explicite (resp. RK3 explicite) afin d'en garantir la stabilité. Une des motivations à l'origine du développement de la méthode SPH-ALE-DTS est de pouvoir demeurer stable pour une valeur de  $K_{\text{CFL}}$  dépassant la limite ad hoc de 0,3. Dans ce qui suit, les valeurs  $0,02 \leq K_{\text{CFL}} \leq 5$  sont utilisées afin de vérifier si le schéma numérique présente bien une stabilité inconditionnelle. En particulier, utiliser  $K_{\text{CFL}} = 4$  pour le dimensionnement (2.10) des pas en temps physiques traduit que les ondes acoustiques issues d'une particule peuvent être influencées par les ondes issues des particules situées bien au-delà de son support, localisées à une distance valant jusqu'au double du rayon de lissage. Ainsi, majorer la valeur  $K_{\text{CFL}}$  par 5 est jugé suffisant pour réaliser cette étude.

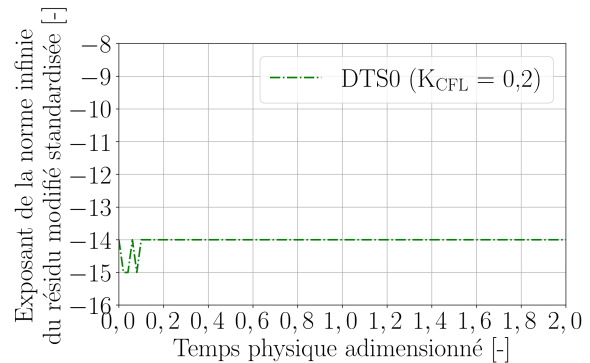
Une étude de l'évolution (pseudo-)temporelle de l'exposant numérique de la norme infinie du résidu modifié standardisée permet de vérifier a posteriori qu'une configuration  $(K_{\text{CFL}}^*, N^*)$  associée à un coefficient  $K_{\text{CFL}}$  donné est admissible (cf section 6.2.3). D'une part, il est utile d'étudier la convergence en pseudo-temps  $m$  de la métrique  $\left\| \mathbf{H}_{(n,m)}^* \right\|_{\infty} / \left\| \mathbf{H}_{(n,0)}^* \right\|_{\infty}$  pour un instant  $n$  donné (cf Éq. (6.37)), afin de déterminer si le nombre d'itérations en pseudo-temps  $N^*$  est suffisant pour minimiser cette métrique sous la contrainte du pas en pseudo-temps imposé par un  $K_{\text{CFL}}^*$  donné. Pour cela, le profil associé à cette métrique est représenté en fonction du nombre d'itérations  $(N^* \times n + m)/N^*$  cumulées en temps et pseudo-temps, standardisé par  $N^*$ . D'autre part, il est utile d'étudier l'évolution en temps  $n$  de la métrique  $\left\| \mathbf{H}_{(n,N^*)}^* \right\|_{\infty} / \left\| \mathbf{H}_{(n,0)}^* \right\|_{\infty}$ , afin de déterminer si la configuration  $(K_{\text{CFL}}^*, N^*)$  est admissible. Pour cela, le profil associé à cette métrique est représenté en fonction du temps adimensionné  $t_{\text{adim}}$ .

L'étude de l'évolution (pseudo-)temporelle de l'exposant numérique de la norme infinie du résidu modifié standardisée a été réalisée pour l'ensemble des paramétrisations présentées Tab. 6.1. En bref, chaque configuration a été jugée admissible. Par simplicité, seules les études associées aux simulations DTS0 avec les extrêmes  $K_{\text{CFL}} = 0, 2$  et  $K_{\text{CFL}} = 5$  sont analysées dans ce qui suit.

Les profils issus de la simulation DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 0, 2$ ) sont représentés Fig. 6.1. Par soucis de lisibilité, le profil Fig. 6.1a est restreint aux premières itérations totales. Pour un instant  $n$  donné, la métrique  $\left\| \mathbf{H}_{(n,m)}^* \right\|_{\infty} / \left\| \mathbf{H}_{(n,0)}^* \right\|_{\infty}$  est initialement égale à 1 pour  $m = 0$ . Celle-ci tend ensuite vers 0 lorsque  $m$  augmente. Enfin, cette métrique sature au zéro à l'unité d'arrondi machine près pour  $m$  suffisamment grand. Ainsi, le nombre d'itérations en pseudo-temps  $N^*$  est jugé suffisant. Par ailleurs, le profil représenté Fig. 6.1b indique que la norme infinie du résidu modifié standardisée est proche de zéro à l'unité d'arrondi machine près tout au long de la simulation. En bref, la configuration  $(K_{\text{CFL}}^* = 0, 2, N^* = 50)$  est jugée admissible pour réaliser la simulation DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 0, 2$ ).



(a) En fonction du nombre d'itérations cumulées en temps et pseudo-temps standardisé.

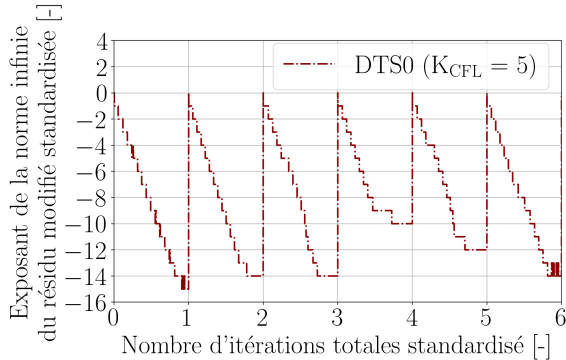


(b) En fonction du temps physique adimensionné.

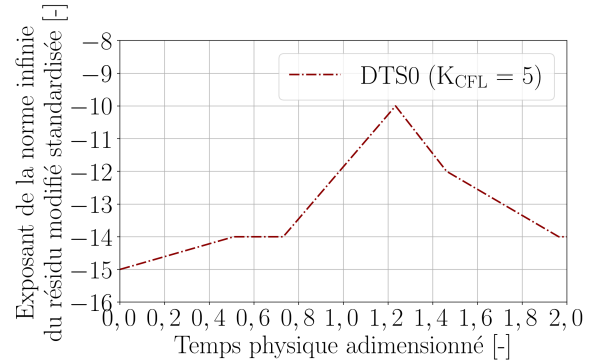
FIGURE 6.1 – Cas test numérique du tube à choc : évolution en (pseudo-)temps de la norme infinie du résidu modifié standardisée de la simulation DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 0, 2$ ).

De même, les profils issus de la simulation DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 5$ ) sont représentés Fig. 6.2. La métrique  $\left\| \mathbf{H}_{(n,m)}^* \right\|_{\infty} / \left\| \mathbf{H}_{(n,0)}^* \right\|_{\infty}$  sature aussi pour  $m$  suffisamment grand. Ainsi, le nombre d'itérations en pseudo-temps  $N^*$  est jugé suffisant. Toutefois, on note que la configuration utilisée n'assure pas toujours la convergence vers zéro à l'unité d'arrondi machine près pour tout instant  $n$ . Par exemple, la valeur de l'exposant n'est que de -10 pour la quatrième unité d'itération totale standardisée. C'est tout de même nettement inférieure à la limite ad hoc -2

décidée précédemment. Par ailleurs, le profil représenté Fig. 6.2b indique que la norme infinie du résidu modifié standardisée est suffisamment faible tout au long de la simulation. En bref, la configuration ( $K_{\text{CFL}}^* = 0, 2$ ,  $N^* = 1000$ ) est jugée admissible pour réaliser la simulations DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 5$ ).



(a) En fonction du nombre d'itérations cumulées en temps et pseudo-temps standardisé.



(b) En fonction du temps physique adimensionné.

FIGURE 6.2 – Cas test numérique du tube à choc : évolution en (pseudo-)temps de la norme infinie du résidu modifié standardisée de la simulation DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 5$ ).

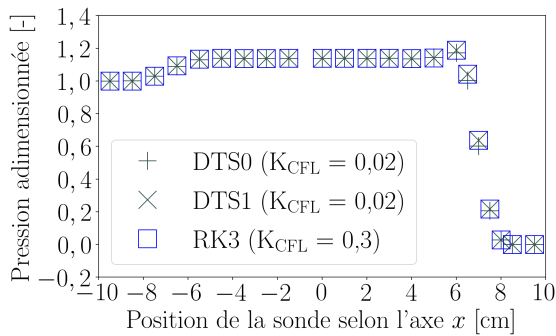
Finalement, les paramétrisations ( $K_{\text{CFL}}$ ,  $K_{\text{CFL}}^*$ ,  $N^*$ ) présentées Tab. 6.1 sont jugées satisfaisantes pour cette étude. À coefficient  $K_{\text{CFL}}$  fixe, il est à noter que la configuration ( $K_{\text{CFL}}^*$ ,  $N^*$ ) utilisée n'est pas la seule admissible et qu'elle n'est pas nécessairement optimale en terme de complexité computationnelle.

## Performance

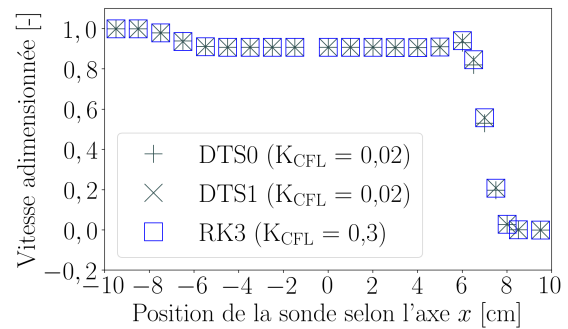
Étudions la performance de la méthode SPH-ALE-DTS à simuler la physique de l'écoulement dans le tube à choc. Tout d'abord, vérifions que les schémas numériques SPH-ALE (RK1, RK3) et SPH-ALE-DTS (DTS0, DTS1) convergent vers la même approximation lorsque le pas de discrétisation en temps tend vers zéro. Cette propriété locale d'un schéma numérique s'appelle la consistance temporelle. Fig. 6.3a (resp. Fig. 6.3b) présente le profil de pression statique (resp. de la norme du vecteur vitesse) à l'instant  $t_{\text{adim}} = 1, 5$  obtenu pour la discrétisation  $N$  avec les schémas DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 0, 02$ ) et DTS1 ( $K_{\text{CFL}} = 0, 02$ ), comparés à la référence numérique RK3 ( $K_{\text{CFL}} = 0, 3$ ).

Le profil de pression statique, le profil de la norme du vecteur vitesse, la position et la raideur des ondes de choc prédits par DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 0, 02$ ) et DTS1 ( $K_{\text{CFL}} = 0, 02$ ) concordent entre eux et à la référence RK3 ( $K_{\text{CFL}} = 0, 3$ ). Les profils issus de la simulation RK3 ( $K_{\text{CFL}} \leq 0, 3$ ) sont numériquement identiques (non présenté). Par simplicité, l'étiquette RK3 ( $K_{\text{CFL}} = 0, 3$ ) est utilisée. De même, il a été vérifié par ailleurs (non illustré) que les profils issus de la simulation RK1 ( $K_{\text{CFL}} = 0, 02$ ) sont quasi-identiques à ceux de RK3 ( $K_{\text{CFL}} \leq 0, 3$ ). Ainsi, les schémas numériques SPH-ALE (RK1, RK3) et SPH-ALE-DTS (DTS0, DTS1) convergent vers la même approximation lorsque le pas de discrétisation en temps tend vers zéro. Ce résultat valide l'implémentation de la SPH-ALE-DTS dans le solveur ASPHODEL<sup>©</sup>.

Vérifions que la méthode SPH-ALE-DTS présente une stabilité inconditionnelle au coefficient  $K_{\text{CFL}}$  paramétrisant l'échelle temporelle. Dans ce qui suit, les valeurs  $0, 02 \leq K_{\text{CFL}} \leq 5$  sont utilisées. Fig. 6.4a (resp. Fig. 6.4b) présente le profil de pression statique (resp. de la norme du vecteur vitesse) à l'instant  $t_{\text{adim}} = 1, 5$  obtenu pour la discrétisation  $N$  avec le schéma DTS0, comparé à la solution analytique.

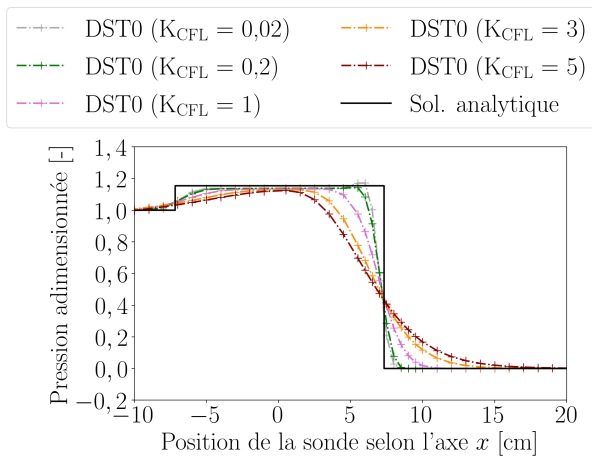


(a) Profil de pression statique adimensionnée.

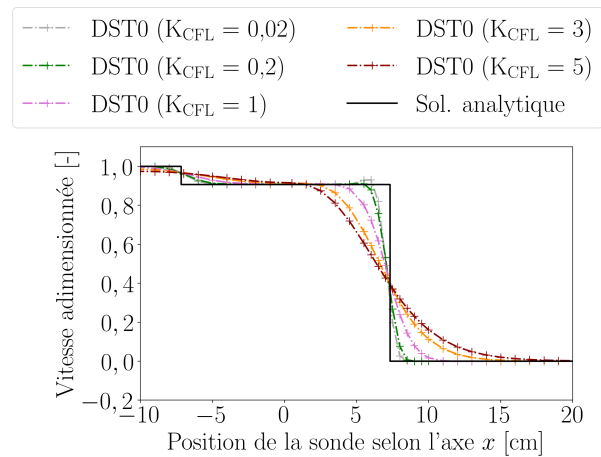


(b) Profil de la norme du vecteur vitesse adimensionnée.

FIGURE 6.3 – Cas test numérique du tube à choc : profils instantanés à  $t_{\text{adim}} = 1,5$ . Comparaison de la solutions SPH-ALE uniforme N avec schéma RK3 (carrés bleus) aux solutions SPH-ALE-DTS uniformes N avec schéma DTS0 (plus gris) et DTS1 (croix grises).



(a) Profil de pression statique adimensionnée.



(b) Profil de la norme du vecteur vitesse adimensionnée.

FIGURE 6.4 – Cas test numérique du tube à choc : profils instantanés à  $t_{\text{adim}} = 1,5$ . Comparaison de la solution analytique (ligne continue noire) et des solutions SPH-ALE-DTS uniforme N avec schéma DTS0 (ligne discontinue de plus) où  $0,02 \leq K_{\text{CFL}} \leq 5$ .

Le profil de pression statique, le profil de la norme du vecteur vitesse, la position et la raideur des ondes de choc prédites par DTS0 ( $K_{CFL} = 0,02$ ) sont cohérents avec ceux de la solution analytique. On observe ensuite une évolution monotone des profils en fonction de la valeur de  $K_{CFL}$ . En particulier, les ondes de choc prédites par DTS0 sont de moins en moins raides à mesure que le coefficient  $K_{CFL}$  augmente. Autrement dit, la propension de DTS0 à filtrer temporellement les phénomènes hautes fréquences de l'écoulement s'accroît progressivement lorsque le pas de discrétisation de l'échelle temporelle augmente. Par ailleurs, il devient difficile de retrouver les positions des ondes de choc prédites par la solution analytique à partir des profils issus de DTS0 pour une grande valeur de  $K_{CFL}$ . Toutefois, quelle que soit la valeur  $0,02 \leq K_{CFL} \leq 5$  considérée, aucun signe d'instabilité du schéma numérique DTS0 n'est observé. En description eulérienne, il est ainsi jugé inconditionnellement stable au coefficient  $K_{CFL}$ .

Fig. 6.5a (resp. Fig. 6.5b) présente le profil de pression statique (resp. de la norme du vecteur vitesse) à l'instant  $t_{adim} = 1,5$  obtenu pour la discrétisation  $N$  avec le schéma DTS1, comparé à la solution analytique.

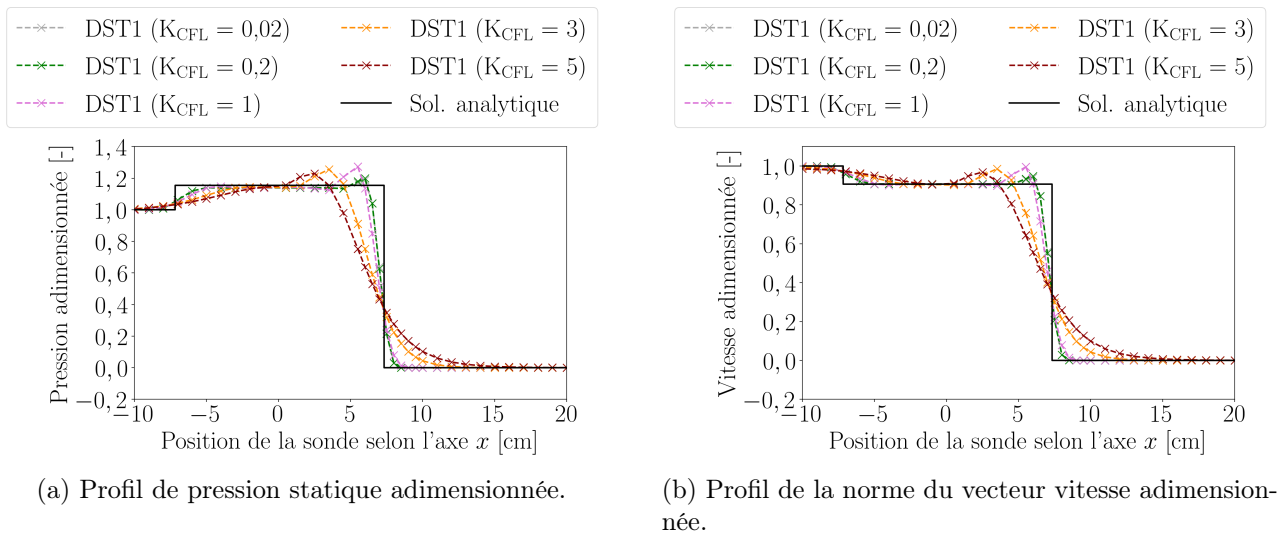
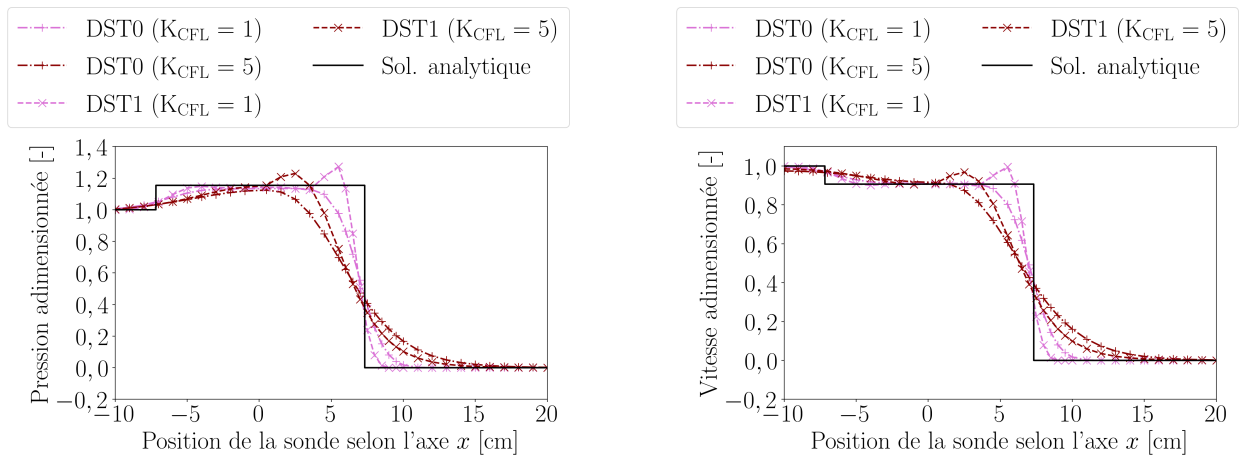


FIGURE 6.5 – Cas test numérique du tube à choc : profils instantanés à  $t_{adim} = 1,5$ . Comparaison de la solution analytique (ligne continue noire) et des solutions SPH-ALE-DTS uniforme  $N$  avec schéma DTS1 (ligne discontinue de croix) où  $0,02 \leq K_{CFL} \leq 5$ .

L'interprétation des résultats de DTS1 est globalement analogue à celle des résultats de DTS0. Le profil de pression statique, le profil de la norme du vecteur vitesse, la position et la raideur des ondes de choc prédites par DTS1 ( $K_{CFL} = 0,02$ ) sont cohérents avec ceux de la solution analytique. On observe ensuite une évolution monotone des profils en fonction de la valeur de  $K_{CFL}$ . En particulier, les ondes de choc prédites par DTS1 sont de moins en moins raides à mesure que le coefficient  $K_{CFL}$  augmente. Autrement dit, la propension de DTS1 à filtrer temporellement les phénomènes hautes fréquences de l'écoulement s'accroît progressivement lorsque le pas de discrétisation de l'échelle temporelle grandit. Par ailleurs, les profils présentent un dépassement variable à mesure que  $K_{CFL}$  augmente. On constate ainsi que son amplitude augmente pour  $0,02 \leq K_{CFL} \leq 1$  puis diminue légèrement par la suite. De plus, ce dépassement présente un étalement spatial grandissant pour  $0,02 \leq K_{CFL} \leq 5$ . Toutefois, la nature du dépassement observé n'est pas un signe d'instabilité du schéma numérique DTS1. Il s'agit d'un trait usuel chez les simulations tentant de reproduire des ondes non-linéaires et des discontinuités à l'aide d'un schéma numérique d'ordre élevé. En effet, pour discrétiser une discontinuité par

une approximation suffisamment raide, le schéma numérique induit des oscillations en amont et aval de sa position. Dans ce cas, un dépassement apparaît en amont de la discontinuité. Quelle que soit la valeur  $0,02 \leq K_{\text{CFL}} \leq 5$  considérée, aucun signe d'instabilité du schéma numérique DTS1 n'est observé. En description eulérienne, il est ainsi jugé inconditionnellement stable au coefficient  $K_{\text{CFL}}$ .

Enfin, jugeons l'apport de la formulation d'ordre 1 en temps physique (DTS1) par rapport à la formulation d'ordre 0 (DTS0). Fig. 6.6a (resp. Fig. 6.6b) présente le profil de pression statique (resp. de la norme du vecteur vitesse) à l'instant  $t_{\text{adim}} = 1,5$  obtenu pour la discrétisation  $N$  avec le schéma DTS1, comparé au schéma DTS0 et à la solution analytique.



(a) Profil de pression statique adimensionnée.

(b) Profil de la norme du vecteur vitesse adimensionnée.

FIGURE 6.6 – Cas test numérique du tube à choc : profils instantanés à  $t_{\text{adim}} = 1,5$ . Comparaison de la solution analytique (ligne continue noire), de la solution SPH-ALE-DTS uniforme  $N$  avec schéma DTS0 (ligne discontinue de plus) et DTS1 (ligne discontinue de croix) où  $K_{\text{CFL}} = 1$  (en rose) ou  $K_{\text{CFL}} = 5$  (en rouge).

Le profil de pression statique, le profil de la norme du vecteur vitesse, la position et la raideur des ondes de choc prédites par DTS1 sont presque identiques à ceux de DTS0 lorsque  $K_{\text{CFL}} = 0,02$  et  $K_{\text{CFL}} = 0,2$  (non illustré). Cependant, les schémas DTS1 et DTS0 présentent une sensibilité numérique différente au coefficient  $K_{\text{CFL}}$  lorsque  $1 \leq K_{\text{CFL}} \leq 5$ . On observe alors que pour une valeur de  $K_{\text{CFL}}$  donnée, la position et la raideur des ondes de choc prédites par DTS1 sont d'avantage cohérents avec celles de la solution analytique que ne le sont les prédictions de DTS0. Dans l'ensemble, DTS1 est ainsi jugée plus performante que DTS0 pour une complexité computationnelle équivalente. Toutefois, la performance de DTS0 est également jugée acceptable pour la simulation d'un cas eulérien d'écoulement quasi-1D dans un tube à choc. L'auteur est ainsi confiant de recourir à l'un ou l'autre par la suite.

### 6.3.2 Écoulement 2D dans un canal oscillant

L'analyse de la robustesse de la SPH-ALE-DTS est approfondie dans cette section grâce à la simulation lagrangienne 2D d'un canal oscillant. L'objectif est d'étudier la capacité de cette technique multi-résolutions en temps à conduire une simulation lagrangienne d'un écoulement présentant une dynamique lente.



## Paramétrisation

La configuration générale du cas test est détaillée section 3.2. Des compléments de la paramétrisation numérique utiles aux simulations SPH-ALE-DTS avec Alg. 2 sont précisés ci-après. Paramétriser une simulation SPH-ALE-DTS consiste à définir les coefficients  $K_{\text{CFL}}$  et  $K_{\text{CFL}}^*$  ainsi qu'un nombre d'itérations pseudo-temporelles  $N^*$ . Les différentes paramétrisations utilisées par la suite pour traiter ce cas test sont répertoriées Tab. 6.2.

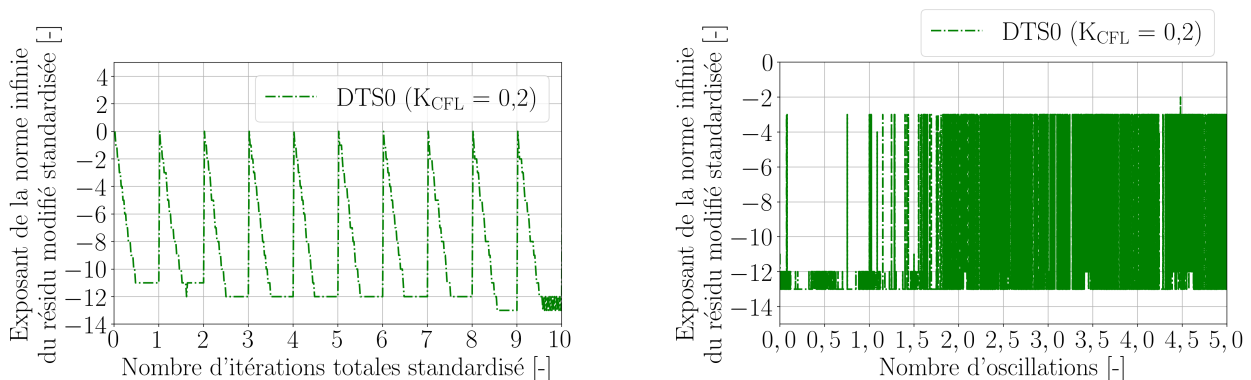
Paramétrisations DTS0			Paramétrisations DTS1		
$K_{\text{CFL}}$	$K_{\text{CFL}}^*$	$N^*$	$K_{\text{CFL}}$	$K_{\text{CFL}}^*$	$N^*$
0,2	0,2	50	0,2	0,1	50
1	0,2	200	1	0,2	200
2	0,2	500	2	0,2	500

TABLE 6.2 – Cas test numérique du canal oscillant : paramétrisation des échelles temporelles et pseudo-temporelles des simulations SPH-ALE-DTS.

Dans ce qui suit, les valeurs  $0,2 \leq K_{\text{CFL}} \leq 2$  sont utilisées afin de vérifier si le schéma numérique présente bien une stabilité inconditionnelle à ce paramètre. En particulier, utiliser  $K_{\text{CFL}} = 2$  pour le dimensionnement (2.10) des pas en temps physiques traduit que les ondes acoustiques issues d'une particule ne peuvent être influencées que par les ondes issues des particules situées au sein de son support, i.e. localisées jusqu'à une distance valant le rayon de lissage. Des considérations faites sur le cas du tube à choc (cf section 6.3.1), majorer la valeur  $K_{\text{CFL}}$  par 2 est jugé suffisant pour réaliser cette étude.

L'étude de l'évolution (pseudo-)temporelle de l'exposant numérique de la norme infinie du résidu modifié standardisée a été réalisée pour l'ensemble des paramétrisations présentées Tab. 6.2. En bref, chaque configuration a été jugée admissible (cf section 6.2.3). Par simplicité, seules les études associées aux simulations DTS0 avec les extrêmes  $K_{\text{CFL}} = 0,2$  et  $K_{\text{CFL}} = 2$  sont analysées dans ce qui suit.

Les profils issus de la simulation DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 0,2$ ) sont représentés Fig. 6.7.



(a) En fonction du nombre d'itérations cumulées en temps et pseudo-temps standardisé.

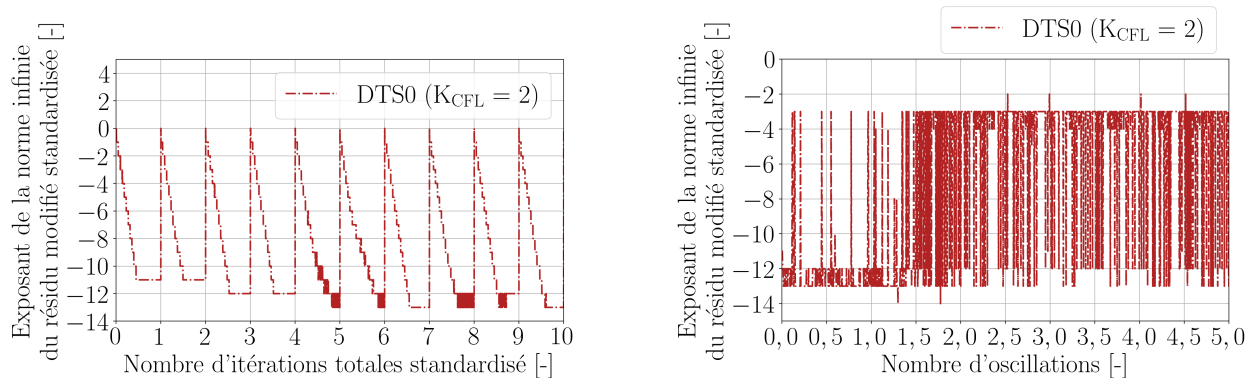
(b) En fonction du temps physique adimensionné.

FIGURE 6.7 – Cas test numérique du canal oscillant : évolution en (pseudo-)temps de la norme infinie du résidu modifié standardisée de la simulation DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 0,2$ ).

Par soucis de lisibilité, le profil Fig. 6.7a est restreint aux premières itérations totales et le profil Fig. 6.7b est limité aux cinq premières périodes d'oscillation. Pour un instant  $n$  donné,

la métrique  $\left\| \mathbf{H}_{(n,m)}^* \right\|_{\infty} / \left\| \mathbf{H}_{(n,0)}^* \right\|_{\infty}$  sature au zéro à l'unité d'arrondi machine près pour  $m$  suffisamment grand. Ainsi, le nombre d'itérations en pseudo-temps  $N^*$  est jugé suffisant. Par ailleurs, le profil représenté Fig. 6.7b indique que la norme infinie du résidu modifié standardisée est proche de zéro à l'unité d'arrondi machine près tout au long de la simulation, sauf en quelques instants pour lesquels la valeur de l'exposant est d'environ -3. C'est tout de même inférieure à la limite ad hoc -2 décidée précédemment. En bref, la configuration ( $K_{\text{CFL}}^* = 0, 2$ ,  $N^* = 50$ ) est jugée admissible pour réaliser la simulation DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 0, 2$ ).

De même, les profils issus de la simulation DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 2$ ) sont représentés Fig. 6.8. La métrique  $\left\| \mathbf{H}_{(n,m)}^* \right\|_{\infty} / \left\| \mathbf{H}_{(n,0)}^* \right\|_{\infty}$  sature aussi pour  $m$  suffisamment grand. Ainsi, le nombre d'itérations en pseudo-temps  $N^*$  est jugé suffisant. On note Fig. 6.8b que la configuration utilisée n'assure pas toujours la convergence vers zéro à l'unité d'arrondi machine près pour tout instant. Cependant, cela reste suffisamment faible tout au long de la simulation. Ainsi, la configuration ( $K_{\text{CFL}}^* = 0, 2$ ,  $N^* = 500$ ) est jugée admissible pour réaliser les simulations DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 2$ ).



(a) En fonction du nombre d'itérations cumulées en temps et pseudo-temps standardisé.

(b) En fonction du temps physique adimensionné.

FIGURE 6.8 – Cas test numérique du canal oscillant : évolution en (pseudo-)temps de la norme infinie du résidu modifié standardisée de la simulation DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 2$ ).

Finalement, les paramétrisations ( $K_{\text{CFL}}$ ,  $K_{\text{CFL}}^*$ ,  $N^*$ ) présentées Tab. 6.2 sont jugées satisfaisantes pour cette étude. À coefficient  $K_{\text{CFL}}$  fixe, la configuration ( $K_{\text{CFL}}^*$ ,  $N^*$ ) utilisée n'est pas la seule admissible et n'est pas nécessairement optimale en terme de complexité computationnelle.

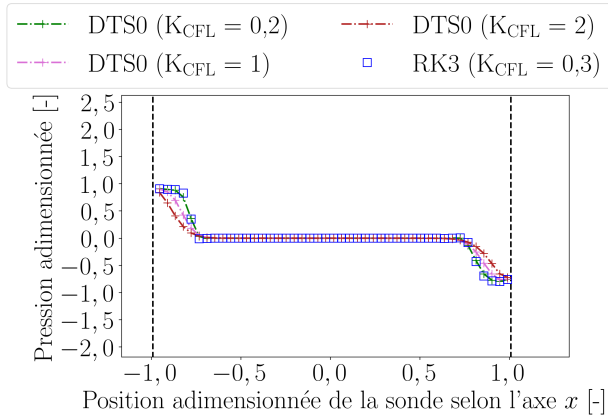
## Performance

Observons la performance de la méthode SPH-ALE-DTS à simuler la physique de l'écoulement dans le canal au cours de la première oscillation des pistons. Vérifions également que la méthode SPH-ALE-DTS présente une stabilité inconditionnelle au coefficient  $K_{\text{CFL}}$  paramétrisant l'échelle temporelle. Dans ce qui suit, les valeurs  $0, 2 \leq K_{\text{CFL}} \leq 2$  sont utilisées afin de caractériser la performance des schémas numériques DTS0 et DTS1.

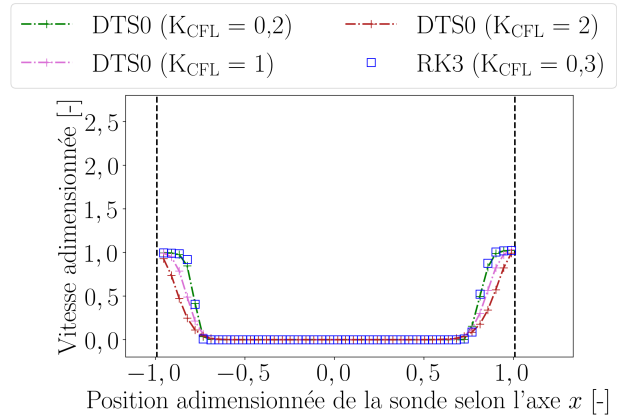
Tout d'abord, étudions l'évolution des perturbations de l'écoulement. Il convient alors d'observer l'initialisation des perturbations à  $t_{\text{adim}} = 0, 025$  (i.e. après 7 pas de temps avec  $K_{\text{CFL}} = 1$ ), puis leur superposition à  $t_{\text{adim}} = 0, 125$  et enfin l'état en fin de demi-période à  $t_{\text{adim}} = 0, 5$  pour illustrer de manière exhaustive un cycle d'évolution. Les résultats sont présentés sous la forme de profils instantanés de pression statique et de norme du vecteur vitesse selon la position adimensionnée de la sonde. Les parois mobiles délimitant le domaine fluide sont représentées par

des lignes verticales (pointillés noirs).

Fig. 6.9 (resp. Fig. 6.10) présente les profils à l'instant  $t_{\text{adim}} = 0,025$  obtenus pour la discrétisation  $N$  avec le schéma DTS0 (resp. DTS1). Les perturbations au voisinage des parois viennent d'être générées et commencent à se déplacer dans l'écoulement.

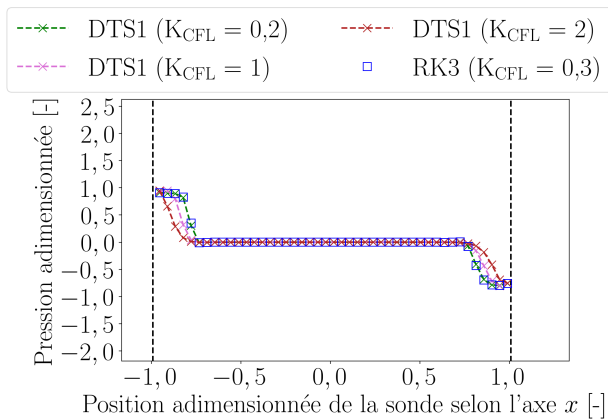


(a) Profil de pression statique adimensionnée.

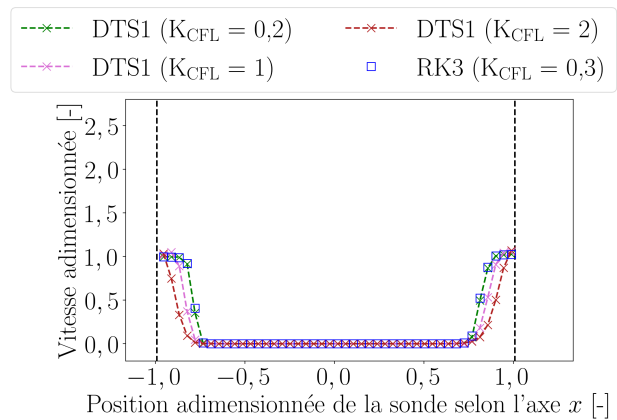


(b) Profil de la norme du vecteur vitesse adimensionnée.

FIGURE 6.9 – Cas test numérique du canal oscillant : profils instantanés à  $t_{\text{adim}} = 0,025$ . Comparaison de la solution SPH-ALE standard RK3 (carrés bleus) et des solutions SPH-ALE-DTS avec schéma DTS0 (ligne discontinue de plus) où  $0,2 \leq K_{\text{CFL}} \leq 2$ .



(a) Profil de pression statique adimensionnée.



(b) Profil de la norme du vecteur vitesse adimensionnée.

FIGURE 6.10 – Cas test numérique du canal oscillant : profils instantanés à  $t_{\text{adim}} = 0,025$ . Comparaison de la solution SPH-ALE standard RK3 (carrés bleus) et des solutions SPH-ALE-DTS avec schéma DTS1 (ligne discontinue de croix) où  $0,2 \leq K_{\text{CFL}} \leq 2$ .

L'onde de choc (resp. de détente) se déplace de gauche à droite (resp. de droite à gauche). Quelle que soit la valeur  $K_{\text{CFL}}$  considérée, les profils prédits par DTS0 et DTS1 sont jugés conformes à ceux de la solution de référence RK3. Toutefois, on observe une évolution monotone en fonction de la valeur de  $K_{\text{CFL}}$ . En effet, les ondes de choc prédites par DTS0/1 sont de moins en moins raides à mesure que le coefficient  $K_{\text{CFL}}$  augmente. Autrement dit, la propension de DTS0/1 à filtrer temporellement les phénomènes hautes fréquences s'accroît lorsque le pas de discrétisation de l'échelle temporelle grandit. C'est une interprétation cohérente avec les résultats obtenus précédemment lors de la simulation du tube à choc en description eulérienne section 6.3.1. Par

ailleurs, l'onde de choc (resp. de détente) prédite par la solution DTS0/1 présente un retard croissant (resp. une avance croissante) avec  $K_{CFL}$  résultant du lissage temporel de la mise en mouvement impulsionnelle des pistons.

Fig. 6.11 (resp. Fig. 6.12) présente les profils à l'instant  $t_{adim} = 0,125$  obtenus avec DTS0 (resp. DTS1).

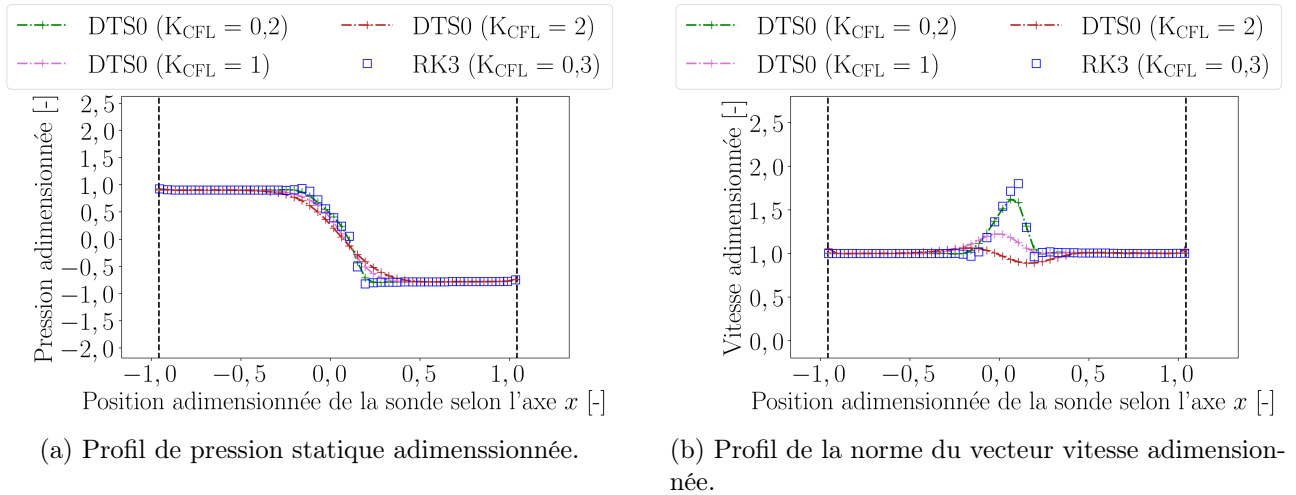


FIGURE 6.11 – Cas test numérique du canal oscillant : profils instantanés à  $t_{adim} = 0,125$ . Comparaison de la solution SPH-ALE standard RK3 (carrés bleus) et des solutions SPH-ALE-DTS avec schéma DTS0 (ligne discontinue de plus) où  $0,2 \leq K_{CFL} \leq 2$ .

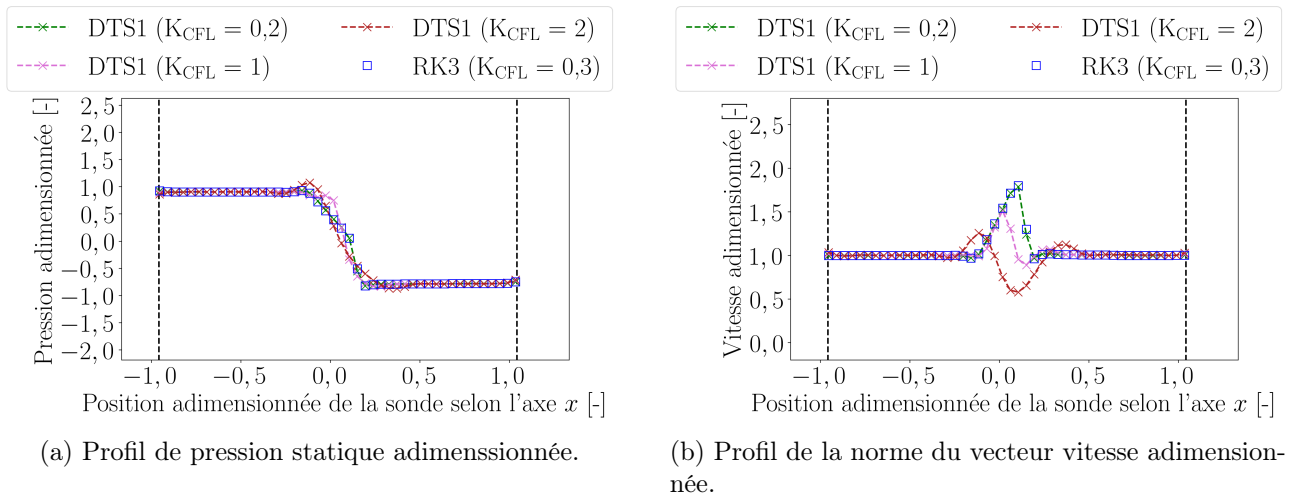


FIGURE 6.12 – Cas test numérique du canal oscillant : profils instantanés à  $t_{adim} = 0,125$ . Comparaison de la solution SPH-ALE standard RK3 (carrés bleus) et des solutions SPH-ALE-DTS avec schéma DTS1 (ligne discontinue de croix) où  $0,2 \leq K_{CFL} \leq 2$ .

On observe la superposition des ondes de choc et de détente au milieu du canal au voisinage de  $x_{adim} = 0$ . Quelle que soit la valeur  $K_{CFL}$  considérée, les profils prédits par DTS0 et DTS1 sont jugés cohérents entre eux et avec la référence RK3. On note que les profils de pression statique des simulations DTS1 présentent un dépassement de plus en plus important à mesure que  $K_{CFL}$  augmente. À nouveau, on remarque que les perturbations de l'écoulement prédites par DTS0/1 sont de moins en moins raides à mesure que le coefficient  $K_{CFL}$  augmente. En particulier, les approximations DTS0/1 de la position et de la raideur des variations de la

norme du vecteur vitesse sont de moins en moins fidèles à celles de RK3 pour un coefficient  $K_{CFL}$  croissant. Par exemple pour  $K_{CFL} = 2$ , il est difficile d'effectuer une comparaison directe entre les profils de vitesse de DTS0/1 et RK3. En effet, la propension de DTS0/1 ( $K_{CFL} = 2$ ) à filtrer temporellement les phénomènes hautes fréquences de l'écoulement apparaît beaucoup plus élevée que celle de RK3 ( $K_{CFL} = 0,3$ ).

Enfin, Fig. 6.13 (resp. Fig. 6.14) présente les profils à l'instant  $t_{\text{adim}} = 0,5$  obtenus avec DTS0 (resp. DTS1).

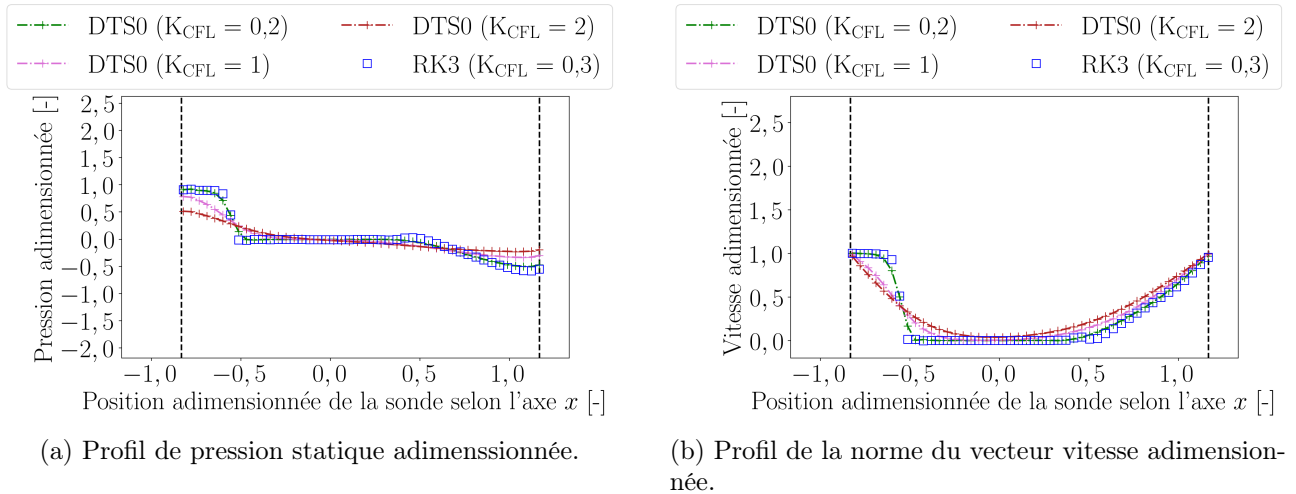


FIGURE 6.13 – Cas test numérique du canal oscillant : profils instantanés à  $t_{\text{adim}} = 0,5$ . Comparaison de la solution SPH-ALE standard RK3 (carrés bleus) et des solutions SPH-ALE-DTS avec schéma DTS0 (ligne discontinue de plus) où  $0,2 \leq K_{CFL} \leq 2$ .

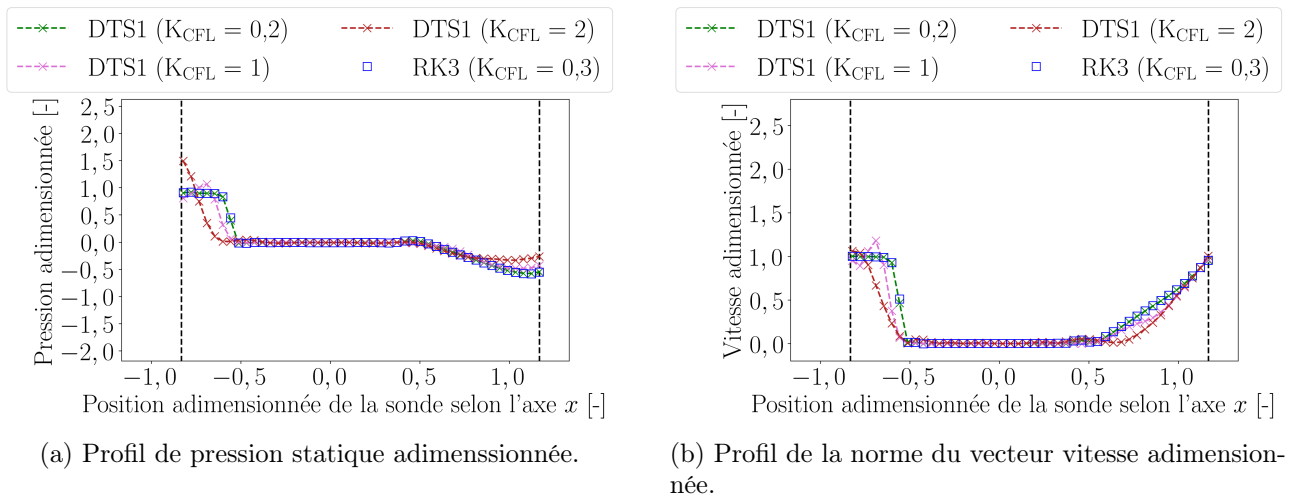


FIGURE 6.14 – Cas test numérique du canal oscillant : profils instantanés à  $t_{\text{adim}} = 0,5$ . Comparaison de la solution SPH-ALE standard RK3 (carrés bleus) et des solutions SPH-ALE-DTS avec schéma DTS1 (ligne discontinue de croix) où  $0,2 \leq K_{CFL} \leq 2$ .

L'onde de choc (resp. de détente) s'est réfléchiée sur la paroi de gauche (resp. de droite) et se déplace à nouveau de gauche à droite (resp. de droite à gauche). Quelle que soit la valeur  $K_{CFL}$  considérée, les profils de pression statique et de la norme du vecteur vitesse prédits par DTS0 et DTS1 sont jugés conformes à ceux de la référence RK3. Toutefois, on note que le schéma DTS0 lisse davantage les forts gradients.

En résumé, trois propriétés des schémas DTS0/1 ont été observées en description lagrangienne. Les schémas SPH-ALE (RK3) et SPH-ALE-DTS (DTS0, DTS1) convergent vers la même approximation lorsque le pas de discrétisation en temps tend vers zéro. Quelle que soit la valeur  $0,2 \leq K_{CFL} \leq 2$  considérée, aucun signe d'instabilité du schéma DTS0/1 n'est constaté. En description lagrangienne, il est ainsi jugé inconditionnellement stable au coefficient  $K_{CFL}$ . Enfin, sa propension à filtrer temporellement les phénomènes hautes fréquences s'accroît lorsque le pas de discrétisation de l'échelle temporelle augmente.

L'analyse est focalisée sur la force  $F_{2D}^{adim}$  appliquée par l'écoulement au cours de la première période d'oscillation. Cette période est échantillonnée régulièrement par quatre-vingt instants. Fig. 6.15a (resp. Fig. 6.15b) présente le profil de la force normale aux parois obtenu pour la discrétisation DTS0 (resp. DTS1).

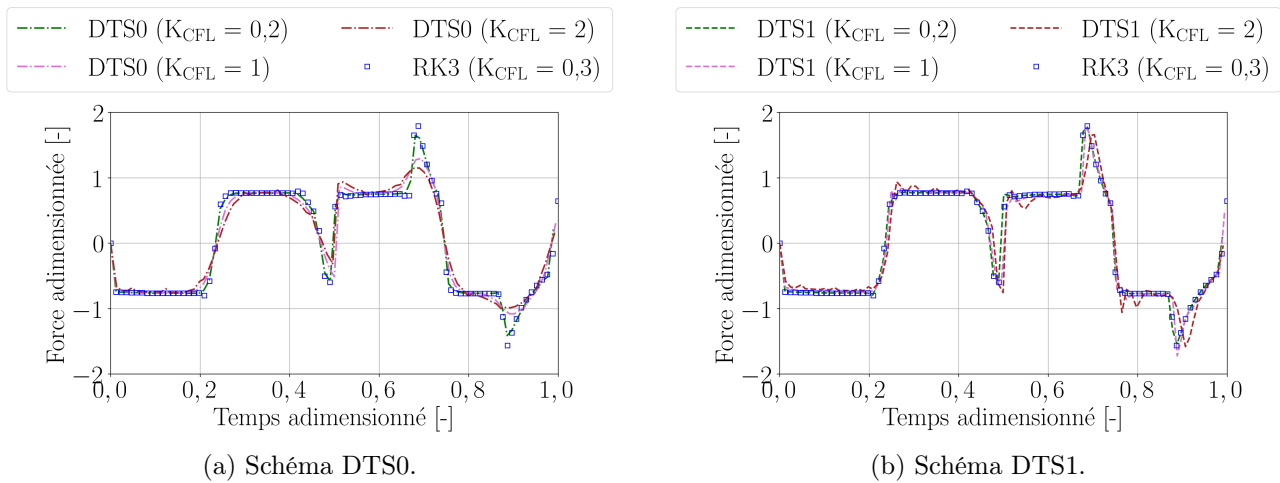


FIGURE 6.15 – Cas test numérique du canal oscillant : profils de la force normale aux parois au cours de la première période d'oscillation. Comparaison de la solution SPH-ALE standard RK3 et des solutions SPH-ALE-DTS avec  $0,2 \leq K_{CFL} \leq 2$ .

Ces profils sont jugés cohérents avec ceux de la référence RK3.

Des métriques moyennées en espace et en temps sont à utiliser pour comparer plus globalement ces résultats. On dispose pour cela du travail adimensionné et de la norme intégrale 1 de la puissance élémentaire adimensionnée (cf section 3.2). Les erreurs relatives obtenues pour ces deux métriques avec les simulations DTS0/1 sont indiquées Tab. 6.3 pour la première période.

Performances DTS0			Performances DTS1		
$K_{CFL}$	<i>RE Travail</i>	<i>RE Norme 1</i>	$K_{CFL}$	<i>RE Travail</i>	<i>RE Norme 1</i>
0,2	-16%	2%	0,2	-4%	-1%
1	-16%	6%	1	70%	1%
2	-82%	10%	2	127%	1%

TABLE 6.3 – Cas test numérique du canal oscillant : erreur relative (RE) des mesures sur la puissance élémentaire de la force normale aux parois des simulations DTS0/1 par rapport à la référence RK3. Par exemple, l'erreur relative du travail est calculée selon  $(\text{Travail [RK3]} - \text{Travail [DTS0/1]}) / \text{Travail [RK3]}$ . Performances calculées pour la première période simulée.

La norme intégrale 1 de la puissance élémentaire adimensionnée permet de quantifier les erreurs commises sur l'approximation de la force d'une simulation donnée rapport à la simulation de



référence RK3. Les simulations DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 0, 2$ ) et DTS1 ( $0, 2 \leq K_{\text{CFL}} \leq 2$ ) sont ainsi reconnues comme les plus fidèles à la référence RK3 avec un écart inférieur à 2%. Toutefois, l'erreur relative calculée pour DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1$  et  $2$ ) est jugée acceptable, en raison des similitudes des profils de force illustrés Fig. 6.15a. Par ailleurs, le travail adimensionné permet de quantifier l'énergie fournie par l'écoulement sur une durée finie. Les prédictions des simulations DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 0, 2$  et  $1$ ) et DTS1 ( $K_{\text{CFL}} = 0, 2$ ) sont jugées conformes à celle de la référence RK3. Cependant, le travail calculé sur la première période d'oscillation des simulations DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 2$ ) et DTS1 ( $K_{\text{CFL}} = 1$  et  $2$ ) est significativement différent de celui de la référence RK3. La propension de DTS0/1 à filtrer les phénomènes hautes fréquences lorsque le pas de discrétisation de l'échelle temporelle est grand, diminue la qualité de l'estimation du travail. Ainsi, la valeur du travail prédite par DTS0/1 est de moins en moins similaire à celle attendue à mesure que le coefficient  $K_{\text{CFL}}$  augmente.

Dans l'ensemble, DTS1 est ainsi jugée plus performante que DTS0 pour une complexité computationnelle équivalente. Toutefois, la performance de DTS0 est jugée acceptable pour la simulation d'un cas lagrangien d'écoulement 2D dans un canal oscillant.

## Robustesse

Intéressons-nous aux perturbations présentes dans l'écoulement en fin de simulation pour tester la robustesse de la méthode SPH-ALE-DTS. Une solution DTS0/1 est jugée robuste si celle-ci est capable de reproduire les résultats obtenus avec la référence RK3 au cours de la dernière période d'oscillation simulée.

Fig. 6.16 (resp. Fig. 6.17) présente les profils de pression statique et de la norme du vecteur vitesse à l'instant  $t_{\text{adim}} = 20$  obtenus avec DTS0 (resp. DTS1).

La vitesse est très faible dans le canal pour  $-0, 5 \leq x_{\text{adim}} \leq 0, 75$  hormis au voisinage des parois en raison des conditions de bord. Les profils de vitesse associés aux simulations DTS0/1 sont globalement conformes à ceux de la référence RK3. Toutefois, la solution DTS1 ( $K_{\text{CFL}} = 2$ ) est la moins robuste car celle-ci est jugée trop différente de la solution RK3. En raison de la propension de cette discrétisation à présenter de forts dépassements aux voisinages des discontinuités de l'écoulement, cette solution prédit une vitesse significative loin des bords à  $t_{\text{adim}} = 20$ .

Les profils de pression associés aux simulations DTS0/1 sont globalement similaires à ceux de la référence RK3, mais à nouveau la performance de la simulation DTS1 ( $K_{\text{CFL}} = 2$ ) est jugée insatisfaisante. Autrement, la pression dans le canal est quasi-constante en fin de simulation. On note une diminution par rapport à l'état initial  $p_{\text{adim}} = 0$ . Les schémas numériques DTS0/1 se sont ainsi montrés légèrement dissipatifs au cours de la simulation, de façon comparable à la solution RK3. Les robustesses des deux approches sont donc jugées équivalentes.

Enfin, l'analyse est focalisée sur la force  $F_{2\text{D}}^{\text{adim}}$  appliquée par l'écoulement sur les pistons au cours de la dernière période d'oscillation. À nouveau, cette période est échantillonnée régulièrement par quatre-vingt instants.

Fig. 6.18a (resp. Fig. 6.18b) présente le profil de la force normale aux parois obtenu pour la discrétisation DTS0 (resp. DTS1).

Ces profils sont jugés conformes à ceux de la référence RK3, quelle que soit la valeur  $K_{\text{CFL}}$  considérée.

Pour comparer les résultats obtenus par DTS0/1 à ceux de la simulation RK3, on utilise le travail adimensionné et la norme intégrale 1 de la puissance élémentaire adimensionnée. Les résultats obtenus pour la simulation RK3 sont indiqués Tab. 3.2. Les erreurs relatives obtenues pour ces deux métriques avec les simulations DTS0/1 sont indiqués Tab. 6.4 pour la dernière période.



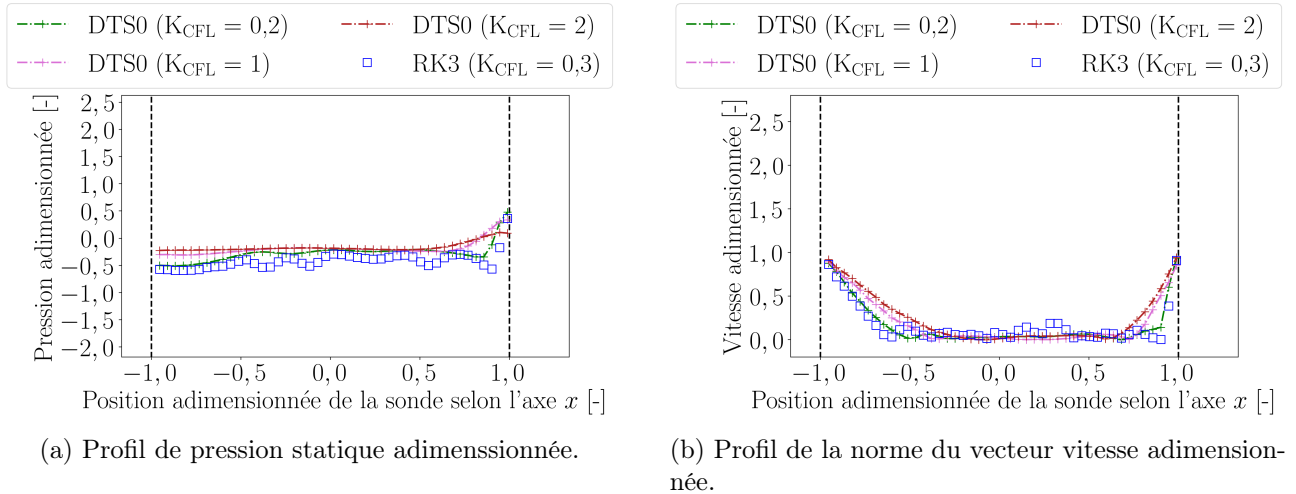


FIGURE 6.16 – Cas test numérique du canal oscillant : profils instantanés à  $t_{\text{adim}} = 20$ . Comparaison de la solution SPH-ALE standard RK3 (carrés bleus) et des solutions SPH-ALE-DTS avec schéma DTS0 (ligne discontinue de plus) où  $0,2 \leq K_{\text{CFL}} \leq 2$ .

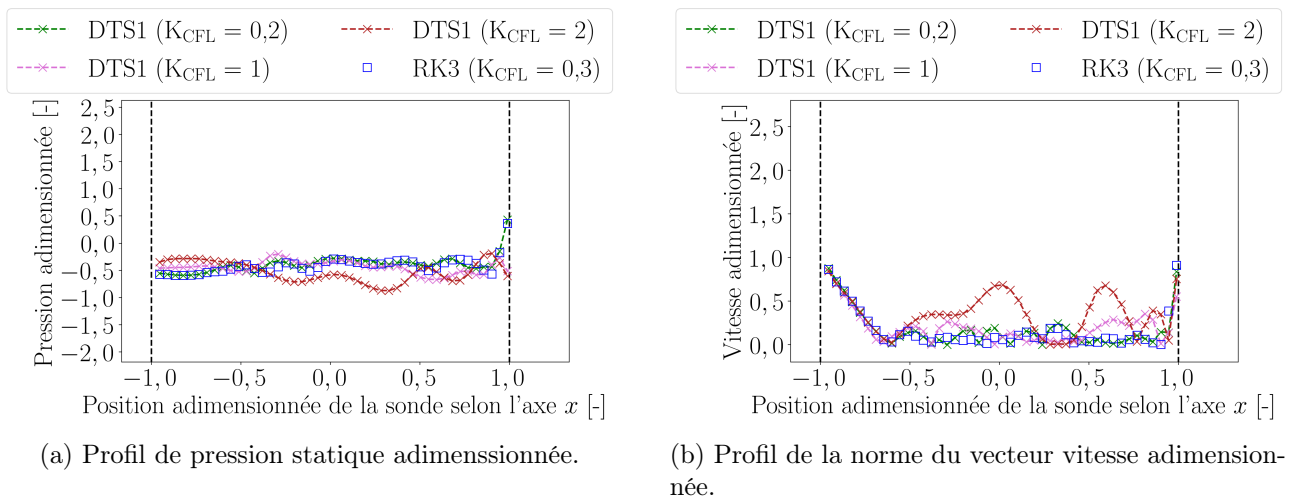


FIGURE 6.17 – Cas test numérique du canal oscillant : profils instantanés à  $t_{\text{adim}} = 20$ . Comparaison de la solution SPH-ALE standard RK3 (carrés bleus) et des solutions SPH-ALE-DTS avec schéma DTS1 (ligne discontinue de croix) où  $0,2 \leq K_{\text{CFL}} \leq 2$ .

Performances DTS0		
$K_{\text{CFL}}$	<i>RE Travail</i>	<i>RE Norme 1</i>
0,2	-14%	0%
1	-62%	-2%
2	-122%	2%

Performances DTS1		
$K_{\text{CFL}}$	<i>RE Travail</i>	<i>RE Norme 1</i>
0,2	-19%	2%
1	99%	4%
2	281%	12%

TABLE 6.4 – Cas test numérique du canal oscillant : erreur relative (RE) des mesures sur la puissance élémentaire de la force normale aux parois des simulations DTS0/1 par rapport à la référence RK3. Par exemple, l'erreur relative du travail est calculée selon  $(\text{Travail [RK3]} - \text{Travail [DTS0/1]}) / \text{Travail [RK3]}$ . Performances calculées pour la dernière période simulée.

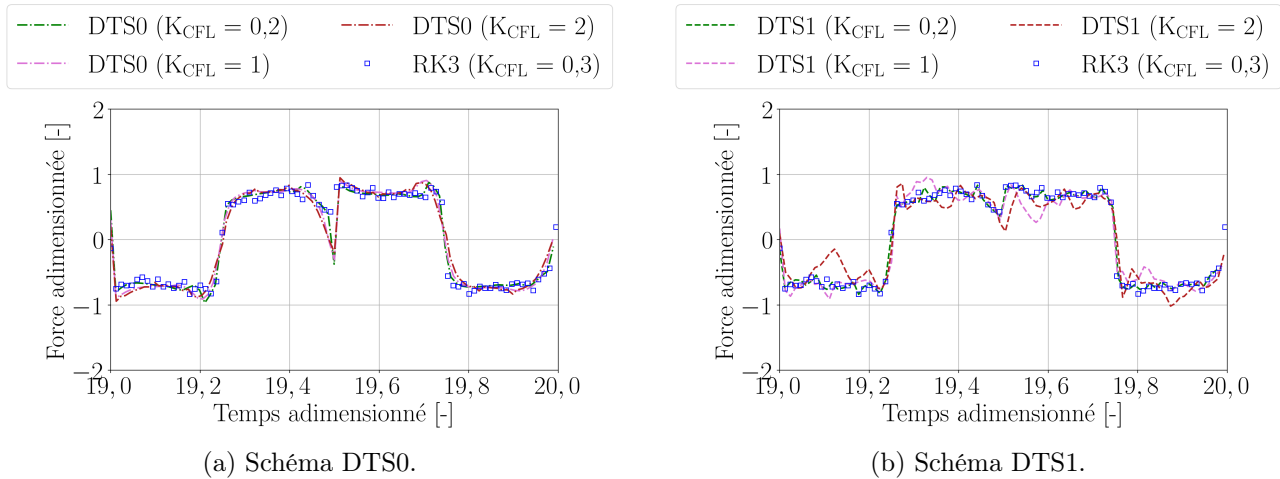


FIGURE 6.18 – Cas test numérique du canal oscillant : profils de la force normale aux parois au cours de la dernière période d’oscillation simulée. Comparaison de la solution SPH-ALE standard RK3 et des solutions SPH-ALE-DTS avec  $0, 2 \leq K_{CFL} \leq 2$ .

L’erreur relative de la norme intégrale 1 de la puissance élémentaire adimensionnée calculée pour les simulations DTS0 ( $0, 2 \leq K_{CFL} \leq 2$ ) et DTS1 ( $K_{CFL} = 0, 2$  et  $1$ ) est jugée faible. En accord avec l’interprétation faite quant aux similitudes des profils illustrés Fig. 6.18, ces solutions sont ainsi reconnues comme les plus fidèles à la référence RK3. Au contraire, l’erreur relative calculée pour DTS1 ( $K_{CFL} = 2$ ) est jugée trop importante. Cette discrétisation n’est pas assez robuste pour reproduire fidèlement les résultats obtenus avec RK3. Par ailleurs, seules les erreurs relatives de travail calculées pour les simulations DTS0/1 ( $K_{CFL} = 0, 2$ ) sont jugées faibles. Par conséquent, seules ces solutions prédisent une énergie fournie par l’écoulement aux pistons jugée conforme à celle de la référence RK3 pour  $19 \leq t_{adim} \leq 20$ . Autrement, la valeur du coefficient  $K_{CFL}$  confère une propension trop importante aux schémas DTS0 à filtrer les phénomènes hautes fréquences et aux schémas DTS1 à introduire des dépassements au voisinage des discontinuités. Ceci diminue la qualité de l’estimation du travail de la force au cours d’une période, au point que la performance ne soit plus jugée concordante avec celle de la référence RK3.

Dans l’ensemble, les schémas DTS0/1 sont jugés de robustesse comparable. Ce résultat conclut l’étude de la pertinence de la SPH-ALE-DTS à simuler des écoulements en description lagrangienne sur le cas du canal oscillant. L’auteur est confiant en l’aptitude de la SPH-ALE-DTS à simuler des écoulements présentant une dynamique lente et affirme la compatibilité de cette approche avec les conditions de bord du type paroi solide mobile. La pertinence des solutions DTS0/1 ( $K_{CFL} \leq 1$ ) est jugée robuste tout au long de la simulation, mais fragile pour ( $1 < K_{CFL} \leq 2$ ) à cause de la propension trop importante des schémas DTS0 à filtrer temporellement les phénomènes hautes fréquences de l’écoulement et des schémas DTS1 à induire des dépassements au voisinage des discontinuités. Toutefois, les écoulements mis en jeux dans les applications industrielles ciblées présentent une dynamique bien plus rapide que celle du canal oscillant étudiée.

### 6.3.3 Tourbillons de Taylor-Green

La simulation SPH-ALE-DTS des tourbillons de Taylor-Green est réalisée en description eulérienne, lagrangienne puis ALE. La finalité de ces travaux est d’étudier la pertinence de cette technique multi-résolutions en temps à conduire une simulation d’un écoulement présentant de

forts gradients.

### Description eulérienne

Considérons tout d'abord la simulation en description eulérienne. L'objet de cette étude préliminaire est à la fois de quantifier la viscosité numérique intrinsèque au schéma et d'analyser les erreurs alors induites dans les champs physiques simulés.

**Paramétrisation :** La configuration générale du cas test est détaillée section 3.3. Des compléments de la paramétrisation numérique utiles aux simulations SPH-ALE-DTS avec Alg. 2 sont précisés ci-après. Paramétriser une simulation SPH-ALE-DTS consiste à définir les coefficients  $K_{\text{CFL}}$  et  $K_{\text{CFL}}^*$  ainsi qu'un nombre d'itérations pseudo-temporelles  $N^*$ . Les différentes paramétrisations utilisées par la suite pour traiter ce cas test sont répertoriées Tab. 6.5.

Paramétrisations DTS0			Paramétrisations DTS1		
$K_{\text{CFL}}$	$K_{\text{CFL}}^*$	$N^*$	$K_{\text{CFL}}$	$K_{\text{CFL}}^*$	$N^*$
0,2	0,2	50	0,2	0,1	50
1	0,2	200	1	0,2	200
2	0,2	500	2	0,2	500

TABLE 6.5 – Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description eulérienne : paramétrisation des échelles temporelles et pseudo-temporelles des simulations SPH-ALE-DTS.

Dans ce qui suit, les valeurs  $0, 2 \leq K_{\text{CFL}} \leq 2$  sont utilisées afin de vérifier si le schéma numérique présente bien une stabilité inconditionnelle à ce paramètre. Comme pour le cas du canal oscillant section 6.3.2, il est jugé suffisant de majorer la valeur  $K_{\text{CFL}}$  par 2 pour réaliser cette étude.

L'étude de l'évolution (pseudo-)temporelle de l'exposant numérique de la norme infinie du résidu modifiée standardisée a été réalisée pour l'ensemble des paramétrisations présentées Tab. 6.5. En bref, chaque configuration a été jugée admissible (cf section 6.2.3). Par simplicité, seules les études associées aux simulations DTS0 avec les extrêmes  $K_{\text{CFL}} = 0, 2$  et  $K_{\text{CFL}} = 2$  sont analysées dans ce qui suit.

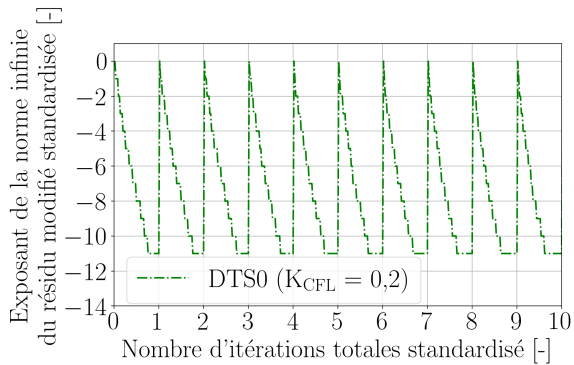
Les profils issus de la simulation DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 0, 2$ ) sont représentés Fig. 6.19.

Par soucis de lisibilité, le profil Fig. 6.19a est restreint aux premières itérations totales. Pour un instant  $n$  donné, la métrique  $\left\| \mathbf{H}_{(n,m)}^* \right\|_{\infty} / \left\| \mathbf{H}_{(n,0)}^* \right\|_{\infty}$  sature au zéro à l'unité d'arrondi machine près pour  $m$  suffisamment grand. Ainsi, le nombre d'itérations en pseudo-temps  $N^*$  est jugé suffisant. Par ailleurs, le profil représenté Fig. 6.19b indique que la norme infinie du résidu modifiée standardisée est proche de zéro à l'unité d'arrondi machine près tout au long de la simulation. En bref, la configuration ( $K_{\text{CFL}}^* = 0, 2, N^* = 50$ ) est jugée admissible pour réaliser la simulation DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 0, 2$ ).

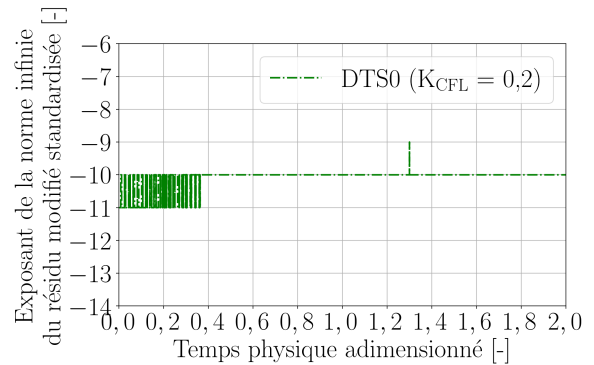
De même, les profils issus de la simulation DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 2$ ) sont représentés Fig. 6.20.

La métrique  $\left\| \mathbf{H}_{(n,m)}^* \right\|_{\infty} / \left\| \mathbf{H}_{(n,0)}^* \right\|_{\infty}$  sature pour  $m$  assez grand. Ainsi, le nombre d'itérations en pseudo-temps  $N^*$  est jugé suffisant. On note alors Fig. 6.20b que la configuration utilisée assure systématiquement la convergence vers zéro à une précision proche de l'unité d'arrondi machine pour tout instant. La configuration ( $K_{\text{CFL}}^* = 0, 2, N^* = 500$ ) est jugée admissible pour réaliser la simulations DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 2$ ).

Finalement, les paramétrisations ( $K_{\text{CFL}}, K_{\text{CFL}}^*, N^*$ ) présentées Tab. 6.5 sont jugées satisfaisantes pour cette étude.

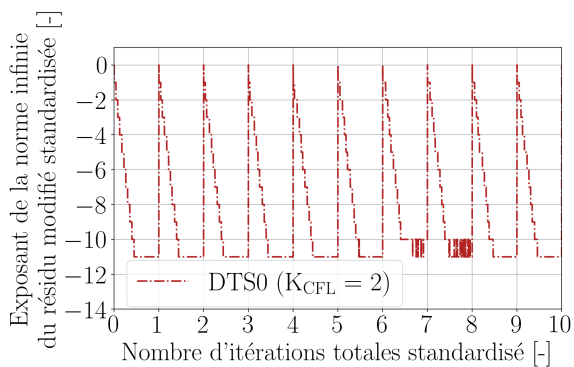


(a) En fonction du nombre d'itérations cumulées en temps et pseudo-temps standardisé.

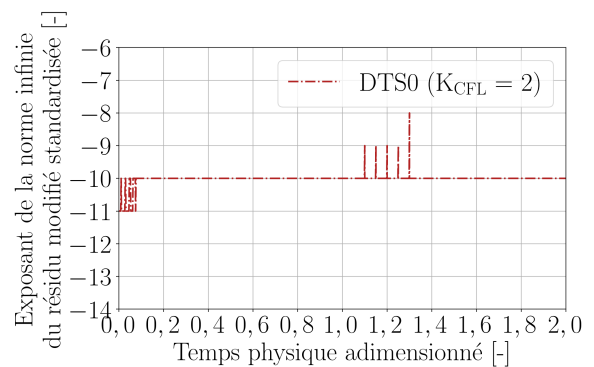


(b) En fonction du temps physique adimensionné.

FIGURE 6.19 – Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description eulérienne : évolution en (pseudo-)temps de la norme infinie du résidu modifié standardisée de la simulation DTS0 ( $K_{CFL} = 0,2$ ).



(a) En fonction du nombre d'itérations cumulées en temps et pseudo-temps standardisé.



(b) En fonction du temps physique adimensionné.

FIGURE 6.20 – Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description eulérienne : évolution en (pseudo-)temps de la norme infinie du résidu modifié standardisée de la simulation DTS0 ( $K_{CFL} = 2$ ).

**Pertinence :** Étudions la pertinence de la méthode SPH-ALE-DTS à simuler cet ensemble de tourbillons contra-rotatifs et stationnaires. Débutons par la quantification de la viscosité numérique intrinsèque aux schémas DTS0/1. Pour cela, l'évolution temporelle de l'énergie cinétique totale adimensionnée du fluide est étudiée afin de caractériser l'amortissement dans le temps du champ de vitesse induite par la viscosité numérique. Les profils d'énergie cinétique totale adimensionnée pour  $0 \leq t_{\text{adim}} \leq 2$  obtenus pour DTS0/1 sont jugés parfaitement concordant à celui de la référence numérique RK3. En description eulérienne, chacune de ces solutions est quasi-constante en temps. Par soucis de lisibilité, les profils ne sont pas illustrés et la comparaison est effectuée par la suite grâce aux nombres de Reynolds équivalents. Pour une détermination précise, l'approximation par un polynôme de degré 1 de l'évolution temporelle de l'énergie cinétique totale est réalisée par minimisation au sens des moindres carrés. Les paramètres de la régression linéaire appliquée aux simulations DTS0/1 sont donnés Tab. 6.6. Pour faciliter la comparaison avec la simulation de référence RK3, ses paramètres précédemment donnés Tab. 3.3 sont également rappelés Tab. 6.6.

<i>Simulations</i>	<i>Taille de l'échantillon</i>	$1 - R_{\text{rég.}}^2$	<i>Re</i>
RK3 ( $K_{\text{CFL}} = 0, 3$ )	8026	$10^{-6}$	1641,19
DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 0, 2$ )	12031	$10^{-6}$	1641,20
DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1$ )	2426	$10^{-6}$	1641,23
DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 2$ )	1226	$10^{-6}$	1641,27
DTS1 ( $K_{\text{CFL}} = 0, 2$ )	12031	$10^{-6}$	1641,19
DTS1 ( $K_{\text{CFL}} = 1$ )	2426	$10^{-6}$	1641,20
DTS1 ( $K_{\text{CFL}} = 2$ )	1226	$10^{-6}$	1641,18

TABLE 6.6 – Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description eulérienne : paramètres de régression linéaire de l'évolution de l'énergie cinétique totale des simulations SPH-ALE-DTS.

Quelle que soit la paramétrisation considérée, la régression présente un coefficient de corrélation  $R_{\text{rég.}}$  jugé suffisamment grand pour que son résultat soit admissible. Ce dernier indique pour toutes les solutions DTS0/1 considérées un nombre de Reynolds équivalent  $Re \approx 1641$ . Il est cohérent avec la solution de référence RK3. En description eulérienne, le schéma DTS0/1 est jugé inconditionnellement stable au coefficient  $K_{\text{CFL}}$ . De plus, les solutions DTS0/1 sont toutes jugées de pertinence robuste lorsque le domaine fluide est uniformément discrétisé.

Poursuivons par l'analyse des erreurs induites dans les champs physiques simulés par les schémas DTS0/1. Selon les résultats présentés Tab. 6.6, toutes les paramétrisations DTS0/1 sont jugées de pertinences équivalentes. Toutefois, la paramétrisation DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 2$ ) présente les résultats jugés comme les moins pertinents. Par simplicité, seuls les résultats issus de cette paramétrisation sont illustrés par la suite. La composante  $v_x$  du vecteur vitesse adimensionnée par  $U$  est illustrée Fig. 6.21a pour chaque particule du domaine  $\Omega(t) = [0, L] \times [0, L]$  à l'instant  $t_{\text{adim}} = 2$ .

Fig. 6.21b présente la variation  $v_{x \text{ théo}} - v_x$  du vecteur vitesse par rapport à la solution stationnaire (3.11), adimensionnée de même par  $U$ . On constate que les tourbillons sont restés réguliers bien qu'un amortissement soit notable. La plus importante variation est localisée au niveau des maxima d'amplitude. L'amortissement résultant est limité à environ 10% de la valeur théorique dans ces zones. En bref, la simulation DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 2$ ) réalisée en description eulérienne aboutit à des résultats similaires à ceux de la référence numérique RK3 et de la solution stationnaire analytique. Par équivalence, toutes les paramétrisations DTS0/1 considérées

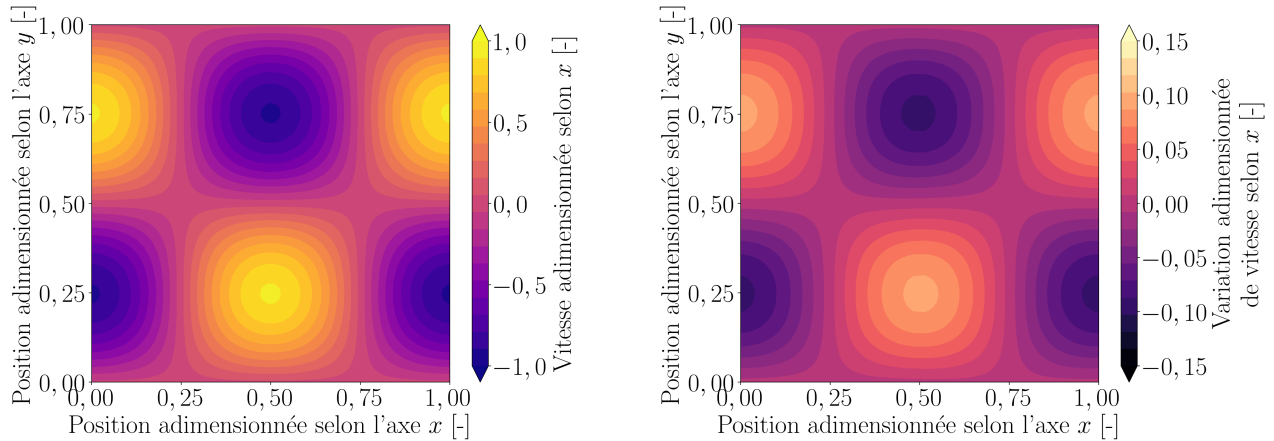
(a) Composante  $v_x$  du vecteur vitesse adimensionnée.(b) Variation  $v_{x\text{théo}} - v_x$  adimensionnée.

FIGURE 6.21 – Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description eulérienne : visualisation des erreurs induites par le schéma numérique DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 2$ ) sur la composante  $v_x$  du vecteur vitesse, à l'instant  $t_{\text{adim}} = 2$ .

constituent de bonnes approximations à la solution analytique.

### Description lagrangienne

Les résultats obtenus avec Alg. 2 en description pure lagrangienne sont détaillés dans l'annexe E.1. Dans l'ensemble, la performance de DTS0/1 est jugée fidèle à la référence numérique. Ainsi, les champs physiques simulés s'amortissent brutalement en raison des erreurs numériques liées à l'inhomogénéité de la distribution particulaire. Par conséquent, ces solutions ne conduisent pas à des approximations numériques fidèles à la solution stationnaire analytique. À l'instar de la méthode SPH-ALE, il s'avère impossible de réaliser précisément une telle simulation en méthode SPH-ALE-DTS sans une correction additionnelle du mouvement des particules afin d'améliorer la consistance du schéma numérique.

### Description ALE

Considérons la simulation en description ALE. Les corrections de la méthode SPH-ALE-DTS présentées section 6.2.4 sont activées. L'objet de cette étude est à la fois de quantifier la viscosité numérique intrinsèque au schéma corrigé et d'analyser les erreurs alors induites dans les champs physiques simulés.

**Paramétrisation :** La configuration générale du cas test est celle détaillée section 3.3. Des compléments de la paramétrisation numérique utiles aux simulations SPH-ALE-DTS avec Alg. 3 sont précisés ci-après. Paramétriser la simulation SPH-ALE-DTS consiste à définir les coefficients  $K_{\text{CFL}}$ ,  $K_{\text{CFL}}^*$ ,  $P_s^*$  ainsi que les nombres d'itérations pseudo-temporelles  $N_1^*$  et  $N_2^*$ . Puisque les résultats obtenus précédemment en description eulérienne puis lagrangienne ont été jugés similaires quelle que soit la valeur  $0,2 \leq K_{\text{CFL}} \leq 2$  utilisée, la suite de l'étude est restreinte au cas où  $K_{\text{CFL}} = 2$ . Les différentes paramétrisations utilisées par la suite pour traiter ce cas test sont répertoriées Tab. 6.7.

Une étude de l'évolution pseudo-temporelle avec  $N^* = N_1^* + N_2^*$  et temporelle de cet exposant permet de vérifier a posteriori qu'une configuration donnée est admissible.

Les valeurs des paramètres  $N_1^*$  et  $P_s^*$  sont choisies conjointement de manière à optimiser la

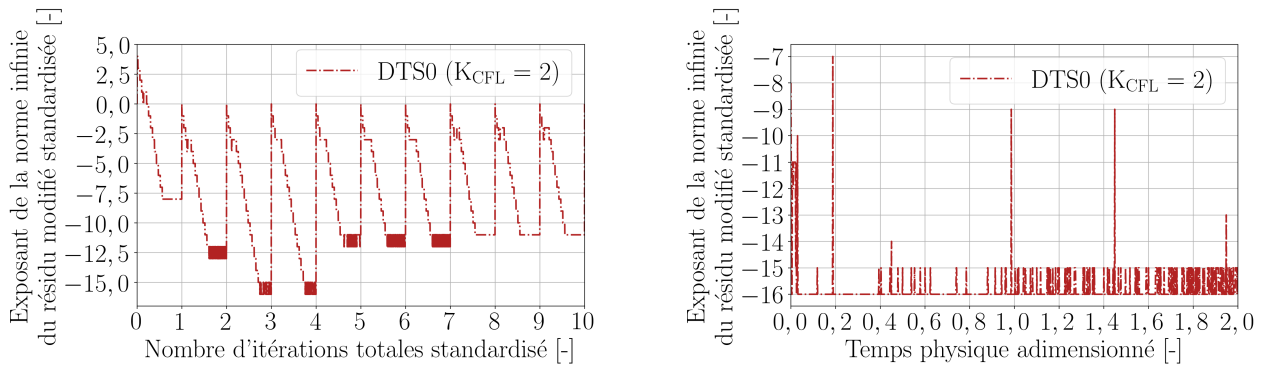


$K_{\text{CFL}}$	$K_{\text{CFL}}^*$	$P_s^*$	$N_1^*$	$N_2^*$
2	0,2	5	100	400
			400	

TABLE 6.7 – Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description ALE : paramétrisation des échelles temporelles et pseudo-temporelles des simulations SPH-ALE-DTS.

correction de l'erreur « *closed-box* ». Toutefois, augmenter le nombre d'itérations  $N_1^*$  accroît la complexité computationnelle de la simulation. Se limiter à  $N_1^* \leq N_2^*$  est un compromis jugé a posteriori raisonnable pour cette simulation.

L'évolution (pseudo-)temporelle de l'exposant numérique de la norme infinie du résidu modifié standardisée a été étudiée pour l'ensemble des paramétrisations présentées Tab. 6.7. En bref, chaque configuration a été jugée admissible. Par simplicité, seule l'étude associée à la simulation DTS0 avec  $N_1^* = 100$  est présentée Fig. 6.22.



(a) En fonction du nombre d'itérations cumulées en temps et pseudo-temps standardisé.

(b) En fonction du temps physique adimensionné.

FIGURE 6.22 – Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description ALE : évolution en (pseudo-)temps de la norme infinie du résidu modifié standardisée de la simulation DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 2$ ,  $N_1^* = 100$ ).

Pour tout instant  $n$ , la métrique  $\left\| \mathbf{H}_{(n,m)}^* \right\|_{\infty} / \left\| \mathbf{H}_{(n,0)}^* \right\|_{\infty}$  tend vers zéro lorsque  $m$  augmente. On remarque que cette métrique diminue plus difficilement sur les  $N_1^*$  premières itérations où la correction du mouvement est active. Dans l'ensemble cependant, le nombre total d'itérations en pseudo-temps  $N^* = N_1^* + N_2^*$  est jugé suffisant. On note de plus Fig. 6.22b que la configuration utilisée assure pour tout instant la convergence vers zéro avec une précision suffisante. La configuration ( $K_{\text{CFL}}^* = 0,2$ ,  $P_s^* = 5$ ,  $N_1^* = 100$ ,  $N_2^* = 400$ ) est jugée admissible pour réaliser la simulations DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 2$ ).

Finalement, les paramétrisations présentées Tab. 6.7 sont jugées satisfaisantes pour cette étude.

**Pertinence :** Étudions la pertinence de la méthode SPH-ALE-DTS corrigée à simuler cet ensemble de tourbillons contra-rotatifs et stationnaires. Par simplicité, les seuls résultats illustrés dans ce qui suit sont ceux obtenus avec les schémas DTS0/1 où  $N_1^* = 100$ .

Fig. 6.23 présente les profils d'énergie cinétique totale adimensionnée pour  $0 \leq t_{\text{adim}} \leq 2$  obtenus pour les solutions DTS0 et DTS1. Ils sont comparés à la solution analytique associée à  $Re = 1641$ , valeur obtenue en description eulérienne Tab. 6.6.

Ces solutions montrent une décroissance quasi-linéaire en temps. Celles issues des simulations DTS0/1 ont une faible volatilité et sont jugées cohérentes entre elles. Toutefois, DTS1 présente



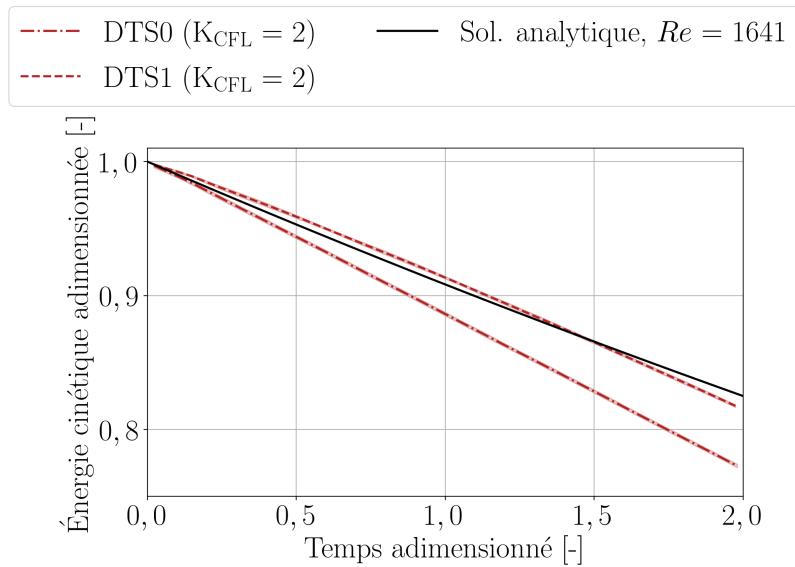


FIGURE 6.23 – Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description ALE : évolution de l'énergie cinétique totale adimensionnée, au cours du temps adimensionné. Comparaison de la solution analytique obtenue avec  $Re = 1641$  (ligne continue noire) et des solutions SPH-ALE-DTS avec schéma DTS0 (ligne discontinue de pointillés et de tirets rouges) et DTS1 (ligne discontinue de tirets rouges) où  $K_{CFL} = 2$  et  $N_1^* = 100$ . Chaque unité de temps adimensionné est échantillonnée par cinquante valeurs moyennes (ligne épaisse). L'enveloppe estompée représente l'intervalle de confiance autour de la valeur moyenne encadrée à plus ou moins l'écart-type près.

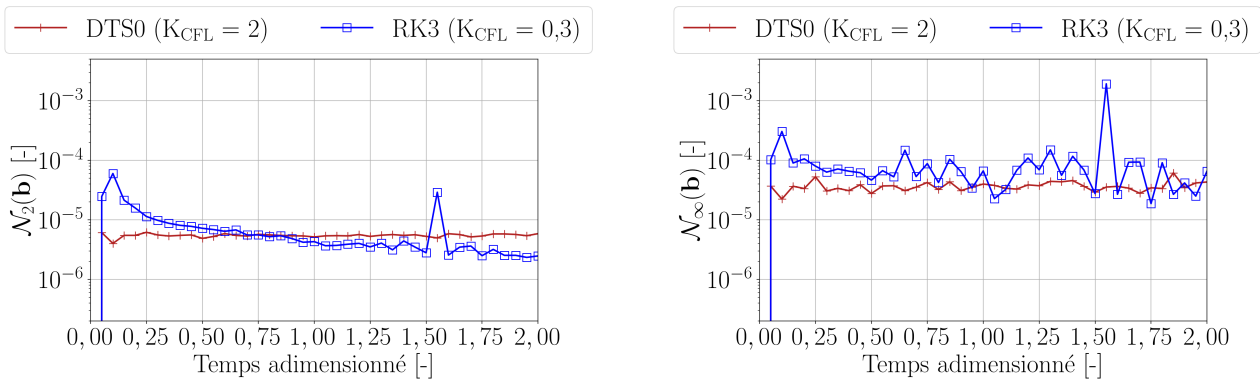
une décroissance plus faible que DTS0. Ainsi, la performance de DTS1 est jugée meilleure. Pour déterminer le nombre de Reynolds équivalent à chaque solution, une approximation par un polynôme de degré 1 est faite par minimisation au sens des moindres carrés sur l'ensemble des pas en temps simulés pour la durée  $0 \leq t_{\text{adim}} \leq 2$ . Les paramètres de la régression linéaire sont donnés Tab. 6.8. Quelle que soit la paramétrisation considérée, la régression présente un coefficient de corrélation  $R_{\text{rég}}$  jugé suffisamment grand pour que son résultat soit admissible. Cette opération indique que toutes les solutions DTS0/1 considérées présentent un nombre de Reynolds équivalent d'au moins 1200. L'auteur juge que cette performance est satisfaisante et ainsi que la correction proposée, visant à corriger l'erreur « *closed-box* » afin de limiter les erreurs numériques qu'elle induit, est efficace pour toutes les configurations utilisées. Par conséquent, ces solutions DTS0/1 en description ALE sont toutes jugées de pertinence robuste. Notons toutefois qu'augmenter le nombre d'itérations  $N_1^*$  de 100 à 400 assure une meilleure performance à la méthode avec une augmentation du nombre de Reynolds équivalent. De plus, les solutions DTS1 présentent une meilleure performance que celles associées à DTS0. Recourir au schéma DTS1 avec  $N_1^* = 400$  offre alors la pertinence la plus robuste parmi les solutions considérées. Son nombre de Reynolds équivalent est même supérieur à celui obtenu en description eulérienne (cf Tab. 6.6).

Regardons l'évolution en temps des profils des normes  $\mathcal{N}_2(\mathbf{b})$  et  $\mathcal{N}_\infty(\mathbf{b})$  pour  $0 \leq t_{\text{adim}} \leq 2$ . Les résultats issus de la solution DTS0 sont présentés Fig. 6.24.

Ceux issus de la solution DTS1 sont présentés Fig. 6.25. Dans l'ensemble, les résultats des solutions DTS0/1 sont jugés similaires entre eux. La distribution particulière forme initialement un pavage cartésien régulier du domaine. La discrétisation spatiale présente alors une erreur « *closed-box* » globalement faible, i.e.  $\mathcal{N}_2(\mathbf{b})$  et  $\mathcal{N}_\infty(\mathbf{b}) < 10^{-7}$  à  $t_{\text{adim}} = 0$ . Les métriques  $\mathcal{N}_2(\mathbf{b})$  et  $\mathcal{N}_\infty(\mathbf{b})$  augmentent brusquement en début de simulation. Le mouvement ALE des particules

<i>Simulations</i>	$N_1^*$	<i>Taille de l'échantillon</i>	$1 - R_{\text{rég.}}^2$	<i>Re</i>
DTS0	100	1301	$10^{-3}$	1209
	400	1281	$10^{-3}$	1381
DTS1	100	1305	$10^{-3}$	1535
	400	1282	$10^{-3}$	1858

TABLE 6.8 – Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description ALE : paramètres de régression linéaire de l'évolution de l'énergie cinétique totale des simulations SPH-ALE-DTS.

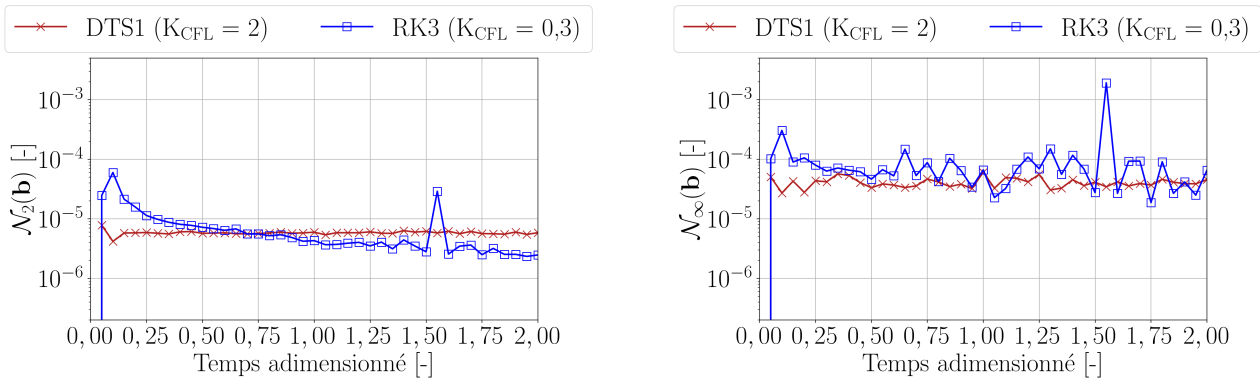


(a) Norme euclidienne de l'erreur d'approximation locale.

(b) Norme infinie de l'erreur d'approximation locale.

FIGURE 6.24 – Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description ALE : évolution de la qualité du pavage de l'espace mesurée par la norme de l'erreur « *closed-box* », au cours du temps adimensionné. Comparaison de la solution SPH-ALE standard RK3 (carrés bleus) et de la solution SPH-ALE-DTS avec schéma DTS0 (plus rouges) où  $K_{\text{CFL}} = 2$  et  $N_1^* = 100$ .

déstructure le pavage qui devient moins régulier. Ces métriques demeurent ensuite relativement constantes. Par comparaison à la référence numérique RK3, l'erreur « *closed-box* » de DTS0/1 est jugée faible pour  $0 \leq t_{\text{adim}} \leq 0,5$ . On note ensuite que la norme  $\mathcal{N}_2(\mathbf{b})$  associée à RK3 est inférieure à celle de DTS0 pour  $0,75 \leq t_{\text{adim}} \leq 2$ . Or sur cette durée, l'énergie cinétique de la solution RK3 est inférieure à celle de DTS0/1 d'environ deux ordres de grandeur. Autrement dit, le fluide est quasiment au repos dans cette situation, ce qui facilite la réduction de l'erreur « *closed-box* » globale. Les corrections proposées section 6.2.4 sont ainsi jugées efficaces tout au long de la simulation pour réduire l'erreur d'approximation local, sans pour autant l'annuler numériquement.



(a) Norme euclidienne de l'erreur d'approximation locale.

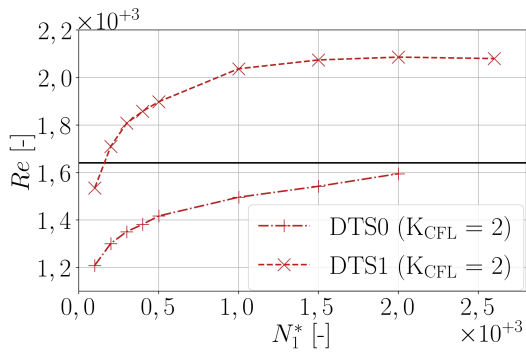
(b) Norme infinie de l'erreur d'approximation locale.

FIGURE 6.25 – Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description ALE : évolution de la qualité du pavage de l'espace mesurée par la norme de l'erreur « *closed-box* », au cours du temps adimensionné. Comparaison de la solution SPH-ALE standard RK3 (carrés bleus) et de la solution SPH-ALE-DTS avec schéma DTS1 (croix rouges) où  $K_{\text{CFL}} = 2$  et  $N_1^* = 100$ .

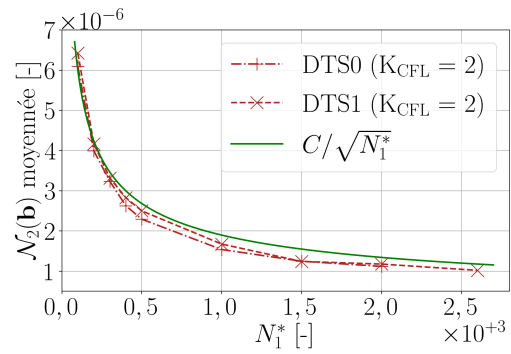
Fig. 6.26a (resp. Fig. 6.26b) présente l'évolution du nombre de Reynolds équivalent (resp. de la norme euclidienne de l'erreur d'approximation locale moyennée sur  $1,5 \leq t_{\text{adim}} \leq 2$ ) des solutions DTS0/1, en fonction du nombre d'itérations  $N_1^*$  dédié à la correction en pseudo-temps de l'erreur « *closed-box* ». La valeur  $Re = 1641$  est mise en évidence Fig. 6.26a par une ligne continue noire.

Les schémas DTS0 et DTS1 présentent une sensibilité similaire au paramètre  $N_1^*$ . Augmenter le nombre d'itérations de correction s'accompagne d'une augmentation du nombre de Reynolds équivalent et d'une diminution de la norme euclidienne de l'erreur d'approximation locale moyennée. Ainsi, une amélioration de la performance (cf Fig. 6.26a) est liée à une réduction de l'inhomogénéité de la distribution (cf Fig. 6.26b). Cependant, on constate une saturation de ce comportement car les corrections proposées ne permettent pas d'annuler numériquement l'erreur « *closed-box* ». En effet, l'erreur d'approximation locale de DTS0/1 présente Fig. 6.26b une évolution en  $C/\sqrt{N_1^*}$  où  $C = 6 \times 10^{-5}$ . Ainsi, l'amélioration de la performance globale est jugée grande pour  $100 \leq N_1^* \leq 500$  et est jugée faible pour  $500 \leq N_1^* \leq 3000$ . Par conséquent, le bénéfice à utiliser  $N_1^* \geq 500$  est jugé négligeable. Par ailleurs, l'auteur juge que le meilleur compromis entre complexité computationnelle et performance est obtenu avec le schéma DTS1 et  $N_1^* = 100$ . Il est à noter que cette paramétrisation est moins diffuse numériquement que l'approche eulérienne avec pavage cartésien. Ce gain est à attribuer à une réorganisation des particules adaptée à l'écoulement local.

Poursuivons par l'analyse des erreurs induites dans les champs physiques simulés par les schémas DTS0/1. Selon les résultats présentés Tab. 6.8, toutes les paramétrisations considérées



(a) Nombre de Reynolds équivalent.



(b) Norme euclidienne de l'erreur d'approximation locale moyennée.

FIGURE 6.26 – Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description ALE : sensibilité de la performance au nombre d'itérations de correction  $N_1^*$ . Les autres coefficients de la paramétrisation sont fixes. Comparaison de la solution SPH-ALE-DTS avec schémas DTS0 (plus) et DTS1 (croix) où  $K_{CFL} = 2$ .

sont jugées de pertinence robuste. Toutefois, la paramétrisation DTS0 ( $N_1^* = 100$ ) présente les résultats jugés comme les moins pertinents. Par simplicité, ils sont les seuls illustrés par la suite à l'instant  $t_{\text{adim}} = 2$ . La composante  $v_x$  du vecteur vitesse adimensionnée par  $U$  est illustrée Fig. 6.27a.

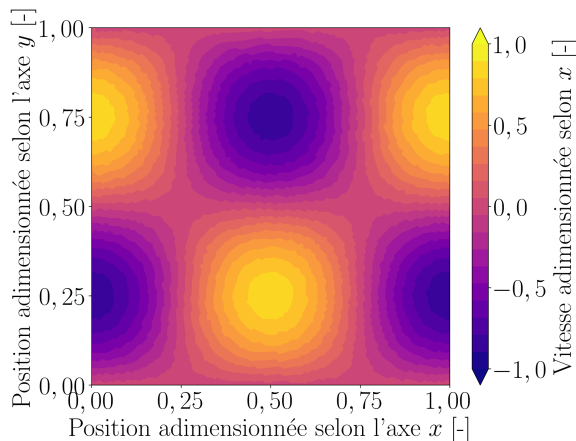
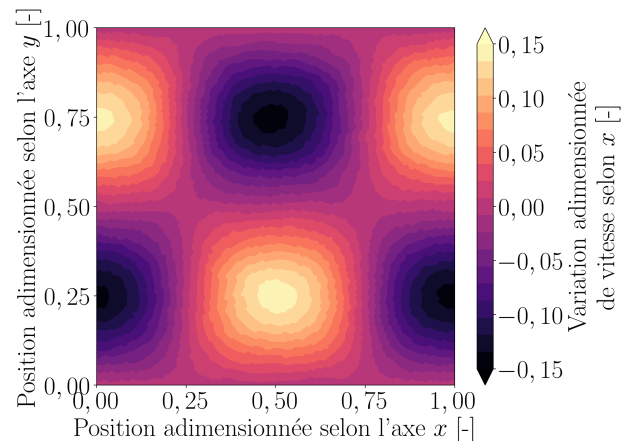
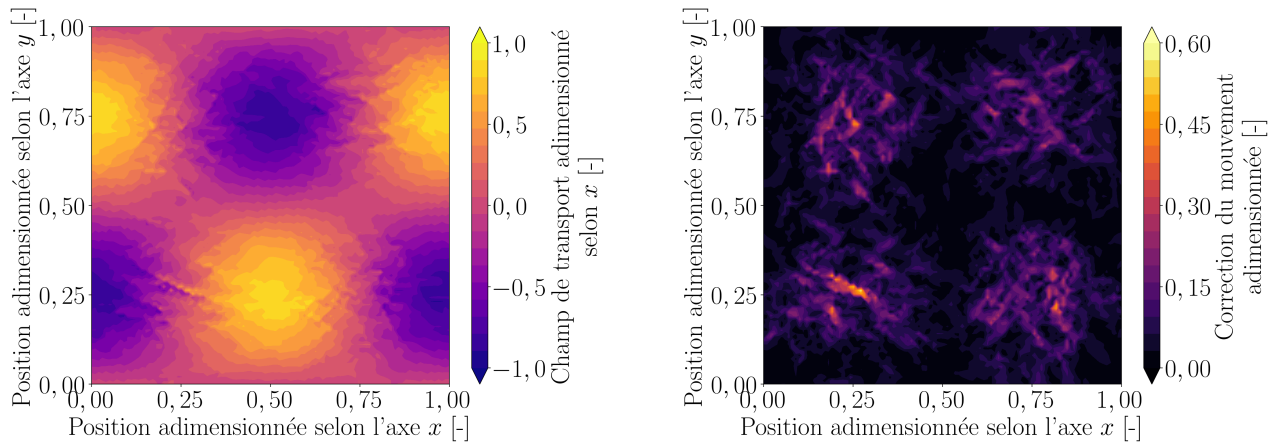
(a) Composante  $v_x$  du vecteur vitesse adimensionnée.(b) Variation  $v_{x\text{théo}} - v_x$  adimensionnée.

FIGURE 6.27 – Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description ALE : visualisation des erreurs induites par le schéma numérique DTS0 ( $K_{CFL} = 2$ ,  $N_1^* = 100$ ) sur la composante  $v_x$  du vecteur vitesse, à l'instant  $t_{\text{adim}} = 2$ .

Fig. 6.27b présente la variation  $v_{x\text{théo}} - v_x$  du vecteur vitesse par rapport à la solution stationnaire (3.11), adimensionnée de même par  $U$ . On constate que les tourbillons sont restés réguliers bien qu'un amortissement soit notable. La plus grande variation est d'environ 15% et est localisée au niveau des maxima d'amplitude de  $v_x$ , comme en description eulérienne (cf Fig. 6.21).

La composante  $v_{0,x}$  du champ de transport adimensionnée par  $U$  est illustrée Fig. 6.28a.

Ce champ est cohérent mais non identique à celui de  $v_x$  représenté Fig. 6.27a. La norme euclidienne de la variation  $\delta\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}$  adimensionnée par  $U$  est illustrée Fig. 6.28b. Il en ressort que le mouvement pur lagrangien est globalement peu corrigé en description ALE. Ainsi, les

(a) Composante  $v_{0,x}$  du champ de transport adimensionné.(b) Norme de la variation  $\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}$  adimensionnée.FIGURE 6.28 – Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description ALE : visualisation de la correction du mouvement de la simulation DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 2$ ,  $N_1^* = 100$ ), à l’instant  $t_{\text{adim}} = 2$ .

particules se déplacent de façon quasi-lagrangienne. Les maxima d’amplitude de  $\delta \mathbf{v}_0$  sont situés dans le voisinage des points selle (cf Fig. 3.11). Dans ces zones où l’écoulement est très lent, les particules se déplacent de façon arbitraire pour réduire l’inhomogénéité de la distribution. En bref, cette simulation DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 2$ ,  $N_1^* = 100$ ) aboutit à des résultats jugés similaires à ceux de la solution analytique. Par équivalence, toutes les paramétrisations DTS0/1 considérées constituent des approximations fidèles à cette dernière.

### 6.3.4 Impact d’un jet plan sur une plaque plane

Dans cette section, la simulation SPH-ALE-DTS d’un jet plan impactant une plaque plane en incidence normale est réalisée en description lagrangienne puis ALE. L’objectif est d’étudier la pertinence de cette technique multi-résolutions en temps à conduire une simulation d’un écoulement présentant des conditions d’entrée/sortie, une surface libre et une paroi solide.

#### Description lagrangienne

Considérons tout d’abord la simulation en description lagrangienne. La configuration générale du cas test est détaillée section 3.4. Des compléments de la paramétrisation numérique utiles aux simulations SPH-ALE-DTS avec Alg. 2 sont précisés ci-après.

Au cours des développements menés, certaines simulations N-DTS0/1 se sont arrêtées prématurément en raison d’un manque de robustesse de la condition d’entrée utilisée. En particulier, l’auteur n’a pas été en mesure d’achever les simulations N-DTS0 avec  $K_{\text{CFL}} > 1$  et N-DTS1 avec  $K_{\text{CFL}}$  quelconque. D’une part, les simulations N-DTS0/1 s’arrêtent avant que le jet n’ait atteint la paroi lorsque  $K_{\text{CFL}} > 1$ . Utiliser une valeur de  $K_{\text{CFL}}$  trop grande s’avère incompatible avec la condition d’entrée qui tend alors à injecter des particules dont les champs divergent. D’autre part, la performance des simulations N-DTS0/1 ( $K_{\text{CFL}} \leq 1$ ) est celle attendue jusqu’à ce que le jet ait atteint la paroi. Des ondes de pression remontent alors le long du jet jusqu’à la zone d’injection. Or, il a été identifié précédemment sur le cas du tube à choc que le schéma N-DTS1 peut sur-prédire l’amplitude de telles ondes. Les simulations N-DTS1 s’arrêtent alors subitement car la condition d’entrée ne parvient pas à les évacuer. Par conséquent, seuls les résultats du schéma N-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} \leq 1$ ) sont présentés dans ce qui suit. Pour aller plus loin,

l'auteur recommande de réviser la gestion des conditions de bord pour proposer une définition plus adaptée au formalisme DTS.

Les paramétrisations utilisées par la suite pour traiter ce cas test sont répertoriées Tab. 6.9.

$K_{\text{CFL}}$	$K_{\text{CFL}}^*$	$N^*$
0,2	0,2	50
1	0,2	200

TABLE 6.9 – Cas test numérique du jet plan en description lagrangienne : paramétrisation des échelles temporelles et pseudo-temporelles des simulations SPH-ALE-DTS.

Les profils d'évolution (pseudo-)temporelle de l'exposant numérique de la norme infinie du résidu modifié standardisée sont présentés dans l'annexe E.2. En bref, ces paramétrisations sont jugées satisfaisantes pour cette étude.

Les résultats obtenus sont détaillés dans l'annexe E.2. Dans l'ensemble, la performance de N-DTS0 est jugée équivalente à celle de la référence N-RK3 quelle que soit la valeur  $K_{\text{CFL}}$  utilisée. L'auteur est ainsi confiant en l'aptitude de N-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} \leq 1$ ) à simuler des écoulements en description lagrangienne présentant des conditions d'entrée/sortie, une surface libre et une paroi solide.

## Description ALE

Considérons la simulation en description ALE. Les corrections de la méthode SPH-ALE-DTS présentées section 6.2.4 sont activées. L'objet de cette étude est de comparer la pertinence des schémas numériques SPH-ALE (N-RK3 et 4N-RK3) et SPH-ALE-DTS (N-DTS0).

**Paramétrisation :** La configuration générale du cas test est toujours celle détaillée section 3.4. Des compléments de la paramétrisation numérique utiles aux simulations SPH-ALE-DTS avec Alg. 3 sont précisés ci-après. Puisque les résultats du schéma N-DTS0 obtenus précédemment en description lagrangienne ont été jugés similaires quelle que soit la valeur  $K_{\text{CFL}} \leq 1$  utilisée, la suite de l'étude est restreinte au cas où  $K_{\text{CFL}} = 1$ . La paramétrisation utilisée par la suite pour traiter ce cas test est répertoriée Tab. 6.10.

$K_{\text{CFL}}$	$K_{\text{CFL}}^*$	$P_s^*$	$N_1^*$	$N_2^*$
1	0,2	1	200	200

TABLE 6.10 – Cas test numérique du jet plan en description ALE : paramétrisation des échelles temporelles et pseudo-temporelles de la simulation SPH-ALE-DTS.

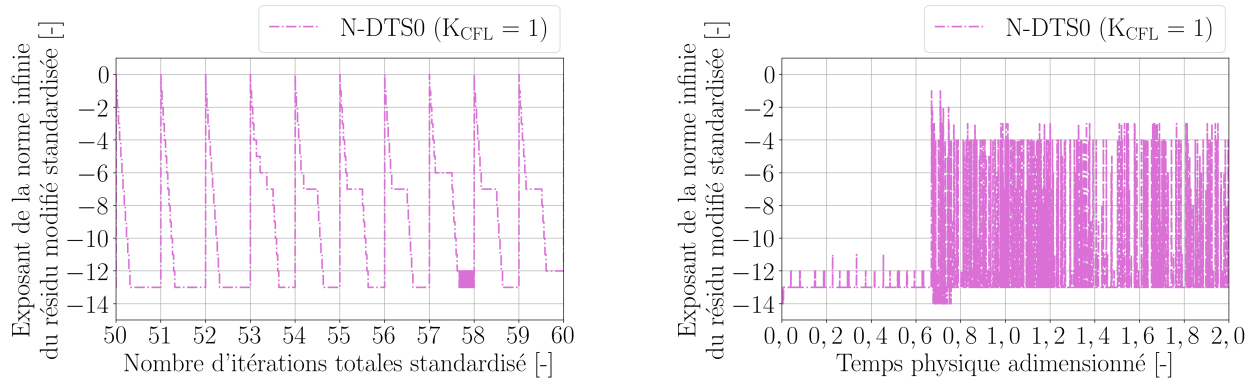
Une étude de l'évolution pseudo-temporelle avec  $N^* = N_1^* + N_2^*$  et temporelle de cet exposant permet de vérifier a posteriori qu'une configuration donnée est admissible.

Les valeurs des paramètres  $N_1^*$  et  $P_s^*$  sont choisies conjointement de manière à optimiser la correction de l'erreur « *closed-box* ».

Les profils d'évolution (pseudo-)temporelle de l'exposant numérique de la norme infinie du résidu modifié standardisée issus de la simulation N-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1$ ) sont présentés Fig. 6.29. Par soucis de lisibilité, le profil Fig. 6.29a est limité à quelques itérations totales et le profil Fig. 6.29b est restreint aux deux premières périodes de temps caractéristique. Pour tout instant  $n$ , la métrique  $\left\| \mathbf{H}_{(n,m)}^* \right\|_{\infty} / \left\| \mathbf{H}_{(n,0)}^* \right\|_{\infty}$  tend vers zéro lorsque  $m$  augmente. En particulier, les corrections de la méthode SPH-ALE-DTS ne s'activent qu'à partir de la cinquante-troisième



itération totale. Ainsi, jusqu'à cet instant, la convergence en pseudo-temps s'effectue sans difficultés. On remarque ensuite que cette métrique diminue plus difficilement sur les  $N_1^*$  premières itérations où la correction du mouvement est active. Dans l'ensemble cependant, le nombre total d'itérations en pseudo-temps  $N^* = N_1^* + N_2^*$  est jugé suffisant. On note de plus Fig. 6.29b que la configuration utilisée assure systématiquement la convergence vers zéro avec une précision jugée suffisante pour tout instant. La configuration ( $K_{\text{CFL}}^* = 0, 2$ ,  $P_s^* = 1$ ,  $N_1^* = 200$ ,  $N_2^* = 200$ ) est ainsi jugée admissible pour réaliser la simulation N-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1$ ).



(a) En fonction du nombre d'itérations cumulées en temps et pseudo-temps standardisé.

(b) En fonction du temps physique adimensionné.

FIGURE 6.29 – Cas test numérique du jet plan en description ALE : évolution en (pseudo-)temps de la norme infinie du résidu modifié standardisée de la simulation N-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1$ ).

**Pertinence :** Étudions la pertinence de la méthode SPH-ALE-DTS corrigée à simuler cet écoulement. Pour cela, comparons tout d'abord les prédictions de la surface totale recouverte par l'écoulement en régime permanent, obtenues des simulations N-RK3, 4N-RK3 et N-DTS0. Par simplicité, le profil d'évolution de la surface totale au cours du temps associé à la simulation N-DTS0 n'est pas représenté de par la similitude de son comportement vis-à-vis des références N-RK3 et 4N-RK3 (cf Fig. 3.21). Toutefois, leur performance est quantifiée Tab. 6.11.

<i>Simulations</i>	<i>RE Surface</i>
N-RK3 ( $K_{\text{CFL}} = 0, 3$ )	4,9%
4N-RK3 ( $K_{\text{CFL}} = 0, 3$ )	2,7%
N-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1$ )	1,3%

TABLE 6.11 – Cas test numérique du jet plan en description ALE : erreur relative de la simulation SPH-ALE-DTS.

En régime permanent, la surface totale de la simulation N-DTS0 présente une erreur relative d'environ 1% par rapport à la valeur théorique  $\mathcal{A}$ . Cet ordre de grandeur est inférieur à l'erreur de 5% (resp. 3%) obtenue avec la discrétisation uniformément grossière N-RK3 (resp. discrétisation uniformément fine 4N-RK3). La solution N-DTS0 constitue ainsi une approximation plus fidèle à la solution analytique que ne l'est la référence 4N-RK3, sans pour autant nécessiter une discrétisation uniformément fine du domaine fluide.

L'analyse est maintenant focalisée sur les champs de pression et de vitesse. Dans ce qui suit, en raison des similitudes entre les résultats en pression et vitesse, seuls ceux en pression sont



présentés le cas échéant. Fig. 6.30 illustre le coefficient de pression  $C_p = p/(\frac{1}{2}\rho_0 U^2)$  dans le domaine fluide de la simulation N-DTS0, moyenné sur une durée  $T_{\text{carac}}$  en régime permanent.

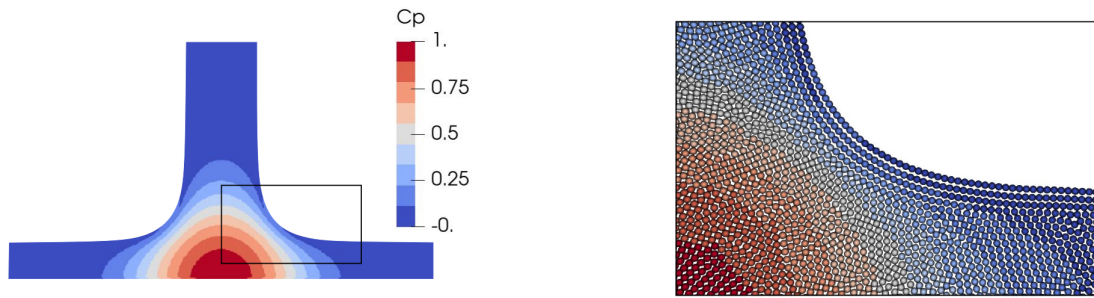


FIGURE 6.30 – Cas test numérique du jet plan en description ALE : champ obtenu avec N-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1$ ). Visualisation du champ de pression moyen dans l'écoulement en régime permanent et de la distribution particulière à  $t_{\text{adim}} = 6,5$ .

Dans la partie amont de l'écoulement, au dessus de la zone de surpression, le coefficient de pression est régulier car ces particules sont relativement bien ordonnées selon une organisation hexagonale compacte. Dans la zone où la surface libre s'évase pour former un coude, le champ de pression moyen est jugé régulier et la distribution particulière présente peu de désordre au voisinage étendu du point d'arrêt. En dehors de cette zone, les particules sont ordonnées selon un arrangement hexagonal compact assurant un pavage de l'espace satisfaisant et qui conduit à des champs réguliers. Par comparaison avec les résultats présentés Fig. 3.21, le champ global obtenu avec N-DTS0 est jugé plus régulier que ceux obtenus avec N-RK3 et 4N-RK3. Les bonnes performances de N-DTS0, déduites des considérations précédentes sur la surface totale, sont confirmées par cette métrique. Corriger le désordre particulière de la distribution améliore la précision des résultats moyennés (performance) et les rend moins sensibles au bruit numérique (robustesse). Ainsi, la pertinence de N-DTS0 est jugée meilleure que celle des simulations de référence N-RK3 et 4N-RK3.

En particulier, il est possible de se concentrer sur un axe horizontal (ou vertical) du champ global présenté Fig. 6.30 afin d'en étudier le profil. Pour commencer, les données en pression et vitesse en paroi le long de l'axe horizontal  $y/L = 0$  sont extraites. Pour éviter les redites, seule l'analyse des données de pression est présentée. Le profil du coefficient de pression moyen en paroi obtenu avec N-DTS0 est représenté Fig. 6.31a et est comparé au profil analytique.

Ce résultat est jugé fidèle à celui de la solution analytique. Toutefois, les écarts-types illustrent un bruit relativement grand au cœur de la zone d'impact du jet par rapport aux profils Fig. 3.22a et Fig. 3.22b obtenu respectivement avec les discrétisations N-RK3 et 4N-RK3.

Fig. 6.31b représente le coefficient de pression moyen en paroi de la simulation N-DTS0, que l'on compare au profil de la référence N-RK3. En particulier, il constitue une meilleure approximation que N-RK3 de la solution analytique au cœur de la zone d'impact du jet. Par ailleurs, le profil 4N-RK3 n'a pas été représenté par soucis de lisibilité. Afin de quantifier ces écarts, les données de l'indicateur DMSAE sur la pression sont répertoriées Tab. 6.12 qui confirme les interprétations précédentes faites à partir de Fig. 6.31b.

En régime permanent, la DMSAE associée à la simulation N-DTS0 est inférieure à celles des simulations de références N et 4N. Bien que la solution N-DTS0 soit plus bruitée, sa performance est jugée meilleure car plus fidèle à la solution analytique.

Pour aller plus loin dans l'interprétation des résultats, il est utile d'étudier le comportement physique le long de l'axe du jet. Ainsi, les données en pression et vitesse le long de l'axe vertical

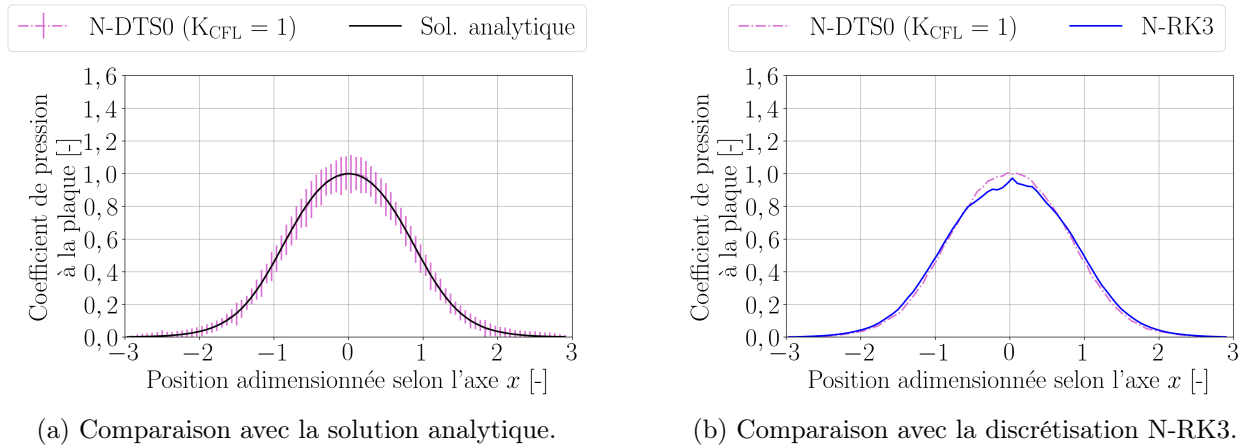


FIGURE 6.31 – Cas test numérique du jet plan en description ALE : profil du coefficient de pression moyen au niveau de la plaque. L’intervalle de confiance encadrant la moyenne temporelle à plus ou moins l’écart-type près est représenté Fig. 6.31a.

Simulations	DMSAE $C_p^{y=0}$
N-RK3 ( $K_{CFL} = 0,3$ )	0,070%
4N-RK3 ( $K_{CFL} = 0,3$ )	0,035%
N-DTS0 ( $K_{CFL} = 1$ )	0,002%

TABLE 6.12 – Cas test numérique du jet plan en description ALE : DMSAE sur la pression de la simulation SPH-ALE-DTS.

$x/L = 0,0$  sont extraites.

D’une part, le coefficient de pression  $C_p^{x=0}$  moyenné sur une durée  $T_{carac}$  en régime permanent est utilisé. Fig. 6.32a représente ce coefficient pour la simulation N-DTS0 que l’on compare à la solution analytique.

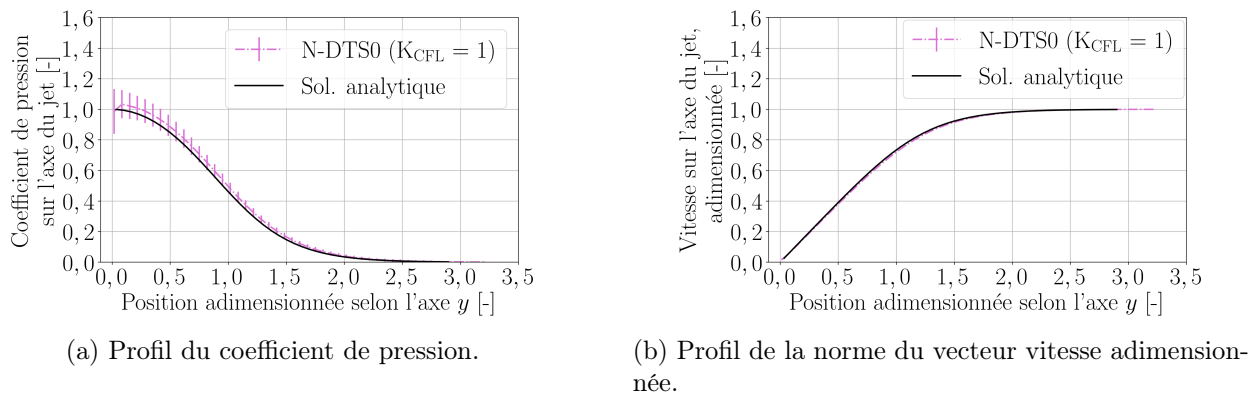


FIGURE 6.32 – Cas test numérique du jet plan en description ALE : profils sur l’axe du jet. L’intervalle de confiance encadrant la moyenne temporelle à plus ou moins l’écart-type près est représenté.

On distingue dans ce profil les trois zones identifiées section 3.4 pour les références N-RK3 et 4N-RK3. Proche de la zone d’injection ( $y/L > 2,5$ ), le gradient de pression est quasi-nul. Le bruit numérique est faible dans cette zone. Le profil moyen obtenu avec la simulation N-DTS0 est ainsi similaire à celui prédit par la solution analytique. Pour  $1,0 < y/L < 2,5$ , le gradient de pression augmente progressivement. Le profil moyen obtenu avec la simulation N-DTS0 s’écarte

peu de la solution analytique et le bruit numérique demeure faible. Dans cette zone, la solution N-DTS0 constitue une approximation plus fidèle à la solution analytique que ne le sont les références N-RK3 et 4N-RK3 illustrées Fig. 3.23a. Enfin dans la zone  $0, 0 < y/L < 1, 0$ , le gradient de pression diminue progressivement pour finalement s'annuler au niveau du point d'impact. En particulier, la valeur obtenue Fig. 6.32a en  $y/L = 0, 0$  est bien égale à celle présentée Fig. 6.31a en  $x/L = 0, 0$ . Le profil moyen obtenu avec la simulation N-DTS0 est jugé concordant avec celui prédit par la solution analytique. Le bruit numérique est ici plus important que par ailleurs dans l'écoulement.

D'autre part, complétons l'analyse en regardant le profil de la vitesse le long l'axe vertical  $x/L = 0, 0$ . Pour cela, la vitesse moyennée sur une durée  $T_{\text{carac}}$  en régime permanent et adimensionnée par la vitesse d'injection  $U$  est représentée Fig. 6.32b. En particulier, la vitesse s'annule en  $y/L = 0, 0$ . Le profil moyen obtenu avec la simulation N-DTS0 est similaire à celui prédit par la solution analytique et les écarts-types illustrent un faible bruit sur l'axe vertical  $x/L = 0, 0$  dans son ensemble. Ainsi, la solution N-DTS0 constitue une approximation plus fidèle à la solution analytique que ne le sont les références N-RK3 et 4N-RK3 illustrées Fig. 3.23b.

Finalement, la performance globale de N-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1$ ) est jugée meilleure que celle de la simulation N-RK3 ( $K_{\text{CFL}} = 0, 3$ ) tout en manipulant de plus grands pas en temps et également meilleure que celle de la simulation 4N-RK3 ( $K_{\text{CFL}} = 0, 3$ ) sans pour autant nécessiter une discrétisation uniformément fine du domaine fluide. Ainsi, l'auteur juge que la pertinence de N-DTS0 à simuler des écoulements en description ALE présentant des conditions d'entrée/sortie, une surface libre et une paroi solide est robuste.

## 6.4 Synthèse

Le dimensionnement des pas de temps d'un schéma numérique dont l'intégration temporelle est explicite est régi par une condition restrictive de type Courant-Friedrichs-Lewy (CFL). Cette contrainte conduit à des simulations coûteuses où le pas en temps est faible et les temps de simulation sont longs. Pour y pallier, la méthode SPH-ALE est révisée selon la technique du « *Dual-Time Stepping* » (DTS) pour devenir inconditionnellement stable en temps. Cette technique consiste en la formulation d'un problème équivalent faisant intervenir une nouvelle échelle dite pseudo-temporelle. Ainsi, celle-ci constitue également un formalisme propice au développement de stratégies correctives capable d'améliorer la consistance du schéma numérique sans modifier les propriétés physiques de l'écoulement. Pour cela, une reformulation en pseudo-temps de certaines stratégies usuelles de la littérature SPH est proposée afin de corriger le mouvement des particules et/ou le gradient de la fonction noyau. La méthode résultante est appelée SPH-ALE-DTS.

La pertinence de cette méthode est analysée sur l'ensemble des cas tests introduits chapitre 3. Cet ensemble est composé de cas quasi-1D et 2D, dont le domaine de calcul est délimité par diverses conditions aux limites (entrée, sortie, paroi mobile/fixe, surface libre) avec un écoulement qui présente une dynamique lente (canal oscillant) ou rapide (jet plan) et éventuellement de forts gradients (tube à choc / tourbillons de Taylord-Green). Les simulations sont réalisées en description eulérienne (ou lagrangienne/ALE) afin de faire abstraction (ou non) des difficultés liées à la configuration géométrique des particules. Dans l'ensemble, l'auteur est confiant en l'aptitude de la méthode SPH-ALE-DTS à simuler de tels écoulements.

En particulier, les propriétés suivantes ont été vérifiées. Tout d'abord, pour un pas de discrétisation en espace quelconque, les schémas SPH-ALE et SPH-ALE-DTS convergent vers la même approximation lorsque le pas de discrétisation en temps tend vers zéro. De plus, la méthode SPH-ALE-DTS est inconditionnellement stable à ce paramètre. Toutefois, la propension du schéma à filtrer temporellement les phénomènes hautes fréquences de l'écoulement s'accroît lorsque le pas de discrétisation de l'échelle temporelle augmente. Par ailleurs, le formalisme DTS introduit est jugé compatible avec l'utilisation des conditions aux limites de type entrée/sortie, périodicité, surface libre et paroi solide mobile/immobile.

En résumé, la pertinence de la méthode SPH-ALE-DTS est jugée robuste. Celle-ci est jugée aussi robuste que la méthode SPH-ALE pour simuler des écoulements en description eulérienne ou lagrangienne. De plus, en description ALE, la pertinence de la méthode SPH-ALE-DTS est jugée particulièrement robuste aux erreurs numériques dues à une distribution inhomogène. Sur le cas du jet plan, sa performance globale est même jugée meilleure que celle de la méthode SPH-ALE tout en manipulant de plus grands pas en temps et sans pour autant nécessiter une discrétisation plus fine du domaine fluide.

# CHAPITRE 7

## MÉTHODE SPH-ALE À MULTI-RÉSOLUTIONS SPATIALE ET TEMPORELLE

### Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Méthode HAPR-SPH-ALE-DTS</b>	<b>136</b>
<b>7.2</b>	<b>Impact d'un jet plan sur une plaque plane</b>	<b>137</b>
7.2.1	Cas de l'interface de raccord haute	137
7.2.2	Cas de l'interface de raccord basse	142
<b>7.3</b>	<b>Synthèse</b>	<b>149</b>

---

Les techniques de simulation multi-résolutions considérées précédemment ont abouti à une version de la méthode SPH-ALE dont la pertinence est jugée plus robuste sur l'ensemble des cas tests introduits. D'une part, la technique de l'HAPR introduite chapitre 5 permet de recourir à une discrétisation particulière variable en espace. D'autre part, la technique DTS présentée chapitre 6 assure au schéma résultant une stabilité inconditionnelle au pas de discrétisation temporel et permet de réduire efficacement l'inhomogénéité de la distribution particulière. Bien que ces stratégies aient été développées séparément, elles sont non-exclusives et peuvent être utilisées conjointement. Ainsi, le dernier chapitre de ce manuscrit est consacré au développement d'une méthode SPH-ALE à multi-résolutions spatiale et temporelle. Cette approche consiste à utiliser simultanément les techniques de l'HAPR et DTS afin de bénéficier des avantages de ces deux stratégies. La méthode résultante est appelée HAPR-SPH-ALE-DTS. Son principe est présenté dans ce qui suit. Les résultats obtenus sont ensuite illustrés et commentés sur le cas du jet plan.

## 7.1 Méthode HAPR-SPH-ALE-DTS

Le principe de la méthode HAPR-SPH-ALE-DTS est détaillé dans cette section. Cette approche consiste à utiliser simultanément les techniques de l'HAPR et DTS présentées respectivement chapitre 5 et chapitre 6 avec quelques différences. En effet, pour un instant donné, l'HAPR associe à une particule le statut de SPH, garde ou hybride. Selon ce statut, son traitement en pseudo-temps est différencié comme suit.

D'une part, la mise à jour en temps et pseudo-temps des champs d'une particule SPH est réalisée sans modification par rapport au traitement détaillé Alg. 3. En particulier, pour toute particule SPH qui n'est pas détectée au voisinage d'une surface libre ou d'une condition d'entrée, les corrections numériques du mouvement et du gradient de la fonction noyau présentées section 6.2.4 sont activées.

D'autre part, détaillons le traitement d'une particule garde et/ou hybride. Le processus de raffinement de l'HAPR est inchangé. L'introduction des filles additionnelles est opérée sur l'échelle temporelle, c'est-à-dire hors des boucles itératives en pseudo-temps (cf (L.6-18) Alg. 3). Une fois initialisées, les propriétés d'une particule garde/hybride  $i$  doivent évoluer (pseudo-)temporellement. Pour cela, les opérations suivantes sont réalisées à chaque pseudo-instant. Les variables primitives de la particule  $i$  sont interpolées par prolongation ou restriction. Ces processus sont identiques à ceux présentés chapitre 4. Si la particule  $i$  est hybride, ses champs sont une moyenne pondérée des contributions issues de l'approximation MLS et des interactions SPH (cf chapitre 5). Le champ de transport  $\mathbf{v}_{0,i}^*$  d'une particule garde/hybride est construit avec une correction  $\delta\mathbf{v}_{0,i}^*$  du mouvement pur lagrangien  $\mathbf{v}_i^*$ . De même que pour les particules SPH, cette correction  $\delta\mathbf{v}_{0,i}^*$  est nulle si la particule  $i$  est détectée au voisinage d'une surface libre ou d'une condition d'entrée. De plus, celle-ci est également nulle au voisinage de la frontière entre la région HAPR et le Niveau 0. Autrement, ce terme est défini selon Éq. (6.39) de manière à corriger le mouvement de la particule  $i$  afin de réduire l'erreur « *closed-box* » en pseudo-temps  $\mathbf{b}_i^*$ . Par exemple, le mouvement d'une fille garde/hybride (resp. mère garde) est corrigé de façon à réduire l'erreur d'approximation locale de la distribution des filles (resp. des mères). La divergence du champ de transport est ensuite calculée. Le champ de transport (resp. la divergence du champ de transport) permet de mettre à jour la position (resp. le volume) de  $i$ .

## 7.2 Impact d'un jet plan sur une plaque plane

Dans cette section, la simulation HAPR-SPH-ALE-DTS d'un jet plan impactant une plaque plane en incidence normale est réalisée en description ALE. Dans ce qui suit, l'appellation HAPR-DTS0 fait référence au formalisme HAPR-SPH-ALE-DTS consistant à l'ordre 1 en temps physique. Dans la continuité des travaux initiés chapitre 6, seuls les résultats du schéma HAPR-DTS0 ( $K_{CFL} \leq 1$ ) sont présentés par la suite. L'objectif est d'étudier la pertinence de cette méthode multi-résolutions en espace et en temps à conduire une simulation d'un écoulement présentant des conditions d'entrée/sortie, une surface libre et une paroi solide.

La paramétrisation générale du problème est détaillée section 3.4. Le cas étudié est schématisé Fig. 5.14 avec une zone raffinée recouvrant entièrement la partie inférieure du domaine de calcul, dont la plaque. Ainsi, une mère SPH se raffine exactement une fois au cours de la simulation et les mères gardes et filles SPH du Niveau 1 sont éliminées sans procéder au dé-raffinement. Par conséquent, seule la procédure de raffinement de l'HAPR-DTS0 intervient dans l'analyse de sa pertinence dans cette configuration. À l'instar des résultats présentés chapitre 5, deux positions de l'interface de raccord entre la zone raffinée et la zone de transition sont choisies pour étudier ensuite la sensibilité de la méthode au positionnement de la zone de transition dans l'écoulement, i.e. une interface dite haute ( $2H_a/L = 1, 7$ ) et interface dite basse ( $2H_a/L = 0, 7$ ).

### 7.2.1 Cas de l'interface de raccord haute

Dans un premier temps, la pertinence de l'HAPR-DTS0 est analysée en considérant une région HAPR avec l'interface de raccord haute ( $2H_a/L = 1, 7$ ). Cette configuration permet de disposer Transition 0-1 dans une zone de l'écoulement présentant des gradients de pression et de vitesse faibles sur l'axe du jet (cf Fig. 3.23).

#### Paramétrisation

Des compléments de la paramétrisation numérique utiles aux simulations HAPR-SPH-ALE-DTS sont précisés ci-après. La composition de Transition 0-1 considérée est présentée Tab. 7.1.

$\xi_{\text{Supp.}}$	$\xi_{\text{Créa.}}$	$\xi_{\text{Halo Garde}}$	$\xi_{\text{Hybride}}$
0,35	0,35	2,00	0,00

TABLE 7.1 – Cas test numérique du jet plan en description ALE : composition de la zone de transition des simulations HAPR-SPH-ALE-DTS avec interface de raccord haute.

Les facteurs  $\xi_{\text{Créa.}}$  et  $\xi_{\text{Supp.}}$  sont ainsi choisis pour satisfaire les relations ad hoc (5.4) et (5.6), respectivement. Le facteur  $\xi_{\text{Halo Garde}}$  déterminant l'épaisseur de la sous-zone Halo Garde est choisi deux fois supérieur à la borne inférieure de la contrainte (5.1) pour plus de stabilité. Afin d'adopter une démarche de complexification progressive, la sous-zone Hybride est définie d'épaisseur nulle, i.e. la zone de transition ne contient pas de particules hybrides.

Dans la continuité des résultats du schéma N-DTS0 rapportés section 6.3.4, l'étude de HAPR-DTS0 est restreinte au cas où  $K_{CFL} = 1$ . Les paramétrisations utilisées par la suite sont répertoriées Tab. 7.2.

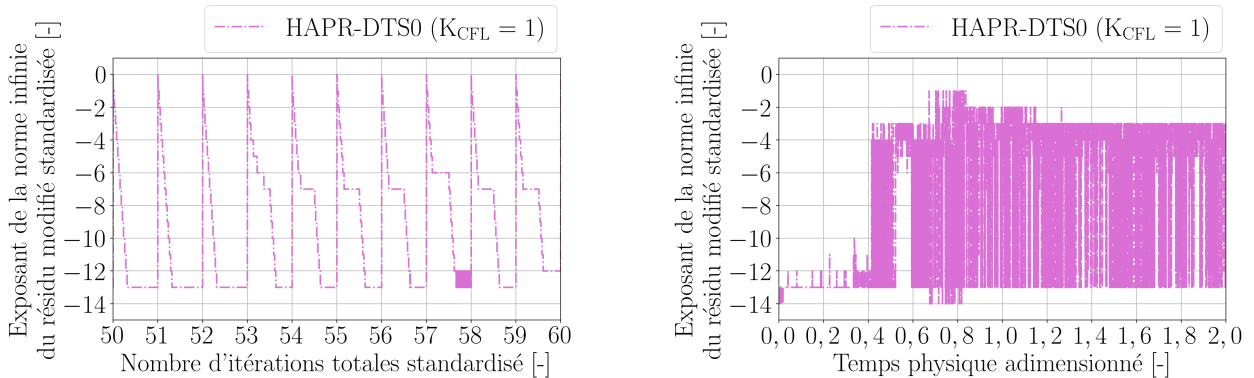
L'évolution (pseudo-)temporelle de l'exposant numérique de la norme infinie du résidu modifié standardisée a été étudiée pour l'ensemble de ces paramétrisations. En bref, chacune



$K_{\text{CFL}}$	$K_{\text{CFL}}^*$	$P_s^*$	$N_1^*$	$N_2^*$
1	0,2	1	50 200	200

TABLE 7.2 – Cas test numérique du jet plan en description ALE : paramétrisation des échelles temporelles et pseudo-temporelles des simulations HAPR-SPH-ALE-DTS avec interface de raccord haute.

a été jugée admissible. Par simplicité, seule l'étude associée à la simulation HAPR-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1$ ,  $N_1^* = 200$ ) est présentée Fig. 7.1.



(a) En fonction du nombre d'itérations cumulées en temps et pseudo-temps standardisé.

(b) En fonction du temps physique adimensionné.

FIGURE 7.1 – Cas test numérique du jet plan en description ALE : évolution en (pseudo-)temps de la norme infinie du résidu modifié standardisée de la simulation HAPR-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1$ ,  $N_1^* = 200$ ).

Par soucis de lisibilité, le profil Fig. 7.1a est limité à quelques itérations totales et le profil Fig. 7.1b est restreint aux deux premières périodes de temps caractéristique. Pour tout instant  $n$ , la métrique  $\left\| \mathbf{H}_{(n,m)}^* \right\|_{\infty} / \left\| \mathbf{H}_{(n,0)}^* \right\|_{\infty}$  tend vers zéro lorsque  $m$  augmente. En particulier, les corrections de la méthode SPH-ALE-DTS ne s'activent qu'à partir de la cinquante-troisième itération totale. Ainsi, jusqu'à cette instant, la convergence en pseudo-temps s'effectue sans difficultés. On remarque ensuite que cette métrique diminue plus difficilement sur les  $N_1^*$  premières itérations où la correction du mouvement est active. Dans l'ensemble cependant, le nombre total d'itérations en pseudo-temps  $N^* = N_1^* + N_2^*$  est jugé suffisant. On note de plus Fig. 7.1b que la configuration utilisée assure systématiquement la convergence vers zéro avec une précision jugée suffisante pour tout instant. La configuration ( $K_{\text{CFL}}^* = 0,2$ ,  $P_s^* = 1$ ,  $N_1^* = 200$ ,  $N_2^* = 200$ ) est ainsi jugée admissible pour réaliser la simulation HAPR-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1$ ).

Finalement les paramétrisations présentées Tab. 7.2 sont jugées satisfaisantes pour cette étude.

## Pertinence

Étudions la pertinence de la méthode HAPR-SPH-ALE-DTS à simuler cet écoulement. Pour cela, comparons tout d'abord les prédictions de la surface totale recouverte par l'écoulement en régime permanent, obtenues des simulations N-RK3, 4N-RK3, N-DTS0 et HAPR-DTS0. Par simplicité, le profil d'évolution de la surface totale au cours du temps associé à la simulation HAPR-DTS0 n'est pas représenté de par la similitude de son comportement vis-à-vis des références numériques considérées (cf Fig. 3.21). Toutefois, leur performance est quantifiée Tab. 7.3.

<i>Simulations</i>	<i>RE Surface</i>
N-RK3 ( $K_{\text{CFL}} = 0,3$ )	4,9%
4N-RK3 ( $K_{\text{CFL}} = 0,3$ )	2,7%
N-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1, N_1^* = 200$ )	1,3%
HAPR-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1, N_1^* = 50$ )	1,0%
HAPR-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1, N_1^* = 200$ )	0,6%

TABLE 7.3 – Cas test numérique du jet plan en description ALE : erreur relative des simulations HAPR-SPH-ALE-DTS avec interface de raccord haute.

En régime permanent, la surface totale de la simulation HAPR-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1, N_1^* = 200$ ) présente une erreur relative d'environ 0,6% par rapport à la valeur théorique  $\mathcal{A}$ . Cet ordre de grandeur est deux fois inférieur à l'erreur de 1,3% obtenue avec la discrétisation uniformément grossière N-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1, N_1^* = 200$ ). À l'instar des références 4N-RK3 et N-RK3, recourir à une discrétisation deux fois plus fine réduit d'autant l'erreur sur la surface totale en régime permanent entre N-DTS0 et HAPR-DTS0. Par ailleurs, la solution HAPR-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1, N_1^* = 50$ ) présente une erreur relative d'environ 1%. Ainsi, diminuer le nombre d'itérations de correction de l'erreur « *closed-box* » de 200 à 50 affecte la performance de la méthode HAPR-DTS0. Toutefois, celle-ci constitue encore une approximation plus fidèle à la solution analytique que ne l'est N-DTS0. Par conséquent, cette métrique semble indiquer qu'une discrétisation plus fine induit une performance plus robuste.

L'analyse est maintenant focalisée sur les champs de pression et de vitesse. Par simplicité, seule l'analyse de la simulation HAPR-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1, N_1^* = 200$ ) est illustrée. Dans ce qui suit, en raison des similitudes entre ses résultats en pression et vitesse, seuls ceux en pression sont présentés. Fig. 6.30 illustre le coefficient de pression  $C_p = p/(\frac{1}{2}\rho_0 U^2)$  dans le domaine fluide, moyenné sur une durée  $T_{\text{carac}}$  en régime permanent.

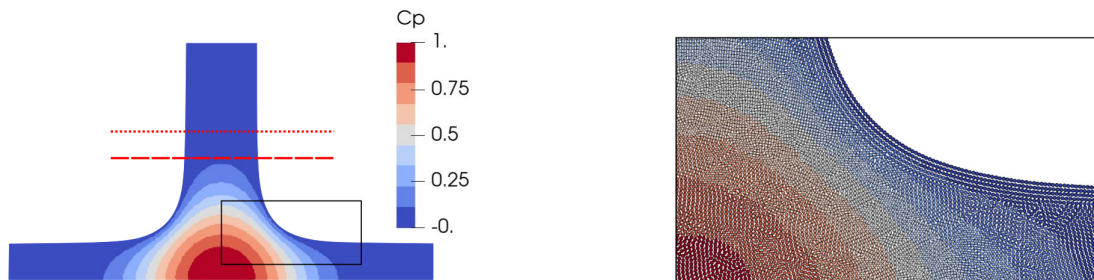


FIGURE 7.2 – Cas test numérique du jet plan en description ALE : champ obtenu avec HAPR-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1, N_1^* = 200$ ) et l'interface de raccord haute. La position de l'interface de raccord entre Transition 0-1 et Niveau 1 (resp. Niveau 0) est représentée par une ligne discontinue de tirets rouges (resp. de pointillés rouges). Visualisation du champ de pression moyen en régime permanent et de la distribution particulière à  $t_{\text{adim}} = 6,5$ .

Dans la partie amont de l'écoulement, au dessus de la zone de surpression, ce sont les mères SPH qui véhiculent l'information physique. Le coefficient de pression est régulier car ces particules sont relativement bien ordonnées selon une organisation hexagonale compacte. La jonction entre mères SPH et filles SPH s'opère dans une région où le coefficient de pression est faible. Le pavage de l'espace est jugé de qualité satisfaisante car la transition entre discrétisation grossière et fine

est régulière et n'introduit pas de discontinuité. Dans la zone où la surface libre s'évase pour former un coude, ce sont les filles SPH qui sont actives. Le champ de pression moyen est jugé régulier et la distribution particulière présente peu de désordre au voisinage étendu du point d'arrêt. En dehors de cette zone, les particules sont ordonnées selon un arrangement hexagonal compact assurant un pavage de l'espace satisfaisant et qui conduit à des champs réguliers. Par comparaison avec les résultats présentés Fig. 6.30, le champ global obtenu avec HAPR-DTS0 est jugé légèrement plus régulier que ceux obtenus avec N-DTS0. Les bonnes performances de HAPR-DTS0, déduites des considérations précédentes sur la surface totale, sont confirmées par cette métrique. Diminuer localement la taille des particules utilisées améliore la précision (performance) et les rend moins sensibles au bruit numérique (robustesse). Ainsi, la pertinence de HAPR-DTS0 est jugée plus robuste que celle de la simulation N-DTS0.

En particulier, il est possible de se concentrer sur un axe horizontal (ou vertical) du champ global présenté Fig. 7.2 afin d'en étudier le profil. Pour commencer, les données en pression et vitesse en paroi le long de l'axe horizontal  $y/L = 0$  sont extraites. Pour éviter les redites, seule l'analyse des données de pression est présentée. Le profil du coefficient de pression moyen en paroi obtenu avec HAPR-DTS0 où  $N_1^* = 200$  (resp.  $N_1^* = 50$ ) est représenté Fig. 7.3a (resp. Fig. 7.3b) et est comparé au profil analytique.

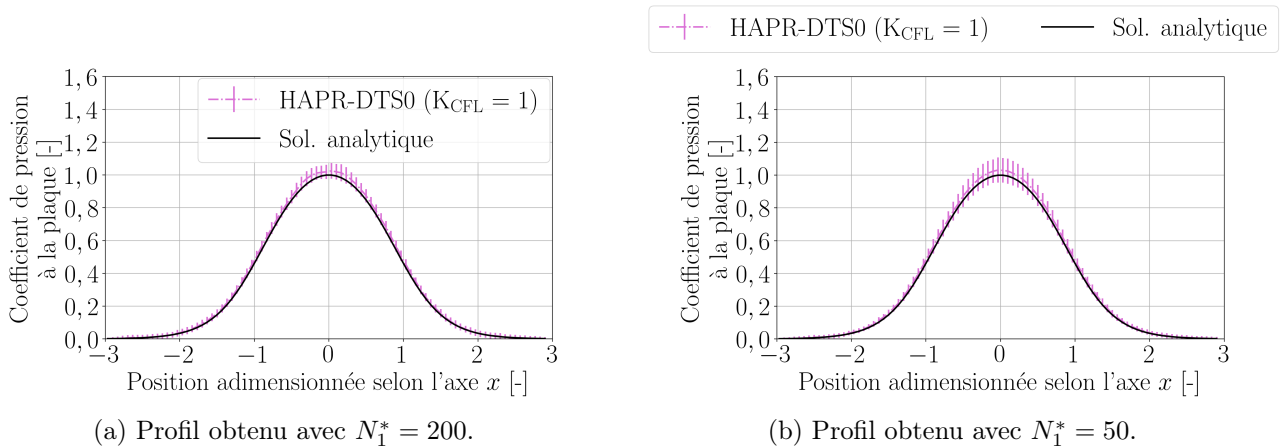


FIGURE 7.3 – Cas test numérique du jet plan en description ALE : profil du coefficient de pression moyen au niveau de la plaque obtenu avec HAPR-DTS0 ( $K_{CFL} = 1$ ) et l'interface de raccord haute. L'intervalle de confiance encadrant la moyenne temporelle à plus ou moins l'écart-type près est représenté.

Ces résultats sont jugés fidèles à la solution analytique. De plus, les performances de HAPR-DTS0 où  $N_1^* = 200$  et  $N_1^* = 50$  sont jugées cohérentes et leur prédiction moyenne semblent similaires. Toutefois, les écarts-types illustrent un bruit plus grand au cœur de la zone d'impact du jet pour HAPR-DTS0 ( $K_{CFL} = 1$ ,  $N_1^* = 50$ ) par rapport à HAPR-DTS0 ( $K_{CFL} = 1$ ,  $N_1^* = 200$ ). Ainsi, diminuer le nombre d'itérations de correction  $N_1^*$  de 200 à 50 rend la simulation plus sensible au bruit numérique lié à l'inhomogénéité de la distribution. Cependant, la volatilité des solutions HAPR-DTS0 est plus faible que celle du profil Fig. 6.31a obtenu avec N-DTS0 ( $K_{CFL} = 1$ ,  $N_1^* = 200$ ). Ainsi, les simulations HAPR-DTS0 sont jugées plus robustes. Les données de l'indicateur DMSAE sur la pression sont répertoriées Tab. 7.4 afin de quantifier les écarts entre les prédictions moyennes des simulations N-RK3, 4N-RK3, N-DTS0 et HAPR-DTS0.

En régime permanent, la DMSAE associée aux simulations HAPR-DTS0 est inférieure à celle de la simulation de référence N, du même ordre de grandeur que la référence 4N et supérieure à celle de N-DTS0. Dans l'ensemble, la performance de la solution HAPR-DTS0 est jugée meilleure

<i>Simulations</i>	<i>DMSAE <math>C_p^{y=0}</math></i>
N-RK3 ( $K_{CFL} = 0,3$ )	0,070%
4N-RK3 ( $K_{CFL} = 0,3$ )	0,035%
N-DTS0 ( $K_{CFL} = 1, N_1^* = 200$ )	0,002%
HAPR-DTS0 ( $K_{CFL} = 1, N_1^* = 50$ )	0,028%
HAPR-DTS0 ( $K_{CFL} = 1, N_1^* = 200$ )	0,024%

TABLE 7.4 – Cas test numérique du jet plan en description ALE : DMSAE sur la pression des simulations HAPR-SPH-ALE-DTS avec interface de raccord haute.

que celle des références N et 4N. Bien que sa prédiction moyenne soit moins précise que celle de N-DTS0, sa performance globale est tout de même jugée satisfaisante car moins bruitée. Par conséquent, les simulations HAPR-DTS0 constituent une approximation jugée fidèle de la solution analytique. De par les similitudes observées entre les résultats des simulations HAPR-DTS0, seuls ceux de HAPR-DTS0 ( $K_{CFL} = 1, N_1^* = 200$ ) sont illustrés par la suite.

Fig. 7.4 présente le profil de la norme de la quantité de mouvement moyenne adimensionnée, i.e.  $\rho \|\mathbf{v}\| / (\rho_0 U)$ , extrait de l'axe vertical  $x = \pm L_p/2$ .

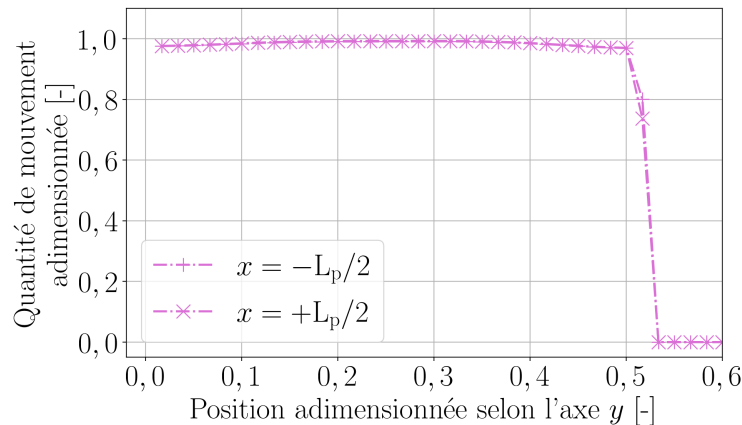
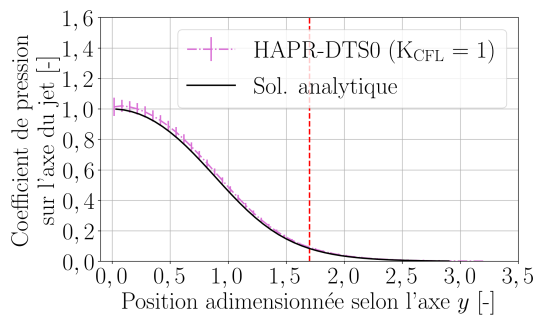


FIGURE 7.4 – Cas test numérique du jet plan en description ALE : profils de quantité de mouvement moyenne adimensionnée obtenus avec HAPR-DTS0 ( $K_{CFL} = 1, N_1^* = 200$ ) et l'interface de raccord haute.

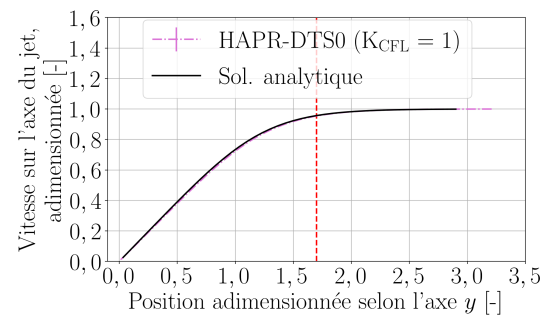
Ces deux profils sont similaires. Ainsi, on vérifie que la quantité de mouvement des particules situées au voisinage des sorties présente une symétrie d'axe  $x/L = 0,0$ . Autrement dit, le débit masse des sorties  $x = \pm L_p/2$  est égal. Par ailleurs, on note que la norme de la quantité de mouvement moyenne en sortie est inférieure à la valeur analytique  $\rho_0 U$  mais que la nappe de fluide est légèrement plus haute. Il est donc difficile de conclure quant à la conservation du débit masse entre l'entrée et les sorties.

Pour aller plus loin dans l'interprétation des résultats, il est utile d'étudier le comportement physique le long de l'axe du jet. Ainsi, les données en pression et vitesse le long de l'axe vertical  $x/L = 0,0$  sont extraites.

D'une part, le coefficient de pression  $C_p^{x=0}$  moyenné sur une durée  $T_{\text{carac}}$  en régime permanent est représenté Fig. 7.5a pour la simulation HAPR-DTS0 que l'on compare à la solution analytique.



(a) Profil du coefficient de pression.



(b) Profil de la norme du vecteur vitesse adimensionnée.

FIGURE 7.5 – Cas test numérique du jet plan en description ALE : profils sur l'axe du jet obtenus avec HAPR-DTS0 ( $K_{CFL} = 1$ ,  $N_1^* = 200$ ) et l'interface de raccord haute. L'intervalle de confiance encadrant la moyenne temporelle à plus ou moins l'écart-type près est représenté. La frontière du Niveau 1 est matérialisée par une ligne verticale discontinue de tirets rouges.

Proche de la zone d'injection ( $y/L > 2,5$ ), le gradient de pression est quasi-nul. Le bruit numérique est faible dans cette zone. Le profil moyen obtenu avec la simulation HAPR-DTS0 est ainsi similaire à celui prédit par la solution analytique. Pour  $1,0 < y/L < 2,5$ , le gradient de pression augmente progressivement. En particulier, cette portion contient l'interface du raccord. Le profil moyen obtenu avec la simulation HAPR-DTS0 s'écarte peu de la solution analytique et le bruit numérique demeure faible. Enfin dans la zone  $0,0 < y/L < 1,0$ , le gradient de pression diminue progressivement pour finalement s'annuler au niveau du point d'impact. En particulier, la valeur obtenue Fig. 7.5a en  $y/L = 0,0$  est bien égale à celle présentée Fig. 7.3a en  $x/L = 0,0$ . Le profil moyen obtenu avec la simulation HAPR-DTS0 est jugé concordant avec celui prédit par la solution analytique. Le bruit numérique est ici plus important que par ailleurs dans l'écoulement. Toutefois, par comparaison avec la simulation N-DTS0 illustrée Fig. 6.32a, la solution HAPR-DTS0 constitue une approximation jugée plus fidèle à la solution analytique. D'autre part, complétons l'analyse en regardant le profil de la vitesse le long l'axe vertical  $x/L = 0,0$ . Pour cela, la vitesse moyennée sur une durée  $T_{carac}$  en régime permanent et adimensionnée par la vitesse d'injection  $U$  est représentée Fig. 7.5b. En particulier, la vitesse s'annule en  $y/L = 0,0$ . Le profil moyen obtenu avec la simulation HAPR-DTS0 est similaire à celui prédit par la solution analytique et les écarts-types illustrent un très faible bruit sur l'axe vertical  $x/L = 0,0$  dans son ensemble. Ainsi, la solution HAPR-DTS0 constitue une approximation jugée fidèle à la solution analytique.

Finalement, la performance globale de HAPR-DTS0 ( $K_{CFL} = 1$ ) est jugée légèrement meilleure que celle de la simulation N-DTS0 ( $K_{CFL} = 1$ ). Diminuer localement la taille des particules utilisées améliore la précision (performance) et les rend moins sensibles au bruit numérique (robustesse). Ainsi, l'auteur juge que la pertinence de HAPR-DTS0 à simuler des écoulements en description ALE présentant des conditions d'entrée/sortie, une surface libre et une paroi solide est robuste. Recourir conjointement aux techniques HAPR et DTS permet de bénéficier des avantages de ces deux stratégies.

### 7.2.2 Cas de l'interface de raccord basse

À présent, la pertinence de l'HAPR-DTS0 est analysée en considérant une région HAPR avec l'interface de raccord basse ( $2H_a/L = 0,7$ ). Cette configuration permet de disposer Transition 0-1 dans une zone de l'écoulement présentant des gradients de pression et de vitesse forts sur

l'axe du jet (cf Fig. 3.23).

### Paramétrisation

Des compléments de la paramétrisation numérique utiles aux simulations HAPR-SPH-ALE-DTS sont précisés ci-après. Les compositions de Transition 0-1 considérées sont présentées Tab. 7.5.

Composition	$\xi_{\text{Supp.}}$	$\xi_{\text{Créa.}}$	$\xi_{\text{Halo Garde}}$	$\xi_{\text{Hybride}}$
Ca	0,35	0,35	11,62	0,00
Cb			2,00	

TABLE 7.5 – Cas test numérique du jet plan en description ALE : composition de la zone de transition des simulations HAPR-SPH-ALE-DTS avec interface de raccord basse.

Les facteurs  $\xi_{\text{Créa.}}$  et  $\xi_{\text{Supp.}}$  ont été choisis de façon à satisfaire les relations ad hoc (5.4) et (5.6), respectivement. Afin d'adopter une démarche de complexification progressive, la sous-zone Hybride est définie d'épaisseur nulle, i.e. la zone de transition ne contient pas de particules hybrides. Avec la composition Ca, le facteur  $\xi_{\text{Halo Garde}}$  déterminant l'épaisseur de la sous-zone Halo Garde est choisi de manière à disposer le raccord entre Niveau 0 et Transition 0-1 comme dans le cas avec raccord haut ( $2H_a/L = 0,7$ ) étudié section 7.2.1. Ainsi, le raffinement d'une mère a lieu dans une région où le jet s'évase peu. Enfin, le facteur  $\xi_{\text{Halo Garde}}$  de la composition Cb est égal à celui considéré avec raccord haut (cf Tab. 7.1). Dans cette situation, l'introduction de filles additionnelles a lieu dans une région où la surface libre forme un coude.

La paramétrisation des échelles temporelle et pseudo-temporelle utilisée par la suite est répertoriée Tab. 7.6.

$K_{\text{CFL}}$	$K_{\text{CFL}}^*$	$P_s^*$	$N_1^*$	$N_2^*$
1	0,2	1	50	200

TABLE 7.6 – Cas test numérique du jet plan en description ALE : paramétrisation des échelles temporelles et pseudo-temporelles des simulations HAPR-SPH-ALE-DTS avec interface de raccord basse.

Dans la continuité des résultats du schéma HAPR-DTS0 obtenus avec raccord haut, restreindre l'étude de HAPR-DTS0 avec raccord bas au cas où  $N_1^* = 50$  est un compromis qui est jugé raisonnable.

L'évolution temporelle de l'exposant numérique de la norme infinie du résidu modifié standardisée de la simulation HAPR-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1$ ,  $\xi_{\text{Halo Garde}} = 11,62$ ) est présentée Fig. 7.6. On note que la configuration utilisée assure la convergence vers zéro avec une précision jugée suffisante pour tout instant. Le nombre total d'itérations en pseudo-temps  $N^* = N_1^* + N_2^*$  est jugé suffisant. La configuration ( $K_{\text{CFL}}^* = 0,2$ ,  $P_s^* = 1$ ,  $N_1^* = 50$ ,  $N_2^* = 200$ ) est ainsi jugée admissible pour réaliser la simulation HAPR-DTS0 avec la composition Ca. Par simplicité, seule l'étude associée à cette simulation est présentée. Cependant, cette configuration est également jugée admissible pour réaliser la simulation HAPR-DTS0 avec la composition Cb.

### Pertinence

Tout d'abord, comparons les prédictions de la surface totale recouverte par l'écoulement en régime permanent. Par simplicité, le profil d'évolution de la surface totale au cours du temps associé à la simulation HAPR-DTS0 n'est pas représenté de par la similitude de son



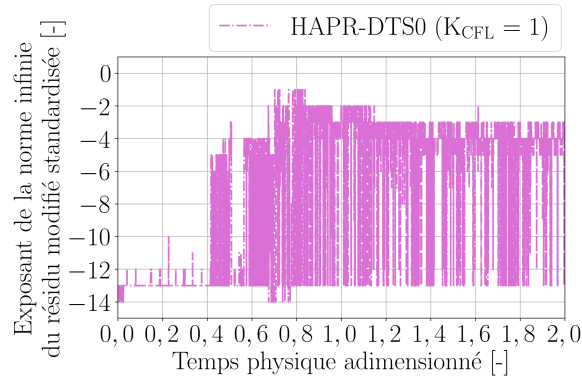


FIGURE 7.6 – Cas test numérique du jet plan en description ALE : profil de la norme infinie du résidu modifié standardisée de la simulation HAPR-DTS0 ( $K_{CFL} = 1$ ,  $\xi_{Halo\ Garde} = 11,62$ ), en fonction du temps physique adimensionné.

comportement vis-à-vis des références numériques considérées (cf Fig. 3.21). Toutefois, leur performance est quantifiée Tab. 7.7.

<i>Simulations</i>	<i>RE Surface</i>
N-RK3 ( $K_{CFL} = 0,3$ )	4,9%
4N-RK3 ( $K_{CFL} = 0,3$ )	2,7%
N-DTS0 ( $K_{CFL} = 1$ )	1,3%
HAPR-DTS0 ( $K_{CFL} = 1$ , $\xi_{Halo\ Garde} = 11,62$ )	1,6%
HAPR-DTS0 ( $K_{CFL} = 1$ , $\xi_{Halo\ Garde} = 2,00$ )	1,4%

TABLE 7.7 – Cas test numérique du jet plan en description ALE : erreur relative des simulations HAPR-SPH-ALE-DTS avec interface de raccord basse.

En régime permanent, la surface totale des simulations HAPR-DTS0 présente une erreur relative d'ordre de grandeur jugé similaire à celle obtenue avec la discrétisation uniformément grossière N-DTS0. Ainsi, recourir à une discrétisation deux fois plus fine en disposant le raccord aussi bas dans le jet n'améliore pas la performance. Toutefois, HAPR-DTS0 constitue une approximation plus fidèle à la solution analytique que ne le sont les références N-RK3 et 4N-RK3. Par ailleurs, contrairement à la simulation HAPR-RK3 (cf chapitre 5), cette métrique indique que l'HAPR-DTS0 demeure robuste lorsque l'interface de raccord est basse.

L'analyse est maintenant focalisée sur les champs de pression et de vitesse. Dans ce qui suit, en raison des similitudes entre les résultats en pression et vitesse, seuls ceux en pression sont présentés. Fig. 7.7a (resp. Fig. 7.7b) présente le coefficient de pression  $C_p = p/(\frac{1}{2}\rho_0 U^2)$  dans le domaine fluide, moyenné sur une durée  $T_{carac}$  en régime permanent de la simulation HAPR-DTS0 avec  $\xi_{Halo\ Garde} = 11,62$  (resp.  $\xi_{Halo\ Garde} = 2,00$ ).

Dans la partie amont de l'écoulement, au dessus de la zone de surpression, ce sont les mères SPH qui véhiculent l'information physique. Le coefficient de pression est régulier car ces particules sont relativement bien ordonnées selon une organisation hexagonale compacte. Le coefficient de pression augmente ensuite progressivement et la surface libre commence alors à s'évaser pour former un coude. La jonction entre mères SPH et filles SPH s'opère ainsi dans une région où le coefficient de pression est élevé. Le pavage de l'espace formé par les mères SPH est homogène au centre du jet. D'une part, dans le cas  $\xi_{Halo\ Garde} = 11,62$ , le pavage des filles SPH est homogène



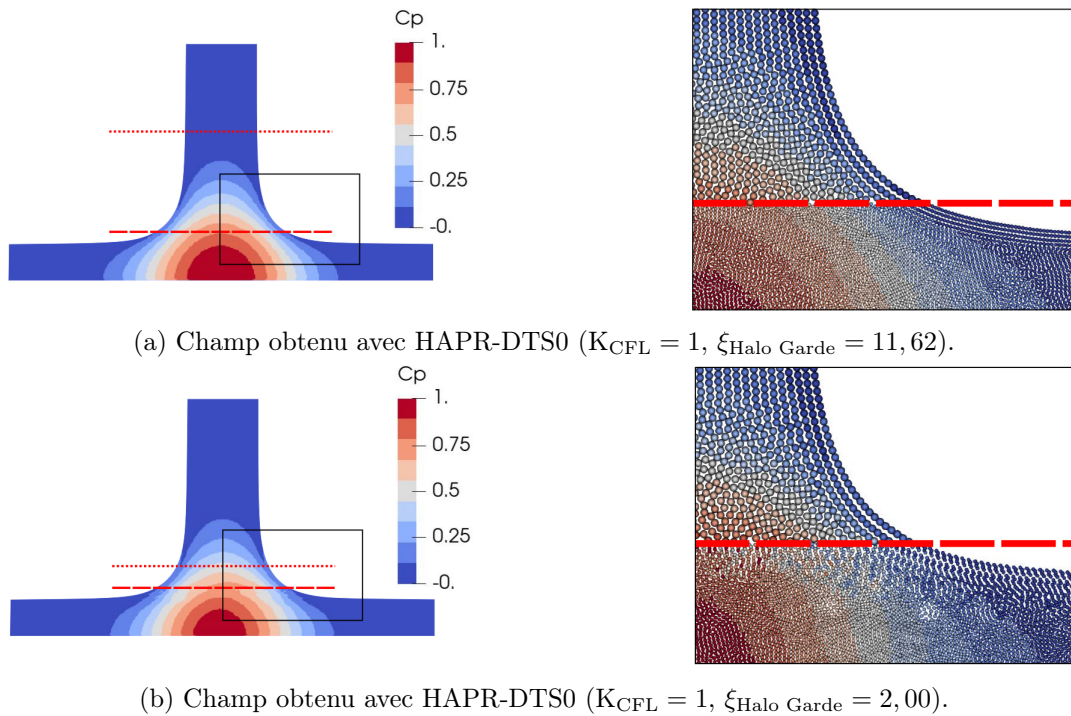


FIGURE 7.7 – Cas test numérique du jet plan en description ALE : champ obtenu avec HAPR-DTS0 ( $K_{CFL} = 1$ ) et l'interface de raccord basse. La position de l'interface de raccord entre Transition 0-1 et Niveau 1 (resp. Niveau 0) est représentée par une ligne discontinue de tirets rouges (resp. de pointillés rouges). Visualisation du champ de pression moyen en régime permanent et de la distribution particulaire à  $t_{\text{adim}} = 6, 5$ .

et est jugé de qualité satisfaisante car la transition entre discrétisation grossière et fine est régulière et n'introduit pas de discontinuité. D'autre part, dans le cas  $\xi_{\text{Halo Garde}} = 2, 00$ , le pavage des filles SPH est inhomogène. Les erreurs numériques résultantes induisent la discontinuité des champs physiques. Le pavage de Transition 0-1 par les filles gardes est inhomogène au voisinage de Niveau 0, même si le pavage des mères SPH est homogène, car le raffinement des mères a lieu dans la zone où le jet s'évase. Elles se déplacent ensuite selon le vecteur vitesse interpolé sur les mères SPH hors du voisinage de l'interface entre Niveau 0 et Transition 0-1. Leur pavage demeure inhomogène. L'algorithme de détection identifie ces inhomogénéités comme une surface libre. Ces filles gardes sont ainsi non-éligibles aux corrections de l'erreur « *closed-box* », ce qui tend à conserver l'inhomogénéité locale du pavage de Transition 0-1. Par activation des filles gardes en filles SPH, leur pavage est alors également inhomogène. Au prix d'une diffusion numérique, les filles SPH au centre du jet se réorganisent afin de réduire l'inhomogénéité locale du pavage et redeviennent éligibles aux corrections numériques. Au voisinage étendu du point d'arrêt, les filles SPH se sont relativement bien organisées. Ainsi, le champ de pression moyen est jugé régulier. Toutefois, les filles SPH détectées au voisinage de la surface libre réduisent peu ces inhomogénéités introduites à leur création.

Par comparaison avec les résultats présentés Fig. 7.2, le champ global obtenu avec HAPR-DTS0 ( $K_{CFL} = 1$ ,  $\xi_{\text{Halo Garde}} = 11, 62$ ) est jugé aussi régulier que celui obtenu avec l'interface de raccord haute. Cependant, ce n'est pas le cas du champ global obtenu avec HAPR-DTS0 ( $K_{CFL} = 1$ ,  $\xi_{\text{Halo Garde}} = 2, 00$ ). Ainsi, il convient de procéder au raffinement des mères SPH dans une zone où le pavage des filles additionnelles est suffisamment régulier pour que celles-ci soient éligibles aux corrections numériques. Procéder autrement détériore la précision (moins performante) et rend la simulation plus sensible au bruit numérique (moins robuste). Finale-

ment, dans cette situation où l'interface de raccord est basse, la pertinence de l'HAPR-DTS0 est jugée fragile quant à mener une telle simulation.

Pour poursuivre, il est possible de se concentrer sur un axe horizontal (ou vertical) du champ global présenté Fig. 7.7 afin d'en étudier le profil. Pour commencer, les données de pression en paroi le long de l'axe horizontal  $y/L = 0$  sont extraites. Le profil du coefficient de pression moyen en paroi obtenu avec HAPR-DTS0 où  $\xi_{\text{Halo Garde}} = 11,62$  (resp.  $\xi_{\text{Halo Garde}} = 2,00$ ) est représenté Fig. 7.8a (resp. Fig. 7.8b) et est comparé au profil analytique.

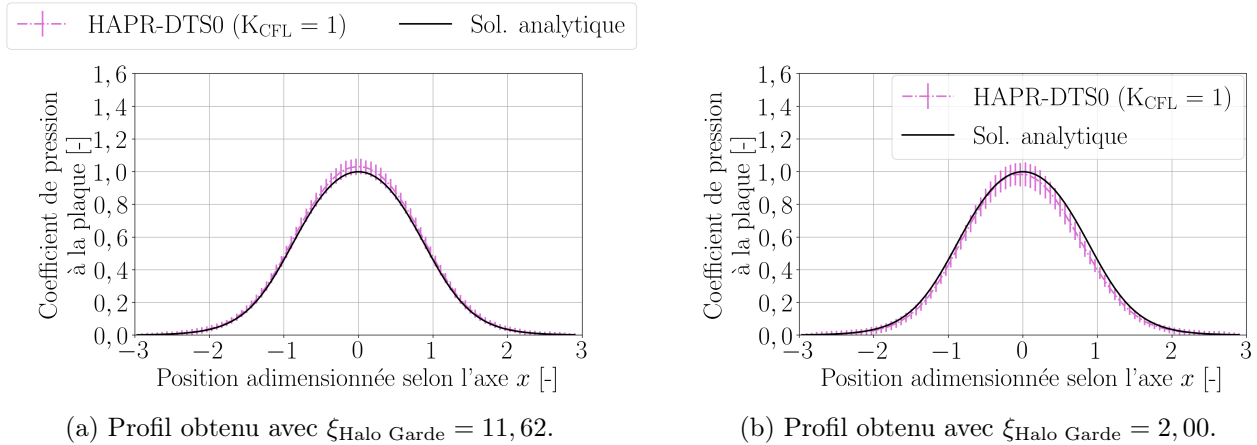


FIGURE 7.8 – Cas test numérique du jet plan en description ALE : profil du coefficient de pression moyen au niveau de la plaque obtenu avec HAPR-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1$ ) et l'interface de raccord basse. L'intervalle de confiance encadrant la moyenne temporelle à plus ou moins l'écart-type près est représenté.

Le résultat obtenu avec HAPR-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1$ ,  $\xi_{\text{Halo Garde}} = 11,62$ ) est jugé fidèle à celui de la solution analytique. Ce profil est jugé similaire à celui présenté Fig. 7.3b dans le cas où l'interface de raccord est haute. Par contre, bien que robuste, la performance de HAPR-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1$ ,  $\xi_{\text{Halo Garde}} = 2,00$ ) est jugée insatisfaisante. Son profil moyen est asymétrique et le bruit est plus grand au cœur de la zone d'impact du jet que celui de la simulation HAPR-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1$ ,  $\xi_{\text{Halo Garde}} = 11,62$ ). Par comparaison avec les résultats de l'HAPR-SPH (cf chapitre 5), la performance de HAPR-DTS0 est jugée satisfaisante. Ainsi, grâce aux corrections de l'erreur « *closed-box* », les simulations HAPR-DTS0 sont jugés plus robustes.

Les données de l'indicateur DMSAE sur la pression sont répertoriées Tab. 7.8 afin de quantifier les écarts entre les prédictions moyennes des simulations N-RK3, 4N-RK3, N-DTS0 et HAPR-DTS0.

<i>Simulations</i>	<i>DMSAE <math>C_p^{y=0}</math></i>
N-RK3 ( $K_{\text{CFL}} = 0,3$ )	0,070%
4N-RK3 ( $K_{\text{CFL}} = 0,3$ )	0,035%
N-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1$ , $N_1^* = 200$ )	0,002%
HAPR-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1$ , $\xi_{\text{Halo Garde}} = 11,62$ )	0,029%
HAPR-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1$ , $\xi_{\text{Halo Garde}} = 2,00$ )	0,083%

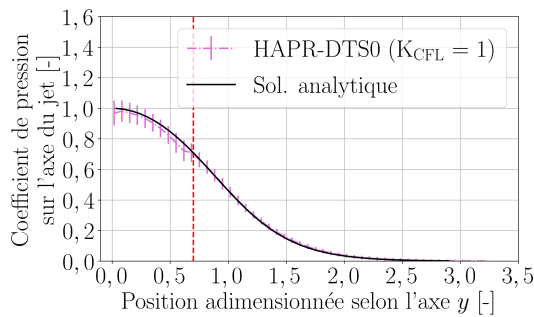
TABLE 7.8 – Cas test numérique du jet plan en description ALE : DMSAE sur la pression des simulations HAPR-SPH-ALE-DTS avec interface de raccord basse.

En régime permanent, la DMSAE associée à la simulation HAPR-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1$ ,  $\xi_{\text{Halo Garde}} = 11,62$ )

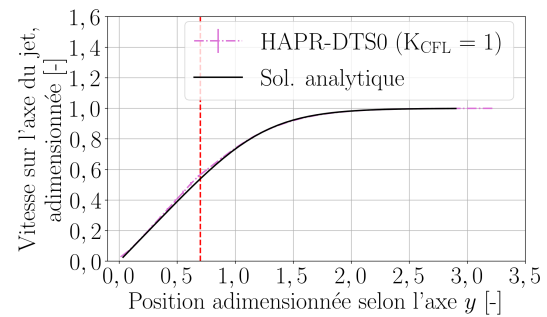
est du même ordre de grandeur que la référence 4N, inférieure à celle de la simulation de référence N et supérieure à celle de N-DTS0. Par contre, HAPR-DTS0 ( $K_{CFL} = 1$ ,  $\xi_{\text{Halo Garde}} = 2,00$ ) présente une DMSAE plus grande que toutes ces références. Par conséquent, seule la simulation HAPR-DTS0 ( $K_{CFL} = 1$ ,  $\xi_{\text{Halo Garde}} = 11,62$ ) constitue une approximation jugée fidèle de la solution analytique.

Pour aller plus loin dans l'interprétation des résultats, il est utile d'étudier le comportement physique le long de l'axe du jet. Ainsi, les données en pression et vitesse le long de l'axe vertical  $x/L = 0,0$  sont extraites.

Le coefficient de pression  $C_p^{x=0}$  moyenné sur une durée  $T_{\text{carac}}$  en régime permanent est représenté Fig. 7.9a pour la simulation HAPR-DTS0 ( $K_{CFL} = 1$ ,  $\xi_{\text{Halo Garde}} = 2,00$ ) que l'on compare à la solution analytique.



(a) Profil du coefficient de pression.



(b) Profil de la norme du vecteur vitesse adimensionnée.

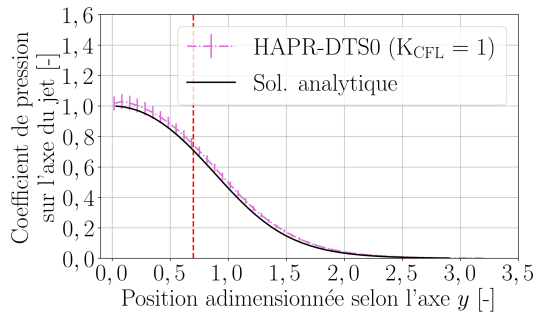
FIGURE 7.9 – Cas test numérique du jet plan en description ALE : profils sur l'axe du jet obtenus avec HAPR-DTS0 ( $K_{CFL} = 1$ ,  $\xi_{\text{Halo Garde}} = 2,00$ ) et l'interface de raccord basse. L'intervalle de confiance encadrant la moyenne temporelle à plus ou moins l'écart-type près est représenté. La frontière du Niveau 1 est matérialisée par une ligne verticale discontinue de tirets rouges.

Proche de la zone d'injection ( $y/L > 2,5$ ), le gradient de pression est quasi-nul. Le bruit numérique est faible dans cette zone. Le profil moyen obtenu avec cette simulation HAPR-DTS0 est ainsi similaire à celui prédit par la solution analytique. Pour  $1,0 < y/L < 2,5$ , le gradient de pression augmente progressivement. Le profil moyen se confond avec celui de la solution analytique et le bruit numérique demeure faible. Enfin dans la zone  $0,0 < y/L < 1,0$ , le gradient de pression diminue progressivement. Le bruit numérique est ici plus important que par ailleurs dans l'écoulement. Le profil moyen présente une discontinuité au voisinage de l'interface du raccord. Celle-ci est moins grande que pour la simulation HAPR-RK3 illustrée Fig. 5.20a. Ainsi, la simulation HAPR-DTS0 ( $K_{CFL} = 1$ ,  $\xi_{\text{Halo Garde}} = 2,00$ ) est jugée cohérente avec la solution analytique. Toutefois, cette performance est jugée moins satisfaisante que celle de la simulation HAPR-DTS0 avec une interface de raccord haute (cf Fig. 7.5a).

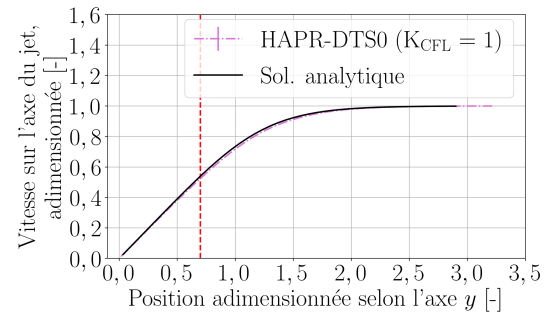
Complétons l'analyse en regardant le profil de la vitesse le long l'axe vertical  $x/L = 0,0$ . Pour cela, la vitesse moyennée sur une durée  $T_{\text{carac}}$  en régime permanent et adimensionnée par la vitesse d'injection  $U$  est représentée Fig. 7.9b. En particulier, la vitesse s'annule en  $y/L = 0,0$ . Le profil moyen est similaire à celui prédit par la solution analytique et les écarts-types illustrent un très faible bruit sur l'axe vertical  $x/L = 0,0$  dans son ensemble. On note une faible discontinuité au voisinage de l'interface du raccord. Ainsi, cette solution HAPR-DTS0 constitue une approximation jugée fidèle à la solution analytique.

De même, les profils issus de la simulation HAPR-DTS0 ( $K_{CFL} = 1$ ,  $\xi_{\text{Halo Garde}} = 11,62$ ) sont présentés Fig. 7.10.

Comme illustré Fig. 7.10a, le gradient de pression proche de la zone d'injection ( $y/L > 2,5$ )



(a) Profil du coefficient de pression.



(b) Profil de la norme du vecteur vitesse adimensionnée.

FIGURE 7.10 – Cas test numérique du jet plan en description ALE : profils sur l'axe du jet obtenus avec HAPR-DTS0 ( $K_{CFL} = 1$ ,  $\xi_{\text{Halo Garde}} = 11,62$ ) et l'interface de raccord basse. L'intervalle de confiance encadrant la moyenne temporelle à plus ou moins l'écart-type près est représenté. La frontière du Niveau 1 est matérialisée par une ligne verticale discontinue de tirets rouges.

est quasi-nul. Le bruit numérique est faible dans cette zone. Le profil moyen obtenu avec cette simulation HAPR-DTS0 est ainsi similaire à celui prédit par la solution analytique. Pour  $1,0 < y/L < 2,5$ , le gradient de pression augmente progressivement. Le profil moyen s'écarte peu de la solution analytique et le bruit numérique demeure faible. Enfin dans la zone  $0,0 < y/L < 1,0$ , le gradient de pression diminue progressivement pour finalement s'annuler au niveau du point d'impact. En particulier, cette portion contient l'interface du raccord. Le profil moyen ne présente pas de discontinuité dans cette région, au contraire de la simulation HAPR-DTS0 ( $K_{CFL} = 1$ ,  $\xi_{\text{Halo Garde}} = 2,00$ ) (cf Fig. 7.9a). Il est ainsi jugé concordant avec celui prédit par la solution analytique. Le bruit numérique est ici plus important que par ailleurs dans l'écoulement, mais son amplitude est faible et équivalente à celle de la simulation HAPR-DTS0 avec une interface de raccord haute (cf Fig. 7.5a). Ainsi, la performance de ces deux solutions est jugée similaire.

À nouveau, complétons l'analyse en regardant le profil de la vitesse le long l'axe vertical  $x/L = 0,0$  (cf Fig. 7.10b). On vérifie que la vitesse s'annule en  $y/L = 0,0$ . Le profil moyen est similaire à celui prédit par la solution analytique et les écarts-types illustrent un très faible bruit sur l'axe vertical  $x/L = 0,0$  dans son ensemble. Ainsi, cette solution HAPR-DTS0 constitue une approximation jugée fidèle à la solution analytique.

Finalement, la performance globale de HAPR-DTS0 ( $K_{CFL} = 1$ ,  $\xi_{\text{Halo Garde}} = 11,62$ ) est jugée similaire à celle obtenue avec une interface de raccord haute. Cependant, la performance de HAPR-DTS0 ( $K_{CFL} = 1$ ,  $\xi_{\text{Halo Garde}} = 2,00$ ) est jugée moins satisfaisante. Ainsi, afin de préserver la précision (performance) et rendre la simulation moins sensible au bruit numérique (robustesse), il convient de procéder au raffinement des mères SPH dans une zone où le pavage des filles additionnelles est suffisamment régulier pour que celles-ci soient éligibles aux corrections de l'erreur « *closed-box* ». Toutefois, HAPR-DTS0 ( $K_{CFL} = 1$ ,  $\xi_{\text{Halo Garde}} = 2,00$ ) est jugée plus pertinente que l'HAPR-RK3 à simuler cet écoulement avec une interface de raccord basse. En effet, les corrections appliquées en pseudo-temps confèrent plus de robustesse à l'approche HAPR-DTS0. Dans l'ensemble, l'auteur juge que la pertinence de HAPR-DTS0 à simuler cet écoulement en description ALE est plus fragile. Cette méthode est sensible à la position du raccord entre Niveau 0 et Transition 0-1.

## 7.3 Synthèse

Bien qu'elles aient été développées séparément, les techniques HAPR et DTS sont non-exclusives. Leur utilisation conjointe aboutit ainsi à une méthode SPH-ALE à multi-résolutions spatiale et temporelle, appelée HAPR-SPH-ALE-DTS. D'une part, le formalisme de l'HAPR permet de recourir à une discrétisation particulière variable en espace. D'autre part, le formalisme DTS assure au schéma résultant une stabilité inconditionnelle au pas de discrétisation temporel et les corrections numériques associées réduisent efficacement l'inhomogénéité de chacune des distributions particulières mobilisées. En bref, recourir conjointement aux techniques HAPR et DTS permet de bénéficier des avantages de ces deux stratégies.

La pertinence de la méthode HAPR-SPH-ALE-DTS est étudiée grâce à la simulation en description ALE d'un jet plan impactant une plaque plane en incidence normale. Deux positions de l'interface de raccord entre Transition 0-1 et Niveau 1 sont considérées dans cette étude, i.e. une interface dite haute (resp. basse) où le raccord est disposé dans une région présentant de faibles (resp. forts) gradients sur l'axe du jet.

Dans la configuration haute, grâce à la technique HAPR, la pertinence de la méthode est jugée plus robuste que celle de la méthode SPH-ALE-DTS. Diminuer localement la taille des particules utilisées améliore la précision (performance) et rend la simulation moins sensible au bruit numérique (robustesse).

Par contre, pour la configuration basse, la technique HAPR ne confère pas à la méthode une pertinence plus robuste que celle de la méthode SPH-ALE-DTS. Toutefois, les corrections numériques associées au formalisme DTS assurent à la solution raffinée localement une pertinence plus robuste que celle HAPR-SPH-ALE. Notons ainsi qu'il convient de procéder au raffinement des mères SPH dans une zone où le pavage des filles gardes est suffisamment régulier pour que celles-ci soient éligibles aux corrections de l'erreur « *closed-box* ». Par conséquent, dans cette configuration en particulier, la pertinence de l'HAPR-SPH-ALE-DTS est fragile car la stabilité du processus de raffinement est sensible à la position du raccord entre Niveau 0 et Transition 0-1. Il est de plus difficile de juger de l'apport de l'hybridation. En effet, l'introduction de filles hybrides peut stabiliser la méthode mais au prix d'une diffusion numérique. L'auteur juge ainsi qu'une révision de la procédure de raffinement est à privilégier pour améliorer la robustesse. Le processus résultant doit alors garantir que les filles additionnelles forment un pavage homogène.

# CHAPITRE 8

## CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

### Sommaire

---

8.1	Conclusions . . . . .	151
8.2	Perspectives . . . . .	153

---



## 8.1 Conclusions

L'enjeu initial de ces travaux était de rendre la méthode SPH-ALE plus précise et compétitive pour des simulations complexes telles que le fonctionnement des turbines Pelton et Francis de par le développement de techniques multi-résolutions en espace et/ou en temps. Pour cela, la pertinence des stratégies considérées a été jugée en terme de performance, de robustesse et de complexité computationnelle sur un ensemble de cas tests représentatifs et complémentaires. Finalement, la pertinence d'une technique multi-résolutions a été jugée robuste lorsque la solution approchée numériquement demeure pertinente dans des situations variées, fragile pour une plage réduite d'utilisation de la méthode numérique, voire non-pertinente.

Les simulations réalisées avec la méthode SPH-ALE recourent le plus souvent à une discrétisation spatiale avec des tailles de particules constantes, ce qui conduit à des simulations coûteuses où le nombre de particules manipulées est élevé et les temps de simulation sont longs. Lorsque le problème étudié le nécessite, il serait adéquat de pouvoir recourir à une discrétisation fine dans les zones d'intérêt mais grossière par ailleurs. Ainsi, des techniques de raffinement local de particules ont été proposées pour gérer précautionneusement le raccordement. L'une des plus abouties est la technique de l'« *Adaptive Particle Refinement* » (APR) qui consiste en un couplage SPH-SPH d'un niveau discrétisé par des particules grossières (les mères SPH) et d'un autre discrétisé par des particules fines (les filles SPH), interagissant indirectement par recouvrement au moyen de particules non-matérielles (les mères/filles gardes). Les spécificités liées à son implémentation dans le solveur industriel ASPHODEL<sup>©</sup> sont présentées dans le manuscrit. Cette version constitue le socle des développements ensuite menés. Cette stratégie s'est avérée de pertinence jugée insatisfaisante, dès lors que le raccordement est disposé dans une zone de l'écoulement présentant de forts gradients. Or, il n'est pas toujours possible de procéder autrement et l'APR manque alors de robustesse. En particulier, la masse totale de fluide présente dans un tube à choc n'est pas conservée à tout instant pour les solutions avec raffinement local. Toutefois, sa pertinence est jugée plutôt robuste suite à ses bonnes performances obtenues sur les profils de pression et de la norme du vecteur vitesse. Cependant, l'APR est jugée non-pertinente pour mener la simulation lagrangienne d'un canal oscillant car celle-ci conduit à une divergence rapide et brutale du nombre de filles manipulées au point d'aboutir à l'arrêt soudain de la simulation par le solveur.

Ces travaux ont aboutit au développement d'une nouvelle technique de raffinement zonal, appelée l'« *Hybridized Adaptive Particle Refinement* » (HAPR). Celle-ci constitue une généralisation de l'APR du solveur ASPHODEL<sup>©</sup> capable d'assurer un support complet aux fonctions noyaux des particules SPH, de garantir la stabilité des gradients reconstruits par schéma MUSCL des filles SPH, d'établir une transition spatiale continue des propriétés physiques du niveau grossier vers le niveau fin et de réaliser un pavage de l'espace plus robuste aux erreurs de dispersion. Les résultats obtenus avec APR et HAPR sont comparés. La pertinence de l'HAPR est jugée plus robuste que celle de l'APR lorsque le raccordement est disposé dans une zone de l'écoulement où les gradients sont forts. Tout d'abord, l'HAPR conserve légèrement mieux la masse totale dans le tube à choc que l'APR, sans pour autant la conserver parfaitement. D'autre part, l'HAPR s'avère bien plus robuste que l'APR pour réaliser la simulation lagrangienne d'un canal oscillant. Sa pertinence est plutôt robuste sur les premières oscillations mais fragile par la suite à cause de la non-conservation de la masse totale. Dans l'ensemble, la pertinence de l'HAPR est jugée fragile pour conduire la simulation d'un jet plan impactant une plaque plane en incidence normale. Lorsque son interface de raccord est positionnée dans une zone de l'écoulement présentant des gradients faibles sur l'axe du jet, la performance globale de l'HAPR est jugée équivalente à celle de la solution de référence entièrement raffinée, sans pour



autant nécessiter une discrétisation uniformément fine du domaine fluide. Cependant, l'HAPR s'avère non-pertinente à réaliser cette simulation lorsque son interface de raccord est disposée dans une zone où le pavage des mères SPH et/ou des filles gardes est insuffisamment régulier sous la contrainte de forts gradients.

La méthode SPH-ALE est souvent associée à une intégration temporelle explicite, dont le dimensionnement des pas de temps est alors régi par une condition restrictive de type Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) associée à une constante  $K_{CFL}$  généralement inférieure à 0,3. Cette contrainte conduit à des simulations coûteuses où le pas en temps est faible et les temps de simulation sont longs. Les développements menés associent la méthode SPH-ALE à une intégration implicite, ce qui confère une stabilité temporelle inconditionnelle au schéma résultant. Les simulations peuvent ainsi être conduites avec de plus grands pas en temps. La solution du problème implicite en temps est déterminée par la technique du « *Dual-Time Stepping* » (DTS), qui consiste à résoudre un problème équivalent faisant intervenir une seconde échelle temporelle. Né du besoin d'améliorer notablement la consistance du schéma numérique, une stratégie visant à corriger le mouvement des particules et le gradient de la fonction noyau sans modifier les propriétés physiques de l'écoulement est développée en bénéficiant de la seconde échelle temporelle introduite. La méthode résultante est appelée SPH-ALE-DTS et présente des résultats dont la pertinence est jugée robuste pour l'ensemble des cas tests considérés. Ce schéma numérique ne présente aucun signe d'instabilité lors de la simulation de l'écoulement dans le tube à choc et le canal oscillant quelle que soit la valeur  $K_{CFL} \leq 2$  considérée. Par ailleurs, sur les cas des tourbillons de Taylor-Green et du jet plan, la stratégie proposée visant à corriger le mouvement des particules est jugée efficace car elle réduit significativement les erreurs numériques induites sur les champs physiques lors de la simulation de ces écoulements présentant de forts gradients. En particulier sur le cas du jet plan, la solution SPH-ALE-DTS obtenue avec  $K_{CFL} = 1$  s'est avérée plus fidèle à la solution analytique que ne l'est une solution SPH-ALE entièrement raffinée où  $K_{CFL} = 0,3$ . Ainsi, la méthode SPH-ALE-DTS peut être plus précise que la méthode SPH-ALE tout en manipulant de plus grands pas en temps.

Bien que les techniques HAPR et DTS aient été développées séparément, elles sont non-exclusives et peuvent être utilisées conjointement. Ainsi, ces travaux aboutissent au développement d'une méthode HAPR-SPH-ALE-DTS à multi-résolutions spatiale et temporelle. De par la technique HAPR, cette méthode peut recourir à une discrétisation fine dans les zones d'intérêt mais grossière par ailleurs. De plus, son formalisme DTS lui confère une stabilité temporelle inconditionnelle. Par ailleurs, l'introduction de l'échelle pseudo-temporelle lui permet d'utiliser la stratégie visant à corriger le mouvement des particules et le gradient de la fonction noyau. La performance de la méthode HAPR-SPH-ALE-DTS est jugée satisfaisante sur le cas du jet plan. En effet, la pertinence de ses résultats est jugée plus robuste que ceux de HAPR. De plus, la méthode HAPR-SPH-ALE-DTS est considérée comme une extension de la SPH-ALE-DTS qui lui confère plus de pertinence. En particulier, diminuer localement la taille des particules utilisées peut améliorer la précision (performance) et rendre la simulation moins sensible au bruit numérique (robustesse). Par ailleurs, la méthode HAPR-SPH-ALE-DTS présente des résultats jugés meilleurs lorsque le raffinement des mères SPH est réalisé dans une zone de l'écoulement où le pavage des filles additionnelles est suffisamment régulier pour que celles-ci soient éligibles aux corrections numériques. Finalement, recourir ainsi simultanément aux techniques HAPR et DTS permet de bénéficier des avantages de ces deux stratégies.

## 8.2 Perspectives

Les techniques multi-résolutions en espace et en temps considérées dans ce manuscrit rendent la méthode SPH-ALE plus précise et compétitive pour l'ensemble des cas tests introduits. Ainsi, un réel apport est envisageable pour des simulations plus complexes telles que le fonctionnement des turbines Pelton et Francis. Néanmoins, des améliorations sont nécessaires.

Les travaux menés aboutissent au développement de la méthode HAPR-SPH-ALE-DTS. Elle a été jugée pertinente sur le cas académique du jet plan. Toutefois, afin d'adopter une démarche de complexification progressive, cette validation a été réalisée sans l'utilisation des filles hybrides. Or, leur introduction pourrait permettre de réduire l'épaisseur de la zone de transition sans perdre en robustesse. Par la suite, il semble raisonnable d'envisager une étude de la sensibilité des résultats de l'HAPR-SPH-ALE-DTS aux paramétrisations de la zone de transition de l'HAPR et de la correction du mouvement en pseudo-temps de la DTS. De plus, afin de réduire les coûts de l'approche HAPR, l'échelle pseudo-temporelle pourrait être utilisée de manière à manipuler des pas en temps différents selon le niveau de discrétisation considéré. Pour aller plus loin, la conduite de simulations plus complexes est un objectif jugé nécessaire afin d'approfondir l'étude de la pertinence de cette approche. Ainsi, le développement de l'HAPR-SPH-ALE-DTS nécessitera probablement de réviser les techniques de l'HAPR et de la DTS telles que présentées dans ce manuscrit.

D'une part, plusieurs pistes d'évolution de la méthode SPH-ALE-DTS sont identifiées. En premier lieu, d'après l'étude menée sur le cas du jet plan, une gestion des conditions de bord plus adaptée au formalisme DTS est jugée nécessaire afin d'améliorer la robustesse du schéma numérique. Il semble de plus nécessaire de définir un critère d'arrêt qui dimensionne parcimonieusement le nombre d'itérations en pseudo-temps à réaliser pour supposer l'état permanent atteint. Pour le déterminer, une étude approfondie sur d'autres cas tests 2D et 3D est à envisager. En particulier, l'auteur juge que la simulation d'écoulements dans les cas d'une rupture de barrage, d'un cylindre immergé et d'un auget Pelton constitue une priorité. Enfin, réduire le coût de cette méthode encouragerait son application à des cas plus complexes. Par exemple, le recours à un pré-conditionneur pourrait accélérer la convergence en pseudo-temps du résidu modifié. De plus, l'évaluation des résidus pourrait ne pas être réalisée à chaque pseudo-temps. Néanmoins, réduire ainsi les coûts pourrait aussi diminuer la précision et/ou la robustesse de la méthode. Un compromis est à déterminer.

D'autre part, la pertinence de la méthode HAPR-SPH-ALE pourrait être plus robuste et des interrogations subsistent à l'issue de ces travaux. La suite des développements doit notamment conduire à l'analyse et la proposition d'éventuelles révisions du processus de dé-raffinement. L'une d'elles peut être l'introduction de mères hybrides afin d'assurer la continuité spatiale des champs des mères aux frontières de la zone raffinée. Par ailleurs, l'intégration des conditions de bord à l'interpolation des champs des particules gardes est une autre piste qui mérite d'être investiguée afin de garantir la robustesse de la méthode. Enfin, la non-conservativité de l'HAPR constitue également une faille de sa robustesse. D'avantages de révisions peuvent être proposées afin d'améliorer la situation. En particulier, d'autres approches doivent être étudiées concernant le processus d'interpolation ainsi que la manière de gérer l'évolution des volumes des particules gardes et hybrides.

# PARTIE III

## ANNEXES

# ANNEXE A

## APPROXIMATION SPH-ALE DES ÉQUATIONS PHYSIQUES

La discrétisation en espace du système composé des équations continues (2.1) et (2.3) a été présentée au chapitre 2 de ce manuscrit. Ce processus a été réalisé en deux phases. D'une part, l'approximation SPH-ALE a permis l'obtention du système discret en espace (2.4). D'autre part, le traitement des flux numériques a conduit à privilégier le problème discret équivalent (2.7). Finalement, ces étapes de travail aboutissent à la formulation compacte (2.8).

L'objet de cette annexe est d'aller plus loin dans la compréhension de ces étapes calculatoires en introduisant les outils mathématiques adéquats. Afin de faciliter la lecture de ce qui suit, les équations (2.1), (2.3), (2.4) et (2.7) sont rappelées en préambule (A.1), (A.2), (A.3) et (A.4).

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}(\mathbf{F}(\Phi))(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t), \quad \forall t \in T, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega(t), \quad (\text{A.1})$$

$$p = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] + p_0, \quad (\text{A.2})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}_{0,i}, \\ \frac{d\omega_i}{dt} = 2\omega_i \sum_{j \in D_i} \omega_j (\mathbf{v}_{0,ij} - \mathbf{v}_{0,i}) \cdot \nabla_i W_{ij}, \\ \frac{d}{dt}(\omega_i \Phi_i) = \omega_i \mathbf{Q}_i - 2\omega_i \sum_{j \in D_i} \omega_j (\nabla_i W_{ij}) \mathbf{G}_{ij}^\top, \\ p_i = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left[ \left( \frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] + p_0. \end{array} \right. , \quad (\text{A.3})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}_{0,i}, \\ \frac{d\omega_i}{dt} = 2\omega_i \sum_{j \in D_i} \omega_j (\mathbf{v}_{0,ij} - \mathbf{v}_{0,i}) \cdot \nabla_i W_{ij}, \\ \frac{d}{dt}(\omega_i \Phi_i) = \omega_i \mathbf{Q}_i - 2\omega_i \sum_{j \in D_i} \omega_j (\nabla_i W_{ij}) (\mathbf{G}_{ij}^E)^\top, \\ p_{i^\bullet}^E = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left[ \left( \frac{\rho_{i^\bullet}^E}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] + p_0. \end{array} \right. , \quad (\text{A.4})$$

## A.1 Discrétisation SPH adaptée au formalisme ALE

Dans cette section sont fournies des précisions sur l'obtention du système d'équations (A.3) discrètes en espace et continues en temps, à partir du système composé des équations (A.1) et (A.2) continues en espace et en temps. Pour cela on se donne l'instant  $t \in T$ , la dimension en espace  $d$ , le domaine de calcul  $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^d$  et l'ensemble de particules mobiles  $P(t)$  réalisant une discrétisation de l'écoulement étudié.

Une première étape consiste à mettre en équations le mouvement des particules SPH selon un formalisme ALE. La trajectoire d'une particule  $i \in P(t)$ , centrée sur la position  $\mathbf{x}_i(t)$ , est ainsi liée au champ de transport  $\mathbf{v}_{0,i}(t)$  selon la relation donnée Éq. (A.5).

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}_{0,i} . \quad (\text{A.5})$$

Toute particule  $i \in P(t)$  est également définie comme un volume de contrôle  $\Omega_i(t)$ , de frontière  $\partial\Omega_i(t)$  et de mesure  $|\Omega_i(t)| = \omega_i(t)$ . Le déplacement  $\mathbf{v}_{0,i}(t)$  d'une particule  $i \in P(t)$  induit une déformation de la frontière  $\partial\Omega_i(t)$  et l'évolution de son volume de contrôle  $\Omega_i(t)$  au cours du temps et le long de la trajectoire (A.5) [77]. L'équation d'évolution des volumes de contrôle est alors donnée par la relation (A.6) [66].

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \omega_i \nabla_i \cdot \mathbf{v}_{0,i} , \quad (\text{A.6})$$

$$= \omega_i \sum_{k=1}^d \frac{\partial \mathbf{v}_{0,i}^k}{\partial \mathbf{x}_i^k} , \quad (\text{A.7})$$

où  $\mathbf{x}_i^k$  (resp.  $\mathbf{v}_{0,i}^k$ ) est la  $k$ -ième composante du vecteur  $\mathbf{x}_i$  (resp.  $\mathbf{v}_{0,i}$ ). Initialement, toutes les particules  $i \in P(t)$  sont de même mesure  $\omega_i(0) = (\Delta x)^d$ . L'évolution temporelle des volumes discrétisés est ensuite régie par la relation (A.6). Cette équation d'évolution nécessite l'évaluation de la divergence du champ de transport, qui est alors supposé être suffisamment régulier. Le terme  $\nabla_i \cdot \mathbf{v}_{0,i}$  est approché par l'opérateur SPH discret  $\mathbf{D}_-^h(\mathbf{v}_0)_i$  [44]. En omettant les termes de bord, la relation (A.6) se réécrit alors comme

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \omega_i \mathbf{D}_-^h(\mathbf{v}_0)_i , \quad (\text{A.8})$$

$$= 2\omega_i \sum_{j \in D_i} \omega_j (\mathbf{v}_{0,ij} - \mathbf{v}_{0,i}) \cdot \nabla_i W_{ij} , \quad (\text{A.9})$$

avec le champ de transport  $\mathbf{v}_{0,ij} = (\mathbf{v}_{0,i} + \mathbf{v}_{0,j})/2$ , le support  $D_i$  de la fonction noyau centré sur la particule  $i$ , le gradient de la fonction noyau  $\nabla_i W_{ij} = \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i^k} W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_{ij}) \right)_{k \leq d}$  et la longueur de lissage  $h_{ij} = (h_i + h_j)/2$  où  $h_i$  est la mesure du support  $D_i$ .

Une seconde étape consiste à ré-interpréter le système d'équations continues (A.1) et (A.2) selon ce même formalisme ALE. Le champ de transport  $\mathbf{v}_0$  n'étant pas nécessairement identique à la vitesse du fluide  $\mathbf{v}$ , il est en conséquence nécessaire d'introduire l'advection  $\Phi \otimes \mathbf{v}_0$  de la matrice des flux convectifs  $\mathbf{F}(\Phi)$  dans la relation (A.1). Celle-ci se réécrit alors selon

$$\frac{d\Phi}{dt} \Big|_{\mathbf{v}_0} + \text{div}(\mathbf{G}(\Phi, \mathbf{v}_0)) = \mathbf{Q} , \quad (\text{A.10})$$

avec  $\mathbf{Q}$  le vecteur des forces externes,  $\mathbf{G}(\Phi, \mathbf{v}_0) = \mathbf{F}(\Phi) - \Phi \otimes \mathbf{v}_0$  la matrice des flux convectifs ré-exprimée selon le formalisme ALE et  $\frac{d\bullet}{dt}\Big|_{\mathbf{v}_0}$  la dérivée totale ALE définie par

$$\frac{d\Phi}{dt}\Big|_{\mathbf{v}_0} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\Phi. \quad (\text{A.11})$$

La dérivée totale ALE  $\frac{d\bullet}{dt}\Big|_{\mathbf{v}_0}$  est la superposition d'une variation locale avec le temps  $\frac{\partial\bullet}{\partial t}$  en un point d'observation fixe (point de vue eulérien) et d'un terme d'advection  $(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\bullet$ . La variation ALE  $\frac{d\Phi}{dt}\Big|_{\mathbf{v}_0}$  décrit la variation dans le temps des variables conservatives  $\Phi$  en suivant le mouvement imposé par le champ de transport  $\mathbf{v}_0$ .

Enfin, le système d'équations continues (A.10) et (A.2) doit être adapté au formalisme SPH. Pour cela, la formulation faible correspondante est énoncée [83]. En particulier, l'approximation de l'intégrale en espace sur le domaine  $\Omega(t)$  par la somme discrète des domaines élémentaires  $\Omega_i(t)$  pour chaque particule  $i \in P(t)$  conduit à considérer l'équation suivante

$$\frac{d}{dt}\Big|_{\mathbf{v}_0} (\omega_i \Phi_i) = \omega_i \mathbf{Q}_i - \omega_i \mathbf{D}_+^h(\mathbf{G})_i, \quad (\text{A.12})$$

avec  $\Phi_i(t) = \Phi(\mathbf{x}_i, t)$  le vecteur des variables conservatives,  $\mathbf{Q}_i(t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}_i, t)$  le vecteur des forces externes et  $\mathbf{D}_+^h(\mathbf{G})_i$  une approximation SPH de la divergence des flux à la position de la particule d'intérêt. En introduisant la divergence discrète de l'unité (supposée proche de zéro), l'opérateur discret de divergence  $\mathbf{D}_+^h(\bullet)_i$  proposé par [83] est défini sans terme de bord selon

$$\mathbf{D}_+^h(\mathbf{G})_i = 2 \sum_{j \in D_i} \omega_j (\nabla_i W_{ij}) \mathbf{G}_{ij}^\top, \quad (\text{A.13})$$

avec la matrice  $\mathbf{G}_{ij} = (\mathbf{G}_i + \mathbf{G}_j)/2$  où  $\mathbf{G}_i(t) = \mathbf{G}(\Phi, \mathbf{v}_0)(\mathbf{x}_i, t)$ . Cette approximation de la divergence des flux, choisie afin de respecter le principe d'action-réaction  $(\nabla_i W_{ij}) \mathbf{G}_{ij}^\top = -(\nabla_j W_{ji}) \mathbf{G}_{ji}^\top$  [83], permet de disposer d'un schéma conservatif [66]. Finalement, le système d'équations discrètes en espace Éq. (A.3) est composé des équations (A.5), (A.9), (A.12) et la fermeture est assurée par l'équation d'état

$$p_i = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left[ \left( \frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] + p_0, \quad (\text{A.14})$$

avec la vitesse du son dans le fluide  $c_0$ , un paramètre  $\gamma$  constant égal à 7, la masse volumique et la pression de référence  $\rho_0$  et  $p_0$ , respectivement. De plus, toute particule  $i$  discrétise le comportement du fluide en  $\mathbf{x}_i(t)$  et possède ainsi une masse volumique  $\rho_i(t) = \rho(\mathbf{x}_i, t)$  et une pression  $p_i(t) = p(\mathbf{x}_i, t)$ .

## A.2 Traitement des flux numériques

La résolution de la formulation SPH-ALE (A.3) nécessite l'estimation du flux moyen  $\mathbf{G}_{ij}$  pour toute paire de particules  $i$  et  $j$  interagissant. Dans la continuité de J. P. Vila [83], une approximation  $\mathbf{G}_{ij}^E$  du terme de flux moyen est calculée par l'évaluation d'un problème de Riemann mono-dimensionnel entre deux particules fluides voisines. L'objet de cette section est de détailler ce traitement particulier, qui conduit à résoudre le système équivalent (A.4) présentant un formalisme Riemann-SPH-ALE.

### A.2.1 Problème de Riemann monodimensionnel

Un problème de Riemann mono-dimensionnel est un problème d'évolution à condition initiale discontinue. Il s'agit d'une simplification d'un problème de Riemann multi-dimensionnel, qui s'avère suffisante pour des écoulements ne présentant pas de structures de choc multi-dimensionnel [31, 82].

Afin de calculer les échanges de flux  $\mathbf{G}_{ij}^E(t)$  du système (A.4) pour  $t \in T$ , J.P. Vila [83] proposa de résoudre autant de problèmes de Riemann mono-dimensionnels que de paires de particules  $i$  et  $j$  interagissant. Pour cela, on note  $\Phi_i^0 = \Phi_i(t)$  (resp.  $\Phi_j^0 = \Phi_j(t)$ ) le vecteur des variables conservatives de la particule  $i$  (resp.  $j$ ) à l'instant donné  $t \in T$ . Ainsi, il est introduit le problème de Riemann dont l'interface se déplace à la vitesse  $\mathbf{v}_{0,ij}(t)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Phi} + \frac{\partial}{\partial x^{(\mathbf{n}_{ij})}} \left( \left( \mathbf{F}^E(\tilde{\Phi}) - \tilde{\Phi} \otimes \mathbf{v}_{0,ij} \right) \mathbf{n}_{ij}^\top \right) = 0, \\ \tilde{\Phi}(x^{(\mathbf{n}_{ij})}, 0) = \begin{cases} \Phi_i^0 & \text{si } x^{(\mathbf{n}_{ij})} < 0, \\ \Phi_j^0 & \text{si } x^{(\mathbf{n}_{ij})} > 0. \end{cases} \end{array} \right. \quad , \quad (\text{A.15})$$

où  $\mathbf{n}_{ij} = (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) / \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|$  désigne le vecteur unitaire orienté de la particule  $i$  vers  $j$ , et  $x^{(\mathbf{n}_{ij})}$  est l'abscisse curviligne le long de la droite dont le vecteur directeur est  $\mathbf{n}_{ij}$  et dont l'origine est prise en  $(\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j)/2$ . Le terme  $\mathbf{F}^E(\tilde{\Phi})(x^{(\mathbf{n}_{ij})}, t)$  représente la matrice des flux  $\mathbf{F}(\Phi)$  ré-exprimée en fonction de l'abscisse curviligne  $x^{(\mathbf{n}_{ij})}$ .

Pour résoudre le problème de Riemann (A.15), il est utile de considérer le problème de Riemann plus classique (A.16) qui ne fait pas intervenir le formalisme ALE.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Phi} + \frac{\partial}{\partial x^{(\mathbf{n}_{ij})}} \left( \mathbf{F}^E(\tilde{\Phi}) \mathbf{n}_{ij}^\top \right) = 0, \\ \tilde{\Phi}(x^{(\mathbf{n}_{ij})}, 0) = \begin{cases} \Phi_i^0 & \text{si } x^{(\mathbf{n}_{ij})} < 0, \\ \Phi_j^0 & \text{si } x^{(\mathbf{n}_{ij})} > 0. \end{cases} \end{array} \right. \quad . \quad (\text{A.16})$$

Le problème de Riemann (A.16) présente l'intérêt d'admettre une solution analytique connue  $\tilde{\Phi}^E$  qui ne dépend que du rapport  $x^{(\mathbf{n}_{ij})}/t$  et des états  $\Phi_i^0$  et  $\Phi_j^0$  [31, 48]. La solution  $\tilde{\Phi}^E$  du problème (A.15) est alors donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Phi}^E(x^{(\mathbf{n}_{ij})}, t) = \tilde{\Phi}^E \left( \frac{x^{(\mathbf{n}_{ij})} + x^{(0)}(t)}{t}, \Phi_i^0, \Phi_j^0 \right), \\ x^{(0)}(t) = \int_0^t \mathbf{v}_{0,ij}(u) \cdot \mathbf{n}_{ij} \, du. \end{array} \right. \quad . \quad (\text{A.17})$$

Par changement de variables, on renomme  $\Phi^E$  la solution  $\tilde{\Phi}^E$  exprimée en  $x^{(\mathbf{n}_{ij})} = 0$ , i.e.  $\tilde{\Phi}^E((\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j)/2, t) = \tilde{\Phi}^E(0, t)$ . On note ensuite  $\Phi_{ij}^E(t)$  cette solution ré-interprétée en  $(\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j)/2$ . L'expression recherchée est finalement  $\mathbf{G}_{ij}^E(t) = \mathbf{G}(\Phi^E, \mathbf{v}_0^E)((\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j)/2, t)$  où la vitesse de l'interface  $\mathbf{v}_0^E$  est définie par  $\mathbf{v}_0^E((\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j)/2, t) = \mathbf{v}_{0,ij}(t)$  [83].

### A.2.2 Résolution des problèmes de Riemann

Pour chaque paire de particules  $(i, j)$  interagissant, déterminer la solution  $\tilde{\Phi}^E$  du problème de Riemann (A.16) est essentiel pour calculer les échanges de flux  $\mathbf{G}_{ij}^E$  du système (A.4), mais



s'avère coûteux. En conséquence, le recours à un solveur capable de fournir une solution approchée est privilégié [31]. Le solveur « *Primitive Variable Riemann Solver* » (PVRs) est utilisé en raison de sa simplicité et de la robustesse qu'il garantit [48, 66]. Son principe est brièvement détaillé dans cette section dans un cadre à deux dimensions d'espace [78], i.e.  $d = 2$ . Utiliser le solveur PVRs revient à considérer le système linéarisé suivant, issu du problème de Riemann (A.16), écrit en fonction des variables non-conservatives.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \widetilde{\Phi}^{nc}}{\partial t} + \bar{\mathbf{J}}_{\text{PVRs}} \frac{\partial \widetilde{\Phi}^{nc}}{\partial x^{(n_{ij})}} = 0, \\ \widetilde{\Phi}^{nc}(x^{(n_{ij})}, 0) = \begin{cases} \Phi_-^{nc} & \text{si } x^{(n_{ij})} < 0, \\ \Phi_+^{nc} & \text{si } x^{(n_{ij})} > 0. \end{cases} \end{array} \right. , \quad (\text{A.18})$$

avec  $\Phi^{nc} = (\rho, \mathbf{v})$  le vecteur des variables non-conservatives,  $\widetilde{\Phi}^{nc}$  sa ré-interprétation qui prend comme argument l'abscisse curviligne  $x^{(n_{ij})}$ , puis  $\Phi_{\pm}^{nc} = (\rho_{\pm}, \mathbf{v}_{\pm})$  l'équivalent de la condition initiale  $\Phi_{i/j}^0$  utilisant les variables non-conservatives et enfin la matrice  $\bar{\mathbf{J}}_{\text{PVRs}}$  approchant la jacobienne des flux définie par

$$\bar{\mathbf{J}}_{\text{PVRs}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_-^1 + \mathbf{v}_+^1 & \rho_- + \rho_+ & 0 \\ (c_- + c_+)^2 / (\rho_- + \rho_+) & \mathbf{v}_-^1 + \mathbf{v}_+^1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{v}_-^1 + \mathbf{v}_+^1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.19})$$

où  $\mathbf{v}_{\pm}^1$  désigne la première composante du vecteur vitesse  $\mathbf{v}_{\pm}$  telle que  $\Phi_{\pm}^{nc} = (\rho_{\pm}, \mathbf{v}_{\pm}^1, \mathbf{v}_{\pm}^2)$ . L'étude des vecteurs propres de la matrice  $\bar{\mathbf{J}}_{\text{PVRs}}$  permet de délimiter schématiquement trois zones à l'intérieur desquelles les états  $\widetilde{\Phi}^{nc}$  sont constants [78]. Il existe de part et d'autre deux zones non perturbées d'états  $\Phi_-^{nc}$  et  $\Phi_+^{nc}$  respectivement, encadrant une zone intermédiaire d'état  $\Phi_*^{nc} = (\rho_*, \mathbf{v}_*)$  définie par

$$\rho_* = \frac{1}{2}(\rho_- + \rho_+) - \frac{1}{2} \frac{(\rho_- + \rho_+)}{(c_- + c_+)} (\mathbf{v}_+^1 - \mathbf{v}_-^1), \quad (\text{A.20})$$

$$\mathbf{v}_*^1 = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_-^1 + \mathbf{v}_+^1) - \frac{1}{2} \frac{(c_- + c_+)}{(\rho_- + \rho_+)} (\rho_+ - \rho_-), \quad (\text{A.21})$$

$$\mathbf{v}_*^2 = \begin{cases} \mathbf{v}_-^2 & \text{si } x^{(n_{ij})}/t < \mathbf{v}_*^1, \\ \mathbf{v}_+^2 & \text{si } x^{(n_{ij})}/t > \mathbf{v}_*^1. \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

### A.2.3 Stratégie MUSCL et limiteur minmod

La méthode précédente d'évaluation du terme  $\mathbf{G}_{ij}^E$ , consistant à résoudre le problème (A.18), considère ainsi des états initiaux  $(\Phi_-^{nc}, \Phi_+^{nc})$  constants pour chaque paire de particules  $(i, j)$  interagissant. La solution  $\Phi^E$  alors déterminée est constante par morceaux [31]. Bien que ces états constants soient des discontinuités numériques dues à une approximation constante par morceaux de la solution recherchée, le solveur de Riemann les conçoit comme des discontinuités physiques. En conséquence, cette approche est seulement précise à l'ordre 1 (exacte pour la reconstruction de fonctions constantes) et présente un caractère diffusif [48, 66].

Pour limiter la dissipation numérique ainsi induite, B. Van Leer [31, 82] proposa une extension à l'ordre 1 appelée « *Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws* »

(MUSCL). L'extension PVRS-MUSCL consiste à remplacer les états constants  $(\Phi_i^0, \Phi_j^0)$  dans la définition des états initiaux  $(\Phi_-^{nc}, \Phi_+^{nc})$ , par des états extrapolés linéairement  $(\Phi_-, \Phi_+)$ . Il est alors nécessaire d'estimer les gradients associés aux particules  $i$  et  $j$ , ce qui est réalisé par l'intermédiaire de l'approximation SPH du gradient [66]. Les états initiaux de l'extension PVRS-MUSCL sont ainsi définis par

$$\begin{cases} \Phi_i^0 + (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \sum_{k \in D_i} \omega_k (\nabla_i W_{ik})^\top (\Phi_k^0 - \Phi_i^0) = \Phi_- \rightsquigarrow \Phi_-^{nc} , \\ \Phi_j^0 + (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \sum_{k \in D_j} \omega_k (\nabla_j W_{jk})^\top (\Phi_k^0 - \Phi_j^0) = \Phi_+ \rightsquigarrow \Phi_+^{nc} . \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

L'emploi de la technique MUSCL doit cependant être limité au voisinage des discontinuités physiques (choc, discontinuité de contact) pour des raisons de stabilité [48]. Autrement dit, afin d'éviter la création d'extrema locaux et d'oscillations importantes, il faut corriger les équations (A.23) comme suit :

$$\begin{cases} \Phi_i^0 + (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \sum_{k \in D_i} \omega_k (\nabla_i W_{ik})^\top (\Phi_k^0 - \Phi_i^0) \mathbf{L}_{ij} = \Phi_- \rightsquigarrow \Phi_-^{nc} , \\ \Phi_j^0 + (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \sum_{k \in D_j} \omega_k (\nabla_j W_{jk})^\top (\Phi_k^0 - \Phi_j^0) \mathbf{L}_{ji} = \Phi_+ \rightsquigarrow \Phi_+^{nc} . \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

où les matrices  $\mathbf{L}_{ij} = \text{diag} \left( (\mathbf{L}^l(i, j))_{1 \leq l \leq (d+1)} \right)$  et  $\mathbf{L}_{ji} = \text{diag} \left( (\mathbf{L}^l(j, i))_{1 \leq l \leq (d+1)} \right)$  sont associées à des fonctions  $\mathbf{L}^l$  non-linéaires appelées limiteurs. Dans le cadre eulérien de nombreux limiteurs de pente ont pu être développés et ont permis d'éliminer efficacement les oscillations, sans excessivement introduire de la diffusion [48]. Dans ce cas, le schéma est dit « *Total Variation Diminishing* » (TVD) ([31], chapitre 21). P.K. Sweby [74] parvient à déterminer les conditions qu'un limiteur doit satisfaire afin que le schéma numérique soit TVD. Ceci conduit les fonctions  $\mathbf{L}^l$  à vérifier les conditions sur les composantes  $l$  suivantes :

1. Conserver le signe de la pente, i.e si  $(\Phi_- - \Phi_i^0)^l (\Phi_j^0 - \Phi_i^0)^l < 0$  alors  $\mathbf{L}^l(i, j) = 0$ .
2. Pas d'extremum local à l'interface, i.e  $(\Phi_-^l, \Phi_+^l) \in [\min(\Phi_i^{0l}, \Phi_j^{0l}), \max(\Phi_i^{0l}, \Phi_j^{0l})]^2$ .
3. Conserver le sens du problème de Riemann, i.e si  $(\Phi_- - \Phi_+)^l (\Phi_j^0 - \Phi_i^0)^l < 0$  alors  $\mathbf{L}^l(i, j) = 0$ .

Le limiteur minmod est utilisé pour l'ensemble des simulations présentées dans ce manuscrit. Il s'agit d'un choix usuel dans la communauté SPH, défini comme

$$\mathbf{L}^l(i, j) = \text{minmod}(1, r_{ij}^l) , \quad (\text{A.25})$$

$$= \max(0, \min(1, r_{ij}^l)) , \quad (\text{A.26})$$

avec  $r_{ij}^l$  le ratio entre la  $l$ -ième composante du vecteur  $(\Phi_- - \Phi_i^0)$  et la  $l$ -ième composante du vecteur  $(\Phi_j^0 - \Phi_i^0)$ . La matrice  $\mathbf{L}_{ji}$  est construite de même avec  $r_{ji}^l$  le ratio entre la  $l$ -ième composante du vecteur  $(\Phi_+ - \Phi_j^0)$  et la  $l$ -ième composante du vecteur  $(\Phi_j^0 - \Phi_i^0)$ .

En pratique, le schéma Riemann-SPH-ALE n'est pas TVD car le limiteur minmod est appliqué interaction par interaction, ce qui lui confère un caractère légèrement dissipatif [16].

# ANNEXE B

## MÉTHODES DE RUNGE-KUTTA

Les fondamentaux des méthodes d'approximation temporelle de type Runge-Kutta explicite à  $q$ -étages (RK $q$ ) sont résumés dans cette annexe. La démarche de calcul décrite par C. Hirsch dans son livre [30] a été reprise et est exposée ci-après.

Considérons le problème différentiel (B.1) suivant :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}, \quad (\text{B.1})$$

où  $y \in \mathcal{C}^1([T_0, T_1], \mathbb{R}^s)$ ,  $f \in \mathcal{C}^0([T_0, T_1] \times \mathbb{R}^s, \mathbb{R}^s)$ ,  $[T_0, T_1] \subset \mathbb{R}_+$  et  $s \in \mathbb{N}$ . Autrement dit,  $y$  est une application continue, dérivable et de dérivée continue de  $[T_0, T_1]$  dans  $\mathbb{R}^s$ . De même,  $f$  est une application définie et continue de  $[T_0, T_1] \times \mathbb{R}^s$  dans  $\mathbb{R}^s$ .

On se donne un nombre  $N \in \mathbb{N}$ . On va chercher à résoudre (B.1) en un ensemble discret d'instants  $T_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T_1$ . Autrement dit, pour tout indice en temps  $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ , on va chercher les états  $(t_n, y_n = y(t_n))$  qui sont solutions du problème (B.1). Supposons connaître l'état  $(t_n, y_n)$  solution du problème (B.1) pour un indice donné  $n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$ . Afin de calculer par récurrence les valeurs  $(t_{n+1}, y_{n+1})$ , les méthodes de type RK $q$  proposent alors d'introduire les points intermédiaires  $\{(t_{n,l}, y_{n,l})\}_{1 \leq l \leq q}$  comme

$$\Delta t_n = t_{n+1} - t_n, \quad (\text{B.2})$$

$$t_{n,l} = t_n + c_l \Delta t_n, \quad (\text{B.3})$$

$$y_{n,l} = y(t_{n,l}). \quad (\text{B.4})$$

On dit que  $\Delta t_n$  est le pas de temps et  $c_l$  désigne un réel contenu dans  $[0, 1]$ . Pour chacun de ces points intermédiaires, on introduit également la pente correspondante

$$p_{n,l} = f(t_{n,l}, y_{n,l}). \quad (\text{B.5})$$

Le principe de la méthode est alors d'approcher la valeur suivante  $(y_{n+1})$  par la somme de la valeur actuelle  $(y_n)$  et du produit de la taille de l'intervalle  $(\Delta t_n)$  par la pente estimée  $(p_n)$ .

Soit  $y$  une solution du problème (B.1), un indice de temps  $n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$  et un indice de

sous-instant  $l \in \llbracket 1, q \rrbracket$ . Ainsi, on a

$$y_{n,l} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n,l}} f(t, y(t)) dt, \quad (\text{B.6})$$

$$= y_n + \Delta t_n \int_0^{c_l} f(t_n + u\Delta t_n, y(t_n + u\Delta t_n)) du. \quad (\text{B.7})$$

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt, \quad (\text{B.8})$$

$$= y_n + \Delta t_n \int_0^1 f(t_n + u\Delta t_n, y(t_n + u\Delta t_n)) du. \quad (\text{B.9})$$

Par une méthode de quadrature, on obtient une approximation des intégrales précédentes par des sommes discrètes :

$$g_n(u) = f(t_n + u\Delta t_n, y(t_n + u\Delta t_n)), \quad (\text{B.10})$$

$$\int_0^{c_l} g_n(u) du \approx \sum_{k=1}^{l-1} a_{l,k} g_n(c_k), \quad \forall l \in \llbracket 1, q \rrbracket, \quad (\text{B.11})$$

$$\int_0^1 g_n(u) du \approx \sum_{k=1}^q b_k g_n(c_k). \quad (\text{B.12})$$

Les paramètres  $\{a_{2,1}, \dots, a_{q,q-1}\}$  et  $\{b_1, \dots, b_q\}$  sont des éléments de l'ensemble  $[0, 1]$  appelés poids de quadrature. En particulier, on note alors que  $g_n(c_k) = p_{n,k}$  pour  $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$ . Considérant le problème (B.1), la méthode de Runge-Kutta à  $q$ -étages sur un ensemble discret d'instant  $T_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T_1$  est finalement résumée Éq. (B.13)-(B.15) pour  $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ .

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t_n \sum_{k=1}^q b_k p_{n,k}, \quad (\text{B.13})$$

$$\Delta t_n = t_{n+1} - t_n, \quad (\text{B.14})$$

$$\forall l \in \llbracket 1, q \rrbracket, \quad \begin{cases} t_{n,l} = t_n + c_l \Delta t_n, \\ p_{n,l} = f(t_{n,l}, y_{n,l}), \\ y_{n,l} = y_n + \Delta t_n \sum_{k=1}^{l-1} a_{l,k} p_{n,k}. \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

La méthode RK $q$  est une méthode d'ordre  $q$ , ce qui signifie que l'erreur commise à chaque étape  $n$  est de l'ordre de  $(\Delta t_n)^{q+1}$ , alors que l'erreur totale accumulée est de l'ordre de  $(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t_n / N)^q$ . Les poids de quadrature  $\{a_{2,1}, \dots, a_{q,q-1}\}$  et  $\{b_1, \dots, b_q\}$ , ainsi que la décomposition en sous-pas  $\{c_1, \dots, c_q\}$  sont des coefficients réels dont les valeurs dépendent de l'ordre  $q$  de la méthode. Dans le cas de la méthode de Runge-Kutta à  $q = 1$  étage (RK1), ces coefficients sont  $b_1 = 1$  et  $c_1 = 0$ . Pour la méthode de Runge-Kutta à  $q = 3$  étages (RK3), les poids de quadrature sont définis comme  $\{a_{2,1} = 1/2, a_{3,1} = -1, a_{3,2} = 2\}$ ,  $\{b_1 = 1/6, b_2 = 2/3, b_3 = 1/6\}$  et la décomposition en sous-pas est  $\{c_1 = 0, c_2 = 1/2, c_3 = 1\}$ .

# ANNEXE C

## MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS MOBILES (MLS)

Dans la littérature des Mathématiques, il existe différentes méthodes pour déterminer une approximation  $\tilde{\mathcal{P}}_f$  d'une fonction  $f$  régulière. La méthode des moindres carrés mobiles (MLS, « *Moving Least Squares* »), qui appartient à la théorie dite de Backus-Gilbert [2, 3, 4, 13], constitue une technique populaire dans la communauté de la simulation numérique sans maillage [7, 8] pour ses bonnes propriétés de reproductibilité et de stabilité. De par les travaux de G.A. Renault [66] en méthode SPH, cette méthode numérique d'approximation a été implémentée dans le solveur ASPHODEL<sup>©</sup>. Dans la continuité, elle a été privilégiée pour réaliser les processus de restriction et de prolongation en APR. Les fondamentaux de la méthode MLS sont présentés ci-après. La démarche de calcul décrite par D. Levin [43] a été adaptée au formalisme SPH utilisé dans le corps du manuscrit.

### C.1 Approximation MLS adaptée au formalisme SPH

Considérons le problème d'approximation d'une fonction  $f$  régulière, supposée plusieurs fois continûment dérivable sur le domaine  $\Omega$  de dimension finie. En méthode SPH, les points de calcul sont appelés particules. Soit  $\mathbf{x}_i$  la position d'une particule donnée  $i$  du domaine  $\Omega$ . Supposons de plus connaître un échantillon de données  $\{f(\mathbf{x}_j)\}_{j \in \mathcal{V}_i}$  calculées sur un ensemble fini de particules  $\mathcal{V}_i$  éparpillées dans le domaine de calcul  $\Omega$  dans un voisinage de la particule d'intérêt  $i$ . La méthode des MLS de degré  $p$  appliquée à la particule  $i$  fournit alors une estimation  $\tilde{\mathcal{P}}_f(\mathbf{x}_i)$  de la donnée inconnue  $f(\mathbf{x}_i)$ . L'opérateur  $\tilde{\mathcal{P}}_f$  est alors défini comme le polynôme  $\mathcal{P}_f$  de degré  $p$  qui minimise la fonctionnelle objectif au point  $\mathbf{x}_i$ , notée  $\mathcal{J}_{\mathbf{x}_i}$ . La fonctionnelle considérée est donnée Éq. (C.1).

$$\mathcal{J}_{\mathbf{x}_i}(\mathcal{P}_f) = \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathcal{V}_i} (\mathcal{P}_f(\mathbf{x}_j) - f(\mathbf{x}_j))^2 \omega_j W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_i^{\text{MLS}}) , \quad (\text{C.1})$$

avec  $\omega_j$  le volume de la particule  $j$ ,  $W$  la fonction noyau utilisée dans les opérateurs SPH et  $h_i^{\text{MLS}}$  une mesure mathématique de l'ensemble  $\mathcal{V}_i$ . En pratique, la mesure  $h_i^{\text{MLS}}$  utilisée est donnée Éq. (C.2).

$$h_i^{\text{MLS}} = \eta_i h_i, \text{ avec } \eta_i = \begin{cases} 2 & \text{si } i \text{ est une fille,} \\ 1 & \text{si } i \text{ est une mère.} \end{cases} , \quad (\text{C.2})$$

où  $h_i$  est la longueur de lissage de la particule  $i$ . Ainsi, la mesure utilisée est toujours comparable à la longueur de lissage des mères. On nomme *longueur de lissage MLS* la mesure  $h_i^{\text{MLS}}$  construite Éq. (C.2), car elle est homogène à une longueur de lissage.

La fonctionnelle  $\mathcal{J}_{\mathbf{x}_i}$  possède un support  $\mathcal{V}_i$  imposé par la fonction noyau  $W$  et la mesure  $h^{\text{MLS}}$ . De par les propriétés de la fonction noyau  $W$ , le support  $\mathcal{V}_i$  est compact, isotrope et centré sur la position  $\mathbf{x}_i$  de la particule d'intérêt  $i$ . Cela confère un caractère local à la méthode, car la pondération  $\omega_j W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_i^{\text{MLS}})$  dépend de la particule d'évaluation  $i$ . Ainsi, les coefficients du polynôme solution  $\tilde{\mathcal{P}}_f$  et des polynômes tests  $\mathcal{P}_f$  dépendent de la position  $\mathbf{x}_i$ . Pour des raisons de stabilité, le polynôme  $\mathcal{P}_f$  est exprimé dans un système de coordonnées locales centrées sur le point  $\mathbf{x}_i$  et réduites par la longueur de lissage  $h_i$  [64]. Dans la continuité de [66], l'expression utilisée est donnée Éq. (C.3).

$$\mathcal{P}_f(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}_i} = \sum_{k=0}^p \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{h_i} \right)^k a_k(\mathbf{x}_i), \quad (\text{C.3})$$

où  $\{a_k(\mathbf{x}_i)\}_{k \leq p}$  sont des réels appelés coefficients polynomiaux. L'opérateur  $\tilde{\mathcal{P}}_f$  recherché peut également être décrit comme le polynôme  $\mathcal{P}_f$  donné Éq. (C.3), dont les coefficients polynomiaux minimisent la fonctionnelle explicitée Éq. (C.1). Dans le cas particulier où la fonction  $f$  à approcher est un polynôme de degré  $p$ , l'approximation par méthode MLS de degré  $p$  est exacte i.e.  $\tilde{\mathcal{P}}_f = f$  [43]. Ainsi, la méthode MLS de degré  $p$  est dite  $p$ -consistante par abus de langage ou précise à l'ordre  $p + 1$ . On y fait référence comme la méthode des  $\text{MLS}_p$  pour indiquer clairement cet ordre de précision.

## C.2 Définition du problème aux moindres carrés

Considérons le problème de minimisation de la fonctionnelle  $\mathcal{J}_{\mathbf{x}_i}$  donnée Éq. (C.1). Pour cela, on cherche les zéros de la jacobienne de  $\mathcal{J}_{\mathbf{x}_i}$ . Autrement dit, on recherche les coefficients polynomiaux qui annulent cette jacobienne. Ainsi, minimiser la fonctionnelle  $\mathcal{J}_{\mathbf{x}_i}$  nécessite la résolution des équations normales appliquées à la particule  $i$ , données Éq. (C.4).

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \left( \left( \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{h_i} \right)^l \omega_j W(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i, h_i^{\text{MLS}}) \sum_{k=0}^p \left( \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{h_i} \right)^k a_k(\mathbf{x}_i) \right) \\ = \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \left( \left( \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{h_i} \right)^l f(\mathbf{x}_j) \omega_j W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_i^{\text{MLS}}) \right), \quad l \in \{0, \dots, p\}. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

La convention  $j \in \mathcal{V}_i$  est un abus de la notation du support  $\mathcal{V}_i$  centré sur la particule  $i$ . Celle-ci est à comprendre comme l'ensemble des particules  $j$  dont la position  $\mathbf{x}_j$  est incluse dans le support  $\mathcal{V}_i$ . Par simplicité, cet abus de notation est ré-utilisé par la suite. Les équations normales données Éq. (C.4) sont réécrites en notation matricielle Éq. (C.5).

$$\overline{\overline{\mathbf{C}}}^\top \overline{\overline{\mathbf{W}}} \overline{\overline{\mathbf{C}}} \mathbf{a} = \overline{\overline{\mathbf{C}}}^\top \overline{\overline{\mathbf{W}}} \mathbf{f}, \quad (\text{C.5})$$

avec le vecteur  $\mathbf{a} = (a_k(\mathbf{x}_i))_{k \in [0, p]}^\top$  qui contient les coefficients polynomiaux recherchés, le vecteur  $\mathbf{f} = (f(\mathbf{x}_j))_{j \in \mathcal{V}_i}^\top$  des données connues, la matrice  $\overline{\overline{\mathbf{C}}} = \left( \left( (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) / h_i \right)^k \right)_{(j, k) \in \mathcal{V}_i \times [0, p]}$  des monômes exprimés dans un système de coordonnées locales relatives au point  $\mathbf{x}_i$  et la matrice diagonale

$\overline{\overline{\mathbf{W}}} = \text{diag} \left( (\omega_j W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_i^{\text{MLS}}))_{j \in \mathcal{V}_i} \right)$  de pondération. Notons que chaque terme de la relation donnée Éq. (C.5) dépend de la position  $\mathbf{x}_i$  de la particule d'intérêt  $i$ . Pour alléger la notation, cette dépendance n'est plus explicitée. Par changement de variables, la relation matricielle donnée Éq. (C.5) devient alors le système linéaire matriciel donné Éq. (C.6).

$$\overline{\overline{\mathbf{M}}}\mathbf{a} = \Pi_{\mathbf{f}}. \quad (\text{C.6})$$

On a alors introduit la matrice des moindres carrés  $\overline{\overline{\mathbf{M}}} = \overline{\overline{\mathbf{C}}}^\top \overline{\overline{\mathbf{W}}} \overline{\overline{\mathbf{C}}}$  et le vecteur projection des données connues dans la base choisie  $\Pi_{\mathbf{f}} = \overline{\overline{\mathbf{C}}}^\top \overline{\overline{\mathbf{W}}}\mathbf{f}$ . La matrice  $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$  est carrée, symétrique et positive. On l'appelle parfois matrice des moments par ailleurs dans la littérature. Cette matrice est purement géométrique car elle dépend des positions  $\{\mathbf{x}_j\}_{j \in \mathcal{V}_i}$  mais ne dépend pas des données  $\{f(\mathbf{x}_j)\}_{j \in \mathcal{V}_i}$ . Ainsi, une seule évaluation de la matrice  $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$  suffit et peut être réutilisée pour l'approximation d'autres fonctions régulières dont les données sont connues aux positions  $\{\mathbf{x}_j\}_{j \in \mathcal{V}_i}$  et dont le point d'évaluation est  $\mathbf{x}_i$ .

Le conditionnement d'une matrice est la mesure de la dépendance de ses termes par rapport aux données du problème considéré. Pour un système linéaire de type Éq. (C.6), la matrice  $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$  est dite mal conditionnée lorsque son conditionnement est fort. En effet, une petite variation sur les données  $\Pi_{\mathbf{f}}$  entraîne alors une grande fluctuation sur  $\mathbf{a}$ . Les termes de  $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$  dépendent de ceux de  $\overline{\overline{\mathbf{C}}}$  et donc du choix de la base polynomiale dans laquelle elle est exprimée. Avoir choisi de recourir à un système de coordonnées locales centrées sur le point  $\mathbf{x}_i$  et réduites par la longueur de lissage  $h_i$  conduit à une matrice  $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$  mieux conditionnée [64].

Le système linéaire (C.4) possède  $p + 1$  inconnues et est composé d'autant d'équations qu'il y a de particules dans l'ensemble  $\mathcal{V}_i$ . Les particules de  $\mathcal{V}_i$  sont en général toutes distinctes car leur position ne sont pas confondues, i.e.  $\forall j_1, j_2 \in \mathcal{V}_i, \mathbf{x}_{j_1} \neq \mathbf{x}_{j_2}$ . Le nombre d'équations indépendantes est alors donné par le cardinal de l'ensemble  $\mathcal{V}_i$ , que l'on note  $\#\mathcal{V}_i$ . Le système donné Éq. (C.6) admet une solution si et seulement si le nombre  $\#\mathcal{V}_i$  d'équations indépendantes est supérieur au nombre  $p + 1$  d'inconnues. On dit alors qu'il est compatible et on le résout par un moyen habituel (décomposition QR, SVD ou GMRES par exemple). Toutefois, la matrice  $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$  est d'autant mieux conditionnée que le nombre  $\#\mathcal{V}_i$  d'équations indépendantes est important. Réciproquement, un nombre d'équations indépendantes insuffisant implique que la matrice  $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$  soit mal conditionnée. La qualité de l'approximation obtenue est alors dégradée et la méthode devient instable. Numériquement, cette situation peut apparaître localement en raison de l'appauvrissement du nombre de voisines associées à une particule  $i$  localisée à proximité d'une zone de troncature du domaine de calcul. Dans ce cas, il est possible de recourir localement à une méthode des MLS dont l'ordre est moins élevé pour déterminer une approximation non-dégradée [66]. Cette approche par dégradation d'ordre conduit par exemple à privilégier l'emploi des MLS constants ( $p = 0$ ) dans les zones de troncature du voisinage de  $i$  et recourir aux MLS linéaires ( $p = 1$ ) par ailleurs.



# ANNEXE D

## PROCESSUS DE RAFFINEMENT NON-DESTRUCTIF

Dans le corps de ce manuscrit, l'HAPR dispose d'un schéma de raffinement permettant de tenir compte du voisinage des mères se raffinant. Cette stratégie est qualifiée de destructrice car la topologie du voisinage d'une mère se raffinant n'est pas préservée. Ce n'est toutefois pas le seul processus de raffinement adaptatif qui a été testé au cours de ces travaux de thèse. Une autre stratégie avec un schéma de raffinement adaptatif préservant la topologie du voisinage d'une mère se raffinant a également été développée. Ainsi, la création de  $M$  filles n'est plus systématique. Par exemple, le raffinement d'une mère associée à  $M-1$  filles (dites *pré-existantes*) engendre la création de seulement une fille (dite *additionnelle*). Les propriétés des filles pré-existantes, notamment les positions, ne sont alors pas modifiées lors du raffinement. Cette approche est nommée *processus de raffinement non-destructif*, par opposition au principe du processus de raffinement destructif présenté section 5.1, et est exposée dans ce qui suit. Le processus de raffinement non-destructif est composé de trois étapes : l'identification des filles pré-existantes, le positionnement puis l'initialisation des propriétés des filles additionnelles. L'étape d'identification des filles pré-existantes est détaillée section D.1 et consiste tout d'abord à caractériser le voisinage d'une mère se raffinant, car il n'existe pas de connectivité connue entre les mères SPH et les filles gardes. Connaître la composition de ce voisinage permet d'étudier la configuration spatiale des  $M_{pe}$  filles pré-existantes par rapport à la mère associée et de déduire le nombre  $M - M_{pe}$  de filles additionnelles à créer. À l'aide de ces considérations géométriques, un problème d'optimisation est ensuite formulé section D.2 afin de déterminer les positions des filles additionnelles à créer en 2D. Enfin section D.3, la procédure d'initialisation des propriétés des filles additionnelles est détaillée. Les résultats de l'HAPR obtenus avec processus de raffinement destructif et non-destructif sur le cas du canal oscillant sont comparés section D.4.

### D.1 Identification des filles pré-existantes

Pour toute mère se raffinant, le nombre et la configuration spatiale des filles pré-existantes qui lui sont associées sont à déterminer. D'une part, dénombrer les  $M_{pe}$  filles gardes pré-existantes qui lui sont associées permet de déduire le nombre  $M - M_{pe}$  de filles additionnelles à créer lors du raffinement. Cependant, une fois les filles créées, leur configuration ne forme plus un motif cartésien centré sur une mère et toute connectivité avec la mère d'origine est perdue. Afin de caractériser le voisinage d'une mère se raffinant, il est essentiel de re-définir une connectivité entre les mères SPH et les filles gardes. À l'instar de la stratégie destructrice, toute

filles garde, au plus distante d'une mère SPH d'une distance égale à un rayon de lissage d'une mère SPH, est associée à la mère SPH dont elle est la plus proche. Ainsi, chaque fille garde est associée à au plus une mère SPH. Cependant, plus de  $M$  filles gardes peuvent être associées à une même mère SPH. Par conséquent, les filles les plus distantes de cette mère sont considérées comme superflues et sont éliminées afin de limiter à  $M$  le nombre de filles pré-existantes associées à une même mère SPH se raffinant. Néanmoins, cette situation n'intervient presque jamais en pratique, tant que la distribution des mères SPH forme un pavage de l'espace suffisamment régulier. À ce stade, pour toute mère se raffinant, le nombre  $M - M_{pe}$  de filles additionnelles à créer est ainsi connu.

D'autre part, caractériser la configuration spatiale des  $M_{pe}$  filles pré-existantes par rapport à la mère associée est nécessaire pour positionner judicieusement les  $M - M_{pe}$  filles additionnelles par la suite. Pour la caractériser en 2D, la convention de numérotation présentée Fig. D.1a et Fig. D.1b est appliquée.

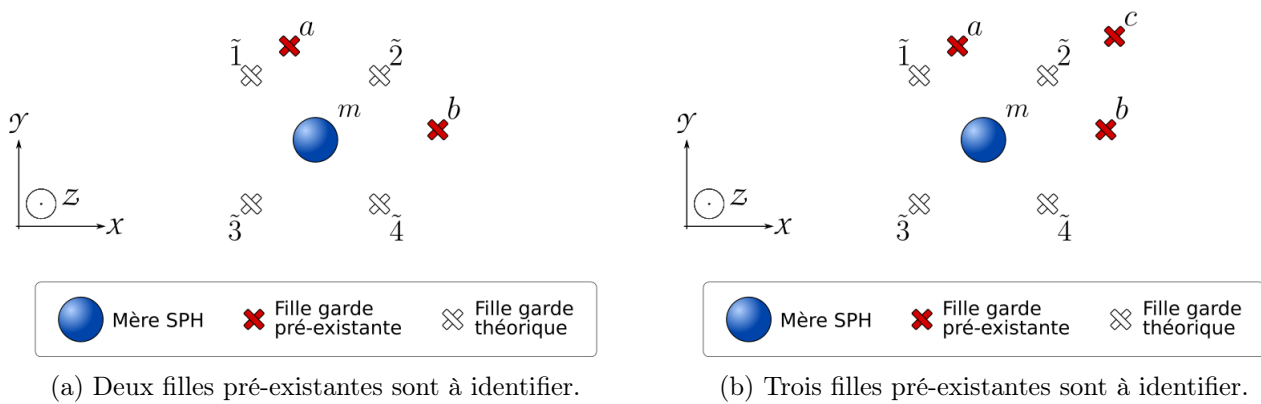


FIGURE D.1 – Convention de numérotation utilisée pour l'étape identification : illustration de configurations spatiales de filles pré-existantes par rapport à la mère associée.

La configuration schématisée Fig. D.1a (resp. Fig. D.1b) est constituée de deux (resp. trois) filles pré-existantes  $a$  et  $b$  (resp.  $a$ ,  $b$  et  $c$ ) associées à la mère  $m$ . Comme illustré, les  $M = 4$  filles qui seraient issues du schéma cartésien sont numérotées de un (pour le sommet en supérieur gauche) à quatre (pour le sommet en inférieur droit). Cette étape d'identification consiste à attribuer à chaque fille pré-existante un numéro de sommet unique, afin de caractériser la configuration spatiale par rapport à la mère. Par exemple Fig. D.1a, attribuer les numéros un et quatre aux filles pré-existantes  $a$  et  $b$ . Le processus utilisé dépend du nombre  $M_{pe}$  de filles pré-existantes à identifier. Il est détaillé ci-après pour chacune des  $0 \leq M_{pe} \leq 4$  situations possibles. Alors que l'identification de zéro, une seule fille ou quatre filles soient triviales, les configurations avec deux et trois filles sont plus délicates à traiter.

Il est tout d'abord inutile de procéder à l'identification de zéro (resp. quatre) filles pré-existantes, car quatre (resp. zéro) filles additionnelles sont à créer.

De plus, lorsqu'une seule fille pré-existante est à identifier, le numéro de sommet dont elle est la plus proche lui est attribué.

Sans perte de généralité, considérons la configuration présentée Fig. D.1a pour illustrer la procédure d'identification de deux filles pré-existantes  $a$  et  $b$ . De manière exhaustive, la paire de filles  $a - b$  forme soit un côté soit une diagonale du motif cartésien théorique. Afin de réaliser une disjonction des cas, définissons le ratio  $r_{a,b} = \|x_a - x_b\| / \|y_a - y_b\|$  des normes euclidiennes des positions relatives selon l'axe  $x$  sur celles de l'axe  $y$ . En supposant de faibles perturbations par rapport au motif cartésien théorique, la valeur de ce ratio est grande si et seulement si

la paire  $a - b$  forme le côté supérieur (1 – 2) ou inférieur (3 – 4) du motif. Réciproquement, la valeur de ce ratio est faible si et seulement si la paire  $a - b$  forme le côté gauche (1 – 3) ou droit (2 – 4) du motif. Autrement, c'est-à-dire pour un ratio proche de l'unité, la paire  $a - b$  forme vraisemblablement une diagonale (1 – 4 ou 2 – 3). Des seuils ad hoc ont été déterminés par la pratique numérique. Concrètement, une valeur supérieure à 2 (resp. inférieure à  $1/2$ ) pour ce ratio est considérée comme grande (resp. faible). Si la valeur calculée pour la paire  $a - b$  est supérieure à  $1/2$ , i.e. indiquant qu'il s'agisse d'une diagonale ou du côté supérieur ou du côté inférieur du motif, il reste à déterminer qui de  $a$  ou  $b$  est localisée en amont de l'axe  $x$ . Si la valeur calculée pour la paire  $a - b$  est inférieure à  $1/2$ , il faudrait alors déterminer qui de  $a$  ou  $b$  est localisée en amont de l'axe  $y$ . Quelle que soit la configuration, supposons que la fille  $a$  soit retenue. À ce stade, il ne reste que deux possibilités et le numéro de sommet dont elle est la plus proche lui est attribué. Le numéro de la fille  $b$  est ensuite déduit. Pour l'exemple, supposons que le ratio calculé pour la paire  $a - b$  indique qu'il s'agisse du côté supérieur (1 – 2) ou inférieur (3 – 4) du motif. On détermine alors qui de  $a$  ou  $b$  est localisé en amont de l'axe  $x$ . Mettons que  $x_a < x_b$ , alors la fille pré-existante  $a$  peut seulement être candidate à l'attribution des numéros 1 et 3. Parmi ces deux possibilités, le numéro de sommet dont elle est la plus proche lui est attribué. Finalement, si la fille  $a$  reçoit le numéro 1 alors la fille  $b$  reçoit le numéro 2.

Sans perte de généralité, considérons la configuration présentée Fig. D.1b pour illustrer la procédure d'identification de trois filles pré-existantes  $a$ ,  $b$  et  $c$ . De manière exhaustive, seules trois paires de filles peuvent être constituées :  $a - b$ ,  $a - c$  ou  $b - c$ . L'une d'elles forme le côté soit supérieur (1 – 2) soit inférieur (3 – 4) du motif cartésien théorique, une autre paire forme le côté soit gauche (1 – 3) soit droit (2 – 4), tandis que la dernière est une diagonale (1 – 4 ou 2 – 3). Pour le déterminer, comparons les valeurs des ratios de positions relatives  $r_{a,b}$ ,  $r_{a,c}$  et  $r_{b,c}$  définis dans le paragraphe précédant. En supposant de faibles perturbations par rapport au motif cartésien théorique, la paire dont le ratio présente la plus grande valeur des trois ne peut alors qu'être le côté supérieur (1 – 2) ou inférieur (3 – 4) du motif cartésien théorique. Pour l'exemple, supposons que cela soit la paire  $a - c$ . Mettons que  $x_a < x_c$ , alors la fille pré-existante  $a$  peut seulement être candidate à l'attribution des numéros 1 et 3. Par conséquent, la fille  $c$  est seulement candidate à l'attribution des numéros 2 et 4. Par ailleurs, la paire dont le ratio présente la plus petite valeur des trois ne peut former que le côté gauche (1 – 3) ou droit (2 – 4) du motif. Pour l'exemple, supposons que cela soit la paire  $b - c$ . Par conséquent, la paire  $a - b$  restante est une diagonale. Mettons que  $y_b < y_c$ , alors la fille pré-existante  $c$  peut seulement être candidate à l'attribution des numéros 1 et 2. Cependant, il a été conclu précédemment que la fille  $c$  est seulement candidate à l'attribution des numéros 2 et 4. Par conséquent, la fille  $c$  reçoit le numéro 2. Il découle que le numéro à attribuer à la fille  $a$  est 1. Finalement, la fille  $b$  est alors numérotée 4.

Pour résumer, pour toute mère se raffinant, le nombre  $M_{pe}$  de filles pré-existantes qui lui sont associées est connu. De plus, quel que soit le nombre  $M - M_{pe}$  de filles additionnelles à créer, la configuration des filles pré-existantes autour de la mère associée est connue et caractérisée par une convention de numérotation. Ces informations sont utilisées par la suite pour déterminer les positions des filles additionnelles.

## D.2 Positionnement des filles additionnelles

Les considérations géométriques en 2D établies précédemment sur la configuration spatiale des filles pré-existantes par rapport à une mère associée sont utilisées dans cette section afin de positionner judicieusement les  $M - M_{pe}$  filles additionnelles. Ainsi, un problème d'optimi-

sation  $\mathbf{P}$  est formulé afin de positionner les filles additionnelles de manière à maximiser l'aire du quadrilatère dont les sommets sont les  $M = 4$  filles. D'après la procédure d'identification exposée précédemment, une mère se raffinant  $m$  présente dans son voisinage au plus quatre filles pré-existantes qui lui sont associées. Par conséquent, au plus quatre filles additionnelles sont à créer. Un raisonnement par disjonction des cas  $(\mathbf{P}_{M-M_{pe}})_{0 \leq M_{pe} \leq 4}$  est alors utilisé pour résoudre le problème général d'optimisation  $\mathbf{P}$ . En particulier, le sous-problème  $\mathbf{P}_{M-M_{pe}}$  consiste à positionner  $0 \leq M - M_{pe} \leq 4$  filles additionnelles  $(p_k)_k$ , connaissant les positions de  $0 \leq M_{pe} \leq 4$  filles pré-existantes  $(f_l)_l$ . Le sous-problème devient de plus en plus général à mesure que le nombre de filles additionnelles à positionner augmente. Pour chaque sous-problème étudié ci-après, il est démontré qu'une unique solution existe sous certaines hypothèses qui sont satisfaites en pratique. L'expression analytique de la solution est également fournie, ce qui permet une implémentation efficace de la résolution numérique du problème d'optimisation global.

### D.2.1 Sous-problème $\mathbf{P}_0$

Tout d'abord, considérons le sous-problème  $\mathbf{P}_0$  illustré Fig. D.2.

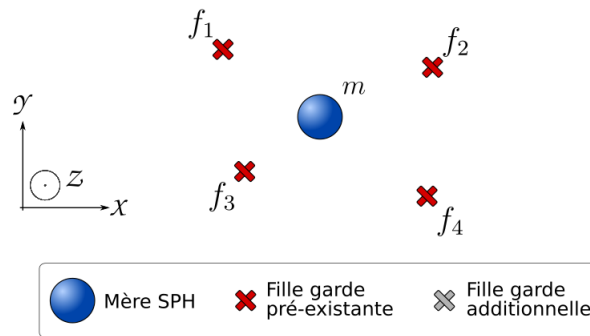


FIGURE D.2 – Illustration du sous-problème  $\mathbf{P}_0$  dont la résolution consiste à ne positionner aucune fille additionnelle car les positions de quatre filles pré-existantes sont connues.

Dans cette configuration, il y a quatre filles pré-existantes  $(f_l)_{1 \leq l \leq 4}$  qui sont associées à la mère  $m$ . Sans perdre de généralités, la convention de numérotation introduite par la procédure d'identification des filles pré-existantes est ré-utilisée. Comme illustré, les  $M_{pe} = 4$  filles pré-existantes sont indicées de un (pour le sommet en supérieur gauche) à quatre (pour le sommet en inférieur droit). Par conséquent, il n'y a aucune fille additionnelle à positionner ( $M - M_{pe} = 0$ ). La résolution est alors triviale car la seule configuration admissible est celle imposée par l'écoulement.

### D.2.2 Sous-problème $\mathbf{P}_1$

Sans perte de généralité, considérons à présent le sous-problème  $\mathbf{P}_1$  tel qu'illustré Fig. D.3, qui consiste à positionner une unique fille additionnelle  $p_1$ .

La mère  $m$  est associée aux trois filles pré-existantes  $f_2$ ,  $f_3$  et  $f_4$  indicées selon la convention choisie précédemment. Afin de positionner la fille additionnelle  $p_1$ , on se donne deux paramètres réels éventuellement différents  $C_{12}$ ,  $C_{13} > 0$ . Le cercle de rayon  $C_{12}$  (resp.  $C_{13}$ ) centré sur la fille pré-existante  $f_2$  (resp.  $f_3$ ) est ensuite représenté. Supposons que ces deux cercles s'intersectent. Il existe alors au plus deux positions admissibles pour la fille additionnelle  $p_1$ . Afin de déterminer

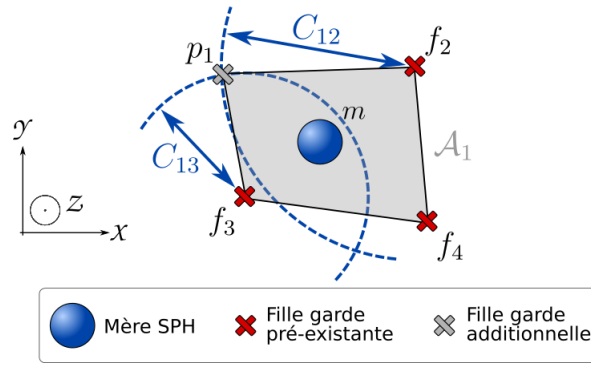


FIGURE D.3 – Illustration du sous-problème  $\mathbf{P}_1$  dont la résolution consiste à positionner une seule fille additionnelle en connaissant les positions de trois filles pré-existantes.

la position  $f_1$  finalement retenue, l'aire  $\mathcal{A}_1(p_1)$  du quadrilatère dont les sommets sont les filles  $p_1, f_2, f_3$  et  $f_4$  est maximisée. Par conséquent, le sous-problème  $\mathbf{P}_1$  peut être formulé selon

$$\mathbf{E}_1 [C_A, C_B] = \left\{ P \in \mathbb{R}^2, \left\{ \begin{array}{l} \|\overrightarrow{f_2 P}\| = C_A, \\ \|\overrightarrow{f_3 P}\| = C_B. \end{array} \right. \right\}, \quad (\text{D.1})$$

$$\mathbf{P}_1 [C_{12}, C_{13}] = \left\{ F \in \mathbb{R}^2, F = \arg \max_{p_1 \in \mathbf{E}_1 [C_{12}, C_{13}]} \mathcal{A}_1(p_1) \right\}. \quad (\text{D.2})$$

Sous l'hypothèse de paramètres  $C_{12}$  et  $C_{13}$  garantissant l'intersection des cercles associés, le sous-problème  $\mathbf{P}_1$  admet une unique solution  $f_1$ . La démonstration rigoureuse en est faite ci-après.

### Existence, unicité et expression de la solution analytique

Supposons que les filles pré-existantes  $f_2 = (x_2, y_2)$ ,  $f_3 = (x_3, y_3)$  et  $f_4 = (x_4, y_4)$  soient connues et organisées selon la configuration présentée Fig. D.3. La résolution du sous-problème  $\mathbf{P}_1$  consiste alors à déterminer la position  $f_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$  pour y disposer une fille additionnelle. L'utilisation de coordonnées polaires relatives simplifie la résolution du sous-problème  $\mathbf{P}_1$ , car ce repère permet de positionner la fille additionnelle recherchée relativement aux filles pré-existantes connues. De plus, la convention de numérotation décidée permet de faire des hypothèses sur le signe des cosinus et sinus bien utiles pour simplifier certains calculs. Le système de coordonnées polaires relatives est introduit Fig. D.4.

Cependant, le sous-problème  $\mathbf{P}_1$  ne consiste pas toujours à déterminer la solution  $f_1$ . Par exemple, la résolution peut conduire à déterminer la position  $f_2$  si les filles pré-existantes sont  $f_1, f_3$  et  $f_4$ . Néanmoins, il est possible de faire correspondre toute configuration spatiale à celle présentée Fig. D.4 en utilisant une rotation de l'orientation du repère  $(x, y)$ . Pour cela, il suffit de remarquer que de rechercher  $f_1$  est équivalent à chercher toute autre fille si l'on effectue une rotation d'angle  $-k\pi/2$  dans le plan muni d'un repère orthonormé direct des coordonnées

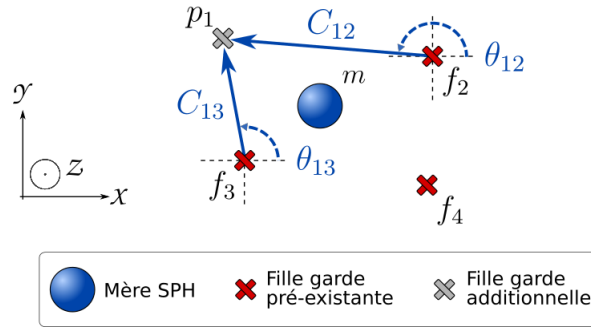


FIGURE D.4 – Sous-problème  $\mathbf{P}_1$  : Illustration du repère de coordonnées polaires  $(C_{12}, \theta_{12})$  (resp.  $(C_{13}, \theta_{13})$ ) utilisé pour positionner la fille  $p_1$  relativement à la fille  $f_2$  (resp.  $f_3$ ).

polaires relatives, où  $k$  est défini selon

$$k = \begin{cases} 0, & \text{si } f_1 \text{ est recherchée,} \\ 1, & \text{si } f_2 \text{ est recherchée,} \\ 2, & \text{si } f_4 \text{ est recherchée,} \\ 3, & \text{si } f_3 \text{ est recherchée.} \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

En particulier, rechercher  $f_1$  est équivalent à rechercher  $f_2$  en effectuant une rotation d'angle  $\pi/2$  de l'orientation du repère  $(x, y)$  présenté Fig. D.4. Considérer le sous-problème  $\mathbf{P}_1$  tel qu'illustré Fig. D.4 s'effectue donc sans restreindre la généralité.

Supposons connus deux paramètres réels éventuellement différents  $C_{12}, C_{13} > 0$ . Par soucis d'alléger les notations, la dépendance à ces paramètres n'est plus explicitée. En utilisant les coordonnées polaires relatives introduites Fig. D.4, des équations équivalentes à (D.1) et (D.2) sont formulées afin d'introduire le sous-problème  $\widetilde{\mathbf{P}}_1^k$  équivalent à  $\mathbf{P}_1$ . En particulier, le système  $\widetilde{\mathbf{E}}_1^k$  équivalent à  $\mathbf{E}_1$  est défini comme suit

$$\widetilde{\mathbf{E}}_1^k = \left\{ \begin{array}{l} (\theta_{12}, \theta_{13}) \in [0, 2\pi[{}^2, \\ \left\{ \begin{array}{l} C_{12} \cos\left(\theta_{12} - k\frac{\pi}{2}\right) + x_2 = C_{13} \cos\left(\theta_{13} - k\frac{\pi}{2}\right) + x_3, \\ C_{12} \sin\left(\theta_{12} - k\frac{\pi}{2}\right) + y_2 = C_{13} \sin\left(\theta_{13} - k\frac{\pi}{2}\right) + y_3. \end{array} \right. \end{array} \right\}. \quad (\text{D.4})$$

Il s'agit d'un système de deux équations indépendantes à deux inconnues  $\theta_{12}$  et  $\theta_{13}$ . Grâce à des opérations trigonométriques usuelles, le système  $\widetilde{\mathbf{E}}_1^k$  est réécrit comme

$$\widetilde{\mathbf{E}}_1^k = \left\{ \begin{array}{l} (\theta_{12}, \theta_{13}) \in [0, 2\pi[{}^2, \\ \left\{ \begin{array}{l} C_{12} \cos\left(\theta_{12} - k\frac{\pi}{2}\right) + x_2 = C_{13} \cos\left(\theta_{13} - k\frac{\pi}{2}\right) + x_3, \\ \cos(\theta_{12} - \theta_{13}) = \frac{C_{12}^2 + C_{13}^2 - \|\vec{f}_2 \vec{f}_3\|^2}{2C_{12}C_{13}}. \end{array} \right. \end{array} \right\}. \quad (\text{D.5})$$

Pour la suite des développements, on introduit le paramètre  $\Gamma$  défini par

$$\Gamma = \frac{C_{12}^2 + C_{13}^2 - \|\vec{f_2 f_3}\|^2}{2C_{12}C_{13}}. \quad (\text{D.6})$$

On note que le paramètre  $\Gamma$  correspond au cosinus de l'angle  $\widehat{312}$  constitué des filles  $f_3$ ,  $p_1$  et  $f_2$  lorsqu'une solution admissible existe, i.e.  $\Gamma = \cos(\theta_{12} - \theta_{13})$ . Ce constat permet alors l'interprétation géométrique suivante du problème  $\mathbf{P}_1$  :

- Lorsque  $|\Gamma| > 1$  les deux cercles ne s'intersectent pas et il n'y a donc aucune solution admissible,
- Lorsque  $\Gamma = 1$  la particule  $f_1$  est alignée avec les particules  $f_2, f_3$  (ou  $f_3, f_2$ ) dans cet ordre et les cercles associés sont tangents,
- Lorsque  $\Gamma = -1$  la particule  $f_1$  appartient au segment  $f_2, f_3$  et les cercles associés sont tangents,
- Lorsque  $|\Gamma| < 1$  les deux cercles s'intersectent et sont non tangents, il y a donc deux solutions admissibles.

Ainsi, pour  $|\Gamma| > 1$  il n'y a aucune solution au problème  $\widetilde{\mathbf{E}}_1^k$ . Pour aller plus loin, supposons que  $|\Gamma| \leq 1$ . Autrement dit, il est supposé que les paramètres  $C_{12}$  et  $C_{13}$  garantissent l'intersection des cercles associés. À l'aide d'opérations trigonométriques usuelles, le système  $\widetilde{\mathbf{E}}_1^k$  est alors réécrit de manière à manipuler le paramètre  $\Gamma$  comme suit.

$$\widetilde{\mathbf{E}}_1^k = \left\{ \begin{array}{l} (\theta_{12}, \theta_{13}) \in [0, 2\pi[{}^2, \\ \left\{ \begin{array}{l} A \cos^2\left(\theta_{13} - k\frac{\pi}{2}\right) + B \cos\left(\theta_{13} - k\frac{\pi}{2}\right) + C = 0, \\ \cos(\theta_{12} - \theta_{13}) = \Gamma. \end{array} \right. \end{array} \right\}, \quad (\text{D.7})$$

où les coefficients  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont donnés par

$$A = (C_{13} - \Gamma C_{12})^2 + C_{12}^2(1 - \Gamma^2), \quad (\text{D.8})$$

$$B = 2(x_3 - x_2)(C_{13} - \Gamma C_{12}), \quad (\text{D.9})$$

$$C = (x_3 - x_2)^2 - C_{12}^2(1 - \Gamma^2). \quad (\text{D.10})$$

On reconnaît alors un polynôme du second degré de variable  $\cos(\theta_{13} - k\pi/2)$  dont les coefficients polynomiaux sont les paramètres  $A > 0$ ,  $B$  et  $C$ . Le discriminant  $\Delta$  associé est alors défini selon

$$\Delta = 4C_{12}^2(1 - \Gamma^2)(y_2 - y_3)^2. \quad (\text{D.11})$$

En particulier, le discriminant est positif si et seulement si le paramètre  $\Gamma$  est de norme inférieure ou égale à 1. Comme interprété géométriquement précédemment, le système  $\widetilde{\mathbf{E}}_1^k$  admet une unique solution si et seulement si  $\Gamma = \pm 1$ . Dans ce cas, elle est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos\left(\theta_{13} - k\frac{\pi}{2}\right) = \frac{x_2 - x_3}{C_{13} \mp C_{12}}, \\ \cos(\theta_{12} - \theta_{13}) = \pm 1. \end{array} \right. \quad (\text{D.12})$$



Autrement, c'est-à-dire pour  $|\Gamma| < 1$ , le système  $\widetilde{\mathbf{E}}_1^k$  présente deux solutions distinctes. Cependant, une seule est admissible au regard de la convention de numérotation utilisée Fig. D.3. Pour deux paramètres réels  $C_{12}, C_{13} > 0$  assurant  $|\Gamma| < 1$ , le sous-problème  $\widetilde{\mathbf{P}}_1^k$  admet ainsi l'unique solution donnée par

$$\begin{cases} \cos\left(\theta_{13} - k\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\mathbf{B} + (-1)^{\chi_1(k)}\sqrt{\Delta}}{2\mathbf{A}}, \\ \cos(\theta_{12} - \theta_{13}) = \Gamma. \end{cases}, \quad (\text{D.13})$$

où l'expression du paramètre  $\Gamma$  est donnée Éq. (D.6). Les coefficients  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\Delta$  sont définis Éq. (D.8), Éq. (D.9) et Éq. (D.11) respectivement. Enfin, le signe départageant les deux solutions est déterminé selon  $(-1)^{\chi_1(k)} = \text{sgn}(\sin k\pi/2 - \cos k\pi/2)$ . Ce signe dépend ainsi de la valeur de  $k$ , c'est-à-dire de l'orientation du problème en coordonnées polaires relatives. Le bon choix du signe permet de satisfaire la convention de numérotation utilisée. Par conséquent, la fonction caractéristique  $\chi_1$  est définie selon

$$\chi_1(k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k=0, \\ 0, & \text{si } k=1, \\ 0, & \text{si } k=2, \\ 1, & \text{si } k=3. \end{cases}. \quad (\text{D.14})$$

En particulier, il convient de choisir  $(-)$  lorsque  $k = 0$  ou  $3$ , c'est-à-dire lorsque la résolution du sous-problème  $\mathbf{P}_1$  consiste alors à déterminer la position  $f_1$  ou  $f_3$  pour y disposer une fille additionnelle. Sinon il faut choisir  $(+)$ .

Finalement, il est démontré que le sous-problème  $\widetilde{\mathbf{P}}_1^k$  admet une unique solution sous l'hypothèse  $|\Gamma| \leq 1$ . Autrement dit, s'il est supposé que les paramètres  $C_{12}$  et  $C_{13}$  garantissent l'intersection des cercles associés. Par équivalence, le problème  $\mathbf{P}_1$  admet lui aussi une unique solution sous cette même condition.

□

### D.2.3 Sous-problème $\mathbf{P}_{2.1}$

Poursuivons la mise en équations en traitant le sous-problème  $\mathbf{P}_2$ , qui consiste à positionner deux filles additionnelles d'après la configuration spatiale de deux filles pré-existantes. Le sous-problème  $\mathbf{P}_2$  présente deux situations qu'il convient de distinguer. D'une part, le cas  $\mathbf{P}_{2.1}$  où les deux filles pré-existantes connues forment une diagonale du motif à reconstruire. D'autre part, le cas  $\mathbf{P}_{2.2}$  où les deux filles pré-existantes connues forment un côté du quadrilatère dont les sommets sont les filles.

Concentrons-nous sur le cas  $\mathbf{P}_{2.1}$  dans un premier temps. Sans perte de généralité, considérons la configuration spatiale illustrée Fig. D.5, qui consiste à positionner les filles additionnelles  $p_1$  et  $p_4$ .

La position des filles additionnelles est déterminée par un processus analogue au sous-problème  $\mathbf{P}_1$  exposé précédemment. Afin de positionner la fille additionnelle  $p_1$ , on se donne deux paramètres réels éventuellement différents  $C_{12}, C_{13} > 0$ . Le cercle de rayon  $C_{12}$  (resp.  $C_{13}$ ) centré sur la fille pré-existante  $f_2$  (resp.  $f_3$ ) est ensuite représenté. Supposons que ces deux cercles s'intersectent. Il existe alors au plus deux positions admissibles pour la fille additionnelle  $p_1$ . De manière analogue on se donne deux paramètres réels éventuellement différents  $C_{42}, C_{43} > 0$

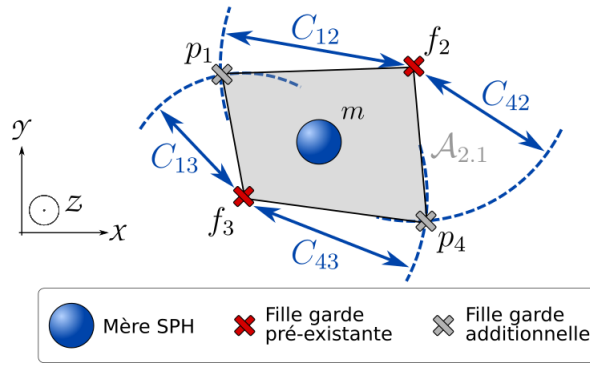


FIGURE D.5 – Illustration du sous-problème  $\mathbf{P}_{2.1}$  dont la résolution consiste à positionner deux filles additionnelles diagonalement opposées en connaissant les positions de deux filles pré-existantes.

pour déterminer les positions admissibles pour la fille additionnelle  $p_4$ . Afin de déterminer les positions  $f_1$  et  $f_4$  finalement retenues, l'aire  $\mathcal{A}_{2.1}(p_1, p_4)$  du quadrilatère dont les sommets sont les filles  $p_1, f_2, f_3$  et  $p_4$  est maximisée. Par conséquent, le sous-problème  $\mathbf{P}_{2.1}$  est formulé selon

$$\mathbf{E}_{2.1} = \mathbf{E}_1 [C_{12}, C_{13}] \times \mathbf{E}_1 [C_{42}, C_{43}], \quad (\text{D.15})$$

$$\mathbf{P}_{2.1} = \left\{ F_1, F_4 \in \mathbb{R}^2, (F_1, F_4) = \arg \max_{(p_1, p_4) \in \mathbf{E}_{2.1}} \mathcal{A}_{2.1}(p_1, p_4) \right\}, \quad (\text{D.16})$$

où l'ensemble  $\mathbf{E}_1$  est défini Éq. (D.1). Sous l'hypothèse de paramètres  $C_{12}$  et  $C_{13}$  (resp.  $C_{42}$  et  $C_{43}$ ) garantissant l'intersection des cercles associés, le sous-problème  $\mathbf{P}_{2.1}$  admet un unique couple solution  $(f_1, f_4)$  qui satisfait la convention de numérotation imposée. La démonstration rigoureuse en est faite ci-après en réutilisant les résultats précédents démontrés pour le sous-problème  $\mathbf{P}_1$ .

### Existence, unicité et expression de la solution analytique

Supposons que les filles pré-existantes  $f_2 = (x_2, y_2)$  et  $f_3 = (x_3, y_3)$  soient connues et organisées selon la configuration présentée Fig. D.5. La résolution du sous-problème  $\mathbf{P}_{2.1}$  consiste alors à déterminer les positions  $f_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$  et  $f_4 = (x_4, y_4) \in \mathbb{R}^2$  pour y disposer les filles additionnelles. Une démarche analogue à celle utilisée dans la démonstration faite dans le cas du sous-problème  $\mathbf{P}_1$  est employée. Le système de coordonnées polaires relatives est introduit Fig. D.4 et Fig. D.6.

Afin de ne pas restreindre la généralité, il suffit de remarquer que de rechercher le couple  $(f_1, f_4)$  est équivalent à chercher le couple  $(f_2, f_3)$  si l'on effectue une rotation d'angle  $-k\pi/2$  dans le plan muni d'un repère orthonormé direct des coordonnées polaires relatives, où  $k$  est défini selon

$$k = \begin{cases} 0, & \text{si le couple } (f_1, f_4) \text{ est recherché,} \\ 1, & \text{si le couple } (f_2, f_3) \text{ est recherché.} \end{cases} \quad (\text{D.17})$$

Supposons connus quatre paramètres réels éventuellement différents  $C_{12}, C_{13}, C_{42}, C_{43} > 0$ . En utilisant les coordonnées polaires relatives introduites Fig. D.4 et Fig. D.6, des équations équivalentes à (D.15) et (D.16) sont formulées afin d'introduire le sous-problème  $\widetilde{\mathbf{P}}_{2.1}^k$  équivalent

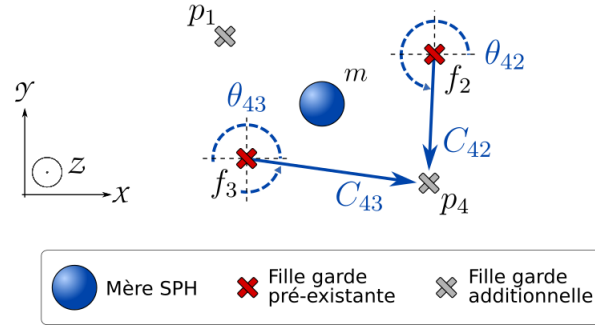


FIGURE D.6 – Sous-problème  $\mathbf{P}_{2.1}$  : Illustration du repère de coordonnées polaires  $(C_{42}, \theta_{42})$  (resp.  $(C_{43}, \theta_{43})$ ) utilisé pour positionner la fille  $p_4$  relativement à la fille  $f_2$  (resp.  $f_3$ ).

à  $\mathbf{P}_{2.1}$ . Pour la suite des développements, on ré-introduit les paramètres  $\Gamma$ ,  $A$ ,  $B$  et  $\Delta$  définis précédemment :

$$\Gamma [C_{l_2}, C_{l_3}] = \frac{C_{l_2}^2 + C_{l_3}^2 - \|\vec{f_2 f_3}\|^2}{2C_{l_2} C_{l_3}}. \quad (\text{D.18})$$

$$A [C_{l_2}, C_{l_3}] = (C_{l_3} - \Gamma C_{l_2})^2 + C_{l_2}^2(1 - \Gamma^2), \quad (\text{D.19})$$

$$B [C_{l_2}, C_{l_3}] = 2(x_3 - x_2)(C_{l_3} - \Gamma C_{l_2}), \quad (\text{D.20})$$

$$\Delta [C_{l_2}, C_{l_3}] = 4C_{l_2}^2(1 - \Gamma^2)(y_2 - y_3)^2, \quad (\text{D.21})$$

avec  $l = 1$  ou  $4$ . En particulier, le discriminant  $\Delta$  est positif et le paramètre  $A$  est strictement positif si et seulement si le paramètre  $\Gamma$  est de norme inférieure ou égale à 1. En ré-utilisant les étapes de calcul réalisées pour le sous-problème  $\mathbf{P}_1$ , on démontre que le sous-problème  $\widetilde{\mathbf{P}}_{2.1}^k$  admet un unique couple solution qui satisfait de plus la convention de numérotation imposée si et seulement si  $|\Gamma [C_{l_2}, C_{l_3}]| \leq 1$  pour  $l = 1$  et  $4$ . Dans ce cas, la solution est donnée par

$$\begin{cases} \cos\left(\theta_{13} - k\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-B [C_{12}, C_{13}] + (-1)^{\chi_{2.1}(k)} \sqrt{\Delta [C_{12}, C_{13}]}{2A [C_{12}, C_{13}]}, \\ \cos(\theta_{12} - \theta_{13}) = \Gamma [C_{12}, C_{13}], \\ \cos\left(\theta_{43} - k\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-B [C_{42}, C_{43}] - (-1)^{\chi_{2.1}(k)} \sqrt{\Delta [C_{42}, C_{43}]}{2A [C_{42}, C_{43}]}, \\ \cos(\theta_{42} - \theta_{43}) = \Gamma [C_{42}, C_{43}]. \end{cases}, \quad (\text{D.22})$$

où le signe devant le terme  $\sqrt{\Delta}$  dépend de la valeur de  $k$ , c'est-à-dire de l'orientation du problème en coordonnées polaires relatives et dont le bon choix permet de satisfaire la convention de numérotation choisie. La fonction caractéristique  $\chi_{2.1}$  est définie selon

$$\chi_{2.1}(k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k=0, \\ 0, & \text{si } k=1. \end{cases}. \quad (\text{D.23})$$

Finalement, il est démontré que le sous-problème  $\widetilde{\mathbf{P}}_{2.1}^k$  admet une unique solution sous l'hypothèse  $|\Gamma [C_{l_2}, C_{l_3}]| \leq 1$  pour  $l = 1$  et  $4$ . Autrement dit, s'il est supposé que les paramètres  $C_{12}$  et  $C_{13}$  (resp.  $C_{42}$  et  $C_{43}$ ) garantissent l'intersection des cercles associés. Par équivalence, le problème  $\mathbf{P}_{2.1}$  admet lui aussi une unique solution sous cette même condition.

□

### D.2.4 Sous-problème $\mathbf{P}_{2.2}$

D'autre part, considérons le sous-problème  $\mathbf{P}_{2.2}$  tel qu'illustré Fig. D.7 sans perdre en généralités, qui consiste à positionner les filles additionnelles  $p_1$  et  $p_3$ .

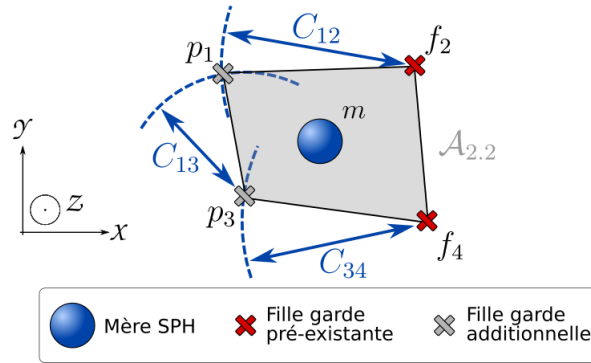


FIGURE D.7 – Illustration du sous-problème  $\mathbf{P}_{2.2}$  dont la résolution consiste à positionner deux filles additionnelles formant un côté du motif à reconstruire dont on a identifié deux filles pré-existantes.

Les positions des filles additionnelles sont déterminées par un processus généralisant la démarche utilisée pour définir le sous-problème  $\mathbf{P}_1$  exposé précédemment. On se donne trois paramètres réels éventuellement différents  $C_{12}, C_{13}, C_{34} > 0$ . L'ensemble des positions admissibles pour la fille additionnelle  $p_3$  forme un cercle de rayon  $C_{34}$  centré sur la fille pré-existante  $f_4$ . Le cercle de rayon  $C_{12}$  (resp.  $C_{13}$ ) centré sur la fille pré-existante  $f_2$  (resp. additionnelle  $p_3$ ) est ensuite représenté. Supposons que ces deux cercles s'intersectent. Il existe alors au plus deux positions admissibles pour la fille additionnelle  $p_1$ . Afin de déterminer les positions  $f_1$  et  $f_3$  finalement retenues, l'aire  $\mathcal{A}_{2.2}(p_1, p_3)$  du quadrilatère dont les sommets sont les filles  $p_1, f_2, p_3$  et  $f_4$  est maximisée. Par conséquent, le sous-problème  $\mathbf{P}_{2.2}$  est formulé selon

$$\mathbf{E}_{2.2}[C_{12}, C_{13}, C_{34}] = \left\{ P_1, P_3 \in \mathbb{R}^2, \left\{ \begin{array}{l} \|\vec{f_2 P_1}\| = C_{12}, \\ \|\vec{P_3 P_1}\| = C_{13}, \\ \|\vec{f_4 P_3}\| = C_{34}. \end{array} \right. \right\}, \quad (\text{D.24})$$

$$\mathbf{P}_{2.2}[C_{12}, C_{13}, C_{34}] = \left\{ F_1, F_3 \in \mathbb{R}^2, (F_1, F_3) = \arg \max_{(p_1, p_3) \in \mathbf{E}_{2.2}} \mathcal{A}_{2.2}(p_1, p_3) \right\}. \quad (\text{D.25})$$

Sous l'hypothèse de paramètres  $C_{12}, C_{13}$  et  $C_{34}$  garantissant l'intersection des cercles associés, le sous-problème  $\mathbf{P}_{2.2}$  admet un unique couple solution  $(f_1, f_3)$  qui satisfait la convention de numérotation imposée. La démonstration rigoureuse en est faite ci-après.

#### Existence, unicité et expression de la solution analytique

Supposons que les filles pré-existantes  $f_2 = (x_2, y_2)$  et  $f_4 = (x_4, y_4)$  soient connues et organisées selon la configuration présentée Fig. D.7. La résolution du sous-problème  $\mathbf{P}_{2.2}$  consiste alors à déterminer les positions  $f_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$  et  $f_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$  pour y disposer les

filles additionnelles. Une généralisation de la démarche utilisée pour la démonstration faite dans le cas du sous-problème  $\mathbf{P}_1$  est employée. Le système de coordonnées polaires relatives est introduit Fig. D.4 et Fig. D.8.

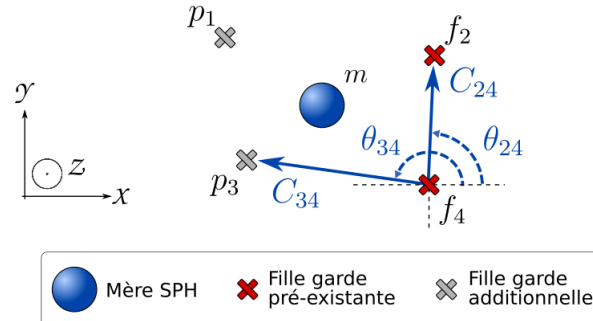


FIGURE D.8 – Sous-problème  $\mathbf{P}_{2.2}$  : Illustration du repère de coordonnées polaires  $(C_{34}, \theta_{34})$  (resp.  $(C_{24}, \theta_{24})$ ) utilisé pour positionner la fille  $p_3$  (resp.  $f_2$ ) relativement à la fille  $f_4$ .

Afin de ne pas restreindre la généralité, il suffit de remarquer que de rechercher le couple  $(f_1, f_3)$  est équivalent à chercher tout autre couple si l'on effectue une rotation d'angle  $-k\pi/2$  dans le plan muni d'un repère orthonormé direct des coordonnées polaires relatives, où  $k$  est défini selon

$$k = \begin{cases} 0, & \text{si le couple } (f_1, f_3) \text{ est recherché,} \\ 1, & \text{si le couple } (f_2, f_1) \text{ est recherché,} \\ 2, & \text{si le couple } (f_4, f_2) \text{ est recherché,} \\ 3, & \text{si le couple } (f_3, f_4) \text{ est recherché.} \end{cases} \quad (\text{D.26})$$

En particulier, rechercher le couple  $(f_1, f_3)$  est équivalent à rechercher  $(f_2, f_1)$  en effectuant une rotation d'angle  $\pi/2$  de l'orientation du repère  $(x, y)$  présenté Fig. D.7. Considérer le sous-problème  $\mathbf{P}_{2.2}$  tel qu'illustré Fig. D.7 s'effectue donc sans restreindre la généralité.

Supposons connus trois paramètres réels éventuellement différents  $C_{12}, C_{13}, C_{34} > 0$ . Par soucis d'alléger les notations, la dépendance à ces paramètres n'est plus explicitée. En utilisant les coordonnées polaires relatives introduites Fig. D.8, des équations équivalentes à (D.24) et (D.25) sont formulées afin d'introduire le sous-problème  $\widetilde{\mathbf{P}}_{2.2}^k$  équivalent à  $\mathbf{P}_{2.2}$  et l'ensemble  $\widetilde{\mathbf{E}}_{2.2}^k$  équivalent à  $\mathbf{E}_{2.2}$ . Pour la suite des développements, on introduit comme précédemment le paramètre  $\Gamma$  défini par :

$$\Gamma(\theta_{34}) = \frac{C_{12}^2 + C_{13}^2 - C_{34}^2 - \|\vec{f}_2 f_4\|^2}{2C_{12}C_{13}} + \frac{C_{34} \|\vec{f}_2 f_4\|}{C_{12}C_{13}} \cos(\theta_{34} - \theta_{24}). \quad (\text{D.27})$$

Cette définition est une généralisation de celle énoncée Éq. (D.6) où la distance  $\|\vec{f}_2 f_3\|^2$  est explicitée par la relation d'Al-Kashi. De plus, les coordonnées cartésiennes  $(x_2, y_2)$  sont ré-exprimées dans le repère des coordonnées polaires relatives  $(C_{24} = \|\vec{f}_2 f_4\|, \theta_{24})$  par rapport à la fille pré-existante  $f_4$ . Précisons que l'angle  $\theta_{24} \in [0, 2\pi[$  est connu car les positions des filles  $f_2$  et  $f_4$  sont connues. Ainsi, la fonction  $\Gamma$  dépend d'une unique variable  $\theta_{34}$  et des trois hyperparamètres  $C_{12}, C_{13}$  et  $C_{34}$ . Pour aller plus loin, supposons de même que précédemment que

$|\Gamma(\theta_{34})| \leq 1$ . Autrement dit, on suppose que les paramètres  $C_{12}$  et  $C_{13}$  garantissent l'intersection des cercles associés tout en tenant compte du degré de liberté  $\theta_{34}$ . Sous cette hypothèse et en réutilisant certains résultats précédents démontrés pour le sous-problème  $\mathbf{P}_1$ , on introduit les paramètres  $A > 0$ ,  $B$  et  $\Delta \geq 0$  définis comme suit.

$$A(\theta_{34}) = (C_{13} - \Gamma(\theta_{34})C_{12})^2 + C_{12}^2 (1 - \Gamma(\theta_{34})^2) , \quad (\text{D.28})$$

$$B(\theta_{34}) = 2(x_4 - x_2 + C_{34} \cos(\theta_{34} - k\frac{\pi}{2}))(C_{13} - \Gamma(\theta_{34})C_{12}) , \quad (\text{D.29})$$

$$\Delta(\theta_{34}) = 4C_{12}^2 (1 - \Gamma(\theta_{34})^2) (C_{34} \sin(\theta_{34} - k\frac{\pi}{2}) - y_2)^2 . \quad (\text{D.30})$$

En particulier, ces définitions correspondent respectivement à celles données Éq. (D.8), (D.9) et (D.11) en exprimant les coordonnées cartésiennes  $(x_3, y_3)$  dans le repère des coordonnées polaires relatives  $(C_{34}, \theta_{34})$  par rapport à la fille pré-existante  $f_4$ . En ré-utilisant les étapes de calcul réalisées pour le sous-problème  $\mathbf{P}_1$ , on démontre alors que le système  $\widetilde{\mathbf{E}}_{2,2}^k$  admet une unique couple solution à  $\theta_{34}$  près qui satisfait de plus la convention de numérotation imposée si et seulement si  $|\Gamma(\theta_{34})| \leq 1$ . Dans ce cas, l'ensemble  $\widetilde{\mathbf{E}}_{2,2}^k$  se réduit à

$$\widetilde{\mathbf{E}}_{2,2}^k = \left\{ (\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{34}) \in [0, 2\pi]^3 , \right. \\ \left. \left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta_{13} - k\frac{\pi}{2}) = \frac{-B(\theta_{34}) + (-1)^{\chi_{2,2}(k)} \sqrt{\Delta(\theta_{34})}}{2A(\theta_{34})} , \\ \cos(\theta_{12} - \theta_{13}) = \Gamma(\theta_{34}) . \end{array} \right. \right\} , \quad (\text{D.31})$$

où le signe devant le terme  $\sqrt{\Delta}$  dépend de la valeur de  $k$ , c'est-à-dire de l'orientation du problème en coordonnées polaires relatives et dont le bon choix permet de satisfaire la convention de numérotation choisie. La fonction caractéristique  $\chi_{2,2}$  est définie selon

$$\chi_{2,2}(k) = \chi_1(k) = \begin{cases} 1 , & \text{si } k=0, \\ 0 , & \text{si } k=1, \\ 0 , & \text{si } k=2, \\ 1 , & \text{si } k=3. \end{cases} . \quad (\text{D.32})$$

Dans le paragraphe précédent, il a été démontré que le système  $\widetilde{\mathbf{E}}_{2,2}^k$  admet au moins une solution, si et seulement si les hyper-paramètres  $C_{12}$ ,  $C_{13}$  et  $C_{34}$  et la variable  $\theta_{34}$  assurent  $|\Gamma(\theta_{34})| \leq 1$ . Montrons alors l'unicité de la solution d'aire maximale au sous-problème  $\mathbf{P}_{2,2}^k$ . Pour cela, on utilise la formule de Bretschneider pour exprimer l'aire  $\mathcal{A}_{2,2}$  du quadrilatère selon

$$\mathcal{A}_{2,2}^2 = (S - C_{12})(S - C_{13})(S - C_{34})(S - \|\vec{f}_2 \vec{f}_4\|) \\ - C_{12} C_{13} C_{34} \|\vec{f}_2 \vec{f}_4\| \cos^2 \left( \frac{(\theta_{13} - \theta_{34}) + (\theta_{24} - \theta_{12})}{2} \right) , \quad (\text{D.33})$$

où le paramètre  $S = (C_{12} + C_{13} + C_{34} + \|\vec{f}_2 \vec{f}_4\|) / 2$  est le demi-périmètre du quadrilatère. Ainsi, maximiser l'aire  $\mathcal{A}_{2,2}$  est équivalent à minimiser le terme en cosinus Éq. (D.33). Ce

terme se réécrit uniquement en fonction de l'inconnue  $\theta_{34}$ , en utilisant la relation (D.31) qui lie  $\cos(\theta_{12} - \theta_{13})$  au paramètre  $\Gamma$ , i.e.

$$\cos^2 \left( \frac{(\theta_{13} - \theta_{34}) + (\theta_{24} - \theta_{12})}{2} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 + \Gamma(\theta_{34}) \cos(\theta_{34} - \theta_{24}) - \sin(\arccos \Gamma(\theta_{34})) \sin(\theta_{34} - \theta_{24}) \right). \quad (D.34)$$

Pour aller encore plus loin dans la ré-écriture du terme en cosinus de la formule (D.33), notons pour la suite  $X = \cos(\theta_{34} - \theta_{24})$ . Par ailleurs, ce changement de variable appliqué à la fonction  $\Gamma(\theta_{34})$  définie Éq. (D.27) permet de définir une nouvelle fonction dont  $X$  est la seule variable. Afin d'alléger les notations, appelons  $\Gamma(X)$  le résultat de cette opération. De plus, par opérations sur les cosinus et sinus, on est en droit d'écrire que

$$\sin(\theta_{34} - \theta_{24}) = \pm \sqrt{1 - X^2}, \quad (D.35)$$

$$\sin(\arccos \Gamma(X)) = \pm \sqrt{1 - \Gamma(X)^2}. \quad (D.36)$$

Sans perte de généralité, la convention de numérotation adoptée permet de déterminer les signes à utiliser. Ainsi, les relations précédentes se simplifient en

$$\sin(\theta_{34} - \theta_{24}) = \sqrt{1 - X^2}, \quad (D.37)$$

$$\sin(\arccos \Gamma(X)) = \sqrt{1 - \Gamma(X)^2}. \quad (D.38)$$

La relation (D.34) devient alors

$$\cos^2 \left( \frac{(\theta_{13} - \theta_{34}) + (\theta_{24} - \theta_{12})}{2} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 + \Gamma(X)X - \sqrt{1 - \Gamma(X)^2} \sqrt{1 - X^2} \right). \quad (D.39)$$

Cette relation est uniquement dépendante de  $X = \cos(\theta_{34} - \theta_{24})$ . Rappelons que l'angle  $\theta_{24} \in [0, 2\pi[$  est une donnée connue. Dans ce cas, chercher  $\theta_{34} \in [0, 2\pi[$  maximisant l'aire  $\mathcal{A}_{2,2}$  est équivalent à chercher les valeurs de  $X$  annulant le membre de droite de l'équation de (D.39). Autrement dit, cherchons les solutions de l'équation suivante

$$1 + X\Gamma(X) - \sqrt{1 - X^2} \sqrt{1 - \Gamma(X)^2} = 0. \quad (D.40)$$

Résoudre cette équation est équivalent à résoudre l'équation

$$(X + \Gamma(X))^2 = 0. \quad (D.41)$$

Cette dernière admet pour unique solution

$$X = \frac{C_{34}^2 + \left\| \vec{f}_2 \vec{f}_4 \right\|^2 - C_{12}^2 - C_{13}^2}{2(C_{12}C_{13} + C_{34} \left\| \vec{f}_2 \vec{f}_4 \right\|)}. \quad (D.42)$$

Sous l'hypothèse  $\Gamma(X) \in [-1, 1]$ , cette solution est admissible. En particulier, cette solution annule le cosinus de la formule de Bretschneider Éq. (D.33). Géométriquement, cette solution



est donc un quadrilatère d'aire maximale. Il y a donc équivalence entre  $\Gamma(X) \in [-1, 1]$  et l'existence d'une unique solution au sous-problème  $\widetilde{\mathbf{P}}_{2.2}^k$ . De plus, son expression analytique est

$$\begin{cases} \cos\left(\theta_{13} - k\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\mathbf{B}(\theta_{34}) + (-1)^{\chi_{2.2}(k)}\sqrt{\Delta(\theta_{34})}}{2\mathbf{A}(\theta_{34})}, \\ \cos(\theta_{12} - \theta_{13}) = \Gamma(\theta_{34}), \\ \cos(\theta_{34} - \theta_{24}) = \frac{C_{34}^2 + \|\vec{f_2 f_4}\|^2 - C_{12}^2 - C_{13}^2}{2(C_{12}C_{13} + C_{34}\|\vec{f_2 f_4}\|)}. \end{cases}, \quad (\text{D.43})$$

avec  $\theta_{24} \in [0, 2\pi[$  connu. L'expression du paramètre  $\Gamma$  est donnée Éq. (D.27). Les coefficients  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\Delta$  sont définis Éq. (D.28), Éq. (D.29) et Éq. (D.30) respectivement. Enfin, la définition du terme  $\chi_{2.2}$  est donnée Éq. (D.32).

Finalement, il est démontré que le sous-problème  $\widetilde{\mathbf{P}}_{2.2}^k$  admet une unique solution sous l'hypothèse  $|\Gamma(\theta_{34})| \leq 1$ . Autrement dit, s'il est supposé que les paramètres  $C_{12}$ ,  $C_{13}$  et  $C_{34}$  permettent l'intersection des cercles associés. Par équivalence, le problème  $\mathbf{P}_{2.2}$  admet lui aussi une unique solution sous cette même condition.

□

### D.2.5 Sous-problème $\mathbf{P}_3$

Sans perte de généralité, considérons à présent le sous-problème  $\mathbf{P}_3$  tel qu'illustré Fig. D.9, qui consiste à positionner les trois filles additionnelles  $p_1$ ,  $p_2$  et  $p_3$ .

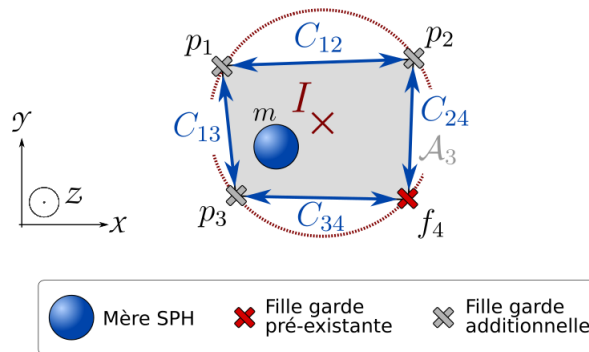


FIGURE D.9 – Illustration du sous-problème  $\mathbf{P}_3$  dont la résolution consiste à positionner trois filles additionnelles en ayant identifié une seule fille pré-existante.

Les positions des filles additionnelles sont déterminées par un processus généralisant la démarche utilisée pour définir le sous-problème  $\mathbf{P}_{2.2}$  exposé précédemment, car une fille additionnelle de plus est à positionner. On se donne quatre paramètres réels éventuellement différents  $C_{12}$ ,  $C_{13}$ ,  $C_{34}$ ,  $C_{24} > 0$ . L'ensemble des positions admissibles pour la fille additionnelle  $p_2$  (resp.  $p_3$ ) forme un cercle de rayon  $C_{24}$  (resp.  $C_{34}$ ) centré sur la fille pré-existante  $f_4$ . Le cercle de rayon  $C_{12}$  (resp.  $C_{13}$ ) centré sur la fille additionnelle  $p_2$  (resp.  $p_3$ ) est ensuite représenté. Supposons que ces deux cercles s'intersectent. Il existe alors au plus deux positions admissibles pour la

filles additionnelle  $p_1$ , solutions du système d'équations suivant

$$\mathbf{E}_3 [C_{12}, C_{13}, C_{34}, C_{24}] = \left\{ P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2, \left\{ \begin{array}{l} \|\overrightarrow{P_2 P_1}\| = C_{12}, \\ \|\overrightarrow{P_3 P_1}\| = C_{13}, \\ \|\overrightarrow{f_4 P_2}\| = C_{24}, \\ \|\overrightarrow{f_4 P_3}\| = C_{34}. \end{array} \right. \right\}. \quad (\text{D.44})$$

Afin de déterminer les positions  $f_1, f_2$  et  $f_3$  finalement retenues, l'aire  $\mathcal{A}_3(p_1, p_2, p_3)$  du quadrilatère dont les sommets sont les filles  $p_1, p_2, p_3$  et  $f_4$  est maximisée selon

$$\mathbf{F}_3 [C_{12}, C_{13}, C_{34}, C_{24}] = \left\{ G_1, G_2, G_3 \in \mathbb{R}^2, \right. \\ \left. (G_1, G_2, G_3) = \arg \max_{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbf{E}_3} \mathcal{A}_3(p_1, p_2, p_3) \right\}. \quad (\text{D.45})$$

Le dernier degré de liberté à contraindre est la rotation autour de la fille pré-existante  $f_4$ . Les développements du sous-problème  $\mathbf{P}_{2.2}$  ont démontré l'existence d'une solution d'aire  $\mathcal{A}_{2.2}$  maximale. De manière analogue, il existe un quadrilatère solution d'aire  $\mathcal{A}_3$  maximale. Un tel quadrilatère présente la particularité d'être inscrit dans un cercle. Soit  $I$  son centre. Dans ce contexte, minimiser la distance entre  $I$  et la mère associée  $m$  assure l'unicité de la solution. Par conséquent, le sous-problème  $\mathbf{P}_3$  est formulé selon

$$\mathbf{P}_3 [C_{12}, C_{13}, C_{34}, C_{24}] = \left\{ F_1, F_2, F_3 \in \mathbb{R}^2, \right. \\ \left. (F_1, F_2, F_3) = \arg \min_{(g_1, g_2, g_3) \in \mathbf{F}_3} \frac{1}{2} \|\overrightarrow{\mathbf{x}_I \mathbf{x}_m}\|^2 \right\}. \quad (\text{D.46})$$

Sous l'hypothèse de paramètres  $C_{12}, C_{13}, C_{34}$  et  $C_{24}$  garantissant l'intersection des cercles associés, le sous-problème  $\mathbf{P}_3$  admet un unique triplet solution  $(f_1, f_2, f_3)$  qui satisfait la convention de numérotation imposée et minimise la distance entre  $I$  et  $m$ . La démonstration rigoureuse en est faite ci-après.

### Existence, unicité et expression de la solution analytique

Supposons que la fille pré-existante  $f_4 = (x_4, y_4)$  soit connue et positionnée selon la configuration présentée Fig. D.9. La résolution du sous-problème  $\mathbf{P}_3$  consiste alors à déterminer les positions  $f_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$  et  $f_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$  pour y disposer les filles additionnelles. Une généralisation de la démarche utilisée dans la démonstration faite dans le cas du sous-problème  $\mathbf{P}_{2.2}$  est employée. Le système de coordonnées polaires relatives est introduit Fig. D.4, Fig. D.8 et Fig. D.10.

Afin de ne pas restreindre la généralité, il suffit de remarquer que de rechercher le triplet  $(f_1, f_2, f_3)$  est équivalent à chercher tout autre triplet si l'on effectue une rotation d'angle  $-k\pi/2$  dans le plan muni d'un repère orthonormé direct des coordonnées polaires relatives, où  $k$  est

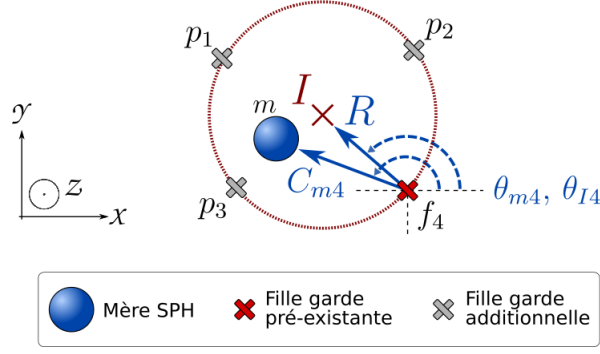


FIGURE D.10 – Sous-problème  $\mathbf{P}_3$  : Illustration du repère de coordonnées polaires  $(C_{m4}, \theta_{m4})$  (resp.  $(R, \theta_{I4})$ ) utilisé pour positionner la mère  $m$  (resp. le centre  $I$ ) relativement à la fille  $f_4$ .

défini selon

$$k = \begin{cases} 0, & \text{si le triplet } (f_1, f_2, f_3) \text{ est recherché,} \\ 1, & \text{si le triplet } (f_2, f_4, f_1) \text{ est recherché,} \\ 2, & \text{si le triplet } (f_4, f_3, f_2) \text{ est recherché,} \\ 3, & \text{si le triplet } (f_3, f_1, f_4) \text{ est recherché.} \end{cases} \quad (\text{D.47})$$

En particulier, rechercher le triplet  $(f_1, f_2, f_3)$  est équivalent à rechercher  $(f_2, f_4, f_1)$  en effectuant une rotation d'angle  $\pi/2$  de l'orientation du repère  $(x, y)$  présenté Fig. D.10. Considérer le sous-problème  $\mathbf{P}_3$  tel qu'illustré Fig. D.10 s'effectue donc sans perte de généralité.

Supposons connus quatre paramètres réels éventuellement différents  $C_{12}, C_{13}, C_{34}, C_{24} > 0$ . Par soucis d'alléger les notations, la dépendance à ces paramètres n'est plus explicitée. En utilisant les coordonnées polaires relatives introduites Fig. D.10, des équations équivalentes à (D.44), (D.45) et (D.46) sont formulées afin d'introduire le sous-problème  $\widetilde{\mathbf{P}}_3^k$  équivalent à  $\mathbf{P}_3$  et l'ensemble  $\widetilde{\mathbf{F}}_3^k$  (resp.  $\widetilde{\mathbf{E}}_3^k$ ) équivalent à  $\mathbf{F}_3$  (resp.  $\mathbf{E}_3$ ). Pour la suite des développements, on introduit comme précédemment le paramètre  $\Gamma$  défini par :

$$\Gamma(\theta_{34} - \theta_{24}) = \frac{C_{12}^2 + C_{13}^2 - C_{34}^2 - C_{24}^2}{2C_{12}C_{13}} + \frac{C_{34}C_{24}}{C_{12}C_{13}} \cos(\theta_{34} - \theta_{24}). \quad (\text{D.48})$$

La définition ci-dessus est une généralisation de celle énoncée Éq. (D.27) car l'angle  $\theta_{24} \in [0, 2\pi[$  est inconnu. Ainsi, la fonction  $\Gamma$  dépend conjointement des variables  $\theta_{34}$  et  $\theta_{24}$ . Pour aller plus loin, supposons de même que précédemment que  $|\Gamma(\theta_{34} - \theta_{24})| \leq 1$ . Autrement dit, on suppose que les paramètres  $C_{12}$  et  $C_{13}$  garantissent l'intersection des cercles associés tout en tenant compte des degrés de liberté  $\theta_{34}$  et  $\theta_{24}$ . Sous cette hypothèse et en réutilisant certains résultats précédents démontrés pour le sous-problème  $\mathbf{P}_{2,2}$ , on introduit les paramètres  $A > 0$ ,  $B$  et  $\Delta \geq 0$  définis comme suit.

$$A(\theta_{34}, \theta_{24}) = (C_{13} - \Gamma(\theta_{34} - \theta_{24})C_{12})^2 + C_{12}^2(1 - \Gamma(\theta_{34} - \theta_{24}))^2, \quad (\text{D.49})$$

$$B(\theta_{34}, \theta_{24}) = 2 \left( C_{34} \cos\left(\theta_{34} - k\frac{\pi}{2}\right) - C_{24} \cos\left(\theta_{24} - k\frac{\pi}{2}\right) \right) (C_{13} - \Gamma(\theta_{34} - \theta_{24})C_{12}), \quad (\text{D.50})$$

$$\Delta(\theta_{34}, \theta_{24}) = 4C_{12}^2(1 - \Gamma(\theta_{34} - \theta_{24}))^2 \left( C_{34} \sin\left(\theta_{34} - k\frac{\pi}{2}\right) - C_{24} \sin\left(\theta_{24} - k\frac{\pi}{2}\right) \right)^2. \quad (\text{D.51})$$

En particulier, ces définitions correspondent respectivement à celles données Éq. (D.28), (D.29) et (D.30) en exprimant les coordonnées cartésiennes  $(x_2, y_2)$  dans le repère des coordonnées

polaires relatives  $(C_{24}, \theta_{24})$  par rapport à la fille pré-existante  $f_4$ . En ré-utilisant les étapes de calcul réalisées pour le sous-problème  $\mathbf{P}_{2,2}$ , on démontre alors que le système  $\widetilde{\mathbf{F}}_3^k$  admet une unique triplet solution à  $\theta_{24}$  près qui satisfait de plus la convention de numérotation imposée si et seulement si  $|\Gamma(\theta_{34} - \theta_{24})| \leq 1$ . Dans ce cas, l'ensemble  $\widetilde{\mathbf{F}}_3^k$  se réduit à

$$\widetilde{\mathbf{F}}_3^k = \left\{ (\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{34}, \theta_{24}) \in [0, 2\pi[^4, \right. \\ \left. \begin{cases} \cos\left(\theta_{13} - k\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\mathbf{B}(\theta_{34}, \theta_{24}) + (-1)^{\chi_3(k)}\sqrt{\Delta(\theta_{34}, \theta_{24})}}{2\mathbf{A}(\theta_{34}, \theta_{24})}, \\ \cos(\theta_{12} - \theta_{13}) = \Gamma(\theta_{34} - \theta_{24}), \\ \cos(\theta_{34} - \theta_{24}) = \frac{C_{34}^2 + C_{24}^2 - C_{12}^2 - C_{13}^2}{2(C_{12}C_{13} + C_{34}C_{24})}. \end{cases} \right\}, \quad (\text{D.52})$$

où le signe devant le terme  $\sqrt{\Delta}$  dépend de la valeur de  $k$ , c'est-à-dire de l'orientation du problème en coordonnées polaires relatives et dont le bon choix permet de satisfaire la convention de numérotation choisie. La fonction caractéristique  $\chi_3$  est définie selon

$$\chi_3(k) = \chi_1(k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k=0, \\ 0, & \text{si } k=1, \\ 0, & \text{si } k=2, \\ 1, & \text{si } k=3. \end{cases} \quad (\text{D.53})$$

Dans le paragraphe précédant, il a été démontré que le système  $\widetilde{\mathbf{F}}_3^k$  admet au moins un quadrilatère solution d'aire  $\mathcal{A}_3$  maximale, si et seulement si  $|\Gamma(\theta_{34} - \theta_{24})| \leq 1$ . En particulier, un tel quadrilatère présente la particularité d'être inscrit dans un cercle de rayon  $R$  défini par

$$R = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(C_{12}C_{24} + C_{13}C_{34})(C_{12}C_{34} + C_{13}C_{24})(C_{12}C_{13} + C_{24}C_{34})}{(S - C_{12})(S - C_{13})(S - C_{34})(S - C_{24})}}, \quad (\text{D.54})$$

où le paramètre  $S = (C_{12} + C_{13} + C_{34} + C_{24})/2$  est le demi-périmètre du quadrilatère. Soit  $I$  le centre de son cercle circonscrit. Montrons alors l'unicité du quadrilatère solution du sous-problème  $\widetilde{\mathbf{P}}_3^k$  où la distance entre  $I$  et la mère associée  $m$  est minimale. Par opérations sur les normes, le terme  $\|\overrightarrow{\mathbf{x}_I \mathbf{x}_m}\|^2/2$  à minimiser se réécrit en faisant intervenir la position  $f_4$ . Sachant que  $R = \|\overrightarrow{\mathbf{x}_I f_4}\|$ , on obtient alors que

$$\frac{1}{2} \|\overrightarrow{\mathbf{x}_I \mathbf{x}_m}\|^2 = \frac{1}{2} \left( R^2 + \|\overrightarrow{f_4 \mathbf{x}_m}\|^2 \right) - \overrightarrow{f_4 \mathbf{x}_I} \cdot \overrightarrow{f_4 \mathbf{x}_m}, \quad (\text{D.55})$$

avec le terme  $-\overrightarrow{f_4 \mathbf{x}_I} \cdot \overrightarrow{f_4 \mathbf{x}_m} \leq 0$  par convention. Le minimiser est équivalent à minimiser  $\|\overrightarrow{\mathbf{x}_I \mathbf{x}_m}\|^2/2$  puisque la fille  $f_4$  et la mère  $m$  sont imposées dans cette étude. Par ailleurs, l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous offre une borne inférieure, i.e.  $-R \|\overrightarrow{f_4 \mathbf{x}_m}\| \leq -\overrightarrow{f_4 \mathbf{x}_I} \cdot \overrightarrow{f_4 \mathbf{x}_m}$ . De plus, cette inégalité devient une égalité lorsque les vecteurs  $\overrightarrow{f_4 \mathbf{x}_I}$  et  $\overrightarrow{f_4 \mathbf{x}_m}$  sont colinéaires. Or, en utilisant les coordonnées polaires relatives, assurer la colinéarité des vecteurs  $\overrightarrow{f_4 \mathbf{x}_I}$  et  $\overrightarrow{f_4 \mathbf{x}_m}$  équivaut à  $\theta_{m4} = \theta_{I4}$ . Ainsi, minimiser  $\|\overrightarrow{\mathbf{x}_I \mathbf{x}_m}\|^2/2$  est équivalent à  $\theta_{m4} = \theta_{I4}$ . On fait

alors apparaît l'angle  $\theta_{24}$  de part et d'autre de cette équation. Par convention, on sait que  $\theta_{m4} - \theta_{24} \in [0, \pi]$ . Appliquer la bijection cosinus assure donc que  $\cos(\theta_{m4} - \theta_{24}) \in [-1, 1]$ . Sous l'hypothèse  $|\Gamma(\theta_{34} - \theta_{24})| \leq 1$ , le théorème d'Al-Kashi permet d'écrire la relation suivante

$$\cos(\theta_{m4} - \theta_{24}) = \frac{C_{24}}{2R}. \tag{D.56}$$

En bref, minimiser  $\|\overrightarrow{\mathbf{x}_I \mathbf{x}_m}\|^2 / 2$  est alors équivalent à choisir l'angle  $\theta_{24}$  satisfaisant (D.56). Ainsi, il y a unicité de la solution si et seulement si  $|\Gamma(\theta_{34} - \theta_{24})| \leq 1$ . Il y a donc équivalence entre  $|\Gamma(\theta_{34} - \theta_{24})| \leq 1$  et l'existence d'un unique quadrilatère solution du sous-problème  $\widetilde{\mathbf{P}}_3^k$ . De plus, son expression analytique est donnée par

$$\begin{cases} \cos\left(\theta_{13} - k\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{-\mathbf{B}(\theta_{34}, \theta_{24}) + (-1)^{\chi_3(k)} \sqrt{\Delta(\theta_{34}, \theta_{24})}}{2\mathbf{A}(\theta_{34}, \theta_{24})}, \\ \cos(\theta_{12} - \theta_{13}) &= \Gamma(\theta_{34} - \theta_{24}), \\ \cos(\theta_{34} - \theta_{24}) &= \frac{C_{34}^2 + C_{24}^2 - C_{12}^2 - C_{13}^2}{2(C_{12}C_{13} + C_{34}C_{24})}, \\ \cos(\theta_{m4} - \theta_{24}) &= \frac{C_{24}}{2R}. \end{cases}, \tag{D.57}$$

avec  $\theta_{m4} \in [0, 2\pi[$  connu. Les coefficients  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\Delta$  sont définis Éq. (D.49), Éq. (D.50) et Éq. (D.51) respectivement. La définition du terme  $\chi_3$  est donnée Éq. (D.53). L'expression du paramètre  $\Gamma$  est donnée Éq. (D.48). Enfin, le rayon  $R$  est défini Éq. (D.54).

Finalement, il est démontré que le sous-problème  $\widetilde{\mathbf{P}}_3^k$  admet une unique solution minimisant  $\|\overrightarrow{\mathbf{x}_I \mathbf{x}_m}\|^2 / 2$  sous l'hypothèse  $|\Gamma(\theta_{34} - \theta_{24})| \leq 1$ . Autrement dit, s'il est supposé que les paramètres  $C_{12}$ ,  $C_{13}$ ,  $C_{34}$  et  $C_{24}$  permettent l'intersection des cercles associés. Par équivalence, le problème  $\mathbf{P}_3$  admet lui aussi une unique solution sous ces mêmes conditions.

□

### D.2.6 Sous-problème $\mathbf{P}_4$

Sans perdre de généralité, terminons par la mise en équations du sous-problème  $\mathbf{P}_4$  tel qu'illustré Fig. D.11, qui consiste à positionner les quatre filles additionnelles  $p_1, p_2, p_3$  et  $p_4$ .

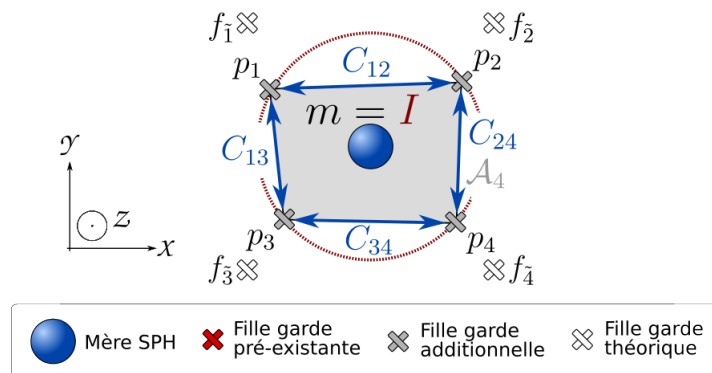


FIGURE D.11 – Illustration du sous-problème  $\mathbf{P}_4$  dont la résolution consiste à positionner quatre filles additionnelles en ayant identifié aucune fille pré-existante.

Les positions des filles additionnelles sont déterminées par un processus généralisant la démarche utilisée pour définir le sous-problème  $\mathbf{P}_3$  exposé précédemment, car une fille additionnelle de plus est à positionner. On se donne quatre paramètres réels éventuellement différents  $C_{12}, C_{13}, C_{34}, C_{24} > 0$ . L'ensemble des positions admissibles pour la fille additionnelle  $p_2$  (resp.  $p_3$ ) forme un cercle de rayon  $C_{24}$  (resp.  $C_{34}$ ) centré sur la fille additionnelle  $p_4$ . Le cercle de rayon  $C_{12}$  (resp.  $C_{13}$ ) centré sur la fille additionnelle  $p_2$  (resp.  $p_3$ ) est ensuite représenté. Supposons que ces deux cercles s'intersectent. Il existe alors au plus deux positions admissibles pour la fille additionnelle  $p_1$ , solutions du système d'équations suivant

$$\mathbf{E}_4 [C_{12}, C_{13}, C_{34}, C_{24}] = \left\{ P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{R}^2, \left\{ \begin{array}{l} \|\overrightarrow{P_2 P_1}\| = C_{12}, \\ \|\overrightarrow{P_3 P_1}\| = C_{13}, \\ \|\overrightarrow{P_4 P_2}\| = C_{24}, \\ \|\overrightarrow{P_4 P_3}\| = C_{34}. \end{array} \right. \right\}. \quad (\text{D.58})$$

Afin de déterminer les positions  $f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$  finalement retenues, l'aire  $\mathcal{A}_4(p_1, p_2, p_3, p_4)$  du quadrilatère dont les sommets sont les filles  $p_1, p_2, p_3$  et  $p_4$  est maximisée selon

$$\mathbf{F}_4 [C_{12}, C_{13}, C_{34}, C_{24}] = \left\{ G_1, G_2, G_3, G_4 \in \mathbb{R}^2, \right. \\ \left. (G_1, G_2, G_3, G_4) = \arg \max_{(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbf{E}_4} \mathcal{A}_4(p_1, p_2, p_3, p_4) \right\}. \quad (\text{D.59})$$

Les développements du sous-problème  $\mathbf{P}_3$  ont démontré l'existence d'une solution d'aire  $\mathcal{A}_3$  maximale. De manière analogue, il existe un quadrilatère solution d'aire  $\mathcal{A}_4$  maximale. En particulier, un tel quadrilatère présente la particularité d'être inscrit dans un cercle. Soit  $I$  son centre. Dans ce contexte, minimiser la distance entre  $I$  et la mère associée  $m$  permet de contraindre la rotation autour de la fille additionnelle  $p_4$ . L'ensemble résultant s'écrit alors

$$\mathbf{G}_4 [C_{12}, C_{13}, C_{34}, C_{24}] = \left\{ Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \in \mathbb{R}^2, \right. \\ \left. (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \arg \min_{(g_1, g_2, g_3, g_4) \in \mathbf{F}_4} \frac{1}{2} \|\overrightarrow{\mathbf{x}_I \mathbf{x}_m}\|^2 \right\}. \quad (\text{D.60})$$

Le dernier degré de liberté à contraindre est la rotation du quadrilatère autour du centre  $I$  de son cercle circonscrit. Connaissant la position  $\mathbf{x}_m$  de la mère  $m$ , les positions théoriques des filles organisées selon le schéma cartésien [69] utilisé pour l'HAPR sont connues. Notons les  $f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$  en respect de la convention de numérotation choisie. On recherche alors la position  $f_4$  minimisant la distance entre  $p_4$  et  $f_4$ , ce qui assure l'unicité de la solution. Par conséquent, le sous-problème  $\mathbf{P}_4$  est formulé selon

$$\mathbf{P}_4 [C_{12}, C_{13}, C_{34}, C_{24}] = \left\{ F_1, F_2, F_3, F_4 \in \mathbb{R}^2, \right. \\ \left. (F_1, F_2, F_3, F_4) = \arg \min_{(g_1, g_2, g_3, g_4) \in \mathbf{G}_4} \frac{1}{2} \|\overrightarrow{g_4 f_4}\|^2 \right\}. \quad (\text{D.61})$$

Sous l'hypothèse de paramètres  $C_{12}$ ,  $C_{13}$ ,  $C_{34}$  et  $C_{24}$  garantissant l'intersection des cercles associés, le sous-problème  $\mathbf{P}_4$  admet un unique quadruplet solution  $(f_1, f_2, f_3, f_4)$  qui satisfait la convention de numérotation imposée, minimise la distance entre  $I$  et  $m$  et minimise également la distance entre  $f_4$  et  $f_4$ . La démonstration rigoureuse en est faite ci-après.

### Existence, unicité et expression de la solution analytique

La résolution du sous-problème  $\mathbf{P}_4$  consiste à déterminer les positions  $f_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$  et  $f_4 = (x_4, y_4) \in \mathbb{R}^2$  pour y disposer les filles additionnelles. Une généralisation de la démarche utilisée dans la démonstration faite pour le cas du sous-problème  $\mathbf{P}_3$  est employée. Le système de coordonnées polaires relatives est introduit Fig. D.4, Fig. D.8, Fig. D.10 et Fig. D.12.

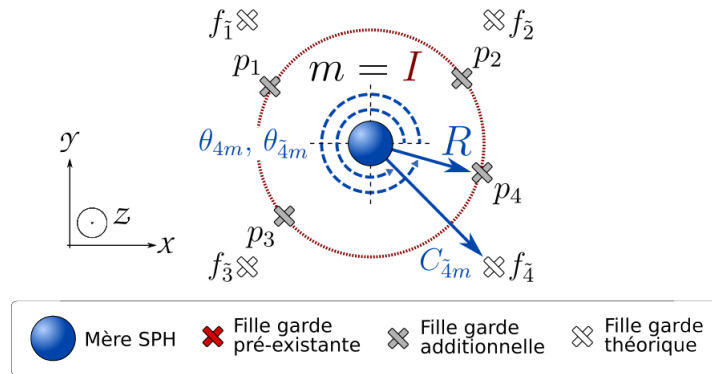


FIGURE D.12 – Sous-problème  $\mathbf{P}_4$  : Illustration du repère de coordonnées polaires  $(C_{4m}, \theta_{4m})$  (resp.  $(C_{\tilde{4}m}, \theta_{\tilde{4}m})$ ) utilisé pour positionner la fille additionnelle  $f_4$  (resp. la fille théorique  $f_4$ ) relativement à la mère  $m$ .

Supposons connus quatre paramètres réels éventuellement différents  $C_{12}$ ,  $C_{13}$ ,  $C_{34}$ ,  $C_{24} > 0$ . Par soucis d'alléger les notations, la dépendance à ces paramètres n'est plus explicitée. En utilisant les coordonnées polaires relatives introduites Fig. D.12, des équations équivalentes à (D.58), (D.59), (D.60) et (D.61) sont formulées afin d'introduire le sous-problème  $\widetilde{\mathbf{P}}_4$  équivalent à  $\mathbf{P}_4$  et les ensembles  $\widetilde{\mathbf{G}}_4$  (resp.  $\widetilde{\mathbf{F}}_4, \widetilde{\mathbf{E}}_4$ ) équivalent à  $\mathbf{G}_4$  (resp.  $\mathbf{F}_4, \mathbf{E}_4$ ).

En ré-utilisant les étapes de calcul réalisées pour le sous-problème  $\mathbf{P}_3$ , on démontre alors que l'ensemble  $\widetilde{\mathbf{G}}_4$  se réduit à l'unique quadrilatère (à  $\theta_{4m} \in [0, 2\pi[$  près) solution de  $\widetilde{\mathbf{P}}_3^0$  donnée Éq. (D.57), si et seulement si  $|\Gamma(\theta_{34} - \theta_{24})| \leq 1$  où  $\Gamma$  est défini Éq. (D.48). Connaissant la position  $\mathbf{x}_m$  de la mère  $m$ , les positions théoriques des filles organisées selon le schéma cartésien [69] utilisé pour l'HAPR sont connues. Notons les  $f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$  en respect de la convention de numérotation choisie. Montrons alors l'unicité du quadrilatère solution du sous-problème  $\widetilde{\mathbf{P}}_4$  où la distance entre  $f_4$  et la position retenue  $f_4$  pour la fille additionnelle associée est minimale. Par opérations sur les normes, le terme  $\left\| \overrightarrow{f_4 f_4} \right\|^2 / 2$  minimal se réécrit en faisant intervenir la position  $\mathbf{x}_m$ . Sachant que  $R = \left\| \overrightarrow{f_4 \mathbf{x}_m} \right\|$ , on obtient alors que

$$\frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{f_4 f_4} \right\|^2 = \frac{1}{2} \left( R^2 + \left\| \overrightarrow{\mathbf{x}_m f_4} \right\|^2 \right) - \overrightarrow{\mathbf{x}_m f_4} \cdot \overrightarrow{\mathbf{x}_m f_4}, \quad (\text{D.62})$$

avec le terme  $-\overrightarrow{\mathbf{x}_m f_4} \cdot \overrightarrow{\mathbf{x}_m f_4} \leq 0$  par convention. Le minimiser est équivalent à minimiser  $\left\| \overrightarrow{f_4 f_4} \right\|^2 / 2$  puisque la position théorique  $f_4$  et la mère  $m$  sont imposées dans cette étude. Par ailleurs,



l'inégalité de Cauchy-Schwarz assure la minimisation lorsque les vecteurs  $\overrightarrow{\mathbf{x}_m f_4}$  et  $\overrightarrow{\mathbf{x}_m \tilde{f}_4}$  sont colinéaires. Or, en utilisant les coordonnées polaires relatives, assurer la colinéarité des vecteurs  $\overrightarrow{\mathbf{x}_m f_4}$  et  $\overrightarrow{\mathbf{x}_m \tilde{f}_4}$  équivaut à  $\theta_{4m} = \theta_{\tilde{4m}}$ . En bref, minimiser  $\left\| \overrightarrow{f_4 \tilde{f}_4} \right\|^2 / 2$  est alors équivalent à vérifier l'égalité  $\theta_{4m} = \theta_{\tilde{4m}}$ . Il y a donc équivalence entre  $|\Gamma(\theta_{34} - \theta_{24})| \leq 1$  et l'existence d'un unique quadrilatère solution du sous-problème  $\widetilde{\mathbf{P}}_4$ . De plus, son expression analytique est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos\left(\theta_{13} - k\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\mathbf{B}(\theta_{34}, \theta_{24}) - \sqrt{\Delta(\theta_{34}, \theta_{24})}}{2\mathbf{A}(\theta_{34}, \theta_{24})}, \\ \cos(\theta_{12} - \theta_{13}) = \Gamma(\theta_{34} - \theta_{24}), \\ \cos(\theta_{34} - \theta_{24}) = \frac{C_{34}^2 + C_{24}^2 - C_{12}^2 - C_{13}^2}{2(C_{12}C_{13} + C_{34}C_{24})}, \\ \cos(\theta_{m4} - \theta_{24}) = \frac{C_{24}}{2R}, \\ \theta_{4m} = \theta_{\tilde{4m}}. \end{array} \right. , \quad (\text{D.63})$$

avec  $\theta_{\tilde{4m}} \in [0, 2\pi[$  connu. Les coefficients  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\Delta$  sont définis Éq. (D.49), Éq. (D.50) et Éq. (D.51) respectivement. L'expression du paramètre  $\Gamma$  est donnée Éq. (D.48). Enfin, le rayon  $R$  est défini Éq. (D.54).

Finalement, il est démontré que le sous-problème  $\widetilde{\mathbf{P}}_4$  admet une unique solution minimisant  $\left\| \overrightarrow{f_4 \tilde{f}_4} \right\|^2 / 2$  sous l'hypothèse  $|\Gamma(\theta_{34} - \theta_{24})| \leq 1$ . Autrement dit, s'il est supposé que les paramètres  $C_{12}$ ,  $C_{13}$ ,  $C_{34}$  et  $C_{24}$  permettent l'intersection des cercles associés. Par équivalence, le problème  $\mathbf{P}_4$  admet lui aussi une unique solution sous ces mêmes conditions.

□

### D.2.7 Problème général d'optimisation $\mathbf{P}$

Le problème général d'optimisation  $\mathbf{P}$  est finalement composé des relations (D.58), (D.59), (D.60) et (D.61) où les paramètres  $C_{12}$ ,  $C_{13}$ ,  $C_{34}$ ,  $C_{24} > 0$  sont définis comme suit.

$$\forall (k, l) \in \llbracket 1, 4 \rrbracket^2, C_{kl} = \left\{ \begin{array}{l} \left\| \overrightarrow{f_k \tilde{f}_l} \right\|, \text{ si les filles } k \text{ et } l \text{ sont pré-existantes,} \\ \varepsilon \Delta x_m, \text{ sinon.} \end{array} \right. , \quad (\text{D.64})$$

où  $\varepsilon = 0,5$  est le paramètre de séparation utilisé pour le motif de l'HAPR et  $\Delta x_m$  désigne l'espacement inter-particulaire de la mère. Ainsi formulé, l'ensemble des sous-problèmes  $(\mathbf{P}_{M-M_{pe}})_{0 \leq M_{pe} \leq 4}$  forment une disjonction exhaustive des cas du problème  $\mathbf{P}$ . Par simplicité, une seule valeur constante est utilisée pour définir les hyper-paramètres du problème. En particulier, sous l'hypothèse d'existence de la solution, la constante  $\varepsilon \Delta x_m$  utilisée (D.64) assure que l'éventuelle solution du sous-problème  $\mathbf{P}_4$  soit le schéma cartésien [69] de l'HAPR. De même, l'éventuelle solution du sous-problème  $\mathbf{P}_3$  est le motif cartésien [69] de l'HAPR mais dont l'orientation ne correspond plus systématiquement à celle du repère cartésien  $(x, y)$ .

Dans tous les cas, le problème général  $\mathbf{P}$  admet une unique solution qui satisfait la convention de numérotation choisie si et seulement si les paramètres  $C_{12}$ ,  $C_{13}$ ,  $C_{34}$ ,  $C_{24} > 0$  assurent l'intersection des cercles associés. Numériquement, le choix (D.64) s'est montré suffisant pour des configurations faiblement dégénérées par rapport au schéma cartésien. Théoriquement par contre, des configurations suffisamment dégénérées existent pour qu'un tel choix ne garantisse

pas l'existence d'une solution. Une sécurité est alors prévue pour que cette procédure de raffinement soit ré-itérée en utilisant  $2\varepsilon\Delta x_m$  comme nouvelle constante. Si nécessaire, une telle sécurité peut être répétée indéfiniment, en doublant à chaque fois la valeur de la constante utilisée (D.64) jusqu'à assurer l'existence d'une solution au problème **P**.

### D.3 Initialisation des filles additionnelles

Soit  $m$  une mère SPH se raffinant, associée à  $M_{pe}$  filles pré-existantes. Le raffinement de  $m$  selon le processus non-destructif exposé consiste à introduire  $M - M_{pe}$  filles additionnelles. La procédure de positionnement des filles additionnelles a été exposée section D.2. Ainsi créées, les propriétés (vitesse, masse volumique, etc) des filles additionnelles doivent être initialisées avec précaution.

La procédure utilisée pour l'HAPR est partiellement révisée. La vitesse et la masse volumique de la mère sont transmises par copie aux filles additionnelles. De plus, la longueur de lissage d'une fille additionnelle  $\alpha h_m$  est également définie comme une fraction  $\alpha = 0,5$  de celle de la mère  $h_m$ . Le volume d'une fille additionnelle est initialisé comme une fraction  $\lambda[M, M_{pe}]$  de celui de sa mère associée  $m$ . Le coefficient de distribution  $\lambda[M, M_{pe}]$  est défini Éq. (D.65) comme une fonction des masses des filles pré-existantes et de la mère associée.

$$\lambda[M, M_{pe}] \left( (m_d)_{d \leq M_{pe}} \right) = \frac{1}{M - M_{pe}} \left( 1 - \frac{\sum_{d \leq M_{pe}} m_d}{m_m} \right). \quad (\text{D.65})$$

En particulier s'il n'y a aucune fille pré-existante, i.e.  $M_{pe} = 0$ , la distribution des volumes (D.65) garantit la répartition équitable du volume de la mère entre les  $M$  filles additionnelles. Ainsi, on note que cette procédure révisée est identique à celle utilisée pour l'HAPR si  $M_{pe} = 0$ .

Attention toutefois, rappelons qu'afin de garantir la robustesse des opérateurs  $W_{ij}$  dans Éq. (2.7), le ratio des volumes entre particules adjacentes doit compris entre 0,97 et 1,03 [60]. La distribution des volumes (D.65) satisfait cette contrainte tant que le ratio des masses entre une fille pré-existante et sa mère associée s'écarte peu de l'équi-répartition  $1/M$ . Cependant, le volumes de certaines filles additionnelles ne satisfait plus cette contrainte lorsque la distribution de filles est fortement perturbée. Dans cette situation, le volume des filles additionnelles est initialisé comme une fraction  $1/M$  de celui de la mère associée. Bien que cela demeure non prouvé mathématiquement, cette correction ad hoc semble efficace en pratique.

### D.4 Validations

L'objet de cette dernière section est de comparer la pertinence de l'HAPR avec processus de raffinement destructif (HAPR-D) et de l'HAPR avec processus de raffinement non-destructif (HAPR-ND) sur le cas du canal oscillant introduit section 5.2. L'évolution du nombre de filles SPH, adimensionné par le nombre de filles SPH introduites initialement dans le Niveau 1, est illustrée pour vingt oscillations de pistons Fig. D.13a (resp. Fig. D.13b) pour l'HAPR-D (resp. HAPR-ND).

Les évolutions du nombre de filles dans Niveau 1 prédites par l'HAPR-D et l'HAPR-ND sont jugées quasi-constantes et très similaires. Après vingt oscillations de pistons, la différence relative de filles manipulées par les deux simulations est inférieure à 1%. Par simplicité, ce bon comportement est seulement illustré pour une durée de vingt oscillations de pistons, mais celui-ci perdure au-delà. Une simulation allant jusqu'à soixante oscillations de pistons a été effectuée pour le confirmer. Par conséquent, les deux stratégie semblent aussi robustes l'une que l'autre.

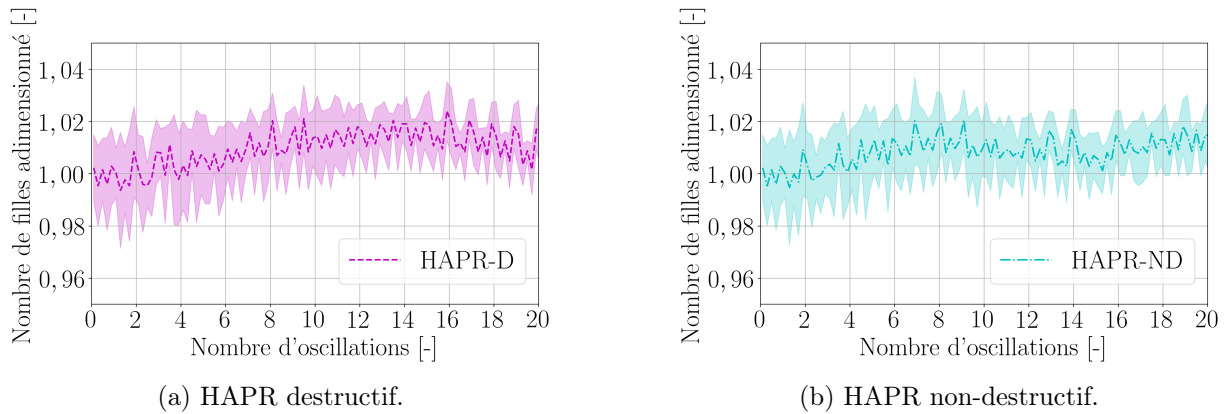


FIGURE D.13 – Cas test numérique du canal oscillant : évolution du nombre de filles SPH dans le Niveau 1 du canal oscillant. Comparaison de la solution raffinée localement HAPR-D (à gauche, ligne magenta de tirets) à la solution raffinée localement HAPR-ND (à droite, ligne cyan discontinue de pointillés et tirets). Chaque oscillation de piston est échantillonnée par cinq valeurs moyennes (ligne épaisse). L'enveloppe estompée représente l'intervalle de confiance autour de la valeur moyenne encadrée à plus ou moins l'écart-type près.

Cependant, aucune des deux stratégies n'assure une pertinence parfaitement robuste sur le canal oscillant. Pour compléter l'analyse précédente, l'évolution de la masse totale de fluide dans le canal est illustrée Fig. D.14.

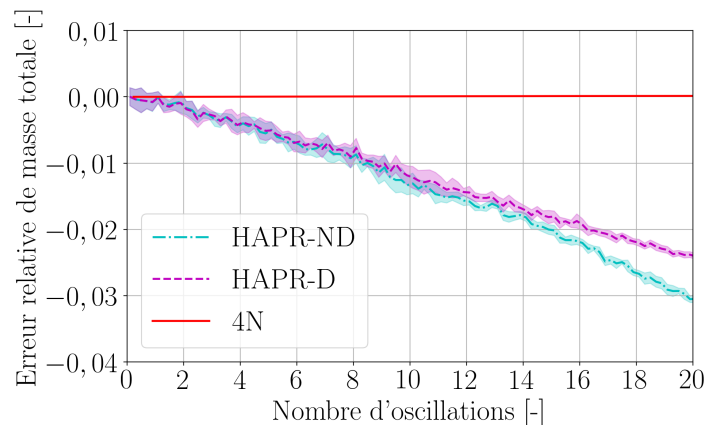


FIGURE D.14 – Cas test numérique du canal oscillant : profils d'erreur relative de la masse totale des particules SPH par rapport à la masse totale théorique de fluide. La solution entièrement raffinée 4N (ligne continue rouge), la solution raffinée localement HAPR-D (ligne de tirets magenta) et HAPR-ND (ligne discontinue de pointillés et de tirets cyan) sont représentées. Chaque oscillation de piston est échantillonnée par cinq valeurs moyennes (ligne épaisse). L'enveloppe estompée représente l'intervalle de confiance autour de la valeur moyenne encadrée à plus ou moins l'écart-type près.

Les simulations de références N (non illustrée) et 4N (ligne continue rouge) assurent la conservation de la masse totale dans le temps. Au contraire, la masse totale des particules SPH présentes dans le canal n'est conservée ni avec l'HAPR-D (ligne de tirets magenta) ni avec l'HAPR-ND (ligne discontinue composée de tirets et de pointillés cyan) car une décroissance régulière de cette quantité est numériquement constatée. Pour ce qui importe, l'erreur relative obtenue avec l'HAPR-D et l'HAPR-ND est du même ordre de grandeur au cours des vingt oscillations. En fin de simulation, l'erreur relative de l'HAPR-D est même légèrement inférieure

à celle de l'HAPR-ND. En bref, recourir à l'HAPR-D et l'HAPR-ND est tout aussi pertinent sur le cas du canal oscillant.

Le processus destructif est supposé moins coûteux que le processus non-destructif puisqu'il ne nécessite pas d'appliquer la convention de numérotation aux filles pré-existantes et ne requiert pas la résolution d'un problème d'optimisation. De plus, la généralisation du processus destructif aux simulations 3D est plus simple que celle du processus non-destructif. En conséquence, l'auteur recommande de privilégier l'utilisation de l'HAPR avec processus de raffinement destructif.

# ANNEXE E

## VALIDATIONS COMPLÉMENTAIRES DE LA SPH-ALE-DTS

Cette annexe regroupe des validations de la méthode SPH-ALE-DTS qui sont complémentaires à celles présentées au chapitre 6.

### E.1 Tourbillons de Taylor-Green

Considérons dans cette section la simulation des tourbillons de Taylor-Green en description pure lagrangienne. L'objet de cette étude est d'analyser les erreurs induites dans les champs physiques simulés et de déterminer si l'une des simulations DTS0/1 constitue une approximation numérique fidèle à la solution stationnaire analytique.

**Paramétrisation :** La configuration générale du cas test est détaillée section 3.3. Des compléments de la paramétrisation numérique utiles aux simulations SPH-ALE-DTS avec Alg. 2 sont précisés ci-après. Les différentes paramétrisations utilisées par la suite pour traiter ce cas test sont identiques à celles choisies en description eulérienne (cf section 6.3.3) et sont répertoriées Tab. E.1.

Paramétrisations DTS0		
$K_{\text{CFL}}$	$K_{\text{CFL}}^*$	$N^*$
0,2	0,2	50
1	0,2	200
2	0,2	500

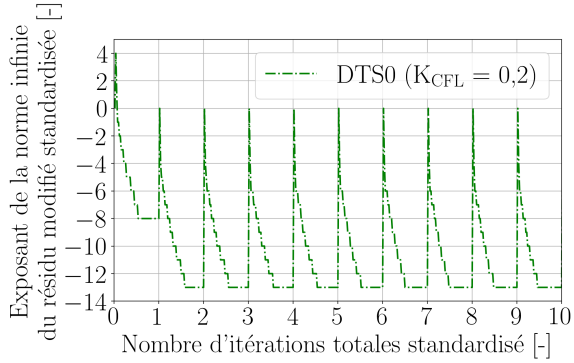
Paramétrisations DTS1		
$K_{\text{CFL}}$	$K_{\text{CFL}}^*$	$N^*$
0,2	0,1	50
1	0,2	200
2	0,2	500

TABLE E.1 – Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description lagrangienne : paramétrisation des échelles temporelles et pseudo-temporelles des simulations SPH-ALE-DTS.

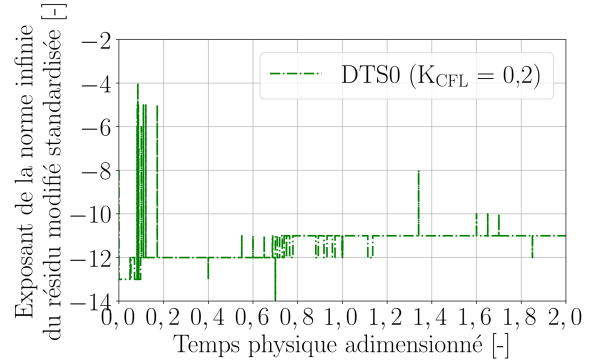
L'étude de l'évolution (pseudo-)temporelle de l'exposant numérique de la norme infinie du résidu modifié standardisée a été réalisée pour l'ensemble de ces paramétrisations. Une configuration  $(K_{\text{CFL}}^*, N^*)$  est jugée admissible si et seulement si l'exposant numérique de la norme infinie du résidu modifié standardisée demeure inférieur à la valeur -2 (cf section 6.2.3).

En bref, chaque configuration a été jugée admissible. Par simplicité, seules les études associées aux simulations DTS0 avec les extrêmes  $K_{CFL} = 0,2$  et  $K_{CFL} = 2$  sont présentées dans ce qui suit.

Les profils issus de la simulation DTS0 ( $K_{CFL} = 0,2$ ) sont représentés Fig. E.1.



(a) En fonction du nombre d'itérations cumulées en temps et pseudo-temps standardisé.

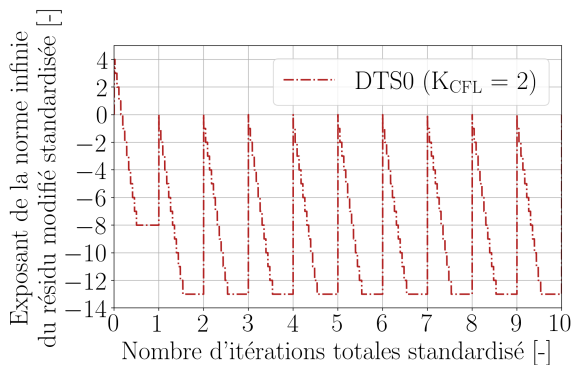


(b) En fonction du temps physique adimensionné.

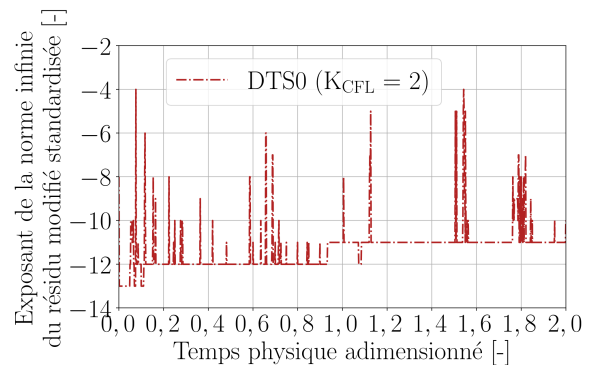
FIGURE E.1 – Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description lagrangienne : évolution en (pseudo-)temps de la norme infinie du résidu modifié standardisée de la simulation DTS0 ( $K_{CFL} = 0,2$ ).

Par soucis de lisibilité, le profil Fig. E.1a est restreint aux premières itérations totales. Pour tout instant  $n$ , la métrique  $\left\| \mathbf{H}_{(n,m)}^* \right\|_{\infty} / \left\| \mathbf{H}_{(n,0)}^* \right\|_{\infty}$  tend vers zéro lorsque  $m$  augmente. Enfin, cette métrique sature au zéro à l'unité d'arrondi machine près pour  $m$  suffisamment grand. Ainsi, le nombre d'itérations en pseudo-temps  $N^*$  est jugé suffisant. Par ailleurs, le profil représenté Fig. E.1b indique que la norme infinie du résidu modifié standardisée est proche de zéro à l'unité d'arrondi machine près tout au long de la simulation, sauf en quelques instants pour lesquels la valeur de l'exposant est d'environ -4. C'est tout de même inférieure à la limite ad hoc -2 décidée précédemment. En bref, la configuration ( $K_{CFL}^* = 0,2, N^* = 50$ ) est jugée admissible pour réaliser la simulation DTS0 ( $K_{CFL} = 0,2$ ).

De même, les profils issus de la simulation DTS0 ( $K_{CFL} = 2$ ) sont représentés Fig. E.2.



(a) En fonction du nombre d'itérations cumulées en temps et pseudo-temps standardisé.



(b) En fonction du temps physique adimensionné.

FIGURE E.2 – Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description lagrangienne : évolution en (pseudo-)temps de la norme infinie du résidu modifié standardisée de la simulation DTS0 ( $K_{CFL} = 2$ ).

La métrique  $\left\| \mathbf{H}_{(n,m)}^* \right\|_{\infty} / \left\| \mathbf{H}_{(n,0)}^* \right\|_{\infty}$  diminue en tendant vers zéro lorsque  $m$  augmente et enfin sature. Ainsi, le nombre d'itérations en pseudo-temps  $N^*$  est jugé suffisant. On note Fig. E.2b que la configuration utilisée n'assure pas toujours la convergence vers zéro à l'unité d'arrondi machine près. Cependant, cela reste suffisamment faible tout au long de la simulation. Ainsi, la configuration ( $K_{\text{CFL}}^* = 0, 2$ ,  $N^* = 500$ ) est jugée admissible pour réaliser la simulations DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 2$ ).

Finalement, les paramétrisations ( $K_{\text{CFL}}$ ,  $K_{\text{CFL}}^*$ ,  $N^*$ ) présentées Tab. E.1 sont jugées satisfaisantes pour cette étude en description lagrangienne.

**Pertinence :** Étudions la pertinence de la méthode SPH-ALE-DTS à simuler cet ensemble de tourbillons contra-rotatifs et stationnaires. Approfondissons l'étude de la viscosité numérique intrinsèque aux schémas DTS0/1.

Fig. E.3 présente les profils d'énergie cinétique totale adimensionnée pour  $0 \leq t_{\text{adim}} \leq 2$  obtenus pour les solutions DTS0 (ligne discontinue de tirets et de pointillés) où  $0, 2 \leq K_{\text{CFL}} \leq 2$ , comparés à la solution de référence RK3 (ligne continue bleue).

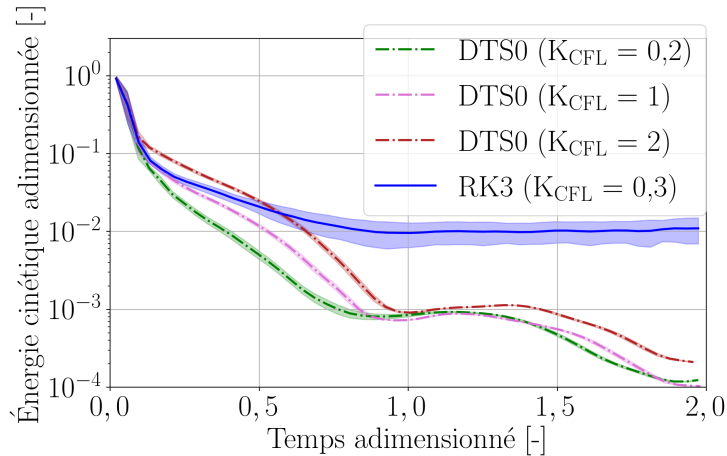
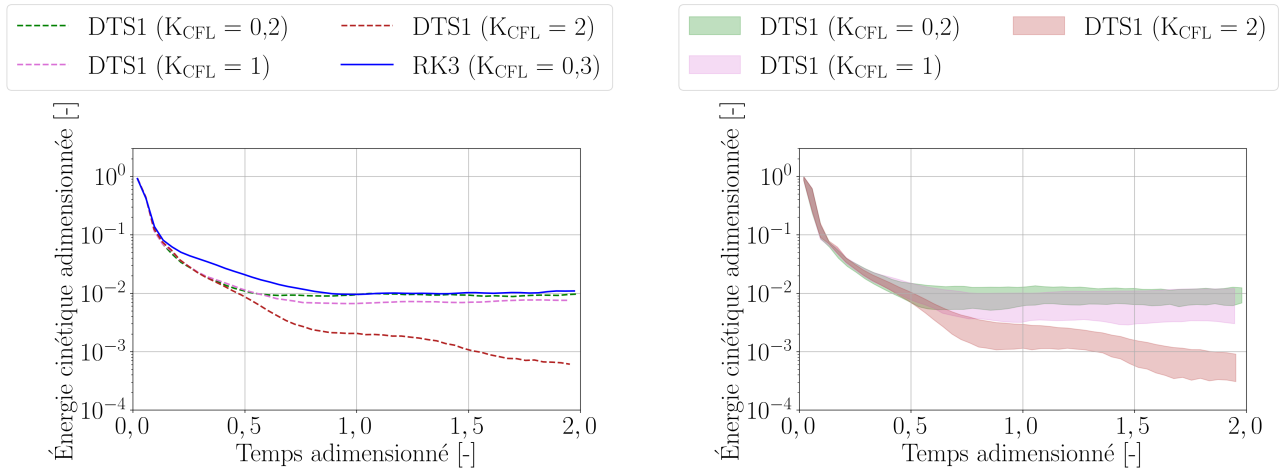


FIGURE E.3 – Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description lagrangienne : évolution de l'énergie cinétique totale adimensionnée, au cours du temps adimensionné. Comparaison de la solution SPH-ALE standard RK3 (ligne continue) et des solutions SPH-ALE-DTS avec schéma DTS0 (ligne discontinue) où  $0, 2 \leq K_{\text{CFL}} \leq 2$ . Chaque unité de temps adimensionné est échantillonnée par cinquante valeurs moyennes (ligne épaisse). L'enveloppe estompée représente l'intervalle de confiance autour de la valeur moyenne encadrée à plus ou moins l'écart-type près.

Les profils obtenus sont représentés avec une échelle logarithmique en énergie. Les performances des solutions DTS0 sont jugées similaires entre elles. À l'instar de la solution RK3, le schéma DTS0 ne présente pas une décroissance linéaire en temps. L'énergie cinétique totale des simulations DTS0 chute brusquement de deux ordres de grandeur en début de simulation pour  $0 \leq t_{\text{adim}} \leq 0, 5$ , puis chute à nouveau d'un ordre de grandeur pour  $0, 5 \leq t_{\text{adim}} \leq 1$  et encore pour  $1, 5 \leq t_{\text{adim}} \leq 2$ . Au contraire de la référence RK3, on note que les profils DTS0 ne sont pas bruités pour  $0, 5 < t_{\text{adim}} \leq 2$ . Trop d'énergie a été dissipée pour générer un tel comportement. Une étude analogue est détaillée ci-après pour la discrétisation DTS1. Fig. E.4a présente les profils moyens d'énergie cinétique totale adimensionnée pour  $0 \leq t_{\text{adim}} \leq 2$  obtenus pour les solutions DTS1 (ligne discontinue de tirets) où  $0, 2 \leq K_{\text{CFL}} \leq 2$ , qui sont ensuite comparés à la solution de référence RK3 (ligne continue bleue).





(a) Profils moyennés. Chaque unité de temps adimensionné est échantillonnée par cinquante instants.

(b) Intervalle de confiance autour de la valeur moyenne encadrée à plus ou moins l'écart-type près.

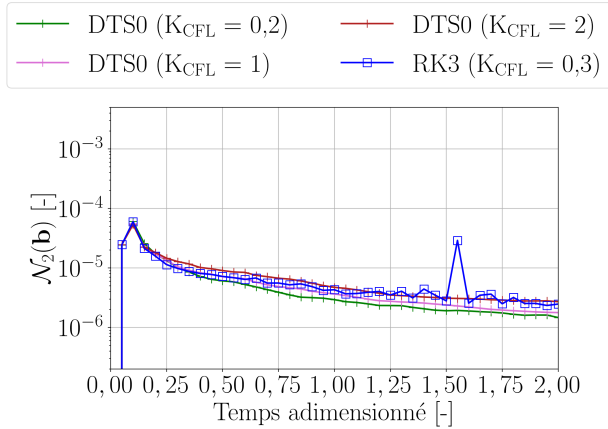
FIGURE E.4 – Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description lagrangienne : évolution de l'énergie cinétique totale adimensionnée, au cours du temps adimensionné. Comparaison des solutions SPH-ALE-DTS avec schéma DTS1 (ligne discontinue) où  $0,2 \leq K_{CFL} \leq 2$ .

Les performances des solutions DTS1 sont jugées similaires entre elles et à la référence RK3. L'énergie cinétique totale des simulations numériques DTS1 chute brusquement de deux ordres de grandeur en début de simulation pour  $0 \leq t_{\text{adim}} \leq 0,5$  et se stabilise ensuite. Ainsi, le nombre de Reynolds équivalent du schéma DTS1 estimé lors de la simulation des tourbillons de Taylor-Green en description lagrangienne a nettement diminué par rapport à celui obtenu lors de la simulation en description eulérienne. Fig. E.4b indique l'intervalle de confiance autour de la valeur moyenne encadrée à plus ou moins l'écart-type près des solutions DTS1. On note alors que solutions DTS1 présentent des profils en énergie cinétique volatiles pour  $0,5 < t_{\text{adim}} \leq 2$ . Le niveau de bruit est similaire à celui observé pour la référence RK3. Dans l'ensemble, la performance de DTS1 est jugée plus fidèle à la référence numérique que ne l'est celle de DTS0.

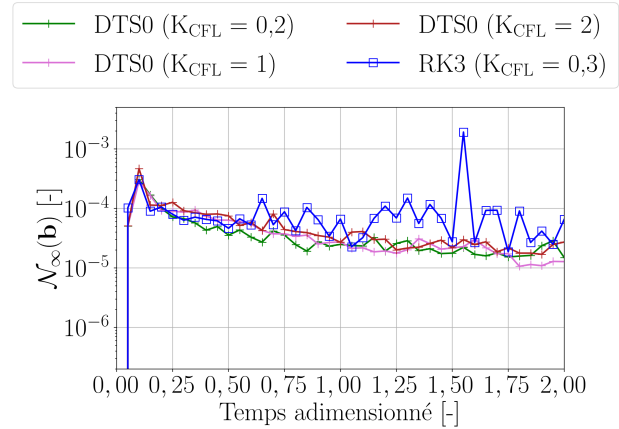
Pour aller plus loin, recherchons l'origine de l'amortissement illustré Fig. E.3 et Fig. E.4a. En description lagrangienne, l'apparition d'erreurs numériques est souvent liée à un pavage inhomogène. Ainsi, regardons l'évolution en temps des profils des normes  $\mathcal{N}_2(\mathbf{b})$  et  $\mathcal{N}_\infty(\mathbf{b})$ . Les résultats issus des solutions DTS0 sont présentés Fig. E.5a et Fig. E.5b.

Par la suite, les profils issus des solutions DTS1 sont présentés Fig. E.6a et Fig. E.6b. Dans l'ensemble, les résultats des solutions DTS0/1 sont jugés similaires entre eux et à ceux de la référence numérique RK3.

La distribution particulière forme initialement un pavage cartésien régulier du domaine. La discrétisation spatiale présente alors une erreur « *closed-box* » globalement faible, i.e.  $\mathcal{N}_2(\mathbf{b})$  et  $\mathcal{N}_\infty(\mathbf{b}) < 10^{-7}$  à  $t_{\text{adim}} = 0$ . Les profils associés aux métriques  $\mathcal{N}_2(\mathbf{b})$  et  $\mathcal{N}_\infty(\mathbf{b})$  augmentent brusquement en début de simulation et présentent un maximum pour  $t_{\text{adim}} \approx 0,1$ . Sous l'effet de la forte distorsion des directions du vecteur vitesse, le mouvement lagrangien des particules déstructure le pavage devenant inhomogène. Il réside un grand désordre particulière dans tout le domaine. Ce désordre dégrade la précision de l'opérateur SPH de la divergence, ce qui s'accompagne d'erreurs numériques. La norme euclidienne de l'erreur d'approximation locale diminue alors régulièrement pour  $0,1 \leq t_{\text{adim}} \leq 1,5$  et stagne ensuite pour  $t_{\text{adim}} \geq 1,75$ . Autrement dit, le désordre global diminue progressivement à mesure que les particules se réorganisent. La norme infinie de l'erreur d'approximation locale est relativement constante pour  $0,1 \leq t_{\text{adim}} \leq 2$ . On note néanmoins que le profil est volatile pour  $0,5 \leq t_{\text{adim}} \leq 2$ . Ainsi, bien que le désordre global

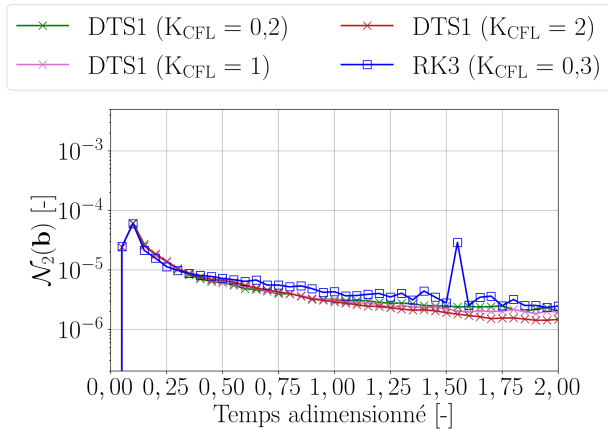


(a) Norme euclidienne de l'erreur d'approximation locale.

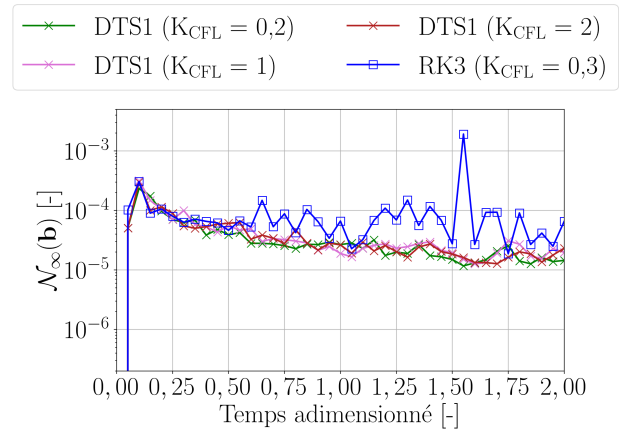


(b) Norme infinie de l'erreur d'approximation locale.

FIGURE E.5 – Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description lagrangienne : évolution de la qualité du pavage de l'espace mesurée par la norme de l'erreur « *closed-box* », au cours du temps adimensionné. Comparaison de la solution SPH-ALE standard RK3 (carrés bleus) et des solutions SPH-ALE-DTS avec schéma DTS0 (plus) où  $0,2 \leq K_{CFL} \leq 2$ .



(a) Norme euclidienne de l'erreur d'approximation locale.



(b) Norme infinie de l'erreur d'approximation locale.

FIGURE E.6 – Cas test numérique des tourbillons de Taylor-Green en description lagrangienne : évolution de la qualité du pavage de l'espace mesurée par la norme de l'erreur « *closed-box* », au cours du temps adimensionné. Comparaison de la solution SPH-ALE standard RK3 (carrés bleus) et des solutions SPH-ALE-DTS avec schéma DTS1 (croix) où  $0,2 \leq K_{CFL} \leq 2$ .

de la distribution particulaire diminue dans le temps, celle-ci présente des zones où l'erreur « *closed-box* » demeure importante tout au long de la simulation.

En bref, les simulations DTS0/1 réalisées en description lagrangienne ne conduisent pas à des approximations numériques fidèles à la solution stationnaire analytique. Il s'avère donc impossible de réaliser précisément une telle simulation en méthode SPH-ALE-DTS sans une correction additionnelle du mouvement des particules afin d'améliorer la consistance du schéma numérique.

## E.2 Impact d'un jet plan sur une plaque plane

Considérons dans cette section la simulation en description pure lagrangienne d'un jet plan impactant une plaque plane en incidence normale. L'objet de cette étude est de comparer la pertinence des schémas numériques SPH-ALE (N-RK3) et SPH-ALE-DTS avec Alg. 2 (N-DTS0 et N-DTS1).

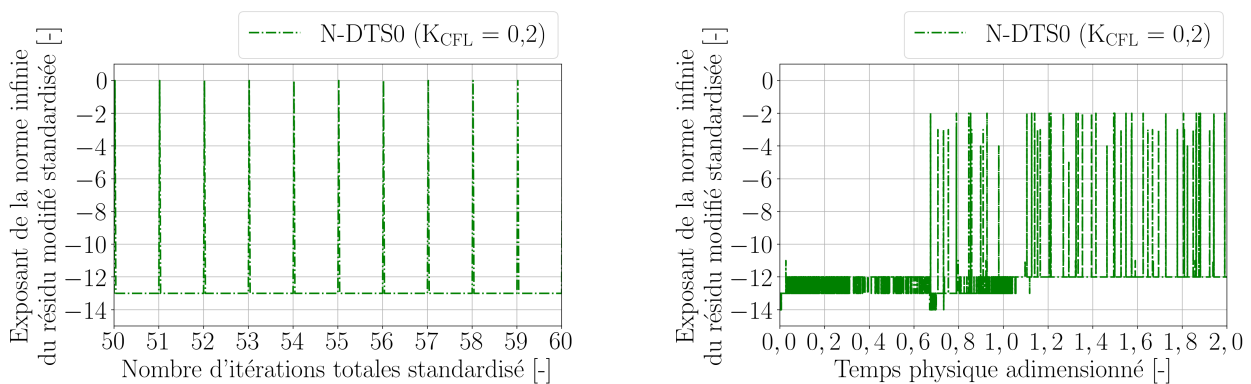
**Paramétrisation :** La configuration générale du cas test est détaillée section 3.4. Les paramétrisations utilisées par la suite sont répertoriées Tab. E.2.

$K_{CFL}$	$K_{CFL}^*$	$N^*$
0,2	0,2	50
1	0,2	200

TABLE E.2 – Cas test numérique du jet plan en description lagrangienne : paramétrisation des échelles temporelles et pseudo-temporelles des simulations SPH-ALE-DTS.

À coefficient  $K_{CFL}$  fixe, une configuration  $(K_{CFL}^*, N^*)$  est jugée admissible si et seulement si l'exposant numérique de la norme infinie du résidu modifié standardisée demeure inférieure à la valeur -2 (cf section 6.2.3).

Les profils d'évolution (pseudo-)temporelle de l'exposant numérique de la norme infinie du résidu modifié standardisée issus de la simulation N-DTS0 ( $K_{CFL} = 0,2$ ) sont représentés Fig. E.7.



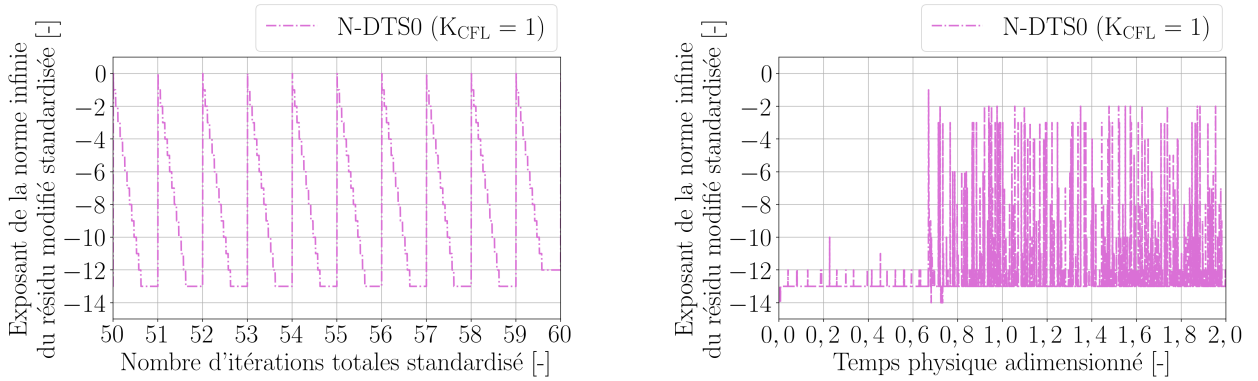
(a) En fonction du nombre d'itérations cumulées en temps et pseudo-temps standardisé.

(b) En fonction du temps physique adimensionné.

FIGURE E.7 – Cas test numérique du jet plan en description lagrangienne : évolution en (pseudo-)temps de la norme infinie du résidu modifié standardisée de la simulation N-DTS0 ( $K_{CFL} = 0,2$ ).

Par soucis de lisibilité, le profil Fig. E.7a est restreint à quelques itérations totales et le profil Fig. E.7b est limité aux deux premières périodes de temps caractéristique. Pour un instant  $n$  donné, la métrique  $\left\| \mathbf{H}_{(n,m)}^* \right\|_{\infty} / \left\| \mathbf{H}_{(n,0)}^* \right\|_{\infty}$  sature au zéro à l'unité d'arrondi machine près pour  $m$  suffisamment grand. Ainsi, le nombre d'itérations en pseudo-temps  $N^*$  est jugé suffisant. Par ailleurs, le profil représenté Fig. E.7b indique que la norme infinie du résidu modifié standardisée est proche de zéro à l'unité d'arrondi machine près pour  $t_{\text{adim}} \leq 0,7$ , c'est-à-dire tant que le jet n'a pas atteint la paroi. Après l'impact, la valeur de l'exposant demeure inférieure à -2 tout au long de la simulation. En bref, la configuration ( $K_{\text{CFL}}^* = 0,2$ ,  $N^* = 50$ ) est jugée admissible pour réaliser la simulation N-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 0,2$ ).

De même, les profils issus de la simulation N-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1$ ) sont représentés Fig. E.8.



(a) En fonction du nombre d'itérations cumulées en temps et pseudo-temps standardisé.

(b) En fonction du temps physique adimensionné.

FIGURE E.8 – Cas test numérique du jet plan en description lagrangienne : évolution en (pseudo-)temps de la norme infinie du résidu modifié standardisée de la simulation N-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1$ ).

La métrique  $\left\| \mathbf{H}_{(n,m)}^* \right\|_{\infty} / \left\| \mathbf{H}_{(n,0)}^* \right\|_{\infty}$  tend vers zéro pour tout instant  $n$  lorsque  $m$  augmente. Ainsi, le nombre d'itérations en pseudo-temps  $N^*$  est jugé suffisant. On note ensuite Fig. E.8b que la configuration utilisée assure la convergence de la valeur de l'exposant vers un niveau jugé suffisamment faible pour tout instant. La configuration ( $K_{\text{CFL}}^* = 0,2$ ,  $N^* = 200$ ) est jugée admissible pour réaliser la simulations N-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1$ ).

Finalement, les paramétrisations ( $K_{\text{CFL}}$ ,  $K_{\text{CFL}}^*$ ,  $N^*$ ) présentées Tab. E.2 sont jugées satisfaisantes pour cette étude.

**Pertinence :** Étudions la pertinence de la méthode SPH-ALE-DTS à simuler cet écoulement. Pour cela, comparons tout d'abord les prédictions de la surface totale recouverte par l'écoulement en régime permanent, obtenues des simulations N-RK3, N-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 0,2$ ) et N-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1$ ). Le régime permanent est jugé établi pour  $t_{\text{adim}} > 5,5$ . Par simplicité, les profils d'évolution de la surface totale au cours du temps associés aux simulations N-DTS0 ne sont pas représentés de par la similitude de leur comportement avec celui de la référence N-RK3 (cf Fig. 3.20). Toutefois, leur performance est quantifiée Tab. E.3.

En régime permanent, la surface totale prédite par la simulation N-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 1$ ) est légèrement plus grande que celle de N-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} = 0,2$ ). Cependant, leur performance est jugée similaire car ces deux simulations présentent une erreur relative d'environ 5% par rapport à la valeur théorique  $\mathcal{A}$ . Cet ordre de grandeur est de plus jugé équivalent à l'erreur de 4,9% obtenue avec la référence numérique N-RK3. Ainsi, l'auteur juge que les solutions N-DTS0 reproduisent fidèlement le comportement de cette solution de référence.

<i>Simulations</i>	<i>RE Surface</i>
N-RK3 ( $K_{CFL} = 0,3$ )	4,9%
N-DTS0 ( $K_{CFL} = 0,2$ )	5,1%
N-DTS0 ( $K_{CFL} = 1$ )	5,5%

TABLE E.3 – Cas test numérique du jet plan en description lagrangienne : erreur relative des simulations SPH-ALE-DTS.

L'analyse est maintenant focalisée sur les champs de pression et de vitesse. Dans ce qui suit, en raison des similitudes entre les résultats en pression et vitesse, seuls ceux en pression sont présentés le cas échéant. Fig. E.9a (resp. Fig. E.9b) illustre le coefficient de pression  $C_p = p/(\frac{1}{2}\rho_0 U^2)$  dans le domaine fluide de la simulation N-DTS0 avec  $K_{CFL} = 0,2$  (resp. avec  $K_{CFL} = 1$ ), moyenné sur une durée  $T_{carac}$  en régime permanent.

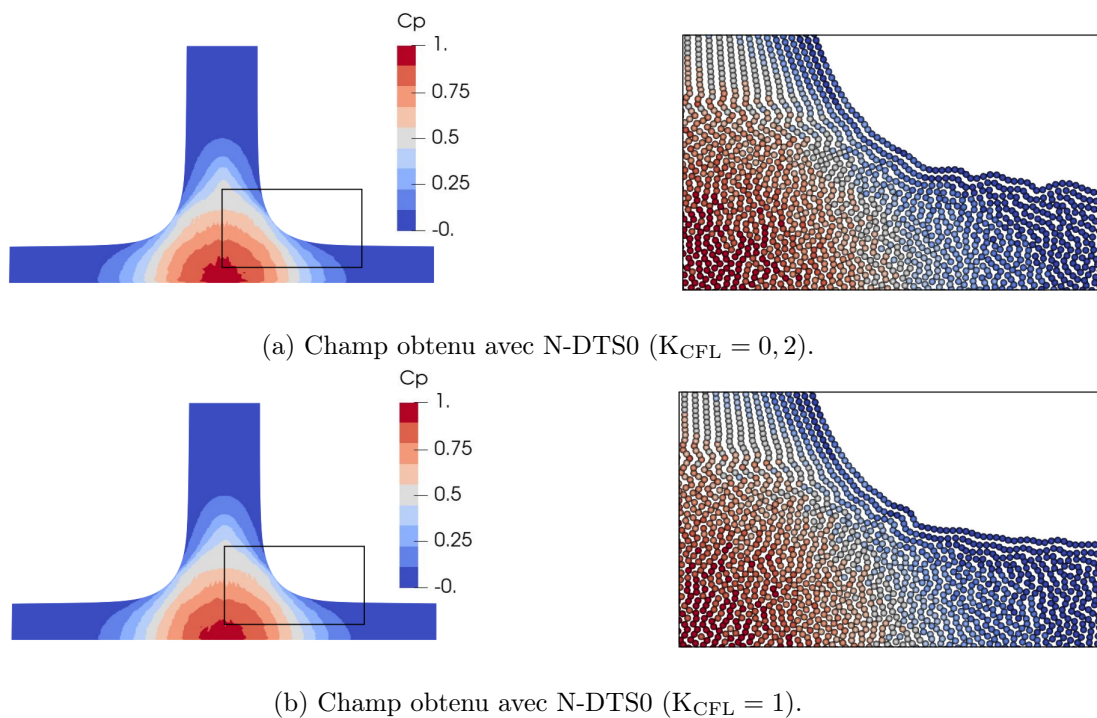


FIGURE E.9 – Cas test numérique du jet plan en description lagrangienne : visualisation du champ de pression moyen en régime permanent et de la distribution particulaire à  $t_{adim} = 6,5$ .

Les performances des deux simulations N-DTS0 sont jugées concordantes. Dans la partie amont de l'écoulement, au dessus de la zone de surpression, le coefficient de pression est régulier car les particules sont relativement bien ordonnées selon une organisation cartésienne induite par l'injection. Dans la zone où la surface libre s'évase pour former un coude, le champ de pression moyen est bruité en raison du désordre particulaire au voisinage étendu du point d'arrêt. En dehors de cette zone, les particules sont ordonnées selon un arrangement hexagonal compact assurant un pavage de l'espace satisfaisant et qui conduit à des champs réguliers. Cependant, on observe que la topologie de la surface libre n'est pas lisse. On remarque que celle de la simulation N-DTS0 ( $K_{CFL} = 1$ ) est légèrement plus régulière que celle de N-DTS0 ( $K_{CFL} = 0,2$ ). Par comparaison avec les résultats présentés Fig. 3.21a, on note de plus que le champ global obtenu avec N-DTS0 ( $K_{CFL} = 0,2$  ou 1) est aussi régulier que celui obtenu avec la référence N-RK3. Ainsi, la pertinence des solutions N-DTS0 est jugée équivalente à cette dernière.

En particulier, il est possible de se concentrer sur un axe horizontal (ou vertical) des champs globaux présentés Fig. E.9 afin d'en étudier le profil. Pour commencer, les données en pression et vitesse en paroi le long de l'axe horizontal  $y/L = 0$  sont extraites. Pour éviter les redites, seule l'analyse des données de pression est présentée. Le profil du coefficient de pression moyen en paroi obtenu avec N-DTS0 où  $K_{CFL} = 0,2$  (resp. où  $K_{CFL} = 1$ ) est représenté Fig. E.10a (resp. Fig. E.10b) et est comparé au profil analytique.

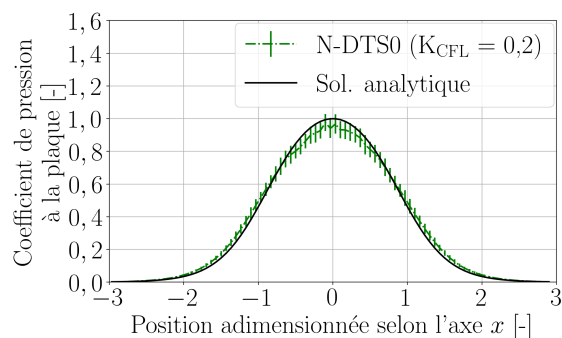
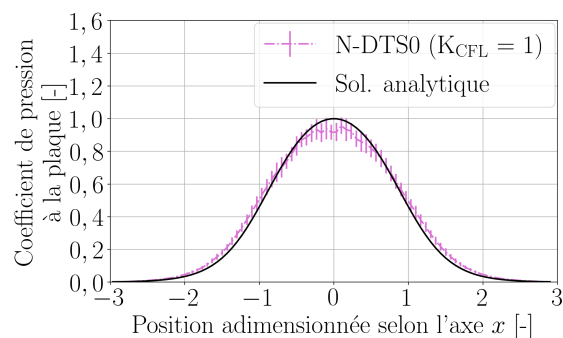
(a) Profil obtenu avec N-DTS0 ( $K_{CFL} = 0,2$ ).(b) Profil obtenu avec N-DTS0 ( $K_{CFL} = 1$ ).

FIGURE E.10 – Cas test numérique du jet plan en description lagrangienne : profil du coefficient de pression moyen au niveau de la plaque. L'intervalle de confiance encadrant la moyenne temporelle à plus ou moins l'écart-type près est représenté.

Quelle que soit la valeur de  $K_{CFL}$  considérée, ce résultat est jugé fidèle à celui de la solution analytique. Toutefois, la moyenne du coefficient de pression des simulations N-DTS0 est sous-estimée légèrement par rapport à la solution analytique au cœur de la zone d'impact du jet. Par ailleurs, les écarts-types illustrent un bruit relativement grand dans cette zone. Cette volatilité est jugée similaire à celle observée Fig. 3.22a sur le profil obtenu avec la référence N-RK3.

Afin de quantifier les écarts entre le coefficient de pression moyen en paroi des simulations N-DTS0 et N-RK3, les données de l'indicateur DMSAE sur la pression sont répertoriées Tab. E.4 qui confirme les interprétations précédentes faites à partir de Fig. E.10.

<i>Simulations</i>	<i>DMSAE <math>C_p^{y=0}</math></i>
N-RK3 ( $K_{CFL} = 0,3$ )	0,070%
N-DTS0 ( $K_{CFL} = 0,2$ )	0,073%
N-DTS0 ( $K_{CFL} = 1$ )	0,098%

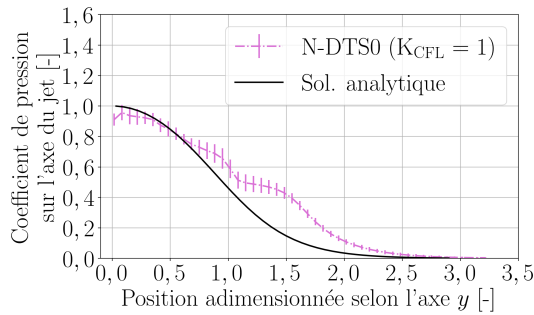
TABLE E.4 – Cas test numérique du jet plan en description lagrangienne : DMSAE sur la pression des simulations SPH-ALE-DTS.

En régime permanent, la DMSAE associée à la simulation N-DTS0 ( $K_{CFL} = 0,2$ ) est jugée équivalente à celle de la référence N-RK3 ( $K_{CFL} = 0,3$ ). Par contre, celles-ci sont inférieures à celle de N-DTS0 ( $K_{CFL} = 1$ ). Elle est ainsi jugée moins robuste bien que sa pertinence soit jugée satisfaisante.

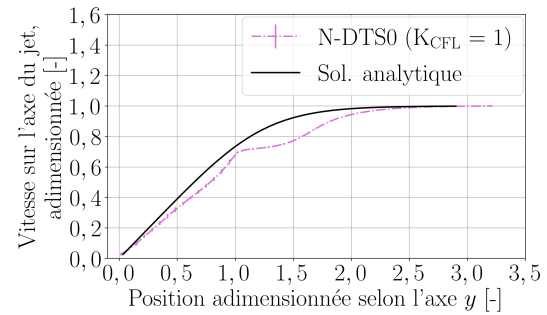
Pour aller plus loin dans l'interprétation des résultats, il est utile d'étudier le comportement physique le long de l'axe du jet. Ainsi, les données en pression et vitesse le long de l'axe vertical  $x/L = 0$  sont extraites. De par les similitudes observées entre les résultats des simulations N-DTS0, seuls les résultats de N-DTS0 ( $K_{CFL} = 1$ ) sont illustrés.

D'une part, le coefficient de pression  $C_p^{x=0}$  moyenné sur une durée  $T_{carac}$  en régime permanent





(a) Profil du coefficient de pression.



(b) Profil de la norme du vecteur vitesse adimensionnée.

FIGURE E.11 – Cas test numérique du jet plan en description lagrangienne : profils sur l'axe du jet. L'intervalle de confiance encadrant la moyenne temporelle à plus ou moins l'écart-type près est représenté.

est utilisé. Fig. E.11a représente ce coefficient pour la simulation N-DTS0 que l'on compare à la solution analytique.

On distingue dans ce profil les trois zones identifiées section 3.4 pour la référence numérique N-RK3. Proche de la zone d'injection ( $y/L > 2,5$ ), le gradient de pression est quasi-nul. Le bruit numérique est faible dans cette zone. Le profil moyen obtenu avec la simulation N-DTS0 est ainsi similaire à celui prédit par la solution analytique. Pour  $1,0 < y/L < 2,5$ , le gradient de pression augmente progressivement. Le profil moyen obtenu avec la simulation N-DTS0 s'écarte de la solution analytique mais le bruit numérique demeure faible. Un tel comportement a été illustré Fig. 3.23a pour la référence N-RK3. La performance de N-DTS0 est ainsi jugée satisfaisante et concordante avec cette référence. Enfin dans la zone  $0,0 < y/L < 1,0$ , le gradient de pression diminue progressivement pour finalement s'annuler au niveau du point d'impact. En particulier, la valeur obtenue Fig. E.11a en  $y/L = 0,0$  est bien égale à celle présentée Fig. E.10b en  $x/L = 0,0$ . Le profil moyen obtenu avec la simulation N-DTS0 est jugé cohérent avec celui prédit par la solution analytique. Le bruit numérique est ici plus important que par ailleurs dans l'écoulement. Toutefois, la volatilité observée est équivalente à celle de la référence N-RK3. D'autre part, complétons l'analyse en regardant le comportement de la vitesse sur ces mêmes trois zones. Pour cela, la vitesse moyennée sur une durée  $T_{\text{carac}}$  en régime permanent et adimensionnée par la vitesse d'injection  $U$  est représentée Fig. E.11b. Proche de la zone d'injection ( $y/L > 2,5$ ), le gradient de vitesse est quasi-nul. Le profil moyen obtenu avec la simulation N-DTS0 est similaire à celui prédit par la solution analytique. Pour  $1,0 < y/L < 2,5$ , le gradient de vitesse augmente progressivement et le profil moyen obtenu avec la simulation N-DTS0 s'écarte de la solution analytique. Néanmoins, cet écart est similaire et d'amplitude intermédiaire à ceux constatés Fig. 3.23b sur la référence N-RK3. Enfin dans la zone  $0,0 < y/L < 1,0$ , le gradient de vitesse est maximal et relativement constant. Le profil moyen obtenu avec la simulation N-DTS0 est jugé similaire à celui prédit par la solution analytique. En particulier, la vitesse s'annule en  $y/L = 0,0$ . Sur l'axe vertical  $x/L = 0$  dans son ensemble, les écarts-types illustrent un faible bruit sur la vitesse.

Dans l'ensemble, la performance de N-DTS0 est jugée équivalente à celle de la référence N-RK3 quelle que soit la valeur  $K_{\text{CFL}}$  utilisée. L'auteur est ainsi confiant en l'aptitude de N-DTS0 ( $K_{\text{CFL}} \leq 1$ ) à simuler des écoulements en description lagrangienne présentant des conditions d'entrée/sortie, une surface libre et une paroi solide.



# PARTIE IV

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. ARNONE et al. « Multigrid time-accurate integration of Navier-Stokes equations ». en. In : *11th Computational Fluid Dynamics Conference*. Orlando, FL, U.S.A. : American Institute of Aeronautics et Astronautics, juill. 1993. DOI : [10.2514/6.1993-3361](https://doi.org/10.2514/6.1993-3361).
- [2] G. BACKUS et al. « Numerical Applications of a Formalism for Geophysical Inverse Problems ». en. In : *Geophysical Journal International* 13.1-3 (juill. 1967), p. 247-276. DOI : [10.1111/j.1365-246X.1967.tb02159.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1967.tb02159.x).
- [3] G. BACKUS et al. « The Resolving Power of Gross Earth Data ». en. In : *Geophysical Journal International* 16.2 (oct. 1968), p. 169-205. DOI : [10.1111/j.1365-246X.1968.tb00216.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1968.tb00216.x).
- [4] G. BACKUS et al. « Uniqueness in the inversion of inaccurate gross Earth data ». en. In : *PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS OF THE ROYAL SOCIETY OF LONDON*. Series A, Mathematical and Physical Sciences 266.173 (1970), p. 23-192. DOI : <https://doi.org/10.1098/rsta.1970.0005>.
- [5] D.A. BARCAROLO. « Improvement of the precision and the efficiency of the SPH method: theoretical and numerical study ». en. Thèse de doct. Nantes : Ecole Centrale de Nantes, oct. 2013.
- [6] A. BELOV et al. « A new implicit algorithm with multigrid for unsteady incompressible flow calculations ». en. In : *33rd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. Reno, NV, U.S.A. : American Institute of Aeronautics et Astronautics, jan. 1995. DOI : [10.2514/6.1995-49](https://doi.org/10.2514/6.1995-49).
- [7] T. BELYTSCHKO et al. « Element-free Galerkin methods ». en. In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37.2 (jan. 1994), p. 229-256. DOI : [10.1002/nme.1620370205](https://doi.org/10.1002/nme.1620370205).
- [8] T. BELYTSCHKO et al. « On the completeness of meshfree particle methods ». en. In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 43.5 (1998), p. 785-819. DOI : [10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19981115\)43:5<785::AID-NME420>3.0.CO;2-9](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19981115)43:5<785::AID-NME420>3.0.CO;2-9).
- [9] R.L.T. BEVAN et al. « Accelerating incompressible flow calculations using a quasi-implicit scheme: local and dual time stepping approaches ». en. In : *Computational Mechanics* 50.6 (déc. 2012), p. 687-693. DOI : [10.1007/s00466-012-0767-x](https://doi.org/10.1007/s00466-012-0767-x).
- [10] J. BONET et al. « Variational and momentum preservation aspects of Smooth Particle Hydrodynamic formulations ». en. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 180.1-2 (nov. 1999), p. 97-115. DOI : [10.1016/S0045-7825\(99\)00051-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00051-1).

- [11] S. BØRVE. « A numerical study of ionospheric and magnetospheric phenomena using particle simulation techniques ». Thèse de doct. PhD thesis, Faculty of Mathematics et Natural Science, University of Oslo, 2001.
- [12] S. BØRVE et al. « Regularized smoothed particle hydrodynamics with improved multi-resolution handling ». en. In : *Journal of Computational Physics* 208.1 (sept. 2005), p. 345-367. DOI : [10.1016/j.jcp.2005.02.018](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.02.018).
- [13] L.P. BOS et al. « Moving Least-Squares Are Backus-Gilbert Optimal ». en. In : *Journal of Approximation Theory* 59.3 (1989), p. 267-275.
- [14] J. CHANÉAC et al. « Improvements of the refinement pattern of Adaptive Particle Refinement ». en. In : *Proc of 15th SPHERIC Workshop* (juin 2021), p. 142-149.
- [15] J. CHANÉAC et al. « Hybridized guard particles for Adaptive Particle Refinement ». en. In : *Proc of 16th SPHERIC Workshop* (juin 2022), p. 344-351.
- [16] L. CHIRON. « Coupling and improvements of the SPH method to treat flows involving temporal and spatial multi-scales ». Theses. Ecole Centrale de Nantes (ECN), mars 2017.
- [17] L. CHIRON et al. « Analysis and improvements of Adaptive Particle Refinement (APR) through CPU time, accuracy and robustness considerations ». en. In : *Journal of Computational Physics* 354 (fév. 2018), p. 552-575. DOI : [10.1016/j.jcp.2017.10.041](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.10.041).
- [18] A.J. CHORIN. « A numerical method for solving incompressible viscous flow problems ». In : *Journal of Computational Physics* 2.1 (1967), p. 12-26. DOI : [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(67\)90037-X](https://doi.org/10.1016/0021-9991(67)90037-X).
- [19] A. COLAGROSSI et al. « Particle packing algorithm for SPH schemes ». en. In : *Computer Physics Communications* 183.8 (août 2012), p. 1641-1653. DOI : [10.1016/j.cpc.2012.02.032](https://doi.org/10.1016/j.cpc.2012.02.032).
- [20] W. DEHNEN et al. « Improving convergence in smoothed particle hydrodynamics simulations without pairing instability: SPH without pairing instability ». en. In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 425.2 (sept. 2012), p. 1068-1082. DOI : [10.1111/j.1365-2966.2012.21439.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.21439.x).
- [21] M. DORING. « Développement d'une méthode SPH pour les applications à surface libre en hydrodynamique ». 2005NANT2116. Thèse de doct. 2005, 1 vol. (III-159 f.)
- [22] R. FATEHI et al. « Density-based smoothed particle hydrodynamics methods for incompressible flows ». en. In : *Computers & Fluids* 185 (mai 2019), p. 22-33. DOI : [10.1016/j.compfluid.2019.02.018](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2019.02.018).
- [23] J. FELDMAN. « Dynamic refinement and boundary contact forces in Smoothed Particle Hydrodynamics with applications in fluid flow problems. » en. Thèse de doct. 2006, p. 228.
- [24] J. FELDMAN et al. « Dynamic refinement and boundary contact forces in SPH with applications in fluid flow problems ». en. In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 72.3 (oct. 2007), p. 295-324. DOI : [10.1002/nme.2010](https://doi.org/10.1002/nme.2010).
- [25] R.A. GINGOLD et al. « Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars ». en. In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 181.3 (déc. 1977), p. 375-389. DOI : [10.1093/mnras/181.3.375](https://doi.org/10.1093/mnras/181.3.375).
- [26] T. GRASSER et al. « Mixed-mode device simulation ». en. In : *2000 22nd International Conference on Microelectronics. Proceedings*. T. 1. Nis, Yugoslavia : IEEE, 1999, p. 35-42. DOI : [10.1109/ICMEL.2000.840528](https://doi.org/10.1109/ICMEL.2000.840528).

- [27] C. GROTH et al., éd. *Computational fluid dynamics 2004: proceedings of the Third International Conference on Computational Fluid Dynamics, ICCFD3, Toronto, 12-16 July 2004*. en. Meeting Name: International Conference on Computational Fluid Dynamics OCLC: ocm68629453. Berlin : Springer-Verlag, 2006.
- [28] B.T. HELENBROOK et al. « Preconditioning for dual-time-stepping simulations of the shallow water equations including Coriolis and bed friction effects ». en. In : *Journal of Computational Physics* 227.9 (avr. 2008), p. 4425-4440. DOI : [10.1016/j.jcp.2008.01.004](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2008.01.004).
- [29] L. HERNQUIST et al. « TREESPH - A unification of SPH with the hierarchical tree method ». en. In : *The Astrophysical Journal Supplement Series* 70 (juin 1989), p. 419. DOI : [10.1086/191344](https://doi.org/10.1086/191344).
- [30] C. HIRSCH. *Numerical computation of internal and external flows: fundamentals of numerical discretization*. en. 2nd ed. T. 1. USA : John Wiley et Sons Ltd, 1988.
- [31] C. HIRSCH. « Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows. » en. In : *Numerical computation of internal and external flows*. T. 2. John WILEY et Sons, 1990.
- [32] C. HIRSCH. *Numerical computation of internal and external flows: fundamentals of computational fluid dynamics*. en. 2nd ed. T. 1. OCLC: ocn148277909. Oxford ; Burlington, MA : Elsevier/Butterworth-Heinemann, 2007.
- [33] J. HSU et al. « An implicit-explicit hybrid scheme for calculating complex unsteady flows ». en. In : *40th AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*. Reno,NV,U.S.A. : American Institute of Aeronautics et Astronautics, jan. 2002. DOI : [10.2514/6.2002-714](https://doi.org/10.2514/6.2002-714).
- [34] M. IHMSEN et al. « Implicit Incompressible SPH ». In : *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* 20.3 (2014), p. 426-435. DOI : [10.1109/TVCG.2013.105](https://doi.org/10.1109/TVCG.2013.105).
- [35] (Intergovernmental Panel on Climate Change) IPCC. *Climate Change 2022 : Mitigation of Climate Change*. Working group III contribution to IPCC sixth assessment report (AR6), 2022.
- [36] A. JAMESON. « Time dependent calculations using multigrid,with applications to unsteady flows past airfoils and wings. » en. In : *AIAA 10th Computational Fluid Dynamics Conference. Honolulu, Hawaii* (1991), AIAA paper 91-1596. DOI : [10.1007/s10915-019-01047-5](https://doi.org/10.1007/s10915-019-01047-5).
- [37] R. JELTSCH. « Stability on the imaginary axis and A-stability of linear multistep methods ». en. In : *BIT* 18.2 (juin 1978), p. 170-174. DOI : [10.1007/BF01931693](https://doi.org/10.1007/BF01931693).
- [38] S. KITSIONAS et al. « Smoothed Particle Hydrodynamics with particle splitting, applied to self-gravitating collapse ». en. In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 330.1 (fév. 2002), p. 129-136. DOI : [10.1046/j.1365-8711.2002.05115.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2002.05115.x).
- [39] S. KITSIONAS et al. « High-resolution simulations of clump-clump collisions using SPH with particle splitting ». en. In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 378.2 (juin 2007), p. 507-524. DOI : [10.1111/j.1365-2966.2007.11707.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2007.11707.x).
- [40] D.A. KNOLL et al. « Enhanced Nonlinear Iterative Techniques Applied to a Nonequilibrium Plasma Flow ». en. In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 19.1 (jan. 1998), p. 291-301. DOI : [10.1137/S1064827596304034](https://doi.org/10.1137/S1064827596304034).

- [41] M. LASTIWKA et al. « Adaptive particle distribution for smoothed particle hydrodynamics ». en. In : *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 47.10-11 (avr. 2005), p. 1403-1409. DOI : [10.1002/flid.891](https://doi.org/10.1002/flid.891).
- [42] J. LEDUC. « Etude physique et numérique de l'écoulement dans un dispositif d'injection de turbine Pelton ». fr. Thèse de doct. Lyon : Ecole Centrale de Lyon, déc. 2010.
- [43] D. LEVIN. « The approximation power of moving least-squares ». en. In : *Mathematics of Computation* 67.224 (1998), p. 1517-1531. DOI : [10.1090/S0025-5718-98-00974-0](https://doi.org/10.1090/S0025-5718-98-00974-0).
- [44] Z. LI. « Développement d'une méthode de simulation de couplage fluide-structure à l'aide de la méthode SPH ». 2013ECDL0036. Thèse de doct. 2013.
- [45] S.J. LIND et al. « Incompressible smoothed particle hydrodynamics for free-surface flows: A generalised diffusion-based algorithm for stability and validations for impulsive flows and propagating waves ». en. In : *Journal of Computational Physics* 231.4 (fév. 2012), p. 1499-1523. DOI : [10.1016/j.jcp.2011.10.027](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2011.10.027).
- [46] L.B. LUCY. « A numerical approach to the testing of the fission hypothesis ». en. In : *The Astronomical Journal* 82 (déc. 1977), p. 1013. DOI : [10.1086/112164](https://doi.org/10.1086/112164).
- [47] C. MARONGIU et al. « An Improvement of the dual time stepping technique for unsteady RANS computations ». en. In : *Conference Paper, European Conference for Aerospace Sciences (EUCASS)* (2005), p. 7.
- [48] J.C. MARONGIU. « Méthode numérique lagrangienne pour la simulation d'écoulements à surface libre : application aux turbines Pelton ». 2007ECDL0046. Thèse de doct. 2007, 1 vol. (170 p.)
- [49] S. MARRONE et al. « Fast free-surface detection and level-set function definition in SPH solvers ». en. In : *Journal of Computational Physics* 229.10 (mai 2010), p. 3652-3663. DOI : [10.1016/j.jcp.2010.01.019](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.01.019).
- [50] J.J. MONAGHAN. « Particle methods for hydrodynamics ». en. In : *Computer Physics Reports* 3.2 (oct. 1985), p. 71-124. DOI : [10.1016/0167-7977\(85\)90010-3](https://doi.org/10.1016/0167-7977(85)90010-3).
- [51] J.J. MONAGHAN. « On the problem of penetration in particle methods ». en. In : *Journal of Computational Physics* 82.1 (mai 1989), p. 1-15. DOI : [10.1016/0021-9991\(89\)90032-6](https://doi.org/10.1016/0021-9991(89)90032-6).
- [52] J.J. MONAGHAN. « Smoothed Particle Hydrodynamics ». en. In : *Annual review of Astronomy and Astrophysics* Vol. 30 (1992), p.543-574. DOI : [https://ui.adsabs.harvard.edu/link\\_gateway/1992ARA&A..30..543M/doi:10.1146/annurev.aa.30.090192.002551](https://ui.adsabs.harvard.edu/link_gateway/1992ARA&A..30..543M/doi:10.1146/annurev.aa.30.090192.002551).
- [53] J.J. MONAGHAN. « Simulating Free Surface Flows with SPH ». In : *Journal of Computational Physics* 110.2 (1994), p. 399-406. DOI : <https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1034>.
- [54] J.J. MONAGHAN. « Smoothed particle hydrodynamics ». en. In : *Reports on Progress in Physics* 68.8 (août 2005), p. 1703-1759. DOI : [10.1088/0034-4885/68/8/R01](https://doi.org/10.1088/0034-4885/68/8/R01).
- [55] J.J. MONAGHAN et al. « Artificial viscosity for particle methods ». en. In : *Applied Numerical Mathematics* 1.3 (mai 1985), p. 187-194. DOI : [10.1016/0168-9274\(85\)90015-7](https://doi.org/10.1016/0168-9274(85)90015-7).
- [56] M. NEUHAUSER. « Development of a coupled SPH-ALE/Finite Volume method for the simulation of transient flows in hydraulic machines ». 2014ECDL0045. Thèse de doct. 2014.

- [57] M. NEUHAUSER et al. « Coupling of the Meshless SPH-ALE Method with a Finite Volume Method ». en. In : *III International Conference on Particle-based Methods* (2013), p. 10.
- [58] F. NICOUD. « Unsteady flows modeling and computation ». en. In : (nov. 2007), p. 65.
- [59] J. NORDSTRÖM et al. « Dual Time-Stepping Using Second Derivatives ». en. In : *Journal of Scientific Computing* 81.2 (nov. 2019), p. 1050-1071. DOI : [10.1007/s10915-019-01047-5](https://doi.org/10.1007/s10915-019-01047-5).
- [60] G. OGER et al. « SPH accuracy improvement through the combination of a quasi Lagrangian shifting transport velocity and consistent ALE formalisms ». en. In : *Journal of Computational Physics* 313 (mai 2016), p. 76-98. DOI : [10.1016/j.jcp.2016.02.039](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.02.039).
- [61] S.A. PANDYA et al. « Implementation of preconditioned dual-time procedures in over-flow. » en. In : (2003), AIAA Paper 2003-0072. DOI : <https://doi.org/10.2514/6.2003-72>.
- [62] T.J. POINSOT et al. « Boundary Conditions for Direct Simulations of Compressible Viscous Flows ». en. In : *Journal of Computational Physics* 101.1 (juill. 1992), p. 104-129. DOI : [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(92\)90046-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(92)90046-2).
- [63] P. RAMACHANDRAN et al. « Dual-Time Smoothed Particle Hydrodynamics for Incompressible Fluid Simulation ». en. In : *arXiv:1904.00861 [physics]* (déc. 2019). arXiv: 1904.00861.
- [64] P.W. RANGLES et al. « Smoothed Particle Hydrodynamics: Some recent improvements and applications ». en. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 139.1-4 (déc. 1996), p. 375-408. DOI : [10.1016/S0045-7825\(96\)01090-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01090-0).
- [65] P. RASTELLI. « Advances in particle distribution for SPH numerical schemes: from explicit to implicit shifting techniques. » PhD thesis lead by Vacondio, R. and Marongiu, J.C. at universita di Parma, Italy 2022. Thèse de doct. 2022.
- [66] G.A. RENAUT. « Schémas d'ordre élevé pour la méthode SPH-ALE appliquée à des simulations sur machines hydrauliques ». 2015ECDL0053. Thèse de doct. 2015.
- [67] G.A. RENAUT et al. « Toward a higher order SPH-ALE method based on Moving Least Squares method ». en. In : *Proc of 9th SPHERIC Workshop* (2014), p. 8.
- [68] Y. REYES LÓPEZ et al. « Particle refinement for fluid flow simulations with SPH ». en. In : *19th international conference on computer methods in mechanics* (2011), p. 427-428.
- [69] Y. REYES LÓPEZ et al. « Dynamic particle refinement in SPH: application to free surface flow and non-cohesive soil simulations ». en. In : *Computational Mechanics* 51.5 (mai 2013), p. 731-741. DOI : [10.1007/s00466-012-0748-0](https://doi.org/10.1007/s00466-012-0748-0).
- [70] F. ROUZBAHANI et al. « A truly incompressible smoothed particle hydrodynamics based on artificial compressibility method ». en. In : *Computer Physics Communications* 210 (jan. 2017), p. 10-28. DOI : [10.1016/j.cpc.2016.09.008](https://doi.org/10.1016/j.cpc.2016.09.008).
- [71] D. SHEPARD. « A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data ». en. In : *Proceedings of the 1968 23rd ACM national conference on -*. Not Known : ACM Press, 1968, p. 517-524. DOI : [10.1145/800186.810616](https://doi.org/10.1145/800186.810616).
- [72] (Société Hydraulique de France) SHF. *Pumped storage powerplants: Challenges and opportunities*. Lyon (France), 2011.
- [73] K. SHIBATA et al. « The overlapping particle technique for multi-resolution simulation of particle methods ». en. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 325 (oct. 2017), p. 434-462. DOI : [10.1016/j.cma.2017.06.030](https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.06.030).



- [74] P.K. SWEBY. « High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws ». en. In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 21.5 (oct. 1984), p. 995-1011. DOI : [10.1137/0721062](https://doi.org/10.1137/0721062).
- [75] J.W. SWEGLE et al. « Smoothed Particle Hydrodynamics Stability Analysis ». In : *Journal of Computational Physics* 116.1 (1995), p. 123-134. DOI : <https://doi.org/10.1006/jcph.1995.1010>.
- [76] P.G. TAIT. « Report on some of the physical properties of fresh water and of sea water. » en. In : *Physical and Chemistry of the Voyage of H.M.S. Challenger* vol. 2 (mai 1888).
- [77] P.D. THOMAS et al. « Geometric Conservation Law and Its Application to Flow Computations on Moving Grids ». en. In : *AIAA Journal* 17.10 (oct. 1979), p. 1030-1037. DOI : [10.2514/3.61273](https://doi.org/10.2514/3.61273).
- [78] E. TORO. « Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction ». In : jan. 2009. DOI : [10.1007/b79761](https://doi.org/10.1007/b79761).
- [79] (United States Energy Information Administration) USEIA. *The 6th international energy outlook*. 2022.
- [80] R. VACONDIO et al. « Variable resolution for SPH: a dynamic particle coalescing and splitting scheme ». en. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 256 (avr. 2013), p. 132-148. DOI : [10.1016/j.cma.2012.12.014](https://doi.org/10.1016/j.cma.2012.12.014).
- [81] R. VACONDIO et al. « Grand challenges for Smoothed Particle Hydrodynamics numerical schemes ». en. In : *Computational Particle Mechanics* 8.3 (mai 2021), p. 575-588. DOI : [10.1007/s40571-020-00354-1](https://doi.org/10.1007/s40571-020-00354-1).
- [82] B. VAN LEER. « Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method ». en. In : *Journal of Computational Physics* 32.1 (juill. 1979), p. 101-136. DOI : [10.1016/0021-9991\(79\)90145-1](https://doi.org/10.1016/0021-9991(79)90145-1).
- [83] J.P. VILA. « On particle weighted methods and smooth particle hydrodynamics ». en. In : *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 09.02 (mars 1999), p. 161-209. DOI : [10.1142/S0218202599000117](https://doi.org/10.1142/S0218202599000117).
- [84] H. WENDLAND. « Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree ». en. In : *Advances in Computational Mathematics* 4.1 (déc. 1995), p. 389-396. DOI : [10.1007/BF02123482](https://doi.org/10.1007/BF02123482).
- [85] R. XU et al. « Accuracy and stability in incompressible SPH (ISPH) based on the projection method and a new approach ». en. In : *Journal of Computational Physics* 228.18 (oct. 2009), p. 6703-6725. DOI : [10.1016/j.jcp.2009.05.032](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.05.032).



## **AUTORISATION DE SOUTENANCE**

Vu les dispositions de l'arrêté du 25 mai 2016 modifié par l'arrêté du 26 août 2022,

Vu la demande du directeur de thèse

Monsieur S. AUBERT

et les rapports de

M. M. FIVEL  
Professeur - SIMAP - Grenoble

et de

M. D. LE TOUZE  
Professeur - LHEEA - Ecole centrale de Nantes

**Monsieur CHANEAC Joffrey**

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

**Ecole doctorale** Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique

Fait à Ecully, le 8 mars 2023

Pour le directeur de l'Ecole centrale de Lyon  
Le directeur de la Recherche

  
Christophe CORRE